INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ACTIVIDAD PARA EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES DENTRO DE LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO

Tesis que para obtener el Título de
Licenciado en Física y Matemáticas

Presenta:
Fátima Sandra Rubiales Sánchez

Director de Tesis:
M. en C. Jorge Gómez Arias

México, D.F., Octubre de 2009

ÍNDICE

RESUMEN

En el plano de la educación y la enseñanza influyen diversos factores teóricos propios de la misma disciplina, la manera abstracta de concebir la Matemática influye sobre la manera de enseñarla y aprenderla, rodeando a esta disciplina de un carácter axiomático y abstracto, y reduciendo el aprendizaje de los alumnos a la resolución de problemas algorítmicos y a la memorización mecánica de corto plazo.

En el plano social la entrada de gobiernos tecnócratas en México han reducido a la educación a una inversión al servicio de la producción, y se evalúa y certifica con base a Sistemas de Evaluación Internacionales.

Además en nuestro país la mayoría de la población no tiene acceso a niveles más altos de educación, y esto es notorio comparando la matrícula de los alumnos que hay en la Educación Básica con los que hay en la Educación Media Superior, la causa principal de esto se debe a factores económicos por parte de la familia y a la falta de infraestructura con la que se cuenta para los niveles medio y superior.

Aunado a lo anterior el porcentaje de reprobación aumenta considerablemente en el nivel medio superior, siendo una de las materias que más se reprueba matemáticas, como lo demuestran los últimos resultados de la prueba Enlace.

Dentro de este marco nuestra investigación está enfocada a proponer una actividad que tiene como finalidad mejorar el aprendizaje de los números racionales en alumnos de nivel medio superior. Para este fin se empleo como referente teórico y metodológico el Enfoque Histórico-Cultural.

Con base en el principio de la escuela Socio-Histórica de que: “Las funciones psicológicas humanas están culturalmente mediadas, se desarrollan históricamente y surgen de la actividad práctica”, decidimos elaborar una actividad que permitiera a los alumnos de nuevo ingreso del nivel medio superior aprender los números racionales de una manera significativa. Para iniciar a elaborar esta actividad debíamos determinar su zona de desarrollo real del alumno de nuevo ingreso del nivel medio superior, para eso nos basamos en los planes y programas de la SEP para la educación básica que se pueden encontrar en la página *http://basica.sep.gob.mx/seb2008/start.php*. Para realizar la Actividad utilizamos la *Teoría de la Actividad de Leontiev* que nos da la estructura para hacerla, y el concepto de herramienta semiótica para elaborar cada acción, por último para su aplicación e internalización en el alumno utilizamos el *Método de Formación por Etapas de las Acciones Mentales* de Galperin. Con base en lo anterior la Actividad se dividió en tres partes:

1. **¿Qué es una fracción? La parte y el todo.**
2. **Las fracciones y su significado.**
3. **Los Números Racionales como un Sistema: Geométrico y Numérico**

Y se aplicó la Actividad en el CBT No 2 de Cuautitlán a dos grupos de 1er año, debido al tiempo se decidió que sólo se aplicaría la Acción 1 de la Actividad. Observando que los alumnos utilizan para la solución de esta acción un pensamiento en complejos y pseudoconceptos.

CAPÍTULO: I

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

ANTECEDENTES

En el plano pedagógico el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se ve influenciado por concepciones que tienen tanto profesores como alumnos. Alba G Thompson dice que muchas personas consideran a las matemáticas como: "una disciplina caracterizada por la exactitud de sus resultados y por sus procedimientos infalibles y cuyos elementos básicos son operaciones aritméticas, procedimientos algebraicos, términos geométricos y teoremas"[1].

Esta manera de concebir las matemáticas influye sobre la manera de enseñar y aprenderlas, rodeando a esta disciplina de un carácter abstracto y axiomático y reduciendo el aprendizaje de los alumnos a resolver problemas y memorizar conceptos, desarrollándose el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de un sistema didáctico tradicional.

"Se entiende por sistema didáctico tradicional aquél en que el profesor tiene el rol principal en el proceso de enseñanza aprendizaje mientras que los estudiantes asumen una actitud pasiva. El aprendizaje sucede principalmente por repetición, no por descubrimiento, lo que conduce a un aprendizaje producto del énfasis en la mecanización del saber (esto no significa que el aprendizaje por repetición sea erróneo o inadecuado, sino que resulta insuficiente). Además, la didáctica empleada está determinada por el discurso de los libros de texto … En buena medida, estas situaciones se deben a que los profesores no tienen capacitación profesional en docencia (y mucho menos en didáctica de las matemáticas), lo cual provoca que su trabajo como profesores de matemáticas se guie casi exclusivamente por las experiencias vividas como estudiantes, su percepción de lo que significa ser un buen profesor, y lo que dicten los programas y libros de textos oficiales"[2].

Esto se corrobora en una investigación realizada por estudiantes de posgrado de la UNAM (Universidad Nacional Autónoma de México) en una preparatoria incorporada a la UAEM (Universidad Autónoma del Estado de México) en la materia de Álgebra.

> "*Por ejemplo al preguntarles qué actividades realizaban para aprender el álgebra dentro del aula los alumnos contestaron:*
> *Poner atención y realizar los ejercicios indicados por el maestro.*
> *Poner atención y tomar apuntes.*
> *Pongo atención y realizo los ejercicios*"[3].

Reducir el aprendizaje a este tipo de enseñanza también dificulta determinar qué aprendizajes han adquirido lo alumnos, Stodolsky nos dice que: "la conducta participativa tiene más probabilidades de ser un índice fiable del aprendizaje cuando la

[1] PAZ, Desiree. *Creencias de estudiantes de Bachillerato sobre conceptos de la enseñanza de las Matemáticas en el contexto de Resolución de Problemas.* p. 15
[2] MATA, Filiberto. *Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la geometría analítica: el caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van hiele*. p. 2
[3] CAMPOS, Miguel. *Construcción del conocimiento: En el proceso educativo*. p. 224

realización de tareas observables representa un signo de las prácticas y logros de los alumnos … y es probable que los signos de atención evidente estén menos ligados al aprendizaje en aquellas actividades que implican una recepción pasiva, por ejemplo cuando los niños [alumnos] escuchan al maestro dar la lección”[4].

En el plano social la entrada de gobiernos tecnócratas en México han reducido a la educación a una inversión al servicio de la producción y la productividad, las reformas educativas que se proponen plantean modificaciones al sistema escolar y no al productivo, se analiza el papel que desempeña el nivel de enseñanza en el mercado de trabajo, el empleo y el ingreso, y se evalúa y certifica a la educación con base a Sistemas de Evaluación Internacionales como La OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos):

“La OCDE pidió al gobierno de Felipe Calderón privatizar la educación media y superior con el argumento de que el modelo actual de financiamiento no es eficiente en términos de la distribución de su gasto, porque 84.4% de los fondos se canalizan al pago de los salarios de maestros. Inclusive, sugirió no aumentar el gasto educativo hasta que se eleve la eficiencia en el manejo de los recursos; de lo contrario, según el organismo, se corre el riesgo *'de que esa inversión sea un puro y simple desperdicio'*”[5].

Aunado a lo anterior uno de los problemas que enfrentan el sistema educativo mexicano es la reducción del número de alumnos que ingresan a un nuevo nivel educativo, esto es notorio en la Educación Básica y Educación Media Superior, por ejemplo: la población de alumnos que había en la secundaria en el 2007 correspondía a un 42.3% de la que había en la primaria, mientras que la población de alumnos en la preparatoria correspondía aún 27.1% de la que había en la primaria, como se puede comprobar en la siguiente tabla.

Matrícula escolar - nivel educativo - género - 2002-2006 - nacional

Distribución porcentual de la matrícula escolar según sexo para cada nivel educativo, ciclos escolares 2002/2003 a 2006/2007

Nivel educativo	2002/2003			2003/2004			2004/2005			2005/2006			2006/2007		
	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres
Educación básica	24 153 164	12 303 219	11 849 945	24 304 397	12 370 915	11 933 482	24 634 065	12 534 225	12 099 840	24 979 618	12 707 781	12 271 837	25 380 505	12 898 814	12 481 691
Preescolar	3 635 903	1 836 121	1 799 782	3 742 633	1 887 942	1 854 691	4 086 828	2 064 116	2 022 712	4 452 168	2 249 084	2 203 084	4 739 234	2 393 703	2 345 531
Primaria	14 857 191	7 604 635	7 252 556	14 781 327	7 564 891	7 216 436	14 652 879	7 503 336	7 149 543	14 548 194	7 452 791	7 095 403	14 585 804	7 466 936	7 118 868
Secundaria	5 660 070	2 862 463	2 797 607	5 780 437	2 918 082	2 862 355	5 894 358	2 966 773	2 927 585	5 979 256	3 005 906	2 973 350	6 055 467	3 038 175	3 017 292
Educación media superior	3 295 272	1 615 633	1 679 639	3 443 740	1 686 688	1 757 052	3 547 924	1 731 805	1 816 119	3 658 754	1 774 418	1 884 336	3 742 943	1 812 272	1 930 671
Profesional técnico	359 171	180 943	178 228	359 926	182 036	177 890	362 835	185 494	177 341	357 199	182 123	175 076	352 511	179 710	172 801

[4] CAMPOS, Miguel. *Op, cit,* p. 226
[5] AVILÉS, Karina. *La Jornada.* [en línea] Septiembre 2007. Disponible en la web en: http://www.jornada.unam.mx/2007/09/19/index.php?section=sociedad&article=046n1soc.

Bachillerato	2 936 101	1 434 690	1 501 411	3 083 814	1 504 652	1 579 162	3 185 089	1 546 311	1 638 778	3 301 555	1 592 295	1 709 260	3 390 432	1 632 562	1 757 870
Educación superior	2 236 791	1 126 297	1 110 494	2 322 781	1 162 283	1 160 498	2 384 858	1 186 417	1 198 441	2 446 726	1 217 204	1 229 522	2 528 664	1 257 064	1 271 600

NOTA: Los datos presentados se refieren al esquema general del Sistema Educativo Nacional (Servicios Educativos Escolarizados).
FUENTE: Para el ciclo escolar 2002/2003: SEP. Sistema Educativo de los Estados Unidos Mexicanos. Principales cifras. México, D.F. 2003. **INEGI.** *Mujeres y Hombres en México 2005. Novena edición.* Para los ciclos escolares 2003/2004-2006/2007: SEP. Sistema Educativo de los Estados Unidos Mexicanos. Principales cifras. México, D.F. (varios años) www.sep.gob.mx (12 de septiembre de 2008).

La causa de esto se debe a factores económicos por parte de la familia, como a la falta de infraestructura con la que se cuenta para los niveles medio y superior, dejando sin acceso a la educación a un amplio grupo de la población, principalmente de escasos recursos, además el porcentaje de reprobación aumenta considerablemente en la educación media superior, siendo una de las materias que más se reprueba matemáticas, como lo demuestran los resultados de la prueba enlace: “Casi la mitad de los estudiantes de nivel medio superior de nuestro país tienen un nivel de razonamiento y conocimientos insuficientes en matemáticas … El 46.6 % de los alumnos evaluados en matemáticas, tuvieron un resultado insuficiente, se limitan a hacer operaciones básicas, y sólo 3.4 % obtuvo calificación excelente”[6].

En este marco nuestra finalidad es la de proponer una actividad con base en el Enfoque Histórico-Cultural y la Teoría de la Actividad de Leontiev, que permita a los alumnos de nuevo ingreso del nivel medio superior aprender de manera significativa los números racionales. Para construir dicha actividad trabajamos con los siguientes conceptos del Enfoque Histórico-Cultural:

- La Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky
- La Teoría de la Actividad de Leontiev
- Herramientas Semióticas
- La Formación por Etapas de Galperin

JUSTIFICACIÓN

Como se ha menciono anteriormente, la cantidad de alumnos que reprueban aumenta considerablemente en el nivel Medio Superior como se observa en la siguiente tabla, siendo en el D.F. el 59.5 % y en el Edo. De México el 47.2%, donde las matemáticas es una de las materias que más reprueban en este nivel como se demostró en los últimos resultados de la prueba enlace (mencionada anteriormente).

El aprendizaje de los números racionales en el bachillerato es un tema visto en los primeros cursos de matemáticas para la utilización posterior de sus significados teóricos y operacionales en otras materias. Nuestro proyecto de investigación consistió en elaborar una actividad con base en el Enfoque Histórico-Cultural y la Teoría de la Actividad de Leontiev que contribuyera a mejorar de manera significativa el aprendizaje de los números racionales, para después aplicarla en instituciones del Edo. De México.

[6] LÓPEZ, Susana. *Noticieros Televisa.* [en línea] Agosto 2008. Disponible en la web en: http://www2.esmas.com/noticierostelevisa/008275/reprueban-matematicas-50-alumnos-preparatoria

PORCENTAJE DE ALUMNOS REPROBADOS POR ENTIDAD FEDERATIVA SEGÚN NIVEL EDUCATIVO Y SEXO 2002

Entidad federativa	Porcentaje de alumnos reprobados							
	Primaria		Secundaria		Profesional técnico		Bachillerato	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Estados Unidos Mexicanos	6.4	4.2	25	12.7	28.2	17.9	44.5	34.3
Aguascalientes	4.8	2.6	25.2	10.5	19.3	13.4	42.4	30.7
Baja California	4.9	3.1	24.9	13.7	30.2	20.7	40.2	31.7
Baja California Sur	4.3	3.1	19.5	10	5.4	2.3	49.1	36.3
Campeche	9.3	6.5	35.7	20.8	28.3	22.2	52.1	44.1
Coahuila de Zaragoza	3.2	1.7	28.1	12.8	16.9	7.7	49.5	40.5
Colima	5.1	3.5	19.7	8.8	37	14.1	46.7	36.9
Chiapas	10.8	9.2	14.7	9	36.1	30.2	31.5	26.5
Chihuahua	6.5	4.4	34.1	20.7	19.9	20.2	45.4	36.4
Distrito Federal	2.5	1.5	24.4	12.5	44.6	34	59.5	47.7
Durango	5.6	3.6	27.1	13.6	27.8	17.2	38.6	29.6
Guanajuato	7.1	4.1	25.5	12.9	26.5	15.4	46.3	34.2
Guerrero	10.8	7.8	22.2	11	25.5	24.3	42.5	34.4
Hidalgo	6.3	4.2	18.9	8.3	37.8	18	49.7	37.4
Jalisco	5	2.9	32.3	17.8	28.8	20.3	28.2	20.6
México	4.4	2.7	27.9	13.3	24.8	14.3	47.2	32.6
Michoacán de Ocampo	8.1	4.9	28.5	13.4	27.4	22.7	45.2	34.4
Morelos	3.9	2.4	21.2	8.6	40.2	25.8	47.5	34.4
Nayarit	4	2.7	19.2	8.7	26.3	0.4	50.7	38.1
Nuevo León	3	1.7	22.5	10.5	15.9	8.9	52.2	45.4
Oaxaca	11.7	8.7	19.6	9.3	38.6	28.4	44.8	40.5
Puebla	7.3	4.8	19.5	9.9	23.1	9.1	31.2	20.9
Querétaro de Arteaga	6.6	3.9	30.9	14.6	32.2	26.5	46.6	35.9
Quintana Roo	7.3	5.1	24.7	12.1	38.9	32.1	33.9	28.4
San Luis Potosí	7.1	4.2	19.3	8.9	26.7	8.4	47	37.1
Sinaloa	7.6	5	33.3	17.3	17	11.9	30.9	24.8
Sonora	4	2.3	22.5	11.6	26.2	11.6	43.1	34.1
Tabasco	7.1	4.5	23.1	11.5	28.5	12.8	49.1	38.7
Tamaulipas	4.3	2.5	26.2	12.5	31.6	16.4	40.1	28
Tlaxcala	3.3	1.9	25.6	10.9	26.6	9.1	42.5	28.5
Veracruz	8.8	6.1	23.6	13.5	36.8	28.9	43.5	33.9
Yucatán	9.6	6.9	33.6	18.3	4	6.6	51.9	41.9
Zacatecas	4.9	2.7	20.3	8.8	28.1	7.7	41.9	30.7

1 Datos estimados.
FUENTE: SEP, DGPPP. Subdirección de Análisis Estadístico y Presupuestal, 2003.

Para elaborar dicha actividad fue necesario en un principio entender el Enfoque Histórico-Cultural, y de ahí partir del supuesto de que el desarrollo psíquico se origina conforme transcurre nuestro desarrollo ontogenético dentro de la sociedad, cuyo proceso se explica en la *Ley genética general del desarrollo*; que nos dice que el origen de las funciones psíquicas superiores, conceptos, signos y demás entidades psicológicas surgen en el medio social por medio de una actividad externa que se interioriza, y es por eso la importancia de la actividad.

Para elaborar la Actividad, consideramos La *Teoría de la Actividad de Leontiev* ya que nos da la estructura necesaria para construirla. Esta teoría nos dice que una actividad se origina para satisfacer una necesidad, y es un conjunto de acciones donde cada una de ellas está orientada a una meta específica, las operaciones son los métodos para realizar las acciones y dependerán de las herramientas semióticas del sujeto y del contexto y situación en que se utilicen. Toda actividad externa (que en principio es social) se interioriza y con eso sus acciones y operaciones, este proceso de interiorización es explicado por el *Método de Formación por Etapas de las Acciones Mentales* de Galperin que está constituido por las siguientes etapas:

1. Formación de la base orientadora de la nueva acción.
2. Formación del aspecto material de esta acción.
3. Formación de su aspecto verbal externo.
4. Formación de esta acción como un acto mental a través del lenguaje interiorizado.

Existen distintos tipos de actividades pero nuestro interés es la Actividad Gnósica, que tiene como fin el conocimiento y sólo se puede adquirir a través de la Enseñanza, ya que la enseñanza tiene como finalidad organizar el conocimiento de tal manera que se pueda convertir en desarrollo psíquico.

Para organizar la enseñanza es fundamental conocer el concepto de La *Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)*. La ZDP se define como la distancia entre el nivel de desarrollo actual del sujeto tal y como puede ser determinado a partir de la resolución de problemas y el nivel más elevado de desarrollo potencial tal y como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía de un adulto. La finalidad de la enseñanza es orientar y organizar al aprendizaje dentro de esta ZDP para determinar el nivel cognoscitivo de las acciones, el tipo de herramientas semióticas que son adecuadas poner en marcha en las operaciones, y determinar la orientación que debe dar el profesor en el desarrollo de la actividad, teniendo siempre en cuenta que lo que se pretende con los cursos de aritmética es que el alumno no solamente memorice algoritmos o fórmulas sino que den significado a los diversos algoritmos de las operaciones básicas y enriquezcan su pensamiento aritmético.

OBJETIVO Y SUPUESTOS DE INVESTIGACIÓN

Nuestro objetivo es el de elaborar una actividad con base en el Enfoque Histórico Cultural y la Teoría de la Actividad de Leontiev, para el aprendizaje de los números racionales que permita al alumno aprenderlos de manera significativa y a nosotros mejorar su enseñanza.

Para eso partimos de los siguientes supuestos:

- El desarrollo psíquico se forma dentro del entorno socio-cultural

- Las funciones psíquicas superiores son producto histórico de la práctica social, tanto en la especie humana (filogenéticamente) como en cada individuo (ontogenéticamente).

- La Zona de de Desarrollo Próximo nos ayuda a planificar la enseñanza, de tal manera que el alumno pueda aprender nuevos conocimientos a partir de sus capacidades actuales y potenciales.

- La Teoría de la Actividad nos da una estructura para orientar eficazmente el aprendizaje de un nuevo conocimiento en el alumno.

- La utilización de diversas modalidades de representaciones semióticas dentro de las acciones ayuda al alumno a una mejor comprensión de los conceptos.

- La Teoría de Formación por Etapas de Galperin nos guía para la aplicación de la Actividad.

ESQUEMA DE TRABAJO

1. Psicología Evolutiva y Pedagógica
   1.1. Objeto de Investigación y Ramas de la Psicología Evolutiva y Pedagógica

2. Desarrollo Psíquico
   2.1. Funciones Psíquicas Superiores
   2.2. Herramientas Semióticas
   2.3. Conceptos

3. Actividad
   3.1. Niveles de Análisis dentro de la Teoría de la Actividad
   3.2. Método de Formación por Etapas de las Acciones Mentales de Galperin

4. Aprendizaje
   4.1. Tipos de Aprendizaje

5. Enseñanza
   5.1. Zona de Desarrollo Próximo
   5.2. Estudio

6. Aplicación del Enfoque Histórico-Cultural en la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas

CAPÍTULO: II

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

MARCO TEÓRICO

1. PSICOLOGÍA EVOLUTIVA Y PEDAGÓGICA

El dilema de la psicología estriba en tratar como una ciencia natural a un objeto que crea la historia (Ernst Boesch)

Un problema que enfrentó la psicología en sus inicios era su aislamiento intelectual, esto la había llevado a considerar a la cultura y a la sociedad como variables que se incorporaban a determinados modelos del funcionamiento individual, por lo que los fenómenos socioculturales eran explicados a través de procesos psicológicos, y de manera inversa los sociólogos consideraban que los procesos psicológicos derivan de los sociológicos.

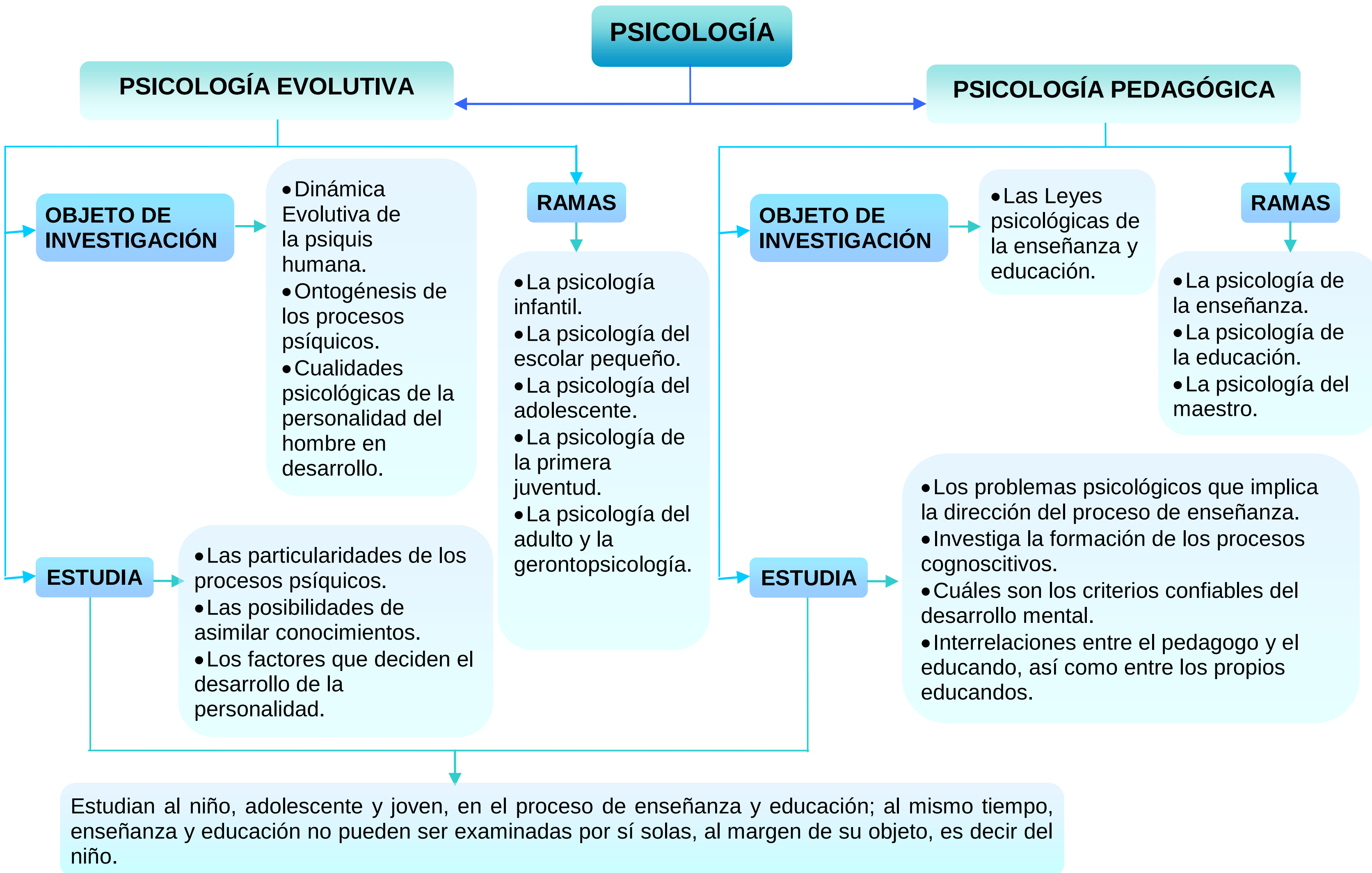
Este reduccionismo había influido en la construcción de una teoría que permitirá entender de manera holística (global) la naturaleza humana, por ejemplo en el estudio del desarrollo psíquico, habían surgido corrientes como la biogenética y la sociogenética, donde la primera de ellas consideraba que el factor que había de tomarse como base del desarrollo del niño era lo biológico y la segunda consideraba que era lo social, centrando sus investigaciones en aspectos como la herencia o el medio.

Ante este dilema, uno de los primeros en denotar la importancia de la cultura en el comportamiento humano es Wilhelm Wundt, el padre de la psicología experimental: "…La conciencia individual es completamente incapaz de proporcionar un historia del desarrollo del pensamiento humano porque está condicionada por una historia anterior de la que ella misma no puede darnos conciencia alguna […] La psicología debe estar formada por dos ciencias; la psicología experimental y la psicología de los pueblos, la primera tiene como tarea el estudio de elementos de la conciencia humana y de las leyes universales de acuerdo con las cuales se combinan tales elementos, y la segunda tiene como tarea el estudio de las funciones psicológicas superiores"[7]. Pero dicha propuesta fue rechazada, marginando el papel de la cultura en la formación del comportamiento humano y enfatizando el papel de la psicología experimental.

Sin embargo dentro del entorno cultural e intelectual más importante que ha tenido Rusia como consecuencia de su Revolución, surge la escuela Socio-Histórica cuyos principales representantes (Vygotsky, Leontiev, Luria), enfatizan el papel que tiene la cultura para la formación del comportamiento humano: "Las funciones psicológicas humanas difieren de los procesos psicológicos de otros animales por que están culturalmente mediados, se desarrollan históricamente y surgen de la actividad práctica"[8], basándose en estos principios se origina La Psicología Evolutiva y Pedagógica que estudia las leyes que rigen el desarrollo psíquico del niño y la leyes psicológicas básicas de la enseñanza y la educación, unificando el aspecto biológico y social, y cuyos principios tomaremos para la fundamentación de este trabajo.

[7] C. MOLL, Luis. *Vygotsky y la Educación*. p.109-110
[8] *Ibíd*. p. 111

1.1 OBJETO DE INVESTIGACIÓN Y RAMAS DE LA PSICOLOGÍA EVOLUTIVA Y PEDAGÓGICA



2. DESARROLLO PSÍQUICO

Uno de los aspectos importantes de esta teoría es la forma en que concibe el desarrollo psíquico ya que a diferencia de otras que lo reducen sólo a aspectos fisiológicos o conductuales, esta teoría considera que desde el momento de nacer nuestro organismo esta hominizado es decir nuestra estructura biológica está formada, pero aún no está humanizado para eso es necesario que se internalice la cultura, los signos y las relaciones sociales conforme va transcurriendo nuestro desarrollo ontogenético dentro de la sociedad, diferenciando el proceso de formación del desarrollo psíquico del humano con respecto al de los demás animales: “El mecanismo fundamental de desarrollo de la psiquis de los animales es la transmisión de una experiencia hereditaria biológicamente consolidada ... Lo específico de las funciones psíquicas del hombre reside en que éstas se desarrollan en el proceso durante el cual el niño asimila la experiencia histórico social”[9].

2.1 FUNCIONES PSÍQUICAS SUPERIORES

En el proceso de desarrollo psíquico del niño hay que distinguir entre dos líneas, la línea de desarrollo natural y la línea de desarrollo social. La línea de desarrollo natural se refiere a las funciones elementales con las que nace el niño, tales como la capacidad de percibir contrastes y el movimiento, la capacidad de una memoria eidética y la respuesta de excitación entre otras, estas funciones se transformarán debido al contexto sociocultural para dar origen a funciones psicológicas superiores, tales como una memoria voluntaria, atención selectiva y un pensamiento más complejo.

Existen cuatro criterios principales para distinguir entre las funciones psicológicas elementales y superiores:

“La característica fundamental de las funciones elementales es que se encuentran total y directamente determinadas por la estimulación ambiental. La característica central de las funciones superiores es la estimulación autogenerada, es decir, la creación y uso de estímulos artificiales que se convierten en las causas inmediatas del comportamiento.

El segundo criterio que diferencia a las funciones psicológicas superiores de las elementales es su intelectualización o realización consciente.

El tercer criterio que caracteriza a las funciones psicológicas superiores es su origen y naturaleza social.

El cuarto criterio es la mediación… El control voluntario, la realización consciente y la naturaleza social de los procesos psicológicos superiores presupone la existencia de herramientas psicológicas o signos, que pueden ser utilizados para controlar la actividad propia y la de los demás”[10].

---

[9] PETROVSKI, A. *Psicología Evolutiva y Pedagógica*. p. 23

[10] WERTSCH, James. *Vygotsky y la formación social de la mente.* p. 42-44

Las funciones psicológicas superiores se originan en el medio social, dentro de una actividad mediatizada por herramientas semióticas, en el desarrollo de esta actividad estas herramientas se internalizan pasando a un plano psicológico, formando y transformando así a las funciones psicológicas. Este proceso de formación de las funciones psicológicas superiores es explicado en la *Ley genética general del desarrollo*:

"Cualquier función, presente en el desarrollo cultural del niño, aparece dos veces en dos planos distintos. En primer lugar aparece en el plano social, para hacerlo, luego, en el plano psicológico. En principio, aparece entre las personas como una categoría interpsicológica, para luego aparecer como una categoría intrapsicológica […] Las relaciones sociales o relaciones entre las personas subyacen genéticamente a todas las funciones superiores y sus relaciones"[11]. Por ejemplo, los niños que están aprendiendo a hablar primero reciben una palabra nueva para ellos, la dicen en voz alta varias veces hasta que la van asimilando sin necesidad de repetirla en voz alta.

Cabe mencionar que esta *Ley genética general del desarrollo* no sólo explica el proceso de formación de las funciones psicológicas superiores, sino también el proceso de internalización de la cultura, los signos y las relaciones sociales.

La función que desempeñan las funciones psicológicas superiores dentro del desarrollo psíquico es muy importante ya que ellas contribuyen a la formación de entidades psicológicas como aptitudes y conceptos dentro del plano interno del sujeto.

2.2 HERRAMIENTAS SEMIÓTICAS

Ni la mano desarmada ni el intelecto abandonado a si mismo son de mucho valor: las cosas se llevan a cabo con medios e instrumentos (Vygotsky y Luria).

El hombre además de crear instrumentos para modificar la naturaleza, crea herramientas semióticas (***el lenguaje***: sistemas para contar, escritos, esquemas diagramas, todo tipo de signos convencionales) que son estímulos creados por la sociedad para influir psicológicamente sobre la conducta de los demás y luego sobre la propia como lo explica *Ley genética general del desarrollo*. Estas herramientas semióticas son signos que se originaron en el desarrollo filogenético de la sociedad para mediatizar las transformaciones sobre su conducta y sobre la de los demás debido a las transformaciones que el hombre estaba haciendo en la naturaleza y para tratar de explicar el medio social en el que se encontraba. El desarrollo histórico operó sobre ellas para caracterizarlas en cada sociedad y el significado de estas herramientas que en un principio dependía del contexto espacio-temporal en el que se originaron, pasó luego a ser menos dependientes de dicho contexto:

"La capacidad filogenética especial del homo sapiens es la mediación cultural, esto es la capacidad de obrar de manera indirecta en el mundo a través de artefactos a la vez materiales e ideales, y de transmitir, con sentido adaptativo, a las generaciones siguientes las modificaciones que han resultado ventajosas […] Si bien debe sostenerse

[11] WERTSCH, James. *Op, cit,* p. 77

que la mediación cultural es un hecho universal de nuestra especie, resulta claro en cambio, que el desarrollo de las formas específicas de mediación no lo es, no todas las culturas han desarrollado formas de mediación como la lectura, la escritura y el cálculo"[12]

Existe una mutualidad entre los instrumentos mediacionales y las operaciones que realiza el individuo con ellas "Por un lado los instrumentos culturales no pueden desempeñar un rol en la acción humana si no son apropiados por los individuos concretos que actúan en contextos únicos. Por otro lado no podemos actuar como seres humanos sin invocar los instrumentos culturales (Wertsch)"[13].

Dentro de las herramientas semióticas hay que tener en cuenta dos aspectos de ellas: su representación semiótica y su representación mental, donde cada una de ellas es inseparable la una de la otra y las define de la siguiente manera Duval:

"Las representaciones mentales cubren el conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo pueda tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento […] El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación. Si se llama sémiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y noésis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noésis es inseparable de la sémiosis"[14].

La importancia de las representaciones en la matemática es que permite dar un significado a los objetos matemáticos: "Al representar se intenta construir significados, que permiten enlazar el pensamiento operativo (operacional, procedimental) y el estructural (figurativo, conceptual)"[15].

Para que el individuo pueda internalizar nuevos signos a lo largo de su desarrollo ontogenético, las herramientas semióticas juegan una doble función, primero funcionan como el medio para internalizar otros signos y luego estos signos que han sido interiorizados funcionan como herramientas semióticas.

El lenguaje es la herramienta semiótica más importante y que más contribuye en el desarrollo ontogenético del hombre, debido a que el hombre no usa signos para representar a un objeto ni se comunica refiriéndose directamente a él sino a lo que significa para él. Así un concepto tan "preciso" como "axioma" fue entendido por los griegos de diversas maneras (postulado que no necesita demostración o hipótesis) según la corriente filosófica a que pertenecían; análogamente "reloj" tiene significados distintos para un niño (juguete, por ejemplo) que para un adulto (instrumento de

[12] C. MOLL, Luis. *Op, cit,* p.113-114
[13] CASTORINA, José A. *Piaget - Vygotsky Contribuciones para replantear el debate.* p. 27
[14] PÁEZ, Rosa. *Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite.* p.13-14
[15] CORTÉS, José Carlos. "Ambiente Informático Interactivo para el aprendizaje de las cónicas*", Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (2005). p.3

medición). Para un indígena prehispánico “pluma de ave” significaba moneda mientras que para un español, adorno exótico.

2.3 CONCEPTOS

El lenguaje está constituido por conceptos que pertenecen a la experiencia y al conocimiento de la humanidad y al ser una herramienta semiótica realizan una doble función en el desarrollo psíquico del hombre, para la organización de los procesos del pensamiento. “La interacción de los individuos con los objetos del mundo está orientada por las palabras que representan categorías culturales y se convierten en instrumentos para formar los conceptos. De esta forma la palabra funciona primero en su papel de medio y luego en el del símbolo del concepto”[16].

El proceso mediante el cual el concepto se forma en el ser humano había sido investigado por dos medios; a través de las palabras o por el objeto material, sin embargo para estudiar el proceso de formación del concepto es necesario tener en cuenta el aspecto material a partir del cual se elabora el concepto y la palabra con cuya ayuda se forma, como lo menciona Vygotsky: “El concepto se encuentra siempre en el proceso vivo y más o menos complejo del pensamiento, realizando alguna función de comunicación, o de significado, compresión o resolución de problemas […] Por consiguiente, la vieja idea según la cual el concepto surge por mera asociación gracias al fortalecimiento de las conexiones asociativas que comprenden atributos comunes a un conjunto de objetos y al debilitamiento de las asociaciones correspondientes a los rasgos en los cuales difieren de esos objetos, no ha encontrado confirmación experimental […] Los experimentos de Ach demuestran que el proceso de formación de conceptos tienen siempre carácter productivo y no reproductivo que el concepto surge y se forma a lo largo de una complicada operación dirigida a la resolución de una determinada tarea y que la sola presencia de condiciones externas y de una vinculación mecánica entre la palabra y los objetos es insuficiente para su aparición”[17].

Vygotsky realizó un estudio genético del significado de la palabra, ya que observó que los niños utilizan las palabras antes de entender su significado. “En los estadios tempranos los niños piensan del modo en que perciben y recuerdan, en los estadios posteriores perciben y recuerdan del modo en que piensan”[18].

Él propuso la siguiente progresión ontogenética en los conceptos de un niño:

“Compilaciones no organizadas [Pensamiento sincrético]: Los niños en este estadio utilizan una imagen sincrética, inestable, difusa, que reúne a los objetos. Los criterios usados en la selección de los objetos son a menudo subjetivos.

Pensamiento en complejos: Las generalizaciones creadas con la ayuda de este modo de pensamiento son complejos de objetos o cosas complejas y variadas que ya no se relacionan con los vínculos o impresiones subjetivas del niño, sino con conexiones objetivas que existen entre los objetos. Pero en lugar de ser el sujeto el que

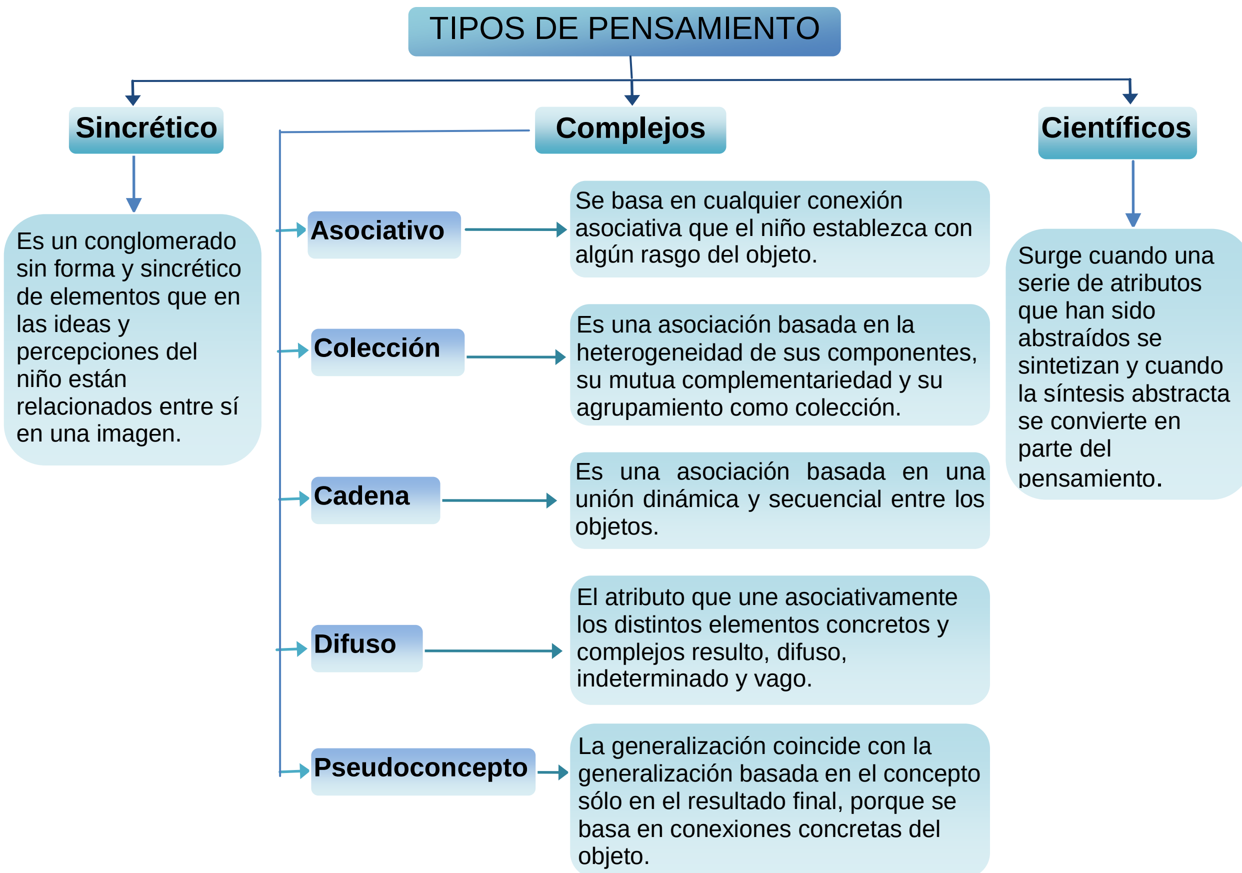
---

[16] CASTORINA, José A. *Op, cit,* p. 31-32
[17] VYGOTSKY L. *Obras escogidas II*. p.121-125
[18] C. MOLL, Luis. *Op, cit,* p. 63

utilice los signos para estructurar el contexto, son los signos del contexto los que estructuran la actividad del sujeto.

Conceptos genuinos: En esta categoría se distinguen entre conceptos científicos o genuinos, y los conceptos espontáneos o cotidianos […] En el caso de los conceptos espontáneos la atención del niño gira alrededor del objeto representado y no del acto de pensamiento que lo capta. Los conceptos científicos, que se relacionan de un modo muy diferente con el objeto, están mediatizados por otros conceptos gracias a un sistema jerárquico interno de interrelaciones.

Vygotsky desarrolló la noción de pseudoconcepto al analizar la emergencia de estos dos tipos de relaciones entre signos dados y su contexto. Un pseudoconcepto es el constructo que marca la transición de los complejos a los conceptos. Es una noción de transición porque la relación entre el signo y la realidad no lingüística se parece a la de los conceptos genuinos, pero la relación entre signos y otros signos es diferente”[19].



Es importante destacar dentro de la formación de los conceptos científicos la “*Ley o principio de equivalencia de conceptos*”, ya que esta ley explica que un concepto no sólo se forma unidireccionalmente, sino que en el transcurso del desarrollo ontogenético un mismo concepto puede ser formado tomando otras direcciones:

[19] WERTSCH, James. *Op, cit,* p. 113-119

“El análisis de la evolución de los conceptos implica un análisis de la evolución de las estructuras de generalización y la relaciones de comunalidad establecidas en cada etapa del desarrollo conceptual del niño. Las relaciones de generalidad implican ordenamientos jerárquicos entre conceptos según las relaciones de un sistema.

La posibilidad de establecer relaciones de comunalidad otorga un nuevo indicador de desarrollo, la *ley o principio de equivalencia de conceptos* dice que cualquier concepto puede ser designado con ayuda de otros conceptos mediante una cantidad innumerable de procedimientos,…, cada estructura de generalización determina la posibilidad de la equivalencia de conceptos en su círculo (específica para cada etapa del desarrollo)”[20].

Para poder establecer estas relaciones de comunalidad es necesario tener en cuenta que para la comprensión de un concepto es necesario que al menos se manejen dos registros de representación como lo menciona Duval, donde para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las siguientes tres actividades cognitivas:

1. “La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.

2. El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

3. La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa del registro de partida”[21].

Hay que tener en cuenta que una representación siempre será parcial con respecto a lo que representa, y que en cada registro son distintos los aspectos que se representan, la importancia de que el alumno trabaje con diferentes tipos de representación, es que si se le da una sola representación este puede confundirla con el objeto matemático, además que la utilización de diferentes representaciones le permitirán después pasar más fácilmente a otros registros de representación.

Al trabajar con distintas representaciones, en cada una de ellas son distintos los aspectos que se representan del concepto, el alumno no debe de memorizar dichos aspectos sino aprender a utilizarlos al resolver alguna tarea (acción), ya que esto permite que el alumno comprenda mejor dicho concepto y como se mencionó anteriormente “formarlo”. Autores como Sierpinska consideran que algunos elementos indicativos para la comprensión de un concepto matemático son los siguientes:

- “Conocer y utilizar correctamente la simbología con que se le representa al concepto.

[20] BAQUERO, Ricardo. *Vygotsky y el aprendizaje escolar.* p. 131-132
[21] PÁEZ, Rosa. *Op., cit,* p.14

- Interpretar correctamente los símbolos utilizados en la definición del concepto.
- Ser capaz de identificar ejemplos de su medio.
- Conocer sus propiedades invariantes.
- Reconocerlo en diversos contextos.
- Poder darse cuenta de sus relaciones con otros conceptos.
- Poder dar ejemplos y contraejemplos y fundamentar por qué estos pertenecen o no a la extensión de conceptos.
- Utilizar definiciones equivalentes.
- Aplicarlo en la resolución de problemas"[22].

3. ACTIVIDAD

"[La actividad] es la unidad de vida molar, no aditiva, para el sujeto material corpóreo. En un sentido más preciso (es decir a nivel psicológico) es la unidad de vida mediatizada por el reflejo mental. La función real de esta unidad es orientar al sujeto en el mundo de los objetos. En otras palabras, la actividad no es una reacción o agregado de reacciones, sino un sistema con su propia estructura, con sus propias transformaciones internas y su propio desarrollo (Leontiev)"[23].

Como se ha mencionado para que el ser humano tenga un desarrollo psíquico es necesario que internalice la cultura, para eso la sociedad crea una estructura sistematizada que oriente su proceso de internalización, originando así la actividad. En este proceso de internalización la actividad que tiene su origen en la sociedad pasa de ser una actividad exterior, a una actividad interna del sujeto, formando la actividad externa e interna una unidad, esto origina que las funciones elementales se transformen en funciones superiores debido a la actividad psíquica que en el transcurso del desarrollo ontogenético se va volviendo más compleja. "La actividad externa tiene un carácter práctico que gradualmente se interioriza adquiriendo la forma de actividad interna, ideal (Obukhova) […] La actividad exterior-práctica, y la interior-psíquica expresan su similitud al tener una estructura igual, ya que en ambas se distinguen la actividad propiamente dicha, las acciones y las operaciones. Esta interrelación de la estructura de la actividad externa y de la actividad psíquica hace posibles sus transiciones y transformaciones mutuas; la actividad interna incluye permanentemente algunas acciones y operaciones externas, y la desarrollada actividad práctica exterior, las acciones y las operaciones internas (Leontiev)"[24].

3.1 NIVELES DE ANÁLISIS DENTRO DE LA TEORÍA DE LA ACTIVIDAD

Leontiev propone los siguientes tres niveles de análisis para el estudio de la Teoría de la Actividad:

"En el primer nivel están las actividades, que representan la motivación general que guía el comportamiento en el ambiente social y cultural del individuo. Las

[22] DOLORES Flores, Crisológo. *Investigaciones en Matemática Educativa II. CINVESTAV.* p. 259
[23] WERTSCH, James. *Op, cit*, p. 210
[24] CHÁVEZ, Silvia. *Revista Caminos abiertos 2008*. [en línea] Octubre 2008. Disponible en la Web en: http://caminosabiertos2008.blogspot.com/2008/10/la-teora-de-la-actividad-en-la-enseanza.html

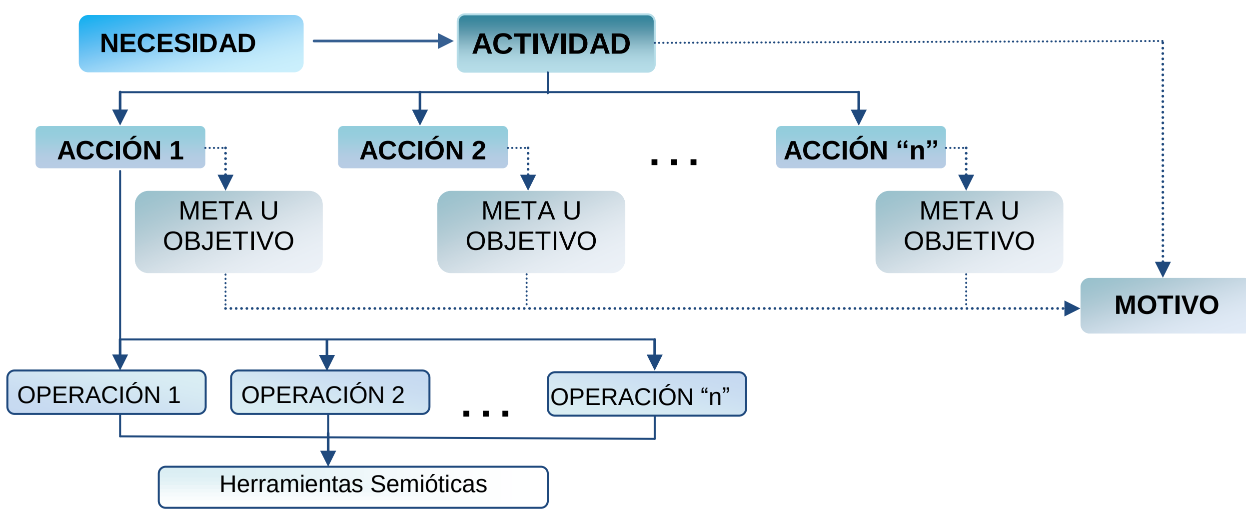
actividades tienen un motivo que es de orden social cultural e histórico. Las actividades cumplen una función y serían las mismas para las distintas personas.

En el segundo nivel lo representa las acciones. Sería la concreción de la actividad hacia metas específicas, conscientes e intencionales. Las acciones también cumplen una función y serían aplicables a todos. En las acciones podemos distinguir un doble aspecto:

a) El significado de las acciones y que tiene que ver con la conciencia o con el nivel cognoscitivo de las acciones.

b) El sentido de las acciones, que relaciona las acciones específicas con la personalidad del individuo.

El tercer nivel de concreción lo representan las operaciones que se sitúan al nivel de las estructuras y es de carácter psicológico, ligado a las condiciones en las que se realiza, ligado a las situaciones concretas, a los instrumentos particulares, a contextos específicos; podrían conceptualizarse como las estrategias de acción […] Las operaciones son específicas de cada uno y dependen de los instrumentos que se utilicen […] Todos los niños van a la escuela, todos aprender a leer, escribir y calcular pero las <herramientas> que utilizan, los instrumentos mediadores que ponen en marcha son distintos y por lo tanto lo son las operaciones o estrategias de acción que tales instrumentos permiten”[25].



3.2 Método de Formación por Etapas de las Acciones Mentales de Galperin

Para explicar el proceso de interiorización mediante el cual las acciones pasan de un plano social a uno psicológico Galperin formuló el Método de Formación por Etapas de las Acciones Mentales que está constituido por las siguientes etapas:

1. Formación de la base orientadora de la nueva acción.
2. Formación del aspecto material de esta acción.

[25] GARCÍA, Jesús. *Manual de Dificultades de Aprendizaje*. p. 119-120

3. Formación de su aspecto verbal externo.
4. Formación de esta acción como un acto mental a través del lenguaje interiorizado.

"La formación de la base orientadora de la nueva acción requiere de un proceso de introducción y contextualización de la nueva tarea, se dan las instrucciones necesarias para realizarla, se conforma la representación anticipada de la tarea y se establece el sistema de orientadores, todo ello con el adecuado planteamiento de objetivos (En esta etapa se cumplen los tres tipos de operaciones que forman parte de la acción, éstas son las orientadoras, las ejecutoras y las de control).

Más adelante, la formación del aspecto material de esta acción se conforma por la presentación del material o con una representación condicional que permita la reproducción de las relaciones esenciales de las cosas, además, el análisis de las acciones mentales previas que permita conocer las habilidades ya adquiridas. En esta etapa, el alumno propiamente participa en el cumplimiento de la tarea, esto lo realiza haciendo uso de las operaciones necesarias. En esta etapa el alumno asimila el contenido de la acción, mientras que se espera que el profesor realice un control objetivo de la adecuada consecución de cada operación que conforma la acción, ya sea a partir de su orientación directa o por medio de algún apoyo de material externo.

Posteriormente, la formación de su aspecto verbal externo, éste se da una vez que se ha liberado de la "inmediatez" objetal. Entonces ya es posible pasar al plano verbal externo en el que se forma un tipo de representación, el significado toma lugar. Cabe mencionar que en esta etapa la acción pasa por la generalización, pero aun no es automatizada ni reducida y se producen tres cambios esenciales:

1. La acción verbal se estructura no sólo como un reflejo real de la acción realizada con el objeto, sino también como una comunicación verbal de la misma, ya sea a nivel social o personal.

2. El concepto se constituye en la base de la acción, eliminando de esta forma las limitantes que el objeto presenta.

3. Una vez asimilada la forma verbal, se reduce como en una "fórmula". Así, se hace más consciente sin la necesidad de ejecutar la tarea.

En esta etapa, se observa que el habla se convierte en la portadora de todo el proceso, ya que no sólo implica la comprensión de las palabras empleadas, sino además estas palabras llevan el contenido de la tarea y de la acción.

Finalmente, la formación de esta acción como un acto mental conlleva que la tarea de comunicación es substituida por el habla para sí, suscitando de este modo la reflexión (Galperin). En esta etapa se tiende a reducir el aspecto verbal de la fórmula; además, la idea está compuesta por diversas modalidades. También se observa el carácter de automatización, el cual se manifiesta solamente en el producto. Esto sucede porque el proceso es inaccesible a la observación al ser parte de la conciencia y por ser parte del dominio propiamente mental en el que el producto se da en la práctica”[26]

Podemos concluir que una actividad es un conjunto de procesos que originan una actitud activa en el sujeto para satisfacer una necesidad que se vuelve objetiva a través de un motivo, este motivo orientara a las acciones, donde una acción es un proceso de esta actividad orientado a una meta especifica, los métodos para realizar las acciones se llamaran operaciones y dependerán de las herramientas semióticas del sujeto y del contexto y situación en que se utilicen (juego, trabajo o instrucción), como lo ejemplifica una investigación hecha por Wertsch en la zona rural de Brasil:

“Mi colegas y yo llevamos una investigación en el medio rural de Brasil en el cual examinamos parejas de adulto-niño realizando la tarea de hacer una copia de corral de granja según el modelo… El niño, en cada una de las parejas tenía seis años … En la mitad de las parejas, el adulto era la madre del niño y, en la otra mitad, un profesor … Las madres brasileñas organizaban un funcionamiento interpsicológico tal que asumían gran parte de la responsabilidad en la ejecución de los pasos estratégicos en la acción orientada hacia un objetivo … Por otro lado la organización del funcionamiento interpsicológico de los profesores era tal que el grueso de la ejecución de las tarea orientada hacia un objetivo era dada a los alumnos … Las madres interpretaron su funcionamiento cognitivo conjunto en términos de un contexto situacional de actividad laboral, mientras que los profesores lo interpretaron en términos de un contexto situacional de actividad de instrucción”[27].

4. APRENDIZAJE

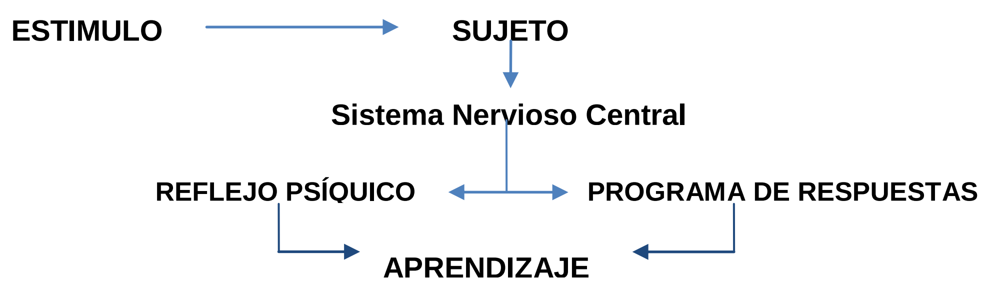
A diferencia de otras teorías que delimitan al aprendizaje al desarrollo o a una acumulación de reacciones. La Teoría Socio-Histórica toma aspectos de la Teoría de Pavlov para formar una simbiosis entre lo fisiológico y lo social.

En el aprendizaje participa un proceso de interiorización llamado Reflejo Psíquico: “que son las propiedades del objeto que influyen sobre el animal reflejándose en ciertos procesos nerviosos sobre el organismo”[28]. Este proceso ocurre tanto en los animales como en los seres humanos, pero en los animales sólo se reflejan las propiedades del objeto que influyen sobre los órganos de sus sentidos y su programa de respuesta es automático dependiendo de sus necesidades biológicas, mientras que en él hombre se reflejan las propiedades objetivas de los objetos, debido a que caen en el plano de la conciencia y su programa de respuestas son actos consientes con una finalidad, dirigidos por necesidades sociales y regulados por la práctica social, es decir: “[...] En las etapas superiores del desarrollo el mundo exterior sigue actuando del mismo modo que había actuado anteriormente, es decir, a través de de los órganos de los sentidos; por consiguiente las acciones psicológicas son activadas como antes por estímulos que vienen del exterior, pero las influencias recaen ahora en un terreno distinto … El terreno

[26] CHÁVEZ, Silvia. *Revista Caminos abiertos 2008.* [en línea] Octubre 2008. Disponible en la Web en: http://caminosabiertos2008.blogspot.com/2008/10/la-teora-de-la-actividad-en-la-enseanza.html
[27] WERTSCH, James. *Op, cit,* p. 210
[28] PETROVSKI A. *Op, cit,* p. 206

es la fusión de cualidades innatas y específicas del sistema nervioso con esos cambios inducidos en él por la experiencia social"[29].

Esa fusión de cualidades innatas y específicas que se lleva a cabo por la formación de ciertas conexiones nerviosas temporales que constituyen nexos entre los mecanismos fisiológicos en que se basa la formación de las cualidades mentales del hombre, se llama Aprendizaje y consiste: "en la formación por el sistema nervioso central, del reflejo de determinados estímulos, así como de las situaciones estimuladoras de los programas de determinadas reacciones a las mismas… [En el hombre] los conocimientos son los reflejos de las propiedades de las cosas, reelaborados en categorías de la experiencia social objetiva, y las acciones son actos consientes y definidamente orientados de la actividad y esos mismos actos se denominan comportamientos… El aprendizaje consiste en la asimilación por el hombre de determinados conocimientos y determinadas acciones y comportamientos condicionados por ellos en determinadas situaciones"[30].



Es importante destacar que debido a la formación de las conexiones nerviosas temporales se establecen nexos funcionales en el cerebro entre distintas áreas de la corteza previamente independientes, generando nuevas funciones dentro de la corteza cerebral sin la necesidad de nuevas formaciones morfológicas. "Según Leontiev (1982), la corteza cerebral es un órgano que crea órganos, un órgano morfológico que crea órganos no morfológicos, un órgano morfológico capaz de formar órganos funcionales. Vygotsky ya había considerado los procesos mentales superiores como órganos o sistemas funcionales[31]".

Por lo que el desarrollo psíquico es la formación de estas nuevas funciones en la corteza cerebral, y debido a que estas funciones dependen de la interiorización de la cultura a lo largo del desarrollo ontogenético su localización también variara dentro de la corteza cerebral. "Las relaciones sociales y la cultura son las fuentes de la mente, el cerebro sólo su órgano, y la actividad social específica de cada sujeto su proceso originador (Guillermo Blank)".

4.1 TIPOS DE APRENDIZAJE

El aprendizaje humano se divide en dos tipos: Nivel Reflejo y Nivel Cognitivo, según su carácter, contenido y resultado. El primero de ellos participa en la formación

---

[29] LURIA, *Psicología y Pedagogía*. p. 60
[30] PETROVSKI A. *Op, cit*, p. 206-207
[31] C. MOLL, Luis. *Op, cit,* p. 64

de percepciones, representaciones y diversos programas motores y tiene un carácter inconsciente y automático, el segundo se caracteriza por el descubrimiento consciente, el análisis, la selección, la generalización y fijación de las propiedades y vínculos esenciales de la realidad, así como los modos de acción y utilización convenientes de estas propiedades y vínculos, lo dirigen los fines y tareas conscientemente planteados, cada uno de estos niveles se encuentran presentes a lo largo de la vida del sujeto en mayor o menor intensidad dependiendo de su edad, ya que ninguno de ellos desaparece, sólo se subordinan:

"Nivel reflejo del aprendizaje: Se expresa en la asimilación de determinadas reacciones.

a. Sensorial: Se forman la diferenciación de las señales y percepciones sensoriales, así como los procesos de observación, reconocimiento e identificación.

b. Motor: Se realizan la elección y unión de los modos de cumplir los movimientos, la asimilación de los programas motrices, su diferenciación, generalización y sistematización.

c. Sensomotor: Formación de modos automatizados de cumplir las acciones convenientes bajo el control de las percepciones y representaciones.

Nivel cognitivo: Se expresa como la asimilación de determinados conocimientos y determinadas acciones y comportamientos. Y este a su vez se subdivide, en las siguientes categorías, según el tipo de relaciones de realidad que es asimilado, las formas de reflejo de estas relaciones, los fines del aprendizaje, los tipos de acciones que son asimilados y el carácter de las tareas que se resuelven por medio de las mismas:

a. Aprendizaje práctico: Se forma sobre la base de la experiencia sensorial, necesarias para resolver determinadas clases de tareas, formándose la representaciones y aptitudes prácticas.

b. Aprendizaje intelectual: Se reflejan los vínculos objetivos más generales, las estructuras y relaciones de la realidad o la actividad. Para representarlas se ha creado un nuevo reflejo llamado concepto.

c. Aprendizaje de conceptos: Es cuando el alumno aprende conceptos y vínculos de conceptos (conocimientos).

d. Aprendizaje del pensamiento: Es la formación en el estudiante de los conceptos y que pueda operarlos exitosamente, en un nivel psíquico.

e. Aprendizaje de aptitudes: Aplica los conocimientos a la actividad que realiza para resolver las tareas concretas"[32].

[32] PETROVSKI A. *Op, cit,* p. 208-213

Cabe mencionar que las funciones psíquicas elementales participan en la formación del nivel reflejo de aprendizaje, mientras que para el Nivel Cognitivo es necesaria la formación de funciones psíquicas superiores, ya que este tipo de aprendizaje sólo surge al estar inmerso dentro de un medio sociocultural.

5. ENSEÑANZA

No todo tipo de aprendizaje lleva a un desarrollo psíquico, para eso la sociedad crea un procedimiento especial llamado “Enseñanza”, este procedimiento organiza al aprendizaje para convertirlo en desarrollo mental y poner en marcha una serie de proceso evolutivos que no podrían ser posibles al margen de un aprendizaje casual: “La enseñanza constituye un procedimiento orientado y especialmente organizado de transmitir la experiencia social. La enseñanza desempeña por consiguiente, un papel determinante en el proceso del desarrollo psíquico del niño”[33].

La enseñanza va a permitir que los alumnos accedan a los conceptos científicos ya que a diferencia de los conceptos cotidianos que se pueden adquirir por pertenecer a un medio social, los conceptos científicos sólo pueden ser adquiridos a través de un procedimiento organizado que refleje su carácter generalizador: “En la constitución de los conceptos cotidianos los adultos portadores de significado sociales desempeñan un rol, en el caso de la formación de conceptos científicos los docentes los introducen explícitamente en la escuela”[34].

Para llevar a cabo una buena organización del aprendizaje es necesario recurrir a uno de los conceptos más importante de la Teoría Socio-Histórica “*La Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)*”.

5.1 ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO

[…]Se intenta descubrir no cómo el niño ha llegado a ser lo que es, sino cómo puede llagar a ser lo que no es. (Leontiev)

“La Zona de Desarrollo Próximo es la distancia entre el nivel de desarrollo real del niño tal y como puede ser determinado a partir de la resolución de problemas y el nivel más elevado de desarrollo potencial tal y como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía de un adulto o en colaboración con sus iguales más capacitados. (Vygotsky)”[35]

La importancia de la ZDP es que no se detiene a estudiar aquello que el alumno ha aprendido, sino que su objetivo es estudiar qué es lo que el alumno puede aprender “La zona de desarrollo próximo define aquellas funciones que aún no hay madurado pero se hallan en proceso de maduración; funciones que han de madurar mañana, pero que ahora se encuentran sólo en estado embrionario. Esas funciones podrían ser descritas

[33] *Ibíd*. p. 24
[34] CASTORINA, José A. *Op, cit,* p. 20
[35] WERTSCH, James. *Op, cit,* p. 84

como los “brotes” o las “flores” del desarrollo, más bien que como los frutos del desarrollo”.[36]

Concluiríamos que la finalidad de la enseñanza es orientar y organizar al aprendizaje dentro de esta ZDP determinando en la actividad el nivel cognoscitivo de las acciones, y qué operaciones puede utilizar el alumno, ya que un aprendizaje dentro de esta ZDP en el niño después se convertirá en desarrollo. “El proceso de desarrollo no coincide con el de aprendizaje, el proceso de desarrollo sigue al aprendizaje, que crea el área de desarrollo potencial”

Aunque decir que un niño puede llegar a etapas de desarrollo superior gracias a la colaboración de un adulto no significa que su desarrollo potencial sea arbitrario, ya que está delimitado por su estado de desarrollo actual y por sus posibilidades intelectuales.

ALUMNO

Zona de desarrollo actual | **Zona de desarrollo potencial**

DISEÑO DE ACTIVIDADES

↓

ENSEÑANZA

5.2 ESTUDIO

Para que un alumno pueda aprender, es necesario que realice una actividad externa, que le permita interiorizar lo que va a aprender, es decir, le permita reflejar las acciones con los objetos en los procesos psíquicos, dicha actividad será llamada estudio. “El estudio tiene lugar cuando las acciones del hombre son dirigidas por el fin consciente de asimilar determinados conocimientos, hábitos, aptitudes, formas de conducta y tipos de actividad”[37.] Al ser una actividad dirigida para alcanzar un cierto fin, implica que sea una capacidad especialmente humana.

El sujeto a lo largo de su desarrollo realiza diversos tipos de actividad dependiendo del nivel de aprendizaje que desea alcanzar, el estudio es un tipo especial de actividad llamada Gnósica, que puede ser interior o exterior:

“Actividad Gnósica: Es aquella cuyo fin es el conocimiento, es decir, reúne y analiza informaciones sobre las propiedades del mundo circundante. Y se constituye de los siguientes tipos:

Actividad objetal: El manipuleo de objetos, su elaboración mecánica, su montaje y desarmado, pesarlos, medirlos, trasladarlos.

---

[36] C. MOLL, Luis. *Op, cit,* p. 189
[37] PETROVSKI A. *Op, cit,* p. 219

Actividad perceptiva: Examinar, escuchar, observar.

Actividad simbólica: Representar gráficamente, nombrar, consignar, describir verbalmente, expresar, repetir palabras o enunciados.

Dentro del estudio cada uno de estos tipos de actividad pueden encontrarse independientemente de los demás, o bien los diferentes tipos interactuando unos con otros para conseguir la finalidad.

El estudio se va a clasificar en dos tipos dependiendo de lo que se ha reflejado en el alumno, y determinara con qué tipo de actividad se debe iniciar:

a. Estudio temprano o primario: En la psiquis aún no se han formado las imágenes, conceptos y operaciones necesarias correspondientes. Y es ineludible la actividad Gnósica exterior para su aprendizaje.

b. Estudio avanzado o secundario: Si las imágenes y operaciones necesarias para asimilar los nuevos conocimientos o aptitudes ya existen en el alumno, basta para el aprendizaje con la actividad Gnósica interior que corresponde.

El primero tiene un carácter motriz que permite al alumno ir reflejando las propiedades objetivas del objeto es decir ir desarrollando un aprendizaje práctico, el segundo tiene un carácter intelectual contemplativo, es decir ir desarrollando el aprendizaje intelectual.

Para que el alumno realice el estudio es necesario que surja en él un interés asía la actividad, es decir tiene que contener motivos que impulsen al alumno a realizarla.

Existen dos tipos de motivos que determinan la finalidad del estudio. Estos motivos se pueden originar si se vinculan a las fuentes de determinada actividad del hombre.

a. Motivos exteriores: Están todos los estímulos e incentivos que impulsan desde afuera la finalidad; castigo, recompensa, amenaza y exigencia, presión grupal, halago, expectativa de futuros bienes y ventajas. Los conocimientos y aptitudes sirven, en estas condiciones, sólo de medio para lograr otros fines fundamentales. Y la situación de estudio se denomina, una situación con exigencia orientada a una finalidad.

b. Motivos interiores: Figuran algunos que atraen hacia la finalidad. El interés por los conocimientos, la curiosidad, la aspiración de elevar el nivel cultural, de dominar determinadas aptitudes, el entusiasmo por el proceso que implica resolver las tareas de estudio. Estos estímulos parten de la propia finalidad del estudio, se encuentran dentro de ella. Y la situación de estudio se denomina, una situación con una atracción orientada a una finalidad”[38].

[38] *Ibíd*. p. 220-224

6. APLICACIÓN DEL ENFOQUE HISTÓRICO CULTURAL EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Uno de los problemas que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas a nivel medio superior es que: “En el nivel medio superior se ha detectado que los estudiantes que salen para incorporarse al siguiente [nivel] tienen dificultades para comprender conceptos aritméticos y algebraicos, así como sus principios y leyes, y sobre todo para enfrentar la solución de problemas (Ontiveros)”[39].

Es entendible que si un alumno tiene problemas en la internalización de un concepto, esto lo refleje al aplicarlo en la resolución de un problema, ya que los conceptos son una herramienta semiótica que influye en la conducta del hombre para la realización de su actividad, y estos conceptos fueron adquiridos a través de una actividad exterior que se internalizo, un concepto mal entendido refleja una actividad externa e interna con deficiencias.

“Para que los conocimientos se conviertan en base de una elección correcta de las acciones (aptitud) es preciso que sean correctamente seleccionados y aplicados. Dicho de otro modo, es preciso: 1) que las cosas realmente tengan las propiedades que están reflejadas en ese conocimiento; 2) que los rasgos sean esenciales para los fines que se plantean a la acción; 3) que estas acciones aseguren la transformación del objeto que hace falta para lograr el fin”[40.]

El desarrollo psíquico se da gracias a la formación de conexiones temporales entre distintas zonas de la corteza cerebral, Hierbet & Carpenter argumentan que: “Una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones”[41].

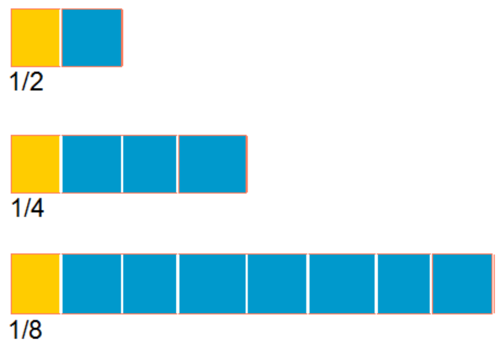
Pero para que exista una representación mental es necesario que el alumno realice una actividad. Esta actividad y las herramientas semióticas que en ella se utilicen estarán determinadas por la ZDP.

La importancia de determinar la ZDP en la que se encuentre el alumno, es que permite trabajar con conocimientos accesibles para él, porque si realizamos actividad debajo de la ZDP esta no conducirá a ningún nuevo aprendizaje porque el alumno ya lo sabe, y un aprendizaje por encima de la ZDP es inaccesible para el alumno porque no cuenta con el desarrollo psíquico suficiente para su internalización. Por ejemplo Rimant llevó a cabo una investigación con niños de escolaridad primaria y su conclusión más importante fue: “al comienzo de la pubertad, una vez finalizada la escolaridad primaria, comienzan a desarrollarse los procesos que conducen a la formación de los conceptos y al pensamiento abstracto”[42]. Es decir si construimos una actividad cuyo motivo fuera que los niños de nivel primaria aprendieran “Los números racionales”, el aprendizaje

[39] CAMPOS, Miguel. *Op, cit,* p. 224
[40] PETROVSK,I A. *Op, cit,* p. 279
[41] PÁEZ, Rosa. *Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite.* p. 13
[42] VYGOTSKY L. *Op, cit,* p.122

alcanzado no podría llegar a un nivel intelectual porque no está dentro de su ZDP, pero si alcanzar un aprendizaje en un nivel práctico.

Después de determinar la ZDP de los alumnos es importante que el profesor se centre en el motivo de la actividad y no solamente en el objetivo de las acciones o en las operaciones. Ya que esto puede llevar a la internalización de un concepto con deficiencias, por ejemplo en un trabajo realizado en el Instituto de Investigación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), integrada por Maestros de Segundo Ciclo en Educación Matemática y Doctores en Matemática de la PUCV, se pide a niños de cuarto año que grafiquen las fracciones: 1/2, 1/4 y 1/8, algunos niños la realizaron de la siguiente forma.



Esto hace presuponer a los profesores que el alumno sólo realizó acciones con una misma unidad, y que sólo se dedicaron a determinar qué fracciones representaban las figuras. Algunas de las conclusiones de los profesores fueron las siguientes:

- "Se supone que los niños conocen la escritura simbólica de las fracciones propias y básicas.
- Los niños representaron gráficamente los símbolos pedidos.
- Cada representación la realizaron independientemente.
- Se puede suponer que la profesora esperaba que lo hicieran con un mismo referente, pero la instrucción no estaba dada explícitamente"[43].

Esto nos demuestra que el profesor sólo se centró en que el alumno aprendiera a representar fracciones con una misma unidad, delimitando la actividad a una sola acción, además la operación utilizada con la herramienta semiótica (que fue la representación gráfica de fracciones como la parte y el todo) fue la de determinar una fracción dada, lo cual no permitió al alumno tener distintas representaciones semióticas del concepto fracción y no alcanzar su nivel potencial de conocimiento.

Por eso es necesario que después de determinar la ZDP y el nivel cognoscitivo de la actividad, es importante determinar las Herramientas Semióticas que se utilizarán para que el alumno internalice los conocimientos ya que estas permitirán a nivel cognitivo una representación mental del concepto, una transformación de este concepto o bien la elaboración de un procedimiento para la formación de este concepto como lo explica *Ley o principio de equivalencia de conceptos*.

[43] VERGARA, Margarita. *Fracciones.* [En línea] 2009. Disponible en la Web en: http://www.rmm.cl/index_sub.php?id_contenido=9711&id_seccion=2371&id_portal=369.

La utilización de varios registros de representación es importante porque permiten al alumno tener distintas representaciones semióticas sin embargo también es necesario que haya una coordinación entre estas representaciones como lo menciona Duval. "Él argumenta que para el análisis de los obstáculos en el aprendizaje en las matemáticas, necesariamente se deben considerar las diferentes formas semióticas mediante las cuales se representan los conocimientos y las dificultades que trae la falta de coordinación entre los registros de representación. Ya que él afirma que en la enseñanza se le da más importancia a las representaciones mentales que a las semióticas"[44]. Esta coordinación de los registros de representación se conseguirá a través de las acciones de la actividad, que tienen como finalidad distintas representaciones del concepto y como objetivo común su aprendizaje.

El hecho de que un alumno pueda construir un concepto por diferentes procedimientos permite una utilización eficaz de estos conceptos a nuevas actividades, convirtiéndose así el concepto en una herramienta semiótica para el alumno.

[44] PÁEZ, Rosa. *Op, cit,* p. 13-14

METODOLOGÍA

A continuación presentamos el problema y pregunta de investigación, que guiaron nuestra investigación.

Problema de Investigación

Analizar de qué manera contribuye al aprendizaje y enseñanza de los números racionales una actividad con base en el Enfoque Histórico-Cultural y la Teoría de la Actividad de Leontiev.

Pregunta de investigación

¿Una actividad elaborada con base en el Enfoque Histórico-Cultural y la Teoría de la Actividad de Leontiev, que tiene como finalidad el aprendizaje de los números racionales, de qué manera contribuye a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje?

Metodología del experimento

Con el propósito de responder a la pregunta de investigación, se decidió seleccionar un método no experimental, para eso recurrimos al método de investigación transeccional que recolecta datos en un sólo momento, en un tiempo único, ajustándose este método a los recursos con los que contábamos.

Para estudiar las ideas utilizadas por los alumnos para resolver la acción, aplicamos el diseño transeccional descriptivo que tiene como objetivo indagar la incidencia y los valores en que se manifiesta una o más variable, en este caso nuestra variable sería el pensamiento que ponen en juego los alumnos cuando se les hacen preguntas que requieran la utilización del concepto de fracción.

Aplico también el diseño traseccional correlacional, para describir la relación entre el pensamiento que va surgiendo en el alumno con el desarrollo de esta acción (trato de estudiar de que manera influyen las herramientas y procedimientos seleccionadas en esta acción en el pensamiento del alumno).

Para la recolección de datos utilicé grabación en video, cuestionarios y la observación a lo largo del desarrollo de la actividad en el salón de clases.

El proyecto de investigación inicio con conocer lo referente al Enfoque Histórico-Cultural para eso mi asesor me sugirió la literatura, para de ahí seleccionar los temas que me permitirían elaborar una actividad aplicada a mejorar el aprendizaje de los números racionales. La elaboración de la Actividad partió en un inicio de nuestros sentidos personales contrastándolos con los que en la actualidad tiene un alumno que va iniciando el bachillerato y de ahí mi asesor me fue guiando para mejorarla.

En lo referente a la Actividad, se decidió aplicar solamente la Acción 1 por cuestiones de tiempo, ya que los alumnos regresaban de la contingencia sanitaria del virus H1N1 y esto los había retrasado en sus estudios, además que se aproximaban exámenes parciales, por lo cual decidí tratar de afectar lo menos posible a su curso de matemáticas (Álgebra). La aplicación de la Acción 1 se llevó a cabo en el CBT No 2 de Cuautitlán a dos grupos de 1er año, el grupo 1-2 constaba de 49 alumnos y el grupo 1-1 constaba de 45 alumnos, la Actividad se aplicó en sesiones de 1:40 minutos para el primer grupo y 40 minutos para el segundo, pero sólo se le pudo dar seguimiento al segundo grupo, por cuestiones ajenas al proyecto. Después de haber sido aplicada la Acción 1 en el grupo 1-1, después de haber pasado una semana y concluidos los exámenes se me permitió dejar de tarea la Acción 1 a los alumnos para que la terminaran en casa y con base a lo que elaboraron, se realizó un cuestionario para tratar de analizar cuáles son los motivos personales que los conducen a seguir estudiando, y lo que les gustó y no les gustó de esta acción, permitiendo identificar con mayor claridad cuáles fueron los errores y aciertos cometidos en la aplicación de la acción.

En la sesión de trabajo. en el grupo 1-2 se les dio la Acción 1 y se les comentó cuál era el objetivo de la Actividad y de la Acción 1 y que se organizaron equipos para realizarla, esta sesión tuvo una duración de 1 hora con 40 minutos, en este caso sólo fue posible hacer la observación de lo que se realizó en clase, y con base a los errores que se detectaron al realizar esta acción con este grupo, se decidió modificar “La etapa de formación de la base orientadora de la nueva acción” con el grupo 1-1, para después entregarles la acción y organizar los equipos para que la contestaran, la sesión tuvo una duración de 40 minutos.

Después de estas sesiones de trabajo se me permitió dejarles de tarea la Acción 1 al grupo 1-1, esto lo realicé porque considere que el material estaba estructurado para orientar al alumno para su solución, y para que concluyeran la acción se les dio una semana de tiempo.

Debido a que de los 13 equipos que se formaron, dos equipos fueron los que casi terminaron toda la primera acción, aunque sólo uno de estos dos fue el que mejor la realizó mientras que el otro cometió muchos errores y 5 quienes avanzaron un poco más, y los demás dejaron el trabajo como lo habían realizado en el salón de clases, se decidió realizar un cuestionario para determinar qué motivos los impulsan a seguir sus estudios, así como lo que les gustó y no les gustó de la acción, y en qué partes de la acción tuvieron problemas. En esta parte quiero reiterar mi agradecimiento al CBT No 2 de Cuautitlán por las facilidades prestadas para la aplicación de esta actividad, ya que este último cuestionario fue aplicado el último día de clases unas horas antes de la ceremonia de clausura.

CAPÍTULO: III

DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES REALIZADAS

La Actividad tiene como objetivo que el alumno aprenda los significados teóricos y operacionales de los números racionales, para conseguir este objetivo la Actividad está compuesta por tres acciones:

4. **¿Qué es una fracción? La parte y el todo**.
5. **Las fracciones y su significado**.
6. **Los Números Racionales como un Sistema: Geométrico y Numérico**

Por las razones anteriormente mencionadas se decidió aplicar de estas tres acciones solamente la Acción 1. La aplicación de esta acción fue guiada por "*El Método de Formación por Etapas de las Acciones Mentales De Galperin*" (mencionada anteriormente), que consta de las siguientes etapas.

1. Formación de la base orientadora de la nueva acción.
2. Formación del aspecto material de esta acción.
3. Formación de su aspecto verbal externo.
4. Formación de esta acción como un acto mental a través del lenguaje interiorizado.

ACTIVIDAD Y DESCRIPCIÓN

Basándonos en "*La Teoría de la Actividad de Leontiev*", en "*La ley o principio de equivalencia de conceptos*" y en el concepto de "*herramientas semióticas*", para cumplir el objetivo anteriormente mencionado decidí elaborar una actividad que consta de las siguientes tres acciones cuyos objetivos y procedimientos son los siguientes:

¿Qué es una fracción? La parte y el todo. Cuyo objetivo es que el alumno aprenda el significado de fracción como una relación parte-todo, y defina las reglas de sus operaciones, mediante la solución de problemas y ejercicios. Los temas tratados en esta acción son:

1. Las fracciones como una relación parte-todo
2. Fracciones equivalentes
3. Operaciones de Fracciones

Decidí iniciar con esta acción porque los alumnos ya han trabajado a lo largo de la educación primaria y secundaria con el concepto de fracción, para llegar a esta conclusión me base en los planes y programas de la SEP para la educación básica que se pueden encontrar en la página *http://basica.sep.gob.mx/seb2008/start.php*, de esta manera se identificó cuáles son los conocimientos que debe de tener un alumno que sale de la secundaria e ingresa al nivel medio superior, y esto me permitió construir una acción que partiera de la zona de desarrollo real del alumno.

Para la elaboración de esta acción utilicé herramientas semióticas como: gráficas, tablas numéricas, y fórmulas. En esta acción la herramienta que más utilicé fue un segmento de recta para la solución de diferentes problemas que tenían como finalidad que el alumno determinara a partir de ellos las operaciones de fracciones y expresarlas mediante una fórmula.

Las fracciones y su significado. Cuyo Objetivo es que el alumno aprenda otros significados básicos de fracciones, y cómo se utilizan en diferentes contextos. Los temas tratados en esta acción son:

1. Razón
2. Porcentaje
3. Expresión decimal

En esta acción inicié estudiando a las fracciones como una razón y partí de un problema que ya se había resuelto en la Acción 1 (aunque cada una de estas acciones son independientes, es decir no se necesitan de la acción anterior para realizar la siguiente, algunas de los ejercicios o conceptos se comparan y utilizan para que los alumnos analicen las semejanzas y diferencias entre los procedimientos y operaciones que se utilizan en cada acción, y con esto pretendo formar en el alumno registros de representación). Del concepto de fracción como una razón pasamos al de porcentaje, para después estudiar a las fracciones como una expresión decimal y la utilización de estos tres conceptos en diversos problemas.

Los Números Racionales como un Sistema: Geométrico y Numérico. Cuyo objetivo es que el alumno aplique su dominio de los significados básicos de los números racionales para definir las reglas de operación y propiedades de dichos números y proceda a desarrollar sus habilidades operatorias en los ejercicios. Los temas tratados en esta acción son:

1. Los números racionales como un sistema geométrico
2. Los números racionales como un sistema algebraico

En esta acción se utiliza la recta numérica como una herramienta para el estudio de las operaciones y propiedades de los números racionales, pero lo principal de esta acción es que el alumno aplique los significados básicos que ha aprendido (interiorizado), para dar significado a lo pasos más esenciales que se realizan para deducir dichas operaciones.

APLICACIÓN DE LA ACCIÓN 1 EN EL SALÓN DE CLASES

Para la aplicación de la Acción 1 en el salón de clases aplique *"El Método de Formación por Etapas de las Acciones Mentales de Galperin"* de la siguiente manera**:**

Formación de la base orientadora de la nueva acción:

En el grupo 1-2 se inicio dándoles el objetivo de la Actividad, y como estaba compuesta, se les explicó que ese día se trabajaría con la Acción 1 y cuál era su objetivo particular de esta acción. Para realizar esta acción se les solicitó a los alumnos que se dividieran en equipos de 5 integrantes. Debido a las dificultades presentadas en el grupo 1-2 al resolver la acción (desinterés por parte de algunos alumnos, y de los 10 equipos del grupo 1-2 que se formaron sólo dos fueron los que tuvieron muy pocas dificultades y avanzaron rápidamente al contestar la primera parte de la acción, mientras tanto los demás equipos tuvieron dificultades desde el inicio de la acción sin siquiera poder identificar ejemplos donde se utilizan las fracciones en la vida diaria) se decidió modificar la etapa de formación de la base orientadora de la nueva acción en el grupo 1-1.

Al igual que en el grupo 1-2 se inició en el grupo 1-1 dándoles el objetivo de la Actividad, y cómo estaba compuesta, se les explicó que ese día se trabajaría con la Acción 1 y cuál era su objetivo, y para la realización de esta acción se les solicitó integrarse en equipos de 4. Pero además se les dio una breve introducción del surgimiento de los números fraccionarios como una necesidad para realizar medidas, y se les explicó lo que representaba los símbolos de una fracción con relación a una medida fraccionaria, llegando así al concepto de fracción como una relación parte todo, hablándoles brevemente también de la importancia de trabajar en equipo, todo esto tardo aproximadamente 10 minutos.

En las siguientes etapas sólo se describirá lo realizado en el grupo 1-1 ya que fue al que se le pudo dar un seguimiento mayor.

Formación del aspecto material de esta acción:

En esta etapa se les entregó un material por equipo y con base a sus conocimientos tenían que resolver la acción, se decidó que trabajaran en equipo, porque de esta manera aquellos alumnos menos capacitados colaborarían con otros compañeros y estos los llevarían de su zona de desarrollo real a su zona de desarrollo potencial, esto se originaría al compartir sus conocimientos por medio del análisis y la reflexión para la solución de los problemas, utilizando así sus funciones psíquicas superiores.

Pero también a lo largo de la elaboración de esta acción a cada uno de los equipos se les fue orientando cuando tenían alguna duda o cuando se percibía que tenían problemas al ir resolviendo la acción, además que en el material, cada uno de los problemas planteados cuentan con una orientación para el alumno y por eso también se consideró que se podía dejar de tarea la acción.

Las siguientes dos etapas no se pudieron concluir de manera satisfactoria debido al tiempo, pero hubo un equipo que se acercó a la siguiente etapa, a continuación se explica de manera breve como se pretendía llevar a cabo las siguientes etapas.

Formación de su aspecto verbal externo:

Con base a los procedimientos y operaciones que realiza el alumno en cada acción y de la reflexión que surgió con sus compañeros al realizarla, se pretendía que el alumno llegara a deducir las operaciones de las fracciones y representarlas por medio de una fórmula. En esta acción el concepto de fracción como una relación parte todo fue estudiado con diferentes representaciones, para que el alumno formara dicho concepto se inició con problemas donde tenían que aplicar el concepto de fracción. Esto para que el alumno abstrajera dicho concepto de la acción material. Y que después lo expresara en la parte de deducir las operaciones de las fracciones.

Sin embargo esta etapa no se pudo concluir satisfactoriamente debido a que no se pudo dar seguimiento a los errores conceptuales que estaban teniendo en la etapa anterior, por ejemplo en la sesión de clases se les orientaba cómo utilizar el concepto de fracción como una relación parte-todo, para determinar la fracción que representaba la parte iluminada en una región triangular, pero al modificar el problema y pasar a una región circular, no aplicaban el concepto de fracción y trataban de calcular la fracción dividiendo la región circular como se enseña tradicionalmente (dividir la figura en dos, luego en cuatro y así sucesivamente), lo cual demostraba que el concepto no había sido internalizado y dependía del objeto material, apoyándose el alumno en el procedimiento aprendido y no en el concepto, y esto llevó como consecuencia que complicaría la compresión de las partes consecuentes de la acción y el hecho de no poder pasar a esta siguiente etapa de formación de las acciones.

Formación de esta acción como un acto mental a través del lenguaje interiorizado:

Al término de cada acción se presenta una lista de ejercicios para que el alumno aplique el concepto que ya había abstraído del material, estos ejercicios eran similares a los que habían utilizado para deducir las operaciones y también se proponían problemas con representaciones diferentes al problema planteado para que el alumno aplicara las operaciones que había deducido y se fueran automatizando e internalizando dicho concepto u operación.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para el análisis de los resultados, analizamos el tipo de pensamiento que utilizó el alumno para resolver la acción, la orientación que se les dio a los equipos tanto en el material como en la sesión de clases en que se me permitió estar con ellos, y los errores que se detectaron al desarrollarse la acción.

Lamentablemente no pude orientar detenidamente a todos los equipos porque sólo contaba de 40 minutos con este grupo, así que, como se iba revisando a cada equipo se le comentaban los errores que se detectaban en ese momento, considerando que aquellas nuevas dificultades que tuvieran, el material sería capaz de orientarlos.

Como el grupo 1-1 trabajó además con el material en su casa, y con base a lo que realizaron se decidió junto con mi asesor realizar un cuestionario que me permitiera detectar sus motivos, lo que les gustó y no les gustó de la acción, como aquellas partes en que tuvieron dificultad. Dividimos este análisis de los resultados obtenidos en tres partes:

a) Análisis de los resultados en la sesión de clases.
b) Análisis de los resultados del trabajo hecho en casa.
c) Análisis de los resultados del cuestionario.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS EN LA SESIÓN DE CLASES

La Acción 1 inicia estudiando las fracciones como una relación parte-todo, porque los alumnos en etapas anteriores de su proceso de enseñanza-aprendizaje ya han trabajado con este concepto y conocen las operaciones básicas de las fracciones aunque sea de manera algorítmica, con base en esto podemos asegurar que estamos partiendo de su zona de desarrollo real del alumno.

Las primeras preguntas tenían como finalidad identificar el tipo de pensamiento que manejan los alumnos con dicho concepto, para dicho análisis utilizamos la progresión ontogénetica de los conceptos propuesta por Vygotsky (mencionada en el marco teórico).

Teniendo en cuenta las ideas de Vygotsky de que utilizamos y operamos los conceptos en nuestra vida social antes de tener conciencia de ellos, la primera pregunta tiene como finalidad determinar si los alumnos son capaces de identificar dónde utilizan las fracciones como una relación parte-todo en su vida diaria, porque además si el alumno es capaz de identificar ejemplos en su medio; como dice Sierpinska esto es un indicativo de que comprende el concepto, la pregunta fue la siguiente: *"¿Podrías dar un ejemplo de alguna medición que no sea entera y que tú realizas?"*, las respuestas fueron desde casos concretos a generales.

Casos Concretos	esta medida esta formada de una parte entera y otra fraccionaria (centimetro). ¿Podrias dar un ejemplo de alguna medición que no sea entera y que tú realizas? Cuando voy a la tortillería y pido 2.500 kg.
	esta medida está formada de una parte entera y otra fraccionaria de la unidad (centimetro). ¿Podrias dar un ejemplo de alguna medición que no sea entera y que tú realizas? El transporte se cobra con decimales (5.50)
Casos Generales	(centimetro). ¿Podrias dar un ejemplo de alguna medición que no sea entera y que tú realizas? La cuarta.
	(centimetro). ¿Podrias dar un ejemplo de alguna medición que no sea entera y que tu realizas? Las horas.
	(centímetro). ¿Podrías dar un ejemplo de alguna medición que no sea entera y que tú realizas? Paga en el camión?
	esta medida esta formada de una parte entera y (centimetro). ¿Podrias dar un ejemplo de alguna medición que no sea entera y que tú realizas? La distancia de la casa a la escuela

La pregunta que debemos hacernos es si realmente el alumno utilizó el concepto de fracción para responder esta pregunta. En los casos generales el alumno utilizó para contestar esta pregunta unidades de medida o bien dieron un ejemplo de una magnitud en un caso concreto, pero no especificaron por qué la medida de esa magnitud no es entera, o bien dieron como ejemplo el precio de algo, que aunque no es una magnitud si se expresa en fracción. Los alumnos dan por entendido en estos dos últimos casos que la representación de estas medidas y valores, son fraccionarias, ¿Pero estarán utilizando el concepto de fracción?, esto lo podemos contestar al observar los casos de las respuestas concretas, si observamos con detenimiento los alumnos respondieron así en estos casos por qué consideran que el punto decimal esta correlacionado con medidas fraccionarias aunque no saben porque, y esto se corrobora en la siguiente pregunta, que utilizamos para identificar el tipo de pensamiento que manejan.

Para identificar qué tipo de pensamiento tienen con respecto al concepto de fracción como una relación parte-todo, en el caso particular de su utilización en unidades de medida, realizamos la siguiente pregunta: "*Una medida de 95.4 centímetros representa una fracción ¿Por qué?*".

Todos los alumnos respondieron basándose en un pensamiento en complejos es decir se basan en un pensamiento real-concreto del objeto que en un pensamiento lógico-abstracto. Identificando dos tipos de pensamiento en complejos en la resolución de esta primera parte de la acción:

El primero es un pensamiento en complejos asociativo, ya que asocian la existencia de un punto decimal en un número con la representación de una fracción, pero no explican qué significado tiene este punto.

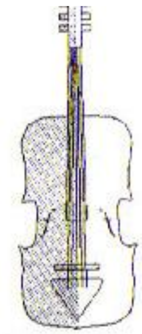
El segundo es un pensamiento en complejos difuso, ya que el atributo que utilizan para asociar (considerar que la unidad son 100 centímetros) es erróneo.

Pensamiento en complejos	
Complejo-Asociativo	Una medida de 95.4 centímetros representa una fracción ¿Por qué? sí por que pose decimal
	Una medida de 95.4 centímetros representa una fracción ¿Por qué? por que tiene punto decimal
	Una medida de 95.4 centímetros representa una fracción ¿Por qué? por que es un numero con decimales.
	Una medida de 95.4 centímetros representa una fracción ¿Por qué? Tiene un punto decimal el cual asi se representa.
	Una medida de 95.4 centímetros representa una fracción ¿Por qué? por que tiene numeros decimales y no es entero
Complejo-Difuso	Una medida de 95.4 centímetros representa una fracción ¿Por qué? Porque el entero es 100 cm

Observación: En esta parte de la acción no se dio una orientación oral por parte mía ya que se buscaba identificar el tiempo de pensamiento que tenía el alumno con respecto a dicho concepto.

La siguiente parte tenía como finalidad que el alumno contestara problemas que se encontraban dentro de su zona de desarrollo real, para que se les facilitara la comprensión del concepto de fracción como una relación parte todo al ser representada mediante una fórmula y así de esta manera que comenzaran a formar una representación semiótica. La mayoría de los equipos contesto correctamente esta parte.

1. Observa la siguiente figura, la parte iluminada representa la fracción __2__, porque la unidad (la figura) ha sido dividida en __2__ partes iguales de las cuales se ha tomado __1__ parte.



2. Tú regla tiene como unidad de medida el __cm.__, el cual se divide en __10__ partes iguales, y cada parte en que quedo dividida la unidad representan la fracción __10__ de la unidad (centímetro). La división de la unidad se hace para tener una mejor aproximación de lo que estamos midiendo.

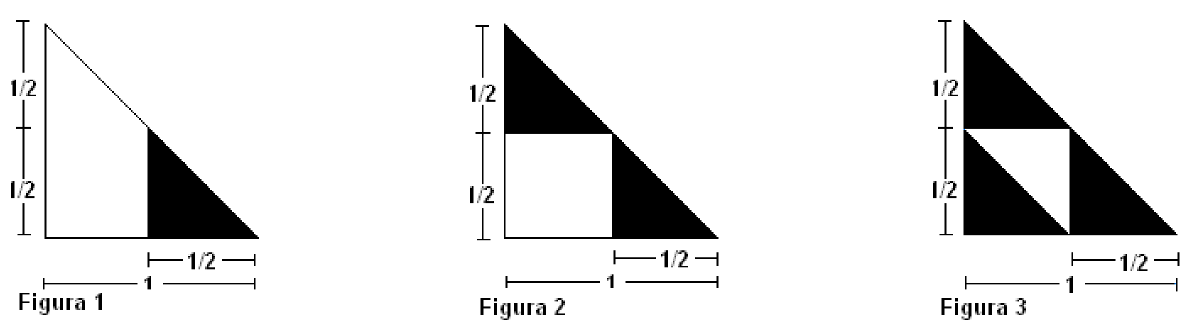
3. ¿Cuál es el total de alumnos en tu grupo? __45__, ¿Cuántos son de tú sexo? __24__ y ¿Qué fracción del grupo corresponde a tú sexo? __24/45__. En este caso no se trata de una unidad sino de un conjunto, el total de elementos de un conjunto es equivalente al número de partes en que es dividida la unidad.
Cada una de estas fracciones representa una relación **parte-todo**, donde:

El único problema que se presentó en algunos equipos era que no leían detenidamente la acción y cometían errores como el siguiente:

2. Tú regla tiene como unidad de medida el __cm.__, el cual se divide en __mm.__ partes iguales, y cada parte en que quedo dividida la unidad representan la fracción __1/10__ de la unidad (centímetro). La división de la unidad se hace para tener una mejor aproximación de lo que estamos midiendo.

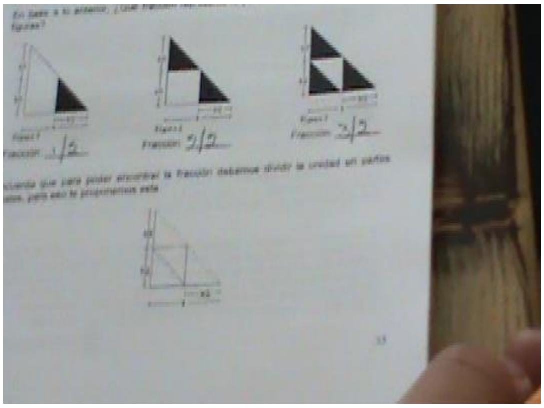
Para que el alumno comenzara a abstraer el concepto de fracción del objeto material, se propuso lo siguiente:

Iniciamos con la siguiente pregunta: "¿Qué fracción representa la parte iluminada en las siguientes figuras?



Fracción: ________ *Fracción:* ________ *Fracción:* ________"

Al revisar a los equipos en el salón de clases nos encontramos con equipos de que a pesar de que habían resuelto correctamente la parte anterior, el procedimiento que utilizaban no se apoyaba en aspectos del concepto, y esto se reflejó en esta parte de la acción. Este fue el dialogo dirigido que se dio en un equipo, entre las Alumnas (A) y yo (Y).



Y: ¿Por qué dicen que esto vale un medio? (se señala la primera figura)

A: Ummmmmmmm

Y: ¿Cuál es su unidad?

A: Ummmmmmm es 1/4

Y: ¿Cuál es la unidad que vas a particionar?

A: Es 4

Y: ¿Cuál es la unidad? Por ejemplo cuando estamos trabajando con esta figura ¿cuál es la unidad? (Se señala el violín)

A: Cm

Y: No era el violín, entonces aquí cual es la unidad

A: El triángulo

Y: El triángulo grande, es el que van a particionar en partes iguales, ¿Cuál es la partición que ustedes toman?

A: Esta (señalan el primer triángulo de la figura)

Y: Esa está dividida en partes iguales

A: No, entonces es esta (señalan la tercera figura)

Y: Entonces esta (se señala la parte iluminada de la primera figura) que parte representa del triángulo.

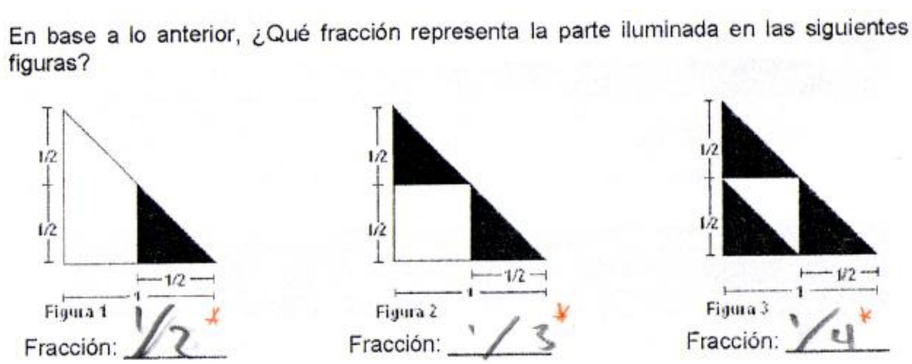
A: 1/4

Y esta (se señala la segunda figura)

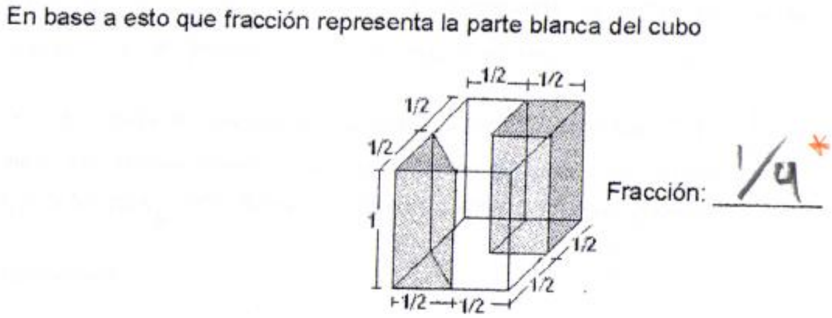
A: 2/4

Después de esto, se les dijo que no bastaba con que parecieran iguales las partes en que se había dividido la figura, se tenía que demostrar realmente por qué eran iguales y se les sugería continuar con la acción ya que en esta se proponía una manera de demostrarlo. Este problema se volvió a presentar en otro equipo pero no fue posible detectar a este equipo en el salón de clases por lo cual no se les pudo dar una orientación.

Este equipo utilizó un pensamiento en complejos asociativo, asociando las partes en que se había dividido la unidad con el denominador de la fracción, y la parte blanca con el numerador de la fracción.

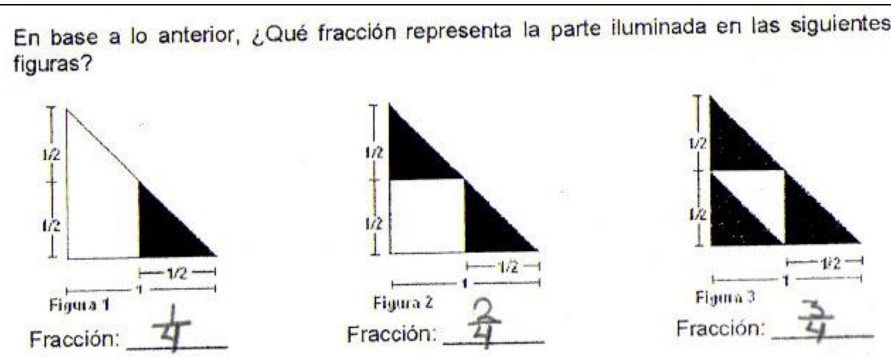
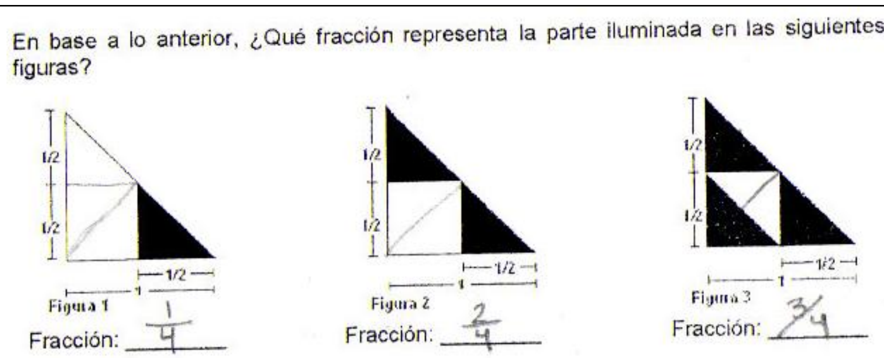


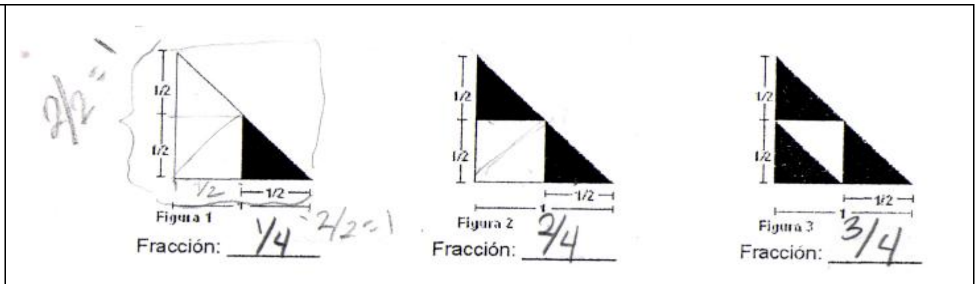
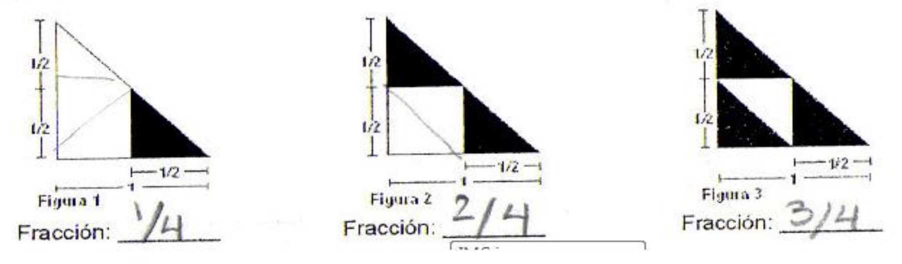
Y este mismo tipo de pensamiento volvió a ocupar el equipo en otra pregunta:



La mayoría de los equipos excepto los dos anteriores utiliza un pensamiento en complejos llamado pseudoconcepto, mientras que estos últimos utilizan un pensamiento asociativo.

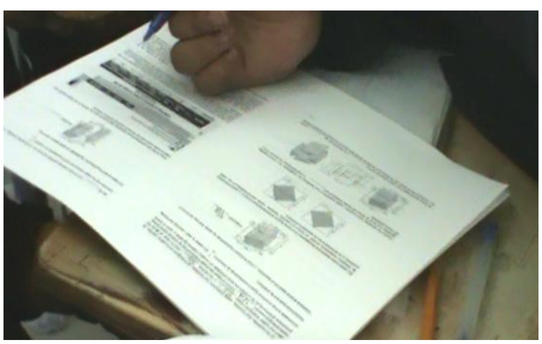
Es decir al revisar cada equipo en el salón de clases cada uno de ellos había logrado determinar de manera correcta la fracción que representaba la parte iluminada, para eso utilizaron los dos siguientes procedimientos:

Método	Solución
Se utiliza como referente la tercera figura, para determinar las fracciones	
Divide cada unidad en cuatro partes	

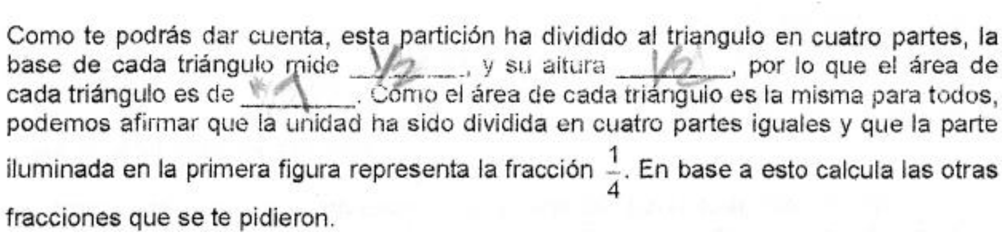
	
	En base a lo anterior, ¿Qué fracción representa la parte iluminada en las siguientes figuras? 

En este caso estamos hablando de un pseudoconcepto porque al preguntarles por qué cada una de estas partes eran iguales los alumnos, no sabían contestar, y sólo hacían referencia a su forma.

Para estos equipos que utilizaron un pensamiento en pseudoconcepto fue necesario darles una orientación oral ya que me percaté de que estaban utilizando este pensamiento en complejos y que no demostraban que cada una de estas partes en que estaba dividido el triángulo era igual, a pesar de que en el material se les pedía y además se les orientaba como demostrarlo.



El problema que se presentó al demostrar que cada una de estas partes en que se había dividido el triángulo era igual, es que los alumnos no sabían multiplicar ni dividir fracciones a pesar de que a lo largo de su enseñanza han estado trabajando con ellas, esto me hace suponer que estas operaciones fueron enseñadas algorítmicamente con un aprendizaje carente de significados. (Esta dificultad que presentaron los alumnos se puede observar en el video que se tomo de la sesión de clases)


Como te podrás dar cuenta, esta partición ha dividido al triangulo en cuatro partes, la base de cada triángulo mide ½, y su altura ½, por lo que el área de cada triángulo es de 1. Como el área de cada triángulo es la misma para todos, podemos afirmar que la unidad ha sido dividida en cuatro partes iguales y que la parte iluminada en la primera figura representa la fracción $\frac{1}{4}$. En base a esto calcula las otras fracciones que se te pidieron.

Para resolver dicha dificultad les recordé los algoritmos de las operaciones con fracciones y les comenté que más adelante se verían el significado de tales operaciones.

En el salón de clases la mayoría de los equipos llegó hasta aquí pero 5 equipos trabajaron además con el concepto de fracción aplicado a conjuntos, en este caso estos cinco equipos lograron determinar bien la cardinalidad del conjunto que representaba todos los elementos, pero todos tuvieron al menos algún error al determinar el conjunto que representaba la parte.

Ahora di cual es la fracción de hombres y mujeres con una edad mayor a los 19 años que murieron a causa de la tuberculosis pulmonar 60/125 la fracción de hombres con una edad entre los 10-59 años que murieron a causa de la tuberculosis pulmonar 46/125 y la fracción de mujeres con una edad mayor a los 19 años que murieron a causa de la tuberculosis pulmonar 16/125

La tabla que se les dio para calcular lo anterior era la siguiente:

INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL
SEGURIDAD Y SOLIDARIDAD SOCIAL

www.imss.gob.mx | Inicio | Contacto | RSS | Mapa del Sitio

INFORMACIÓN ESTADÍSTICA EN SALUD

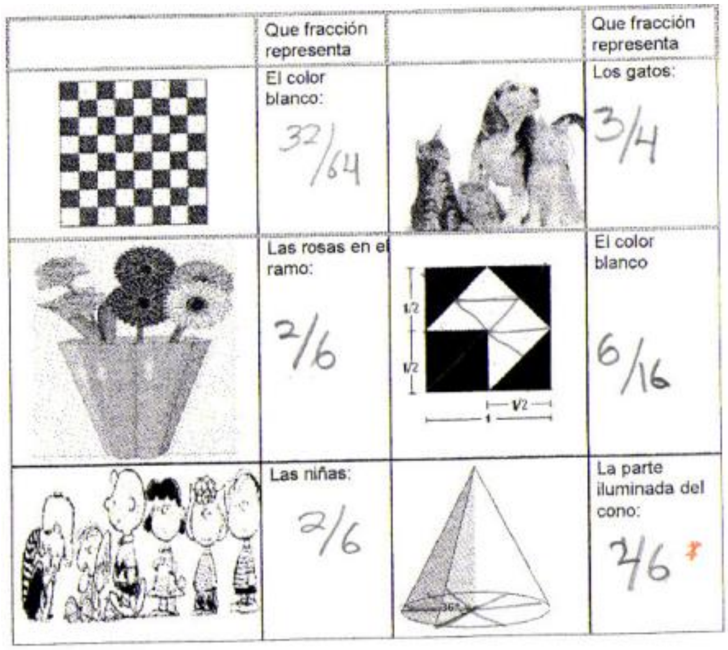
Defunciones por tuberculosis pulmonar por grupos de edad
Enero a Abril Del 2008

Delegación	Total	Total Masculino	Total Femenino	Grupos de Edad					
				10-19		20-59		60 y más	
				Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Total Nacional	125	86	39	1	1	45	15	40	23

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TRABAJO HECHO EN CASA

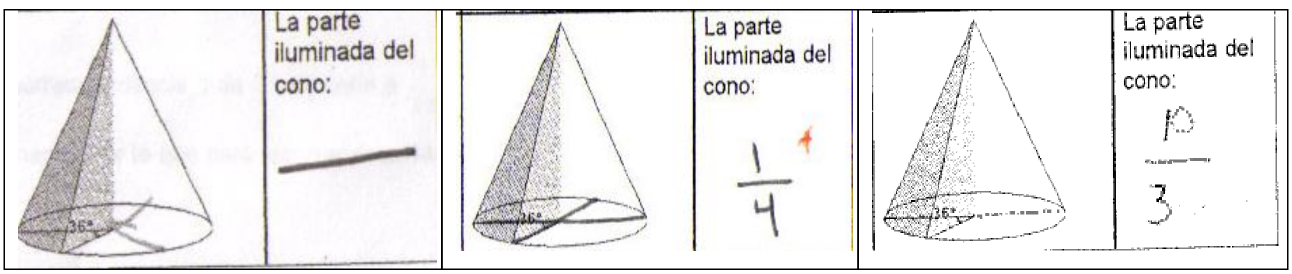
En este parte sólo analizaré los equipos que trabajaron en su casa, siendo exclusivamente dos los que casi terminaron toda la primera acción, aunque sólo uno de estos dos fue el que mejor lo realizó mientras que el otro cometió muchos errores (utilizando un pensamiento en complejos y pseudoconceptos) y 5 quienes avanzaron un poco más, ya que los demás dejaron el trabajo como lo había realizado en el salón de clases.

De estos equipos que continúan resolviendo la acción todos resuelven la siguiente tabla,



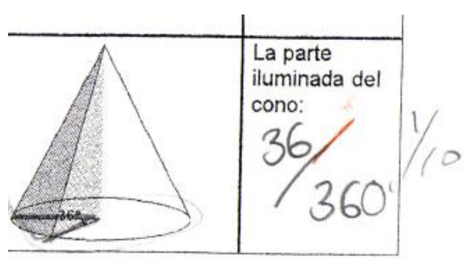
	Que fracción representa		Que fracción representa
	El color blanco: 32/64		Los gatos: 3/4
	Las rosas en el ramo: 2/6		El color blanco 6/16
	Las niñas: 2/6		La parte iluminada del cono: 2/6

Pero tienen dificultad al calcular la fracción que representa el cono algunos no lo contestan y otros lo resuelven de la siguiente manera



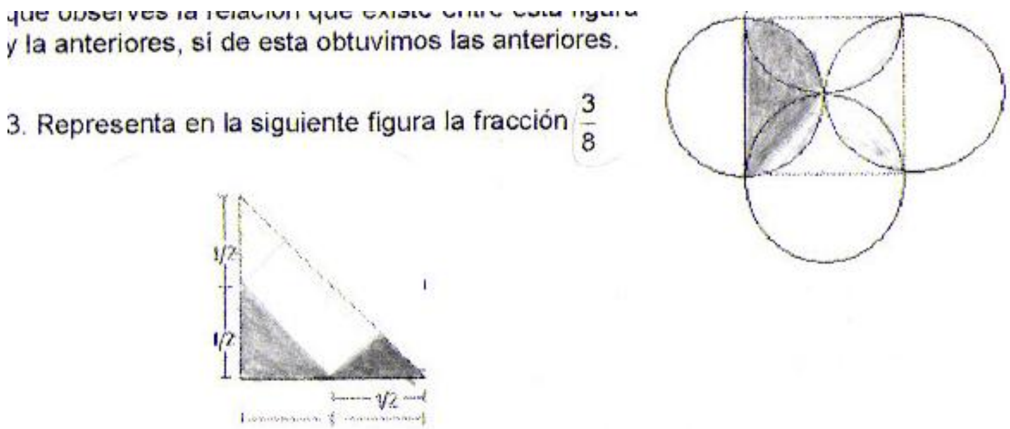
De nuevo lo que se vuelve a presentar es un pensamiento en complejos, utilizando el objeto en vez del concepto para calcular la fracción.

Pero hubo un equipo que logra contestar correctamente el problema, y para hacerlo, se da cuenta de que la circunferencia tiene un ángulo de 360° y que la parte sombreada tiene un ángulo de 36°.

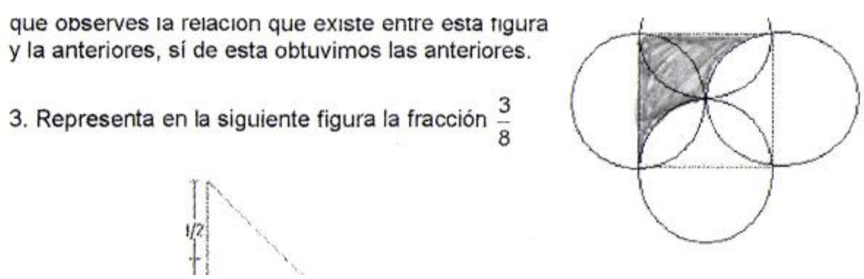


En este caso este equipo comienza apoyarse en el concepto de fracción para determinar la fracción que representa la parte sombreada, es decir comienza a tener una comprensión del concepto, aunque lamentablemente ya no continúa con la acción y ya no se pudo tener un seguimiento de este equipo.

Cuando reviso la parte de los ejercicios de esta primera parte de la acción veo que los alumnos que decidieron continuar van resolviendo la mayoría de los ejercicios bien, pero hay algo que me llama la atención en el siguiente ejercicio en un equipo



Y es que a pesar de que la fracción que representa en la figura triangular es la que se pide, me llama la atención que hayan coloreado la figura de la derecha, ya que otro equipo igual lo había hecho y no había coloreado el triángulo, y no le había dado importancia.



Lo que me hace percatar que estos alumnos siguen utilizando un pensamiento en complejos en figuras donde no saben aplicar el concepto y aquellos ejercicios donde han tenido una experiencia previa logran hacerlo muy bien y esto es porque el alumno se está apoyando no en el concepto sino en el procedimiento.

A pesar de que la mayoría de los equipos utilizó un pensamiento en complejos a lo largo de la acción hubo un equipo que logró realizar bien la parte de la Acción 1 correspondiente a la comparación de fracciones, logrando obtener la fórmula para comparar fracciones, y después la aplicó a los ejercicios consecuentes, sólo cometió errores al hacer las multiplicaciones.

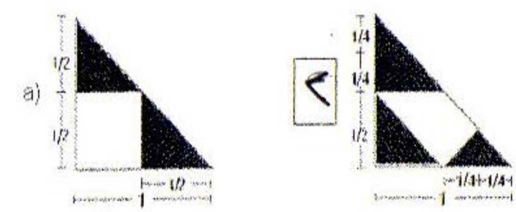
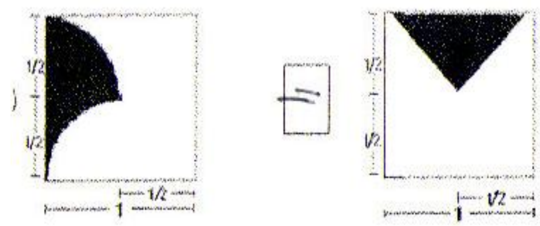
A continuación se presenta la fórmula que obtuvieron los alumnos:

Si la división de la unidad la obtenemos encontrando el producto de sus denominadores, podemos expresar que:

Una fracción "$\frac{a}{b}$" es mayor a una fracción "$\frac{c}{d}$" si: $a \times d > c \times b$.

Y una fracción de la forma "$\frac{a}{b}$" es igual a un fracción "$\frac{c}{d}$", si: $a \times d = c \times d$. (Sí se cumple lo anterior, también se dice que son "equivalentes).

Y estos fueron los ejercicios que resolvió con la fórmula

b) $\frac{12}{15} < \frac{11}{12}$	
d) $\frac{99}{132} > \frac{2200}{5500}$	

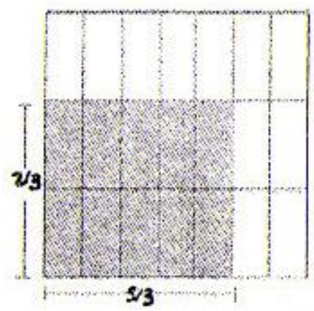
Este equipo también logró obtener la fórmula de la multiplicación pero fue más utilizando el algoritmo y lo que ya había resuelto anteriormente, en esta parte de la acción.

Con base a lo obtenido en los ejercicios anteriores ya puedes expresar que

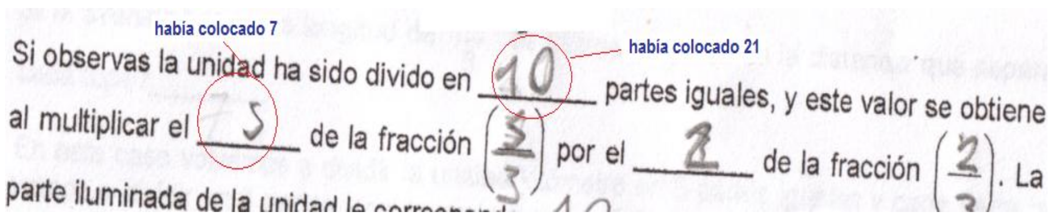
La multiplicación de las fracciones

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Y es que en la parte de la acción donde se utilizaba el cálculo de áreas para la multiplicación de fracciones (para que manejaran otra representación del concepto) yo los confundí al poner 5/3 en vez de 5/7, en la figura



Ya que al resolver esta parte de la acción, se observa que la estaban resolviendo bien, pero este error los hizo borrar los resultados que tenían bien.


había colocado 7
había colocado 21
Si observas la unidad ha sido divido en 10 partes iguales, y este valor se obtiene al multiplicar el 5 de la fracción (5/3) por el 2 de la fracción (2/3). La parte iluminada de la unidad le correspond...

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

Debido a los errores cometidos por los alumnos al contestar esta acción, y que la mayoría de ellos no continuó haciéndola se decidió hacer un cuestionario para determinar sus motivos, los problemas que tuvieron al realizar esta acción y lo que les gustó y no les gustó de esta acción.

La primera pregunta tenía que ver con los motivos por los cuales ellos habían decidido continuar con su educación media superior, la respuesta que contestó la mayoría era porque querían seguir continuando sus estudios y obtener así un mejor trabajo.

1.) Por que quiero llegar a trabajar en puestos muy grandes ademas para darle una satisfaccion a mis padres
1.- Entré para superarme como persona y tener una futura licenciatura.
1.- Para tener un futuro mas seguro, divertirme y conocer gente nueva
RESPUESTAS 1.- Para poder superarme y aprender mas cada dia

Como observamos los motivos por los cuales ellos estudian son motivos exteriores que no pertenecen a la materia. Sin embargo nuestro interés era que al ir resolviendo la acción se modificaran sus motivos externos por motivos internos de tal manera que coincidieran con los de la Actividad y se generara el estudio. Pero esto no se consiguió, de la manera en cómo se deseaba, así que se trató de investigar cuales fueron los posibles problemas, para eso se realizo la siguiente pregunta: ¿Cuando se les entrego la Acción 1 a tu equipo, trabajaron directamente en la acción o decidieron hacer otra cosa? ¿Por qué?

10R=Otra cosa por que no le entendimos muy bien
10. La verdad decidimos hacer otra cosa ya que era demasiado trabajo y no tenía ningún valor en la escala de la materia.
10- SINCERAMENTE NOS PUSIMOS A PLATICAR, PERO RESPONDI ALGUNAS COSAS (las que alcance a hacer).
10-Trabajamos en la acción porque repasamos un tema ya visto y resolvimos algunas dudas
10.- Trabajamos en aconjunto por que es un trabajo el cual ayudara a una estudiante igual que yo, y mas adelante a mi tambien me gustaria que me apoyaran.
10º fue un trabajo didactico ya entonces, no hicimos nada pero lo resolvimos previamente

Esto me permite darme cuenta que en la etapa de *Formación de la base orientadora de la nueva acción*, debí de hacer notar la importancia que tenia para su aprendizaje los números racionales, y creo que esto se pudo haber logrando haciéndole denotar la importancia que tienen para su utilización en otras materias, se que por el tiempo no lo realice y decidí darle prioridad a la etapa de *Formación del aspecto material de esta acción*, para ver como influía esta acción en el aprendizaje de los alumnos, creyendo además que la acción los motivaría a estudiar, pero no fue así ya que a pesar de que en el salón de clases la mayoría trabajo, cuando se les dejo de tarea sólo dos equipos decidieron continuar trabajando en su casa.

Como uno de los aspectos importantes dentro de la Teoría de la Actividad es el hecho de concebir el aprendizaje como un producto social y es por medio de esta interacción que se origina la ZDP, consideramos importante el hecho de que los alumnos trabajen en equipo, así que para realizar la Actividad decidimos que los alumnos trabajaran en equipo, pero ¿qué significa para ellos trabajar en equipo?:

5-Trabajar en equipo es trabajar de forma equitativa y repartir el trabajo en todos

5. Es menos trabajo, la verdad cuando trabajamos en equipo haces menos aunque el trabajo sea grande
5-) Apoyarnos entre sí y mas ayuda y trabajamos todos unidos.
5:- Compartir conocimientos y resolver lo que se nos indica.
5º es la unión en un conjunto para llegar a un objetivo -colaborar con nuestros puntos de vista y soluciones

Estas fueron algunas de las ideas que se hicieron presentes a lo largo de esta pregunta, lo que más se observó en lo alumnos es que el trabajo en equipo lo consideran como el acto de dividirse el trabajo en partes iguales, y les cuesta trabajo compartir sus ideas, discutirlas y reflexionarlas y por eso deciden hacer otras cosas.

Otra de las preguntas que hicimos fue: ¿Cuando resolvían la acción leían el material o se iban directo a los problemas?, esta pregunta surgió, por que la acción se había dividido en 6 partes y cada una de estas partes iniciaba con problemas que tenían como finalidad que el alumno empleara el concepto de fracción y sus operaciones para resolverla, pero cada uno de estos problemas tenían una orientación, sin embargo los alumnos se saltaba estas partes:

11. Nos ibamos directo a los problemas ya que Es lamentable que no nos guste era mucho escrito. creo que con mas "ANIMO" si se podria. leer pero
11- Nos ibamos directo al problema por que creiamos que
11.- ibamos directo a los problemas, por que son problemas que con facilidad recordamos.
11* Cuando resolviamos los ejercicios leiamos porque en ocaciones encontrabamos la solucion o la respuesta de lo plantiado

Lamentablemente este es una de los problemas que enfrentan la educación en nuestro país, el hecho de que los alumnos no leemos, y lo poco que leemos no lo sabemos reflexionar, afectando al aprendizaje a un nivel general.

También les pregunte a los alumnos donde tuvieron dificultades al resolver la acción y lo que no les gustó:

12º Pues la definicion porque confundia porque las cosas las llamaban de distintas formas
2- la parte de triangulos con espacios en blanco
aveces no entendia el planteamiento de los problemas lo queno me gusto fue que en ocaciones se repetian algunos ejercicios
13.- Que en las fracciones en la figura tenia una fraccion y al resolverlo nos daba otro

Aunque algunos pusieron que no tuvieron dificultad la mayoría menciona que tuvo dificultades en los problemas de las figuras y que el planteamiento de los problemas no le entendía. En el caso de los alumnos que tienen dificultades con las figuras, principalmente es porque tienen dificultades con la aplicación del concepto, en el segundo caso sí encontramos que algunos problemas estaban mal planteados y esto nos llevó a realizar una revisión de la Actividad para que la acciones quedaran más explicitas y comprensibles, pero también considero que en algunas partes de la acción no entendieron a los problemas por la falta de comprensión del concepto y la dificultad que tienen para leer y reflexionar.

Por último se les pregunto a los alumnos que fue lo que les gustó, y algunas de las respuestas son las siguientes:

14=Que se relaciona con figuras.
14R= Trabajar en equipo.
14= QUE LAS RESOLVI POR MI MISMA.
14.- Pues estuvo bien así lo comprendí un poco más el tema de las fracciones
14º La forma de la que lo veian mucho mas sencillo no tan complicado.
14.- Las actividades y los problemas.

Aunque algunos alumnos les costaron trabajo los problemas de las figuras, también fue algo de lo que les llamo la atención y la mayoría de los equipos trato de resolver, y también mencionaron que entendieron mejor las fracciones.

CONCLUSIONES FINALES

La investigación de este trabajo fue guiada por la siguiente pregunta de investigación: ¿Una actividad elaborada con base en el Enfoque Histórico-Cultural y la Teoría de la Actividad de Leontiev, que tiene como finalidad el aprendizaje de los números racionales, de qué manera contribuye a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje?

Lo que observamos al aplicar esta Actividad es que los alumnos utilizaban un pensamiento en complejos y pseudoconceptos, para dar solución a los problemas planteados, poniendo en práctica procedimientos aprendidos (sin una relación significativa con el concepto con él que estaban trabajando), y observe que al trabajar con una representación diferente del concepto (de la que comúnmente han trabajado) o con otro objeto tratan de aplicar ese procedimiento o alguno similar y esto los lleva a dar una solución errónea del problema.

"La actividad nos permite identificar estas dificultades (conceptuales) que tienen los alumnos en su aprendizaje, y así modificar la enseñanza, ya que se identifica el tipo de error particular que está cometiendo cada equipo, y esto es importante porque al ubicar estas dificultades ya podemos orientarlos, para que se apoyen realmente en el concepto, modificando así *la etapa de L*a f*ormación del aspecto material* de esta acción ya no solamente de manera grupal sino para cada equipo, pero hay que tener en cuenta que esto requiere de una constante revisión de lo que está haciendo el alumno dentro y fuera del salón de clases y que el profesor debe conocer bien la actividad y lo que se pretende logar con las herramientas semióticas y operaciones particulares de cada acción. Sólo haciendo esto se podrá conseguir que el alumno pase a las siguientes etapas de la formación de las acciones mentales y se consiga su aprendizaje."

Con respecto al material un error que cometí aquí fue el hecho de creer que el material sería capaz de corregir estos errores en el pensamiento del alumno al ir trabajando con diferentes representaciones del concepto de fracción. El alumno al encontrarse con este tipo de problemas los omite o utiliza un pensamiento asociativo y trata de contestar aquellos que le son familiares, aunque en el material se les trata de dar una orientación a cada problema.

Con base a estos errores se realizaron pequeñas modificaciones en el material, una de estas fue remarcar en cada parte de la Acción 1, la parte del concepto en que se apoyaría el alumno para resolver los ejercicios, además que para que el alumno se vea en la necesidad de leer el material, los ejemplos que se ponen ya son menos desarrollados y se les pide a los alumnos una mayor participación en estos ejemplos, pidiéndoles que contesten ciertas preguntas que se consideran dentro de su zona de desarrollo real.

Con respecto al trabajo en equipo dentro del salón de clases sabemos que esto es importante porque permitiría a los alumnos menos capacitados, colaborar con alumnos más capacitados y de esta manera trabajar en su ZDP, sin embargo en el salón de clases se observa que el trabajo lo realiza el que consideran que es el que sabe más o dividen el trabajo que se les deja entre los miembros del equipo. Para corregir esto es necesario no solamente orientar a los alumnos, sino también generar confianza entre los integrantes del equipo para que puedan expresar todos los alumnos sus ideas.

Como un comentario final mencionaré dos aspectos que aunque no pertenecen a la actividad si influyeron en ella.

El primero aspecto que influyó al poner en práctica esta actividad fue el gran número de alumnos correspondientes a cada grupo (el grupo 1-2 de 49, y el grupo 1-1 de 45), decidir cuántos integrantes iban a componer cada equipo fue una cuestión difícil de decidir, lo ideal en un principio era tener entre 7 y 8 equipos para poderles dar una atención adecuada de lo que tenían que hacer teniendo en cuenta de que el tiempo era reducido, pero esto hacia que los equipos estuvieran conformados por 6 ó 7 alumnos y esto iba a dificultar la comunicación entre ellos, sin dar la oportunidad de que todos participaran, y sí se hacían equipos de 4 alumnos cada uno, íbamos a tener entre 11 y 12 equipos, lo cual dificultaría poder atender a todos los equipos, por lo cual decidí formar equipos de 5 integrantes cada uno ya que era importante que se diera una comunicación entre los alumnos para que trabajaran dentro de la ZDP, aunque el número de integrantes se redujo en cada equipo, aún el número de equipos formados fue alto influyendo en que no se pudiera determinar dentro del salón de clases las dificultades particulares que se estaban originando respectivamente en cada equipo (como se menciono anteriormente), influye en los resultados obtenidos.

Otra dificultad que se encontró, fueron las creencias que tuvieron los alumnos con respecto a este trabajo, como se puede observar en las repuestas hechas a la pregunta: ¿Cuando se les entrego la Acción 1 a tu equipo, trabajaron directamente en la acción o decidieron hacer otra cosa? ¿Por qué? (analizadas anteriormente). Ya que sus respuestas reflejan no solamente que no se logro motivar a los alumnos, sino que algunas de estas respuestas reflejan muy en particular sus creencias con respecto a este tipo de trabajo, por ejemplo cuando mencionan los alumnos que: “era demasiado trabajo y no tenía ningún valor en la escala de la materia”, reflejan la creencia de que una actividad que no tenga ningún valor dentro de su calificación no vale la pena resolverla, o el siguiente comentario: “trabajamos en conjunto porque es un trabajo el cual ayudara a una estudiante igual que yo, y más adelante a mí también me gustaría que me apoyaran”, reflejando una creencia con un carácter colaborativo y de responsabilidad social, sin embargo ambas creencias desvinculan a la actividad realizada con su proceso de aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

BAQUERO, Ricardo. *Vigotsky y el aprendizaje escolar.* Argentina, Aique, 1996.

CAMPOS Hernández, Miguel Ángel. *Construcción del conocimiento en el proceso educativo.* México, Plaza y Valdés, 2005.

CASTORINA, José A. *Piaget – Vygotsky: Contribuciones para replantear el debate.* España, Paidós, 2004.

C. MOLL, Luis. *Vygotsky y la Educación.* Argentina; Aique, 2003.

CORTÉS, José Carlos. "Ambiente Informático Interactivo para el aprendizaje de las cónicas*", Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 2005.

DOLORES Flores, Crisológo. *Investigaciones en Matemática Educativa II. Cinvestav (Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN).* México, Iberoamérica, 1998.

GARCÍA Sánchez, Jesús Nicasio. *Manual de Dificultades de Aprendizaje.* España, Narcea, 1998.

LURIA, LEONTIEV, VIGOTSKY. *Psicología y Pedagogía.* España, Akal, 1979.

MATA Pérez, Filiberto. *Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la geometría analítica: el caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van Hiele.* Tesis de Maestría en Matemática Educativa CICATA (Centro de Investigación en Ciencia Aplica y Tecnología Avanzada del IPN), D.F. 2006.

PÁEZ Murillo, Rosa Elvira. *Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite.* Tesis de Maestría en Matemática Educativa. Cinvestav (Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN), D.F., 2001.

PETROVSKI, A. *Psicología Evolutiva y Pedagógica*. México. Letras, S.A., 1998.

PAZ Desiree, Alvarado. *Creencias de Estudiantes de Bachillerato sobre aspectos de la enseñanza de la Matemática en el contexto de la Resolución de problemas.* Tesis de Maestría en Matemática Educativa. Cinvestav (Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN), D.F.

VYGOTSKY, L. S. *Obras escogidas II.* España, A. Machado Libros, 2001.

WERTSCH V., James. *Vygotsky y la formación social de la mente.* España; Paidós, 1988.

AVILÉS, Karina. *La Jornada.* [en línea] Septiembre 2007. Disponible en la web en: http://www.jornada.unam.mx/2007/09/19/index.php?section=sociedad&article=046n1soc

CHÁVEZ, Silvia. *Revista Caminos abiertos 2008.* [en línea] Octubre 2008. Disponible en la Web en: http://caminosabiertos2008.blogspot.com/2008/10/la-teora-de-la-actividad-en-la-enseanza.html

DEL VALLE, Sonia. Intentan cometer suicidio jóvenes del país. [en línea] Septiembre 2008. Disponible en la Web en: http://www.sepbcs.gob.mx/comunicacion/Noticias%20educacion/Noticias%202008/suicidio.htm#(*1).

LÓPEZ, Susana. *Noticieros Televisa.* [en línea] Agosto 2008. Disponible en la web en: http://www2.esmas.com/noticierostelevisa/008275/reprueban-matematicas-50-alumnos-preparatoria.

VARGAS, Raquel. *Niños Mexicanos obesos; Sólo el 35% práctica deportes*. [en línea] Noviembre 2005. Disponible en la web en: http://www.cronica.com.mx/nota.php?id_nota=211637.

VERGARA, Margarita. *Fracciones.* [en línea] 2009. Disponible en la web en: http://www.rmm.cl/index_sub.php?id_contenido=9711&id_seccion=2371&id_portal=369.

SUBSECRETARIA DE EDUCACIÓN BÁSICA. *Materiales Educativos en línea*. [en línea] 2009, Disponible en la web en: *http://basica.sep.gob.mx/seb2008/start.php*?act=matedusel.

INEGI. *Matrícula escolar según sexo para cada nivel educativo, ciclos escolares 2002/2003 a 2006/2007*. [en línea] 2008, Disponible en la web en: http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/espanol/rutinas/ept.asp?t=medu17&c=3285

ANEXOS

ACCIÓN 1

¿QUÉ ES UNA FRACCIÓN?
LA PARTE Y EL TODO

Objetivo: El alumno aprenderá el significado de fracción como una relación **parte-todo**, y definirá las reglas de sus operaciones, mediante la solución de problemas y ejercicios.

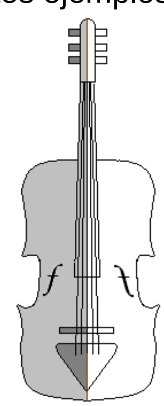
AL ESTUDIANTE: Muchos de los errores en el aprendizaje de los números racionales se debe a que el alumno desconoce los significados de fracción, esta acción está dedicada a estudiar el significado de fracción como una relación **parte-todo**.

Desde el comienzo de las primeras comunidades, el hombre necesito determinar medidas, la necesidad de contar impulsó la invención de los números naturales y la de medir generó la invención de las fracciones o “números quebrados”.

Para medir distintas magnitudes como peso, longitud, tiempo, velocidad, etc. es necesario considerar partes de la unidad. Por ejemplo; tú peso es de ________ Kilogramos, tú altura es de ________ metros y tú cintura mide ________ metros, que no necesariamente son cantidades enteras. Por ejemplo un dato que se obtuvo en el 2005 es que: “La cintura de los mexicanos es de un promedio de 95.4 centímetros”[45], esta medida está formada de una parte entera y otra fraccionaria de la unidad (centímetro). ¿Podrías dar un ejemplo de alguna medición que no sea entera y que tú realizas?____.

Una medida de 95.4 centímetros representa una fracción ¿Por qué? _______________
____.

Para dar una respuesta precisa a lo anterior iniciemos con los siguientes ejemplos:



1. Observa la siguiente figura, la parte iluminada representa la fracción ________, porque la unidad (la figura) ha sido dividida en ________ partes iguales de las cuales se ha tomado ________ parte.

2. Tú regla tiene como unidad de medida el _________, el cual se divide en _________ partes iguales, y cada parte en que quedo dividida la unidad representan la fracción ________ de la unidad (centímetro). La división de la unidad se hace para tener una mejor aproximación de lo que estamos midiendo.

3. ¿Cuál es el total de alumnos en tú grupo?________, ¿Cuántos son de tú sexo?________ y ¿Qué fracción del grupo corresponde a tú sexo?________. En este caso no se trata de una unidad sino de un conjunto, el total de elementos de un conjunto es equivalente al número de partes en que es dividida la unidad.

[45] VARGAS, Raquel. *Niños Mexicanos obesos; Sólo el 35% práctica deportes.* [en línea] Noviembre 2005. Disponible en la Web: http://www.cronica.com.mx/nota.php?id_nota=211637

Cada una de las fracciones anteriores representa una relación **parte-todo** de la unidad**,** donde:

$\mathbf{a}$ Numerador (Representa la parte)
$\mathbf{b}$ Denominador (Representa el todo)

Para encontrar las fracciones anteriores, ***cada unidad se dividió en cierto número de partes iguales*** y se consideraron algunas de estas partes, en cada caso la fracción tiene como **denominador el número de partes en que se dividió la unidad** y el **numerador el número de partes que se consideraron**.

Por ejemplo en el primer caso que corresponde a la figura, la unidad se dividió en dos partes iguales de las cuales se considero una parte (la que estaba iluminada) por eso la fracción que representa la parte iluminada es $\frac{1}{2}$, en el segundo caso la unidad es el centímetro el cual como observas en tú regla se divide en 10 partes iguales y cada una de estas partes representa $\frac{1}{10}$ de la unidad (centímetro) y en el tercer caso ya no estamos trabajando con una unidad sino con un conjunto, en el caso del conjunto él todo son el total de elementos que contiene, y la parte que se considera son aquellos elementos que cumplan con una condición, por lo que en el tercer caso el total de elementos es el total de alumnos que hay en tú grupo y la parte que se consideran son aquellos que cumplan con la condición “que pertenezcan a tú mismo sexo”.

Con base a lo anterior, ¿Qué fracción representa la parte iluminada en las siguientes figuras?

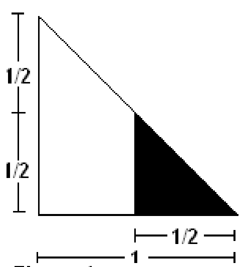


Figura 1

Fracción: ________

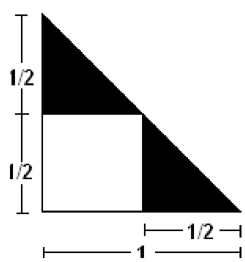


Figura 2

Fracción: ________

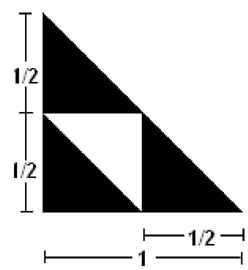
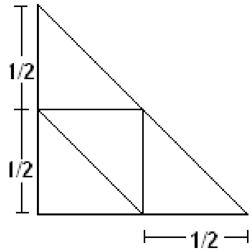


Figura 3

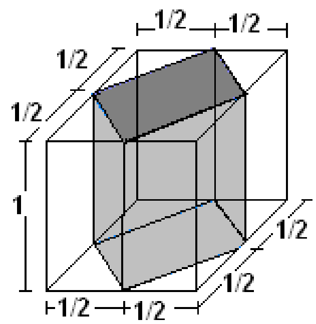
Fracción: ________

Recuerda que para poder encontrar la fracción debemos **dividir la unidad en partes iguales**, para eso te proponemos la siguiente partición:



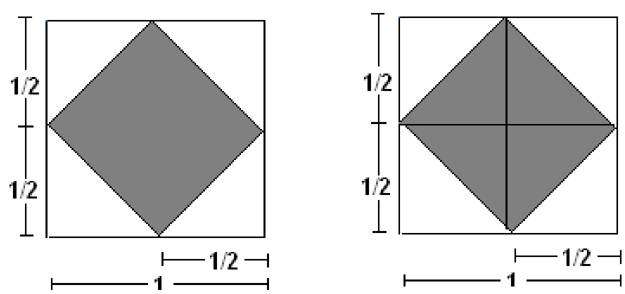
Ahora falta ver que realmente la partición divide a la figura en partes iguales, como te podrás dar cuenta la partición ha dividido al triángulo en cuatro partes, la base de cada triángulo mide ________, y su altura ________, por lo que el área de cada triángulo es de ________. Como el área de cada triángulo es la misma para todos, podemos afirmar que *la unidad ha sido dividida en cuatro partes iguales* y que la parte iluminada en la primera figura representa la fracción $\frac{1}{4}$. Con base a esto calcula las otras fracciones que se te pidieron.

Veamos ahora este otro ejemplo: ¿Qué fracción representa la parte blanca del cubo?

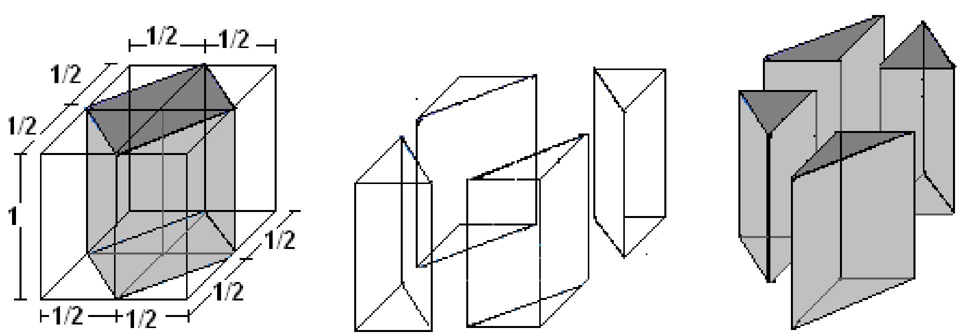


Fracción: ________

En este caso estamos trabajando con una figura tridimensional (cubo), y para encontrar la fracción debemos dividir al cubo en partes iguales, para eso primero analicemos su cara superior y la dividimos de la siguiente manera:

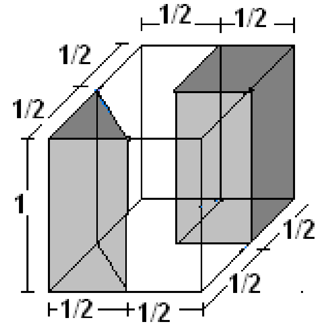


Esta partición ha dividido al cuadrado en ocho partes iguales, ya que el área de cada triángulo es ________. Y esta partición divide al cubo en ocho prismas.



El área de la base de cada prisma es de ________, y su altura es de________. Si el volumen de un prisma es el área de su base por su altura, tenemos que el volumen de cada prisma es de ________, por lo que hemos dividido al cubo en ocho partes iguales, y podemos concluir que la parte blanca del cubo representa la fracción $\frac{}{8}$.

Con base a esto que fracción representa la parte blanca del cubo



Fracción: ________

Para continuar analicemos el siguiente documento que se refiere a las defunciones por tuberculosis pulmonar de Enero a Abril del 2008 en México.

INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL
SEGURIDAD Y SOLIDARIDAD SOCIAL

www.imss.gob.mx | Inicio | Contacto | RSS | Mapa del Sitio

INFORMACIÓN ESTADÍSTICA EN SALUD

Defunciones por tuberculosis pulmonar por grupos de edad
Enero a Abril Del 2008

Delegación	Total	Total Masculino	Total Femenino	Grupos de Edad					
				10-19		20-59		60 y más	
				Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Total Nacional	125	86	39	1	1	45	15	40	23

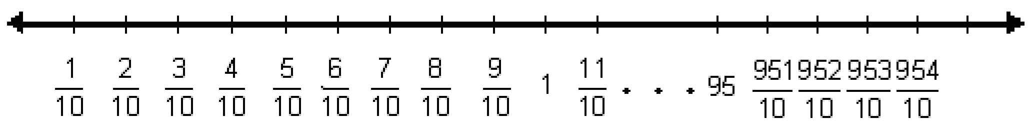
Con base a esta información que fracción corresponde a los hombres y mujeres con una edad entre los 10-59 años que murieron a causa de la tuberculosis pulmonar _____ (Para encontrar la fracción en este caso, recuerda que ya no estamos trabajando con una unidad, sino con un conjunto, y el todo lo forman el total de elementos de este conjunto).

Como hay un total de 125 defunciones de hombres y mujeres a causa de la tuberculosis, el todo está formado por 125 personas, y los elementos que cumplen con la condición anterior son 62, que se obtienen al sumar las dos personas que murieron con una edad entre los 10 y 19 años (hombre y mujer respectivamente) y los 45 hombres y 15 mujeres con una edad entre los 20 y 59 años, por lo que la fracción de hombres y mujeres con una edad entre los 10-59 años que murieron a causa de la tuberculosis pulmonar es $\frac{62}{125}$.

Ahora di cual es la fracción de hombres y mujeres con una edad mayor a los 19 años que murieron a causa de la tuberculosis pulmonar________, la fracción de hombres con una edad entre los 10-59 años que murieron a causa de la tuberculosis pulmonar ________ y la fracción de mujeres con una edad mayor a los 19 años que murieron a causa de la tuberculosis pulmonar________.

Las fracciones anteriores representan una relación **parte-todo** de la unidad. Entonces surge la pregunta ¿una medida de 95.4 centímetros representa una fracción?

Veamos que 95.4cm significa que son 95 unidades (centímetros), más una fracción $\frac{4}{10}$ de la unidad. Si queremos representarla en forma de una fracción es necesario dividir en 10 partes iguales cada una de las 95 unidades lo que nos va a dar 950 partes, más 4 de la parte fraccionaria, o sea que $95.4 = 95 + \frac{4}{10} = \frac{950}{10} + \frac{4}{10} = \frac{950+4}{10} = \frac{954}{10}$, que de manera gráfica sería:



Una fracción como $\frac{4}{10}$ representa algo menor que la unidad por eso su numerador es menor que el denominador, a este tipo de fracción se le llama **fracción propia**. En cambio, $\frac{954}{10}$ representa algo mayor a la unidad y observemos que el numerador es mayor que el denominador, a este tipo de expresiones también se les considera una fracción y se les llama **fracciones impropias**. Luego la respuesta es, 95.4 si es una fracción.

Dada una fracción impropia para expresarla en una cantidad entera más su parte fraccionaria utilizamos la división, dividiendo el numerador de la fracción entre el denominador, el resultado de la división nos indica el número de unidades que tiene la fracción y el residuo y el divisor indican la parte fraccionaria (parte-todo) de la unidad. Por ejemplo:

$$\frac{954}{10} \Rightarrow \begin{array}{r} 95 \\ 10\overline{)954} \\ 4 \end{array}$$

→El cociente indica cuantas unidades tiene la fracción.

→El residuo y el divisor indican la parte fraccionaria $\left(\frac{4}{10}\right)$

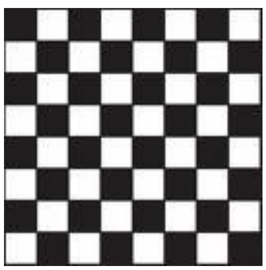
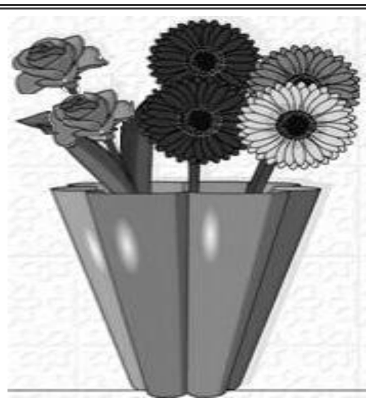
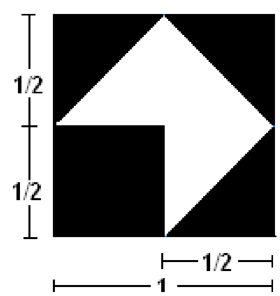
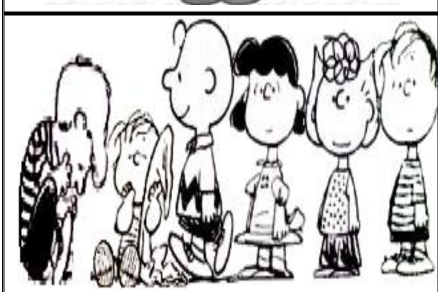
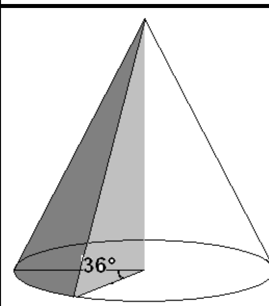
Así que, $\frac{954}{10} = 95 + \frac{4}{10}$. Los **números mixtos** nos dicen explícitamente la parte entera y la fraccionaria de una fracción impropia, así: $\frac{954}{10} = 95\frac{4}{10}$. ¿Cómo expresarías la fracción impropia $\frac{5}{3}$.en número mixto? _______.

Para concluir: En una fracción $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, **“b”** representa las partes en que se ha dividido la unidad y **“a”** las partes que se han tomado de ella.

AL ESTUDIANTE: Los alumnos cometen el error de decir que $\frac{2}{0}=0$ o $\frac{2}{0}=2$, pero como has visto, esto no tiene sentido, ya que la unidad no se puede dividir en cero partes. Por eso se pide que la fracción $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, “**a**” y “**b**” pertenezcan a los enteros y “**b**” sea distinto de cero.

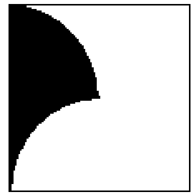
Ejercicios:

1. Completa la siguiente tabla:

	Que fracción representa		Que fracción representa
	El color blanco:		Los gatos:
	Las rosas en el ramo:		El color blanco
	Las niñas:		La parte iluminada del cono:

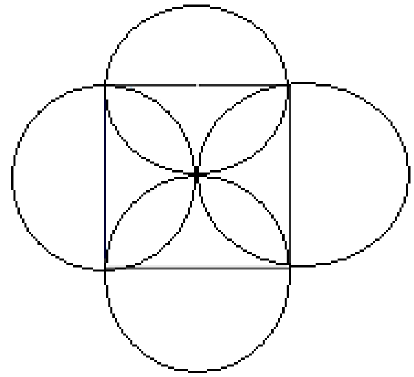
2. ¿Qué fracción representa la parte iluminada del cuadrado?

Fracción: ________

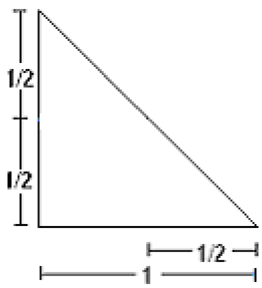


Fracción: ________

Para poder encontrar las fracciones, te sugerimos que observes la relación que existe entre la figura de la derecha y la anteriores, sí de esta obtuvimos las anteriores.



3. Represente en la siguiente figura la fracción $\frac{3}{8}$



4. Expresa las siguientes fracciones impropias en una cantidad entera más su parte fraccionaria y después en número mixto

a) $\frac{532}{4} =$ b) $\frac{35}{21} =$ c) $\frac{119}{17} =$ d) $\frac{3215}{19} =$

5. Analiza la siguiente tabla y contesta lo que se te pide con base a ella

Reporte Anual de la Mortalidad Atribuible al Tabaco en México

Estimado de Muertes Atribuibles al Consumo de Tabaco en México
Año 2000 (Hombres)

Edad	Neoplasias	E. Cardiovascular	A. Cerebrovascular	E. Respiratorias	Total
35	117	205	74	69	465
40	179	327	102	101	709
45	261	468	151	110	990
50	460	654	225	133	1471
55	628	874	327	286	2115
60	893	1163	391	484	2902
65	1073	588	143	827	2631
70	1130	655	175	1191	3151
75	1075	756	213	1537	3581
80	679	641	174	1524	3019
85	573	1172	295	2980	5019
Totales	7070	7503	2269	9241	26083

¿Qué fracción representa a los hombres que murieron a los 35 años por causa del tabaco?

¿Qué fracción representa a los hombres que murieron a los 55 años a causas del tabaco por enfermedades respiratorias?

¿Qué fracción representa a los hombres que murieron a los 85 años, de los hombres que murieron a causa del tabaco por causas cardiovasculares?

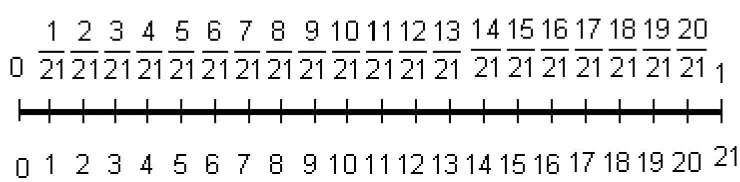
FRACCIONES EQUIVALENTES

Comencemos con el siguiente ejemplo: El Smart & Pulse 61 CV es el auto que menos gasolina consume, ya que recorre 21 kilómetros por litro. ¿Cuánta gasolina consumirá a los 35 kilómetros? ________.

En este ejemplo tenemos que en 21 kilómetros se consume un litro de gasolina, y faltan 14km para recorrer los 35km, entonces hay que calcular la fracción de un litro de gasolina con que se recorren 14km (con esta miniatura de auto).

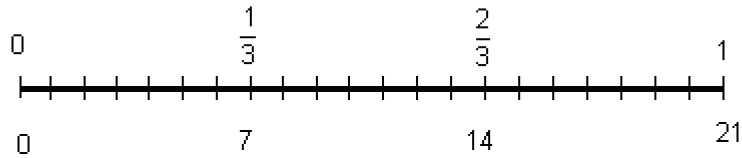
Para calcular dicho consumo, proponemos lo siguiente: dibujamos un segmento que represente la unidad (un litro de gasolina) y que al mismo tiempo represente los 21 km que se recorren con dicha unidad.

Ahora fraccionamos el segmento unitario en 21 partes iguales, para ver que fracción (parte) de la unidad (todo) le corresponden a los 14km.



Entre ambas escalas de medición observamos lo siguiente: un km se recorre con $\frac{1}{21}$ de litro, para recorrer 2 km ¿cuánto necesitamos? $\frac{\ }{21}$ de litro, ¿Y para recorre 3 km? $\frac{\ }{21}$ de litro y así sucesivamente, así que, para recorrer 14km se consume $\frac{\ }{21}$ de litro de gasolina.

Veamos de otra manera cómo calcular, usando el **MCD** (14,21)=7, la fracción de gasolina con la que se recorren 14 km.



Donde entre ambas escalas se establece lo siguiente, para recorrer 7km necesitamos $\frac{}{3}$ de litro, y para recorrer 14km necesitamos $\frac{}{3}$ de litro (Esta manera de obtener la fracción de gasolina con el **MCD** (14,21)=7, nos indica que debemos dividir los 21km en tres partes de 7km cada una).

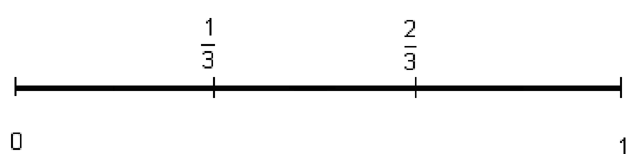
Con base en estas dos formas de trabajar la unidad (el todo) podemos decir que para recorrer los 14km necesitamos $\frac{14}{21}$ de litro ó $\frac{2}{3}$ de litro, o sea que, ambas fracciones representan la misma parte de la unidad (litro), es decir, $\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$.

Así, para recorrer los 35km necesitamos 1 litro más $\frac{}{21}$ de litro ó 1 litro más $\frac{}{3}$ de litro, que en fracción impropia se representan como $\frac{}{21}=\frac{}{3}$. Esta igualdad entre fracciones nos lleva al significado de ***FRACCIONES EQUIVALENTES*****.**

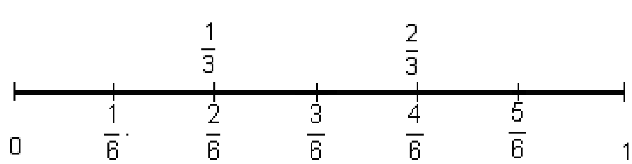
AL ESTUDIANTE: El método que hemos aplicado para resolver el problema es el de superposición de escala, a continuación vamos a precisar lo que significa una fracción equivalente y como obtenerlas.

Dos fracciones se dicen que son equivalentes si representan las mismas partes de la unidad, en este ejemplo hemos visto que $\frac{14}{21}$ y $\frac{2}{3}$ son equivalentes por que representan la misma parte de la unidad ¿Pero podemos calcular más fracciones equivalentes?

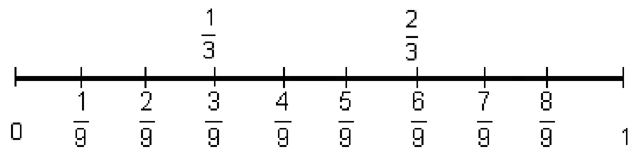
Para eso dibujamos un segmento unitario y lo dividimos en tres partes iguales.



Si cada una de estas partes la dividimos en dos partes iguales tenemos que $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.



Si en vez de dividir cada parte en dos partes iguales la dividimos en tres partes iguales tenemos que $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$.



Si este procedimiento lo realizamos 9 veces las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$ que generamos son (completa la siguiente tabla):

Fracción	Partes en que se divide cada parte de la unidad	Fracción equivalente	Se multiplica al numerador por	Se multiplica al denominador por
	2			
	3			
	4			
	5			
2/3	6			
	7			
	8			
	9			
	10			

Con base a lo obtenido en la tabla anterior ya puedes expresar que

Una fracción equivalente de $\frac{a}{b}$, con b≠0 es la que obtenemos al multiplicar "a" y "b" por ________________.

Una fracción $\frac{a}{b}$ está reducida a su mínima expresión sí "**a**" y "**b**" son primos relativos.

Para encontrar una fracción equivalente reducida a su mínima expresión procedemos de la siguiente manera:

1. Utilizando el **MCD** como en el caso del gasto de gasolina y aplicando la ley de cancelación, donde teníamos que, **MCD** (14,21)=7 y entonces $\frac{14}{21}=\frac{7\times 2}{7\times 3}=\frac{2}{3}$

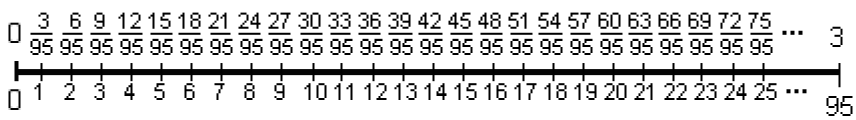
2. O también descomponiendo el numerador y denominador en sus factores primos y aplicando la ley de cancelación, como $\frac{14}{21}=\frac{2x7}{3x7}=\frac{2}{3}$.

Trabajemos con otro problema: Un guepardo corre 95 metros en 3 segundos, y se agota después de recorrer una distancia de 500 metros ¿Cuánto tiempo tiene para atrapar una presa? ________.

El guepardo recorre 95 metros en 3 segundos, como $190 = 95 \times 2$ entonces para que recorrerá 190 metros necesita 6 segundos, como $285 = 95 \times 3$ entonces para que recorrerá 285 metros necesita 9 segundos, como $475 = 95 \times 5$ entonces para recorrerá 475 metros necesita 15 segundos, pero para recorrer los 500 metros todavía hace falta 25 metros, para calcular el tiempo restante debemos dividir la unidad segundo de tal manera que esa parte que falta le pueda corresponder una fracción de la unidad (segundo).

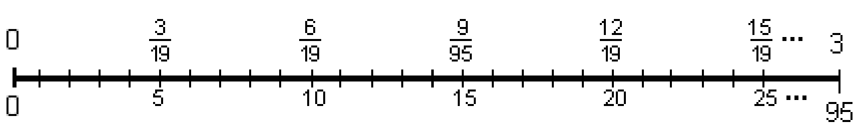
Para calcular eso proponemos lo siguiente: dibujamos un segmento que representa 3 segundos y al mismo tiempo la distancia que recorre en ese tiempo.

Ahora fraccionamos el segmento, por ejemplo podríamos dividir los 95 metros en 95 partes de un metro cada una y entonces tendríamos de manera gráfica lo siguiente:



Entre ambas escalas se establece lo siguiente, para recorrer 1 metro el guepardo tarda $\frac{3}{95}$ de segundo, para recorrer 2 metros tarda $\frac{}{95}$ de segundo y para recorrer 25 metros tarda $\frac{}{95}$ de segundo, y al reducir esta fracción a su mínima expresión tenemos que $\frac{}{95} = \frac{\times}{19 \times 5} = \frac{}{19}$. Entonces para recorrer esos 25 metros faltantes necesitamos $\frac{}{95}$ de segundo ó $\frac{}{19}$ de segundo.

De otro manera sería si comenzamos encontrando el **MCD** (25,95)=5, dividiendo los 95 metros en 19 partes de 5 metros cada una, ya que $95 = 19 \times 5$.



Entre ambas escalas se establece lo siguiente, para recorrer 5 metros tarda $\frac{3}{19}$ de segundo y para recorrer los 25 metros faltantes necesitamos $\frac{}{19}$ de segundo, como lo habíamos calculado.

Entonces para recorrer los 500 metros el guepardo tarda ___ segundos más $\frac{\quad}{19}$ de segundo.

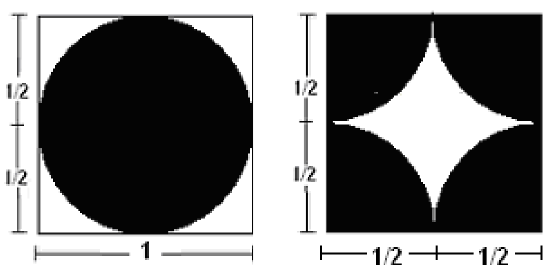
AL ESTUDIANTE: La importancia de encontrar fracciones equivalentes es que nos permite facilitar cálculos o simplificar problemas, por eso es necesario que aprendas bien su significado y la manera de obtenerlas.

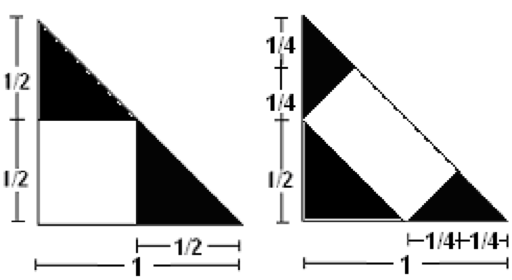
Ejercicios:

1. Reduce las siguientes fracciones a su mínima expresión y utiliza la expresión que encontraste para obtener fracciones equivalentes para obtener 7 fracciones equivalentes de cada fracción.

a) $\frac{5}{7} =$ b) $\frac{84}{105} =$ c) $\frac{33}{9} =$ d) $\frac{99}{132} =$

2. Determina si la parte iluminada en cada par de figuras es equivalente (representan la misma parte del todo), y explica porque.

b)


a)


Problema 1. Si la compañía que elabora el Smart & Pulse 61 CV desea innovar el auto de tal manera que recorra 24 kilómetros por litro. ¿Cuánta gasolina consumirá a los 35 kilómetros?, expresa la fracción en su mínima expresión.

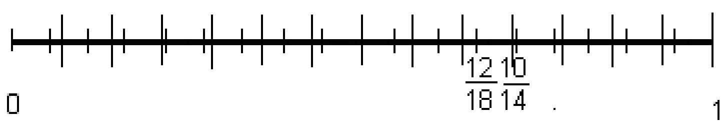
Problema 2. Una gacela recorre 200 metros en 9 segundos. a) ¿Cuántos metros recorre en 16 segundos? b) ¿Podrá alcanzar un Guepardo a la gacela si se encuentra a 100 metros de ella?, (Utiliza el ejemplo anterior)

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

AL ESTUDIANTE: Un obstáculo que enfrentan ustedes, es el que se presenta cuando deben determinar si una fracción es mayor (>), menor (<) o igual (=) con respecto a otra. Aplicando lo que ya has aprendido veras que determinarlo es muy sencillo.

Un ejemplo en el que necesitamos comparar fracciones es el siguiente: Supón que deseas comprar un automóvil, el vendedor te ha mostrado dos modelos y te ha dicho que el primero consume $\frac{12}{18}$ de litro mientras que el otro $\frac{10}{14}$ de litro para recorrer 10 kilómetros ¿Cuál te conviene comprar? ________.

Una manera de comparar cual fracción es mayor es de manera grafica, dividiendo la unidad en 18 y 14 partes y viendo que fracción tiene más parte de la unidad.



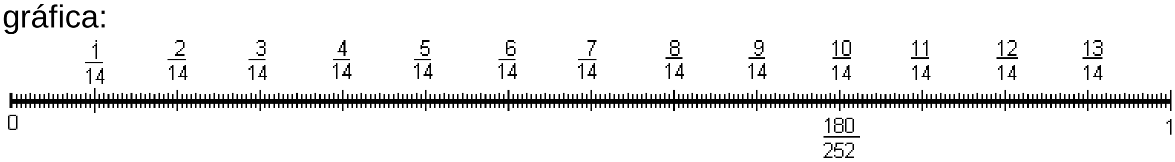
Con lo cual tenemos que $\frac{10}{14}\_\_\_\frac{12}{18}$ (>, < ó =) Por lo que te conviene comprar el que consume ______.

Pero también podemos proceder de la siguiente manera:

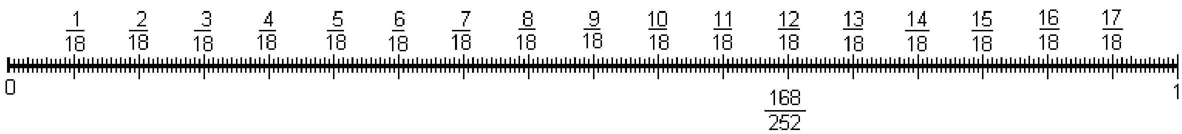
Llevar a cada fracción a fracciones equivalentes que tengan en común la misma división de la unidad y determinar cual fracción tiene más partes de la unidad.

¿Qué propones hacer para llevar a las fracciones $\frac{10}{14}$ y $\frac{12}{18}$ a fracciones equivalentes que tengan en común la misma división de la unidad? ____________________________ ____.

Por ejemplo, para llevar a las fracciones $\frac{10}{14}$ y $\frac{12}{18}$ a fracciones equivalentes que tengan en común la misma división de la unidad buscamos un múltiplo común de 18 y 14, como podría ser su producto $\left(18 \times 14 = 252\right)$. Esto lo utilizamos de la siguiente manera; para encontrar la fracción equivalente de $\frac{10}{14}$; dividimos a la unidad en 14 partes y cada una de estas partes en 18, con lo que la unidad quedaría dividida en ______ partes, de las cuales la fracción $\frac{10}{14}$ tiene ______ partes, como se muestra a continuación de manera gráfica:



Para la fracción $\frac{12}{18}$ dividimos a la unidad en 18 partes y cada una de estas partes en 14, con lo que la unidad queda dividida en ______ partes de las cuales la fracción $\frac{12}{18}$ tiene ______ partes.



Entonces la fracción equivalente a $\frac{10}{14}$ que nos conviene es aquella que obtenemos al multiplicar al numerador y denominador por 18 es decir $\frac{10}{14}=\frac{\quad\times\quad}{14\times 18}=\frac{\quad}{252}$, y la fracción equivalente a $\frac{12}{18}$ que nos conviene es aquella que obtenemos al multiplicar al numerador y denominador por 14 es decir $\frac{12}{18}=\frac{\quad\times\quad}{18\times 14}=\frac{\quad}{252}$. Con base a esto tenemos que la fracción $\frac{12}{18}$ tiene ________ partes de 252 partes, mientras que la fracción $\frac{10}{14}$ tiene ________ partes de 252 partes. Con lo cual tenemos que $\frac{10}{14}\underline{\quad}\frac{12}{18}$. Y nos conviene comprar el auto que consume ________ de litro.

Pero antes de comenzar hacer cualquier cálculo lo recomendable es simplificar cada fracción a su mínima expresión, con lo que tendríamos $\frac{10}{14}=\frac{\quad\times\quad}{7\times 2}=\frac{\quad}{\quad}$ y $\frac{12}{18}=\frac{\quad\times\quad}{3\times 6}=\frac{\quad}{\quad}$, luego encontrar el **mcm** (7,3)=21 estos nos indica que debemos dividir a la unidad en 21 partes, entonces para la fracción $\frac{5}{7}$ dividimos a la unidad en 7 partes y cada una de estas partes en 3, con lo que la unidad queda dividida en ______ partes de las cuales la fracción $\frac{5}{7}$ tiene ______ partes, y para la fracción $\frac{2}{3}$ dividimos a la unidad en 3 partes y cada una de estas partes en 7, con lo que la unidad queda dividida en ______ partes de las cuales la fracción $\frac{2}{3}$ tiene ______ partes.

Entonces las fracciones equivalentes que nos conviene son $\frac{12}{18}=\frac{\quad}{3}=\frac{\quad\times\quad}{3\times 7}=\frac{\quad}{21}$ y $\frac{10}{14}=\frac{\quad}{7}=\frac{\quad\times\quad}{7\times 3}=\frac{\quad}{21}$. Con lo cual tenemos que $\frac{10}{14}\underline{\quad}\frac{12}{18}$ porque la fracción $\frac{12}{18}$ tiene ________ partes de 21 partes, mientras que la fracción $\frac{10}{14}$ tiene ________ partes de 21 partes. Y nos conviene comprar el auto que consume ________ de litro, como lo obtuviste anteriormente.

Si el consumo de gasolina de dos automóviles es $\frac{12}{18}$ de litro y $\frac{14}{21}$ de litro ¿Cuál modelo te conviene comprar? (Para la división de la unidad utiliza el producto de los denominadores y luego resuélvelo simplificando cada fracción) ___________________.

AL ESTUDIANTE: Si te das cuenta para determinar cual fracción es mayor lo único que debemos de ver es que fracción tiene más partes de la unidad, cuando la división de la unidad en cada fracción es la misma

Si la división de la unidad la obtenemos encontrando el producto de sus denominadores, podemos expresar que:

Una fracción "$\frac{a}{b}$" es mayor a una fracción "$\frac{c}{d}$" si: ____×____>____×____.

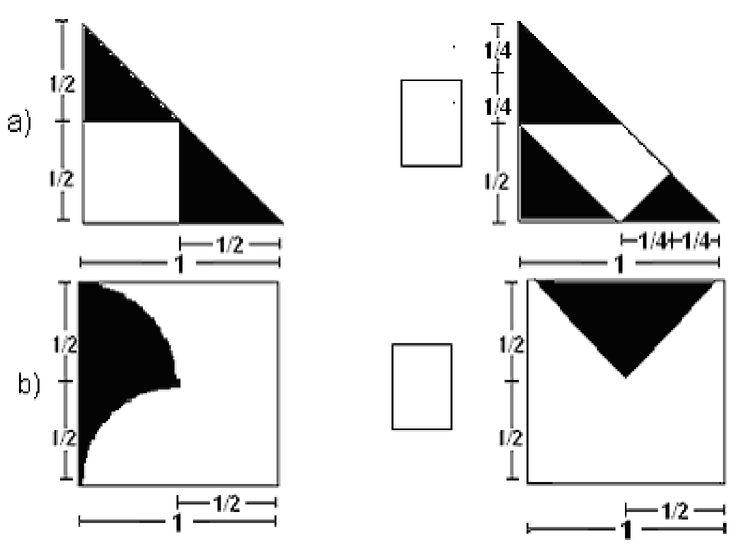
Y una fracción de la forma "$\frac{a}{b}$" es igual a un fracción "$\frac{c}{d}$", si: ____×____=____×____. (Sí se cumple lo anterior, también se dice que son "equivalentes).

Ejercicios:

1. Utiliza el resultado anterior para colocar el signo < (menor que), > (mayor que) o = (igual) entre las siguientes fracciones.

a) $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{5}{7}$ b) $\frac{12}{15}$ ___ $\frac{11}{12}$ c) $\frac{6}{30}$ ___ $\frac{4}{20}$ d) $\frac{99}{132}$ ___ $\frac{2200}{5500}$

2. Compara la fracciones que representan las partes iluminadas de las figuras y coloca el signo mayor (>), menor (<) o igual (=) según corresponda.



Problema 1. En un edificio hay dos cisternas, la cisterna A esta a $\frac{9}{15}$ de su capacidad mientras que la cisterna B esta a $\frac{12}{21}$ de su capacidad, ¿Cuál cisterna tardará más en llenarse, si se llenan a la misma velocidad?

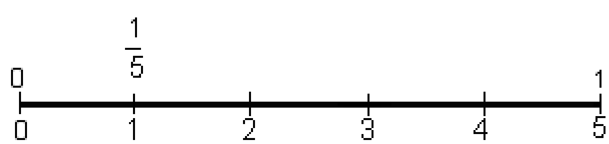
Problema 2. En una prueba de ciclismo, 3 competidores van a la punta, el ciclista A le falta $\frac{28}{32}$ de kilómetro para llegar a la meta, al ciclista B $\frac{10}{16}$ de kilómetro y al ciclista C $\frac{18}{21}$ de kilómetro ¿Quién se llevará el primero, segundo y tercer lugar?

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Esteban tarda 5 horas en podar un jardín, y su amigo Benito tarda 2 horas. ¿Cuánto tardaran en podar un jardín entre los dos?________.

Para resolver el problema lo primero que debemos calcular es cuanto podan cada uno en una hora y luego cuanto podan entre los dos en esa hora.

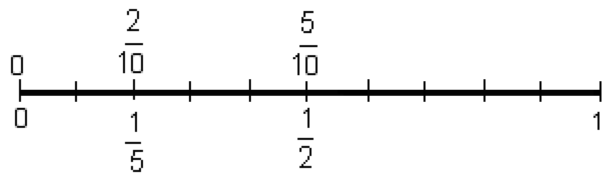
Para eso utilizaremos de nuevo la superposición de escalas dibujando un segmento unitario que represente el jardín y las horas que tardan en podarlo. Para el caso de Esteban, si se dividen las 5 horas en 5 partes cada parte representa una hora, y tendríamos que en una hora lleva $\frac{}{5}$ de jardín como se muestra a continuación.



De manera similar tendríamos que Benito lleva en una hora $\frac{}{2}$ jardín.

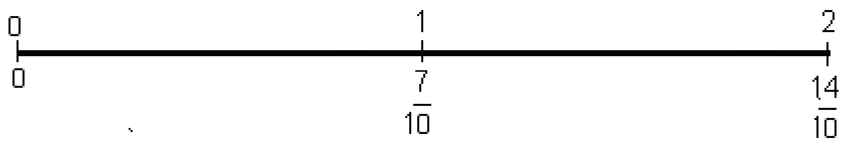
Tenemos que calcular ahora cuanto podan entre los dos en una hora, para eso debemos sumar las fracciones $\frac{}{5}$ y $\frac{}{2}$ que representan lo que poda Estaban y Benito respectivamente en una hora ¿Qué propones hacer para sumar las fracciones? ______
____

Como cada fracción tiene diferentes divisiones de la unidad, lo que tenemos que hacer es llevar a cada fracción a una fracción equivalente que tenga en común la misma división de la unidad. Para eso calculamos un múltiplo común de 5 y 2 como puede ser su producto $(5\times 2=10)$, esto nos indica que debemos dividir a la unidad en 10 partes y tenemos que $\frac{1}{5}=\frac{\times}{5\times 2}=\frac{}{10}$, y $\frac{1}{2}=\frac{\times}{2\times 5}=\frac{}{10}$, que de manera gráfica sería:

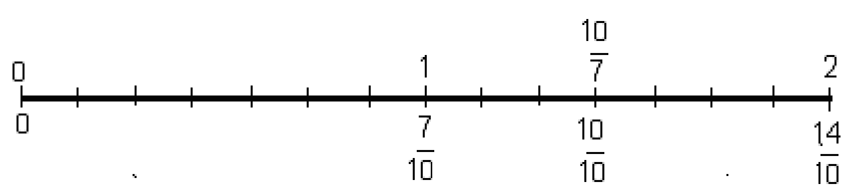


Para sumar las fracciones lo único que debemos hacer es contar el total de partes que tenemos de $\frac{1}{10}$ en cada fracción. Es decir tenemos ____ partes de $\frac{1}{10}$ en la fracción $\frac{1}{5}$ y _____ partes de $\frac{1}{10}$ en la fracción $\frac{1}{2}$, por lo que en total tenemos _____ partes de $\frac{1}{10}$ y entonces $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{\quad}{10}+\frac{\quad}{10}=\frac{\quad+\quad}{10}=\frac{\quad}{10}$.

Para calcular cuánto tiempo tardan en podar el jardín ambos, tenemos que en una hora podan $\frac{7}{10}$ de jardín y en dos horas $\frac{14}{10}$ de jardín. Utilizando un grafica que represente el tiempo y lo que podan juntos en ese tiempo tenemos que



Como a los $\frac{10}{10}$ el jardín quedara terminado, para calcular cuánto tiempo tardan en cavar el jardín juntos, la subdivisión más adecuada es de 1 en 1, ya que el **MCD** (7,10)=1



Entonces tardan en cavar el jardín juntos 1hora más $\frac{\quad}{7}$ de hora ó $\frac{\quad}{7}$ de hora.

Si la división de la unidad la obtenemos encontrando el producto de sus denominadores, podemos expresar que:

La suma de las fracciones:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\quad+\quad}{bd}$$

AL ESTUDIANTE: Para calcular la resta de dos fracciones, el procedimiento es similar, tenemos que llevar a cada fracción a una fracción equivalente que tenga en común la misma división de la unidad y después en vez de sumar las partes, debemos de restarlas.

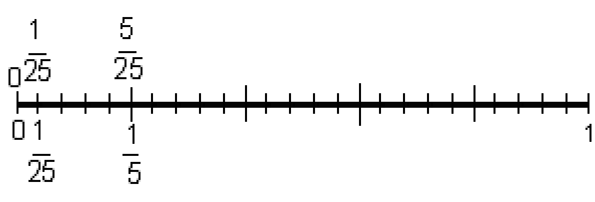
Veamos el siguiente problema: Un tinaco tarda en llenarse 5 horas, pero tiene una fuga que hace que se vacié el tinaco en 25 horas ¿Si el tinaco está vacío cuánto tiempo tardará en llenarse debido a esta fuga? ________.

Lo que vamos hacer es calcular que parte de su capacidad se llena en una hora con agua a pesar de la fuga. Para eso calcularemos que parte de su capacidad se llena en una hora sin la fuga y que parte de su capacidad sale debido a la fuga en una hora.

Para calcular que parte de su capacidad tendría con agua si no tuviera fuga en una hora y que parte de su capacidad se desperdicia debido a la fuga, lo hacemos de manera similar al ejemplo anterior, con lo cual tendríamos que en una hora tendría $\frac{1}{5}$ de su capacidad si no tuviera la fuga, y $\frac{1}{25}$ de su capacidad se desperdicia debido a la fuga.

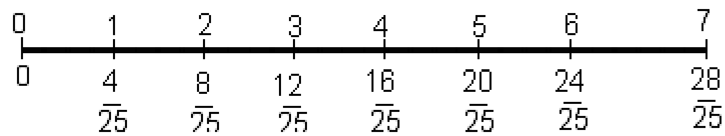
Para calcular cuanta de su capacidad del tinaco se llena en una hora a pesar de la fuga, a $\frac{1}{5}$ debemos restarle $\frac{1}{25}$. ¿Qué propones hacer para restar las fracciones? ________
____.

Como cada fracción tiene dos diferentes divisiones de la unidad lo que tenemos que hacer es llevar a cada fracción a una fracción equivalente que tenga en común la misma división de la unidad. Para eso calculamos un múltiplo común de 5 y 25 como podría ser su producto, con lo que tendríamos que $\frac{1}{5}$ es equivalente a ________ y un $\frac{1}{25}$ es equivalente a ________. Pero para simplificar los cálculos trabajemos con el **mcm** (5,25)=25, y tenemos que $\frac{1}{5}=\frac{\times}{5\times 5}=\frac{}{25}$, y, $\frac{1}{25}=\frac{1}{25}$ que de manera gráfica sería:

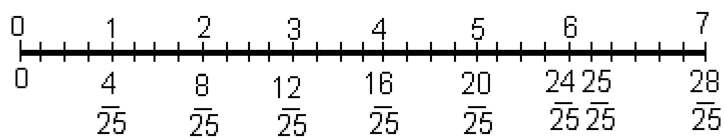


Para restar las fracciones lo único que debemos hacer es contar el total de partes que tenemos de $\frac{1}{25}$ en cada fracción y restarlas, es decir tenemos _____ partes de $\frac{1}{25}$ en la fracción $\frac{1}{5}$, menos _____ parte de $\frac{1}{25}$ en la fracción $\frac{1}{25}$ nos da en total _____ partes de $\frac{1}{25}$ y entonces $\frac{1}{5}-\frac{1}{25}=\frac{\quad}{25}-\frac{\quad}{25}=\frac{\quad - \quad}{25}=\frac{\quad}{25}$.

Para calcular cuánto tiempo tarda en llenarse, tenemos que en una hora $\frac{4}{25}$ de su capacidad se ha llenado. Utilizando un grafica que represente el tiempo y la capacidad del tinaco que se llena de agua en ese tiempo tenemos que:



Como a los $\frac{25}{25}$ ya está lleno el tinaco, para calcular cuánto tiempo tarda en llenarse la subdivisión más adecuada es de 1 en 1, ya que el **MCD** (4,25)=1



Entonces tardan en llenarse el tinaco 6 horas más $\frac{\quad}{25}$ de hora o $\frac{\quad}{4}$ de hora.

Aplicando la partición de la unidad con el producto de los denominadores podemos expresar que:

La resta de las fracciones:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\quad - \quad}{\mathbf{bd}}$$

Ejercicios:

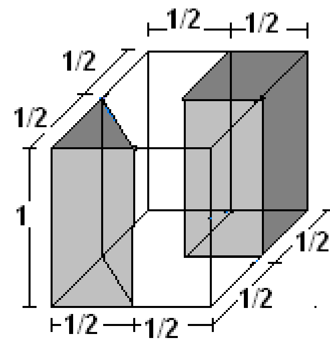
Utiliza los resultados anteriores para realizar las siguientes sumas y restas

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=$ b) $\frac{12}{15}+\frac{11}{12}=$ c) $\frac{6}{30}+\frac{4}{20}=$ d) $\frac{99}{132}+\frac{2200}{5500}=$

e) $\frac{11}{5}-\frac{45}{25}=$ f) $\frac{9}{15}-\frac{1}{12}=$ g) $\frac{4}{9}-\frac{34}{51}=$ h) $\frac{3700}{18500}+\frac{1700}{5100}=$

Problema 1. Para llenar de agua una piscina hay tres surtidores. El primer surtidor tarda 30 horas, el segundo tarda 40 horas y el tercero tarda cinco días. Si los tres surtidores se conectan juntos, ¿cuanto tiempo tardará la piscina en llenarse?

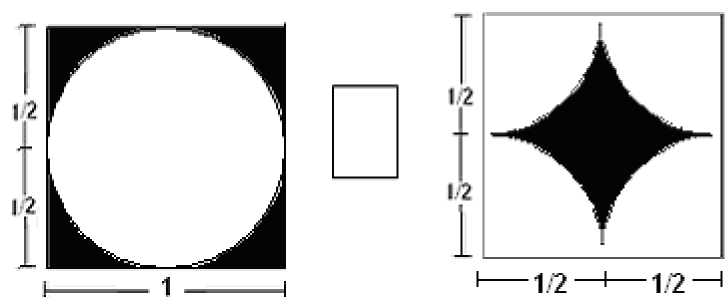
Problema 2. ¿Qué fracción representa la parte blanca del cubo? ¿Cuánto vale la suma de las fracciones que representa la parte blanca del cubo con la que representa la parte iluminada? ¿Qué fracción obtienes al restarle a la unidad la fracción que representa la parte iluminada del cubo?



Fracción: ________

2. Compara la parte iluminada de las figuras y coloca el signo mayor (>), menor (<) o igual (=) según corresponda.

a)



MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

AL ESTUDIANTE: A continuación veremos dos formas de interpretar la multiplicación de fracciones.

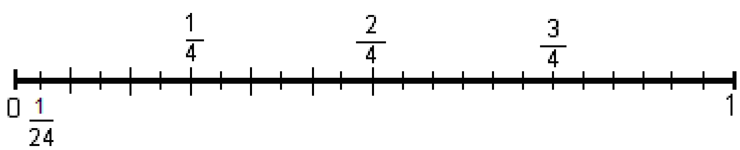
Veamos el siguiente problema: El peso de un objeto se calcula al multiplicar la masa por la gravedad. En la luna la gravedad es $\frac{1}{6}$ de la que hay en la tierra. ¿Cuál es su peso en la luna de un astronauta si pesa 98 kilogramos en la tierra? ________.

Entonces tendríamos que lo que pesa un kilogramo en la tierra en la luna pesa $\frac{1}{6}$ de kilogramo, esto es equivalente a decir que dividimos la unidad kilogramo en 6 partes iguales y tomamos una parte, como el peso del astronauta consta de 98 unidades, debemos multiplicar $98\times\frac{1}{6}$, o sumar $\frac{1}{6}$ de kilogramo noventa y ocho veces, con lo que tendríamos que $98\times\frac{1}{6}=\underbrace{\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{6}}_{98}=\frac{98}{6}$, simplificando la fracción tendríamos que

$\frac{98}{6}=\frac{\_\_}{3}=\_\,\_+\frac{\_\_}{3}$ y por lo tanto el astronauta pesa en la luna ____ kilogramos más $\frac{1}{3}$ de kilogramo.

Si otro astronauta pesa 95 kilogramos más $\frac{2}{4}$ de kilogramo ¿Cuál es su peso en la luna del astronauta? ________.

Para la parte entera dividimos la unidad kilogramos en 6 partes iguales y tomamos una parte, como el peso del astronauta consta de 95 unidades sumamos $\frac{1}{6}$ noventa y cinco veces, con lo que tendríamos que $95\times\frac{1}{6}=\underbrace{\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6}}_{95}=\frac{\_}{6}=\_\,\_+\frac{\_\_}{6}$. Pero aún nos falta calcular cuánto pesa en la luna $\frac{2}{4}$ de kilogramo, para eso tenemos que calcular cual es la sexta parte de $\frac{2}{4}$ de kilogramo, para eso dividimos la unidad en 4 partes y cada parte la dividimos en 6, con lo que la unidad ha sido dividida en 24 partes y $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{4}$, es $\frac{1}{24}$, que de manera gráfica sería:



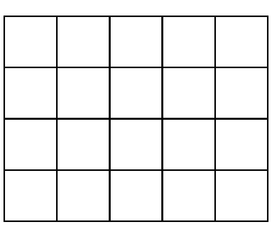
Con lo que $\frac{2}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{2}{24}$.

Por lo que:

$$\left(95+\frac{2}{4}\right)\times\frac{1}{6}=\left(95\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{6}\right)=\left(\_\,\_+\frac{\_\_}{6}\right)+\frac{\_\_}{24}=\left(\_\,\_+\frac{\_\_}{24}\right)+\frac{\_\_}{24}=15+\frac{\_\_}{24}+\frac{\_\_}{24}=15+\frac{22}{24}$$

Y por lo tanto el astronauta pesa en la luna 15 kilogramos más $\frac{\_\_}{24}$ de kilogramo.

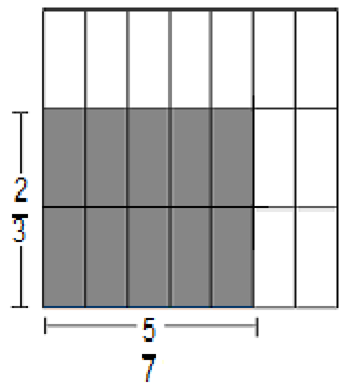
AL ESTUDIANTE: A continuación veremos una analogía entre la multiplicación de los números enteros positivos para calcular áreas y las fracciones.



La multiplicación de cantidades enteras, tiene cierta analogía a la multiplicación de fracciones. La figura tiene ________ unidades a lo ancho y ________ unidades a lo largo y el todo está compuesto de ________ unidades, que es el producto de $(\quad)\times(\quad)$.

Veamos el siguiente ejemplo. Un terreno rectangular tiene $\frac{2}{3}$ de kilómetro a lo largo y $\frac{5}{7}$ de kilómetro a lo ancho ¿Cuál es el área del terreno? ________.

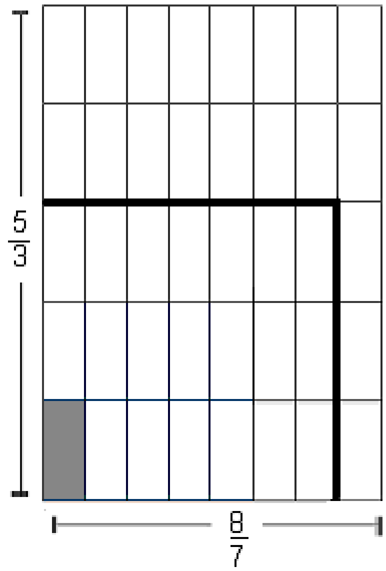
Utilizaremos este modelo para calcular la multiplicación entre dos fracciones. Para eso dibujamos un cuadrado unitario, y lo dividimos en 3 partes a largo y 7 partes a lo ancho y consideramos el cuadrado con dimensiones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$, como se muestra a continuación:



Si observas la unidad ha sido divido en ________ partes iguales, y este valor se obtiene al multiplicar el _______ de la fracción $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$ por el ________ de la fracción $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$. La parte iluminada de la unidad le corresponde ________ partes iguales que se obtienen al multiplicar el _______ de la fracción $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$ por el ________ de la fracción $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$. Por lo tanto la parte iluminada representa la fracción ________ de la unidad, y el área de un rectángulo con dimensiones $\frac{2}{3}$ de kilómetro y $\frac{5}{7}$ de kilómetro es de $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$ Km.2, que es el producto de las fracciones $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)\times\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$.

Si el terreno tiene de dimensiones $\frac{5}{3}$ de kilómetro a lo largo y $\frac{8}{7}$ de kilómetro a lo ancho ¿Cuál es el área del terreno? _______.

De manera similar a la anterior dividimos a la unidad en 3 y 7 partes, pero como es el caso de una fracción impropia aumentamos 2 partes a lo largo y una parte a lo ancho del cuadrado unitario, como se muestra a continuación



La parte iluminada representa la fracción $\frac{1}{21}$ de la unidad, y en total tenemos _______ partes de $\frac{1}{21}$. Por lo que el producto de $\frac{5}{3}$ y $\frac{8}{7}$ es $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$ y el área de un terreno con dimensiones $\frac{5}{3}$ de kilómetro a lo largo y $\frac{8}{7}$ de kilómetro es de $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$ Km.2

Con base a lo obtenido en los ejercicios anteriores ya puedes expresar que

La multiplicación de las fracciones

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\times\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\quad\times\quad}{\quad\times\quad}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Pasemos a un ejemplo: Un comerciante compro un bulto con 55 kilos de azúcar y ha decidido venderla en bolsas de $\frac{1}{4}$ de kilo ¿Cuántas bolsas necesitara para empacar toda la azúcar? ________.

Tendríamos que para un kilo necesitamos 4 bolsas, porque la unidad kilo la estamos dividiendo en 4 partes, como tenemos 55 unidades (kilo), tendríamos en total 220 partes, es decir que necesitamos 220 bolsas. Por lo que $\frac{55}{\left(\frac{1}{4}\right)}=220$

Si las bolsas son de $\frac{3}{4}$ de kilo ¿Cuántas bolsas necesitara para empacar toda la azúcar? ________.

Volvemos a dividir la unidad kilo en 4 partes, como tenemos 55 unidades (kilo), tendríamos en total 220 partes, cada 3 partes de esta unidad caben en una bolsa, como $\frac{220}{3} = 73 + \frac{1}{3}$ necesitamos 73 bolsas para empacar la azúcar y me sobra $\frac{1}{4}$ de kilo (por que recuerda que la unidad la dividimos en 4 partes). Por lo que $\frac{55}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{220}{3}$

El comerciante ha encontrado una bolsa de azúcar con $\frac{3}{5}$ de kilo y ha decidido venderla en bolsas de $\frac{1}{4}$ de kilo ¿Cuántas bolsas necesitara para empacar la azúcar? ________.

En este caso para dividir la unidad kilo encontramos el **mcm** (5, 4)=20 con lo que tendríamos que $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ y $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ como las partes de la unidad son iguales entonces $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$, con lo cual necesitaríamos 2 bolsas para empacar la azúcar y me sobraría $\frac{2}{20}$ de kilo.

Si observas el caso anterior **la división de dos fracciones es el producto de los extremos entre el producto de los medios**, conocida como la "Ley del sándwich"

Extremos $\quad \frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \quad$ Medios

AL ESTUDIANTE: Analiza lo anterior para cada uno de los casos anteriores recuerda que una cantidad entera tiene como denominador al uno.

Con base a lo obtenido podemos expresar que:

La división de las fracciones:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{\quad \times \quad}{\quad \times \quad}$$

Ejercicios:

Utiliza los resultados anteriores para realizar las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} =$ b) $\frac{12}{15} \times \frac{11}{12} =$ c) $\frac{6}{30} \times \frac{4}{20} =$ d) $\frac{99}{132} \times \frac{2200}{5500} =$

e) $\frac{\frac{11}{5}}{\frac{45}{25}} =$ f) $\frac{\frac{9}{15}}{\frac{1}{12}} =$ g) $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{34}{51}} =$ h) $\frac{\frac{3700}{18500}}{\frac{1700}{5100}} =$

Problema 1: Un tinaco lleno de agua está conectado a una llave que gotea, y diariamente está perdiendo $\frac{3}{40}$ de su capacidad. ¿Cuánto de su capacidad se está perdiendo cada hora? ¿Cuánto tiempo tardara para estar vacío?

Problema 2.Un comerciante compro un bulto con 78 kilos y le regalaron $\frac{5}{11}$ de kilo de azúcar y ha decidido venderla en bolsas de $\frac{2}{5}$ de kilo ¿Cuántas bolsas necesitara para empacar toda la azúcar? ________.

AL ESTUDIANTE: Cuando se realiza una suma, resta, multiplicación y división de fracciones, la unidad con la que se esté trabajando debe ser la misma. Por ejemplo no se pude sumar $\frac{1}{2}$ de centímetro más $\frac{1}{2}$ de kilogramo.

ACCIÓN 2

LAS FRACCIONES Y SUS SIGNIFICADO

Objetivo: El alumno aprenderá otros significados básicos de fracciones, y como se utilizan en diferentes contextos.

AL ESTUDIANTE: En la acción anterior estudiamos la expresión $\frac{a}{b}$ como una relación **parte-todo**. En esta acción se analizaran algunas otras interpretaciones del cociente de dos números naturales.

RAZÓN

Empecemos con el siguiente ejemplo: Una gacela recorre 200 metros en 9 segundos y un Guepardo se encuentra a 100 metros de la gacela ¿Podrá alcanzar el guepardo a la gacela? ________.

Este problema fue tratado en la acción anterior, pero en esta acción plantearemos su solución de otra manera.

Tenemos que la gacela recorre 200 metros en 9 segundos, entonces recorre 400 metros en 18 segundos, 600 metros en 27 segundos. Una manera de expresar lo anterior es de la siguiente manera: La gacela recorre $\frac{200 \text{ metros}}{9 \text{ segundos}}$, $\frac{400 \text{ metros}}{18 \text{ segundos}}$ y $\frac{\_\_\_\_ \text{ metros}}{27 \text{ segundos}}$ donde el numerador representa los metros que recorre, y el denominador el tiempo que tarda en recorrer esa distancia. **Esta manera de comparar dos cantidades mediante un cociente se denomina razón**

Como la gacela se encuentra a 100 metros de distancia del guepardo podemos decir que recorre 300 metros en 9 segundos y 500 metros en 18 segundos**.**

Con base al ejemplo del guepardo en la acción anterior tenemos que él guepardo recorreré 500 metros en 15 segundos más $\frac{75}{95}$ de segundo.

Como la gacela tarda _____ segundos en recorrer los 500 metros y el guepardo tarda menos de 16 segundos, entonces el guepardo ____ (sí o no) *logra alcanzar a la gacela.*

Una cebra recorre 109 metros en 6 segundos y un Guepardo se encuentra a 150 metros de la cebra y a 100 metros de una gacela ¿A quién le conviene cazar? ________.

PORCENTAJE

Un comerciante compra televisiones en \$2500 pesos y las vende en \$3000, los radios los compra en \$500 y los vende en \$1000 ¿En qué le conviene invertir más? ________.

En ambos casos la ganancia fue la misma, pero la inversión fue diferente, para determinar en cual le conviene invertir más, analicemos las razones de ganancia e inversión inicial.

Las razones serían $\frac{500}{2500}$ y $\frac{500}{1000}$, cada una de estas razones representa que parte de la inversión inicial fue ganancia, por eso aquella razón que sea menor me está indicando que hubo una menor ganancia con respecto a lo que se invirtió, para compararlas debemos llevarlas a una fracción equivalente que tenga en común la misma división de la unidad. Lo que se acostumbra es usar a 100 como denominador de las razones, con lo cual tendríamos que $\frac{500}{2500}=\frac{1}{5}=\frac{20}{100}$ y $\frac{500}{1000}=\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$, como la razón que es mayor es aquella que tiene una inversión inicial de \$1000, le conviene invertir en la compra de ________.

Las razones cuyo denominador es 100 se llaman porcentajes y cuando se entiende se escribe con el símbolo % en lugar del denominador 100. Por lo tanto las razones anteriores se escribirían de la siguiente manera $\frac{500}{2500}=\frac{20}{100}=20\%$ y $\frac{500}{1000}=\frac{50}{100}=50\%$, donde la primera razón representa una ganancia del 20% de la inversión inicial y la segunda razón una ganancia del 50% de la inversión inicial.

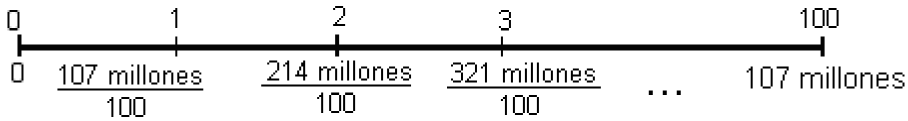
Si adquiere mini componentes que los compra en \$4000 y las vende en \$5000, ¿En qué le conviene invertir? ________.

Veamos ahora el siguiente ejemplo: En nuestro país “19% de nuestra población son jóvenes de los cuales el 10% de estos jóvenes intenta cometer suicidio”[46], ¿Si en nuestro país hay 107 millones de habitantes, cuántos de ellos son jóvenes con problemas de suicidio? ________.

El porcentaje de una cantidad significa dividir el número en 100 partes iguales y tomar tantas como diga el valor del porcentaje.

En este ejemplo debemos dividir los 107 millones en 100 partes, para eso dibujamos un segmento que representa las 100 partes y al mismo tiempo los 107 millones de habitantes.

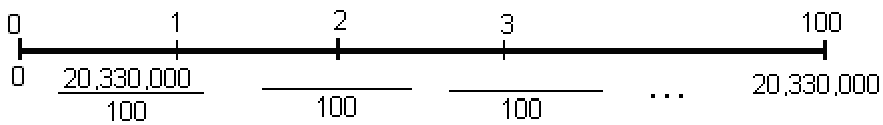
[46] DEL VALLE, *Sonia. Intentan cometer suicidio jóvenes del país*. [en línea] Septiembre 2008. Disponible en la Web en : http://www.sepbcs.gob.mx/comunicacion/Noticias%20educacion/Noticias%202008/suicidio.htm#(*1)



De esta manera se establece entre ambas escalas lo siguiente, a la primera parte le corresponde $\frac{107 \text{ millones}}{100}$ de 107 millones, a la segunda parte le corresponde $\frac{\quad\quad \text{millones}}{100}$ de 107 millones y así a la parte 19 le corresponde $\frac{\quad\quad \text{millones}}{100}$ de 107 millones y vemos que el 19% de 107 millones es $\frac{\quad\quad \text{millones}}{100} = 20{,}330{,}000$ por lo que hay una población de 20, 330,000 jóvenes en México.

Volvemos hacer lo mismo para encontrar cuántos de estos jóvenes tienen problemas de suicidio.

Dividimos los 20, 330,000 en 100 partes, para eso dibujamos un segmento que represente 100 y al mismo tiempo los 20, 330,000.



Entre ambas escalas se establece lo siguiente a la primera parte le corresponde $\frac{20{,}330{,}000}{100}$ de 20, 330,000, a la segunda parte le corresponde $\frac{\quad\quad}{100}$ de 20, 330,000 y así a la décima le corresponde $\frac{\quad\quad}{100}$ de 20, 330,000 y vemos que el 10% de 20, 330,000 es $\frac{\quad\quad}{100}$ = __________ por lo que hay una población de _________ de jóvenes con problemas de suicidio en México.

AL ESTUDANTE: El porcentaje de una cantidad no se expresa en fracción sino que se realiza la división, a continuación veremos cómo expresar una fracción en su forma decimal.

LAS FRACCIONES COMO UNA EXPRESIÓN DECIMAL

Para expresar una fracción, en su forma decimal, dividimos el numerador de dicha fracción entre su denominador.

Por ejemplo:

a) $\begin{array}{r} 95.4 \\ 10\overline{)954} \\ 54 \\ 40 \\ 0 \end{array} \Rightarrow \frac{954}{10} = 95.4$, b) $\begin{array}{r} .2 \\ 5\overline{)1} \\ 0 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{5} = .2$ y c) $\begin{array}{r} 2.22 \\ 9\overline{)20} \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{array} \Rightarrow \frac{20}{9} = 2.22\ldots$,

Las primeras divisiones tienen residuo 0 y en la última se puede seguir dividiendo indefinidamente porque su residuo nunca es 0, en este caso se trata de una división periódica porque el residuo 2 se repiten uno tras otra y el cociente también se vuelve periódico con valor 2. El periodo en una división se representa con una raya arriba del periodo, así $\frac{20}{9} = 2.\overline{2}$

De manera inversa para expresar una expresión decimal en fracción recordemos que estamos en un sistema decimal, cada unidad de uno de los órdenes representa la décima parte del valor relativo de la cifra anterior.

Entonces la cifra 2.22$= 2 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100} = \frac{200}{100} + \frac{20}{100} + \frac{2}{100} = \frac{222}{100} = \frac{111 \times 2}{50 \times 2} = \frac{111}{50}$

La primera cifra decimal indica la décima parte de la unidad.

La segunda cifra decimal indica la centésima parte de la unidad.

Entonces la cifra 2.222$= 2 + \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000} = \frac{\quad}{1000} + \frac{\quad}{1000} + \frac{\quad}{1000} + \frac{\quad}{1000} = \frac{\quad}{1000} =$

$$= \frac{\quad \times \quad}{\quad \times \quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

¿Cómo podemos expresar $2.\overline{2}$ en fracción? ________.

Tenemos que $2.\overline{2}$ lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$2.\overline{2} = 2.2222\ldots = 2 + 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots\right) = 2 + \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000} + \frac{\quad}{10000} + \ldots$$

Para simplificar el problema recurrimos al siguiente artificio que nos simplifica la tarea

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}$$

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}-\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{10000}$$

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{100000}$$

Observa que entre más sumandos tenga $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\mathbf{...}\right)$, él resultado se aproxima más $\frac{1}{10}$, por lo que:

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}$$

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...=\frac{\frac{1}{10}}{\left(1-\frac{1}{10}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{10}{90}$$

Entonces la expresión decimal

$$2.\overline{2}=2.222...=2+\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{10000}+...=2+2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...\right)=$$

$$=2+2\times\left(\frac{10}{90}\right)=2+\frac{20}{90}=\frac{\quad}{90}+\frac{\quad}{90}=\frac{\quad}{90}=\frac{\quad}{9}$$

Por lo tanto $2.\overline{2}=\frac{\quad}{9}$

Podemos concluir que la expresión decimal de una fracción es finita porque tiene residuo cero o es infinita en forma periódica, y toda expresión decimal infinita periódica o finita le corresponde una fracción.

¿Cómo podemos expresar $2\mathbf{.}\overline{02}$ en fracción? ____.

AL ESTUDIANTE. A continuación aplicaremos lo anterior a problemas de razón y porcentaje, yendo de fracciones a expresiones decimales y a la inversa.

Veamos el siguiente ejemplo: Él comerciante ha decidido vender además cámaras fotográficas que las ha adquirido en $ 1000 y las vende en $1125 ¿Cuál es el porcentaje que gana de lo invertido? ________

En este caso debemos expresar la razón $\frac{125}{1000}$ con una fracción equivalente que tenga denominador 100, reduciendo la fracción a su mínima expresión tenemos que $\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$, y $\frac{1}{8}=\frac{12}{96}\approx\frac{12}{100}=12\%$, es decir $\frac{125}{1000}$ es aproximadamente el 12%, ya que no podemos expresar la razón con denominador 100.

Pero con base a lo que hemos visto, tenemos que la expresión $1\%=\frac{1}{100}$ nos indica que la unidad ha sido dividida en 100 partes iguales de las cuales se ha tomado una. Si la parte que representa el 1% la divido en 2 esta parte representa un .5% de la unidad, y dividiendo cada parte de la unidad en 2 partes, tenemos que la unidad ha sido dividida en 200 partes de las cuales se ha tomado una, es decir: $\frac{1}{200}=\frac{1}{2\times100}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{2}\%=.5\%$, si la parte que representa el 1% la divido en 3 partes esta parte representa un .33% de la unidad, y dividiendo cada parte de la unidad en 3 partes, la unidad ha sido dividida en 300 partes de las cuales se ha tomado una, es decir: $\frac{1}{300}=\frac{1}{3\times100}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{3}\%=.33\%$,

Para representar la razón $\frac{125}{1000}$ en porcentaje realicemos lo siguiente:

$$\frac{125}{1000}=\frac{120}{1000}+\frac{5}{1000}=\frac{\quad}{100}+\frac{\quad}{200}=12\%+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{100}\right)=12\%+\frac{1}{2}\%=12\%+.5\%=12.5\%$$

En México hay una población de 107 millones de habitantes y el 51.28% son mujeres ¿Cuántos habitantes son mujeres? ________.

Como .28 es una expresión decimal finita la podemos expresar en fracción con lo cual tendríamos que:

$$51.28\%=51\%+.28\%=51\%+\frac{28}{100}\%=\frac{51}{100}+\left(\frac{28}{100}\times\frac{1}{100}\right)=\frac{\quad}{100}+\frac{\quad}{10000}=\frac{\quad+\quad}{10000}=$$

$$=\frac{\quad}{10000}$$

Como $51.28\% = \frac{5128}{10000}$, debemos dividir la cantidad en 10000 partes iguales y tomar 5128 partes. Entonces $\frac{107000000 \times 5128}{10000} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ , por lo que en México hay __________ mujeres.

¿Si el 19% de la población son jóvenes cuántas mujeres jóvenes hay en nuestro país? ________.

Ejercicios:

Expresar las siguientes razones como porcentajes:

a) $\frac{45}{100}$ b) $\frac{2}{100}$ c) $\frac{18}{50}$ d) $\frac{9}{30}$ e) $\frac{71}{83}$

Expresa los siguientes porcentajes como razones:

a) 34% b) 1% c) 24.5% d) 31.33% e) 14.9%

Determina cual es el porcentaje de las siguientes cantidades

a) 14% de 3 b) 21% de 115 c) 34.7% de 152 d) 11.33% de 587

Problema 1. Un árbol de 60 pies de alto proyecta una sombra de 45 pies de longitud ¿Cuál es la altura de un árbol que proyecta una sombra de 30 pies de longitud a la misma hora del día?

Problema 2. En México hay una explotación de 3.9 millones de niños con una edad entre los 6 y 14 años. ¿Qué porcentaje corresponde de la población?

Problema3. En nuestro país el 90.5% de la población esta alfabetizada ¿Cuántos habitante en nuestro país están alfabetizado? Y si por cada 95 hombres hay 100 mujeres. ¿Cuántas mujeres y cuántos hombres respectivamente no cuentan con educación?

ACCIÓN 3

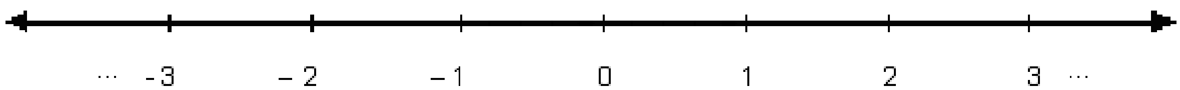
LOS NÚMEROS RACIONALES COMO UN SISTEMA: GEOMÉTRICO Y NUMÉRICO

Objetivo: El alumno aplicara su dominio de los significados básicos de los números racionales para definir las reglas de operación de dichos números y procederá a desarrollar sus habilidades operatorias en los ejercicios.

AL ESTUDIANTE: Con base a los conocimientos que adquiriste en la acciones anteriores, vas a construir un sistema teórico de los números racionales, y los errores que sueles cometer con sus operaciones los vas a poder resolver.

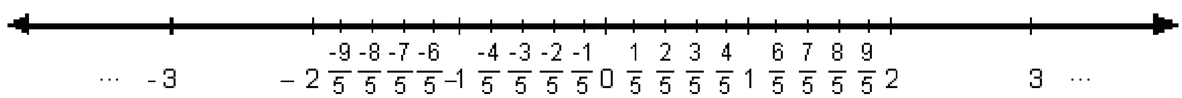
LOS NÚMEROS RACIONALES COMO UN SISTEMA GEOMÉTRICO

Los números enteros se representan en forma geométrica de la siguiente manera:



Donde el punto 0 es el origen y el segmento con extremos 0 y 1 es el segmento unidad del sistema geométrico de los números enteros, y el sistema se completa reproduciendo el segmento unidad.

Pero obsérvese que hay muchos puntos en la recta que todavía no están asociados con un número. Vimos en la acción anterior que podemos hacer diferentes divisiones de la unidad, por ejemplo podemos dividir en 5 partes iguales cada unidad y tendríamos de manera geométrica que a cada punto le corresponden los siguientes números:



Con lo cual asignamos a varios puntos un número, pero aún faltan muchos puntos por asignarles un número, para eso podemos dividir a la unidad en más partes, pero sólo podremos representar algunas divisiones de ella. Los nuevos números con los cuales estamos tratando son de la forma $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ donde "**a**" y "**b**" son números enteros con **b**≠0, a estos nuevos números se les llama **números racionales**. Los números enteros forman parte de los números racionales ya que pueden ser expresados de la forma $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, por ejemplo $2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\ldots\frac{2n}{n}$.

A los números racionales se les asigna un signo que permite distinguir a los positivos de los negativos, para determinar cuál es el signo del número racional debemos aplicar las *leyes de los signos para el producto o la división*:

a) Cuando las componentes del número racional tienen el mismo signo, se trata de un número racional positivo por ejemplo: $\frac{-32}{-572}=\frac{32}{572}$

b) Cuando las componentes del número racional tienen diferente signo, se trata de un número racional negativo por ejemplo: $\frac{-512}{572}=-\frac{512}{572}$ y $\frac{10}{-52}=-\frac{10}{52}$

ORDEN EN LOS NÚMEROS RACIONALES

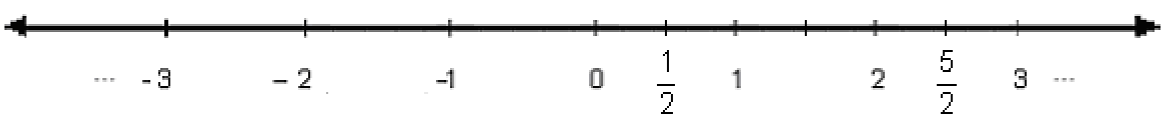
AL ESTUDIANTE: Tú trabajaste en la Acción 1 con fracciones como una relación parte-todo, estos conocimientos los deberás aplicar en esta acción junto con lo que aprendiste de las Propiedades de los Números Enteros.

Si te imaginas dos números enteros **a** y **b** en su representación geométrica, decimos que **a** es menor que **b** si _______________. ¿Qué crees que ocurra con los números racionales? _________________________________.

En los siguiente números racionales coloca los signos < (menor que), > (mayor que) o = (igual), correspondientemente.

a) $\frac{1}{2}\underline{\quad}\frac{5}{2}$ b) $\left(-\frac{6}{8}\right)\underline{\quad}0$ c) $\frac{-32}{-572}\underline{\quad}\left(\frac{-512}{572}\right)$ d) $\left(\frac{-12}{52}\right)\underline{\quad}\left(\frac{10}{-52}\right)$ e) $\frac{12}{20}\underline{\quad}\frac{5}{15}$

Para determinar lo anterior podemos representar cada número en la recta numérica y ver cual número se encuentra a la izquierda del otro, por ejemplo para el caso de $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$ dividimos a cada unidad en dos partes iguales y su representación gráfica sería la siguiente:



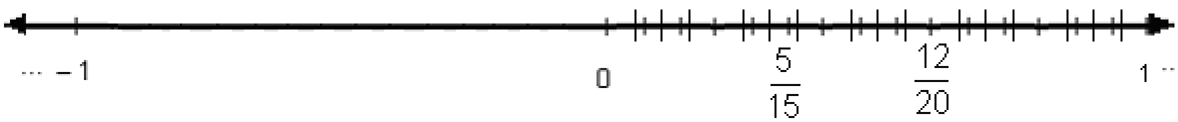
Por lo que $\frac{1}{2}\underline{\quad}\frac{5}{2}$.

Cuando los números racionales tienen el mismo denominador podemos proceder de manera analítica, de la siguiente manera: Para determinar cual número es mayor nos fijamos en su numerador y en el signo del número y procedemos a comparar los numeradores con el signo correspondiente de manera análoga a lo que se hace con los números enteros, por ejemplo los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$ tienen ambos signo positivo y 1 es menor que 5 entonces $\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$, en el inciso b) el número $\left(-\frac{6}{8}\right)$ tiene signo negativo y -6 es menor que 0 por lo que $\left(-\frac{6}{8}\right)\underline{\quad}0$, pero en el inciso c) y d) para determinar el signo de los números racionales debemos aplicar las *leyes de los signos para el producto o la división*, por ejemplo: $\frac{-32}{-572}=\frac{32}{572}$, por lo que el número tiene signo positivo y $\frac{-512}{572}=-\frac{512}{572}$ tiene signo negativo, como 32 es mayor que -512 entonces. $\frac{-32}{-572}\underline{\quad}\left(\frac{-512}{572}\right)$.

¿Pero cuando el denominador es diferente, qué propones hacer?____.

En esta situación podemos proceder de dos maneras:

1. Por ejemplo para determinar qué número racional es mayor $\frac{12}{20}$ ó $\frac{5}{15}$ utilizamos su representación gráfica para eso dividimos a la unidad en 20 y 15 partes y ubicamos a cada número racional.



Como el número $\left(\underline{\quad}\right)$ se encuentra a la derecha de $\left(\underline{\quad}\right)$, tenemos que $\frac{12}{20}\underline{\quad}\frac{5}{15}$.

2. La otra manera es que a cada número le encontramos un número equivalente, que tengan en común con el otro el mismo denominador, como lo hiciste con las fracciones, por ejemplo para el caso de $\frac{12}{20}$ y $\frac{5}{15}$ procedemos de la siguiente manera.

a) Descomponemos a cada número en sus factores primos con lo cual tendríamos que:

$$\frac{12}{20}=\frac{3\times2\times2}{5\times2\times2}=\frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \frac{5}{15}=\frac{1\times5}{3\times5}=\frac{1}{3}$$

b) Expresamos a cada número con el mismo denominador, para eso encontramos el **mcm** (5,3)=15, con lo cual tendríamos

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times3}{5\times3}=\frac{9}{15} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}=\frac{1\times5}{3\times5}=\frac{5}{15}.$$

c) Tenemos que el número racional $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$. Como 9 es mayor que 5 tenemos que $\frac{12}{20}\_\_\frac{5}{15}$.

Si encontramos los números equivalentes con el producto de los denominadores entonces: $\frac{12}{20}=\frac{\quad\times\quad}{20\times 15}=\frac{\quad}{\quad}$ y $\frac{5}{15}=\frac{\quad\times\quad}{15\times 20}=\frac{\quad}{\quad}$ con lo que ambas fracciones tienen el mismo denominador, y por lo tanto $\frac{12}{20}\_\_\frac{5}{15}$.

AL ESTUDIANTE: Observa que cuando los números racionales tiene el mismo denominador entonces en lo único que nos debemos fijar es en sus numerador y su signo correspondiente, sin importar el valor de su denominador.

Por lo que dados dos números racionales "a" y "b" en su representación geométrica, decimos que a es menor que b sí: _________________ Y dados los números racionales "$\frac{a}{b}$" y "$\frac{c}{d}$", se dice que $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, si: ____×____>____×____.

SUMA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

AL ESTUDIANTE: Tu ya aprendiste lo que significa sumar y multiplicar dos números enteros y en la acción uno aprendimos a sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones, con base a esto tú podrás abstraer lo que significa sumar , multiplicar y dividir dos números racionales.

SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

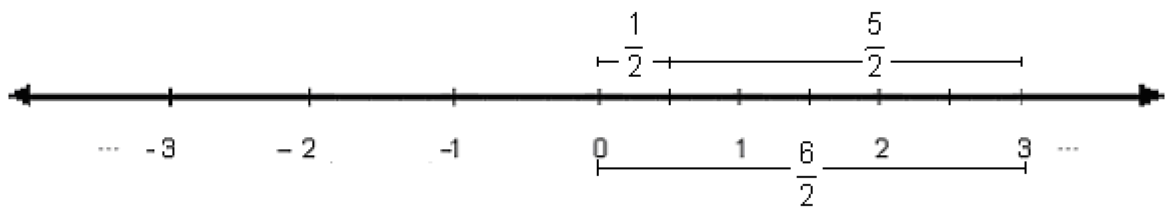
Realiza las siguientes sumas de números racionales:

a) $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{\quad}{\quad}$ b) $\left(-\frac{6}{8}\right)+\frac{1}{8}=\frac{\quad}{\quad}$ c) $\left(\frac{-12}{52}\right)+\left(\frac{10}{-52}\right)=\frac{\quad}{\quad}$ d) $\frac{12}{20}+\frac{5}{15}=\frac{\quad}{\quad}$

Cuando los números racionales tienen el mismo denominador, nos fijamos en su numerador y en el signo del número racional y procedemos de manera análoga a la suma que se hace con los números enteros, recuerda que en el caso c) debes aplicar las *leyes de los signos para el producto o la división*.

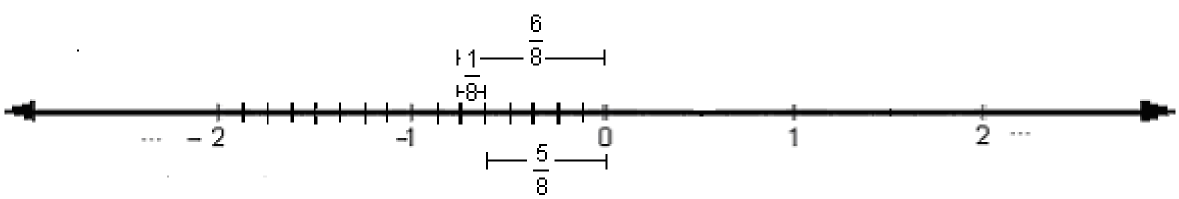
Si ambos números tienen el mismo signo y denominador, se realiza la suma y se le coloca al resultado el signo que tienen dichos números y su representación geométrica es la unión de dos segmentos. Por ejemplo:

a) En el caso de la suma de $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$ ambos números tienen signo positivo por lo que $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}$, su representación geométrica es un segmento con longitud igual a $\frac{6}{2}$, el cual se obtiene con la unión de los segmentos de longitud $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$.



Cuando los números que se suman tienen signos diferentes el menor se resta al mayor quedando con el signo del mayor y su representación geométrica se obtiene al quitar al segmento más grande el más pequeño.

b) En el caso de la suma de $\left(-\frac{6}{8}\right)+\frac{1}{8}$ tiene ambos números signos diferentes por lo que $\left(-\frac{6}{8}\right)+\frac{1}{8}=-\frac{(6-1)}{8}=-\frac{5}{8}$, su representación geométrica es un segmento con longitud igual a $\frac{5}{8}$ que se encuentra en la parte negativa de la recta numérica, el cual se obtiene al quitarle al segmento de longitud $\frac{6}{8}$ un segmento de longitud $\frac{1}{8}$.



Pero cuando los denominadores son diferentes ¿Qué propones hacer? ________________________.

En el caso de $\frac{12}{20}+\frac{5}{15}$ tenemos que los denominadores son diferentes, para eso buscamos a cada número un número equivalente que tengan en común el mismo denominador, como $\frac{12}{20}=\frac{9}{15}$ tenemos que la suma de $\frac{12}{20}+\frac{5}{15}=\frac{9}{15}+\frac{5}{15}=\frac{\quad+\quad}{15}=\frac{\quad}{\quad}$.

La suma de dos números racionales "$\frac{a}{b}$" y "$\frac{c}{d}$", se dice que es igual a

$$\mathbf{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\qquad + \qquad}{bd}}.$$

AL ESTUDIANTE: Te darás cuenta que la suma de dos números racionales es análogo a lo que hiciste con los números enteros, sólo que en este caso no estamos trabajando con unidades sino con partes de la unidad, por eso las PROPIEDADES DE LA SUMA EN LOS NÚMEROS ENTEROS se cumplen también en los números RACIONALES.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{1}{2}\times 5=\frac{}{}$ b) $\frac{6}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{}{}$ c) $\frac{-12}{15}\times\frac{-5}{-25}=\frac{}{}$ d) $\frac{12}{20}\times\frac{5}{15}=\frac{}{}$

En la acción uno aprendiste a multiplicar fracciones, la multiplicación de los números racionales es análogo sólo que en este caso debes de tener en cuenta el signo del número racional y aplicar las *leyes de los signos para el producto o la división*, tanto para determinar el signo del número como para determinar el signo del producto de los números racionales.

Por ejemplo: Para calcular la multiplicación de $\frac{6}{8}$ y $\left(-\frac{1}{2}\right)$ tenemos que $\left(-\frac{1}{2}\right)$ tiene signo negativo y $\frac{6}{8}$ tiene signo positivo, entonces aplicando la leyes de los signos tenemos que $\frac{6}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{}{}$.

La multiplicación de dos números racionales "$\frac{a}{b}$" y "$\frac{c}{d}$", se dice que es igual a

$$\mathbf{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{\qquad \times \qquad}{}}$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Realiza las siguientes divisiones:

a) $\frac{1}{2}\div\frac{5}{3}=\frac{}{}$ b) $\frac{-6}{8}\div\left(-\frac{2}{4}\right)=\frac{}{}$ c) $\frac{-12}{-52}\div\frac{10}{-450}=\frac{}{}$ d) $\frac{12}{20}\div\frac{5}{15}=\frac{}{}$

En la acción uno se aplico la "Ley del sándwich" para dividir fracciones, en el caso de los números racionales también se pueden aplicar sólo que debes de tener en cuenta el signo del número racional y aplicar las *leyes de los signos para el producto o la división*, por ejemplo:

$$\frac{-6}{8} \div \left(-\frac{2}{4}\right) = \frac{\frac{-6}{8}}{-\left(\frac{2}{4}\right)} = \frac{-\left(\frac{6}{8}\right)}{-\left(\frac{2}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{6}{8}\right)}{\left(\frac{2}{4}\right)} = \underline{\qquad} .$$

Encontramos el signo del número racional $\frac{-6}{8}$

Aplicamos las leyes de los signos para la división

Pero también podemos utilizar la regla de los productos cruzados, donde se multiplica el numerador del primer número por el denominador del segundo número y el numerador del segundo número por el denominador del primer número, pero antes de eso aplicamos las leyes de los signos para la división, por ejemplo:

$$\frac{-6}{8} \div \left(-\frac{2}{4}\right) = \left(-\frac{6}{8}\right) \div \left(-\frac{2}{4}\right) = \frac{6}{8} \div \frac{2}{4} = \frac{6 \times 4}{8 \times 2} = \underline{\qquad}$$

Encontramos el signo del número racional $\frac{-6}{8}$

Aplicamos las leyes de los signos para la división y
Utilizamos la regla de los productos cruzados.

La división de dos números racionales "$\frac{a}{b}$" y "$\frac{c}{d}$", se dice que es igual a

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \div \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\quad \times \quad}{\quad \times \quad}$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Ley del inverso multiplicativo

En los números enteros no existía un número entero que multiplicado por 4 nos de uno, en los números racionales esto es diferente.

El número 4 pertenece a los números racionales y si consideramos a la división como la operación inversa de la multiplicación, tenemos que "*todo número que este multiplicando en una igualdad pasa del otro lado dividiendo*". Como el 4 está multiplicando a un número y su producto está igualado a uno, entonces el número que multiplicado por 4 da 1 es: $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ y entonces el número que multiplicado por 4 de 1 es $\frac{1}{4}$.

Calculemos ahora inverso multiplicativo de $\frac{5}{-9}$: Primero encontremos el signo del número aplicando las leyes de los signos, entonces $\frac{5}{-9} = -\frac{5}{9}$, y $1 \div \left(-\frac{5}{9}\right) = .\frac{\quad}{\quad}$, entonces el número que multiplicado por $-\frac{5}{9}$ de 1 es $\frac{\quad}{\quad}$.

Calcula el inverso multiplicativo de los siguientes números:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{-6}{8}$ c) $\frac{-12}{-52}$ d) $\frac{12}{-20}$ e) $\frac{-85}{485}$

Entonces el inverso multiplicativo de un número racional "$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$" es $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$.

Propiedad de densidad:

¿Dados dos números racionales como $\frac{5}{9}$ y $\frac{6}{9}$ podemos encontrar otro entre ellos? ________.

Como hemos visto podemos dividir a la unidad en diferentes partes, por eso dados dos números racionales siempre podemos encontrar otro número entre ellos haciendo una división más pequeña de la unidad, por ejemplo en el caso de $\frac{5}{9}$ y $\frac{6}{9}$, la unidad está dividida en 9 partes iguales y en vez de eso podemos dividirla en 18 partes con lo que $\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$ y $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$ y entre ellos se encuentra $\frac{11}{18}$.

Pero que ocurre cuando los denominadores son diferentes como $\frac{5}{9}$ y $\frac{11}{18}$, podremos encontrar otra fracción ________.

En este caso llevamos a cada fracción a una fracción equivalente que tengan en común el mismo denominador y partir de manera análoga a lo anterior.

AL ESTUDIANTE: En esta acción aplicaste tus conocimientos de su suma, resta, multiplicación y división de fracciones, para deducir la suma, resta, multiplicación y división de los números racionales, a pesar de que son análogas dichas operaciones debes tener en cuenta que los números racionales son entidades teóricas abstraídas del mundo físico.