# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

### “EJERCICIOS RESUELTOS ELEMENTALES DE CÁLCULO PARA INGENIEROS”

## T E S I S

MEMORIA DE EXPERIENCIA
P R O F E S I O N A L
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

P R E S E N T A


## SANTIAGO TOLENTINO OLIVERA


DIRECTOR DE TESIS
DR. PABLO LAM ESTRADA

**MÉXICO D. F.** **AGOSTO 2006.**

# AGRADECIMIENTOS

**Ing. Manuel Tolentino Olivera**
**Gracias por apoyarme siempre.**

**Ing. Leandro Marcos Ramos**
**Por apoyar este proyecto en el ITT.**

**Ing. Santiago Torres Loyo**
**Por su colaboración en el ITT.**

**Dr. Pablo Lam Estrada.**
**Por su colaboración en ESFM.**

# CONTENIDO

# Presentación

Esta Tesis Memoria por Experiencia Profesional, es el resultado de tres años de trabajo con estudiantes del Instituto Tecnológico de Tuxtepec, Oaxaca.

Durante el período Febrero2003-Febrero2006, colaboré en el programa de asesorías para alumnos de Matemáticas I (Cálculo Diferencial) y Matemáticas II (Cálculo Integral). Materias comunes a todas las carreras de Ingeniería, en el Instituto Tecnológico de Tuxtepec, Oaxaca (ITT)

El propósito de estas asesorías es proporcionar un apoyo extra clase, para alumnos en dificultades para aprobar Matemáticas I y Matemáticas II. Con estas asesorías se ha conseguido regularizarlos y aumentar el índice de aprobación en estas materias.

Los "EJERCICIOS RESUELTOS ELEMENTALES DE CÁLCULO PARA INGENIEROS" surgen de las asesorías. Se diseñó este manual; impreso y electrónico. Para servir de apoyo a profesores y alumnos, en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo, en el primer año de ingeniería en el ITT.

Estos ejercicios de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, fueron seleccionados de listas de ejercicios requeridas como tareas y evaluaciones, por los profesores de Matemáticas I y Matemáticas II en el ITT.

Se ha observado que muchos estudiantes carecen de la práctica o los conocimientos básicos necesarios, para resolver correctamente las tareas o ejercicios encargados por sus profesores. Entonces surge la necesidad de apoyarlos, mediante la práctica de ejercicios similares a los requeridos.

Los estudiantes que participan en las asesorías, están inscritos en Matemáticas I y Matemáticas II, del plan de estudios de las carreras:

- Ingeniería Civil
- Ingeniería Electromecánica
- Ingeniería Electrónica
- Ingeniería en Sistemas Computacionales.

En el trabajo con los alumnos, se dedica tiempo a recordar y practicar conocimientos necesarios de nivel bachillerato y anteriores, tales como: operaciones elementales con números enteros, reglas de los exponentes, operaciones elementales con polinomios, factorizar, gráficas de funciones, etc. Así como la relación que tienen estos temas, en la solución de los ejercicios requeridos del actual plan de estudios de Matemáticas, para ingenierías del ITT.

# Problemática

Según datos del departamento de Ciencias Básicas el conjunto de alumnos que reprueban Matemáticas, en las carreras de ingeniería del ITT, es alrededor del 70%. En algunos casos, es una, dos, tres o más unidades no acreditadas; existen oportunidades de regularización por unidad y de todo el semestre, pero el número de alumnos reprobados al final del semestre es muy elevado.

Una característica de los alumnos de nuevo ingreso a las carreras de ingeniería, es que provienen de bachilleratos de la propia ciudad, y de comunidades vecinas a Tuxtepec, pertenecientes a los estados de Oaxaca y Veracruz. Alumnos de bachilleratos tecnológicos: CBTIS, COBAO, COBAEV, CONALEP, agropecuarios: CBTA y CBTF, Tele-bachilleratos, sistemas abiertos y colegios particulares. De esta manera los grupos en el área de ingeniería del ITT, son constituidos por alumnos con habilidades y conocimientos matemáticos dispares; se puede contar con alumnos que no cursaron cálculo y otros con un año de cálculo durante el bachillerato.

Otra característica de la mayoría de alumnos que vienen a estudiar al área de ingeniería del ITT, es poca habilidad en el manejo de técnicas elementales de matemáticas como: operaciones con números enteros, fracciones, ley de los exponentes, radicales, operaciones con monomios y polinomios, factorizar, graficar funciones, etc.

Esta situación se hace evidente en las bajas calificaciones obtenidas por los aspirantes, en el examen de admisión y el curso de inducción de 4 semanas, insuficientes para revertir los años de rezagos en matemáticas.

Estas circunstancias en su conjunto, exigen a los alumnos y profesores de Matemáticas en el ITT, tiempo para repasos y rectificaciones de técnicas elementales, que frustran el avance y profundidad en los temarios del actual plan de estudios.

El presente trabajo tiene la intención de facilitar el aprendizaje autodidacta de todos los estudiantes, mediante el desarrollo de 205 ejercicios resueltos en formato electrónico. Proporcionando una herramienta de retroalimentación permanente para alumnos y profesores.

Para alumnos que inician su primer curso de Cálculo, se desarrollan ejercicios básicos, y hay ejercicios de tipo examen para los estudiantes que se preparan para evaluaciones próximas de Matemáticas I y II.

Los Profesores pueden disponer de este manual, como una presentación electrónica, de 205 ejemplos desarrollados, de Cálculo diferencial y Cálculo integral.

# Objetivos

## OBJETIVO GENERAL

Diseñar un manual de ejercicios resueltos elementales de Cálculo. Que sirva de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las materias Matemáticas I y Matemáticas II, en el Instituto Tecnológico de Tuxtepec, Oaxaca.

I. Crear un conjunto de ejercicios resueltos elementales de cálculo diferencial y cálculo integral, para facilitar el estudio autodidacta, con el propósito de disminuir el índice de reprobación en Matemáticas.

II. Crear una presentación electrónica de ejercicios resueltos de cálculo diferencial y cálculo integral, para apoyar a profesores y alumnos, en clases de Matemáticas I y Matemáticas II. Disponible en la biblioteca y de manera electrónica en la página Web del ITT.

III. Proporcionar una lista de ejercicios de Cálculo diferencial y Cálculo integral, para profesores y alumnos que participen en las asesorías de Matemáticas 1 y Matemáticas II.

IV. Proporcionar una guía de estudio, de ejercicios resueltos de Matemáticas I y Matemáticas II, para los alumnos que presentarán extraordinarios y repetidores de éstas materias en el ITT.

V. Crear un manual electrónico de ejercicios resueltos de Cálculo, para difundirlo por medios electrónicos a estudiantes de los Bachilleratos de la ciudad y región de Tuxtepec; para apoyar su preparación al examen de admisión y curso de inducción al ITT.

# Contexto

Este proyecto tiene su origen en una serie de sesiones de Matemáticas I y Matemáticas II, impartidas para los alumnos de Ingeniería, de nuevo ingreso y que no acreditaron sus primeras evaluaciones de Matemáticas en el ITT.

En estas sesiones extra clase, llamadas asesorías, los alumnos resuelven ejemplos y ejercicios, con el objetivo de que logren practicar lo suficiente, para acreditar las próximas evaluaciones de regularización o extraordinarios.

Durante las asesorías, revisamos apuntes, evaluaciones anteriores, tareas y ejemplos de clase, para orientar los esfuerzos en la dirección indicada por el profesor titular.

El esfuerzo de la asesoría consiste en obtener, desarrollar y explicar las soluciones. De: tareas, evaluaciones, ejercicios anteriores y del libro de texto; indicados por el profesor titular o los programas actuales.

Es necesario explicar a los alumnos los detalles de los procedimientos, para aclarar dudas anteriores; temas de nivel básico olvidados; como operaciones con fracciones, álgebra elemental y las bases de geometría y cálculo diferencial de nivel bachillerato.

Una vez aclaradas las dudas y confusiones, mediante abundantes ejemplos y ejercicios, seguimos con el desarrollo de los temas requeridos por el programa actual: enfocamos la atención en las tareas y evaluaciones requeridas en clase.

En esta parte de la asesoría, ha resultado útil detenerse, para desarrollar ejercicios modelo y proponer ejercicios similares o del mismo nivel a los expuestos en el pizarrón; cambiando datos o números, para que los estudiantes resuelvan por su propia mano durante la sesión.

Mientras tanto se alienta a los alumnos a participar, respondiendo a cualquier pregunta que formulen, a utilizar herramientas como calculadoras y programas de cómputo para verificar cálculos, verificar soluciones con el ejercicio modelo y visualizar las gráficas.

Se conceden unos minutos para esta práctica y luego se evalúan los procedimientos desarrollados por los alumnos; cada error es comentado y aclarado para evitar su repetición, se propone un nuevo ejercicio para verificar que se han hecho rectificaciones de los errores. Este proceso de enseñanza-aprendizaje intensivo, es aplicado a cada tema de los apuntes próximos a evaluar por el profesor titular.

Las soluciones de los ejercicios se apoyan en los teoremas y definiciones adquiridas en clase, y se comparan con los resultados disponibles en el libro de texto.

Aunque los conceptos se manejan en cierto nivel elemental, es importante mantener en mente y no desviarse del propósito de estas asesorías: la práctica suficiente de ejercicios, para acreditar futuras evaluaciones de la materia.

Las asesorías de Matemáticas son voluntarias, se invita a todos los alumnos a inscribirse a un horario extra clase conveniente.

Los alumnos participantes al programa de asesorías, llenan un formato de registro con: Nombre completo, Nombre de la carrera, semestre, grupo, bachillerato de procedencia, teléfono, e-mail. Se solicita un comentario respecto a la asesoría, y se lleva un seguimiento de sus calificaciones posteriores a las sesiones de la asesoría.

Se inscriben al programa de asesorías de Matemáticas, aproximadamente 50% de cada grupo del área de Ingeniería; principalmente alumnos en problemas en las primeras unidades, que tienen interés y tiempo para dedicar a las asesorías.

Si la asistencia de los participantes a las asesorías es regular, se obtienen buenos resultados en la mayoría de los participantes, esto es: acreditan la materia.

# Herramientas utilizadas

- El Procesador de ecuaciones **MathType** para escribir los procedimientos lo más explícitos posible.

- En este trabajo se puede observar la aplicación de **Win Plot** para graficar algunas funciones, considero conveniente su uso frecuente.

- Otra herramienta que me ha resultado útil es **Encarta 2005** con sus videos documentales.

- **“Herramientas del estudiante”** CD-ROM de **Serway-Beichner**, de la obra: “Física para científicos e ingenieros”

- **Calculadoras científicas,** especialmente el manejo de fracciones, cálculos con funciones trascendentes, etc.

- **Libro de texto:** Granville, Cálculo. En la bibliografía se sugieren al estudiante algunos textos adicionales.

# Introducción

Con el propósito de ayudar a los estudiantes que inician el aprendizaje del Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, se realizan estos “EJERCICIOS RESUELTOS ELEMENTALES DE CÁLCULO”. Los cuales, incluyen ciertos detalles de los procedimientos algebraicos necesarios, para obtener las soluciones correctas.

La mayoría de los “EJERCICIOS RESUELTOS ELEMENTALES DE CÁLCULO” se pueden verificar junto a las soluciones, en el conocido libro de texto: “Cálculo Diferencial e Integral”, por William Anthony Granville. El texto empleado desde el nivel bachillerato, y en el ITT, por prácticamente todos los profesores de Matemáticas I y Matemáticas II.

En concordancia con los programas actuales de Matemáticas para Ingeniería del ITT, iniciamos con ejemplos de composición de funciones, dominio y contra-dominio, algunas gráficas de funciones algebraicas: rectas, cuadráticas, etc. Trascendentes: Raíz cuadrada, trigonométricas, y exponenciales.

Continuamos con el cálculo de límites, al infinito y en casos donde se requiere factorizar o racionalizar, y aplicamos la definición de la derivada, el llamado método de los 4 pasos para derivar algunas funciones.

Seguimos con ejercicios de derivación utilizando fórmulas básicas, y se propone emplear la propiedad lineal de la derivada (fórmula 3 y 4) para reducir el problema de derivar expresiones más complejas, a derivar simplemente término a término.

Algunos ejemplos del Cálculo de Máximos y Mínimos, utilizando ambos métodos; método de la primera derivada y método de la segunda derivada.

La segunda parte de los “EJERCICIOS RESUELTOS ELEMENTALES DE CÁLCULO”, es de Cálculo Integral elemental. Iniciamos con el cálculo de integrales indefinidas utilizando fórmulas elementales. Desde la integral de una constante, y las diferentes posibilidades de $x^n$, seguidas de integración de funciones exponenciales, trigonométricas, hasta el método de integración por partes.

Como en derivadas, se aplica la propiedad lineal de la integral, reduciendo la complejidad notablemente; de esta manera, el proceso de obtener la integral, se reduce a integrar por separado, un sólo término por vez. Además se desarrollan ejercicios de aplicación de la integral, integrales definidas, el área bajo la curva, sus correspondientes gráficas, etc.

El alumno puede visualizar estos desarrollos y apoyarse mientras intenta llegar a las soluciones por su propia mano.

Se incluyen los contenidos temáticos actuales de Matemáticas I y Matemáticas II, materias comunes a las carreras en ingeniería en el ITT.

# Capítulo 1

# Matemáticas I
# Cálculo Diferencial

## Objetivo general del curso de Matemáticas I.

Dominará el concepto de función y desarrollará la habilidad numérica y geométrica para representar las funciones, aplicará la derivada como una herramienta para la solución de problemas prácticos del área de ingeniería en que se imparte esta materia.

# Programa de Matemáticas I.

## 1.- DATOS DE LA ASIGNATURA

| | |
|---|---|
| Nombre de la asignatura: | **Matemáticas I (Cálculo Diferencial)** |
| Carrera: | **Todas las Ingenierías** |
| Clave de la asignatura: | **ACM - 0403** |
| Horas teoría-horas práctica-créditos | **3-2-8** |

## 2.- HISTORIA DEL PROGRAMA

| Lugar y fecha de elaboración o revisión | Participantes | Observaciones (cambios y justificación) |
|---|---|---|
| Dirección General de Institutos Tecnológicos. Cd. de México de 7 y 8 agosto 2003. | Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Chihuahua II. | Propuesta de contenidos temáticos comunes de matemáticas para las ingenierías. |
| Dirección General de Institutos Tecnológicos. Cd. de México del 24 al 25 de noviembre de 2003. | Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Chihuahua II. | Análisis y mejora de los programas de matemáticas para ingeniería, tomando como base las Reuniones Nacionales de Evaluación Curricular de las diferentes carreras. |
| Cd. de México del 21 al 23 de Enero de 2004. | Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Mexicali. | Definición de las estrategias didácticas |

## 3.- UBICACIÓN DE LA ASIGNATURA

### a). Relación con otras asignaturas del plan de estudio

| Anteriores | |
|---|---|
| **Asignaturas** | **Temas** |
| Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. | |

| Posteriores | |
|---|---|
| **Asignaturas** | **Temas** |
| Matemáticas II | Diferenciales<br>Integrales |
| Matemáticas III | Álgebra vectorial.<br>Cálculo vectorial.<br>Aplicaciones. |
| Matemáticas IV | Espacios vectoriales. |
| Matemáticas V | Ecuaciones diferenciales ordinarias.<br><br>Ecuaciones diferenciales parciales. |
| Análisis numérico. | Método de Newton-Raphson.<br><br>Solución numérica de Ecuaciones diferenciales. |

## b). Aportación de la asignatura al perfil del egresado

- Desarrollar un pensamiento lógico matemático formativo que le permite analizar fenómenos reales (razón de cambio) y modelarlos.
- Desarrollar su creatividad para la solución de problemas de optimización asociados a funciones reales de una sola variable.

## 4.- OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DEL CURSO

Dominará el concepto de función y desarrollará la habilidad numérica y geométrica para representar las funciones, aplicara la derivada como una herramienta para la solución de problemas prácticos del área de ingeniería en que se imparte esta materia.

**5.- TEMARIO**

| Unidad | Temas | Subtemas |
|---|---|---|
| 1 | Números reales | 1.1 Clasificación de los números reales.<br>1.2 Propiedades.<br>1.3Interpretación geométrica de los números reales.<br>1.4 Desigualdades lineales y cuadráticas y sus propiedades.<br>1.5 Valor absoluto y sus propiedades. |
| 2 | Funciones | 2.1 Definición de función.<br>2.2 Representaciones de funciones(tablas, gráficas, formulas y palabras)<br>2.3 Clasificación de las funciones por su naturaleza; algebraicas y trascendentes.<br>2.3.1 Función polinomial.<br>2.3.2 Función racional.<br>2.3.3 Función raíz.<br>2.3.4 Función trigonométrica.<br>2.3.5 Función exponencial.<br>2.3.6 Función logarítmica.<br>2.3.7 Función definida parte por parte.<br>2.3.8 Función inversa.<br>2.3.9 Función implícita.<br>2.4 Clasificación de las funciones por sus propiedades:<br>2.4.1 Función creciente y decreciente<br>2.4.2 Función par e impar.<br>2.4.3 Función simétrica.<br>2.4.4 Función periódica.<br>2.5 Operaciones con funciones y composición de funciones<br>2.6 Translación de funciones. |
| 3 | Límites y Continuidad | 3.1 Definición de límite<br>3.2 Propiedades de los límites<br>3.3 Límites laterales<br>3.4 Asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas)<br>3.5 Límites especiales.<br>3.6 Definición de continuidad.<br>3.7 Propiedades de la continuidad. |
| 4 | Derivadas | 4.1 Definición de la derivada.<br>4.2 Interpretación geométrica y física de la derivada.<br>4.3 Derivada de la función constante, derivada del producto de una constante |

| | | |
|---|---|---|
| | | por una función, derivada de la función $x^n$ cuando n es un entero positivo, y cuando n es un número real, derivada de una suma de funciones, derivada de un producto de funciones y derivada de un cociente de funciones.<br>4.4 Derivada de las funciones exponenciales.<br>4.5 Derivada de las funciones trigonométricas.<br>4.6 Derivada de las funciones compuestas (regla de la cadena).<br>4.7 Derivada de la función inversa.<br>4.8 Derivada de las funciones logarítmicas.<br>4.9 Derivada de las funciones trigonométricas inversas.<br>4.10 Derivada de las funciones implícitas.<br>4.11 Derivadas sucesivas.<br>4.12 Funciones hiperbólicas y sus derivadas.<br>4.13 Teorema del valor medio y teorema de Rolle. |
| 5 | Aplicaciones de la derivada | 5.1 Recta tangente, normal e intersección de curvas.<br>5.2 Máximos y mínimos(criterio de la primera derivada).<br>5.3 Máximos y mínimos (criterio de la segunda derivada.)<br>5.4 Funciones crecientes y decrecientes.<br>5.5 Concavidades y puntos de inflexión.<br>5.6 Estudio general de curvas.<br>5.7 Derivada como razón de cambio y aplicaciones.<br>5.8 Problemas de aplicación (optimización y cinemática).<br>5.9 Regla de L`Hôpital. |
| 6 | Sucesiones y series | 6.1 Definición de sucesión.<br>6.2 Límite de una sucesión.<br>6.3 Sucesiones monótonas y acotadas.<br>6.4 Definición de serie infinita.<br>6.5 Serie aritmética y geométrica.<br>6.6 Propiedades de las series.<br>6.7 Convergencia de series.<br>6.8 Series de potencia.<br>6.9 Derivación de las series de potencia.<br>6.10 Representación de una función en series de potencia.<br>6.11 Serie de Taylor y serie de McLaurin. |

## 6.- APRENDIZAJES REQUERIDOS

- Dominio de los temas del álgebra, trigonometría y geometría analítica

## 7.- SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Diagnosticar y homogeneizar los conocimientos previos requeridos para esta materia.
- Investigar antes de iniciar la clase el origen histórico, desarrollo y definiciones planteadas en los conceptos involucrados al tema
- Analizar y discutir la aplicación de las definiciones del tema en problemas reales relacionados con la ingeniería en que se imparta esta materia, con el objetivo incrementar el interés y la creatividad del estudiante.
- Propiciar el uso de Software de matemáticas (Derive, Mathcad, Mathematica, Maple, Matlab) o la calculadora graficadora como herramientas que faciliten la comprensión de los conceptos, la resolución de problemas e interpretación de los resultados.
- Propiciar la interrelación entre el profesor y las academias de las especialidades correspondientes, a través de reuniones en las que se discutan las necesidades de ambas partes y así establecer la profundidad con que se cubrirán cada uno de los temas de esta materia, así como determinar problemas de aplicación.
- Uso de recursos audiovisuales de manera racional
- En cada unidad iniciar con un proceso de investigación sugerida por el maestro de los temas a tratar.
- Grupos de discusión y análisis sobre los conceptos previamente investigados.
- Al término de la discusión se formalice y establezca las definiciones necesarias y suficientes para el desarrollo de esta unidad.
- Proporcionar al estudiante una lista de problemas del tema y genere prácticas de laboratorio para confrontar los resultados obtenidos.
- Los problemas, en caso posible, sean resueltos con algún software.

## 8.- SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

- Diagnóstica, temática
- Ejercicios planteados en clase.
- Evidencias de aprendizaje( Análisis y discusión grupal, elaboración de prototipos, modelos, actividades de investigación, reportes escritos, solución de ejercicios extraclase)
- Problemas resueltos con apoyo de software.

## 9.- UNIDADES DE APRENDIZAJE

**UNIDAD 1.-** Números reales.

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| El estudiante aplicará las propiedades de los números reales en la resolución de desigualdades lineales, cuadráticas y de valor absoluto. | • Investigar la clasificación y las propiedades de los números reales.<br>• Representar los números reales en la recta numérica.<br>• Interpretar el concepto de intervalo.<br>• Resolver desigualdades lineales, cuadráticas y de valor absoluto. | 1,2, 3, 4,5, 6, 7, 8, 9, 11,12, 13, 14,19,20 |

**UNIDAD 2.-** Funciones

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Identificará los diferentes tipos de funciones y sus propiedades<br><br>Realizará operaciones con funciones e interpretará su representación gráfica. | • Establecer la diferencia entre ecuación y función.<br>• Definir las funciones por sus propiedades: pares, impares, simétricas, periódicas.<br>• Identificar los tipos de funciones: algebraica, racional, inversa, exponencial, trigonométrica, logarítmica, etc.<br>• Realizar operaciones con funciones.<br>• Graficar diferentes funciones estableciendo su dominio y su rango.<br>• 2.6 Utilizar software que permita efectuar la graficación de funciones. | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 19, 20 |

**UNIDAD 3.-** Límites y continuidad

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Determinará el límite de una función, en caso de que exista, lo evaluará numéricamente y aplicará los teoremas de límites.<br><br>Definirá y analizará la continuidad de una función. | • Definir el Límite de una función.<br>• Interpretar gráficamente a los límites de funciones<br>• Determinar el Límite de una función, mediante la aplicación de los diferentes teoremas de Límites.<br>• Aplicar los límites de funciones tanto en la suma, resta, producto, cociente y composición. Así como a funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.<br>• Definir y aplicar los conceptos de límites laterales, al infinito e infinitos.<br>• Establecer la definición de continuidad de una función.<br>• Identificar la discontinuidad esencial y removible.<br>• Mostrar funciones que permitan comprender los conceptos de asíntota vertical y horizontal. | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16,17, 18, 19, 20 |

**UNIDAD 4.-** Derivadas

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Comprenderá el concepto de la derivada; su interpretación geométrica y física.<br><br>Desarrollará la capacidad de derivar funciones algebraicas y trascendentes mediante reglas de derivación y la técnica de derivación implícita | • Definir la interpretación geométrica y física de la derivada.<br>• Definir el concepto de derivada.<br>• Derivar funciones algebraicas y trascendentes.<br>• Aplicar la Regla de la cadena<br>• Derivar funciones trigonométricas inversas y funciones implícitas<br>• Aplicar la derivación Logarítmica o de Bernoulli<br>• Calcular las derivadas sucesivas de una función.<br>• Definir una función hiperbólica y | 1, 2, 3, 4, 5, 6,7,8,9,10,11, 12, 13, 14, 15 16, 17, 18,19, 20. |

| | | |
|---|---|---|
| implícita. | obtener su derivada.<br>• Definir y aplicar el Teorema del valor medio y el Teorema de Rolle. | |

**UNIDAD 5.-** Aplicaciones de la derivada

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Aplicará los conceptos de derivadas y los utilizará en la graficación de funciones y en la solución de problemas reales. | • Definir y hallar las ecuaciones de la recta, tangente y normal a una curva.<br>• Definir los intervalos en los que la función es creciente y decreciente.<br>• Aplicar el Teorema del valor medio y el teorema de Rolle en la solución de problemas.<br>• Aplicar la Regla de L'Hôpital a los problemas de límites donde aparezcan formas indeterminadas.<br>• Definir y aplicar el concepto de la primera derivada y su graficación.<br>• Definir y hallar los intervalos en los que la función es cóncava.<br>• Aplicaciones | 1, 2, 3, 4, 5, 6,7,8,9,10,11, 12, 13, 14, 15 16, 17, 18,19, 20. |

**UNIDAD 6.-** Sucesiones y series

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Adquirirá los conocimientos básicos sobre sucesiones y series.<br><br>Representará las funciones mediante series de potencia. | • Analizar y definir los conceptos de sucesión y límite de una sucesión.<br>• Analizar y establecer la convergencia de una sucesión.<br>• Analizar y establecer el concepto de series infinitas.<br>• Conocer algunas series especiales aritmética, geométrica, armónica, entre otras)<br>• Establecer los diferentes criterios de convergencia de las series y aplicarlos. | 1, 2, 3, 4, 5, 6,7,8,9,10,11, 12, 13, 14, 15 16, 17, 18,19, 20. |

| | | |
|---|---|---|
| | • Conocer y analizar las series de potencia.<br>• Establecer el intervalo y el radio de convergencia de una serie de potencias.<br>• Representar una función mediante series de potencias.<br>• Conocer y analizar la serie de Taylor y la serie de Maclaurin. | |

**10. FUENTES DE INFORMACIÓN**


1. James – Stewart Cálculo de una variable. Edit. Thomson Editores.

2. Swokowski Earl W. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.

3. Roland E. Hostetler Robert P. Cálculo y Geometría Analítica Edit. McGraw-Hill.

4. Zill Dennis G. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica

5. Edwards Jr. C. H. y Penney David E. Cálculo y Geometría Analítica. Edit. Prentice-Hall.

6. Fraleigh John B. Cálculo con Geometría Analítica. Edit. Addison- Wesley.

7. Anton Howard. Cálculo con Geometría Analítica Edit. Wiley.

8. The Calculus problem solver. Edit. R.E.A.

9. Leithold Louis. El Cálculo. Edit. OXFORD. University Press.

10. Swokowski Earl W. Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica

11. Granville William A. Cálculo Diferencial e Integral. Edit. Noriega – LIMUSA.

12. Thomas Jr- George / Finney Ross. CÁLCULO una variable. Edit, Pearson Educatio

13. Larson – Hostetler. Cálculo con Geometría Edit. McGraw-Hill.

14. Purcell, Edwing J. y Dale Varberg Cálculo con Geometría Analítica Prentice Hall.

15. Derive ( Software ).

16. Mathematica (Software ).

17. MathCad ( Software ).

18. Maple ( Software ).

19. C. Boyer Edit Historia de las Matemáticas. Alianza.

20. H. Bell Historia de las Matemáticas Edit. Fondo de Cultura Económica

## 11. PRÁCTICAS

- Discusión y análisis grupal de conceptos previamente investigados por el estudiante.
- Graficación y resolución de problemas utilizando software matemático.
- Análisis y discusión en el aula de la aplicación de las herramientas matemáticas en la solución de problemas de ingeniería

# Funciones

1. Determine el conjunto solución de la desigualdad:

$|x+5| \le 9$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
|x+5| \le 9 \quad &\Rightarrow \quad -9 \le x+5 \le 9;\\
&\Rightarrow \quad -9 \le x+5 \quad \text{y} \quad x+5 \le 9\\
&\Rightarrow \quad -9-5 \le x \quad \text{y} \quad x \le 9\text{-}5\\
&\Rightarrow \quad \text{-}14 \le x \quad \text{y} \quad x \le 4\\
&\therefore \quad \text{-}14 \le x \le 4 \ \text{ y entonces,}
\end{aligned}
$$

$[\text{-}14,4]$ es el conjunto solución.

2. Determine el dominio de la desigualdad:

$|3x-8| \ge 5$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
|3x-8| \ge 5 \quad \Rightarrow \quad 3x-8 \le -5 \quad &\text{o} \quad 3x\text{-}8 \ge 5\\
3x \le -5+8 \quad &\text{o} \quad 3x \ge 5+8\\
3x \le 3 \quad &\text{o} \quad 3x \ge 13\\
x \le 1 \quad &\text{o} \quad x \ge \frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El conjunto solución es $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le 1 \text{ o } x \ge \frac{13}{3}\right\} = (-\infty,1] \cup \left[\frac{13}{3},+\infty\right)$.

3. Determine el dominio de la siguiente función racional:

$$f(x)=\frac{x^3+x+5}{x^2-3x-4}$$

solución :

$$f(x)=\frac{x^3+x+5}{x^2-3x-4}=\frac{x^3+x+5}{(x-4)(x+1)}$$

En donde si $x-4=0$ ó $x+1=0$, f está indefinida.

Luego, si $x-4=0$ ó $x+1=0 \Rightarrow x=4$ ó $x=-1$,

$\therefore -1,\ 4$ no pertenecen al dominio de f,

y así Dom $f=(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,\infty)$.

4. Determinar

$$(f\circ g)(x),\ (g\circ f)(x)$$

$$\text{si } f(x)=3x+2,\ g(x)=2x-1$$

Solución:

De la definición de composición de funciones

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=3(2x-1)+2=6x-3+2=6x-1.$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+2)=2(3x+2)-1=6x+4-1=6x+3.$

5.

si $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^2+1$ encontrar $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$

solución :

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=(x^2)^2+1=x^4+1.$

6.

si $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=\sqrt{2-x}$ encontrar el dominio fg, f/g.

solución : $(fg)(x)=(f(x))(g(x))=\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}$

En donde fg está definida si,

$x-1\geq 0$ y $2-x\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 1$ y $2\geq x$

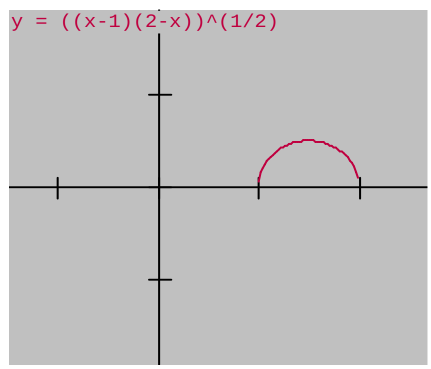
o sea $1\leq x\leq 2$, $\therefore$ Dom $fg=[1,2]$.

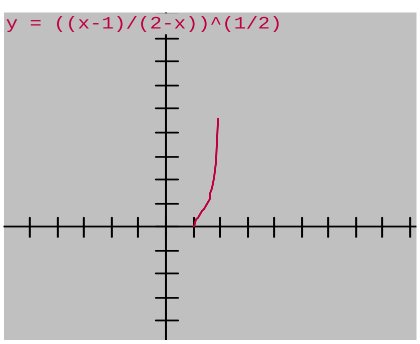
$$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$$

$x-1\geq 0$ y $2-x>0$

$\Rightarrow x\geq 1$ y $2>x\Rightarrow 1\leq x<2$

$\therefore$ Dom $(f/g)(x)=[1,2)$.




7.

si $f(x)=2x+10,\ g(x)=\frac{1}{2}x-5$ determine $f\circ g,\ g\circ f.$

solución :

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{2}x-5\right)=2\left(\frac{1}{2}x-5\right)+10$$

$$=\frac{2}{2}x-2(5)+10=x-10+10=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+10)=\frac{1}{2}(2x+10)-5$$

$$=\frac{2x}{2}+\frac{10}{2}-5=x+5-5=x.$$

8. Dado $f(x)=x^3-5x^2-4x+20$

Verifique que: f(1)=12, f(5)=0, f(0)=-2f(3), f(7)=5f(-1).

Solución :

$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \Rightarrow$

$f(1) = 1^3 - 5(1)^2 - 4(1) + 20 = 1 - 5 - 4 + 20 = 12.$

$f(5) = 5^3 - 5(5)^2 - 4(5) + 20 = 125 - 125 - 20 + 20 = 0$

$f(0) = 0^3 - 5(0)^2 - 4(0) + 20 = 20$

$f(3) = 3^3 - 5(3)^2 - 4(3) + 20 = 27 - 45 - 12 + 20 = 47 - 57 = -10$

$-2f(3) = -2(-10) = 20 = f(0).$

$f(7) = 7^3 - 5(7)^2 - 4(7) + 20 = 343 - 245 - 28 + 20 = 90$

$f(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 - 4(-1) + 20 = -1 - 5 + 4 + 20 = 18$

$5f(-1) = 5(18) = 90 = f(7).$

9.

Dado $f(x)=x^3-5x^2-4x+20$, compruebe que:

$f(t+1) = t^3 - 2t^2 - 11t + 12,$

Solución:

$f(t+1) = (t+1)^3 - 5(t+1)^2 - 4(t+1) + 20 =$

$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 5(t^2 + 2t + 1) - 4(t+1) + 20 =$

$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 5t^2 - 10t - 5 - 4t - 4 + 20 =$

$t^3 + 3t^2 - 5t^2 + 3t - 10t - 4t + 1 - 5 - 4 + 20 = t^3 - 2t^2 - 11t + 12.$

10. Dado:

$f(x) = x^3 + 3x$, comprobar:

$f(x+h) - f(x) = 3(x^2+1)h + 3xh^2 + h^3.$

Solución:

como $f(x) = x^3 + 3x$

$\Rightarrow f(x+h) = (x+h)^3 + 3(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3x + 3h$

$\therefore f(x+h) - f(x) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3x + 3h - \left[x^3 + 3x\right]$

$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3x + 3h - x^3 - 3x = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3h$

$= 3(x^2h + h) + 3xh^2 + h^3 = 3(x^2+1)h + 3xh^2 + h^3.$

11. Dado

$f(x) = \frac{1}{x}$, comprobar : $f(x+h) - f(x) = -\frac{h}{x^2 + xh}.$

Solución:

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x+h) = \frac{1}{x+h}$

$\Rightarrow f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = \frac{x-x-h}{x(x+h)} = -\frac{h}{x^2+xh}.$

12. Dado

$f(x) = \operatorname{sen} x.$

comprobar : $f(x+2h) - f(x) = 2\cos(x+h)\operatorname{sen} h.$

Solución :

Empleando la identidad : $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-y)$

$$f(x+2h) - f(x) = \operatorname{sen}(x+2h) - \operatorname{sen} x = 2\cos\frac{1}{2}(x+2h+x)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x+2h-x)$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}(2x+2h)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(2h) = 2\cos\frac{1}{2}2(x+h)\operatorname{sen}\frac{1}{2}2h = 2\cos(x+h)\operatorname{sen} h.$$

13.

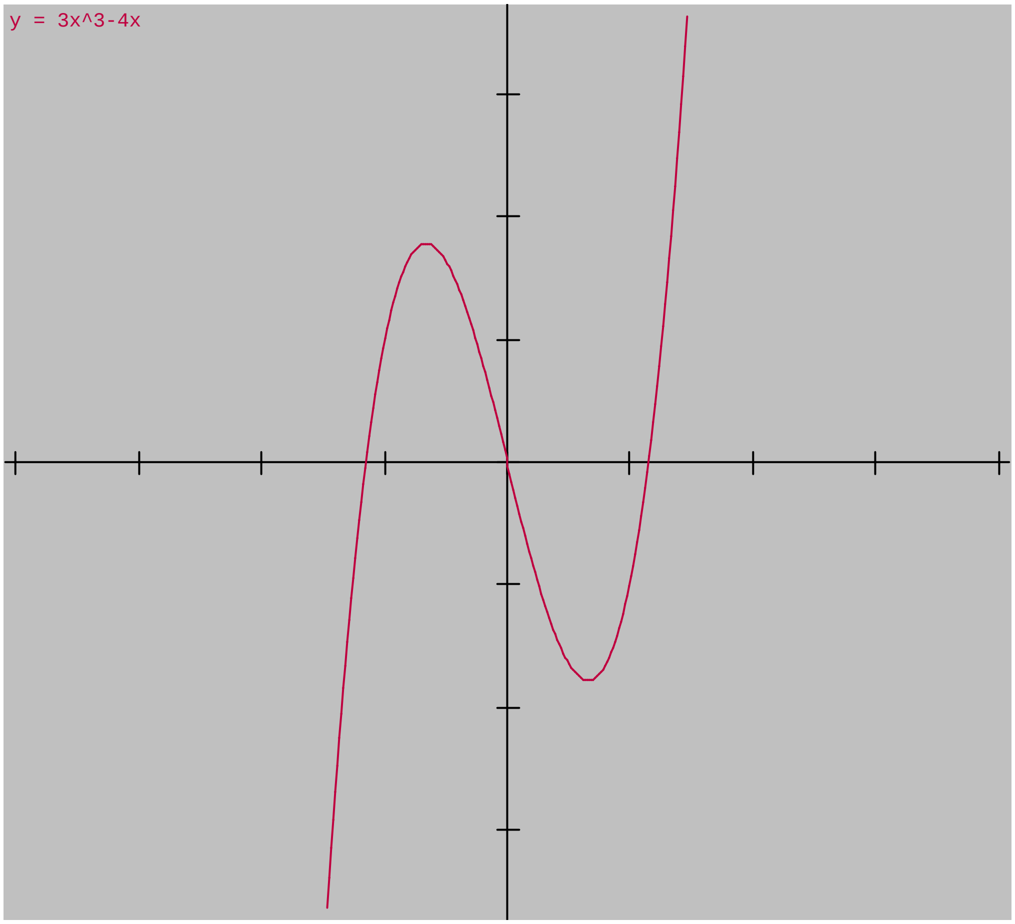
Determinar si la función es par, impar o ninguna de ambas.

Solución:

$$f(x) = 3x^3 - 4x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 4(-x) = -3(x)^3 - (-4x) = -(3x^3 - 4x) = -f(x)$$

$\therefore f(-x) = -f(x) \therefore f$ es IMPAR.

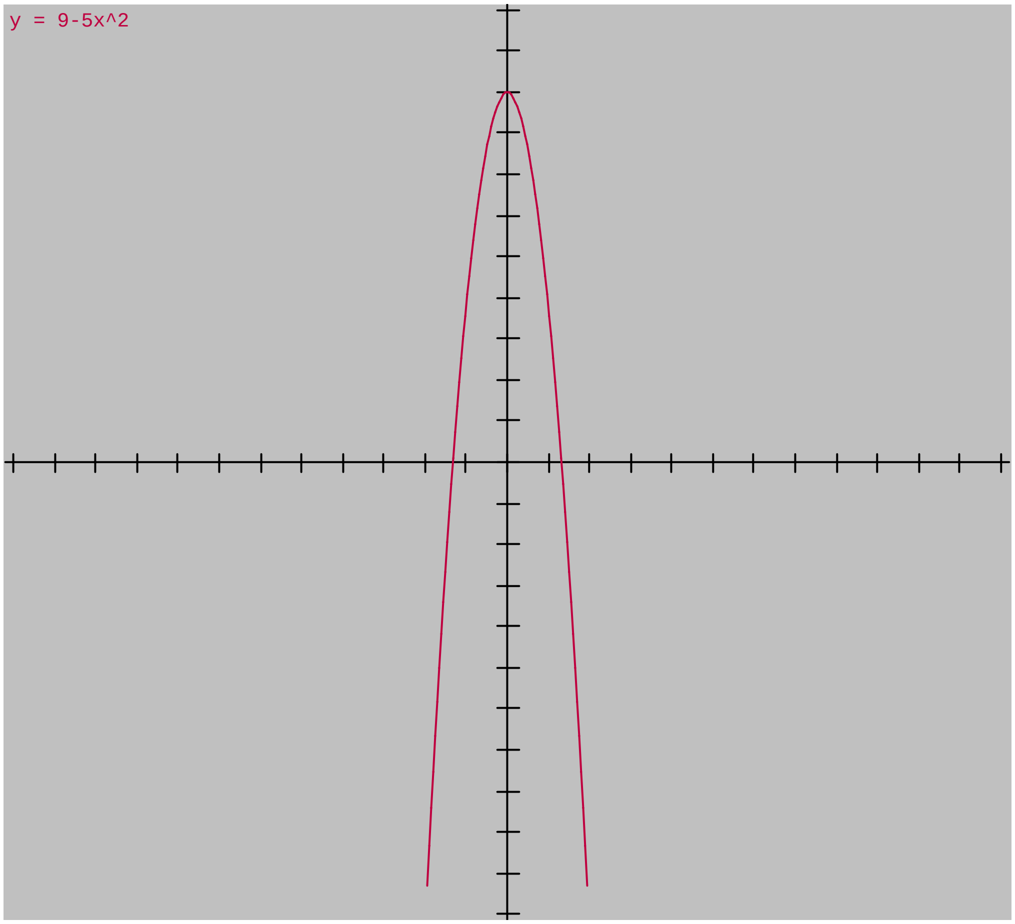



14. Determinar si la función es par, impar o ninguna de ambas.

Solución:

$f(x) = 9 - 5x^2$

$f(-x) = 9 - 5(-x)^2 = 9 - 5x^2 = f(x) \therefore f(-x) = f(x)$, f es PAR.




15. Determinar si la función es par, impar o ninguna de ambas.

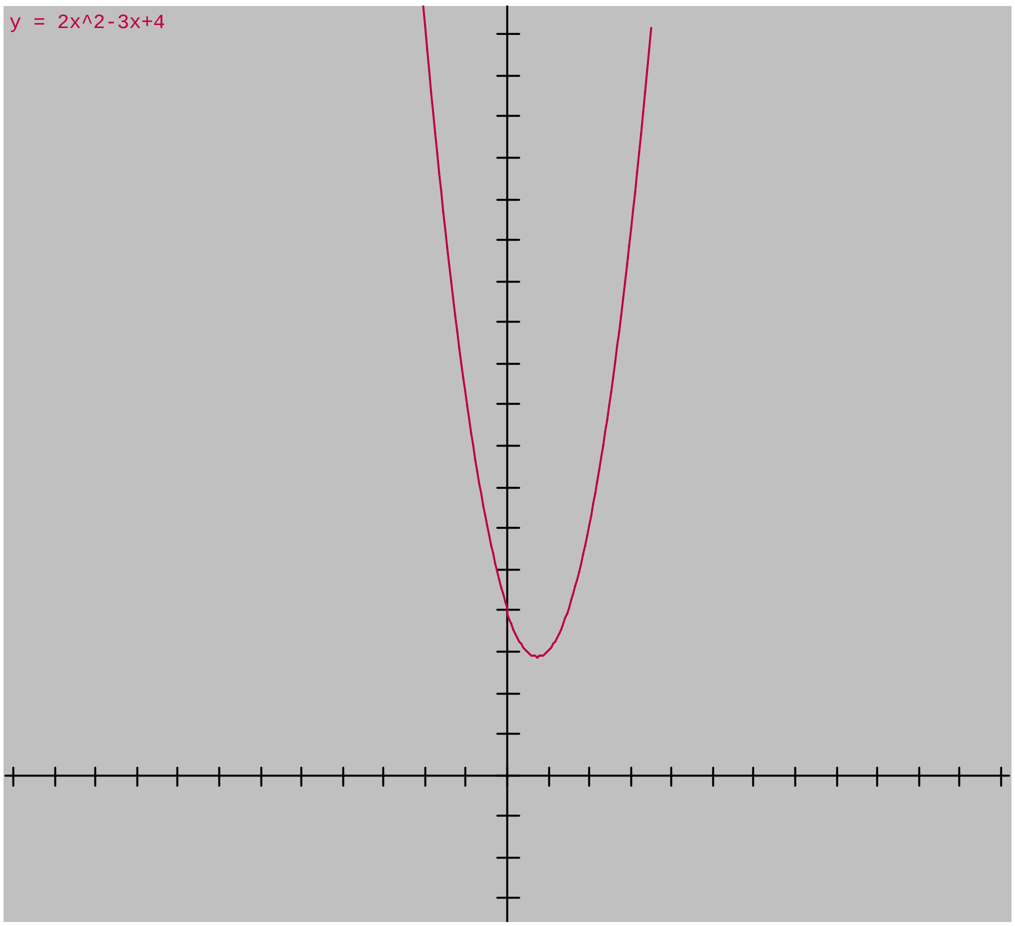
Solución:

$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

$f(\text{-}x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 4 = 2x^2 + 3x + 4 \neq f(x)$

$f(-x) = -(-2x^2 - 3x - 4) \neq -f(x)$

f no es par, ni impar.




## Gráficas de Funciones

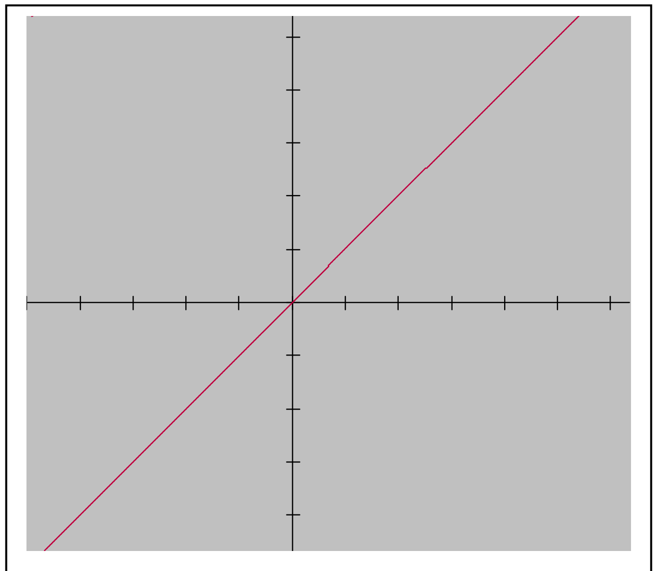
La GRÁFICA de una FUNCIÓN se define como el conjunto de puntos (x, f(x)) en el Plano Cartesiano.

En este trabajo se utiliza el software Win-Plot, para graficar funciones.

## Ejemplos:

16. $f(x)=x$

| x | y |
|---|---|
| -3.00000 | -3.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 |
| 3.00000 | 3.00000 |

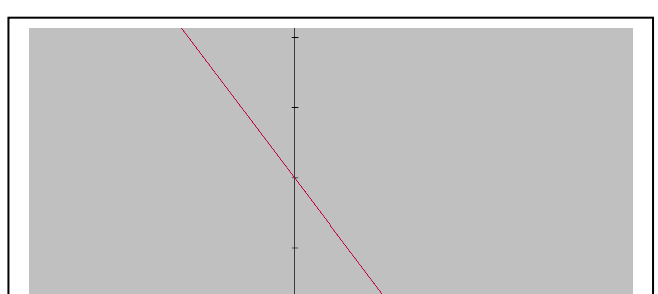


Dominio de $f=(-\infty, \infty)$

Contradominio de $f=(-\infty, \infty)$

17. Graficar $f(x)=-x+2$

| x | y |
|---|---|
| -5.00000 | 7.00000 |
| -3.00000 | 5.00000 |

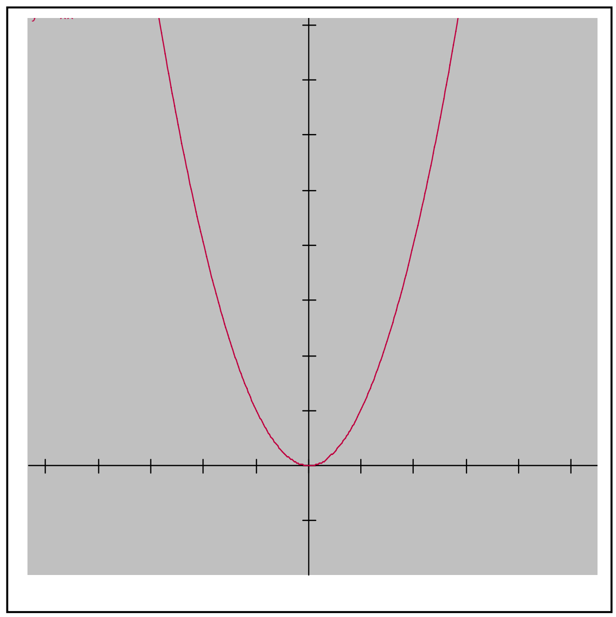


| | |
|---|---|
| 5.00000 | -3.00000 |

Dominio=X
Contradominio=Y

## 18. Graficar $f(x) = x^2$

| x | y |
|---|---|
| -5.00000 | 25.00000 |
| -4.00000 | 16.00000 |
| -3.00000 | 9.00000 |
| -2.00000 | 4.00000 |
| -1.00000 | 1.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 |
| 0.20000 | 0.04000 |
| 0.40000 | 0.16000 |
| 0.60000 | 0.36000 |
| 0.80000 | 0.64000 |
| 1.00000 | 1.00000 |
| 1.20000 | 1.44000 |
| 1.40000 | 1.96000 |
| 1.60000 | 2.56000 |
| 1.80000 | 3.24000 |
| 2.00000 | 4.00000 |

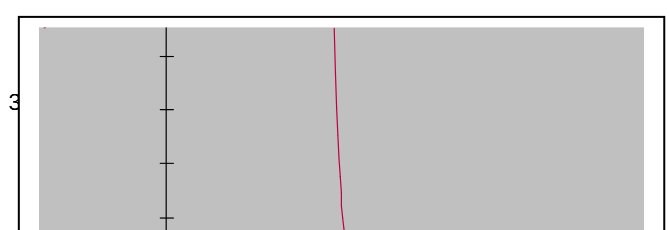


Dominio de f $= (-\infty, +\infty)$

Contradominio de f$=[0, +\infty)$.

## 19. Graficar f(x)=1/(x-3)

| x | y |
|---|---|
| -5.00000 | -0.12500 |
| -4.00000 | -0.14286 |



| | |
|---|---|
| -3.00000 | -0.16667 |
| -2.00000 | -0.20000 |
| -1.60000 | -0.21739 |
| -1.40000 | -0.22727 |
| -1.20000 | -0.23810 |
| -1.00000 | -0.25000 |
| -0.80000 | -0.26316 |
| -0.60000 | -0.27778 |
| -0.40000 | -0.29412 |
| -0.20000 | -0.31250 |
| 0.00000 | -0.33333 |
| 0.20000 | -0.35714 |
| 0.40000 | -0.38462 |
| 0.60000 | -0.41667 |
| 0.80000 | -0.45455 |
| 1.00000 | -0.50000 |
| 1.20000 | -0.55556 |
| 1.40000 | -0.62500 |
| 1.60000 | -0.71429 |
| 1.80000 | -0.83333 |
| 2.00000 | -1.00000 |
| 2.20000 | -1.25000 |
| 2.40000 | -1.66667 |
| 2.60000 | -2.50000 |
| 2.80000 | -5.00000 |
| 3.00000 | indefinido |
| 3.20000 | 5.00000 |
| 3.40000 | 2.50000 |
| 3.60000 | 1.66667 |
| 3.80000 | 1.25000 |
| 4.00000 | 1.00000 |

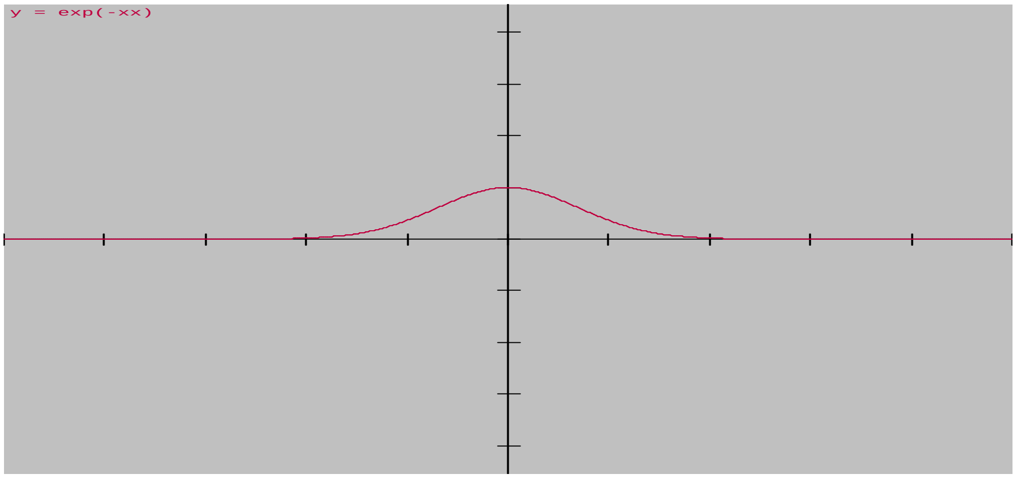
Dominio de f $= (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

Contradominio de f $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

20. Graficar f(x)=sen(x)

| x | y |
|---|---|
| -6.48000 | -0.19555 |
| -6.12000 | 0.16246 |
| -5.76000 | 0.49964 |
| -5.40000 | 0.77276 |
| -5.04000 | 0.94681 |
| -4.68000 | 0.99948 |
| -4.32000 | 0.92400 |
| -3.96000 | 0.73006 |
| -3.60000 | 0.44252 |
| -3.24000 | 0.09825 |
| -2.88000 | -0.25862 |
| -2.52000 | -0.58233 |
| -2.16000 | -0.83138 |
| -1.80000 | -0.97385 |
| -1.44000 | -0.99146 |
| -1.08000 | -0.88196 |
| -0.72000 | -0.65938 |
| -0.36000 | -0.35227 |
| 0.00000 | 0.00000 |
| 0.36000 | 0.35227 |
| 0.72000 | 0.65938 |
| 1.08000 | 0.88196 |
| 1.44000 | 0.99146 |
| 1.80000 | 0.97385 |

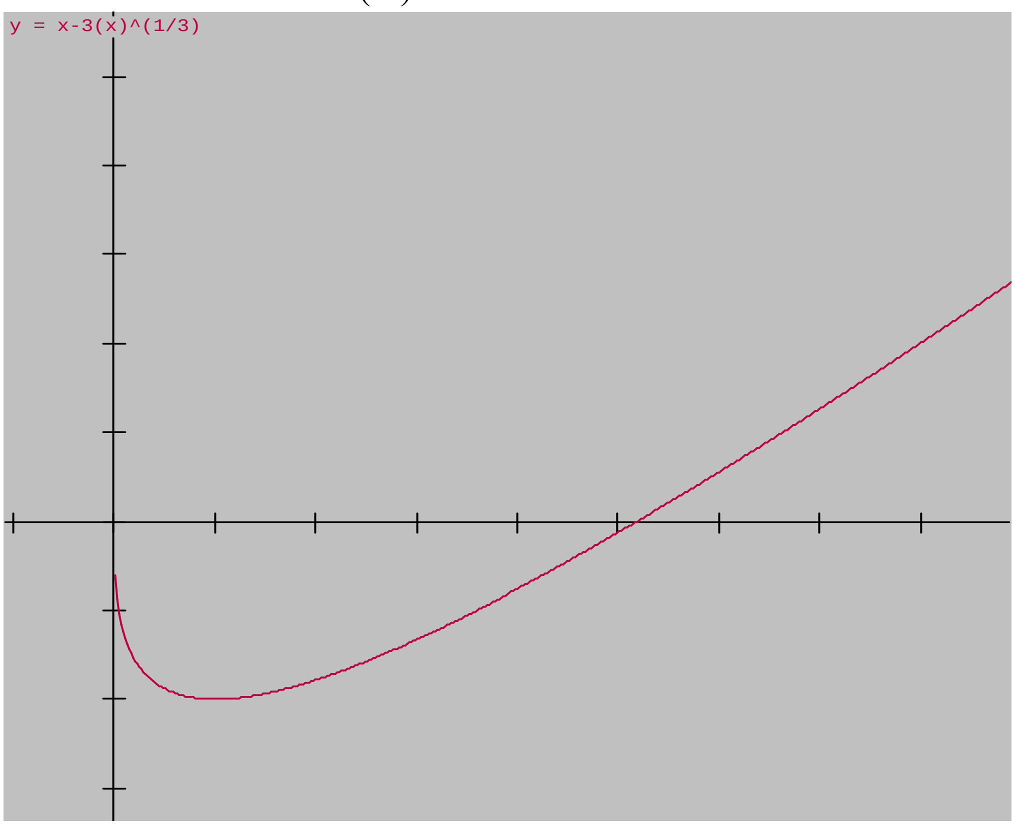
21. Graficar: $f(x) = e^{-x^2}$.




Dominio de f $= (-\infty, +\infty)$

Contradominio de f $= [0,1]$.

22. Graficar: $f(x) = x - 3x^{\frac{1}{3}}$.

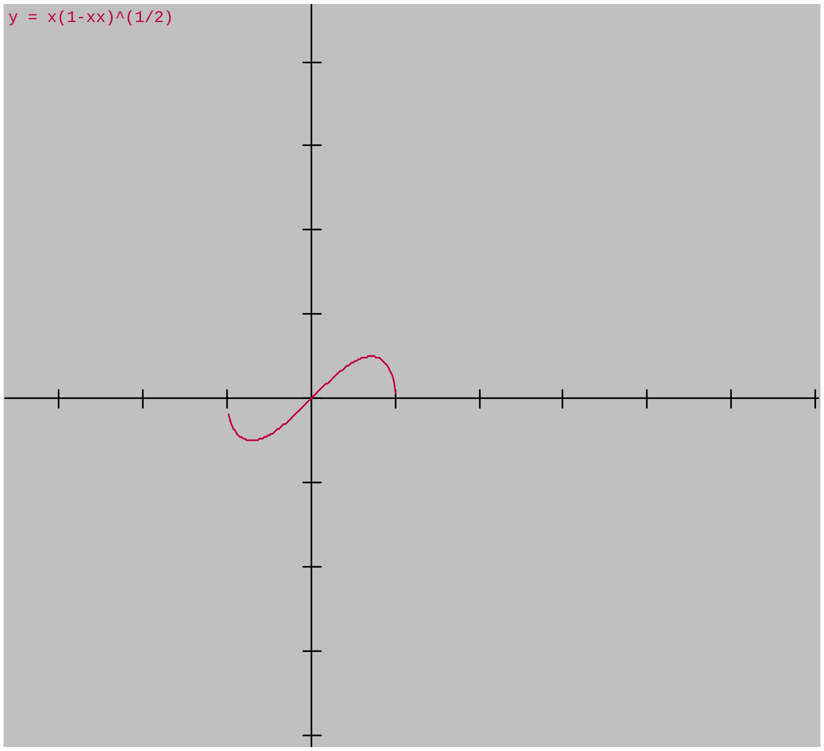



Dominio de f $= [0, +\infty)$

Contradominio de f $= [-2, +\infty)$.

23. Graficar:

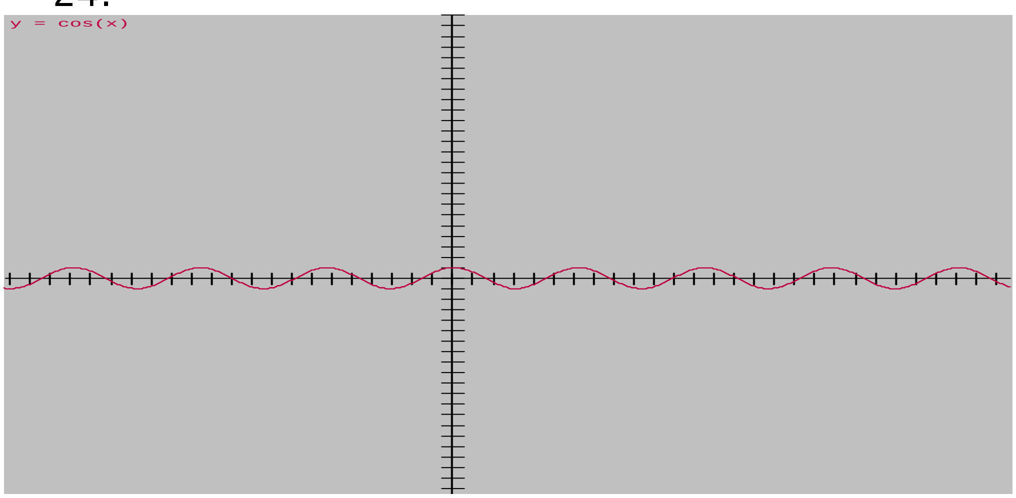
$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.




Dominio de f $= [-1,1]$

Contradominio de f $= [-0.5, 0.5]$.

24.

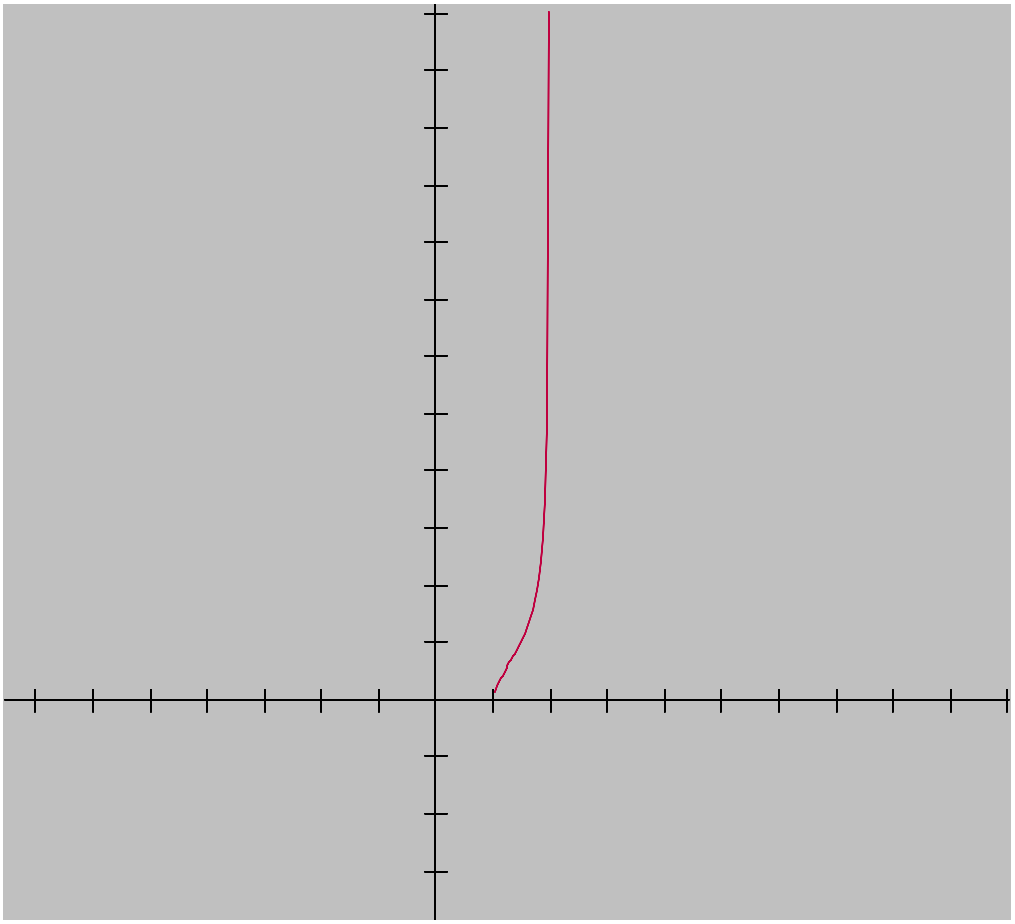



Gráfica de cos(x)

Dominio de f $= (-\infty, +\infty)$

Contradominio de f $= [-1,1]$.

25. Graficar: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$



si $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ encontrar el dominio.

solución :

En donde f está definida si,

$x-1\geq 0$ y $2-x>0$

$\Rightarrow$ $x\geq 1$ y $2>x$

$\Rightarrow 1\leq x<2$ $\therefore$ Dom $f(x)=[1,2)$.

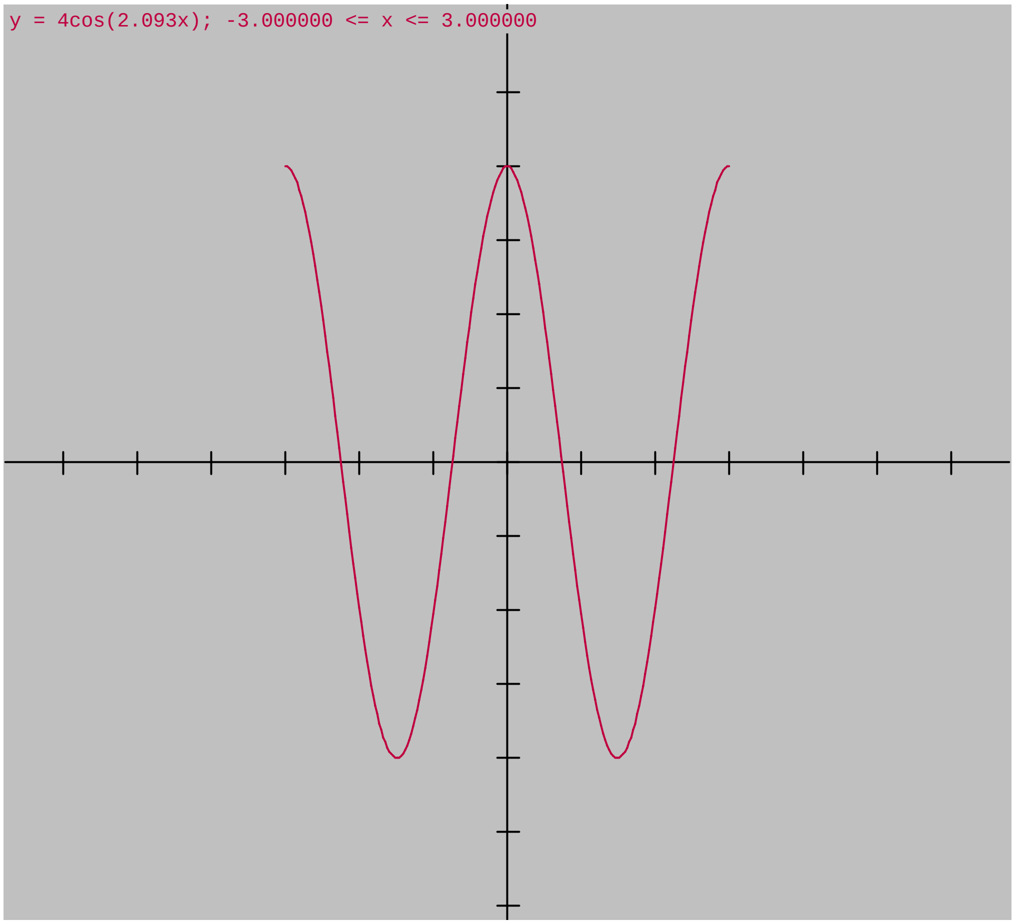
26.

$f(x) = 4\cos\frac{2\pi x}{3}$ en el intervalo $-3 \le x \le 3$, determinar:

a)Gráfica

b)Dominio

c)Contradominio




$\text{Dominio} = [-3, 3]$

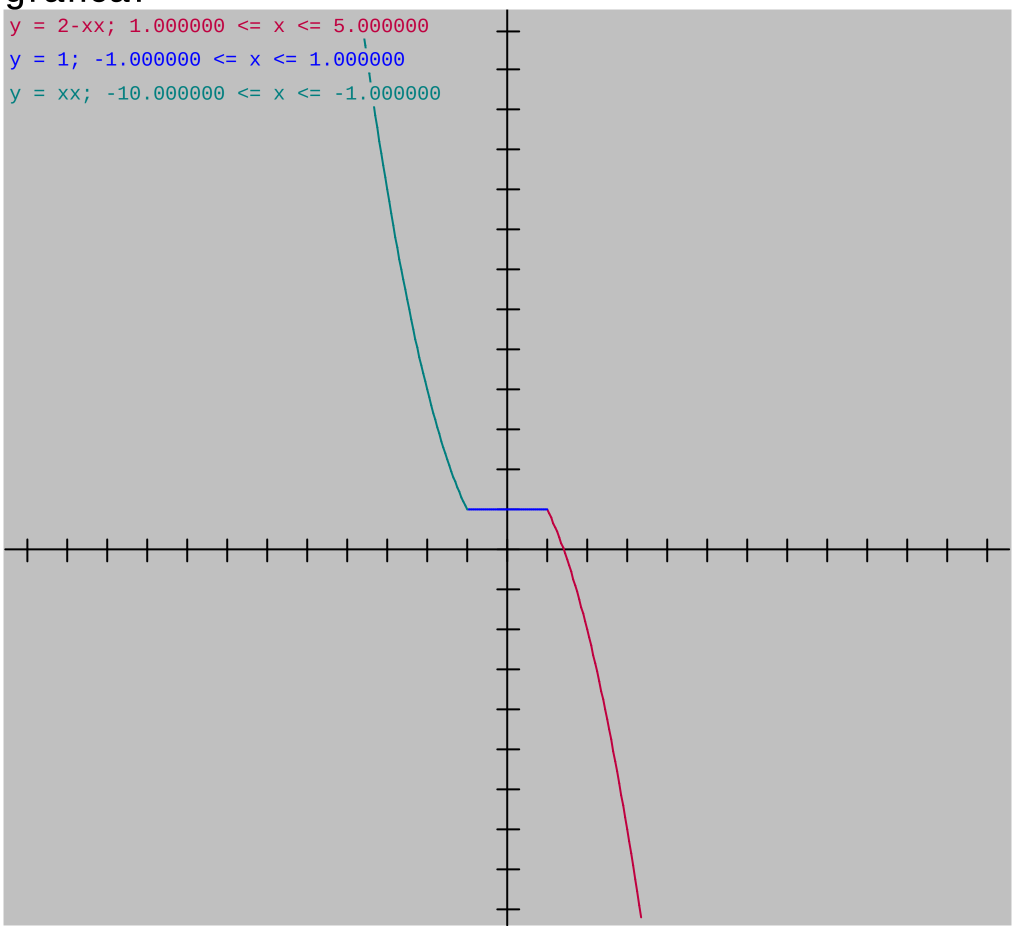
$\text{Contradominio} = [-4, 4]$

27.

Representar la gráfica de la siguiente función, así como su dominio y su contradominio.

$$y = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{si} \quad x > 1 \\ 1, & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2, & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

gráfica:




$\text{Dominio} = (-\infty, +\infty)$

$\text{Contradominio} = (-\infty, +\infty)$

# Límites

## 28. Escribir la definición de límite.

Definición de límite de una función:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que $0<|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

## 29. Calcular

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x^2}{3x+5x^2}$.

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-2x^2}{3x+5x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}}{\frac{3x}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^2} - 2\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x} + 5\right)} = \frac{0-2}{0+5} = -\frac{2}{5}$$

Observe que, $\frac{5}{10} = .5,\ \ \frac{5}{100} = .05,\ \ \frac{5}{1000} = .005,\ \ \frac{5}{10000} = .0005,\ \ \ldots$

$$\frac{5}{1000,000,000,000\ldots000} = .0000000000\ldots0005 \approx 0$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0,$ de igual manera $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x} = 0.$

## 30. Calcular

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{3x+3}$.

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{3x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x} + \frac{5}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{3}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4 + \frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{4+0}{3+0} = \frac{4}{3}.$$

31. Calcular

$$\lim_{t\to 0}\frac{4t^2+3t+2}{t^3+2t-6}.$$

Solución:

$$\lim_{t\to 0}\frac{4t^2+3t+2}{t^3+2t-6}=\frac{4(0)^2+3(0)+2}{(0)^3+2(0)-6}=\frac{0+0+2}{0+0-6}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$$

32. Calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^2},\ \ x\neq 0.$$

Solución:

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(x^2+3xht+h^2\right)}{h\left(2x+5h\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+3xh+h^2}{2x+5h}=\frac{x^2+3x(0)+0^2}{2x+5(0)}=\frac{x^2+0+0}{2x+0}=\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2}.$$

33. Calcular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x^2+3}{2x^3+4x-7}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x^2+3}{2x^3+4x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}-\frac{7}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}=\frac{6-0+0}{2+0-0}=\frac{6}{2}=3.$$

## 34. Calcular

$$\lim_{k\to 0}\frac{(2z+3k)^3-4k^2z}{2z(2z-k)^2}.$$

Solución:

$$\lim_{k\to 0}\frac{(2z+3k)^3-4k^2z}{2z(2z-k)^2}=\frac{(2z+3\cdot 0)^3-4\cdot 0^2z}{2z(2z-0)^2}=\frac{(2z+0)^3-0}{2z(2z)^2}=\frac{(2z)^3}{(2z)^3}=1.$$

## 35. Calcular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^4+bx^2+c}{dx^5+ex^3+fx}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^4+bx^2+c}{dx^5+ex^3+fx}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^4}{x^5}+\frac{bx^2}{x^5}+\frac{c}{x^5}}{\frac{dx^5}{x^5}+\frac{ex^3}{x^5}+\frac{fx}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^5}}{d+\frac{e}{x^2}+\frac{f}{x^4}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(d+\frac{e}{x^2}+\frac{f}{x^4}\right)}=\frac{0+0+0}{d+0+0}=\frac{0}{d}=0.$$

## 36. Calcular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^4+bx^2+c}{dx^3+ex^2+fx+g}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^4+bx^2+c}{dx^3+ex^2+fx+g}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^4}{x^4}+\frac{bx^2}{x^4}+\frac{c}{x^4}}{\frac{dx^3}{x^4}+\frac{ex^2}{x^4}+\frac{fx}{x^4}+\frac{g}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^4}}{\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}+\frac{f}{x^3}+\frac{g}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}+\frac{f}{x^3}+\frac{g}{x^4}\right)}=\frac{a+0+0}{0+0+0+0}=\frac{a}{0}=\text{indefinido}.$$

## 37. Calcular

$$\lim_{s\to a}\frac{s^4-a^4}{s^2-a^2}.$$

Solución:

$$\lim_{s\to a}\frac{s^4-a^4}{s^2-a^2}=\lim_{s\to a}\frac{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2+a^2\right)}{s^2-a^2}=\lim_{s\to a}\left(s^2+a^2\right)=a^2+a^2=2a^2$$

## 38. Calcular

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}.$$

Solución: es necesario factorizar.

$$x^2+x-6=\left(x+3\right)\left(x-2\right)$$

$$x^2-4=\left(x+2\right)\left(x-2\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x+3\right)\left(x-2\right)}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x+3\right)}{\left(x+2\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x+3\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x+2\right)}=\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}.$$

## 39. Calcular

$$\lim_{y\to\infty}\frac{4y^2-3}{2y^3+3y^2}.$$

Solución:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{4y^2-3}{2y^3+3y^2}=\lim_{y\to\infty}\frac{\dfrac{4y^2}{y^3}-\dfrac{3}{y^3}}{\dfrac{2y^3}{y^3}+\dfrac{3y^2}{y^3}}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{\dfrac{4}{y}-\dfrac{3}{y^3}}{2+\dfrac{3}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to\infty}\left(\dfrac{4}{y}-\dfrac{3}{y^3}\right)}{\lim\limits_{y\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{y}\right)}=\frac{0-0}{2+0}=\frac{0}{2}=0.$$

40. Calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Solución:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{nx^{n-1}h}{h} + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{h} + \ldots + \frac{h^n}{h}\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right\}$$

$$= nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}(0) + \ldots + (0)^{n-1} = nx^{n-1} + 0 + \ldots + 0 = nx^{n-1}.$$

41. Calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Solución:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right]}{h}\frac{\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

42. Dado $f(x) = ax^2 + bx + c$, demostrar que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b.$

Demostración:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c = a\left(x^2 + 2xh + h^2\right) + b(x+h) + c$$

$$f(x+h) = ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c$$

$$\therefore f(x+h) - f(x) = ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - \left(ax^2 + bx + c\right)$$

$$\therefore f(x+h) - f(x) = 2axh + ah^2 + bh$$

$$\therefore \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \frac{2axh}{h} + \frac{ah^2}{h} + \frac{bh}{h} = 2ax + ah + b$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2ax + ah + b) = 2ax + a(0) + b = 2ax + b.$$

## 43. Calcular

$$\lim_{t\to 3}\frac{t^2-6t+9}{t^2-2t-3}.$$

Solución:

$$\lim_{t\to 3}\frac{t^2-6t+9}{t^2-2t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)(t-3)}{(t-3)(t+1)}=\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)}{(t+1)}=\frac{\lim\limits_{t\to 3}(t-3)}{\lim\limits_{t\to 3}(t+1)}=\frac{3-3}{3+1}=\frac{0}{4}=0.$$

## 44. Calcular

$$\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{\left(\sqrt{x}-4\right)}\frac{\left(\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)\left(\sqrt{x}+4\right)}{(x-16)}=\lim_{x\to 16}\left(\sqrt{x}+4\right)=\sqrt{16}+4=4+4=8.$$

## 45. Calcular

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-3x}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-3x}\left(\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7-16}{x^2-3x\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{x\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$=\frac{3+3}{3\left(\sqrt{3^2+7}+4\right)}=\frac{6}{3\left(\sqrt{9+7}+4\right)}=\frac{6}{3\left(\sqrt{16}+4\right)}=\frac{6}{3(4+4)}=\frac{6}{3(8)}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.$$

## 46. Escribir la definición de Continuidad de funciones.

$f(x)$ es continua en $x = a$, si:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 4 & , x = 2 \end{cases}$$

1. $f(2) = 4$
2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$
3. $\therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$, por lo tanto $f(x)$ es continua en $x = 2$.

## 47.

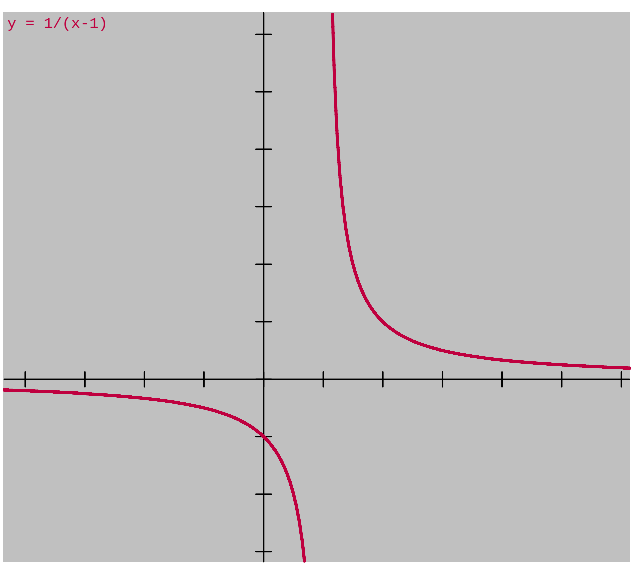
Contra – Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

$f(1)$ no existe,

luego f no satisface 1 de la definición de continuidad,

$\therefore$ f <u>no</u> es continua en $x = 1$.



48.

Contra – Ejemplo :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$$

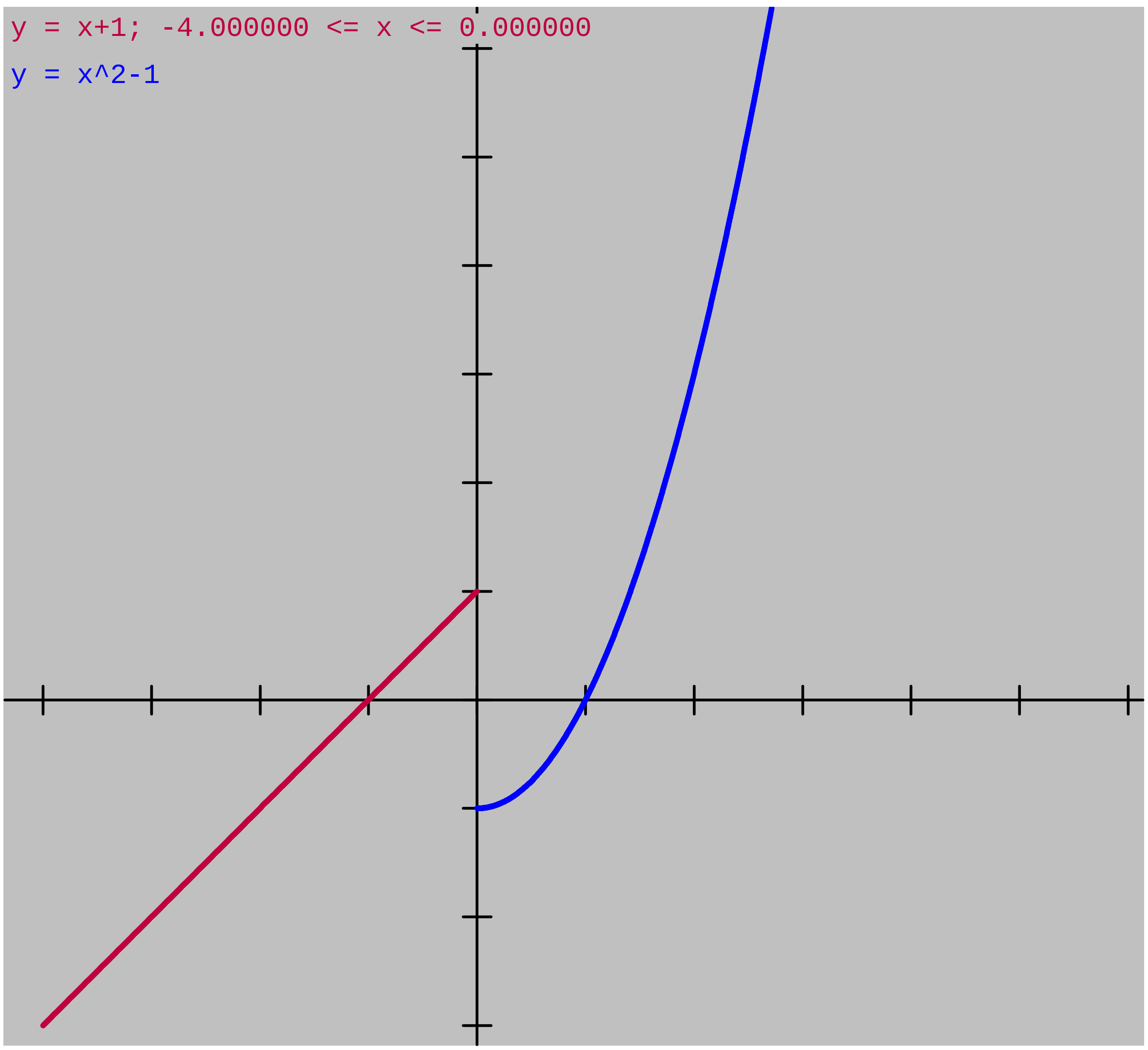
$f(0) = 1$, se satisface 1.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

luego, f no es continua en $x = 0$.

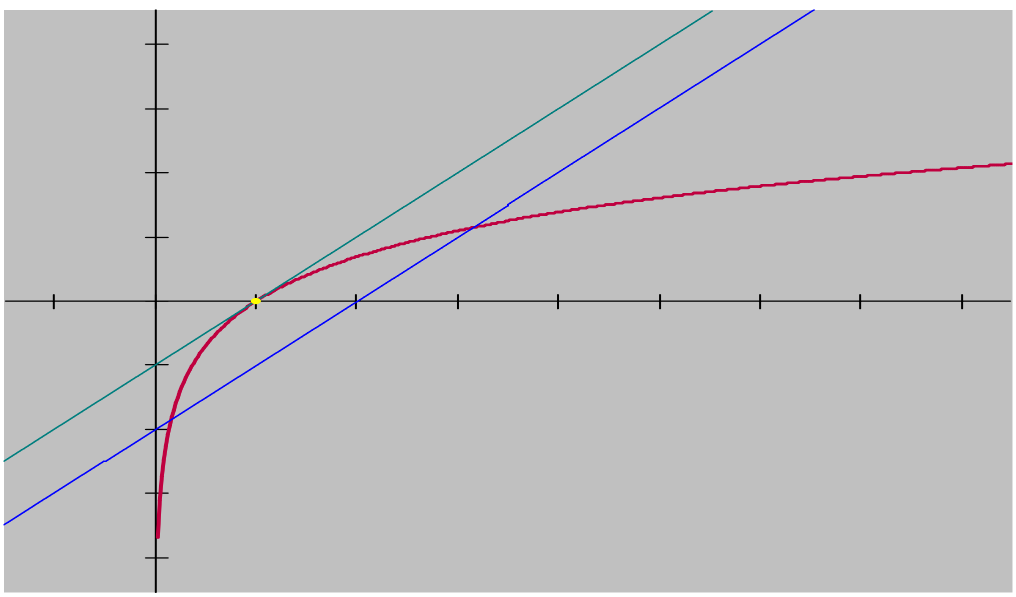


## 49. **Definición De Derivada**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Método de los 4 pasos:

1. Primero, evaluar: $f(x+h)$
2. Segundo, restar : $f(x+h) - f(x)$
3. Tercero, dividir: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
4. Cuarto, calcular: $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

La derivada:

es la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.

**Derivar usando la definición: "método de los 4 pasos"**

50. Derivar f(x), por la definición.

$f(x) = 2 - 3x.$

Solución:

i. $f(x+h) = 2 - 3(x+h) = 2 - 3x - 3h$

ii. $f(x+h) - f(x) = 2 - 3x - 3h$

$$\begin{array}{r} -2+3x \\ \hline -3h \end{array}$$

iii. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\dfrac{3h}{h} = -3$

iv. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-3) = -3.$

$\therefore f'(x) = -3.$

51. Derivar f(x), por la definición.

$f(x) = 3x^2 + 5.$

Solución:

i. $f(x+h) = 3(x+h)^2 + 5 = 3(x^2 + 2xh + h^2) + 5$

ii. $$\begin{array}{rl} f(x+h) - f(x) = & 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5 \\ & \underline{-3x^2 \qquad\qquad\qquad - 5} \\ & \qquad 6xh + 3h^2 \end{array}$$

r

iii. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{6xh + 3h^2}{h} = \dfrac{6xh}{h} + \dfrac{3h^2}{h} = 6x + 3h$

iv. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x + 3(0) = 6x$

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}(3x^2 + 5) = 6x.$

52. Derivar por la definición.

$f(x) = mx + b.$

Solución:

i. $f(x+h) = m(x+h) + b = mx + mh + b$

ii. $$\begin{array}{rl} f(x+h) - f(x) = & mx + mh + b \\ & \underline{-mx \qquad\quad - b} \\ & \qquad mh \end{array}$$

iii. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{mh}{h} = m$

iv. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (m) = m.$

$\therefore f'(x) = m.$

53. Derivar por la definición.

$f(x) = ax^2.$

Solución:

i. $f(x+h) = a(x+h)^2 = a(x^2 + 2xh + h^2) = ax^2 + 2axh + ah^2$

ii. $f(x+h) - f(x) = ax^2 + 2axh + ah^2$

$$\begin{array}{r} -ax^2 \qquad\qquad \\ \hline 2axh + ah^2 \end{array}$$

iii. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2axh + ah^2}{h} = \dfrac{2axh}{h} + \dfrac{ah^2}{h} = 2ax + ah$

iv. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2ax + ah) = 2ax + a(0) = 2ax.$

$\therefore f'(x) = 2ax.$

## 54. Derivar por la definición.

$s(t) = 2t - t^2.$

Solución:

i. $s(t+h) = 2(t+h) - (t+h)^2 = 2t + 2h - t^2 - 2th - h^2$

ii. $s(t+h) - s(t) = 2t + 2h - t^2 - 2th - h^2$

$$\begin{array}{l} \underline{-2t \qquad + \ t^2} \\ \qquad 2h \qquad\quad -2th-h^2 \end{array}$$

iii. $\dfrac{s(t+h) - s(t)}{h} = \dfrac{2h \qquad -2th-h^2}{h} = \dfrac{2h}{h} - \dfrac{2th}{h} - \dfrac{h^2}{h} = 2 - 2t - h$

iv. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2 - 2t - h) = 2 - 2t.$

$\therefore s'(t) = 2 - 2t.$

## 55. Derivar por la definición.

$f(x) = cx^3.$

Solución:

i. $f(x+h) = c(x+h)^3 = c(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) = cx^3 + 3cx^2h + 3cxh^2 + ch^3$

ii. $f(x+h) - f(x) = cx^3 + 3cx^2h + 3cxh^2 + ch^3$

$$\begin{array}{l} \underline{-cx^3} \\ \qquad 3cx^2h + 3cxh^2 + ch^3 \end{array}$$

iii. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{3cx^2h + 3cxh^2 + ch^3}{h} = \dfrac{3cx^2h}{h} + \dfrac{3cxh^2}{h} + \dfrac{ch^3}{h} = 3cx^2 + 3cxh + ch^2$

iv. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3cx^2 + 3cxh + ch^2) = 3cx^2 + 3cx\cdot 0 + c\cdot 0^2 = 3cx^2 + 0 + 0 = 3cx^2.$

$\therefore f'(x) = 3cx^2.$

## 56. Derivar por la definición.

$f(x) = 3x - x^3.$

Solución:

i. $f(x+h) = 3(x+h) - (x+h)^3 = 3x + 3h - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) = 3x + 3h - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3$

ii. $f(x+h) - f(x) = 3x + 3h - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3$

$$\begin{array}{lll} \underline{-3x} & \underline{+x^3} & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \quad 3h & & -3x^2h - 3xh^2 - h^3 \end{array}$$

iii. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{3h \quad -3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h} = \dfrac{3h}{h} - \dfrac{3x^2h}{h} - \dfrac{3xh^2}{h} - \dfrac{h^3}{h} = 3 - 3x^2 - 3xh - h^2$

iv. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3 - 3x^2 - 3xh - h^2) = 3 - 3x^2 - 3x(0) - 0^2 = 3 - 3x^2.$

$\therefore f'(x) = 3 - 3x^2.$

## 57. Derivar por la definición.

$f(x) = x^4$.

Solución:

i. $f(x+h) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$

ii. $f(x+h) - f(x) = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$

$$\begin{array}{r} -x^4 \\ \hline 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 \end{array}$$

iii. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = \dfrac{4x^3h}{h} + \dfrac{6x^2h^2}{h} + \dfrac{4xh^3}{h} + \dfrac{h^4}{h} = 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2$

iv. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}\left(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2\right) = 4x^3 + 6x^2 \cdot 0 + 4x \cdot 0^2 = 4x^3 + 0 + 0 = 4x^3$.

$\therefore f'(x) = 4x^3$.

## 58. Derivar por la definición.

$f(x) = 4x^2 - 5x + 3$ , utilizando $\Delta$´s.

Solución :

i. $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 3 =$

$$4\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 5(x + \Delta x) + 3 = 4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 5x - 5\Delta x + 3$$

ii. $f(x + \Delta x) - f(\Delta x) = 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x + 3$

$$\begin{array}{rcccccc} & -4x^2 & & & +5x & & -3 \\ \hline = & & 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 & & & -5\Delta x & \end{array}$$

iii. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(\Delta x)}{\Delta x} = \dfrac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = \dfrac{8x\Delta x}{\Delta x} + \dfrac{4(\Delta x)^2}{\Delta x} - \dfrac{5\Delta x}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x - 5$

iv. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x - 5) = 8x + 4(0) - 5 = 8x - 5.$

$f'(x) = 8x - 5.$

sugerencia: $(x+\Delta x)^2 = (x+\Delta x)(x+\Delta x)$ , multiplicar:

$$\begin{array}{l} x+\Delta x \\ \underline{x+\Delta x} \\ x^2 + x\Delta x \\ \underline{\quad + x\Delta x + (\Delta x)^2} \\ x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{array}$$

59. Derivar utilizando la definición; utilizar el método de los 4 pasos.

$y=\dfrac{3}{x^2+2}$.

Solución:

i. $f(x+h)=\dfrac{3}{(x+h)^2+2}$

ii. $f(x+h)-f(x)=\dfrac{3}{(x+h)^2+2}-\dfrac{3}{x^2+2}=\dfrac{3(x^2+2)-3\left((x+h)^2+2\right)}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}$

$=\dfrac{3x^2+6-3(x^2+2xh+h^2+2)}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}=\dfrac{3x^2+6-3x^2-6xh-3h^2-6}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}=\dfrac{-6xh-3h^2}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}$

iii. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\dfrac{-6xh-3h^2}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}}{h}=\dfrac{\dfrac{-h(6x+3h)}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}}{h}=$

$\dfrac{-h(6x+3h)}{h\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}=-\dfrac{6x+3h}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}$

iv. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left\{-\dfrac{6x+3h}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}\right\}=\lim\limits_{h\to 0}-\dfrac{6x+3h}{\left((x+h)^2+2\right)(x^2+2)}=$

$\dfrac{6x+3(0)}{\left((x+0)^2+2\right)(x^2+2)}=-\dfrac{6x}{(x^2+2)(x^2+2)}=-\dfrac{6x}{(x^2+2)^2}$.

$f'(x)=-\dfrac{6x}{(x^2+2)^2}$.

60. Derivar utilizando la definición, método de los 4 pasos.

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}.$$

Solución:

i. $f(x+h)=\dfrac{1}{1-2(x+h)}$

ii. $f(x+h)-f(x)=$

$$\frac{1}{1-2(x+h)}-\frac{1}{1-2x}=\frac{1-2x-[1-2(x+h)]}{[1-2(x+h)][1-2x]}=\frac{1-2x-1+2x+2h}{[1-2(x+h)][1-2x]}=\frac{2h}{[1-2(x+h)][1-2x]}$$

iii. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$

$$\frac{\dfrac{2h}{[1-2(x+h)][1-2x]}}{\dfrac{h}{1}}=\frac{2h}{h[1-2(x+h)][1-2x]}=\frac{2}{[1-2(x+h)][1-2x]}.$$

iv. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2}{[1-2(x+h)][1-2x]} = \frac{2}{[1-2(x+0)][1-2x]} = \frac{2}{[1-2x][1-2x]} = \frac{2}{[1-2x]^2}.$$

$$f'(x) = \frac{2}{[1-2x]^2}.$$

# Fórmulas para derivar funciones:

$$(0)\quad \frac{d}{dx}(c) = 0 \quad (\text{La derivada de una función constante es cero})$$

$$(1)\quad \frac{d}{dx}(x) = 1 \quad (\text{La derivada de la función identidad es 1})$$

$$(2)\quad \frac{d}{dx}(cU) = c\frac{d}{dx}(U) \quad (\text{La derivada de una constante por una función})$$

$$(3)\quad \frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}(f) + \frac{d}{dx}(g) \quad (\text{regla de la suma})$$

$$(4)\quad \frac{d}{dx}(f-g) = \frac{d}{dx}(f) - \frac{d}{dx}(g) \quad (\text{regla de la diferencia})$$

$$(5)\quad \frac{d}{dx}(UV) = U\frac{d}{dx}(V) + V\frac{d}{dx}(U) \quad (\text{regla del producto})$$

$$(6)\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V\frac{d}{dx}(U) - U\frac{d}{dx}(V)}{V^2} \quad \text{siempre que } V \neq 0 \ (\text{regla del cociente})$$

$$(7)\quad \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1} \quad (\text{regla de potencias})$$

$$(8)\quad \frac{d}{dx}(V)^n = nV^{n-1}\frac{d}{dx}(V) \quad (\text{regla de la cadena})$$

$$(9)\quad \frac{d}{dx}(\ln V) = \frac{\frac{d}{dx}(V)}{V} \quad (\text{regla de ln})$$

$$(10)\quad \frac{d}{dx}(\text{sen}V) = \cos V\frac{d}{dx}(V)$$

$$(11)\quad \frac{d}{dx}(\cos V) = -\text{sen}V\frac{d}{dx}(V)$$

$$(12)\quad \frac{d}{dx}(\text{tg}V) = \sec^2 V\frac{d}{dx}(V)$$

$$(13)\quad \frac{d}{dx}(\cot V) = -c\sec^2 V\frac{d}{dx}(V)$$

$$(14)\quad \frac{d}{dx}(\sec V) = \sec V\,\text{tg}V\frac{d}{dx}(V)$$

$$(15)\quad \frac{d}{dx}(\csc V) = -\csc V\cot V\frac{d}{dx}(V)$$

En los ejercicios del 61 al 66, derivar mediante la fórmula:

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

61. $\frac{d}{dx}(9) = 0$

62. $\frac{d}{dx}\left(a^{\frac{2}{3}}\right) = 0$

63. $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$

64. $\frac{d}{dx}\left(\pi^{3}\right) = 0$

65. $\frac{d}{dx}\left(\frac{3\pi^{4}}{4}\right) = 0$

66. $\frac{d}{dx}\left(e^{4}\right) = 0$

En los ejercicios del 67 al 72, derivar mediante la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n}\right)=nx^{n-1}$$

67. $y=x$ solución : $\frac{d}{dx}\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{1}\right)=1x^{1-1}=1x^{0}=1(1)=1.\therefore\frac{dx}{dx}=1.$

$n = 1$

68. $y = x^{3}$ solución : $\frac{d}{dx}\left(x^{3}\right)=3x^{3-1}=3x^{2}\therefore\frac{d}{dx}\left(x^{3}\right)=3x^{2}.$

$n = 3$

69. $y=\sqrt{x}.$

Solución : $n = \frac{1}{2}.$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\therefore\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

70. $y=\frac{1}{x^{2}}.$

Solución :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{2}}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^{3}}.$$

$n = -2.$

71. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}$ solución : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}x}=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^{2}}}$

$n=-\frac{2}{3}$

72. $y=\dfrac{1}{x}$. solución : $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^1}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)=-1x^{-1-1}=-1x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

n=-1

En los ejercicios del 73 al 78, derivar mediante la fórmula:

$$\underline{\underline{\dfrac{d}{dx}\left(cx^n\right)=c\left(n\right)x^{n-1}}}$$

73. $y=5x$.

Solución : c = 5, n=1 : $\dfrac{d}{dx}\left(5x\right)=\dfrac{d}{dx}\left(5x^1\right)=5\left(1\right)x^{1-1}=5x^0=5(1)=5$.

74. $y=12x^3$.

Solución c = 12, n=3 : $\dfrac{d}{dx}\left(12x^3\right)=12\left(3\right)x^{3-1}=36x^2$.

75. $y=\sqrt{2x}$.

Solución : c = $\sqrt{2}$, n= $\frac{1}{2}$ :

$$\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)=2^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^1}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}.$$

$y=\dfrac{2}{x^2}$ solución : c = 2, n=-2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(2x^{-2}\right)=2\left(-2\right)x^{-2-1}=-4x^{-3}=-\dfrac{4}{x^3}$.

76. $y=\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$ solución: c=5, n=- $\frac{2}{3}$ ,

$$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{5}{x^{\frac{2}{3}}}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(5x^{-\frac{2}{3}}\right)=5\left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}=-\dfrac{10}{3x^{\frac{2}{3}}x}=-\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

77. $y=\dfrac{3}{x}$

solución:c=3, n=-1: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{x^1}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(3x^{-1}\right)=3\left(-1\right)x^{-1-1}=-3x^{-2}=-\dfrac{3}{x^2}$.

78. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3}$ solución: $c=\frac{1}{3}$ , $n=\frac{1}{3}$ :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1x^{\frac{1}{3}}}{3}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{9x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{9\sqrt[3]{x^2}}$$

En los ejercicios 79 al 86, derivar mediante la fórmula:

$$\underline{\underline{\frac{d}{dx}(f+g-h)=\frac{d}{dx}(f)+\frac{d}{dx}(g)-\frac{d}{dx}(h)}}$$

79. $\dfrac{d}{dx}\left(3x^4+2x^2-8\right).$

Solución:

$f=3x^4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dx}\left(3x^4\right)=3(4)x^{4-1}=12x^3$

$g=2x^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dx}\left(2x^2\right)=2(2)x^{2-1}=4x$

$h=8 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dx}(8)=0$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left(3x^4+2x^2-8\right)=12x^3+4x-0=12x^3+4x.$

80.

$$\frac{d}{dx}\left(4+3x-2x^3\right).$$

Solución:

$$f=4\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(4\right)=0$$

$$g=3x\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(3x\right)=3\frac{dx}{dx}=3(1)=3$$

$$h\Rightarrow 2x^3\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(2x^3\right)=2\left(3\right)x^{3-1}=6x^2$$

$$\therefore\frac{d}{dx}\left(4+3x-2x^3\right)=3-6x^2.$$

## 81. Derivar

$$y=ax^4-bx^2.$$

Solución :

$$\frac{d}{dx}\left(ax^4-bx^2\right)=\frac{d}{dx}\left(ax^4\right)-\frac{d}{dx}\left(bx^2\right)=4ax^{4-1}-2bx^{2-1}=4ax^3-2bx.$$

## 82. Derivar

$$y=x^{\frac{4}{3}}+5.$$

Solución :

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{4}{3}}+5\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{4}{3}}\right)+\frac{d}{dx}\left(5\right)=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}+0=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}.$$

## 83. Derivar

$$y=\frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}+8\sqrt[7]{x^3}$$

Solución.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}+8\sqrt[7]{x^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}\right)+\frac{d}{dx}\left(8\sqrt[7]{x^3}\right).$$

i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^3}{x^{\frac{2}{5}}}\right)=3\frac{d}{dx}\left(x^{3-\frac{2}{5}}\right)=3\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{13}{5}}\right)=3\frac{13}{5}x^{\frac{13}{5}-1}=\frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}}$

ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}\right)=7\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^{\frac{4}{3}}}\right)=7\frac{d}{dx}\left(x^{1-\frac{4}{3}}\right)=7\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)=7\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

iii) $\frac{d}{dx}\left(8\sqrt[7]{x^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(8x^{\frac{3}{7}}\right)=8\left(\frac{3}{7}\right)x^{\frac{3}{7}-1}=\frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}+8\sqrt[7]{x^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}\right)+\frac{d}{dx}\left(8\sqrt[7]{x^3}\right)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}}-\left(-\frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)+\frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}=\frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}}+\frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}.$$

## 84. Derivar

$y=x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}$, con a constante.

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)-\frac{d}{dx}\left(a^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}-0=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

## 85. Derivar

$$y=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}.$$

Solución:

$$\text{i)}\ \frac{2}{x}=\frac{2}{x^1}=2x^{-1}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(2x^{-1}\right)=(2)(-1)x^{-1-1}=-2x^{-2}=\frac{-2}{x^2}=-\frac{2}{x^2}$$

$$\text{ii)}\ \frac{3}{x^2}=3x^{-2}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(3x^{-2}\right)=(3)(-2)x^{-2-1}=-6x^{-3}=\frac{-6}{x^3}=-\frac{6}{x^3}$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2}\right)=-\frac{2}{x^2}-\left(-\frac{6}{x^3}\right)=-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}$$

fórmulas empleadas: 1. $\frac{d}{dx}(f\pm g)=\frac{d}{dx}(f)\pm\frac{d}{dx}(g)$ 2. $\frac{d}{dx}(cx^n)=c(n)x^{n-1}$

## 86. Derivar

$$y=\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Solución: Derivar por separado cada termino,

$$\text{i)}\ \frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1x^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$\text{ii)}\ \frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}=2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)=(2)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{2}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+1}}=-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}x^1}=-\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{i), ii)}\ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{x}}-\left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

fórmula: $\frac{d}{dx}cx^n=c(n)x^{n-1}$ $\frac{d}{dx}(f\pm g)=\frac{d}{dx}(f)\pm\frac{d}{dx}(g)$

En los ejercicios 87 al 90, derivar mediante la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\left(V^n\right) = nV^{n-1}\frac{d}{dx}\left(V\right)$$

## 87.

$y = \left(x^2 - 3\right)^5$

solución : en este caso $V = \left(x^2 - 3\right)$ ; $n = 5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 - 3\right)^5 = 5\left(x^2 - 3\right)^{5-1}\frac{d}{dx}\left(x^2 - 3\right) = 5\left(x^2 - 3\right)^4\left(2x\right) = 10x\left(x^2 - 3\right)^4.$$

## 88.

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ solución : en este caso $V = \left(a^2 - x^2\right)$ ; $n = \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}\leftarrow n}}_{V\uparrow}$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(a^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\right) = \frac{-2x}{2\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

## 89.

$y = \sqrt[3]{4 - 9x}.$

Solución:

$$\therefore \frac{d}{dx}\sqrt[3]{4 - 9x} = \frac{d}{dx}\left(4 - 9x\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(4 - 9x\right)^{\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dx}\left(4 - 9x\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(4 - 9x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-9\right) = \frac{1}{3}\left(4 - 9x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-9\right) = \frac{-9}{3\left(4 - 9x\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{-3}{\sqrt[3]{\left(4 - 9x\right)^2}}.$$

90.

$$y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{3}.$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{3}=3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{3-1}\frac{d}{dx}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)=3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{2}\frac{dx^{\frac{1}{3}}}{dx}=3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{2}\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$=\frac{3}{3}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{2}x^{-\frac{2}{3}}=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{2}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{2}}=\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)^{2}.$$

Derivar mediante la fórmula:

$$\underline{\frac{d}{dx}(UV)=U\frac{d}{dx}(V)+V\frac{d}{dx}(U)}$$

91.

$$y=\left(3x^{2}+2\right)\sqrt{1+5x^{2}}$$

solución :

$$\frac{d}{dx}\left(3x^{2}+2\right)\sqrt{1+5x^{2}}=\left(3x^{2}+2\right)\frac{d}{dx}\sqrt{1+5x^{2}}+\sqrt{1+5x^{2}}\frac{d}{dx}\left(3x^{2}+2\right)$$

$$=\left(3x^{2}+2\right)\frac{d}{dx}\left(1+5x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{1+5x^{2}}\,(6x)$$

$$=\left(3x^{2}+2\right)\frac{1}{2}\left(1+5x^{2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(1+5x^{2}\right)+6x\sqrt{1+5x^{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(3x^{2}+2\right)\left(1+5x^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}(10x)+6x\sqrt{1+5x^{2}}$$

$$=\frac{10x\left(3x^{2}+2\right)}{2\left(1+5x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}+6x\sqrt{1+5x^{2}}=\frac{5x\left(3x^{2}+2\right)}{\sqrt{1+5x^{2}}}+\frac{6x\sqrt{1+5x^{2}}}{1}$$

$$=\frac{5x\left(3x^{2}+2\right)+6x\sqrt{1+5x^{2}}\sqrt{1+5x^{2}}}{\sqrt{1+5x^{2}}}=\frac{15x^{3}+10x+6x\left(1+5x^{2}\right)}{\sqrt{1+5x^{2}}}$$

$$=\frac{15x^{3}+10x+6x+30x^{3}}{\sqrt{1+5x^{2}}}=\frac{45x^{3}+16x}{\sqrt{1+5x^{2}}}.$$

En los ejercicios 92 al 94, derivar mediante la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}}{(V)^2}$$

92.

$$y=\frac{a-x}{a+x}.$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)=\frac{(a+x)\frac{d}{dx}(a-x)-(a-x)\frac{d}{dx}(a+x)}{(a+x)^2}=\frac{(a+x)(-1)-(a-x)(+1)}{(a+x)^2}$$

$$=\frac{-a-x-a+x}{(a+x)^2}=\frac{-2a}{(a+x)^2}.$$

93.

$$y=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]=\frac{(a^2-x^2)\frac{d}{dx}(a^2+x^2)-(a^2+x^2)\frac{d}{dx}(a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^2}$$

$$=\frac{(a^2-x^2)2x-(a^2+x^2)(-2x)}{(a^2-x^2)^2}=\frac{2a^2x-2x^3+2a^2x+2x^3}{(a^2-x^2)^2}=\frac{4a^2x}{(a^2-x^2)^2}.$$

94.

$$y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}.$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^4}{b^2 - x^2}\right) = \frac{\left(b^2 - x^2\right)\frac{d}{dx}\left(2x^4\right) - 2x^4\frac{d}{dx}\left(b^2 - x^2\right)}{\left(b^2 - x^2\right)^2} = \frac{\left(b^2 - x^2\right)8x^3 - 2x^4(-2x)}{\left(b^2 - x^2\right)^2}$$

$$= \frac{8b^2x^2 - 8x^5 + 4x^5}{\left(b^2 - x^2\right)^2} = \frac{8b^2x^2 - 4x^5}{\left(b^2 - x^2\right)^2}.$$

95. Derivar

$$y = \sqrt{\frac{1-cx}{1+cx}}.$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1-cx}{1+cx}} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1-cx}{1+cx}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1-cx}{1+cx}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1-cx}{1+cx}\right]^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left[\frac{1-cx}{1+cx}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-cx}{1+cx}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(1+cx)\frac{d}{dx}(1-cx) - (1-cx)\frac{d}{dx}(1+cx)}{(1+cx)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-cx}{1+cx}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(1+cx)(-c) - (1-cx)(c)}{(1+cx)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{(1-cx)^{-\frac{1}{2}}}{(1+cx)^{-\frac{1}{2}}}\left[\frac{-c - c^2x - c + c^2x}{(1+cx)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2(1-cx)^{\frac{1}{2}}(1+cx)^{-\frac{1}{2}}}\frac{-2c}{(1+cx)^2} = -\frac{c}{[1-cx]^{\frac{1}{2}}[1+cx]^{2-\frac{1}{2}}} = -\frac{c}{[1-cx]^{\frac{1}{2}}[1+cx]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{c}{[1-cx]^{\frac{1}{2}}[1+cx]^{\frac{1}{2}}[1+cx]^{1}} = -\frac{c}{\sqrt{1-cx}\sqrt{1+cx}[1+cx]} = -\frac{c}{[1+cx]\sqrt{(1-cx)(1+cx)}}$$

$$= -\frac{c}{(1+cx)\sqrt{1-c^2x^2}}.$$

fórmulas: $\frac{d}{dx}(V)^n = nV^{n-1}\frac{d}{dx}(V)$ y $\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V\frac{d}{dx}(U) - U\frac{d}{dx}(V)}{(V)^2}$.

## 96. Derivar

$$y=\sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}.$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}=\frac{d}{dx}\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(a^2-x^2\right)\frac{d}{dx}\left(a^2+x^2\right)-\left(a^2+x^2\right)\frac{d}{dx}\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(a^2-x^2\right)(2x)-\left(a^2+x^2\right)(-2x)}{\left(a^2-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{2a^2x-2x^3+2a^2x+2x^3}{\left(a^2-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{4a^2x}{\left(a^2-x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left[\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right]^{\frac{1}{2}}}\frac{4a^2x}{\left(a^2-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\left[a^2+x^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[a^2-x^2\right]^{\frac{1}{2}}}}\frac{4a^2x}{\left(a^2-x^2\right)^2}=\frac{\left[a^2-x^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[a^2+x^2\right]^{\frac{1}{2}}}\frac{2a^2x}{\left(a^2-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{2a^2x}{\left[a^2+x^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(a^2-x^2\right)^{2-\frac{1}{2}}}=\frac{2a^2x}{a\left[a^2+x^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2a^2x}{\left[a^2+x^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[a^2-x^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(a^2-x^2\right)}=\frac{2a^2x}{\left[(a^2+x^2)\left(a^2-x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[a^2-x^2\right]}=\frac{2a^2x}{\left[a^4-x^4\right]^{\frac{1}{2}}\left[a^2-x^2\right]}$$

$$=\frac{2a^2x}{\left[a^2-x^2\right]\sqrt{a^4-x^4}}.$$

fórmulas: 1. $\frac{d}{dx}\left(V^n\right)=nV^{n-1}\frac{dV}{dx}$ 2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}}{(V)^2}$

97. Derivar:

$$y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Solución:

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{x}-e^{-x}\right)-\left(e^{x}-e^{-x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$$

$$=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)-\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}=\frac{4}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}.$$

$$\therefore y'=\frac{4}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}.$$

operaciones:

$$\begin{array}{l} e^{x}+e^{-x}\\ \underline{e^{x}+e^{-x}}\\ e^{2x}+e^{0} \qquad\qquad\qquad\qquad e^{0}=1\\ \underline{\qquad +e^{0}+e^{-2x}}\\ e^{2x}+2+e^{-2x} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e^{x}-e^{-x}\\ \underline{e^{x}-e^{-x}}\\ e^{2x}-e^{0}\\ \underline{\qquad -e^{0}+e^{-2x}}\ \ .\\ e^{2x}-2+e^{-2x} \end{array}$$

En los ejercicios del 98 al 103, derivar mediante las fórmulas:

$$\frac{d}{dx}\ln V = \frac{\frac{d}{dx}(V)}{V}$$ y Propiedades de Logaritmo natural:

$(i)$ $\ln AB = \ln A + \ln B$ $\quad (ii)$ $\ln\frac{A}{B} = \ln A - \ln B$ $\quad (iii)$ $\ln x^n = n\ln x$

98.

$y = \ln ax^n.$

Solución:

$y = \ln ax^n = \ln a + \ln x^n = \ln a + n\ln x$

$$\therefore y' = \frac{d}{dx}(\ln a + n\ln x) = \frac{d}{dx}(\ln a) + n\frac{d}{dx}(\ln x) = 0 + \frac{n}{x} = \frac{n}{x}.$$

como a es constante, lna es constante $\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln a = 0$

99.

$$y = \ln\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Solución:

$$y = \ln\frac{x^2}{1+x^2} = \ln x^2 - \ln(1+x^2) = 2\ln x - \ln(1+x^2)$$

$$\therefore y' = 2\frac{d}{dx}\ln x - \frac{d}{dx}\ln(1+x^2) = 2\frac{1}{x} - \frac{\frac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2) - x(2x)}{(x)(1+x^2)} = \frac{2+2x^2-2x^2}{(x)(1+x^2)} = \frac{2}{(x)(1+x^2)}.$$

100.

$y = \ln\sqrt{9-2x^2}.$

Solución:

$$y = \ln\sqrt{9-2x^2} = \ln(9-2x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(9-2x^2)$$

$$\therefore y' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(9-2x^2) = \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}(9-2x^2)}{9-2x^2} = \frac{1}{2}\frac{-4x}{9-2x^2} = \frac{-2x}{9-2x^2}.$$

## 101.

$$y=\ln\sqrt{\frac{a+bt}{a-bt}}.$$

Solución:

$$y=\ln\sqrt{\frac{a+bt}{a-bt}}=\ln\left(\frac{a+bt}{a-bt}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{a+bt}{a-bt}=\frac{1}{2}\left[\ln(a+bt)-\ln(a-bt)\right]$$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\ln(a+bt)-\frac{d}{dt}\ln(a-bt)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{d}{dt}(a+bt)}{a+bt}-\frac{\frac{d}{dt}(a-bt)}{a-bt}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a+bt}-\frac{-b}{a-bt}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a+bt}+\frac{b}{a-bt}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{b(a-bt)+b(a+bt)}{(a+bt)(a-bt)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{ba-b^2t+ba+b^2t}{\left(a^2-b^2t^2\right)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2ba}{a^2-b^2t^2}\right]=\frac{ab}{a^2-b^2t^2}.$$

## 102.

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$$

Solución: primer método, utilizar las propiedades de ln y derivar.

i. $\ln AB=\ln A+\ln B$

ii. $\ln\frac{A}{B}=\ln A-\ln B$

iii. $\ln A^n = n\ln A$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}\right)=\ln\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)=\frac{1}{2}\left\{\ln(1+\operatorname{sen}x)-\ln(1-\operatorname{sen}x)\right\}$$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\left\{\ln(1+\operatorname{sen}x)-l2n(1-\operatorname{sen}x)\right\}'$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}\frac{d}{dx}(1+\operatorname{sen}x)-\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\frac{d}{dx}(1-\operatorname{sen}x)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}(\cos x)-\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}(-\cos x)\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}+\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos x-\operatorname{sen}x\cos x+\cos x+\operatorname{sen}x\cos x}{(1+\operatorname{sen}x)(1-\operatorname{sen}x)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\cos x}{1-\operatorname{sen}^2x}\right\}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}=\sec x.$$

103.

$$y=\ln\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}\right)$$

Solución :

Segundo método. Derivar mediante fórmulas :

$$\text{i. } \frac{d}{dx}(\ln V)=\frac{1}{V}\frac{dV}{dx} \quad ; \quad \text{ii. } \frac{d}{dx}\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{V\dfrac{dU}{dx}-U\dfrac{dV}{dx}}{V^2}.$$

Solución:

$$\therefore y'=\frac{d}{dx}\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}}\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}=\frac{1}{\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2}\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)$$

$$=\frac{1}{2\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-\operatorname{sen}x)\dfrac{d}{dx}(1+\operatorname{sen}x)-(1+\operatorname{sen}x)\dfrac{d}{dx}(1-\operatorname{sen}x)}{(1-\operatorname{sen}x)^2}$$

$$=\frac{1}{2\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{(1-\operatorname{sen}x)\cos x-(1+\operatorname{sen}x)(-\cos x)}{(1-\operatorname{sen}x)^2}$$

$$=\frac{1}{2\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}\frac{(1-\operatorname{sen}x)\cos x-(1+\operatorname{sen}x)(-\cos x)}{(1-\operatorname{sen}x)^2}$$

$$=\frac{1}{2\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)}\frac{\cos x-\operatorname{sen}x\cos x+\cos x+\operatorname{sen}x\cos x}{(1-\operatorname{sen}x)^2}$$

$$=\frac{2\cos x}{2\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}(1-\operatorname{sen}x)^2}=\frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}x)(1-\operatorname{sen}x)}=\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}=\sec x.$$

## 104. Derivada de funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{arcsen}\left(3x - 4x^3\right).$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(3x - 4x^3\right)}{\sqrt{1 - \left(3x - 4x^3\right)^2}} = \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - \left(9x^2 - 24x^4 + 16x^6\right)}} = \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6}} = \frac{3\left(1 - 4x^2\right)}{\sqrt{\left(1 - 4x^2\right)^2 \left(1 - x^2\right)}} = \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

## 105. Derivada de funciones implícitas

$x^2 + xy + 2y^2 = 28$

Solución :

$$\frac{d}{dx}\left\{x^2 + xy + 2y^2 = 28\right\}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(xy\right) + \frac{d}{dx}\left(2y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(28\right)$$

$$2x + x\frac{d}{dx}\left(y\right) + y + 4y\frac{d}{dx}\left(y\right) = 0$$

$$2x + y + \left(x + 4y\right)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left(x + 4y\right)\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 4y} = -\frac{\left(2x + y\right)}{x + 4y}.$$

## 106. Hallar la pendiente de la curva $x^2+xy+2y^2=28$ en el punto (2,3)

Solución :

Del ejercicio anterior $\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+y)}{x+4y}$

$$\therefore m = -\frac{(2(2)+3)}{2+4(3)} = -\frac{4+3}{2+12} = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2}.$$

107. Derivada sucesiva: Calcular la segunda derivada de

$y = 3x^4 - 2x^3 + 6x.$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^4 - 2x^3 + 6x\right) = 12x^3 - 6x^2 + 6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(12x^3 - 6x^2 + 6\right) = 36x^2 - 12x.$$

108. Derivada sucesiva: Calcular la segunda derivada de

$y = \operatorname{sen}3x.$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}3x) = \cos(3x)\frac{d}{dx}(3x) = \cos(3x)(3) = 3\cos 3x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3\cos 3x) = 3\frac{d}{dx}(\cos 3x) = 3(-\operatorname{sen}3x)\frac{d}{dx}(3x) = -3(\operatorname{sen}3x)(3) = -9\operatorname{sen}3x.$$

109. Función hiperbólica

$$\frac{d}{dx}\left(\tanh\sqrt{x}\right) = \operatorname{Sec}^2 h\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \operatorname{Sec}^2 h\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{Sec}^2 h\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\operatorname{Sec}^2 h\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

# APLICACIONES

## Máximos Y Mínimos De Funciones

110. Calcular los máximos y mínimos de $f(x)$:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$

Solución:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

si $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

Utilizar: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, a=3, b=-12, c=9.

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(9)}}{2(3)} = x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6}$$

$$= x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} \dfrac{12+6}{6} = \dfrac{18}{6} = 3 \\ \dfrac{12-6}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \end{cases}$$ Puntos criticos: x=1, x=3

Analizar, $x = 1.$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(0.5) = 3(0.5)^2 - 12(0.5) + 9 = 0.75 - 6 + 9 = +3.75 > 0$

$f'(1.5) = 3(1.5)^2 - 12(1.5) + 9 = 3(2.25) - 18 + 9 = -2.25 < 0$

$\therefore x = 1$ es un Máximo, $f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 1 - 6 + 9 = 4$

$\therefore (1, 4)$ Máximo

Analizar, x=3.

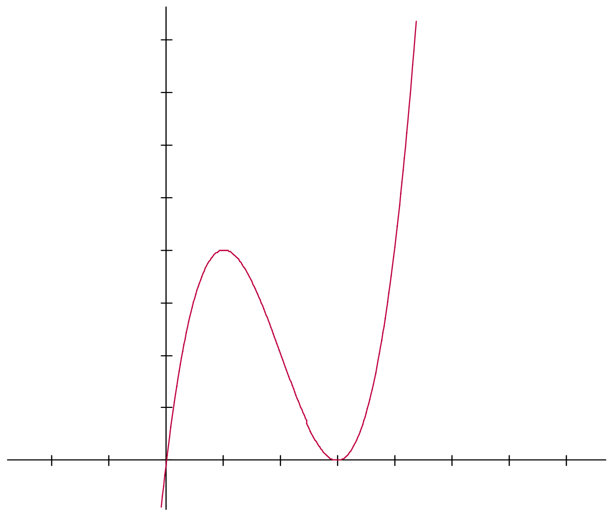
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(2.5) = 3(2.5)^2 - 12(2.5) + 9 = -2.25 < 0$

$f'(3.5) = 3(3.5)^2 - 12(3.5) + 9 = 3.75 > 0$

$\therefore f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 27 - 54 + 27 = 0$

$(3, 0)$ mínimo.



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

111.

Calcula los máximos y mínimos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

Solución:

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

Factorizando: $f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$

$\therefore f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - x - 2) = 0 \therefore 12x = 0 \circ x^2 - x - 2 = 0$

$12x = 0 \quad \Rightarrow x = \dfrac{0}{12} = 0, x_1 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

Factorizando: $(x-2)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x_2 = +2, x_3 = -1,$ puntos singulares: $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -1$

Por el primer método, iniciamos análisis de $x_1 = 0$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$i) f'(-0.5) = 12(-0.5)^3 - 12(-0.5)^2 - 24(-0.5) = -1.5 - 3 + 12 = 7.5$

$ii) f'(0.5) = 12(0.5)^3 - 12(0.5)^2 - 24(0.5) = 1.5 - 3 - 12 = -13.5$

observamos que $f'(-0.5) > 0, f'(0.5) < 0, \quad \therefore f$ tiene un MÁXIMO en 0.

Evaluamos $f(0) = 3(0)^4 - 4(0)^3 - 12(0)^2 = 0 \therefore$ MÁXIMO: $(0,0)$.

Ahora : $x_2 = 2$

i) $f'(1.5) = 12(1.5)^3 - 12(1.5)^2 - 24(1.5) = 40.5 - 27 - 36 = -22.5$

ii) $f'(2.5) = 12(2.5)^3 - 12(2.5)^2 - 24(2.5) = 187.5 - 75 - 60 = 52.5$

$\therefore f'(1.5) < 0, f'(2.5) > 0 \Rightarrow$ f tiene mínimo en 2,

$f(2) = 3(2)^4 - 4(2)^3 - 12(2)^2 = 48 - 32 - 48 = -32$

$\therefore (2, -32)$ mínimo

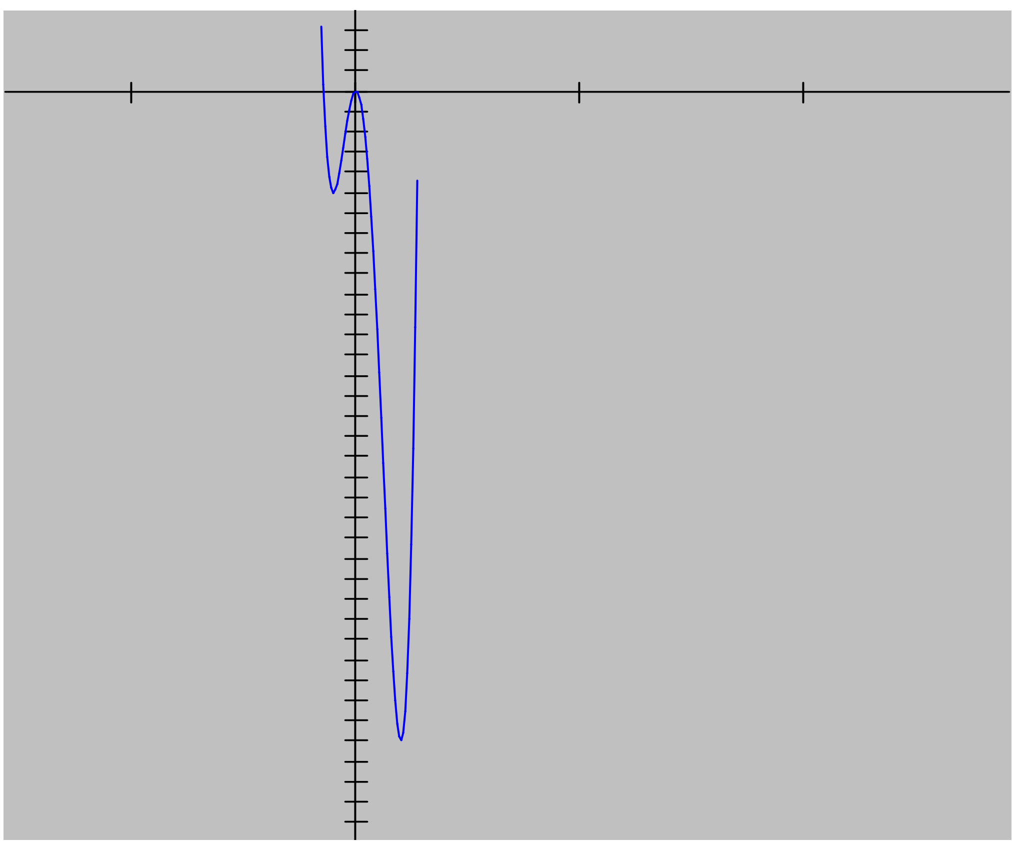
En : $x_3 = -1$,

i) $f'(-1.5) = 12(-1.5)^3 - 12(-1.5)^2 - 24(-1.5) = -40.5 - 27 + 36 = -31.5$

ii) $f'(-0.5) = 12(-0.5)^3 - 12(-0.5)^2 - 24(-0.5) = 7.5$

$\therefore f'(-1.5) < 0, f'(-0.5) > 0 \therefore$ f tiene mínimo en -1,

$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 12(-1)^2 = 3 + 4 - 12 = -5 \therefore (-1, -5)$ mínimo.



Gráfica de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

112. Calcular los máximos y mínimos por el criterio de la segunda derivada.

$f(x) = 2 + 12x + 3x^2 - 2x^3.$

Solución:

$f'(x) = 12 + 6x - 6x^2, f''(x) = 6 - 12x$

$\therefore$ si $12 + 6x - 6x^2 = 0 \quad a = -6;\ b = 6;\ c = 12$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-6)(12)}}{2(-6)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 288}}{-12} = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{-12}$$

$$x = \frac{-6 \pm 18}{-12} = \begin{cases} \dfrac{-6+18}{-12} = \dfrac{12}{-12} = -1 \\ \dfrac{-6-18}{-12} = \dfrac{-24}{-12} = 2 \end{cases}$$

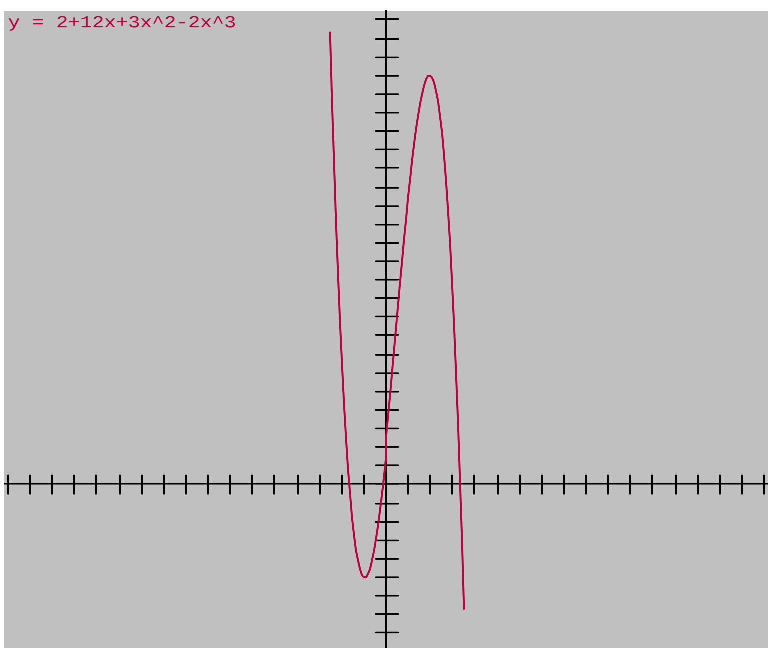
$f''(x) = 6 - 12x \Rightarrow f''(-1) = 6 - 12(-1) = 6 + 12 = 18 > 0 \therefore$ mínimo en x=-1

$f''(x) = 6 - 12x \Rightarrow f''(2) = 6 - 12(2) = 6 - 24 = -18 < 0 \therefore$ máximo en x=2

como $f(x) = 2 + 12x + 3x^2 - 2x^3$

$\Rightarrow f(-1) = 2 + 12(-1) + 3(-1)^2 - 2(-1)^3 = 2 - 12 + 3 + 2 = -5 \therefore (-1,-5)$ mínimo.

$\Rightarrow f(2) = 2 + 12(2) + 3(2)^2 - 2(2)^3 = 2 + 24 + 12 - 16 = 22 \therefore (2,22)$ Máximo.




Gráfica de $f(x) = 2 + 12x + 3x^2 - 2x^3.$

113. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la curva en el punto dado.

$f(x) = x^3 - 3x;\ (2,2).$

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow m = 3(2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9,$

y la ecuación de la recta tangente está dada por:

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 9(x - 2) \Rightarrow y - 2 = 9x - 18$

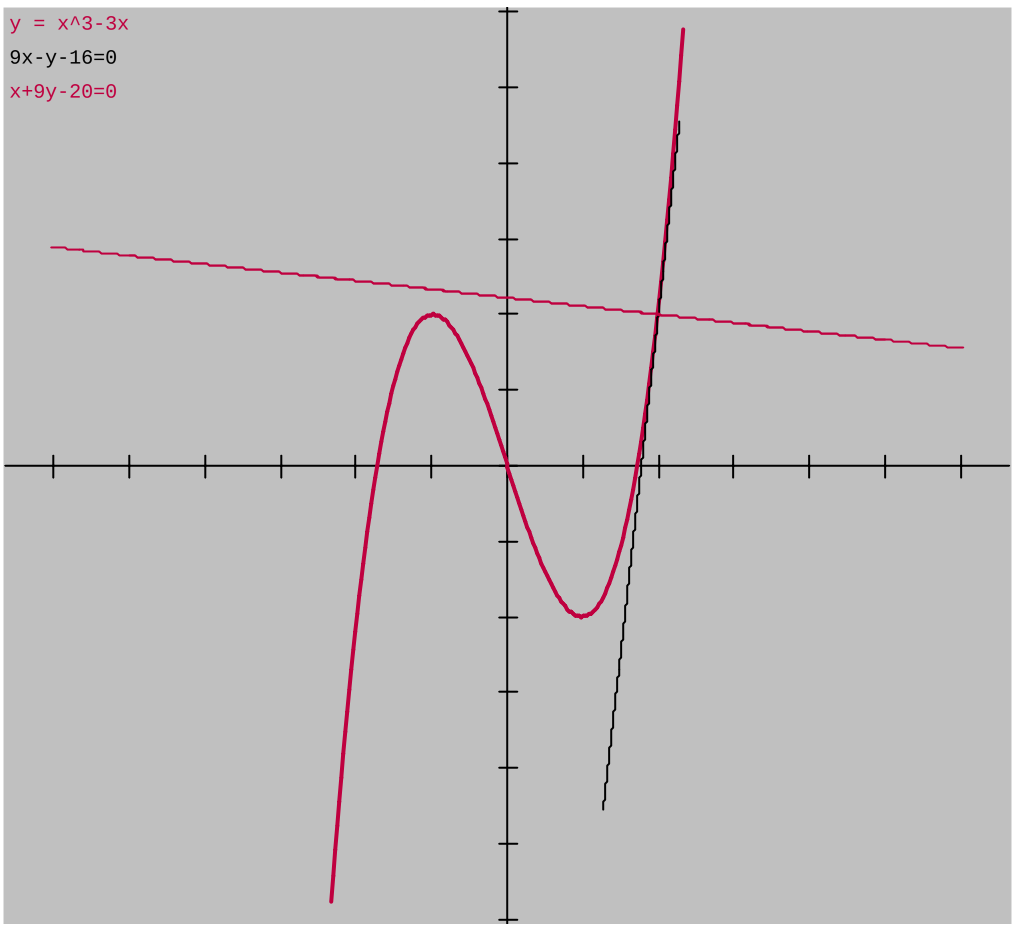
$\Rightarrow 9x - y - 18 + 2 = 0 \Rightarrow 9x - y - 16 = 0$

Para la recta Normal, $m = -\dfrac{1}{9}$

$\therefore$ su ecuación es:

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -\dfrac{1}{9}(x - 2) \Rightarrow 9(y - 2) = -1(x - 2)$

$\Rightarrow 9y - 18 = -x + 2 \Rightarrow x + 9y - 18 - 2 = 0 \Rightarrow x + 9y - 20 = 0.$



114. Dada la siguiente ecuación de movimiento rectilíneo, calcular el espacio recorrido, la velocidad y la aceleración en el instante t=2

$s(t) = 4t^2 - 6t.$

Solución:

$s(t) = 4t^2 - 6t \Rightarrow s(2) = 4(2)^2 - 6(2) = 16 - 12 = 4$

$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \frac{d}{dt}(4t^2 - 6t) = \frac{d}{dt}(4t^2) - \frac{d}{dt}(6t) = 8t - 6 \therefore v(2) = 8(2) - 6 = 16 - 6 = 10.$

$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(8t - 6) = \frac{d}{dt}(8t) - \frac{d}{dt}(6) = 8 \therefore a(t) = 8 \Rightarrow a(2) = 8.$

115. Determinar si es Función creciente o decreciente.

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3.$

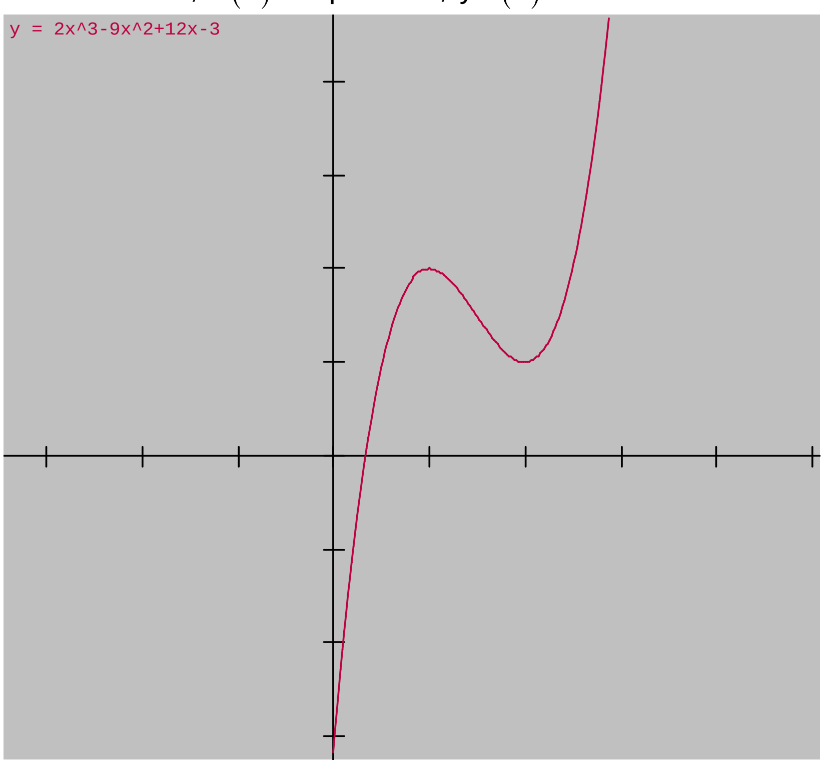
Solución:

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-2)(x-1)$

cuando $x < 1$, $f'(x)$ es positiva, y $f(x)$ es creciente

cuando $1 < x < 2$, $f'(x)$ es negativa, y $f(x)$ es decreciente

cuando $x > 2$, $f'(x)$ es positiva, y $f(x)$ es creciente.



## 116. Hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de la curva

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1.$

Solución:

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \Rightarrow f''(x) = 36x^2 - 24x$

$36x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(3x - 2) = 0 \Rightarrow 12x = 0$ y $3x\text{-}2 = 0$

$\therefore$ $x = 0$ y $x = \dfrac{2}{3}$ son las raíces, $f''(x) = 36x^2 - 24x = 36x\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$

cuando $x < 0$, $f''(x)$ positiva

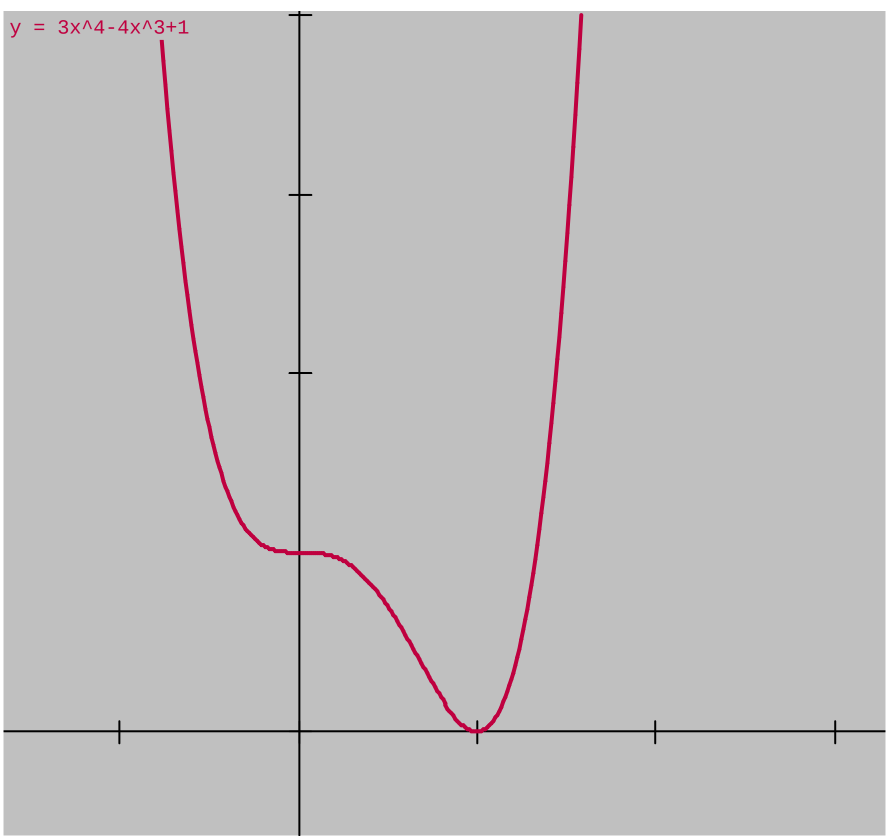
cuando $0 < x < \dfrac{2}{3}$, $f''(x)$ negativa

Luego la curva es cóncava hacia arriba para todo x negativo,

y cóncava hacia abajo en $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$.

Cuando $x > \dfrac{2}{3}$ $f''(x)$ positiva, luego la curva es cóncava hacia arriba para todo $x > \dfrac{2}{3}$.

Los puntos $(0,1), \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{11}{27}\right)$ son puntos de inflexión.



117. Aplicar Regla de L´Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1.$$

118. Obtener el límite de la sucesión,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3}{2+2n^2}.$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3}{2+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+\frac{2n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+2}=\frac{1-0}{0+2}=\frac{1}{2}.$$

119. Obtener la Serie:

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Solución:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^k$

Solución :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{-3}{5}}=\frac{1}{1+\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{8}{5}}=\frac{5}{8}.$$

120. Obtener el polinomio de Taylor de grado 4, de lnx con a=1:

$f(x) = \ln x$, en un entorno de a=1,

Solución:

$f(x) = \ln x, \qquad f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}, \qquad f''(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}, \qquad f'''(1) = \dfrac{2}{1^4} = 2$

$f^{IV}(x) = -\dfrac{6}{x^4}, \qquad f^{IV}(1) = -\dfrac{6}{1^4} = -6$

$$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-6}{4!}(x-1)^4$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

# Capítulo 2

# Matemáticas 2
# Cálculo Integral

**Objetivo general del curso de Matemáticas II:**

Dominará el concepto de diferencial e integral y observará la relación que existe entre el cálculo diferencial e integral.

Aplicará la integral como una herramienta para la solución de problemas prácticos del área de ingeniería en que se imparte esta materia.

# Programa de Matemáticas II.

## 1.- DATOS DE LA ASIGNATURA

| | |
|---|---|
| Nombre de la asignatura: | **Matemáticas II (Cálculo Integral)** |
| Carrera: | **Todas las Ingenierías** |
| Clave de la asignatura: | **ACM - 0404** |
| Horas teoría-horas práctica-créditos | **3-2-8** |

## 2.- HISTORIA DEL PROGRAMA

| Lugar y fecha de elaboración o revisión | Participantes | Observaciones (cambios y justificación) |
|---|---|---|
| Dirección General de Institutos Tecnológicos. Cd. de México de 7 y 8 agosto 2003. | Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Chihuahua II. | Propuesta de contenidos temáticos comunes de matemáticas para las ingenierías. |
| Dirección General de Institutos Tecnológicos. Cd. de México del 24 al 25 de noviembre de 2003. | Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Chihuahua II. | Análisis y mejora de los programas de matemáticas para ingeniería, tomando como base las Reuniones Nacionales de Evaluación Curricular de las diferentes carreras. |
| Cd. de México del 21 al 23 de Enero de 2004. | Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Mexicali. | Definición de las estrategias didácticas |

## 3.- UBICACIÓN DE LA ASIGNATURA

### a). Relación con otras asignaturas del plan de estudio

| Anteriores | |
|---|---|
| **Asignaturas** | **Temas** |
| Matemáticas I (Cálculo Diferencial) | Funciones<br>Limites de Funciones<br>Derivadas |

| Posteriores | |
|---|---|
| **Asignaturas** | **Temas** |
| Matemáticas III (Cálculo Vectorial) | Integrales Múltiples |
| Matemáticas V (Ecuaciones Diferenciales) | Solución de ecuaciones diferenciales<br>Definición de Transformada de Laplace<br>Series de Fourier |
| Otras asignaturas | Integral de Línea y Superficie<br>Teoremas: Gauss, Green, Stokes |

### b). Aportación de la asignatura al perfil del egresado

- Desarrollar un pensamiento lógico matemático formativo que le permite analizar fenómenos reales, sumas infinitas de diferenciales y modelarlos.
- Desarrollar su habilidad para la resolución de problemas.

## 4.- OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DEL CURSO

Dominará el concepto de diferencial e integral y observará la relación que existe entre el cálculo diferencial e integral

Aplicará la integral como una herramienta para la solución de problemas prácticos del área de ingeniería en que se imparte esta materia

## 5.- TEMARIO

| Unidad | Temas | Subtemas |
|---|---|---|
| 1 | Diferenciales | 1.1 Definición de diferencial.<br>1.2 Incrementos y diferenciales, su interpretación geométrica.<br>1.3 Teoremas típicos de diferenciales<br>1.4 Cálculo de diferenciales.<br>1.5 Cálculo de aproximaciones usando la diferencial. |
| 2 | Integrales Indefinidas y Métodos de Integración | 2.1 Definición de Función Primitiva<br>2.2 Definición de Integral Indefinida<br>2.3 Propiedades de la Integral Indefinida<br>2.4 Cálculo de Integrales Indefinidas.<br>2.4.1 Directas.<br>2.4.2 Por cambio de variable.<br>2.4.3 Por Partes<br>2.4.4 Trigonométricas<br>2.4.5 Por sustitución trigonométrica<br>2.4.6 Por fracciones parciales |
| 3 | Integral definida | 3.1 Definición de integral definida.<br>3.2 Propiedades de la integral definida.<br>3.3 Teorema de existencia para integrales definidas.<br>3.4 Teorema fundamental del Cálculo<br>3.5 Cálculo de integrales definidas.<br>3.6 Teorema del valor medio para integrales |
| 4 | Aplicaciones de la integral | 4.1 Longitud de curvas.<br>4.2 Cálculo de áreas<br>4.3 Áreas entren curvas<br>4.4 Cálculo de volúmenes.<br>4.5 Volúmenes de sólidos de revolución<br>4.6 Cálculo de volúmenes por el método de los discos<br>4.7 Cálculo de momentos, centros de masa y trabajo. |
| 5 | Integrales Impropias | 5.1 Definición de integral impropia.<br>5.2 Integral impropia de 1$^{ra}$ clase<br>5.3 Integral impropia de 2$^{da}$ clase. |

## 6.- APRENDIZAJES REQUERIDOS

- Cálculo diferencial

## 7.- SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Investigar el origen histórico, el desarrollo y definiciones planteadas en los conceptos involucrados en el tema.
- Analizar y discutir, sobre la aplicación de las definiciones del tema en problemas reales relacionados con la ingeniería en que se imparta esta materia.
- Propiciar el uso de Software de matemáticas (Derive, Mathcad, Mathematica, Maple, Matlab) o la calculadora graficadora como herramientas que faciliten la comprensión de los conceptos, la resolución de problemas e interpretación de los resultados.
- Interrelacionar a las academias correspondientes, a través de reuniones en las que se discutan las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, establecer la profundidad con que se cubrirán cada uno de los temas de esta materia, así como determinar problemas de aplicación.
- En cada unidad iniciar con un proceso de investigación de los temas a tratar.
- Promover grupos de discusión y análisis sobre los conceptos previamente investigados.
- Al término de la discusión se formalicen y establezcan definiciones necesarias y suficientes para el desarrollo de esta unidad
- Proporcionar al estudiante una lista de problemas del tema y generar prácticas de laboratorio para confrontar los resultados obtenidos.
- Resolver en algunos casos problemas con el uso de softwares.

## 8.- SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

- Diagnóstica
- Temática
- Ejercicios planteados en clase.
- Evidencias de aprendizaje( Análisis y discusión grupal, elaboración de prototipos, modelos, actividades de investigación, reportes escritos, solución de ejercicios extraclase)
- Problemas resueltos con apoyo de software.

## 9.- UNIDADES DE APRENDIZAJE

**UNIDAD 1.-** Diferenciales

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| El estudiante adquirirá los conocimientos básicos de la diferencial de una función y los aplicará en la solución de problemas. | • Investigar el concepto de diferencial de una función y relacionarlo con la derivada.<br>• Establecer la interpretación geométrica de la diferencial<br>• Conocer y aplicar los teoremas típicos de diferenciación. | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20 |

**UNIDAD 2.-** Integrales indefinidas y métodos de integración

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Comprenderá el concepto de función primitiva o antiderivada a partir del cual desarrollará habilidades para el cálculo de integrales indefinidas<br><br>Desarrollará habilidades para aplicar diferentes técnicas de integración en la solución de problemas | • Investigar la definición de función primitiva y comprender el concepto de integral indefinida..<br>• Analizar las propiedades de la integral indefinida.<br>• Aplicar las propiedades anteriores y calcular integrales indefinidas.<br>• Analizar las técnicas de integración: directa, cambio de variable, por partes, integrales trigonométricas, por sustitución trigonométrica y por fracciones parciales.<br>• Analizar cuándo se pueden | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20 |

| | | |
|---|---|---|
| | aplicar las diferentes técnicas de integración para resolver problemas. | |

**UNIDAD 3.-** Integral definida

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Conceptualizará la integral definida a través de sumas infinitas a partir de lo cual se establecerá el teorema fundamental del cálculo. | • Interpretar las Sumas de Riemann<br>• Establecer el concepto de integral definida.<br>• Establecer e ilustrar geométricamente el Teorema Fundamental del Cálculo.<br>• Analizar y aplicar las propiedades de la integral definida<br>• Aplicar el Teorema del Valor Medio. | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20 |

**UNIDAD 4.-** Aplicaciones de la integral definida

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Aplicará la integral definida en la solución de problemas prácticos. | • Investigar diferentes aplicaciones de la integral definida.<br>• Determinar el área comprendida entre dos curvas.<br>• Analizar y calcular volúmenes de sólidos de revolución.<br>• Analizar, definir y resolver problemas que involucren el trabajo realizado por una fuerza.<br>• Determinar: momentos, centros de masa y centroides | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20 |

**UNIDAD 5.-** Integrales impropias

| Objetivo Educacional | Actividades de Aprendizaje | Fuentes de Información |
|---|---|---|
| Adquirirá los conocimientos sobre la integral impropia. | • Analizar el concepto de integral impropia.<br>• Evaluar integrales impropias de diferentes tipos. | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20 |

## 10. FUENTES DE INFORMACIÓN


1. James – Stewart Cálculo de una variable. Edit. Thomson Editores.
2. Swokowski Earl W. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.
3. Roland E. Hostetler Robert P. Cálculo y Geometría Analítica Edit. McGraw-Hill.
4. Zill Dennis G. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica
5. Edwards Jr. C. H. y Penney David E. Cálculo y Geometría Analítica. Edit. Prentice-Hall.
6. Fraleigh John B. Cálculo con Geometría Analítica. Edit. Addison- Wesley.
7. Anton Howard. Cálculo con Geometría Analítica Edit. Wiley.
8. The Calculus problem solver. Edit. R.E.A.
9. Leithold Louis. El Cálculo. Edit. OXFORD. University Press.
10. Swokowski Earl W. Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica
11. Granville William A. Cálculo Diferencial e Integral. Edit. Noriega – LIMUSA.

12. Thomas Jr- George / Finney Ross. CÁLCULO una variable. Edit, Pearson Educatio

13. Larson – Hostetler. Cálculo con Geometría Edit. McGraw-Hill.

14. Purcell, Edwing J. y Dale Varberg Cálculo con Geometría Analítica Prentice Hall.

15. Derive ( Software ).

16. Mathematica (Software ).

17. MathCad ( Software ).

18. Maple ( Software ).

19. C. Boyer Edit Historia de las Matemáticas. Alianza.

20. H. Bell Historia de las Matemáticas Edit. Fondo de Cultura Económica

## 11. PRÁCTICAS

- Graficación y resolución de problemas utilizando software matemático.
- Análisis y discusión en el aula de la aplicación de las herramientas matemáticas en la solución de problemas de ingeniería

# FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN BÁSICAS.

$(0)\ \int 0dx = C$

$(1)\ \int adv = a\int dv$

$(2)\ \int dx = x + C$

$(3)\ \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$(4)\ \int V^n dV = \dfrac{V^{n+1}}{n+1} + c$

$(5)\ \int \dfrac{dV}{V} = \ln V + c$

$(6)\ \int a^V dV = \dfrac{a^V}{\ln a} + c$

$(7)\ \int e^V dV = e^V + c$

$(8)\ \int \operatorname{sen} V dV = -\cos V + C$

$(9)\ \int \cos V dV = \operatorname{sen} V + C$

$(10)\ \int \sec^2 V dV = \operatorname{tg} V + C$

fórmulas :

$$(11)\ \int \csc^2 V dV = -\text{ctg}V + C$$

$$(12)\ \int \sec V \text{tg}V dV = -\sec V + C$$

$$(13)\ \int \csc V \text{ctg}V dV = -\csc V + C$$

$$(14)\ \int \text{tg}V dV = -\ln\cos V + C = \ln\sec V + C$$

$$(15)\ \int \text{ctg}V dV = \ln \text{sen}V + C$$

$$(16)\ \int \sec V dV = \ln(\sec V + \text{tg}V) + C$$

$$(17)\ \int \csc V dV = \ln(\csc V - \text{ctg}V) + C$$

$$(18)\ \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{v}{a} + C$$

$$(19)\ \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{v-a}{v+a} + C$$

$$(19')\ \int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v} + C$$

$$(20)\ \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \text{arcsen}\frac{v}{a} + C$$

$$(21)\ \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$(22)\ \int \sqrt{a^2 - v^2}\, dV = \frac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2}\text{arcsen}\frac{v}{a} + C$$

$$(23)\ \int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dV = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$$

En los ejercicios del 121 al 126, integrar mediante la fórmula:

$$\underline{\int k dx = k\int dx = kx + c.}$$

121.

$$\int 4dx = 4\int dx = 4x + c$$

$k = 4$

122.

$$\int \frac{dx}{2} = \int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + c.$$

$k = \frac{1}{2}$

123.

$$\int \frac{2dx}{3} = \frac{2}{3}\int dx = \frac{2}{3}x + c.$$

$k = \frac{2}{3}$

124.

$$\int a^3 dx = a^3\int dx = a^3 x + c.$$

$k = a^3$

125.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x + c.$$

$k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

126.

$$\int a^{\frac{2}{3}} dx = a^{\frac{2}{3}}\int dx = a^{\frac{2}{3}}x + c.$$

$k = a^{\frac{2}{3}}$

En los ejercicios del 127 al 134, integrar mediante la fórmula:

$$\underline{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.}$$

127.

$$\int x dx = \int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c.$$

$n=1$

128.

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c.$$

$n=4$

129.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c = c - \frac{1}{x}.$$

$n=-2$

130.

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c.$$

$n=\frac{2}{3}$

131.

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}x^1}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c.$$

$n=\frac{1}{2}$

132.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c.$$

$n=-\frac{1}{2}$

133.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3x^{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x} + c.$$

$n=-\frac{2}{3}$

134.

$$\int \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x^2}dx = \int \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x^2}dx = \int x^{\frac{3}{5}-2}dx = \int x^{\frac{3}{5}-\frac{10}{5}}dx = \int x^{-\frac{7}{5}}dx = \frac{x^{-\frac{7}{5}+1}}{-\frac{7}{5}+1} + c = -\frac{5x^{-\frac{2}{5}}}{2} + c.$$

En los ejercicios del 135 al 139, integrar mediante la fórmula:

$$\int kx^n dx = k\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

135.

$$\int 3x dx = 3\int x^1 dx = 3\,\frac{x^{1+1}}{1+1} + c = 3\,\frac{x^2}{2} + c = \frac{3x^2}{2} + c.$$

k=3, n=1

136.

$$\int \frac{2}{x^2} dx = \int 2x^{-2} dx = 2\int x^{-2} dx = 2\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = 2\,\frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{2}{x} + c = c - \frac{2}{x}.$$

k=2, n=-2

137.

$$\int 3ay^2 dy = 3a\int y^2 dy = 3a\frac{y^{2+1}}{2+1} + c = 3a\frac{y^3}{3} + c = ay^3 + c$$

k=3a, n=2

138.

$$\int \sqrt{3x} dx = \int \sqrt{3}\sqrt{x} dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x} dx = \sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{3}\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}x}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2x\sqrt{3x}}{3} + c$$

$k=\sqrt{3}$, $n=\frac{1}{2}$

139.

$$\int \frac{2a}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2a}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int 2ax^{-\frac{1}{2}} dx = 2a\int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2a\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4a\sqrt{x} + c$$

k=2a, $n=-\frac{1}{2}$

En los ejercicios del 140 al 142, integrar mediante la fórmula:

$$\int (f+g-h)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx - \int h\,dx$$

140.

$$\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)\,dx = \int 2x^3dx - \int 5x^2dx - \int 3xdx + \int 4dx$$

$$\int 2x^3dx = 2\int x^3dx = 2\frac{x^{3+1}}{3+1} + c_1 = 2\frac{x^4}{4} + c_1 = \frac{2x^4}{2\cdot 2} + c_1 = \frac{x^4}{2} + c_1$$

$$\int 5x^2dx = 5\int x^2dx = 5\frac{x^{2+1}}{2+1} + c_2 = 5\frac{x^3}{3} + c_2$$

$$\int 3xdx = 3\int xdx = 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + c_3 = 3\frac{x^2}{2} + c_3$$

$$\int 4dx = 4\int dx = 4x + c_4$$

$$\therefore \int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)\,dx = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + c.$$

141.

$$\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int \frac{x^2}{2}dx - \int \frac{2}{x^2}dx.$$

Solución :

$$a) \int \frac{x^2}{2}dx = \int \frac{1}{2}x^2dx = \frac{1}{2}\int x^2dx = \frac{1}{2}\frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{2(3)} = \frac{x^3}{6} + c_1$$

$$b) \int \frac{2}{x^2}dx = \int 2x^{-2}dx = 2\int x^{-2}dx = 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = 2\frac{x^{-1}}{-1} = -2x^{-1} = -\frac{2}{x} + c_2$$

$$\therefore \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{6} - \left(-\frac{2}{x}\right) + c = \frac{x^3}{6} + \frac{2}{x} + c.$$

142.

$$\int \frac{x^3 - 6x + 5}{x}dx = \int \frac{x^3}{x}dx - \int \frac{6x}{x}dx + \int \frac{5}{x}dx = \int x^2dx - \int 6dx + \int 5\frac{dx}{x}$$

$$= \int x^2dx - 6\int dx + 5\int \frac{dx}{x} = \frac{x^{2+1}}{2+1} - 6x + 5\ln x + c = \frac{x^3}{3} - 6x + 5\ln x + c.$$

En los ejercicios del 143 al 150, integrar mediante la fórmula:

$$\int (V)^n \, dV = \frac{V^{n+1}}{n+1} + c$$

143.

$$\int (3x+2)^2 \, dx$$

$V=3x+2 \quad \Rightarrow \quad dV=d(3x+2) = d(3x) + d(2) = 3dx + 0 = 3dx, \quad n=2$

$$\int (3x+2)^2 \frac{3}{3} dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^2 \, 3dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^3}{3} + c = \frac{(3x+2)^3}{9} + c.$$

144.

$$\int \sqrt{a+bx} dx$$

$V=a+bx \quad \Rightarrow dV=bdx, \; n=\frac{1}{2}$

$$\int (a+bx)^{\frac{1}{2}} \frac{b}{b} dx = \frac{1}{b}\int (a+bx)^{\frac{1}{2}} \, bdx = \frac{1}{b}\frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{b}\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{3b} + c.$$

145.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a\text{-}by}} = \int \frac{dy}{(a-by)^{\frac{1}{2}}} = \int (a-by)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$V=a-by, \; dV=\text{-}bdy, \; n=\text{-}\frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{b}\int (a-by)^{-\frac{1}{2}} (-bdy) = -\frac{1}{b}\frac{(a-by)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{b}\frac{(a-by)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{-2\sqrt{a-by}}{b} + c.$$

## 146.

$$\int (a+bt)^2\, dt$$

$V=a+bt \;\Rightarrow\; dV=bdt,\ n=2$

$$\int (a+bt)^2 \frac{b}{b}\,dt = \frac{1}{b}\int (a+bt)^2\, bdt = \frac{1}{b}\frac{(a+bt)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{1}{b}\frac{(a+bt)^3}{3} + c = \frac{(a+bt)^3}{3b} + c$$

## 147.

$$\int x(2+x^2)^2\,dx = \int (2+x^2)^2\, xdx = \int V^2 \frac{dV}{2} = \frac{1}{2}\int V^2 dV = \frac{1}{2}\frac{V^{2+1}}{2+1} + c$$

$V=2+x^2 \;\Rightarrow\; dV=2xdx \Rightarrow \frac{dV}{2}=xdx,\ n=2$

$$= \frac{1}{2}\frac{V^3}{3} + c = \frac{V^3}{6} + c = \frac{(2+x^2)^3}{6} + c.$$

## 148.

$$\int y(a-by^2)\,dy = \int (a-by^2)^1\, ydy = \int V^1 \frac{dV}{-2b} = -\frac{1}{2b}\int V^1 dV = -\frac{1}{2b}\frac{V^{1+1}}{1+1} + c$$

$V=a-by^2 \;\Rightarrow\; dV=-2bydy \Rightarrow \frac{dV}{-2b}=ydy,\ n=1$

$$= -\frac{1}{2b}\frac{V^2}{2} + c = -\frac{V^2}{4b} + c = -\frac{(a-by^2)^2}{4b} + c.$$

## 149.

$$\int t\sqrt{2t^2+3}\,dt = \int \sqrt{2t^2+3}\,tdt = \int (2t^2+3)^{\frac{1}{2}}\, tdt = \int V^{\frac{1}{2}} \frac{dV}{4} = \frac{1}{4}\int V^{\frac{1}{2}} dV$$

$V=2t^2+3 \;\Rightarrow\; dV=4tdt \Rightarrow \frac{dV}{4}=tdt,\ n=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4}\frac{V^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{4}\frac{V^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{(2t^2+3)^{\frac{3}{2}}}{6} + c$$

## 150.

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}}dt = \int \frac{4x^2}{\left(x^3+8\right)^{\frac{1}{2}}}dx = 4\int \left(x^3+8\right)^{-\frac{1}{2}} x^2dx = 4\int \left(x^3+8\right)^{-\frac{1}{2}} x^2dx$$

$V=x^3+8 \Rightarrow dV=3x^2dx \Rightarrow \frac{dV}{3}=x^2dx,\ n=\frac{1}{2}$

$$= 4\int V^{-\frac{1}{2}}\frac{dV}{3} = \frac{4}{3}\int V^{-\frac{1}{2}}dV = \frac{4}{3}\frac{V^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{4}{3}\frac{V^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{8}{3}V^{\frac{1}{2}} + c = \frac{8}{3}\sqrt{V} + c = \frac{8}{3}\sqrt{x^3+8} + c.$$

## 151. Resolver la integral:

$$\int \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$$

Solución:

Desarrollar el binomio, luego integrar cada termino.

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)$$

$\sqrt{a}-\sqrt{x}$

$\underline{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

$a-\sqrt{a}\sqrt{x}$ observación; $\sqrt{a}$ por $\sqrt{a}$ : $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a.$

$\underline{\ldots-\sqrt{a}\sqrt{x}+x}$

$a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x.$

$$\therefore \int \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx = \int \left(a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x\right)dx = \int adx - \int 2\sqrt{a}\sqrt{x}dx + \int xdx$$

$$= a\int dx - 2\sqrt{a}\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^1dx = ax - 2\sqrt{a}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = ax - 2\sqrt{a}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= ax - \frac{4}{3}\sqrt{a}\sqrt{x}x + \frac{x^2}{2} + c = ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + c.$$

## 152. Resolver la integral:

$$\int \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Solución:

$$\int \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 \frac{-2}{-2}x^{-\frac{1}{2}}dx = -2\int \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 \frac{(-1)}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -2\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^{2+1}}{2+1} = \frac{-2\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^3}{3} + c.$$

sugerencia, utilizar :

$$\int V^n dV = \frac{V^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\text{con} : V = \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right) \Rightarrow dV = d\left(\sqrt{a}\right) - d\left(\sqrt{x}\right) = 0 - dx^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

## 153. Resolver la integral:

$$\int \sqrt{x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx.$$

Solución:

$$\int x^{\frac{1}{2}}\left(a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x\right)dx = \int \left(ax^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{a}x + x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$= \int ax^{\frac{1}{2}}dx - \int 2\sqrt{a}x dx + \int x^{\frac{3}{2}}dx = a\int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\sqrt{a}\int x dx + \int x^{\frac{3}{2}}dx = a\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2a\frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c$$

$$= \frac{ax^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2\sqrt{a}x^2}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3} - x^2\sqrt{a} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c.$$

## 154. Resolver la integral:

$$\int \frac{t^3dt}{\sqrt{a^4+t^4}}.$$

Solución:

$$\int \frac{t^3dt}{\sqrt{a^4+t^4}} = \int \frac{t^3dt}{\left(a^4+t^4\right)^{\frac{1}{2}}} = \int \left(a^4+t^4\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4}{4} t^3dt = \frac{1}{4}\int \left(a^4+t^4\right)^{-\frac{1}{2}} 4t^3dt = \frac{1}{4}\frac{\left(a^4+t^4\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\left(a^4+t^4\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2}\sqrt{a^4+t^4} + c.$$

## 155. Resolver la integral:

$$\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}dx.$$

Solución:

$$\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}dx = \int \left(a+bx^n\right)^{\frac{1}{2}} x^{n-1}dx$$

$$= \int \left(a+bx^n\right)^{\frac{1}{2}} \frac{nb}{nb} x^{n-1}dx = \frac{1}{nb}\int \left(a+bx^n\right)^{\frac{1}{2}} nbx^{n-1}dx$$

$$= \frac{1}{nb}\frac{\left(a+bx^n\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{nb}\frac{\left(a+bx^n\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3nb}\left(a+bx^n\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

sugerencia : utilizar $\int V^ndV = \frac{V^{n+1}}{n+1} + c,$

$V = \left(a+bx^n\right) \Rightarrow dV = d\left(a+bx^n\right) = da + dbx^n = 0 + bdx^n = bnx^{n-1}dx.$

## 156. Resolver la integral:

$$\int sen^2x\cos xdx.$$

Solución:

$$\int sen^2x\cos xdx = \int \left(senx\right)^2 \cos xdx = \frac{\left(senx\right)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{\left(senx\right)^3}{3} + c = \frac{sen^3x}{3} + c.$$

utilizar : $\int V^ndV = \frac{V^{n+1}}{n+1} + c$, $V = senx \Rightarrow dV = dsenx = \cos xdx$, $n = 2.$

## 157. Resolver la integral:

$\int \operatorname{sen}2x \cos 2x dx.$

Solución:

$\int \operatorname{sen}2x \cos 2x dx = \int (\operatorname{sen}2x)^1 \cos 2x dx$

fórmula: $\int V^n dV = \frac{V^{n+1}}{n+1} + c, \quad$ si $V = \operatorname{sen}2x$

$dV = d(\operatorname{sen}2x) = \cos 2x \cdot d(2x) = \cos 2x(2dx) = 2\cos 2x dx$

$\therefore dV = 2\cos 2x dx \Rightarrow \cos 2x dx = \frac{dV}{2}$

$\int (\operatorname{sen}2x)^1 \cos 2x dx = \int V^1 \frac{dV}{2} = \frac{1}{2}\int V^1 dV = \frac{1}{2}\frac{V^{1+1}}{1+1} + c = \frac{1}{2}\frac{V^2}{2} + c$

$= \frac{V^2}{4} + c = \frac{(\operatorname{sen}2x)^2}{4} + c = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} + c.$

## 158. Resolver la integral:

$\int \frac{dx}{2+3x}.$

Solución:

fórmula $\rightarrow \int \frac{dV}{V} = \ln V + c$

$V = 2+3x \Rightarrow dV = d(2+3x) = d(2) + d(3x) = 0 + 3dx = 3dx$

$\therefore dV = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dV}{3} = \frac{1}{3}dV,$

$\therefore \int \frac{dx}{2+3x} = \int \frac{\frac{1}{3}dV}{V} = \frac{1}{3}\int \frac{dV}{V} = \frac{1}{3}\ln V + c = \frac{1}{3}\ln(2+3x) + c = \frac{\ln(2+3x)}{3} + c.$

## 159. Resolver la integral:

$$\int \frac{x^2dx}{2+x^3}.$$

Solución:

$$\text{fórmula} \rightarrow \int \frac{dV}{V} = \ln V + c$$

$$V=2+x^3 \Rightarrow dV=d\left(2+x^3\right) = d(2) + d\left(x^3\right) = 0 + 3x^2dx = 3x^2dx$$

$$\therefore\ dV = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{dV}{3} = \frac{1}{3}dV,$$

$$\therefore \int \frac{dx}{2+x^3} = \int \frac{\frac{1}{3}dV}{V} = \frac{1}{3}\int \frac{dV}{V} = \frac{1}{3}\ln V + c = \frac{1}{3}\ln\left(2+x^3\right) + c = \frac{\ln\left(2+x^3\right)}{3} + c.$$

## 160. Resolver la integral:

$$\int \frac{tdt}{a+bt^2}.$$

Solución:

$$\text{fórmula} \rightarrow \int \frac{dV}{V} = \ln V + c$$

$$V=a+bt^2 \Rightarrow dV=d\left(a+bt^2\right) = d(a) + d\left(bt^2\right) = 0 + 2btdt = 2btdt$$

$$\therefore\ dV = 2btdt \Rightarrow tdt = \frac{dV}{2b} = \frac{1}{2b}dV,$$

$$\therefore \int \frac{tdt}{a+bt^2} = \int \frac{\frac{1}{2b}dV}{V} = \frac{1}{2b}\int \frac{dV}{V} = \frac{1}{2b}\ln V + c = \frac{1}{2b}\ln\left(a+bt^2\right) + c = \frac{\ln\left(a+bt^2\right)}{2b} + c.$$

## 161. Resolver la integral:

$$\int \frac{2x+3}{x+2}dx.$$

Solución:

Dividir y luego integrar,

$$x+2\overline{\big)\,2x+3}\quad 2$$

$$\ldots\ldots\underline{-2x-4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots -1 \qquad \therefore\ \frac{2x+3}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}$$

$$\therefore \int \frac{2x+3}{x+2}dx = \int\left(2 - \frac{1}{x+2}\right)dx = \int 2dx - \int \frac{1}{x+2}dx = 2\int dx - \int \frac{dx}{x+2} = 2x - \ln(x+2) + c.$$

## 162. Resolver la integral:

$$\int \frac{ae^{\theta}+b}{ae^{\theta}-b}\,d\theta.$$

Solución:

$$\int \frac{ae^{\theta}+b}{ae^{\theta}-b}d\theta = \int \frac{ae^{\theta}+b-b+b}{ae^{\theta}-b}d\theta = \int \frac{ae^{\theta}-b+2b}{ae^{\theta}-b}d\theta = \int\left(\frac{ae^{\theta}-b}{ae^{\theta}-b}+\frac{2b}{ae^{\theta}-b}\right)d\theta$$

$$= \int\left(1+\frac{2b}{ae^{\theta}-b}\right)d\theta = \int d\theta + \int \frac{2b}{ae^{\theta}-b}d\theta = \theta + 2\int \frac{bd\theta}{e^{\theta}\left(a-be^{-\theta}\right)} = \theta + 2\int \frac{be^{-\theta}d\theta}{a-be^{-\theta}}$$

$$= \theta + 2\int \frac{be^{-\theta}d\theta}{\left(a-be^{-\theta}\right)} = \theta + 2\ln\left(a-be^{-\theta}\right)+c = \theta + 2\ln\left(\frac{a}{1}-\frac{b}{e^{\theta}}\right)+c = \theta + 2\ln\left(\frac{ae^{\theta}-b}{e^{\theta}}\right)+c$$

$$= \theta + 2\left[\ln\left(ae^{\theta}-b\right)-\ln e^{\theta}\right]+c = \theta + 2\ln\left(ae^{\theta}-b\right)-2\ln e^{\theta}+c$$

$$= \theta + 2\ln\left(ae^{\theta}-b\right)-2\theta+c = 2\ln\left(ae^{\theta}-b\right)-\theta+c.$$

## 163. Resolver la integral:

$$\int \operatorname{sen}\frac{2x}{3}\,dx.$$

Solución:

$$\int \operatorname{sen}\frac{2x}{3}dx = \left(\frac{3}{2}\right)\int \operatorname{sen}\frac{2x}{3}\left(\frac{2}{3}\right)dx = \frac{3}{2}\left(-\cos\frac{2x}{3}\right)+c = -\frac{3}{2}\cos\frac{2x}{3}+c.$$

$\int \operatorname{sen}V dV = -\cos V + c$, en este caso $V=\frac{2x}{3} \Rightarrow dV = d\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{2}{3}dx$

$v=\frac{2x}{3}$, $dV=\frac{2}{3}dx \Rightarrow dx=\frac{3}{2}dV$, o sea: $\int \operatorname{sen}\frac{2x}{3}dx = \int \operatorname{sen}V\frac{3}{2}dV = \frac{3}{2}\int \operatorname{sen}V dV = \frac{3}{2}(-\cos V)+c = -\frac{3}{2}\cos\frac{2x}{3}+c$

## 164. Resolver la integral:

$$\int \cos(b+ax)\,dx.$$

Solución:

$$\int \cos(b+ax)dx = \left(\frac{1}{a}\right)\int \cos(b+ax)(a)dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(b+ax)+c.$$

## 165. Resolver la integral:

$\int \csc^2(a-bx)\,dx.$

Solución:

$$\int \csc^2(a-bx)\,dx = \left(\frac{1}{-b}\right)\int \csc^2(a-bx)(-b)\,dx = \left(-\frac{1}{b}\right)\left(-\operatorname{ctg}(a-bx)\right)+c = \frac{\operatorname{ctg}(a-bx)}{b}+c.$$

## 166. Resolver la integral:

$\int \sec\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta.$

Solución:

$$\int \sec\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta = (2)\int \sec\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{2}\right)d\theta = (2)\sec\frac{\theta}{2}+c.$$

## 167. Resolver la integral:

$\int \cos mx\,dx.$

Solución:

$$\int \cos mx\,dx = \int \cos mx\,\frac{m}{m}\,dx = \frac{1}{m}\int \cos mx\,(m\,dx) = \frac{1}{m}\operatorname{sen} mx + c.$$

## 168. Resolver la integral:

$\int \operatorname{tg} bx\,dx.$

Solución:

$$\int \operatorname{tg} bx\,dx = \int \operatorname{tg} bx\,\frac{b}{b}\,dx = \frac{1}{b}\int \operatorname{tg} bx\,(b\,dx) = \frac{1}{b}\ln \sec bx + c.$$

## 169. Resolver la integral:

$\int \sec ax\,dx.$

Solución:

$$\int \sec ax\,dx = \int \sec ax\,\frac{a}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int \sec ax\,(a\,dx) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax) + c.$$

## 170. Resolver la integral:

$\int \operatorname{sen}^2 x dx.$

Solución:

identidad : $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \cos 2x(2)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x + c = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2x}{4} + c.$$

## 171. Resolver la integral:

$\int e^{3x}dx.$

Solución:

$$\int e^{3x}dx = \int e^{3x}\left(\frac{3}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}3dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c.$$

## 172. Resolver la integral:

$\int 6e^{3x}dx.$

Solución:

$$\int 6e^{3x}dx = 6\int e^{3x}\left(\frac{3}{3}\right)dx = \frac{6}{3}\int e^{3x}3dx = 2e^{3x} + c.$$

## 173. Resolver la integral:

$\int e^{\frac{x}{n}}dx.$

Solución:

$$\int e^{\frac{x}{n}}dx = \int e^{\frac{x}{n}}\left(\frac{n}{n}\right)dx = n\int e^{\frac{x}{n}}\frac{1}{n}dx = ne^{\frac{x}{n}} + c.$$

174. Resolver la integral:

$$\int \frac{dx}{e^x}.$$

Solución:

$$\int \frac{dx}{e^x} = \int e^{-x}dx = \int e^{-x}\left(\frac{-1}{-1}\right)dx = -1\int e^{-x}(-1)\,dx = -1e^{-x} + c = c - \frac{1}{e^x}.$$

175. Resolver la integral:

$$\int 10^x dx.$$

Solución:

$$\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + c.$$

176. Resolver la integral:

$$\int a^{ny}dy.$$

Solución:

$$\int a^{ny}dy = \int a^{ny}\left(\frac{n}{n}\right)dy = \frac{1}{n}\int a^{ny}n\,dy = \frac{1}{n}\frac{a^{ny}}{\ln a} + c = \frac{a^{ny}}{n\ln a} + c.$$

177. Resolver la integral:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Solución:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^{x^{\frac{1}{2}}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int e^{x^{\frac{1}{2}}}x^{-\frac{1}{2}}dx = \int e^{x^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\int e^{x^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

## 178. Resolver la integral:

$\int xe^{x^2}dx.$

Solución:

$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

## 179. Resolver la integral:

$\int e^{senx}cosxdx.$

Solución:

$\int e^{senx}cosxdx = e^{senx} + c.$

## 180. Resolver la integral:

$\int \sqrt{e^x}dx.$

Solución:

$\int \sqrt{e^x}dx = \int \left(e^x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int e^{\frac{1}{2}x}dx$

si $V = \frac{1}{2}x \Rightarrow dV = d\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}dx$

$dV = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2dV,$

$\therefore \int e^{\frac{1}{2}x}dx = \int e^V 2dV = 2\int e^V dV = 2e^V + c = 2e^{\frac{1}{2}x} + c.$

## 181. Resolver la integral:

$$\int\left(\frac{e^{x}+4}{e^{x}}\right)dx.$$

Solución:

$$\int\left(\frac{e^{x}+4}{e^{x}}\right)dx=\int\left(\frac{e^{x}}{e^{x}}+\frac{4}{e^{x}}\right)dx=\int\left(1+4e^{-x}\right)dx=\int dx+\int 4e^{-x}dx$$

$$=x+4\int e^{-x}dx=x-4\int e^{-x}\left(-1\right)dx=x-4e^{-x}+c.$$

## 182. Resolver la integral:

$$\int\left(\frac{dx}{1+\cos x}\right).$$

Solución:

$$\int\left(\frac{dx}{1+\cos x}\right)=\int\left(\frac{dx}{1+\cos x}\right)\left(\frac{1\text{-}\cos x}{1\text{-}\cos x}\right)=\int\frac{\left(1-\cos x\right)}{\operatorname{sen}^{2}x}dx=\int\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^{2}x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{2}x}\right)dx$$

$$=\int\left(\csc^{2}x-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{2}x}\right)dx=\int\csc^{2}x\,dx-\int\left(\operatorname{sen}x\right)^{-2}\cos x\,dx=-\operatorname{ctg}x-\frac{\left(\operatorname{sen}x\right)^{-1}}{-1}+c$$

$$=-\operatorname{ctg}x-\frac{\left(\operatorname{sen}x\right)^{-2+1}}{-2+1}+c=-\operatorname{ctg}x-\frac{\left(\operatorname{sen}x\right)^{-1}}{-1}+c=-\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\operatorname{sen}x}+c=-\operatorname{ctg}x+\csc x+c.$$

$1+\cos x$

$\underline{1-\cos x}$

$1+\cos x$

$\underline{\quad\text{-}\cos x\text{-}\cos^{2}x}$

$1 \qquad\qquad \text{-}\cos^{2}x=\operatorname{sen}^{2}x$

## 183. Resolver la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9}.$$

Solución:

fórmula: $\int \frac{dV}{V^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{V}{a} + c$

$(V)^2 = (x)^2 \Rightarrow V = x \Rightarrow dV = dx$

$(a)^2 = (9) \Rightarrow a = \sqrt{9} = 3$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{dx}{(x)^2 + (3)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c.$$

## 184. Resolver la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4}.$$

Solución:

fórmula: $\int \frac{dV}{V^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{V - a}{V + a} + c$

$(V)^2 = (x)^2 \Rightarrow V = x \Rightarrow dV = dx$

$(a)^2 = (4) \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - 9} = \int \frac{dx}{(x)^2 - (2)^2} = \frac{1}{2(2)} \ln \frac{x - 2}{x + 2} + c = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{x - 2}{x + 2} \right) + c.$$

## 185. Resolver la integral:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{25 - y^2}}.$$

Solución:

fórmula: $\int \frac{dV}{\sqrt{a^2 - V^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{V}{a} + c$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$

$V^2 = y^2 \Rightarrow V = \sqrt{y^2} = y \Rightarrow dV = dy$

$$\therefore \int \frac{dy}{\sqrt{25 - y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(5)^2 - (y)^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{y}{5} + c.$$

## 186. Resolver la integral:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-16}}.\ s>0.$$

Solución:

fórmula: $\int \frac{dV}{\sqrt{V^2 \pm a^2}} = \ln\left(V+\sqrt{V^2 \pm a^2}\right)+c.$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$

$V^2 = s^2 \Rightarrow V = \sqrt{s^2} = s \Rightarrow dV = ds$

$$\therefore \int \frac{ds}{\sqrt{s^2-16}} = \int \frac{ds}{\sqrt{(s)^2-(4)^2}} = \ln\left(s+\sqrt{s^2-16}\right)+c.$$

## 187. Resolver la integral:

$$\int \frac{dx}{9x^2-4},\ x>0.$$

Solución:

fórmula: $\int \frac{dV}{V^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{V-a}{V+a}+c$

$V^2 = 9x^2 \Rightarrow V = \sqrt{9x^2} = 3x \Rightarrow dV = d(3dx) = 3dx$

$\therefore dV = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dV}{3} = \frac{1}{3}dV$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$

$$\therefore \int \frac{dx}{9x^2-4} = \int \frac{dx}{(3x)^2-(2)^2} = \int \frac{\frac{1}{3}dV}{V^2-a^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dV}{V^2-a^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{2(a)}\ln\frac{V-a}{V+a}+c$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{2(2)}\ln\frac{3x-2}{3x+2}+c = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)+c.$$

## 188. Resolver la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}},\ x>0.$$

Solución:

fórmula: $\int \frac{dV}{\sqrt{a^2-V^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{V}{a}+c$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$

$V^2 = 9x^2 \Rightarrow V = \sqrt{9x^2} = 3x \Rightarrow dV = 3dx$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(4)^2-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{\sqrt{(4)^2-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{4}+c.$$

189. Resolver la integral por sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Solución:

Hagamos $u = a\operatorname{sen} z \Rightarrow du = a\cos z\,dz$

$$\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{\left(a^2-\left(a\operatorname{sen} z\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{\left(a^2-a^2\operatorname{sen}^2 z\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\int \frac{a\cos z\,dz}{\left[a^2\left(1-\operatorname{sen}^2 z\right)\right]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{\left(a^2\cos^2 z\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{a^3\cos^3 z} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2 z} =$$

$$\frac{1}{a^2}\int \sec^2 z\,dz = \frac{1}{a^2}\operatorname{tg} z + c = \frac{\operatorname{tg} z}{a^2} + c = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + c.$$

190. Resolver la integral por Fracciones Parciales:

$$\int \frac{\left(4x-2\right)dx}{x^3-x^2-2x}.$$

Solución:

$$\int \frac{\left(4x-2\right)dx}{x^3-x^2-2x} = \int \frac{\left(4x-2\right)dx}{x\left(x^2-x-2\right)} = \int \frac{\left(4x-2\right)dx}{x\left(x-2\right)\left(x+1\right)},$$

usando fracciones parciales:

$$\frac{\left(4x-2\right)}{x\left(x-2\right)\left(x+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow 4x-2 = A\left(x-2\right)\left(x+1\right) + Bx\left(x+1\right) + Cx\left(x-2\right)$$

$$4x-2 = A\left(x^2-x-2\right) + B\left(x^2+x\right) + C\left(x^2-2x\right)$$

$$4x-2 = x^2\left(A+B+C\right) + x\left(B-A-2C\right) - 2A$$

$$\therefore \quad A+B+C=0 \Rightarrow \quad A+B+C=0$$

$$B-A-2C=4 \Rightarrow \underline{+A-B+2C=-4}$$

$$-2A=-2 \qquad\qquad 2A+3C=-4 \Rightarrow 3C=-6 \Rightarrow C=-2 \Rightarrow A=1,\ C=-2$$

$$A+B+C=0 \Rightarrow B=1$$

$$\therefore \frac{\left(4x-2\right)}{x\left(x-2\right)\left(x+1\right)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{x+1},\ \text{sustituyendo:}$$

$$\therefore \int \frac{\left(4x-2\right)dx}{x^3-x^2-2x} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} - 2\int \frac{dx}{x+1} = \ln x + \ln\left(x-2\right) - 2\ln\left(x+1\right) + c$$

$$\ln x\left(x-2\right)\left(x+1\right)^{-2} + c = \ln\frac{x\left(x-2\right)}{\left(x+1\right)^2} + c = \ln\frac{x^2-2x}{\left(x+1\right)^2} + c.$$

# Integral Definida

191. Integrar las funciones en el intervalo indicado.

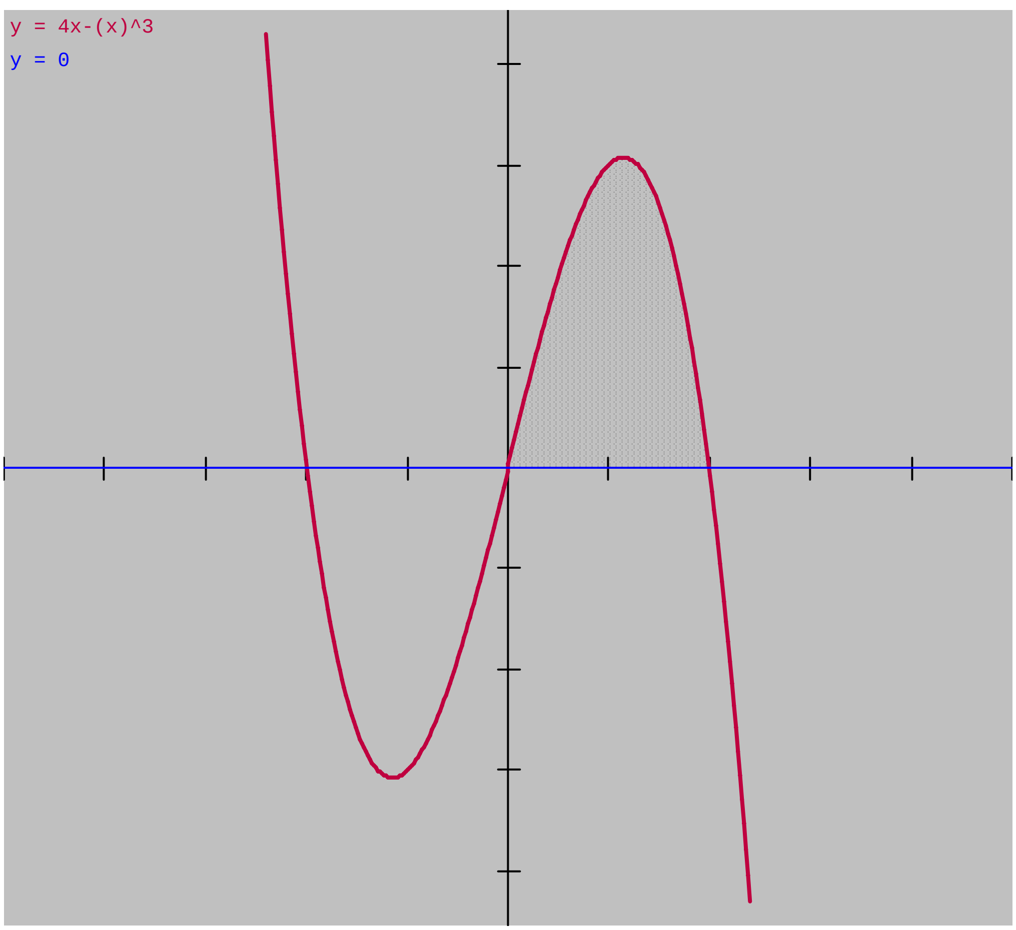
$$\int_0^a \left(a^2x - x^3\right) dx.$$

Solución:

$$\int_0^a \left(a^2x - x^3\right) dx = \int_0^a \left(a^2x\right) dx - \int_0^a x^3 dx$$

$$= a^2\int_0^a x dx - \int_0^a x^3 dx = a^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_0^a$$

$$= a^2\left[\frac{a^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] - \left[\frac{a^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] = a^2\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4}.$$

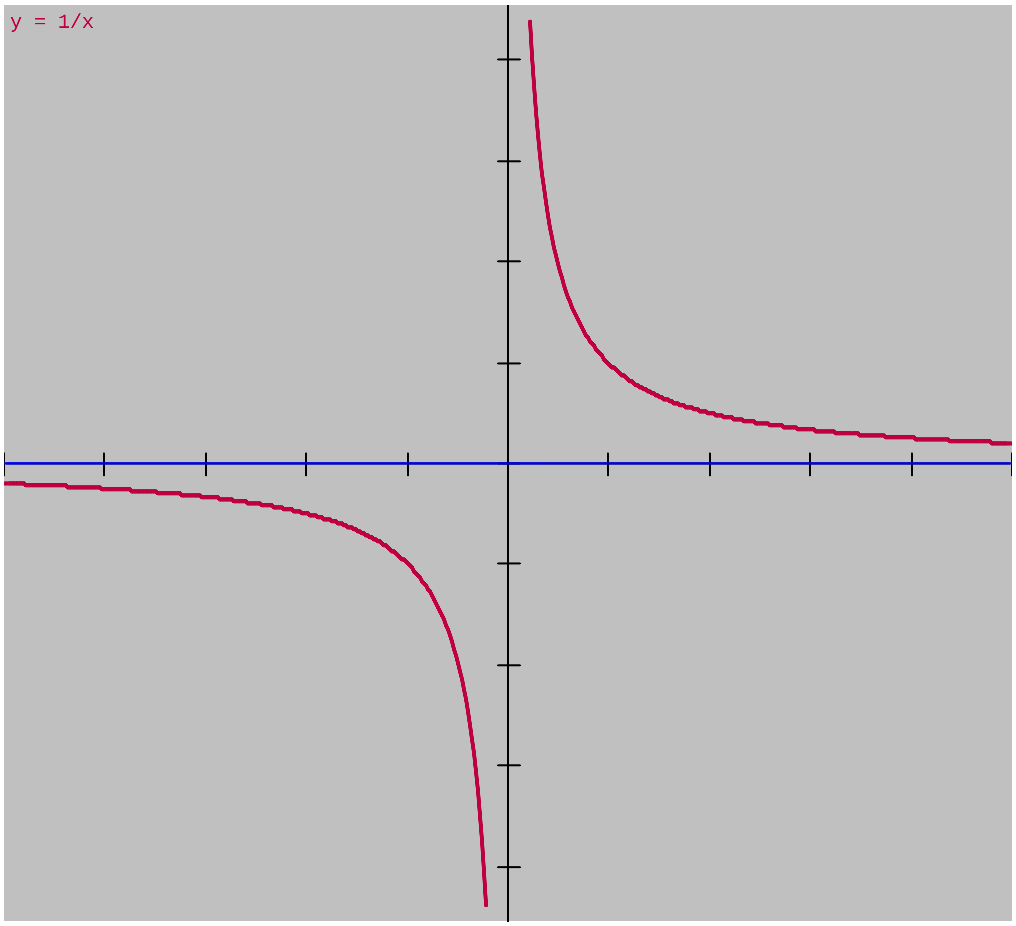


192. Resolver la integral:

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}.$$

Solución:

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{1}^{e} = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$



193. Resolver la integral:

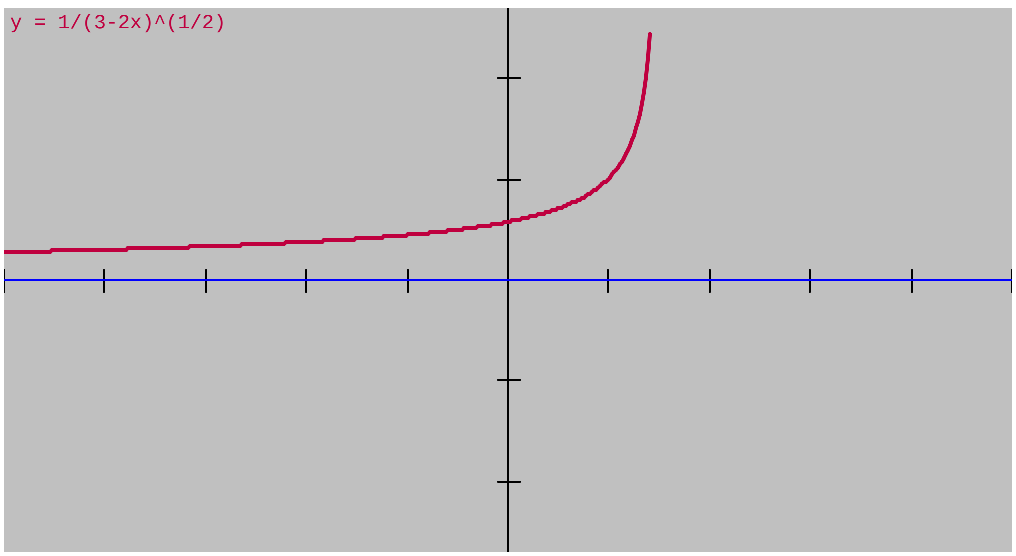
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}.$$

Solución :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\left[3-2x\right]^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \left[3-2x\right]^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{-2}\int_0^1 \left[3-2x\right]^{-\frac{1}{2}}(-2)\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\left[3-2x\right]^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\frac{\left[3-2x\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^1 = -\left(3-2x\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1$$

$$= -\left\{\left[3-2(1)\right]^{\frac{1}{2}} - \left[3-2(0)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} = -\left\{3-2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{3-0\right\}^{\frac{1}{2}} = -1+\sqrt{3} = \sqrt{3}-1.$$



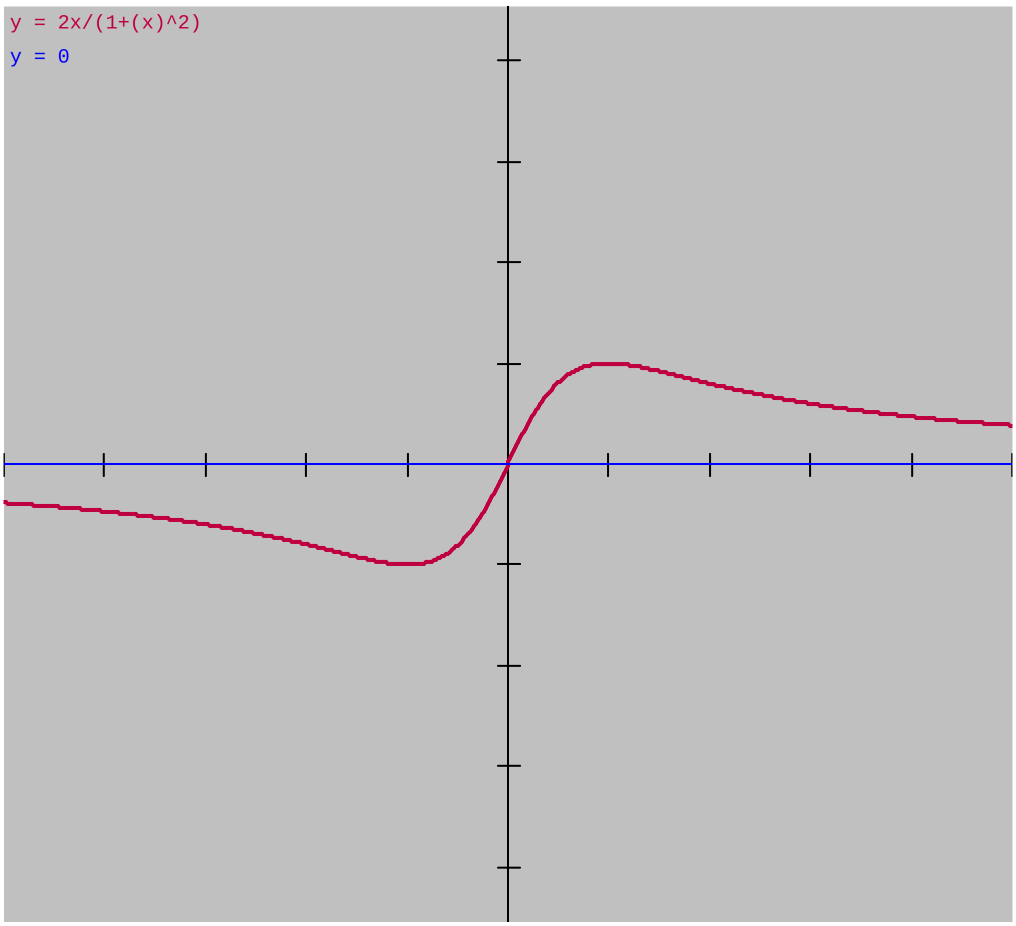
194. Resolver la integral:

$$\int_2^3 \frac{2tdt}{1+t^2}.$$

Solución:

$$\int_2^3 \frac{2tdt}{1+t^2} = \ln\left(1+t^2\right)\Big|_2^3 = \ln\left(1+3^2\right) - \ln\left(1+2^2\right) = \ln 10 - \ln 5 = \ln(2)(5) - \ln 5$$

$$= \ln 2 + \ln 5 - \ln 5 = \ln 2.$$



195. Resolver la integral:

$$\int_0^2 \frac{x^3}{x+1}dx,\ \text{Solución, dividir :}$$

$$\begin{array}{r|l} x+1 & \begin{array}{l} \underline{x^2-x+1} \\ x^3 \ldots\ldots \\ \underline{-x^3-x^2} \\ \quad -x^2 \\ \quad \underline{x^2+x} \\ \qquad +x \\ \qquad \underline{-x-1} \\ \qquad\quad -1 \end{array} \end{array}$$

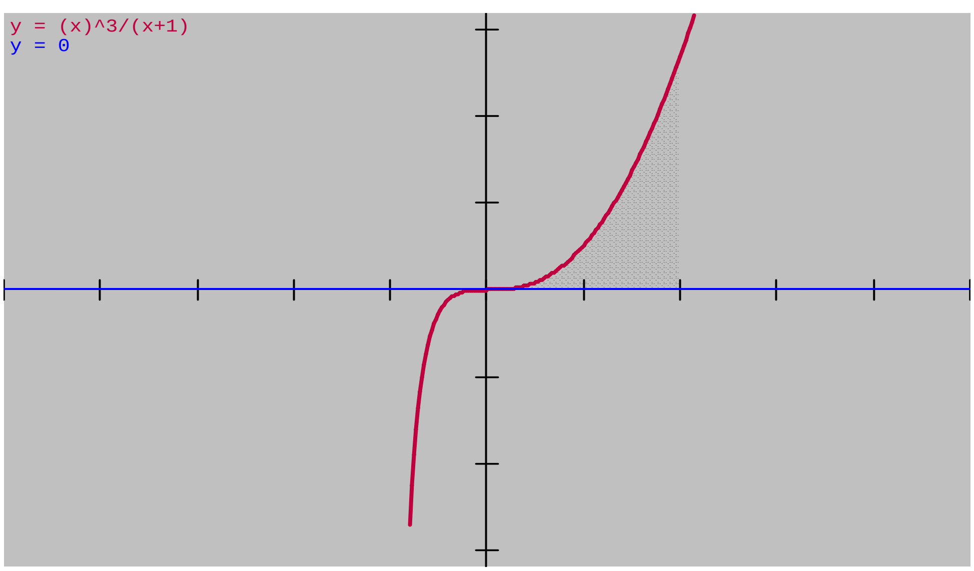
$$\therefore \frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \int \frac{x^3}{x+1}dx = \int\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int x^2dx - \int xdx + \int 1dx - \int \frac{1dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} + x - \ln(x+1) + c = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + c$$

$$\therefore \int_0^2 \frac{x^3}{x+1}dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)\right)\Bigg|_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2 - \ln(2+1)\right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 0 - \ln(0+1)\right]$$

$$= \frac{8}{3} - 2 + 2 - \ln 3 - \ln 1 = \frac{8}{3} - \ln 3.$$



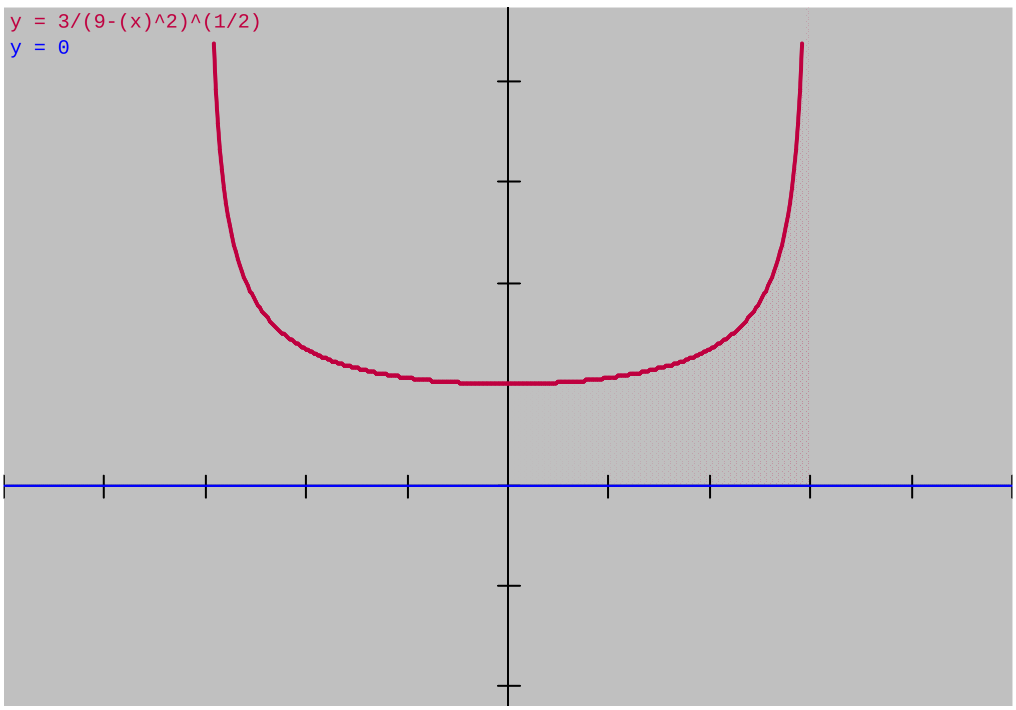
196. Calcular la integral:

$$\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Solución:

$$\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\arcsen\left(\frac{x}{r}\right)_0^r$$

$$= r\left(\arcsen\frac{r}{r} - \arcsen\frac{0}{r}\right) = r\left(\arcsen 1 - \arcsen 0\right) = r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi r}{2}.$$



## 197. Resolver la integral:

$$\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx,$$

Solución: desarrollar el binomio, luego integrar cada termino.

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right) = a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x.$$

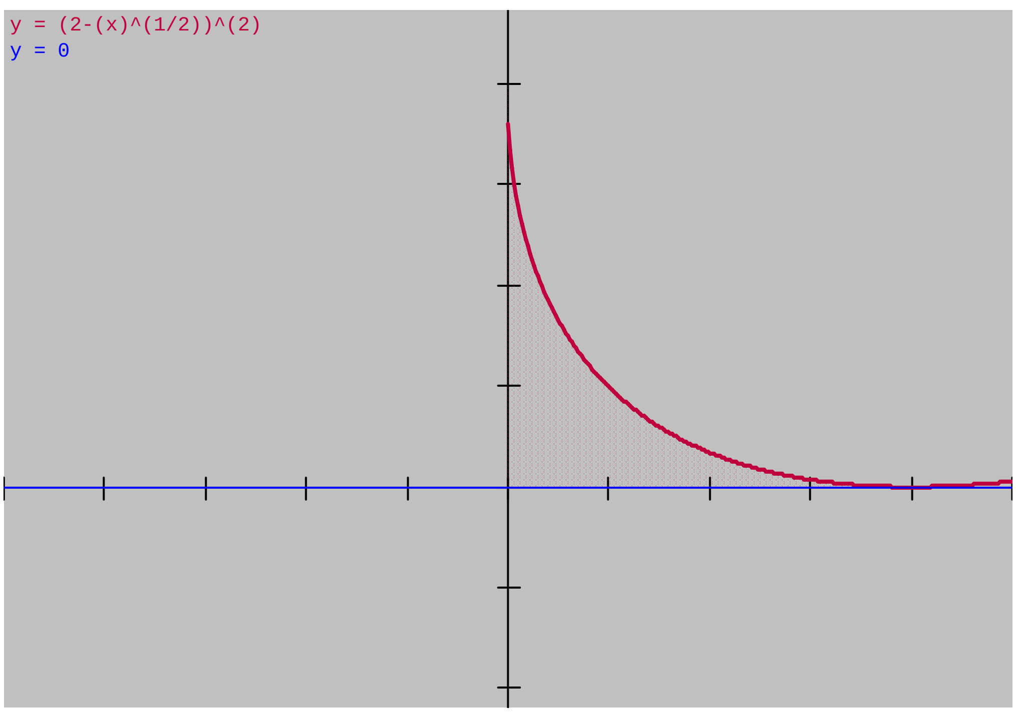
$$\therefore \int \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx = \int \left(a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x\right) dx = \int a dx - \int 2\sqrt{a}\sqrt{x} dx + \int x dx$$

$$= a\int dx - 2\sqrt{a}\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^1 dx = ax - 2\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = ax - 2\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= ax - \frac{4}{3}\sqrt{a}\sqrt{x}x + \frac{x^2}{2} + c = ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx = \left(ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = \left[aa - \frac{4a\sqrt{aa}}{3} + \frac{a^2}{2} - 0\right]$$

$$= a^2 - \frac{4a^2}{3} + \frac{a^2}{2} = a^2\left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{6}.$$



## 198. Resolver la integral:

$$\int_0^4 \frac{x^2}{x+1}dx.$$

Solución: dividir :

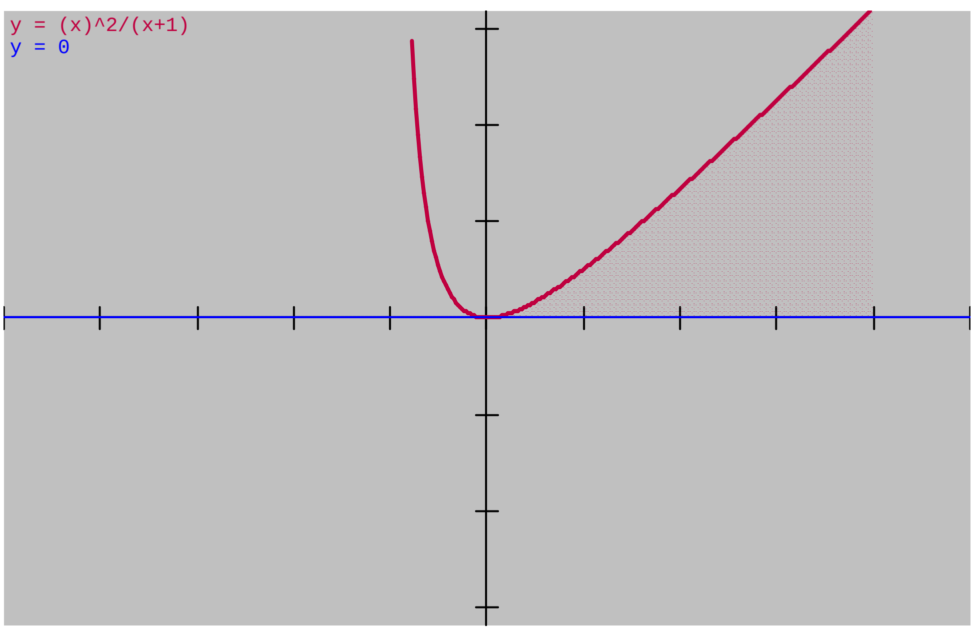
$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ x+1 & x^2 ....... \\ & \underline{-x^2-x} \\ & -x \\ & \underline{-x+1} \\ & +1 \end{array}$$

$$\therefore \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \int \frac{x^2}{x+1}dx = \int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \int xdx - \int dx + \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^{1+1}}{1+1} - x + \ln(x+1) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + c$$

$$\therefore \int_0^4 \frac{x^2}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^4 = \left[\frac{4^2}{2} - 4 + \ln(4+1)\right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 0 - \ln(0+1)\right]$$

$$= \frac{16}{2} - 4 + \ln 5 - \ln 1 = 4 + \ln 5 = 5.6094.$$



# 199. Longitud de arco:

Hallar la longitud de la curva

$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ entre $x = 0$ y $x = 1$

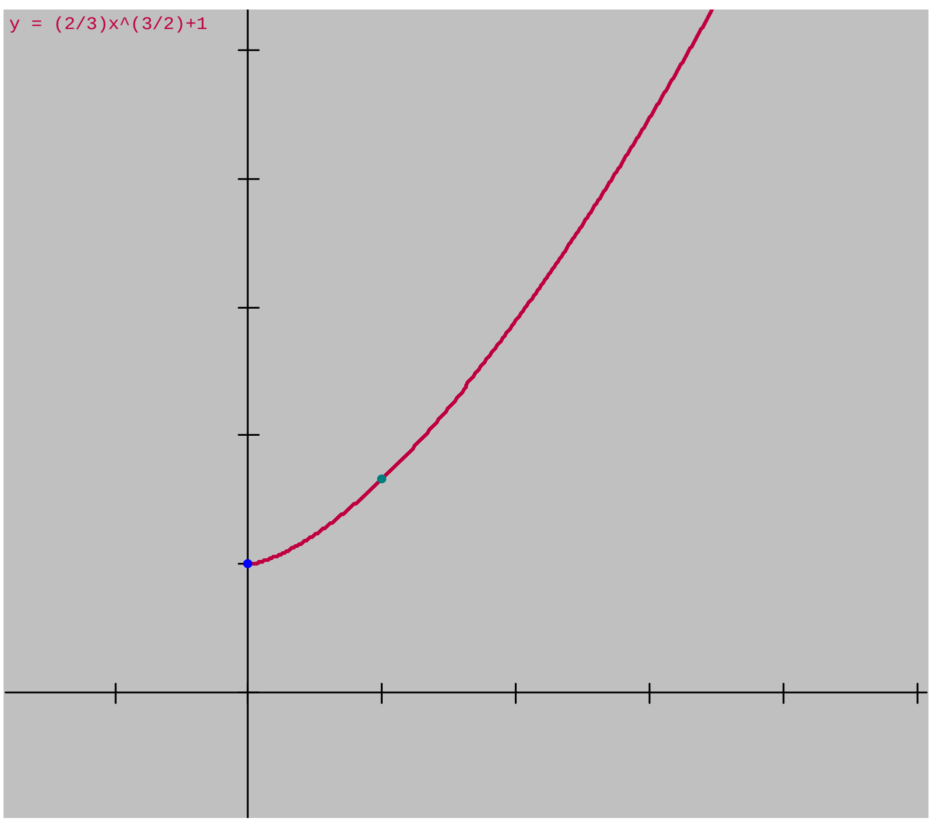
Solución :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$$

$$= \int_0^1 (1 + x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left.\frac{(1 + x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1}\right|_0^1 = \left.\frac{(1 + x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \left.\frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left\{(1 + 1)^{\frac{3}{2}} - (1 + 0)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{2}{3}\left\{2^{\frac{3}{2}} - 1\right\} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{8} - 1\right) \approx 1.219.$$



## 200. Hallar el área de la región limitada por:

$g(x) = 2 - x^2$ y la recta $f(x) = x$

Solución :

Deter minar los puntos de intersección de f y g:

$x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$

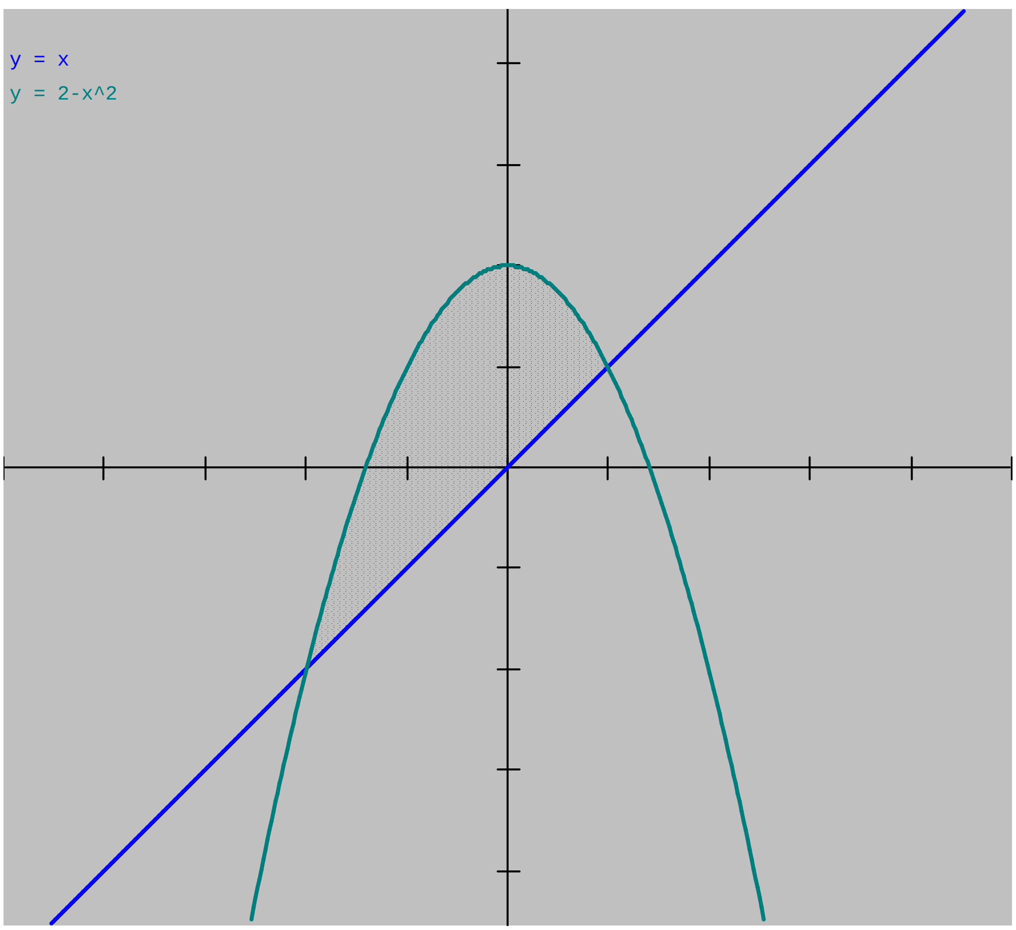
Las soluciones son $x = -2,\ x = 1$

Como se puede observar de la gráfica:

$f(x) \le g(x)$ sobre el intervalo $[-2,1]$

$$\therefore A = \int_{-2}^{1}\left[(2 - x^2) - (x)\right]dx = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)\,dx = \left\{2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right\}_{-2}^{1}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$



## 201. Hallar el volumen del sólido de revolución por método de los discos:

$y = \sqrt{x}$ , $y = 1$ y $x = 0$ alrededor del eje x.

Solución :

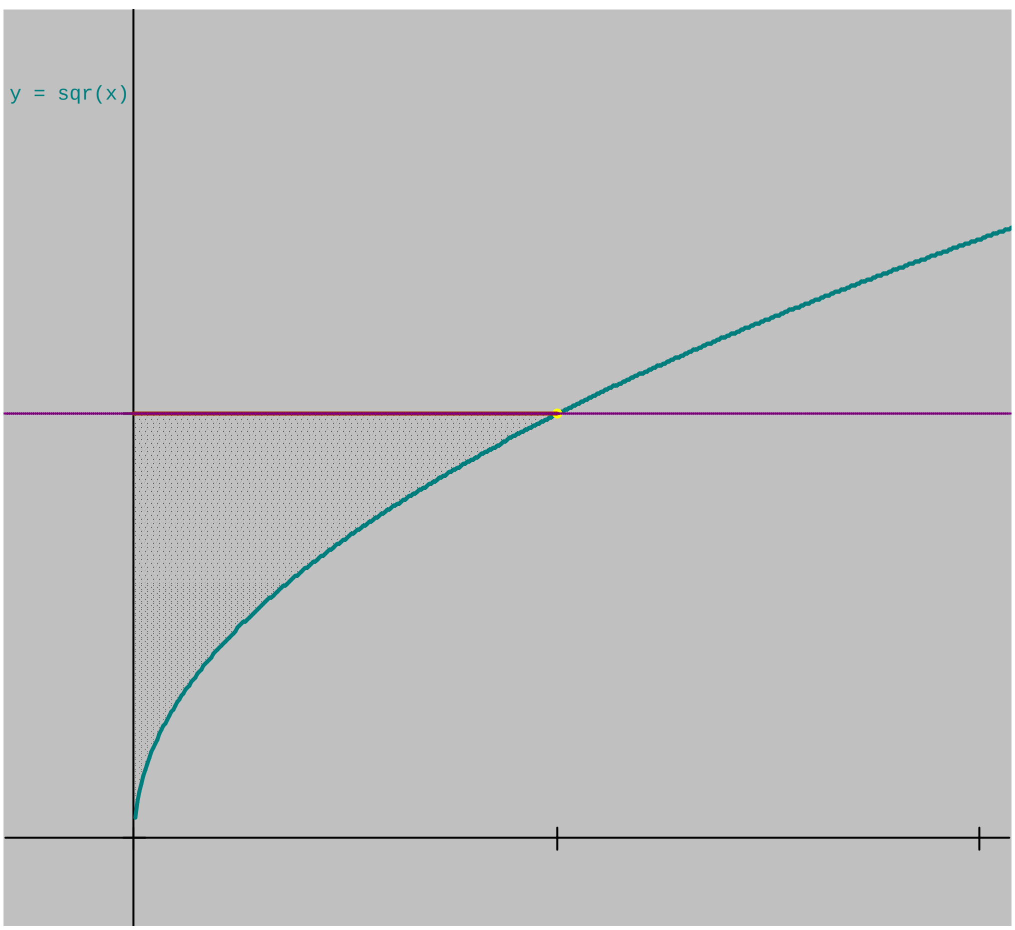
Para utilizar el método de los discos, debemos colocar nuestro rectángulo perpendicular al eje de giro.

El correspondiente disco representativo tiene anchura $\Delta x$, $r = \sqrt{x}$, $R = 1$ y por tanto su volumen es

$$\Delta V = \pi\left(R^2 - r^2\right)\Delta x = \pi\left(\left(1\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2\right)\Delta x = \pi\left(1 - x\right)\Delta x =$$

Ahora bien, ya que x varía entre 0 y 1, el volumen del sólido resulta ser

$$V = \pi\int_0^1 (1 - x)dx = \pi\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$



## 202. Hallar el centro de masas de la lámina de densidad uniforme $\rho$ y acotada por:

$y = 4 - x^2$ , y el eje x.

Solución :

Como el centro de masas tiene que estar en el eje de simetría, deducimos que $\overline{x} = 0$. Integrando para calcular la masa obtenemos

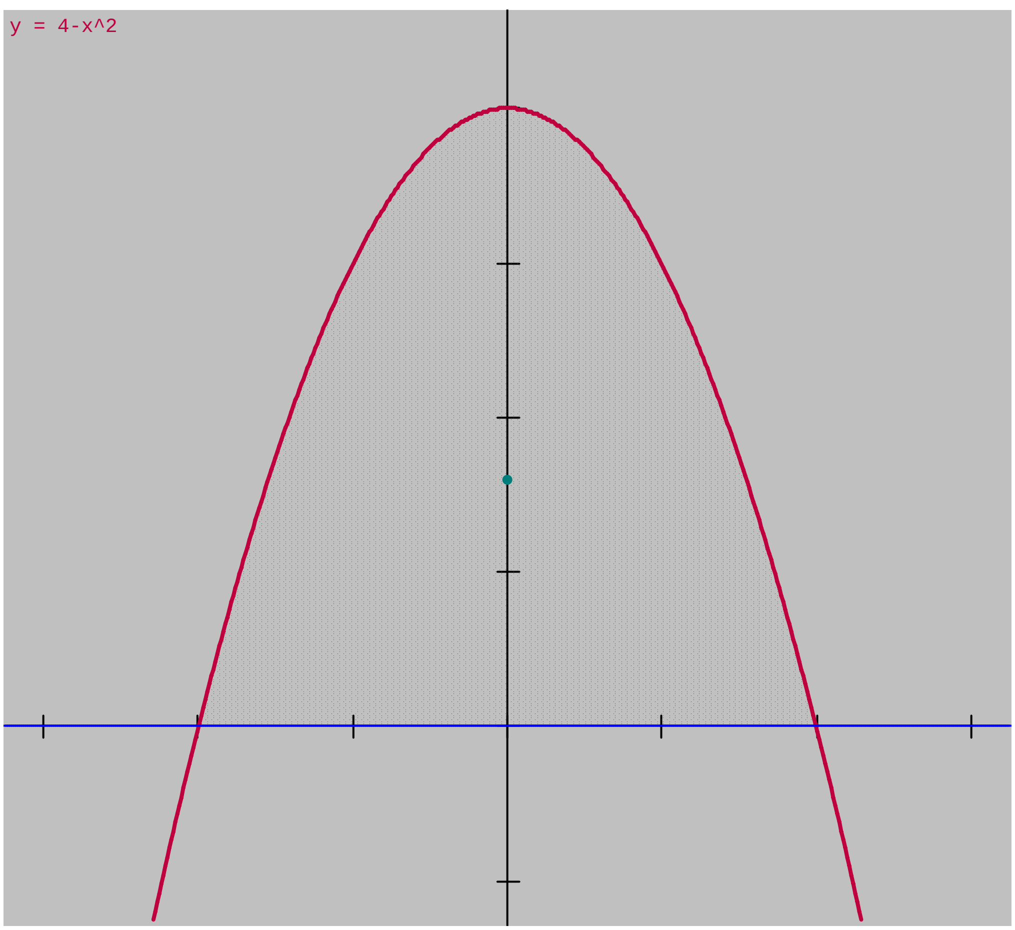
$$m = \rho\int_{-2}^{2} y\,dx = \rho\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \rho\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32\rho}{3}$$

El momento respecto al eje x es

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx = \frac{\rho}{2}\int_{-2}^{2}\left[\left(4 - x^2\right)^2 - (0)^2\right]dx = \frac{\rho}{2}\int_{-2}^{2}\left[16 - 8x^2 + x^4\right]dx$$

$$= \frac{\rho}{2}\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \frac{256\rho}{15},$$ finalmente :

$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{256\rho}{15}}{\frac{32\rho}{3}} = \frac{8}{5},$$ Luego el centro de masas está en $\left(0, \frac{8}{5}\right)$.



# Integración Por Partes

En los ejercicios del 203 al 205, integrar mediante la fórmula:

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

203. Resolver la integral:

$\int x\operatorname{sen}x dx.$

Solución :

$\int UdV = UV - \int VdU$

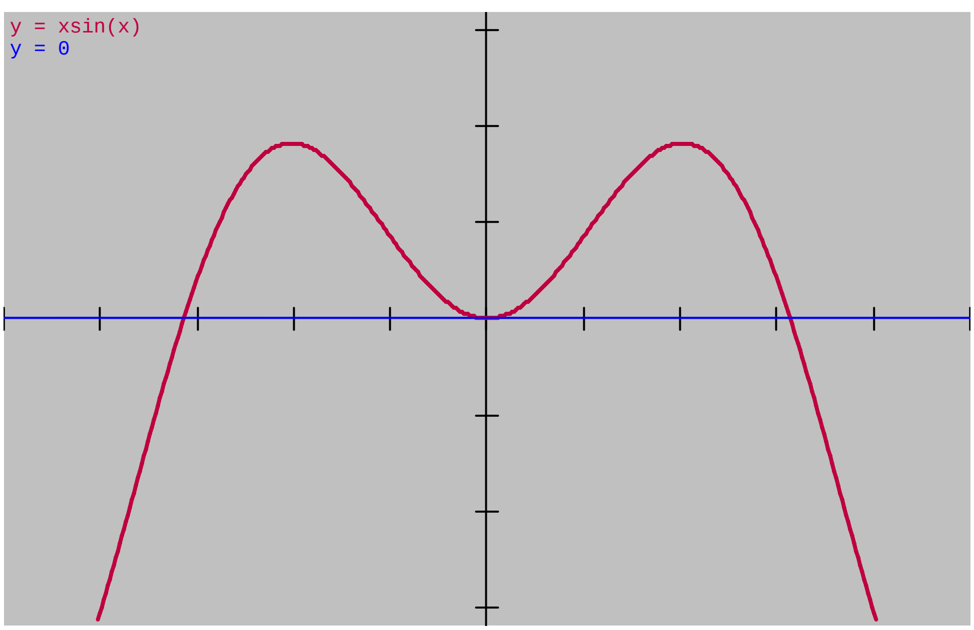
$\int x\operatorname{sen}x dx$

$U = x \qquad \Rightarrow dU = dx$

$dV = \operatorname{sen}x \qquad \Rightarrow V = \int \operatorname{sen}x dx = -\cos x$

$\therefore \int x\operatorname{sen}x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x\cos x + \int \cos x dx$

$= -x\cos x + \operatorname{sen}x + c = \operatorname{sen}x - x\cos x + c.$



## 204. Resolver la integral:

$\int \ln x dx.$

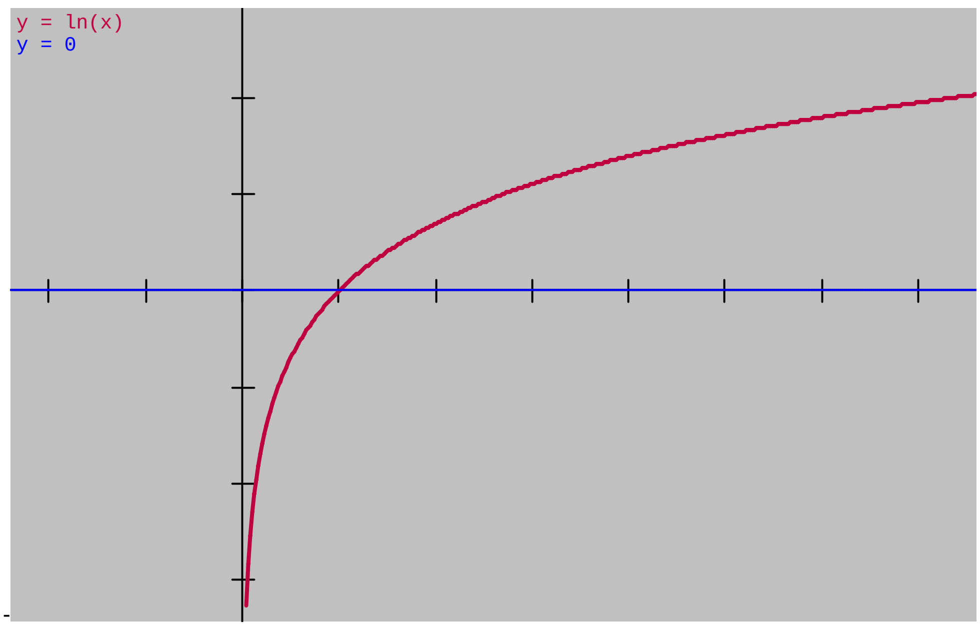
Solución :

$\int UdV = UV - \int VdU$

$U = \ln x \qquad \Rightarrow dU = d\ln x = \frac{1}{x}dx$

$dV = dx \qquad \Rightarrow V = \int dx = x$

$\int \ln x dx = \ln x(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$



## 205. Resolver la integral:

$\int x\cos nxdx$

Solución:

Aplicar la fórmula: $\int UdV \quad = UV - \int VdU,$

en este caso: $\int x\cos nxdx$

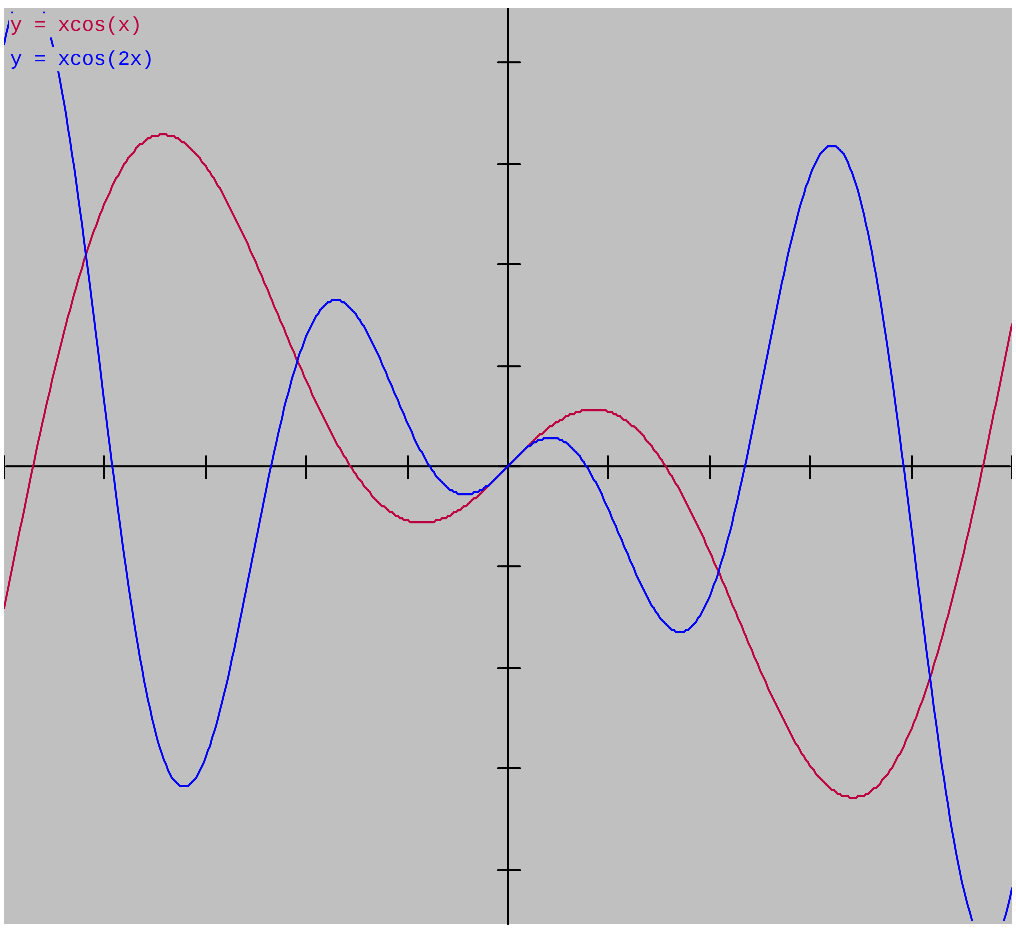
$\Rightarrow U = x;\;\; dV = \cos nxdx \;\; \Rightarrow dU = dx$

$dV = \cos nxdx \Rightarrow V = \int \cos nxdx = \frac{1}{n}\int \cos nx\left(ndx\right) = \frac{1}{n}\text{sen}nx$

$\therefore \int x\cos nxdx = x\left(\frac{1}{n}\text{sen}nx\right) - \int \frac{1}{n}\text{sen}nxdx = \frac{x\text{sen}nx}{n} - \frac{1}{n}\int \text{sen}nxdx$

$= \frac{x\text{sen}nx}{n} - \frac{1}{n}\int \text{sen}nxdx == \frac{x\text{sen}nx}{n} - \frac{1}{nn}\int \text{sen}nx * ndx =$

$= \frac{x\text{sen}nx}{n} - \frac{1}{n^2}\left(-\cos nx\right) + c = \frac{x\text{sen}nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + c = \frac{\cos xnx}{n^2} + \frac{x\text{sen}nx}{n} + c.$



# Conclusiones

En general este trabajo se llevó a cabo de forma satisfactoria, cumpliendo las metas establecidas al inicio. El objetivo general planteado se alcanzó plenamente, esto es:

“Diseñar un manual de ejercicios resueltos elementales de Cálculo. Que sirva de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las materias Matemáticas I y Matemáticas II, en el Instituto Tecnológico de Tuxtepec, Oaxaca”

Se completó este manual con 205 ejercicios elementales de Cálculo. En cada ejercicio resuelto de este manual se pueden apreciar desarrollos detallados, propiciando el estudio y aprendizaje de alumnos con limitados conocimientos en álgebra elemental, poca experiencia en este tipo de ejercicios y por tanto en dificultades académicas en el ITT.

Este manual electrónico es empleado para mostrar el panorama completo del curso, formularios y las habilidades requeridas, así como los ejemplos de fórmulas elementales. Los estudiantes del área de ingeniería del ITT, han consultado las soluciones ya desarrolladas y retroalimentan su propio avance en la preparación de sus exámenes de Matemáticas.

Considero que este manual tiene algunas ventajas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo, tales como:

1. Permite mostrar diversidad de ejercicios resueltos en pocos minutos, cuando anotarlos de manera tradicional en el pizarrón exigiría más tiempo.

2. Los alumnos con muy poca experiencia matemática, encuentran conveniente el uso de este manual, en el que pueden trabajar de forma autodidacta.

3. Los estudiantes pueden visualizar, en cualquier momento los ejercicios resueltos elementales de Cálculo, en formato electrónico vía Internet.

4. Los ejercicios resueltos elementales en formato electrónico, facilitan el aprendizaje autodidacta de usuarios de nivel bachillerato, alentando su ingreso al área de ingeniería del ITT.

5. Los profesores de Matemáticas I y II, pueden disponer de este manual en la biblioteca o en el sitio Web del ITT.

# BIBLIOGRAFÍA

[1] Cálculo Diferencial e Integral. William Anthony Granville

[2] Cálculo, Schaum, Frank Ayres, Jr, Elliott Mendelson Mc Graw Hill

[3] Cálculo superior teoria y 925 problemas resueltos, Murray r. Spiegel

[4] Cálculo-EC7-7ed. Louis Leithold, Oxford University Press.

[5] Libro de texto del colegio de bachilleres del estado de Oaxaca (Matemáticas IV), Tapia Navarro Juan Carlos.

[6] Algunos elementos para el aprendizaje significativo en la asignatura de cálculo con un enfoque constructivista.
Tesis: Diana Castillo del Rosario. Víctor Rivera Mancera. Director de Tesis: Emigdio Salazar Cordero. Mayo 2004.

[7] Víctor M. Pérez-Abreu C, Lista de algunas recomendaciones para estudiantes de los primeros años de la carrera de Matemáticas. CIMAT.

[8] Cálculo y Geometría Analítica, Larson-Hostetler-Edwards, Vol1, Mc Graw Hill.

[9] Calculus, Goldstein-Lay-Schneider, Prentice Hall

[10] Algebra 1, Stanley A. Smith, Randall I. Charles, John A. Dossey, Marvin L. Bittinger.