INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

APLICACIÓN DE MÉTODOS MATEMÁTICOS: DETERMINACIÓN DE STOCK ÓPTIMO DE EQUIPOS.

TESIS:

Que para obtener el título de

Licenciatura en Física y Matemáticas.

Presenta:

ERENDIRA HERNÁNDEZ LEMUS

Asesora:

MA. DEL CARMEN CASAS IÑIGUEZ

México D. F., Octubre 2009

AGRADECIMIENTOS:

A mi hija
por la paciencia y la comprensión que me brinda,

A mi esposo
por el amor con el que me apoya,

A mi Padre
por la sabiduría que me enseña a diario,

A mi Madre
por que me cuida desde niña,

A mi hermano
por que lo quiero,

A Toda mi Familia
por que sin sus bendiciones y su apoyo hubiera estado sola,

A mis Amigas y Amigos
por que compartimos risas, lágrimas y vida,

A mis Profesores
por todo el conocimiento que me han trasmitido,

A Dios y a mis ángeles
porque sin ellos hubiera perdido la fé.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Figura 1

¿Cuántas veces nos hemos preguntado cómo y dónde aplicar los conocimientos matemáticos, adquiridos durante nuestra licenciatura?

Esta tesis dará unos ejemplos de aplicación de los métodos matemáticos, en particular, métodos de investigación de operaciones y probabilísticos, necesarios para proveer a una empresa del equipo suficiente para que, en caso de alguna avería, se pueda reemplazar con la cantidad óptima de equipos. Más concretamente, imaginemos que trabajar en una empresa aérea en la sección de mantenimiento de los aviones y tener que calcular cada cuando se cambiará alguna pieza o alguna refacción O bien, ¿cuántos equipos disponibles en almacén (stock) se deben tener para cubrir la demanda de reparaciones con un mínimo de inversión?

Lo que enseguida se presenta son fragmentos de un problema al que se enfrenta un jefe de mantenimiento en una compañía aérea:

"Anexo listado de todos los alternadores (anexo- tabla 1) que tenemos en existencia. La mayoría de ellos trabajando en los aviones, otros en stock listos para ser utilizados, otros en almacén en mal estado "descompuestos" y listos para ser enviados a reparación y finalmente los que están en el extranjero en proceso de reparación. El valor de compra de cada uno de los alternadores es de 43,000 USD aproximadamente (figura 2). .
El tiempo entre reparaciones programadas de los alternadores es de 4000 horas de vuelo (es decir que solo los puedo tener volando 4000 horas y después se mandan a un servicio de mantenimiento general, para que regresen y trabajen otras 4000 horas y así sucesivamente); y cada avión vuela en promedio 250 horas cada mes y lleva dos alternadores.

A partir de estos datos es posible calcular el promedio mensual de los alternadores que en teoría son enviados a reparar mensualmente. El tiempo de retorno de cada reparación es de 3 semanas.

El costo estándar de las reparaciones es de 3000 USD.

¿Cuántos debo tener en stock, considerando el tiempo de retorno de reparación?

¿Cuál sería la fórmula para calcular el stock mínimo, con los datos que estoy proporcionando?"[9]

Figura 2. Fotografía de un alternador para avión.

Luego entonces, debemos realizar un análisis que combine herramientas de métodos de investigación, probabilísticos y estadísticos (inferencial) para resolver nuestro problema, pero cuidando que sea un análisis que genere datos óptimos con un margen de error pequeño. Además, debe ser práctico y lo más realista posible.

Para la resolución de este problema, es necesario aplicar modelos de inventario, pues dada la situación uno solo, no es suficiente para resolverlo. La primera parte de nuestro problema consiste en, con los datos dados, determinar un tiempo aproximado de avería en tiempo de vuelo de los alternadores y calcular una desviación estándar y una tasa de avería y consumo, con métodos de mantenimiento y reemplazo de equipos. La segunda parte consistirá en aplicar varios métodos de inventario para calcular el stock mínimo.

Consideremos además que comúnmente utilizamos métodos de inventario en una empresa que produce cierta mercancía y debe cubrir una demanda. Esta tesis toma el modelo de inventario para predecir cuanto debemos de tener en refacciones mínimas. Y los métodos de reemplazo de equipo los usan para reemplazar al momento de avería por equipos nuevos; también veremos que tenemos la situación donde los equipos averiados se reemplazan por equipos no nuevos que ya se han reparado.

En el capítulo I daremos las condiciones iníciales de nuestro problema y los cálculos necesarios para calcular probabilidades de avería, tasa de avería; probabilidad de consumo (demanda) y aprovisionamiento; además mencionaremos que sucede cuando nuestra función de supervivencia se ajuste a una función exponencial.

En el capítulo II podremos utilizar la teoría de investigación de operaciones para modelar el stock mínimo, utilizando las tasas arriba calculadas, primero con modelos deterministas y después con modelos probabilísticos. Los determinísticos son aquellos en los que se conoce la tasa de consumo y ésta permanece constante, esto es, se utiliza la misma función de densidad de probabilidad para representar la demanda en todos los periodos sobre los cuales se hace el estudio. Los probabilísticos consideran que la función de densidad de probabilidad de demanda se mantiene sin cambio con el tiempo; la demanda en cualquier periodo se supone igual al promedio de las demandas conocidas para todos los periodos en consideración y el resultado de esta simplificación da como resultado una tasa constante por unidad de tiempo. Todo esto servirá para determinar el stock mínimo.

En el capítulo III, con la teoría desarrollada y moldeada a nuestro problema de inventario, sacaremos cálculos para determinar cuál de nuestros modelos es mejor arrojando resultados óptimos y reales. Utilizaremos la ayuda de la tecnología, para realizar operaciones sencillas y recursivas, generando las tablas que se encuentran en el anexo.

En conclusión, el objetivo de la tesis es dar la matemática necesaria para determinar el inventario óptimo con datos experimentales; con lo cual, no sólo el problema del jefe de mantenimiento queda resulto, sino que además tiene alternativas, por ejemplo de cuando debe considerar cambiar algún alternador por otro nuevo para evitar problemas más serios que incluyen pérdidas de vidas.

CAPÍTULO I

1. DESGASTE ALEATORIO-CURVA DE SUPERVIVENCIA

Llamemos n(t), al número de equipos supervivientes en el tiempo t con n(0)=m. Determine la unidad del tiempo, regístrese las averías ocurridas en cada periodo de tiempo. Cree una tabla (tabla 1) y una gráfica, que representa el comportamiento de las averías.

$$v(t)=n(t)/n(0) \quad \text{donde } 0\leq v(t)\leq 1 \qquad (1.1)$$

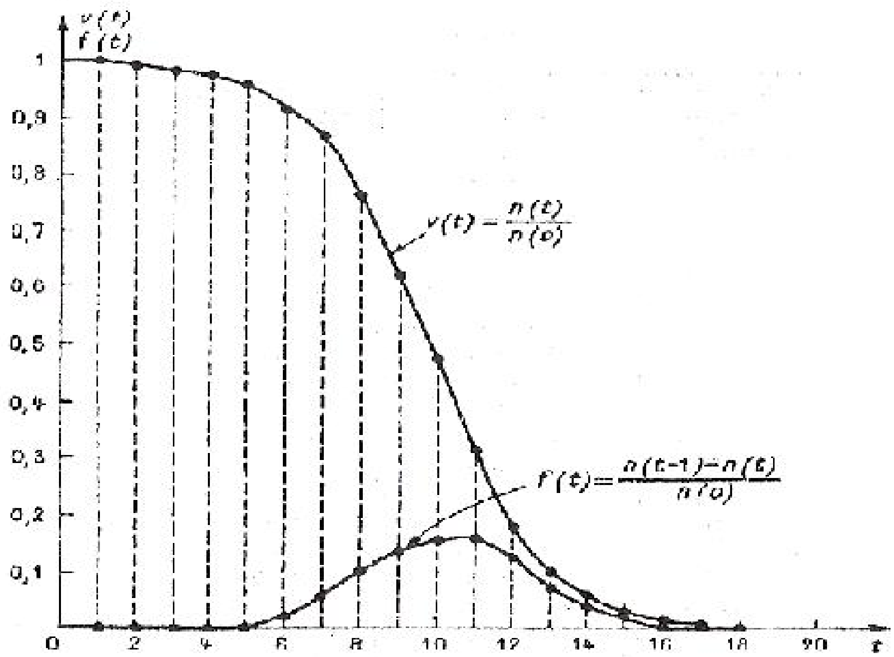


Figura 1

Esta curva (figura 1) dará, en cada instante, la relación entre el número de equipos supervivientes y el número de objetos que habían sido puestos inicialmente en servicio.

Vamos a suponer que los m equipos constituyen un material perfectamente homogéneo de punto de vista de probabilidad. Por lo que podemos admitir sin pérdida de generalidad que la probabilidad de supervivencia de cada equipo después de la edad t, es:

$$Pr(T\geq t)= v(t)=n(t)/n(0) \qquad (1.2)$$

Llamaremos función de supervivencia de un equipo, a la función v(t) tal como (1.2), evaluada a partir de una población o de una muestra que se considera representa correctamente la población total. Notemos que la función puede ser continua (monótona decreciente).

Tiempo transcurrido		**Supervivientes**	**Mortalidad**	**Función de supervivencia**	**Distribución de probabilidad**
T	**Horas de vuelo**	**n(t)**	**n(t-1)-n(t)**	**v(t)=n(t)/n(0)**	**f(t)=(n(t-1)-n(t))/n(0)**
0	0	28		1	
1	2000-3999	27	1	0.964285714	0.035714286
2	4000-5999	27	0	0.964285714	0
3	6000-7999	27	0	0.964285714	0
4	8000-9999	27	0	0.964285714	0
5	10000-11999	27	0	0.964285714	0
6	12000-13999	26	1	0.928571429	0.035714286
7	14000-15999	26	0	0.928571429	0

Tabla 1.

La variable aleatoria continua T representa el tiempo transcurrido desde la puesta en servicio hasta la aparición de la avería, y tendrá la probabilidad contraria

$$\Pr(T<t)= j(t)=1-v(t) \qquad (1.3)$$

en donde j(t) es la función de repartición de la variable aleatoria T, que representa la duración de funcionamiento o duración de vida del equipo.

La densidad de probabilidad de la variable aleatoria T será i(t):

$$\Pr(t-1\leq T<t) = i(t)\, dt \qquad (1.4)$$

Entre las tres funciones v(t), j(t), e i(t), existen las relaciones:

$$i(u)du = j(t) = 1 - v(t) \qquad (1.5)$$

O bien:

$$i(t) = \frac{d}{dt}j(t) = -\frac{d}{dt}\, v(t) \qquad (1.6)$$

La distribución de probabilidad que corresponde a (1.3), la probabilidad de que un equipo deje de funcionar en un intervalo comprendido entre t-1 y t, será:

$$P_t=\Pr[(t-1)\leq T<t]=\frac{(\quad)\quad(\;)}{(\;)} \qquad (1.7)$$

La curva f(t) que pasa por los puntos $\frac{(\quad)\quad(\,)}{(\,)}$ ha sido representada en la figura 1.

PROBABILIDAD DE AVERÍA

Se le llama probabilidad de avería, a la probabilidad condicional de que un equipo que haya alcanzado el tiempo t-1 sin descompostura, tenga una avería en el intervalo de t-1 a t. Sea $p_c(t)$, esta probabilidad condicional; se puede calcular entonces

$$p_t(t)= Pr(t-1 \leq T<t)=Pr(T \geq t-1)p_c(t) \qquad (1.8.)$$

La probabilidad *a priori* de una avería en el intervalo t-1 a t es igual a la probabilidad de que no haya ninguna avería de cero a t-1 multiplicada por la probabilidad condicional de una descompostura en un intervalo t-1 a t.

$$p_c(t)=\frac{(\qquad)}{(\quad)} \qquad (1.9)$$

pero:

$$Pr(t-1 \leq T<t)=\frac{(\quad)\ (\,)}{(\,)} \qquad (1.10)$$

y

$$Pr(T \geq t-1)=\frac{(\quad)}{(\,)} \qquad (1.11)$$

por lo tanto:

$$p_c(t)=\frac{(\quad)\ (\,)}{(\quad)}=1-\frac{(\,)}{(\quad)} \qquad (1.12)$$

En otras palabras por la ecuación 1. 6, se tiene $Pr(t-1 \leq T<t)=i(t)dt=- v'(t)dt$

Por la ecuación 1.2, sea

$$\lambda(t)dt=p_c(t)=\frac{'(\,)}{(\,)} \qquad (1.13)$$

0 bien

$$\lambda(t)=-\frac{v'(t)}{v(t)}$$

La probabilidad de avería es una magnitud característica muy importante, ya que da una medida del riesgo que se toma al mantener en servicio un equipo que ha llegado a un tiempo t de funcionamiento.

La función $\lambda(t)$ puede ser constantemente, creciente o poseer uno o varios máximos.

Terminología

Llamaremos edad de un equipo, al intervalo de tiempo transcurrido entre su puesta en servicio y el instante t considerado. Hay que notar que el tiempo y edad puede ser reemplazados en algunos problemas por horas de funcionamiento, por kilómetros, por acciones, etc.

Límite de funcionamiento

Se decide frecuentemente, que los equipos en servicio sean retirados o sustituidos automáticamente al expirar un tiempo θ llamado limite de funcionamiento o edad de retiro. La curva de supervivencia presenta entonces, en el tiempo, una discontinuidad, que se aprecia en la figura 2.

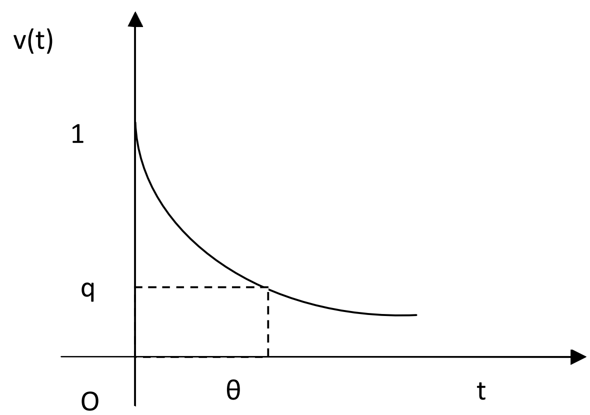


Figura 2

DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE LA EDAD MEDIA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE APARICIÓN DE LA AVERÍA

Sea T la variable aleatoria que corresponde a la edad de aparición de la avería; la probabilidad de una avería en el intervalo t-1 a t, será entonces, según (1.7):

$$P_t=Pr[(t-1)\leq T<t]=\frac{(\quad)\quad(\,)}{(\,)} \qquad (1.14)$$

La edad media de aparición de la avería será el valor medio de la variable aleatoria T:

$$\tilde{t} = \quad tp \qquad (1.15)$$

Para calcular la variancia de la variable T, se utilizará la fórmula

$$\sigma \;=\; \quad (t-\tilde{t})\;\; p \qquad (1.16)$$

$$= \quad t\;\; p \quad -(\tilde{t})$$

De ahí la desviación estándar:

$$\sigma \;=\; \overline{\sigma} \qquad (1.17)$$

En el caso en que se introduzca un límite de funcionamiento la tabla se construirá hasta el tiempo de retiro de los equipos y los tiempos restantes se eliminaran. Es muy claro que $\tilde{t}$ y que σ_T disminuyen cuando se disminuye la edad de retiro.

PROBABILIDAD DE CONSUMO

Supongamos que un equipo nuevo forma parte de un conjunto, y que sea reemplazado cuando se produzca una descompostura, o se ha alcanzado el límite de funcionamiento. Propongámonos encontrar cuál es la probabilidad $p_m(t)$, de que haya habido m reemplazamientos del equipo inicial, por equipos nuevos en el intervalo 0 a t. Llamaremos consumo al número de equipos reemplazados en este intervalo de tiempo.

La probabilidad $p_o(t)$ de un consumo nulo, es decir ningún reemplazo, es v(t):

$$p\ \ (t) = v(t) = \frac{n(t)}{n(0)} \qquad (1.18)$$

Recordemos que v(t) representa la probabilidad de una duración de vida superior o igual a t, es decir, la probabilidad de que el primer equipo instalado haya funcionado sin avería durante un tiempo t.

Para calcular $p_1(t)$, escribiremos que hay una y solo una descompostura (o reemplazo al límite de funcionamiento) en el intervalo de 0 a t; es decir, reemplazo en un instante u comprendido entre 0 y t; después, ninguna avería entre el tiempo u y t. Luego, la probabilidad de que haya una avería entre las edades u-1 y u, es f(u), o bien:

$$f(u) = \frac{n(u-1) - n(u)}{n(0)} \qquad (1.19)$$

Por otra parte, la probabilidad de que el equipo de reemplazo instalado en el tiempo u funcione sin descompostura entre u y t, es v(t-u). La probabilidad de que uno y otro tengan lugar, es igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos (Teorema de las probabilidades compuestas):

$$v(t-u)f(u) = \frac{n(t-u)}{n(0)} \frac{n(u-1) - n(u)}{n(o)} \qquad (1.20)$$

Ahora bien, consideremos todas las posibilidades de avería del primer equipo instalado en los diversos tiempos u comprendidos en el intervalo (0,t), por lo tanto se debe hacer la suma de las probabilidades correspondientes (Teorema de las probabilidades totales):

$$p\ \ (t) = \qquad v(t-u)f(u) \qquad (1.21)$$

en donde

$$v(t-u) = \frac{n(t-u)}{n(0)} \qquad (1.22)$$

$$f(u) = \frac{n(u-1) - n(u)}{n(0)} \qquad (1.23)$$

En forma más general, existe una relación que da $p_m(t)$en función de $p_{m-1}(t)$. Para que haya un consumo de m equipos en (0,t), es necesario y suficiente que haya un reemplazo, en un instante u cualquiera entre cero y t, y después, entre u y t, se hayan consumido (m-1) equipos. Así

$$\mathrm{p}\quad(\mathrm{t}) = \sum \quad \mathrm{p} \qquad (\mathrm{t}-\mathrm{u})\mathrm{f}(\mathrm{u}) \qquad (1.24)$$

$$\mathrm{con}\ \mathrm{p}\quad(0) = 0$$

Una información muy interesante, es el valor medio de los consumos en el tiempo t, o consumo medio. Esto es:

$$\mathrm{m}(\mathrm{t}) = \qquad \mathrm{mp}\quad(\mathrm{t}) \qquad (1.25)$$

Y la varianza de los consumos será por lo tanto

$$\sigma \quad = \qquad \mathrm{m}-\mathrm{m}(\mathrm{t}) \quad \mathrm{p}\quad(\mathrm{t})$$

$$=$$

$$(\mathrm{m})\ \ \mathrm{p}\quad(\mathrm{t}) - \mathrm{m}(\mathrm{t}) \qquad (1.26)$$

Son importantes otras probabilidades como la del consumo inferior o igual a m y la probabilidad de consumo superior a m, en un tiempo t:

$$\Pr(\mathrm{M} \le \mathrm{m}) = \qquad \mathrm{p}\ \ (\mathrm{t}) \qquad (1.27)$$

$$\Pr(\mathrm{M} > \quad) \qquad (1.28)$$

$$= \qquad \mathrm{p}\ \ (\mathrm{t})$$

En seguida se hará un estudio analítico. Veremos que en el caso de que la función v(t) se ajuste a una exponencial:

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{e} \qquad (1.29)$$

Además la función de distribución de la variable aleatoria T será por 1.3 una función de distribución exponencial $f(t)= 1-e^{-\lambda t}$ (1.5)

Y su función de densidad será entonces $i(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ (1.6)

La distribución de probabilidad p_m (t) es entonces, una distribución de Poisson:

$$p \quad (t) = \frac{(\lambda t) \quad e}{m!} \qquad (1.30)$$

Así en el caso de la ley de Poisson (1.30):

$$m(t) = \lambda t \qquad (1.31)$$

la tasa de consumo es constante e igual a λ.

$$\sigma \quad = \lambda t \qquad (1.32)^7$$

Consideraciones importantes:

Bien sabemos que la distribución exponencial es un caso particular de los modelos de Weibull y Gama, por lo tanto la variable aleatoria exponencial es el tiempo que transcurre hasta que se da el primer evento de Poisson. Es decir la distribución exponencial puede modelar el lapso entre dos eventos consecutivos de Poisson que ocurren de manera independiente y a una frecuencia constante. Y se empleo en problemas del tipo tiempo- falla.

Recordémonos también que la distribución exponencial no tiene memoria, es decir que la probabilidad de ocurrencia de eventos presentes o futuros no depende de los que hayan ocurrido en el pasado. De este modo, la probabilidad de que una unidad falle en un intervalo depende nada más de la duración de éste, no del tiempo en que la unidad ha estado en operación.[2]

Si el tiempo de vida medio se encuentra distribuido de manera exponencial, la frecuencia de avería es constante. Dado que la función de densidad a tiempo t para un tiempo de vida medio distribuido exponencialmente es:

$$i(t)=\lambda e^{-\lambda t},\ t>0 \qquad (1.29)$$

y por lo tanto la frecuencia de avería, es la proporción de unidades que descompuestas en el intervalo (t, t+Δt)con respecto a las que siguen funcionando a tiempo t f(t)/r(t), donde r(t) es la probabilidad de que el lapso de duración del sistema sea mayor que un tiempo dado t, y está dada por:

$$r(t)= \frac{- \quad -}{-} = -, t > 0$$

Luego pues, la frecuencia de avería constante implica que la probabilidad de avería en un tiempo determinado, depende de la duración de éste y no del tiempo que el sistema ha estado operando. Además la distribución exponencial tiene su moda en el origen.

La distribución de Poisson la introdujo el matemático y físico francés Simón- Denis Poisson en 1837. Describe la probabilidad de que un número de eventos ocurra dentro de un periodo fijo de tiempo si se sabe que estos eventos ocurren con una tasa media conocida e independiente del tiempo transcurrido desde el último evento.

La distribución de Poisson es usada para modelar la demanda debido que es simple y está extensamente tabulada; además están la distribución geométrica y binomial negativa.

La cola de la distribución de Poisson es generalmente más corta que la de la binomial negativa, esto significa que las demandas ocurren mas raramente que si se usa la binomial negativa, con la misma media como parámetro de éstas.

La carencia de memoria en la distribución exponencial está relacionada a la propiedad de incrementos independientes y estacionarios de un Proceso de Poisson.

¿Cuál es la diferencia entre la distribución de Poisson y la distribución exponencial?

La distribución de Poisson relaciona probabilidades con números de acontecimientos de algún evento, dentro de intervalos específicos de tiempo o espacio. La distribución exponencial relaciona probabilidades con los diversos espacios entre los eventos de Poisson.

¿Cómo identificamos que se debe utilizar la distribución de probabilidad exponencial a partir de un Proceso de Poisson?

Siempre que el número de acontecimientos(averías) de un evento se determine por un proceso de Poisson y las probabilidades asociadas, se describan con la función de Poisson, la probabilidad de encontrar intervalos especificados de tiempo o espacios entre acontecimientos consecutivos se puede describir por la distribución exponencial.[1]

Entonces consideremos un conjunto de equipos en funcionamiento, sea M_t el número de averías durante un periodo de tiempo específico (0,t). Vamos suponer unas hipótesis acerca de la variable aleatoria (discreta) M_t que nos permitirán determinar la distribución de probabilidades de M_t.

La variable M_t puede tomar los valores 0,1,2… sea $p_n(t)= P[M_t=n]$, n=0,1,2,… y enunciemos cinco hipótesis:

1.- El número de averías durante intervalos de tiempo no sobrepuestos son variables aleatorias independientes.

2.- Si M_t se define como antes y si Y es igual al número de averías durante $[t_1,t_1+t]$ para cualquier $t_1>0$, las variables aleatorias M y Y tienen la misma distribución de probabilidades. (Es decir, la distribución del número de averías en cualquier intervalo depende solo de la longitud del intervalo y no de sus puntos extremos).

3.- $p_1(\Delta t)$ es igual aproximadamente $\lambda\Delta t$, si Δt es suficientemente pequeña, donde λ es una constante positiva. Esto lo escribiremos como $p_1(\Delta t)\sim\lambda\Delta t$.

4.-$\Sigma p_k(\Delta t)$~0 (esto implica que $p_k(\Delta t) \rightarrow 0, k \geq 2$). Esto significa que la probabilidad de tener dos averías o más en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.

5.-$M_0=0$, o de manera equivalente $p_0(0)=1$. Esto equivale a una condición inicial para el modelo que estamos describiendo.

Como lo demostraremos, las cinco hipótesis anteriores harán posible que deduzcamos una expresión para $p_n(t)=P[M_t=n]$. Saquemos unas conclusiones de estas hipótesis:

a) Las hipótesis 1 y 2 implican que las variables aleatorias M_t y $[M_{t+\Delta t}-M_t]$ son variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidades.

b) De las hipótesis 3 y 4 podemos concluir que como el tiempo de equipos supervivientes es exponencial, y la frecuencia de supervivientes es λ averías por unidad de tiempo, entonces

Se define $p_0(t)$=Probabilidad de que no haya averías durante un espacio de tiempo t.

$$p_0(t)=P(\text{tiempo entre averías} \geq t) ==1-P(\text{tiempo entre averías} \leq t)=1-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}.$$

Para un intervalo suficientemente pequeño $\Delta t>0$,

$$p_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+(\lambda\Delta t)^2/2!+\ldots.=1-\lambda\Delta t+0(\Delta t)^2$$

La distribución exponencial se basa en la hipótesis que durante un tiempo suficientemente pequeño $\Delta t>0$, puede presentarse cuando mucho una avería. Así, cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

$$p\ (t) = 1 - p\ (\Delta t) \approx \lambda\Delta t$$

Este resultado indica que la probabilidad de una avería durante Δt es directamente proporcional a Δt, y que la frecuencia de avería es la constante λ es la constante de proporcionalidad.

c) Podemos escribir

$$p\ (t + \Delta t\Delta) \approx p\ (t)(1 - \lambda t), n = 0$$

d) Entonces tenemos

$$p'\ (t) = \lim_{\Delta\ \rightarrow} \frac{p\ (t + \Delta t) - p\ (t)}{\Delta t} = -\lambda p\ \ (t), n = 0$$

Haciendo $\Delta t \rightarrow 0$, y observando que el lado izquierdo representa al cociente de la diferencia de la función p_0 y por lo tanto, tiende a $p'_0(t)$(mas precisamente, a la derivada por la derecha, puesto que $\Delta t>0$), tenemos.

$\frac{'\ (\ )}{(\ )} = -\lambda$, integrando ambos miembros respecto a t, obtenemos $p\ (t) = -\lambda t + c$, donde c es una constante de integración. De la quinta hipótesis, encontramos, al hacer t=0, que c=0. Luego,

$p\ (t) = e\quad.$

Así nuestras hipótesis nos han conducido a una expresión para $P[M_t=0]$.

e) Considerando que para deducir la distribución de la cantidad de averías durante un periodo t, cuando el tiempo entre averías es exponencial con promedio 1/λ, se define a

$$p_n(t)=\text{probabilidad de n averías durante } t=P[M_{t+\Delta t}=n]$$

Para una Δt>0 suficientemente pequeña,

$$p\ \ (t+\Delta t) \approx p\ \ (t)(1-\lambda t) + p \qquad (t)\lambda\Delta t, n > 0$$

En la primera ecuación se realizan n averías durante t+ Δt, si hay n avería durante t y no hay averías durante Δt, o n-1 averías durante t una avería durante Δt. No se permite ninguna otra combinación porque, según la distribución exponencial, cuando mucho puede haber una avería durante un periodo Δt muy pequeño. La ley de producto de probabilidades se puede aplicar al lado derecho de la ecuación, porque las averías son independientes. Para la segunda ecuación, solo puede haber cero averías durante t+Δt si no hay averías durante t y durante Δt.

Al arreglar los términos y tender a los límites cuando Δt→0, se obtiene

$$p_{'}\ \ (t) = \lim_{\Delta \to} \frac{p\ \ (t+\Delta t) - p\ \ (t)}{\Delta t} = -\lambda p\ \ (t) + \lambda p \qquad (t), n > 0$$

En donde $p'_n(t)$ es la primera derivada de $p_n(t)$ con respecto a t. observando otra vez que el lado izquierdo representa el cociente diferencial de la función p_n. La solución de estas ecuaciones en diferencias y diferenciales es

$$p\ \ (t) = \frac{(\lambda t)\ \ e}{n!}, n = 0,1,2,3 \ldots$$

Es una distribución de Poisson, con media y varianza $E(n{:}t)=\lambda t=\sigma^2$ averías durante t.

Por definición de esperanza y para la varianza de la variable aleatoria T , e integrando por partes se tiene

$$\tilde{t} = \qquad t\, i(t)dt = - \qquad t\, dv = \qquad e \quad dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$t \quad = \qquad t\ \ i(t)dt = - \qquad t\ \ dv = \frac{2}{\lambda} \qquad e \qquad dt = \frac{2}{\lambda}$$

Suponiendo que la curva de supervivencia sea tal que t v(t) cuando t→∞, es igual a cero. Luego

$$\sigma \quad = - - - = -$$

Vamos a considerar lo dicho en el cálculo de la probabilidad de consumo, pero esta vez considerando que la función es continua.

La probabilidad $p_0(t)$ de un consumo nulo, es decir, de ningún reemplazo (m=0), es evidentemente v(t).

Para calcular $p_1(t)$, diremos que solo hay una avería en el intervalo de 0 a t, es decir, un reemplazo en un instante u comprendido entre 0 y t, después, ninguna avería entre u y t. La probabilidad de que haya una avería entre las edades u y u+du, es i(u)du o sea también –dv(u). Por otra parte, la probabilidad para que el equipo de reemplazo instalado en el tiempo u funcione sin descomponerse entre u y t es v(t-u). La probabilidad de que se cumpla una y otra posibilidad será:

i(u)du. v(t-u)=v(t-u)i(u)du=-v(t-u)dv(u)

Ahora bien, hay que considerar todas las posibilidades de descompostura del primer equipo instalado en los diversos tiempos comprendidos entre 0 y t, y por lo tanto, hacer la suma de las probabilidades correspondientes:

$$p\ (t) = \quad v(t-u)i(u)du = - \quad v(t-u)dv(u)$$

Generalizando, existe una fórmula inductiva que da $p_m(t)$ en función de $p_{m-1}(t)$. Para que haya, en efecto, un consumo de m equipos en el intervalo de 0 a t, es necesario y suficiente que haya un reemplazo en un instante u cualquiera entre 0 y t y después que entre u y t se hayan consumido m-1 equipos. Así

$$p\ \ (t) = \quad p\quad (t-u)i(u)du = - \quad p\quad (t-u)dv(u)$$

Las integrales pasadas definen un proceso de Markov. Para resolver estas integrales se empleara la transformada de Carson- Laplace.

Pongamos $Lp_m(t)=P_m(s)$, Lv(t)=V(s), Li(t)=I(s)

Y recordemos el teorema de la composición (teorema de Borel).

Si: $H_1(s)=Lh_1(t)$ y $H_2(s)=Lh_2(t)$,

Entonces: $$\frac{(\ )\quad(\ )}{} = L\int h\ (u)h\ (t-u)du = L\int h\ (t-u)h\ (u)du$$

Tomando las transformadas, se obtiene:

$$v(t) = 1 - \quad i(t)dt;$$

Lo que da: $V(s) = 1 - \frac{(\ )}{}$

Con esto podemos calcular P_2, P_3,…, P_m,…

P_0=V

P_1=VI/s=V(1-V)

P_2=P_1I/S=VI^2/s^2=$V(1-V)^2$

.

.

.

P_m=…=VI^m/s^m=$V(1-V)^m$

Luego para v(t)=$e^{-\lambda t}$, se tiene V(s)=s/s+λ y P_m(s)= $\frac{}{}\left(1-\frac{}{}\right) \ = \lambda \ \frac{}{(\ \ )}$

Con ayuda de una tabla de transformadas de Carson-Laplace se obtiene:

$$p\ \ (t) = \frac{(\lambda t)\ \ e}{m!} \qquad (1.30)$$

Así que la media y la desviación estándar del consumo en el intervalo de 0 a t, son proporcionales a t ecuaciones 1.31 y 1.32. La cantidad λ es la tasa de consumo.

Este resultado indica que el tiempo entre averías es exponencial con media 1/λ, la cantidad de averías durante un periodo t especifico tiene distribución de Poisson con media λt. Observe que lo contrario también es cierto.[5,8]

2. ANÁLISIS CUANDO LOS EQUIPOS NO SON NUEVOS

En páginas anteriores hemos admitido que el equipo al tiempo 0 es nuevo, consideremos ahora el caso cuando esto ya no es cierto. La función de supervivencia ya no es v(t) sino $v_a(t)$; determinemos esta función. Es la probabilidad condicional para que un equipo que haya llegado sin avería a la edad a, funcione además de un tiempo t de funcionamiento sin descompostura, su edad será de a+t. La probabilidad a priori de que esto suceda es v(a+t) y según el teorema de probabilidades compuestas

$$v(t+a)= v(a)v_a(t) \quad \text{para } a\geq 0, \; t\geq 0 \qquad (1.33)$$

Luego, la curva de supervivencia del equipo que tenga un desgaste inicial, se obtiene desplazando en a (horas de servicio) hacia la izquierda, la curva de supervivencia del equipo nuevo y multiplicado por 1/v(a) las ordenadas de la curva obtenida (figura 3-a). Además la probabilidad $v_a(t)$ es superior a la probabilidad v(t) para algunos casos de t. En la figura 3-b, se encuentra una curva v(t) para la cual $v_a(t)$> v(t) para cierto valor de a (e inclusive varios), y esto, cualquiera que sea t (dependiendo de la naturaleza v(t)). Este caso se produce cuando la curva de supervivencia decrece muy rápido para pequeños valores de t, y cuando a es un valor de t que corresponde a una pendiente suficientemente débil de la curva v(t).

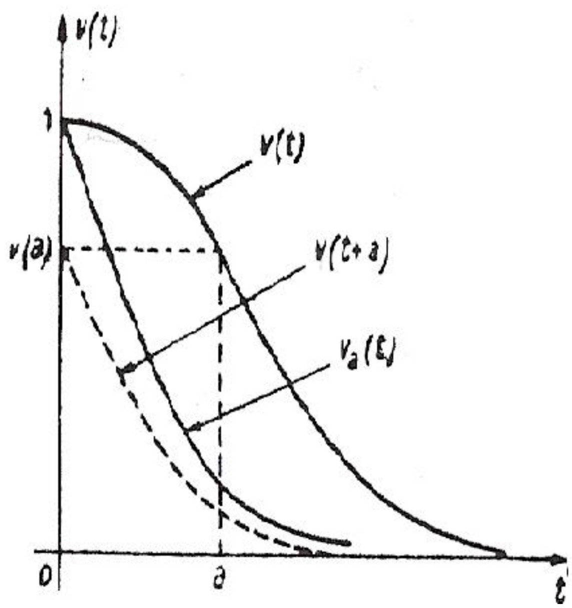


Figura 3-a

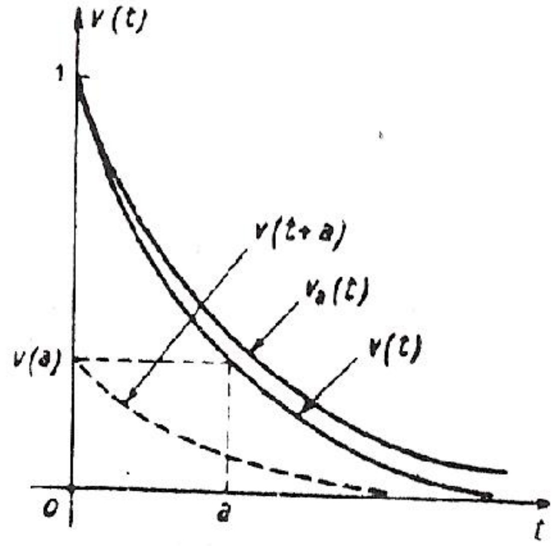


Figura 3-b

Para calcular la probabilidad $p_m(t)$ de que haya habido m reemplazos por equipos nuevos cuando el primer equipo era usado, utilizaremos las fórmulas (1.21) y (1.24), después de haberlas modificado para tomar en cuenta el estado del primer equipo:

$$p\ (t) = \quad v(t-u)f\ (t) \qquad (1.34)$$

En donde

$$f\ (t) = v\ (t-1) - v\ (t) \qquad (1.35)$$

Así para m>1,

$$p\ \ (t) = \quad p \quad (t-u)f\ (t) \qquad (1.36)$$

Para el caso en el que $v(t)=e^{-\lambda t}$ $t \geq 0$,

Entonces $v(a+t)=e^{-\lambda(t+a)}$, $v(a)= e^{-\lambda a}$ por la ecuación 1.32 se tiene $v_a(t)=\frac{(\quad)}{(\ )} = \frac{(\quad)}{\quad} = e$ $t \geq 0$.

Por lo que la probabilidad condicional de supervivencia en el caso de un desgaste exponencial es igual a v(t).

Grado de desgaste

La probabilidad es llamada grado de desgaste de un equipo y está dado por:

$$u(a)=1-v(a) \qquad (1.37)$$

TASA DE APROVISIONAMIENTO

Sean D_o equipos puestos en servicio en el tiempo t=0. Si v(t) es la función de supervivencia de estos equipos quedarán en servicio en el tiempo t sin ningún reemplazo ha sido efectuado:

$$N(t)=D_o v(t) \text{ , equipos} \qquad (1.38)$$

Remplacemos los equipos en cantidad suficiente, de tal manera que el número de equipos siga una ley d(t) que llamaremos función de utilización (figura 4).

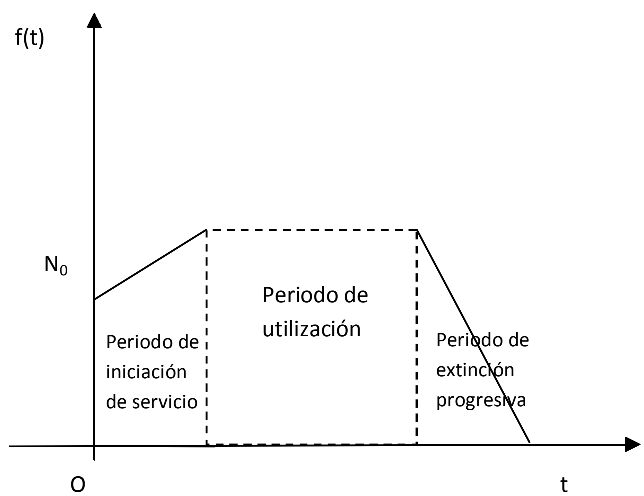


Figura 4

Si r(u) es el número de equipos reemplazados hasta el tiempo u, la cantidad:

$$\rho(u)= r(u)-r(u-1) \quad (u>1) \qquad (1.39)$$

Da el número de reemplazos en el intervalo u-1 a u, y es llamada tasa de aprovisionamiento.

El número de equipos supervivientes en un tiempo futuro t y provenientes de ese aprovisionamiento, será:

$$\rho(u)v(t-u)=[r(u)-r(u-1)]v(t-u) \qquad (1.40)$$

El número de equipos en servicio en el tiempo t es igual a la suma de esos supervivientes para cada intervalo de tiempo tomado entre u=1 y u=t, aumentando evidentemente con los supervivientes que proceden de los D_o objetos puestos en servicio originalmente, los cuales han obedecido la misma ley de supervivencia. Luego el número de objetos en el momento t, será:

$$\mathrm{d}(\mathrm{t}) = \mathrm{D}\ \ \mathrm{v}(\mathrm{t}) \tag{1.41}$$

$$+ \quad \rho(\mathrm{u})\mathrm{v}(\mathrm{t}-\mathrm{u}), \quad \mathrm{d}(0)$$

$$= \mathrm{D}$$

o bien,

$$\mathrm{d}(\mathrm{t}) = \mathrm{D}\ \ \mathrm{v}(\mathrm{t}) \qquad (1.42$$

$$+ [\quad \rho(\mathrm{u})\mathrm{v}(\mathrm{t}-\mathrm{u})] + \rho(\mathrm{t})\mathrm{v}(0), \quad \mathrm{d}(0) = \mathrm{D}$$

De donde

$$\rho(\mathrm{t}) = \mathrm{d}(\mathrm{t}) - \mathrm{D}\ \ \mathrm{v}(\mathrm{t}) \tag{1.43}$$

$$- \quad \rho(\mathrm{u})\mathrm{v}(\mathrm{t}-\mathrm{u}),$$

$$\mathrm{v}(0) = 1$$

Para analizar estos resultados, se debe estudiar la curva de utilización dada en la figura 6, pues tiene las siguientes particularidades:

- Duración del periodo de la puesta en servicio.
- Duración del periodo de utilización.
- Duración del periodo de extinción o de reforma progresiva.

Note en la figura 5, dos curvas de supervivencia, una tiene la forma de campana, en tanto que otra tiene el aspecto exponencial. Se puede verificar sobre las curvas B_1 y B_2, cuán sensible es la curva de aprovisionamiento con relación a la forma de la curva de supervivencia.

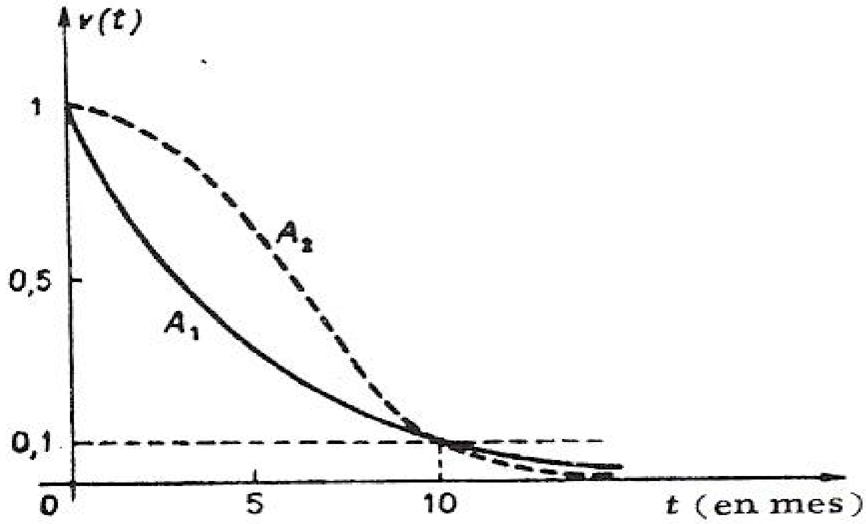


Figura 5

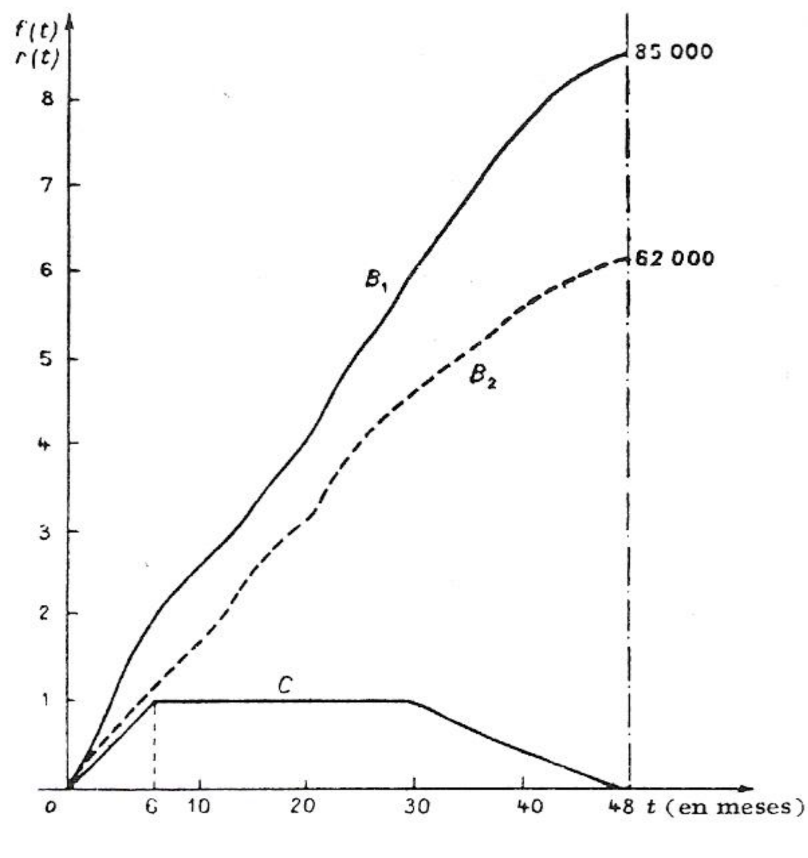


Figura 6

Curvas como las mostradas en la figura 6, permiten asegurar exactamente los aprovisionamientos que corresponden a un programa de empleo de los equipos, variable en el tiempo.

Supongamos que la función de supervivencia está dada de forma continua y tomemos nuevamente lo dicho anteriormente.

Si no se ha efectuado ningún reemplazo:

$$N(t)=D_o v(t) \qquad (1.38)$$

Como r(u) es el número de equipos reemplazados hasta el tiempo u; la diferencial r´(u)du da el numero de objetos reemplazados en el intervalo de tiempo de u a u + du. La función r´(u) será llamada tasa de aprovisionamiento.

El número de equipos supervivientes que provienen de este aprovisionamiento en un tiempo futuro t, será: $r'(u)du \times v(t-u)=r'(u)v(t-u)du$

El número total de equipos en servicio en el tiempo t, incluyendo los equipos supervivientes de la primera instalación, será:

$$d(t)=D\ v(t)+\int r'(u)v(t-u)du.$$

Esta ecuación es una integral de Volterra, de segunda especie y de núcleo r´(t). Cuando $D_0=0$, ésta integral se dice de primera especie.

Tomemos la trasformada de Carson-Laplace de esta ecuación, y pongamos:

$F(s)=Ld(t)$, $V(s)=Lv(t)$ $R(t)=Lr(t)$

Sustituyendo $F(s)==D\ V(s)+\frac{'(\ )\ (\ )}{}.$

Donde: $R'(s)=Lr'(t)$ y no $dR(s) / ds$

Puesto que $r'(t)= dr / dt$ entonces $R'(s)= sR(s) -s\,r(0)$

Se tiene que r(0)=0, de donde R´(s)=sR(s), sustituyámoslas en F(s)

$$F=D_0V+RV \quad \text{de donde } R= F/V-D_0.$$

Así pues conociendo d(t) y v(t), es posible determinar analíticamente r´(t) y r(t).

Con nuestra hipótesis de la ecuación 1.28

Se tiene entonces que $v(t)=0$ si $t<0$

$v(t) = e^{-\lambda t}$ si $t\geq 0$;

resulta:

$$F(s)=D_0,\quad V(s)= s/s+\lambda,\quad R(s)= F/V-D_0=D_O\lambda/s.$$

Por lo tanto $r(t)=D_0\,\lambda t$, $r'(t)=D_0\,\lambda$.

Comprobamos, que en caso de que d(t) sea una constante, la tasa de aprovisionamiento $r'(t)/D_0$ es constante e igual a λ, que es la tasa de avería. [7]

CAPÍTULO II

1. MODELO GENERAL DE INVENTARIO (STOCK)

Los inventarios se relacionan con el mantenimiento de cantidades suficientes de bienes que garanticen una operación fluida en un sistema de producción o en una actividad comercial. Han sido considerados tradicionalmente por la industria y el comercio y la única manera efectiva de manejarlos es minimizar su impacto adverso, encontrando un "justo medio" entre tener MUY POCA RESERVA y DEMASIADA RESERVA, que son los casos extremos.

En la mayoría de las situaciones del mundo real, el manejo de inventarios suele implicar un número apreciable de artículos o productos que varían en precio desde los relativamente económicos hasta los muy costosos. Como el inventario representa en realidad capital ocioso o inactivo, es natural que se ejerza el control de inventario en artículos que sean los responsables del incremento en el costo del capital. Por lo tanto, los artículos rutinarios, como tornillos o tuercas, contribuyen en forma poco significativa al costo del capital cuando se comparan con artículos que contienen partes de repuestos costosas.

La experiencia ha demostrado que sólo un número relativamente pequeño de artículos de inventario suelen incurrir en una parte importante del costo del capital. Estos artículos son los que deben estar sujetos a un control de inventario más estricto.

La naturaleza del problema de inventario consiste en colocar y recibir en forma repetida equipos de determinados tamaños, en intervalos de tiempo establecidos. El objetivo de una política de inventario es contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Qué cantidad de artículos pedir?
b) ¿Cuándo deben pedirse?

La respuesta a la primera pregunta se expresa en términos de lo que se conoce como *cantidad del pedido.* Esta representa la cantidad óptima que debe ordenarse cada vez que se haga un pedido y puede variar con el tiempo, dependiendo de la situación. La respuesta a la segunda pregunta depende del tipo del sistema de inventarios, que puede requerir de revisión periódica o continua, y establece el nivel de inventario en el cual debe colocarse un nuevo pedido, lo cual se especifica por el *punto para el nuevo pedido.*

La cantidad y el punto de un nuevo pedido se determinan normalmente minimizando el costo de inventario total, que se puede expresar de la siguiente manera:

Costo total de inventario = costo de compra + costo de preparación + costo de almacenamiento + costo de faltante.

Todos estos costos se deben expresar en la cantidad económica de pedido y el tiempo entre los pedidos.

1. El costo de compra se basa en el precio por unidad del artículo. En nuestro caso es constante.
2. El costo de preparación representa el costo fijo incurrido cuando se coloca un pedido. En nuestro caso no siempre se puede considerar.
3. El costo de almacenamiento representa el costo de mantener una existencia de inventario; comprende el interés sobre el capital y el costo de almacenamiento, mantenimiento y manejo.
4. El costo de faltante es la penalización en que se incurre cuando se terminan las existencias; incluye la pérdida potencial de ingreso y el costo, más subjetivo, de pérdida de la buena voluntad del cliente.

Un sistema de inventario se puede basar en la *revisión periódica*, en nuestro caso al acumular determinado tiempo de vuelo o, en forma alternativa, en una *revisión continua*, cuando se hace un pedido para reponer algún equipo o la cantidad de inventario baja hasta cierto nivel, que se llama punto de re-orden.

Aunque el tipo de demanda es un factor principal en el diseño del modelo de inventarios, los siguientes factores pueden influir también en la forma en que se formula el modelo:

1. Demoras en la entrega. Cuando se coloca un pedido, puede entregarse inmediatamente o puede requerir algún tiempo antes de que la entrega se efectúe. El tiempo entre la colocación de un pedido y su surtido se conoce como demora de entrega.

2. Reabasto del almacén. Aunque un sistema de inventarios puede operar con demoras en las entregas, el abastecimiento real del almacén puede ser instantáneo o uniforme.

3. Horizonte de tiempo. El horizonte define el periodo sobre el cual el nivel de inventarios estará controlado. Este horizonte puede ser finito o infinito, dependiendo de la naturaleza de la demanda.

4. Abastecimiento múltiple. Un sistema de inventario puede tener varios puntos de almacenamiento. En algunos casos estos puntos pueden actuar como una fuente de abastecimiento para algunos otros puntos.

5. Número de artículos. Un sistema de inventarios puede contener más de un artículo y estos artículos pueden competir en espacio o capital, limitados.[6]

2. ALGUNOS MODELOS DE INVENTARIO

2.1 MODELO ESTÁTICO DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO (CEP)

Modelo clásico de cantidad económica de pedido.

El más sencillo de los modelos de inventario implica una tasa constante de consumo con el surtido instantáneo del pedido y sin faltante. Se definen

y= Cantidad pedida (cantidad de unidades)

λ=Tasa de demanda= Tasa de consumo (unidades por unidad de tiempo).

t =Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo).

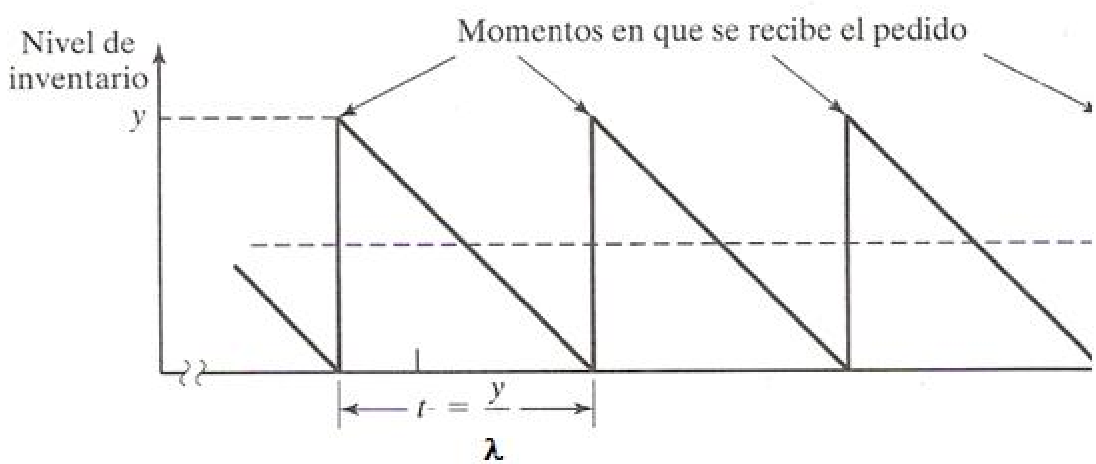


Figura 1

El nivel de inventario sigue el patrón de la figura 1. Cuando el inventario llega al valor cero, se realiza un pedido cuyo tamaño es *y* unidades, las cuales se recibe en forma instantánea. Después la existencia se consume uniformemente a la tasa constante de avería λ. El ciclo de pedido para este comportamiento es:

$$t = \frac{}{\lambda} \qquad (2.1)$$

El nivel promedio de inventario que resulta es

Nivel promedio de inventario= *y*/2 unidades

El modelo de costo requiere dos parámetros:

K=costo de preparación correspondiente a el costo de mantenimiento del equipo.

H=costo de almacenamiento ($ por unidad en inventario por unidad de tiempo).

Así, el costo total por unidad de tiempo (TCU) se calcula como sigue:

TCU(y)=C. de preparación+ C. de almacenamiento $= \frac{ó}{}$

$$= \frac{K + H \frac{}{2} t}{t} = \frac{K}{\frac{}{\lambda}} + H\frac{}{2} \qquad (2.2)$$

El valor óptimo de la cantidad de pedido *y* se determina minimizando TCU(y*)* con respecto de *y.* Suponiendo que y sea continua, una condición necesaria para determinar el valor óptimo de *y* es

$$\frac{dTCU(\ )}{d} = -\frac{K\lambda}{} + \frac{H}{2} = 0 \qquad (2.3)$$

(Esta condición es suficiente, porque TCU es convexa).

La solución de la ecuación da como resultado la siguiente cantidad económica de pedido, *y*:*

$$* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{H}} \qquad (2.4)$$

Así, la política óptima de inventario para el modelo propuesto se resume como sigue:

Pedir

$$* = \sqrt{\frac{}{}} \quad \textit{unidades}$$

cada

$t * = -$ unidades de tiempo.

En realidad, no se necesita hacer un nuevo pedido en el instante en que se pide, como se ha descrito aquí. En lugar de ello puede transcurrir un tiempo de entrega positivo, L, entre el pedido y la recepción del equipo, como se ve en la figura 2. En este caso, el punto de reorden se representa cuando el nivel de inventario baja a Lλ unidades.

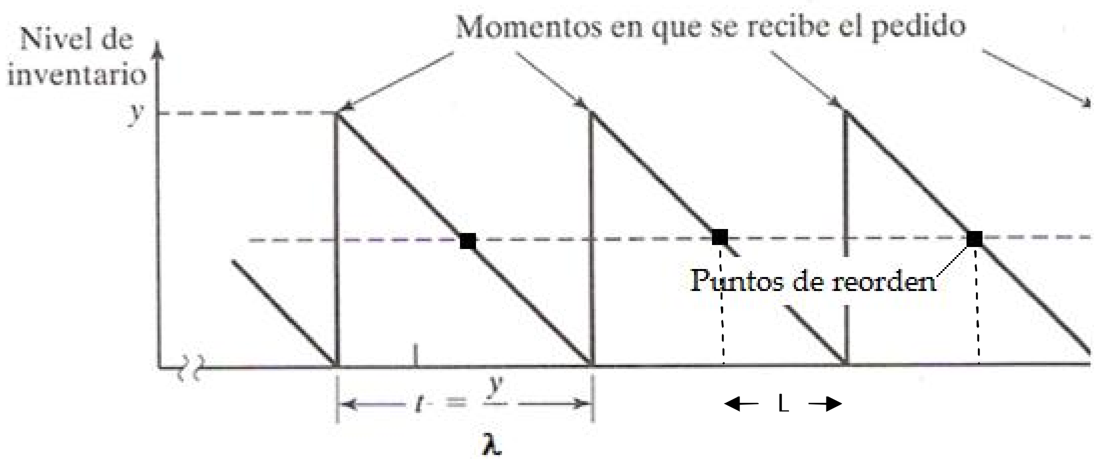


Figura 2

En la figura 2 se supone que el tiempo de entrega L es menor que la longitud del ciclo t*, lo cual en general no es el caso. Para tener en cuenta otras situaciones, se definirá el tiempo efectivo de entrega como sigue:

$$L_e = L - nt^* \qquad (2.5)$$

donde n es el entero mayor no mayor que L/t*. Este resultado se justifica, porque después de n ciclos de t* cada uno, el estado del inventario es como si el intervalo entre realizar un pedido y recibir otro el L_e. Así, el punto de reorden está en las $L_e\lambda$ unidades, y la política de inventario se puede enunciar como sigue:

Pedir la cantidad y, siempre que la cantidad de inventario baje a $L_e\lambda$ unidades.*

Modelo de Cantidad económica de pedido de un artículo con limitación de almacén.

Este modelo se aplica al caso de un artículo cuyo inventario fluctúa de acuerdo con la pauta de la figura 1(no se permiten faltantes). La diferencia está en que las unidades del artículo están limitadas en un espacio de almacenamiento.

Se definirá:
K=costo de preparación correspondiente a el costo de mantenimiento del equipo.
H=costo de almacenamiento ($por unidad en inventario por unidad de tiempo).
y= Cantidad pedida (cantidad de unidades)
λ=Tasa de consumo (unidades por unidad de tiempo).
a=Área de almacenamiento necesaria por unidad de inventario.
A=Área máxima disponible de almacenamiento para las unidades de este artículo.

Suponiendo que no hay faltantes, el modelo matemático que representa la situación del inventario es:

$$\text{Minimizar TCU(y)}= \frac{}{} + \mathrm{H} - \qquad (2.6)$$

$$\text{Sujeta a} \qquad ay \le A, \quad y>0 \qquad (2.7)$$

Los pasos para resolver el problema son los siguientes:

Paso 1. Calcular el valor óptimo no restringido de las cantidades de pedido, con

$$^{*}= \sqrt{\frac{2K\lambda}{\mathrm{H}}} \qquad (2.4)$$

Paso 2. Comprobar si el valor optimo no restringido *y** satisface la restricción de almacenamiento. Si la satisface, detenerse; la solución *y** es óptima. En caso contrario, seguir el paso 3.

Paso 3. Se debe satisfacer la restricción del almacenamiento en forma de ecuación. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el valor restringido óptimo de la cantidad de pedido.

Entonces:

$$L(\beta, y) = TCY(y) - \beta(ay - A) \quad = (\text{—} + H\text{–}) - \beta(a \quad - A) \qquad (2.8)$$

donde β (<0)es el multiplicador de Lagrange.

Como la función de Lagrange es convexa, los valores óptimos de *y*, β se determinan con la siguiente condición necesaria:

$$\frac{\delta L}{\delta} = -\frac{K\lambda}{} + \frac{H}{2} - \beta a \qquad (2.9)$$

$$\frac{\delta L}{\delta\beta} = -(a \quad - A) \qquad (2.10)$$

La segunda ecuación indica que se debe satisfacer la restricción en forma de ecuación para el óptimo. De la primera ecuación, la fórmula indica que *y** depende del valor de β *. Para β *=0, *y** da la solución sin restricción. El valor de β * se puede determinar como sigue, por definición de β <0 para el caso de minimización, se disminuye β en forma sucesiva una cantidad razonablemente pequeña, y se sustituye en la fórmula para calcular la *y** asociada. La β * deseada produce los valores de *y** que satisface la restricción de almacenamiento en forma de ecuación.

2.2 MODELOS PROBABILISTICOS DE INVENTARIO

En esta sección trataremos de los modelos estocásticos de inventario, en los que la demanda se describe mediante una distribución de probabilidades. Y estos mismos se clasifican en situaciones de revisión continua y periódica.

MODELOS DE REVISIÓN CONTINUA

Aquí veremos dos versiones: una probabilizada de la cantidad económica que usa una existencia de reserva para tener en cuenta el consumo probabilista y la otra un modelo que incluye el consumo probabilístico directamente en la formulación.

Modelo probabilizado de cantidad económica de pedido.

En este modelo se ha tratado de adaptar el modelo determinístico de cantidad económica de pedido para que refleje la naturaleza probabilista de la demanda, usando una aproximación que sobre pone una existencia constante de reserva sobre el nivel del inventario en todo el horizonte de planeación. El tamaño de la reserva se determina de tal modo que la probabilidad de que se agote la existencia durante el tiempo de entrega no sea mayor que un valor especificado.

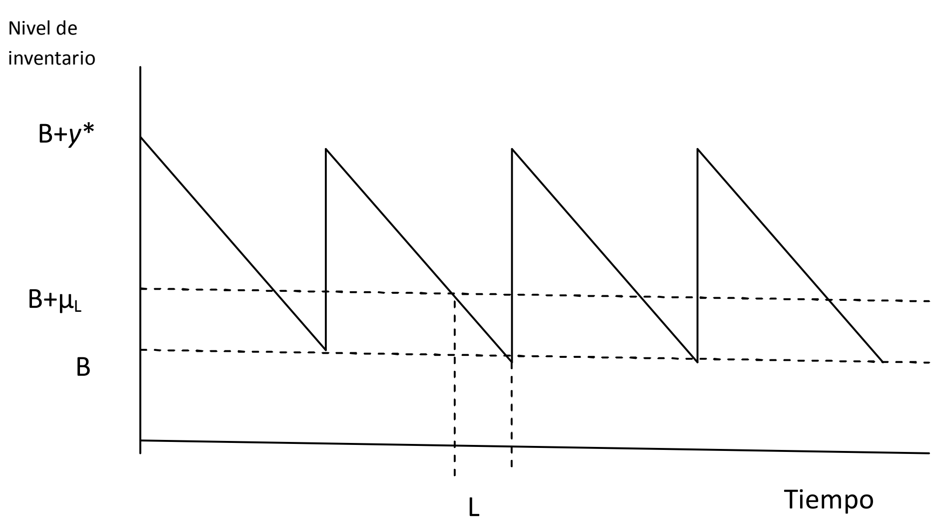


Figura 3

Sean:

L=Tiempo de entrega.

m=Variable aleatoria que representa la demanda durante el tiempo de entrega.

μ=Consumo promedio durante el tiempo de entrega.

σ_L=Desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega.

B= Tamaño de la existencia de reserva.

α=Probabilidad máxima admisible de que se agote la existencia durante el tiempo de entrega.

Básicamente este modelo utiliza las pruebas de hipótesis en estadística inferencial y como principal hipótesis es que m, el consumo durante el tiempo de entrega L, tiene distribución de Poisson con promedio $\mu = \lambda t$ y desviación estándar $\sigma_L = \lambda t$.

La figura 3 muestra la relación entre la reserva de existencia B y los parámetros del modelo determinístico de CEP, que incluyen el tiempo de entrega L, el consumo promedio durante el tiempo de entrega y la cantidad económica de pedido *y**. Observe que L debe ser igual al tiempo de entrega efectivo.

La formulación de la probabilidad que se usa para determinar B se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{P}\{K_\alpha \leq m\} \leq \alpha \qquad (2.12)$$

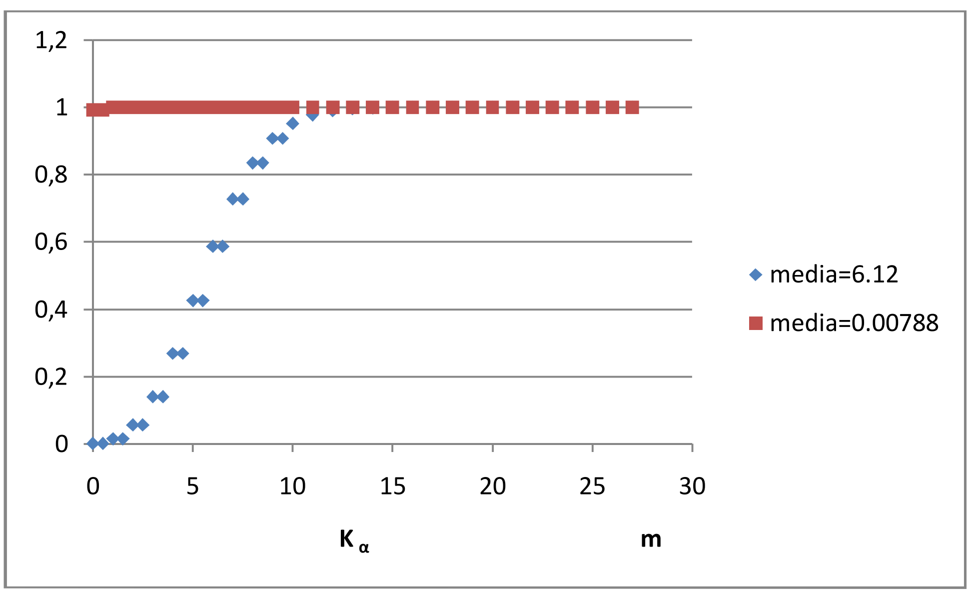


Figura 4. Función de probabilidades acumuladas de Poisson.

La función de probabilidades acumulada mide la probabilidad de que la variable m asuma un valor menor o igual a K_α es $P(m \leq K_\alpha)$.

La figura 4 define a K_α, que se determina con la tabla de Poisson (véase anexo-tabla 2), de tal modo que $P(m \geq K_\alpha) \leq \alpha$. En consecuencia el tamaño de la reserva debe satisfacer:

$$\mathrm{K} \quad \geq \mathrm{B} + \mu \qquad (2.13)$$

Entonces $$B \leq K_\alpha - \mu$$

El consumo durante el tiempo de entrega L, se suele describir como una función de densidad de probabilidades por unidad de tiempo, a partir de la que se pueda determinar la distribución del consumo durante L. Dado que el consumo por unidad de tiempo es Poisson, con media λL y desviación estándar σ, se calculan como sigue:

$$\mu = \lambda l \qquad (2.14)$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} \qquad (2.25)$$ [5]

MODELO PROBABILÍSTICO DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO.

No hay justificación para creer que el modelo anterior creará una solución óptima, el hecho de que una información acerca de la naturaleza probabilística de la demanda no se tiene en cuenta al principio, solo para revivirla en una forma totalmente independiente en una etapa posterior de los cálculos, por ello el siguiente modelo Probabilístico de la cantidad económica de pedido..

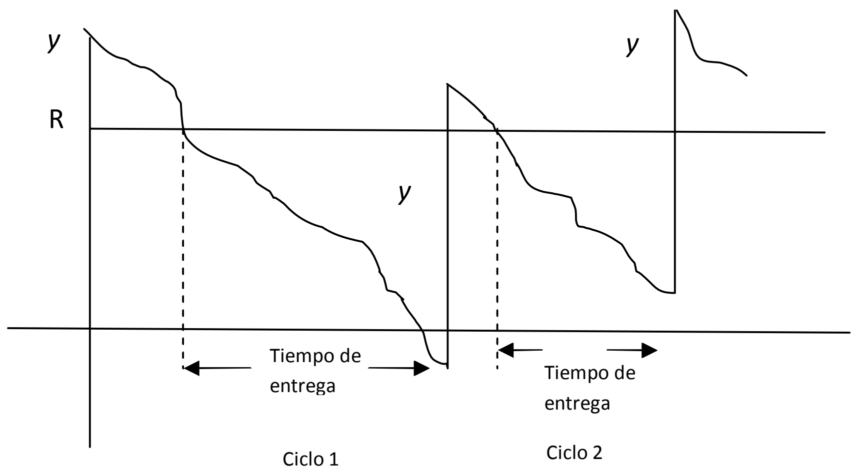


Figura 5

Este modelo permite faltante durante la demanda, como se ve en la figura 5. La política establece pedir la cantidad y siempre que el inventario baja al nivel R. Como en el caso determinístico, el nivel para pedir R (nivel de reorden) es una función del tiempo de entrega (de servicio del equipo). Los valores óptimos de *y*, R se determinan minimizando el costo esperado por unidad de tiempo, que incluye la suma de preparación (mantenimiento), posesión (almacenamiento) y de faltante.

El modelo tiene tres hipótesis:

1. El consumo no satisfecho durante el tiempo de entrega se acumula.
2. No se permite más de un pedido vigente.
3. La distribución del consumo durante el tiempo de entrega permanece estacionaria.

Para deducir la función de costo total por unidad de tiempo, sean
f(m)=Función de distribución de probabilidades del consumo m durante el tiempo de entrega.

λ=Consumo esperado por unidad de tiempo
H= costo de almacenamiento por unidad de inventario y por unidad de tiempo
P=Costo de faltante por unidad de inventario.
K=Costo de preparación por pedido.
Con base a estas definiciones, se determinará ahora los elementos de la función de costo.

1. Costo de preparación. La cantidad aproximada de pedidos por unidad de tiempo es λ/*y*, por lo que el costo aproximado de preparación por unidad de tiempo es Kλ/*y*.
2. Costo esperado de almacenamiento. El inventario promedio es

$$I = \frac{(\quad + E\{R - m\}) + E\{R - m\})}{2} \qquad (2.16)$$

$$= \frac{}{2} + R - E\{m\}$$

La fórmula se basa en el promedio de los inventarios esperados inicial y final de un ciclo, *y* + E {R-m} y E{R-m}, respectivamente. Como aproximación, en la ecuación no se tiene en cuenta el caso en el que R-E{m} pueda ser negativo. El costo esperado por mantener en inventario por unidad de tiempo es entonces igual a HI.

3. Costo esperado por faltante. Hay faltante cuando m>R. Así, la cantidad esperada de faltante por ciclo es

$$S=\int \quad (m - R)f(m)dm \qquad (2.17)$$

Como se supone que P sólo es proporcional a la cantidad de faltante, el costo esperado de faltante por ciclo es PS, y para λ/*y* ciclos por unidad de tiempo, el costo de faltante por unidad de tiempo es PλS/*y*.

La función de costo total por unidad de tiempo que resulta es

$$TCU(\quad ,R) = \frac{\lambda K}{} + H \qquad \frac{}{2} + R - E\{m\} \quad + \frac{P\lambda}{} \qquad (m - R)f(m)dm \qquad (2.18)$$

Las soluciones óptimas *y** y R* se determinan con las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial TCU}{\partial y} = - \quad \frac{\lambda K}{} \quad + \frac{H}{2} - \frac{P\lambda S}{} = 0 \qquad (2.19)$$

$$\frac{}{} = H - \quad \frac{}{} \quad \int \quad f(m)dm=0 \qquad (2.20)$$

Así se llega a

$$*= \sqrt{\frac{2\lambda(K + PS)}{H}} \qquad (2.21)$$

$$\int_{*} f(m)dm = \frac{H\ ^{*}}{P\lambda} \qquad (2.22)$$

En vista de que *y** y R* no se pueden determinar en forma cerrada a partir de las ecuaciones anteriores, se usa un algoritmo numérico desarrollado por Hadley y Whitin para determinar las soluciones. El algoritmo converge a una cantidad finita de iteraciones, siempre y cuando exista una solución factible.

Para R=0, las dos últimas ecuaciones dan como resultado

$$= \sqrt{\frac{2\lambda(K + PE\{m\})}{H}} \qquad (2.23)$$

$$= \frac{P\lambda}{H} \qquad (2.24)$$

Si $\geq$, existen valores óptimos únicos de y, R. En el método de solución se reconoce que el valor mínimo de *y** es $\sqrt{\frac{}{}}$, que alcanza cuando S=0.

Los pasos para el algoritmo son los siguientes:

Paso 0. Usar la solución inicial y_1=*y**=, y hacer R_0=0. Igualar i=1 y seguir en el paso i.

Paso i. Usar y_i para determinar R_i con la ecuación 2. Si $R_i \approx R_{i-1}$, detenerse; la solución óptima es $y^* = y_i$, $R^* = R_i$. En caso contrario, usar R_i en la ecuación 1 para calcular y_i. Igualar i=i+1 y repetir el paso i.[5]

Si, como en este caso, la función de distribución es una función discreta entonces todas las hipótesis y conclusiones siguen siendo ciertas.

Es decir, f(m)=Función de distribución de probabilidades del consumo m durante el tiempo de entrega. Cuando consideramos, nuestra función de supervivencia una exponencial, entonces esta función de distribución será

$$p \quad (t) = \frac{(\lambda t) \quad e}{m!} \qquad (1.30)$$

λ=Consumo esperado por unidad de tiempo

H= costo de almacenamiento por unidad de inventario y por unidad de tiempo

P=Costo de faltante por unidad de inventario.

K=Costo de preparación por pedido.

Con base a estas definiciones, se determinará ahora los elementos de la función de costo.

1. Costo de preparación. La cantidad aproximada de pedidos por unidad de tiempo es λ/*y*, por lo que el costo aproximado de preparación por unidad de tiempo es Kλ/*y*.
2. Costo esperado de almacenamiento. El inventario promedio es

$$I = \frac{(\quad + E\{R - m\}) + E\{R - m\})}{2} = \frac{}{2} + R - E\{m\} \qquad (2.16)$$

La fórmula se basa en el promedio de los inventarios esperados inicial y final de un ciclo, *y* + E {R-m} y E{R-m}, respectivamente. Como aproximación, en la ecuación no se tiene en cuenta el caso en el que R-E{m} pueda ser negativo. El costo esperado por mantener en inventario por unidad de tiempo es entonces igual a HI.

3. Costo esperado por faltante. Hay faltante cuando m>R. Así, la cantidad esperada de faltante por ciclo es

$$S=\sum \quad f(m) \qquad (2.17.1)$$

Como se supone que P solo es proporcional a la cantidad de faltante, el costo esperado de faltante por ciclo es PS, y para λ/*y* ciclos por unidad de tiempo, el costo de faltante por unidad de tiempo es PλS/*y*.

La función de costo total por unidad de tiempo que resulta es

$$TCU(\quad, R) = \frac{\lambda K}{} + H \qquad \frac{}{2} + R - E\{m\} \quad + \frac{P\lambda}{}) \qquad f(m) \qquad (2.18.1)$$

Las soluciones óptimas *y** y R* se determinan con las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial TCU}{\partial} = - \quad \frac{\lambda K}{} \quad + \frac{H}{2} - \frac{P\lambda S}{} = 0 \qquad (2.19.1)$$

$$\frac{}{} = H - \quad \frac{}{} \quad \sum \quad f(m)=0 \qquad (2.20.1)$$

Así se llega a

$$*= \sqrt{\frac{2\lambda(K+PS)}{H}} \qquad (2.21.1)$$

$$f(m) = \frac{H \quad *}{P\lambda} \qquad (2.22.1)$$

En vista de que *y** y R* no se pueden determinar en forma cerrada a partir de las ecuaciones anteriores, se usa un algoritmo numérico desarrollado por Hadley y Whitin para determinar las soluciones. El algoritmo converge a una cantidad finita de iteraciones, siempre y cuando exista una solución factible.

Para R=0, las dos últimas ecuaciones dan como resultado

$$= \sqrt{\frac{2\lambda(K+PE\{m\})}{H}} \qquad (2.23.1)$$

$$= \frac{P\lambda}{H} \qquad (2.24.1)$$

Si $\geq$, existen valores óptimos únicos de *y*, R. En el método de solución se reconoce que el valor mínimo de *y** es $\sqrt{\frac{\;}{\;}}$, que alcanza cuando S=0.

Los pasos para el algoritmo son los siguientes

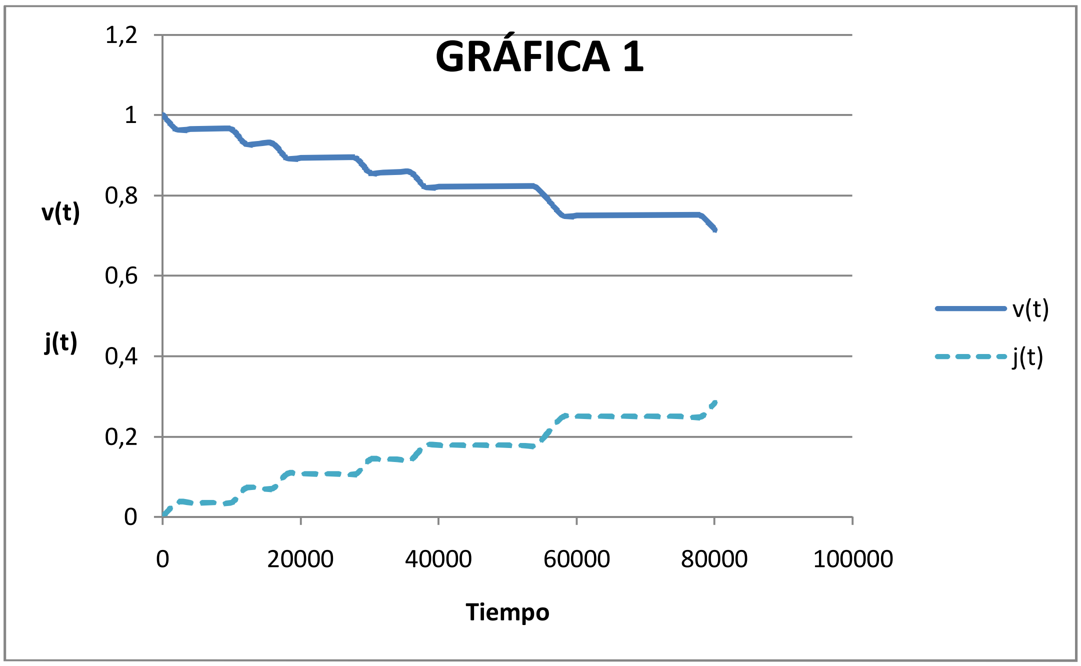
Paso 0. Usar la solución inicial y_1=*y**=, y hacer R_0=0. Igualar i=1 y seguir en el paso i.

Paso i. Usar y_i para determinar R_i can la ecuación 2. Si $R_i \approx R_{i-1}$, detenerse; la solución óptima es *y**=y_i, R*=R_i. En caso contrario, usar R_i en la ecuación 1 para calcular y_i. Igualar i=i+1 y repetir el paso i.

CAPÍTULO III

APLICACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

1. DETERMINACIÓN DE LA TASA DE CONSUMO, TASA DE AVERÍA Y EDAD DE APARICIÓN DE LA AVERÍA.



Supongamos que se ponen en servicio 28 alternadores de aviones, cada avión ocupa 2 alternadores. Se anotan, a intervalos de tiempo iguales que expresan horas de vuelo, el número de alternadores que siguen funcionando. Veamos el anexo- tabla 3 para la resolución de nuestro problema. Recordemos que todo alternador al cumplir 4000 horas de vuelo se mandan a servicio, por lo que supondremos que todos se pusieron en marcha al mismo tiempo t=0 horas.

Consideremos que la edad de un equipo la mediremos en términos de las horas de vuelo de cada alternador (horas en funcionamiento). Además nuestra muestra es homogénea desde el punto de vista de probabilidad; es decir que cada alternador tiene la misma probabilidad en principio, que cualquier otro del mismo lote de encontrarse todavía funcionando en el tiempo t.

Sea n(t) es el número de alternadores supervivientes en el tiempo t, con n(0)=28. A partir de la tabla 3, obtenemos la curva de supervivencia v(t) (gráfica 1); por ejemplo de acuerdo a la ecuación 1.2 podemos calcular la probabilidad de supervivencia de cada alternador después de 6000 hrs:

$$\Pr(T \geq 6000)=27/28=0.96.$$

La duración de funcionamiento del alternador es j(t) (ver tabla3 y gráfica 1). La distribución de probabilidad que corresponde a j(t) es f(t) (ver ecuación 1.4). Por ejemplo si queremos saber la probabilidad de que un equipo deje de funcionar en el intervalo de 2000 y 4000 hrs será de

$$p_t(4000)=\Pr(2000 \leq T<4000)=0 .$$

La probabilidad de avería en cada instante es p_c (t) (ver ecuación 1.12), por ejemplo la probabilidad de que un alternador alcance el tiempo 12000 hrs sin descompostura y tenga una avería en el intervalo 10000 y 12000 hrs es:

$$\mathrm{p}\ (12000) = 1 - \frac{\mathrm{n}(12000)}{\mathrm{n}(10000)} = 1 - 0.96 = 0.037$$

Por lo tanto el riesgo de mantener en servicio un alternador que ha alcanzado 12000 hrs de vuelo es de 3.7%.

Como cada alternador vuela aproximadamente 8 hrs diarias, y nuestro análisis se basa en las horas acumuladas por todos los alternadores, entonces al tiempo θ= 112, 000 hrs de vuelo acumulado será nuestro limite de retiro, pues cada alternador debe llevarse al servicio cada 4000 hrs de vuelo.

Nuestra variable aleatoria T corresponde a la edad de aparición de la avería (ecuación 1.14). La edad media de la aparición de la avería será el valor medio de la variable T (ecuación 1.15), usando la tabla 3 obtenemos

$$\tilde{\mathrm{t}} = \quad \mathrm{tp} \ = (0)(0) + (2000)(0.0357) + \cdots + 80000(0.0357) = 10500 \text{ horas}$$

Para calcular la variancia de la variable T, se utilizará la ecuación 1.16

$$\sigma \ = \quad \mathrm{t}\ \mathrm{p} \ - (\tilde{\mathrm{t}}) \ = 561285714 - (10500) = 451035714 \text{ horas}$$

Y por último su desviación estándar σ_T=21237.601 horas.

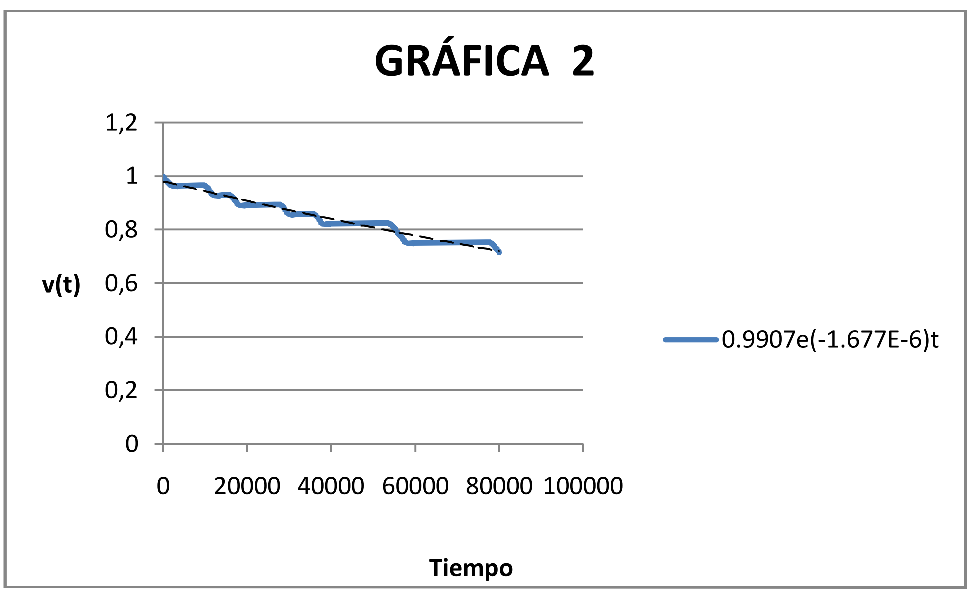
El consumo lo entenderemos como al número de alternadores reemplazados en un intervalo de tiempo. La probabilidad de que no haya ningún consumo será $p_0(t)=v(t)$ (ecuación 1.18). $p_1(t)$ se entenderá como la probabilidad de que haya una y solo una descompostura en el intervalo 0 a t (ecuación 1.21), por ejemplo la probabilidad de que se hizo una descompostura en el intervalo de 0 a 22000 será:

$p_1(22000)=0.10076$, pero $p_3(22000)= 0.00106$,es decir la probabilidad de que haya 3 descomposturas solamente en el intervalo 0 a 22000. Para este y los demás cálculos de probabilidades se utilizará la ecuación recursiva 1.24 ver anexo-tabla 3. Con los datos del ejemplo anterior el consumo medio (ver ecuación 1.25) es $m(t)\approx 5.03$ aproximadamente.

Supongamos que por el comportamiento de nuestro fenómeno la curva de supervivencia sea una función exponencial: $v(t)=e^{-\lambda t}$

La distribución de probabilidad $p_m(t)$ es entonces, una distribución de Poisson, nuestro consumo medio en este caso será $m(t)=\lambda t$, y la tasa de consumo será igual a λ. Ajustando nuestra gráfica 1 a una exponencial tendremos como resultado el siguiente análisis:

$v(t)=ke^{-\lambda t}$, aplicamos logaritmos en ambos miembros y entonces $\log v(t)=\log k-\lambda t$, ajustemos esta recta considerando $y=b+mx$, con $m = \lambda = \frac{(\Sigma\quad)\ \Sigma\ \Sigma}{\Sigma\quad(\Sigma\ )}$ y $b = \frac{\Sigma\qquad\Sigma}{}$, con los datos de la tabla 4, se tiene $m=\lambda=1.6779 \times 10^{-6}$ y $b=\log k=-0.00929$, por lo tanto $k=0.99075$,y así quedará ajustada a la siguiente función de supervivencia $v(t)=0.99075e^{-1.6779 \times 10^{-6}t} \approx e^{-1.6779 \times 10^{-6}t}$.



Luego nuestra tasa de consumo es λ=1.6779x10^{-6}. Con esta información si queremos saber cuál es la probabilidad de que se deban realizar 5 reemplazos a las 10^{6} hs (ecuación 1. 30):

$$p\ (10\ ) = \frac{1.6779\ \ e\ \ \cdot}{5!} = 0.0206$$

Utilizamos la ecuación (1.31) para el consumo medio al tiempo 10^{4}, λ t=(1.6779x10^{-6}) 10^{6}=1.67 alternadores por hora de servicio. Por otro lado en una distribución Poissoniana se tiene la desviación media del consumo como (1.32) σ=1.67 alternadores por hora de servicio.

Ahora cuando los alternadores no son nuevos, veamos que la tabla 3 tiene la vida media de los alternadores a=28873hrs. recopilando las ecuaciones:

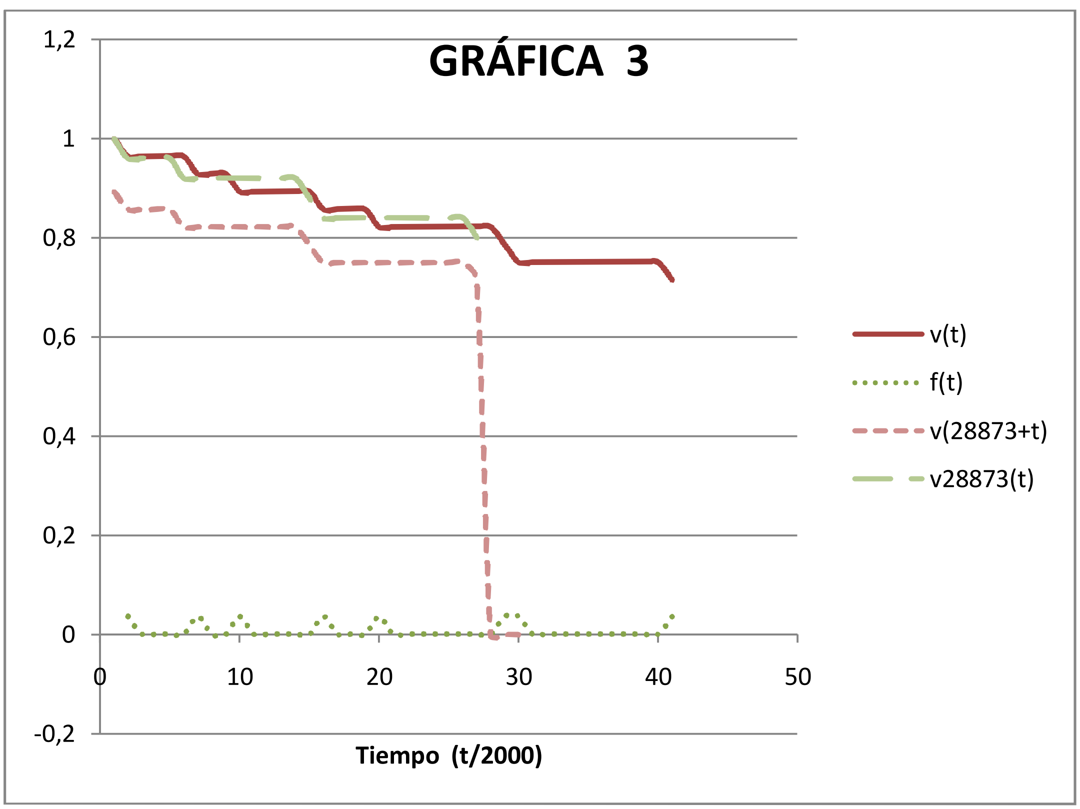
$$v(t+a)= v(a)v_a(t)$$

$$p\ (t) = \qquad v(t-u)f\ (t)$$

en donde $f\ (t) = v\ (t-1) - v\ (t)$

Así para m>1, $p\ \ (t) = \sum \quad p \qquad (t-u)f\ (t)$

Obtendremos la gráfica 3.



La duración de funcionamiento del alternador es $j_a(t)$ (ver tabla 3). La distribución de probabilidad que corresponde a $j_a(t)$ es $f_a(t)$. Por ejemplo si queremos saber la probabilidad de que un equipo deje de funcionar en el intervalo de 2000 y 4000 hrs será de

$$p_t(4000)=Pr(2000 \leq T < 4000)=0.$$

La probabilidad de avería en cada instante es $p_{ca}(t)$ (ver ecuación 1.9), por ejemplo la probabilidad de que un alternador alcance el tiempo 1100 hrs sin descompostura y tenga una avería en el intervalo 1100 y 1200 hrs es:

$$p\quad(12000) = 1 - \frac{n\ (12000)}{n\ (10000)} = 1 - 1 = 0$$

Por lo tanto el riesgo de mantener en servicio un alternador que ha alcanzado 12000 hrs de vuelo es de 0%.

Nuestra variable aleatoria T corresponde a la edad de aparición de la avería (ecuación 1.10). La edad media de la aparición de la avería será el valor medio de la variable T (ecuación 1.11), usando la tabla 3 obtenemos $\tilde{t} = \sum \quad tp \quad = 6214.28\ \text{hrs}$

Para calcular la variancia de la variable T, se utilizará la ecuación 1.12

$$\sigma\quad = \qquad t\ p \qquad - (\tilde{t})\quad = 257000000 - (6214.28)\quad = 218382724\ \text{horas}$$

Y por último su desviación estándar σ_T=14777.778hrs.

El consumo lo entenderemos como al número de alternadores reemplazados en un intervalo de tiempo. La probabilidad de que no haya ningún consumo será $p_{0a}(t)=v_a(t)$ (ecuación 1.14). $p_{\ 1}(t)$ se entenderá como la probabilidad de que haya una y solo una descompostura en el intervalo 0 a t (ecuación 1.17), por ejemplo la probabilidad de que se hizo una descompostura en el intervalo de 0 a 24000 será: $p_{\ 1a}(24000)=0.0657$, pero $p_{3a}(16000)=0.00017$,es decir la probabilidad de que haya 3 descomposturas solamente en el intervalo 0 a 16000. Para éste y los demás cálculos de probabilidades se utilizará formula recursiva 1.36 ver anexo-tabla 3, con los datos del ejemplo anterior el consumo medio (1.25) es $m(t) \approx 6.12$ aproximadamente.

Supongamos que por el comportamiento de nuestro fenómeno la curva de supervivencia será la función exponencial: $v(t)=v_a(t)=e^{-\lambda t}$ (1.29), que es exactamente la misma dado el análisis del capítulo I.

MODELO GENERAL DE INVENTARIO (STOCK)

MODELOS DETERMINÍSTAS DE INVENTARIO

CEP. MODELO CLÁSICO DE LA CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO.

Durante un año se descompusieron 13 alternadores, la aparición de la avería es de 767.85hrs si cada alternador tiene 8hrs de vuelo diarias entonces al acumular entre los 28 alternadores 767.85 hrs la probabilidad de que haya una avería existe.

Se manda al servicio los alternadores cada 4000hr de vuelo y el costo de ese servicio es de $3000 dólares (aproximadamente $39000 pesos). Se estima que el costo de almacenamiento por alternador y por hora es de $100 pesos. El tiempo de entrega, entre el servicio y el envío de un alternador descompuesto es de 21 días.

Tomemos dos casos. Primero consideremos nuestra tasa de consumo sin considerar la curva de supervivencia exponencial.

Determinemos una política óptima de inventario para los alternadores. Recordemos que la media es igual a 6.12 y $m(t) = \lambda t$, por lo que $\lambda = \frac{(\ )}{} = \frac{.}{} = 0.0013$ alternadores.

λ=0.0013 alternadores, taza de consumo.

K=$39000, costo de mantenimiento.

H=$100 por hora de servicio, costo de almacenamiento.

L=21 días, por 8 hrs. de vuelo de cada alternador, entonces L=8X21x28=4704 horas de vuelo.

Así por la formula (2.4)

$$y* = \sqrt{\frac{(\quad)(\ .\ )}{}} = 1.004 \text{ alternador.}$$

La longitud del ciclo correspondiente es:

$$t^* = \frac{^*}{} = \frac{}{.} = 769.2 \text{ horas.}$$

Como L=4704 hr. es mayor que la longitud del ciclo t*(769 hr.) se debe calcular L_e. La cantidad de ciclos incluidos en L es n=(entero mayor≤——) $= 6$

Entonces L_e = L-nt*=4704-(6x769)=90 horas de vuelo. Entonces el punto de reorden se presenta cuando la cantidad de inventario baja a $L_e\lambda$=90X0.0013=0.117 alternador.

La política de inventario para pedir los alternadores es:

Pedir 1 alternador cuando el inventario baja a 1 alternador.

El costo por ciclo del inventario correspondiente a la política propuesta (2.2) es:

TCU(y)=$\frac{\$}{\_\_\_} + \$100 - = \$100.7$ por hora de servicio.

Ahora bien consideremos, el caso en que la función de supervivencia es una exponencial.

Determinemos una política óptima de inventario para los alternadores. Considérese

λ=1.677x10^{-6} alternadores, taza de consumo.

K=$39000, costo de mantenimiento.

H=$100 por hora, costo de almacenamiento.

L=21 días, por 8 hrs. de vuelo de cada alternador, entonces L=8X21x28=4704 horas de vuelo.

Así por la formula (2.4)

$y * = \sqrt{\frac{(\quad)(\ .\quad)}{\quad}}$=0.036 alternador.

La longitud del ciclo correspondiente es

$$t^* = \frac{y *}{\lambda} = \frac{0.036}{1.677x10} = 21466.9 \text{ hr}$$

Como t*>L, entonces la política de inventario es pedir 1 alternador cada 21467 horas de servicio, aproximadamente cada 96 días.

El costo por ciclo del inventario correspondiente (2.2)es:

TCU(y)=$\frac{\quad}{\ .\ } + 100 - = \$50.06$ por hora .

CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO DE UN ARTÍCULO CON LIMITACIÓN DE ALMACÉN.

Se realiza una tabla similar a la del libro TAHA, para resolver con este procedimiento. Consideremos nuestra tasa de consumo sin considerar la curva de supervivencia exponencial.

Determinemos una política óptima de inventario para los alternadores. Considérese

λ=0.0013, taza de consumo.
K=$39000, costo de mantenimiento.
H=$100 por hora, costo de almacenamiento.
L=21 días, por 8 hrs. de vuelo de cada alternador, entonces L=8X21x28=4704 horas de vuelo. Tiempo de mantenimiento del alternador y entrega.
A= área total disponible =8 m^2
a= área de almacenamiento necesaria por unidad de inventario =3m^2

Veamos primero que con la política de inventario de la CEP se encuentra y*=1, determinemos si cumple nuestra restricción:

$$ay \leq A$$
$$3m^2(1) = 3\ m^2 \leq 8m^2$$

Por lo que no será necesario pasar a aplicar el paso 3 de nuestro procedimiento, pues éste es nuestro óptimo. Revise el anexo tabla 4.

Cada uno de los cálculos converge al mismo óptimo, al que se determinó en la primera parte con la tasa de consumo de 0.0013, entonces *y**=1, y cada una de las *y*´s se encuentran por debajo de la restricción de área de almacenamiento.

Ahora bien consideremos, el caso en que la función de supervivencia es una exponencial. Determinemos una política óptima de inventario para los alternadores.

Sean:
$\lambda=1.677X10^{-6}$, taza de consumo.
K=$39000, costo de mantenimiento.
H=$100 por hora, costo de almacenamiento.
L=21 días, por 8 hrs. de vuelo de cada alternador, entonces L=8X21=4704 horas de vuelo. Tiempo de mantenimiento del alternador y entrega.
A= área total disponible=8m^2
a= área de almacenamiento necesaria por unidad de inventario =3m^2

Veamos primero que con la política de inventario de la CEP se encuentra *y**=1, determinemos si cumple nuestra restricción:

$$ay \leq A$$
$$3m^2(1) = 3\ m^2 \leq 8m^2$$

Por lo que no tiene caso aplicar el paso 3 de nuestro procedimiento, pues éste es nuestro óptimo. Por no dejar a la deriva el procedimiento apliquemos el paso 3, obtuvimos el mismo resultado, revise el anexo tabla 4.

Cada uno de los cálculos converge en el mismo óptimo que se determinó en la primera parte con la tasa de consumo de $1.677x10^{-6}$, entonces y*=1. Además todos los y´s se encuentran por debajo del la restricción del área de almacenamiento $ay \leq A$, por lo que en este caso no importa esta restricción.

MODELO DE REVISION CONTINUA

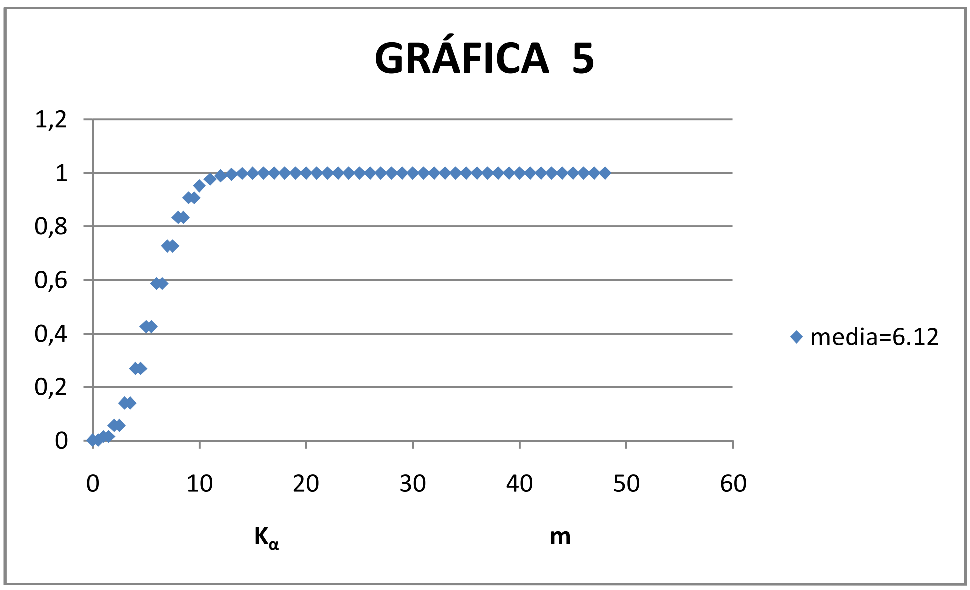
MODELO PROBABILIZADO DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO.

Del primer modelo se determinó que la cantidad económica de pedido era CEP=1 unidades. Si la demanda tiene distribución de Poisson, con media μ_L=6.12 y varianza igual a λt. Determinemos el tamaño de la reserva tal que la probabilidad de que se agote la existencia sea menor que α= 0.05.

El tiempo efectivo de retraso es L=4704horas de vuelo. Por la ecuación 1.30 y 1.31 tenemos que

$\mu_L=DL=(0.0013)(4704)=6.12$ unidades por hora de vuelo.

$\sigma_L=\sqrt{\sigma^2 L}=\sqrt{(0.036)^2(4704)}=\sqrt{(0.036)(4704)}=2.47$ alternadores.



De acuerdo con las tablas de distribución de Poisson (ver el anexo-tabla 2) y $P(K_\alpha \leq m) \leq \alpha$ …..(ecuación 2.12), si queremos calcular el tamaño de reserva tal de que la probabilidad de que se agote sea menor que 0.05, $P(K_{0.05} \leq m) \leq 0.05$, en consecuencia, se calcula el tamaño de la reserva como sigue:

$K_{.} \geq B + \mu$ entonces $B \leq K_{0.05}+\mu_L$

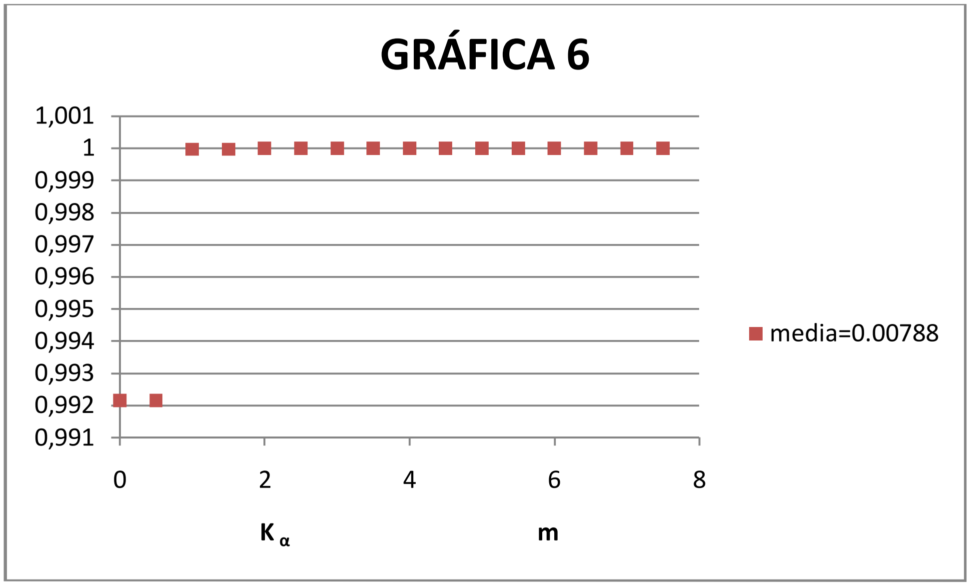
Luego $B \leq 10 + 6.12 = 16$ alternadores.

Como la CEP y*=1 alternadores, la política óptima de inventario con una reserva B establece comprar 1 unidad siempre que el nivel de inventario baje a 22=16+6 (=B+μ_L) unidades.

En el primer modelo utilizado, se determino que la cantidad económica de pedido era de 1 unidad. Si el consumo tiene distribución de Poisson, con λ=1.677X10^{-6}, media y varianza igual a λt. Determinemos el tamaño de la reserva tal que la probabilidad de que se agote la existencia sea menor que α= 0.05.

El tiempo efectivo de retraso es L=4704 horas de vuelo. Por las ecuaciones 1.30 y 1.31 tenemos que μ_L=DL= (1.677X10^{-6})(4704)=0.0078 unidades por hora de servicio.

$\sigma_L=\sqrt{\sigma^2 L}=\sqrt{(1.29x10^{-3})^2(4704)}=\sqrt{1.677x10^{-6})(4704)}=\sqrt{.0078}=0.088$ unidades.



De acuerdo con las tablas de distribución de Poisson (ver el anexo- tabla 2) y $P(m \geq K_\alpha) \leq \alpha$ …..(ecuación 2.12), si queremos calcular el tamaño de reserva tal de que la probabilidad de que se agote sea menor que 0.05, $P(m \geq K_{0.05}) \leq 0.05$, en consecuencia, se calcula el tamaño de la reserva como sigue:

$$K \geq B - \mu$$

En este caso, si se considera nuestra distribución de consumo como una Poisson con media= 6.57X10^{-5}, los cálculos para determinar nuestra reserva se estanca, pues no generamos ninguna probabilidad menor de 0.9821, este modelo tiene la limitación de que para valores para medias muy pequeñas no calcula la distribución acumulada. Por lo que para este modelo con media no es aplicable este método.

MODELO PROBABILÍSTICO DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO

Nuestra compañía aérea usa 6.12 alternadores por ciclo. Le cuesta $39000 hacer un servicio para cada alternador. El costo de almacenamiento por alternador y por hora es de $100, y el costo de faltante por alternador es de $500. Los datos de la primera parte indicaron que los consumos tiene una distribución Poisson. Determinemos la política óptima de pedidos para la compañía aérea.

Se usan los símbolos del modelo y entonces:

λ=0.0013, taza de consumo.

K=$39000, costo de mantenimiento

H=$100 por hora, costo de almacenamiento

L=21 días, por 8 hrs. de vuelo de cada alternador, entonces L=8X21x28=4704 horas de vuelo. Tiempo de mantenimiento del alternador y entrega.

p=$500

f(m)= $p\ (t) = \sum\ p\ (t-u)f(u)$, con $p\ (0) = 0.$

E{m}=(0.0013)(4704)=6.12

Primero se necesita comprobar que el problema tenga una solución factible. Se aplica las ecuaciones 2.23 y 2.24 para obtener

$$y = \frac{(\quad \{\ \})}{} = \frac{(\ .\ )(\qquad (\ .\ )}{} = \frac{.}{} = 1.04$$

$$y = \frac{}{} = \frac{(\ .\ )}{} = 0.0065$$

Como $y \geq y$, el método no garantiza que las soluciones y* y R* sean únicas.

Ahora por último consideremos que nuestra compañía aérea usa $1.677x10^{-6}$ por ciclo. Le cuesta $39000 hacer un servicio para cada alternador. El costo de almacenamiento por alternador y por hora es de $100, y el costo de faltante por alternador es de $500. Los datos históricos indican que el consumo, durante el tiempo de servicio, tiene distribución de Poisson. Determinemos la política óptima de pedidos para la compañía aérea.

Se usan los símbolos del modelo y entonces:

λ=$1.677X10^{-6}$, taza de demanda

K=$39000, costo de mantenimiento

H=$100 por hora de vuelo, costo de almacenamiento

L=21 días, por 8 hrs. de vuelo de cada alternador, entonces L=8X21x28=4704 horas de vuelo. Tiempo de mantenimiento del alternador y entrega.

p=$500

Recordemos entonces:

$$p\quad(t) = \frac{(\lambda t)\quad e}{m!}$$

E{m}= $m(t) = \lambda t$

Consideremos el L=t= 4704, entonces:

E{m}=$(1.677x10^{-6})(4704)$=0.00788 alternador por hora de servicio.

Primero se necesita comprobar que el problema tenga una solución factible. Se aplica las ecuaciones 2.23 y 2.24 para obtener

$$y = \sqrt{\frac{2\lambda(K + PE\{m\})}{H}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(1.677x10\quad)(39000 + 500(0.00788)}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.1308}{100}} = 0.036$$

$$y = \text{—} = \frac{(\ .\qquad)}{} = 0.00000838$$

Como $y \geq y$, el método no garantiza que existan soluciones únicas para y* y R*

CONCLUSIONES

Los cálculos para la obtención de la edad media de la aparición de la avería y la tasa de consumo son realmente muy sencillos y prácticos. Lo difícil son la cantidad de operaciones recursivas, pero cuando se tiene un programa como Excel para auxiliarnos realmente resulta muy sencillo. Por lo cual se deben de desarrollar programas cada vez más especializados, y que tengan para las operaciones de cada algoritmo un nivel de sensibilidad para obtener errores muy pequeños.

Lo más recomendable en un análisis de este tipo es que la recopilación de datos tenga por lo menos un historial de un año o más, para garantizar que las tasas, cualquier dato de centralización como la media o de dispersión, “tendrán” un comportamiento “constante” dentro de nuestros ciclos.

Además, el análisis aquí desarrollado, tuvo dos límites de funcionamiento, uno para aquellos equipos que se mandan al servicio cada 4000 hrs. y empiezan su historial desde cero nuevamente y otro de los equipos que ya no son recomendables para seguir utilizando por la cantidad de horas funcionando. Este último no se aplicó en esta tesis pero se debe saber que también se puede calcular y emplear para evitar accidentes.

Aplicando esta teoría a nuestros datos, se obtiene que la edad media de la aparición de la avería considerando ya el tiempo que tienen de vida, es el valor medio de la variable T, la cual tiene como media: $\tilde{t} = \sum \quad tp \quad = 6214.28\text{hrs}$ y varianza de $\sigma \quad = 218382724$ hrs^2.

Luego, la probabilidad de que no haya ningún consumo o haya en un intervalo se pude calcular, por ejemplo la probabilidad de que se hizo una descompostura en el intervalo de 0 a 24000 será: $p_{1a}(24000)=0.0657$, pero $p_{3a}(16000)=0.00017$,es decir la probabilidad de que haya 3 descomposturas solamente en el intervalo 0 a 16000. Y con cada una de estas probabilidades se determino el consumo medio es $m(t)\approx 6.12$ aproximadamente.

De aquí se puede calcular la tasa para la duración de un alternador en servicio, como $m(t) = \lambda t$, por lo que $\lambda = \frac{(\ )}{} = \frac{.}{} = 0.0013$

Si suponemos que el comportamiento de nuestro fenómeno la curva de supervivencia es una función exponencial: $v(t)=e^{-\lambda t}$, entonces la función de supervivencia $v(t)=0.9907e^{-1.677x10-6t} \approx e^{-1.6777x10-6t}$ y la tasa de consumo es $\lambda=1.677x10^{-6}$.

Estos datos se ocuparán para poder aplicar los modelos de inventario que requieren el conocimiento de la tasa de consumo y llegar a obtener el stock óptimo.

CEP. MODELO CLÁSICO DE LA CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO.

- ✓ λ=0.0013 taza de consumo.

La política de inventario para pedir los alternadores es:

Pedir 1 alternadores cuando el inventario baja a 1 alternadores.

- ✓ $\lambda=1.677X10^{-6}$, taza de consumo.

La política de inventario es pedir 1 alternador cada 4704 horas (21 días).

CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO DE UN ARTÍCULO CON LIMITACIÓN DE ALMACÉN.

- ✓ Cada uno de ellos converge en el mismo óptimo que se determinó en la primera parte con la tasa de consumo de 0.0013, entonces y*=1, y cada una de las y´s se encuentran por debajo de la restricción de área de almacenamiento.
- ✓ Cada uno de ellos converge en el mismo óptimo que se determinó en la primera parte con la tasa de consumo de $1.677x10^{-6}$, entonces y*=1. Además todos los y´s se encuentran por debajo del la restricción del área de almacenamiento $ay \leq A$, por lo que en este caso no importa esta restricción.

Nuevamente este modelo con la segunda tasa de avería, tampoco es muy recomendable, pues la convergencia se hace muy lenta y no toma en cuenta nuestra restricción del área de almacenamiento, por lo que si tuviéramos problemas de espacio, el problema se complicaría.

Nótese que estos dos modelos coinciden con los valores óptimos (y*=1) de inventario aún cuando las hipótesis difieren un poco. También si somos observadores el segundo óptimo que se obtiene con la función de supervivencia exponencial, fue igual a y*=0.1, pero para nuestra conveniencia y considerando que no es 0 se tomará igual a y*=1, para enfrentar las probabilidades de que en un ciclo exista un reemplazo del alternador averiado, ver anexo-tabla3.

MODELO PROBABILIZADO DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO.

- ✓ λ=0.0013 taza de consumo.

  Como la CEP y*=1 alternadores, la política óptima de inventario con una reserva B establece comprar 1 unidad siempre que el nivel de inventario baje a 22=16+6 $(=B+\mu_L)$ unidades funcionando.

- ✓ $\lambda=1.677X10^{-6}$ taza de consumo.

  Si se considera nuestra distribución de consumo como una Poisson con media= 0.0078, los cálculos para determinar nuestra reserva se estanca, pues generamos probabilidades no menores a 0.9221 y, este modelo tiene la limitación de que para valores para medias muy pequeñas no calcula la probabilidad que nosotros requerimos. Por lo que para este modelo con media no es aplicable el método.

Este modelo no es factible porque con la primera tasa aunque generamos el mismo óptimo que los demás, deja como margen de quedarnos con 16 alternadores funcionando, cuando en la practica esto no puede suceder pues todos y cada uno de los aviones tiene un itinerario completo de 8 hrs. aproximadamente. Y con la segunda tasa no podemos generar la distribución con la estimación de 0.05 en la probabilidad de avería.

MODELO PROBABILÍSTICO DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO

- ✓ λ=0.0013 taza de consumo. Se comprueba que el problema no tiene una solución factible. Pues:

$$y = \sqrt{\frac{2\lambda(K + PE\{m\})}{H}} = \sqrt{\frac{2(0.0013)(39000 + 500(6.12)}{100}} = \sqrt{\frac{109.35}{100}} = 1.04$$

$$y = \frac{P\lambda}{H} = \frac{500(0.0013)}{100} = 0.0065$$

Como $y \geq y$, el método no garantiza que las soluciones y* y R* sean únicas.

- ✓ $\lambda=1.677X10^{-6}$ taza de consumo. Se necesita comprobar que el problema no tiene una solución factible. Pues:

$$y = \sqrt{\frac{2\lambda(K + PE\{m\})}{H}} = \sqrt{\frac{2(1.677x10\quad)(39000 + 500(0.00788)}{100}} = \sqrt{\frac{0.1308}{100}} = 0.036$$

$$y = \frac{P\lambda}{H} = \frac{500(1.677x10\quad)}{100} = 0.00000838$$

Como $y \geq y$, el método no garantiza que existan soluciones únicas para y* y R*

Entonces con estos datos, este modelo con cualquiera de nuestras tasas no es recomendable.

En resumen,

<u>Para resolver el problema del jefe de mantenimiento con estas características, la política recomendable es tener en stock 1 alternador, por ciclo de 4704 horas acumuladas de servicio.</u>

De acuerdo con lo anterior debemos tomar en cuenta que análisis como este, y todavía más especializados, aunque llegan hacer un poco caros y tal vez tardados, son necesarios para compañías cada vez más tecnificadas y, en donde sobretodo, ofrecen servicios que incumben la integridad del consumidor. Al largo plazo, tal vez, se podrían reducir los costos dentro del área de inventarios y de mantenimiento, lo cual se notaría en la obtención de ganancias netas para la empresa. Y además salvaguardarían las integridades físicas y emocionales de los consumidores, ahora que en estos tiempos ocurren accidentes aéreos cada vez más frecuentes.

BIBLIOGRAFÍA

[1] http://www.economia.unam.mx/sua/site/materia/sem4/estadistica/cap5/dudas.htm

[2] jorgegalbiati.cl/enero_07/ModelosProbabilidad.

[3] John E. Freund, Irwin Miller, Marylees Miller, “ESTADÍSTICA CON APLICACIONES”, Sexta edición. PEARSON-PRENTICE-HALL. México, 2000

[4] Murray R. Spiegel, “PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA”, Serie Shaums. MCGRAW-HILL. México, 1976.

[5] Hamdy A. Taha, “INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”, Séptima edición. PEARSON-PRENTICE-HALL. México, 2004.

[6] Hamdy A. Taha , “INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”, Quinta edición. ALFAOMEGA. México, 1995.

[7] A. Kaufmann, “MÉTODOS Y MODELOS DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”, CECSA. México, 1966.

[8] Meyer, Paul L., “PROBABILIDAD Y APLICACIONES ESTADISTICAS”, Fondo Educativo Interamericano. México, 1986.

[9] Datos proporcionados por el jefe de mantenimiento de la Compañía Aérea: Aeromar.

TABLA 1

ALTERNADORES INSTALADOS N/P: 20032-2 9

MATRÍCULA.	POSICIÓN	N/S	TSN	TSO	FECHA	Momento de la avería
			Tiempo desde nuevo	Tiempo desde su último servicio		
SJJ	LH	1336	DESC.	3910.24	10/04/2008	15 de Enero
SJJ	RH	1453	215353.57	1174.45	10/04/2008	5 de Marzo
TIC	LH	1412	DESC.	472.29	10/04/2008	21 de Marzo
TIC	RH	1652	17928.10	1819.19	10/04/2008	13 de Mayo
SYH	LH	1721	19755.71	3750.16	10/04/2008	25 de Junio
SYH	RH	1647	19820.57	3848.14	10/04/2008	9 de Septiembre
RNP	LH	2090	4137.06	168.30	11/04/2008	17 de Septiembre
RNP	RH	1173	23136.08	3151.24	11/04/2008	28 de Diciembre
RXC	LH	1031	25635.60	2063.71	10/04/2008	808461.86
RXC	RH	197181	DESC.	3174.76	10/04/2008	28873.63786
UFA	LH	197438	31471.25	3396.29	10/04/2008	
UFA	RH	1689	18769.58	336.08	10/04/2008	
UAU	LH	197675	22244.54	2267.46	10/04/2008	
UAU	RH	2047	4529.69	497.30	10/04/2008	
TAH	LH	197694	27820.37	1142.17	09/04/2008	
TAH	RH	197337	28554.26	559.19	09/04/2008	
TAI	LH	185369	DESC.	1588.14	10/04/2008	
TAI	RH	197183	31299.38	3413.40	10/04/2008	
UAV	LH	197686	28109.95	1168.52	10/04/2008	
UAV	RH	1499	22349.97	2315.67	10/04/2008	
TKJ	LH	197740	24696.17	1480.32	10/04/2008	
TKJ	RH	197241	DESC.	710.91	10/04/2008	
TPR	LH	1240	28744.38	906.19	10/04/2008	
TPR	RH	1590	20460.64	173.41	10/04/2008	
TPS	LH	1567	18640.50	2671.24	10/04/2008	
TPS	RH	1185	25500.64	1354.31	10/04/2008	
TRI	LH	1613	21357.90	3543.93	09/04/2008	
TRI	RH	197573	12860.19	940.44	11/04/2008	
TRJ	LH	1516	18977.92	3040.36	10/04/2008	
TRJ	RH	1497	22963.29	3031.98	10/04/2008	
TALLER	Buen estado	1451	22903.22	1512.66	11/04/2008	
TALLER	Buen estado	2088	3927.56	3927.56	11/04/2008	
TALLER	Buen estado	197465	22605.00	3985.00	11/04/2008	
ALMACEN	Mal estado	1637	19976.32	3995.69	11/04/2008	

T. EXTERNO	Reparación	2096	3932.45	3932.45	11/04/2008

TABLA 2
DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Media=6.12		Media=0.000281				
m			m		m	
0	0.002198456	0.992150966	0.000000001	0.992150966	1.00E-42	0.992150966
0.5	0.002198456	0.992150966	0.000000002	0.992150966	2E-42	0.992150966
1	0.015653006	0.999969115	0.000000003	0.992150966	3.00E-42	0.992150966
1.5	0.015653006	0.999969115	0.000000004	0.992150966	4E-42	0.992150966
2	0.056823931	0.999999919	0.000000005	0.992150966	5.00E-42	0.992150966
2.5	0.056823931	0.999999919	0.000000006	0.992150966	6E-42	0.992150966
3	0.140812617	1	0.000000007	0.992150966	7.00E-42	0.992150966
3.5	0.140812617	1	0.000000008	0.992150966	8E-42	0.992150966
4	0.269315307	1	0.000000009	0.992150966	9.00E-42	0.992150966
4.5	0.269315307	1	0.00000001	0.992150966	1E-41	0.992150966
5	0.426602599	1	0.000000011	0.992150966	1.10E-41	0.992150966
5.5	0.426602599	1	0.000000012	0.992150966	1.2E-41	0.992150966
6	0.587035636	1	0.000000013	0.992150966	1.30E-41	0.992150966
6.5	0.587035636	1	0.000000014	0.992150966	1.4E-41	0.992150966
7	0.72729995	1	0.000000015	0.992150966	1.50E-41	0.992150966
7.5	0.72729995	1	0.000000016	0.992150966	1.6E-41	0.992150966
8	0.834602149	1	0.000000017	0.992150966	1.70E-41	0.992150966
8.5	0.834602149	1	0.000000018	0.992150966	1.8E-41	0.992150966
9	0.907567645	1	0.000000019	0.992150966	1.90E-41	0.992150966
9.5	0.907567645	1	0.00000002	0.992150966	2E-41	0.992150966
10	0.952222528	1	0.000000021	0.992150966	2.10E-41	0.992150966
11	0.977066882	1	0.000000022	0.992150966	2.2E-41	0.992150966
12	0.989737502	1	0.000000023	0.992150966	2.30E-41	0.992150966
13	0.99570244	1	0.000000024	0.992150966	2.4E-41	0.992150966
14	0.99830997	1	0.000000025	0.992150966	2.50E-41	0.992150966
15	0.999373842	1	0.000000026	0.992150966	2.6E-41	0.992150966
16	0.999780773	1	0.000000027	0.992150966	2.70E-41	0.992150966
17	0.999927269	1				
18	0.999977077	1				
19	0.99999312	1				
20	0.99999803	1				
21	0.99999946	1				
22	0.999999858	1				
23	0.999999964	1				

24	0.999999991	1
25	0.999999998	1