INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

LUGARES GEOMÉTRICOS: ¿CUÁL ES SU ROL EN LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA?

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Verónica Molfino Vigo

Director de Tesis:
Dr. Greisy Winicki-Landman

México, D.F., a Mayo de 2006.

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 18 del mes de Mayo del 2006 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Lugares Geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en Geometría?"

Presentada por la alumna:

Molfino	Vigo	Verónica
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	3	2

aspirante al grado de:

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Greisy Winicki Landman

Codirector

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dra. Rocío Alejandra Muñoz Hernández

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el día **26** del mes **mayo** del año **2006**, el (la) que suscribe **Verónica Molfino Vigo** alumno (a) del Programa de **Maestría en Ciencias en Matemática Educativa** con número de registro **A030232** adscrito al **Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada**, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de **Dra. Greisy Winicki-Landman** y cede los derechos del trabajo intitulado **Lugares Geométricos: ¿cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría?** al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección veromol@adinet.com.uy. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

VMolfino

Verónica Molfino Vigo

Índice

Resumen

Este trabajo presenta un estudio acerca del papel que juegan los lugares geométricos en la enseñanza de la demostración en geometría. La investigación fue realizada con una doble finalidad: investigar un problema concreto de la práctica educativa, reflexionar sobre ella y modificarla en consecuencia, y aportar fundamentos teórico-metodológicos para el proceso de revisión que vive actualmente la Enseñanza Media Superior (EMS) en Uruguay, concretamente en el área de la demostración en Geometría.

Se plantearon dos objetivos: analizar y describir las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular –de lugares geométricos y de construcción– en lo que refiere a los esquemas de demostración y procesos que se hacen presentes, así como a las funciones de demostración que se manifiestan en la resolución; y analizar cómo el abordaje de este tipo de problemas permite el fortalecimiento o no en los estudiantes de la práctica de demostración en matemática y geometría en particular, sus maneras de conjeturar resultados y sus modelos de justificación.

Partiendo del supuesto de que el conocimiento se construye respondiendo a cuestionamientos enmarcados en un contexto social y cultural específicos, que es introducido en la matemática escolar respondiendo a cuestionamientos concretos de dicha sociedad y que sufre una transposición didáctica, se analizó, en primer lugar, cómo y cuándo se introdujo el tema "lugares geométricos" de manera explícita en el currículum de la EMS en Uruguay, particularmente en el Bachillerato Diversificado (BD).

Por otra parte, para lograr los objetivos propuestos se confeccionó una serie de problemas en cuya resolución interviene el concepto de lugar geométrico. La misma fue propuesta en dos grupos de estudiantes de 5º año de BD (16-17 años) orientación Científica, de un Instituto de Educación Secundaria en Montevideo, Uruguay.

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas de acuerdo con los esquemas de demostración de Sowder y Harel (1998) y las funciones de la demostración que plantea de Villiers (1993). Se trabajó como marco teórico global con la teoría de los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997, de Villiers, 2003) y la descripción de los procesos involucrados en cada nivel.

Abstract

This work presents a research about the role that 'geometric locus' plays in the teaching of proof. The aims of this study are to investigate a problem of educational practice, think about it and modify this practice if necessary, and provide theoretical and methodological fundaments for the revision process that is actually going through the Upper Middle School level (High School) in Uruguay, especially in the geometric area.

Glosario

Educación Secundaria

Ciclo Básico Único (CBU)

Educación Media Superior (EMS)

Bachillerato Diversificado (BD)

Esquema de demostración (Sowder y Harel)

Funciones de la demostración (de Villiers)

Lugar Geométrico

Relación de cuadros, tablas y figuras

Introducción

Es indiscutible que la educación es una característica propia y necesaria en el desarrollo de la humanidad. Con esta, las maneras de educar han ido evolucionando a lo largo de la historia, y en una parte importante de ese proceso existía la ingenua creencia de que el conocimiento se transmite de forma simple y directa: el alumno era el que 'no sabía', el docente el dueño del saber y la relación entre docente y alumno era concebida unidireccional.

La investigación, que ha venido ganando un espacio cada vez mayor en el desarrollo de las teorías vinculadas a la educación, ha generado importantes aportes al respecto, haciendo evidente que la relación entre alumno, profesor y conocimiento constituye una red muy compleja y rica de interacciones, a diferencia de lo que se creía hace sólo unos siglos atrás. Esta evidencia es lo que justifica estudios como el presente trabajo de investigación, realizado para presentar como tesis de Maestría en Ciencias de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

En todo momento viví este proceso como un momento de planteamientos profundos: el trabajo que aquí comienza no solamente representa la síntesis de los dos años de estudio para los cursos de la Maestría, sino también una revisión de mi formación de grado original como de las experiencias vivenciadas en los años de práctica educativa en diferentes contextos que he venido realizando.

En particular, son dos las metas que guían este trabajo –tal vez algo ambiciosas–: una es que la experiencia sirva de guía para futuras investigaciones, es decir, ir precisando ciertas concepciones y maneras de actuar que me definan como profesora e investigadora en Matemática Educativa, en el marco de una comunidad de profesores que trabajan, en líneas generales, con los mismos objetivos y métodos, y que de a poco se está conformando aquí en Uruguay. En este sentido me identifico con Eco (2000; 24) en que para el planteo de un tema de tesis, no es tan importante el tema en sí o el interés que la comunidad tenga por él, como la experiencia de trabajo que significa para quien lo lleva a cabo.

El otro objetivo concreto que guiará este estudio es el de investigar un problema relacionado estrechamente con mi práctica educativa, y de modo que esta investigación sea una herramienta para reflexionar sobre ella y modificarla.

El trabajo que hoy presento no fue confeccionado de manera lineal sino que fue tomando forma a medida que me iba “empapando” en la situación y comprometiéndome con el trabajo de campo y la investigación teórica. En un principio escribí un anteproyecto como trabajo final de una de las materias del último semestre de la Maestría. Esa fue una oportunidad para ir reflexionando, analizando y explicitando las intenciones para la investigación. De ahí en más fui recorriendo un largo camino, en el cual las decisiones tomadas –objetivos, preguntas de investigación, estudiantes a considerar, metodología, etc.– condujeron a que la investigación fuera tomando la forma que hoy tiene.

El trabajo consta de seis capítulos, además de esta introducción. El primero de ellos está dedicado a la descripción del problema analizado y de la línea de investigación que rigió a grandes rasgos el estudio. En él se describe brevemente el camino que condujo a la elección del tema y la población con la que trabajar y se explicitan las preguntas originales que motivaron el análisis del problema detectado así como los objetivos generales. También se presenta una justificación de la investigación, mostrando la pertinencia de la misma en el contexto de la Matemática Educativa en Uruguay. Por último se puntea el desarrollo de la investigación en su conjunto.

El segundo capítulo contiene el marco teórico empleado durante la investigación. Se discute sobre los diferentes conceptos de demostración y los esquemas, niveles y funciones de la misma que presentan diferentes autores, haciendo especial hincapié en la demostración en geometría. En el tercer capítulo se exhibe un análisis sobre el lugar que ocupa la demostración en geometría en el discurso matemático escolar actual desde el punto de vista curricular. Se estudia en particular la aparición del tema “Lugares Geométricos” (LG) en los programas oficiales de Educación Secundaria en Uruguay a través de un recorrido por los mismos que comienza en el año 1941. Este análisis surge como respuesta a una de las preguntas iniciales acerca de la pertinencia de la existencia de este tema en el discurso matemático escolar actual.

Se dedicó el cuarto capítulo a la descripción de la investigación puesta en práctica con los estudiantes. En él se formulan las preguntas de investigación con precisión, se describen los modos de recolección de datos y se presenta la actividad propuesta, así como un amplio abanico de posibles respuestas esperadas. En este capítulo se narra la experiencia piloto que sirvió para testear la propuesta y mejorar los aspectos que se consideraron necesarios. También se describe el tipo de estudiantes con el que se trabajó, tanto en la experiencia piloto como en las experiencias posteriores.

En el capítulo cinco se muestran los datos obtenidos con los estudiantes en la experiencia de campo, analizándolos a la luz de los aspectos desarrollados en el capítulo segundo, que contiene al marco teórico. Además de presentar un estudio detallado de cada situación, se presentan dos apartados en los que se resumen las observaciones realizadas sobre cada grupo analizado.

Por último, el sexto capítulo está dedicado a las reflexiones personales y consta de cuatro apartados. En el primero se da respuesta a las preguntas formuladas en el capítulo cuarto así como se revén los objetivos propuestos con el fin de reflexionar sobre el logro de los mismos. Los siguientes dos apartados están dedicados a exponer conclusiones y reflexiones generales que fueron surgiendo a medida que la investigación iba tomando forma y que no se consideraron como objetivos centrales en un principio. En el cuarto apartado se describen las preguntas que quedan pendientes, así como también se exponen las líneas futuras de investigación que quedan abiertas como consecuencia del presente estudio.

Capítulo I: Descripción del problema

El trabajo final de la asignatura “Metodologías de Investigación”, uno de los cursos del último semestre de la maestría, consistió en un Anteproyecto del trabajo de Tesis. La propuesta era escribirlo pensando en que sería una buena guía desde el punto de vista metodológico, una especie de “ejercicio” para la labor que vendría, pero sin sentir la presión de que tendríamos que aferrarnos a él en adelante. Hoy, después de más de un año de haberlo escrito, puede observarse que dicho trabajo fue aún más que una guía metodológica, ya que sus lineamientos generales, el espíritu y los objetivos se mantuvieron intactos. La posterior lectura de material específico del tema investigado permitió que se plantearan con más precisión los objetivos y las preguntas de investigación, que el trabajo de campo fuera más propio de la práctica docente y que las respuestas encontradas fueran ajustadas a la realidad en ella.

Este capítulo está dedicado al desarrollo del problema que se estudia en la presente investigación, en él se fusionan esas ideas originales con los aportes a la reflexión que brindó la exploración teórica del tema. En primer lugar se describe brevemente cuál es la línea de investigación que rigió a rasgos generales el estudio. A continuación se detalla el camino recorrido para la elección del tema. En el tercer apartado se presentan el planteamiento del problema y los objetivos generales del estudio. Más adelante se presenta la justificación del tema escogido junto con los supuestos que guiaron la investigación y, por último, se realiza una breve síntesis del desarrollo del trabajo.

I.a Investigaciones hay muchas… ¿cuál es mi opción?

Aprovechando esta oportunidad de “reflexión en voz alta”, es necesario cuestionarse: ¿cuál es la concepción de la matemática y de su enseñanza desde la cual se quiere realizar la práctica educativa?

En la sociedad uruguaya actual –y especialmente en la institución escolar– existe una especie de consenso según el cual se ha legitimado un concepto de la ciencia en general, y particularmente de la matemática, como un saber accesible sólo para algunos. Según datos de la encuesta publicada en 1992 por la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) en el marco de la investigación para realizar un “diagnóstico e investigación sobre la enseñanza básica de Uruguay”, un 29.3% de los estudiantes del Ciclo Básico en Uruguay ubican a Matemática como la materia obligatoria más difícil, un 17.4% a Física y un 13.5% a Química, con lo cual totalizan 60% los estudiantes que reconocieron considerar como la asignatura más difícil a una del área científica (Rama, 1992).

"La irrupción de la Matemática Moderna en las décadas del sesenta y setenta reforzaron en la Enseñanza Media el desarrollo de una matemática que se presentaba como acabada en sí misma, modelo atemporal, lógico y abstracto. Se favoreció una enseñanza impuesta a los alumnos en su presentación teórica y práctica." (A.N.E.P., 1997).

Uno de los primeros objetivos que debemos tener como profesores de matemática es desmitificar esta concepción. Asumir a la matemática y especialmente a la matemática escolar como una ciencia viva, construcción social y cultural de la humanidad a través de la historia. Sólo así podremos legitimar las construcciones de un contexto social particular como puede ser el aula.

Será necesario entonces problematizar la enseñanza de la matemática, reflexionando en particular sobre **nuestra** práctica educativa. Resulta indispensable para ello que los profesores investiguemos seriamente sobre las situaciones que se nos presentan cotidianamente. Al respecto Fernández Pérez (1995; 118) presenta dos posturas enfrentadas: los *radicales* (para quienes sólo es válida la investigación llevada a cabo por docentes que practican su profesión) y los *experimentalistas* (para quienes la única investigación válida es la producida por expertos educativos ajenos a la práctica). Si bien es un hecho que innumerables e invaluables aportes a la Matemática Educativa como disciplina fueron realizados por personas que se dedican exclusivamente a la investigación teórica, la postura *experimentalista* parece totalmente inviable ya que sin el aporte de quienes se comprometen con la práctica educativa concreta dicha disciplina no estaría avanzando.

En este sentido, vale la pena destacar la propuesta de Carr (1990) quien, partiendo de una sólida crítica al planteamiento naturalista–positivista de la investigación educativa, propone una investigación educativa crítica, centrada en los profesores. Según este autor la transición de teoría a práctica implica una transición profesional de una manera a otra –radicalmente distinta– de entender, comprender, percibir y experimentar la propia práctica: de la rutina a la reflexión personal. Constituye una investigación de carácter emancipativo, hermenéutica (comprendida y utilizada por los profesores), científica, que representa un desafío, un interrogatorio crítico permanente a las creencias y supuestos que los profesores de hecho incorporan en sus teorías para su práctica en el aula. Un excelente ejemplo de este tipo de investigación es el efectuado con maestros de primaria en Educación Matemática, descrito en Valdez (1996).

Lejos de ser una actividad libre de valores, apolítica, motivada exclusivamente por una búsqueda desinteresada del saber y la verdad, una práctica educativa signada por una actitud crítica y reflexiva concibe que pretender la neutralidad en los valores es un error. Siempre se priorizan algunos valores educativos sobre otros, por el simple hecho de que los investigadores –docentes– se entregan a su trabajo, y estos valores son considerados en la toma de decisiones que cotidianamente deben efectuar.

En este principio de 'no – neutralidad' se basa Fernández Pérez cuando considera el "*residuo de indeterminación técnica en educación*" (1995; 133). Por tratarse de una ciencia de lo singular, la investigación educativa siempre deja margen a la decisión por parte del profesor, implica que él arriesgue en su praxis, en lugar de regirse por un saber mecánico impuesto por expertos externos al proceso (procedimiento ciertamente más seguro). Así, se impone al profesor la necesidad de reflexionar: es él quien debe decidir cuándo su caso de estudio deja de regirse por una ley general y qué hacer en esos casos. De esta manera se articulan enseñanza e investigación educativa, generalmente disociadas. Ésta –la investigación crítica en el aula– es la investigación educativa con la que me quiero comprometer.

En el Uruguay, hoy, la situación educativa de la enseñanza media y media superior precisa de manera urgente personas comprometidas con un cuestionamiento profundo sobre su práctica y el sistema educativo en general. Está comenzando a gestarse una reforma en educación media superior con características similares a la que ya está consolidada en la educación media: lineamientos que vienen ya indicados en el contrato del préstamo de organismos internacionales, currículos enteros terminados a las apuradas y sin participación del cuerpo docente, formación docente no actualizada con respecto a la situación actual, clases que comienzan sin tener el programa completo, y, en general, decisiones tomadas sin una investigación educativa seria que las sustente.

I.b El acercamiento socioepistemológico

Ahora, la pregunta que surge es: ¿cuál es la perspectiva teórica con que se aborda dicho compromiso? En esta investigación se propone considerar al sistema social como un sistema complejo, donde los humanos aprenden al ejercer prácticas. En la institución escolar, que es hoy por hoy uno de los lugares en el que se ejercen dichas prácticas, y que interesa investigar en el presente trabajo, confluyen tres dimensiones que, integradas, conforman un todo. Estas son la dimensión epistemológica, la cognitiva y la didáctica. A la perspectiva de investigación en Matemática Educativa que integra estas tres dimensiones con la sociocultural, se le ha llamado formalmente *socioepistemología*[1] (Cantoral y Farfán, 2003; 36).

¿Qué es en síntesis un análisis socioepistemológico? En primer lugar, todo análisis epistemológico en educación es parte de un estudio didáctico general, que incluye también aspectos cognoscitivos, pedagógicos, psicológicos y sociales. La socioepistemología parte de la consideración de la necesidad de dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, es decir, que atienda a las circunstancias y escenarios socio culturales particulares

La dimensión epistemológica propone revisar el origen de la ciencia para explicar cómo se desarrolla una idea –en este caso matemática–, detectar estancamientos, avances y retrocesos en la teoría, revisar su consistencia lógica, determinar los criterios de validez. Dentro del triángulo saber – alumno – profesor, el polo epistemológico es el que se centra en el estudio de la transformación que sufre un saber desde que es originado hasta su adaptación actual en las escuelas. Tiene como uno de sus objetivos problematizar la manera en que hoy los conocimientos son presentados en los textos escolares actuales, desmitificar su estatus de productos acabados y convertirlo a uno de productos transpuestos para encontrar e integrar nuevos significados de los conceptos a secuencias de aprendizaje en escenarios escolares.

[1] Presentado en el Seminario de Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación Superior del Cinvestav en México y en una conferencia plenaria de la Conference on Research in Mathematics Education en EEUU durante el mes de setiembre de 1997.

Esta problematización del conocimiento propone determinar, entre otras cosas, las características que lo definen: su génesis, cómo y por qué se integró al ámbito escolar, su desarrollo a lo largo de la historia de la humanidad, sus eventuales transformaciones –particularmente en la manera de difundirse–, las rupturas y la pérdida de significados.

Si bien un análisis epistemológico puede en ocasiones articularse con el desarrollo histórico de un concepto, es importante destacar que no sólo nos aporta información en este aspecto, como un cuento para contarles a nuestros alumnos, sino que brinda más elementos para comprender la importancia de un concepto, sus relaciones con otros, la necesidad de su desarrollo y difusión. Un análisis epistemológico no tiene por qué estar ligado al análisis histórico de un concepto. Una de las características en que se centra la diferencia entre un análisis epistemológico y uno histórico es la intencionalidad con que se realiza. Los registros de objetos antiguos que se van hallando, dan identidad a los actuales a la vez que brindan elementos al investigador para su introducción en el discurso matemático escolar. Por otra parte, un análisis epistemológico se cuestiona sobre las motivaciones que llevan al surgimiento o demora de un resultado, qué obstáculos y avances fueron dando lugar a la forma actual del mismo, desde la perspectiva del contexto social en el que se desarrolla.

Todo análisis epistemológico parte de una concepción de la matemática como una ciencia viva, construcción social y cultural del hombre, que es la que nos permite acercarnos a la naturaleza del saber escolar, a sus significados. Propone el rediseño del discurso matemático escolar, la resignificación de los conceptos matemáticos, lo que implica la construcción de estrategias a emplear para alcanzar los conceptos y mejorar el tratamiento didáctico de las ideas matemáticas en el salón de clase. En tanto que estudia los vínculos entre un concepto y la humanidad, es de característica plenamente dinámica, al igual que todos los procesos que se ven involucrados en la humanidad.

En suma, un análisis epistemológico tiene múltiples componentes: el análisis de cómo surge un concepto y cuál es el ámbito sociocultural en el que se produce, cuáles son las motivaciones que hacen que se origine, se desarrolle y exista la necesidad de difundirlo, cuáles son las relaciones con otros conceptos, los obstáculos con que la humanidad como comunidad de aprendizaje se fue encontrando, y de qué manera los sorteó.

Considerar, como lo hace el enfoque socioepistemológico, que el desarrollo de la ciencia acontece en un escenario social, y en el seno de una CULTURA específica, implica asumir que las condiciones de creación y desarrollo de la matemática están establecidas por dicho contexto cultural. La matemática es desarrollada con fines específicos dispuestos por el mismo, y con las herramientas que le brinda opera en las prácticas sociales que son aquellas prácticas integradas en el escenario social y son creadoras de conocimiento. La socioepistemología pone atención en dichas prácticas, porque es a través de ellas que el ser humano genera conocimiento.

Esta “escuela” de investigación en Matemática Educativa estudia la construcción del conocimiento intentando responder preguntas relacionadas a tres etapas: surgimiento, validación y difusión. Es decir, preguntas como, entre otras, ¿por qué mecanismos se validan las ideas? ¿Cómo se consensúan las ideas matemáticas? ¿Por qué y cómo sobreviven? ¿Cómo se difunden y cómo deberían difundirse?

I.c Camino recorrido en cuanto al tema elegido

Desde el momento en que fueron planteados los primeros lineamientos de la investigación, el tema que se deseaba analizar era la demostración en la clase de matemática. Esto puede estar relacionado con la experiencia personal de haber sido profesora durante muchos años del curso Geometría Métrica Euclidiana (correspondiente a uno de los cursos de matemática de la opción “Científico” en el penúltimo año de Bachillerato en Uruguay[2]). Para muchos de los estudiantes que cursan esta materia, esta es la instancia en la que por primera vez se enfrentan a una demostración, y, a la vez, algo que es aún más desafiante: deben construirlas ellos mismos. Es frecuente, pues, encontrar muchos errores en los razonamientos de los alumnos, que fracasan en esta materia aún más que en otras áreas de la matemática.

[2] Como se explica en el capítulo III, el Bachillerato es un ciclo de educación secundaria, preuniversitario, que corresponde a los años 10º, 11ºy 12º de educación formal.

Uno de los primeros cuestionamientos fue sobre por qué la mayoría de los estudiantes atraviesan una fuerte contradicción: mientras en los cuatro primeros años de formación secundaria se trabaja muy poco en la construcción de justificaciones propias en el aula de Matemática, cuando llegan a quinto año sus profesores esperan de ellos que tengan desarrollado un razonamiento deductivo y sean capaces de generar demostraciones elaboradas de forma autónoma. Esto hace pensar que ese tipo de práctica está asociada con la manera particular de conceptualizar la matemática, y con ella su enseñanza descripta anteriormente: como un producto acabado ajeno al sujeto que aprende. Parece ser que esta concepción está fuertemente arraigada, tanto en profesores como en alumnos, evidenciándose en las carencias relativas a la enseñanza y aprendizaje de justificaciones propias. Incluso en los últimos años de Enseñanza Secundaria en Uruguay, en los que los contenidos programáticos incluyen demostraciones de propiedades, esta concepción se hace presente. Varias investigaciones atestiguan que precisamente ése es el problema que se presenta en la enseñanza de este tema: los alumnos concentran sus esfuerzos en imitar demostraciones que sus profesores escriben o extraídas de libros, en detrimento de la búsqueda de caminos a través de los cuales generar argumentaciones y demostraciones propias, significando dicha actividad (Balacheff, 1982 y 1988; de Villiers, 1993; Galbraith, 1979[3]).

Cabe cuestionarse, incluso, si esa manera de conceptualizar la matemática no es la adoptada también en la enseñanza de otras asignaturas. La justificación de afirmaciones es una herramienta específica de la Matemática, pero no exclusiva. Por consiguiente, dentro de la institución escolar la responsabilidad del desarrollo de la habilidad de justificar razonamientos no recae solamente en la enseñanza de la Matemática. ¿Se intenta desarrollar dicha habilidad desde otras disciplinas del currículo, como el Idioma Español, la Filosofía o la Historia, por ejemplo?

Partiendo de estos cuestionamientos se comenzó a delimitar el problema a investigar. Cuando en el segundo Seminario de Matemática Educativa (otro de los cursos de la maestría) debimos reflexionar acerca del tema a estudiar, la decisión fue la de profundizar en la **justificación y la argumentación como procesos cognitivos**

[3] Citado por Balacheff y Laborde (1988)

presentes tanto en la actividad cotidiana de las personas como en la construcción de su pensamiento matemático. Estos procesos, de estar presentes desde los primeros años de educación matemática, pueden permitir una correcta aprehensión de un proceso aún más complejo: la demostración.

Si bien no se hicieron estudios específicos al respecto, a partir de la observación de situaciones en la práctica educativa se fue constatando, a nivel experiencial, la existencia de una profunda brecha entre los profesores, que por nuestra formación e intereses estamos convencidos de la necesidad de presentar demostraciones y enseñar a nuestros alumnos a justificar sus razonamientos –si bien existen casi tantas maneras de hacerlo como profesores– y los estudiantes, quienes generalmente presentan dificultades para percibir una necesidad real de demostrar las propiedades, especialmente cuando éstas resultan evidentes y se pueden establecer empíricamente. (Harel y Sowder, 1998; de Villiers, 2003). En ocasiones, esto conduce a que los estudiantes consideren a la demostración de los teoremas un "cuento" –cuando no un conjunto de símbolos incomprensibles– que se deben aprender de memoria para repetir al docente en cuanto él lo pida.

Es indiscutible que esta brecha es multicausal, y está relacionada con el concepto de matemática y de su enseñanza ya expuesto. En la presente investigación se optó por centrarse precisamente en ese aspecto particular: la poca necesidad que sienten los estudiantes de demostrar los resultados a los que llegan (documentada en Harel y Sowder, 2003). Generalmente la demostración sólo es tratada en clase como forma de "validar" resultados, pero son proposiciones que el profesor dice de antemano que son ciertas, y como tales no se cuestionan. Entonces, surge en los estudiantes el cuestionamiento: "si son ciertos ¿por qué hay que justificarlos?" (Harel y Sowder, 1998; de Villiers, 2003).

Por otra parte, es un hecho que uno de los temas que aparece con más frecuencia en los exámenes finales de 5º año (penúltimo de bachillerato) en la materia de Geometría Métrica de 5º año es "Lugar Geométrico" (relacionar biunívocamente un conjunto de puntos que cumplen una propiedad dada con una cierta figura). La resolución de problemas en los que se exige "hallar el LG de…" permite a los alumnos ver que la demostración no sólo es legitimar resultados que ya se asumen como válidos, sino que también implica un procedimiento de descubrimiento, autoconvencimiento y convencimiento al compañero. Es una oportunidad en la que se plantea la necesidad de demostrar. Es por eso que se despertó el interés por describir y analizar las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a este tipo de problemas.

I.d Planteamiento del problema, preguntas originales y objetivos

Como fue mencionado, un problema concreto observado en la práctica cotidiana es la dificultad que tienen los alumnos para elaborar pruebas que justifiquen sus conjeturas. Éste es un problema que se evidencia en todas partes del mundo y en todas las ramas de la matemática y de las ciencias en general, pero en esta investigación se analiza específicamente el caso de los estudiantes de segundo año del Bachillerato uruguayo (penúltimo año de secundaria), en un liceo de la capital –Montevideo–, cuando pretenden resolver un tipo particular de problema de Geometría Métrica: hallar lugares geométricos.

El problema se plantea especialmente en pruebas finales: la mayoría de los alumnos intenta detectar cuál es el lugar geométrico a partir del estudio de casos particulares, pero no saben cómo deducir, a partir de la observación de la situación y de propiedades aceptadas como válidas, que la figura hallada es efectivamente el lugar.

Después de un primer análisis del problema, se constata que los **hechos concretos** relacionados al mismo son:

★ La manifestación de un desinterés o falta de motivación por justificar resultados, especialmente cuando parecen evidentes a simple vista. (documentada en Harel y Sowder, 1998 y de Villiers, 2003).

★ La relevancia del tema dentro del currículum del curso, que se hace explícita a través de las propuestas de exámenes finales.

★ La dificultad que presentan los alumnos en la resolución de problemas que requieren el descubrimiento del lugar geométrico y la justificación de ello.

A modo de reconstruir de manera genuina el desarrollo de la investigación, es interesante incluir en esta instancia las **posibles explicaciones** que se plantearon, como una primera aproximación a partir de la práctica docente, y antes de analizar en profundidad la bibliografía relacionada:

- ★ Las prácticas educativas que se han ido construyendo y legitimando a lo largo del tiempo: el docente presenta demostraciones de resultados que él jerarquiza y cree necesarios justificar, suponiendo que a partir de la observación el alumno aprenderá a demostrar. Se le da poca importancia a la construcción social de la demostración como un procedimiento necesario en casos particulares; las argumentaciones esgrimidas por los estudiantes, de no ser estrictamente lógico-deductivas, son desechadas, incluso cuando éstos están dando sus primeros pasos.
- ★ Las carencias en el estudio de estos temas en los primeros años de enseñanza secundaria, entre otros factores, provoca que algunos alumnos presenten cierta inmadurez cognitiva, lo que hace que no logren abstraer las propiedades aplicables a "todos los casos" a partir del análisis de un caso particular. No pueden concebir de manera general el hecho de que 'un punto varíe en una figura', sólo alcanzan a manipular lo que pueden ver concretamente: dibujan tres o más puntos en determinada posición y abordan el problema en función de ellos.
- ★ En este tipo de problemas se hace presente la necesidad de dejar de lado razonamientos de tipo inductivo para lograr aquéllos de tipo deductivo. Es una transición que lleva reflexión, ejercitación, y especialmente tiempo de 'digerir' los resultados, generalmente diferente en cada alumno. Este tiempo personal muchas veces no es tenido en cuenta, tanto por la propia dinámica del trabajo en grupo –generalmente numerosos– como por la necesidad del cumplimiento de los temas en el programa.

Al involucrarse con el tema desde una perspectiva teórica, con los aportes de la bibliografía específica y al articular dicha perspectiva con la práctica educativa, fueron surgiendo las siguientes preguntas, de las cuales algunas fueron útiles en la exploración del tema aunque luego no fueron abordadas en la investigación:

  - ★ ¿Por qué es importante la resolución de problemas de lugares geométricos en el curso de Geometría de penúltimo año de Bachillerato en Uruguay?

- ¿Cómo influye la elaboración en parejas? ¿Incide en la necesidad de la formulación de un lenguaje común?
- ¿Son los problemas de lugares geométricos adecuados para evaluar la demostración en Geometría?
- Saber resolver problemas de lugares geométricos, ¿es un indicador de logro adecuado para evaluar la demostración?
- ¿Cómo crear pruebas relevantes y representativas para evaluar la demostración en el aula?

mientras que otras se convirtieron en el tema central de esta investigación:

- ¿De qué manera influye la resolución de ejercicios de LG en el desarrollo de la habilidad de demostrar en los alumnos?
- ¿Por qué los alumnos presentan tantas dificultades a la hora de resolverlos?
- ¿Qué tipos de resolución presentan los alumnos a los problemas de LG? ¿Se pueden caracterizar según los tipos de demostración de Harel y Sowder (1998), los niveles de Van Hiele (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997; de Villiers, 2003), o las funciones de la demostración que presenta de Villliers (1993)?

o en un antecedente que ayuda a describir el tratamiento del tema en el Bachillerato en el Uruguay:

- ¿Cómo y cuándo se introdujo el tema "Lugares Geométricos" en los programas de Bachillerato en el Uruguay?

Cabe señalar que la meta de la investigación no fue en absoluto responder todas y cada una de estas preguntas, lo que hubiera supuesto un trabajo de mayor magnitud. Las preguntas de investigación se detallan en el capítulo 4 del presente informe. Sin embargo, la formulación de las mismas y la búsqueda de sus respuestas fue útil para lograr delinear con precisión los objetivos de la tesis, que se detallan a continuación.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

- Indagar el surgimiento y la constitución del concepto "Lugar Geométrico" como un saber escolar instituido dentro del discurso escolar vigente del curso de Geometría

Métrica para 5º año opción Científico de Educación Secundaria Uruguaya. Esta sugiero que la suprimas, no es relevante en tu estudio. Es un hecho que hay que enfrentar tanto profesores como estudiantes.

★ Analizar y describir las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular –de lugares geométricos y de construcción– en lo que refiere a los esquemas de demostración y procesos que se hacen presentes, así como a las funciones de demostración que se manifiestan en la resolución.

★ Analizar las maneras de conjeturar resultados de los estudiantes, sus modelos de justificación y cómo el abordaje de este tipo de problemas (de lugar geométrico) permite el fortalecimiento o no en los estudiantes de la práctica de la demostración en matemática y en geometría en particular.

I.e Justificación del trabajo

En principio, la idea de trabajar en demostración surge porque es una herramienta central en matemática que representa una dificultad importante para los alumnos de Bachillerato en el Uruguay.

El cuestionamiento acerca de por qué para los alumnos es tan complicado comprender una demostración, condujo a una posible explicación: es precisamente la práctica educativa asociada la que conlleva dicha dificultad. Tradicionalmente el profesor copia en el pizarrón demostraciones de teoremas, lo más ajustadas al libro de referencia posibles, bajo el supuesto de que el ver demostraciones dará al alumno la capacidad de generar argumentaciones propias en otras situaciones. ¿Constituye esto un obstáculo didáctico para el aprendizaje de la demostración?

La práctica educativa descripta en el apartado 1.a de este trabajo está relacionada con una concepción determinada de demostración: ésta aparece exclusivamente de manera rígida, acabada, como una única serie de encadenamientos lógicos y deductivos. Esto conduce a que su función sea la de verificar y sistematizar resultados ya legitimados por la comunidad matemática, pero no por el grupo-clase (A.N.E.P., 1997).

Se debería cambiar esa práctica relacionada con la demostración –y con el resto de las actividades matemáticas de aprendizaje– para contribuir a que el salón de clase se convierta en un verdadero ámbito de construcción de conocimientos matemáticos. Resulta entonces necesario extender el carácter de práctica social de la demostración en el aula, resignificando la práctica de la demostración a través de la consideración de sus otras funciones: convencimiento propio de un resultado, comunicar y discutir con otros las razones de la validez de un resultado, descubrir nuevos resultados. Por otra parte, el alumno no encontrará justificaciones válidas para un determinado resultado hasta que no esté convencido de la necesidad de buscarlas (más allá de la necesidad de satisfacer al profesor).

Existen seguramente varias maneras de hacer surgir en el aula la necesidad de demostrar: ya sea observando un resultado que a simple vista parece difícil de creer, o encontrando un contraejemplo de una propiedad que parece generalizable (si bien el análisis del contraejemplo puede resultar un elemento complejo ya que está íntimamente ligado a la noción de demostración, sólo en ese escenario adquiere sentido el contraejemplo). En este contexto, la resolución de lugares geométricos es una herramienta que no podemos dejar de aprovechar para dejar reflejada la necesidad de la búsqueda de argumentos: la demostración aparece en primer lugar en la búsqueda del resultado, en la explicación del mismo, en su validación y su comunicación a los compañeros. Es una demostración concebida para explicar y convencer.

Es aquí donde se detectan los mayores problemas: muchos alumnos prueban qué ocurre con algunos casos particulares, y de ello inducen el resultado: el lugar geométrico es una recta, si los puntos quedan alineados, o una circunferencia, en caso contrario. Ahora, ¿cómo provocar en dichos estudiantes la necesidad de explicar el por qué del resultado y que no basta para ello con ver que varios puntos quedaron en cierta figura?

Los supuestos según los cuales se valora la pertinencia de la investigación en el contexto socio-cultural actual de la educación matemática en Uruguay son de dos tipos. El primero de ellos es que actualmente la Geometría Métrica Euclidiana es una rama de la matemática devaluada por los propios matemáticos: en Uruguay, la Licenciatura de Matemática ya no la tiene en sus programas de estudios y salvo excepciones no se investiga en ella académicamente. Sin embargo, sí se dicta en el Bachillerato y tiene un lugar insustituible en la formación matemática y general de los ciudadanos. Si bien este supuesto no es pertinente en términos de explorar la idea de demostración en el estudiante, es parte del fundamento de la presente investigación.

El segundo tipo de supuestos revela la complejidad del concepto de lugar geométrico y su potencial didáctico para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración. A continuación se detallan dichos supuestos:

★ Por la manera en que son planteados los ejercicios (en lugar de “demostrar que el LG de tal punto es…” se pide “hallar el LG de…”), el resolver lugares geométricos es una ocasión en la que el alumno debe descubrir por cuenta propia el resultado al que debe llegar, y donde se ve motivado a la búsqueda de argumentos –por razones de necesidad de convencer(se)– . Es una instancia en la que los estudiantes conjeturan, formulan, refutan y demuestran en la búsqueda de la solución del problema, sin que se les pida explícitamente.

★ Es también una oportunidad de ver relaciones biunívocas entre puntos en un plano, y trabajar con el concepto de función en un contexto diferente al usual (generalmente se presentan ejemplos numéricos). La noción de lugar geométrico trasciende a la idea de función, es más específico.

★ Hasta el momento, los alumnos trabajan con figuras estáticas, alcanza con hacer una figura para analizar el problema; con los lugares geométricos comienzan a aparecer puntos que varían y otros que son fijos, el análisis requiere de otro tipo de procedimientos. Se hace necesario encontrar cuáles medidas o relaciones permanecen constantes mientras otras no y justificar por qué es así.

★ En la resolución de este tipo de problemas la demostración no aparece solamente como verificación de resultados, sino que se hace presente cumpliendo diferentes roles.

★ Resolver problemas de lugares geométricos o de construcción utilizando los mismos ordena y sintetiza conceptos previamente trabajados, vinculando propiedades de diferentes figuras. Fomenta, además, el correcto uso del lenguaje simbólico.

I.f Desarrollo de la investigación

Si bien la metodología de la investigación se detalla en el capítulo 4, que es el que se refiere específicamente a la experiencia de campo, a continuación se presenta, a grandes rasgos, la metodología que se empleó en el conjunto del trabajo:

★ Observar que la resolución de este tipo de problemas está presente en el currículo del curso de geometría para 5º año científico, así como también en su evaluación.

★ Analizar cómo y cuándo se introducen este tipo de problemas en el programa.

★ Estudiar cuáles son las diferentes funciones que se pueden esperar de la demostración en el marco de la enseñanza de la matemática y los diferentes esquemas de demostración que se pueden esperar de un estudiante (basándose en diferentes autores, que se detallan en el marco teórico, en el capítulo 2).

★ Diseñar y poner en práctica una actividad concreta para analizar los aspectos anteriores en las producciones de un grupo de estudiantes.

★ Generar conclusiones sobre lo observado en la experiencia de campo, tomando en consideración el marco teórico estudiado.

Capítulo II: Marco teórico

Demostración en Geometría

La demostración es una de las actividades que caracteriza a la Matemática y, como tal, constituye uno de los tópicos analizados por la Matemática Educativa. Por lo tanto, así como ambas disciplinas se transforman a medida que la humanidad se desarrolla, también la demostración ha ido adoptando diferentes formas y roles dentro de ellas. Incluso en la actualidad existen diferentes visiones sobre qué significa demostrar en Matemática y cómo debe ser enseñada, como veremos en este capítulo.

Esta sección está dedicada a enmarcar el concepto de la demostración dentro de los propósitos de la investigación, proceso que creo fundamental ya que es un concepto medular en la justificación y planteamiento del trabajo. Después de analizar varios artículos referidos al tema –investigaciones empíricas y de corte teórico-, se arriba a un concepto propio de demostración.

Se presenta en primer lugar un intento de delimitación, aclarando los conceptos de demostración, argumentación y razonamiento, qué elementos los hacen parecidos y en qué se diferencian según Balacheff (1982) y Duval (1999). Más adelante se muestran diversas caracterizaciones de la demostración: los esquemas que manejan Harel y Sowder (1998), los niveles que plantea Balacheff (1998) y las diferentes funciones que varios autores coinciden en otorgarle al proceso argumentativo, analizando especialmente la caracterización que presenta de Villiers (1993). Con el fin de acercarnos a la demostración en geometría, también se expone una breve síntesis de los niveles cognitivos de aprendizaje presentados por Van Hiele (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997; de Villiers, 2003) y los procesos que se ven involucrados en los contenidos específicos de esta disciplina. Esto nos permitirá ir ampliando el concepto que tradicionalmente se maneja de demostración, especialmente de demostración en geometría, y analizar desde una óptica más amplia las producciones de los estudiantes.

II.a Demostración, argumentación, razonamiento ¿Continuidad o ruptura?

¿Qué significa demostrar? Si bien en una primera instancia puede parecer que existe un consenso generalizado al respecto, al menos entre profesores, investigaciones llevadas a cabo al respecto han demostrado que no es así. En un reciente encuentro de profesores del curso de Geometría Métrica de Bachillerato en Montevideo, varios consensuaron en que demostrar es "…un conjunto de afirmaciones, que se rigen bajo ciertas leyes lógicas, y que permiten deducir la validez de un enunciado partiendo de otros aceptados como válidos…". Pero este consenso dejó de ser tal al profundizar la discusión con preguntas como: ¿cuál es la diferencia entre justificar, demostrar y argumentar? ¿es lo mismo demostrar que razonar? ¿a qué nos conduce diferenciar estos conceptos?

Un buen punto de partida para desentrañar la madeja puede ser analizar las diferencias entre cada uno de los términos que propone Balacheff (Balacheff, 1982). La ***explicación*** de una proposición o un resultado es un discurso que tiene por objetivo mostrar el carácter de verdad del mismo. Las razones esgrimidas por el interlocutor pueden ser discutidas, refutadas o aceptadas por un colectivo. Sólo estas últimas son consideradas ***pruebas***.

Vale destacar que entonces el valor de prueba de una razón no es absoluto, sino que depende de las personas entre las que se entabla el debate. A su vez, cada discusión puede conducir a la determinación de un sistema de validación común entre los interlocutores.

Balacheff denomina ***demostración*** a un tipo particular de prueba: "un enunciado que es conocido como cierto, o bien es obtenido a partir de aquéllos que le preceden con la ayuda de una regla de deducción escogida dentro de un conjunto de reglas bien definido" (Balacheff, 1982; 263). La actividad mental, mayormente no explícita, asociada a la demostración es el ***razonamiento***: manipulación de la información dada para producir nuevas informaciones a partir de datos.

Por último, queda por analizar el ***proceso de resolución***: actividad de un sujeto desde que se le plantea el problema hasta que considera que lo tiene resuelto. Se apoya en una dialéctica de búsqueda y validación muy valiosa para el proceso de aprendizaje de la demostración, ya que implica la formulación de resultados y razones.

Por su parte, Raymond Duval (1999) también profundiza en las similitudes y diferencias entre estos procedimientos, en su artículo *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* Según su planteo, hace tiempo se comenzó a aceptar como válida la ***argumentación*** como forma de razonamiento natural, que no se restringe necesariamente a los clásicos criterios lógicos. La consideración de esta forma de razonamiento comenzó a reconocerse también en la enseñanza de la Matemática, por diferentes motivos. Esta aceptación se debió en parte a los estudios en psicología educativa del siglo XX (especialmente los estudios de Piaget) centrados específicamente en el lenguaje de niños y adolescentes, y en parte también a que en la propia práctica educativa, los profesores se comenzaron a dar cuenta de que lo que ellos presentaban como demostraciones, no constituían para la mayoría de los alumnos *pruebas* –en el sentido de convicción–. Otro de los factores que influyó para la aceptación y difusión de la argumentación fue el creciente interés por los trabajos en equipo, con el fin de favorecer las interacciones entre los alumnos, más allá de la interacción alumno-profesor. Este autor plantea entonces una encrucijada en la enseñanza de la Matemática: ¿es posible la progresiva evolución de argumentación a ***demostración***, que es lo que generalmente se conoce como razonamiento en Matemática? Y en caso de que sea posible, ¿cuáles son las condiciones que se tienen que dar? Duval propone analizar los funcionamientos cognitivos de cada tipo de razonamiento para determinar si existe continuidad entre ambos, o, por el contrario, ruptura cognitiva.

Con una caracterización parecida a la de Balacheff (1982), Duval distingue la ***explicación*** –proceso a través del cual se generan y exponen razones– de la ***argumentación*** –examen de la aceptabilidad de las razones expuestas, en particular con respecto a su pertinencia y fuerza– (Duval, 1999; 7). La segunda actividad está más ligada al razonamiento que la primera, e incluso en ocasiones utiliza ambos términos como sinónimos, si bien más adelante se explicita que el razonamiento tiene dos funcionamientos distintos: la argumentación y la demostración. Mientras la explicación es más de tipo descriptivo del fenómeno en cuestión, la argumentación tiene como objetivo la modificación del valor epistémico de un enunciado, con el fin de establecer su valor de verdad. Esta última se acerca más a una demostración que la explicación.

Ahora, cabe preguntarse, no con la intención de encontrar una respuesta absoluta sino para ordenar el planteo,… ¿argumentación y demostración son lo mismo?

Ya Balacheff (1982; 272) presenta a la ***demostración*** como un tipo particular de prueba, que es una actividad intrínsecamente social destinada a convencer a otro o a uno mismo. Como tal, la demostración es una razón aceptada como válida en determinado contexto y por un cierto grupo de personas.

Duval, por su parte, considera que un ***razonamiento*** es "una organización de proposiciones que se orienta hacia un enunciado-objetivo para modificar el valor epistémico que dicho enunciado-objetivo tiene dentro de un campo de conocimientos dado, o en un ambiente social dado y que, consecuentemente, modifica el valor de verdad cuando se cumplen ciertas condiciones particulares de organización" (Duval, 1992[4]),. Este autor distingue entre dos tipos de razonamiento: la argumentación y la deducción (o demostración).

En el artículo analizado se puede apreciar cómo Duval refuerza el planteo de Balacheff que sostiene que un razonamiento puede ser considerado demostración sólo si es un razonamiento válido. La argumentación, por su parte, es un razonamiento ligado a vínculos de pertinencia y no de validez. Más que buscar la verdad en sí, busca lo creíble y la convicción de uno mismo o de otros, obedeciendo más a leyes de coherencia que a las leyes lógicas clásicas.

Duval plantea entonces una cuestión neurálgica para la enseñanza de la demostración: "*¿Se puede, sí o no, pasar de una a otra sin muchos esfuerzos y sin contrasentidos*?". Se pone en juego así la distancia cognitiva –muy débil, por cierto– existente entre uno y otro funcionamiento, y si la manera de salvar la misma es a través de una continuidad cognitiva o de una ruptura.

Con el fin de responder esta pregunta, Duval analiza la relación de justificación entre proposiciones en la deducción (razonamiento válido por excelencia, ejemplo típico de

[4] Citado en (Duval, 1999; 31).

demostración) y en la argumentación. Ambos tipos de razonamiento se caracterizan por inferir una conclusión a partir de una premisa, utilizando un término medio que los conecta. En dicho análisis se revelan las siguientes diferencias (Duval, 1999; 19):

- ★ En el caso de la deducción basta superponer premisa con término medio para inferir la conclusión, utilizando la regla del *modus ponens*. En el otro caso, es necesario analizar más a fondo las relaciones de oposición, inclusión e identidad entre los términos.
- ★ Mientras en la deducción se utiliza siempre la regla del *modus ponens*[5], en la argumentación existe heterogeneidad de las inferencias que llevan a las proposiciones: modus ponens, por susunción de un caso particular bajo una regla general, por inferencia semántica, por enumeración de casos particulares, etc.
- ★ Las relaciones entre el contenido del término medio y la conclusión: en el primer caso una parte del término medio afirma ya al contenido de la conclusión. Como la premisa afirma lo necesario para deducir la conclusión según el término medio, sólo es necesario realizar un proceso de implicación. En el caso de la argumentación la relación no es tan directa: se puede afirmar algo distinto en la conclusión que en el término medio, por lo que es necesario que quien lee la argumentación realice sus propias deducciones para llegar de uno a otro.
- ★ Diferente autoridad de los términos medios: en la deducción tiene un estatuto teórico preciso: teorema, axioma, definición. Su valor de verdad es intrínseco, no depende del contenido. En la argumentación, por el contrario, el valor epistémico de verdad del término medio está ligado a su contenido, y puede variar de un individuo a otro o incluso en un mismo individuo a lo largo del tiempo.

En suma, deducción y argumentación no sólo difieren por su funcionamiento “lógico” (en lo que refiere a los diferentes roles que adquieren las partes del razonamiento) sino también en lo relativo a las formas de aprendizaje: existe una distancia cognitiva. Duval afirma que para transitar de una argumentación a un razonamiento válido (deducción) es necesario que el estudiante deje de considerar el valor epistémico del enunciado

[5] Vale aclarar que esta no es la opinión generalizada entre autores sobre el tema, sino que en general se considera que existen deducciones que no utilizan el Modus Ponens.

asociado a su contenido para considerar el asociado al estatuto teórico del mismo (Duval, 1999; 22).

El autor concluye así que existe una distancia cognitiva tan profunda entre argumentación y deducción lógica que se hace necesario un aprendizaje específico e independiente para cada proceso cognitivo. “El desarrollo de la argumentación, incluso en sus formas más elaboradas, no abre una vía de acceso a la demostración” (Duval, 1999; 45). Sólo a partir de una investigación profunda podemos discernir si esta tesis es cierta o no, pero aceptarla implica comenzar a pensar en secuencias didácticas bien diferenciadas para lograr desarrollar una y otra actividad cognitiva, así como saber discernir qué tipo de problema ayuda a desarrollar cuál de ellas.

Por otra parte, en lo referente a la enseñanza de estas habilidades, resulta interesante el planteo de Cantoral (1995) quien sostiene que como docentes de matemática deberíamos considerar a la hora de enseñar la transposición didáctica que se genera entre la Matemática como saber académico y la Matemática escolar. En lo que a demostración en geometría se refiere, esto implicaría que debemos también considerar una noción particular para su enseñanza, que puede diferir de la noción de demostración que es aceptada entre la comunidad de matemáticos. Según Hanna y Jahnke (1996; 902), los profesores tenemos un desafío epistemológico, científico y psicológico: analizar cómo la demostración de una propiedad puede ayudar a los estudiantes a entender mejor el mundo físico e intelectual que los rodea. Entonces el proceso de demostración cumple un rol social de aportar entendimiento, más que de verificación de la veracidad de un enunciado.

Dentro de un contexto educativo, se entiende a la demostración como un proceso social a través del cual una persona descubre que una propiedad es cierta, la comprende, puede argumentar por qué es así, es capaz de integrarla dentro de un sistema de conceptos y relaciones que tienen un significado determinado para ella y de comunicarla a otras personas. Balacheff y Colette (1988; 267) enfatizan la dimensión social de la demostración: si bien el proceso de demostrar es individual de cada persona, es fundamental el transitarlo con otras ya que el valor de verdad de un razonamiento es acordado por un determinado colectivo, en un momento determinado (que puede ser, por ejemplo, el grupo de clase en un día de clase). Esta explicación puede ser reconocida por un colectivo y no por otro, o en determinado momento y no en otro.

Se concibe a la argumentación como el proceso a través del cual se exponen razones para fundamentar la validez de un resultado o una opinión, que puede o no ser aceptado en cierto contexto. Es precisamente por eso que es importante la consideración de la argumentación en las prácticas educativas: porque es ella, y no tanto la deducción en sí, la que aporta entendimiento al proceso de demostración.

Rav (Hanna, 2001; 7) opina que "las pruebas son la manera en que los matemáticos ponen en funcionamiento la maquinaria matemática para resolver problemas y justificar que una solución propuesta para un problema es efectivamente una solución". La siguiente metáfora empleada por Manin (Hanna, 2001; 7) expresa con claridadlo que sería bueno considerar como demostración en Matemática Educativa: "***Axiomas, definiciones y teoremas son puntos en un 'paisaje matemático' con atracciones locales y rutas. Las pruebas son los caminos, calles y carreteras. Cada itinerario tiene sus propias atracciones, que pueden ser más importantes que el hecho en sí de que conducen de A a B***".

Una vez presentados los conceptos de prueba, demostración y argumentación, se hace necesario para el transcurso de la investigación analizar estos conceptos desde un punto de vista didáctico. Las caracterizaciones que se presentan a continuación se refieren a la enseñanza de la demostración, ellas permitirán analizar las producciones que los estudiantes realizaron en el estudio de campo.

II.b Tipos de demostración según Harel y Sowder

En el apartado anterior se concentra en delimitar el concepto de demostración, desde el punto de vista del profesor o, más en general, de la manera en que es aceptada como tal en la comunidad matemática. Analizar desde diversas ópticas los diferentes tipos de demostración favorecerá nuestra comprensión de lo que los alumnos presentan como demostraciones, y, siendo un poco optimistas, puede incluso guiarnos sobre cómo hacer para que aquellos alumnos que presentan argumentos que no son aceptados por el contexto social al que pertenecen comiencen a generar, de forma autónoma, razonamientos deductivos.

La experiencia de la práctica docente, específicamente en la enseñanza de Geometría Métrica a nivel de Bachillerato, conduce a coincidir con Harel y Sowder (1998) en que para muchos alumnos se hace difícil comprender el para qué de la demostración de un resultado, básicamente por tratarse de algo que no sólo generalmente “es obvio”, sino que además ya ha sido establecida su validez y consensuada por toda la comunidad de matemáticos. Pero además ocurre que una vez que se ha establecido un enunciado y se ha brindado una demostración, muchos estudiantes no se percatan de que posteriores verificaciones de dicho enunciado en situaciones particulares son superfluas. Es por eso que debemos ampliar los horizontes en cuanto a nuestro concepto de demostración en la enseñanza y a su tratamiento en el aula.

Harel y Sowder (1998) presentan la noción de “Proof Scheme” (que traduciremos como ***Esquemas de demostración***). Según plantean, probar o justificar un enunciado implica dos aspectos: el convencimiento propio y la persuasión (convencimiento de otros). El esquema de demostración de un individuo consiste en todo lo que constituye el convencimiento propio y la persuasión para ese individuo, en un momento determinado de su vida, cuando se enfrenta a una situación determinada.

Los autores distinguen tres categorías de esquemas de demostración, según el nivel de profundidad en el desarrollo socio cognitivo: externos, empíricos y analíticos. Esta clasificación surge de considerar la demostración en un sentido amplio: justificación del punto de vista psicológico, más que desde el estrecho de demostración matemática.

★ **Esquemas de demostración externos**

Son aquellos en los que tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante ofrece para persuadir a otros tiene una procedencia externa a él. Ejemplos de ellos son los esquemas de demostración autoritarios, rituales o simbólicos.

Una demostración se denomina ***autoritaria*** cuando el estudiante se convence de un resultado sólo porque lo dijo el profesor, un libro o incluso un propio compañero de clase que él considera con más conocimiento. El problema no radica en el simple hecho de que se refieran a una autoridad, eso es algo común incluso entre matemáticos que estudian diferentes áreas. El problema es que la fuente externa es el único medio que tienen para justificar el resultado.

Esta es una lamentable consecuencia de las prácticas educativas habituales en enseñanza media: el profesor es quien está adelante, el que tiene un conocimiento para enseñar y les queda a los estudiantes el rol de aprenderlo, lo más parecido posible a como es habitual que aparezca en los libros. El estudiante aprende una matemática ya acabada, en la que queda poco por construir. Una educación que pone énfasis en los resultados y no en los procesos de razonamiento utilizados para arribar a ellos, conduce a los estudiantes a desmerecer el valor de la prueba y de la búsqueda de los por qués.

Los autores manejan el término demostraciones ***rituales*** para denominar aquéllas en las que los estudiantes consideran válido un razonamiento sólo por la forma del mismo, sin reparar en su contenido o su rigor. Esta manera de juzgar la exactitud de un razonamiento puede deberse a la importancia que tradicionalmente le han dado los profesores a la estructura formal de las demostraciones, ya que a la dificultad que generalmente encuentran los estudiantes en el razonamiento y contenido en sí, se agrega la dificultad de la comprensión de la notación en símbolos matemáticos. Según esta concepción, los argumentos expuestos de manera coloquial, en párrafos, gozan de menos estatus como demostración.

Puede ocurrir que un estudiante incluso presentando argumentos sólidos no esté convencido de la validez de su resultado porque no está expresado en el formato que el supone que es el esperado, o no tiene la notación simbólica adecuada. Sin embargo, no debemos dejar que se confunda formalismo con rigor: una demostración escrita en lenguaje cotidiano puede ser estrictamente rigurosa y aportar más entendimiento a los estudiantes que una escrita de manera simbólica.

Por último, también son demostraciones de tipo externo las ***simbólicas***, que son aquéllas en las que se usan símbolos sin hacer referencia a las posibles relaciones funcionales o cuantitativas del concepto en cuestión.

Tienen un aspecto positivo y otro negativo. Es negativo para el desarrollo cognitivo que los estudiantes vean a los símbolos sin asociarlos con su contenido, ya que en la mayoría de los casos no sólo el razonamiento es falso, sino que incluso se obtienen resultados erróneos. Una de las peores consecuencias de este esquema de demostración es que se abordan los problemas sin intentar comprender previamente lo que plantea el problema y lo que se pide hacer.

Por otra parte, los razonamientos simbólicos válidos pueden ser sumamente positivos, basta observar la potencia que tiene la geometría analítica frente a la sintética en algunos problemas que resultan complicados para resolver utilizando exclusivamente herramientas de esta última.

★ **Esquemas de demostración empíricos**

Son aquéllos que se basan exclusivamente en ejemplos para justificar resultados. Los autores distinguen entre los esquemas de demostración perceptivos y los basados en ejemplos (inductivos). Este esquema de demostración puede resultar especialmente interesante para el desarrollo de esta investigación ya que se presenta con gran frecuencia en la resolución de ejercicios de lugares geométricos por parte de los estudiantes.

Los esquemas de demostración ***perceptivos*** son aquellos en los que el estudiante intenta convencerse de un resultado, o incluso convencer a otros, basándose en las percepciones de una serie de dibujos. Es característico, especialmente en clases de geometría, encontrar que las figuras en las que se basan los estudiantes para argumentar son figuras particulares, que agregan datos al problema. Si lo que hay que demostrar es un resultado relativo a un triángulo cualquiera, dibujan un triángulo equilátero, en el que se cumplen más propiedades que en uno “cualquiera”.

Coincido con Sowder y Harel en que los nuevos programas para trabajar en Geometría Dinámica (en adelante GD) ofrecen gran ayuda ya que permiten alterar rápidamente los dibujos, permitiendo captar la esencia de los elementos que componen la figura y que guían para la resolución del problema.

Cuando el esquema de demostración consiste en convencerse a uno mismo o a otros de un resultado a través del análisis de uno o más ejemplos, se dice que es una demostración ***inductiva***. Este es uno de los más frecuentes entre los estudiantes de geometría en el Bachillerato. Cuando los alumnos resuelven ejercicios de LG dibujando varias posiciones del punto que varía, existe un esquema de demostración empírico-inductivo. En un principio, parecer ser que esa es la intención: demostrar a través de los ejemplos. Sin embargo, es común que el profesor rechace este tipo de razonamiento por no ser analítico deductivo, basándose en el siguiente cuestionamiento: ¿será que los estudiantes encuentran la solución a través de los ejemplos, pero no hay intenciones de demostrar?

Este esquema de demostración hace pensar en el siguiente cuestionamiento: la inducción es una estrategia que tiene el ser humano para crear la mayoría de los conceptos (a modo de ejemplo, para enseñar a un niño qué es el ardor se le dice que es lo que siente en la piel con el alcohol, las quemaduras o determinadas lastimaduras o picaduras. Ocurre lo mismo con los colores). ¿Por qué quebrar con esa manera de descubrir y justificar resultados generales?

Por otro lado, el método empírico es muy útil a la hora de justificar que una proposición es falsa (contraejemplos), y la presentación de ejemplos es útil para comprender algo o para verificar si se entendió. Es por eso que si bien como docentes debemos desarrollar en nuestros estudiantes la necesidad de generalizar resultados y fomentar que no se conformen con el resultado de una inducción, no deberíamos dejar de pensar en este esquema de demostración como una herramienta útil para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma.

★ **Esquemas de demostración analíticos**

Son los esquemas que frecuentemente los profesores e investigadores de matemática consideran válidos: deducción de propiedades a partir de otras de las cuales se acepta su validez utilizando reglas lógicas bien definidas. Se reconocen dos tipos: los esquemas de demostración de transformación y los axiomáticos

Los esquemas de demostración de ***transformación*** se caracterizan por justificaciones centradas en los aspectos generales de una situación y por razonamientos cuyo fin es establecer la conjetura en general, con la intención de anticipar resultados.

Harel y Sowder (1998) consideran a este tipo de justificación como un precedente necesario para el tipo de demostración axiomática. Distinguen tres tipos: *de imágenes espaciales* (el contexto de la justificación consiste en imágenes de la intuición espacial), de transformación simbólica (cuando la proposición a demostrar es transformada a otra para la cual se posee una imagen conceptual más amplia, con más herramientas, que permiten demostrar el enunciado más fácilmente) y de construcción (los cuestionamientos de los estudiantes acerca de la existencia de un objeto son resueltos a través de la construcción concreta de los mismos, en oposición a la mera justificación de su existencia).

Por último, una justificación es considerada un esquema de demostración ***axiomático*** cuando se derivan resultados como consecuencias lógicas de resultados previos, considerados válidos. El pilar fundamental de un cuerpo de conocimientos matemáticos organizados de esta manera está constituido por axiomas y conceptos primitivos.

Harel y Sowder (1998) aprovechan la oportunidad para insistir en la sugerencia de los Estándares NCTM: manejar axiomatizaciones locales en el aula –secuencias cortas de definiciones y teoremas– para examinar el rol organizativo de la demostración y ver la posibilidad de diferentes maneras de organizar el mismo cuerpo de conocimiento. Para generar un ambiente de discusión en el aula, en donde los estudiantes puedan recrear el concepto de demostración, no es necesario que trabajemos con largas secuencias –como tradicionalmente se hace basándose en un enfoque axiomático de la geometría euclidiana en el curso de Geometría Métrica en Bachillerato–.

La comunidad de matemáticos y profesores coinciden en que éste es el esquema de demostración válido para construir conocimiento matemático, por lo que es deseable que los estudiantes lo logren. Tal vez esté ahí la clave de la enseñanza de la demostración: planificar caminos para conducir a los estudiantes hacia formas más sofisticadas de razonamiento. Según Harel y Sowder los profesores debemos permitir transitar a nuestros estudiantes un proceso en el que se vayan familiarizando con la justificación y la búsqueda de argumentos, y no pretender que haya un salto directo a este tipo de demostraciones en los últimos años de Educación Secundaria. Para ello, la práctica de la búsqueda de argumentos debe motivarse continuamente a través de la matemática escolar durante toda la escolarización, deteniéndose en el “por qué” de los resultados y no sólo en los resultados mismos.

II.c Tipos y niveles de demostración según Balacheff

También Balacheff (1998; 216) concibe a la demostración desde un sentido amplio, y analiza la noción de prueba desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los alumnos, no desde la lógica. Según fue señalado en este capítulo, este autor considera prueba a toda explicación reconocida y aceptada por un colectivo, lo que implica que puede cambiar su carácter de un colectivo a otro o incluso dentro de un mismo colectivo, a lo largo del tiempo. Brinda gran importancia a la incidencia de la interacción social para el aprendizaje de la demostración, por lo que dedica muchos de sus trabajos al análisis de las producciones elaboradas en parejas. Reconoce dos grandes tipos: las pruebas pragmáticas y las conceptuales.

Las pruebas ***pragmáticas*** son las que se basan en acciones y visualizaciones de imágenes. Un ejemplo de ello son el conjunto de “pruebas sin palabras” en las que se exhibe una imagen que presenta, a la vez, un resultado y su justificación. La demostración depende de la habilidad de quien ve el diagrama para reconstruir las razones que quien prueba tiene implícitamente en mente.

Por su parte, las pruebas ***conceptuales*** son las que no incluyen acciones, sino que se basan en propiedades generales y las relaciones entre ellas. Balacheff manifiesta que el camino de un tipo a otro de demostración no ocurre espontáneamente, sino que el estudiante debe lograr distanciarse de la acción y el proceso de solución del problema, para detectar los elementos esencialmente generales de la situación. El lenguaje juega un rol importante en este proceso en el que los cambios decisivos para la construcción del conocimiento son la descontextualización, la despersonalización y la destemporalización (Balacheff, 1998; 217).

El autor distingue cuatro tipos principales de prueba dentro de los varios tipos existentes: dos de tipo pragmático –empirismo ingenuo y experimento crucial– y dos de tipo conceptual –ejemplo genérico y experiencia mental–. Si bien las dos primeras no aseguran la validez de un resultado desde el punto de vista lógico-formal, Balacheff las incluye como pruebas por ser reconocidas como tales por quienes las producen.

El ***empirismo ingenuo*** consiste en basarse en la verificación de algunos casos para asegurar la verdad de un resultado. Según lo estudiado, este tipo de prueba coincide con lo que Harel y Sowder denominan esquema de demostración empírico basado en ejemplos (inductivo).

Se denomina ***experimento crucial*** o particular al razonamiento que hace un estudiante cuando generaliza un resultado a partir del análisis de un caso particular, que es considerado “suficientemente general”. Predomina la idea de que “si se cumple en este caso, debe cumplirse siempre”. Se diferencia del empirismo ingenuo en que existe una intención explícita de analizar un caso que no resulta demasiado especial.

Un ejemplo de este tipo de razonamiento puede ser la justificación de la existencia del circuncentro de un triángulo: algunos estudiantes lo hacen construyendo un triángulo “no particular” (escaleno) y sus mediatrices. Como observan que en ese triángulo se verifica, llegan a la conclusión de que se verifica en todos.

Con ***ejemplo genérico*** Balacheff no sólo hace referencia al ejemplo en sí, sino a hacer explícitas las razones por las cuales una afirmación es cierta. El ejemplo no es escogido por sí mismo, sino como representante característico de su clase, y se buscan argumentos a través de operaciones y transformaciones de él. Este tipo de prueba tiene puntos en común con lo que Harel y Sowder denominan esquema de demostración analítico de transformación.

Un ejemplo de ello es la siguiente justificación del criterio de divisibilidad entre 4 –un número es divisible entre cuatro si y sólo si el número formado por las dos últimas cifras del original lo es–. Tomemos el número 35268, que se puede escribir como la suma de 35200 + 68. Ahora, 35200 es divisible entre 4 ya que es el producto de 352 por 100, que es un múltiplo de 4. Entonces, si 68 es múltiplo de cuatro, también lo será 35268; si 68 no es múltiplo de cuatro, tampoco lo será 35268.

Por último, la ***experiencia mental*** se refiere a un tipo de prueba en el que las acciones son internalizadas y diferenciadas de una representación particular. En ocasiones este tipo de prueba precisa de un cuerpo de conocimiento organizado en un sistema axiomático, al igual que el esquema de demostración denominado axiomático por Harel y Sowder.

Frente al problema de clasificar el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera y justificar, el siguiente razonamiento es considerado una experiencia mental: “Si se traza una diagonal (BD) en el cuadrilátero original (ABCD), se quedan formados dos triángulos. Los puntos medios de los lados AB y AD determinan un segmento que es la paralela media respecto al lado BD, por lo que es paralelo a BD y mide la mitad. Lo mismo ocurre con los puntos medios de los lados BC y CD. Por lo tanto, el cuadrilátero interior tiene dos lados opuestos que son iguales y paralelos. Utilizando la propiedad que dice que todo cuadrilátero convexo con un par de lados iguales y paralelos es un paralelogramo, se puede deducir que el cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera es un paralelogramo.”

II.d Funciones de la demostración

Son varios los autores que manifiestan que quienes enseñamos matemática debemos comenzar a cambiar la visión tradicional que tenemos de la demostración, según la cual su única función es la verificación de enunciados (Hanna, 2001; de Villiers, 2003). En primer lugar, porque si esa es la única función, es natural que los estudiantes no sientan la necesidad de efectuarla cuando lo que se pretende probar es sumamente obvio, como ocurre con algunas propiedades de Geometría Métrica Plana. En segundo lugar, porque pensar que la única función que tiene la demostración es la de verificar resultados no es fiel a la práctica real de los matemáticos profesionales. Generalmente la convicción en matemáticas se obtiene a través de la comprobación en casos específicos y la búsqueda fallida de contraejemplos. Cuando un investigador está convencido de la veracidad de un resultado, entonces busca maneras de demostrarlo.

Michael de Villiers (1993), en su búsqueda por encontrar cuáles son las dificultades en el aprendizaje de la demostración, encuentra que una de ellas es que los estudiantes no la sienten como una necesidad. ¿Cuál es el significado, para qué hacerlo? Propone entonces un análisis de las diferentes funciones de la demostración, con el fin de utilizarlas en el aula para resignificar la actividad de demostrar.

Presenta así un modelo en el que se distinguen cinco funciones de la demostración en matemática. Este modelo es un desarrollo del modelo planteado por Bell en 1976, y distingue las siguientes funciones, presentadas sin un orden jerárquico determinado:

★ **Verificación**

Este es uno de los roles otorgados a la demostración más difundidos entre quienes enseñamos matemática. Lamentablemente ocurre en muchas de nuestras clases de Bachillerato, especialmente en geometría, que demostramos resultados que son evidentes, incluso a la vista de los estudiantes, con la supuesta finalidad de “cerciorarnos de la verdad de la afirmación”.

De Villiers (1993) sostiene que la concepción que la mayoría de los profesores tienen –que la demostración constituye una autoridad irrefutable para establecer la validez de un resultado- es completamente falsa. Una posible explicación de este fenómeno es la que brinda Hanna (2001) al hacer referencia al movimiento de la “Matemática Moderna” de los años ’50 y ’60, que le otorgó a la demostración un rol exclusivo de verificar resultados a través de la prueba lógica rigurosa. Hanna opina que dicho movimiento introdujo en todas las áreas del currículo de Matemática un nuevo énfasis en la estructura axiomática y la demostración, énfasis que estaba antes restringido únicamente al currículo de geometría.

Por su parte, de Villiers (1993) afirma que cuando se investiga en matemática, no sólo ocurre que la demostración no es estrictamente necesaria para la convicción, sino que, por el contrario, la convicción de que un resultado es cierto es lo que lleva frecuentemente a buscar su demostración. Muchas veces la convicción personal depende de varios factores: la fuente de la que proviene la afirmación, que el resultado sea razonable y consistente con el resto de la teoría, la intuición, el fracaso en la búsqueda de resultados.

También es cierto que la demostración es una herramienta sumamente útil para la convicción cuando los resultados son dudosos o no intuitivos, por lo que no se le puede quitar importancia a este rol de la demostración.

★ **Explicación**

En la búsqueda de la convicción sobre la validez de un resultado, muchas veces basta una verificación casi empírica (comprobación en varios ejemplos y en algunos que sean cruciales o la búsqueda fallida de contraejemplos). Sin embargo, ese procedimiento no necesariamente brinda herramientas para comprender por qué el resultado es cierto. Surge entonces la necesidad de una demostración en la que se comprenda el funcionamiento de la afirmación desde dentro, comprender cómo la nueva afirmación surge como consecuencia de otras ya conocidas y aceptadas.

Según afirma Hanna (2001), en lo que hace a la enseñanza de la matemática, la mejor demostración no es precisamente la más rigurosa, sino aquella que permite entender el significado del teorema. La cuestión radica no sólo en verificar la validez de un resultado, sino en percibir su por qué; según ella, una “buena” demostración ilumina, conduce a nuevos resultados, mejora las definiciones, brinda algoritmos.

Existen a lo largo de la historia de la matemática muchos ejemplos de investigadores que más que intentar dar validez a los descubrimientos de sus antecesores, buscan encontrar explicaciones a tales fenómenos. Según cita de Villiers (1993), eso era lo que buscaba Newton al investigar sobre el comportamiento de las órbitas planetarias descripto por Kepler: lejos de dudar de su validez, buscaba entender por qué era cierto.

Steiner (1978) (citado en de Villiers (1993)), caracteriza a una demostración explicativa como aquella en la que a partir de la demostración, se hace evidente que el resultado depende de una propiedad particular. A su vez, debe ocurrir que si se sustituye en la demostración esa propiedad por otra del mismo dominio el teorema pierde su validez en el contexto original, e incluso se podría distinguir cómo varía el resultado del teorema cuando realizamos tal variación. Encontramos un ejemplo que ilustra este planteo en una propiedad característica de la Geometría Euclideana: al demostrar la transitividad entre rectas paralelas de un mismo plano con herramientas métricas, surge como propiedad necesaria el Axioma de paralelismo de Euclides (*Para cada recta r y para cada punto P en el espacio, existe una única recta paralela a r por P*). Sin ese axioma, el teorema no se puede demostrar, y si ese axioma se cambia por otro no equivalente, entonces el resultado del teorema se modifica por completo.

Es claro que la demostración que se utilice en clase responderá a los objetivos que se proponga el docente. En un curso de geometría analítica, tal vez la demostración que se elija para este teorema tendrá un fin más sistematizador que explicativo, y no se hará tan evidente el contexto en el que se está trabajando (Geometría Euclideana).

★ **Sistematización**

Esta es otra de las funciones que cumple la demostración y que no siempre se hace explícita por quienes la enseñan. Muchas veces una demostración sirve para sistematizar resultados ya conocidos en una teoría matemática. Continuando con el ejemplo de la transitividad entre rectas paralelas en un mismo plano, cuando se aborda la propiedad desde la geometría analítica es habitual hacerlo con un fin sistematizador: haciendo hincapié en propiedades del coeficiente angular de la recta, ya trabajadas en clase.

Nuestros cursos de Bachillerato, en los que se tiene por objetivo introducir a los estudiantes en el estudio de los elementos básicos de las grandes ramas de la matemática –Geometría, Álgebra y Análisis– tienen una variada oferta de estos ejemplos. En ellos aparecen muchas propiedades que son evidentes a la vista de los estudiantes, por lo que no habría que probarlas, pero su demostración es útil porque refuerza la sistematización de la teoría que se está construyendo. Concuerdo con de Villiers en que es falso decir, en esas ocasiones, que debemos probar para “asegurarnos”.

★ **Descubrimiento**

Está extensamente difundido entre profesores e investigadores que en el desarrollo de la actividad matemática, primero se intuye una propiedad, se muestra que se cumple en varios ejemplos, con métodos empíricos, y una vez que se está convencido de la validez del mismo, se procede a su demostración. Incluso la propia manera en que se exponen los teoremas en libros y en el aula refuerzan dicho pensamiento: primero el enunciado y después su demostración.

Sin embargo, según plantea de Villiers (1993) no es ésta la única vía de encontrar nuevos resultados, sino que por el contrario, muchas veces ellos surgen del análisis deductivo de las propiedades de algún objeto matemático o de la generalización de otras propiedades. La demostración se presenta entonces como un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva.

Nuevamente la geometría aporta ejemplos: cuando se generalizan propiedades de centros notables en los triángulos a los cuadriláteros, e incluso en la creación de las Geometrías no euclídeas.

★ **Comunicación**

Por último, de Villiers también otorga a la demostración una función social: la de comunicar resultados matemáticos entre profesionales, profesores y estudiantes. En esa interacción social no sólo se negocian los contenidos matemáticos, al hacerlos explícitos, sino también los criterios para una argumentación aceptable.

Hoy por hoy, no es sorprendente observar el grado de comunicación que existe entre matemáticos en nuestra sociedad, ya que se ve facilitada por la velocidad y accesibilidad de los medios de comunicación. Pero basta tomar como ejemplo cualquiera de las cartas que se cruzaron entre matemáticos desde tiempos muy remotos para darnos cuenta de la importancia que este rol de la demostración significa para el desarrollo de la matemática. Según manifiesta de Villiers (2003) la comunicación de resultados provoca una especie de filtración social que contribuye a su refinamiento y a la identificación de errores, e incluso a su rechazo, cuando se descubre un contraejemplo.

II.e Teoría de van Hiele

Para referirnos a la demostración en geometría específicamente, parece ineludible hacer referencia a la teoría que presentaron Dina y Pierre Marie van Hiele en 1957. Es un modelo que estructura el aprendizaje de la geometría en niveles cognitivos, y, haciendo uso de esos niveles brinda una posible explicación del por qué del fracaso del currículo tradicional en geometría: es presentado de manera prematura en un nivel más alto que aquél en el que los estudiantes están operando.

Al respecto de Villiers presenta una frase muy representativa, que vale la pena citar en su lenguaje original: "… students cannot understand the teacher nor can the teacher understand why they cannot understand!" (de Villiers, 2003; 11).

Esa falta de sincronización sólo puede ser entendida si de alguna manera se puede "medir" o clasificar el nivel de madurez que presentan los alumnos en sus razonamientos al respecto. La teoría de niveles de van Hiele presenta una manera de clasificar dicha madurez. Presenta niveles del pensamiento, con el criterio de que los conocimientos de un nivel se suponen conocidos en el nivel siguiente. Allí se explicitan relaciones que antes estaban implícitas y se profundizan los conocimientos adquiridos previamente.

Según explican Alsina, Burgués y Fortuna (1997), la teoría de van Hiele estructura el aprendizaje de la geometría en los siguientes niveles:

Nivel 1 (Reconocimiento)

En este nivel básico los estudiantes manejan como objetos del pensamiento las figuras individuales. Las estructuras del pensamiento que presentan son el reconocimiento visual de las figuras como un todo, sin reconocimiento de partes, componentes o propiedades determinantes de las mismas. Puede reconocer, por ejemplo, un cuadrado, pero no describir sus propiedades.

Procesos involucrados:

- Reconocimiento de figuras.
- Identificación del nombre de las figuras (triángulo, rectángulo, cuadrado, etc).
- Descripción (incompleta) de figuras a través de sus propiedades visuales (en ocasiones irrelevantes para esa clase de figuras, como el color o el tamaño).

Nivel 2 (Análisis)

En esta etapa el estudiante comienza a distinguir clases de figuras a través de la descripción de algunas propiedades comunes. Las estructuras del pensamiento presentes son el análisis y descripción de las propiedades de las figuras, sin explicitar relaciones entre distintas familias de figuras. Las propiedades se establecen experimentalmente. Ejemplo: *los rectángulos tienen todos los ángulos rectos, y un paralelogramo no es rectángulo porque no tiene los ángulos rectos*.

Procesos involucrados:

- Descripción de las propiedades de una figura (experimentalmente).
- Comparación explícita de figuras a través de sus propiedades.
- Reconocimiento de las infinitas variaciones de una figura particular, ya sea respecto a su posición como a su forma.
- Clasificación de figuras utilizando sólo un aspecto de la misma (por ejemplo, los ángulos), pero ignorando otros aspectos.
- Aproximación al establecimiento de la verdad de un enunciado empíricamente, por ejemplo, observación y medición de varias figuras construidas.

Nivel 3 (Ordenamiento - Relaciones)

En este nivel los alumnos manipulan como objetos del pensamiento a la definición de las clases de figuras. Es decir, logran realizar un ordenamiento lógico de las propiedades de las figuras, disciernen las relaciones entre las diferentes figuras geométricas y son capaces de determinar las figuras por sus propiedades. Por ejemplo, pueden concluir que un cuadrilátero con los dos pares de lados opuestos paralelos es un paralelogramo, o que un cuadrado es un rectángulo. Comprenden las primeras definiciones que describen las interrelaciones de las figuras con sus partes constituyentes, pero no construyen secuencias de razonamientos que justifiquen las observaciones. Pueden ser capaces de seguir una prueba pero no de probar por ellos mismos.

Procesos involucrados:

- Reconocimiento de propiedades características de cada clase.
- Formulación de definiciones correctas y económicas de las figuras.
- Transformación de definiciones incompletas en completas.
- Utilización de definiciones conocidas para la construcción de nuevos conceptos.
- Aceptación de definiciones equivalentes para el mismo concepto.
- Clasificación incluyente de las clases de figuras, utilizando las propiedades que las determinan.

Nivel 4 (Deducción)

En este nivel los alumnos dominan por completo las relaciones entre las figuras, son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra. Comprenden el significado de la deducción como una forma de resolver problemas geométricos, así como el rol de los axiomas, postulados, definiciones y teoremas. Sin embargo, no reconocen la necesidad de rigor en los razonamientos.

Procesos involucrados:

- Comienzos del entendimiento del significado de la deducción.
- Reconocimiento y formulación de relaciones lógicas entre las propiedades.
- Utilización explícita de la forma "si… entonces" para formular conjeturas y utilización implícita de reglas lógicas como el modus ponens.
- Entendimiento del rol de los axiomas, definiciones y pruebas.

Nivel 5 (Abstracción o rigor)

Este nivel es el que ha sido menos analizado por los investigadores en Matemática Educativa. Supongo que esto ha sido en parte por el alto grado de abstracción que representa, y en parte porque no es común que los estudiantes de secundaria lo alcancen ni que los profesores lo exijan. En este nivel se supone que los alumnos manejen con fluidez diferentes sistemas deductivos, sean capaces de analizar el grado de rigor de los sistemas deductivos y apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas. Un ejemplo es el de los fundamentos de la Geometría propuestos por Euclides o Hilbert.

Procesos involucrados:

- Comprensión cabal del significado de la deducción de propiedades y dominio de la misma.
- Sentimiento de la necesidad de mostrar rigurosidad en los razonamientos.
- Análisis del grado de rigor de los razonamientos que se le presentan.
- Comparación entre los diferentes sistemas deductivos.
- Búsqueda de contraejemplos, generalizaciones, nuevos caminos.

Para aplicar esta teoría de manera fiel, es importante recordar que el nivel en el que se encuentra una persona y la transición de un nivel a otro no depende de su edad, y que los estudiantes que se encuentran cursando un mismo grado no tienen por qué estar en el mismo nivel. Por otra parte, dos personas que estén razonando en diferentes niveles difícilmente puedan comprenderse entre sí, lo que explica el fracaso en la enseñanza de la demostración cuando se quiere introducir excesivas herramientas teóricas y simbología de manera prematura.

Como se puede observar, el Nivel 3 representa una bisagra entre la geometría básica de descripción de figuras y una geometría más abstracta y formal, en la que se reconocen las figuras por sus propiedades y se explicitan relaciones entre las diferentes propiedades de las figuras. Como veremos en el capítulo dedicado a la descripción de la actividad propuesta, parece ser que es en la transición entre ese nivel y el siguiente cuando resulta significativa la presentación de problemas de lugares geométricos. Y esto coincide con que es la etapa en la que la mayoría de los estudiantes se encuentran en el inicio de los cursos de Geometría Métrica de 5º año en el Bachillerato Nacional en Uruguay.

La teoría de Van Hiele contempla una serie de ***fases de aprendizaje*** para facilitar el tránsito entre dos niveles cognitivos (Alsina, Burgués y Fortuna, 1997) que pueden aportar en el logro del tránsito al que se hace referencia en el párrafo anterior:

Fase 1: discernimiento. Se presentan a los estudiantes situaciones de aprendizaje dando el vocabulario y las observaciones necesarias para el aprendizaje. En el caso del tránsito del nivel 3 al nivel 4 (en el que se desarrollan demostraciones) una actividad tipo podría tener como objetivo el reracionamiento de diferentes figuras con sus propiedades.

Fase 2: orientación dirigida. El profesor propone una secuencia graduada de actividades a realizar y explorar. La ejecución y la reflexión propuesta servirá de motor para propiciar el avance en los niveles cognitivos. En el caso del tránsito al nivel 4, una actividad tipo podría ser la construcción de figuras (triángulos o cuadriláteros) con algunos datos conocidos. Ese tipo de construcciones les exige a los alumnos recordar las propiedades de la figura a trazar y relacionarlas para poder aprovechar al máximo los datos dados, ordenar los pasos a seguir y ejecutar la acción.

Fase 3: explicitación. Una vez realizadas sus experiencias los estudiantes expresan sus resultados y comentarios. Durante esta fase el estudiante estructura el sistema de relaciones exploradas. En el caso que nos interesa una actividad tipo es la explicitación de los pasos seguidos en la construcción mencionada como ejemplo en la fase anterior y la justificación de los mismos.

Fase 4: orientación libre. Los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos de forma significativa a otras situaciones distintas de las presentadas pero con estructura comparable. Una actividad tipo de esta fase para el caso que interesa puede ser un problema de hallar un lugar geométrico y justificar el resultado arribado.

Fase 5: integración. Los objetos y las relaciones son unificadas e interiorizadas por los estudiantes en su sistema mental de conocimientos. Una actividad tipo en el tránsito al nivel 4 es la exploración de una situación geométrica con el fin de conjeturar una propiedad y demostrarla.

Es importante para la enseñanza de la geometría y en particular de la demostración tener presente los niveles de razonamiento presentados por esta teoría así como sus principios generales. La consigna “demostrar” puede tener diferentes significados según el nivel cognitivo en el que opere el estudiante. Si bien generalmente el profesor espera como respuesta un razonamiento deductivo formal (nivel 4), puede ser que la demostración elaborada por el estudiante sea un ejemplo específico (nivel 1), una serie de figuras similares a la situación original (nivel 2) o un razonamiento de tipo intuitivo relacionando algunas de las propiedades de las figuras involucradas (nivel 3).

Se hace necesario entonces conocer y respetar el nivel en el que transita cada uno de los estudiantes de un grupo y emplear las fases de aprendizaje necesarias para favorecer el tránsito a un nivel más elaborado de razonamiento. Pretender enseñar de forma prematura la demostración formal y la utilización de la simbología adecuada puede ser entonces contraproducente para los objetivos en el aula de Matemática.

Capítulo III: Análisis del diseño del discurso escolar

Situación de la demostración en geometría en el currículo de Educación Secundaria en Uruguay. El caso de los lugares geométricos.

Como se menciona en el primer capítulo de esta tesis, uno de los objetivos propuestos es indagar el surgimiento y la constitución del concepto "Lugar Geométrico" como un saber escolar instituido dentro del discurso escolar vigente del curso de Geometría Métrica para 5º año de Secundaria opción Científico de Educación Secundaria Uruguaya.

Una de las interrogantes que fueron surgiendo a medida que profundizaba en la lectura de artículos publicados sobre la demostración en geometría, es cuál es el rol que cumple la misma en el currículo actual uruguayo. Es decir: la "demostración", ¿es un tema, es una práctica o es una habilidad a desarrollar dentro del currículo? No buscaba en esta ocasión saber qué es lo que piensa el conjunto de profesores al respecto, qué es lo que perciben los estudiantes o qué es lo que yo pienso que sería deseable que ocurriera, sino simplemente saber cuál es la postura explícita y oficial al respecto. Surgió entonces la necesidad de buscar en las fuentes precisas: programas y lineamientos escritos por las autoridades competentes.

Esta sección está dedicada a analizar qué lugar ocupan la demostración y los procesos argumentativos en los programas de Educación Secundaria en Uruguay, especialmente en el Bachillerato. La idea es averiguar cuál es el objetivo del bachillerato y luego específicamente el objetivo de la formación matemática de los jóvenes de bachillerato, cuáles son las competencias a desarrollar en estos jóvenes y ya ahí indagar la función o lo que aporta la práctica de la demostración en el cumplimiento de esos objetivos.

En un primer lugar se describe el funcionamiento y objetivos generales del Sistema de Enseñanza Secundaria media y superior en Uruguay, más adelante se analiza la evolución de los programas que involucran Demostración en Geometría y especialmente el tema Lugares Geométricos. Se estudian por último los programas vigentes, concluyendo acerca de cómo ha sido el proceso de inclusión de tales temas en el diseño del currículo escolar actual y la manera en que influyeron las reformas educativas que se manifestaron a nivel mundial, especialmente en el área de la Matemática.

III.a Esquema de los Sistemas Educativos obligatorio y preuniversitario en Uruguay

En Uruguay, el sistema educativo oficial consta de nueve años obligatorios: seis en la órbita de la escuela primaria y tres en la secundaria, ciclo que se denomina Ciclo Básico Único. Después de esos nueve primeros años, los estudiantes pueden optar por realizar carreras técnicas o por continuar cursando tres años más de Educación Media Superior (EMS o, lo que es lo mismo, BD: Bachillerato Diversificado). Este título los habilita a su vez a ingresar a la Universidad.

Nos interesa en particular el análisis de esta última etapa, el Bachillerato Diversificado, donde la demostración es una habilidad que de una u otra manera se instauró de manera implícita en la práctica educativa de la mayoría de los docentes de matemática, y aparece como eje transversal en todas las orientaciones también a nivel curricular pero no de manera explícita, como veremos más adelante.

Los tres años de Bachillerato Diversificado están compuestos por un primer año común, único para todos los estudiantes, y dos años en que los alumnos pueden tomar diferentes opciones:

- en segundo año, las opciones son Científico, Biológico y Humanístico.
- en tercer año, las opciones son Ingeniería o Arquitectura, Medicina o Agronomía, Derecho o Economía.

En la siguiente tabla se indica cuáles opciones se pueden tomar en 3er año de acuerdo con la orientación cursada en 2do, a la vez que se muestra la cantidad de horas docente[6] de Matemática que asigna el currículo en cada orientación[7]:

[6] En las escuelas secundarias en Uruguay se esctructura el horario de cada turno en lapsos de 35 o 40 minutos de clase dictada intercalados con lapsos de 5 o 10 minutos de tiempo libre. Generalmente se denomina “hora docente” a cada uno de esos lapsos de clase, y su duración varía en los diferentes institutos.
[7] Estos datos se refieren al plan vigente en la mayoría de las escuelas secundarias en el año 2005.

1º	Común (4)					
2º	Científico (12)		Biológico (5)		Humanístico (5)	
3º	Ingeniería (16)	Arquitectura (6)	Medicina (5)	Agronomía (5)	Derecho (no)	Economía (10)

Entre quienes participan de la comunidad educativa en Uruguay existe consenso sobre la finalidad general de la EMS: “formar un ser humano capaz de desarrollar sus potencialidades a través del trabajo, la integración social transformadora y el acceso a estudios superiores” (Comisión T.E.M.S., 2002; Nº3, 1). En particular, se plantea que el diseño curricular posibilite que los estudiantes puedan:

- “desarrollarse como seres humanos capaces de interrelacionarse adecuadamente con sus semejantes a través de diferentes códigos, siendo capaces de codificar y decodificar diversos lenguajes;
- conocer el mundo natural y sociocultural para poder producir, transformar y crear (conocimiento, bienes y servicios) a través del trabajo y el arte;
- desarrollar las competencias para seguir aprendiendo en niveles superiores;
- tomar decisiones en situaciones nuevas e imprevistas;
- ser capaces de enmarcar y orientar los conocimientos, producciones y decisiones en valores universales consensuados socialmente;
- estimular y desarrollar la capacidad de crear e innovar, a los efectos de hacerlo competente para promover sus propios aportes a la sociedad y a la cultura”. (Comisión T.E.M.S., 2002; Nº3, 1).

Por otra parte, para que esto sea posible, se propone que al concluir la EMS el estudiante logre, entre otras cosas:

- “desarrollo y profundización de la autonomía intelectual, el pensamiento crítico y la capacidad de problematización;
- logro de la alfabetización matemática que le permita:

- utilizar la matemática –conceptos y procedimientos– en la resolución de problemas de la vida y de otras disciplinas;
- desarrollar y poner en acción su capacidad de análisis de situaciones-problema y razonar adecuadamente en busca de soluciones apelando a modelos matemáticos;
- comprender y utilizar el lenguaje matemático (comunicación matemática); y
- desarrollar el gusto y el placer por la matemática como ciencia y como herramienta". (Comisión T.E.M.S., 2002; Nº3, 2).

Ahora, ¿efectivamente las clases de matemática en la EMS en Uruguay promueven estos ideales? ¿Se hacen explícitos de alguna manera en los contenidos programáticos? ¿Se hacen presentes en alguna de las prácticas implícitas de los docentes? Estos son algunos de los cuestionamientos que surgen, y pienso que uno de los aspectos a analizar para poder comenzar a encontrar respuestas es el desarrollo de los programas desde mediados de siglo XX y hasta el momento. A continuación se presenta dicho análisis.

III.b Desarrollo de la introducción del tema Lugares Geométricos en los programas

Una vez presentado brevemente el sistema vigente de Educación Secundaria, resulta interesante examinar en particular qué ocurre con los programas de Matemática, con el fin de "rastrear" cómo se introdujo la demostración en el currículo matemático y en particular el tema de Lugares Geométricos, así como averiguar cómo fue variando el enfoque del tema.

Para ello, se analizaron programas de los planes diseñados en los años 1941 y 1985 (vigente), así como programas de experiencias que se han ido llevando a cabo en algunos de los liceos del país, con el fin de extenderlos a otras. Se analizaron en particular los programas de Matemática para 1er año de BD, Matemática "B" para 2do opción científica y Matemática "B" 3ro orientación Ingeniería por tratarse de los cursos en los cuales se tratan contenidos geométricos y se introduce a los alumnos en el estudio de los lugares geométricos, desde diferentes puntos de vista y con distintos niveles de profundidad.

PROGRAMAS DE 1941

Los programas más antiguos encontrados en la Oficina de Documentación Estudiantil de Educación Secundaria fueron los del año 1941. Dichos programas son meramente una lista de contenidos, en ningún caso se aclaran finalidades, objetivos generales ni destrezas que se quieren desarrollar en los estudiantes. Además, en ninguno de los programas analizados se presenta una lista de libros aprobados o recomendados.

El programa de lo que corresponde hoy a primer año de BD, el más escueto en cuanto a la descripción de sus contenidos, está compuesto de dos grandes capítulos: Álgebra y Trigonometría. No especifica en ningún momento la inclusión de la demostración o de procesos cognitivos como la argumentación o justificación.

Por otra parte, a diferencia del programa vigente, en éste no se incluye el tema "Lugares Geométricos" ni se hace referencia explícita a ningún tema relacionado con Geometría Euclidiana.

También se examinó con profundidad la lista de contenidos a dictar en el curso "Complementos de Geometría Elemental" para estudiantes de 2do año, opción Ingeniería, que es el antecesor del actual curso de "Matemática B" para 2do año BD, orientación Científica. Los contenidos expuestos en este programa corresponden a una construcción axiomática de la Geometría considerablemente fiel a la propuesta por Euclides en su libro "Elementos". No se habla de axiomas, sino de postulados, y no se habla de isometrías sino de "equivalencia de las figuras planas". En este caso se sugiere la cantidad de clases que debe "consagrar el profesor al desarrollo de cada bolilla".

Si bien no se explicita la inclusión de la demostración, se desprende del hecho de que sí se mencionan postulados y algunas propiedades, que se deducen de los primeros.

No se menciona en ningún momento la inclusión del tema "Lugares Geométricos" o del estudio de algunas figuras geométricas como tales.

PROGRAMAS VIGENTES

Para exponer un panorama general de los programas de EMS en Uruguay parece interesante considerar el siguiente aspecto. Del análisis de los mismos puede deducirse una característica propia de la enseñanza de la matemática en el sistema educativo uruguayo que se hace presente también en la práctica: una fuerte visión conjuntista. En efecto, en todos los contenidos programáticos de Matemática para segundo año de Bachillerato (penúltimo de formación secundaria) se hace explícito el tema, siendo la primera unidad a tratar. Pero también se manifiesta de manera implícita en el resto de las unidades y en todos los programas: las funciones –tema central de primer y tercer año de Bachillerato– son tratadas en todos los casos como relaciones entre conjuntos, incluidas las isometrías. En particular en el caso que nos interesa, que es el de los lugares geométricos, también se hace presente esta perspectiva. Como se explica en la sección IV.e.2, un lugar geométrico es un conjunto de puntos, y hallar uno implica demostrar la igualdad entre dos conjuntos. Se podrá apreciar en el Capítulo V, en el que se presentan las producciones de los estudiantes, cómo el enfoque conjuntista de la matemática se hace presente tanto en lo conceptual como en el lenguaje y la notación empleada en la resolución de los problemas.

Se analizan a continuación cada uno de los programas explicitando lo relevante en cuanto al tratamiento del tema “lugares geométricos”.

Matemática para 1er año de BD

El programa vigente para 1er año de BD fue escrito en 1989. A diferencia de los que se analizan después, en él se pueden encontrar objetivos y consideraciones generales, a la vez que consideraciones particulares – metodológicas y didácticas– sobre el programa.

Se plantea a este curso como clave en la articulación de los cursos del Ciclo Básico y los posteriores del BD. Así, en varias oportunidades se aconseja presentar un tratamiento no formal de los temas, partiendo de ejemplos, intuitivamente, para después generalizar y abstraer cuando sea necesario y de acuerdo al desarrollo del grupo.

Resulta interesante el que se explicite que “se entenderá a la Educación Matemática como elemento de la cultura general del hombre moderno, independientemente de su posición social y de su profesión” (A.N.E.P. Consejo de Educación Secundaria, 1989;

1). Es desde esta concepción que se considera que la clase de matemática debe ser un ambiente de construcción de conocimientos, en donde nunca se promueva en los alumnos la idea de que la matemática es un conjunto de conocimientos totalmente acabado y sin cuestionamientos.

Así, recomienda proponer tareas de investigación matemática e histórica. Se recomienda además comenzar cada tema con un desarrollo intuitivo, evitando los desarrollos teóricos excesivos. El lenguaje simbólico tratado en clase debe ser el que se desprenda de la necesidad del alumno de expresarse en la resolución de las actividades.

A diferencia del programa de 1941, se detecta en la confección de este programa una fuerte preocupación por tomar en cuenta la etapa de desarrollo mental en que se encuentran los alumnos. Así, en las recomendaciones se sugiere trabajar considerando que "existe un rigor para cada edad mental", por lo que se prioriza la deducción por parte de los estudiantes de unos pocos teoremas, seleccionados por el profesor, a la aplicación estricta del método deductivo aplicado a una teoría axiomática acabada. Se detecta un interés por fomentar el desarrollo de habilidades argumentativas y deductivas en los estudiantes, independientemente de los contenidos a abordar. Cabe cuestionarse si a pesar de no mencionarse de forma explícita, este innovador abordaje a nivel programático podría ser consecuencia de la influencia de la teoría de Van Hiele en quienes confeccionaron este documento y en el entorno educativo de la época.

En el programa se hace explícita la inclusión del tema lugares geométricos específicos como la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo, arco capaz, rectas paralelas. Se recomienda aplicar las propiedades de esas figuras a problemas de construcción de triángulos y de lugares geométricos (elementales). Se recomienda tratar el tema durante 18 horas, que representa un 18% de las horas del curso.

En el final del documento se presenta una considerable lista de libros recomendados para la consulta de estudiantes y profesores, algunos nacionales y otros extranjeros. Si bien no es uno de los objetivos de esta tesis analizar dicha bibliografía, por lo que no se conoce la calidad de la presentación de los temas y la manera en que se manifiesta la transposición didáctica de los mismos, se considera esta sugerencia de libros para estudiantes y profesores un aspecto positivo de este programa. De esta manera el profesor puede tener una idea más clara de cuánto se pretende profundizar y cuál es la metodología que se sugiere aplicar.

Matemática "B" (Geometría Métrica Euclidiana) para 2do año de BD

El programa vigente para "Matemática B" de 2º año BD, opción Científica se centra por completo en el estudio de la Geometría Euclidiana Plana y del Espacio. Fue escrito en 1985 y catalogado "de emergencia". Sin embargo es el programa utilizado en prácticamente todos los institutos en los que se imparte el curso en nuestro país, veinte años después.

A diferencia del anterior, éste consta únicamente de una lista de contenidos, no se explicitan objetivos generales, ni recomendaciones metodológicas, ni referencias bibliográficas. Tampoco se aclaran preferencias en el orden, por lo que se puede suponer que el que aparece es el recomendado.

Por tratarse de un curso en el que los alumnos se enfrentan de lleno con la demostración matemática, y para poder analizarlo con claridad, resulta necesario indicar cada uno de los temas, en el orden en que aparecen.

Geometría Euclidiana Plana

1. Axiomas de incidencia y orden en el plano. Consecuencias, axioma del semiplano, figuras convexas.
2. El grupo de las isometrías. Axiomas de determinación, definición de cada una de las isometrías, consecuencias, reducción de una isometría al producto de simetrías axiales.
3. Axiomas de continuidad. Nociones de medidas, teorema de Tales.
4. El grupo de las semejanzas, en particular el grupo de las homotecias. Definición y propiedades. Propiedades métricas, teorema de Pitágoras, potencia de un punto respecto a una circunferencia, circunferencia de Apolonio.

Geometría Euclidiana del Espacio

5. Axiomas de incidencia y separación en el espacio. Consecuencias, axioma del semiespacio, figuras convexas en el espacio. Poliedros eulerianos.
6. El grupo de las isometrías. Axiomas de determinación, definición de cada una de las isometrías, traslación y paralelismo.
7. Propiedades métricas de poliedros. Prismas y pirámides, poliedros regulares convexos, cálculo de sus elementos en función de la arista.

Basta una rápida hojeada al índice del libro “Curso de Geometría Métrica” (Puig Adam, 1986) para detectar que el curso es una selección de los capítulos del mismo.

Es sorprendente observar cómo la propuesta se contrapone a la que se deduce del programa del año anterior (1º BD) para el mismo plan escolar. Mientras en dicho programa se recomienda “evitar, cuando no sean imprescindibles, los desarrollos teóricos excesivos” y “no transformar a la aplicación estricta del método deductivo en un exclusivo método de educación matemática” (A.N.E.P. Consejo de Educación Secundaria, 1989; 2), en éste no se propone ningún tipo de enfoque metodológico, pero a juzgar por el orden y descripción de los temas se asume una construcción deductiva de la geometría, enfatizando en un abordaje axiomático de la geometría euclidiana. Abordar esta cantidad de unidades con la profundidad que se pretende y con el tiempo del que se dispone en el curso es implicaría asumir una propuesta que deja poco lugar para la investigación, la conjeturación, la experimentación, la búsqueda de argumentos el entendimiento por parte de los estudiantes. Se enfatiza más bien en la presentación de la Geometría como un conjunto de conocimientos completamente elaborado, sin lugar para el descubrimiento, la creación y la elaboración. En este contexto se podría deducir que la enseñanza de la demostración también se ve reducida a la exposición de productos, sin dejar lugar al desarrollo de los diferentes roles que menciona de Villiers (1993) ni al aprovechamiento de los mismos para la enseñanza.

Parece evidente que quienes confeccionaron este programa –que es, mejor dicho, una lista de contenidos, sin ninguna referencia específica sobre la manera de tratarlos en el salón de clase ni una lista de libros recomendados– se vieron profundamente influenciados por la introducción de la Matemática Moderna. Hanna y Jahnke (1996) manifiestan que ya por la mitad del Siglo XX, era tal la influencia de la Matemática Moderna que alcanzó hasta la Educación Matemática. Ello se vio reflejado en un énfasis en el rigor y demostración formal en el currículo de Educación Secundaria, bajo el supuesto de que en matemática existen criterios aceptados por toda la comunidad para la validez de una demostración. Sorprende en este caso observar cómo dicha influencia llega incluso a percibirse en la confección de un programa tan posterior, como es este del año 1985.

Por otro lado, mientras el programa de Matemática para 1er año BD sufrió grandes transformaciones durante el período de casi 50 años que transcurrió entre uno y otro programa, se observan pocas diferencias entre los de "Matemática B" (Geometría Métrica) para 2do año BD, Orientación Científica.

Al igual que en el del plan de 1941, en el programa de 1985 tampoco se explicita como un tema a tratar el de los Lugares Geométricos. Este hecho llama la atención debido a que es ése uno de los temas que más se desarrolla en la práctica efectiva, siendo incluso requisito para aprobar el curso en la mayoría de los casos[8].

Mientras éste es el programa oficial vigente, en la práctica existe una especie de acuerdo tácito entre profesores en dictar el curso con un enfoque totalmente diferente. Este enfoque se hizo explícito y cobró mayor aceptación entre los docentes a través de una experiencia piloto que la Inspección Nacional de Matemática puso en práctica.

Si bien esta experiencia se llevó a cabo en unos pocos Institutos de Educación Secundaria Públicos de la capital y del interior del país, se generalizó entre docentes que si bien no participaban de la misma, utilizaban el mismo programa e incluso las mismas fichas de ejercicios. El objetivo era mejorar la enseñanza del curso de Geometría Métrica de 2º año de Bachillerato (5º año de Educación Secundaria) y los resultados en los exámenes finales de la asignatura. Se aconsejaba un cambio profundo en cuanto a metodología y a los contenidos programáticos.

[8] Este curso se aprueba con un examen que consta de dos partes: "práctico" y "teórico". Esta última se puede exonerar con la actuación durante el curso, pero para aprobar la primera es obligatorio rendir un examen final. En la mayoría de los exámenes prácticos aparece como una o más de las partes de los ejercicios, hallar lugares geométricos.

En lo que respecta a la metodología, los principales cambios son los siguientes (A.N.E.P., 2001):

- Proponer dos pruebas semestrales y el examen final igual para todos los estudiantes que participan de la experiencia, el mismo día y a la misma hora. Esto supone una coordinación muy estrecha en cuanto a los temas dictados en el año, el enfoque y la profundización dedicada a los mismos.
- Trabajar articulando durante todo el curso las actividades prácticas con el contenido teórico.
- Trabajar con los mismos repartidos de ejercicios.
- Abordar el curso haciendo mayor hincapié en los ejercicios prácticos, en particular la primera unidad, de repaso de definiciones, propiedades y construcciones de figuras geométricas. Se hace hincapié en la explicitación del algoritmo de los trazados geométricos, su ejecución, su justificación y la discusión del número de soluciones.
- Trabajar los temas Isometrías y Semejanzas desde el desarrollo teórico.

En lo que respecta a los contenidos, se puede apreciar un cambio sustancial en la manera de presentarlos y en el orden propuesto:

1. Resolución de ejercicios prácticos que involucran propiedades y relaciones de las diferentes figuras: triángulos, puntos y rectas notables en los triángulos, paralelogramos, circunferencias, ángulos en la circunferencia.
2. Axiomas de incidencia y orden en el plano. Primeros teoremas, convexidad.
3. Paralelismo y perpendicularidad en el espacio.
4. Isometrías.
5. Teorema de Tales y aplicaciones a los triángulos.
6. Homotecia y semejanza.

Se puede apreciar que al igual que en el programa oficial, la “resolución de problemas de lugares geométricos de puntos” no aparece de manera explícita como una destreza a desarrollar. Sin embargo, sí se dedican varios de los repartidos prácticos a la resolución de este tipo de ejercicios, explicando entonces, aunque sea en parte, la importancia que en los exámenes finales y en las pruebas parciales se le otorga a dicho tema.

Matemática "B" (Geometría Analítica y Proyectiva) para 3er año de BD

El programa vigente para "Matemática B" de 3er año BD opción Ingeniería data del año 1985. Una vez más, el programa se trata únicamente de una lista de contenidos a tratar, no se presentan objetivos generales ni consideraciones de tipo metodológicas, y sólo se recomienda un libro para el dictado del curso.

Consta de doce unidades, de las cuales las primeras cinco se dedican al estudio de las rectas y cónicas desde la perspectiva de la Geometría Analítica. En el caso de las cónicas se propone definirlas en primer lugar métricamente, como lugares geométricos de puntos que cumplen una propiedad determinada, para concluir más adelante una definición analítica general. Dentro de estas unidades se hace explícito el estudio de los lugares geométricos planos de puntos y de métodos analíticos para su determinación.

El resto de las unidades del programa constituyen una introducción al estudio de la Geometría Proyectiva: espacio proyectivo, grupos armónicos, proyectividades y perspectividades, cónicas definidas desde este nuevo punto de vista y propiedades relativas. Se integra también el enfoque métrico cuando es necesario, como en el estudio de las propiedades de las cónicas.

Parece ser que en este programa se intenta sintetizar el proceso transitado por los estudiantes en cuanto al desarrollo del estudio de lugares geométricos, contenido programático que tiene sus inicios en los primeros años de Educación Secundaria –ya sea de manera implícita o explícita–.

Una vez más, en ningún momento del programa se hace explícito qué es lo que hay que demostrar de las propiedades que se mencionan, ni cuál debería ser la finalidad del estudio de las cónicas desde tantos puntos de vista, ni se aclara algún criterio en cuanto a cómo utilizar la demostración en clase.

III.c ¿Cómo influye lo analizado en la práctica docente y en la reflexión sobre ella?

Esta última observación, común a todos los programas a excepción del vigente para 1er año de BD, preocupa especialmente porque lo que ocurre en la práctica es que en la actualidad todos los docentes tienen claro que no pueden dejar de demostrar ciertas propiedades en clase, sienten que un curso queda “rengo” si sólo se ven aplicaciones prácticas y no se establece un sistema axiomático, deductivo y formal.

Ahora, ¿cuántos profesores de Matemática realmente entienden a la demostración como una herramienta para desarrollar habilidades deseadas en el marco de la matemática educativa? ¿Cuántos de nosotros enseñamos a demostrar y a utilizar esa herramienta por convicción personal y vocacional y cuántos simplemente porque fue lo que aprendimos, o porque la inspección lo exige, o simplemente por costumbre, porque “siempre se hizo así”?

Está claro que ha habido una evolución entre los programas del año 1941 y los del año 1989 para primer año de BD. En el primero, a diferencia de este último, se dejaba ver una enseñanza puramente abstracta y formal, basada fuertemente en libros de texto sin estudio didáctico, cognitivo detrás. Sin embargo y lamentablemente, tal evolución no fue tan marcada en el caso del curso de Geometría para 2º año de BD. Como vimos, el programa se ve aún fuertemente influenciado por los estragos que la Matemática Moderna han causado en la Enseñanza de la Matemática, según la cual es más importante el estudio de un sistema axiomático acabado, que el profesor presenta con total perfección, que la construcción por parte de los estudiantes de axiomáticas locales, como recomiendan muchos autores hoy en día, entre ellos los ya mencionados Hanna y Jahnke (1996).

Parece ser que al menos en lo que refiere a lo curricular, la enseñanza de la Matemática en el Bachillerato en Uruguay precisa de una profunda revisión para actualizarse con lo que a nivel mundial se está proponiendo. A pesar de lo que muchos profesores piensan, esto no implica la muerte de la demostración, sino que por el contrario, esto implica buscar caminos para que los estudiantes reconsideren el significado de la demostración y los procesos argumentativos como una herramienta indispensable para su formación matemática y general.

Al comienzo de este capítulo me preguntaba si la *demostración*, es un tema, es una práctica o es una habilidad a desarrollar dentro del currículo. A la luz de lo analizado pienso que la respuesta es que es una habilidad a desarrollar instaurada de manera implícita entre los docentes, y a la vez una práctica que todos intentamos desarrollar en nuestras clases. Ahora, ¿para qué se trabaja en el aula? ¿Cómo la debemos introducir? ¿Cuáles son los obstáculos a los que los estudiantes se tienen que enfrentar? ¿Qué tipos de problemas tenemos que plantar para favorecer el desarrollo de los procesos argumentativos en nuestros estudiantes? ¿Cómo puede hacerse asequible a través de las diferentes áreas de la matemática? ¿Qué marcos de la matemática escolar pueden resultar apropiados para desarrollar esta habilidad?

Mi intención es analizar en este trabajo si los ejercicios de lugares geométricos y de construcción (descriptos en el próximo capítulo) presentan al estudiante situaciones en las que pueda desarrollar los procesos de los cuales hablamos en el párrafo anterior. De esa manera, se estaría aportando para que en Uruguay comiencen a hacerse explícitas las finalidades educativas y las maneras de lograrlas.

Capítulo IV: Descripción de la experimentación

Este capítulo está dedicado a la descripción de la investigación que se llevó a cabo en torno a la resolución de problemas de construcción y lugares geométricos. En este apartado se especifican, en primer lugar, cuáles fueron las preguntas que guiaron la investigación. Más adelante se hace una breve descripción del modo en que se recolectaron los datos y las experiencias previas que llevaron a la conformación de la versión final de la actividad propuesta. En un cuarto apartado se describe el grupo de estudiantes a quienes se les aplicaron las actividades, y, por último, se describe la actividad, cuáles son las respuestas esperadas y la manera en que fue previsto analizar los datos.

IV.a Las preguntas de investigación

Como se planteara en la introducción, dos de los objetivos generales de esta investigación son: por un lado, analizar y describir las producciones –orales, escritas y en forma de archivos de programas de Geometría Dinámica– de los estudiantes de 5º año de Educación Secundaria (17 años) cuando se enfrentan a la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular –de lugares geométricos y de construcción– en lo que refiere a los esquemas de demostración y procesos que se hacen presentes, así como las funciones de demostración que se manifiestan en la resolución. Por otro lado, también se desea investigar cómo el abordaje de este tipo de problemas puede ayudar a los estudiantes a mejorar su concepción de demostración en matemática así como sus maneras de conjeturar resultados y sus modelos de justificación. Las preguntas que fueron surgiendo son entonces de tipo cualitativo y descriptivo de la situación planteada:

- ¿Qué tipos de esquemas de demostración se hacen presentes en la resolución de este tipo de problemas?
- ¿Qué procesos cognitivos relacionados con la demostración en geometría se hacen presentes en la resolución de problemas de construcción y lugares geométricos? (A modo de ejemplo, algunos de los procesos esperados son la fase de descubrimiento de un resultado sobre la figura a estudiar, su conjetura

inicial, su formulación y, en algunos casos, la demostración: explicaciones y justificaciones.)

- ¿Qué funciones de la demostración se manifiestan en el proceso de resolución de los problemas de lugares geométricos?
- ¿De qué manera intervienen los elementos anteriores para que los estudiantes logren exitosamente demostrar los resultados conjeturados?
- ¿De qué manera influye la resolución de problemas de lugares geométricos en el desarrollo de la habilidad de demostrar de los estudiantes?

IV.b Modo de recolección de datos

Se propone una investigación de corte cualitativo, en la que se analiza detalladamente la manera que tienen de abordar los problemas unos cinco grupos de dos o tres estudiantes en cada instancia.

Se optó por este tipo de investigación ya que en esta ocasión interesa analizar los procesos del pensamiento, y específicamente los del área de la geometría y el razonamiento, involucrados en la resolución de este tipo de problemas. Se considera apropiado para esto un estudio de casos, intentando que la muestra escogida sea lo más heterogénea posible, dentro de lo que permite la población total del grupo con el que se trabaja.

La actividad fue propuesta en tres instancias: la primera vez a estudiantes de un centro de formación docente –esta experiencia sirvió como prueba piloto para ajustar detalles– y las otras dos veces a estudiantes del Instituto de Educación Secundaria en el que trabajamos como docentes, proponiendo parte de la actividad a un grupo y la otra parte al otro grupo.

En todos se presentó la actividad de la misma manera: se les brindó a los estudiantes una hoja en la que tenían impresa la actividad (ya sea completa o parcial, según el caso) y se les dijo que era recomendable trabajar en parejas o tríos pero que también podían trabajar de manera individual si se sentían más cómodos. La mayoría de los estudiantes optó por trabajar en grupos, que se formaron de manera espontánea, sin intervención docente. En las tres instancias se trabajó en salones de clase en los que había computadoras con un programa de Geometría Dinámica instalada (Geometer Sketchpad y Cabri-Géomètre en el primer caso y sólo Cabri-Géomètre en el segundo), indicando que se podía trabajar tanto con lápiz y papel como con la computadora, e incluso integrando ambas estrategias. Es importante aclarar que todos los estudiantes que participaron de la propuesta tenían habilidades básicas en el uso de tales programas.

Se les pidió a los estudiantes que registraran todos los intentos de resolución de los problemas que fueran surgiendo, tanto los que consideraran válidos como aquéllos que por alguna razón fueron descartados. Además, se disponía de un grabador de audio en el que se fueron registrando los diálogos con los diferentes grupos.

En suma, las estrategias que se utilizaron para recolectar datos fueron las siguientes:

- Grabación de diálogos entre la docente y los diferentes grupos y del diálogo entre los miembros del grupo.
- Registro escrito de figuras, apuntes, intentos de justificación de resultados obtenidos.
- Archivos de los programas de computadora utilizados, con producciones de los estudiantes, tanto figuras de análisis como presentación de soluciones.
- Observación general de las situaciones y apuntes personales en el momento de la puesta en práctica de la actividad, registrando tanto éxitos como fracasos.

IV.c Experiencia piloto

Como se mencionó anteriormente, previo a la puesta en práctica de lo que sería la actividad con los alumnos del Instituto de Educación Secundaria seleccionado, se decidió aplicar la actividad planificada a un grupo diferente de estudiantes. Los propósitos de esta experiencia piloto eran analizar si los problemas propuestos eran adecuados en cuanto al tiempo que se le iba a dedicar en la puesta en práctica, modificar los aspectos que fueran necesarios, recolectar un conjunto de posibles soluciones a los problemas y razonamientos asociados y detectar si realmente permitirían responder las preguntas de investigación.

Es así que la primera instancia de aplicación de la actividad, tal cual se presenta en el apartado IV.e, fue el 1º de agosto de 2005, en un grupo de primer año de formación docente del Instituto de Profesores Artigas (IPA), Montevideo, Uruguay, en la carrera de Profesorado de Matemática, en el turno Nocturno (el docente a cargo de este grupo es un colega que gentilmente cedió sus horas para la experiencia). En este caso se emplearon dos horas y media para la puesta en práctica.

Precisamente por ser en el turno nocturno, este grupo se caracteriza por ser muy heterogéneo en cuanto a su procedencia, antecedentes, inquietudes, necesidades y conocimientos. Es un grupo de personas que trabajan durante el día, en ocasiones ejerciendo ya la profesión de docente de matemática, pero también hay personas que no estudian desde hace varios años, o por lo menos no tienen un estudio reciente de matemática. El esfuerzo que deben realizar estas personas, generalmente adultas, para su formación, se ve reflejado en la motivación que presentan frente a su aprendizaje para su superación, tanto laboral como personal.

Los siguientes son algunos datos de las personas que colaboraron con la experiencia, en donde se puede analizar la heterogeneidad del grupo:

	Iniciales	**Estudio cursado en 2004**	**Especialidad cursada en el último año de Secundaria**
Grupo 1	DC	No cursó	Ingeniería
Grupo 2		6º Ingeniería (Bachillerato)	Ingeniería
		Ingeniería (Universidad)	Ingeniería
		Ingeniería (Universidad)	Ingeniería
		Magisterio	Medicina
Grupo 3	K	Economía (Universidad)	Economía
	F	No cursó	Ingeniería
Grupo 4	M	No cursó	Ingeniería
	C	No cursó	Ingeniería

	R	1er año IPA (Matemática)	Derecho
Grupo 5	SA	No	Economía (en 1976)
Grupo 6	AG	2do año IPA (Matemática)	Medicina
	SD	1er año IPA (Matemática)	Medicina
Grupo 7	Ma	No	Ingeniería
	Mo	No	Ingeniería
Grupo 8	GB	No	Ingeniería
	LC	2do año IPA (Matemática)	Ingeniería
	VC	2do año IPA (Matemática)	Ingeniería
Grupo 9	JD	1er año IPA (Matemática)	Medicina
	GC	No	Ingeniería
Grupo 10	DH	Ingeniería en Electrónica (Educación Técnica Media)	Derecho
	SG	No	Ingeniería

Como se puede apreciar, la conformación de los grupos fue heterogénea: mientras algunos crearon grupos de cuatro personas, otros, como el grupo 1 o 5, se sintieron cómodos trabajando de manera individual. Si bien en el momento de plantear la consigna se sugirió que se conformaran grupos de trabajo, no fue una imposición, ya que se pretendía que los estudiantes trabajaran con la mayor comodidad posible. Este comportamiento también fue observado en otra de las instancias en las que se planteó la actividad, y evidentemente influyó en las producciones encontradas. Sin embargo, el análisis de la calidad de las producciones según si se trabajaba de manera individual o grupal no era uno de los objetivos de la investigación, por lo que no fue considerado en las conclusiones finales.

Se puede apreciar también la notoria diferencia en los antecedentes de las personas que participaron de la experiencia: en primer lugar, sólo un estudiante terminó el año anterior su Educación Secundaria para ingresar en el Instituto, y el resto de los estudiantes presentan situaciones bien diversas: algunos de ellos no cursaron estudios el año pasado, lo que seguramente indique que es un esfuerzo grande el que están haciendo por reiniciar los estudios. Otras vienen de haber cursado otras carreras

(Magisterio, Ciencias Económicas, Ingeniería), en general los primeros años de las mismas. Por último, existe un grupo considerable de personas que han cursado en el año anterior algún año de la misma carrera, profesorado de Matemática. Siendo que la asignatura Geometría que actualmente cursan pertenece al primer año de la carrera, esto significa que ya asistieron a clases de esta asignatura, por lo que asumo que conocen sus contenidos.

Esta experiencia piloto fue muy enriquecedora, gracias a ella se detectó que la actividad exigía demasiado tiempo de concentración, lo que hizo que si bien aún quedaba un poco de tiempo, algunos grupos la abandonaran antes de abordar todos los problemas. Eso condujo a decidir proponer la actividad en dos instancias separadas, por un lado el problema de construcción y por el otro los problemas de lugares geométricos (en el apartado IV.e se presenta la actividad y se describen estos tipos de problemas).

Por otra parte, también fue enriquecedora en cuanto a las producciones encontradas. Como los problemas eran de invención propia y relativamente abiertos en su propuesta, en varios casos los estudiantes propusieron soluciones que habían escapado a un primer muestreo de soluciones. También fue útil para detectar que los problemas propuestos permitían detectar los elementos que se querían: funciones de la demostración involucradas en la búsqueda de soluciones, así como esquemas de demostración y procesos cognitivos que se hacen presentes.

IV.d Los estudiantes investigados

A continuación describo el perfil de los estudiantes a quienes se propuso la actividad en las dos últimas instancias: alumnos de los grupos de 5º año Científico de los cuales soy profesora.

Ambos son grupos de estudiantes de 17 – 18 años que, en la mayoría de los casos, vienen estudiando en el mismo instituto desde que comenzaron su escolarización, por lo que presentan características similares en cuanto a su formación previa.

Es un colegio privado de Montevideo con la particularidad de que los estudiantes reciben una doble escolarización: cursan de manera paralela los Bachilleratos Nacional e Internacional, lo que suma un total de 8 horas diarias de clase. En tercer año de Secundaria, que corresponde en esta Institución al décimo de formación escolar, debieron rendir el examen IGCSE (*International General Certificate of Secondary Education*) en todas las asignaturas, que les habilita a comenzar a cursar el Bachillerato Internacional. Durante esos primeros años de Educación Secundaria cursan, además de los cuatro o cinco períodos de clase (35 minutos) que semanalmente se le asigna a la asignatura Matemática en el Plan Nacional, cuatro períodos más de la asignatura Math, dictada en inglés.

En este momento se encuentran cursando quinto año, que presenta particularidades importantes en cada Bachillerato: por un lado, en el Nacional, es el primer año en el que tienen exámenes obligatorios, lo que implica de parte de ellos una actitud diferente en cuanto a sus responsabilidades, y de parte del docente una actitud de acompañarlos en ese proceso de adquisición de habilidades para la preparación del examen, sin perder de vista la importancia del aprendizaje de cada tema del programa. Mientras tanto, en el Bachillerato Internacional se presentan en un momento muy exigente en cuanto a la entrega de proyectos, que son parte indispensable para la aprobación del examen, y también en pleno proceso de aprendizaje de conceptos relacionados con la preparación del examen para el cual estudian durante tres años. Estos alumnos deberán rendir el examen de IB en mayo del próximo año (dentro de unos nueve meses).

Vale destacar que a pesar de la gran cantidad de horas dedicadas a la formación en Matemática, los alumnos que participaron de la experiencia no presentan diferencias importantes con los alumnos de otros colegios de Montevideo en su formación en Geometría. Esto puede deberse, en parte, a que el programa de Bachillerato Internacional prioriza principalmente los temas referidos a las áreas de Cálculo, Estadística y Probabilidad. Las unidades de Geometría son menos en cantidad e importancia para el puntaje en el examen, y en ningún caso son tratadas con el enfoque característico del curso de “Matemática B” (Geometría Métrica) de 5º año opción Científico del programa Nacional.

En este instituto se le dedican 7 períodos semanales de 35 minutos a este curso. Hasta el momento de la aplicación de la actividad, se habían trabajado en clase las primeras unidades:

- Aproximación a la revisión de propiedades de triángulos, cuadriláteros, ángulos en la circunferencia y definición de figuras como lugares geométricos: mediatriz, bisectriz, arco capaz, rectas paralelas, etc. Esta primera aproximación se realizó a través de ejercicios de demostración de propiedades y de construcción de figuras que cumplieran ciertas condiciones. Se insistió en la redacción de algoritmos de construcción apropiados, primero en lenguaje coloquial e intentando introducir, paulatinamente y en la medida de las necesidades, un lenguaje más simbólico.
- Resolución de problemas de lugares geométricos, como aplicación de la revisión hecha hasta el momento de todos los conceptos de figuras geométricas vistos hasta el momento.
- La segunda unidad, dedicada a la introducción de la Geometría Métrica como un sistema axiomático, en la que se presentaron conceptos primitivos y axiomas y se fueron introduciendo definiciones de conceptos y teoremas, haciendo énfasis en la construcción de un sistema axiomático como un ambiente en el que construir nuevos conceptos con reglas determinadas, más que en el contenido en sí.
- A continuación se trabajó específicamente con paralelismo en el espacio: entre rectas, entre recta y plano y entre planos. Se analizaron secciones de cuerpos con planos, justificándolas con las definiciones y teoremas vistos.

En este momento los estudiantes se encuentran comenzando a trabajar con el concepto de Isometrías. El objetivo aquí es retomar lo que ellos conocen y reconstruir una perspectiva más formal, acorde con la perspectiva que se le viene dando al curso.

Más adelante se pretende trabajar con el tema Semejanzas, especialmente con la Homotecia y composiciones de ella con alguna isometría.

Durante todas las unidades fueron alternando el trabajo con figuras de análisis en lápiz y papel con el trabajo en Cabri, que es el software de Geometría Dinámica disponible en el Colegio para trabajar con los estudiantes.

Los textos utilizados en clase y recomendados para seguir el curso son los siguientes:

- Fernández Val, W. (2000). *Geometría Métrica. Plano y Espacio*. Montevideo, Uruguay: Ed. Tradinco.

- Puig Adam, P. (1976). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I – Fundamentos*. Madrid, España: Editorial Biblioteca Matemática.

En ocasiones se dedica una fracción de tiempo de la clase a leer alguno de estos textos, con el objetivo de que los estudiantes aprendan a encontrar el tema que precisan en el libro, que interpreten qué es lo que está escrito allí, y especialmente que puedan encontrarle significado de manera de integrarlo al conocimiento que tenían previamente, reconstruyendo los conceptos relativos.

Debemos tener en cuenta que en esta asignatura los alumnos tienen la posibilidad de exonerar la parte teórica del examen siendo obligatoria la parte práctica. En esta asignatura el vínculo entre ambos aspectos es particularmente estrecho. Por lo tanto, uno de los criterios para exonerar el teórico tenido en cuenta por la docente es el de mantener también el trabajo práctico al día.

Se aplican las siguientes modalidades de evaluación del rendimiento de los alumnos: oral individual, escrito individual y trabajo escrito grupal. Además, para evaluar el desarrollo de los estudiantes en el logro de los objetivos propuestos, se toman en cuenta los siguientes aspectos:

- Actitud, compromiso, participación y producción en clase.
- Entrega de la resolución de los ejercicios de los repartidos prácticos en tiempo y forma.
- Desempeño en pruebas escritas de diferente duración. Algunas de carácter exclusivamente teórico o práctico, y otras integran ambos aspectos.
- Confección de materiales para exponer y trabajos por proyectos.

IV.e Actividad propuesta y respuestas esperadas – su análisis[9]

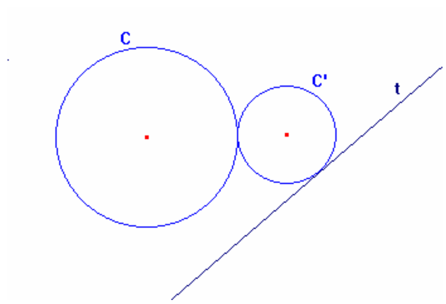
Te agradecería que al resolver los problemas escribieras **todas** las estrategias que pensaste para abordarlos, tanto aquéllas que crees que son válidas como aquéllas que crees incorrecta, o que descartaste por alguna razón.

Te agradecería también que escribieras **todos** los razonamientos que fueron necesarios plantear en cada uno de los problemas.

Problema 1:

a) Construye una circunferencia C de centro O y radio r y una recta t. Construye ahora en el mismo plano una circunferencia C' de centro O' y radio 3 que sea tangente a C_O y a t.

Discute la cantidad de soluciones según la posición de C_O y t.



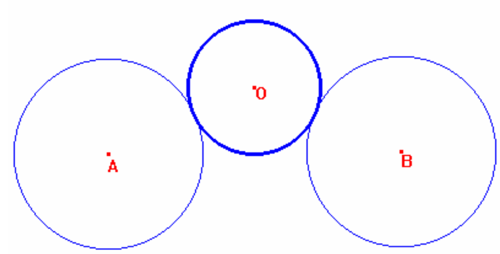
b) Se consideran dos circunferencias C_A y C_B de igual radio y la circunferencia C_O, en el mismo plano que las anteriores y tangente a ambas. Halla el lugar geométrico de O en las siguientes situaciones:

i) C_A y C_B son exteriores.

ii) C_A y C_B son tangentes.

iii) C_A y C_B son secantes.

iv) C_A y C_B son coincidentes.

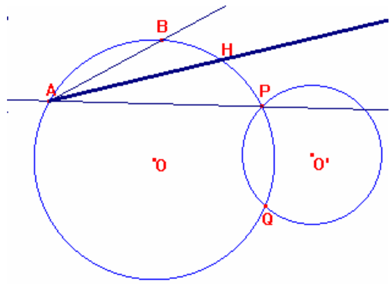


Problema 2:

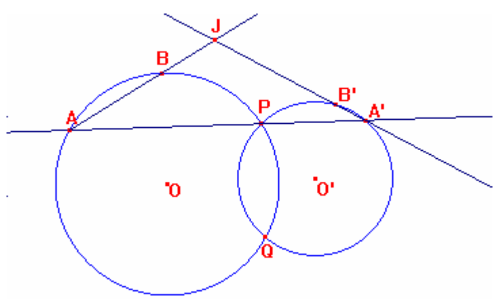
[9] En la propuesta de la actividad no se incluían figuras, fueron incluidas aquí con el fin de facilitar la lectura.

a) Se consideran dos circunferencias $C_{O,r}$ y $C'_{O',r'}$ tales que $C \cap C' = \{P, Q\}$. B es un punto de C tal que $\overline{BP} = r$ y ΔPOB es horario. Se traza una recta t variable por P, $t \cap C = \{P, A\}$.

Halla el LG de H, intersección de la bisectriz de $B\hat{A}P$ con la circunferencia C.

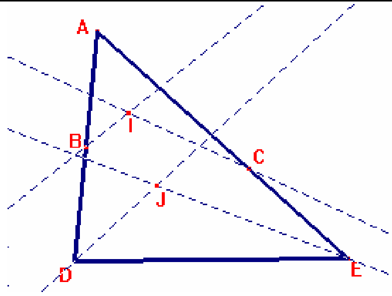


b) B' es un punto de C' tal que $\overline{B'P} = r'$ y $\Delta PO'B'$ es antihorario, $t \cap C' = \{P, A'\}$, $AB \cap A'B' = \{J\}$. Halla el lugar geométrico de J.



Problema 3:

Se considera un triángulo ΔADE, B es el punto medio del segmento AD y C es un punto variable en el segmento AE. Las bisectrices de $A\hat{C}B$ y $A\hat{B}C$ se cortan en I, y las bisectrices de $A\hat{E}D$ y $A\hat{D}E$ se cortan en J. Halla el lugar geométrico de O, circuncentro del triángulo ΔAIJ.



Te agradecería ahora que escribieras cuál es tu opinión con respecto a los problemas planteados, cómo te sentiste al resolverlos y qué piensas de tu desempeño.

Muchas gracias

A excepción de la parte a del primer problema, todos los problemas son originales. Algunos de ellos fueron inspirados en problemas de los libros de Fernández Val (2000) o Puig Adam (1976) ya citados. La parte a del primer problema es una versión modificada del ejercicio que aparece en el libro de Fernández Val (2000: 25). Cabe aclarar que en el mismo aparece como “ejercicio resuelto”, pero en el estudio de la cantidad de soluciones no se hace un análisis exhaustivo, incluso en el presente trabajo se muestran soluciones que allí no aparecen.

El objetivo de la actividad es analizar los procesos que intervienen en la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular. Quienes se enfrentan a estos problemas deberán identificar qué objetos y vínculos entre ellos permanecen constantes, para descubrir en qué figura varía el punto que se está analizando.

Se busca analizar el momento en el que los estudiantes se dan cuenta de cuál es la figura en la que varía el punto, observar las estrategias que utilizan para arribar a esa conclusión: inductiva, deductiva, o utilizando una combinación de ambas.

Los problemas fueron pensados de manera que representaran un ***desafío*** para los estudiantes pero ***accesibles*** en su resolución. Fueron propuestos a alumnos de 5º año Orientación Científica de un liceo privado de Montevideo, cuando ya ha transcurrido más de la mitad del curso de Geometría Métrica. Esto implica que ya se han enfrentado al problema de hallar lugares geométricos, pero todas las situaciones que se presentan son nuevas para ellos. A su vez, se buscó que los elementos variables fueran diferentes –una circunferencia, una recta o un punto– y los conjuntos solución fueran variados: vacío, un punto, una recta o arco e incluso “casi” todo el plano. Esto también es nuevo para los estudiantes, ya que en el curso no se habían visto problemas cuya solución fuera vacía o todo el plano.

A continuación se describirá en qué consiste la resolución de los tipos de problemas que se proponen. Se describirá además cuáles de las funciones de la demostración que plantea de Villiers se podrían encontrar en cada una de las etapas necesarias para la solución.

IV.e.1 Problemas de construcción

Los problemas ‘de construcción’ trabajados en el curso consisten en el trazado, con regla y compás, de una figura geométrica que debe cumplir con ciertas condiciones iniciales, datos del problema. Como parte del contrato didáctico, explicitado durante el curso, se espera que los estudiantes completen las siguientes etapas:

- ***dibujar una figura de análisis*** –puede ser a mano alzada– en la que deberán aparecer, a modo de esquema, los datos dados en la letra del ejercicio y todas las relaciones entre las figuras que puedan servir para la construcción pedida;
- ***trazar la figura con regla y compás***, para lo cual se debe planificar los pasos que se van a seguir en la construcción y llevarlos a cabo;
- ***escribir el algoritmo de construcción,*** esto es, explicitar, en orden cronológico, los pasos que se debieron seguir para el trazado. Esta etapa está completa y correcta cuando se puede construir nuevamente la figura, solamente a partir del algoritmo y sin necesidad de analizar la figura de análisis o el trazado realizado;
- ***escribir la justificación*** de los pasos del algoritmo que así lo requieran, explicando por qué el algoritmo elegido genera la figura pedida. Por ejemplo, si es necesario construir una circunferencia, en esta etapa hay que decir por qué y cómo se utiliza para la solución buscada;
- y, por último, la etapa de ***discusión*** de la cantidad de soluciones, según la posición o medida de los datos que se brindaron originalmente en el problema.

Como se puede apreciar, en el transcurso de las diferentes etapas de la resolución de este tipo de problemas se presenta la oportunidad de vivenciar a la demostración en sus diferentes roles: descubrimiento, verificación, explicación, comunicación y sistematización.

IV.e.2 Problemas de Lugar Geométrico

> *“Un lugar geométrico es una figura (línea o superficie) en la que todos los puntos satisfacen una cierta propiedad, y todos los puntos a los que les corresponde la propiedad respectiva pertenecen a la figura respectiva.”* (Fischbein, 1993; 14)

Los problemas de “hallar lugares geométricos” trabajados en este curso consisten en hallar cuál es la figura en la que varía un punto en determinada situación, en la que algunos elementos son invariantes y otros varían, generalmente relacionados según ciertas propiedades de incidencia y pertenencia. Se espera que los estudiantes utilicen para ello propiedades geométricas de las figuras, las relaciones entre ellas, basándose en conceptos de Geometría Euclidiana. En un curso posterior se analizan problemas similares pero se resuelven utilizando herramientas algebraicas agrupadas en lo que se conoce como Geometría Analítica. Todas las situaciones fueron pensadas para trabajar en el plano, que es lo que se ha hecho durante el curso hasta el momento en lo que refiere a lugares geométricos. Se espera que los estudiantes los resuelvan sin utilizar transformaciones –isometrías o semejanzas, que son los que se manejan en este curso– , por lo que además los problemas tienen en común el poderse resolver utilizando únicamente propiedades de la Geometría Métrica que no involucran transformaciones.

Resolver este tipo de problemas significa, de hecho, demostrar la igualdad entre dos conjuntos de puntos: el que forman todos los puntos generados por la situación (generalmente llamado "lugar geométrico del punto …") y el conjunto de los puntos de una figura[10]. Esto implica que se debe demostrar una doble inclusión, lo que generalmente se hace transcurriendo las siguientes etapas, que fueron explicitadas previamente como parte del contrato didáctico entre la profesora y los alumnos.

Primera etapa: "LG $\subset$ figura sostén"

- exploración de la situación, construyendo uno o más posiciones particulares. En esta etapa se debe analizar la situación buscando invariantes geométricas que estén relacionadas con el punto en cuestión,
- **descubrimiento** de la figura en la que varía el punto, que llamaremos "figura sostén". Aquí intervienen además procesos de **sistematización** de las propiedades relacionadas con las figuras que se presentan en el problema.
- justificación del por qué el punto varía en dicha figura. Esto requiere hacer uso de la demostración como **explicación**.

Segunda etapa: "figura sostén $\subset$ LG"

[10] Cabe recordar lo señalado en la sección III.b con respecto a la influencia de la visión conjuntista de la enseñanza de la Matemática en la EMS en Uruguay sobre el tratamiento, lenguaje y notación en este tema.

- Analizar si todos los puntos que pertenecen a la figura pertenecen efectivamente al lugar geométrico.
- Discernir cuáles son los puntos de la figura sostén, que pertenecen al lugar, y concluir entonces cuál es la solución del problema.

En el caso particular de los estudiantes que participaron de la experiencia, durante el curso se les propuso que planteen esta etapa como un problema de construcción, en donde deben tomar como dato inicial un punto cualquiera de la figura sostén, **explicar** cómo construyen a partir de él los objetos que se dan en el problema, y **verificar** que dichos objetos cumplen las relaciones de incidencia y pertenencia que se dieron originalmente en el enunciado.

IV.e.3 Análisis y justificación de la actividad propuesta

En esta sección se analizan los diferentes problemas propuestos, los objetivos que se perseguían con cada uno y el aporte que significó para la investigación. Se indica en cada caso los datos brindados, la figura variable original, la solución –figura en la que varía el punto en cuestión– y cómo influye la utilización del software apropiado en la resolución del problema.

Es importante señalar que, como se mencionó anteriormente, los estudiantes del instituto de profesorado que participaron de la experiencia piloto hicieron importantes aportes a las soluciones que aquí se presentan, proponiendo algunas que se habían omitido en una primera aproximación a los problemas.

Problema 1:

Uno de los objetivos que se buscan con el planteo de este problema es que los estudiantes analicen cómo afecta la variación de las condiciones iniciales de un problema en su solución. Además, se aprovecha la oportunidad para presentar una situación en la que el lugar geométrico es –casi– todo el plano y no solamente una recta o un arco de circunferencia, que es lo que generalmente se ve como solución.

Durante el curso se han manejado propiedades de rectas y circunferencias tangentes, por lo que los estudiantes tienen herramientas para justificar propiedades de circunferencias tangentes, que no se han hecho explícitas durante el curso.

Las razones de incluir un problema de construcción previo al de lugar geométrico fueron dos: por un lado, para que se familiarizaran con aquéllas propiedades, recordaran las que se dieron en el curso y pensaran en alguna nueva, si es que era necesario. Por otro lado, porque en este curso se optó por trabajar con ejercicios de construcción previo a los de lugares geométricos, por lo que los estudiantes se sienten relativamente seguros en la resolución de los mismos. Según la clasificación de los niveles de Van Hiele, construir una figura es un proceso menos exigente que el de analizar la variación de un punto y demostrar deductivamente el por qué varía de esa manera.

“Ficha técnica” de la parte a del problema:

a) Construye una circunferencia C de centro O y radio r y una recta t. Construye ahora en el mismo plano una circunferencia C’ de centro O’ y radio 3 que sea tangente a $C_{O,r}$ y a t.
Discute la cantidad de soluciones según la posición de C_O y t.

Datos: una circunferencia C_O y una recta t.

Se pide: construir una circunferencia de radio 3 y tangente a la circunferencia y recta dadas.

Solución: $O' \in C_{O,\ r+3} \cap (t' \cup t'')$ siendo t’ y t’’ las rectas paralelas a t a 3 cm de distancia.

En el caso en que r < 3cm, se encuentran también circunferencias solución que son tangentes a C_O y tales que $C_{O,r}$ es interior a ellas, de la siguiente manera:

$$O' \in C_{O,\ 3-r} \cap (t' \cup t'').$$

En el caso en que r > 3cm, se encuentran circunferencias solución que son tangentes interiormente a C_O de la siguiente manera: $O' \in C_{O,\,r-3} \cap (t' \cup t'')$.

En este problema, la discusión tiene muchos casos y no se pretende que los estudiantes puedan abordarlos todos durante la aplicación de la actividad:

1) **r < 3 en este caso, se cumple que r < 3 < 6 - r < 6 + r**

Si d(t , O) > r + 6 entonces NO hay solución.

Si d(t , O) = r +6 entonces hay UNA solución.

Si 6 – r < d(t , O) < r +6 entonces hay DOS soluciones.

Si d(t , O) = 6 – r entonces hay TRES soluciones.

Si r < d(t , O) < 6 – r entonces hay TRES soluciones.

Si d(t , O) ≤ r entonces hay CUATRO soluciones.

2) **r = 3 en este caso, se cumple que r – 3 = 3 – r = 0, por lo que no encontraremos más soluciones que las exteriores a la circunferencia C_O**

Si d(t , O) > r + 6 entonces NO hay solución.

Si d(t , O) = r +6 entonces hay UNA solución.

Si r < d(t , O) < r +6 entonces hay DOS soluciones.

Si d(t , O) = r entonces hay TRES soluciones.

Si d(t , O) < r entonces hay CUATRO soluciones.

3) **3 < r < 6 en este caso, se cumple que 6 - r < 3 < r < 6 + r**

Si d(t , O) > r + 6 entonces NO hay solución.

Si d(t , O) = r +6 entonces hay UNA solución.

Si r < d(t , O) < r +6 entonces hay DOS soluciones.

Si d(t , O) = r entonces hay CUATRO soluciones.

Si 6 – r < d(t , O) < r entonces hay SEIS soluciones.

Si d(t , O) = 6 – r entonces hay CINCO soluciones.

Si d(t , O) < 6 – r entonces hay CUATRO soluciones.

4) **r = 6 en este caso, se cumple que 6 - r = 0 < r < 6 + r**

Si d(t , O) > r + 6 entonces NO hay solución.

Si d(t , O) = r +6 entonces hay UNA solución.

Si r < d(t , O) < r +6 entonces hay DOS soluciones.

Si d(t , O) = r entonces hay CUATRO soluciones.

Si d(t , O) < r entonces hay SEIS soluciones.

5) r > 6 en este caso, se cumple que r – 6 < r < r + 6

Si d(t , O) > r + 6 entonces NO hay solución.

Si d(t , O) = r +6 entonces hay UNA solución.

Si r < d(t , O) < r +6 entonces hay DOS soluciones.

Si d(t , O) = r entonces hay CUATRO soluciones.

Si r – 6 < d(t , O) < r entonces hay SEIS soluciones.

Si d(t , O) = r – 6 entonces hay SIETE soluciones.

Si d(t , O) < r – 6 entonces hay OCHO soluciones.

“Ficha técnica” de la parte b del problema:

b) Se consideran dos circunferencias C_A y C_B de igual radio y la circunferencia C_O, en el mismo plano que las anteriores y tangente a ambas. Halla el lugar geométrico de O en las siguientes situaciones:

i) C_A y C_B son exteriores.

ii) C_A y C_B son tangentes.

iii) C_A y C_B son secantes.

iv) C_A y C_B son coincidentes.

Figura variable original: una circunferencia.

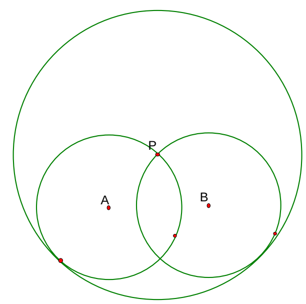
Solución:

Parte b i) la mediatriz del segmento AB.

Parte b ii) en un principio se pensó que era la mediatriz del segmento AB excepto el punto T, de intersección de las dos circunferencias de centro A y B que se presentan en los datos.

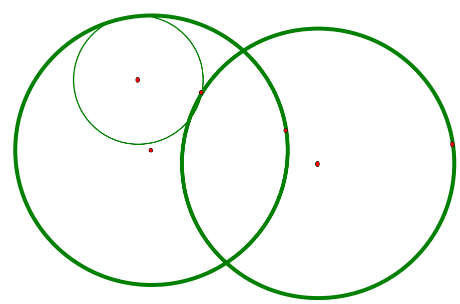
Cuando se propuso la actividad por primera vez, en la experiencia piloto, los estudiantes detectaron que dicho punto T pertenece también al lugar geométrico pedido, ya que se puede construir una circunferencia con centro en él y radio igual al diámetro de las originales, que es tangente a ambas. Por lo que la solución es también la mediatriz del segmento AB.

Parte b iii) en un principio se pensó que era la mediatriz del segmento AB excepto los puntos P y Q, de intersección de las dos circunferencias de centro A y B que se presentan en los datos.

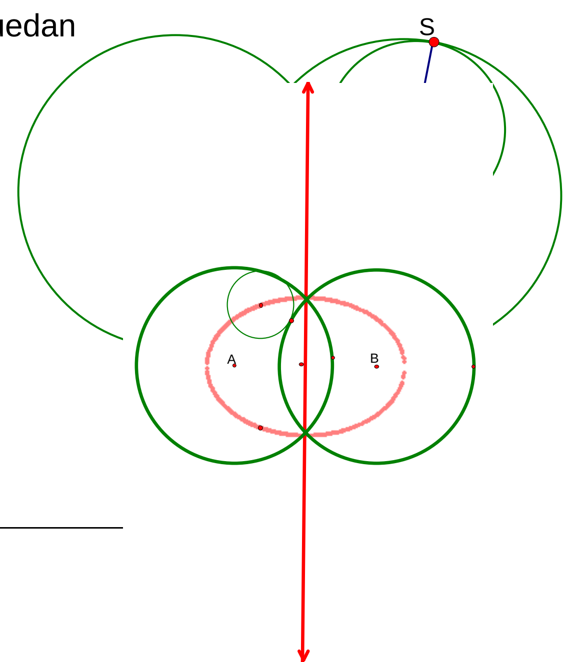


También en este problema se amplió la solución gracias a los aportes de los estudiantes durante la experiencia piloto: en primer lugar, los puntos de intersección de las dos circunferencias (P y Q) también son puntos del lugar geométrico, ya que se pueden construir circunferencias como esta:

Encontraron además nuevas posiciones para la circunferencia de centro O, tangente a ambas, que no se habían detectado: tangente a una exteriormente y a la otra exteriormente, de la siguiente manera:



Esto genera un nuevo conjunto de soluciones que quedan fuera de la mediatriz del segmento AB.



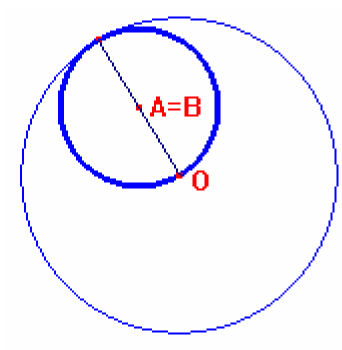
Resulta que es una elipse de focos A y B.

AP + PB = (AT +TP) + (BS – PS) = AT + BS = 2r.

Conclusión: el LG de O es la unión de la mediatriz de segmento AB y la elipse de focos A y B, con suma de distancias 2r.

Parte b iv) En un principio se pensó que era todo el plano excepto las circunferencias de centro A y B que se presentan en los datos.

Nuevamente se pudo profundizar en la solución de esta parte gracias a las observaciones de la puesta en práctica de la actividad en la experiencia piloto: el punto que no pertenece al lugar geométrico de O es el centro de las circunferencias originales, que en este caso son coincidentes. Pero los puntos de la circunferencia sí son posibles puntos del lugar, como se muestra en la figura adjunta:



Conclusión: el LG de O es todo el plano excepto el punto A (o B, que es coincidente con A en este caso).

Utilización de software de geometría dinámica:

Si bien los estudiantes tienen a su disposición el programa Cabri - Geométre, no se espera que utilicen GD para resolverlo, o al menos no es un problema en el que se aproveche al máximo su potencial porque para hacer la construcción correcta de un caso particular, es necesario pensar primero dónde se ubica el centro de la circunferencia, con lo cual se está resolviendo el ejercicio.

Sin embargo, una vez resuelta la primera parte, en la que las circunferencias son exteriores, se puede aprovechar las posibilidades que ofrece el programa para analizar las otras partes, en las que van variando la posición de las circunferencias del enunciado.

Problema 2:

En esta situación se buscó un problema que representara un ***desafío*** para los estudiantes, si bien están familiarizados con la manera de presentarlo y el tipo de solución. Si bien la solución de la parte a les puede resultar sorprendente o novedosa, la solución de la parte b es la que mayoritariamente han trabajado.

↳ "Ficha técnica" de la parte a del problema:

a) Se consideran dos circunferencias $C_{O,r}$ y $C'_{O',r'}$ tales que $C \cap C' = \{P, Q\}$. B es un punto de C tal que $\overline{BP} = r$ y ΔPOB es horario. Se traza una recta t variable por P, $t \cap C = \{P, A\}$.

Halla el LG de H, intersección de la bisectriz de $B\hat{A}P$ con la circunferencia C.

Figura variable original: una recta.

Solución: El conjunto formado por los dos puntos medios de los arcos BP incluidos en la circunferencia C.

Utilización de software de geometría dinámica:

Se espera que en la búsqueda de una solución surja la necesidad de la utilización del programa, por lo que será sumamente provechosa su utilización. Si bien en el curso se hizo explícita la propiedad que dice que la bisectriz de un ángulo inscripto corta a la circunferencia en el punto medio del arco abarcado, no es seguro que los estudiantes la recuerden con el sólo hecho de trazar una figura de análisis.

↳ "Ficha técnica" de la parte b del problema:

b) B' es un punto de C' tal que $\overline{B'P} = r'$ y ΔPO'B' es antihorario, $t \cap C' = \{P, A'\}$, $AB \cap A'B' = \{J\}$. Halla el lugar geométrico de J.

Figura variable original: una recta.

Solución: La circunferencia que pasa por B y B' y que contiene al arco capaz que tiene por cuerda el segmento BB' y por ángulo 60º, así como al arco capaz que tiene por cuerda el segmento BB' y por ángulo 120º, ubicados en semiplanos opuestos respecto de la recta BB'.

Utilización de software de geometría dinámica:

Nuevamente se espera que surja la necesidad de analizar la figura con ayuda del programa específico. Si bien es fácil construir posiciones particulares del punto J con lápiz y papel, no es fácil descubrir la figura en la que varía, a no ser que se aproveche las oportunidades que ofrece la GD, o se analice el problema de manera deductiva, descubriendo objetos, relaciones y medidas invariantes. Esto último requiere por parte de los estudiantes un grado de madurez importante en lo que hace al desarrollo del pensamiento geométrico.

Problema 3:

Este problema fue pensado para que los estudiantes se presentaran frente a un problema sin solución (el lugar geométrico es el conjunto vacío), lo que es nuevo para ellos, pero que para su resolución sólo intervinieran figuras y relaciones geométricas conocidas y manipuladas previamente.

⮱ "Ficha técnica" del problema:

Se considera un triángulo ∆ADE, B es el punto medio del segmento AD y C es un punto variable en el segmento AE. Las bisectrices de $A\hat{C}B$ y $A\hat{B}C$ se cortan en I, y las bisectrices de $A\hat{E}D$ y $A\hat{D}E$ se cortan en J. Halla el lugar geométrico de O, circuncentro del triángulo ∆AIJ.

Figura variable original: un punto.

Solución: El conjunto vacío

Utilización de software de geometría dinámica:

Por la manera en que se propuso el problema, es esperable que con una figura realizada a lápiz y papel los estudiantes no detecten que los puntos A, I y J están alineados, o que piensen que les quedaron alineados pero “sólo por la posición particular que se trazó”.

Puede surgir entonces la necesidad de construir la figura con la ayuda del programa, con lo que podrá verificarse que en realidad los puntos están alineados en todas las situaciones, por lo que no existe triángulo y por lo tanto no hay solución para ninguna posición del punto C.

Capítulo V: Análisis de los datos recogidos

Este capítulo está dedicado a la descripción y análisis de los datos recogidos en la investigación. Como se indica en el capítulo anterior, la investigación constó de una experiencia piloto (ya descripta en el apartado IV.c), y el trabajo de campo propiamente dicho. Este se llevó a cabo en dos etapas: una primera, en la que se propuso a un grupo parte de la actividad –problema de construcción– y una segunda, en la que se trabajó con otro grupo con problemas de Lugares Geométricos.

Los estudiantes de ambos grupos, sus estudios previos y los objetivos, contenidos y manera de evaluación del curso fueron descriptos en la sección IV.d. Vale destacar que no se pudieron realizar las dos actividades con el mismo grupo por razones de tiempo: el curso de Geometría Métrica tiene muchos contenidos conceptuales y procedimentales para las horas de clase que se disponen, por lo que no era conveniente dedicar muchas de ellas para la experimentación con el mismo grupo. Por otra parte, por el tipo de educación que reciben los alumnos, y por la exigencia propia de cursar el Bachillerato Nacional e Internacional a la vez, los alumnos no tienen horas fuera del horario de clase para dedicarle a este tipo de actividades extra curriculares.

V.a Descripción de la primer etapa (23 de agosto, 2005)

En la primera instancia se aplicó la siguiente actividad al grupo “5ºC” de trece estudiantes:

1) Construye una circunferencia C de centro O y radio r y una recta t. *Construye* ahora en el mismo plano una circunferencia C’ de centro O’ y radio 3 que sea tangente a C_O y a t.
   Discute la cantidad de soluciones según la posición de C_O y t.

2) C_A y C_B son dos circunferencias fijas de igual radio. Se considera la circunferencia C_O, en el mismo plano que las anteriores y tangente a ambas. *Halla el lugar geométrico de O* en las siguientes situaciones:

i) C_A y C_B son exteriores.

ii) C_A y C_B son tangentes.

iii) C_A y C_B son secantes.

iv) C_A y C_B son coincidentes.

Los estudiantes estuvieron trabajando con los problemas durante un lapso de 60 minutos en un salón de clase en el que había seis computadoras con el programa Cabri instalado a su disposición (durante el curso se trabajaba al menos una vez por semana en esta modalidad). Si bien se les presentó el primer problema completo, sólo pudieron abordar el referido a la construcción de la circunferencia (parte a) debido al tiempo disponible.

Les fue aclarado a los alumnos que no era una instancia evaluativa, así como se les solicitó que, a los efectos de la investigación, escribieran en una hoja para entregar todos los resultados y razonamientos que fueron surgiendo, tanto los que consideraran válidos como aquellos que después descartaron por alguna razón.
Se formaron equipos libremente de una, dos o tres personas, según fueron optando, de la siguiente manera:

EP – trabajó solamente con lápiz y papel

BF, IG y PP – trabajaron combinando Cabri con lápiz y papel.

MC – trabajó solamente con Cabri

AR y JO – trabajaron principalmente con lápiz y papel, combinando el trabajo con Cabri.

GV, IB y JM – trabajaron combinando Cabri con lápiz y papel.

RE, SO y SS – trabajaron solamente con lápiz y papel.

V.b Producciones orales y escritas de la primer etapa de implementación

A continuación se presenta el desarrollo de la primera instancia de aplicación de la actividad, en la que se analizan las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a un problema de construcción. Después de la trascripción de las elaboraciones de cada grupo se analizan las funciones de la demostración involucradas en la experiencia y los esquemas de demostración y procesos cognitivos que se hacen presentes.

EP – Lápiz y Papel

EP comienza construyendo en primera instancia la figura que pide el problema, sin una figura de análisis previa, intentando una construcción de manera directa y sin pensar en el orden de sus construcciones. Una vez construida la figura, comienza a analizar si hay o no solución en las diferentes situaciones:

EP: "… El punto más cercano de O tiene que ser 6 [quiere hacer referencia a la distancia que debe haber entre O y t para que haya solución, que es menor a r + 6], O, ser tangente a O, si no, no hay solución, si pasa los 6."

EP: "…pero si corta a la circunferencia, ahí también, la solución depende del radio de O, perdón, de la circunferencia."

VM: "bueno, está bien lo que estás diciendo. Ahora tenés que tratar de explicar cómo lo construís: dada la circunferencia y la recta t, explicar cómo construís la circunferencia."

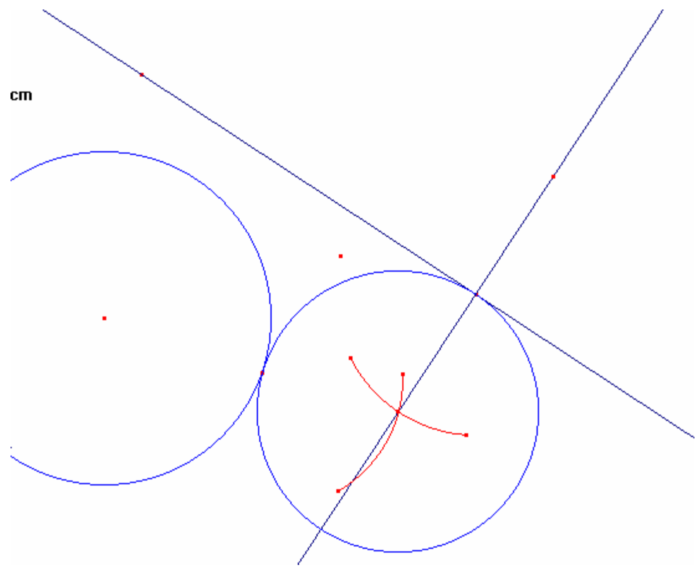
EP: "Tomás un punto en O, medís tres cm y trazas un arco."

VM: "¿Un punto cualquiera te sirve?"

EP: "Sí, un punto cualquiera. Después tomás en t otro punto cualquiera, trazas el arco, y el punto en donde corta [señala el arco anterior], es el centro de la circunferencia que buscás. Bueno, y si cuando trazás la circunferencia de ese centro y radio 3cm corta a t en dos puntos, entonces encontrás el punto medio de esos dos puntos y ese es el punto de tangencia."

EP construye algo así:

Si bien esta construcción no es correcta, cuando el estudiante la lleva a cabo "le funciona", porque si bien él afirma que los puntos sobre la recta y la circunferencia los toma como "cualesquiera", en realidad toma puntos que intuitivamente piensa que le van a servir.



Con esta construcción EP estaba cumpliendo de manera correcta con la condición de que la circunferencia debe ser de radio 3 y tangente a t, pero no con la condición de que fuera tangente a la circunferencia. En ningún momento surge la necesidad de utilizar la noción de lugar geométrico, EP no concibe el hecho de que el centro de la circunferencia puede estar, por ejemplo, en cualquier punto de una recta paralela a t a 3cm de distancia.

Como "a simple vista" esta es una solución que parece funcionar, le pregunté a EP qué ocurriría si el elegía otros puntos cualesquiera para trazar los arcos que él menciona.

En ese momento el estudiante fue dejado solo para que analizara esa nueva situación y se abandonó el diálogo. En sus apuntes aparece una cruz al lado de la construcción e indica: "Construcción incorrecta". Lo intenta nuevamente, presentando una solución que ahora parece convencerlo. Previamente vuelve a intentar analizar la cantidad de soluciones que hay según la posición de t:

"El número de soluciones depende de dos cosas: la posición de t con respecto a la circunferencia y el diámetro de la circunferencia [de centro] O.

1 – Si no corta a la circunferencia en ningún punto (incluyendo tangencia) hay dos posibles soluciones.

2 – Si t corta a la circunferencia [de centro] O en dos puntos y diámetro de la circunferencia es menor que seis."

Con respecto a la construcción indica una nueva y presenta el algoritmo:

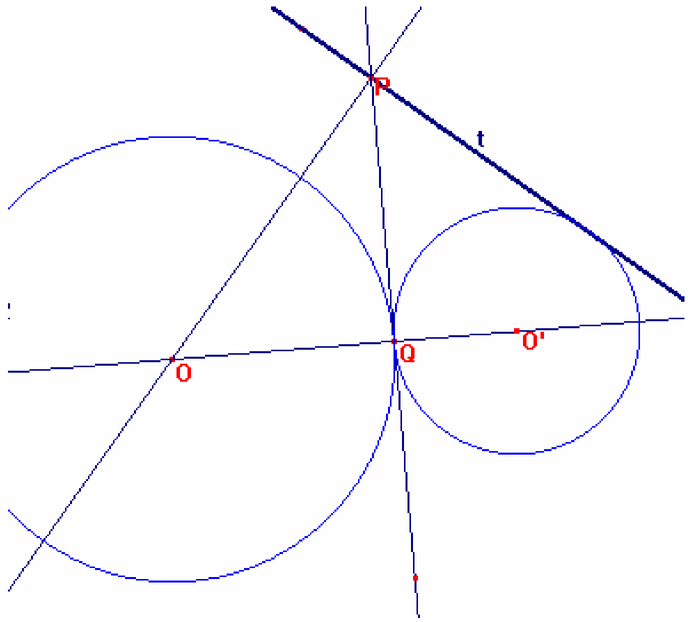
"Algoritmo de construcción:

1 – Trazar perpendicular a t que pase por O (punto P).

2 – Trazar una recta que pase por P y sea tangente a la circunferencia de centro O. (punto de tangencia Q)

3 – Trazar una recta s que pase por O y por Q.

4 – Trazar una circunferencia de centro Q y radio 3cm, el punto que corta a s exterior a la circunferencia de centro O. [No lo dice pero se supone que se refiere a que ese punto es O'].



5 – Trazar circunferencia de centro O' y radio 3cm. (t tiene que estar a menos de 6cm de la circunferencia de centro O)."

Nuevamente tiene "buen ojo" para la construcción, y si bien la solución que presenta sólo asegura la tangencia con la circunferencia, también le queda, "de casualidad", tangente a la recta t. Nuevamente se hace patente que EP no está pensando el problema de manera dinámica, como intersección de lugares geométricos. Como decíamos al principio, realiza una construcción sin un análisis previo en una figura de análisis, simplemente siguiendo pasos que se le van ocurriendo en el momento que aseguran el cumplimiento de algunas de las condiciones originales. Esta solución fue presentada por el estudiante al final de la actividad, por lo que no hubo tiempo para una intervención docente posterior para hacerle ver su error. En otras ocasiones durante el curso el estudiante presentaba errores parecidos en situaciones similares y para hacerle ver su error la docente le solicitaba que una vez terminado el algoritmo de construcción realizara el trazado correspondiente para corroborarlo. De esa manera, el estudiante podía observar que el algoritmo de construcción no era el adecuado y debería corregirlo considerando otros elementos.

A EP no se le presenta en ningún momento la necesidad de justificar los pasos que va haciendo ni las decisiones que va tomando, a pesar de que se le había solicitado en forma explícita. Algo positivo de la experiencia es que aparece, aunque sea de manera implícita, la demostración en su función de ***descubrimiento***: en el segundo intento descubre la necesidad de que los dos centros estén alineados con el punto de tangencia.

Según la clasificación de Sowder y Harel, en esta situación el estudiante presenta un ***esquema de demostración empírico perceptivo***: en las dos soluciones que presenta se convence de la validez de su algoritmo de construcción por la figura que construye (que además cuida que sea precisa, con regla y compás). El haber trabajado sólo con lápiz y papel y sin un software de GD refuerza esta situación. Para que el estudiante descartara la primera solución y buscara otra, fue necesario una pregunta externa: "¿qué ocurre si en lugar de ese punto tomas otro por aquí? ¿Realmente los puntos que elegiste pueden ser cualquiera?". La segunda solución que presenta, también incorrecta, no es descartada porque ni recibe un cuestionamiento externo ni tiene la herramienta de la GD para darse cuenta del problema que presenta: que no necesariamente queda tangente a la recta t, condición que debía cumplir.

En esta situación los ***procesos*** involucrados fueron:

- Construcción de figuras de análisis adecuadas a la situación.
- Identificación de los conceptos matemáticos relevantes en el problema. (sólo de manera implícita, ya que en una figura de análisis utiliza correctamente el hecho de que la circunferencia debe ser tangente a la recta t y en la otra el hecho de que debe ser tangente a la circunferencia dada originalmente).
- Conclusión sobre la solución del problema. Sistematización de los resultados obtenidos. (Indica el algoritmo de construcción y un análisis de la cantidad de soluciones según las variables posibles de los datos originales).
- Comunicación de los resultados en forma simbólica.

AR y JO – LyP, combinando apenas con trabajo en Cabri

AR y JO comienzan a trabajar en la computadora, pero no se dan cuenta cómo comenzar a construir la figura, por lo que se les sugiere usar lápiz y papel. Realizan allí muchas figuras de análisis, en una búsqueda de la discusión de la cantidad de soluciones según la posición de la circunferencia y de t, por un lado, y de la manera de construir la circunferencia, por el otro.

Descubren rápidamente que el centro O’ de la nueva circunferencia debe estar en una recta paralela a t a 3cm de distancia, y con eso en mente construyen varias figuras de análisis, en diferentes situaciones. No escriben ningún tipo de justificación pero, basándose en lo que van descubriendo a través de las figuras, sistematizan la situación con las siguientes frases:

“Si t es tangente a C_O hay tres soluciones.

Si t es secante a C_O hay cuatro soluciones.

Si t no corta a C_O hay dos soluciones.”

El siguiente es parte del diálogo mantenido entre docente y estudiantes:

VM: “¿Y cómo las encuentran a esas soluciones?”

AR: “Porque hacés la recta t, que dice que la otra tiene que estar a 3cm, bueno, en realidad dice que la circunferencia tiene que ser tangente a t y estar a 3cm, entonces el centro tiene que estar a 3cm de t. Entonces hacés las paralela a t a 3cm.”

VM: “Bueno, y ¿cuál de todos los puntos de esas rectas eligen para usarlo como centro, cuál es el que les sirve?”

AR: “Y, tiene que ser tangente a C [la circunferencia dada originalmente]”.

JO: “O’ tiene que estar a 3cm de C_O.”

VM: “¿Y entonces cómo medís la distancia de este punto a la circunferencia?”

JO: “Trazás una circunferencia de radio 3, y donde es tangente a la circunferencia…”

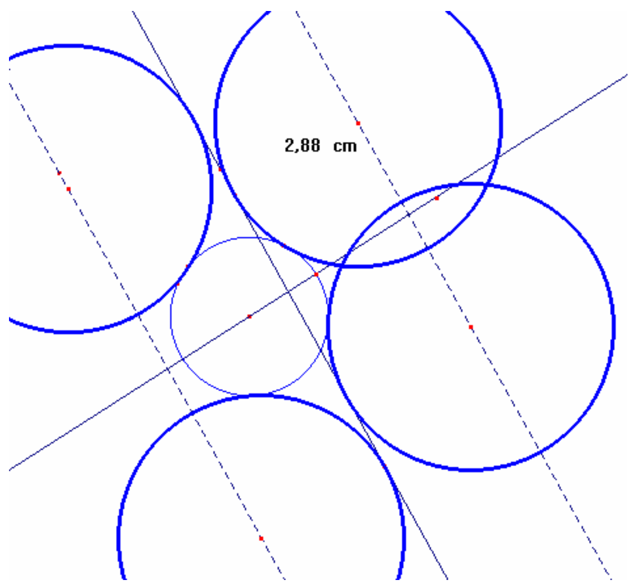
Hasta ahora los estudiantes venían trabajando con lápiz y papel pero sin útiles de geometría, por lo resultaba útil preguntarles cómo lo construirían con compás:

AR: "Ah, ahora entiendo lo que decís… sabemos que están acá y son dos, pero no sabemos cuál es el punto exacto. Creo que puede ser así: La recta s, paralela a t a 3cm corta a la circunferencia C_O en dos puntos. O' es el punto que está sobre s y a 3cm de esos puntos."

Con ese cuestionamiento en mente se deja a los estudiantes que sigan pensando y en unos minutos muestran una posible solución:

Se les pide entonces que verifiquen, en una construcción, si esa estrategia les sirve para que la circunferencia de centro O' quede tangente a la original. En seguida comprueban que esa no es una estrategia que los conduzca en todos los casos a la situación esperada:

AR: "¿Te acordás lo que te habíamos dicho? En este caso no hay intersección de la circunferencia de centro O con las paralelas. Entonces no sirve acá lo que pensamos, porque la estrategia consistía en tomar desde el punto de intersección 3cm sobre las rectas s y s' [la otra paralela a r a 3cm de distancia]. ¿Entonces no sirve para ninguno?"



VM: "Y bueno, pueden probar en otras de las situaciones que pensaron antes para ver si funciona."

AR: "Bueno, acá sí nos funcionó. [Muestran un caso muy particular en el que la recta s pasa por O]".

VM: "Busquen entonces en uno en el que la recta s no pase por O."

Después de otro rato de discusiones, utilizando una de las construcciones anteriores como figura de análisis, descubren qué trazar para hacer que se cumpla la condición que estaba faltando y escriben lo siguiente:

“El centro de la circunferencia solución está a 3cm de t, entonces trazamos rectas s paralelas a t a 3cm de ésta. $C_{O,\ r+3} \cap s = \{O'\}$ entonces O’ es el centro de la circunferencia solución.”

En los razonamientos de AR y JO podemos detectar varias funciones de la demostración, algunas más explícitas que otras: el ***descubrimiento*** de una solución, la ***explicación*** de por qué la solución encontrada es una solución válida (especialmente en la pertenencia de O’ a la recta paralela a t) y la ***sistematización*** de resultados, que se hace más explícita en la discusión de la cantidad de soluciones. Si bien no es una discusión exhaustiva y tal vez incorrecta, es una ocasión en la que se observa una sistematización coherente con las soluciones encontradas.

Considerando la clasificación de Sowder y Harel, puede encontrarse en los razonamientos de esta pareja una combinación del ***esquema de demostración analítico por transformación*** con el ***esquema de demostración empírico inductivo***. El primero surge en primera instancia, cuando los estudiantes afirman, justificando, que el punto O’ debe estar en una de las rectas paralelas a t a 3cm de distancia. Podemos apreciar una intención explícita de anticipar el resultado: “El punto O’ va a estar en …”. Ahora, en la búsqueda del cumplimiento de la otra condición, que la circunferencia solución sea tangente a la dada en la letra, ya no se percibe un razonamiento anticipatorio sino uno de tipo inductivo. Analizan muchas figuras de análisis, planifican diferentes estrategias y las llevan a cabo para verificar su validez, por medio de la construcción. Finalmente, tienen que pensar de nuevo sobre una figura de análisis y sólo cuando nuevamente retoman el camino de la búsqueda de la predicción de resultados, encuentran la solución. Los estudiantes vivenciaron el tránsito entre un esquema de demostración inductivo y uno de tipo analítico, que fue lo que los condujo a una solución que les satisfizo.

En esta situación los ***procesos*** involucrados fueron:

- Análisis del problema según los conceptos matemáticos que se disponen.

- Construcción de figuras de análisis adecuadas a la situación.
- Distinción entre puntos y figuras que permanecen fijas y aquéllas que son variables.
- Reconocimiento de las relaciones entre los diferentes puntos variables, construcción de la misma figura para diferentes posiciones.
- Identificación de los conceptos matemáticos relevantes en el problema.
- Planteo de hipótesis, generalizaciones y formalizaciones que promueven formas útiles de representar el problema.
- Reconocimiento de regularidades y patrones, ligándolos a problemas conocidos o a otras formulaciones matemáticas familiares.
- Construcción de la figura sostén.
- Reconocimiento de relaciones u objetos que permanecen invariables en el contexto del problema.
- Identificación o imposición de un modelo matemático conveniente (momento en el cual se reconoce la figura sostén).
- Conclusión sobre la solución del problema. Sistematización de los resultados obtenidos.

RE, SO y SS – LyP

Este grupo comienza directamente a trabajar con lápiz y papel, que es a lo que están acostumbrados sus integrantes: sólo utilizan el programa después de haber discutido sobre una figura de análisis. Éste es parte del diálogo que la docente mantuvo con ellos:

SO: “Lo que hicimos fue… bueno, te cuento lo que nos faltó, porque nosotros medimos 3cm y 3cm, pero no nos queda tangente ahí [SO señala en su figura de análisis que O’ debe estar en una recta paralela a t a 3cm, para que sea tangente a ella, y señala cómo tomaron 3cm desde un punto de la circunferencia para que la circunferencia solución también sea tangente a la circunferencia dada originalmente. E incluso señala cómo ya se dieron cuenta de que hay algo incorrecto en la solución brindada, porque no les condujo a lo que buscaban. Es interesante observar cómo ellos mismos son los que tienen que construir un camino para la solución y verificar que es correcto, en lugar de tener que demostrar una proposición que ya se sabe de antemano que es correcta, pero hay que demostrarla porque ‘el profesor lo pide’.]”

VM: “Bueno, eso está muy bien, ustedes ya se dieron cuenta que el punto O’ está en esta recta paralela a t que construyeron, ahora miren su figura de análisis ¿qué es lo que tiene que medir 3cm?”

SO: “Esto [señala el segmento que tiene por extremos a O’ y al punto de tangencia de ambas circunferencias].”

VM: “Y entonces el segmento OO’, ¿cuánto tiene que medir?”

RE: “6cm,… ah, no! Tiene que medir r + 3”

VM: “Bien, eso les va a servir para saber en qué otra figura también tiene que estar O’ para que la circunferencia nueva quede tangente a la original.”

SO: “Acá, en esta recta. Tiene que estar en la intersección de estas dos rectas. Ah, no, esta recta está mal…”

Los estudiantes entran ahora en un diálogo algo confuso, están acercándose a la solución pero no llegan a darse cuenta cómo hacer lo que quieren. Saben que los puntos O y O’ están alineados con el punto de tangencia, y que el segmento OO’ debe medir r + 3, pero tienen un obstáculo que consiste en que están considerando de manera rígida al segmento OO’, sólo lo pueden concebir en la ubicación en que lo tienen en la figura de análisis y no de forma dinámica.

La docente insiste en preguntarles cómo construyen ese punto O’, cómo usar el hecho conocido de la distancia de O a O’. Aún no se dan cuenta que la invariante en esa situación no es la dirección sino la distancia de O’ a un punto fijo, que es O.

Transcurrido un tiempo este grupo llama la atención de la docente para contarle qué pensaron:

SO: “Tomamos una circunferencia de centro O y radio 3 + r y cortamos con la recta s [que era una de las paralelas a t a 3cm de distancia] y te da este punto, así aquí tenemos 3cm y aquí también.”

Muestran lo que habían escrito como justificación y algoritmo de construcción, que estaba correcto. Habían escrito que se debía construir las rectas paralelas a t a 3cm de distancia, justificando la necesidad de la construcción por el hecho de que la circunferencia debe ser de radio 3cm y tangente a t. También escribieron que era necesario construir la circunferencia de centro O y radio 3+r, para que la circunferencia nueva sea tangente a la dada originalmente.

SO: “Y ahora unimos los dos lugares geométricos.”

VM: “Bueno, en realidad tienen que intersecarlos, ¿no?”

SO: “Ah, claro, tenés razón.”

Nuevamente se detectan varias funciones en el proceso de demostración: el ***descubrimiento*** de la solución, la necesidad de ***explicar*** por qué se construyeron las figuras indicadas, y se hizo más evidente la función de ***verificación*** de que la estrategia encontrada era válida. En este grupo no se detectó un proceso de ***sistematización*** de la cantidad de soluciones encontradas en las diferentes situaciones, pero sí tuvieron mucho cuidado en la manera de ***comunicar*** los resultados obtenidos de manera escrita, cuidando que fuera de manera correcta y simbólica.

Detectamos en este grupo una situación similar a la del de AR y JO: los esquemas de demostración presentes son el ***empírico inductivo*** y el ***analítico de transformación***, con una influencia mayor de este último, que se hace aún más explícito, tanto en la necesidad de construir las rectas paralelas a t a 3cm de distancia como en la de construir la circunferencia de centro O y radio r+3. Para descubrir esto último se hizo necesario atravesar previamente por instancias de razonamientos de tipo inductivos, probar por ensayo y error; aunque se hizo bien evidente que cuando se centralizaron en reflexionar sobre las invariantes de la situación, lograron arribar a la solución deseada.

Los ***procesos*** involucrados en esta situación fueron:

- Análisis del problema según los conceptos matemáticos que se disponen.

- Construcción de figuras de análisis adecuadas a la situación.
- Identificación de los conceptos matemáticos relevantes en el problema.
- Planteo de hipótesis, generalizaciones y formalizaciones que promueven formas útiles de representar el problema.
- Reconocimiento de regularidades y patrones, ligándolos a problemas conocidos o a otras formulaciones matemáticas familiares.
- Reconocimiento de relaciones u objetos que permanecen invariables en el contexto del problema.
- Explicación (en el sentido de demostración) de las relaciones invariables reconocidas.
- Identificación o imposición de un modelo matemático conveniente (momento en el cual se reconoce la figura sostén).
- Comunicación de los resultados en forma simbólica.
- Justificación de por qué esas relaciones conducen a la deducción de la figura sostén.
- Construcción de la figura sostén.
- Uso de conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas específicas para resolver el problema.

GV, IB y JM – Cabri y LyP

Este grupo comienza desde un principio muy organizado: van a las computadoras, ingresan al programa pero ya uno de ellos está encargado de ir anotando las observaciones y estrategias que se les van ocurriendo. Uno de ellos se dedicó exclusivamente a analizar cuántas soluciones había en las diferentes situaciones. El siguiente es parte del diálogo que la docente mantuvo con ellos:

GV: "JP trazó una circunferencia de 3cm de radio, y la cambiaba [manteniendo el mismo tamaño, la iba cambiando de lugar para encontrar más soluciones], y encontró una situación en la que hay ocho circunferencias tangentes a la recta y a la circunferencia original… Ahora, si la circunferencia está adentro de la otra, y toca en un punto, ¿también es tangente?"

VM: "Sí"

GV: "Bueno, entonces mirá, en aquel caso encontró ocho soluciones [las muestran en la figura que tienen en la pantalla]."

VM: "Muy bien, ahora tienen bastante analizada la discusión de la situación, la cantidad de soluciones que encuentran, pero tienen que encontrar una estrategia que les permita construir la circunferencia solución. Sería bueno que dijeran cómo hallan la solución."

IB: "¿Cómo hacemos, nos quedamos con una situación de todas las que analizamos?"

VM: "Claro, ahora centren la atención en uno de los casos, que no sea muy particular en cuanto a la posición de t y de C_O*".*

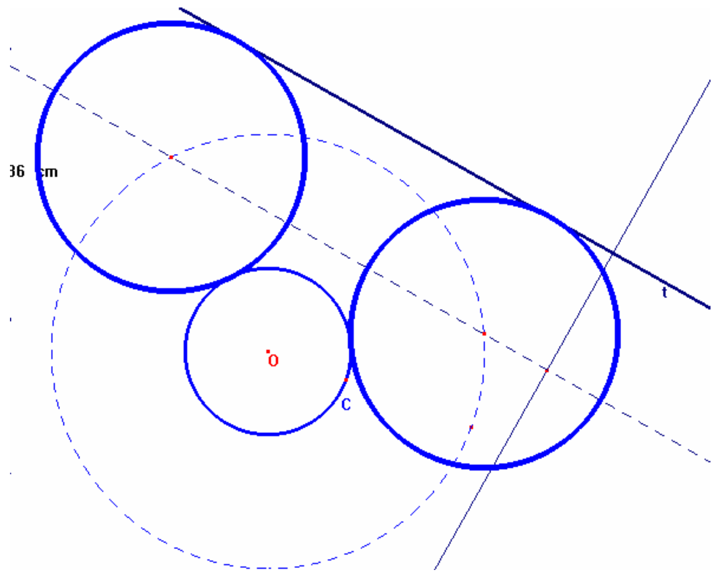
Transcurridos unos minutos vuelvo a acercarme a este grupo, y la siguiente trascripción es parte del diálogo que mantuvimos:

GV: "Bueno, nosotros trazamos una recta paralela a t a 3cm, el centro O' tiene que ser uno de sus puntos, puede estar de cualquier lado de t. Y lo que sabemos es que…"

JM: “Como es tangente a esta circunferencia, y es de radio 3, tenemos que hacer una circunferencia de radio r+3.”

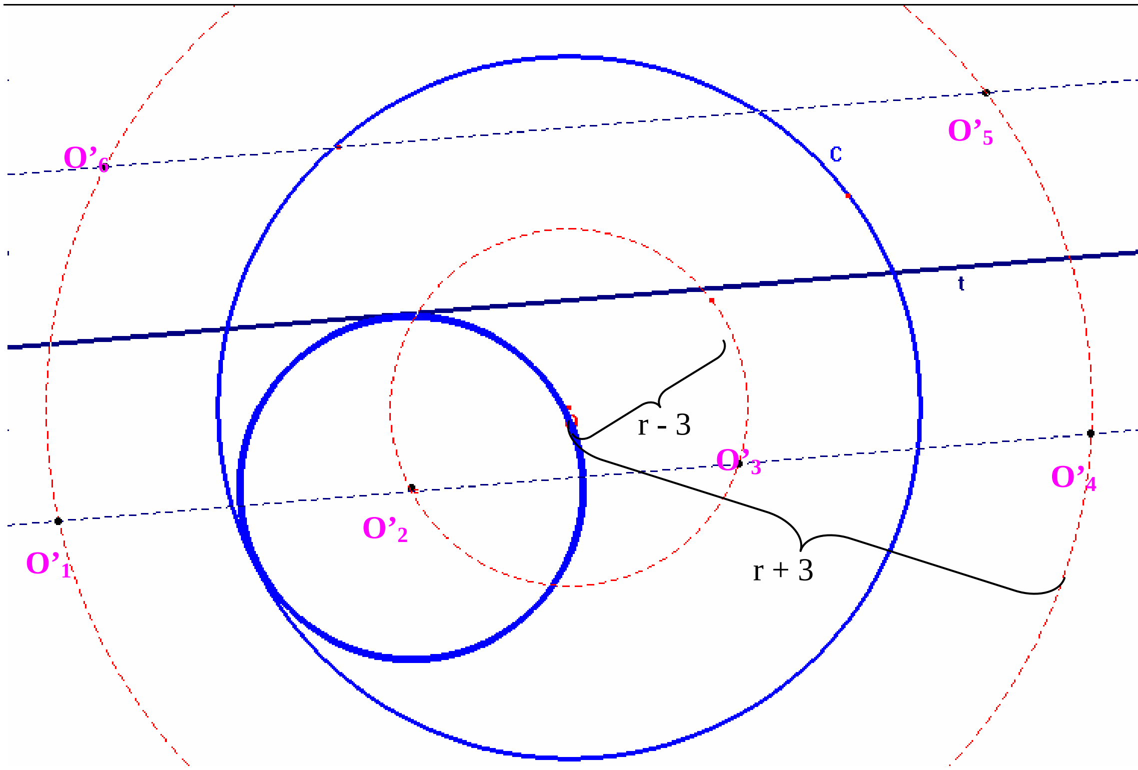
GV: “Claro, tenemos que hacer una circunferencia de centro O y radio r+3. Lo que estábamos discutiendo recién es cómo dibujarlo con el programa.”

Nuevamente se presentan problemas con el programa a la hora de construir segmentos de medidas dadas (en este caso, de 3cm). Se les explica cómo hacerlo y entre los tres pueden terminar la construcción.



Este grupo de estudiantes presenta, además de dos archivos (uno con la construcción de la solución y otro con parte de la discusión), una hoja en la que escribieron detalladamente el algoritmo de construcción y la justificación de los pasos llevados a la práctica en la construcción.

Esta primer figura es la que aparece en el archivo en el que presentan la solución, y la segunda que se muestra a continuación es en la que mostraban, al principio del diálogo, con las ocho soluciones (en este caso sólo figuran seis, pero está clara la idea de que según la posición de la recta y circunferencia original y el tamaño de esta última, pueden ser ocho soluciones).



En este grupo se pueden apreciar varias funciones de la demostración presentes en el proceso atravesado para llegar a una solución: el ***descubrimiento*** de la solución y de la cantidad de soluciones que había en las diferentes situaciones, que fue lo que analizaron en primera instancia. Incluso ampliaron el concepto de circunferencias tangentes, concibiendo además del caso en que las circunferencias son tangentes exteriormente, a las tangentes interiormente. También vivenciaron la necesidad de ***explicar*** por qué se construyeron las figuras indicadas. En este grupo, al igual que en el anterior, resultó más evidente la necesidad de que el punto O’ estuviera en la recta paralela a t a 3cm, y fue más trabajoso el encontrar la otra solución. Para hacerlo, debieron recurrir a la reflexión sobre sus figuras de análisis, tanto en la pantalla como en el papel jugó un rol importante la intención de anticipar el movimiento de O’. También se hicieron presentes las funciones de ***sistematización*** y ***comunicación*** de los resultados obtenidos, especialmente en el algoritmo de construcción y justificación, que fueron explicitados de manera simbólica. Si bien en una primera instancia se dedicaron a la discusión de la cantidad de soluciones según la posición de las figuras originales, no hicieron demasiado hincapié en su formalización y comunicación.

Detectamos en este grupo una situación similar a algunos ya analizados: los esquemas de demostración presentes son el ***empírico inductivo*** y el ***analítico de transformación***, con una influencia aún mayor de este último, sin necesidad de atravesar por instancias de tipo inductivas muy extensas. La capacidad de descubrir invariantes en las figuras y utilizarlo para la solución de los ejercicios que poseen los estudiantes que integran este grupo ya había sido observada en clase, por lo que no sorprende el que hayan presentado un esquema analítico deductivo.

Los procesos involucrados en esta situación fueron:

- Análisis del problema según los conceptos matemáticos que se disponen.
- Construcción de figuras de análisis adecuadas a la situación.
- Distinción entre puntos y figuras que permanecen fijas y aquéllas que son variables.
- Reconocimiento de las relaciones entre los diferentes puntos variables, construcción de la misma figura para diferentes posiciones.
- Comunicación de los resultados en forma simbólica.
- Planteo de hipótesis, generalizaciones y formalizaciones que promueven formas útiles de representar el problema.
- Reconocimiento de relaciones u objetos que permanecen invariables en el contexto del problema.
- Explicación (en el sentido de demostración) de las relaciones invariables reconocidas.
- Identificación o imposición de un modelo matemático conveniente (momento en el cual se reconoce la figura sostén).
- Justificación de por qué esas relaciones conducen a la deducción de la figura sostén.
- Construcción de la figura sostén.
- Conclusión sobre la solución del problema. Sistematización de los resultados obtenidos.
- Identificación de los conceptos matemáticos relevantes en el problema.

BF, IG y PP – Cabri y LyP

Este grupo de estudiantes comenzó trabajando con el Cabri desde un principio. Después de haber transcurrido 40 minutos la docente se acerca a las integrantes y observa que tenían hechas en la pantalla varias figuras y una figura de análisis en el papel, pero estaban sin poder continuar por no encontrar una manera de construir siquiera una figura de análisis en la pantalla. La dificultad de la construcción de la figura de análisis radicaba en que no dominaban la herramienta 'distancia entre dos puntos' del programa, por lo que no podían encontrar la manera de construir una circunferencia de radio 3cm.

Reflexionando sobre la figura de análisis del papel este grupo había concluido que el centro de la nueva circunferencia debía estar en una circunferencia de centro O y radio 3+r. Sin embargo, no podían visualizar en qué otra figura estaba el centro O', no sabían cómo utilizar el dato de que la nueva circunferencia debía ser tangente a t. En este sentido este grupo vivió un proceso diferente al del resto de los grupos, que generalmente visualizaban en primera instancia la necesidad de que O' estuviera en una recta paralela a t y a 3cm de distancia.

Finalmente logran encontrar la condición que estaba faltando, reflexionando un poco más sobre las figuras construidas y con la intervención de la docente. Construyen en papel la solución encontrada y escriben al lado el algoritmo de la construcción, muy escuetamente y con justificaciones:

"Todas las opciones están en la circunferencia de radio r+3 porque la circunferencia C' tiene que ser tangente a $C_{O,r}$. Y para buscar precisamente en dónde, trazo la paralela a la recta t que esté a 3cm para que de esa manera C' sea tangente a C_O y t."

Detectamos en este grupo una situación similar a la de algunos anteriores, pero diferente en lo que ya señalamos: los esquemas de demostración presentes son el ***empírico perceptivo*** en un principio, el ***empírico inductivo*** más adelante y el ***analítico de transformación*** en varias instancias del razonamiento, pero haciéndose más presente en el descubrimiento de la necesidad de que el punto O' tenía que estar en la circunferencia de centro O y radio 3+r.

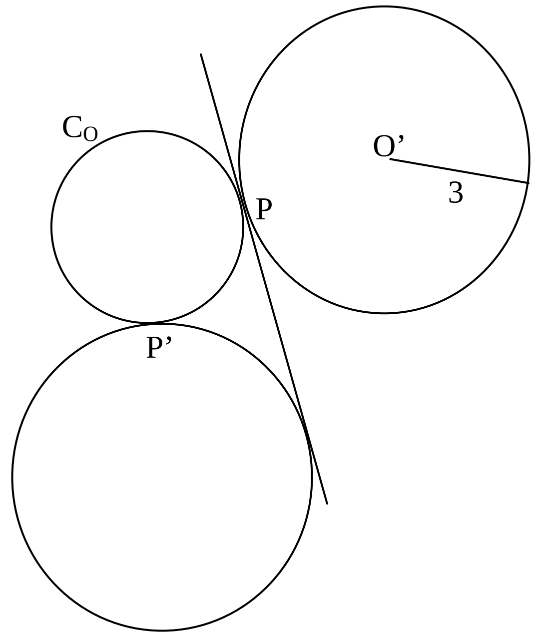
Nuevamente se detectan varias funciones en el proceso de demostración: el ***descubrimiento*** de la solución, la necesidad de ***explicación*** de por qué se construyeron las figuras indicadas. En este grupo no se detectó un proceso de ***sistematización*** de la cantidad de soluciones encontradas en las diferentes situaciones, ni tampoco se hizo presente una necesidad grande de sistematizar o comunicar de manera correcta los resultados obtenidos ni el algoritmo de construcción hallado. Lo que se escribió fue más partiendo de una necesidad externa que propia (lo estaba pidiendo explícitamente el docente). Incluso parecía que el grupo estaba ligeramente desmotivado frente a la actividad, seguramente fruto de la frustración inicial de estar tanto tiempo sin encontrar la solución.

Los procesos involucrados en esta situación fueron:

- Análisis del problema según los conceptos matemáticos que se disponen.
- Construcción de figuras de análisis adecuadas a la situación.
- Reconocimiento de regularidades y patrones, ligándolos a problemas conocidos o a otras formulaciones matemáticas familiares.
- Reconocimiento de relaciones u objetos que permanecen invariables en el contexto del problema.
- Explicación (en el sentido de demostración) de las relaciones invariables reconocidas.
- Construcción de la figura sostén.
- Justificación de por qué esas relaciones conducen a la deducción de la figura sostén.
- Comunicación de los resultados en forma simbólica (pero de manera muy pobre, como se señaló).

MC – Cabri y LyP

Este estudiante comenzó trabajando con el Cabri desde un principio, que es lo que está acostumbrado a hacer en clase. También fue construyendo una figura de análisis en lápiz y papel y tomando apuntes, que a continuación se transcriben. Por lo que muestra en sus producciones, tanto escritas como en el archivo de Cabri, sólo se centró en analizar el caso en el que la recta t es tangente a la circunferencia C_O.

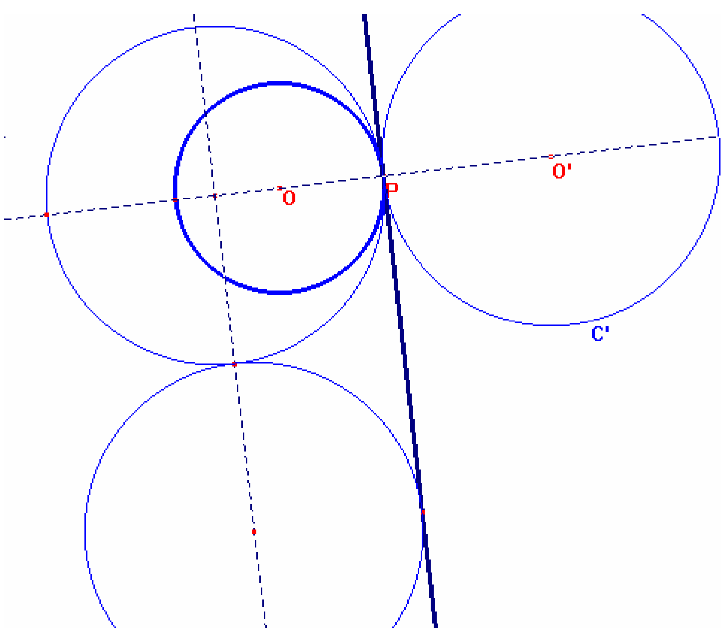


"En el caso en que la recta t es tangente a la circunferencia C_O, la solución de la construcción de la $C_{O'}$ es la siguiente:

$C_O \cap t = \{P\}$. La letra nos pide que $C_{O'}$ sea tangente con C_O y t. Dado que C_O y t tienen un solo punto en su intersección, la intersección de la $C_{O'}$ y C_O será P, al igual que $C_{O'}$ con t.

Otra solución cuando la recta t es tangente a C_O es: si se toma la C_O de radio 3cm entonces habrá un punto de tangencia en la recta t y un punto en la circunferencia. [En la figura de análisis que presenta construye, a mano alzada, una solución en el semiplano opuesto a C_O con respecto a t, como "en espejo" y queda claro que hace referencia a que encontró otra solución, en el mismo semiplano que C_O con respecto a t.]"

También en el archivo de Cabri analiza solamente este caso, descubriendo además una solución en la que la circunferencia C_O es interior a la $C_{O'}$. En esa figura presenta un error, ya que una de las tres circunferencias presentadas como solución no es tangente a la C_O, sino a otra de las que se encontraron como solución. Al analizar los pasos seguidos por MC –con la herramienta "Revisar construcción"–, se puede observar que si bien no lo escribió de manera explícita en el papel, este estudiante sí



tenía la idea de que el punto O’ debía estar en una recta paralela a t y a 3cm de distancia, porque eso fue lo que construyó en la pantalla.

Al igual que otro de los estudiantes que había trabajado individualmente (EP), a MC no se le presenta en ningún momento la necesidad de justificar los pasos que va dando ni las decisiones que va tomando, a pesar de que se le había solicitado en forma explícita. Además, sólo analiza una de las situaciones, no intenta siquiera analizar cómo resolvería el problema en otras situaciones. Algo positivo de la experiencia es que aparece, aunque sea de manera implícita, la demostración en su función de ***descubrimiento***: en la construcción que presenta en el archivo se aprecia que para encontrar una de las soluciones debió construir una de las rectas paralelas a t y a 3cm de distancia. Además, también profundiza su concepto de circunferencias tangentes, considerando además del ya conocido caso de circunferencias exteriormente tangentes, las que lo son interiormente.

Según la clasificación de Sowder y Harel, en esta situación el estudiante presenta un ***esquema de demostración empírico perceptivo***: en las soluciones que presenta, se convence de la validez de su algoritmo de construcción por la figura que construye (en este caso la percepción se ve reforzada por la precisión de las construcciones con el programa Cabri). Llama la atención el hecho de que se trate de un estudiante que domina con fluidez el programa Cabri pero no haya intentado siquiera analizar qué ocurría en otros casos, que es tal vez donde se presentarían obstáculos mayores, que podrían conducir a un aprendizaje más significativo sobre propiedades de circunferencias tangentes (especialmente la alineación de los centros con el punto de tangencia).

En esta situación los ***procesos*** involucrados fueron:

- Análisis del problema según los conceptos matemáticos que se disponen.
- Construcción de figuras de análisis adecuadas a la situación.
- Distinción entre puntos y figuras que permanecen fijas y aquéllas que son variables.
- Construcción de la figura sostén.

- Reconocimiento de relaciones u objetos que permanecen invariables en el contexto del problema.

- **V.c Resumen: funciones y esquemas de demostración detectados en la resolución del problema de construcción**

Funciones de la demostración

Grupo	
EP	**Descubrimiento**: en el segundo intento descubre la necesidad de que los dos centros estén alineados con el punto de tangencia.
AR y JO	**Descubrimiento** de una solución, **explicación** de por qué la solución encontrada es una solución válida (especialmente en la pertenencia de O' a la recta paralela a t) y **sistematización** de resultados, que se hace más explícita en la discusión de la cantidad de soluciones.
RE, SO y SS	**Descubrimiento** de la solución, **explicación** de por qué se construyeron las figuras indicadas, y se hizo más evidente la función de **verificación** de que la estrategia encontrada era válida y **comunicación** de los resultados obtenidos de manera escrita, cuidando que fuera de manera correcta y simbólica.
GV, IB y JM	**Descubrimiento** de la solución y de la cantidad de soluciones que había en las diferentes situaciones, **explicación** de por qué se construyeron las figuras indicadas., **sistematización** y **comunicación** de los resultados obtenidos, especialmente en el algoritmo de construcción y justificación, que fueron explicitados de manera simbólica.
BF, IG y PP	**Descubrimiento** de la solución y **explicación** de por qué se construyeron las figuras indicadas.
MC	Sólo **descubrimiento**

Esquemas de demostración

Grupo	
EP	**Empírico perceptivo**: en las dos soluciones que presenta se convence de la validez de su algoritmo de construcción por la figura que construye (que además cuida que sea precisa, con regla y compás).
AR y JO	**Analítico de transformación** y **empírico inductivo**
RE, SO y SS	**Empírica inductiva** y **analítica de transformación**, con mayor énfasis en esta última.
GV, IB y JM	**Empírico inductivo** y el **analítico-deductivo de transformación**, con una influencia aún mayor de este último, sin necesidad de atravesar por instancias de tipo inductivas muy extensas.
BF, IG y PP	***Empírico perceptivo*** en un principio, ***empírico inductivo*** más adelante y ***analítico de transformación*** en algunas instancias del razonamiento.
MC	**Empírico perceptivo:** en las soluciones que presenta, se convence de la validez de su algoritmo de construcción por la figura que construye (en este caso la percepción se ve reforzada por la precisión de las construcciones con el programa Cabri)

En general, puede observarse que si bien no todos los estudiantes que abordaron la actividad arribaron a una solución esperada en el tiempo del que disponían, para todos fue una experiencia enriquecedora en cuanto a los procesos del razonamiento que se vivenciaron en cada caso. Por otra parte, pudo cumplirse el objetivo docente de detectar en cada grupo cuáles funciones de la demostración se hacían presentes y qué esquemas de demostración manifestaron los estudiantes.

Es interesante destacar que aquéllos estudiantes que sólo presentan un esquema de demostración empírico perceptivo (EP y MC), arriban a soluciones parciales, analizan sólo un caso particular de la posición de los datos originales y además no alcanzan a construir un algoritmo de construcción que les permita trazar la figura pedida. En ninguno de los dos casos intentaron un tipo de análisis inductivo, analizando por ensayo y error diferentes posiciones de los datos originales o de las figuras que se deseaban construir. Este hecho, a su vez, resulta ser en este caso independiente del hecho de trabajar con lápiz y papel o con GD, ya que uno de los estudiantes optó por trabajar exclusivamente con lápiz y papel mientras el otro sólo trabajó en el programa de GD. Cabe desatacar que ambos trabajaron en forma individual, a pesar de que se les dio a optar para trabajar en grupos.

Puede observarse además que estos dos estudiantes sólo lograron hacer presente a la demostración en su rol de descubrimiento de algunas propiedades, el resto de las funciones no fueron aprovechadas.

En el resto de los grupos se detectan esquemas de demostración más desarrollados: tanto el esquema empírico inductivo como el analítico de transformación. En algunos casos este segundo tipo de esquema se hacía presente desde un principio, cuando analizaban sobre el bosquejo trazado a mano o utilizando el Cabri e intentaban predecir la posición del centro de la circunferencia pedida. Puede observarse que en muchos casos, cuando este tipo de razonamiento no se hacía presente en un principio, les fue útil a los estudiantes abordar un esquema de demostración inductivo: analizando varios casos llegaban a la predicción de la figura en donde debía estar el centro y después la justificaban con un razonamiento de tipo analítico.

En todos estos casos se hicieron presentes las funciones de la demostración de descubrimiento y explicación, y en algunos grupos incluso se pudieron observar otras como la de comunicación, sistematización y verificación. Es interesante analizar cómo cuando los estudiantes sienten la necesidad de explicar los resultados a los que arriban, presentan razonamientos más elaborados desde el punto de vista cognitivo.

V.d Descripción de la segunda etapa (5 de setiembre, 2005)

En la segunda instancia se aplicó la siguiente actividad al grupo “5ºS” de catorce estudiantes:

Problema 1:

C_A y C_B son dos circunferencias fijas de igual radio. Se considera la circunferencia C_O, en el mismo plano que las anteriores y tangente a ambas. *Halla el lugar geométrico de O* en las siguientes situaciones:

i) C_A y C_B son exteriores.

ii) C_A y C_B son tangentes.

iii) C_A y C_B son secantes.

iv) C_A y C_B son coincidentes.

Problema 2:

Se considera un triángulo ΔADE, B es el punto medio del segmento AD y C es un punto variable en el segmento AE. Las bisectrices de $A\hat{C}B$ y $A\hat{B}C$ se cortan en I, y las bisectrices de $A\hat{E}D$ y $A\hat{D}E$ se cortan en J. Halla el lugar geométrico de O, circuncentro del triángulo ΔAIJ.

Problema 3:

c) Se consideran dos circunferencias $C_{O,r}$ y $C'_{O',r'}$ tales que $C \cap C' = \{P, Q\}$. B es un punto de C tal que $\overline{BP} = r$ y ΔPOB es horario. Se traza una recta t variable por P, $t \cap C = \{P, A\}$.

Halla el LG de H, intersección de la bisectriz de $B\hat{A}P$ con la circunferencia C.

d) B’ es un punto de C’ tal que $\overline{B'P} = r'$ y $\Delta PO'B'$ es antihorario, $t \cap C' = \{P, A'\}$, $AB \cap A'B' = \{J\}$. Halla el lugar geométrico de J.

Te agradecería que al resolver los problemas escribieras **todas** las estrategias que pensaste para abordarlos, tanto aquéllas que crees que son válidas como aquéllas que crees incorrectas, o que descartaste por alguna razón.

Te agradecería también que escribieras **todos** los razonamientos que fueron necesarios plantear en cada uno de los problemas.

En esta instancia los 14 estudiantes estuvieron trabajando con los problemas durante un lapso de 1 hora y 45 minutos en un salón de clase en el que había tres computadoras con el programa Cabri instalado a su disposición (durante el curso se trabajaba al menos una vez por semana en esta modalidad). Como se puede observar se decidió en esta oportunidad proponerles solamente los problemas que involucraban lugares geométricos y no se propuso el problema de construcción. La necesidad de recortar la actividad se debió al tiempo disponible, y la opción por eliminar el problema de construcción se debió a que ya había sido analizada esa actividad con el otro grupo (23 de agosto). En esa instancia se descubrió que a la mayoría de los grupos le consumía cerca de 60 minutos la resolución del problema de construcción, y en esta oportunidad prefería abocarse directamente a la resolución de problemas de lugares geométricos. A su vez, una de las razones de proponer la actividad de construcción era la de que los estudiantes descubrieran –o recordaran- la propiedad referida a la alineación del punto de tangencia de dos circunferencias con sus centros. Se quiso analizar en esta instancia si era necesaria esa actividad previa para la resolución del primer problema.

También se puede observar un cambio en el orden de los problemas 2 y 3 con respecto a la actividad propuesta originalmente, con los estudiantes del Instituto de Formación Docente I.P.A., el 1º de agosto de 2005. El mismo se debió a que se observó que el problema 2 b les llevaba mucho tiempo, haciendo que tal vez no llegaran a abordar el problema 3, primera oportunidad que tenían los estudiantes de enfrentarse a un problema de lugar geométrico en el que la solución es vacía. Como ese problema les lleva menos tiempo, se prefirió ponerlo primero y asegurarse así que abordarían ese problema y al menos comenzarían a analizar el segundo, que ahora quedó en último lugar. La mayoría de los grupos lograron abordar los dos primeros problemas, y algunos abordaron también la primera parte del último.

Al igual que al otro grupo de estudiantes, se les aclaró que no era una instancia evaluativa, así como se les solicitó que, a los efectos de la investigación, escribieran en una hoja para entregar todos los resultados y razonamientos que fueron surgiendo, tanto los que consideraran válidos como aquellos que después descartaron por alguna razón.

Se formaron equipos libremente de entre dos y cuatro personas, según fueron optando, de la siguiente manera:

Y.O., BM y SN – trabajaron básicamente con lápiz y papel, recurrieron al Cabri a partir del problema 2.

FF y AL – trabajaron solamente con lápiz y papel.

RS y SA – trabajaron solamente con lápiz y papel.

FB, AF y FP – trabajaron combinando Cabri con lápiz y papel.

MB, DC, IR y FD – trabajaron con lápiz y papel, recurrieron al Cabri a partir del problema 2.

V.e Producciones orales y escritas de la segunda etapa de implementación

A continuación se presenta el desarrollo de la segunda instancia de aplicación de la actividad, en la que se analizan las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de lugares geométricos. Después de la trascripción de las elaboraciones de cada grupo se analizan las funciones de la demostración involucradas en la experiencia y los esquemas de demostración y procesos cognitivos que se hacen presentes.

RS y SA – trabajaron solamente con lápiz y papel

Problema 1 parte a:

RS y SA comienzan trazando una figura de análisis adecuada a la situación en la que las circunferencias de centros A y B son exteriores pero aún no construyeron ninguna circunferencia tangente a ambas. Cuando la docente se acerca a ellos, ya están discutiendo sobre cuál es la figura sostén y cómo lo justificarían:

RS: "…llegamos a que el lugar geométrico del centro de la circunferencia va a ser la mediatriz de este segmento [señala al segmento AB] porque siempre que sea tangente…"

SA: "Tiene que equidistar…"

RS: "… por la siguiente razón: el centro O va a equidistar al punto de tangencia con la circunferencias C_A y C_B, y además ese punto equidista también… o sea, este punto de acá [el punto de tangencia en C_A] va a tener la misma distancia a A que de este punto [el punto de tangencia en C_B] a B, porque los radios son iguales."

VM: "¿A qué se refieren con que "los radios son iguales"?, ¿todas las circunferencias posibles tienen el mismo radio?"

SA: "Si va a ser tangente, es con este radio…"

RS: "No, los radios de las circunferencias C_O no van a ser todos iguales."

SA: "No, ya sé que no, pero para este punto sólo hay una circunferencia tangente a estas dos."

RS: "Y la distancia de este punto, que es el centro de la circunferencia, al punto de tangencia con esta circunferencia y al punto de tangencia con esta otra es el mismo".

VM: "¿Por qué? Creo que lo que les falta es dibujar una figura de análisis con al menos una de las circunferencias tangente dibujada para poder justificar la solución que encuentran."

SA: "O sea, lo que tenemos que justificar es por qué esas dos distancias son iguales".

RS: "Bueno, porque los dos son radios de la circunferencia, como estas dos son iguales, entonces estas dos van a ser iguales"

SA: "¿Cómo?"

En este momento dejo a SA y RS que sigan discutiendo la manera de justificar el problema. En este sentido, tienen claro que las distancias del centro O a cada punto de tangencia son iguales y que las distancias de cada punto de tangencia a A y B también lo son, pero no han prestado atención a la alineación del punto de tangencia entre las circunferencias con los centros, propiedad que les falta observar para poder completar la justificación.

En un rato la docente vuelve a acercarse a esta pareja, y los encuentra discutiendo precisamente sobre esa propiedad, que surge como una necesidad en el problema.

VM: "¿Es razonable que sea así?"

RS: "Sí, es razonable y se puede demostrar: si vos trazás la recta de tangencia acá, del centro de cada una de las circunferencias al punto de tangencia se forma un ángulo con la recta de 90º, en total mide 180º y entonces los puntos están alineados."

VM: "Muy bien, en realidad lo que están usando ahí es que la tangente que sirve para una circunferencia es también la que sirve para la otra."

SA: "Pero ¿hay una propiedad que diga eso?"

RS: "Vos sabés que hay UN punto de tangencia entre ellas, entonces la recta tangente a las dos va a ser perpendicular al radio que se forma en cada circunferencia."

SA: "Ah, mirá!! Acá lo encontré: '*los centros de las circunferencia están alineados con los respectivos puntos de tangencia*'. Entonces uso esto, no lo pruebo".

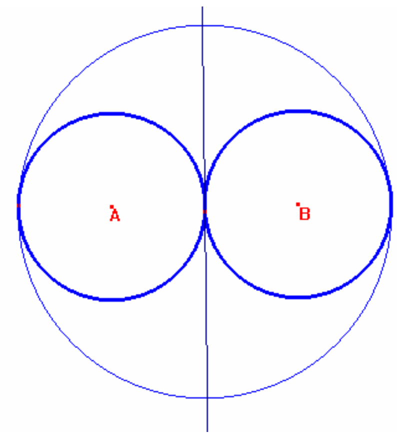
VM: "No, claro, ahora no es necesario que lo demuestren, lo pueden usar como una propiedad vista."

Aquí se ve de manera precisa cómo la resolución del problema hace surgir la necesidad de justificar propiedades: SA no tenía duda de que la propiedad fuera cierta, pero precisaba encontrarla como una de las propiedades vistas en clase. Es curioso observar cómo encontrar esa propiedad dentro de los apuntes de clase, como una de las propiedades dictada por la profesora, fue más convincente para SA que la explicación –correcta– que le estaba dando su compañero. Si bien en sus apuntes no estaba la demostración sino que solamente estaba el enunciado de la propiedad, eso le dio la tranquilidad de no necesitar probar la propiedad para convencerse de que se cumplía. Observamos un **esquema de demostración externo**, en contraposición al de su compañero que buscaba una explicación, mostrando claramente un **esquema de demostración de tipo analítico**.

En sus apuntes escribieron de manera completa la demostración de por qué los puntos O deben estar en la mediatriz del segmento AB. También escribieron el algoritmo para la construcción de la circunferencia tangente, tomando como centro un punto cualquiera de la mediatriz. Con eso concluyeron que el lugar geométrico de O es TODA la mediatriz del segmento AB.

Problema 1 parte b:

En esta parte se suscitó una discusión interesante: en un principio dudaron de que el punto medio del segmento AB, que es el punto de tangencia de ambas circunferencias, fuera efectivamente un punto del lugar geométrico. Catalogaron a dicho punto como "dudoso". Más adelante RS se dio cuenta de que podía construir una circunferencia con centro en él que fuera tangente a las circunferencias C_A y C_B como se muestra en la figura:

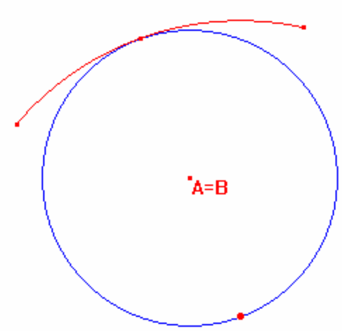


Problema 1 parte c:

En esta parte fueron menos las dudas, en seguida ambos concluyeron que el lugar geométrico es toda la mediatriz, sin excluir ningún punto. Hacen referencia a que los puntos de intersección de ambas circunferencias también son puntos del lugar, porque pueden construir circunferencias con centros en ellos que sean tangentes a las dos de centros A y B, utilizando la misma idea que en la parte anterior.

Problema 1 parte d:

Nuevamente en esta parte surgen dudas, en un primer momento escriben que "O puede estar en cualquier lugar del plano siempre y cuando no pertenezca a la circunferencia de centro A o B (que son coincidentes) y sea distinto de A". Pero después RS agrega: "esto está mal, O puede ser cualquier punto del plano excepto A o B".



Si bien no explican por qué piensan una cosa primero ni por qué después cambian de idea, adjuntan una figura que puede ser bastante ilustrativa:

Se pueden apreciar varias funciones de la demostración presentes en la resolución del problema. En primer lugar, la demostración como ***descubrimiento*** de la solución, que fue lo que analizaron en primera instancia. Vivenciaron en ese momento la necesidad de ***explicar*** por qué la figura sostén era la sugerida: repararon en primer lugar en la congruencia de los segmentos, asumiendo de manera implícita la propiedad de alineación de los centros con el punto de tangencia, pero intentando explicitarla más adelante. El análisis de los diferentes casos los llevó a ampliar su imagen conceptual de circunferencias tangentes, concibiendo además del caso en que las circunferencias son tangentes exteriormente, a las tangentes interiormente. Este descubrimiento surgió como una necesidad de resolver el problema en las partes b, c y d. También se hicieron presentes las funciones de ***sistematización*** y ***comunicación*** de los resultados obtenidos, especialmente en el algoritmo de construcción y justificación, que fueron explicitados de manera simbólica.

Esquemas de demostración presentes:

- Externo autoritario (cuando SA precisa encontrar en sus apuntes la propiedad ya comentada para convencerse de la validez de la misma y para asegurarse de que no fuera necesario probarla en el momento.)
- Empírico perceptivo (cuando no explicitan la propiedad, se basan fuertemente en la figura que tienen, en la que los centros de las circunferencias están alineados con el punto de tangencia)
- Analítico de tipo axiomático.

Procesos explicitados:

- Análisis del problema según los conceptos matemáticos que se disponen**.**
- Construcción de figuras de análisis adecuadas a la situación.

- Distinción entre puntos y figuras que permanecen fijas y aquéllas que son variables.
- Identificación de los conceptos matemáticos relevantes en el problema.
- Planteo de hipótesis, generalizaciones y formalizaciones que promueven formas útiles de representar el problema.
- Reconocimiento de regularidades y patrones, ligándolos a problemas conocidos o a otras formulaciones matemáticas familiares.
- Reconocimiento de relaciones u objetos que permanecen invariables en el contexto del problema.
- Explicación (en el sentido de demostración) de las relaciones invariables reconocidas.
- Identificación o imposición de un modelo matemático conocido que sea conveniente (momento en el cual se reconoce la figura sostén).
- Uso de conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas específicas para resolver el problema.
- Justificación de por qué esas relaciones conducen a la deducción de la figura sostén.
- Construcción de la figura sostén.
- Análisis de la solución brindada parcialmente: ¿todos los puntos de la figura sostén pertenecen efectivamente a la solución del problema?
- Comunicación de los resultados en forma simbólica.
- Conclusión sobre la solución del problema. Sistematización de los resultados obtenidos.

Problema 2:

RS y SA comienzan trazando una figura de análisis que es un triángulo isósceles, y más tarde lo descartan porque les resultaba un caso muy particular. Después trazan dos figuras de análisis más, que les sirven para intuir que los puntos A, I y J están alineados. El siguiente es parte del diálogo que mantuvieron:

SA: “Están casi alineados…”

RS: “…bueno, en realidad están alineados. Porque las bisectrices de [los ángulos de vértices] B, C y de A se van a cortar en el punto I porque las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, entonces si dos de ellas se cortan en este entonces la tercera también se va a cortar acá.”

SA: “Claro, pero este triángulo no es el mismo que este…”

RS: “Ah!, claro, entonces no dije nada…”

El comentario de SA generó confusión en el razonamiento de RS.

SA: “Si esta fuese paralela a esta sí [se refiere a las rectas BC y DE]… pero ahí te queda… Las bisectrices se cortan en el incentro, ¿no? Entonces la bisectriz que falta acá… Si estas dos se cortaran acá, la bisectriz de esta va a cortar ahí seguro, para que este punto esté en esta bisectriz, entonces este tiene que ser el mismo que éste, pero como C no está en medio del segmento AE… Si C fuera el punto medio del segmento AE, entonces sí están alineados.”

RS: “No, pero mirá están siempre alineados. Porque vos tenés que el ángulo A es siempre el mismo, entonces vas a trazar la bisectriz del ángulo A, y como todas las bisectrices se cortan en un punto, o sea, la intersección de las bisectrices de estos dos ángulos [de vértices B y C] te va a dar sobre esta recta.”

SA: “En eso estoy de acuerdo.”

RS: “Y este también, porque vas a tener que la intersección de estas dos bisectrices [de centros D y E] te va a dar también sobre esta recta, siempre… ¿Vos estás de acuerdo con lo que dije?”

VM: “No sé, creo que a SA todavía no la convenciste.”

RS: “Entonces si están alineados las mediatrices van a ser paralelas, y no se cortan… el LG de O está en otra dimensión… [Risas]”

En ese momento SA comienza a trazar una nueva figura de análisis, reflexionando sobre la misma. Más adelante, explica:

SA: “A es constante, ¿no? Entonces, todas las bisectrices se cortan en el incentro… Acá tenemos esta bisectriz y esta, que se van a cortar con la bisectriz del ángulo A, por lo tanto I va a estar en la bisectriz de A, y acá tenés esta bisectriz y esta, que se van a cortar en la bisectriz de A, por lo tanto J también está en la bisectriz de A, como está en la misma, no es un triángulo.”

En los apuntes, además de las figuras de análisis, SA y RS justificaron de manera precisa que los puntos A, I y J están alineados, y que por lo tanto no existe el triángulo A, I y J, por lo que no existe su circuncentro. Por lo tanto, afirman que el LG de O es vacío.

Las funciones de la demostración presentes son la de ***descubrimiento***: a través de la justificación descubrieron que necesariamente esos puntos debían quedar alineados, la de ***verificación*** ya que al justificar deductivamente que los puntos quedaban alineados, verificaron y se auto convencieron de la alineación de los puntos, la de ***explicación*** y de manera explícita la de ***comunicación***: oral y escrita.

Por otra parte, también se puede apreciar que los esquemas de demostración presentes: ***empírico perceptivo e inductivo***, ya que observando la figura descubrieron la alineación de los puntos y el ***analítico axiomático*** en la justificación y explicación de los razonamientos.

Problema 3 parte a:

Si bien varios grupos comenzaron a abordar este problema, el de SA y RS fue el único grupo que dejó registros escritos y grabados de los razonamientos involucrados. No solamente construyeron una figura de análisis y se dieron cuenta de que el punto H queda fijo, sino que además lo relataron y escribieron. El siguiente es parte del diálogo que mantuvieron con la docente:

RS: “Es el arco capaz del PAB, como está en una misma circunferencia y el arco es siempre el mismo, el ángulo es siempre igual, y además la bisectriz te va a dar siempre en el mismo punto”.

VM: “¿Por qué, qué punto es ese?”

RS: “Es el punto medio del arco PB.”

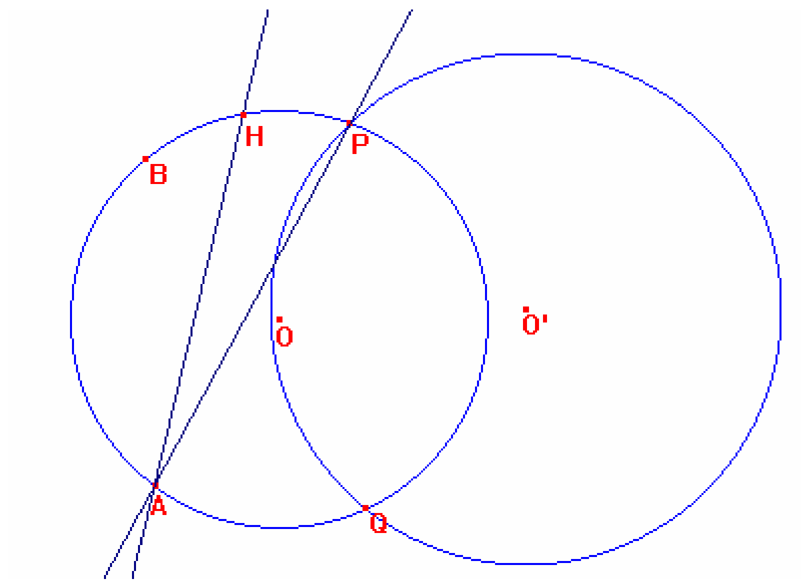
VM: “Creo que SA no está muy convencida todavía”.

SA: “Entiendo que ese ángulo es siempre el mismo, ahora, ¿por qué…? Este es constante, y este también…”.

RS: “Es que vas a tener el ángulo PAH y HAB, y sabés que son iguales porque AH es la bisectriz. Entonces estos dos lados tienen que ser iguales, para que el ángulo sea el mismo”.

SA: “No entendí”.

RS: “Es así: vos te trazás el segmento PH y el HB. El ángulo PAH es igual al HAB. Este arco va a ser igual a este, porque las cuerdas van a ser iguales…”



En ese momento continuaran solos con el diálogo, en el cual se hacía cada vez más evidente que el hecho de que SA exigiera explicaciones, ayudaba a RS a precisar sus razonamientos y justificar sus deducciones.

En sus apuntes aparece, además de una figura de análisis similar a la que se adjunta, los razonamientos que los llevan a concluir que el punto H es fijo, por lo que el lugar geométrico de H es el punto medio del arco BP.

Para ello, demostraron que el ángulo BAP es constante (lo que no era estrictamente necesario). Utilizando que AH es bisectriz y la propiedad de ángulos inscriptos en la circunferencia, dedujeron que los arcos PH y HB son congruentes, por lo que H es punto medio del arco BP.

En este problema SA y RS presentan esquemas de demostración de tipo analítico-axiomáticos, y las funciones de la demostración que a mi juicio se hacen presentes son la de ***descubrimiento***, ***explicación*** y ***comunicación***.

MB, DC, IR y FD – Sólo L y P en el problema 1, recurren al Cabri a partir de problema 2

Problema 1 parte a:

Cuando la docente se acerca al grupo de MB, DC, IR y FD los encuentra discutiendo sobre la justificación de la solución encontrada y la manera de escribirlo. Ya tienen una figura de análisis construida con varias circunferencias tangentes a las fijas de centros A y B, entre ellas aquélla que tiene menor radio y cuyo centro está alineado con A y B.

MB: "El punto T, que es el de tangencia, está alineado con O y con B, y lo mismo pasa con S, que es el punto de tangencia de C_A con C_O, y como los radios son iguales, entonces O tiene que distar igual de A y de B, y la recta [*de los puntos*] que distan igual de A y de B es la mediatriz."

Este grupo demuestra haber profundizado en el problema, se puede apreciar que no sólo buscaron la solución sino que además estuvieron pensando en posibles explicaciones. Presentan a su vez una buena comunicación oral y escrita de los resultados obtenidos y de la justificación de los mismos. En los apuntes que presentan explican por qué los puntos están alineados (usando que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia), así como la congruencia de los segmentos, lo que permite afirmar que el punto O debe estar en la mediatriz del segmento AB.

También presentan el análisis de la segunda parte del problema de lugar geométrico: responder a la pregunta de que si todos los puntos de la mediatriz del segmento AB son posibles puntos O. Abordan dicho análisis a partir de la construcción de la circunferencia pedida para un punto cualquiera de la mediatriz, explicando que el radio de la misma debe ser la diferencia entre la distancia desde A a dicho punto y el radio de la circunferencia C_A (que es un dato). Concluyen así que el lugar geométrico es TODA la mediatriz del segmento AB. El siguiente es parte del diálogo en el cual me explican la situación:

DC: "No sale ninguno."

VM: "¿Qué significa que no sale ninguno?"

DC: "No tenemos que sacar ningún punto de la mediatriz."

VM: "Ah! ¿y por qué?"

DC: "Vemos que OA y OB son iguales por pertenecer a la mediatriz entonces la distancia de O a la circunferencia de centro A y a la circunferencia [de centro] B va a ser la misma, entonces siempre vamos a encontrar un radio, para todos los puntos O…"

VM: "¿Y cómo lo encuentran ese radio?"

IR: "La distancia de O a A menos el radio de la circunferencia de centro A."

MB: "Te tomás un punto O en la mediatriz. Después trazas un segmento desde ese punto O a cada uno de los centros de las dos circunferencias [A y B]. Ves que la distancia al centro va a ser igual a esta distancia menos el radio de la circunferencia de centro A, o de centro B."

VM: "¿Quién es el punto de tangencia para ese O que se tomaron?"

MB: "Ese punto que está ahí". [Señala la intersección de la recta trazada por el punto de la mediatriz con la circunferencia de centro A].

VM: "¿Bien, y por qué? Ustedes dicen entonces que va a estar alineado con estos, pero ¿por qué?"

DC: "Es una circunferencia, pongas donde lo pongas va a estar alineado."

IR: "Porque es una recta perpendicular…"

En ese momento surge nuevamente la necesidad de utilizar y explicitar la propiedad de la alineación de los centros de las circunferencias con el punto de tangencia.

Problema 1 parte b:

Según los apuntes, este grupo atravesó un proceso parecido al de SA y RS: en un principio pensaron que el punto medio del segmento AB no era un punto del lugar, pero después se dieron cuenta de que podían trazar una circunferencia con centro en él y tangente a las de centros A y B tal que ellas fueran interiores.

Esta confusión se debió, en parte, a que ellos explicitaron la manera de encontrar el radio de la nueva circunferencia como “dist (O, A) – radio de C_A”, estrategia que no funciona para el punto medio del segmento AB. Fue necesaria la intervención docente para fomentarlos a pensar en otro tipo de circunferencias tangentes, las que dejan a las de centros A y B “por dentro”.

Problema 1 parte c:

Resolvieron este caso sin mayor dificultad, de manera análoga al anterior pero sin dudar ahora y sin explicitar de manera escrita la situación.

Problema 1 parte d:

En esta parte los estudiantes no explican sus razonamientos, solamente escribieron lo que transcribo:

“1ª parte: LG de O = el plano, por el absurdo.

2ª parte: todos los puntos en el plano, por el absurdo, excepto el punto A, centro de la circunferencia. (Todos los puntos coinciden con la circunferencia cuando A = O).”

Parece ser que los estudiantes llegaron a esa conclusión después de una discusión oral pero no necesitaron trazar una figura de análisis para ello ni sintieron la necesidad de escribir algo más al respecto. La frase “por el absurdo” podría estar denotando un intento de justificación pero no es claro a qué se refieren ni qué razonamiento fue el que hicieron porque en este caso parece más natural una demostración de tipo constructiva que una por el absurdo.

Las funciones de la demostración que se hacen presentes son la de ***descubrimiento*** (para encontrar la figura sostén, en la etapa del “directo” del lugar geométrico), la de ***explicación*** (de las afirmaciones hechas), la ***verificación***, aunque sólo en el “recíproco”***:*** verifican que efectivamente todos los puntos de la mediatriz son posibles puntos del lugar. También se hacen presentes las funciones de ***sistematización*** de las diferentes soluciones para todas las situaciones presentadas y la de ***comunicación***, tanto oral como escrita.

Los esquemas de demostración presentes son el ***empírico inductivo***, en una primera instancia, en la que analizan varias situaciones, y el ***analítico de tipo axiomático***.

Problema 2:

Este grupo comienza trazando una figura de análisis en el papel de manera precisa, con regla y compás. Cuando terminan comentan:

MB: "Este problema lo tenemos que poner en el Cabri, porque el triángulo me quedó muy chiquito."

Después de analizar la figura en el Cabri, y convencidos de que los puntos A, I y J quedan alineados, comentan:

MB: "Quedaron alineados.

VM: "¿Y qué ocurre si quedan alineados?"

DC: "No hay triángulo, no hay circuncentro."

VM: "¿Y entonces el lugar geométrico qué les da?"

MB: "Cero.

VM: "¿Cero, o sea que un lugar geométrico es un número?"

IR: "No, vacío.

VM: "Bueno, entonces ahora deberían explicar por qué los puntos quedan alineados."

Después de un tiempo la docente se acerca nuevamente al grupo y explican lo que había quedado pendiente:

MB: "La intersección de las bisectrices de un triángulo dan en un punto, y si los dos triángulos comparten uno de los ángulos, entonces ese punto va a tener que estar sobre esa bisectriz… Primero decís que el punto I tiene que estar en la bisectriz del ángulo A, porque I es la intersección de las bisectrices, y J también, entonces están alineados".

En sus apuntes escribieron dicho razonamiento de manera simbólica, a continuación de la figura de análisis que habían construido en un principio.

En esta oportunidad se pueden apreciar las funciones de demostración de ***explicación*** (observaron experimentalmente que los puntos quedaron alineados, y lo explicaron) y una vez más de ***comunicación***: oral y escrita. Ésta última se ve potenciada por el trabajo en grupo.

Los esquemas de demostración que se pueden observar son el ***empírico perceptivo*** e ***inductivo***: observando la figura en la pantalla se convencieron de que los puntos estaban alineados y el ***analítico axiomático*** en la justificación.

Y.O., BM y SN – Sólo L y P en el problema 1, recurren al Cabri a partir de problema 2

Problema 1 parte a:

Cuando me acerco a este grupo observo que en sus apuntes ya tenían construida una figura de análisis con las circunferencias exteriores, alguna circunferencia tangente a ambas, y resaltado en marcador verde la mediatriz del segmento AB.

VM: "¿Cuál piensan ustedes que es el lugar geométrico?"

Y.O.: "La mediatriz del segmento AB"

VM: "¿Y qué están tratando de ver ahora?"

Y.O.: "Estamos en la explicación [*de la segunda parte, el recíproco*], ¿tenemos que empezar con un punto de la mediatriz y ahí construimos?"

VM: "Sí, claro. Tienen que explicar cómo, a partir de ese punto, encuentran la circunferencia pedida."

SN: "Pero las circunferencias de centros A y B ya están dadas, no?

VM: "Sí, esas ya las tenés".

Y.O.: "Entonces la explicación es: tomamos O, en la mediatriz del segmento AB, y trazás la circunferencia de centro O y distancia OD u OC [*en su dibujo los puntos*

C y D son los de la intersección del segmento AB con cada una de las circunferencias dadas.]"

VM: "¿Y eso sirve para cualquier punto O? ¿Qué ocurre si elijo este otro punto O? [señalé un punto para el cual era evidente que el radio a tomar no era el que señalaba Y.O.]"

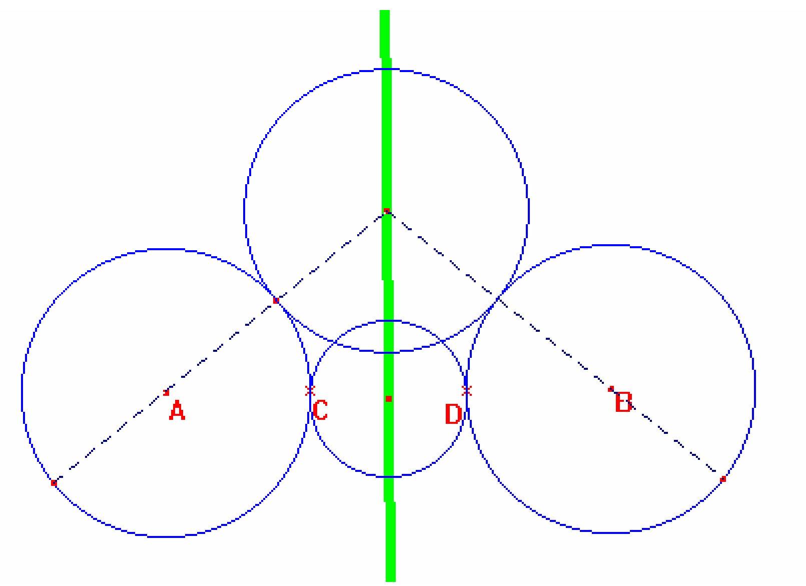
YO: "Nosotros especificamos que C y D son la intersección…"

SN: "Tenemos que ver cómo encontrar esta distancia para que la circunferencia te quede tangente y no corte dos veces."

YO: ¿Y cómo la podés encontrar?

SN: "Buscás que sea de 90 grados".

VM: "Bueno, ahí está la clave de la cuestión, y les va a llevar una pequeña discusión acerca de cómo darse cuenta de cuál es el radio de la circunferencia tangente. Para ello les recomiendo que piensen sobre este caso [se les señala el caso en el que el centro de la circunferencia tangente no está alineado con A y B]".



En los apuntes presentan un dibujo como el que se adjunta, y deducen que los segmentos AO y OB son congruentes a partir de que las distancias de C a O y de D a O son iguales, lo que es claramente insuficiente. Deducen que las medidas de los segmentos AO y OB son iguales pero razonando solamente sobre su figura de análisis, en la que trabajan con un caso particular (O alineado con A y B)

Agregan, además, que '*usamos la propiedad de tangencia que dice que dos circunferencias tangentes tienen sus centros alineados con el punto de tangencia*.'

Escriben de manera precisa el argumento para la segunda parte pero no explican por qué ese algoritmo les conduce a la solución buscada, ni si efectivamente se verifican las condiciones pedidas.

Concluyen que el lugar geométrico de O es efectivamente TODA la mediatriz del segmento AB.

Problema 1 parte b:

Al igual que otros grupos, este grupo amplió la imagen conceptual de “circunferencias tangentes” al abordar este caso:

Y.O.: “La primera parte es igual que en el caso anterior, como la distancia de O a A es igual que la de O a B entonces los puntos O están en la mediatriz del segmento AB.”

VM: “¿Y la segunda parte?”

SN: “También es parecida, pero este punto no va.” [Señala el punto de intersección de las circunferencias de centros A y B, que en este caso son tangentes].

VM: “¿Están todos de acuerdo que no va? Porque otro de los grupos estaba diciendo que sí encontraron una circunferencia con centro en ese punto y tangente a las dadas.”

SN: “Pero va a ser una misma”.

Y.O.: “Ah!, Sí, es sí: la que es tangente acá.” [Señala el punto diametralmente opuesto al punto medio de AB en la circunferencia de centro A, se puede apreciar en la figura de la misma parte para la pareja SA - RS].

SN: “Ah, ¿y eso puede ser?”

VM: “Claro, dice tangente, no dice que tenga que ser exterior o interior.”

Y.O. siente entonces la necesidad de volver a la parte a, para revisar si la limitación propuesta era correcta a la luz de esta nueva concepción de circunferencias tangentes:

Y.O.: “Entonces acá también puede ser cuando una… bueno, pero acá no dijimos que no a ninguna, así que igual está bien.”

En sus apuntes escriben de manera correcta el algoritmo para construir la circunferencia tangente a las de centros A y B con centro en un punto cualquiera de la mediatriz del segmento AB. Relatan además que

> "al principio pensamos que la circunferencia de centro P [intersección de las circunferencias de centros A y B] no existía, pero nos dimos cuenta que existe una circunferencia de radio igual al diámetro de C_A o C_B, que es el mismo."

Nuevamente concluyen que el lugar geométrico de O es toda la mediatriz del segmento AB.

Problema 1 parte c:

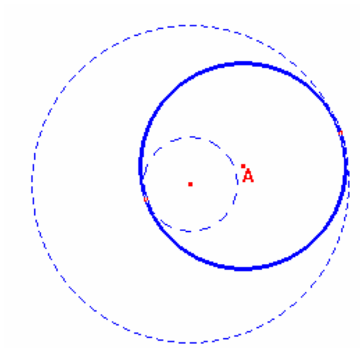
En este caso concluyen sin mayores complicaciones que el lugar geométrico de O es la mediatriz del segmento AB, basándose en razonamientos similares a los anteriores.

Problema 1 parte d:

Este grupo fue uno de los primeros en observar que en este caso, los puntos de la circunferencia C_A o C_B son también puntos del lugar, porque se puede trazar una circunferencia con centro en ellos y radio igual al diámetro de las circunferencias originales. El siguiente es parte del diálogo que mantuvieron y en el que llegaron a esa conclusión:

Y.O.: "Es todo el plano... menos el mismo… [Señala la región interior a la circunferencia de centro A ya trazada]."

SN: "No porque puede haber una circunferencia tangente acá."



Y.O.: "Si, puede, mirá, con ese centro, trazás una recta, y donde intersecta ahí…" [Y.O. estaba pensando en una circunferencia con centro en el interior de la circunferencia de centro A y tangente a ella "por fuera", como la punteada que se muestra en la figura].

SN: “No, tiene que ser chiquitita.” [SN pensaba en la circunferencia tangente que queda “por dentro” de la circunferencia de centro A, como la otra punteada que se muestra en la figura].

Y.O.: “Sí, puede ser así, sí. La circunferencia de centro A queda por dentro.”

SN: “Va a ser tangente acá pero después…”

Y.O.: “A ver, trazala, ¿dónde está cruzando?” [Y. O. pregunta de manera desafiante]

SN: “Ah!, tenés razón, esa también sirve.”

Y.O.: “El centro de la dada tiene que estar entre medio del centro de la [circunferencia] tangente y el punto de tangencia, y el radio es mayor a la circunferencia dada.”

VM: “Cuántas condiciones… pero entonces ¿cuáles van a ser los puntos del lugar geométrico?”

SN: “Para mí va a ser cualquiera, siempre este punto [A] va a estar alineado con cualquier O y puedo hacer esta construcción.”

Y.O.: “Todos menos el mismo punto [A]. Porque si hacés una [circunferencia] para que toque por lo menos en un punto, te va a quedar la misma circunferencia, por lo tanto no es tangente.”

VM: “¿Y todo el resto sí sirven?”

SN: “Los puntos de la primer circunferencia [la de centro A]…”

Y. O.: “Ah!, claro… esos no te sirven… no, no esperá, esos también sirven. Son todos, todos menos el centro. Para construirla trazás una semirrecta desde acá que pase por el centro A y donde cruce a la circunferencia dada, ahí tenés el radio.”

SN: “El radio es el diámetro de la circunferencia dada.”

A continuación transcribo lo que escribieron:

“Consideramos que el lugar geométrico del centro O es el plano que contiene a las C_A y C_B, dado que para construir una circunferencia tangente a otra, basta con trazar la semirrecta del centro de la circunferencia que queremos construir [que puede ser cualquier punto del plano] que contenga al centro de las circunferencias dadas. Esta semirrecta intersecta con la circunferencia dada. El radio de la circunferencia que queremos construir es la distancia del centro a la intersección de la semirrecta, tal que el centro de la circunferencia dada pertenezca al segmento del radio. Por lo tanto concluimos que todo punto en el plano puede tener esa semirrecta, todos los puntos menos el centro de la circunferencia dada, ya que para que interseque por lo menos en un punto, debe de tener el mismo radio."

Salvando algunos errores de expresión, es asombroso observar la precisión con que lograron transmitir la idea que tenían. Si bien algunas de las condiciones impuestas no es necesaria para la construcción de la circunferencia buscada, explicitan paso por paso cómo hacerlo. Se puede observar además cómo cuidaron que en la redacción del algoritmo quedara incluido el caso en que el punto escogido para centro es uno de los puntos de las circunferencias dadas. Analizaron además el caso en que el punto escogido es el punto A, brindando mayor precisión a la solución que con la aproximación inicial.

En este caso se pueden apreciar las siguientes funciones de la demostración: la de ***descubrimiento***: de la figura sostén en un principio y de nuevas maneras de que una circunferencia sea tangente a otra, más adelante, la de ***verificación***: al explicitar el algoritmo de construcción de la circunferencia para los recíprocos. A través de la demostración de que era posible la construcción de la misma, verificaban que algunos puntos dudosos realmente estaban en el lugar. También se pueden apreciar las funciones de ***comunicación***: oral y escrita y ***sistematización*** en el análisis de los diferentes casos.

Se hicieron presentes los esquemas de demostración ***empírico perceptivo*** (al principio muy dependiente de la figura de análisis realizada, sin hacer explícitas propiedades que eran necesarias para la justificación) y el ***analítico de transformación***, especialmente en el abordaje de los casos b, c y d, que fueron analizados realizando analogías con el primer caso.

Problema 2:

Este grupo comienza trazando una figura de análisis en el papel de manera precisa, con regla y compás. Cuando terminan SN comenta que los puntos A, I y J están alineados, entonces les pregunto cómo van a construir el circuncentro que les piden.

SN: “No, no quedan alineados, me quedaron así por problemas de construcción.”

Y.O.: “Lo que pasó es que tomaste un C que te dio que el ángulo sea muy…”

Les propongo entonces que lo construyan utilizando el Cabri y evacuen sus dudas. Después de unos instantes retomo el diálogo:

Y.O.: “Si vos tenés un triángulo ABC, y el punto D, variable, y vos hacés las bisectrices de dos ángulos… ¿cómo era?... al variar este punto sobre este segmento, la recta que pasa por este punto forma una altura, yo lo vi así.”

VM: “¿Les quedó eso, en todos los casos? ¿Eso explica que los puntos A, I y J estén alineados? ¿Qué es I en el triángulo ABC?”

SN: “La intersección de bisectrices, pero de los chiquitos.”

VM: “¿Y qué es la semirrecta AI entonces?”

SN: “La bisectriz, del ángulo A… Ah!, claro, ya entendí… Están alineados porque con J pasa lo mismo y la bisectriz de A va a ser la misma que la bisectriz de…”

Y. O.: “Claro, porque no hay triángulo.”

SN: “Pero entonces no tiene circuncentro, porque no hay triángulo.”

VM: “¿Qué ocurre entonces con el lugar geométrico?”

Y.O.: “Es cero… bueno, el conjunto vacío.”

En los apuntes escriben de manera muy escueta este razonamiento, sin concluir nada acerca del lugar geométrico de O. Los estudiantes ya habían pasado un tiempo considerable concentrados en la tarea y en este momento su atención y dedicación comenzaba a decaer.

FF y AL – Sólo L y P

Problema 1 parte a:

Cuando me acerco a esta pareja observo que tienen en sus apuntes una figura de análisis acorde a la situación, y en la cual habían dibujado una de las circunferencias tangentes pedidas. En un principio parecen tener claro cuál es la solución al problema: la mediatriz del segmento AB. Pero por otro lado dudan acerca de la misma, ya que si eligen un punto en la mediatriz, observan que no cualquier circunferencia con centro en él será solución. Al respecto escriben en sus apuntes:

"O tiene que equidistar de A y B para que C_O sea tangente a C_A y C_B pero si el radio de C_O es menor o mayor a $\overline{BO}$ – r (radio de C_A y C_B) entonces no será tangente."

Parece ser que están confundiendo la primer parte del problema (probar que todos los posibles puntos O deben estar en la mediatriz del segmento AB) con la segunda parte (analizar cuáles puntos de la mediatriz del segmento AB son los puntos solución). Existe además una confusión ya que para que un punto de la mediatriz de AB pertenezca al lugar geométrico, basta con que exista una circunferencia con centro en él que cumpla lo pedido, no es necesario que sean todas las de centro en él.

FF: "No sabemos cómo explicar esto, que O va a pertenecer a la mediatriz, pero el radio tiene que ser esto, o sea, $\overline{BO}$ – r (radio de C_A y C_B), porque si es más grande va a ser secante, y si es menor va a ser chiquita, no va a cortar."

VM: "Pienso que lo que tienen que pensar es por qué los puntos O tienen que estar en la mediatriz del segmento AB."

FF: "Por que O tiene que equidistar de A y de B".

VM: "Bueno, eso es lo que tienen que probar para esta primera parte."

FF: "Sí, pero nuestro problema es que tenemos que decir que el radio tiene que ser exacto ese que decimos. Tenés que hacer la recta BO, y donde se intersecta con la circunferencia, ese es el punto que nos sirve."

VM: "Eso está muy bien, pero es lo que tenés que pensar para la segunda parte, para el recíproco. Ahora tienen que explicar por qué O está en la mediatriz."

FF: "Entonces si yo digo que $\overline{BO}$ tiene que ser congruente con $\overline{AO}$, porque estos radios son iguales y estos también… entonces ¿ya está?".

VM: "Muy bien, entonces ya está, porque O va a tener que estar en la mediatriz de AB."

FF: "Pero si yo digo eso, me dicen: ah! Sí, pero si trazás una circunferencia con ese centro y chiquita entonces no es tangente a las circunferencias pedidas, porque es exterior."

VM: "Claro, porque no significa que todas las circunferencias que tracen con ese centro van a ser circunferencias solución, sólo te sirve una, que incluso ustedes ya encontraron cómo hallarla".

Después de todo este diálogo, FF y AL logran ordenar bastante sus ideas y escriben en sus apuntes los razonamientos necesarios para deducir la primera parte, así como el algoritmo que permite construir una circunferencia tangente a las pedidas, dado el punto O en la mediatriz de AB. Concluyen así que en este caso el lugar geométrico es toda la mediatriz del segmento AB.

Problema 1 parte b:

En el abordaje de este caso no medió intervención docente alguna. Las conclusiones a las que llegaron y escribieron en sus apuntes son las siguientes:

"1ª parte: igual que en el caso anterior.

2ª parte: 1) Tomo O en la mediatriz del segmento AB.

2) OB $\cap$ C_B = {M'} Si M' = O no existe $C_{O,\overline{OM'}}$.

3) Trazo $C_{O,\overline{OM'}}$.

El LG de O es la mediatriz del segmento AB – punto de tangencia entre C_A y C_B.

Como vemos, es uno de los pocos grupos que no logró ampliar el espectro de circunferencias tangentes posibles. Cabe señalar que además de que no hubo intervención docente, esta pareja trabajó de manera más independiente que el resto de los grupos, no existió hasta este momento intercambio entre esta pareja y el resto de los estudiantes.

Problema 1 parte c:

Continuando con un razonamiento similar al empleado en el caso anterior, llegaron a la conclusión de que el lugar geométrico de O es la mediatriz del segmento AB, excluidos los puntos de intersección de ambas.

Problema 1 parte d:

En este caso afirman que el LG de O es todo el plano excepto el punto A. Para llegar a esa conclusión explican de manera precisa y a través de un algoritmo la manera de construir una circunferencia de centro en cualquier punto del plano y tangente a la dada, así como la dificultad de hacerlo si el punto escogido es el mismo A.

Si bien no lo explicitan, parecen tener claro que los puntos de la circunferencia de centro A dada originalmente también pertenecen al lugar geométrico.

Se pueden apreciar las funciones de la demostración de ***descubrimiento*** de la figura sostén, de ***verificación***: al explicitar el algoritmo de construcción de la circunferencia para los recíprocos. A través de la demostración de que era posible la construcción de la misma, verificaban que algunos puntos dudosos realmente estaban en el lugar. También aparecen las funciones de ***comunicación***, tanto oral como escrita y la de ***sistematización***: análisis de los diferentes casos.

Principalmente se hace presente el esquema de demostración ***empírico perceptivo*** (al principio muy dependiente de la figura de análisis realizada, sin hacer explícitas propiedades que eran necesarias para la justificación) pero también se hace explícito el ***analítico de transformación***, especialmente en el abordaje de los casos b, c y d, que fueron analizados realizando analogías con el primer caso.

A este grupo le llevó mucho tiempo la resolución de este problema, por lo que no pudieron abordar el segundo ni el tercero.

V.f Resumen: funciones y esquemas de demostración detectados

Funciones de la demostración

Grupo	Problema 1	Problema 2	Problema 3
RS y SA	**Descubrimiento, explicación, sistematización** y **comunicación**	**Descubrimiento, verificación, explicación** y **comunicación**	**Descubrimiento, explicación y comunicación**
MB, DC, IR y FD	**Descubrimiento** (para encontrar la figura sostén, en el "directo") **Explicación** (de las afirmaciones hechas) **Verificación** (sólo en el recíproco, verifican que efectivamente todos los puntos de la mediatriz son posibles puntos del lugar). **Sistematización** **Comunicación** (oral y escrita)	**Explicación** (observaron experimentalmente que los puntos quedaron alineados, y lo explicaron). **Comunicación**: oral y escrita.	No fue abordado
Y.O., BM y SN	**Descubrimiento**: de la figura sostén en un principio y de nuevas maneras de que una circunferencia sea tangente a otra, más adelante. **Verificación**: al explicitar el algoritmo de construcción de la circunferencia para los recíprocos. A través de la demostración de que era posible la construcción de la misma, verificaban que algunos puntos dudosos realmente estaban en el	**Descubrimiento**, **explicación** de la alineación de los puntos.	No fue abordado

	lugar. **Comunicación**: oral y escrita. **Sistematización**: análisis de los diferentes casos.		
FF y AL	**Descubrimiento**: de la figura sostén. **Verificación**: al explicitar el algoritmo de construcción de la circunferencia para los recíprocos. A través de la demostración de que era posible la construcción de la misma, verificaban que algunos puntos dudosos realmente estaban en el lugar. **Comunicación**: oral y escrita. **Sistematización**: análisis de los diferentes casos.	No fue abordado	No fue abordado

Grupo	Problema 1	Problema 2	Problema 3
RS y SA	**Externo-autoritario, empírico-perceptivo y analítico-axiomático**	**Empírico-perceptivo y Analítico-axiomático**	**Analítico-axiomático**
MB, DC, IR y FD	**Empírico inductivo**: primero analizan varias situaciones. **Analítico-axiomático**	**Empírico perceptivo e inductivo**: observando la figura en la pantalla se convencieron de que los puntos estaban alineados. **Analítico axiomático** en la justificación.	No fue abordado
Y.O., BM y SN	**Empírico perceptivo** (al principio muy dependiente de la figura de análisis realizada, sin hacer explícitas propiedades que eran necesarias para la justificación). **Analítico de transformación**, especialmente en el abordaje de los casos b, c y d, que fueron analizados realizando analogías con el primer caso.	**Empírico perceptivo y analítico axiomático** en la justificación de la alineación de los puntos.	No fue abordado
FF y AL	**Empírico perceptivo** (al principio muy dependiente de la figura de análisis realizada, sin hacer explícitas propiedades que eran necesarias para la justificación). **Analítico de transformación,**	No fue abordado	No fue abordado

	especialmente en el abordaje de los casos b, c y d, que fueron analizados realizando analogías con el primer caso.		

En general, puede observarse que si bien no todos los estudiantes que abordaron la actividad arribaron a las soluciones esperadas en el tiempo del que disponían, e incluso la mayoría de los grupos no llegaron a explorar la totalidad de los problemas propuestos, para todos fue una experiencia enriquecedora en cuanto a los procesos del razonamiento que se vivenciaron en cada caso. Por otra parte, también en esta parte de la experiencia pudo cumplirse el objetivo docente de detectar en cada grupo cuáles funciones de la demostración se hacían presentes y qué esquemas de demostración manifestaron los estudiantes.

Es interesante destacar que en este caso todos los grupos de estudiantes presentaron esquemas de demostración de tipos empírico-inductivos y analítico-axiomáticos, así como lograron explicitar de forma escrita y oral sus razonamientos. Además, en todos los grupos se hicieron presentes varias de las funciones de la demostración, en diferentes grados y con diferentes niveles de profundidad en el desarrollo de los razonamientos.

En muchas oportunidades los estudiantes presentaron un esquema de tipo axiomático deductivo desde un principio, al razonar sobre la figura de análisis e intentar predecir la posición del centro de la circunferencia. Sin embargo, al igual que como ocurrió con el grupo analizado previamente, en muchas ocasiones los esquemas de tipo axiomático-deductivos se manifestaron después de haber transitado por un esquema de tipo inductivo, momento en la cual los estudiantes analizaban varios casos para descubrir el resultado o convencerse del mismo. Esta estrategia se hizo evidente en el caso de los estudiantes RS y SA cuando abordaron el tercer problema.

En suma, la experiencia realizada permitió cumplir con el objetivo planteado en un principio que era el de detectar y analizar los esquemas y funciones de la demostración presentes en los razonamientos de los estudiantes al enfrentarse a problemas de construcción y de hallar lugares geométricos. Los estudiantes participaron de la misma de forma muy entusiasta en general, se comprometieron con la actividad a pesar de saber de antemano que no era una actividad que afectara directamente sobre su calificación.

En el siguiente capítulo se incluyen las reflexiones derivadas de esta experiencia y del trabajo en general de la investigación.

Capítulo 6: Reflexiones finales

Se presentan en este capítulo algunas reflexiones que han ido surgiendo a lo largo de la investigación y aquéllas que resultan del análisis y la sistematización de los datos recogidos, tanto en el aspecto empírico como en el de revisión bibliográfica teórica. Este capítulo, que representa un cierre para el presente trabajo, constituye por un lado una revisión de la labor realizada para dar respuesta a las preguntas propuestas y analizar la obtención de los objetivos formulados. Por otro lado, también se exponen otras conclusiones que no se habían previsto al inicio del trabajo. Por último, se plantean interrogantes pendientes, dejando una puerta abierta a nuevos caminos que se abren para futuras investigaciones que permitan abordarlas y encontrar algunas respuestas.

VI.a Respuestas a las preguntas planteadas y revisión de objetivos

Repasaremos entonces los objetivos y preguntas concebidas al inicio de la investigación para ir explicitando las respuestas encontradas. El primer objetivo propuesto hacía referencia al análisis de la inclusión de la demostración en geometría, y en particular del tema "Lugar Geométrico" en los programas de Matemática de la Educación Media Superior (EMS) en Uruguay. Se buscaba entonces dar respuesta a interrogantes del tipo ¿por qué mecanismos se validan las ideas matemáticas y, en particular, las analizadas? ¿Cómo se consensúan esas ideas matemáticas? ¿Por qué y cómo sobreviven en la práctica educativa? ¿Cómo se difunden? Y más particularmente, dentro de ese cuestionamiento general, una pregunta concreta: ¿la *demostración* es un tema, es una práctica o es una habilidad a desarrollar por los estudiantes dentro del currículo?

Después del análisis realizado, se concluyó en primer lugar que la demostración como tal no es un tema o ítem explícito dentro de ninguno de los programas de Matemática de la EMS. Como se mencionó en el Capítulo III, parece ser que la respuesta es que **la demostración es considerada como una habilidad a desarrollar instaurada de manera implícita entre los docentes, y a la vez una práctica que la mayoría de los profesores de Matemática intentamos introducir en nuestras clases de Bachillerato**. Pero existen al día de hoy pocos consensos explícitos acerca de para qué introducirla en el aula, de qué manera y cuáles son las problemáticas concretas que están asociadas a ella y que permiten a los estudiantes desarrollar los procesos argumentativos asociados.

En lo que respecta al análisis de cómo se introduce y cuándo el estudio de los lugares geométricos en el programa de secundaria, se pudo observar que si bien aparece dentro de los contenidos programáticos para primer año de EMS, no es así en el curso de Geometría Métrica de segundo año de EMS, orientación Científica. Sin embargo, por otro lado, forma parte del discurso escolar actual en dicho curso: es un ítem de evaluación seguro en la prueba final, que puede hacer decidir la aprobación o no del examen por parte de un estudiante[11]. **Esto conduce a pensar, entonces, que sería recomendable que este tema se haga explícito a nivel curricular, vinculándolo con el resto de los temas del programa y estableciendo un orden y tiempo tentativos a dedicar**.

Otro de los objetivos propuestos fue el de analizar y describir las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular –de lugares geométricos y de construcción– en lo que refiere a los esquemas de demostración y procesos que se hacen presentes, así como a las funciones que la demostración adopta en la resolución. En el capítulo IV se explicitan las preguntas referidas en concreto a este aspecto.

Para lograr este objetivo se realizó una investigación de tipo cualitativo con estudiantes del curso de Geometría de segundo año de EMS. Como se pone de manifiesto en el Capítulo V la meta fue alcanzada, lo que significa de por sí que **plantear este tipo de problemas genera en el aula un ambiente propicio para que los estudiantes transiten las diferentes funciones de la demostración, resignificándola como una de las habilidades a desarrollar dentro de su cultura matemática y su formación como ciudadano en general.** //amplíe esta última idea y su fundamentación// A su vez, también se detectó que este tipo de problema **permite al estudiante, y especialmente al docente, detectar cuál es el esquema de demostración que está atravesando**

[11] En los últimos dos años de Bachillerato en Uruguay algunas de las materias, según la orientación, tienen examen final obligatorio. Este es el caso del curso de Geometría Métrica de 5º año Científico.

quien lo intenta resolver, lo que es un buen punto de partida para saber cómo intervenir para lograr esquemas de demostración más elaborados. Por lo tanto, se erige este tema como una herramienta fundamental para favorecer en nuestros estudiantes el desarrollo de razonamientos de tipo axiomático-deductivo.

El último de los objetivos propuestos era explorar cómo el abordaje de problemas de lugares geométricos y de construcción puede ayudar a los estudiantes a mejorar su concepción de demostración en matemática y geometría en particular así como sus maneras de conjeturar resultados y sus modelos de justificación. En suma, la intención era analizar si este tipo de problemas presenta al estudiante situaciones en las que se favorezca el desarrollo de procesos argumentativos. La pregunta a la que se intentó dar respuesta era: ¿De qué manera intervienen los elementos anteriores (funciones de la demostración, procesos involucrados y esquemas de demostración) para que los estudiantes logren exitosamente demostrar las conjeturas formuladas?

En este sentido la investigación empírica arrojó resultados interesantes. Por un lado se analizó en particular las producciones de dos estudiantes –ambos trabajaron en forma individual y pertenecen al primero de los grupos con los que llevé a cabo la experiencia definitiva[12]–, que son los que presentan esquemas de demostración más pobres y a la vez sólo vivenciaron a la demostración en su rol de *descubrimiento*. Se detectó entonces que presentaban un esquema de demostración *empírico-perceptivo*[13] y que su razonamiento estaba 'estancado'. Parece ser que ese tipo de esquema representa un obstáculo difícil de sortear a la hora de transitar hacia un esquema de demostración más elaborado y que incluya razonamientos de tipo deductivo. Por otro lado, se constató que otros alumnos presentan esquemas de demostración *empírico-inductivos*[14] y producen después demostraciones de tipo *analítico-axiomáticas*[15] (que involucran razonamientos de tipo deductivos). Esto puede resultar llamativo, ya que tradicionalmente se piensa que hay que "prohibir" a los estudiantes que hagan muchas posiciones para un mismo punto. Sin embargo, parece ser que a los alumnos les es útil,

[12] Este grupo se describe en el apartado d del Capítulo IV y sus producciones se describen en los apartados a, b y c del Capítulo V.
[13] Según la clasificación formulada por Sowder y Harel a la que se hace referencia en el Cap. 2.
[14] Ídem.
[15] Ídem.

y no siempre significa un obstáculo para producir demostraciones deductivas sino que por el contrario representan una vía para alcanzar ese tipo de demostración. Parecería que los estudiantes comienzan vivenciando a la demostración en su rol de *descubrimiento* a través de la inducción, y profundizan después ese proceso, haciéndose presentes los roles de *explicación* de por qué el resultado es esa figura y no otra, y de *verificación* y *comunicación* del mismo.

La conclusión a la que se puede arribar en ese aspecto es, pues, que parece ser que **los esquemas de demostración externos o el empírico perceptivo representan obstáculos a la hora de generar argumentos deductivos para justificar un resultado.** Por otro lado, en la mayoría de los casos en los que se presentan esquemas de tipo analítico-axiomáticos, ocurre que los estudiantes habían pasado previamente por un proceso de exploración, en el que se detecta un **esquema de demostración de tipo empírico inductivo**. A su vez, esas son también las situaciones en los que la demostración se hace presente en una mayor variedad de funciones. Se podría entonces deducir que, a diferencia de lo que tradicionalmente se piensa –que el hecho de que el estudiante repita la figura en diferentes posiciones puede representar un obstáculo para producciones más elaboradas– este tipo de esquema **constituye un antecedente necesario para una demostración de tipo axiomático-deductiva**.

Esto puede ser relevante cuando pensamos que la GD es una herramienta ideal para desarrollar el tipo de razonamiento empírico inductivo ya que permite al estudiante construir infinidad de posiciones para una figura en un tiempo muy reducido. El riesgo que algunos investigadores y profesores sienten de que el estudiante no aprenda a desarrollar razonamientos deductivos por utilizar en exceso programas de GD (Mason, 1991; citado en Hanna, 2001) se vería entonces reducido si generamos situaciones de aprendizaje en la que los estudiantes sientan como necesario profundizar en el problema e intentar explicar lo que descubren.

Queda entonces una pregunta pendiente: ¿qué tipo de trabajo previo es necesario para que los estudiantes logren ir más allá de las demostraciones externas y empírico-perceptivas, que son las que representan obstáculos para razonamientos más elaborados? ¿A través de qué procesos los estudiantes pueden atravesar esa barrera? ¿En qué etapa de la escolarización se debe abordar?

VI.b Reflexiones acerca de la relevancia del tema

Una vez analizado el logro de los objetivos originales y respondidas las preguntas propuestas, puede resultar interesante mencionar otro tipo de reflexiones que surgen ahora que se está comenzando a dar un cierre a esta investigación. Al pretender alcanzar el primero de los objetivos planteados se observó que el tema "lugares geométricos" no se hace explícito en el programa del curso de Geometría de segundo año de EMS, en donde, paradójicamente, se hace presente no sólo en el discurso escolar efectivo sino también como un ítem de evaluación que puede hacer decidir la aprobación del examen por parte de un estudiante. Se deduce entonces que es recomendable que se incluyera a nivel curricular. Ahora, ¿por qué se considera relevante el estudio del tema y la explicitación de reflexiones elaboradas en torno a él?

En primer lugar, a partir del análisis de las producciones de los estudiantes se puede descubrir que el tema Lugares Geométricos es un tema dentro del listado implícito de contenidos a abordar en el curso de Geometría Métrica que involucra a la demostración desde sus diferentes roles y que a su vez permite detectar qué esquemas de demostración presenta un estudiante, con el objetivo de favorecer que logre desarrollar esquemas de demostración más elaborados. En segundo lugar, se observa que a diferencia del tratamiento usual de la demostración (exposición por parte del profesor de resultados y demostraciones ya fabricadas y que aportan poco aprendizaje significativo a los estudiantes), este tipo de problema ofrece a los estudiantes una oportunidad única de acercarse de manera significativa a la demostración en geometría. Estas razones hacen que éste sea realmente un tema que vale la pena seguir trabajando con los estudiantes y tiene que hacerse presente de manera explícita en el listado de contenidos del curso, a la vez que pueden explicar el por qué ha sobrevivido en las prácticas reales de los docentes a pesar de que no se mencionen de forma explícita a nivel curricular.

Nuestro país está atravesando un proceso de cambio en lo que respecta al aspecto socio-político, fruto del cambio de gobierno en marzo de 2005. Se hace evidente que el tema educación no queda ajeno a las discusiones que a raíz de ello se están suscitando, por lo que es un momento de reflexión en el que se están elaborando nuevos programas y planes. Por eso parece relevante comunicar los resultados de este trabajo, que puede aportar una nueva mirada sobre un tema conocido por todos los profesores de Matemática.

Independientemente del tipo de reforma que se implemente, es razonable suponer que uno de los objetivos centrales de la EMS en nuestro país seguirá siendo, como es en la actualidad, el "desarrollo y [la] profundización de la autonomía intelectual, el pensamiento crítico y la capacidad de problematización" (Comisión T.E.M.S., 2002; Nº3, 1). El cuestionamiento que hoy se hace presente al respecto es: ¿de qué manera logramos la viabilidad de este objetivo a través de las diferentes disciplinas? En lo que respecta a la educación matemática en particular, cabe cuestionarse: ¿efectivamente las clases de matemática en la EMS en Uruguay promueven este objetivo? ¿Se hacen explícitos de alguna manera en los contenidos programáticos? ¿Se hacen presentes en alguna de las prácticas implícitas de los docentes? ¿En cuáles?

Es en este sentido que el tratamiento del tema "Lugares Geométricos" en el aula parece ser altamente recomendable. Como fue puesto de manifiesto en el análisis de las producciones de los estudiantes, ese es un tema en el que se puede apreciar con transparencia su pensamiento y que permite investigar las estrategias a seguir para favorecer su desarrollo.

Por otro lado, surge una pregunta ineludible: en los países en los que, como el nuestro, este tipo de problemas sí se trabajan: ¿son los profesores que dictan el curso realmente conscientes de la herramienta que tenemos entre manos? ¿Se está aprovechando esta herramienta con el fin de favorecer el desarrollo de la capacidad deductiva y un pensamiento autónomo y crítico en los alumnos? No basta la sola implementación del tema como parte del currículo, sino que además los profesores tienen la responsabilidad de ser plenamente conscientes de los procesos que ponen en juego los alumnos cuando resuelven ese tipo de problemas, y deberían comenzar a elaborar y explicitar estrategias para aprovechar al máximo la herramienta. Para eso es necesario comenzar a quebrar la estructura tradicional del tratamiento del tema proponiendo problemas que escapen a las situaciones tradicionales. Entre otras cosas se pueden proponer problemas diferentes a los tradicionales, en los que el elemento variable es generalmente un punto y que tienen siempre como solución una recta, una circunferencia o una sección de ellas. En la actividad propuesta en este estudio se presentan modelos de problemas en los que el elemento que varía es en ocasiones una recta (podría haberse manejado también una medida) y la solución es el conjunto vacío, o sólo un punto, o todo el plano, por ejemplo.

Sería interesante dejar también una reflexión planteada: en los países en los que este tipo de problemas no se trabaja en el aula, ¿no sería conveniente que sí se hiciera? Tal vez se esté desperdiciando una buena oportunidad de analizar los razonamientos de los estudiantes y colaborar en el desarrollo de su pensamiento crítico y capacidad de problematización.

VI.c Reflexiones acerca de la vinculación con otras líneas de investigación dentro de la Matemática Educativa

Se presentan a continuación algunas reflexiones referidas a la vinculación del estudio realizado con otras líneas de investigación en Matemática Educativa. El estudio de las producciones de los estudiantes en la resolución de problemas de lugares geométricos reveló que es importante, a la hora de lograr éxito en cuanto al descubrimiento de nuevos resultados y a su justificación, el fijarse en las invarianzas de la situación. En general, los estudiantes que son capaces de diferenciar entre los elementos variables y los que permanecen fijos presentan más posibilidades de arribar a una solución y lograr convencerse a sí mismos y a sus compañeros de la misma. Comenzó entonces a surgir una nueva pregunta: ¿se podrá plantear una relación entre la necesidad de analizar la variación en la figura geométrica y la teoría del pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis desarrollada, entre otros autores, por Cantoral y Farfán (1998)? ¿Será provechoso para la Matemática Educativa encontrar vínculos entre ambas líneas de investigación? //no es clara la vinculación que propone para estas líneas//

La línea de investigación del pensamiento y lenguaje variacional fundamenta, a través de varios estudios, que un abordaje desde el análisis de la variación puede ser muy provechoso en la introducción al cálculo. En particular se plantea la predicción como eje central a partir de la cual se desarrollan y difunden las ideas en el cálculo, desde su génesis. Puede suceder que ese mismo tipo de abordaje es el que se precise para la resolución de problemas de lugares geométricos y de construcción: la predicción de la posición de un punto o el análisis de su comportamiento al variar bajo ciertas condiciones dadas. Como lo señalan Cantoral y Farfán (1998), tradicionalmente se considera al precálculo como una serie de procedimientos y algoritmos algebraicos o provenientes de la geometría analítica, pero dejando de lado los argumentos visuales. ¿Puede ser el tema lugares geométricos, desde el tratamiento que se le da en Geometría Métrica, una herramienta indicada para compensar esta ausencia de argumentos geométricos?

En definitiva, el estudio de las cónicas se vio impulsado en parte por la necesidad de predecir la posición de una partícula o el comportamiento de cierta magnitud (del Río, 1994). Y este mismo estudio es el que encuentra en la génesis de las funciones analíticas tal como hoy las estudiamos en el aula (Cantoral y Farfán, 1998). Considerando este enfoque, podemos pensar que el estudio de lugares geométricos puede ser una herramienta que prepare el camino para la formación del pensamiento variacional en los estudiantes aprovechando, entre otras cosas, que en nuestro currículo el acercamiento a la geometría ocurre previo al cálculo formal. Por otra parte, este planteo también tiene un sustento cognitivo: según plantea la línea del desarrollo del pensamiento variacional, “previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico” que permita a los estudiantes “transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad” (Cantoral y Farfán, 1998; 6). Estos autores opinan que una de las componentes fundamentales para ello es la intuición. Precisamente el pensamiento geométrico –en particular la resolución de problemas de Lugares Geométricos– es un ámbito ideal para favorecer los procesos intuitivos.

VI.d Preguntas pendientes y futuras líneas de investigación

La investigación realizada pretende constituir un punto de partida para comenzar a analizar el tema de la demostración en geometría en la Educación Media Superior en el Uruguay. Ha sido útil para tomar conciencia de lo poco que se ha analizado y escrito en el país al respecto y de lo mucho que queda por hacer. Después de este trabajo permanecen muchas preguntas pendientes y se pueden plantear a partir de él interesantes líneas de investigación futura.

En primer lugar puede hacerse referencia a lo que hace a la elaboración de estrategias exitosas por parte de nuestros estudiantes para desarrollar un pensamiento deductivo. En ese sentido, puede plantearse ahora una pregunta algo más precisa que la que se hacía al principio de la investigación: ¿qué tipo de trabajo previo es necesario realizar con los estudiantes para fomentar el desarrollo de esquemas de demostración de tipo empírico inductivos? Y, a su vez, queda un trabajo pendiente: ¿cómo ayudarlos a que los esquemas externos y empírico-perceptivos no los conduzcan a callejones sin salida? ¿A través de qué procesos los estudiantes pueden enfrentarse de manera exitosa con esos obstáculos?

Uno de los caminos que pueden resultar válidos para transitar es el de analizar los antecedentes de los alumnos, tanto en lo que hace a su formación anterior en Matemática como a su formación en el resto de las disciplinas. Será entonces necesario asumir que la formación de un espíritu crítico y reflexivo en nuestros estudiantes es una responsabilidad que se extiende a educadores de todos los ciclos y todas las disciplinas, y trabajar en consecuencia. Tal vez el camino a recorrer sea el cuestionarse, tanto a nivel personal de cada docente como a nivel institucional, cuáles son y cuáles deberían ser las normas establecidas explícita e implícitamente en el aula: ¿en qué consiste y hacia dónde conduce el contrato didáctico que se pacta con los estudiantes?

En segundo lugar, puede observarse que aún queda mucho trabajo por hacer y material a analizar en lo que hace al comportamiento de los docentes en cuanto a la toma de conciencia de la poderosa herramienta que se tiene cuando se trabaja con problemas de Lugares Geométricos en el aula. En este sentido, se puede comenzar por analizar el tratamiento que tiene el tema durante el curso –a través de observación de clases, de entrevistas o del estudio del desarrollo de clase–, las evaluaciones propuestas y los resultados obtenidos. El trabajo realizado por Orrico para la Comisión de Transformación de la Educación Media Superior (2003) puede ser un buen punto de partida para seguir profundizando en esta dirección, no solamente por las conclusiones a las que llega sino también y en especial por las preguntas pendientes y líneas futuras de investigación que propone.

Algunas de las interrogantes que quedan por responder en lo que hace a este aspecto de la evaluación son las que propuse al principio de la investigación y no he dado respuesta en este trabajo, pero será interesante retomar:

- ¿Son los problemas de lugares geométricos adecuados para evaluar los procesos en torno a la demostración que los estudiantes ponen en práctica en Geometría?
- Saber resolver problemas de lugares geométricos, ¿es un indicador de logro adecuado para evaluar la capacidad de demostración?
- ¿Cómo crear pruebas relevantes y representativas para evaluar la capacidad de demostración en el aula?

En tercer lugar, cabe mencionar tres aspectos que no fueron analizados en este estudio por considerar que agregaría un grado de complejidad que excedería los objetivos del trabajo de tesis de Maestría. El primero de ellos es analizar cómo influye el trabajo en parejas o en equipo en el desarrollo del pensamiento deductivo de los estudiantes, en contraposición con un trabajo individual. Desde la concepción de la demostración y los procesos argumentativos en general como una práctica netamente social, que se construye en un contexto cultural determinado que le otorga un significado particular, es esa una variable que resulta ineludible investigar. Si bien en este estudio se optó por dejar de lado el análisis de dicha variable para permitir el estudio en profundidad de otras, pienso que puede ser el objetivo de una investigación futura. Mientras es un tema ya analizado a nivel mundial, en Uruguay aún no existen investigaciones o publicaciones al respecto.

Otra variable que se optó por no analizar en este trabajo y que puede resultar interesante en este contexto es el posible efecto de la introducción en el curso de

Geometría Métrica de la Geometría Dinámica como herramienta para abordar problemas y descubrir nuevos resultados. Como fue mencionado al explicar la experiencia, se dejó la libertad a los estudiantes de trabajar en computadoras o en lápiz y papel, por lo que puede ser interesante volver a aplicar una actividad a estudiantes para comparar los resultados obtenidos con y sin la utilización de programas de GD.

El tercero de los aspectos que creo que sería interesante analizar es el tratamiento del tema en los libros de texto –ya sean uruguayos como extranjeros– que actualmente se utilizan en el curso de Geometría Métrica de segundo año de EMS en Uruguay. Hay mucho por estudiar al respecto, ya que la experiencia de la práctica educativa concreta propia y de otros docentes conduce a pensar que es poco común que se pida a les estudiantes que tengan al libro de texto como referencia en este tema. ¿Por qué es así? ¿Es necesario incluir un nuevo tratamiento del tema en los libros de texto? ¿Qué tipo de tratamiento? ¿Los profesores efectivamente lo utilizarían, o seguirían con sus prácticas habituales?

Por último, sería interesante dejar planteado un cuestionamiento de corte más teórico, y es el referido a la vinculación del tratamiento del tema Lugares Geométricos en un curso de Geometría Métrica con la teoría del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional a la cual hice referencia en el apartado ‘c’ de este capítulo. ¿Se puede considerar a este tema como un antecedente para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en nuestros alumnos? Para llevar a cabo esta investigación sería necesario elaborar una investigación de corte socioepistemológico específica que sea compatible con las realizadas en el área del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Esa investigación puede conducir a la elaboración de situaciones didácticas que vinculen uno y otro tema, su puesta en práctica y su evaluación para el análisis de producciones.

Referencias bibliográficas //utilizar formato de APA en todas las referencias//

- A.N.E.P. Consejo de Educación Secundaria (1941). *Programa para Matemática. 4º año*. Montevideo, Uruguay.
- A.N.E.P. Consejo de Educación Secundaria (1942). *Programa de Geometría, primer curso opción Ingeniería*. Montevideo, Uruguay.
- A.N.E.P. Consejo de Educación Secundaria (1985). *Programa para Matemática "B". 2º año del Segundo Ciclo, orientación Científica*. Montevideo, Uruguay.
- A.N.E.P. Consejo de Educación Secundaria (1989). *Programa para Matemática. Primer año de Bachillerato Diversificado*. Montevideo, Uruguay.
- A.N.E.P. Consejo de Educación Secundaria. Inspección en Matemática (2001). *Experiencia en cursos de Matemática 2º año Bachillerato Diversificado*. Montevideo, Uruguay.
- A.N.E.P. Consejo Directivo Central (1997). *La Reforma de la Educación. El Currículum Experimental en el Plan Piloto del Ciclo Básico.* Documento VII. Montevideo, Uruguay.
- Alsina, C; Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Balacheff, N (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collage. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 3, nº3, pp.261-304.
- Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, pp. 216-235. London, U. K.: Hodder & Stoughton.
- Balacheff, N. y Laborde, C. (1988). Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo. En *Psicología social del desarrollo cognitivo*. Editado por G. Mugny y J.A. Pérez, Barcelona: Editorial Antroupos.
- Cantoral, R. (1995). Matemática, Matemática Escolar y Matemática Educativa. *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de*

Profesores e Investigación en Matemática Educativa. R. Farfán (Ed.) Ministerio de Educación de Cuba. Vol. 1, 1 – 10. La Habana, Cuba.

- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En *Epsilon*. Sociedad Thales, España. Núm. 42, Vol. 14(3), 353 – 369.
- Cantoral, R, y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. En *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 6 (1), 27 – 40.
- Carr, W. (1990). *Hacia una ciencia crítica de la Educación.* Barcelona, España: Editorial Laertes [con introducción de S. Kemmis]
- Comisión de Transformación de la Educación Media Superior (T.E.M.S.) (2002). *Propuesta de diseño curricular para Educación Media Superior.* Montevideo, Uruguay.
- Comisión de Transformación de la Educación Media Superior (T.E.M.S.) (2003). *Cuaderno de trabajo Nº 21. La Evaluación en Matemática en Bachillerato desde la perspectiva de los estudiantes.* Documento redactado por V. Orrico. Montevideo, Uruguay
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. En *Epsilon*, 26, pp. 15 – 30.
- De Villiers, M. (2003). *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*. USA: Key Curriculum Press.
- Del Río, J. (1994). *Lugares Geométricos. Cónicas*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Duval (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Ibeoroamericana.
- Eco, Umberto. (2000) Cap. 1: Qué es una tesis doctoral y para qué sirve. En *Cómo se hace una tesis*. México: Gedisa, p.18-26.
- Fernández Pérez, Miguel (1995). Cap. 2.3: La decisión estratégica y Cap. 4: Investigación en el aula. En *La profesionalización del docente*. España: Siglo Veintiuno Editores, p. 21-43 y 118-140.

- Fernández Val, W. (2000). *Geometría Métrica. Plano y Espacio*. Montevideo, Uruguay: Ed. Tradinco.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24(2), 139 – 162.
- Hanna, G. & Jahnke, N. (1996) Chapter23: Proof and Proving. En Bishop et al. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands.
- Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: an overview. En *Educational Studies in Mathematics 44: 5 - 23*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, Vol. 91, nº 8, noviembre, pp.670-675.
- Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid, España: Editorial Euler.
- Rama, G. (1992). *¿Aprenden los Estudiantes? El Ciclo Básico de Educación Media*. Montevideo, Uruguay: Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), Oficina de Montevideo.
- Valdez C., E. (1996). La actualización de los maestros de primaria en educación matemática. En *Revista de Investigación en la escuela*, No. 29. Sevilla: Díada, p. 89-96.