CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA
AVANZADA. UNIDAD LEGARIA

Significados del signo de igual en la *entrada al álgebra*: un estudio de casos con estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:

Sebastián Parodi Escobal

Directores de Tesis:

Dra. Cristina Ochoviet
Dr. Javier Lezama

México, Distrito Federal Junio de 2016

Autorización de uso de obra

Instituto Politécnico Nacional

Presente

Bajo protesta de decir verdad el que suscribe *Sebastián Parodi Escobal*, manifiesto ser autor y titular de los derechos morales y patrimoniales de la obra titulada: Significados del signo de igual en la *entrada al álgebra*: un estudio de casos con estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria, en adelante "La Tesis" y de la cual se adjunta copia, por lo que por medio del presente y con fundamento en el artículo 27 fracción II, inciso b) de la Ley Federal del Derecho de Autor, otorgo a el Instituto Politécnico Nacional, en adelante El IPN, autorización no exclusiva para comunicar y exhibir públicamente total o parcialmente en medios digitales (formato electrónico en formato PDF) "La Tesis" por un periodo de 10 años contado a partir de la fecha de la presente autorización, dicho periodo se renovará automáticamente en caso de no dar aviso a "El IPN" de su terminación.

En virtud de lo anterior, "El IPN" deberá reconocer en todo momento mi calidad de autor de "La Tesis".

Adicionalmente, y en mi calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales de "La Tesis", manifiesto que la misma es original y que la presente autorización no contraviene ninguna otorgada por el suscrito respecto de "La Tesis", por lo que deslindo de toda responsabilidad a El IPN en caso de que el contenido de "La Tesis" o la autorización concedida afecte o viole derechos autorales, industriales, secretos industriales, convenios o contratos de confidencialidad o en general cualquier derecho de propiedad intelectual de terceros y asumo las consecuencias legales y económicas de cualquier demanda o reclamación que puedan derivarse del caso.

México, D.F., a 31 de mayo de 2016

Atentamente

Sebastián Parodi

SIP-14-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12 horas del día 31 del mes de Mayo del 2016 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA_U Legaria para examinar la tesis titulada:

Significados del signo de igual en la entrada al álgebra: un estudio de casos con estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria

Presentada por el alumno:

Parodi	**Escobal**
Apellido paterno	Apellido materno

Nombre(s) **Sebastián**

Con registro: | B | 1 | 4 | 0 | 7 | 8 | 0 |

aspirante de: Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dra. Cristina Ochoviet

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Alejandro Rosas Mendoza

Dr. Mario Sánchez Aguilar

Dr. Daniel Sánchez Guzmán

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

SEP
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA
CICATA - LEGARIA

Dra. Mónica Rosalía Jaime Fonseca

AGRADECIMIENTOS

A la Dra. Cristina Ochoviet

Por su disponibilidad, exigencia y motivación, a lo largo de todo el recorrido.

Al Dr. Javier Lezama

Por sus aportes, y por depositar su confianza en mi proyecto.

A la Dra. Gabriela Buendía, Dr. Mario Sánchez y Dr. Alejandro Rosas

Por revisar el trabajo y enriquecerlo con sus comentarios.

A mis compañeros de maestría

Por compartir juntos esta experiencia.

A los estudiantes que participaron del estudio

Por haberlo hecho de forma desinteresada.

A mis compañeros de trabajo

Por su interés y colaboración, a lo largo del trayecto.

Y a mi familia

Muy especialmente, por su amor incondicional.

INDICE

RELACIÓN DE CUADROS Y TABLAS

Relación de cuadros

Relación de tablas

RESUMEN

En este trabajo nos proponemos indagar qué significados le atribuyen al signo de *igual*, en un contexto algebraico, un grupo de estudiantes que está terminando de cursar el segundo año del Ciclo Básico de Enseñanza Secundaria (13-14 años), en un liceo de la ciudad de Montevideo. Para ello, decidimos llevar a cabo un estudio de casos en *primera persona* (Ball, 2000), que incluyó la aplicación de un cuestionario, la realización de una serie de entrevistas, y el desarrollo de dos sesiones de trabajo con el grupo, las cuales fueron audio-grabadas.

Los resultados ponen de manifiesto la existencia de una relación dialéctica entre la comprensión del signo de *igual* y el trabajo con este signo en contexto algebraico, en el sentido de que la comprensión *relacional* del signo de *igual* no es algo que antecede el estudio de las ecuaciones y el álgebra lineal, sino que, por el contrario, el estudio del álgebra fortalece esta comprensión y su funcionamiento en los diferentes contextos.

Encontramos que el diseño de actividades de clasificación y de comparación (Zaslavsky, 2008), junto a la jerarquización de la conversación en clase de matemática (Szydlik, 2015), permitieron abordar aspectos conceptuales relacionados con los usos y significados del signo de *igual,* despertando el interés de los estudiantes y generando genuinas discusiones que contribuyeron a la comprensión *relacional* del signo de *igual*.

Sugerimos a los docentes implementar propuestas de enseñanza que atiendan específicamente esta temática, haciendo de la conversación en contexto escolar una herramienta que permita profundizar en la manera en que piensan los estudiantes, quienes a su vez, podrán reconocer las fortalezas y debilidades de sus propias interpretaciones.

ABSTRACT

This research aims at investigating what meanings do students give to the *equal* sign in an algebra context. The students are about to complete their second year (ages 13-14) in a high-school from Montevideo. To achieve this aim we carried a study of cases in the *first person* (Ball, 2000) that involving setting a questionnaire, interviewing and doing two working sessions with the group. Those sessions were recorded.

The results show the existence of a dialectic relationship between the understanding of the *equal* sign and the work with it within the algebra context, in the sense that the *relational* understanding of the *equal* sign does not happen before the study of equations and the lineal algebra on the contrary, the study of algebra empowers this understanding and functioning within the different contexts.

We found out that the design of classification and comparison activities (Zaslavsky, 2008) together with prioritizing conversing about Math in the classroom (Szydlik, 2015) allowed to understand concepts related to the uses and meanings of the *equal* sign. This awoke the students' interest and generated genuine discussions that contribute to the understanding of the relational feature of the *equal* sign.

We suggest teachers to put into practise teaching proposals that cater for this theme. Take advantage of conversation and make it a tool that allows to go deeper the ways they think the students, who will be able to recognize their strengths and weaknesses of their own interpretations.

CAPÍTULO 1

Planteo de la problemática y noción de pensamiento algebraico

En este capítulo planteamos la problemática que nos proponemos abordar, y fundamentamos su elección. Asimismo, siguiendo a Radford (2011), presentamos la noción de pensamiento algebraico en la que se enmarca nuestra investigación.

1.1 Planteo de la problemática y fundamentación

En primer año de enseñanza secundaria los estudiantes profundizan el trabajo aritmético desarrollado durante toda la enseñanza primaria concentrándose, particularmente, en la ampliación de los conjuntos numéricos, sus operaciones y propiedades. Es al año siguiente, en segundo, cuando comienzan a trabajar con ecuaciones, expresiones algebraicas y funciones. Entonces, nos proponemos realizar un estudio de casos en segundo año de enseñanza secundaria para comprender de qué formas los estudiantes usan e interpretan el signo de *igual*, en su *entrada al álgebra*.

En nuestra experiencia como docentes, hemos identificado algunas dificultades que afrontan los estudiantes al iniciarse en el trabajo algebraico. Por ejemplo, hemos observado que cuando enseñamos a sumar polinomios, es habitual que luego de obtener el polinomio suma nos pregunten "¿y cuánto da?", pues no conciben que esa cadena de expresiones equivalentes no conduzca a un resultado con un solo término. En otras palabras, el signo de *igual* no estaría siendo interpretado como un indicador de equivalencia entre los polinomios sumandos y el polinomio suma obtenido. Asimismo, el objeto polinomio con más de un término no parecería ser aceptado como resultado de esa operación.

Cuando enseñamos a resolver ecuaciones, en tanto, es habitual que los estudiantes resuelvan mentalmente ecuaciones como $4x + 12 = 20$, y sin embargo, presenten dificultades para resolver ecuaciones como $20 = 4x + 12$, aunque la única diferencia radique en la ubicación de la variable respecto al signo de *igual*. Esto podría deberse a que los estudiantes están habituados a utilizar el signo de *igual* como indicador de que debe realizarse una operación en la que, por ejemplo, los dos sumandos se escriben del lado izquierdo del signo de *igual*, y el resultado del lado derecho.

Cuando les solicitamos a los estudiantes que escriban una ecuación cuya solución sea un número dado, a menudo asocian ese número con el que podría figurar en el segundo miembro. Por ejemplo, al pedirles que escriban una ecuación con solución 2, presentan ecuaciones como $x + 5 = 2$ o $4x = 2$. Del mismo modo, cuando *verificamos* que cierto número es solución de una ecuación y preguntamos si otro número dado también lo es, algunos estudiantes modifican términos de la ecuación inicial para responder en forma afirmativa. Por ejemplo, observamos que luego de *verificar* que 74 es solución de la ecuación $x - 45 = 29$, y preguntar si 75 también lo es, un estudiante puede cambiar el 45 por un 46 para que al sustituir la variable por 75 el resultado siga siendo 29. En otras palabras, pretende que el segundo miembro quede constante, y por ello modifica términos del primer miembro en lugar de descartar al 75 como solución de la ecuación. Estos estudiantes dejan al descubierto una comprensión limitada de las ecuaciones y el concepto de solución, que podría estar relacionada con la forma en que se comprende el signo de *igual*. En este caso, al igual que en los anteriores, como el indicador de que debe realizarse una operación: operar lo que está del lado izquierdo para obtener lo que está del lado derecho.

También hemos observado que en algunas ocasiones, frente a una ecuación, los estudiantes no descartan la solución hallada, aunque para dicho valor no se obtengan dos expresiones equivalentes de un mismo número. Por ejemplo, al resolver la ecuación $2x - 3 = x + 5$, un estudiante puede equivocarse al trasponer términos, llegar a que $2x - x = 5 - 3$, y suponer que la solución es 2. Luego, *verificar* que para ese valor, $1 = 7$, y sin embargo, seguir sosteniendo que 2 es la solución de la ecuación. Nos preguntamos qué rol cumple el signo de *igual* en el pensamiento algebraico de este estudiante, y de qué forma comprende a dicho símbolo en el contexto de resolución de una ecuación.

Entendemos que los ejemplos anteriormente reseñados, podrían estar vinculados con la tendencia de los estudiantes a interpretar el signo de *igual* en su carácter de *operador*, esto es, para anunciar el resultado de una operación, en sentido unidireccional, en lugar de interpretarlo como el indicador de una relación de equivalencia, en sentido bidireccional. Estas visiones corresponden respectivamente a lo que Behr, Erlwanger y Nichols (1976) llaman comprensión *operacional* o comprensión *relacional* del signo de *igual*, respectivamente.

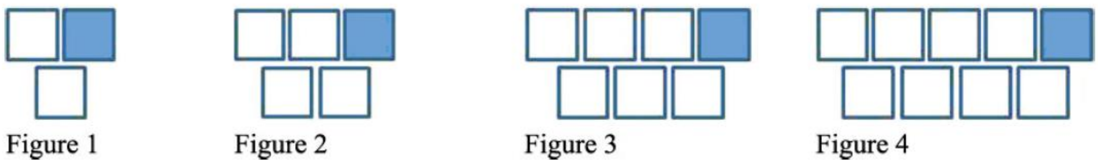
Varios estudios reportan dificultades de los estudiantes en el álgebra relacionados con la comprensión del signo de *igual*. Kieran (1981) sostiene que aquellos estudiantes que mantengan una visión *operacional* podrán encontrarle sentido a ecuaciones como $3x + 5 = 26$, pero no así a ecuaciones como $3x + 5 = 2x + 12$. Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2011), en tanto, encuentran que aquellos estudiantes de enseñanza secundaria (6º, 7º y 8º grado) que poseen una comprensión *relacional* del signo de *igual* muestran más éxito al resolver ecuaciones algebraicas que aquellos que no tienen tal comprensión. Burgell (2012), en tanto, realiza un estudio con estudiantes y profesores de primer año de enseñanza secundaria de Uruguay, cuyos resultados muestran que, en un contexto aritmético, los alumnos evidencian una visión predominantemente *operacional* del signo de *igual*, y que los profesores no le brindan al tema especial atención.

Respecto de lo aportado por Burgell (2012) pretendemos avanzar un año más en el nivel escolar, trabajando con estudiantes diferentes pero insertos en el mismo sistema escolar que los de ese trabajo. Los alumnos con los que trabajaremos, ya estudiaron ecuaciones, operaciones con polinomios y funciones, los de Burgell (2012) todavía no lo habían hecho. Nos preguntamos, entonces, ¿qué tanto avanzan los estudiantes de segundo año en la comprensión del signo de *igual*, luego de incursionar en el estudio de las ecuaciones, los polinomios y las funciones? ¿Qué dificultades genera una comprensión *operacional* del signo de *igual*, cuando estos alumnos trabajan en contexto algebraico? ¿Cómo favorecer una comprensión *relacional* del signo de *igual*, que contribuya a superar esas dificultades? Tales cuestiones son las que nos motivan, como docentes e investigadores, a emprender este trabajo.

1.2 La noción de pensamiento algebraico

El presente trabajo se inscribe en la noción de pensamiento algebraico introducida por Radford (2011). Este autor señala que, según MacGregor y Stacey (1992), los nuevos planes y programas curriculares recomiendan abordar algunas nociones algebraicas básicas en los primeros niveles de enseñanza primaria, siendo la generalización de patrones una práctica muy usada en estos niveles para introducir a los estudiantes en el aprendizaje del álgebra. El autor concuerda con Carraher (2006) en que, pese a las evidencias empíricas y los enfoques teóricos de la investigación reciente en álgebra temprana, poco se sabe en relación a la capacidad de realizar generalizaciones y emplear la notación algebraica, de parte de los estudiantes más pequeños. Asimismo agrega, que no existe una clara distinción entre el pensamiento algebraico y el pensamiento aritmético, ni una sólida postura en cuanto a la relación que existe entre ambos tipos de pensamiento. Radford realiza un estudio con estudiantes de 7-8 años para explorar y reflexionar sobre el posible carácter algebraico de los tipos de pensamientos generados por estos, al resolver una actividad que implica la generalización de patrones.

Radford analiza las estrategias que desarrollan los estudiantes para identificar el patrón de una secuencia de la que se conocen sus primeros términos, los cuales se muestran en el cuadro 1, y cómo utilizan este patrón para obtener los primeros términos que le siguen.



Cuadro 1. Primeros cuatro términos de una secuencia presentada a un grupo de estudiantes de 7-8 años (Radford, 2011, p. 305)

Los resultados del estudio muestran que, para representar el quinto y sexto término de la secuencia, los estudiantes recurren a nociones espaciales y numéricas. Estas nociones, agrega, les permiten a los estudiantes identificar la regularidad y deducir dónde y cuántos cuadrados representar en cada caso, sin que ello implique la presencia de un tipo de pensamiento algebraico. El autor sostiene que la capacidad cognitiva de reconocer un atributo en común en un grupo de objetos, tiene que ver con procesos más amplios relacionados con la formación de conceptos, y que no son exclusivos de la especie humana (por ejemplo, los chimpancés pueden distinguir entre objetos comestibles y objetos no comestibles). El autor insiste en que la generalización no es un proceso específico del álgebra, y que consiste en un rasgo de naturaleza diversa propio de la cognición humana y animal.

Según Radford, los resultados del estudio muestran que los primeros indicios de pensamiento algebraico quedan de manifiesto cuando el conocimiento aritmético del que disponen los estudiantes, no es suficiente para obtener ciertos términos de una sucesión (por ejemplo, el término 25 de la sucesión anterior). El autor destaca que el uso de la calculadora es importante en este proceso, no solo como medio para obtener las respuestas numéricas, sino además, como marco conceptual para deducir la regla de cálculo que conduce a dichas respuestas. Para Radford, eso coincide con que históricamente, en el Renacimiento, la consolidación del álgebra y los primeros intentos de construir las primeras máquinas de calcular se diera en forma simultánea. El autor profundiza en la noción de pensamiento algebraico, y en lo que distingue al pensamiento algebraico del pensamiento aritmético. Sostiene que un pensamiento algebraico tiene que ver con ciertas formas en que se manipulan las cantidades desconocidas, como ser las incógnitas o las variables. El siguiente fragmento, tomado de Radford (2011), sintetiza las principales ideas del autor en relación a este asunto:

> El pensamiento algebraico no tiene que ver con usar notación, sino con razonar de determinadas maneras. Lo que implica pensar en forma algebraica es que hay que manejar las cantidades indeterminadas de formas analíticas. En breves palabras, usted considera las cantidades indeterminadas (las incógnitas o las variables) como si fueran conocidas, y realiza cálculos con ellas como si fueran números conocidos. En este sentido los matemáticos del siglo XVI como Viete y Cardano entendieron el rasgo distintivo del algebra y lo utilizaron para llamarlo un arte analítico. (p. 310).

Radford también señala que existen diferentes maneras de pensar y expresar la cantidad indeterminada, sin la necesidad de emplear los signos alfanuméricos propios del simbolismo algebraico moderno. A nivel histórico, compara, los escribas babilonios usaban nombres contextuales dependiendo de cada problema (por ejemplo, "lado de un rectángulo", "peso de una piedra"), mientras que los matemáticos medievales y renacentistas empleaban un término genérico denominado "la cosa". En el estudio de Radford, los estudiantes de 7-8 años expresan la indeterminación a través de una fórmula evaluada para valores concretos de la variable (por ejemplo, "12 más 12, más 1", "25 más 25, más 1"). Aquí los estudiantes siguen empleando números, pero interpretándolos de una forma más general, en donde lo primordial no son los resultados, sino el camino que conduce a esos resultados. Es lo que Radford describe como nivel básico de generalidad o nivel más elemental de pensamiento algebraico, también denominado, pensamiento algebraico fáctico. Asimismo, cuando los estudiantes hacen frente a la indeterminación y a la analiticidad de una manera más explícita, en el que el significado de las fórmulas algebraicas está relacionado con nociones espaciales o de otro tipo contextual, se trata de un tipo de pensamiento algebraico más sofisticado que Radford denomina pensamiento algebraico contextual.

El autor sostiene que los estudiantes no desarrollan un tipo de pensamiento algebraico en forma natural, como consecuencia de su maduración cognitiva. Por el contrario, es necesario presentarles ciertas actividades que den lugar a la emergencia y desarrollo de este tipo de pensamiento. Asimismo, que un pensamiento algebraico es un tipo de reflexión cultural muy sofisticado, una forma de pensar que se refina una y otra vez a través de los siglos, antes de llegar a su forma actual, razón por la cual su adquisición implica una serie de obstáculos difíciles de superar.

Desde esta perspectiva, entendemos que nuestro trabajo de indagación se enmarca en el *pensamiento algebraico*, es decir, que los estudiantes que participan del mismo pondrán en juego su propio *pensamiento algebraico*. Esto, porque muchas de las actividades que les propondremos, tendrán que ver con ecuaciones y operaciones con polinomios, contextos en los que resulta imprescindible interpretar a las variables como si fueran cantidades conocidas, y operar con ellas del mismo modo en que se opera con los números (Radford, 2011). Incluso en otros contextos, en que las cantidades desconocidas no se representen con una letra, podrá emerger un *pensamiento algebraico* en el sentido ya señalado, en la medida en que los estudiantes operen con esas cantidades del mismo modo en que se opera con los números. Más adelante, frente a las actividades ya diseñadas, podremos profundizar en estas consideraciones.

CAPÍTULO 2

Revisión bibliográfica y formulación de objetivos

En este capítulo reseñamos un conjunto de trabajos que están relacionados con la problemática de estudio que presentamos en el capítulo anterior, ya sea por las conclusiones a las que arriban o por los elementos que aportan para la reflexión. Asimismo, ubicamos este trabajo a la luz de la revisión bibliográfica realizada, desembocando en la formulación de objetivos y preguntas que guiarán el desarrollo de nuestra investigación.

2.1 Revisión bibliográfica

Sánchez y Molina (2012) señalan que una revisión bibliográfica es un componente fundamental de toda investigación en didáctica de las matemáticas, y que define en gran medida la calidad de una investigación educativa. Asimismo, estos autores presentan un método para realizar una revisión bibliográfica basada en el uso de internet, que responde a tres cuestiones: ¿qué buscar?, ¿dónde buscar? y ¿cómo buscar?

2.1.1 ¿Qué buscamos? ¿Dónde buscamos? ¿Cómo buscamos?

En relación a qué buscamos, primero revisamos trabajos de investigación que trataran sobre la comprensión del signo de *igual* en estudiantes de cualquier nivel educativo, ya sea en contexto aritmético o en contexto algebraico (20 artículos, aproximadamente). También rastreamos algunos artículos que trataran sobre la comprensión del concepto de variable y/o la comprensión del concepto de ecuación (10 artículos, aproximadamente), así como también, reportes que trataran sobre el conocimiento del profesor en relación a estos objetos matemáticos (5 artículos, aproximadamente). En una segunda etapa, nos enfocamos en la búsqueda de reportes que trataran sobre la comprensión del signo en estudiantes de enseñanza secundaria, y únicamente en contexto algebraico.

En relación a dónde buscamos, utilizamos el *Portal Timbó*, que desde Uruguay permite el acceso gratuito a múltiples revistas de divulgación científica (por ejemplo, *Springer* y *Jstor*). También revisamos memorias de congresos (por ejemplo, los ICME más recientes), y todos los documentos que fueran sugeridos por nuestros directores de tesis. En menor proporción, utilizamos el motor de búsqueda *Google Académico*, y nos contactamos vía email con investigadores referentes a nivel mundial (por ejemplo, con Kieran).

En relación a cómo buscamos, utilizamos un conjunto de palabras clave para desarrollar la búsqueda: signo de igual, variable, ecuación, pensamiento algebraico y enseñanza secundaria, entre otras. Asimismo, procuramos que la antigüedad de los trabajos revisados no excediera los veinte años, a menos que su relación con la temática abordada lo transformara en una fuente de consulta ineludible. De la revisión realizada se desprenden cuatro líneas temáticas:

- Aportes teóricos para interpretar el desarrollo del pensamiento algebraico.
- Interpretaciones de los estudiantes sobre los significados del signo de *igual*, en un contexto aritmético.
- Interpretaciones de los estudiantes sobre los significados del signo de *igual*, en un contexto algebraico.
- Posibles estrategias para favorecer la comprensión del signo de *igual* y el aprendizaje del álgebra.

A partir de lo anterior, organizamos la revisión bibliográfica en las siguientes dos secciones, dejando los aportes teóricos y las posibles estrategias de enseñanza para presentar en forma transversal a lo largo de toda la revisión:

- Sobre las interpretaciones de los estudiantes respecto a los usos y significados del signo de *igual*, en un contexto aritmético.

- Sobre las interpretaciones de los estudiantes respecto a los usos y significados del signo de *igual*, en un contexto algebraico.

Reportamos los diferentes resultados en orden cronológico para que pueda observarse la evolución de la problemática analizada. La revisión bibliográfica culmina con una síntesis que recoge los aspectos más relevantes de los diversos trabajos incluidos en ella.

2.1.2 Sobre las interpretaciones de los estudiantes respecto a los usos y significados del signo de igual, en un contexto aritmético.

A continuación reportamos los trabajos de Kieran (1981); Molina, Castro y Ambrose (2006); Matthews, Rittle-Johnson, McEldoon y Taylor (2012) y Burgell (2012).

Kieran (1981) destaca algunos estudios que refieren a las interpretaciones del signo de *igual* en alumnos de enseñanza primaria (Ginsburg, 1977; Collins, 1974 y Denmark, 1976).

La autora señala que, según Ginsburg, muchos de los alumnos que ingresan a la escuela primaria son capaces de aprender a leer y a escribir el simbolismo básico de la aritmética elemental, pero interpretando a los signos "+" e "=" como acciones a realizar. En otras palabras, estos alumnos perciben al signo de *igual* como un *operador* más, como una señal de hacer algo, en vez de interpretarlo en términos de equivalencia, como un indicador de una relación que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Eso implica que los estudiantes no se familiaricen con expresiones que no reflejen el orden en que habitualmente realizan los cálculos (por ejemplo, $\_\_\_ = 3 + 4$), y que no le atribuyan significado a expresiones que no incluyan operaciones (por ejemplo, $3 = 3$).

Kieran agrega que, en un estudio realizado por Collins, estudiantes de entre 6 y 10 años presentaron dificultades para interpretar *igualdad*es con operaciones a ambos lados del signo de *igual* (por ejemplo, $4 + 5 = 3 + 6$), pues necesitaron ver, literalmente, un único número a la derecha del signo de *igual*. En tanto Denmark, continúa Kieran, a pesar de haber promovido un trabajo con *igualdad*es numéricas basado en situaciones de equilibrio, estudiantes de primer año de enseñanza primaria continuaron interpretando el signo de *igual* como un *operador* más que como una relación de equivalencia.

La autora sostiene que en el entorno de los 13 años muchos estudiantes se encuentran en un período de transición, entre la necesidad de tener una "respuesta" luego del signo de *igual* y la aceptación del signo de *igual* como un símbolo de equivalencia. Pone como ejemplo un caso reportado en Vergnaud (1979), en el que, para resolver el problema "En un bosque se plantaron 425 árboles nuevos. Unos años más tarde, se cortaron 217, y quedaron 1.063. ¿Cuántos árboles había inicialmente?", los estudiantes llegan a escribir que $1063 + 217 = 1280 - 425 = 1063$.

Molina, Castro y Ambrose (2006) investigan la comprensión del signo de *igual* en estudiantes de tercer año de enseñanza primaria, y la emergencia y desarrollo de pensamiento *relacional*. Durante cinco sesiones distribuidas a lo largo de un año lectivo, proponen un trabajo basado en *igualdad*es numéricas abiertas para completar (por ejemplo, $8 + 4 = \_\_ + 5$) y cerradas para analizar (por ejemplo, $8 + 4 = 7 + 5$). En la primera sesión, realizan un diagnóstico de la comprensión inicial de los estudiantes sobre el signo de *igual* y posibles indicios de pensamiento *relacional*. En las tres siguientes, favorecen la comprensión del signo de *igual* y el desarrollo de pensamiento *relacional*. En la última sesión, evalúan la persistencia de la comprensión del signo de *igual* y el desarrollo de pensamiento *relacional* mostrado por los estudiantes en las instancias anteriores.

Las autoras señalan que los alumnos necesitaron trabajar con *igualdad*es numéricas de diversas formas para modificar su interpretación *operacional* del signo de *igual* e ir construyendo comprensión *relacional*. Eso les lleva a afirmar que el significado del signo de *igual*, en el contexto de las *igualdad*es numéricas, no es un conocimiento intuitivo para los alumnos ni es adquirido directamente por la intervención del docente. Además, entienden que las dificultades observadas son el resultado de la reiterada consideración de *igualdad*es con las operaciones en el lado izquierdo y el resultado en el lado derecho, y del énfasis que habitualmente se le atribuye a la obtención de una respuesta en la enseñanza de la aritmética.

Molina et al. sostienen que el análisis de *igualdad*es numéricas cerradas resultó ser un contexto eficaz para que los estudiantes desarrollaran su comprensión del signo *igual*, y en menor medida, desarrollaran pensamiento *relacional*. Ellas agregan que el desarrollo de este tipo de pensamiento favorece que las expresiones (aritméticas o algebraicas) puedan concebirse como entidades en sí mismas, sin la necesidad de que aparezca expresado el resultado o valor de cada una de ellas, siendo este un aspecto a tener en cuenta en la formación pre-algebraica de los estudiantes.

Matthews et al. (2012) diseñan un instrumento para explorar la comprensión del signo de *igual* en estudiantes de enseñanza primaria (2º a 6º grado), estableciendo para ello cuatro niveles de comprensión del signo de *igual*:

- En el nivel 1, *operativo estricto*, los estudiantes resuelven con éxito *igualdad*es numéricas que incluyen operaciones al lado izquierdo del signo de *igual*, y el resultado al lado derecho.

- En el nivel 2, *operativo flexible*, los estudiantes resuelven *igualdad*es numéricas que incluyen el resultado al lado izquierdo del signo de *igual*, y las operaciones al lado derecho. Persiste una visión *operacional* del signo de *igual*, pues, las *igualdad*es $c = a + b$ en ocasiones son reescritas como $a + b = c$.

- En el Nivel 3, *relacional básico*, los estudiantes muestran una visión *relacional* del signo de *igual* que coexiste con una visión *operacional*. Resuelven *igualdad*es numéricas que incluyen operaciones a ambos lados del signo de *igual*.

- En el nivel 4, *relacional comparativo*, los estudiantes resuelven *igualdad*es numéricas mediante la comparación de las expresiones que figuran a cada lado del signo *igual*, aplicando estrategias compensatorias y reconociendo las transformaciones que conservan la *igualdad*.

Los autores sostienen que si bien es ampliamente aceptado que una comprensión *relacional* del signo de *igual* favorece el aprendizaje del álgebra, no se han realizado demasiados trabajos que justifiquen, desde un punto de vista empírico, esa afirmación. En ese sentido, señalan que aquellos estudiantes que en su estudio, evidenciaron una comprensión más avanzada del signo de *igual*, obtuvieron más éxito al resolver *igualdad*es que incluían letras (por ejemplo, $c + c + 4 = 16$), y se desempeñaron mejor en tareas que requerían desarrollar pensamiento *relacional* (por ejemplo, sabiendo que $76 + 45 = 121$, indicar si es verdadero o falso que $76 + 45 - 9 = 121 - 9$). Matthews et al. concluyen, a partir de los resultados obtenidos en su estudio, que una sólida comprensión del signo de *igual* en la enseñanza primaria puede favorecer el aprendizaje del álgebra en la enseñanza secundaria.

Burgell (2012) realiza un estudio de casos con alumnos de primer año de enseñanza secundaria de Uruguay (12-13 años), cuyos resultados muestran que una parte importante de los alumnos interpretan el signo de *igual* de forma *operacional*, como el indicador del resultado de una operación, y no de forma *relacional*, como el indicador de una relación de equivalencia. Eso representa un problema, agrega Burgell citando a MacGregor y Stacey (1999), porque dicha interpretación resulta imprescindible para el abordaje del álgebra, donde no hay una "pregunta" de un lado y una "respuesta" del otro lado del signo de *igual*, sino una relación de equivalencia entre ambos lados.

Burgell señala que en concordancia con McNeil y Alibali (2005), las interpretaciones *relacional*es del signo de *igual* se vieron favorecidas cuando se presentaron sentencias con operaciones a ambos lados del signo de *igual*. Asimismo, que una tercera parte de los estudiantes no aceptaron sentencias que incluían operaciones solamente del lado derecho y no lograron darle significado a sentencias que no incluían operaciones (por ejemplo, 17=17). Por otra parte, él indica que en su trabajo no se evidenciaron significados del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional* (ecuación) ni como *expresión de una relación funcional o de dependencia*, aunque aclara que el cuestionario no incluía preguntas que apuntaran directamente a estos significados. Del mismo modo, señala que el signo de *igual* fue utilizado como separador de etapas intermedias de un cálculo, pudiendo deberse al énfasis que habitualmente le otorgan los estudiantes al resultado final de un cálculo (descuidando lo que se escribe en cada paso), o a la secuencia de teclas que hay que apretar en una calculadora común para realizar este tipo de operaciones.

Para el autor, los resultados también muestran que ni los docentes ni los libros de texto le brindan al tema una atención especial, transformando la problemática en un problema invisible y la *igualdad* en una noción transparente (Chevallard, Bosch y Gascón (1997). Frente a ello, Burgell sugiere a los docentes no presuponer que todos los alumnos interpretan el signo de *igual* en forma *relacional*, proponer actividades basadas en *igualdad*es y sentencias para completar (en contextos de operaciones del lado derecho, de operaciones a ambos lados y sin operaciones explícitas), y prestarle atención a las notaciones matemáticas habituales en las que se usa el signo de *igual*, en el entendido de que algunas de ellas puedan dificultar la comprensión de otros significados de este signo (por ejemplo, $a = \dot{b}$ en etapas tempranas de aprendizaje).

2.1.3 Sobre las interpretaciones de los estudiantes respecto a los usos y significados del signo de igual, en un contexto algebraico.

A continuación reportamos los trabajos de Kieran (1981); Rojano y Gallardo (1988); Sfard (1991); Kieran (1992); Sfard y Linchevski (1994); Herscovics y Linchevski (1994); Linchevski y Herscovics (1996); Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2011) y Godfrey y Thomas (2008).

Kieran (1981) describe una experiencia de enseñanza señalada en Herscovics y Kieran (1980) y en Kieran (1979 y 1980), para favorecer la interpretación de ecuaciones como $3x + 5 = 2x + 12$, en estudiantes de entre 12 y 14 años.

En primer lugar, se les pregunta a los estudiantes qué significados le atribuyen al signo de *igual* y se les solicita un ejemplo en el que utilicen dicho signo. La autora señala que la mayoría de los estudiantes describen el signo de *igual* en términos *operacional*es, mostrando ejemplos que implican una operación a la izquierda y un resultado a la derecha del signo de *igual*. En segundo lugar, se propone un trabajo con *igualdad*es numéricas en las que intervienen operaciones a ambos lados del signo de *igual*, para que los estudiantes amplíen sus ideas sobre el significado de este signo. Finalmente, se oculta uno de los números que aparecía en una de estas *igualdades*: primero con un dedo, luego sustituyéndolo por un recuadro y finalmente por una letra. Los estudiantes comienzan a construir ecuaciones algebraicas no triviales: por ejemplo, a partir de la *igualdad* $2 \text{ x } 3 + 7 = 5 \text{ x } 3 - 2$, construyen la ecuación $2 \text{ x } c + 7 = 5 \text{ x } c - 2$.

Para Kieran, la visión unidireccional del signo de *igual* mostrada inicialmente por los estudiantes es suficiente para interpretar ecuaciones como $3x + 5 = 26$, pero no así para interpretar ecuaciones como $3x + 5 = 2x + 12$. Los resultados del estudio muestran que es posible cambiar esa visión por otra en que las letras representan números, el signo de *igual* representa equivalencia en ambos lados, y el lado derecho puede consistir no sólo en expresiones numéricas, sino también en expresiones algebraicas.

La autora aclara que para lograr una adecuada conceptualización del proceso de resolución de una ecuación, además de comprender que su solución implica obtener expresiones equivalentes a ambos lados del signo de *igual*, es necesario comprender que cada ecuación puede ser sustituida por una ecuación equivalente, esto es, una ecuación que tenga el mismo conjunto solución. A propósito, ella señala que, según Byers y Herscovics (1977), estudiantes de bachillerato y de universidad muestran una pobre comprensión de esta doble noción de equivalencia, evidenciada por el uso que hacen del signo de *igual* al resolver una ecuación o al hallar la función derivada de una función dada, tal como se muestra en el cuadro 2:

Solve for x: $2x + 3 = 5 + x$

$$\begin{aligned} 2x+3-3 &= 5+x-3 \\ 2x &= 5+x-x-3 \\ 2x-x &= 5-3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

And: $x+3 = 7$

$$\begin{aligned} &= 7-3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+1} \\ &= (x^2+1)^{1/2} \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\, D_x(x^2+1) \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\,(2x) \\ &= x(x^2+1)^{-1/2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

(Clement, 1980, p. 7)

Cuadro 2. Evidencias que dan cuenta de los usos del signo de igual en contexto algebraico (Kieran, 1981, pp. 323-324)

Kieran sostiene que la naturaleza de estos errores es una cuestión abierta. Podrá argumentarse que estos alumnos interpretan el signo de *igual* como un indicador de una relación de equivalencia y que solo están tomando "atajos" en su forma de proceder, del mismo modo en que podrá afirmarse que el trabajo realizado por estos estudiantes sugiere una interpretación *operacional* del signo de *igual*, como una señal de hacer algo para obtener una respuesta, o incluso como un *separador* entre etapas de un cálculo solicitado. La autora concluye que la importancia del signo *igual* en el álgebra no puede ser sobrestimada en la enseñanza secundaria.

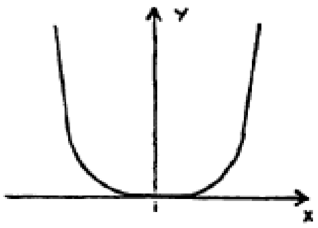
Rojano y Gallardo (1988) identifican y analizan fenómenos que tienen lugar en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, trabajando con estudiantes de 12 y 13 años. Ellas sostienen que en aritmética, el signo de *igual* se usa fundamentalmente para relacionar un proceso con el resultado de su ejecución, mientras que en álgebra se utiliza con carácter dual, esto es, como *operador* (carácter asimétrico) y como indicador de una equivalencia (carácter simétrico).

Se presentan ecuaciones que no requieren operar con la incógnita, pero en las que resulta necesario concebir a la *igualdad* como una equivalencia de expresiones (por ejemplo, $x + A = B + A$). Los resultados del estudio muestran que, cuando predomina una visión aritmética de la *igualdad*, los estudiantes interpretan los términos del miembro derecho como un solo número, mientras que, cuando predomina una visión dual de la *igualdad*, consideran cada miembro de la ecuación como un todo, desencadenándose una “lectura visual” de la misma. Según las autoras, cuando los estudiantes enfatizan la noción de *operador* pueden cometer errores al resolver ecuaciones. Por ejemplo, llegan a afirmar que las ecuaciones $3x + 154 = 475$ y $3x = 475 + 154$ son equivalentes, creyendo que es lo mismo sumar antes o después del signo de *igual*. En otras palabras, consideran que no importa dónde se realicen las operaciones, con tal que se ejecuten alguna vez. La preocupación por operar de inmediato, agregan las autoras, les conduce a ignorar el signo de *igual*. Es lo que ellas denominan *esquema de cuasi igualdad*.

También se presentan ecuaciones que requieren operar con la incógnita (por ejemplo, $8x + 30 = 5x + 9$). Los resultados obtenidos, según Rojano y Gallardo, dejan entrever la existencia y ubicación de un corte didáctico en la línea de evolución de la aritmética al álgebra, en vista de las dificultades mostradas por los estudiantes al resolver este tipo de ecuaciones. En la ecuación $x + 5 = x + x$, por ejemplo, estudiantes de buen rendimiento aseguran que una de las x que se encuentra en el segundo miembro vale 5 (la que está subrayada: $x + 5 = x + \underline{x}$), mientras que las dos restantes pueden tener cualquier valor (las que están subrayadas: $\underline{x} + 5 = \underline{x} + x$). Del mismo modo, un estudiante de bajo rendimiento le asigna el valor 1 a las x ubicadas en el segundo miembro de una ecuación, argumentando que x es incógnita solamente cuando se encuentra del "lado de las operaciones", en alusión al primer miembro de la ecuación. En el primer caso, los estudiantes interpretan a la x como incógnita y número generalizado al mismo tiempo, lo que las autoras denominan *polisemia de la incógnita*. En el segundo caso, mientras tanto, el estudiante busca mecanismos que le permitan interpretar las nuevas ecuaciones del mismo modo en que resolvía las anteriores, lo que las autoras denominan *regla del resultado aritmético*.

Sfard (1991) sostiene que en el álgebra escolar, al igual que en el desarrollo histórico, las nociones matemáticas abstractas pueden interpretarse de dos formas diferentes: primero en forma *operacional*, como procesos, y luego en forma estructural, como objetos. Interpretar una noción matemática como un objeto, dice Sfard, implica reconocer la idea a primera vista y ser capaz de manipularla como un todo. En cambio, agrega, una noción es interpretada como un proceso cuando es percibida como una consecuencia de una serie de acciones. Para esta autora, mientras que la concepción estructural es instantánea e integradora, la concepción *operacional* es dinámica y secuencial.

La autora destaca que la naturaleza dual de las nociones matemáticas puede percibirse no sólo a través de las descripciones verbales, sino también, a través de los diversos tipos de representación simbólica. Aunque dicha dualidad está ligada a la interpretación del lector más que a los símbolos en sí mismos, aclara, algunas representaciones pueden fomentar en mayor o menor medida una u otra interpretación. Por ejemplo, en relación al concepto de función, tienen lugar diferentes interpretaciones según la representación que se emplee en cada caso, tal como se muestra en el cuadro 3:

Graph	Algebraic expression	Computer program
	$y = 3x^4$	10 INPUT X 20 Y = 1 30 FOR I = 1 TO 4 40 Y = Y * X 50 NEXT I 60 Y = 3 * Y

Cuadro 3. Diferentes representaciones de una función (Sfard, 1991, p. 6)

El programa de computadora, dice Sfard, corresponde a una concepción *operacional* porque presenta a la función como un proceso computacional, y no como una entidad unificada. La representación gráfica, por su parte, fomenta un enfoque estructural porque combina numerosos aspectos de la función en una curva para que puedan ser captados en forma simultánea como un todo integrado. La representación algebraica, en tanto, puede ser interpretada en ambos sentidos: *operacional*mente, como una breve descripción de algún cálculo, o estructuralmente, como una relación estática entre dos magnitudes. La autora destaca que esta dualidad de interpretación corresponde al doble significado del signo de *igual*, que en el ejemplo señalado puede indicar una identidad o la ejecución de un conjunto de operaciones que están planteadas a su derecha.

Sfard concluye que para comprender el álgebra desde un punto de vista estructural, es necesario que los estudiantes realicen una serie de ajustes proceso—objeto. En particular, deben asumir que los objetos operados son expresiones algebraicas y no solamente números; y que las operaciones realizadas no son sumas, restas, multiplicaciones o divisiones, sino más bien, simplificaciones, factorizaciones o resoluciones de ecuaciones, entre otras.

Kieran (1992) sostiene que la comprensión del carácter simétrico y transitivo de la *igualdad* es uno de los requisitos primordiales para generalizar e interpretar adecuadamente las representaciones estructurales del álgebra, aunque en la enseñanza primaria se utilice el signo de *igual* en sentido unidireccional para anunciar un resultado, más que para expresar una relación simétrica y transitiva.

La autora reseña algunos estudios que reportan dificultades de los estudiantes para trabajar con términos literales y expresiones. Por ejemplo, señala que los estudiantes intentan convertir expresiones algebraicas en ecuaciones para obtener una representación que incluya un resultado. Es decir, no logran atribuirle significado a expresiones como $a + 3$, porque a la expresión le falta un signo de *igual* y un miembro del lado derecho (Kieran 1983). Kieran también destaca dificultades de los estudiantes para operar sobre una ecuación como un objeto, evidenciadas por no efectuar la misma operación a ambos lados y no interpretar el signo de *igual* como un símbolo de simetría. Ellos no asumen que la estrategia de transposición es una consecuencia del método de operar a ambos lados, y manifiestan problemas para entender las relaciones estructurales entre la adición y la substracción (por ejemplo, sostienen que las ecuaciones $x + 37 = 150$ y $x + 37 - 10 = 150 + 10$ tienen la misma solución). Asimismo, no reconocen que al sustituir la variable por una "solución" errónea no se obtiene una *igualdad* numérica. Kieran sugiere utilizar el método de prueba y error en etapas tempranas de aprendizaje, porque contribuye a superar esa última dificultad y proporciona una base para desarrollar métodos más estructurados de resolución de ecuaciones.

La autora señala que pocos estudios han dado pautas de cómo facilitar la transición de las concepciones procedimentales a las estructurales, pese a que ambas juegan un papel preponderante en la construcción de significados para los objetos algebraicos. Sugiere hacer un uso alternado de los dos niveles de concepción (aritmética y algebraica), explicitando las ventajas de poder escoger una u otra perspectiva dependiendo de cada caso. Concluye que encontrar vías para desarrollar las concepciones estructurales en los estudiantes debería ser una de las principales problemáticas a estudiar en futuras investigaciones.

Sfard y Linchevski (1994) describen episodios de una experiencia desarrollada con seis estudiantes de 12 y 13 años, a partir de los cuales analizan de qué formas se comprenden las expresiones algebraicas, el signo de *igual* y las ecuaciones. Señalan que la transición entre el álgebra *operacional* y el álgebra estructural está caracterizada por el uso de las letras como incógnitas.

En una de las entrevistas realizadas, los investigadores encuentran que un alumno es capaz de factorizar $3x - x$, y sin embargo no logra factorizar $kx - x$, porque no acepta la expresión $k - 1$ como factor de x. Los autores atribuyen esta situación a la dificultad de los estudiantes para interpretar expresiones algebraicas que no están seguidas de un signo de *igual* y un "resultado" del lado derecho, lo que les impide aceptar una expresión algebraica como respuesta a un problema dado. En otra de las entrevistas, Sfard y Linchevski encuentran que la interpretación unidireccional del signo de *igual* queda de manifiesto cuando los estudiantes resuelven exitosamente ecuaciones como $7x + 157 = 248$, y sin embargo se muestran desconcertados frente a ecuaciones como $112 = 12x + 47$. Cuando las expresiones algebraicas son interpretadas como procesos y no como objetos, agregan, el signo de *igual* es interpretado como una "señal de hacer algo" (Behr et al. 1976 y Kieran 1981), y no como un símbolo de equivalencia.

Los autores destacan que la perspectiva *operacional* del álgebra y del signo de *igual* también queda de manifiesto cuando los estudiantes resuelven ecuaciones del tipo $ax + b = c$ y presentan dificultades al resolver ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$. Para entender la estrategia de resolución de estas ecuaciones, aseguran, es necesario comprender que el signo de *igual* es un símbolo de equivalencia, y que los dos miembros de la ecuación son objetos, así como las expresiones con las que estos operan. Sfard y Linchevski describen dos episodios vinculados con lo anterior. En uno de ellos, un alumno interpreta la ecuación $15x + 12 = 8x + 47$ como dos ecuaciones (dos procesos). Él comprende que es necesario obtener una igualdad numérica pero supone que la incógnita puede tomar valores distintos a cada lado del signo de igual. El estudiante muestra una comprensión limitada del signo de *igual* que le impide interpretar la ecuación en forma apropiada. En otro de los episodios, al resolver la ecuación $15x = 8x + 35$, un alumno no comprende la necesidad de restar $8x$ a cada lado porque no interpreta la expresión $8x$ como un objeto, sino más bien como un proceso, y eso hace que no conciba la posibilidad de restar dos procesos entre sí.

Sfard y Linchevski concluyen que los episodios descritos muestran que para algunos estudiantes, las expresiones algebraicas no son más que simples cadenas de símbolos a las que se les aplican ciertos procedimientos en forma rutinaria, y frente a ello, proponen algunas estrategias para evitar que las manipulaciones formales sean la única fuente de significado en el aprendizaje de las nociones algebraicas.

Herscovics y Linchevski (1994) investigan qué tipo de ecuaciones pueden resolver estudiantes de 7º grado sin haber recibido instrucción previa, analizando los procesos de resolución desarrollados en cada caso.

En la primera parte del estudio, para explorar si los estudiantes aceptan el signo de *igual* como un símbolo de equivalencia numérica, los investigadores preguntan si $34 = 19 + 15$ es cierto, frente a lo cual dos estudiantes responden en forma negativa. De este modo, no todos los alumnos aceptan el uso del signo de *igual* para indicar la descomposición de un número en la suma de dos números. Luego, los investigadores preguntan si $15 + 7 = 10 + 12$ es cierto, frente a los cual la mayoría de los estudiantes escriben dos *igualdad*es por separado para indicar que cada suma es 22. Sin embargo, después de la intervención de los investigadores, aceptan que la expresión $15 + 7 = 10 + 12$ es otra forma de justificar la respuesta dada.

En la segunda parte del estudio, se presenta una amplia gama de ecuaciones (según la posición de la incógnita, los términos numéricos empleados, y el tipo y número de operaciones involucradas), y se analizan los procesos de resolución desarrollados por los estudiantes. Para ecuaciones en que la incógnita aparece una vez (por ejemplo, $4n + 17 = 65$), casi todos los estudiantes utilizan operaciones inversas en el orden inverso. Cuando la incógnita aparece como sustraendo o divisor (por ejemplo, $37 - n = 18$ ó $525: n = 15$), los estudiantes trabajan en forma aritmética ($37 - 18 = 19$; $525: 5 = 35$). Para ecuaciones en que la incógnita aparece dos veces, ya sea en el mismo miembro (por ejemplo, $n + 5 + n = 55$) o a ambos miembros (por ejemplo, $n + 15 = 4n$), la mayoría de los estudiantes emplean una estrategia de ensayo y error basada en la sustitución numérica. Estos resultados, según Herscovics y Linchevski, no confirman la existencia de un corte didáctico en el sentido de Filloy y Rojano (1984), pues los estudiantes fueron capaces de resolver ecuaciones con la incógnita a ambos miembros sin instrucción previa, aunque las estrategias empleadas no implicaran operar con la incógnita. Esto conduce a los investigadores a indicar la existencia de una brecha cognitiva entre la aritmética y el álgebra, caracterizada por la incapacidad de los estudiantes para operar de forma espontánea con la incógnita.

Los autores encuentran dificultades de carácter pre-algebraico vinculadas al signo de *igual*, cuando los estudiantes sienten la necesidad de invertir los miembros de una ecuación respecto al signo de *igual*, si la incógnita aparece solo en el segundo miembro, y como sustraendo (por ejemplo, $23 = 37 - n$). Los autores destacan la necesidad de ampliar el significado del signo *igual*, especialmente en su uso para indicar la descomposición de un número en una diferencia de dos números, a fin de evitar problemas como el anterior, cuando los alumnos incursionan en el trabajo algebraico.

Linchevski y Herscovics (1996) desarrollan una propuesta de enseñanza de las ecuaciones polinómicas de primer grado con seis estudiantes de 7º grado, a fin de superar la brecha cognitiva reportada en Herscovics y Linchevski (1994), relacionada con la incapacidad de los estudiantes para operar de forma espontánea con la incógnita.

Primero se exploran las estrategias que en forma espontánea desarrollan los estudiantes para resolver ecuaciones. Se formaliza la estrategia de las "operaciones inversas en el orden inverso" y se introduce la simplificación de términos semejantes para resolver ecuaciones del tipo $17n + 12n + 36 = 210$. Los investigadores encuentran que un estudiante utiliza el signo de *igual* como *separador* para resolver la ecuación $17n + 12n + 36 = 210$ (escribe $17n + 12n + 36 = 210 = 29n + 36 = 210$), y que en algún momento de la resolución de la ecuación $102 = 22n - 17n + 49 - 12$, dos estudiantes sienten la necesidad de invertir los miembros de lugar respecto al signo de igual.

Luego se introduce la descomposición de un término aditivo en la suma o diferencia de otros dos, y la cancelación de términos idénticos. Para resolver la ecuación $8n + 11 = 5n + 50$, por ejemplo, los estudiantes escriben $8n + 11 = 5n + 39 + 11$ (descomponen el 50 en la suma $11 + 39$) y cancelan el 11 que aparece a cada lado. Luego escriben $5n + 3n = 5n + 39$ (descomponen el término $8n$ en la suma $5n + 3n$) y cancelan el término $5n$ que aparece a cada lado. Al obtener la ecuación $3n = 39$, deducen que la solución es 13. Para resolver la ecuación $6n + 17 = 8n - 11$, mientras tanto, descomponen el 17 en la diferencia $28 - 11$, cancelan el -11 que aparece a cada lado, y al obtener la ecuación $6n + 28 = 8n$ prosiguen como en el caso anterior.

Un mes después de la experiencia descrita, Linchevski y Herscovics plantean ecuaciones de distinto tipo para que los estudiantes resuelvan, similares a las trabajadas anteriormente. Los autores señalan que los alumnos desarrollaron procedimientos más eficientes que los implementados al comenzar la experiencia, pero presentaron dificultades al tener que resolver una ecuación que requería descomponer un término aditivo en la diferencia de otros dos. El uso del signo de *igual* para indicar una descomposición en este sentido, agregan, se presenta como un obstáculo robusto del que debería ocuparse un curso de pre-álgebra.

Knuth et al. (2011) realizan un estudio para explorar si la comprensión del signo de *igual* en estudiantes de enseñanza secundaria (6º, 7º y 8º grado) está relacionada con el desempeño que ellos muestran al resolver ecuaciones algebraicas y tareas vinculadas con las ecuaciones equivalentes.

Primero se presenta la *igualdad* $3 + 4 = 7$ con una flecha que señala el signo de *igual* y se les pregunta a los estudiantes el nombre y los significados que el símbolo señalado tiene para ellos. Los investigadores encuentran que menos de la mitad de los estudiantes de cada grado muestra una comprensión *relacional* del signo de *igual* (29%, 36% y 46% de los estudiantes de 6°, 7° y 8° grado respectivamente), y que dicha comprensión no parece evolucionar a lo largo de los primeros años de enseñanza secundaria. Los autores señalan que el predominio de la visión *operacional* del signo de *igual* en estudiantes de enseñanza secundaria se debe a sus experiencias previas con el signo de *igual* en la enseñanza primaria, donde lo utilizan principalmente para anunciar el resultado de una operación, y también a la escasa atención que se le presta al tema en la enseñanza secundaria.

Luego se les pide resolver las ecuaciones $4m + 10 = 70$ y $3m + 7 = 25$. Knuth et al. encuentran que los estudiantes que anteriormente habían mostrado una comprensión *relacional* del signo *igual*, logran mayor éxito al resolver estas ecuaciones, respecto a los estudiantes que en aquella oportunidad no habían mostrado tal comprensión. Aquellos estudiantes que no tienen experiencia previa con el álgebra, agregan los investigadores, también muestran una mejor comprensión de cómo resolver las ecuaciones planteadas, si previamente manifestaron una visión *relacional* del signo de *igual*. Por último se les presenta dos pares de ecuaciones equivalentes. En un caso se les pregunta si las dos ecuaciones dadas tienen la misma solución, y en el otro caso se les da la solución de una de ellas y se les pregunta si con ese dato es posible averiguar la solución de la otra. Al igual que antes, los autores encuentran que los estudiantes que habían mostrado una comprensión *relacional* del signo *igual* son más propensos a responder que las dos ecuaciones dadas tienen la misma solución y a reconocer la equivalencia sin tener que resolver las mismas.

Knuth et al. concluyen que aquellos estudiantes que tienen una comprensión *relacional* del signo *igual* logran mayor éxito en la resolución de ecuaciones y de tareas relativas a ecuaciones equivalentes, en comparación con aquellos estudiantes que no tienen tal comprensión. Por otra parte, son propensos a utilizar estrategias más sofisticadas para resolver cada tarea. Señalan que promover una comprensión *relacional* del signo de *igual* puede contribuir con el aprendizaje del álgebra, y advierten sobre la necesidad de modificar los planes de estudio y ciertas prácticas docentes para contribuir con esa finalidad.

Godfrey y Thomas (2008) analizan y comparan la comprensión que tienen estudiantes de enseñanza secundaria (básica y superior) y universitaria, en relación a las ecuaciones y a los usos del signo de *igual*. Los investigadores describen esta comprensión en términos de las propiedades de las partes que constituyen el objeto ecuación, identificando concepciones incompletas o inapropiadas por parte de los estudiantes.

En cada nivel de enseñanza se proporciona una lista con cinco o seis expresiones para que los estudiantes determinen cuál o cuáles de ellas son ecuaciones, y expliquen por qué (por ejemplo, $k = 5$; $7w - w$; $5t - t = 4t$ y $5r - 1 = -11$); entre otras. Los resultados del estudio muestran que una proporción cada vez mayor de estudiantes, conforme avanza el nivel educativo, se centra exclusivamente en la presencia o no de un signo de *igual* en la expresión para determinar si se trata de una ecuación (27,6%; 31,6% y 58,6% respectivamente). Sin embargo, los investigadores señalan que una interpretación *operacional* del objeto ecuación, caracterizada por la necesidad de visualizar una operación a realizar en al menos uno de los dos miembros para indicar que se trata de una ecuación, es persistente en la cuarta parte de los estudiantes, incluso en la transición hacia la enseñanza universitaria.

También se presentan situaciones para indagar sobre la comprensión de ciertas propiedades en que interviene un signo de *igual*. Godfrey y Thomas encuentran que el 73,3% de los estudiantes universitarios admite la expresión $a + b = b + a$ como una ecuación, mientras que el 35,5% de los estudiantes de enseñanza secundaria superior y el 60% de los estudiantes universitarios hace lo propio con la expresión $a = a$. Asimismo, que el 62,5% de los estudiantes de enseñanza secundaria básica resuelve con éxito una tarea relacionada con la propiedad transitiva, aunque la comprensión de esta propiedad, aclaran, no era imprescindible para su resolución. Los investigadores destacan una dificultad específica relacionada con la propiedad transitiva, dado que al trabajar con identidades se cumple su implicación recíproca, pero no así en el contexto de las ecuaciones condicionales (si $f(x) = g(x)$ y $g(x) = h(x)$, entonces, $f(x) = h(x)$; pero $f(x) = h(x)$ no implica $f(x) = g(x)$ y $g(x) = h(x)$).

Godfrey y Thomas sostienen que la forma implícita en que los docentes utilizan la propiedad simétrica y transitiva de la *igualdad*, por ejemplo, incide en la limitada comprensión que muestran los estudiantes en relación a ellas. Lo vemos cuando al resolver una ecuación se pasa de $x + 6 = 3x + 1$ a $2x + 1 = 6$, en lugar de $6 = 2x + 1$, agregan, del mismo modo que en la expresión $y = 2x + 1$, si $y = 0$ se afirma que $2x + 1 = 0$. Según los investigadores, si los estudiantes tienen una visión del signo *igual* como indicador de un resultado, y no conocen las propiedades de una relación de equivalencia, no pueden interactuar plenamente con el objeto ecuación matemática. Por tanto, sugieren a los profesores utilizar programas de cálculo simbólico que motiven variados usos del signo *igual*, en diferentes contextos de resolución de ecuaciones, para enriquecer los esquemas mentales de los estudiantes asociados al objeto ecuación, y favorecer así, la transición entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.

2.1.4 Síntesis

En contexto aritmético, se reporta que los estudiantes de enseñanza primaria y secundaria interpretan el signo de *igual* como un *operador*, en lugar de interpretarlo como el indicador de una relación de equivalencia (Kieran, 1981; Molina, Castro y Ambrose, 2006; Burgell, 2012). Asimismo, al ser consultados por el significado que tiene para ellos el signo de *igual*, muchos lo describen en forma *operacional*, mostrando ejemplos que implican una operación a la izquierda y un resultado a la derecha del signo de *igual* (Kieran, 1981; Burgell, 2012). También se reporta que, al analizar una *igualdad* numérica con operaciones a cada lado del signo de *igual*, los estudiantes de enseñanza secundaria escriben dos *igualdades* por separado para indicar que se obtiene el mismo valor en cada una de ellas, aunque luego aceptan el uso dado al signo de *igual* en la *igualdad* inicial (Herscovics y Linchevski, 1994).

En contexto de ecuaciones, se reportan dificultades de los estudiantes para resolver ecuaciones donde la variable aparece solamente en el segundo miembro, asociando esas dificultades a una comprensión limitada del signo de *igual* (Sfard y Linchevski, 1994; Herscovics y Linchevski, 1994). Asimismo, se señala el uso del signo de *igual* como separador de etapas intermedias, en la resolución de una ecuación (Kieran, 1981; Linchevski y Herscovics, 1996). De los trabajos revisados también se desprende que, en el contexto de una ecuación, algunos estudiantes reconocen que es necesario obtener el mismo valor a cada lado del signo de *igual*, pero para ello asumen que la variable puede tomar más de un valor por vez en una misma expresión, esto es, un valor distinto a cada lado del signo de *igual* (Rojano y Gallardo, 1988; Sfard y Linchevski, 1994). También se desprende que, para interpretar ecuaciones donde es necesario una visión *relacional* del signo de *igual* (Kieran, 1981), algunos estudiantes buscan mecanismos que les permitan interpretar las nuevas ecuaciones del mismo modo en que interpretaban las anteriores, sin modificar su visión *operacional* del signo de *igual* (Rojano y Gallardo, 1988).

Encontramos algunas propuestas para la enseñanza de las ecuaciones que buscan superar las dificultadas reseñadas. Por ejemplo, se propone un trabajo con *igualdades* numéricas en las que intervienen operaciones a ambos lados del signo de *igual*, que consiste en tapar uno de los números que aparece en una de ellas (primero con un dedo, luego sustituyéndolo por un recuadro y finalmente por una letra), dando lugar a la construcción de ecuaciones con la variable a ambos miembros (Kieran, 1981). Asimismo, se sugiere utilizar el método de prueba y error en etapas tempranas del aprendizaje, para que los estudiantes reconozcan que no se obtiene una *igualdad* numérica al sustituir la variable por un valor que no es la solución de la ecuación (Kieran, 1992). También se presenta una estrategia de resolución de ecuaciones basada en la simplificación de términos semejantes, en la descomposición de un término aditivo en suma o diferencia de otros dos, y en la cancelación de términos idénticos (Linchevski y Herscovics, 1996).

Algunos trabajos relacionan la comprensión del signo de *igual* de los estudiantes con su desempeño al trabajar en contexto de ecuaciones. Sus resultados dan cuenta de que una comprensión *relacional* del signo de *igual* en estudiantes de enseñanza secundaria, por ejemplo, favorece sus desempeños al resolver ecuaciones algebraicas y tareas relativas a ecuaciones equivalentes (Knuth et al., 2011), del mismo modo que una comprensión del signo de *igual* en este sentido, pero en estudiantes de enseñanza primaria, favorece sus desempeños al resolver *igualdades* numéricas y tareas que requieren uso de pensamiento *relacional* (Matthews, 2012). Asimismo, la comprensión *relacional* del signo de *igual* en particular, aparece ligada al reconocimiento de las transformaciones que conservan la *igualdad* (Rojano y Gallardo, 1988; Matthews et al., 2012).

En contexto de polinomios, se reportan dificultades de los estudiantes para interpretar expresiones que no están seguidas de un signo de *igual* y un segundo miembro, como es el caso de $a + 3$ o de $k - 1$ (Kieran, 1983, citado en Kieran, 1992; Sfard y Linchevski, 1994).

2.2 Ubicación de nuestro trabajo

A partir de la revisión realizada, observamos que en contexto aritmético, la comprensión del signo de *igual* ha sido ampliamente estudiada a nivel de enseñanza primaria, no así a nivel de enseñanza secundaria. Del mismo modo que en enseñanza secundaria, son pocos los trabajos que han estudiado la comprensión del signo de *igual* en contexto algebraico, asociándolo principalmente a la resolución de ecuaciones, relegando a un segundo plano el trabajo con polinomios, y excluyendo por completo el trabajo con funciones.

Identificamos que varios de los trabajos reportados resaltan la importancia de adquirir una sólida comprensión del signo de *igual* para luego incursionar en el aprendizaje del álgebra, pero en general, sin dar cuenta de las dificultades específicas que puede generar, en dicho contexto, una comprensión limitada del signo de *igual*. Del mismo modo, son pocos los estudios reseñados que tienen por finalidad, aportar estrategias de enseñanza que desde un contexto algebraico contribuyan a la comprensión del signo de *igual*.

2.2.1 Objetivo general de la investigación

Aportar al conocimiento del desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de enseñanza secundaria de Uruguay, en lo que refiere a la comprensión del signo de *igual* en contexto algebraico. Realizaremos aportes que contribuyan a comprender las dificultades de los estudiantes cuando ingresan al estudio del álgebra y brindaremos recomendaciones que permitan a los profesores mejorar sus diseños de enseñanza.

2.2.2 Objetivo específico de la investigación

Explorar y analizar qué significados le atribuyen al signo de *igual*, en un contexto algebraico, un grupo de estudiantes de segundo año de Enseñanza Secundaria (13-14 años) que acaba de ingresar al estudio del álgebra, en un liceo de la ciudad de Montevideo.

2.2.3 Preguntas guía

Consideramos que el análisis del trabajo algebraico realizado por los estudiantes nos permitirá comprender de qué formas usan e interpretan el signo de *igual* en su *entrada al álgebra*, y a partir de los hallazgos obtenidos reflexionar sobre sus implicancias en relación a la enseñanza del álgebra en la educación secundaria. Este trabajo se enmarca en la línea de investigación del Pensamiento Algebraico, en el contexto de la enseñanza de la matemática en la educación secundaria.

Las siguientes preguntas guiarán nuestro trabajo:

- ¿Qué tanto avanzan los estudiantes de segundo año en la comprensión del signo de *igual*, luego de incursionar en el estudio del álgebra?
- ¿Qué dificultades genera una comprensión limitada del signo de *igual*, cuando los alumnos de segundo año trabajan en contexto algebraico?
- ¿Cómo favorecer la comprensión del signo de *igual* en contexto algebraico, que contribuya a superar esas dificultades?

CAPÍTULO 3

Marco teórico

En este capítulo abordamos los aspectos teóricos que posteriormente nos permitirán analizar qué significados le atribuyen al signo de *igual*, en un contexto algebraico, los estudiantes que participan de este estudio.

Presentamos una noción de *igualdad*, equivalencia, identidad, sentencia, símbolo y signo, tomada de Molina (2006), a los efectos de precisar cómo entenderemos estos conceptos a lo largo del presente trabajo. Asimismo, desarrollamos la clasificación de los usos y significados del signo de *igual* establecida por Molina (2006) y Molina et al. (2009), posteriormente ampliada por Burgell (2012).

3.1 Precisando términos

Presentamos una noción de *igualdad*, *equivalencia*, *identidad*, *sentencia*, *símbolo* y *signo*, siguiendo a Molina (2006).

3.1.1 Igualdad, equivalencia, identidad y sentencia

Molina (2006) realiza un exhaustivo análisis de los distintos significados que se le asignan a los términos *igualdad*, *equivalencia* e *identidad*, en distintos ámbitos del conocimiento (la Real Academia Española, la filosofía, la lógica, la matemática y la educación matemática), para luego desembocar en las siguientes definiciones, que nosotros tomamos para desarrollar nuestro trabajo:

- *Igualdad:* "modo gráfico de relacionar en la escritura dos expresiones o representaciones que refieren a un mismo objeto matemático, escribiendo entre ellas un signo de *igual*, así como a la relación que existe entre ellas". (p. 115).

- *Equivalencia:* "toda relación que cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva". También destaca que "la *igualdad* es una relación de equivalencia" y que dos ecuaciones, afirmaciones o fórmulas son equivalentes "cuando son simultáneamente verdaderas o falsas para cada conjunto admisible de valores de ciertos parámetros". (p. 115).

- *Identidad:* "expresiones aritméticas o algebraicas que contienen el signo de *igual* e involucran a ambos miembros el mismo objeto, representado del mismo modo". (p. 115).

La autora aclara que, según estas definiciones, una *igualdad algebraica* es aquella expresión que es cierta para todos los valores de la variable, mientras que una *igualdad condicional* (o *ecuación*) es aquella que es cierta para algunos o ningún valor de la variable. Asimismo, que una *igualdad aritmética* está formada por dos representaciones diferentes de un mismo número, separadas por un signo de *igual*, lo que implica que siempre es una proposición verdadera.

Tomando en cuenta lo anterior, Molina destaca la necesidad de introducir otro término, *sentencia*, para referirse a expresiones aritméticas que, incluyendo el signo de *igual*, puedan expresar proposiciones falsas. Así es como las *sentencias* pueden ser verdaderas o falsas, y toda *sentencia* verdadera es una *igualdad*.

3.1.2 Signo y símbolo

Molina (2006) señala que, según la Real Academia Española, un *signo* refiere a un "objeto, fenómeno o acción material que, por naturaleza o convención, representa o sustituye a otro" (p. 125), y que en su acepción matemática, se define como una "señal o figura que se usa en los cálculos para indicar la naturaleza de las cantidades y las operaciones que se han de ejecutar con ellas". La autora también se refiere a la clasificación de los *signos* de Reichenbach y Pierce, en la que un *símbolo* es considerado un tipo particular de *signo*, donde la relación entre *signo* y objeto se establece de forma convencional, y por tanto arbitraria (Ferrater, 1988; Radford y Grenier, 1996).

En nuestro trabajo, siguiendo a Molina, consideramos a los *símbolos* como un tipo de *signos* en los cuales la relación con el objeto referido es arbitraria y definida de modo convencional. Con esta definición la mayoría de los *signos* matemáticos son también símbolos ya que son definidos mediante una convención.

3.2 Significados y usos del signo de igual

Molina (2006) y Molina et al. (2009) describen once significados distintos del signo de *igual*, entre los cuales se incluyen no solo aquellos que son reconocidos y utilizados por la comunidad matemática, sino también, aquellos significados otorgados por los alumnos o utilizados en los libros de texto de la matemática escolar. Estos significados son: *propuesta de actividad*, *operador*, *expresión de una acción*, *separador*, *expresión de una equivalencia*, *expresión de una equivalencia condicional (ecuación*), *definición de un objeto matemático*, *expresión de una relación funcional* o *de dependencia*, *indicador de cierta conexión o correspondencia*, *aproximación*, y *asignación de un valor numérico*. Asimismo, el significado *expresión de una equivalencia* se divide en cuatro acepciones (*equivalencia numérica*, *equivalencia simbólica*, *identidad estricta*, y *equivalencia por definición o por notación*), abarcando un total de 14 significados.

Burgell (2012) retoma estos significados presentados por Molina y explicita en qué ámbitos se reconocen y se utilizan cada uno de ellos. Además, propone una ampliación de la categoría *indicador de cierta conexión o correspondencia* reseñada por Molina. A continuación describimos los 14 significados mencionados por Molina, incluyendo la ampliación propuesta por Burgell.

3.2.1 Propuesta de actividad

Este significado, según Molina et al. (2009), refiere al uso del signo en expresiones incompletas que incluyen, solamente a la izquierda del signo de *igual*, una cadena de números y/o símbolos vinculados por símbolos *operacional*es.

Ejemplos: $16 : 3 =$

$x(x+1) - 3x(x+5) =$

Este tipo de expresiones, agregan los autores, se utilizan para proponerles a los estudiantes actividades de cálculo de operaciones o simplificación de expresiones. Burgell señala, en tanto, que es un uso del signo de *igual* propio de las matemáticas escolares, usado tanto por los libros de texto como por los profesores.

3.2.2 Operador

Para Molina et al. este significado refiere al uso unidireccional del signo de *igual* en *igualdad*es que incluyen, a la izquierda del signo de *igual*, una cadena de operaciones, y a la derecha del signo de *igual*, su resultado.

Ejemplos: $4 \text{ x } 5 = 20$

$x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$

Es decir, el signo de *igual* indica la respuesta a un cálculo o simplificación, interpretándose entonces como un *operador*. Siempre en la misma dirección: de izquierda a derecha. Es lo que otros autores han denominado significado aritmético u *operacional* del signo de *igual* (Rojano 2002; Van Ameron 2002). Burgell, por su parte, señala que este uso del signo de *igual* surge de la interpretación de los propios alumnos, y que está en gran parte motivada por el abundante uso de este tipo de escritura en la matemática escolar. También destaca que se trata de una interpretación limitada y parcial del significado de este signo.

3.2.3 Expresión de una acción.

En este caso, según Molina et al., el signo de *igual* separa una cadena o secuencia de operaciones y su resultado, pero aceptando que ambos se dispongan indistintamente a la izquierda o a la derecha del signo de *igual.*

Ejemplos: $2x = x(x-2) - x^2 + 4x$

$x(x-2) - x^2 + 4x = 2x$

$$24 = 12 + 12$$

$$12 + 12 = 24$$

Los autores agregan que se trata de un significado bidireccional del signo de *igual* y que extiende el significado de *operador* reseñado anteriormente. De este modo, agregan, se reconoce la propiedad simétrica de la *igualdad*. Más allá de lo anterior, en nuestro trabajo, al igual que Burgell, nos referiremos a este uso únicamente cuando el resultado esté a la izquierda del signo de *igual*, mientras que cuando el resultado esté a la derecha lo consideraremos un uso de *operador*. Burgell señala que este es un uso matemáticamente correcto del signo de *igual* y que es utilizado en las matemáticas escolares.

3.2.4 Separador

Molina et al. señalan que este significado del signo de *igual* es otorgado por los estudiantes al utilizarlo en contextos algebraicos como *separador* de los pasos realizados en la resolución de una actividad.

Ejemplos: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x} = x^2 + 1 = x = x^2 - x + 1 = 0$

$$f(x) = x^2 = f^2(x) = x^4$$

Molina et al. agregan que este significado del signo de *igual* es matemáticamente incorrecto, pues vincula expresiones algebraicas que en el contexto dado pueden no tener relación alguna, y ser solamente pasos sucesivos en la resolución de una actividad. Es el caso del segundo y cuarto signo de *igual* del primer ejemplo (de izquierda a derecha) y del segundo signo de *igual* del segundo ejemplo.

3.2.5 Expresión de una equivalencia condicional (ecuación)

Este significado, según los autores, se encuentra en el contexto del álgebra cuando la equivalencia expresada por el signo de *igual* solo es cierta para algún o algunos valores de la variable o las variables, pudiendo no existir ninguno.

Ejemplo: $x^2 + 4x = 5x - 6$

Molina et al. agregan que este significado impone que la ecuación correspondiente tenga un conjunto finito de soluciones, pudiendo ser el conjunto vacío. Burgell, en tanto, destaca que se trata de un significado *relacional* del signo de *igual*, y que es reconocido y utilizado por los matemáticos y en el contexto escolar.

3.2.6 Expresión de una equivalencia

El siguiente significado, según los autores, refiere al uso del signo de *igual* para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático. Este significado, utilizado y reconocido en la actividad matemática, se divide en cuatro acepciones que detallamos a continuación:

Equivalencia numérica

En este caso, los autores señalan que el signo de *igual* indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas que se encuentran a cada lado del signo de *igual*. Se utiliza entonces para relacionar dos expresiones del mismo número.

Ejemplos: $4 + 5 = 3 + 6$

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

Molina et al. destacan que también se trata de un significado *relacional* del signo de *igual*, en contraposición al significado *operacional* que algunos autores denominan al significado *operador*.

Equivalencia simbólica

En este caso, los autores señalan que el signo de *igual* indica que dos expresiones algebraicas tienen el mismo valor numérico para todos los valores de la variable o las variables.

Ejemplos: $x^2 + 2x = x(x - 2)$

$3(x - 5)(x + 5) - 3x^2 = 3(x^2 - 25) - 3x^2$

$a + b = b + a$

Molina et al. sostienen que este significado está presente en expresiones algebraicas tautológicas, y que también se utiliza para expresar la descomposición de una expresión algebraica, para indicar la equivalencia de pasos sucesivos en la simplificación de una expresión algebraica, o para expresar una propiedad aritmética, como lo indican los ejemplos anteriores. Burgell, en tanto, agrega que se trata de un significado *relacional* del signo de *igual*, pero en contexto algebraico.

Identidad estricta

Este significado, reseñado en Molina (2006) y no en Molina et al. (2009), refiere a un caso particular de *equivalencia numérica* o *simbólica*. Se utiliza cuando las expresiones a ambos lados del signo de *igual* representan el mismo objeto matemático con el mismo representante.

Ejemplos: $3 = 3$

$x + 5 = x + 5$

Equivalencia por definición o por notación

Este uso, dicen Molina et al., indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por el significado de la notación utilizada.

Ejemplos: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, considerando a $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ como representantes de un mismo número racional

$\frac{7}{5} = 7:5$, interpretando a $\frac{7}{5}$ como un cociente

$100\ cm = 1\ m$

$\frac{a}{b} = ab^{-1}$

3.2.7 Definición de un objeto matemático.

Molina et al. señalan que este significado está presente cuando el signo de *igual* se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático.

Ejemplos: $f(x) = 2x + 3$

$a^0 = 1$

$a \neq 0$

Burgell agrega que se trata de un significado utilizado y reconocido por los matemáticos y en las prácticas escolares.

3.2.8 Expresión de una relación funcional o de dependencia

Molina et al. sostienen que este significado se refiere al uso del signo de *igual* para indicar una relación de dependencia entre variables o parámetros.

Ejemplos: $l = 2\pi r$

$y = 3x + 2$

Molina et al. señalan que este es, por ejemplo, el significado del signo de *igual* en fórmulas de áreas y perímetros de figuras geométricas. Burgell agrega que se trata de un uso del signo de *igual* reconocido y utilizado por los matemáticos y en las prácticas escolares.

3.2.9 Indicador de cierta conexión o correspondencia

Molina et al. afirman que este es un significado impreciso del signo de *igual* que se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y no matemáticas.

Ejemplo: $Precio\ bici = 3x + 5$, siendo x el precio de una pelota de básquetbol

Burgell, en tanto, propone una ampliación de esta categoría, incluyendo el uso del signo de *igual* con este significado para relacionar dos expresiones matemáticas.

Ejemplos: $a = \dot{b}$

$8 = 16$

En el primer ejemplo, dice Burgell, el signo de *igual* indica que a es un múltiplo de b, mientras que en el segundo, proveniente de las interpretaciones de los alumnos, indica cierta correspondencia entre los números 8 y 16, como ser la existencia de una operación que incluye al 8 cuyo resultado es 16.

3.2.10 Aproximación

Molina et al. señalan que este significado corresponde al uso del signo de *igual* para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico.

Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0{,}33$

Molina et al. destacan que en estos casos, el signo de *igual* puede ser remplazado por el símbolo ≅. Burgell, en tanto, agrega que se trata de un uso matemáticamente incorrecto, o al menos impreciso del signo de *igual*, aunque de todos modos sea un uso frecuente en las matemáticas escolares, tanto de parte de los alumnos como de los profesores.

3.2.11 Asignación de un valor numérico

En este caso, dicen Molina et al., el signo de *igual* asigna un valor numérico a un símbolo. Por ejemplo, si se está considerando una expresión algebraica, se puede hacer uso del signo de *igual* para asignar un valor a la variable, y evaluarla en dicha expresión algebraica.

Ejemplo: Si $x = 4$, ¿cuál es el valor de $x^2 - 5$?

Molina et al. también señalan que al resolver una ecuación puede utilizarse el signo de *igual* con este significado, para indicar el valor de la variable. Burgell agrega que se trata de un significado reconocido y utilizado por los matemáticos y en el contexto escolar.

3.3 Consideraciones finales

Molina et al. (2006) destacan la necesidad de analizar el contexto para reconocer, en cada caso, cuál es el significado del signo de *igual* que está siendo empleado. En contexto algebraico, particularmente, señalan que en ocasiones es difícil distinguir entre los significados *operador* y *expresión de una equivalencia simbólica*, porque al operar con expresiones algebraicas no suele obtenerse un valor numérico, sino una expresión algebraica equivalente a la inicial. Por ejemplo, en la expresión $x(x+2) = x^2 + 2x$, el signo de *igual* puede considerarse como un *separador* entre la cadena de operaciones $x(x+2)$ y su resultado, $x^2 + 2x$, o puede entenderse como una *equivalencia simbólica* entre $x(x+2)$ y $x^2 + 2x$. Por tanto, reiteran, solo el contexto puede llevar a determinar cuál de los dos significados es el que se está utilizando en ese caso.

Los autores también señalan que el significado *expresión de una equivalencia* es el único que refiere a una relación que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, y que en los demás casos, la relación no es reflexiva, y a veces, tampoco transitiva. Asimismo, destacan que en al menos seis de los significados presentados se utiliza el signo de *igual* en sentido unidireccional, es decir, de izquierda a derecha.

Nosotros, en consonancia con otros autores (Behr et. al., 1976; Kieran, 1981; Knuth et. al, 2006), a menudo nos referiremos a la comprensión *operacional* y a la comprensión *relacional* del signo de *igual*. Hablaremos de comprensión *operacional* cuando el signo de *igual* sea interpretado como el indicador de un resultado, o de cualquier otro modo que implique una lectura unidireccional del signo de *igual*. Asimismo, hablaremos de comprensión *relacional* cuando el signo de *igual* sea interpretado como el indicador de una relación de equivalencia, o de cualquier otro modo que implique una lectura bidireccional del signo de *igual*. Cabe destacar que de este modo, el significado *expresión de una equivalencia condicional* podrá dar cuenta de una interpretación *relacional* del signo de *igual*, aun cuando no refiere a una relación de equivalencia.

La información contenida en los cuadros 4 y 5 sintetiza la perspectiva teórica adoptada para la realización del presente trabajo:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Significados del signo de igual</th><th colspan="2">Ejemplos</th></tr>
<tr><th>Aritméticos</th><th>Algebraicos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Propuesta de actividad</td><td>$16:3 =$</td><td>$x(x+1) - 3x(x+5) =$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operador</td><td>$4 \text{ x } 5 = 20$</td><td>$x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una acción</td><td>$24 = 12 + 12$</td><td>$2x = x(x-2) - x^2 + 4x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Separador</td><td>(No corresponde)</td><td>$f(x) = x^2 = f^2(x) = x^4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una equivalencia condicional</td><td>(No corresponde)</td><td>$x^2 + 4x = 5x - 6$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Expresión de una equivalencia</td><td>Equivalencia numérica</td><td>$4 + 5 = 3 + 6$
$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$</td><td>(No corresponde)</td></tr>
<tr><td>Equivalencia simbólica</td><td>(No corresponde)</td><td>$x^2 + 2x = x(x-2)$
$a + b = b + a$</td></tr>
<tr><td>Identidad estricta</td><td>$3 = 3$</td><td>$x + 5 = x + 5$</td></tr>
<tr><td>Equivalencia por definición o por notación</td><td>$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$</td><td>$\frac{a}{b} = ab^{-1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición de un objeto matemático</td><td>$1^0 = 1$</td><td>$f(x) = 2x + 3$
$a^0 = 1, a \neq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una relación funcional o de dependencia</td><td>(No corresponde)</td><td>$l = 2\pi r$
$y = 3x + 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Indicador de cierta conexión o correspondencia</td><td>$Precio\ bici = \$50$
$8 = 16$</td><td>$Precio\ bici = 3x + 5$
$a = \dot{b}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aproximación</td><td>$\frac{1}{3} = 0{,}33$</td><td>(No corresponde)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asignación de un valor numérico</td><td>(No corresponde)</td><td>$x = 4$</td></tr>
</table>

Cuadro 4. Ejemplos de los diferentes significados del signo de *igual* (a partir de Molina 2006, p. 153)

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Significados del signo de igual</th><th colspan="4">Características</th></tr>
<tr><th>Reflexivo</th><th>Simétrico</th><th>Transitivo</th><th>Dirección</th></tr>
<tr><td colspan="2">Propuesta de actividad</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operador</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una acción</td><td>No</td><td>Sí</td><td>No</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Separador</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una equivalencia condicional</td><td>No</td><td>Sí</td><td>No</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Expresión de una equivalencia</td><td>Equivalencia numérica</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td>Equivalencia simbólica</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td>Identidad estricta</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td>Equivalencia por definición o por notación</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición de un objeto matemático</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión de una relación funcional o de dependencia</td><td>No</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Bidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Indicador de cierta conexión o correspondencia</td><td>No</td><td>Sí</td><td>Sí</td><td>Según el caso</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aproximación</td><td>No</td><td>No</td><td>Sí</td><td>Unidireccional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asignación de un valor numérico</td><td>No</td><td>No</td><td>No</td><td>Unidireccional</td></tr>
</table>

Cuadro 5. Síntesis de las características de los significados del signo de *igual* (a partir de Molina 2006, p. 155)

CAPÍTULO 4

Metodología y Método

En este capítulo abordamos algunas consideraciones metodológicas que nos permitirán fundamentar la elección del método empleado en este trabajo. Asimismo, describimos las diferentes etapas que lo conforman, mostrando el diseño y la implementación del instrumento utilizado en cada una de ellas. Finalizamos con una narrativa sobre el enfoque de enseñanza desarrollado en el grupo de estudiantes que participa de este estudio, que da cuenta de las experiencias y conocimientos previos de los alumnos.

4.1 Metodología

El diseño metodológico que elegimos, surge de la necesidad de recabar evidencias que, analizadas a la luz del marco teórico adoptado, nos permitan responder las preguntas y alcanzar los objetivos planteados. Para fundamentar esa elección, presentamos y discutimos algunas consideraciones metodológicas vinculadas al rol del profesor-investigador (Ball, 2000), a la utilidad de la práctica de indagación en contexto escolar (Szydlik, 2015) y al diseño de tareas de clasificación y de comparación (Zaslavsky, 2008).

Ball (2000) señala ventajas y desventajas de realizar una investigación en primera persona, o desde adentro, en comparación con una investigación en la que el investigador se ubica como observador externo, o desde afuera. En cuanto a las ventajas de esta perspectiva, ella sostiene que:

- El docente-investigador puede registrar en su grupo situaciones que para un observador externo son invisibles.
- El docente-investigador tiene acceso a información sobre el grupo que otros no tienen.

- El docente-investigador conoce la forma en que se expresan y trabajan sus alumnos.
- El docente-investigador ha establecido un vínculo con los estudiantes que puede favorecer el compromiso de estos hacia la actividad de investigación.
- El docente-investigador conoce los ejemplos, problemas y actividades que se han utilizado en el curso como para hacer uso de ellos durante el transcurso de la misma.

Asimismo, en cuanto a las desventajas, la autora señala que:

- Los estudiantes pueden sentir temor de expresar lo que realmente piensan, ya que el profesor que tienen delante es el que los califica y determina la promoción de cada uno de ellos.
- El docente-investigador puede dar cosas por supuesto, y no ser consciente de cómo influyen en sus estudiantes determinadas formas de plantear o expresar las ideas.
- El docente-investigador puede sesgar la investigación en el afán de que los estudiantes entiendan y aprendan, condicionando involuntariamente a que estos proporcionen cierto tipo de respuestas.

En este sentido, acordamos realizar la investigación en primera persona. Esto, porque como dice Ball (2000), asumiendo el rol de profesor-investigador tendremos un mayor conocimiento del grupo en general y de cada estudiante en particular, así como también, un cabal conocimiento del enfoque de enseñanza implementado hasta el momento de realizar la investigación. Esto nos permitirá identificar, por ejemplo, si la disposición y la manera en que piensan los estudiantes al participar del estudio, son acordes a lo mostrado en el trascurso habitual del curso. Asimismo, estamos en condiciones de minimizar los riesgos que según Ball, implica esta perspectiva de investigación. En particular, la posibilidad de sesgar la investigación. Esto, porque el objetivo específico de nuestro trabajo es indagar abiertamente sobre los significados que los alumnos le atribuyen al signo de igual, en contexto algebraico. Entonces, no necesitamos condicionarlos a dar un tipo de respuesta en particular. Por el contrario, bastará con observar y escuchar sus razonamientos para alcanzar nuestro objetivo. Cabe destacar que el carácter exploratorio del presente trabajo no nos impedirá observar, al mismo tiempo, aquellas instancias de trabajo que provoquen cambios en la comprensión de los alumnos. Esto es, situaciones que puedan generar aprendizaje, aun cuando no haya sido ese su propósito original.

Una vez adoptado el rol de profesor-investigador (Ball, 2000), necesitamos decidir qué instrumentos utilizar para recabar las evidencias que, como dijimos, analizadas a la luz del marco teórico, nos permitan responder las preguntas y alcanzar los objetivos establecidos. Por un lado, aplicaremos un cuestionario cuyas actividades estén íntimamente articuladas con el marco teórico y el objetivo de nuestra investigación. Con esto queremos decir que la resolución de cada actividad, a priori, requerirá el uso de uno o más significados del signo de *igual*, y que todas las actividades en conjunto, abarcarán el mayor espectro posible de significados, de acuerdo a la clasificación de Molina (2006) y Molina et al. (2009), ampliada por Burgell (2012), ya desarrollada en el capítulo anterior. De este modo, las respuestas al cuestionario presentadas por los estudiantes, nos permitirán indagar sobre los usos y los significados que ellos le atribuyen al signo de *igual* en contexto algebraico. Por otro lado, realizaremos una serie de entrevistas con aquellos estudiantes que, ya sea por la originalidad de sus respuestas al cuestionario, o porque dichas respuestas representan interpretaciones reiteradas del signo de *igual*, resulte útil profundizar en ellas, para lo cual seguiremos tomando en cuenta el marco teórico y los objetivos de investigación establecidos. Asimismo, para complementar las evidencias obtenidas mediante la aplicación del cuestionario y la realización de entrevistas, queremos desarrollar sesiones de trabajo con el grupo de estudiantes. El modo de gestionar estas sesiones, así como también, el tipo de tareas que propondremos, lo presentamos a continuación.

Szydlik (2015) sostiene que la cultura matemática escolar se caracteriza por conversaciones y prácticas, aunque tradicionalmente se enfatiza en esta última, es decir, mostrar a los estudiantes una posible forma de “hacer matemática” y luego solicitarles que la reproduzcan. Frente a ello, la autora reporta tres experiencias de clase que jerarquizan la conversación entre docente y alumnos, y que comienzan con una pregunta para discutir y reflexionar sobre el uso de los símbolos, de las representaciones, o del lenguaje matemático. Ella señala que con esta metodología, los estudiantes pueden reconocer las fortalezas y las debilidades de sus propias interpretaciones, al tiempo que los profesores pueden conocer un poco más sobre la forma en que piensan sus estudiantes. Las experiencias de clase reportadas, según la autora, también permiten contrastar los tipos de pensamiento de los estudiantes con los significados dados por la comunidad matemática, estableciendo las bases para resolver problemas y discutir otros principios y prácticas matemáticas. Asimismo, agrega, estas experiencias validan las diferentes formas en que los estudiantes interpretan los objetos matemáticos, favoreciendo la participación de aquellos que hasta el momento se han mostrado reticentes. Szydlik concluye que la práctica de indagación sobre los significados de los símbolos, las representaciones, y el lenguaje matemático debe continuar, para que las reglas matemáticas dejen de ser proporcionadas por el docente, y la comprensión matemática sea desarrollada por los estudiantes.

A la luz de las consideraciones metodológicas presentadas, acordamos que las sesiones de trabajo a desarrollar estarán caracterizadas por la práctica de indagación (Szydlik, 2015). Es decir, indagaremos sobre los usos y los significados que le atribuyen al signo de *igual* en contexto algebraico, los estudiantes de segundo año, a partir de ciertas actividades que propondremos para su discusión en forma colectiva, desde nuestro rol de profesores-investigadores (Ball, 2000). El diseño de estas tareas estará supeditado a las consideraciones metodológicas que presentamos a continuación.

Zaslavsky (2008) propone diseñar y aplicar tareas que impliquen analizar similitudes y diferencias entre objetos matemáticos. Señala que, según Bornstein (1984), y Reed (1972), clasificar las entidades que se perciben es una actividad cognitiva que favorece la estructuración y la comprensión de las mismas, al tiempo que además, reduce al mínimo el uso de la memoria necesaria para tratar con la nueva información. También destaca que según Rosch (1973, 1975), la agrupación de conceptos en distintas categorías es un aspecto central del aprendizaje, pues requiere de la identificación de similitudes y diferencias entre objetos desde varias perspectivas, siendo ello fundamental para el pensamiento matemático. La autora también resalta que, según Silver (1979), English (1997) y Swan (2007), la clasificación de diferentes objetos de acuerdo a diversos criterios puede favorecer la comprensión de las formas en que estos se relacionan entre sí.

Zaslavsky (2008) sostiene que las tareas de clasificación y de comparación son de naturaleza abierta y que pueden generar intensos debates, pues los estudiantes deben acordar qué características en común tienen los objetos analizados y/o qué relación existe entre las diferentes formas de representación de cada uno de ellos. Estos tipos de tareas, agrega, permiten profundizar en el pensamiento y la comprensión matemática de los estudiantes, además de que son accesibles para una amplia gama de alumnos, pues la diferencia radica en la profundidad con que cada uno de ellos realice el análisis correspondiente. Asimismo, implican múltiples puntos de acceso y variadas estrategias de resolución, aportando cierto grado de incertidumbre en cuanto a las formas de proceder y a las soluciones que los estudiantes puedan obtener. Sin embargo, aclara, los docentes que han implementado estas tareas señalan que generan aprendizajes significativos, y que los estudiantes se entusiasman y se comprometen con la realización de cada una de ellas. La autora destaca que además de los méritos cognitivos, las tareas de clasificación y de comparación señaladas, pueden modificar las normas socio-matemática del aula y la disposición de los estudiantes hacia la matemática.

En virtud de estas consideraciones metodológicas, que destacan el potencial de ciertas tareas para generar intensos debates entre los estudiantes, lo que a su vez permite identificar maneras de pensar y grados de comprensión matemática, acordamos que para las sesiones de trabajo, diseñaremos tareas de clasificación y de comparación (Zaslavsky, 2008). De este modo, al propiciar la discusión colectiva de los estudiantes, en relación a la temática abordada, podremos profundizar en los significados que le atribuyen al signo de *igual* en contexto algebraico, contribuyendo así con el objetivo de esta investigación.

En síntesis, hemos tomado una serie de decisiones que se reflejan en el método que emplearemos en esta investigación. Desde nuestro rol de profesores-investigadores (Ball, 2000), aplicaremos un cuestionario, realizaremos una serie de entrevistas, y desarrollaremos sesiones de trabajo con el grupo basadas en la práctica de indagación (Szydlik, 2015), para las cuales diseñaremos tareas de clasificación y de comparación (Zaslavsky, 2008). Cabe destacar que las actividades a implementar tendrán por objetivo observar las reacciones de los alumnos, analizar un estado de conocimientos. Sin embargo, dado que por su diseño serán situaciones que inviten a la reflexión, y que en general buscarán producir conflictos en los estudiantes, sostenemos que podrán generar aprendizaje y por ende, pondremos especial atención en ello. En la siguiente sección profundizamos en la descripción e implementación del método.

4.2 Método

Para cumplir con los objetivos de nuestra investigación, realizamos un estudio de casos con un grupo de estudiantes que estaba terminando de cursar el segundo año del Ciclo Básico de Enseñanza Secundaria (13-14 años). El grupo estaba a nuestro cargo y correspondía a alumnos de una institución educativa privada de la ciudad de Montevideo. Aplicamos cuestionarios, realizamos entrevistas y desarrollamos dos sesiones de trabajo con el grupo. El cuadro 6, que se muestra a continuación, resume las acciones y los objetivos que tuvieron lugar en cada una de las etapas del método desarrollado:

<table>
<tr><th></th><th>Acciones</th><th>Objetivos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Fase I</td><td>Diseño del cuestionario y análisis a priori</td><td rowspan="2">Evaluar el diseño del cuestionario y realizar los ajustes necesarios.</td></tr>
<tr><td>Aplicación del cuestionario con objetivos exploratorios</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fase II</td><td>Re-elaboración de algunas preguntas del cuestionario</td><td rowspan="2">Recabar información respecto a las concepciones que tienen los estudiantes sobre los usos y los significados del signo de igual en contexto algebraico.</td></tr>
<tr><td>Aplicación del cuestionario en un grupo de estudiantes de segundo año de secundaria</td></tr>
<tr><td>Fase III</td><td>Entrevistas a estudiantes</td><td>Profundizar en las respuestas dadas al cuestionario de parte de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fase IV</td><td>Primera sesión de trabajo con el grupo</td><td rowspan="2">Recabar más información respecto a la temática analizada.
Escuchar a los alumnos, confrontarlos, analizar sus argumentos para convencer a otros.</td></tr>
<tr><td>Segunda sesión de trabajo con el grupo</td></tr>
</table>

Cuadro 6. Síntesis de las acciones y los objetivos de cada fase del método de investigación empleado en este estudio.

En la fase I, aplicamos un cuestionario piloto en otro grupo de segundo año que también estaba a nuestro cargo y que correspondía a la misma institución educativa. Los estudiantes que respondieron este cuestionario se encontraban en una situación similar a la que se encontraban los alumnos que luego responderían el cuestionario definitivo: se desenvolvían en un ambiente favorable al estudio, eran apoyados desde la institución, y tenían un muy buen nivel socioeconómico. El cuestionario piloto se aplicó para evaluar su diseño y poder ajustar aquellos aspectos que consideráramos oportuno, en virtud de los resultados obtenidos. Los alumnos dispusieron de 160 minutos para responderlo, distribuidos en dos sesiones consecutivas de 80 minutos cada una. En un grupo que era de 30 alumnos, a la primera sesión asistieron 25 alumnos y a la segunda sesión asistieron 26, siendo 24 los que asistieron a ambas sesiones. La propuesta del cuestionario piloto se incluye en la sección Anexos. Su aplicación nos permitió mejorar la redacción de varias preguntas así como definir con cuáles preguntas nos quedaríamos en el cuestionario definitivo.

En la fase II, aplicamos el cuestionario definitivo con el grupo de segundo año que señalamos al comienzo de la sección. Como consecuencia de los ajustes realizados al cuestionario piloto, el tiempo destinado para responder esta nueva versión del cuestionario se redujo a 120 minutos, distribuidos en una primera sesión de 80 minutos y una segunda sesión de 40 minutos. El grupo era de 31 alumnos, a la primera clase asistieron 27 alumnos y a la segunda clase asistieron 29, siendo 26 los que asistieron a ambas sesiones. Consideramos las respuestas de estos 26 alumnos para el análisis de los resultados obtenidos. El diseño del cuestionario definitivo, y su correspondiente análisis a priori, se presentan en la sección 4.3.

En la fase III, realizamos un primer análisis de los resultados obtenidos al aplicar el cuestionario definitivo, y preseleccionamos 7 estudiantes para realizarles entrevistas La finalidad de estas entrevistas fue profundizar en algunas de las respuestas presentadas por estos estudiantes, ya sea por su originalidad o por ser representativas de las respuestas dadas por otros estudiantes. Seleccionamos estudiantes que en su totalidad abarcaran distintas maneras de pensar y responder el cuestionario. El día que realizamos las entrevistas asistieron 5 de los 7 alumnos preseleccionados. Las entrevistas fueron audio-grabadas.

En la fase IV, desarrollamos dos sesiones de trabajo con el grupo, que duraron 80 minutos cada una. En cada sesión, presentamos una tarea para realizar en pequeños grupos (sesión 1) o en forma individual (sesión 2). Luego procedimos a realizar una puesta en común, que fue audio-grabada. La finalidad de estas instancias fue recabar más información sobre los usos y los significados del signo de *igual* en contexto algebraico. Nuestra postura, en ambas sesiones, consistió en escuchar a los alumnos, confrontarlos, analizar los argumentos que exponían para convencer a los otros, así como también, identificar qué dificultades presentaban y de qué modo podían superarlas. Se desprende de lo anterior que no fue un objetivo específico de estas sesiones generar aprendizajes, sino más bien, como dijimos, profundizar en las respuestas de los estudiantes respecto a la temática que estábamos abordando. El diseño de las tareas presentadas en estas sesiones se describe en la sección 4.4.

4.3 El cuestionario

Como dijimos en la sección 4.2, aplicamos un cuestionario. El cuestionario consta de 16 actividades. De la actividad 1 a la 4 exploramos la comprensión que tienen los estudiantes de los significados y los usos del signo de *igual* en contexto aritmético, de la actividad 5 a la actividad 13 hacemos lo propio en un contexto de resolución de ecuaciones, y de la actividad 14 a la actividad 16 exploramos dicha comprensión en un contexto de operatoria con polinomios.

Las actividades se distribuyen en un total de ocho hojas simples. Cada hoja contiene de una a cuatro actividades. Durante la aplicación del cuestionario, a cada estudiante le proporcionamos de a una hoja, con hasta tres o cuatro actividades en cada una, tal como se muestra en el cuadro 7, y no le entregamos la siguiente hoja hasta que no terminara y entregara la hoja anterior. De este modo, evitamos re-correcciones que interfirieran en el análisis posterior de los resultados obtenidos.

Hoja	1	2	3	4	5	6	7	8
Actividades incluidas	1, 2, 3	4	5, 6, 7, 8	9, 10, 11	12, 13	14	15	16

Cuadro 7. Distribución de las actividades del cuestionario, por hoja de trabajo.

4.3.1 Análisis a priori del cuestionario

De la actividad 1 a la actividad 4, que fueron tomadas de Burgell (2012), exploramos si los estudiantes que participan en este estudio, que ya han incursionado en el estudio del álgebra, muestran cierta evolución en cuanto a la comprensión de los significados y los usos del signo de *igual* en contexto aritmético, en comparación con los estudiantes que intervinieron en el estudio de Burgell, por ejemplo, quienes aún no habían incursionado en el estudio del álgebra.

De la actividad 5 a la actividad 13, indagamos qué usos y qué significados le atribuyen al signo de *igual*, en un contexto de resolución de ecuaciones, los estudiantes que participan de este trabajo. Asimismo, buscamos explorar si existe alguna relación entre la comprensión del signo de *igual* mostrada por los estudiantes en contexto aritmético, y su desempeño al trabajar en contexto de ecuaciones. En otro orden, hemos optado por emplear la letra x para referirnos a la variable de cualquier ecuación que intervenga en las actividades presentadas. Si bien entendemos que es importante hacer un uso variado de las letras al trabajar con ecuaciones, creemos que en esta oportunidad ello generaría una dificultad extra para los estudiantes, que podría interferir en el análisis posterior de las respuestas obtenidas. De esta forma, situamos el foco de atención en lo que nos concierne, de acuerdo al objetivo que nos propusimos: explorar los usos y los significados del signo de *igual*, en estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria que incursionaron en el estudio del álgebra.

De la actividad 14 a la actividad 16, exploramos qué usos y qué significados le atribuyen al signo de *igual*, en un contexto de operatoria con polinomios, los estudiantes que participan de este estudio. Asimismo, buscamos indagar si existe alguna relación entre la comprensión del signo de *igual* mostrada por los estudiantes en contexto aritmético y de resolución de ecuaciones, y su desempeño al trabajar en contexto de polinomios. En este contexto, al igual que en contexto de ecuaciones, hemos optado por emplear la letra x para referirnos a la variable de cualquier polinomio que intervenga en las actividades presentadas, debido a las consideraciones ya señaladas anteriormente. A continuación presentamos el análisis a priori de cada una de las actividades incluidas en el cuestionario:

1) *Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.*

a) $18 + 6 = \_\_ + 5$

b) $90 \div 3 = \_\_ + 3 = \_\_$

En esta actividad planteamos dos expresiones con uno o dos espacios en blanco para completar con números, de forma tal que se cumplan la o las *igualdad*es que intervienen en cada una de ellas. En ambos casos empleamos números que faciliten la operatoria, para evitar ciertos errores de parte de los estudiantes que, eventualmente, pudiesen dificultar el análisis de las respuestas obtenidas.

Con la primera expresión buscamos ver si los alumnos interpretan el signo de *igual* exclusivamente como un *operador* o como una *propuesta de actividad*, o si además pueden interpretarlo como la *expresión de una equivalencia numérica*, que sería lo adecuado para esta situación. Por un lado, aquellos alumnos que vean el signo de *igual* solo como un *operador*, o como una *propuesta de actividad*, podrán completar el espacio en blanco con el número 24, que es el resultado de 18+6. Por otro lado, quienes logren visualizar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, podrán completar el espacio en blanco con el número 19, que es el número que al sumarle 5 da *igual* que 18+6.

En la segunda expresión agregamos una variante respecto a la anterior que consiste en colocar otro signo de *igual* y otro espacio en blanco. En este caso, aquellos alumnos que vean el signo de *igual* solo como un *operador*, o como una *propuesta de actividad*, podrán completar el primer espacio en blanco con el número 30 y el segundo espacio en blanco con el número 33; mientras que aquellos alumnos que logren interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, y además atiendan el carácter transitivo de la *igualdad*, podrán completar los espacios en blanco con los números 27 y 30 respectivamente. Burgell señala que esta tarea fue una de las que más dificultades les generó a los estudiantes que participaron en su estudio, siendo de nuestro interés observar si sucede lo mismo con nuestros alumnos que, a diferencia de los anteriores, han incursionado en el estudio del álgebra.

2) *Contesta si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.*

a) $16 = 7 + 9$

b) $5 + 9 = 14 \div 2 = 7$

Presentamos aquí dos sentencias para que los estudiantes determinen la validez de cada una de ellas, así como también, justifiquen cada una de sus decisiones. Al igual que antes, hemos empleado números que faciliten la operatoria para evitar ciertos errores que dificulten el análisis posterior. Asimismo, en la consigna de la actividad hemos preferido emplear el término "*igualdad*es" en vez del término "sentencias", dado que es la forma en que habitualmente los libros de texto y los profesores de este nivel nos referimos a estas expresiones.

Con la primera sentencia pretendemos indagar si los estudiantes son capaces de aceptar el significado del signo de *igual* como *expresión de una acción*, lo cual podrá conducirlos a afirmar que la misma es verdadera, o si, por el contrario, mantienen una interpretación del signo de *igual* como *operador*, que eventualmente les impida aceptar dicha *igualdad*.

La segunda de las sentencias presentadas está relacionada con la planteada en 1)b). Aquí hemos utilizado propuestas de *igualdad*es encadenadas que muestran un error muy común que cometen los alumnos al realizar planteos, por lo cual esperamos que algunos de ellos presenten dificultades para interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, aún en el caso en que anteriormente hayan logrado interpretarlo de este modo. Ambas sentencias, esta y la 1)b), son las que mayores dificultades generaron en los estudiantes que participaron del estudio de Burgell, siendo de nuestro interés observar si sucede lo mismo con los alumnos que participan de este estudio.

3) *Contesta si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa, explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique.*

$$1 + 4 = 2 + 3, \textit{ entonces, } 1 + 4 + a = 2 + 3 + a$$

(a representa un número natural cualquiera)

En esta actividad proponemos una implicación verdadera cuya comprensión, de parte de los estudiantes, requiere interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica y simbólica*. Suponemos que aquellos estudiantes que no logren aceptar la primera *igualdad* planteada, difícilmente le encuentren sentido a la implicación que se propone posteriormente. Creemos oportuno explorar la reacción de los estudiantes frente a esta implicación, así como también, analizar sus argumentos al justificar si es verdadera o falsa, dado que tiene estrecha vinculación con las estrategias de resolución de ecuaciones que habitualmente desarrollan en este nivel educativo. Creemos que al estar trabajando con estudiantes que han incursionado en el estudio del álgebra, los resultados obtenidos podrán ser sensiblemente superiores a los reportados por Burgell, quien destaca que más de la mitad de los estudiantes que participaron de su estudio ni siquiera presentaron una respuesta para esta actividad.

4) *Las siguientes actividades se refieren al símbolo que te presentamos a continuación:*

=

a) ¿Cuál es el nombre que tiene este símbolo?

b) Explica con tus palabras cuál es el significado que tiene para ti este símbolo.

c) ¿En qué situaciones de clase has utilizado este símbolo? Ejemplifica mostrando, al menos, tres situaciones distintas.

d) ¿Para qué se utiliza el = en cada una de las situaciones que presentaste?

Aquí les pedimos a los estudiantes que escriban cuál es el nombre y el significado que tiene para ellos el signo de *igual*, así como también, que muestren tres situaciones de clase en las que hayan utilizado dicho símbolo, y expliquen con qué fin se utiliza en cada caso. Nos proponemos buscar algunos indicios que enriquezcan y complementen la información que pueda recabarse con las respuestas de las actividades anteriores, así como también, indagar cuáles son los distintos significados a los que pueden aludir los estudiantes al tener que describir las situaciones de clase solicitadas. En este sentido, al estar trabajando con estudiantes que han incursionado en el estudio del álgebra, esperamos que surjan ejemplos en que se utilice el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional* y como *expresión de una equivalencia simbólica*, aunque no descartamos que muchos estudiantes continúen mostrando una interpretación mayoritariamente o exclusivamente *operacional* del signo de *igual*.

5) *a) Resuelve la ecuación* $3x + 5 = 26$. *Explica cómo lo haces.*

b) La solución de la ecuación anterior es: ___

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

En esta actividad queremos observar qué estrategias emprenden los estudiantes para resolver y *verificar* una ecuación del tipo $ax + b = c$. En particular, nos interesa analizar qué usos del signo de *igual* quedan de manifiesto al desarrollar tales estrategias.

En cuanto a la resolución de la ecuación, aquellos alumnos que en contexto aritmético hayan visto el signo de *igual* como un *operador* o como una *propuesta de actividad*, ya sea en forma mayoritaria o exclusiva, podrán presentar más dificultades en comparación con los estudiantes que en tal contexto hayan logrado interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*. Asimismo, podrán emplear estrategias de resolución más rudimentarias, como ser la técnica del tanteo o la transposición de términos, en vez de realizar la misma operación a ambos miembros de la ecuación. Cabe destacar que si bien hemos planteado una ecuación sencilla, tratamos de impedir el cálculo mental de la solución. De todas formas reconocemos que existe la posibilidad de que algunos estudiantes calculen mentalmente la solución solicitada.

En cuanto a la *verifica*ción de esta ecuación, creemos que no es necesaria una interpretación muy avanzada del signo de *igual*, dado que al sustituir en la ecuación la variable por 7, que es la solución, se obtiene $3.7 + 5 = 26$, siendo esta una *igualdad* que favorece una interpretación *operacional*. Sin embargo, no descartamos que algunos alumnos resuelvan con error la ecuación, efectúen la *verifica*ción con una solución que no sea correcta, no obtengan una *identidad estricta*, y sin embargo, eso no les alcance para descartar la solución obtenida.

6) *Cuando planteamos la ecuación* $x + 3 = 3x + 5$*, ¿qué significa el signo de igual que se coloca entre las expresiones de la izquierda y de la derecha?*

Aquí les pedimos a los estudiantes que escriban el significado que tiene para ellos el signo de *igual*, cuanto este interviene en una ecuación del tipo $ax + b = cx + d$. Nos proponemos buscar algunos indicios que enriquezcan y complementen la información que pueda recabarse con las respuestas de las otras actividades, así como también, indagar cuáles son los distintos significados a los que pueden aludir los estudiantes al tener que responder esta pregunta. Creemos que aquellos que anteriormente hayan mostrado una comprensión más avanzada del signo de *igual* podrán aquí dejar al descubierto una mayor aceptación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, en comparación con el resto de los estudiantes.

7) *¿Es 15 solución de la ecuación* $x - 3 = 15$*? ¿Por qué? Realiza los planteos que sean necesarios.*

Aquí planteamos una ecuación del tipo $ax + b = c$ y preguntamos si un número dado es su solución. Cabe destacar que el número dado coincide con el número que aparece en el segundo miembro de la ecuación, para explorar si los estudiantes confunden el concepto solución de una ecuación con el término que aparece en el segundo miembro de este tipo de ecuaciones. Creemos que interpretar el signo de *igual* en su carácter de *operador* podría estar incidiendo en esta confusión, lo cual a su vez estaría obstaculizando la aceptación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. Eso es lo que queremos analizar con la presente pregunta.

En otro orden, aquellos alumnos que no cometan el error señalado anteriormente, podrán sustituir en la ecuación la variable por el valor dado para ver si se obtiene una *identidad estricta*, o resolver la ecuación y ver si la solución obtenida coincide con la dada. En tal sentido, queremos analizar qué relación hay entre la comprensión del signo de *igual* que hayan mostrado los estudiantes en forma previa, y la estrategia que emplean para resolver esta actividad.

8) *Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.*

Aquí les solicitamos a los estudiantes que escriban una ecuación cuya solución sea un número dado, con la finalidad de analizar qué tipo de expresiones generan para cumplir con la condición exigida. Creemos que la mayoría de los estudiantes que resuelvan esta actividad presentarán expresiones del tipo $ax + b = c$, en especial aquellos que en respuestas anteriores hayan interpretado el signo de *igual* como *operador* o *propuesta de actividad*. A su vez, estos últimos podrán volver a confundir el concepto solución de una ecuación con el término que aparece en el segundo miembro de este tipo de ecuaciones, en mayor proporción respecto a quienes anteriormente hayan interpretado el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica* o *expresión de una equivalencia condicional*, lo que los conduciría a escribir ecuaciones del tipo $ax + b = 5$.

9) *Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.*

$$2x + 15 = 31 \qquad\qquad 2x + 15 - 9 = 31 - 9$$

En esta actividad, tomada de Knuth et al. (2008), presentamos dos ecuaciones, que son equivalentes y cuya variable aparece en el primer miembro, y preguntamos si tienen la misma solución.

Por un lado, nos interesa observar las estrategias que desarrollan los estudiantes para dar respuesta a la pregunta planteada. Se nos ocurren tres posibles formas en que se podría abordar esta actividad: resolviendo las dos ecuaciones y comparando las soluciones obtenidas, resolviendo una de las ecuaciones y verificando con ese valor en la otra ecuación, o reconociendo que se ha restado el mismo número a ambos miembros.

Por otro lado, queremos analizar qué relación existe entre las estrategias desarrolladas por los estudiantes y la comprensión que han mostrado en relación al signo de *igual* en las respuestas a las preguntas anteriores. Concretamente, es de nuestro interés explorar si los estudiantes que han interpretado el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica y/*o *expresión de una equivalencia condicional* son más propensos a desarrollar la última estrategia señalada antes, en comparación con aquellos que han visto el signo de *igual* como *operador* o *propuesta de actividad*, o si por el contrario, aplican una u otra estrategia en forma indistinta.

10) *Sabemos que 9 es la solución de la ecuación* $x + 18 = 27$*. ¿Es 9 solución de la ecuación* $x + 18 + 11 = 27 + 11$*? ¿Por qué? Responde sin resolver las ecuaciones.*

En esta actividad, también tomada de Knuth et al. (2008), a diferencia de la anterior presentamos la solución de una de las ecuaciones dadas y preguntamos si la otra tiene la misma solución. Asimismo, no permitimos que las ecuaciones sean resueltas, para explorar si con esta limitación encontramos que son más los estudiantes que tienden a identificar la equivalencia reconociendo que se ha sumado el mismo número a ambos miembros, en comparación con los estudiantes que trabajaron de ese modo en la actividad anterior. Por lo demás, el análisis a priori no difiere del realizado anteriormente.

11) *a) Resuelve la ecuación* $31 = 4x + 7$*. Explica cómo lo haces.*

b) La solución de la ecuación anterior es: ___

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

En esta actividad presentamos una variante respecto a la actividad 5, que consiste en plantear una ecuación que tiene la variable del lado derecho. Buscamos explorar si con esta modificación generamos una dificultad extra en los estudiantes, o si por el contrario, obtenemos resultados similares a los de la activdad 5. En particular, creemos que aquellos estudiantes que en respuestas anteriores hayan interpretado el signo de *igual* como *expresión de una acción*, no se verán en la obligación de invertir los miembros de lugar durante la resolución y/o *verificación* de la ecuación dada, a diferencia de los estudiantes que previamente hayan visto el signo de *igual* mayoritariamente como un *operador* o una *propuesta de actividad*. Por lo demás, el análisis a priori no difere del ya realizado antes.

12) *Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.*

$$18 = 2x + 4 \qquad\qquad 3\,.\,18 = 3\,.\,(2x + 4)$$

Aquí presentamos dos variantes respecto a la actividad 9, a saber, planteamos la misma tarea pero con ecuaciones que tienen la variable del lado derecho, además de que la operación realizada a ambos miembros es una multiplicacion, en vez de una suma. Buscamos explorar si con estas modificaciones generamos una dificultad extra en los estudiantes, o si por el contrario, obtenemos resultados similares a los de la actividad 9. Al igual que en la actividad anterior, también aquí exploraremos si la comprensión evidenciada previamente por los estudiantes en relación al signo de *igual* como *expresión de una acción*, implica una mayor o menor necesidad de invertir los miembros de lugar al resolver ecuaciones como las involucradas en esta actividad (en caso que los estudiantes decidan resolver al menos una de las dos ecuaciones). Por lo demás, el análisis a priori no difere del realizado para la actividad 9.

13) *Sabemos que 8 es solución de la ecuación* $2x + 1 = 17$*. ¿Es 8 solución de la ecuación* $17 = 2x + 1$*? ¿Por qué? Responde sin resolver las ecuaciones.*

En esta actividad, al igual que en la 10, volvemos a presentar dos ecuaciones y la solución de una de ellas, y preguntamos si la otra tiene la misma solución, pero proponemos una variante: la segunda ecuación no se obtiene al sumar un mismo número a ambos miembros, sino al invertir de lugar las expresiones respecto del signo de *igual*. Buscamos explorar si con estas modificaciones, los estudiantes responden en forma afirmativa atendiendo a la propiedad simétrica de la *igualdad*, o si por el contrario se limitan a *verificar* que con el valor dado se obtiene una *identidad estricta*. Una vez más estará en juego la comprensión del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, y eventualmente, como *expresión de una equivalencia numérica.*

14) *Juan está trabajando en un ejercicio planteado en clase que dice lo siguiente:*

Reducir términos semejantes.

$$4x^2 + x + x + 5x^2$$

En su cuaderno escribe: $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$

¿Consideras que ya ha terminado la tarea indicada? En caso afirmativo explica por qué y en caso negativo explica qué le faltaría hacer para completar la tarea.

Aquí planteamos la equivalencia entre un polinomio dado y su expresión reducida, y preguntamos si la tarea está terminada, solicitando además una justificación de la respuesta presentada. Queremos indagar si los estudiantes ven el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, lo que les permitirá afirmar que la tarea mostrada está terminada, o si por el contrario entienden que al reducir polinomios siempre debe obtenerse un polinomio con un solo término, en una clara alusión a la interpretación del signo de *igual* en su carácter de *operador* o *propuesta de actividad*. También es de nuestro interés explorar si existe relación alguna entre la comprensión del signo de *igual* mostrada por los estudiantes en los contextos aritmético y de resolución de ecuación, en comparación con la comprensión del signo de *igual* mostrada en esta actividad.

15) *El profesor le planteó a sus estudiantes una tarea para trabajar con el tema polinomios. Te pedimos que la resuelvas.*

Indica si cada una de las siguientes expresiones son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas señala qué es lo que está mal, y corrígelas para que sean verdaderas.

a) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

b) $4x = x + 3x$

c) $x = x$

d) $5 + x = 5 + x$

e) $3x^2 + 4x^2 = 2x^2 + 5x^2$

f) $7x + 2x = 9x$

En esta actividad planteamos seis expresiones para que los estudiantes determinen la validez de cada una de ellas, proporcionando en cada caso los argumentos que consideren oportunos.

Con las expresiones a) y b) buscamos ver si los alumnos interpretan el signo de *igual* como *expresión de una acción.* La diferencia está en las operaciones que intervienen en las expresiones que se ubican a cada lado del signo de *igual*.

Con las expresiones c) y d) queremos explorar si los estudiantes interpretan el signo de *igual* como *expresión de una identidad estricta*. En la cuarta expresión c) no intervienen operaciones, mientras que en expresión d) interviene una suma a cada lado del signo de *igual*. De este modo esperamos analizar si la ausencia o presencia de operaciones a cada lado del signo de *igual* les genera a los estudiantes una dificultad extra para aceptar las identidades presentadas.

En las expresiones e) y f) pretendemos analizar si los estudiantes ven el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*. La diferencia radica en la cantidad de términos que figuran del lado derecho del signo de *igual*: mientras que en la expresión f) aparece un solo término, en la expresión e) aparecen dos. Por este motivo, creemos que puede generar mayores dificultades aceptar la validez de esta última expresión, en comparación con la anterior.

En todos los casos, al igual que en la actividad anterior, queremos observar si existe relación alguna entre la comprensión del signo de *igual* mostrada por los estudiantes en los contextos aritmético y de resolución de ecuación, en comparación con la comprensión del signo de *igual* mostrada en esta actividad.

16) *La profesora escribe en el pizarrón que si reducimos monomios semejantes en la expresión* $x + x + 5 + 7$ *obtenemos* $2x + 12$. *Es decir que:*

$$x + x + 5 + 7 = 2x + 12$$

Luego solicita a los alumnos que indiquen si lo escrito en cada renglón es Verdadero (V) o Falso (F). En caso de ser verdadero, les pide que expliquen por qué, y en caso de ser falso, les pide que indiquen qué es lo que está mal.

a) $-5(x + x + 5 + 7) = -5(2x + 12)$
b) $2x + 12 = x + x + 5 + 7$
c) $x + x + 5 + 7 - 4 = 2x + 12 - 6$

Te pedimos que resuelvas la tarea planteada.

En esta actividad presentamos un ejemplo de cómo reducir polinomios, y planteamos tres expresiones relacionadas con ese ejemplo para que los estudiantes analicen su validez, justificando en cada caso.

Nos interesa observar las estrategias que desarrollan los estudiantes para resolver la tarea solicitada. En cada caso, se nos ocurren dos posibilidades: operando en cada expresión por separado y comparando las expresiones reducidas obtenidas (en todos los casos), o reconociendo que se ha multiplicado el mismo número a ambos lados del signo de *igual* en el caso a), que se han invertido de lugar las expresiones respecto al signo de *igual* en el caso b, y que se han restado nùmeros distintos a ambos lados del signo de *igual* en el caso c.

Por otro lado, queremos analizar qué relación existe entre las estrategias desarrolladas por los estudiantes y la comprensión que han mostrado en relación al signo de *igual* en las respuestas a las preguntas anteriores. Concretamente, pretendemos explorar si aquellos que hasta el momento han visto el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, son más propensos a desarrollar la última estrategia señalada anteriormente, en comparación con aquellos que han interpretado el signo de *igual* mayoritariamente como un *operador* o como *expresión de una acción*, o si por el contrario, aplican una u otra estrategia en forma indistinta.

Cabe destacar que esta actividad tiene puntos en común con varias de las actividades presentadas en contexto de ecuaciones (por ejemplo, con la 9 y 10) y que por tanto representa una oportunidad para analizar si el contexto dado, ya sea polinomios o ecuaciones, facilita, dificulta o no interfiere en el desempeño de los estudiantes.

4.3.2 Relación del cuestionario con el pensamiento algebraico

Como señalamos en la sección 1.2, nuestro trabajo de indagación se enmarca en la noción de *pensamiento algebraico* que abordamos en el primer capítulo de este trabajo. Según Radford (2011), el *pensamiento algebraico* tiene que ver con ciertas formas de razonar, y no necesariamente con la utilización de letras para representar cantidades desconocidas. Por el contrario, un tipo de pensamiento es algebraico cuando se opera con estas cantidades, como si fueran conocidas, del mismo modo en que se opera con los números. A la luz de esas consideraciones teóricas, entendemos que las actividades incluidas en el cuestionario, incluso aquellas que no requieren necesariamente la utilización de letras, implican el uso de *pensamiento algebraico*, en el sentido en que acabamos de señalar. Esto, principalmente, luego de analizar las nociones matemáticas y las estrategias de resolución que esperamos desarrollen los alumnos para resolver cada una de las actividades.

Por ejemplo, en la actividad 1)a) del cuestionario planteamos una expresión con un espacio en blanco para completar con un número, de modo tal que se obtenga una *igualdad* numérica. En este caso, la cantidad desconocida no está representada por una letra, por el contrario, está representada por un espacio en blanco. Sin embargo, atendiendo la perspectiva de Radford, eso no quita que los estudiantes puedan desarrollar un pensamiento de tipo algebraico para resolver la actividad, en la medida en que operen con ese espacio en blanco como si fuera un número conocido. Por su parte, en la actividad 3 presentamos una implicación verdadera en la que intervienen las expresiones $2+3=1+4$ y $2+3+a=1+4+a$, y los estudiantes deben analizarla para reconocer su validez. En este caso, ellos pueden interpretar que se ha operado con una cantidad desconocida (representada en este caso con la letra a) como si fuera un número conocido, siendo esta la característica principal que nos permite asociar dicha actividad con la noción de pensamiento algebraico señalada anteriormente.

La relación entre las actividades del cuestionario y la noción de pensamiento algebraico ya descrita, es aún más clara cuando nos referimos a las actividades propuestas en contexto de ecuaciones o en contexto de operaciones con polinomios. Por ejemplo, en la actividad 9 planteamos dos ecuaciones equivalentes y preguntamos si tienen la misma solución. Aquí los estudiantes deben resolver al menos una de las ecuaciones, o en su defecto, reconcer que a una de ellas se le ha restado un mismo número a cada lado del signo de *igual*, para obtener la otra. En ambos casos, tanto al resolver las ecuaciones como al identificar la equivalencia en forma directa, es necesario concebir la cantidad desconocida (simbolizada en este caso con la letra x) como si fuera conocida, y operar con ella del mismo modo en que se opera con los números. Consideraciones similares podemos realizar con actividades como la 15) e), por ejemplo, en la que se indaga sobre la validez de la expresión $3x^2+4x^2=2x^2+5x^2$.

4.4 Las sesiones de trabajo

Como dijimos en la sección 4.2, desarrollamos dos sesiones de trabajo con el grupo, que duraron 80 minutos cada una. Para ello, diseñamos una tarea de clasificación (sesión 1) y una tarea de comparación (sesión 2), en el sentido en que lo plantea Zaslavsky (2008). Ambas tareas, que optamos por llamar tarea 1 y tarea 2 respectivamente, constan de dos partes cada una, que llamamos parte A y parte B.

La sesión 1 se desarrolla un mes después de haber aplicado el cuestionario. Los estudiantes se organizan en equipos. Se entrega la parte A de la tarea 1 y se destinan 20 minutos para que los estudiantes trabajen en ella. Se le pide a cada equipo un registro escrito de los razonamientos que van surgiendo, incluyendo los razonamientos que luego sean modificados o descartados. Transcurrido ese tiempo, los equipos entregan sus trabajos escritos y se realiza la puesta en común correspondiente. Luego se presenta la parte B de la tarea, en forma colectiva, para seguir discutiendo. La puesta en común de la parte A y la discusión grupal de la parte B son audio-grabadas.

La sesión 2 se desarrolla una semana después de haber desarrollado la sesión 1. Los estudiantes trabajan en forma individual. Se entrega la parte A de la tarea 2 y se destinan 20 minutos para que los estudiantes trabajen en ella. A medida que van terminando, se les retira la parte A y se les entrega la parte B, para la cual disponen de 5 a 10 minutos para resolver. Transcurrido ese tiempo, todos los estudiantes entregan la parte B de la tarea, y discuten en forma colectiva sobre la tarea realizada. La puesta en común de las partes A y B son audio-grabadas. A continuación presentamos el diseño de las tareas 1 y 2, profundizando previamente en las consideraciones metodológicas que la respecto consideráramos en la primera sección de este capítulo.

4.4.1 Diseño de la tarea 1

Para diseñar la tarea 1, nos inspiramos en las tareas de clasificación (Zaslavsky, 2008), que consisten en proporcionar entre 20 y 30 tarjetas para que los estudiantes, reunidos en pequeños equipos, las clasifiquen de acuerdo a todos los criterios que crean convenientes. Para cada clasificación, los equipos deben indicar el criterio empleado y especificar las diferentes categorías establecidas. Asimismo, deben registrar el orden en que surgieron los diferentes criterios de clasificación. La puesta en común, según Zaslavsky, es un momento propicio para que surjan otros criterios, además de los considerados por cada equipo. La autora destaca la exigencia que implica el diseño de este tipo de tareas. Los objetos pueden presentarse a través de una o varias formas de representación. Asimismo, pueden emplearse tarjetas reales o una tabla en la que se incluyan los diferentes objetos y/o representaciones de un mismo objeto. Zaslavsky aclara que esta diferencia implica que en un caso, cada objeto pueda ubicarse en una sola categoría, mientras que en el otro, se admita la posibilidad de que integre más de una categoría a la vez. Este tipo de tareas, agrega, permite considerar aspectos conceptuales de los objetos matemáticos abordados, y no consisten en arribar a una única solución.

En nuestro caso, diseñamos seis juegos de 25 tarjetas cada uno. Cada tarjeta contiene una expresión en la que interviene el signo de *igual*. Las expresiones presentadas, en su mayoría, son tomadas de las actividades que conforman el cuestionario aplicado previamente. Asimismo, con estas expresiones, buscamos abarcar la mayor cantidad de significados y usos del signo de *igual* posible, de acuerdo al marco teórico y los objetivos de nuestra investigación. Las 25 expresiones que conforman cada juego de tarjetas son las siguientes:

A. $11 + 6 = 17$
B. $8 = 8$
C. $31 = 4x + 7$
D. $16 = 7 + 9$
E. $3x + 5 = 26$
F. $2x + 15 - 9 = 31 - 9$
G. $3x^2 + 4x^2 = 2x^2 + 5x^2$
H. $5 + 9 = 2 + 3 + 9$
I. $2x + 1 = 17$
J. $2x + 12 = x + x + 5 + 7$
K. $17 = 2x + 1$
L. $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$
M. $18 = 2x + 4$
N. $7x + 2x = 9x$
O. $x + 3 = 3x + 5$
P. $x + 18 + 11 = 27 + 11$
Q. $5(x + x + 5 + 7) = 5(2x + 12)$
R. $1 + 4 + x = 2 + 3 + x$
S. $1 + 4 = 2 + 3$
T. $4x = x + 3x$
U. $5(2x + 12) = 5(x + 18)$
V. $5 + x = 5 + x$
W. $3x + 5 = 2x + x + 5$
Y. $2x + 15 = 31$
Z. $x = x$

Como podemos observar, incluimos expresiones en contexto aritmético (cinco) y en contexto algebraico, tanto en el marco de las ecuaciones (diez) como en el marco de las operaciones con polinomios (diez). A su vez, los significados del signo de *igual* que están involucrados en ellas, son los de *operador*, *expresión de una* *acción*, *expresión de una equivalencia condicional*, *expresión de una equivalencia numérica*, *expresión de una equivalencia simbólica* e *identidad estricta*. Optamos por asociar cada expresión con una letra del alfabeto pero evitando el uso de la letra X, por ser esta la que se utiliza para representar la variable de las expresiones que se presentan en contexto algebraico. El cuadro 8 resume el significado del signo de igual y el contexto en el que se ubica cada una de las expresiones seleccionadas:

Contexto / Significado signo de *igual*	Contexto aritmético	Contexto ecuaciones	Contexto polinomios
Operador	A	(No corresponde)	L, N
Expresión de una acción	D	(No corresponde)	J, T, W
Expresión de una equivalencia condicional	(No corresponde)	$C, E, F, I, K, M, O, P, U, Y$	(No corresponde)
Expresión de una equivalencia numérica	H, S	(No corresponde)	(No corresponde)
Expresión de una equivalencia simbólica	(No corresponde)	(No corresponde)	R, G, Q
Identidad estricta	B	(No corresponde)	V, Z

Cuadro 8. Significado del signo de igual y contexto en el que se presenta cada expresión seleccionada para la tarea de la sesión 1.

Por un lado, en cuanto a las expresiones que se presentan en contexto aritmético, el signo de *igual* interviene en dos casos como *expresión de una equivalencia numérica*. La diferencia radica en que en un caso, aparece un mismo número sumando a cada lado del signo de *igual*, para explorar si los estudiantes establecen cierta conexión entre esa expresión y algunas de las que se presentan en contexto algebraico. Por otro lado, en cuanto a las expresiones que se presentan en contexto de ecuaciones, como era de esperar, el signo de *igual* interviene en todos los casos como *expresión de una equivalencia condicional*. Sin embargo, con ellas intentamos abarcar una variedad de situaciones. Por ejemplo, en algunos casos aparece la variable solo del lado izquierdo (expresiones E, F, I, P e Y) o solo del lado derecho (expresiones C, K y M), mientras que en otros casos aparece en ambos lados (expresiones O y U). Del mismo modo, en un caso se suma un mismo número a cada lado del signo de *igual* (expresión P), mientras que en otros casos se resta (expresión F) o se multiplica (expresión U) un mismo número a cada lado. Finalmente, en cuanto a las expresiones que se presentan en contexto de operaciones con polinomios, como lo señalamos en el marco teórico, el contexto es fundamental para distinguir en qué casos se utiliza el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, y en qué casos como *operador*. A los efectos de confeccionar la tabla anterior, interpretamos el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica* solo cuando en ambos lados del signo de *igual* aparecen expresiones por simplificar, mientras que, si aparece un polinomio totalmente reducido, ya sea del lado derecho o del lado izquierdo, interpretamos el signo de *igual* como *operador* o como *expresión de una acción*, respectivamente. La consigna de la actividad es la siguiente:

(A) *Han recibido 25 tarjetas con una expresión en cada una de ellas.*
Les pedimos que clasifiquen estas expresiones, de todas las maneras que crean posibles.
En cada clasificación:

- *Explicitar el criterio empleado.*
- *Especificar los subgrupos que se forman, de acuerdo a ese criterio.*
- *Indicar qué tarjetas están en cada subgrupo.*

(B) *De acuerdo al uso que tiene el signo de igual en cada expresión, ¿cómo clasificarían las tarjetas? ¿Por qué?*

La parte A de la actividad se plantea para que los estudiantes clasifiquen, de acuerdo a los criterios que les parezcan, las expresiones que aparecen en las tarjetas proporcionadas. Les pedimos que indiquen todos los criterios considerados, así como también, las categorías establecidas y las expresiones incluidas en cada una de ellas, para cada una de las clasificaciones. Queremos explorar si los estudiantes hacen algún tipo de mención a los usos y los significados del signo de *igual* en relación a las diferentes expresiones proporcionadas. La parte B de la actividad, en tanto, se propone para discutir explícitamente, y en forma colectiva, la relación que existe entre las expresiones presentadas y los diferentes usos y significados del signo de *igual*. Esta parte de la actividad adquiere especial utilidad en caso de que al término de la puesta en común de la parte A, ningún equipo haya hecho mención a los usos del signo de *igual* como uno de los criterios de clasificación, o si por el contrario, en caso de haberlo mencionado, lo haya hecho en forma confusa o poco explícita.

4.4.2 Diseño de la tarea 2

Para diseñar la tarea 2, nos inspiramos en las tareas de comparación (Zaslavsky, 2008), que consisten en presentar dos o más objetos matemáticos, y se les pide a los estudiantes que realicen un listado con todas las diferencias y semejanzas que logren identificar. Al igual que antes, se fomenta la discusión entre los estudiantes y se reflexiona en relación al aprendizaje generado con la realización de la tarea. Zaslavsky sostiene que el diseño de este tipo de tareas requiere de objetos que tengan algunas características en común, pero que, al mismo tiempo, difieran en relación a otros aspectos. Una tarea de comparación anima a los estudiantes a examinar los objetos presentados en forma abierta, agrega, y mientras buscan similitudes y diferencias se ven en la necesidad de realizar cálculos que contribuyen, al mismo tiempo, con un propósito más amplio.

En nuestro caso, optamos por presentarles a los estudiantes dos expresiones en las que interviene el signo de *igual* en contexto algebraico, nos referimos a una operación con polinomios y a una ecuación. Según como se interprete la operación con polinomios, que eventualmente podría ser considerada por los estudiantes como una ecuación de infinitas soluciones (que no condice con la definición de ecuación adoptada en la sección 3.1 de este trabajo), para el diseño de esta tarea estamos considerando dos objetos matemáticos distintos o bien, dos ejemplos distintos de un mismo objeto. Las expresiones son las siguientes:

A. $2x + 3x + 7 = 5x + 7$

B. $5x + 7 = 6x + 4$

Por un lado, en la expresión A el signo de *igual* interviene como *operador* o como *expresión de una equivalencia simbólica*, dependiendo de la interpretación que se haga en cada caso (nos estamos apartando del criterio adoptado para confeccionar la tabla de la actividad anterior); mientras que en la expresión B, el signo de *igual* interviene como *expresión de una equivalencia condicional*. Queremos indagar si los estudiantes, al realizar la tarea de comparación, son capaces de identificar esta diferencia en relación al uso y el significado que tiene el signo de *igual* en cada expresión. Por otro lado, vemos que en ambas expresiones aparece un mismo polinomio a un lado del signo de *igual*, para explorar si los estudiantes interpretan esa característica como una semejanza de las expresiones presentadas. Nos referimos al $5x + 7$, que en un caso aparece del lado derecho del signo de *igual* (expresión A) y en otro caso del lado izquierdo (expresión B). Finalmente, la variable aparece en ambos lados del signo de *igual* en las dos expresiones. La consigna de la actividad es la siguiente:

(A) *¿Qué diferencias y qué similitudes encuentran entre las siguientes expresiones?*

A. $2x + 3x + 7 = 5x + 7$

B. $5x + 7 = 6x + 4$

(B) *Si digo: "Uso que se le da al signo de igual en la expresión"*
¿Sería una similitud o una diferencia? ¿Dónde ubicarían este enunciado? ¿Por qué?

La parte A de la actividad se plantea para que los estudiantes comparen las dos expresiones presentadas, identificando todas las semejanzas y diferencias que les sean posibles. Les pedimos que en caso de realizarlos, muestren todos los cálculos y planteos correspondientes. Aquí tomamos en cuenta lo que sostiene Zaslavsky en cuanto a que, mientras los estudiantes buscan diferencias y semejanzas, se ven en la necesidad de realizar cálculos que contribuyen con un propósito más amplio que el solo hecho de comparar los objetos matemáticos considerados. Al igual que en la actividad anterior, queremos explorar si los estudiantes hacen algún tipo de mención a los usos y los significados que tiene el signo de *igual* en las dos expresiones dadas. El cuadro 9 muestra la planilla que le entregamos a los estudiantes registren las diferencias y las semejanzas identificadas, así como también, los planteos o los cálculos que estimen convenientes.

Diferencias	Similitudes	Planteos o comentarios extra

Cuadro 9. Planilla entregada a los estudiantes para que registren diferencias y semejanzas de las expresiones presentadas en la tarea de la sesión 2.

La parte B de la actividad se propone para que los estudiantes focalicen específicamente en los usos del signo de *igual* que están involucrados en las expresiones presentadas, por si no lo han hecho en la parte anterior. Al igual que antes, esta parte de la actividad adquiere especial utilidad en aquellos estudiantes que hasta el momento, por iniciativa propia, no hayan identificado el uso del signo de *igual* como una diferencia o una semejanza de las expresiones dadas; o si por el contrario, en caso de haberlo reconocido, lo hayan hecho en forma confusa o poco explícita.

4.5 Enfoque de enseñanza

Como señalamos en el primer capítulo de este trabajo, en segundo año de enseñanza secundaria los estudiantes comienzan a trabajar con ecuaciones, expresiones algebraicas y funciones. A continuación, describimos cuál ha sido el enfoque de enseñanza que hemos implementado en el grupo que ha participado de esta investigación, mientras desarrollábamos cada uno de esos temas, indicando además el lugar que ha ocupado la enseñanza del signo de *igual* durante el desarrollo de cada uno de ellos. Es preciso aclarar que esta enseñanza no formó parte de este proyecto de investigación. Registramos esta sección para explicitar los conceptos previos y tipo de trabajo que habían experimentado los estudiantes en forma previa al desarrollo de este proyecto.

	Contenidos temáticos	Comentarios complementarios
Bloque I	Expresiones algebraicas	Utilidad de los polinomios y operaciones.
	Ecuaciones del tipo: “$ax + b = c$”	“Método de la tapadita” para resolver ecuaciones.
Bloque II	Geometría del triángulo	Líneas y puntos notables de un triángulo.
	Ecuaciones del tipo: “$ax + b = cx + d$”	“Principio de la balanza” para resolver ecuaciones.
Bloque III	Funciones	Interpretación de gráficos. Dominio, raíz. Imagen y preimagen.

Cuadro 10. Síntesis de los temas abordados en el grupo hasta el momento de aplicar el cuestionario.

En el primer bloque del curso, trabajamos con las *expresiones algebraicas*, focalizando en el estudio de los polinomios. Comenzamos con actividades que pusieran de manifiesto la utilidad de este tipo de expresiones para establecer regularidades y relaciones numéricas, así como también, para modelizar la relación entre dos cantidades que varían. En el contexto de estas actividades, nos referimos implícitamente al concepto de variable y al valor numérico de un polinomio. Señalamos ejemplos de monomios y monomios semejantes, e introdujimos a los estudiantes en la adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

En paralelo al trabajo con polinomios, planteamos actividades que permitieran un primer acercamiento de los estudiantes a las ecuaciones, centramos nuestra atención en aquellas del tipo $ax + b = c$. Primero admitimos cualquier estrategia de resolución, y luego formalizamos una de ellas, que decidimos llamar “método de la tapadita”. Esta estrategia consistía en ir tapando las expresiones que involucraban a la variable, “de más a menos”, hasta deducir su valor. Por ejemplo, para resolver la ecuación $2x + 1 = 7$, consistía en tapar la expresión $2x$ y pensar qué número más 1 da 7, para luego tapar x y pensar qué número por 2 da 6. Luego procedimos a *verificar* las soluciones que se obtenían, y nos referirnos al concepto de raíz o solución de una ecuación.

En el segundo bloque del curso, abordamos el trabajo con *triángulos*, que escapa al contexto algebraico en el que se enmarca la presente investigación. En paralelo al trabajo con triángulos, introducimos a los estudiantes en la resolución de ecuaciones con la variable a ambos miembros, mediante situaciones de equilibrio modelizadas por el uso de balanzas. Retomamos el concepto de conjunto solución y lo asociamos con el concepto de ecuaciones equivalentes. Acordamos que dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución, y que a partir de una ecuación dada, podemos obtener otra equivalente, realizando la misma operación a ambos miembros (excepto al multiplicar por cero). Señalamos que estas cuestiones dan lugar a una nueva estrategia de resolución de ecuaciones, especialmente útil cuando la variable aparece a ambos miembros de la ecuación, que decidimos llamar “principio de la balanza”.

En el tercer bloque del curso, abordamos el trabajo con funciones, a partir de actividades que apuntaban a la interpretación de gráficos de parte de los estudiantes. En el contexto de estas actividades, acercamos a los estudiantes al concepto de dominio de una función. Luego les presentamos una actividad en la que aparecía el gráfico de una función y tres posibles fórmulas para ella, para que ellos identificaran la correcta. Luego introdujimos la noción de raíz de una función. También nos referimos a los conceptos de imagen y preimagen. El trabajo con ecuaciones volvió a presentarse cuando los estudiantes debían calcular preimágenes, a partir de la fórmula de una función.

Como podemos observar, el signo de *igual* se utilizó de diversas formas en este grupo, a lo largo del curso. Apelamos a varios de los significados señalados por Molina (2006) y referidos en nuestro marco teórico, como por ejemplo, *expresión de una equivalencia condicional* y *expresión de una equivalencia simbólica*. Sin embargo, estos significados nunca se explicitaron, no constituyeron un objetivo de enseñanza, ni el signo de *igual* fue considerado un objeto de enseñanza en particular.

CAPÍTULO 5

Análisis de las respuestas al cuestionario

En este capítulo presentamos algunas de las evidencias recogidas, luego de aplicar el cuestionario a un grupo de estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria (13-14 años), y de realizar una serie de entrevistas. Asimismo, analizamos dichas evidencias a la luz del marco teórico adoptado (Molina, 2006; Molina et al., 2009; Burgell, 2012), obteniendo insumos que en una etapa posterior nos permitirán, junto al análisis de otras evidencias, responder las preguntas de investigación y cumplir con los objetivos que nos hemos propuesto.

Comenzamos el análisis con una revisión exploratoria del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad 4, que siendo una ampliación de una actividad propuesta por Burgell (2012), puede brindarnos una primera aproximación de los usos y los significados del signo de *igual* que ponen de manifiesto los estudiantes al responder este cuestionario. Luego analizamos las respuestas que algunos estudiantes presentaron a todo el cuestionario, para ejemplificar la problemática que estamos abordando. Finalizamos el capítulo con algunas consideraciones globales que surgen del análisis realizado.

5.1 Primeras impresiones

En la actividad 4 se consultaba por el nombre y el significado del símbolo =, se solicitaban un mínimo de tres situaciones de clase en las que se hubiere utilizado dicho símbolo, y se preguntaba con qué finalidad se habría utilizado en cada una de ellas. La consigna de la mencionada actividad es la que detallamos a continuación:

4) *Las siguientes actividades se refieren al símbolo que te presentamos a continuación:*

=

a) ¿Cuál es el nombre que tiene este símbolo?

b) Explica con tus palabras cuál es el significado que tiene para ti este símbolo.

c) ¿En qué situaciones de clase has utilizado este símbolo? Ejemplifica mostrando, al menos, tres situaciones distintas.

d) ¿Para qué se utiliza el = en cada una de las situaciones que presentaste?

En la primera parte de la actividad, como anunciamos al comienzo, se consultaba sobre el nombre del símbolo "=". La tabla 1, que se muestra a continuación, resume las respuestas presentadas por los estudiantes a esta parte de la actividad:

Respuestas	Número de estudiantes (Total=26)
"*igual*"	16
"es igual a"	2
"símbolo de *igualdad*"	2
"símbolo de *igual*"	2
"*igual* a"	2
"signo de *igual*"	1
"es igual"	1
"el *igual*"	1
"*igualdad*"	1
"resultado final"	1
"equivalente"	1

Tabla 1. Resultados de la pregunta 4)a) del cuestionario.

Observamos que los veintiséis estudiantes responden la pregunta y que cuatro de ellos presentan dos respuestas, que son las siguientes:

- "El símbolo de *igualdad*. Es igual a…" (Rocío, 14 años)
- "Símbolo de *igual*/*igualdad*" (Mariana, 14 años)
- "*Igual* – Resultado final" (Enzo, 14 años)
- "*Igual*, equivalente" (Ignacio F., 14 años)

De este modo, recabamos un total de 30 respuestas, de las cuales solo cinco no incluyen la palabra "*igual*", usando en cambio la palabra "*igualdad*" (tres respuestas), "resultado final" (una respuesta) o "equivalente" (una respuesta).

En la segunda parte de la actividad, los estudiantes eran consultados sobre el significado del símbolo "=". Optamos por clasificar sus respuestas en cuatro categorías: *relacional*, *operacional*, *relacional* y *operacional*, y otra. En la primera categoría, *relacional*, incluimos las respuestas que dejan entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia* (*simbólica* o *numérica*) o *expresión de una equivalencia condicional*. Las respuestas de catorce estudiantes se ubican dentro de esta categoría, las cuales mostramos a continuación:

- "Significa que algo es lo mismo que otra cosa, son *igual*es, en el resultado" (Belén, 14 años).
- "Que el cálculo de los números o letras que se presenten de lado opuesto del signo son equivalentes" (Josefina, 14 años).
- "Que lo que está a la derecha de ese símbolo tiene que ser *igual* a lo que está a la izquierda" (Ignacio, 14 años).
- "Refiere a que los dos términos que están a su derecha e izquierda son *igual*es, es decir, todo lo que esté a sus lados finalmente luego de hacer esas cuentas son *igual*es, tienen el mismo valor" (Gerónimo, 14 años).
- "Es para cuando cualquier cosa es igual a otra. Se usa este símbolo para señalar que son *igual*es" (Pedro, 13 años).
- "El signo de *igual* nos explica que algo tiene el mismo valor que algo, que un número tiene el mismo valor que otro, no hay diferencia entre ambos números" (Agustina, 14 años).

- "Que los números o cantidades que se coloquen a sus extremos tienen el mismo valor. Por ejemplo, 2=2" (Federica, 14 años).
- "Este símbolo quiere decir que lo que tiene a su izquierda representa lo mismo que a su derecha" (Candelaria, 14 años).
- "Significa que dos números, operaciones, tienen el mismo valor" (Lucía, 13 años).
- "El significado de este símbolo es que ya sea un número u otra cosa, de la cosa determinado que estés hablando es igual a algo, es semejante, tiene el mismo valor a otra cosa determinada" (Felipe, 14 años).
- "Quiere decir que presentadas dos o más cuentas, números, etc., si aparece este símbolo significa que el/los número/s a la izquierda equivale/n a el/los de la derecha" (Julieta, 13 años).
- "Este símbolo demuestra entre dos términos su *igualdad* o equivalencia y demuestra que decir por ejemplo 2+2 es lo mismo que decir 4" (Jaime, 14 años).
- "El/los número/s delante del símbolo y el/los número/s detrás, tienen el mismo valor" (Nicole, 14 años).
- "Cuando algo es igual a otra cosa. Por ejemplo: 4+5 es igual a 3+6" (Martina, 13 años).

En la segunda categoría, *operacional*, incluimos las respuestas que muestran una interpretación del signo de *igual* como *operador* o como *propuesta de actividad*. Obtuvimos seis respuestas de este tipo en esta parte de la actividad, que son las siguientes:

- "Es cuando haces una cuenta para saber cuánto da, y también para saber que esas cuentas usadas son *igual* al resultado" (Miguel, 14 años).
- "Se refiere al resultado de cualquier cuenta" (Santiago, 14 años).
- "Para mí el signo de *igual* es por ejemplo cuando vos haces una cuenta y te da el resultado, entonces, para poder marcar cuánto es que da la cuenta ponemos un =. Ej. 2+3=5" (Sebastián, 13 años).

- "Este símbolo significa que los números que se encuentran detrás con otros símbolos al hacer esa cuenta el resultado va a ser *igual* (=) al resultado que pongas a mano derecha. Puede ser inverso" Lucía, 13 años).
- "Este símbolo determina el resultado de una suma, resta, multiplicación, y división. Quiere decir "da *igual*". Ejemplo 2+2=4" (Juan, 14 años).
- "Para mí es el símbolo de $a + a = b$, que es el símbolo del resultado final" (Enzo, 14 años).

En la tercera categoría, *relacional* y *operacional*, como lo indica su denominación, incluimos las respuestas que dejan al descubierto una interpretación del signo de *igual* como *operador* o *propuesta de actividad*, y al mismo tiempo, una interpretación como *expresión de una equivalencia* (*numérica* o *simbólica*) o *expresión de una equivalencia condicional*. Tres estudiantes presentaron una respuesta de este tipo en esta parte del cuestionario, las cuales detallamos a continuación:

- "Para mí el significado de este símbolo es el *igual*, el que nos da el resultado, el que nos dice si 2 cuentas son *igual*es, etc." (Tomás, 14 años).
- "Este símbolo tiene muchos usos, por ejemplo, el resultado de una cuenta, o cuando nos dicen que una cuenta es igual a la otra, etc." (Sara, 14 años).
- "Es un símbolo que expresa que por ejemplo 1+1=2 es igual, son lo mismo solo que de diferente manera planteado" (Rocío, 14 años).

Por último, en la cuarta categoría, otras, incluimos aquellas respuestas que, debido a su incompletitud o imprecisión, no manifiestan una interpretación ni *operacional* ni *relacional* del signo de *igual*, o al menos eso no resulta claro desde nuestra perspectiva. Tres respuestas son las que se ubican en esta categoría:

- "Para mí el símbolo tiene el mismo significado que el nombre. Ej.: Si a mí me ponen H=B voy a saber que significan los mismo" (Faustina, 14 años).
- "Que el número que está a la izquierda es el mismo del que está a la derecha, expresado diferente" (Mateo, 14 años).

- "Este símbolo representa la *igualdad* en dos números que están en los extremos del símbolo (n=a)" (Mariana, 14 años).

Observamos que un poco más de la mitad de los estudiantes manifiestan una interpretación *relacional* del signo de *igual* (14 alumnos). Sin embargo, otra tercera parte, pese a haber incursionado en el estudio del algebra, dejan al descubierto una interpretación *operacional*, ya sea en forma exclusiva (6 alumnos) o combinada con una interpretación *relacional* (3 alumnos). Asimismo, tres estudiantes presentan una respuesta ambigua, cuyo análisis no nos permite incluirla en alguna de las tres categorías señaladas anteriormente. La tabla 2 resume lo dicho:

Respuestas	Número de estudiantes (Total=26)
Relacional	14
Operacional	6
Operacional y *Relacional*	3
Otra	3

Tabla 2. Resultados de la pregunta 4)b) del cuestionario.

En suma, podemos distinguir entre aquellos alumnos que en su respuesta presentan una interpretación exclusivamente *relacional* (14 alumnos), de aquellos que al responder dejan entrever una interpretación *operacional* u otra forma de interpretar el signo de *igual* (12 alumnos).

En la tercera parte de la actividad, se solicitaban al menos tres situaciones de clase en las que se utilizara el signo de *igual*. Optamos por agrupar las respuestas de los estudiantes de acuerdo al significado del signo de *igual* que dejaran de manifiesto en cada caso, tomando como referencia la clasificación que al respecto realizan Molina et. al (2006) y Molina (2009), que nosotros reseñamos en el marco teórico del presente trabajo. Asimismo, decidimos distinguir entre el número de estudiantes y el número de ejemplos que se asocia a cada significado, para discernir entre aquellos que repiten un mismo significado en sus respuestas, de los que proponen ejemplos con significados diferentes. La tabla 3, que sigue a continuación, resume las respuestas presentadas por los estudiantes en esta parte de la actividad:

Respuestas	Número de estudiantes (Total=26)	Número de ejemplos dados por cada estudiante
Propuesta de actividad	2	2
Operador	21	27
Expresión de una acción	1	1
Equivalencia condicional	14	16
Equivalencia numérica	9	9
Equivalencia simbólica	3	3
Identidad estricta	2	2
Equivalencia por definición o por notación	3	3
Definición de un objeto matemático	1	1
Relación funcional o de dependencia	1	1
Indicador de cierta conexión o correspondencia	2	3
Asignación de un valor numérico	6	6

Tabla 3. Resultados de la pregunta 4)c) del cuestionario.

De los veintiséis alumnos que trabajan en esta actividad, solo dos estudiantes no presentan la cantidad mínima de situaciones solicitadas, mostrando estos una sola situación. Asimismo, dieciocho alumnos dejan entrever tres significados distintos, (cinco de ellos no incluyen ningún significado *relacional*), cuatro alumnos manifiestan dos significados distintos, y dos alumnos dejan al descubierto un solo significado, que es *operacional*.

Observamos que en el amplio universo de ejemplos presentados por los estudiantes, casi no aparecen ejemplos de la vida cotidiana. Por el contrario, la gran mayoría son tomados del contexto escolar, pues están ligados a las prácticas y a lo que los docentes (pasados y actuales) les han presentado a lo largo de sus recorridos como estudiantes. Los significados de *operador* y *equivalencia condicional* son los más utilizados por los estudiantes al mostrar sus ejemplos, mientras que los únicos significados que no quedan de manifiesto en las situaciones presentadas son los de *separador* y *aproximación*.

En la cuarta parte de la actividad, los estudiantes debían explicar con qué finalidad se utilizaba el signo de *igual* en cada una de las situaciones presentadas anteriormente. Mostramos a continuación algunas de las explicaciones obtenidas, tomando como referencia los dos significados del signo de *igual* que tuvieron más apariciones en la parte anterior: *operador* y *expresión de una equivalencia condicional*. Las que siguen, en el cuadro 11, son explicaciones de los estudiantes, en torno a situaciones que en la tercera parte de la actividad dejaban entrever una interpretación del signo de *igual* como *operador*, por incluir una operación a la izquierda y su resultado a la derecha del signo de *igual*:

Ejemplos	Explicaciones de los estudiantes
"2+2=4"	"Cuando hacemos sumas, restas, multiplicaciones" (Federica, 14 años)
"2+5=10"	"Para mostrar el resultado de una cuenta" (Candelaria, 14 años)
"5+5=10"	"Para expresar que lo de la derecha del signo es igual a lo de la izquierda" (Gerónimo, 14 años)
"4+7=7"	"Para indicar el resultado de una operación" (Ignacio, 14 años)
"10+8=18"	"Para poner el resultado que corresponda a dicha operación" (Felipe, 14 años)
"4+4=8"	"Para mostrar que la cuenta planteada, en este caso, "4+4" es lo mismo que 8" (Rocío, 14 años)
"148-40=108"	"Para demostrar el resultado de cada cuenta" (Santiago, 14 años)
"12x3=36"	"Para dar el resultado de lo planteado, ya sea suma, resta, etc." (Juan, 14 años)

Cuadro 11. Algunas de las respuestas a la pregunta 4)d) del cuestionario, que dejan entrever una interpretación del signo de igual como *operador*.

La mayoría de las explicaciones se corresponden con la interpretación *operacional* que señalábamos anteriormente. Sin embargo, ese no es el caso de Gerónimo y de Rocío quienes, frente a las expresiones $5 + 5 = 10$ y $4 + 4 = 8$, sostienen que el signo de *igual* se utiliza respectivamente para "expresar que lo de la derecha del signo es igual a lo de la izquierda" y para "mostrar que la cuenta planteada en este caso, 4+4, es lo mismo que 8". Observamos que ambas explicaciones son propias de una interpretación *relacional* del signo de *igual*. Presentamos ahora, en el cuadro 12, algunas de las explicaciones de los estudiantes en torno a situaciones que, en la parte anterior, dejaban entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, por incluir una ecuación:

Ejemplos	Explicaciones de los estudiantes
"$4 + x = 9$"	"Expresar resultado" (Lucía, 13 años)
"$x + 2 = 10$"	"Para mostrar que lo que está a la izquierda del "=", aunque esté expresado de otra manera, es el mismo resultado" (Martina, 13 años)
"$x + 1 = 3$"	"Cuando hacemos propiedad de la balanza" (Federica, 14 años)
"$3x = 9$"	"En la balanza para representar cuánto valen $3x$ en números naturales para así mediante diversas cuentas poder hallar a "x" que es la variable" (Gerónimo, 14 años)
"$x + 3 = 14$"	"Para explicar que la letra x más el nº 3, el resultado da 14" (Agustina, 14 años)
"$x + 4 = x4 - 14$"	"Para decir que dos operaciones que se ven diferentes son *igual*es" (Ignacio, 14 años)
"$-3 + 7x = 10 + 1$"	"Para indicar al que va a hacer la ecuación, a qué está *igual*ado un miembro para saber cómo despejar la x" (Felipe, 14 años)
"$2 + x = x + x + 1$"	"Para resolver ecuaciones" (Nicole, 14 años)
"$2x + 3 = 7$"	"Para mostrar que algún número multiplicado por 2 y luego sumándole 3 te tiene que dar 7" (Pedro, 13 años)

Cuadro 12. Algunas de las respuestas a la pregunta 4)d) del cuestionario, que dejan entrever una interpretación del signo de igual como *expresión de una equivalencia condicional*.

Observamos que las explicaciones de los estudiantes son, en mayor o menor medida, consistentes con el uso del signo de *igual* en una ecuación. Felipe y Nicole, por ejemplo, se refieren al proceso de resolución de una ecuación: "para saber cómo despejar la x", "para resolver ecuaciones". Asimismo, Gerónimo y Federica hacen alusión a la balanza, porque ese fue el contexto utilizado en clase para dotar de sentido a la estrategia de resolución trabajada en clase. Desde la perspectiva de estos estudiantes, la presencia de un signo de *igual* en el contexto de una ecuación implica desarrollar una estrategia que permita encontrar su solución. Pedro, en cambio, señala que el signo de *igual* se utiliza "Para mostrar que algún número multiplicado por 2 y luego sumándole 3 te tiene que dar 7" (en alusión a la ecuación $2x + 3 = 7$). El estudiante asume la existencia de "algún número" que *verifica* la ecuación que plantea, dejando entrever que no todos la *verifica*n. De ese modo Pedro explicita la condicionalidad que caracteriza la equivalencia dada por una ecuación, con lo cual está interpretando el signo de *igual* en ese sentido. Lucía y Agustina, por último, aun pudiendo interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional* (cosa que no pudimos confirmar), asocian resultado con lado derecho de una ecuación: "Expresar resultado", "Para explicar que la letra x más el nº 3, el resultado da 14". Ellas entienden que el signo de *igual* es el indicador de un resultado, propio de una visión *operacional* que no condice con el significado esperado en este caso.

Las consideraciones realizadas nos permiten señalar que una proporción importante de estudiantes que participan de este estudio, aun habiendo incursionado en el estudio del álgebra, muestran indicios de estar interpretando el signo de *igual* como un *operador*, tal como lo señala Burgell (2012) respecto a los estudiantes que participaron de su estudio.

5.2 Análisis por estudiante

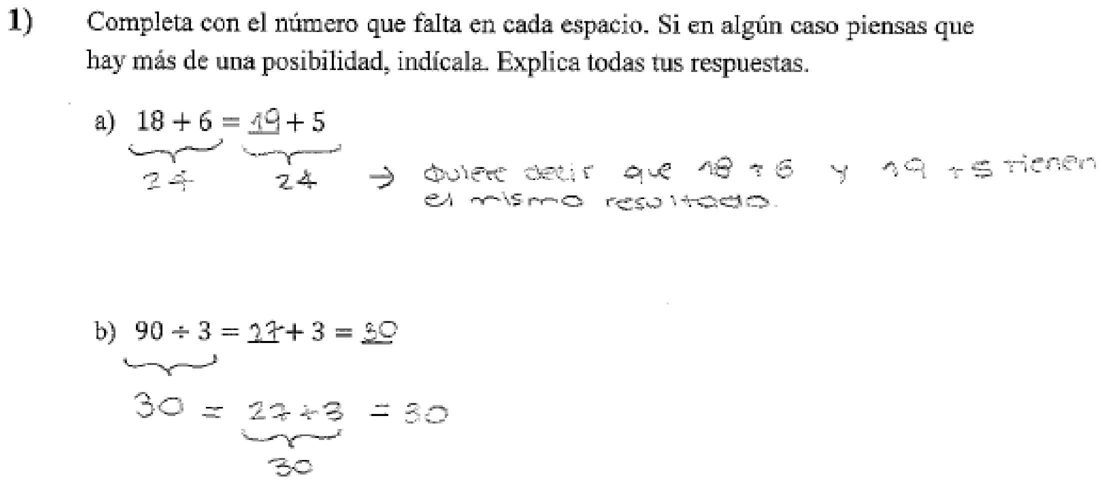
Hemos seleccionado el trabajo de nueve estudiantes para analizar en profundidad. Dicha elección tuvo que ver con la presencia de respuestas que nos resultaron interesantes como para profundizar en ellas. Quisimos abarcar distintas maneras de pensar y de responder el cuestionario, así como también, reflejar respuestas que aparecieron en forma reiterada. Los casos que seleccionamos cubren una amplia gama de producciones de los estudiantes que entendemos son bien representativos de lo realizado por la totalidad de alumnos del grupo con el que trabajamos. De esos nueve casos, hemos elegido cinco para presentar en este capítulo, a fin de ejemplificar la problemática abordada. Cada caso comienza con una breve referencia a la respuesta de la actividad 4b, con el fin de ubicarla en una de las cuatro categorías ya definidas en la sección anterior: *operacional*, *relacional*, *operacional* y *relacional*, u otras. Luego analizamos cada una de las respuestas al cuestionario, para finalizar con una síntesis que recoja los aspectos más relevantes del análisis realizado.

5.2.1 Respuestas de Rocío (14 años)

En la actividad 4b, Rocío plantea un ejemplo numérico típicamente *operacional*, $1 + 1 = 2$, pero señala que en ese caso el signo de *igual* se utiliza para relacionar dos formas distintas de expresar un mismo número, que es una explicación propia de una visión *relacional*. Por lo anterior, decimos que en esta parte de la actividad, Rocío presenta una respuesta de tipo *operacional y relacional*.

Actividad 1

Observemos el trabajo de la estudiante en esta actividad:



1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a) $\underbrace{18 + 6}_{24} = \underbrace{19 + 5}_{24}$ → Quiere decir que 18 + 6 y 19 + 5 tienen el mismo resultado.

b) $\underbrace{90 \div 3}_{} = 27 + 3 = 30$

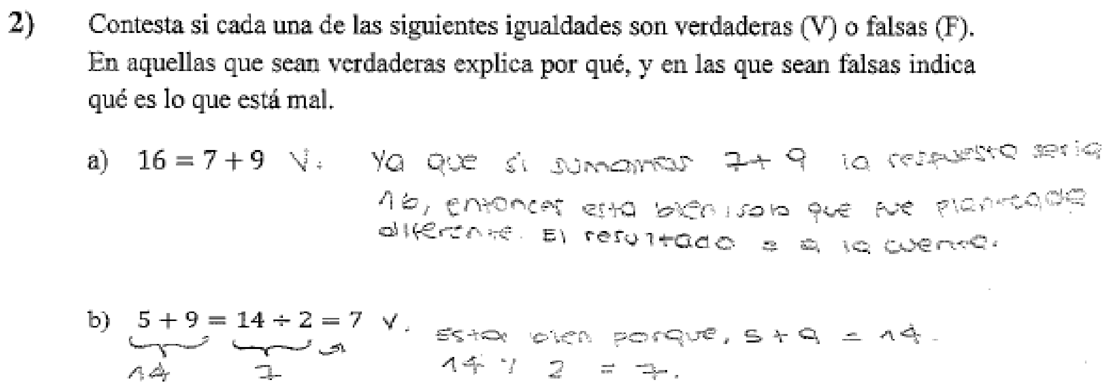
$30 = \underbrace{27 + 3}_{30} = 30$

En la parte a) la estudiante completa el espacio en blanco con un 19. Dibuja una llave debajo de cada miembro de la expresión dada, para señalar que la suma es 24. Cuando dice que "18+6 y 19+5 tienen el mismo resultado", Rocío está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque reconoce que dichas expresiones aritméticas son dos representaciones diferentes del mismo número.

En la parte b) la estudiante completa los espacios vacíos con un 27 y un 30. Dibuja una llave debajo del primer miembro de la expresión dada, para señalar que el resultado de la división que allí se encuentra, es 30. Hace lo propio con la suma que se encuentra entre los dos signos de *igual* que intervienen en la expresión. A diferencia de la parte anterior, aquí Rocío no proporciona ninguna explicación verbal relacionada con sus respuestas. Sin embargo, vuelve a interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque completa el primer espacio vacío con un número de tal modo, que a la izquierda y a la derecha del primer signo de *igual* queden planteadas dos representaciones distintas del mismo número.

Actividad 2

Veamos la forma en que Rocío resuelve esta actividad:



2) Contesta si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

a) $16 = 7 + 9$ V. Ya que si sumamos 7+9 la respuesta sería 16, entonces esta bien solo que fue planteada diferente. El resultado = a la cuenta.

b) $\underbrace{5 + 9}_{14} = \underbrace{14 \div 2}_{7} = 7$ V. esta bien porque, 5+9 = 14. 14 ÷ 2 = 7.

En la parte a) Rocío señala que la *igualdad* es verdadera. Cuando al explicar su respuesta dice que "fue planteada diferente: el resultado = a la cuenta", Rocío está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*. No obstante, su explicación deja entrever que en realidad, está más habituada a plantear las operaciones del lado izquierdo y los resultados del lado derecho, "fue planteada diferente", que es propio de una interpretación del signo de *igual* en su carácter de *operador*.

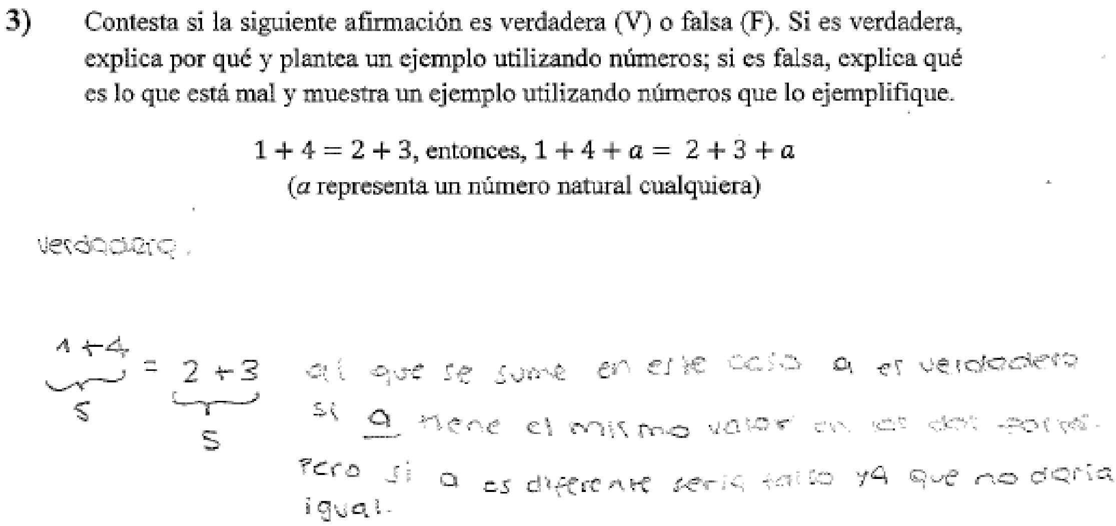
En la parte b) Rocío también señala que las *igualdades* dadas son verdaderas. Vuelve a dibujar llaves debajo del primer y segundo miembro para señalar que los resultados de las operaciones que allí se encuentran son 14 y 7 respectivamente. Sin embargo, eso no le permite responder falso. Cuando la estudiante fundamenta su respuesta en que "$5 + 9 = 14$ y $14{:}\,2 = 7$", en ambos casos está interpretando el signo de *igual* como un *operador*, esto es, como el indicador de un resultado. Sin embargo, era necesario que lo interpretara como *expresión de una equivalencia numérica*, cosa que logró en actividades anteriores. Rocío fue consultada sobre este asunto durante una entrevista que mantuvimos posteriormente. Veamos lo que nos dijo:

> Profesor: Borremos el *igual* 7 del final. Si vos tuvieras 5 más 9 *igual* 14 dividido 2. Si tuvieras que volver a pensarlo, ¿te parece verdadero, te parece falso, o te parece que pueden ser las dos cosas?
>
> Rocío: Me parece falso porque acá te está dando 14, te está diciendo que esto es igual a 7, o sea, 14 dividido 2, que no, que es otra cosa.
>
> P: Ajá. Entonces ahora pasaría a ser falso.
>
> R: Sí
>
> P: ¿Y con el *igual* 7?
>
> R: No, porque uno es el doble y otro es la mitad. O sea, porque en uno me estás diciendo 5 más 9 que te da 14, y eso no te puede dar 7… Pero 14 divido 2, sí…
>
> P: ¿Entonces?
>
> R: No, no sé cómo explicarlo, no…
>
> P: Entonces, no podrías decidir si es verdadera o falsa, tenés la duda…
>
> R: Ahí va.

Rocío sostiene que la expresión $5 + 9 = 14{:}\,2$ es falsa porque "te está diciendo que esto *(en relación a 5+9)* es igual a 7, o sea, 14 dividido 2, que no, que es otra cosa". Luego sostiene que la expresión $5 + 9 = 14{:}\,2 = 7$ también es falsa "porque uno es el doble y otro es la mitad *(en alusión a 5+9 y 14:2)".* Hasta aquí, sus respuestas están centradas en el primer signo de igual que interviene en esta cadena de *igualdades*, y al reconocer que está relacionando dos expresiones aritméticas que no son equivalentes, responde que es falsa. El razonamiento de la estudiante da cuenta de que está interpretando el signo de igual como *expresión de una equivalencia numérica*, como hiciera en la primera actividad de este cuestionario. Sin embargo, más adelante agrega que "en uno me estás diciendo 5 más 9 que te da 14, y eso no te puede dar 7… Pero 14 divido 2, sí…", poniendo en duda lo que había respondido antes. Ahora, desde su perspectiva, una parte de la cadena de *igualdades* es verdadera y la otra es falsa, y por eso no puede arribar a una única respuesta.

Actividad 3

La respuesta que proporciona Rocío para esta actividad es la siguiente:



3) Contesta si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa, explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique.

$$1 + 4 = 2 + 3, \text{ entonces, } 1 + 4 + a = 2 + 3 + a$$

(a representa un número natural cualquiera)

verdadera.

$\underbrace{1+4}_{5} = \underbrace{2+3}_{5}$ así que se sume en este caso a es verdadero si a tiene el mismo valor en las dos partes. Pero si a es diferente sería falso ya que no daría igual.

La estudiante sostiene que la afirmación es verdadera. Explica su respuesta pero sin presentar el ejemplo solicitado. Cuando Rocío escribe $1 + 4 = 2 + 3$, y señala mediante llaves que la suma de cada miembro es 5, está interpretando ese signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque reconoce que $1 + 4$ y $2 + 3$ son dos representaciones distintas que corresponden al mismo número. En otro orden, cabe señalar que cuando dice "es verdadera si *a* tiene el mismo valor en las dos partes, pero si *a* es diferente sería falsa", Rocío asume la posibilidad de que la variable tome un valor distinto a cada lado del signo de *igual*, desconociendo que en realidad, debe tomar un solo valor por vez. Eso es lo que la conduce a poner en duda la validez de la implicación planteada. Consultada sobre esta actividad, Rocío dijo lo siguiente:

> P: En la actividad 3 te planteábamos que 1 más 4 es igual a 2 más 3, entonces, 1 más 4 más a es igual a 2 más 3 más a. Te preguntábamos si eso era verdadero o falso. ¿Qué fue lo que vos pensaste ahí?
>
> R: Dije como 1 más 4 es igual a 2 más 3 que es 5, o sea, ahí está bien. Pero, si haces 1 más 4 más a, yo supuse que a era el mismo número que 2 más 3 más a, entonces, hice que a valiera 1 en los dos casos, entonces, 1 más 4 más a que sería 6 y 2 más 3 más a que también sería 6, entonces supuse que a era 1 y que era verdadero.
>
> P: ¿Y hay algún caso en que esto podría llegar a ser falso?
>
> R: Si a fuera diferente en estos dos casos.
>
> P: A ver, poneme un ejemplo acá en el que a vos te parece que sería falso.
>
> R: No sé cómo explicarlo…
>
> P: Escribilo y ahora me contás.
>
> R: Que…
>
> P: Vos me decías recién, si a vale 1 esto sería verdadero.
>
> R: Mh.
>
> P: Bien, ese era un ejemplo para el cual esto sería verdadero. Yo ahora te pido un ejemplo en que esto pase a ser falso, o a vos te parezca que es falso.
>
> R: Ta, ya sé entonces… *(escribe* $2 + 4 + a = 2 + 3 + a$*)*, y también es lo mismo, o sea te dice que…, o sea me imagino que a también es lo mismo pero en este caso como cambia este número *(en relación al 1 de la expresión 1+4=2+3)*, si yo supongo 2 más 4, ta es 6, pero en este caso sería 7 y en este 6, no… sí… sí está bien.

En la entrevista, Rocío vuelve a condicionar la validez de la afirmación dada a la posibilidad de que la variable a tenga el mismo valor a cada lado del signo de *igual*. Presenta un ejemplo en el que le asigna implícitamente el valor uno: "1 más 4 más a que sería 6 y 2 más 3 más a que también sería 6". Aquí vemos que la estudiante se basa en un caso particular para justificar la afirmación general, y que en su discurso oral no concreta la sustitución de la variable.

Consultada sobre la posibilidad de que la implicación analizada sea falsa, Rocío se refiere al caso en que la variable a tome distinto valor a cada lado del signo de *igual*. Sin embargo, al momento de ejemplificar, cambia el uno de la expresión $1 + 4 = 2 + 3$ por un dos, y agrega: "si yo supongo 2 más 4, ta es 6, pero en este caso sería 7 y en este 6". Rocío vuelve a manejar la posibilidad de que una misma variable tome más de un valor por vez en una misma expresión, aunque no materializa esa idea en un ejemplo concreto.

En suma, tanto en la respuesta dada por Rocío en el cuestionario, como en el fragmento de la entrevista que reportamos anteriormente, vemos que el problema no es con la interpretación del signo de *igual*, sino más bien, con el concepto de variable que tiene la estudiante. En este sentido, la doble asignación de la variable es un fenómeno que ya ha sido reportado por otros investigadores (Vaiyavutjamai y Clements, 2006; Fujii, 2003), sobre el cual podremos volver en la sección final de este capítulo.

Actividad 4

Consultada sobre el nombre y el significado que tiene para ella el símbolo =, Rocío responde lo siguiente:

> *"El símbolo de igualdad. Es igual a…".*
>
> *"Es un símbolo que expresa que por ejemplo* $1 + 1 = 2$ *es igual, son lo mismo, solo que de diferente manera planteado".*

Rocío señala que el símbolo presentado denota "*igualdad*" o que "Es igual a". Cuando al explicar el significado que tiene para ella, dice que "expresa que por ejemplo 1+1=2", interpretamos que está utilizando el signo de *igual* en su carácter de *operador*, porque recurre a un ejemplo numérico en el que operación y resultado aparecen escritos a la izquierda y derecha del signo de *igual*, respectivamente. Sin embargo, cuando dice que "son lo mismo, solo que de diferente manera planteado", deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque entiende que a cada lado del signo de *igual* pueden escribirse dos expresiones distintas que representen al mismo número.

Observemos ahora las situaciones de clase que destaca Rocío, en relación al uso del signo de *igual*, y las explicaciones que proporciona al respecto:

c) ¿En qué situaciones de clase has utilizado este símbolo? Ejemplifica mostrando, al menos, tres situaciones distintas.

En cuentas.
Por ejemplo,

a. – $4 + 4 = 8$

b. – $8 \div 2 = 2 + 2 = 4$ → lo utilizamos 2 veces

c. – $\frac{5}{5} = \frac{10}{10}$

d) ¿Para qué se utiliza el símbolo = en cada una de las situaciones que presentaste en la parte c?

a. Se utiliza para mostrar que la cuenta planteada, en este caso, "4 +4" es lo mismo que 8.

b. Se utilizan 2 veces ya que hay 2 distintas cuentas pero con el mismo resultado. $8 \div 2 \to 4$, $2 + 2 \to 4$.

c. Se utiliza para demostrar que esas dos fracciones tienen el mismo resultado, solo que tienen diferentes números.

Rocío presenta tres ejemplos. En el ejemplo *a*, cuando escribe 4+4=8, está interpretando el signo de *igual* como un *operador*, porque lo utiliza para indicar el resultado de una operación escrita a su izquierda. Sin embargo, cuando más adelante señala que "4+4 es lo mismo que 8", deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque en vez de referirse a una operación y a su resultado, se refiere a dos expresiones que representan el mismo número.

En el ejemplo b, tal vez motivada por las expresiones propuestas en las actividades 1b y 2b, Rocío escribe $8 : 2 = 2 + 2 = 4$. Cuando dice que "hay dos cuentas distintas pero con el mismo resultado", haciendo alusión a las expresiones $8 : 2$ y $2 + 2$, Rocío está interpretando el primer signo de *igual* de su ejemplo como *expresión de una equivalencia numérica*, porque entiende que relaciona dos expresiones distintas de un mismo número. Asimismo, sostenemos que el segundo signo de *igual* de su ejemplo lo está utilizando como *operador*, para indicar el resultado de las dos operaciones planteadas a su izquierda.

En el ejemplo c Rocío escribe 5/5=10/10 y señala que "esas dos fracciones tienen el mismo resultado". Por un lado, la estudiante está utilizando el signo de *igual* entendiéndolo como *expresión de una equivalencia numérica*, porque relaciona dos expresiones aritméticas distintas que arrojan el mismo valor numérico. Sin embargo, ella habla de "fracciones" y no de divisiones, por lo que también deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia por definición*, al mostrar que 5/5 y 10/10 son dos representantes de un mismo número racional.

Actividad 5

El trabajo de Rocío en esta actividad es el siguiente:

5) a) Resuelve la ecuación $3x + 5 = 26$. Explica cómo lo haces.

$3x + 5 = 26$

$\downarrow$

$7 \qquad 26 - 5 = 21$

$3 \cdot ? = 21 \qquad 3 \cdot 7 = 21$

$\boxed{3 \cdot 7 + 5 = 26}$

$\boxed{x = 7}$

b) La solución de la ecuación anterior es: 7

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

$3x + 5 = 26$

$21 + 5 = 26$

$3 \cdot x = 21$

$\downarrow$

7

La estudiante resuelve la ecuación e identifica su solución. Cuando se le pide *verificar*, vuelve a resolver. Veámoslo con más detalle.

Al resolver la ecuación, Rocío realiza la operación $26 - 5 = 21$ para saber el valor de $3x$. Luego se pregunta qué número multiplicado por 3 da como resultado 21: $3.? = 21$. Comprueba que $3.7 = 21$ y deduce que $x = 7$. Rocío identifica que 7 es la solución de la ecuación, pero cuando se le pide *verificar* la solución obtenida, vuelve a resolver. Sin embargo, la estudiante comprueba en la parte a) que la solución convierte la ecuación en una *igualdad* numérica: $3.7 + 5 = 26$. Ella entiende que en este caso la equivalencia dada por la ecuación es cierta para un valor específico de la variable, pero no asocia la palabra *verificar* con el hecho de comprobar que la solución obtenida es la correcta.

Este fenómeno, el de resolver una ecuación en lugar de *verificar*, que ya ha sido reportado por otros investigadores (Sessa, Panizza y Sadovsky, 1995; Ochoviet y Oktaç, 2009) y sobre el cual podremos volver en la sección final de este capítulo, no quita que Rocío en esta actividad esté interpretando el signo de *igual* de la ecuación planteada como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma dicha ecuación en una *igualdad* numérica, y comprueba que así es (en la parte a). Además asocia dicho valor con la solución de la ecuación.

Actividad 6

Rocío sostiene que en la expresión $x + 3 = 3x + 5$, el signo de *igual* tiene el siguiente significado:

> *"Está demostrando que el resultado de esas dos ecuaciones es el mismo. Es decir, están planteadas de diferente maneras pero el resultado es igual".*

Rocío asocia "ecuación" con "expresión", y eso hace que visualice dos ecuaciones en vez de una. Al margen de eso, cuando dice que "están planteadas de diferente manera pero el resultado es igual", haciendo alusión a las expresiones $x + 3$ y $3x + 5$, Rocío está pensando en que ambas expresiones toman *igual* valor numérico, "el resultado es igual", solo que omite decir que, en este caso, esto se cumple para un valor determinado de la variable. En caso de que desconozca esto último, está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia* *simbólica*, porque asume que dicha *igualdad* tiene lugar para cualquier valor de la variable. En caso contrario, su respuesta es un indicio de que implícitamente está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. La estudiante fue consultada sobre esta actividad, y nos dijo lo siguiente:

> P: En la actividad 6 te planteábamos una ecuación, y te preguntábamos qué significa el signo de *igual* que se coloca entre las expresiones de la izquierda y la derecha (…) ¿Te animas a explicarme un poco más qué fue lo que pensaste ahí?
>
> R: Dejame pensar…
>
> P: Dale
>
> R: Es que no es igual… el resultado no es igual… Porque ponele, x vale 2, si yo sumo 2 más 3 me da 5, y si multiplico 3 por 2 más 5 me da diferente ya. Entonces, ese *igual* no es demostrando que el resultado es igual.
>
> P: Porque… ¿El resultado de qué? ¿A qué te referís cuando hablás de resultado?
>
> R: De la ecuación de $x + 3$ y de la $3x + 5$
>
> P: Entonces, si tuvieras que volver a responder esta pregunta, ese signo de *igual* que se coloca entre esas expresiones, ¿qué significado tendrá?
>
> R: Mmm…

Durante la entrevista, Rocío advierte que existe al menos un valor de la variable que no transforma la ecuación en una *igualdad* numérica. Sustituye la variable por 2 y comprueba mentalmente que se obtienen valores distintos a cada lado del signo de *igual*: “ese *igual* no es demostrando que el resultado es igual”. Si al responder esta parte del cuestionario Rocío había interpretado el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, siendo esta una de las dos posibilidades que señalábamos antes, ahora deja de hacerlo porque descubre que la equivalencia no es cierta para todos los valores de la variable. Asimismo, cobra fuerza la idea de que está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque si bien no reconoce la raíz de la ecuación, ella compara valores numéricos a ambos lados del signo de *igual*, que es consistente con pensar en una ecuación.

Queremos hacer otra puntualización. En la actividad 3, Rocío había admitido la posibilidad de que una misma variable tomara más de un valor por vez en una misma expresión. Sin embargo, en la presente actividad le asignó un solo valor. Esto puede deberse a que el contexto de la actividad 6 le resulta más familiar a la estudiante en comparación a la actividad 3, o que en aquella oportunidad habíamos empleado la letra a para nombrar a la variable mientras que aquí utilizamos la habitual x.

Actividad 7

Frente a la posibilidad de que 15 sea solución de la ecuación $x - 3 = 15$, la estudiante proporciona esta respuesta:

> *"Es 15 si x valdría 18, ya que* $18 - 3 = 15$*. Si es así, la solución de la ecuación estaría bien".*

Rocío reconoce que el valor de x que *verifica* la ecuación es 18. Hasta aquí, podemos sostener que está interpretando el signo de *igual* de la ecuación planteada, como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica, y comprueba que así es. Sin embargo, cuando dice que 15 es la solución de la ecuación "si x valdría 18, ya que 18-3=15", Rocío deja entrever que la solución de una ecuación está ligada al número que se obtiene a la derecha del signo de *igual*, cuando se procede a la *verificación*. Esto puede deberse a una visión *operacional* del signo de *igual* que la estudiante ha puesto de manifiesto en respuestas anteriores, unido a una limitada comprensión del concepto solución de una ecuación. De cualquier manera, es necesario seguir avanzando en el análisis de su trabajo, a fin de poder afirmarlo con mayor seguridad.

La asociación que en esta actividad hace la estudiante entre solución y lado derecho de una ecuación, es coherente con los trabajos reportados por Papaieronymou (2007) y Sessa et al. (1995). Vale aclarar que Rocío no trabajó del mismo modo cuando se le pidió resolver una ecuación e indicar explícitamente su solución, porque en ese caso la identificó con acierto.

Actividad 8

Observemos el trabajo realizado por Rocío al resolver esta actividad:

8) Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.

$10 - x = 5$ → solución

↓

$10 - 5 = 5$

x = el 5, por lo tanto al restarle 5 al 10 nos quedaría como solución el número 5.

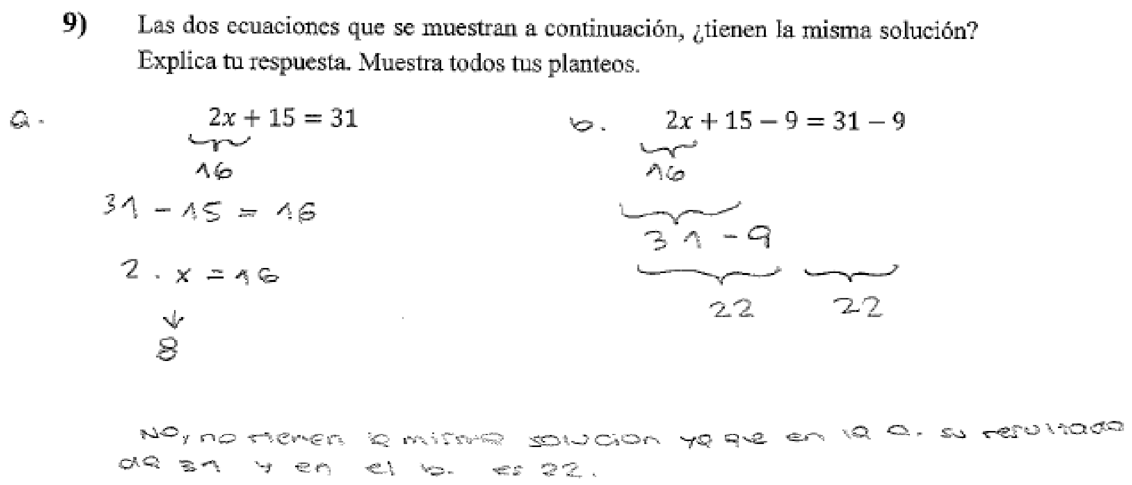
Rocío escribe una ecuación que tiene solución 5, pero que también tiene un 5 como segundo miembro: $10 - x = 5$. Se trata de una ecuación polinómica de primer grado cuya variable aparece como sustraendo, solo en el primer miembro. Vemos que la estudiante vuelve a asociar segundo miembro con solución de una ecuación, como hiciera en la actividad 7. Sin embargo, en esta actividad se las ingenia para obtener una ecuación que cumpla con lo solicitado, esto es, con solución 5.

Encontramos que en la estudiante conviven dos ideas en simultáneo: solución como valor de la variable que convierte a la expresión en una *igualdad* numérica y solución como segundo miembro de la ecuación. Lo anterior es especialmente visible cuando dice "$x = 5$, por lo tanto al restarle 5 al 10 nos quedaría como solución el número 5". La estudiante logra que ambas ideas puedan coexistir, evitando conflictos que pudieran conducirla a una frustración. Esta forma de razonar de parte de la estudiante es coherente con lo que Vinner (1990) denomina *pensamiento inconsistente*, que tiene que ver con todo sistema cognitivo del que puedan derivarse dos proposiciones que son contradictorias, como en este caso.

Observamos que la estudiante muestra indicios de estar interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque señala el valor de la variable que *verifica* la ecuación obtenida, dejando entrever que solamente para ese valor es cierta la equivalencia dada por dicha ecuación.

Actividad 9

Veamos la respuesta presentada por la estudiante para esta actividad:



9) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

a. $\underbrace{2x}_{16} + 15 = 31$

$31 - 15 = 16$

$2 \cdot x = 16$

8

b. $2x + 15 - 9 = 31 - 9$

16

$31 - 9$

$22 \quad 22$

No, no tienen la misma solucion ya que en la a. su resultado da 31 y en el b. es 22.

Rocío resuelve la primera ecuación y con la solución obtenida, *verifica* en la segunda. Resuelve la primera ecuación en forma análoga a la actividad 5: realiza la operación 31-15=16 para saber el valor de $2x$, y luego piensa en un número que multiplicado por 2 le dé 16. Esto la conduce a señalar mediante una flecha que el valor de x es 8. Luego sustituye ese valor en la segunda ecuación, y mediante llaves, indica que a ambos miembros se obtiene 22. Hasta aquí, Rocío deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional,* porque encuentra el valor de la variable que transforma ambas ecuaciones en una *igualdad* numérica.

No obstante, cuando Rocío señala que las ecuaciones planteadas "no tienen la misma solución, ya que en la *a (en referencia a la primera ecuación)* su resultado da 31 y en el b *(en referencia a la segunda ecuación)* es 22", vemos que su relato es consistente con lo realizado en las actividades 7 y 8. Para ella, la solución de una ecuación es el número que se encuentra a la derecha del signo de *igual*, o el número que se obtiene al realizar las operaciones que allí se encuentran. Además, cuando asocia lado derecho con "resultado" de una ecuación, deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *operador,* porque entiende que el número que se ubica a la derecha del signo de *igual* en estos casos, es un resultado. La alumna tiene plena conciencia de la equivalencia condicional, el problema es que en ella coexisten la solución como raíz y la solución como número del segundo miembro. Esto podría deberse al uso de la palabra "solución" asociado a una visión *operacional* del signo de *igual*, en el sentido de un signo que indica que debe realizarse una operación y escribir su resultado a la derecha.

La estudiante fue consultada sobre el trabajo realizado en esta actividad, obteniendo las siguientes respuestas:

> P: En el 9 te planteábamos dos ecuaciones y te preguntábamos si tenían la misma solución (…) ¿Me contás qué fue lo que pensaste ahí? Primero, de dónde salieron esos números: el 31 y el 22…
>
> R: Agarré el resultado final, o sea, 31 y le reste 15, y eso me hizo averiguar cuánto tiene que valer x con 2, o sea, 2 por cuánto me tiene que dar 16. Ahí me puse a pensar y dije 2 por 8 es 16, entonces, x es 18. No sé qué te pedía…
>
> P: 2 por x entonces… ¿tenía que valer cuánto me dijiste?
>
> R: 16
>
> P: 16, y entonces ¿el valor de x?
>
> R: Es 8. Entonces después, 16 más 15, 31, y x es ocho. Ta, no sé, eso para mí está bien. Y en el b… no…
>
> P: Vos debajo del $2x$ pones un 16.
>
> R: Seguramente lo planteé como en la a que dije 16+15 me tiene que dar 31, pero ahí hay un -9… ah… 31-9 tiene que ser 22, entonces, es lo mismo, está bien… 2 por x 16, más 15, 31, menos 9 es 22. Está bien lo que hice porque el total es 31 menos 9 que me tiene que dar 22, el resultado me está diciendo que es 31 menos 9, que también me da 22. Entonces en los dos casos es 22.
>
> P: ¿Y entonces, tienen la misma solución estas dos ecuaciones? Tú acá contestaste que no, o sea… ¿seguimos con esa respuesta?
>
> R: Solución…
>
> P: Si por un momento nos olvidamos de la segunda ecuación y nos quedamos a trabajar solo con la primera, y te pregunto cuál es la solución de esta primera ecuación, ¿vos qué me decís?
>
> R: Solución… que x es 8… no, o sea, si tiene que ser por lo de 2x sería *igual* porque tuve que hallar el x que… ah claro, es lo mismo porque hice $2x$ o sea 2 por 8 las dos veces, y después más 15 que me tiene que dar 31, pero en uno le resté 9 y en el otro no.
>
> P: Mh… ¿Entonces?
>
> R: Entonces me parece que tienen la misma solución.

Cuando dice "Agarré el resultado final, o sea, 31… *(en referencia a la ecuación* $2x + 15 = 31$*)*" y "el resultado me está diciendo que es 31-9… *(en referencia a la ecuación* $2x + 15 - 9 = 31 - 9$*)*", Rocío vuelve a referirse al lado derecho de cada ecuación, como el resultado de las mismas. Reiteramos que una visión *operacional* del signo de *igual* unido al entendimiento del concepto de solución de dos formas distintas al mismo tiempo (raíz y miembro derecho) puede explicar esta situación.

No obstante, cuando le preguntamos exclusivamente por la solución de la primera ecuación, Rocío deja entrever que coincide con la solución de la segunda. Entonces también puede estar confundiendo la solución para x y la solución de la ecuación. Es decir, puede estar entendiendo la palabra solución a secas como miembro derecho y solución para x como lo que llamamos raíz.

A partir de lo anterior volvimos a la actividad 7 para ver si la estudiante mantenía sus dos ideas respecto al concepto de solución, o bien si mostraba confusión entre solución de la ecuación y solución para x. Nos dijo lo siguiente:

> P: En la Actividad 7 te preguntábamos si 15 es solución de la ecuación $x - 3 = 15$. Si querés mírala para acordar qué fue lo que respondiste…, y me explicas…
>
> R: No estoy segura pero por lo que leí, por lo que puse, me imaginé que si x valía 18 y le resto 3, la solución tendría que ser 15… Pero si no vale 18, no sería, no sé…
>
> P: Si x vale 18, la solución sería 15…
>
> R: Sí, o sea, el resultado sería 15.
>
> P: Volviendo a esta de acá entonces, a la 9, si x vale 8 la solución es 31
>
> R: No, porque también depende del 15… ay me mezcla…
>
> P: Yo lo que veo es que en un caso lo estamos pensando de una manera y en otro de otra, que puede estar bien o no. Es decir, acá en un momento llegamos a la conclusión de que la solución es 8 ¿sí? *(por la primera ecuación de la actividad 9).* Pero en algún momento habíamos hablado del 31, entonces, por eso la confusión que tenemos, ¿no?
>
> R: Sí, mal…
>
> P: ¿En qué quedamos entonces? ¿Qué te parece?
>
> R: Solución… Para mí me mezclé con solución y resultado.
>
> P: Ajá.
>
> R: Y la solución no sería 15 sino que x, o sea x tendría que ser la solución, entonces no.
>
> P: Entonces contestarías que no
>
> R: Ahí va. No sé si está bien o mal…

Por un lado, la estudiante reconoce que confunde solución con lado derecho de una ecuación, y lo expresa claramente: “Para mí me mezclé con solución y resultado”. Si bien mantiene la idea de que a la derecha del signo de *igual* se ubica un resultado, al menos ese resultado deja de asociarlo con la solución de la ecuación. Por otro lado, cuando dice que “la solución no sería 15 sino que x”, haciendo alusión a la ecuación de la actividad 7, Rocío identifica que en este caso la solución es el valor de la variable con el que es cierta la equivalencia, y no el número que aparece a la derecha del signo de *igual* en la ecuación. De este modo, muestra que para ella, solución de la ecuación es el segundo miembro, y que solución de x es raíz.

Aprovechando que la estudiante estaba avanzando en su interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, quisimos retomar la actividad 8:

> P: Y entonces en la 8, cuando te pedíamos que escribas una ecuación que tenga por solución el número 5…
>
> R: Y está bien ahí…
>
> P: ¿Vos qué hiciste?
>
> R: Eh… Ah claro…, marqué solución como resultado… Puse $10 - x$, que x tenía que ser la solución, y como resultado, o sea lo que te está pidiendo que sea 5, entonces hice 10-5, 5. Ta, pero en este caso tendría que ser esta la solución *(señala la x de la ecuación 10-x=5)* y este el resultado *(señala el 5 de la ecuación 10-x=5)*… pero…
>
> P: Mh… Pero la ecuación que pusiste, en definitiva ¿tiene solución 5 o no?
>
> R: No sé…, creo que no… No, pará… Sí, para mí sí… No estoy segura, es que no puedo plantear de otra forma esa ecuación.
>
> P: ¿Por qué te parece que 5 sí es solución de esa ecuación?
>
> R: Porque al restarle 5 a 10, le estoy restando 5 y el resultado es 5. No sé…

Rocío vuelve a reconocer que asoció solución con resultado, al decir "marqué solución como resultado". Sin embargo, al preguntarle por qué la ecuación $10 - x = 5$ tiene solución 5, ella responde que "al restarle 5 a 10, le estoy restando 5 y el resultado es 5". Una vez más, la estudiante mantiene sus dos ideas respecto al concepto de solución, o bien distingue entre solución de la ecuación y solución para x. Si bien reconoce que la solución de una ecuación es el valor de x que la *verifica*, en ocasiones sigue ligando ese concepto con el lado derecho de la ecuación, además de interpretar este último como el resultado de la misma.

Actividad 10

Consultada sobre la posibilidad de que 9 sea solución de la ecuación $x + 18 + 11 = 27 + 11$, sabiendo que lo es de la ecuación $x + 18 = 27$, Rocío responde de la siguiente manera:

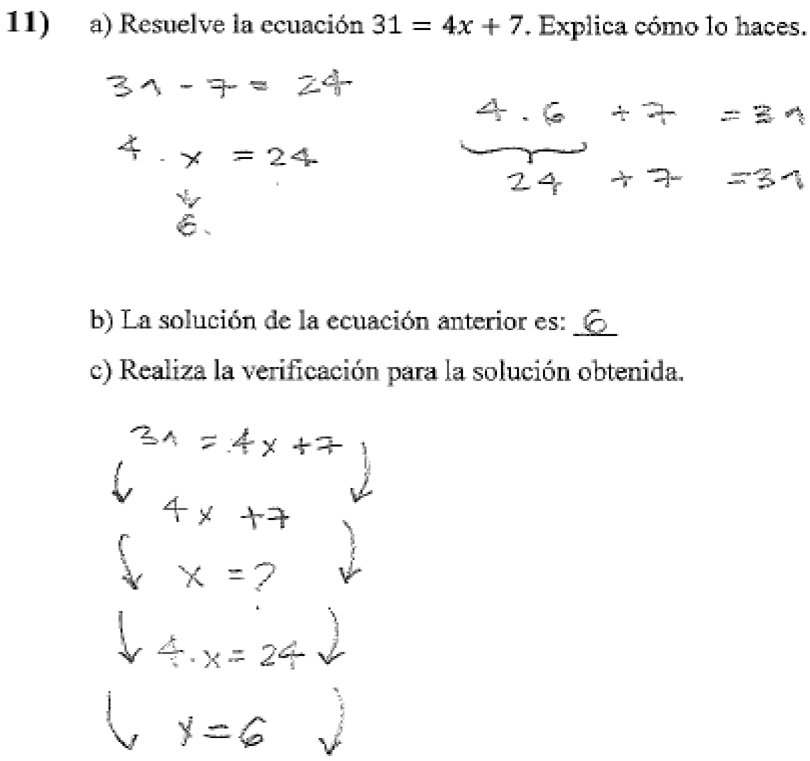
> *"Sí, es la solución, ya que al ver la ecuación podes darte cuenta que las dos dan 38. Entonces sería 9, porque da igual a 27+11".*

La estudiante responde afirmativamente. Por un lado, cuando afirma "que las dos dan 38", lleva a cabo una *verifica*ción implícita porque se refiere al resultado que se obtiene en cada miembro de la ecuación $x + 18 + 11 = 27 + 11$, al sustituir la variable x por el número 9. Por otro lado, cuando dice que la solución "sería 9, porque da *igual* a 27+11", Rocío entiende que al sustituir la variable por un número que hace cierta la equivalencia, transforma a ese número en solución de la ecuación. En otras palabras, se desprende de la asociación entre solución, lado derecho y resultado mostrada en las actividades 7, 8 y 9. Esto puede deberse a que en la propia consigna de la actividad se afirma que 9 es la solución de la ecuación $x + 18 = 27$, descartando en gran medida que 27 también lo sea.

Por lo dicho, lo que puede explicar el trabajo mostrado por la estudiante en las actividades 7, 8 y 9, es el uso que hace de los términos y del vocabulario en general, y no tanto la distinción entre solución de la ecuación y solución para x. En otras palabras, las respuestas de Rocío pueden estar influenciadas por el uso u asociación de la palabra *solución* con resultado de una cuenta, o cuando hablamos de *solución a un problema* entendiendo por ella *la respuesta*. No fue el vocabulario utilizado en el curso por parte del profesor ni tampoco del libro Matemática II (Ochoviet y Vitabar, 2015), que es el que se utilizó en el curso de segundo año con estos estudiante. Estos autores no hacen este tipo de asociaciones, reservando el uso de la palabra solución para referirse a la raíz de una ecuación. Frente a un problema solicitan encontrar una respuesta a la situación planteada, mientras que frente a una operación solicitan encontrar la suma, el producto, etc. Como vemos, en ambos casos los autores evitan emplear las palabras solución y resultado. No podemos descartar que durante la escuela primaria estos alumnos sí hayan escuchado o experimentado otros usos por parte de sus maestros.

Actividad 11

Observemos el trabajo realizado por Rocío al resolver esta actividad:


11) a) Resuelve la ecuación $31 = 4x + 7$. Explica cómo lo haces.

$31 - 7 = 24$

$4 \cdot x = 24$

$\downarrow$

$6.$

$\underbrace{4 \cdot 6}_{24} + 7 = 31$

b) La solución de la ecuación anterior es: 6

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

$31 = 4x + 7$

$4x + 7$

$x = ?$

$4 \cdot x = 24$

$x = 6$

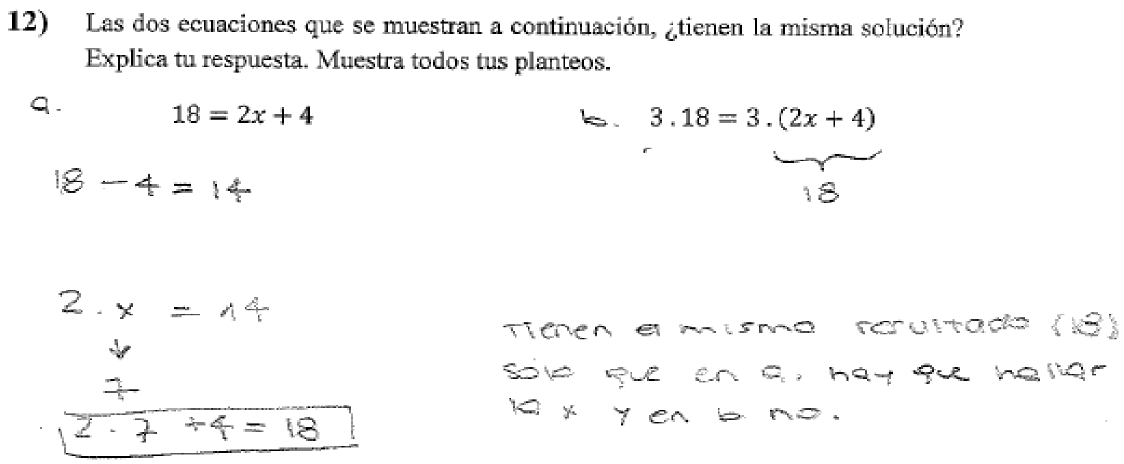
La estudiante resuelve la ecuación e identifica su solución. Cuando se le pide *verificar*, vuelve a resolver. Veámoslo con más detalle.

Rocío resuelve la ecuación en forma análoga a las actividades 5 y 9: realiza la operación $31 - 7 = 24$ para saber el valor de $4x$, y luego piensa en un número que multiplicado por 4 le de 24. Esto la conduce a señalar mediante una flecha que el valor de x es 6. Durante la resolución la estudiante invierte los miembros de lugar, de modo que la variable queda a la izquierda y un solo número a la derecha del signo de *igual*. Esto puede deberse a la práctica habitual de resolver ecuaciones con la variable del lado izquierdo, o a la necesidad de visualizar un solo número a la derecha del signo de *igual*, como cuando el signo de igual se utiliza en su carácter de *operador*.

Rocío identifica que 6 es la solución de la ecuación, pero cuando se le pide *verificar* la solución obtenida, vuelve a resolver. Sin embargo, la estudiante comprueba en la parte a) que la solución convierte la ecuación en una *igualdad* numérica: $3.7 + 5 = 26$. Como sucediera en la actividad 5, ella entiende que en este caso la equivalencia dada por la ecuación es cierta para un valor específico de la variable, pero no asocia la palabra *verificar* con el hecho de comprobar que la solución obtenida es la correcta. Entonces, como dijéramos en aquella oportunidad, este fenómeno de resolver una ecuación en lugar de *verificar*, ya reportado por otros investigadores (Sessa et al., 1995; Ochoviet y Oktaç, 2009), no quita que Rocío en esta actividad está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica, y comprueba que así es (en la parte a). Además asocia dicho valor con la solución de la ecuación.

Actividad 12

La respuesta dada por la estudiante para esta actividad es la siguiente:



12) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

a. $18 = 2x + 4$

$18 - 4 = 14$

$2 . x = 14$

7

$\boxed{2 . 7 + 4 = 18}$

b. $3 . 18 = 3 . (\underbrace{2x + 4}_{18})$

Tienen el mismo resultado (18) solo que en a. hay que hallar la x y en b no.

Rocío resuelve la primera ecuación y señala con una llave que el valor de $2x + 4$ es 18 en la segunda ecuación. Luego responde en forma afirmativa a la pregunta planteada.

Cuando resuelve la primera ecuación, Rocío vuelve a trabajar en forma análoga a lo realizado en actividades previas: realiza una operación: $18 - 4 = 14$, escribe una ecuación equivalente a la dada: $2x = 14$, y señala mediante una flecha cuál es el valor de la variable que *verifica* la ecuación (en este caso, 7). Observamos que vuelve a invertir los miembros de lugar respecto al signo de *igual*, como hiciera en la actividad 11, por lo que valen las mismas consideraciones que al respecto hacíamos en aquella oportunidad. No obstante, hasta aquí la estudiante deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia* *condicional*, porque encuentra el valor de la variable que *verifica* la primera ecuación. Ahora bien, cuando señala mediante una llave que en la segunda ecuación, $2x + 4$ es 18, Rocío está razonando en términos de equivalencia pero sin reconocer el carácter condicional de la misma. Ella procede haciendo uso del 18 y del $2x + 4$ como si se tratara de dos expresiones equivalentes para cualquier valor de la variable, cosa que no es cierta. Vemos entonces que Rocío, en este caso, no sigue interpretando el signo de *igual* como lo señalábamos antes, al no reconocer que dicha equivalencia es cierta cuando la variable toma un valor en particular.

Además, cuando responde que “tienen el mismo resultado (18)”, Rocío emplea otra vez el término “resultado” para referirse al lado derecho de las ecuaciones planteadas (luego de invertir los miembros), que al mismo tiempo asocia con la solución de cada una de ellas. En otras palabras, Rocío vuelve a identificar lado derecho con resultado y solución de una ecuación, como hiciera en las actividades 7, 8 y 9. Pese a dicha asociación, responde a la pregunta en forma afirmativa porque no toma en cuenta el 3 que multiplica a ambos miembros de la segunda ecuación.

Actividad 13

Sobre la posibilidad de que 8 sea solución de la ecuación $2x + 1 = 17$, sabiendo que lo es de la ecuación $17 = 2x + 1$, Rocío escribe la siguiente respuesta:

> *“Sí, es la solución, ya que sabemos que 2.8=16 y al sumarle 1 da 17 como muestra anteriormente. Entonces sí lo es”.*

Rocío responde en forma afirmativa. Cuando al justificar dice que “2.8=16 y al sumarle 1 da 17”, está *verifica*ndo que en efecto, la ecuación $17 = 2x + 1$ tiene solución 8. Vemos que en sus planteos ha invertido los miembros de lugar respecto al signo de *igual*, como hiciera en las actividades 11 y 12. Ya sea por costumbre o no, queda de manifiesto que comprende la propiedad simétrica del signo de *igual*, esto es, “$a = b$ implica $b = a$”. La estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque desde su perspectiva, la ubicación de los miembros de una ecuación, respecto al signo de *igual*, no afecta su solución.

Queremos hacer una puntualización más. En esta actividad, Rocío no asocia lado derecho ni con solución ni con resultado de la ecuación, como hiciera en las actividades 7, 8 y 9. Al igual que en la actividad 10, esto puede deberse a que en la propia consigna se afirma que 8 es solución de la ecuación $2x + 1 = 17$, descartando en gran medida que 17 también lo sea. Esto conduce a interpretar que lo realizado por Rocío en las actividades 7, 8 y 9 pudo tener que ver con el uso u asociación de la palabra solución con resultado de una cuenta, más que con la confusión entre solución de la ecuación y solución para x.

Actividad 14

Sobre la posibilidad de que Juan haya terminado la tarea de reducir términos semejantes, al escribir en su cuaderno: $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$, Rocío responde lo siguiente:

> *"Sí, ya que al sumar $x + x$ están reduciendo dos términos. Después los que le quedó los suma, ya que tienen el mismo exponente y se pueden sumar: $4x^2 + 5x^2 = 9x^2$. Junta los dos resultados y termina. No se puede reducir más".*

Por un lado, cuando la estudiante dice que "tienen el mismo exponente y se pueden sumar", está refiriéndose a la necesidad de identificar monomios semejantes para poder reducir. Por otro lado, cuando escribe $4x^2 + 5x^2 = 9x^2$, está interpretando el signo de *igual* como un *operador*, porque lo escribe para indicar el resultado de una simplificación. Esto lo confirmamos cuando dice que "Junta los dos resultados y termina". Pese a la interpretación *operacional* que queda al descubierto, la estudiante acepta que a la derecha del signo de *igual* se ubique un polinomio con dos términos. Eso lo percibimos cuando Rocío afirma que Juan ha terminado con la tarea que se le ha asignado.

Actividad 15

Veamos la forma en que la estudiante analiza las primeras dos expresiones planteadas en esta actividad:

a) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ F

se multiplican, Por lo tanto da un numero mas grande ya que estamos multiplicando 2 veces.

b) $4x = x + 3x$ V

Al sumar 3x + x estarias sumando "uno mas" entonces es 4x, ya que estas sumando x.

Rocío sostiene que la afirmación a) es falsa y la afirmación b) es verdadera. En el primer caso, plantea explicaciones que denotan creencias como que "multiplicar agranda", las cuales la conducen a responder de ese modo. En ambos casos, la estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*, porque entiende que a la derecha del signo de *igual* se planteó una operación cuyo posible resultado aparece a su izquierda. Esto es especialmente visible cuando al justificar en la segunda afirmación, dice que "Al sumar $3x + x$ estamos sumando uno más, entonces es $4x$".

d) $x = x$ F

x tendria que valer cualquier numero, positivo o negativo pero no x.

e) $5 + x = 5 + x$ V

Como es un numero natural (5) y una x no se puede decir que el resultado es 5x porque no estamos sumando x en los dos casos.

En la parte d) Rocío no acepta la *identidad estricta* que está planteada. Para ello, siente la necesidad de que la variable tome algún valor numérico. Recordemos que en la actividad 3 Rocío asumió la posibilidad de que la variable involucrada en la implicación dada tomara un valor distinto a cada lado del signo de *igual*, aunque en la entrevista no lograra dar ningún ejemplo concreto. Consultada sobre la parte d) de la actividad 15, la estudiante nos dijo lo siguiente:

> P: Llegando al final del cuestionario, te pedíamos analizar si estas expresiones eran verdaderas o falsas. En la d, $x = x$, tú pusiste que es falso, ¿por qué te parece que eso es falso?
>
> R: Para mí puse falso porque capaz que x en los dos casos no valen lo mismo, no estoy segura.
>
> P: Poneme un ejemplo en el que eso sería falso.
>
> R: O sea… ¿Te lo pongo con números?
>
> P: Sí…
>
> R: (Escribe 1=2) O sea, que la primer x valdría 1 y la segunda 2. Pero ta, si valen lo mismo, o sea ponele 2 es igual a 2, sí.
>
> P: Depende de cada caso entonces.
>
> R: Sí

Vemos que Rocío insiste en la posibilidad de que la variable x tome más de un valor por vez en una misma expresión, aunque también considera el caso contrario. Es oportuno volver a señalar que la forma en que Rocío razona en esta actividad, es coherente con lo realizado por la estudiante en la actividad 3 de este cuestionario. Analizadas las dos actividades en conjunto, vemos que el principio aristotélico de identidad no es intuitivo para ella (toda cosa es igual a sí misma). Al respecto, interpretamos que hay una diferencia entre los alumnos que dicen que 15 no es igual a 15 porque simplemente esperan "una cuenta" en alguno de los miembros, caso en el que falla la visión *relacional* del signo de *igual*, frente a esta situación en la que queda de manifiesto la dificultad de la estudiante para comprender el funcionamiento de la variable en una expresión ligada a través del signo de *igual*. Lo que la alumna interpreta está mediado por una dificultad con el concepto de variable más que con el signo de *igual*. Este fenómeno, conocido como la doble asignación de la variable, se reporta en otros estudios que ya mencionamos en el análisis de la actividad 3 (Vaiyavutjamai y Clements, 2006; Fujii, 2003), sobre los cuales podremos volver en la sección final de este capítulo.

En la parte e) la estudiante acepta la *identidad estricta* que está planteada. Si cuando niega que "el resultado es $5x$", lo hace pensando en las dos expresiones que intervienen en la afirmación, entonces está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica,* porque alude al resultado que se obtiene a cada lado del signo de *igual*. De lo contrario, si al negar que "el resultado es $5x$", lo hace pensando en la expresión que se ubica a la derecha del signo de *igual*, está interpretando a este último como un *operador*, por entender que lo que está su izquierda es la operación y lo que está a su derecha es el resultado.

c) $3x^2 + 4x^2 = 2x^2 + 5x^2$ V

Tiene el mismo resultado. Da igual. solo que son 2 distintas cuentas que hacer, pero si dan lo mismo.

3+4=7 2+5=7

f) $7x + 2x = 9x$ V

Estamos sumando X en este caso. Al sumar 7+2 = 9 y como lo que se esta sumando es X, es igual a 9x.

La estudiante contesta verdadero a las dos partes. A partir de sus explicaciones, observamos que la presencia de un polinomio con dos términos a la derecha del signo de *igual* está favoreciendo interpretarlo como *expresión de una equivalencia simbólica* (parte c). Queda de manifiesto cuando la estudiante señala que "Tienen el mismo resultado", en referencia al resultado de $3x^2 + 4x^2$ y de $2x^2 + 5x^2$. En cambio, cuando aparece escrito un polinomio con un solo término del lado derecho (parte f), la estudiante deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *operador*.

Actividad 16

Observemos la respuesta que presenta la estudiante para esta actividad:

16) La profesora escribe en el pizarrón que si reducimos monomios semejantes en la expresión $x + x + 5 + 7$ obtenemos $2x + 12$. Es decir que:

$$x + x + 5 + 7 = 2x + 12$$

Luego solicita a los alumnos que indiquen si lo escrito en cada renglón es Verdadero (V) o Falso (F). En caso de ser verdadero, les pide que expliquen por qué, y en caso de ser falso, les pide que indiquen qué es lo que está mal.

Te pedimos que resuelvas la tarea que la profesora les planteó a sus alumnos.

a) $-5(x + x + 5 + 7) = -5(2x + 12)$ V.

tiene el mismo resultado pero esta planteado de diferentes maneras. se suma las x y el 5 y 7 por su lado reduciendolo. Es lo mismo pero reducido.

b) $2x + 12 = x + x + 5 + 7$ V

se sumo las 2x, en el cual esta bien, y despues los otros dos numeros ya que no se pueden sumar con x.

5+7 = 12   x+x = 2x

c) $x + x + 5 + 7 - 4 = 2x + 12 - 6$ ≠

2x + 12 esta bien, pero luego el -4 y el -6 hacen que den un resultado diferente. ya que 12 - 4 = 8 y 12 - 6 = 6.

Rocío contesta verdadero en las partes a) y b), mientras que contesta falso en la parte c). Veámoslo con más detalle.

En la parte a) la estudiante realiza algunas operaciones y concluye que "tienen el mismo resultado pero está planteado de diferentes maneras". Con esta justificación la estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque hace alusión al resultado que se obtiene a cada lado del signo de *igual*. No obstante, cuando luego agrega que "es lo mismo pero reducido", la estudiante deja entrever que el signo de *igual* de la afirmación planteada está indicando el resultado de una simplificación, interpretándolo entonces también como un *operador*.

En la parte b) la estudiante interpreta la expresión dada de derecha a izquierda para justificar su validez: "se suman las $2x$" y "después los otros dos números". Lo mismo había hecho en la parte b) de la actividad 15. Rocío está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción* porque, desde su perspectiva, la expresión de la derecha plantea una operación y la expresión de la izquierda es entendida como el resultado de la misma.

En la parte c) la estudiante no se limita a justificar la falsedad de la expresión dada en el 6 que está restando del lado derecho, sino que mira la expresión en forma global y basa su argumento en lo escrito a cada lado del signo de *igual*: “el −4 y el −6 hacen que den un resultado diferente”. La estudiante vuelve a dar indicios de estar interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque al igual que en la parte a), se refiere al resultado que se obtiene a cada lado del signo de *igual*.

Síntesis:

En contexto aritmético, Rocío interpreta el signo de *igual* en forma alternada como *operador* y como *expresión de una equivalencia numérica*, siendo esto coherente con el significado que ella le atribuye cuando se le pregunta explícitamente por su significado (actividad 4b). Mientras que por un lado completa afirmaciones de modo tal que el signo de *igual* relacione expresiones diferentes del mismo número (actividad 1), por otro lado señala que una afirmación es verdadera cuando en realidad no lo es, producto de estar interpretando el signo de *igual* como un *operador* (actividad 2b). En contexto aritmético Rocío también interpreta el signo de *igual* como *expresión de una acción*, cuando acepta una afirmación en la que, desde su perspectiva, la operación aparece a la derecha y el resultado a la izquierda del signo de *igual* (actividad 2a).

En contexto de ecuaciones, Rocío sostiene que el signo de *igual* indica que “el resultado de esas dos ecuaciones es el mismo” (en referencia a los miembros de la ecuación), y luego agrega que “están planteadas de diferente maneras pero el resultado es igual” (actividad 6). La estudiante deja entrever una interpretación *relacional* del signo de *igual* que es consistente con pensar en una ecuación, aunque no observamos que en su respuesta haga alusión a la condicionalidad que caracteriza la equivalencia dada por una ecuación.

En algunas ocasiones, la estudiante encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica, y lo asocia con su solución (actividades 5 y 11). En esos casos, si la variable de la ecuación aparece solo del lado derecho, invierte los miembros de lugar respecto al signo de *igual*; y si le piden *verificar*, vuelve a resolver cada ecuación. Esto es coherente con lo reportado en otros estudios (Kieran, 1989; Sessa et al., 1995; Ochoviet y Oktaç, 2009). En otras ocasiones, la estudiante resuelve la ecuación pero asocia solución con lado derecho (actividades 7, 8, 9 y 12), interpretando al segundo miembro como "resultado de la ecuación". Esto también se reporta en otros estudios (Papaieronymou, 2007; Sessa et al., 1995).

Rocío tiene plena conciencia de la equivalencia condicional dada por el signo de *igual* en una ecuación, pero las dos ideas que conviven en ella respecto a la solución de una ecuación (como raíz y como segundo miembro de la ecuación), unido a una visión *operacional* del signo de *igual*, hace que trabaje de un modo u otro. Incluso logra congeniar ambas ideas en una misma respuesta cuando presenta una ecuación que tiene la solución solicitada (actividad 8), y al mismo tiempo el segundo miembro está conformado por esa misma solución. Esta forma de razonar de parte de la estudiante es coherente con lo que Vinner (1990) denomina *pensamiento inconsistente*, que tiene que ver con todo sistema cognitivo del que puedan derivarse dos proposiciones que son contradictorias, como aquí.

Cuando se presentan dos ecuaciones equivalentes, ya sea porque se aplicó la misma operación a ambos miembros de una de ellas para obtener la otra (actividades 9, 10 y 12), o porque se intercambiaron los miembros de lugar respecto al signo de *igual* (actividad 13), Rocío siente la necesidad de resolver (cuando se permite) o *verificar* las ecuaciones para comprobar que ambas tienen la misma solución. Tampoco explicita que al multiplicar dos expresiones equivalentes por un mismo número (actividad 16a), o al invertirlas de lugar respecto al signo de *igual* (actividad 16b), continúan siendo equivalentes. Por el contrario, prefiere simplificar términos semejantes y comparar las expresiones así obtenidas. No obstante, en su respuesta a la actividad 13 queda de manifiesto que comprende la propiedad simétrica del signo de *igual*.

En contexto de polinomios, la estudiante deja entrever una interpretación *operacional* o *relacional* del signo de *igual*, dependiendo de cada actividad. Por ejemplo, la presencia de un solo término a la derecha del signo de *igual* la conduce interpretar el signo de *igual* como un *operador* (actividad 15f), mientras que la presencia de varios términos a cada lado, en ocasiones, la conducen a interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica* (actividades 15c y 16c). Eso no quita que frente a una misma situación manifieste ambos significados (actividad 16a). Rocío también interpreta el signo de *igual* como *expresión de una acción*, porque al igual que en contexto aritmético, acepta expresiones que desde su perspectiva, plantean una operaciones a la derecha y su resultado a la izquierda del signo de *igual* (actividades 15b y 16b).

Rocío admite la posibilidad de que la variable tome más de un valor por vez en una misma expresión, lo que le impide aceptar expresiones como "$1 + 4 + a = 2 + 3 + a$" (actividad 3) y "$x = x$" (actividad 15d). En estos casos el problema no es con la interpretación del signo de *igual*, sino más bien con el concepto de variable que tiene la estudiante. Este fenómeno, conocido como la doble asignación de la variable, es reportado en otros estudios (Vaiyavutjamai y Clements, 2006; Fujii, 2003). El principio aristotélico de la *igualdad* no es evidente para Rocío, y eso influye en la interpretación de ciertas expresiones que están ligadas al signo de *igual* como por ejemplo "$x = x$", en las que intervienen variables (Ochoviet, 2005).

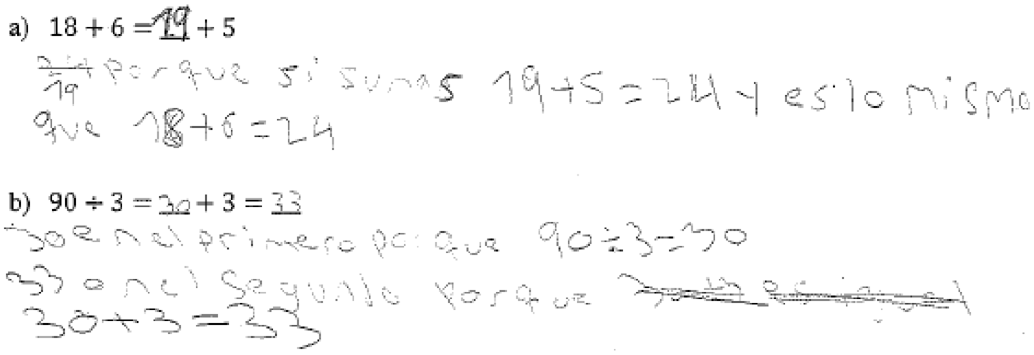
5.2.2 Respuestas de Miguel (14 años)

En la actividad 4b, Miguel sostiene que el signo de *igual* se utiliza "cuando haces una cuenta, para saber cuánto da". El estudiante presenta una respuesta que categorizamos como *operacional*, porque desde su perspectiva, el signo de *igual* se escribe para indicar el resultado de una operación planteada a su izquierda.

Actividad 1

Observemos el trabajo del estudiante en esta actividad:

1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.



a) $18 + 6 = \underline{19} + 5$

24/19 porque si sumas $19+5=24$ y es lo mismo que $18+6=24$

b) $90 \div 3 = \underline{30} + 3 = \underline{33}$

30 en el primero porque $90 \div 3 = 30$

33 en el segundo porque $30+3=33$

En la parte a), Miguel completa el espacio en blanco con un 19. Cuando dice que “si sumas $19 + 5 = 24$, es lo mismo que $18 + 6 = 24$”, está señalando que al completar el espacio vacío de ese modo, a cada lado del signo de *igual* se obtienen el mismo número. Eso hace que en este caso, el estudiante esté interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica,* porque entiende que está relacionando dos expresiones aritméticas diferentes que arrojan el mismo valor numérico.

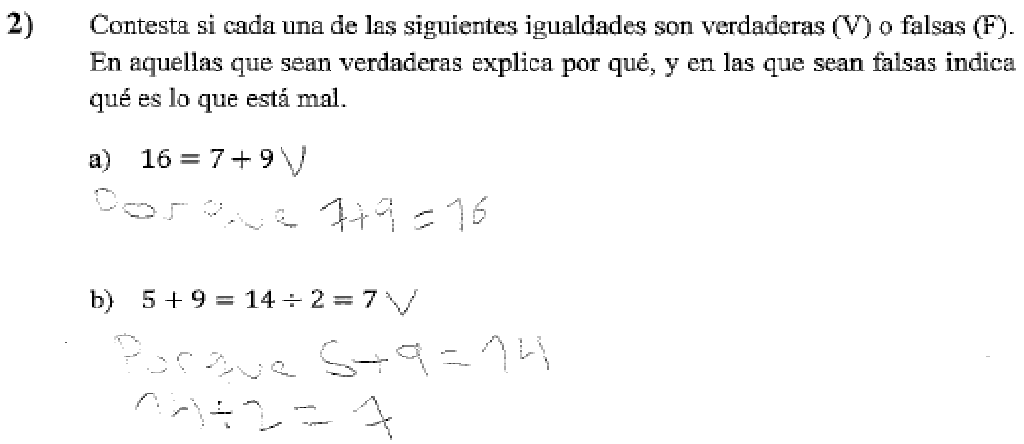
En la parte b), Miguel completa los espacios vacíos con un 30 y un 33. Cuando dice que “30 en el primero porque $90 : 3 = 30$” y “33 en el segundo porque $30 + 3 = 33$”, está interpretando los signos de *igual* de la expresión dada como *propuesta de actividad,* porque entiende que a la derecha de cada uno de ellos se coloca el resultado de la operación que se encuentra a su izquierda. El estudiante no reconoce que al completar los espacios vacíos de este modo, el primer signo de *igual* termina relacionando dos expresiones aritméticas que no arrojan el mismo valor numérico: $90 : 3$ y $30 + 3$. El estudiante fue consultado sobre su trabajo en esta parte de la actividad:

> Profesor: En la Actividad 1b había que completar los espacios vacíos y vos pusiste un 30 y un 33. ¿Te animás a contarme por qué?
>
> Miguel: Porque 3 dividido 90 te da 30.
>
> P: A ver, ¿cómo? 3 dividido 90…
>
> M: Sí, te da 30. Después te pide que le sumes 3, y 30 más 3 te da 33.
>
> P: ¿33?
>
> M: Sí, 33.

Cuando dice que "3 dividido 90 te da 30", el estudiante invierte divisor y dividendo en relación al cociente que calculó en el cuestionario. Él vuelve a resolver esta parte de la actividad del mismo modo en que la resolvió en el cuestionario, esto es, interpretando el signo de *igual* como *propuesta de actividad*. Él no reconoce que $90 : 3$ y $30 + 3$ no son expresiones equivalentes. Por ende, no muestra evidencias de estar interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, que es el significado esperado en esta parte de la actividad.

Actividad 2

Veamos la forma en que Miguel resuelve esta actividad:



2) Contesta si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

a) $16 = 7 + 9$ V

porque $7+9=16$

b) $5 + 9 = 14 \div 2 = 7$ V

Porque $5+9=14$

$14 \div 2 = 7$

En la parte a), Miguel señala que la *igualdad* es verdadera. Cuando al justificar dice que es "V porque $7 + 9 = 6$", está indicando que el resultado de la operación $7 + 9$ es 16. Miguel da cuenta de que está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*, porque desde su perspectiva, el lado derecho de la expresión $16 = 7 + 9$ plantea una operación, el lado izquierdo es entendido como el resultado de esa operación, y sin embargo, contesta verdadero.

En la parte b), Miguel señala que las *igualdad*es dadas son verdaderas. Cuando al justificar dice "porque $5 + 9 = 14$ y $14 : 2 = 7$", el estudiante vuelve a interpretar el signo de *igual* en su carácter de *operador*, porque entiende que debe indicar el resultado de la operación planteada a su izquierda. Lo que no reconoce el estudiante, es que el primer signo de *igual* de la expresión dada está relacionando dos expresiones aritméticas que no son equivalentes, $5 + 9$ y $14 : 2$. En forma similar había trabajado en la actividad 1b. Miguel fue consultado sobre lo realizado en esta actividad:

> P: En el 2b vos ponés que esta expresión es verdadera.
>
> M: 5 más 9, 14. Después a 14 lo divido entre 2, 7. Entonces ahí ya está.
>
> P: Si le sacamos el =7. Si nos quedáramos con 5 más 9 *igual* 14 dividido 2, ¿qué pensás?
>
> M: Que eso es falso.
>
> P: ¿Por qué?
>
> M: Porque 5 más 9 da 14, y no estás haciendo ninguna cuenta, estás comparando dos ecuaciones, entonces, ahí estás sumando y en la otra estás dividiendo, y te dan diferentes resultados.
>
> P: Y si agregamos el =7 pasa a ser verdadero…
>
> M: Sí

Miguel es consultado sobre la expresión $5 + 9 = 14 : 2 = 7$, que es la que se proponía en la actividad 2b. Cuando dice que "5 más 9, 14. Después a 14 lo divido entre 2, 7", vuelve a interpretar el signo de *igual* como un *operador,* porque acepta que en ambos casos indique el resultado de la operación que se encuentra a su izquierda. También es consultado sobre la expresión $5 + 9 = 14 : 2$, que es la que se obtiene al suprimir el =7 de la expresión inicial. Cuando dice que "eso es falso" porque "estás comparando dos ecuaciones" y "te dan diferentes resultados", si bien asocia ecuación con expresión, Miguel está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica,* al reconocer que $5 + 9$ y $14 : 2$ son representaciones de números distintos. Esto último es coherente con la forma en que Miguel resolvió la actividad 1a, donde interpretó el signo de *igual* en el mismo sentido. Observamos que la presencia de un solo número al final de la expresión dada, $90 : 3 = 30 + 3 = 7$, puede estar favoreciendo una interpretación *operacional* del signo de *igual*, mientras que en su ausencia, $90 : 3 = 30 + 3$, Miguel manifiesta una interpretación *relacional*.

Actividad 3

Sobre la implicación planteada, "$1 + 4 = 2 + 3$, entonces, $1 + 4 + a = 2 + 3 + a$, siendo a un número natural cualquiera", Miguel responde lo siguiente:

> *"V porque si usas cualquier número siempre te va a dar lo mismo. Por ejemplo:* $1+4+5=10=2+3+5$*. También porque son dos sumas (*$1+4$*,* $2+3$*) que sin ponerle otro número te dan lo mismo, entonces si pones cualquiera como por ejemplo el 5, te va a dar lo mismo".*

Miguel sostiene que la afirmación es verdadera. Explica su respuesta y presenta un ejemplo acorde a la implicación planteada.

Cuando explica su respuesta, Miguel dice que "son dos sumas que sin ponerle otro número te dan lo mismo", haciendo alusión a las expresiones $1+4$ y $2+3$. Hasta aquí, está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque reconoce que $1+4$ y $2+3$ son dos representaciones diferentes del mismo número. Luego agrega que "si pones cualquiera como por ejemplo el 5, te va a dar lo mismo", reconociendo que la equivalencia dada por la expresión "$1+4+a=2+3+a$" es cierta para cualquier valor de la variable, con lo cual también está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*.

Cuando presenta el ejemplo, Miguel escribe $1+4+5=10=2+3+5$. Observamos que el estudiante le asigna a la variable un solo valor, el mismo a cada lado del signo de *igual*, y eso es lo que le permite interpretar adecuadamente la implicación planteada. Esto da cuenta de su percepción de a como variable. No obstante, Miguel siente la necesidad de separar las expresiones $1+4+5$ y $2+3+4$ con el valor numérico que arrojan ambas, utilizando para ello dos veces el signo de *igual*. De este modo, deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *operador* y como *expresión de una acción*, en una situación en la que ello no es imprescindible. Esto nos muestra que distintos usos del signo de *igual* conviven en un mismo estudiante y que la adopción de un uso en particular no desplaza el uso de los otros.

Actividad 4

Consultado sobre el nombre y el significado del símbolo =, Miguel responde lo siguiente:

> *"Es igual".*
>
> *"Es cuando haces una cuenta para saber cuánto da. También para saber que esas cuentas usadas son igual al resultado".*

Cuando dice "para saber cuánto da" y "para saber que esas cuentas usadas son *igual* al resultado", es notorio que Miguel está interpretando el signo de *igual* como *propuesta de actividad* o bien como *operador*. Él entiende que el signo de *igual* separa una operación de su resultado, y deja entrever que la disposición de estos, respecto al signo de *igual*, siempre es la misma: operación a la izquierda y resultado a la derecha. La forma en que Miguel resolvió las actividades 1b y 2b es coherente con el significado del signo de igual que pone de manifiesto en esta parte de la actividad.

Sobre las situaciones de clase en que utilizó este símbolo, y con qué motivos, Miguel responde de la siguiente manera:

> *"Para hacer cuentas, ecuaciones, geometría".*
>
> *"Cuentas para saber el resultado, por ejemplo,* $2 + 3 = 5$*. Ecuaciones para saber si son iguales las ecuaciones. Geometría para saber el lado de un ángulo, un segmento de un triángulo por ejemplo, etc.".*

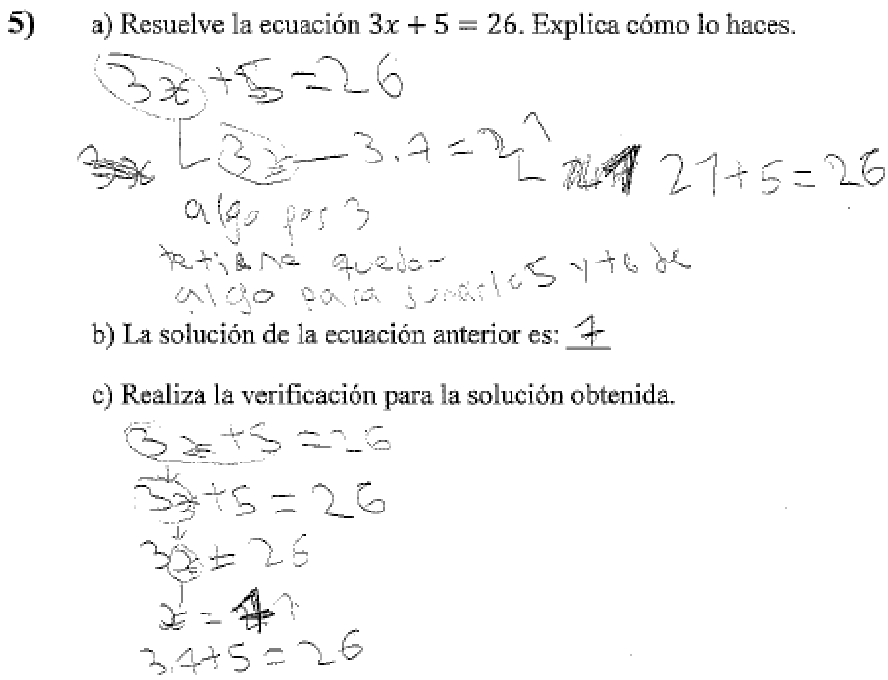
El estudiante no muestra ejemplos concretos en los que utilice el signo de *igual*, a no ser por la expresión $2 + 3 = 5$ que acompaña a la primera situación que menciona, "para hacer cuentas". Aquí Miguel vuelve a interpretar el signo de *igual* como un *operador*, porque lo utiliza para indicar que el resultado de la operación $2 + 3$ es 5.

El alumno explica verbalmente otras dos situaciones. Una de ellas, "ecuaciones", donde señala que el signo de *igual* se utiliza "para saber si son *iguales* las ecuaciones". Él asocia "las ecuaciones" con los dos miembros de una sola ecuación, y cuando dice "para ver si son iguales", hace referencia a una comparación de valores numéricos a dos miembros según un determinado valor de la variable, que es consistente con el proceso de *verificación* de una ecuación. El estudiante reconoce que al sustituir la variable por un valor en particular puede que no obtenga una *igualdad*, "para ver si". En otras palabras, Miguel deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque asume que la equivalencia dada por una ecuación no es cierta para cualquier valor de la variable.

La otra situación es "geometría". Cuando dice que el signo de *igual* se utiliza "para saber el lado de un triángulo", puede estar pensando en expresiones como $AB = 6\ cm$, que son de uso habitual en las clases de matemática y en los libros de texto, donde el signo de *igual* se utiliza para asignarle un valor numérico a la medida de un segmento. En ese caso está manifestando el significado *asignación de un valor numérico.*

Actividad 5

El trabajo de Miguel en esta actividad es el siguiente:


5) a) Resuelve la ecuación $3x + 5 = 26$. Explica cómo lo haces.

3x+5=26
3x — 3.7=21 21+5=26
algo por 3
tiene que dar algo para sumarle 5 y te de

b) La solución de la ecuación anterior es: 7

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

3x+5=26
3x+5=26
3x=26
x=7
3.7+5=26

El estudiante resuelve la ecuación e identifica su solución. Cuando se le pide *verificar*, primero vuelve a resolver y luego *verifica*. Veámoslo con más detalle.

Al resolver la ecuación, Miguel explica que "algo por 3 te tiene que dar algo para sumarle 5 y te dé", por lo que se dispone a encontrar un número que *verifique* la ecuación planteada. Reconoce que $3x$ vale 21 y que $3.7 = 21$, con lo cual afirma que la solución de la ecuación es 7. Cuando se le pide *verificar* la solución obtenida, resuelve la ecuación por segunda vez y luego sí, como hiciera al término de la primera resolución, comprueba que el valor obtenido transforma la ecuación en una *igualdad* numérica: $3.7 + 5 = 26$. Él entiende que en este caso la equivalencia dada por la ecuación es cierta para un valor específico de la variable, pero en un primer momento, no asocia la palabra *verificar* con el hecho de comprobar que la solución obtenida es la correcta, al menos eso se desprende del trabajo realizado por el estudiante en la parte c) de la actividad. Algo similar ocurrió con Rocío cuando frente a la misma situación, resolvió la ecuación por segunda vez en lugar de realizar la *verificació*n solicitada que, por otra parte, ya había mostrado en la parte a) de la actividad.

Como dijimos al analizar el trabajo de Rocío, este fenómeno de resolver en lugar de *verificar*, ya ha sido reportado por otros investigadores (Sessa et al., 1995; Ochoviet y Oktaç, 2009), y en este caso no quita que Miguel esté interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma dicha ecuación en una *igualdad* numérica, y comprueba que así es (al final de la parte c). Además asocia dicho valor con la solución de la ecuación.

Actividad 6

Miguel sostiene que en la expresión $x + 3 = 3x + 5$, el signo de *igual* tiene el siguiente significado:

"Que $x + 3$ *y* $3x + 5$ *son iguales, porque dan el mismo resultado".*

En su respuesta, Miguel menciona que $x + 3$ y $3x + 5$ son iguales, y explica desde su perspectiva lo que eso significa: "dan el mismo resultado". El estudiante se está refiriendo a una comparación entre valores numéricos, con lo cual manifiesta una comprensión *relacional* del signo de *igual* en el contexto de una ecuación a dos miembros. No observamos que Miguel señale en forma explícita que la equivalencia dada por la ecuación, en este caso, es cierta cuando la variable toma un valor en particular. Eso no significa que desconozca esto último, y que por ende no logre interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. De hecho, en la actividad 4 dio una respuesta que deja entrever una comprensión del signo de *igual* en este sentido. Miguel fue consultado sobre esta actividad en la entrevista que mantuvimos posteriormente, nos dijo lo siguiente:

> P: En la actividad 6 te preguntábamos qué significado tiene para ti el signo de *igual* en esta ecuación. Tú pusiste que $x + 3$ y $3x + 5$ son *igual*es porque te dan el mismo resultado. ¿A qué te referís cuando hablás del mismo resultado? ¿Cuál sería ese resultado, en esta ecuación?
>
> M: No sé… Ahora que me pongo a pensar lo hice mal.
>
> P: ¿Sí?
>
> M: Sí.
>
> P: ¿Por qué?
>
> M: Porque son diferentes ecuaciones.
>
> P: ¿Cuántas ecuaciones ves ahí?
>
> M: Dos, $x + 3$ es $3x$ y $3x + 5$ te da diferente, no te da el mismo resultado.
>
> P: ¿No?
>
> M: No.
>
> P: ¿Qué resultado te da una y qué resultado te da la otra?
>
> M: Acá te da $3x$ y acá te da $8x$.

Para Miguel una ecuación está formada por dos ecuaciones, esto es, cada uno de los miembros es una ecuación: “son diferentes ecuaciones”. Sin embargo, con cada uno de esos miembros opera como si se tratara de expresiones algebraicas en las que es posible reducir términos semejantes. Señala que $x + 3$ le da $3x$ y que $3x + 5$ le da $8x$, obteniendo así una expresión diferente a cada lado del signo de *igual*: “acá te da $3x$ y acá te da $8x$”. La idea de comparar sigue presente en el pensamiento del estudiante, que es propio de una visión *relacional* del signo de *igual*. El problema es que esa comparación no es entre valores numéricos a dos miembros según un determinado valor de la variable, que es propio de una ecuación, sino que es entre expresiones algebraicas que no son *idénticas* (tanto las que intervienen en la ecuación inicial como las que obtiene el estudiante luego de operar). Miguel necesitaba obtener una *identidad estricta* para aceptar el uso del signo de *igual* en esta actividad, por eso deja al descubierto que lo está interpretando como *expresión de una equivalencia simbólica*.

Decidimos plantearle otra ecuación para analizar su reacción y observar si volvía a reducir cada miembro del mismo modo en que lo hizo antes:

> P: Por ejemplo, si yo te preguntara cuáles son esos resultados de los que hablás, en la ecuación: $2x + 15 = 31$… ¿Qué significa el signo de *igual* en esta ecuación?
>
> M: Que ahí te da… que $2x$… 2 por 8, que es la solución, más 15, te da 31.
>
> P: Entonces, si vos tuvieras que explicarle a alguien qué significado tiene ese signo de *igual*… ¿Para qué ponemos ese signo de *igual*? ¿Vos qué responderías?
>
> M: Para dar el resultado final.
>
> P: ¿Qué en este caso cuál sería?
>
> M: 31

Cuando Miguel dice que “2 por 8, que es la solución, más 15, te da 31”, está *verificando* que la solución de la ecuación $2x + 15 = 31$ es 2, con lo cual asocia el significado del signo de *igual* con la existencia de un valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica. Con esa respuesta Miguel muestra que es capaz de interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional.* No obstante, cuando dice que el signo de *igual* se utiliza “Para dar el resultado final”, deja entrever que lo está interpretando en su carácter de *operador*, por entender que a su derecha se ubica el resultado de las operaciones que, desde su perspectiva, corresponden al primer miembro de la ecuación. Interpretamos que la expresión aritmética que se obtiene al *verificar* esta ecuación, $2.8 + 15 = 31$, es lo que favorece dicha interpretación del signo de *igual* de parte del estudiante.

Actividad 7

Frente a la posibilidad de que 15 sea solución de la ecuación $x - 3 = 15$, Miguel presenta la siguiente respuesta:

> *“No porque si 15 ya está con el resultado, no puede darte 15. Si pones 15 en* $x - 3$ *te daría 12.* $15 - 3 = 15$ *está mal, te daría* $15 - 3 = 12$*”.*

El estudiante responde que 15 no es solución de la ecuación y explica su respuesta. Cuando al justificar dice "si pones 15 en $x - 3$ te daría 12", Miguel está *verificando* que al sustituir la variable por 15 no se obtiene una equivalencia cierta. Eso hace que en este caso esté interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, al reconocer que la equivalencia dada por la ecuación no es cierta para cualquier valor de la variable. Al mismo tiempo, cuando dice que "15 ya está con el resultado", deja entrever una interpretación *operacional* del signo de *igual* porque asocia resultado con lado derecho de la ecuación.

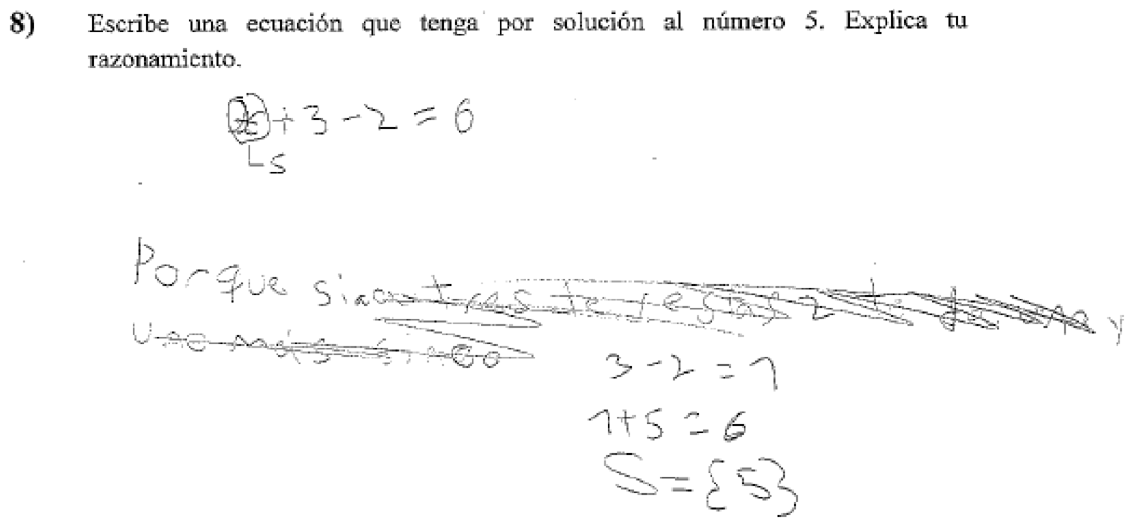
Otra puntualización. La justificación del estudiante deja entrever que ninguna ecuación con un 15 del lado derecho puede tener solución 15: "si 15 ya está con el resultado, no puede darte 15". Frente a esto último, en la entrevista decidimos consultarle sobre la posibilidad de que la ecuación $3 + x - 3 = 15$ tenga solución 15, cosa que es cierta. Nos encontramos con la siguiente respuesta:

> P: ¿Qué pasa por ejemplo en esta ecuación: $3 + x - 3 = 15$, si te volviéramos a preguntar lo mismo?
>
> M: ¿Si la solución es 15?
>
> P: Sí, si la solución es 15.
>
> M: Te da lo mismo. Sí, es la solución ahí. Pero acá no porque… si no te da… no porque te da diferente: 15 menos 3 te da 12.
>
> P: ¿Cuál sería entonces la solución de la ecuación de la Actividad 7?
>
> M: 18
>
> P: ¿Por qué?
>
> M: Porque 18 menos 3 te da 15.

En la entrevista Miguel vuelve a negar que la solución de la ecuación $x - 3 = 15$ es 15, reiterando uno de los argumentos presentados en el cuestionario: "porque te da diferente: 15 menos 3 te da 12". Asimismo, observamos que no acude al otro argumento presentado en aquella oportunidad: "si 15 ya está en el resultado no puede darte 15 *(la solución)*". El estudiante reconoce que dicho argumento no es válido en el contexto de esta nueva ecuación, o simplemente no siente la necesidad de recurrir a él durante el transcurso de la entrevista realizada.

Actividad 8

Observemos el trabajo realizado por Miguel al resolver esta actividad:


8) Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.

$x + 3 - 2 = 6$
$\llcorner 5$

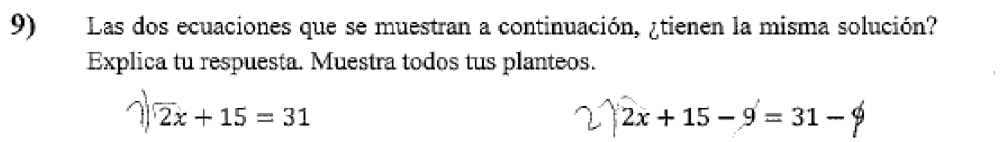
Porque ~~si ...~~ y

$3 - 2 = 1$
$1 + 5 = 6$
$S = \{5\}$

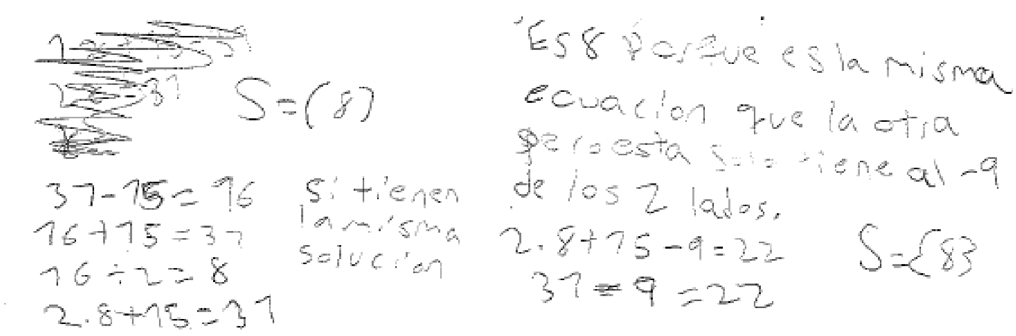
Miguel escribe una ecuación que cumple con lo solicitado y *verifica* que tiene solución 5. La ecuación presentada tiene la variable a la izquierda y un solo número a la derecha del signo de *igual*. Esto puede responder a que Miguel se siente más familiarizado con la resolución de ese tipo de ecuaciones, o a que se ve influenciado por una interpretación *operacional* del signo de *igual*, en contexto aritmético, donde un solo número aparece a la derecha como resultado de las operaciones que se plantean a la izquierda. De cualquier modo, su respuesta deja al descubierto una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque escribe una ecuación que se transforma en *igualdad* numérica solamente para el valor indicado, cuestión que además *verifica*, como señalamos al comienzo.

Actividad 9

Veamos la respuesta presentada por el estudiante para esta actividad:


9) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

1) $2x + 15 = 31$ 2) $2x + 15 - 9 = 31 - 9$



Miguel resuelve la primera ecuación y *verifica* en la segunda. Entre medio, reconoce la relación que existe entre las dos ecuaciones planteadas. Veámoslo con más detalle.

Para resolver la primera ecuación, el estudiante realiza cuatro operaciones: $31 - 15 = 16$ para averiguar el valor de $2x$, $16 + 15 = 31$ para *verificar* que el valor de $2x$ es 16, $16 : 2 = 8$ para averiguar el valor de x, y $2.8 + 15 = 31$ para *verificar* que la solución es 8. Observamos que las cuatro expresiones se presentan del mismo modo, operaciones a la izquierda y resultado a la derecha del signo de *igual*, propio de una visión *operacional* del signo de igual.

Miguel señala que la segunda ecuación tiene solución 8, porque "es la misma ecuación que la otra pero esta solo tiene al -9 de los dos lados", con lo cual está reconociendo que al aplicar la misma resta a ambos miembros de una ecuación se obtiene otra equivalente. Sin embargo, ese argumento no le resulta suficiente y procede a *verificar* que la segunda ecuación tiene la misma solución que la primera. Para ello, plantea por separado la sustitución correspondiente en cada miembro, obteniendo el mismo valor numérico en ambos casos.

Tomada la respuesta de Miguel en conjunto, vemos que interpreta el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque reconoce que ambas ecuaciones se transforman en una *igualdad* numérica para el mismo valor de la variable. No obstante, sus planteos están caracterizados por un uso *operacional* del signo de *igual*, tanto al resolver como al *verificar* una ecuación, incluso cuando eso no es imprescindible. Por eso valen las mismas consideraciones que realizábamos al analizar su respuesta a la actividad 3: distintos usos del signo de *igual* conviven en un mismo estudiante y la adopción de un uso en particular no desplaza el uso de los otros, al menos en este caso.

Actividad 10

Consultado sobre la posibilidad de que 9 sea solución de la ecuación $x + 18 + 11 = 27 + 11$, sabiendo que lo es de la ecuación $x + 18 = 27$, Miguel presenta la siguiente respuesta:

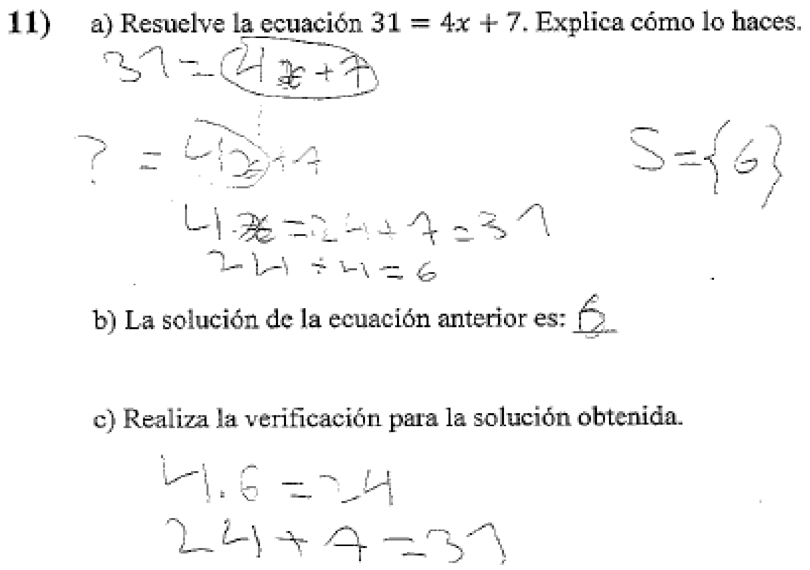
> *"Si porque la segunda ecuación es la misma que la primera pero solo tiene al +11 de los dos lados, entonces, si agregas el mismo número de los dos lados te va a seguir dando lo mismo".*

Miguel responde en forma afirmativa. Cuando dice que "la segunda ecuación es la misma que la primera pero solo tiene al $+11$ de los dos lados", está reconociendo que al sumar un mismo número a ambos miembros de una ecuación, se obtiene otra equivalente. En otras palabras, Miguel está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque entiende que la segunda ecuación se *verifica* para un solo valor de la variable, que además coincide con el que *verifica* la primera, por los argumentos señalados anteriormente.

El trabajo realizado por Miguel en esta actividad es coherente con lo realizado en las actividades 3 y 9, donde también hace alusión a las consecuencias de aplicar una misma operación a cada lado del signo de igual. Sin embargo, aquí no siente la necesidad de complementar su explicación verbal con la realización de cálculos, pues no realiza la *verificación* correspondiente, como hiciera en la actividad 9.

Actividad 11

Observemos el trabajo realizado por Miguel al resolver esta actividad:


11) a) Resuelve la ecuación $31 = 4x + 7$. Explica cómo lo haces.

$31 = 4x + 7$

$? = 4x + 7$

$S = \{6\}$

$4 \cdot x = 24 + 7 = 31$

$24 \div 4 = 6$

b) La solución de la ecuación anterior es: 6

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

$4 . 6 = 24$

$24 + 7 = 31$

El estudiante resuelve la ecuación e identifica su solución. También *verifica* que la solución obtenida es la correcta. Veámoslo con más detalle.

Miguel resuelve la ecuación. Para ello, escribe una cadena de *igualdad*es similar a las presentadas en las actividades 1b y 2b del cuestionario, “$4x = 24 + 7 = 31$”, con la finalidad de señalar que $4x$ vale 24 y que $24 + 7$ es 31. Miguel deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *operador*, porque en esa cadena de *igualdad*es lo utiliza para indicar el resultado que da o que debería dar la operación que se encuentra a su izquierda. Luego escribe que $24 : 4 = 6$, con lo cual deduce que la solución de la ecuación es 6. Miguel *verifica* que la solución obtenida es la correcta. A diferencia de lo realizado en la actividad 5c, aquí no vuelve a resolver antes de *verificar*, sino que procede a *verificar* desde un principio.

Observamos que el estudiante invierte los miembros de la ecuación cuando debe plantear una cuenta y llegar a su resultado, ya sea al resolver o al verificar la ecuación. Lo hace para que las operaciones queden escritas a la izquierda del signo de *igual*, que es consistente con una visión *operacional* del signo de *igual*. Eso no quita que en esta actividad, Miguel está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación presentada en una *igualdad* numérica, y *verifica* que así es. Además asocia dicho valor con la solución de la ecuación.

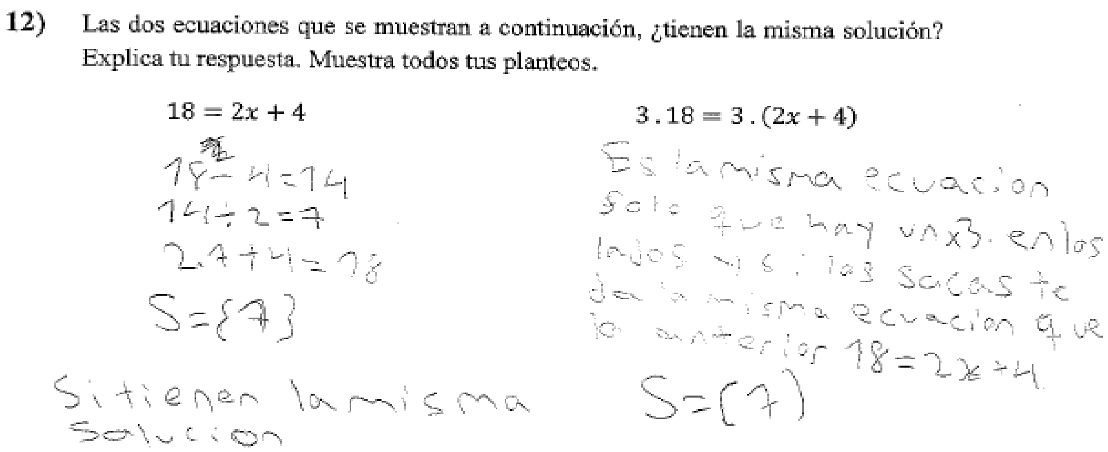
El alumno fue consultado sobre la cadena de *igualdad*es a la que hacíamos referencia en el análisis anterior:

> P: En la actividad 11 te pedíamos que resuelvas la ecuación $31 = 4x + 7$. ¿Te animás a contarme cuál fue el planteo que hiciste, y cómo lo fuiste pensando?
>
> M: Primero pensé que 4 por algo te tiene que dar algo, que más 7 te dé 31. Entonces, empecé a sumar y vi que el 6, 6 por 4 que te da 24, más 7 te da 31. Entonces hice 24 dividido 4, 6. Ahí ya tenés que 24 más 7 ya es 31, entonces, la ecuación te quedaría 24 más 7 por 31, perdón, es igual a 31.
>
> P: Explícame lo que escribiste en este renglón, el penúltimo.
>
> M: Acá hice… acá, y después saqué el 24 y puse 24 dividido 4 que está acá, me da 6, es la solución.
>
> P: Pero en este renglón anterior ¿qué fue que escribiste?
>
> M: $4x$ es igual a 24, más 7 igual 31.
>
> P: Ajá. ¿Algo más que me quieras comentar de eso?
>
> M: No.

Cuando Miguel dice que "$4x$ es igual a 24, más 7 igual 31", vemos que explicita las intenciones con las que presentó la cadena de *igualdad*es señalada antes, que por otra parte coinciden con lo que anticipábamos en el análisis previo.

Actividad 12

La respuesta dada por el estudiante para esta actividad es la siguiente:


12) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$18 = 2x + 4$

18 − 4 = 14
14 ÷ 2 = 7
2.7 + 4 = 18
S={7}

Si tienen la misma solucion

$3 . 18 = 3 . (2x + 4)$

Es la misma ecuacion solo que hay un x3. en los lados y si los sacas te da la misma ecuacion que la anterior 18=2x+4
S=(7)

Miguel resuelve y *verifica* la primera ecuación. Son dos las operaciones que realiza en esta oportunidad para obtener la solución, realizando una tercera para *verificar* que dicha solución es la correcta. Luego Miguel reconoce que la segunda ecuación se obtiene al multiplicar ambos miembros de la primera ecuación por un mismo número: "es la misma ecuación solo que hay un x3 en los lados", con lo cual deduce que ambas ecuaciones tienen la misma solución. Miguel entiende que la solución de una ecuación no cambia cuando ambos miembros se multiplican por el mismo número. En otras palabras, que al aplicar la misma operación a ambos miembros de una ecuación, se obtiene otra equivalente. El estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque reconoce que ambas ecuaciones se *verifican* para el mismo valor de la variable.

Observamos que la respuesta de Miguel es coherente con lo realizado en las actividades 3, 9 y 10, donde ya se había referido a las consecuencias de aplicar una misma operación a cada lado del signo de *igual*. Sin embargo, su trabajo en esta actividad se diferencia del realizado en la actividad 9, en tanto no procede a *verificar* la segunda ecuación, como en aquella oportunidad.

Actividad 13

Consultado sobre la posibilidad de que 8 sea solución de la ecuación $2x + 1 = 17$, sabiendo que lo es de la ecuación $17 = 2x + 1$, Miguel escribe la siguiente respuesta:

> *"Si porque es la misma ecuación, solo que a los números los cambiaron de lado. De derecha a izquierda y viceversa".*

Miguel responde en forma afirmativa. Cuando al justificar dice que "es la misma ecuación, solo que a los números los cambiaron de lado", se refiere a que ambas ecuaciones tienen la misma solución, solo que se invirtieron de lugar sus miembros respecto al signo de *igual*. En vez de verificar que ambas ecuaciones tienen la misma solución, que sería consistente con pensar en la definición de ecuaciones equivalentes, él opta por aplicar en forma implícita una propiedad equivalente a esa definición: "si se invierten de lugar los miembros de una ecuación respecto al signo de *igual*, entonces, se obtiene una ecuación equivalente a ella". Asimismo, ya sea por costumbre o no, queda de manifiesto que el estudiante comprende la propiedad simétrica del signo de *igual*: "$a = b$ implica $b = a$". Miguel está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional* porque, amparado en la propiedad que aplica, reconoce que ambas ecuaciones se transforman en una *igualdad* numérica para el mismo valor de la variable.

Actividad 14

Consultado sobre la posibilidad de que Juan haya terminado la tarea de reducir términos semejantes, al escribir en su cuaderno: $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$, Miguel responde lo siguiente:

> *"No está terminada porque él nunca reduce los términos, sino que suma todos, ve cuanto da, y entonces pone otra ecuación que dé lo mismo que la primera".*

Cuando dice que "pone otra ecuación que dé lo mismo que la primera", en alusión al polinomio que aparece a la derecha del signo de *igual*, vuelve a utilizar el término ecuación en lugar de utilizar el término expresión, como hiciera en la actividad 6 del cuestionario. En esta explicación deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque hace mención a una *igualdad* entre dos expresiones, la que se ubica a la izquierda y a la derecha del signo de *igual*.

Esa interpretación del signo de *igual* no le alcanza para responder a la pregunta planteada en forma afirmativa, que es lo correcto para esta actividad. Cuando dice "No está terminada porque él nunca reduce los términos", en alusión al trabajo realizado por Juan, interpretamos que Miguel no está aceptando que a la derecha del signo de *igual* aparezca un polinomio con dos términos. Esto puede deberse a que en contexto aritmético, y bajo una interpretación del signo de *igual* como *operador*, a continuación del signo de *igual* solo aparece un número como resultado de las operaciones planteadas a su izquierda. Es decir, esta visión del signo de *igual* puede estar impidiéndole a Miguel aceptar que al reducir un polinomio se obtenga otro con más de un término, por ejemplo con dos. El estudiante fue consultado sobre este asunto, y nos dijo lo siguiente:

> P: En el 14 te planteamos una actividad en la que Juan tenía que reducir términos semejantes (…), y te preguntábamos a vos si la tarea estaba terminada. (…) Explícame qué fue lo que pensaste acá.
>
> M: Estaba viendo si son las mismas ecuaciones, no las estaba reduciendo.
>
> P: ¿Qué más tendríamos que hacer para terminar con esa tarea?
>
> M: Hacer... para terminar la tarea…
>
> P: Si no está terminada, ¿qué más tendríamos que hacer?
>
> M: Sacar esto, sacar toda la cuenta y poner… eh… reducir te da esto, reduciendo te da eso.
>
> P: Pero… yo te escribo acá lo que escribió Juan… ¿Qué escribirías ahí para terminar con esa tarea, si no está terminada? O sea, escribí por ahí abajo lo que te parezca para terminar con esa tarea... O si no contáme por qué no está terminada.
>
> M: Porque él está diciendo que esta cuenta, esto, es igual a esto. No es que está terminando, no está reduciendo, no sé, para mí está diciendo que son *igual*es, no está reduciendo.
>
> P: Mh... Ajá…
>
> M: Yo lo entendía de otra forma. En verdad está bien, redujo, pero yo lo tomé de otra forma... Como que estaba comparando, que no estaba reduciendo, que ahí está reducido.

Miguel sostiene que Juan no terminó la tarea y sobre el final de la entrevista deja entrever que opina lo contrario. Varias de sus respuestas apuntan a la misma idea: “estaba viendo si son las mismas ecuaciones, no las estaba reduciendo”, “para mí está diciendo que son *igual*es, no está reduciendo”. Nos surgen dos posibles interpretaciones de lo que está pensando el estudiante, las cuales detallamos a continuación.

Una posibilidad es que el alumno no está aceptando la presencia de un polinomio con dos términos a la derecha del signo de *igual*, debido a que en otros contextos lo ha utilizado en su carácter de *operador*. Desde esta perspectiva, él cree que Juan debió realizar una simplificación que dejara como resultado un polinomio con un solo término a la derecha del signo de *igual*, y por eso señala que la tarea no está terminada. Sin embargo, Miguel no hizo esto último cuando se lo solicitamos durante el trascurso de la entrevista. Otra posibilidad, que cobra fuerza cuando el alumno agrega que “estaba comparando”, es que no acepta que Juan ha terminado la tarea porque no se obtuvo una *identidad estricta*, cosa que es cierta. De ser así, Miguel presenta una respuesta similar a la dada en la actividad 6, donde no aceptó el uso del signo de igual en la ecuación $x + 3 = 3x + 5$ por el mismo motivo.

Actividad 15

Veamos la forma en que Miguel analiza las primeras dos expresiones planteadas en esta actividad:

a) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ V porque si haces $3x \cdot -3x = -9x^2$ te da

b) $4x = x + 3x$ V porque $3x + x$ te da $4x$

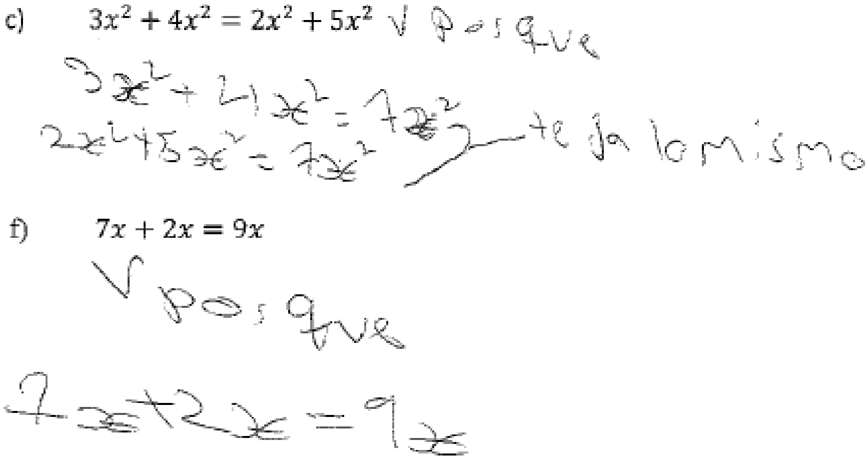
Miguel sostiene que las dos afirmaciones son verdaderas. En el primer caso reduce términos que no son semejantes, dice que $x + 3$ le da $3x$ y que $x - 3$ le da $-3x$, también, aunque implícitamente, dice que $x^2 – 9$ es $-9x^2$, así contesta que la afirmación es válida. En ambos casos el estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*, porque entiende que a la derecha del signo de *igual* se planteó una operación cuyo posible resultado aparece a su izquierda. Lo anterior se fundamenta especialmente en el uso de la palabra "da" en la frase "$3x + x$ te da $4x$".

d) $x = x$ V porque $x = x$
no hay suma y son los mismos "númelos"
por decir así

e) $5 + x = 5 + x$ V
Porque si hacer la cuenta de los dos lados
te da lo mismo
$5+x=6x$ $5+x=6x$

En la parte d), cuando dice que "son los mismos números, por decirlo así", en alusión a la x que aparece a cada lado del signo de *igual*, el estudiante está interpretando el signo de *igual* como expresión de una *identidad estricta*, porque está aceptando que a cada lado del signo de *igual* se encuentre el mismo representante del mismo objeto matemático. Además, el estudiante está razonando del mismo modo que en la actividad 3, donde había propuesto un ejemplo para mostrar la veracidad de la implicación planteada, asignándole un solo valor por vez a la variable involucrada en ella.

En la parte e), cuando dice “V porque si haces la cuenta de los dos lados te da lo mismo”, Miguel deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque hace alusión al resultado obtenido a cada lado del signo de *igual*. Sin embargo, cuando al intentar simplificar escribe que “$5 + x = 6x$”, Miguel utiliza el signo de *igual* como *operador*, para indicar que el resultado de la operación $5 + x$ es $6x$. Miguel no reconoce que en este caso, esa necesidad lo lleva a simplificar términos que no son semejantes. Observamos que esto ha sido una tendencia en su trabajo, reducir todo hasta obtener un término solo.


c) $3x^2 + 4x^2 = 2x^2 + 5x^2$ V porque

$3x^2 + 4x^2 = 7x^2$

$2x^2 + 5x^2 = 7x^2$ te da lo mismo

f) $7x + 2x = 9x$

V porque

$7x + 2x = 9x$

En la parte c), cuando el estudiante señala que la afirmación es verdadera está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque reconoce que a cada lado del signo de *igual* se obtiene el mismo resultado, sin hacer alusión a que la variable debería tomar un valor en particular. Eso no quita que haya escrito por separado el resultado que se obtiene a cada lado del signo de *igual*, dejando entrever una utilización del signo de *igual* como *operador*: “$3x^2 + 4x^2 = 7x^2$”, “$2x^2 + 5x^2 = 7x^2$”. Miguel ya había *verificado* ecuaciones en forma similar, planteando por separado el resultado obtenido en cada miembro.

Esto nos muestra que distintos usos del signo de *igual* conviven en un mismo estudiante y que puede utilizarlos en forma flexible de acuerdo a lo que desea expresar. En particular, si entiende el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica* no impide que siga viéndolo como *operador*, por lo que la adopción de un uso en particular no desplaza el uso de los otros.

En la parte f), mientras tanto, el estudiante se limita a re-escribir la afirmación planteada en la propia actividad para justificar su validez, no encontrando mayores evidencias que nos permitan identificar de qué modo el estudiante usa e interpreta el signo de *igual*, en esta parte de la actividad.

Actividad 16

Observemos la respuesta que presenta el estudiante para esta actividad:

16) La profesora escribe en el pizarrón que si reducimos monomios semejantes en la expresión $x + x + 5 + 7$ obtenemos $2x + 12$. Es decir que:

$$x + x + 5 + 7 = 2x + 12$$

Luego solicita a los alumnos que indiquen si lo escrito en cada renglón es Verdadero (V) o Falso (F). En caso de ser verdadero, les pide que expliquen por qué, y en caso de ser falso, les pide que indiquen qué es lo que está mal.

Te pedimos que resuelvas la tarea que la profesora les planteó a sus alumnos.

a) $-5(x + x + 5 + 7) = -5(2x + 12)$ V porque si sumas $5+7=12$ y son lo $x+x=2x$ mismo del otro lado y si lo multiplicas po -5 de los 2 lados te da lo mis

b) $2x + 12 = x + x + 5 + 7$ ✓
Es la misma que la primera que hizo la profesora solo que cambie de lado los terminos

c) $x + x + 5 + 7 - 4 = 2x + 12 - 6$ F
porque
$2x+12-6 = 6$
$x+x+5+7-4 = 8$

o que esta mal es el -6 y el -4,
si los sacas o pones el mismo
número te da bien la ecuacion

Miguel sostiene que las primeras dos afirmaciones son verdaderas y que la tercera afirmación es falsa. Vayamos al análisis particular de cada caso.

En la parte a), Miguel contesta verdadero. Cuando al justificar señala que "$5+7=12$" y que "$x+x=2x$", deja entrever que el signo de *igual* de la afirmación planteada indica el resultado de una simplificación, interpretándolo en su carácter de *operador*. No obstante, cuando más adelante agrega que "si lo multiplicas por -5 de los dos lados te da lo mismo", muestra otra interpretación, esta vez como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque reconoce que a cada lado del signo de *igual* se obtiene el mismo resultado. Este argumento es coherente con lo realizado por el estudiante en las actividades 9, 10 y 12.

En la parte b), el estudiante justifica su respuesta reconociendo que se invirtieron de lugar los polinomios de la afirmación inicial, respecto al signo de *igual*: "cambió de lado los términos". Este razonamiento es coherente con lo realizado por Miguel en la actividad 13, donde había identificado la equivalencia de las ecuaciones planteadas proporcionando el mismo argumento. En vez de reducir y comparar los polinomios involucrados en la expresión planteada, que sería consistente con pensar en la definición de polinomios equivalentes, él opta por aplicar en forma implícita una propiedad equivalente a esa definición: "si se invierten de lugar dos polinomios equivalentes respecto al signo de *igual*, entonces, siguen siendo equivalentes".

En la parte c), el estudiante inspecciona la expresión en forma global y basa su argumento en lo escrito a cada lado del signo de *igual*: "lo que está mal es el -6 y el -4, si los sacas o pones el mismo número, te da bien la ecuación". Miguel vuelve a confundir expresión con ecuación, como en ocasiones anteriores, pero deja entrever que está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, por el mismo argumento que señalamos en la parte a. No obstante, cabe señalar que al intentar reducir los polinomios que intervienen en la afirmación dada, Miguel escribe que “$2x + 12 - 6 = 6$" y que “$2x + 12 - 4 = 8$", haciendo un uso *operacional* del signo de *igual*. Además, omite la variable que figura en cada polinomio y se limita a reducir los términos numéricos que aparecen en cada uno de ellos. Nosotros interpretamos este fenómeno como un tipo del mecanismo que se conoce como *hacer caso omiso de lo desconocido* (Kieran, 1984).

Síntesis:

En contexto aritmético, Miguel interpreta el signo de *igual* en forma alternada como *operador* y como *expresión de una equivalencia numérica*. Mientras que por un lado completa una afirmación de modo tal que el signo de *igual* relacione expresiones diferentes del mismo número (actividad 1a), por otro lado, cuando se enfrenta a una cadena de *igualdad*es ya sea para completar (actividad 1b) o para analizar su validez (actividad 2b), deja de manifiesto una visión operación, coherente con lo que señalábamos en el párrafo anterior. En contexto aritmético Miguel también interpreta el signo de *igual* como *expresión de una acción*, cuando acepta una afirmación en la que, desde su perspectiva, la operación aparece a la derecha y el resultado a la izquierda del signo de *igual* (actividad 2a).

En contexto de ecuaciones, Miguel sostiene que el signo de *igual* de la expresión $x + 3 = 3x + 5$ señala que “$x + 3$ y $3x + 5$ son *igual*es, porque dan el mismo resultado”. El estudiante se refiere a una comparación entre valores numéricos, con lo cual manifiesta una comprensión *relacional* del signo de *igual* en el contexto de una ecuación a dos miembros. No obstante, no observamos que Miguel señale en forma explícita la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de igual en la ecuación planteada.

El estudiante encuentra el valor de la variable que transforma cada ecuación en una *igualdad* numérica, y lo asocia con su solución (actividades 5 y 11). Cuando al resolver o *verificar* una ecuación, él debe plantear una cuenta y llegar a su resultado, hace un uso *operacional* del signo de igual, aunque ello implique invertir de lugar los miembros de la ecuación respecto del signo de igual. Asimismo, si le piden *verificar* vuelve a resolver cada ecuación, para recién después realizar la *verificación* solicitada. Esto es coherente con lo reportado en otros estudios (Kieran, 1989; Sessa et al., 1995; Ochoviet y Oktac, 2009). Miguel en sus respuestas no muestra indicios de estar asociando lado derecho de la ecuación con solución de la ecuación, como ocurriera con Rocío, pero en ocasiones emplea la palabra "resultado" para referirse al segundo miembro de una ecuación (actividad 7), lo cual puede explicarse en parte, por la visión *operacional* que caracteriza algunas de sus respuestas en contexto aritmético.

Cuando se aplica la misma operación a ambos miembros de una ecuación, y se pregunta por la solución de ambas (actividades 9, 10 y 12), o se aplica la misma operación en dos polinomios que se saben equivalentes, y se pregunta por la equivalencia de los polinomios resultantes (actividad 16a), Miguel reconoce la equivalencia haciendo alusión a dicha operación, aunque siente la necesidad de complementar sus respuestas con la realización de cálculos. Si la consigna lo permite, en contexto de ecuaciones resuelve una y *verifica* otra, mientras que en contexto de polinomios realiza las simplificaciones que correspondan. Mientras tanto, cuando se invierten de lugar los miembros de una ecuación respecto al signo de *igual* (actividad 13), o se invierten de lugar dos polinomios que se saben equivalentes (actividad 16b), Miguel alude a la propiedad simétrica del signo de *igual* para justificar la equivalencia correspondiente. En otras palabras, Miguel aplica propiedades equivalentes a las definiciones de ecuaciones o polinomios equivalentes, que se sustentan en la comprensión *relacional* que del signo de *igual* muestra el estudiante en esos casos.

En contexto de polinomios, el estudiante deja entrever una interpretación *relacional* del signo de *igual* en la mayoría de sus respuestas. Por ejemplo, cuando aparecen dos términos a cada lado del signo de *igual* (actividades 15c y 15e), lo interpreta como *expresión de una equivalencia simbólica*, pues reduce cada polinomio hasta obtener la misma expresión en cada cado. También lo interpreta como expresión de una *identidad estricta*, cuando acepta que "$x = x$" sosteniendo que "son los mismos números" (actividad 15d).

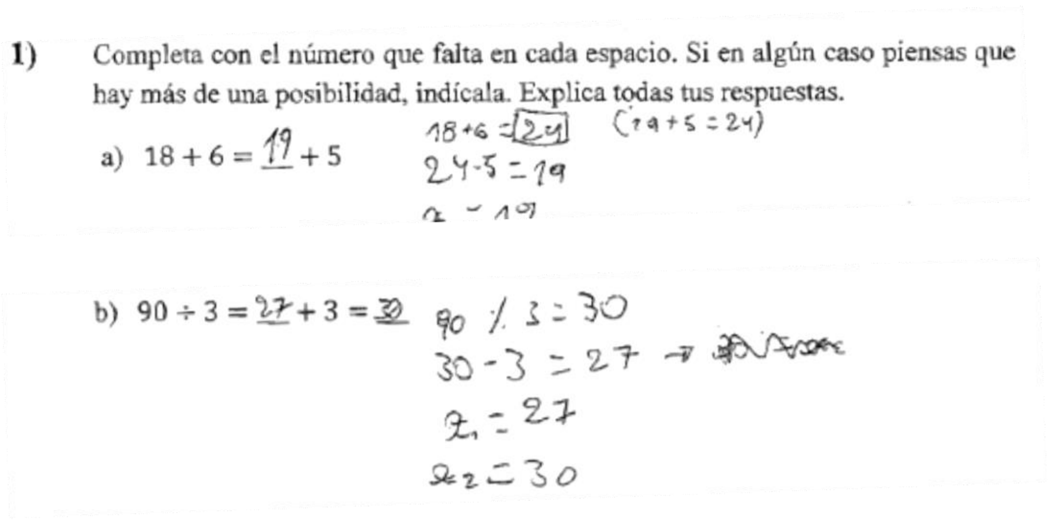
En este contexto Miguel también deja entrever una interpretación *operacional* del signo de *igual*, cuando sostiene que al reducir términos y obtener la expresión $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$, la tarea no está terminada (actividad 14). El estudiante en este caso deja entrever que a la derecha del signo de *igual* debería haber un solo término, como ocurre en contexto aritmético cuando se interpreta el signo de *igual* en el sentido señalado anteriormente.

5.2.3 Respuestas de Mateo (13 años)

En la actividad 4b, Mateo señala que el signo de *igual* relaciona dos expresiones diferentes del mismo número, lo que da cuenta de que en este caso, lo está interpretando como *expresión de una equivalencia numérica*: "el número que está a la izquierda es el mismo del que está a la derecha, expresado diferente". Por lo dicho, la respuesta que Mateo presenta en esta parte de la actividad decidimos ubicarla en la categoría *relacional.*

Actividad 1

Observemos el trabajo del estudiante en esta actividad:


1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a) $18 + 6 = \underline{19} + 5$

$18 + 6 = \boxed{24}$ $(19 + 5 = 24)$

$24 - 5 = 19$

$x = 19$

b) $90 \div 3 = \underline{27} + 3 = \underline{30}$

$90 / 3 = 30$

$30 - 3 = 27 \rightarrow$ [illegible]

$x_1 = 27$

$x_2 = 30$

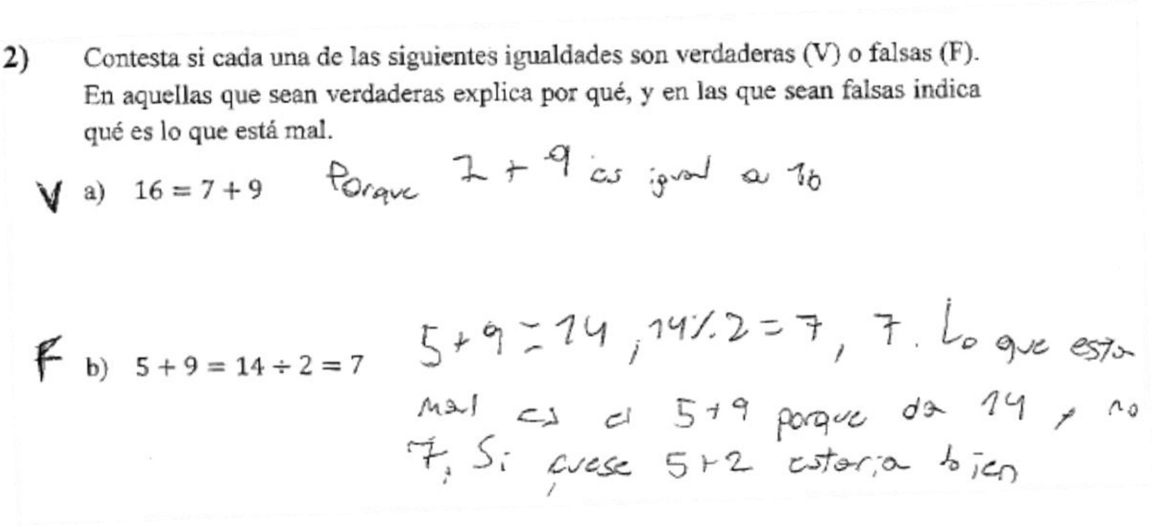
En la parte a), Mateo completa el espacio vacío con un 19. El estudiante realiza la operación $18 + 6$ para saber qué número está representado a la izquierda del signo de *igual*, y luego la operación $24 - 5$ cuyo resultado es el que finalmente coloca en el espacio vacío. También comprueba mediante la operación $19 + 5$, que al completar el espacio vacío de ese modo, se obtiene a la derecha del signo de *igual* el mismo número que a la izquierda. En este caso, Mateo está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque completa el espacio vacío de modo que, a cada lado del signo de *igual* aparezcan dos expresiones aritméticas distintas que representan al mismo número.

En la parte b), el estudiante completa los espacios vacíos con un 27 y un 30. Para dar con esos números, el estudiante realiza la operación $90 : 3$ para saber qué número está representado a la izquierda del signo de *igual*, y luego la operación $30 - 3$ cuyo resultado es el que finalmente coloca en el primer espacio vacío. De esta forma, Mateo vuelve a interpretar el signo de *igual* en el mismo sentido en que lo señalábamos antes, esto es, como *expresión de una equivalencia numérica*. Al completar el segundo espacio vacío, cosa que hace sin mostrar planteos de ningún tipo, el estudiante está interpretando el signo de *igual* como *propuesta de actividad* o como *expresión de una equivalencia simbólica*, por entender que en dicho espacio debe colocar el resultado de la operación escrita a su izquierda, o bien una expresión que sea equivalente con las otras dos que intervienen en la cadena de *igualdad*es presentada.

Observamos que a diferencia de Rocío y Miguel, Mateo no solo comprueba que al completar los espacios vacíos con determinados números se obtiene el mismo valor numérico a cada lado del signo de *igual*, sino que además plantea las operaciones que lo conducen a cada uno de ellos. Es que termina sus planteos escribiendo las expresiones $x = 19$, $x_1 = 27$ y $x_2 = 30$, como si estuviese pensando en una ecuación y su correspondiente resolución. De ser así, Mateo implícitamente experimenta una transición entre dos usos distintos del signo de *igual*, siendo el uso como *expresión de una equivalencia condicional* el que le permite interpretar mejor el uso como *expresión de una equivalencia numérica*, que es el uso esperado en esta actividad.

Actividad 2

Veamos la forma en que Mateo resuelve esta actividad:



2) Contesta si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

V a) $16 = 7 + 9$ Porque 7 + 9 es igual a 16

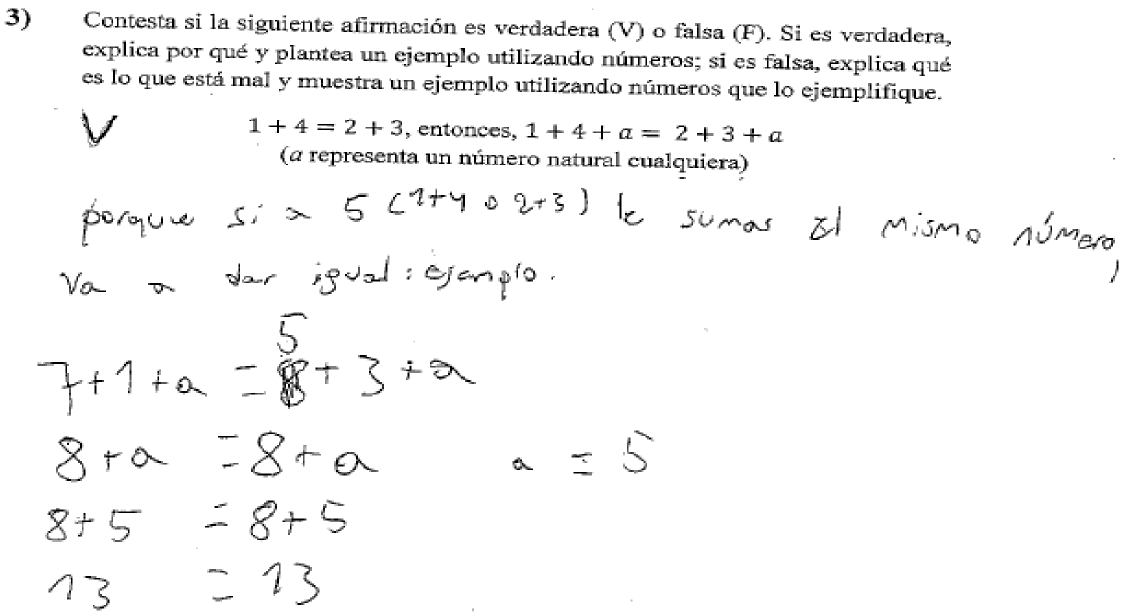
F b) $5 + 9 = 14 \div 2 = 7$ 5+9=14, 14%2=7, 7. Lo que esta mal es el 5+9 porque da 14, y no 7, Si fuese 5+2 estaria bien

En la parte a), Mateo señala que la *igualdad* es verdadera. Su justificación radica en que el resultado de la operación $7 + 9$ es 16. De este modo, el estudiante acepta la expresión $16 = 7 + 9$, aun cuando desde su perspectiva entiende que el lado derecho plantea una operación y el lado izquierdo muestra el resultado de esa operación. Por tal motivo, en este caso, Mateo está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*.

En la parte b), Mateo señala que la afirmación dada es falsa. En relación a la primera parte de esta afirmación, $5 + 9 = 14 : 2$, sostiene que "lo que está mal es el $5 + 9$ porque da 14, y no 7". Observamos que está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, al entender que en ambos lados deben escribirse expresiones aritméticas que arrojen el mismo valor numérico. En relación a la segunda parte de la afirmación analizada, $14 : 2 = 7$, el estudiante no se conforma con señalar que el resultado de la operación $14 : 2$ es 7, sino que a continuación escribe otro 7: "$14 : 2 = 7, 7$". Asumimos que incluso en este caso Mateo está comparando los números que se obtienen a cada lado del signo de *igual*, descartando cualquier posibilidad de que esté interpretando el signo de *igual* como un *operador*.

Actividad 3

La respuesta que proporciona Mateo para esta actividad es la siguiente:



3) Contesta si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa, explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique.

V

$1 + 4 = 2 + 3$, entonces, $1 + 4 + a = 2 + 3 + a$
(a representa un número natural cualquiera)

porque si a 5 (1+4 o 2+3) le sumas el mismo número va a dar igual: ejemplo.

$7+1+a = \cancel{8}\,5+3+a$

$8+a = 8+a \qquad a = 5$

$8+5 = 8+5$

$13 = 13$

El estudiante sostiene que la afirmación es verdadera. Explica su respuesta y presenta un ejemplo relativo a la implicación planteada Analicémoslo con más detalle.

En relación a su explicación, “si a 5 $(1 + 4$ o $2 + 3)$ le sumas el mismo número, va a dar *igual*”, nos surgen dos comentarios. Por un lado, está interpretando el signo de *igual* de $1 + 4 = 2 + 3$ como *expresión de una equivalencia numérica*, porque acepta que relacione dos expresiones aritméticas distintas que arrojan el mismo valor numérico (5, en este caso). Por otro lado, está reconociendo que la equivalencia dada por $1 + 4 + a = 2 + 3 + a$ es cierta para cualquier valor de la variable, por lo que está interpretando ese signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*.

En su ejemplo, Mateo escribe $7 + 1 + a = 5 + 3 + a$, y más abajo $8 + 5 = 8 + 5$, hasta llegar a que $13 = 13$. Observamos que el estudiante le asigna el mismo valor numérico a las dos apariciones de la variable, es decir, un solo valor por vez. Incluso lo indica explícitamente cuando escribe que $a = 5$, utilizando en ese caso el signo de *igual* como *asignación de un valor numérico*. Esto da cuenta de su percepción de a como variable. Ahora bien, el ejemplo de Mateo se refiere solo a la segunda parte de la implicación planteada, dejando de lado la equivalencia numérica que da lugar a la que él escribe. Eso hace que no reconozca que los números empleados para la misma, no son coherentes con los presentados en la consigna de la actividad. Lo anterior no quita que su ejemplo sea coherente con la explicación verbal que presenta al comienzo de su respuesta, ratificando así su interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia*.

Queremos hacer una puntualización más. En la implicación planteada, lo variable es a y lo fijo es el número que se le suma a a (5, representado por $1 + 4$ y $2 + 3$). Sin embargo, en el ejemplo de Mateo, lo que queda fijo es a (como 5) y lo que varía es el número que se le suma a a (en este caso 8, representado por $7 + 1$ y $5 + 3$). El estudiante toma la variable como lo fijo, y los términos numéricos como variables, lo que da cuenta de una transformación de lo fijo en variable y viceversa.

Actividad 4

Consultado sobre el nombre y el significado del símbolo =, Mateo responde lo siguiente:

> *"Igual".*
>
> *"Que el número que está a la izquierda es el mismo del que está a la derecha, expresado diferente".*

Mateo señala que el símbolo presentado se llama "*Igual*". Cuando al explicar el significado que tiene para él dice que "el número que está a la izquierda es el mismo del que está a la derecha, expresado diferente", asume que dicho signo puede relacionar expresiones distintas que representen al mismo número, lo que da cuenta de que está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*.

Observemos ahora las situaciones de clase que destaca Mateo, en relación al uso del signo de *igual*, y las explicaciones que proporciona al respecto.

c) ¿En qué situaciones de clase has utilizado este símbolo? Ejemplifica mostrando, al menos, tres situaciones distintas.

En las ecuaciones, cuentas, etc.

$2x + 8 = 18$

$5 + 4 = 9 + \underline{\ 4\ } = 13$

$5 \times 9 = 45$

d) ¿Para qué se utiliza el símbolo = en cada una de las situaciones que presentaste en la parte c?

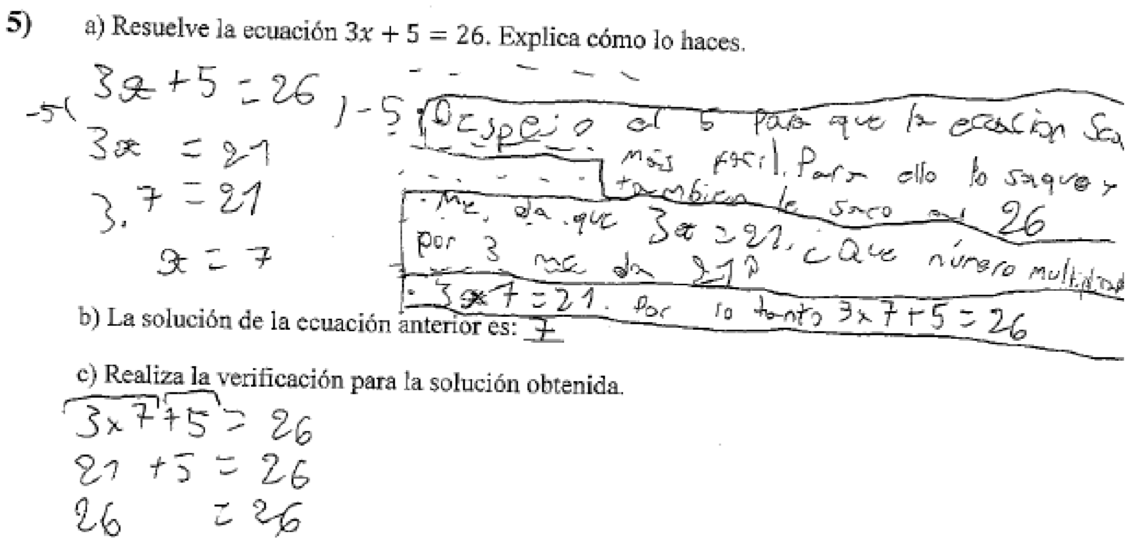
para decir que la cuenta que ~~deja~~ esta a la izquierda es el mismo del de la derecha pero simplificado

Mateo destaca que en clase ha utilizado el signo de *igual* en "ecuaciones" y en "cuentas". Así es como, entre sus ejemplos, incluye una ecuación y una operación, además de una cadena de *igualdad*es para completar, similar a la que se presentaba en la actividad 2b del cuestionario. Por un lado, con la operación 5x9=45 el estudiante deja entrever que está interpretando el signo de *igual* como un *operador*, porque lo utiliza para indicar que el resultado de 5x9 es 45. Por el mismo motivo, reitera esa interpretación cuando plantea la cadena de *igualdad*es para completar, $5 + 4 = 9 + \_\_ = 13$, aunque en este caso, a diferencia del caso anterior, dicha visión del signo de *igual* lo conduce a plantear una afirmación falsa. Por otro lado, con la ecuación $2x + 8 = 18$ podríamos sostener que Mateo deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, aunque la explicación que proporciona luego, que refiere a las tres situaciones presentadas y que analizamos en el siguiente párrafo, no es una evidencia de tal comprensión por parte de este estudiante.

Si observamos los tres ejemplos en conjunto, vemos que Mateo opta por escribir diferentes expresiones a la izquierda del signo de *igual*, aritméticas o algebraicas, mientras que prefiere escribir un solo número a la derecha del signo de *igual*. Asimismo, sostiene que en sus ejemplos se utiliza el signo de *igual* "para decir que la cuenta que está a la izquierda es el mismo del de la derecha pero simplificado", que es coherente con sus ejemplos. Al respecto nos surgen dos comentarios. Por un lado, el estudiante deja entrever que el signo de *igual* tiene el mismo significado en contexto aritmético y en contexto de ecuaciones. Por otro lado, manifiesta una visión *relacional* limitada dado que, si bien dice "la cuenta que está a la izquierda es el mismo del de la derecha", luego agrega "pero simplificado" en alusión al único número que desde su perspectiva debe ubicarse a la derecha del signo de *igual*.

Actividad 5

El trabajo de Mateo en esta actividad es el siguiente:



5) a) Resuelve la ecuación $3x + 5 = 26$. Explica cómo lo haces.

-5(3x + 5 = 26)-5

3x = 21

3.7 = 21

x = 7

Despejo el 5 para que la ecuación sea más fácil. Para ello lo saqué y también le saco al 26

Me da que 3x = 21. ¿Qué número multiplicado por 3 me da 21?

3x7 = 21. Por lo tanto 3x7+5 = 26

b) La solución de la ecuación anterior es: 7

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

3x7+5 = 26

21 +5 = 26

26 = 26

El estudiante resuelve la ecuación, identifica su solución, y *verifica* que es la correcta. Analicémoslo con más detalle.

Para resolver la ecuación, Mateo comienza restando 5 a cada lado del signo de *igual*, obteniendo que $3x = 21$. Luego se pregunta "qué número multiplicado por 3 me da 2?", y eso hace que escriba $3.7 = 21$ para concluir que $x = 7$. Vemos que en su resolución, el estudiante combina las dos estrategias más utilizadas en la clase, el "principio de la balanza" cuando resta 5 a cada lado, y la "técnica de la tapadita" cuando se formula la pregunta que señalamos antes. Mateo identifica que la solución de la ecuación es 7, que es el valor obtenido en su resolución, y procede a *verificar* que con dicho valor es cierta la equivalencia dada por la ecuación. Así lo expresa cuando luego de realizar operaciones escribe que $26 = 26$.

En esta actividad Mateo está interpretando el signo de *igual* de la ecuación planteada como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma dicha ecuación en una *igualdad* numérica, y *verifica* que así es. Además, asocia dicho valor con la solución de la ecuación.

Actividad 6

Mateo sostiene que en la expresión $x + 3 = 3x + 5$, el signo de *igual* tiene el siguiente significado:

> *"Que* $x + 3$ *da un número a. Ese número a es el mismo que el de* $3x + 5$*".*

Cuando Mateo dice que "$x + 3$ da un número a" se refiere al valor numérico que toma el primer miembro de la ecuación, sin explicitar para qué valor o para qué valores de la variable x tiene lugar ese valor numérico. Lo mismo ocurre cuando agrega que "ese número a es el mismo que el de $3x + 5$". Mateo está asumiendo que ambas expresiones arrojan el mismo valor numérico, que es consistente con pensar en una ecuación a dos miembros, solo que omite decir que en este caso, esto es cierto para un valor determinado de la variable. En caso de que desconozca esto último, está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque asume que dicha *igualdad* tiene lugar para cualquier valor de la variable. En caso contrario, su respuesta es un indicio de que implícitamente está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*.

Actividad 7

Frente a la posibilidad de que 15 sea solución de la ecuación $x - 3 = 15$, el estudiante proporciona esta respuesta:

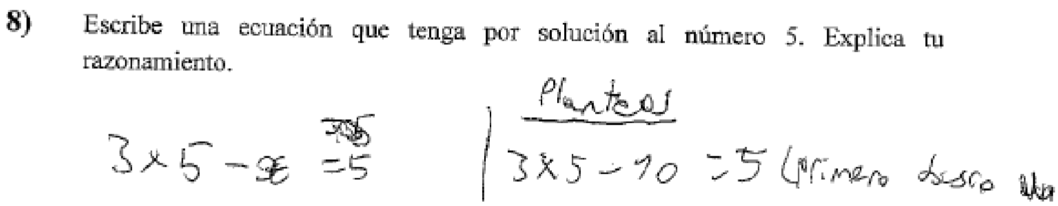
"Sí, porque $18 - 3 = 15, x = 18$*".*

Por un lado, cuando escribe "$18 - 3 = 15, x = 18$", el estudiante encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica, cosa que además *verifica*. Hasta aquí, podemos sostener que el estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque justamente encuentra el valor de la variable que hace cierta la equivalencia dada por la ecuación, y comprueba que así es. Sin embargo, cuando los planteos anteriores los utiliza para justificar que la ecuación $x - 3 = 15$ tiene solución 15, vemos que, al igual que Rocío, está asociando solución con lado derecho de una ecuación. Como señalábamos en aquella oportunidad, dicha asociación puede deberse a una visión *operacional* del signo de *igual*, que por momentos queda de manifiesto en sus respuestas y que consiste en colocar a continuación del signo de *igual* el resultado de la operación escrita a su izquierda, unido a una limitada comprensión del concepto solución de una ecuación. Es que desde su perspectiva, ese espacio que en contexto aritmético está reservado para el "resultado" de la "operación", es el que ahora en contexto de ecuaciones está ocupado por la "solución" de la ecuación.

La asociación que en esta actividad hace el estudiante entre solución y lado derecho de una ecuación, es coherente con los trabajos reportados por Papaieronymou (2007) y Sessa et al. (1995). Vale aclarar que Mateo no trabajó del mismo modo cuando se le pidió resolver una ecuación e indicar explícitamente su solución, porque en ese caso la identificó con acierto.

Actividad 8

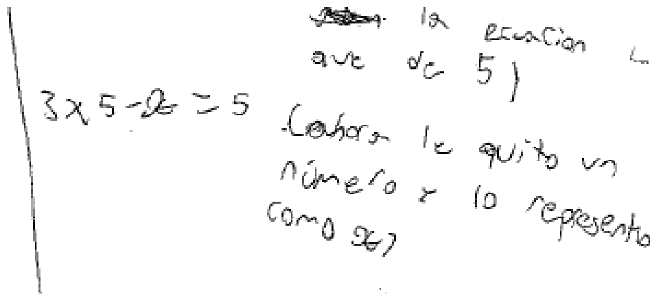
Observemos el trabajo realizado por Mateo al resolver esta actividad:


8) Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.

$3 \times 5 - x = 5$

Planteos

$3 \times 5 - 10 = 5$ (primero busco un



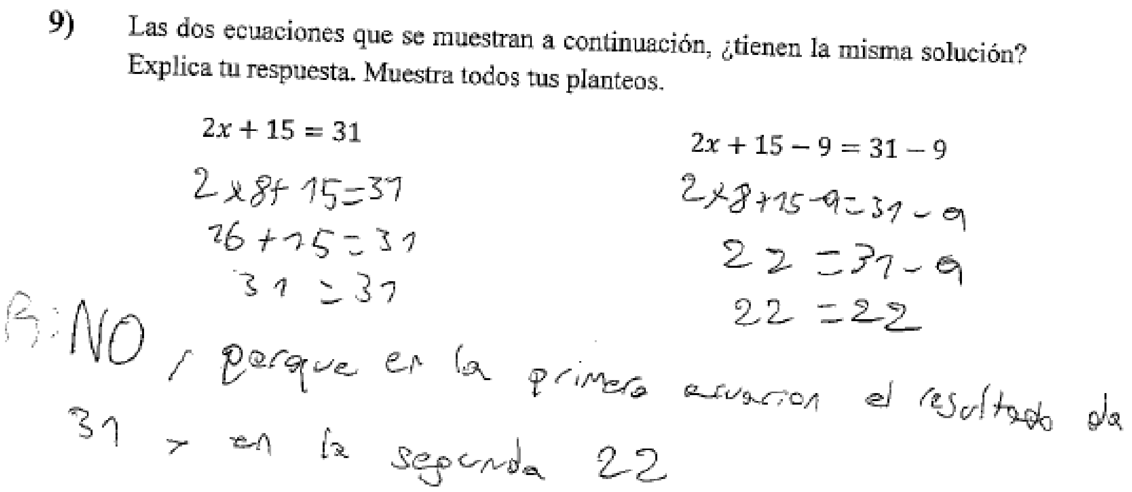
Mateo escribe una ecuación que no tiene solución 5, pero que tiene un 5 como segundo miembro: $3.5 - x = 5$. Se trata de una ecuación polinómica de primer grado cuya variable aparece solo en el primer miembro, y cuya solución es 10. Como vemos, Mateo vuelve a asociar segundo miembro con solución de una ecuación. Lo mismo había sucedido en la actividad 7, por lo que valen las mismas consideraciones, en particular, la incidencia que su visión *operacional* del signo de *igual* pueda estar teniendo en dicha asociación.

El estudiante explica cómo hizo para obtener esa ecuación. Cuando dice "primero busco la ecuación que de 5" y escribe que $3 \text{ x } 5 - 10 = 5$, vemos que desde un principio entiende que el segundo miembro debe estar formado por el número 5, para encontrar una ecuación que cumpla con lo solicitado. Por otra parte, cuando dice "ahora le quito un número y lo represento como x" y escribe que $3.5 - x = 5$, reconoce que la equivalencia dada por la ecuación tiene que ser cierta en este caso para un valor de la variable en particular, dando muestras de que está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*.

El trabajo del estudiante es coherente con lo realizado en la actividad 7, no así con lo realizado en la actividad 5. Si observamos estas tres actividades en conjunto, vemos que conviven dos ideas en el estudiante: la solución es el valor de la variable que convierte a la expresión en una *igualdad* numérica y también es el segundo miembro de la ecuación. Dependiendo de la actividad a la que se enfrente, Mateo considera una u otra idea, sin reconocer que al hacerlo, queda en evidencia la falsedad de la idea no utilizada en ese caso.

Actividad 9

Veamos la respuesta presentada por el estudiante para esta actividad:



9) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$2x + 15 = 31$

$2x + 15 - 9 = 31 - 9$

2x8+15=31
16+15=31
31=31

2x8+15-9=31-9
22=31-9
22=22

R: NO, porque en la primera ecuación el resultado da 31 y en la segunda 22

El estudiante comprueba que 8 *verifica* ambas ecuaciones. Sin embargo, vuelve a asociar lado derecho con solución de cada ecuación, siendo eso lo que lo conduce a responder en forma negativa a la pregunta planteada. Veámoslo con un poco más de detalle.

Mateo comprueba que 8 *verifica* ambas ecuaciones, dado que al realizar las sustituciones y las operaciones correspondientes llega a que $31 = 31$ y que $22 = 22$, en alusión a la primera y segunda ecuación respectivamente. Luego responde en forma negativa a la pregunta planteada, argumentando que "en la primera ecuación el resultado da 31 y en la segunda 22". Su relato es consistente con lo realizado en las actividades 7 y 8, donde asociaba lado derecho con solución de la ecuación, pero al mismo tiempo establece una nueva asociación esta vez, entre lado derecho y lo que él denomina "resultado" de la ecuación.

Mateo presenta una respuesta similar a la de Rocío, en tanto ambos asocian lado derecho de la ecuación con solución y "resultado" de la ecuación. Es que Mateo, al igual que Rocío, tiene plena conciencia de la equivalencia condicional, el problema es que en él coexisten la solución como raíz y la solución como número del segundo miembro. Como decíamos al analizar el trabajo de Rocío, esto podría deberse al uso de la palabra "solución" asociado a una visión *operacional* del signo de *igual*, en el sentido de un signo que indica que debe realizarse una operación y escribir su resultado a la derecha.

Actividad 10

Consultado sobre la posibilidad de que 9 sea solución de la ecuación $x + 18 + 11 = 27 + 11$, sabiendo que lo es de la ecuación $x + 18 = 27$, Mateo responde de la siguiente manera:

> *"Sí, porque a las dos partes (izquierda y derecha) le sumaste lo mismo, entonces es como no sumarle nada".*

El estudiante responde afirmativamente. Cuando dice que "a las dos partes le sumaste lo mismo", Mateo se refiere al 11 que se suma a ambos miembros de la ecuación $x + 18 = 27$, para obtener la ecuación $x + 18 + 11 = 27 + 11$. Asimismo, cuando agrega que haber realizado dicha operación a cada lado, "es como no sumarle nada", está reconociendo que una equivalencia no se ve afectada por realizar la misma operación a cada lado del signo de *igual*. En particular, que al sumar un mismo número a ambos miembros de una ecuación, se obtiene otra equivalente a ella, o con su misma solución.

Observamos que la respuesta del estudiante trae implícitamente otras consecuencias. En esta oportunidad, son distintos los segundos miembros de las dos ecuaciones presentadas, 27 y 27+11, y eso no impide que Mateo reconozca que ambas tienen la misma solución. En otras palabras, el estudiante no vuelve a asociar lado derecho con solución de una ecuación, como hiciera en las actividades 7, 8 y 9. Eso puede deberse a que en la propia consigna de la actividad se afirma que 9 es la solución de la ecuación $x + 18 = 27$, descartando en gran medida que 27 también lo sea. Tampoco en su discurso hace mención al lado derecho como "resultado" de la ecuación.

En suma, Mateo reconoce que ambas ecuaciones se *verifica*n con el mismo valor de la variable. Eso hace que en este caso, esté interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. Asimismo, Mateo interpreta solución como raíz, siendo eso lo que le permite trabajar con acierto. Entonces, la asociación lado derecho-solución que el estudiante realiza en actividades anteriores puede estar más bien ligada al uso u asociación de la palabra solución con resultado de una cuenta, o respuesta a un problema. No obstante, como señalamos en el análisis de la respuesta de Rocío a esta actividad, en el libro Matemática II (Ochoviet y Vitabar, 2015), que es el que utilizamos en el curso con los estudiantes que participan de este estudio, no aparecen este tipo de asociaciones, reservando el uso de la palabra solución para referirse a la raíz de una ecuación.

Actividad 11

Observemos el trabajo realizado por Mateo al resolver esta actividad:

11) a) Resuelve la ecuación $31 = 4x + 7$. Explica cómo lo haces.

$-7\,(31 = 4x + 7)\,-7$

$24 = 4x$

$24 = 4.6$

$24 = 24$

$x = 6$

- Despejo 7 y se lo saco; también al 31 le saco 7.
- Me da $24 = 4x$: ¿qué número, al multiplicarlo por ~~6~~ 4 da 24?
- $x = 6$

b) La solución de la ecuación anterior es: 6

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

$31 = 4.6 + 7$

$31 = 24 + 7$

$31 = 31$

El estudiante resuelve la ecuación, identifica su solución, y *verifica* que es la correcta. Para ello, trabaja en forma análoga a lo realizado en la actividad 5. Veámoslo con más detalle.

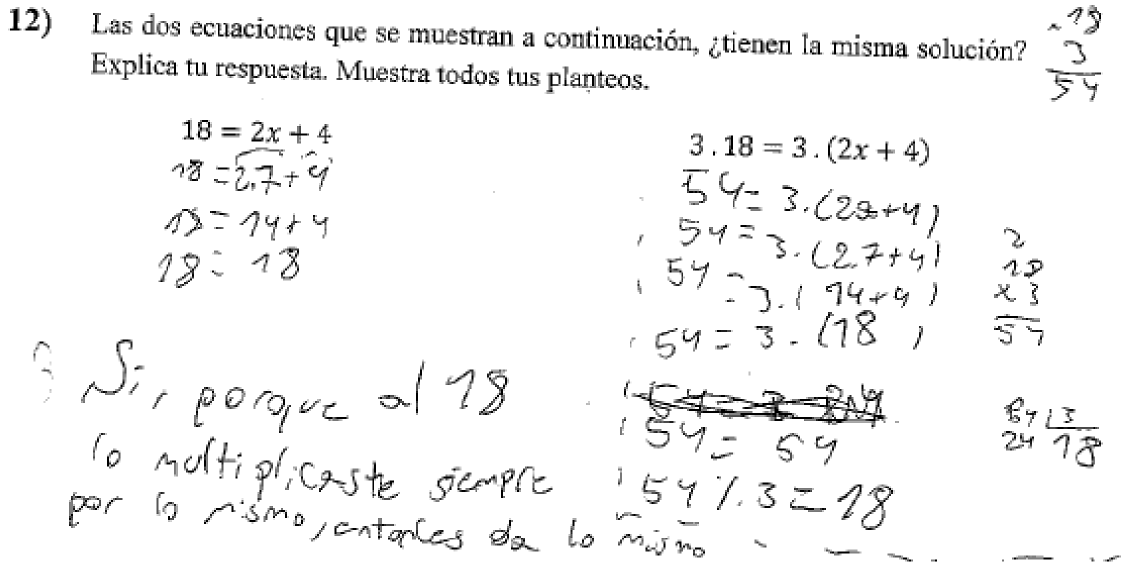
Para resolver la ecuación, comienza restando 7 a cada lado del signo de *igual*, obteniendo que $24 = 4x$. Luego se pregunta “qué número al multiplicarlo por 4 da 24?”, y eso hace que escriba $24 = 4.6$ para concluir que $x = 6$. Vemos que en su resolución, el estudiante vuelve a combinar las dos estrategias empleadas en la actividad 5, que a su vez representan las estrategias más utilizadas en la clase:

"principio de la balanza", cuando resta 7 a cada lado, y "técnica de la tapadita", cuando se formula la pregunta anteriormente señalada. Mateo identifica que la solución de la ecuación es 6, que es el valor obtenido en su resolución, y procede a *verificar* que con dicho valor, la equivalencia dada por la ecuación es cierta. Así lo expresa cuando luego de realizar operaciones, escribe que $31 = 31$.

Observamos que, a diferencia de Rocío y Miguel, Mateo no siente la necesidad de invertir los miembros de lugar, ni al resolver ni al *verificar* la ecuación. Asimismo, no vuelve a asociar lado derecho (en este caso, podría haber sido el izquierdo) con solución de la ecuación. Sostenemos que Mateo está interpretando el signo de *igual* de la ecuación planteada como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma dicha ecuación en una *igualdad* numérica, y *verifica* que así es. Además, asocia dicho valor con la solución de la ecuación.

Actividad 12

La respuesta dada por el estudiante para esta actividad es la siguiente:


12) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$18 = 2x + 4$

18 = 2.7 + 4

18 = 14 + 4

18 = 18

$3 . 18 = 3 . (2x + 4)$

54 = 3.(2x+4)

54 = 3.(2.7+4)

54 = 3.(14+4)

54 = 3.(18)

54 = 54

54 / 3 = 18

Si, porque al 18 lo multiplicaste siempre por lo mismo, entonces da lo mismo

El estudiante comprueba que 7 *verifica* ambas ecuaciones. Responde en forma afirmativa a la pregunta planteada, no sin antes realizar una operación que le permite obtener, en la ecuación de la derecha, el mismo número que obtuvo a ambos miembros al *verificar* la ecuación de la izquierda. Analicémoslo con mayor profundidad.

Por un lado, Mateo comprueba que 7 *verifica* ambas ecuaciones. Lo vemos cuando luego de realizar las sustituciones y las operaciones correspondientes llega a que $18 = 18$ y que $54 = 54$, en alusión a la primera y segunda ecuación respectivamente. Hasta aquí, la asociación lado derecho-solución podría conducir al estudiante a sostener que las ecuaciones presentadas no tienen la misma solución, puesto que en un caso es 18 y en el otro 54. Sin embargo, Mateo continúa con sus planteos y luego de *verificar* la ecuación de la derecha realiza otra operación, $54 : 3$, cuyo resultado coincide con el número obtenido a ambos miembros de la primera ecuación, al *verificar*. Interpretamos que eso es lo que conduce al estudiante a responder en forma afirmativa a la pregunta planteada. Incluso se refiere a ello cuando explica su respuesta: "sí, porque al 18 lo multiplicaste siempre por lo mismo, entonces da lo mismo".

Como señalábamos en el análisis de respuestas anteriores, Miguel es consciente de la condicionalidad que caracteriza la equivalencia dada por el signo de *igual* en una ecuación, pero en él coexisten la solución como raíz y la solución como número del segundo miembro. Sin embargo, en este caso el estudiante se las ingenia para responder a la pregunta planteada en forma satisfactoria, sin abandonar ambas ideas. Esta forma de razonar de parte del estudiante es coherente con lo que Vinner (1990) denomina *pensamiento inconsistente*, que tiene que ver con todo sistema cognitivo del que puedan derivarse dos proposiciones que son contradictorias, como en este caso.

Actividad 13

Sobre la posibilidad de que 8 sea solución de la ecuación $2x + 1 = 17$, sabiendo que lo es de la ecuación $17 = 2x + 1$, Mateo escribe la siguiente respuesta:

> *"Sí, porque no cambia el orden,* $17 = 2x + 1$ *es lo mismo que* $2x + 1 = 17$*".*

Mateo responde en forma afirmativa. Cuando al justificar dice que "no cambia el orden", deja entrever que la solución de una ecuación no se ve alterada cuando se invierten de lugar sus miembros respecto al signo de *igual*. Al igual que Miguel, en vez de verificar que ambas ecuaciones tienen la misma solución, que sería consistente con pensar en la definición de ecuaciones equivalentes, él opta por aplicar en forma implícita una propiedad equivalente a esa definición: "si se invierten de lugar los miembros de una ecuación respecto al signo de *igual*, entonces, se obtiene una ecuación equivalente a ella". Asimismo, cuando agrega que "$17 = 2x + 1$ es lo mismo que $2x + 1 = 17$", da cuenta de que tiene conocimiento de la propiedad simétrica del signo de *igual*, siendo esto lo que le permite inferir la equivalencia. Mateo está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional* porque, amparado en la propiedad que aplica, reconoce que ambas ecuaciones se transforman en una *igualdad* numérica para el mismo valor de la variable.

Actividad 14

Observemos la respuesta dada por el estudiante para esta actividad:

14) Juan está trabajando en un ejercicio planteado en clase que dice lo siguiente:

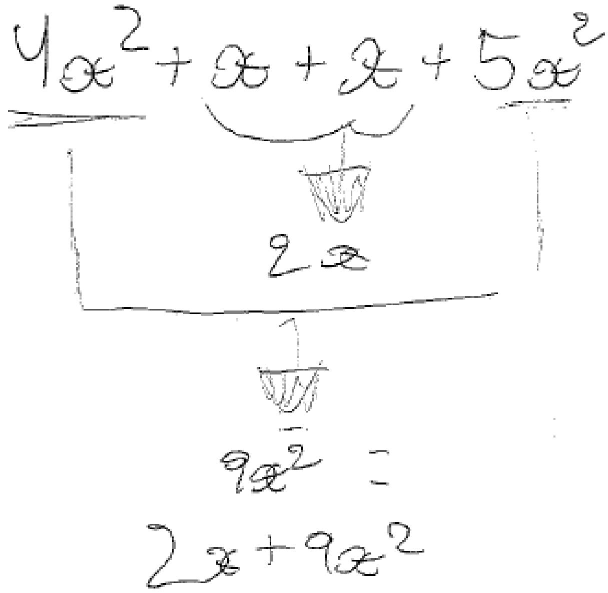
Reducir términos semejantes.

$$4x^2 + x + x + 5x^2$$

En su cuaderno escribe: $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$

¿Consideras que ya ha terminado la tarea indicada? En caso afirmativo explica por qué y en caso negativo explica qué le faltaría hacer para completar la tarea.

Si ya la ha terminado, porque redujo los terminos que terminaban en ~~x~~ x y en otra parte con las que terminaban en x^2



Por un lado, cuando el estudiante dice que "redujo los términos que terminaban en x, y en otra parte los que terminaban en x^2", está refiriéndose a la necesidad de identificar monomios semejantes para poder reducir. Asimismo, el esquema que plantea a continuación de su explicación deja de manifiesto que $x + x$ se reduce a $2x$ y que $4x^2 + 5x^2$ se reduce a $9x^2$, siendo eso lo que lo conduce a responder que Juan ha terminado con su tarea. De este modo, Mateo está aceptando que al simplificar un polinomio que se encuentra a la izquierda del signo de *igual*, se obtenga otro con más de un término a la derecha del signo de *igual*. Al margen de estas consideraciones, no encontramos mayores evidencias que nos permitan determinar de qué modo el estudiante está interpretando el signo de *igual* en esta actividad, si no es en su carácter de *operador*.

Actividad 15

Veamos la forma en que el estudiante responde a esta actividad:

15) El profesor le planteó a sus estudiantes una tarea para trabajar en el tema polinomios. Te pedimos que la resuelvas.

Indica si cada una de las siguientes expresiones son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas señala qué es lo que está mal, y corrígelas para que sean verdaderas.

F a) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

Esto sería $3x \times (-3x)$. Sería $-9x$

√ b) $4x = x + 3x$

$x = 1x$. $1x + 3x = 4x$

Mateo sostiene que la primera afirmación es falsa y que la segunda afirmación es verdadera. En el primer caso, Mateo interpreta que $x + 3$ es $3x$ y que $x - 3$ es $-3x$, luego dice que el producto de estos es $-9x$. En ambos casos, la explicación del estudiante deja entrever que la expresión de la derecha plantea una operación y que la expresión de la izquierda es entendida como el resultado de la misma. Eso hace que Mateo en estas dos partes de la actividad esté interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*.

√ d) $x = x$

$1x = 1x$. Cualquier cosa que del lado izquierdo sea el mismo que el derecho, es lo mismo y esta bien

√ e) $5 + x = 5 + x$

Lo mismo que en la d. Es lo mismo

Mateo sostiene que las dos afirmaciones son verdaderas. Para justificar, se refiere en los mismos términos en ambos casos: "cualquier cosa que del lado izquierdo sea el mismo que el derecho, es lo mismo" (parte d) y "es lo mismo" (parte e). Vemos que es explícita la interpretación que hace el estudiante del signo de *igual* en estos dos casos, como expresión de una *identidad estricta*, porque reconoce y en otras palabras así lo dice, que a cada lado del signo de *igual* se ha representado el mismo objeto matemático con el mismo representante.

√ c) $3x^2 + 4x^2 = 2x^2 + 5x^2$

$3x^2 + 4x^2 = 7x^2$

$2x^2 + 5x^2 = 7x^2$

F f) $7x + 2x = 9x$

$7x^1 + 2x^1 = 9x^2$,

al sumar polinomios, tambien se suman los exponentes

En la parte c), Mateo sostiene que la afirmación es verdadera. Cuando al justificar escribe que $3x^2 + 4x^2 = 7x^2$ y que $2x^2 + 5x^2 = 7x^2$, está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque hace alusión al resultado que se obtiene a cada lado, que por otra parte es el mismo. No obstante, observamos que para llegar a esa conclusión el estudiante necesita escribir por separado la reducción de cada polinomio interviniente en esta afirmación. Esto da cuenta de que en el pensamiento de un estudiante conviven distintos usos del signo de *igual*, y que la adopción de un uso en particular no desplaza el uso de los otros.

En la parte f), mientras tanto, el estudiante sostiene que la afirmación es falsa. El estudiante está interpretando el signo de *igual* como un *operador*, porque asume que lo planteado refiere a una suma de polinomios, por ende dicho signo separa una operación de su resultado. Eso queda de manifiesto cuando dice "al sumar polinomios, también se suman los exponentes".

Actividad 16

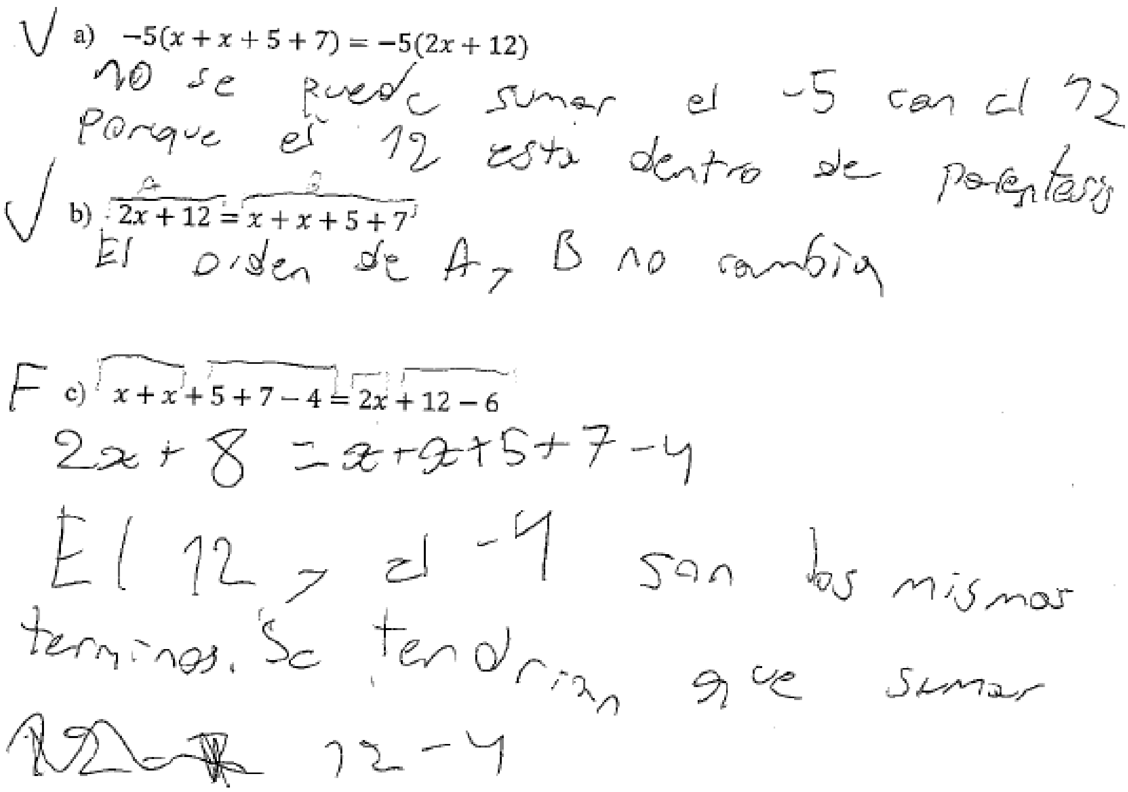
Observemos la respuesta que presenta el estudiante para esta actividad:

16) La profesora escribe en el pizarrón que si reducimos monomios semejantes en la expresión $x + x + 5 + 7$ obtenemos $2x + 12$. Es decir que:

$$x + x + 5 + 7 = 2x + 12$$

Luego solicita a los alumnos que indiquen si lo escrito en cada renglón es Verdadero (V) o Falso (F). En caso de ser verdadero, les pide que expliquen por qué, y en caso de ser falso, les pide que indiquen qué es lo que está mal.

Te pedimos que resuelvas la tarea que la profesora les planteó a sus alumnos.



$\checkmark$ a) $-5(x + x + 5 + 7) = -5(2x + 12)$

no se puede sumar el -5 con el 12 porque es 12 está dentro de parentesis

$\checkmark$ b) $\overset{A}{2x + 12} = \overset{B}{x + x + 5 + 7}$

El orden de A y B no cambia

F c) $x + x + 5 + 7 - 4 = 2x + 12 - 6$

$2x + 8 = x + x + 5 + 7 - 4$

El 12 y el -4 son los mismos terminos. Se tendrian que sumar 12 - 4

El estudiante analiza las tres expresiones planteadas. Sostiene que las dos primeras son verdaderas y que la tercera es falsa. En la parte a) presenta una justificación que no nos permite identificar de qué modo está interpretando el signo de *igual* en ese caso. Analicemos con más detalle los otros dos casos.

En la parte b), cuando dice “el orden de A y B no cambia”, el estudiante reconoce que los polinomios que intervienen en la afirmación analizada se cambiaron de lugar respecto al signo de *igual*, comparando con la afirmación dada inicialmente. Al igual que en la actividad 13, el estudiante deja de manifiesto que acepta la propiedad simétrica del signo de *igual*, y aplica implícitamente una propiedad que en este caso es equivalente a la definición de polinomios equivalentes: “si se invierten de lugar dos polinomios equivalentes respecto al signo de *igual*, entonces, siguen siendo equivalentes”. Miguel presentó una respuesta similar al trabajar en esta parte de la actividad.

En la parte c), cuando escribe $2x + 8 = x + x + 5 + 7 - 4$, el estudiante reduce el polinomio de la izquierda y modifica el de la derecha para que ambos sean equivalentes. Luego agrega que en el polinomio de la derecha "se tendrían que sumar $12-4$", en lugar de $12-6$, para que la afirmación sea cierta. Al igual que antes, el razonamiento del estudiante da cuenta de que interpreta el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque implícitamente hace alusión al resultado obtenido a cada lado.

Síntesis:

En contexto aritmético, Mateo logra interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica* y como *expresión de una acción*. Lo interpreta como *expresión de una equivalencia numérica* cuando completa ciertas afirmaciones de modo tal que relacione dos expresiones diferentes del mismo número (actividad 1), o cuando acepta una cadena de *igualdad*es que requiere de esa interpretación (actividad 2b). Asimismo, lo interpreta como *expresión de una acción* cuando acepta otra afirmación en la que, desde su perspectiva, la operación aparece a la derecha y el resultado a la izquierda del signo de *igual*. Observamos entonces que el trabajo del estudiante en contexto aritmético (actividades 1 y 2) da cuenta de una interpretación del signo de *igual* más completa y precisa, en comparación con la definición y los ejemplos que propuso posteriormente (actividad 4).

En contexto de ecuaciones, Mateo sostiene que el signo de *igual* de $x+3=3x+5$ señala que "$x+3$ da un número a" y que "ese número a es el mismo que el de $3x+5$". El estudiante asume que ambas expresiones arrojan el mismo valor numérico, dejando entrever una interpretación *relacional* del signo de *igual* que es consistente con pensar en una ecuación. No observamos que en su respuesta haga alusión a la condicionalidad que caracteriza la equivalencia dada por una ecuación.

En algunas ocasiones, el estudiante encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica, *verifica* que es el correcto, y lo asocia con su solución (actividades 5 y 11). En esos casos, si la variable de la ecuación aparece solo del lado derecho, Mateo no siente la necesidad de invertir los miembros de lugar respecto al signo de *igual*. En otras ocasiones, el estudiante resuelve y *verifica* la ecuación, pero asocia solución con lado derecho (actividades

7, 8, 9 y 12), interpretando al segundo miembro como “resultado de la ecuación”. Esa asociación entre lado derecho y solución también se reporta en otros estudios (Papaieronymou, 2007; Sessa et al., 1995).

Mateo tiene plena conciencia de la equivalencia condicional dada por el signo de *igual* en una ecuación, pero las dos ideas que conviven en él respecto a la solución de una ecuación (como raíz y como segundo miembro de la ecuación), unido a una visión *operacional* del signo de *igual*, hace que trabaje de un modo u otro. Incluso logra congeniar ambas ideas en una misma respuesta cuando luego de resolver y *verificar* las dos ecuaciones que se le plantean (actividad 12), realiza otra operación para que en ambas ecuaciones, al *verificar*, se obtenga el mismo número a la derecha del signo de *igual*, y de esa forma responder que ambas tienen la misma solución. Esta forma de razonar de parte del estudiante es coherente con lo que Vinner (1990) denomina *pensamiento inconsistente*, que tiene que ver con todo sistema cognitivo del que puedan derivarse dos proposiciones que son contradictorias, como en este caso.

Cuando se aplica la misma operación a ambos miembros de una ecuación, y se pregunta por la solución de ambas, Mateo siente la necesidad de resolver cada una y comparar los valores obtenidos (actividades 9 y 12), a menos que lo impida la consigna de la actividad, caso en el que justifica su respuesta refiriéndose a la operación que transforma una en otra (actividad 10). Sin embargo, cuando se aplica la misma operación en dos polinomios que se saben equivalentes, y se pregunta por la equivalencia de los polinomios resultantes, el estudiante ni simplifica ni hace alusión a la operación que transforma una equivalencia en la otra (actividad 16a). El contexto de ecuaciones sumado a la restricción de resolver ecuaciones favorece que el estudiante identifique la equivalencia sin realizar cálculos, cosa que no ocurre cuando se enfrenta a situaciones similares en contexto de polinomios. Ahora bien, cuando se invierten de lugar los miembros de una ecuación respecto al signo de *igual* (actividad 13), o se invierten de lugar dos polinomios que se saben equivalentes (actividad 16b), Mateo alude a la propiedad simétrica del signo de *igual* para justificar la equivalencia correspondiente.

En contexto de polinomios, el estudiante deja entrever una interpretación *operacional* o *relacional* del signo de *igual*, dependiendo de cada situación. Por ejemplo, la presencia de un solo término a la derecha del signo de *igual* hace que lo interprete en su carácter de *operador* (actividad 15f), mientras que la presencia de varios términos a cada lado, en ocasiones, hace que lo interprete como *expresión de una equivalencia simbólica* (actividades 15c y 16c). Asimismo, si a cada lado del signo de *igual* aparece la misma expresión algebraica, eso hace que el estudiante lo interprete como expresión de una *identidad estricta* (actividades 15d y 15e), mientras que, si un polinomios reducido aparece a la izquierda, deja de manifiesto que en ese caso está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción* (actividades 15a y 15b).

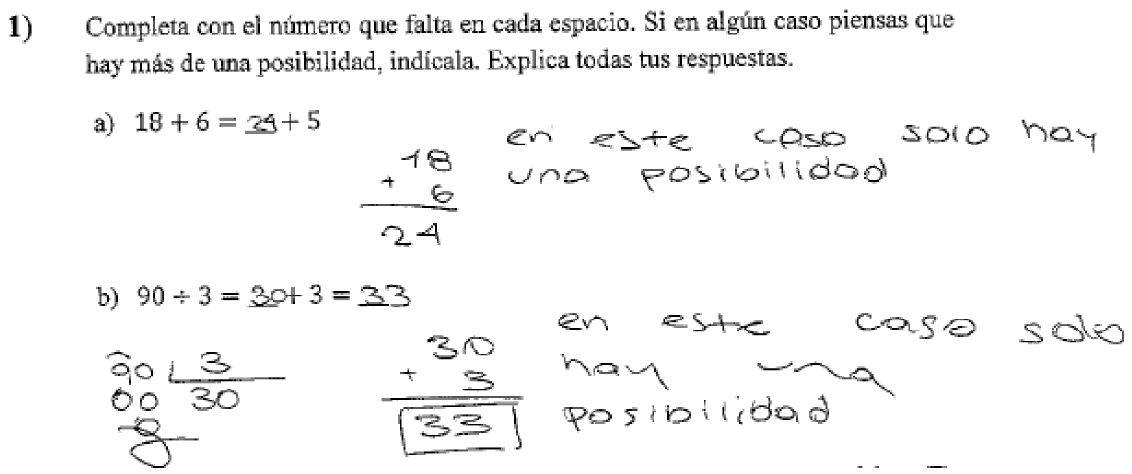
Cuando Mateo plantea un ejemplo para explicar que la expresión $1 + 4 + a = 2 + 3 + a$ es verdadera (actividad 3), deja fijo la variable a, como 5, y deja variable el número que le suma a ella, pues escribe $1 + 7$ y $5 + 3$ en lugar de $1 + 4$ y $2 + 3$. El estudiante toma la variable como lo fijo, y los términos numéricos como variables, con lo cual manifiesta una transformación de lo fijo en variable y viceversa.

5.2.4 Respuestas de Sebastián (13 años)

En la actividad 4b, Sebastián sostiene que el signo de *igual* se utiliza "para poder marcar cuánto es que te da la cuenta" y para ejemplificar escribe $2 + 3 = 5$. Observamos que en su explicación verbal el estudiante muestra una visión *operacional* del signo de *igual*, que es coherente con el ejemplo numérico que proporciona posteriormente. En ambos casos, este signo separa una operación de su resultado. Al igual que Miguel y Santiago, Sebastián presenta una respuesta de tipo *operacional* para esta parte de la actividad.

Actividad 1

Observemos el trabajo realizado por Sebastián al resolver esta actividad:



1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a) $18 + 6 = \underline{24} + 5$

$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ 6 \\ \hline 24 \end{array}$$

en este caso solo hay una posibilidad

b) $90 \div 3 = \underline{30} + 3 = \underline{33}$

$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ 3 \\ \hline \boxed{33} \end{array}$$

en este caso solo hay una posibilidad

En la parte a), Sebastián completa el espacio vacío con un 24. Él realiza una operación que plantea en forma vertical, 18 + 6, cuyo resultado es el que coloca en el espacio vacío. Eso hace que en este caso Sebastián esté interpretando el signo de *igual* como *operador* o *propuesta de actividad*, porque completa el espacio vacío con el resultado de la operación que está planteada a su izquierda. En otras palabras, el estudiante no reconoce como un problema que las expresiones aritméticas así obtenidas, 18 + 6 y 24 + 5, no sean equivalentes aunque entre ellas aparezca un signo de *igual*.

En la parte b), Sebastián completa los espacios vacíos con un 30 y un 33. Él realiza dos operaciones que plantea en forma vertical, y cuyos resultados son los que coloca en los espacios vacíos. Como en el caso anterior, el estudiante vuelve a interpretar el signo de *igual* como *operador* o *propuesta de actividad*, porque entiende que a la derecha de cada signo de *igual*, debe aparecer el resultado de la operación planteada a su izquierda. Asimismo, queda de manifiesto que no logra interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, al no señalar como un problema que las expresiones aritméticas así obtenidas, 90 : 3 y 30 + 3, estén relacionadas por un signo de *igual* a pesar de no estar representando al mismo número.

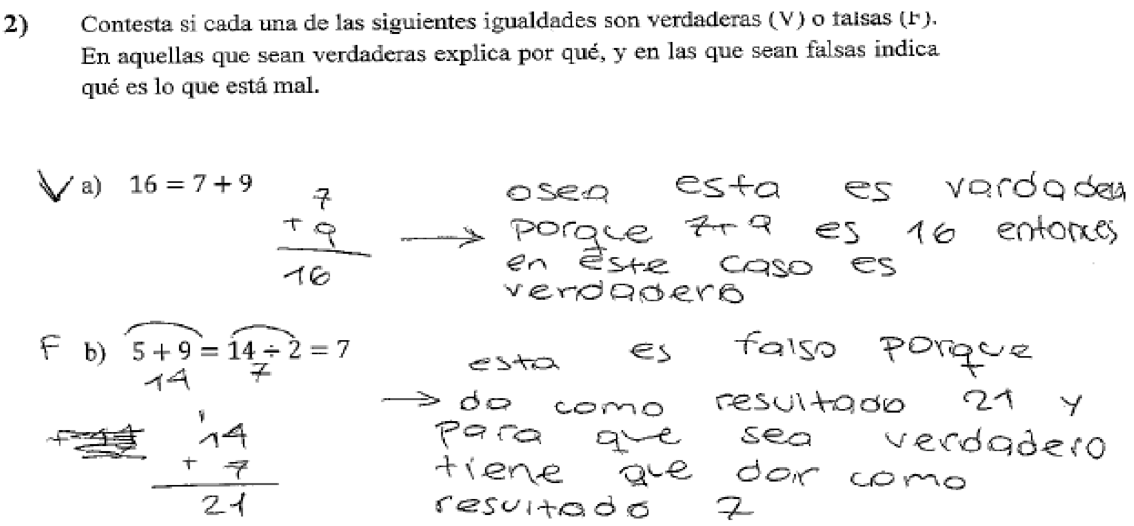
En una entrevista posterior, el estudiante fue consultado sobre la forma en que resolvió la parte 1b del cuestionario. Esto es lo que nos dijo:

> Profesor: Por ejemplo, en el 1b había que completar estos espacios vacíos y vos completaste con un 30 y con un 33. ¿Me contás por qué?
>
> Sebastián: Acá dice 90 dividido 3 que eso me da 30, y entonces es igual a 30. Y si vos a 30 le sumás 3, te da 33.

Este pequeño tramo de la entrevista nos sirve para confirmar que el estudiante, frente a la posibilidad de volver a resolver la actividad 1b, otra vez interpreta el signo de *igual* en su carácter de *operador* o *propuesta de actividad*. Asimismo, sigue sin reconocer como un problema que dos expresiones no equivalentes, como lo son $90 : 3$ y $30 + 3$, estén relacionadas por un signo de *igual*.

Actividad 2

Observemos el trabajo del estudiante en esta actividad:



2) Contesta si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

V a) $16 = 7 + 9$

$7 + 9 = 16$ → osea esta es verdadera porque 7+9 es 16 entonces en este caso es verdadero

F b) $5 + 9 = 14 \div 2 = 7$

$14 \quad 7$

$14 + 7 = 21$ → esta es falso porque da como resultado 21 y para que sea verdadero tiene que dar como resultado 7

En la parte a), Sebastián señala que la *igualdad* es verdadera. Cuando al justificar dice que "es verdadera porque 7 + 9 es 16", el estudiante interpreta la afirmación dada de derecha a izquierda para indicar que el resultado de la operación 7+9 es 16. Esa justificación da cuenta de que está entendiendo el signo de *igual* como *expresión de una acción*, porque acepta una *igualdad* en la que, desde su perspectiva, el resultado aparece a la izquierda, y la operación a la derecha del signo de *igual*.

En la parte b), Sebastián responde que la afirmación es falsa. Él señala en la expresión dada que $5 + 9$ es 14 y que $14 : 2$ es 7. Luego realiza la operación $14 + 7$, que plantea en forma vertical, y al justificar dice que "es falso porque da como resultado 21". La explicación de Sebastián da cuenta de que en este caso, el primer signo de *igual* es entendido como un signo de suma, y el segundo signo de *igual* es entendido como un *operador* que indica el resultado de todas las operaciones que aparecen a su izquierda. Interpretamos que esta visión *operacional* del signo de *igual* es lo que le impide al estudiante, aceptar expresiones en las que interviene más de un signo de *igual*, y por tanto las adapta para que respondan a la estructura propia de esa visión: "operación=resultado".

En la entrevista que mantuvimos posteriormente, le consultamos al estudiante sobre la forma en que había resuelto la actividad 2b. Esto fue lo que nos dijo:

> P: En el 2b te preguntábamos si esto era verdadero o falso y vos pusiste que era falso.
>
> S: Falso porque si vos hacés 5 más 9 te da 14, y acá es 14 dividido 2… ah esperá…, puede ser que esta esté mal, porque no sé si acá había un menos o un más. ¿Es un más no? *(en referencia al primer signo de igual de la expresión* $5 + 9 = 14: 2 = 7$*)*.
>
> P: ¿En dónde?
>
> S: Si para hacer… viste que acá es igual a 7, entonces yo lo que hice fue 5 más 9, 14, como separé en términos digamos, y acá hice 14 dividido 2 que me dio 7. Pero si vos hacés 14 más 7 te da 21, entonces yo puse que era falso porque para mí era 21 y no 7.

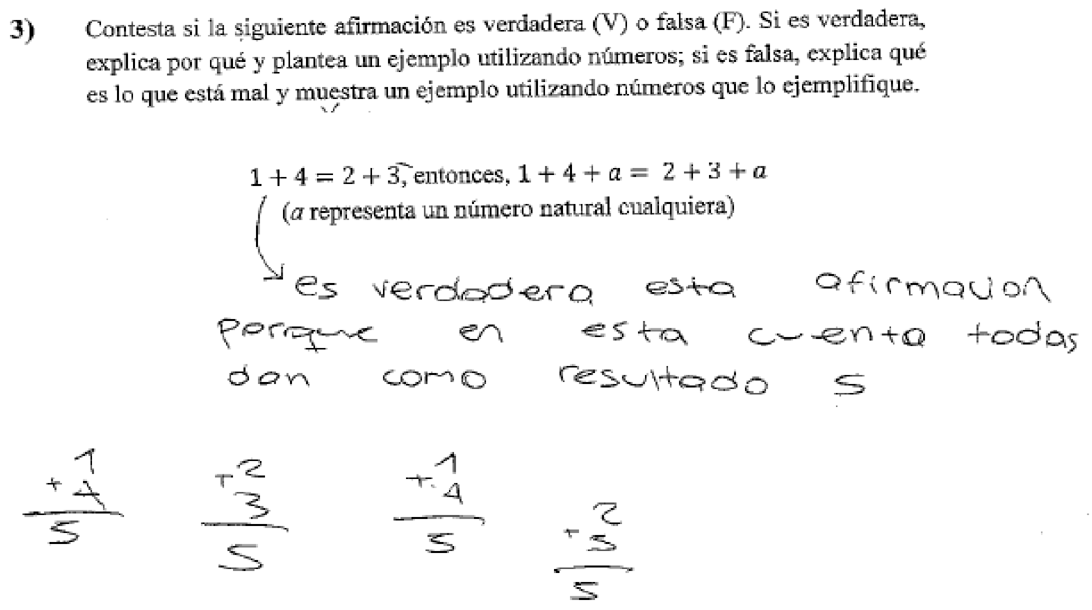
El estudiante admite que pudo cometer un error al trabajar en la actividad 2b. Sin embargo, cuando dice "no sé si acá había un menos o un más", en referencia al primer signo de *igual* de la expresión $5 + 9 = 14 : 2 = 7$, vuelve a asignarle a ese signo un significado muy distinto del que tiene. Sebastián vuelve a adaptar la estructura de la expresión dada, de modo que responda a su visión *operacional* del signo de *igual*: un solo signo de *igual* debe separar todas las operaciones, de su resultado.

> P: ¿Y si borramos el =7 y yo te dejo eso otro? ¿Tú dirías que es verdadero o falso?
>
> S: Falso…
>
> P: ¿Por qué?
>
> S: Porque 14 dividido 2 es 7, y 5 más 9 no es 7, es 14.
>
> P: ¿Y si volvemos al =7?
>
> S: También es falso.
>
> P: También es falso…
>
> S: No sé, capaz le estoy errando, pero para mí…

Sobre la expresión $5 + 9 = 14 : 2$, que es la que se obtiene al suprimir el =7 de la expresión planteada en la actividad 2b, Sebastián sostiene que es falsa. Cuando al justificar dice "porque 14 divido 2 es 7, y 5 más 9 no es 7, es 14", el estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque reconoce que $5 + 9$ y $14 : 2$ son expresiones aritméticas que representan a números distintos. Observemos que esto no es coherente con la forma en que Sebastián resolvió la actividad 1a, donde interpretó el signo de *igual* en su carácter de *operador*. Ahora bien, consultado nuevamente sobre la expresión $5 + 9 = 14 : 2 = 7$, que es la que se planteaba en la actividad 2b, Sebastián mantiene su respuesta inicial, falsa, y no logra dar una nueva explicación.

Actividad 3

Veamos la forma en que Sebastián resuelve esta actividad:


3) Contesta si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa, explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique.

$1 + 4 = 2 + 3$, entonces, $1 + 4 + a = 2 + 3 + a$
(a representa un número natural cualquiera)

es verdadera esta afirmacion porque en esta cuenta todos dan como resultado 5

$\begin{array}{r} 1 \\ +4 \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ +3 \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ +4 \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ +3 \\ \hline 5 \end{array}$

El estudiante sostiene que la afirmación es verdadera. Proporciona una explicación que no es acorde a la implicación planteada y no presenta el ejemplo solicitado.

Sebastián realiza las operaciones 1+4 y 2+3 dos veces cada vez, las cuales plantea en forma vertical. Cuando al justificar su respuesta dice que "es verdadera porque en esta cuenta todos dan como resultado 5", en alusión a las operaciones realizadas anteriormente, deja entrever por primera vez, una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*. Sin embargo, su explicación se refiere solamente a la *igualdad* 1+4=2+3, o en todo caso, al referirse a la *igualdad* "$1 + 4 + a = 2 + 3 + a$" ignora por completo la variable involucrada, centrando su atención solamente en los números con los cuales opera y elabora una respuesta. Este fenómeno, que nosotros interpretamos como un tipo del mecanismo que se conoce como *hacer caso omiso de lo desconocido* (Kieran, 1984), nos permite afirmar que el estudiante no muestra indicios de estar entendiendo el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, lo cual es necesario para interpretar la implicación planteada en esta actividad.

Actividad 4

Consultado sobre el nombre y el significado que tiene para él, el símbolo presentado en esta actividad, "=", responde lo siguiente.

> *"Signo de igual".*
>
> *"Para mí el signo de igual es por ejemplo cuando vos hacés una cuenta y te da el resultado, entonces, para poder marcar cuánto es que te da la cuenta ponemos un "=", ejemplo:* $2 + 3 = 5$*".*

Sebastián señala que el símbolo presentado se llama "Signo de *igual*" y explica el significado que ese símbolo tiene para él. Cuando dice que se utiliza "cuando vos haces una cuenta y te da el resultado", es notoria la forma en que el estudiante está interpretando el signo de *igual* como *operador* o *propuesta de actividad*. Lo mismo ocurre cuando sostiene que se utiliza "para marcar cuánto es que te da la cuenta". Digamos que en este caso intentó decir lo mismo que antes, pero eligiendo otras palabras. Para terminar su explicación, el estudiante incluye un ejemplo acorde a su interpretación, "2+3=5", en el que el signo de *igual* es utilizado para indicar que el resultado de la operación 2+3 es 5.

Observemos ahora las situaciones de clase que destaca Sebastián, en relación al uso del signo de *igual*, y las explicaciones que proporciona al respecto:

c) ¿En qué situaciones de clase has utilizado este símbolo? Ejemplifica mostrando, al menos, tres situaciones distintas.

$$-8\left(\begin{array}{c} 2x+8=0 \\ 2x=-8 \end{array}\right)-8$$

$$:2\left(x=-4 \right):2$$

$3+2=5$

$3-2=1$

d) ¿Para qué se utiliza el símbolo = en cada una de las situaciones que presentaste en la parte c?

para poder saber cual es el resultado de la cuenta, osea para poder saber el resultado Final ponemos el igual y luego hacemos la cuenta, y ponemos el resutado Despues del =

Ej: $2+3=5$

igual

En el primer ejemplo, Sebastián escribe la ecuación “$2x+8=0$”. Llama la atención que no solo presenta la ecuación sino que también la resuelve, aplicando sucesivas operaciones a ambos miembros. Pensamos que esto se debe a que quiere mostrar la expresión $x=-4$ que se deriva del proceso de resolución. Esto sería consistente con la explicación que refiere a que el símbolo se utiliza para indicar “el resultado de una cuenta”. Si bien esta expresión constituye una ecuación equivalente a la que el estudiante propone, nos inclinamos a pensar que el estudiante comprende a $x=-4$ como el resultado de haber averiguado el valor de x en la ecuación.

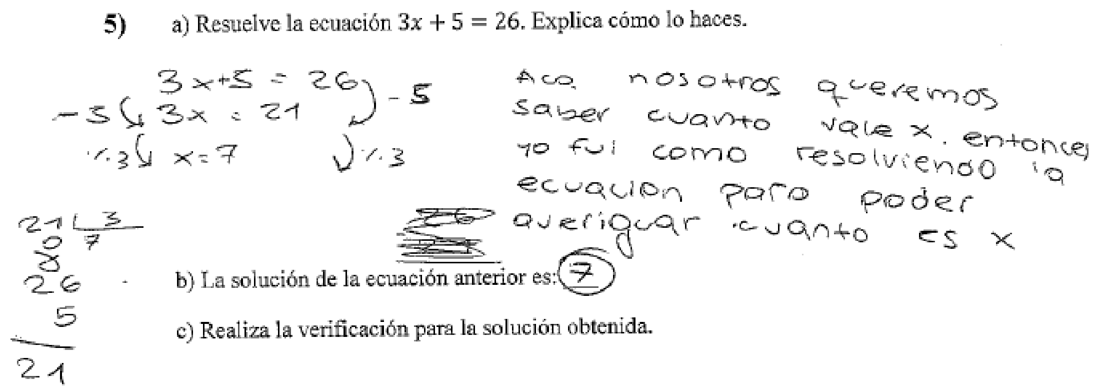
En el segundo y tercer ejemplo escribe “$3+2=5$” y “$3-2=1$”, siendo estas dos expresiones en las que el signo de *igual* es utilizado por Sebastián del mismo modo en que lo interpreta en la mayoría de las actividades realizadas hasta el momento.

Esto es, para indicar el resultado de una operación que siempre aparece escrita a su izquierda. Lo confirmamos cuando al explicar para qué se utiliza el signo de *igual* en estas situaciones, el estudiante escribe: “para poder saber cuál es el resultado de la cuenta” y “hacemos la cuenta y ponemos el resultado”.

Tomada la respuesta de Sebastián en conjunto, vemos que a lo largo de casi todas sus respuestas es notoria la interpretación que hace del signo de *igual* como *operador* o *propuesta de actividad*. Desde su perspectiva, este signo no hace más que relacionar una operación con su resultado, en ese orden.

Actividad 5

La respuesta que proporciona Sebastián para esta actividad es la siguiente:


5) a) Resuelve la ecuación $3x + 5 = 26$. Explica cómo lo haces.

$3x+5 = 26$) -5

-5 ($3x = 21$) $:3$

$:3$ ($x = 7$

Aca nosotros queremos saber cuanto vale x. entonces yo fui como resolviendo la ecuacion para poder averiguar cuanto es x

21 | 3
0   7

26
5
21

b) La solución de la ecuación anterior es: 7

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

El estudiante resuelve la ecuación e identifica su solución, aunque no *verifica* que es la correcta. Veámoslo con más detalle.

Sebastián resuelve la ecuación aplicando sucesivas operaciones a ambos miembros de la ecuación inicial, hasta despejar la variable. Es lo que en clase denominábamos aplicar el “principio de la balanza”. Él indica en sus planteos la operación que aplica en cada caso: primero resta cinco unidades a cada lado, y luego divide entre tres ambos miembros. Sebastián complementa su resolución con una explicación verbal de la estrategia que aplicó: “acá nosotros queremos saber cuánto vale x”. El estudiante identifica que la solución es 7 pero no realiza la *verifica*ción solicitada en la última parte de la actividad. Nos preguntamos entonces si el estudiante es consciente de que el valor obtenido al resolver la ecuación, es el que transforma esta última en una *igualdad* numérica, o si por el contrario, en la primera parte de la actividad se limita a aplicar una estrategia de resolución que ha mecanizado sin comprender sus fundamentos y su finalidad.

Por lo dicho, no tenemos total certeza en cuanto a que en esta actividad, Sebastián esté interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. Si bien encuentra el valor de la variable que *verifica* la ecuación, y lo asocia con la solución de la misma, no comprueba que para ese valor, es cierta la equivalencia dada por la ecuación.

Actividad 6

Sebastián sostiene que en la expresión "$x + 3 = 3x + 5$", el signo de *igual* tiene el siguiente significado:

> *"Significa que $x + 3$ da como resultado $3x + 5$, o sea, el signo de igual marca que la cuenta $x + 3 = 3x + 5$ da como resultado $3x + 5$".*

Cuando Sebastián dice que "$x + 3$ da como resultado $3x + 5$", en alusión al significado que tiene el signo de *igual* en la ecuación "$x + 3 = 3x + 5$", está interpretando el signo de *igual* como un *operador*, porque entiende que a su derecha está el resultado de una operación escrita a su izquierda. Esta visión *operacional* del signo de *igual* ha caracterizado el trabajo de Sebastián en la mayoría de las actividades analizadas hasta el momento, y puede confirmarse cuando al completar su respuesta, agrega que "la cuenta $x + 3 = 3x + 5$ da como resultado $3x + 5$".

Por lo dicho, Sebastián no logra interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. Tampoco logra interpretarlo de otro modo que implique una lectura bidireccional de ese símbolo, por ejemplo, como *expresión de una equivalencia simbólica*. Es decir, el estudiante pone de manifiesto una interpretación unidireccional que lo "obliga" a "leer" todas las expresiones que involucran al signo de *igual* en un solo sentido. Esto es consistente con su explicación acerca del uso que tiene el signo de *igual* como indicador del resultado de una cuenta.

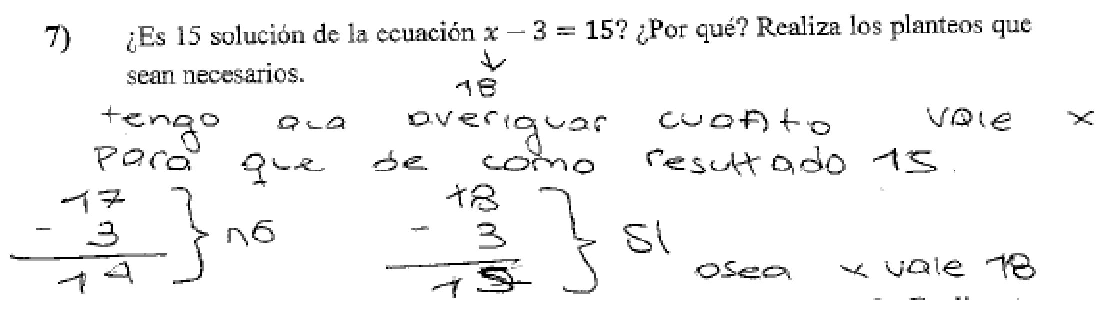
El estudiante fue consultado sobre esta actividad, en la entrevista que mantuvimos posteriormente. Veamos lo que nos dijo:

> P: En el 6 te preguntamos qué significado tiene el signo de *igual* en esta expresión, que es una ecuación: $x + 3 = 3x + 5$ (…) ¿Querés comentarme algo más sobre esa pregunta?
>
> S: Es como que marca el *igual* de una cuenta, vos tenés una cuenta y querés saber el *igual*, entonces ponés,… querés saber cuánto da esa cuenta, entonces ahí ponés el *igual* para poder obtener el…, o sea, para poner el número que da la cuentita que hiciste ¿no?
>
> P: La cuentita que estaba al lado izquierdo…
>
> S: Izquierdo… Vos querés saber por ejemplo este resultado, entonces, ponés el *igual* como para decir: esto es igual a $3x + 5$.

En varios pasajes de la entrevista, vemos que el estudiante deja de manifiesto la misma interpretación *operacional* del signo de *igual* que muestra al resolver la actividad del cuestionario que estamos analizando. Eso es especialmente visible cuando dice: "marca el *igual* de una cuenta", "querés saber cuánto da esa cuenta", "para poner el número que da la cuentita que hiciste". Sebastián no muestra evidencias de estar interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional,* que es lo adecuado para esta actividad, y lo confirmamos con el tramo de la entrevista que transcribimos anteriormente.

Actividad 7

Observemos el trabajo realizado por Sebastián al resolver esta actividad:


7) ¿Es 15 solución de la ecuación $x - 3 = 15$? ¿Por qué? Realiza los planteos que sean necesarios.

18

tengo qua overiguar cuanto vale x
Para que de como resultado 15.

$\left.\begin{array}{r} 17 \\ -\ 3 \\ \hline 14 \end{array}\right\}$ no $\quad \left.\begin{array}{r} 18 \\ -\ 3 \\ \hline 15 \end{array}\right\}$ si osea x vale 18

Sebastián considera que para dar respuesta a la pregunta planteada, debe resolver la ecuación $x - 3 = 15$: "tengo que averiguar cuánto vale x para que me dé como resultado 15". Asimismo, con la frase "que me dé resultado 15", en alusión al segundo miembro de esa ecuación, Sebastián insiste en su visión *operacional* del signo de *igual*, al asociar el segundo miembro de la ecuación con el *resultado* de una operación, que desde su perspectiva corresponde al primer miembro de la misma.

Sebastián resuelve la ecuación por tanteo. Para ello, escribe dos operaciones en forma vertical, "17-3" y "18-3", y concluye que "x vale 18". Para él, ese es el valor de la variable para el que se obtiene un 15 como "resultado". Hasta aquí Sebastián deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica. Además, reconoce implícitamente que no ocurre lo mismo con cualquier otro valor, mostrándolo para 17.

Sin embargo, Sebastián no aclara si la solución de la ecuación es 18, por ser el número que *verifica* la ecuación, o si es 15, por ser el número que ocupa el lado derecho de la ecuación. De este modo, deja al descubierto que la solución de una ecuación, desde su perspectiva, puede estar ligada al número que está en el segundo miembro de la ecuación. Esta posible asociación entre solución y lado derecho es coherente con los trabajos reportados por Papaieronymou (2007) y Sessa (1995). Vale aclarar que Sebastián no trabajó del mismo modo cuando se le pidió resolver una ecuación e indicar explícitamente su solución, habiéndola identificó con acierto en ese caso.

Quisimos volver a esta actividad, en la entrevista que mantuvimos con el estudiante posteriormente. Nos dijo lo siguiente:

> P: En la actividad 7 no me quedó muy clara tu respuesta (…). ¿Es 15 solución de esta ecuación?
>
> S: Yo acá creo me confundí porque mirá…, yo estaba averiguando a ver cuánto valía esta x y dije ta…, estaba pensando en un número, probando ¿no?, entonces estaba pensando en un número que… este número menos 3 me dé 15. No sé si era esa la consigna.

> P: Bueno, entonces vos, ¿cómo responderías a esa pregunta? ¿Es 15 solución de la ecuación $x - 3 = 15$?
>
> S: En realidad había que hacer una ecuación, ¿no?
>
> P: ¿Qué ecuación?
>
> S: Digo, para averiguar si es 15 la solución.
>
> P: ¿Resolver una ecuación decís vos?
>
> S: Ahí va.

Cuando sostiene que "había que hacer una ecuación", y luego agrega "para averiguar si es 15 la solución", Sebastián entiende que debe resolver la ecuación "$x - 3 = 15$" para dar respuesta a la pregunta planteada. Por el contrario, nunca asume la posibilidad de *verificar* si 15 transforma la ecuación en una *igualdad* numérica. La misma consideración había hecho al comienzo de su respuesta, durante la realización del cuestionario. Sebastián intenta resolver la ecuación durante la entrevista, aplicando el principio de la balanza. Luego retomamos el diálogo:

> P: ¿Qué hiciste del primer renglón al segundo? *(había sumado un 3 a ambos miembros)*
>
> S: Acá pasé, como que en la ecuación hay que ir sacando números para poder obtener cuánto es x, entonces yo lo que hice acá… saco -3, o sea, pongo $+3$, porque como acá está negativo y acá…
>
> P: ¿Por qué acá también?
>
> S: Porque… ¿no siempre tiene que ir de los dos lados?
>
> P: ¿Por qué?
>
> S: Porque si no para poder como que… para que te queden *igual*… porque si por ejemplo en uno hacés +3 y en otro +6 capaz que… como que no queda, es que no sé cómo explicarlo…
>
> P: No queda *igual*, como dijiste recién…
>
> S: Ahí va, no queda *igual*. Y me dio… y después a 15 le sumé 3, me dio 18, entonces me quedó que x es igual a 18, y ahora lo tengo que hacer dividido tres, ¿no?
>
> P: ¿Por qué te parece que tenés que hacerlo dividido tres, ahora?
>
> S: Porque siempre que hacés una ecuación, siempre tenía… yo a lo último siempre ponía el dividido… o el número que estaba acá, pero como ahora es x...

Para resolver la ecuación "$x - 3 = 15$", el estudiante suma tres a cada lado del signo de *igual*, obtiene que "$x = 18$", y luego pretende hacer una división: "ahora lo tengo que hacer dividido tres", "yo a lo último siempre ponía el dividido". Sebastián se refiere al caso en que el coeficiente de la variable no es uno, en el que podría proceder de ese modo. Sin embargo, aquí ya está en condiciones de indicar la solución de la ecuación, aunque no lo percibe. Vemos que el estudiante muestra cierta mecanización de la estrategia algebraica de resolución empleada, al tiempo que además, sigue sin explicitar cuál es la solución de la ecuación. Quisimos retomar la pregunta de la actividad 8, que era el objetivo inicial de este tramo de la entrevista.

> P: Bueno, pero con lo que tenés hecho hasta ahora, ¿será 15 solución de la ecuación o no? ¿Podemos contestarlo? ¿No sabemos? ¿Sí? ¿No?
>
> S: Yo creo que no, porque da como resultado 18. Pero acá justo también me dio cuánto vale x, y me dio 18, entonces x es igual a 18, entonces acá haces 18 menos 3 y da 15.
>
> P: ¿Entonces?
>
> S: Yo creo que sí, ¿no? Que es solución.

Consultado sobre la posibilidad de que la solución de la ecuación "$x - 3 = 15$" sea 15, vemos que el estudiante pasa de una respuesta a otra en forma inmediata, sin tener total certeza de lo que está diciendo. Primero responde que no, "porque da como resultado 18", en alusión al valor de la variable que *verifica* la ecuación. Más allá de que el estudiante asocia la palabra "resultado" con la raíz de la ecuación, del mismo modo que en oportunidades anteriores la había asociado con el lado derecho, hasta aquí está presentando una respuesta adecuada. Sin embargo, luego responde que sí, porque "x es igual a 18, entonces acá haces 18 menos 3 y te da 15", donde vuelve a asociar solución con lado derecho de la ecuación.

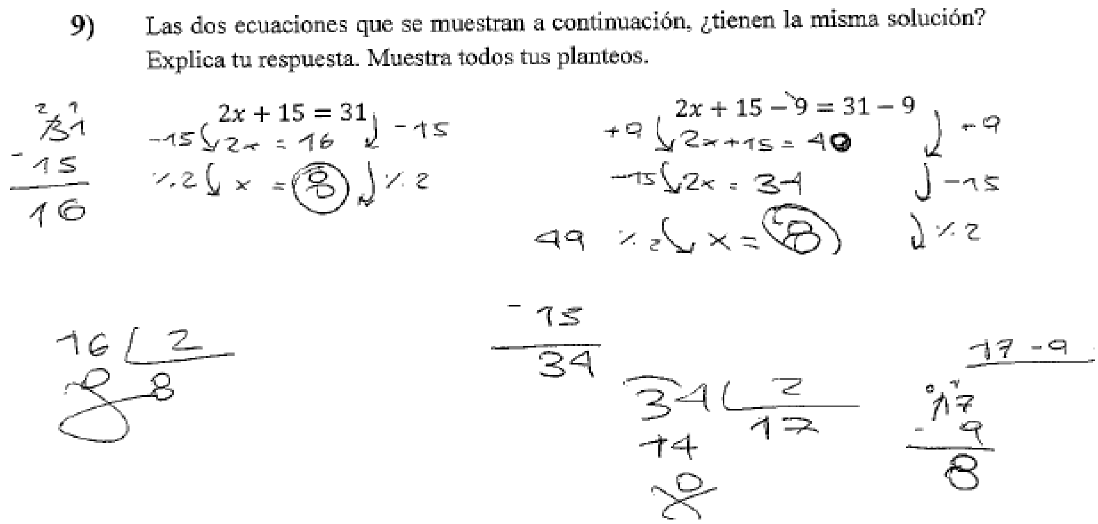
Observamos que las dos ideas que conviven en el estudiante, respecto a la solución de una ecuación (como raíz y como segundo miembro), unido a la visión *operacional* que caracteriza sus respuestas al cuestionario, son los aspectos que explican su proceder en esta actividad. En particular, que emplee la palabra "resultado" para referirse indistintamente a la raíz y al segundo miembro de la ecuación.

Actividad 8

Frente al pedido de escribir una ecuación que tenga solución 5, el estudiante no proporciona respuesta alguna.

Actividad 9

Observemos el trabajo realizado por Sebastián al resolver esta actividad:


9) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$2x + 15 = 31$

$2x + 15 - 9 = 31 - 9$

El estudiante resuelve las dos ecuaciones en forma análoga a lo realizado en la actividad 5: aplica el "principio de la balanza" e incluye planteos en vertical con las operaciones que realiza. Obtiene el mismo valor al despejar la variable en cada ecuación, pero no lo asocia explícitamente con la solución de cada una de ellas. Eso hace que no responda a la pregunta planteada. Sin embargo, al señalar con un círculo el valor de la variable obtenido en cada caso al resolver, deja entrever que esa es la solución de cada ecuación, y que por lo tanto, ambas tienen la misma solución.

Ahora bien, Sebastián no procede a *verificar* las ecuaciones para las soluciones obtenidas. Si bien no era imprescindible que lo hiciera en esta actividad, cuando era imprescindible (actividad 5), tampoco lo hizo. Eso hace que no podamos afirmar con certeza que el estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque al margen de que encuentra la solución de cada ecuación, no sabemos si es consciente de que para ella, y solo para ella, es cierta la equivalencia dada por cada ecuación.

Actividad 10

Consultado sobre la posibilidad de que 9 sea solución de la ecuación "$x + 18 + 11 = 27 + 11$", sabiendo que lo es de la ecuación "$x + 18 = 27$", Sebastián escribe la siguiente respuesta:

> *"No, porque ya para mí o sea, viendo las dos cuentas a ojo me puedo dar cuenta que tienen distinto resultado".*

Sebastián responde en forma negativa. Cuando dice que "viendo las dos cuentas a ojo me puedo dar cuenta que tienen distinto resultado", Sebastián está interpretando que "$x + 18$" es una operación que da como resultado "27" y que "$x + 18 + 11$" es una operación que da como resultado "27+11". Entonces, como "27" y "27+11" no son *igual*es, desde su perspectiva las ecuaciones tienen distintos "resultados". Ahora bien, que el estudiante responda que las ecuaciones no tienen la misma solución, producto del razonamiento señalado anteriormente, implica que al mismo tiempo esté asociando solución con lado derecho de la ecuación (o "resultado", desde su perspectiva). Siguiendo su razonamiento, "27" es la solución de la primera ecuación, y "27+11" lo es de la segunda, entonces las ecuaciones presentadas tienen distintas soluciones, y en particular la segunda ecuación no tiene solución 9. Lo que no reconoce Sebastián, es que la propia consigna explicita que la solución de la primera ecuación es 9.

Una vez más y como señaláramos en varias actividades anteriores, Sebastián insiste en interpretar el signo de *igual* en su carácter de *operador*. Aun en contexto de ecuaciones, el estudiante entiende que dicho signo sigue relacionando una operación con su respectivo resultado. Eso hace que esté muy lejos de poder interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, que sería lo adecuado para esta actividad. Quisimos volver sobre esta actividad en la entrevista que mantuvimos con el estudiante en forma posterior. Nos dijo lo siguiente:

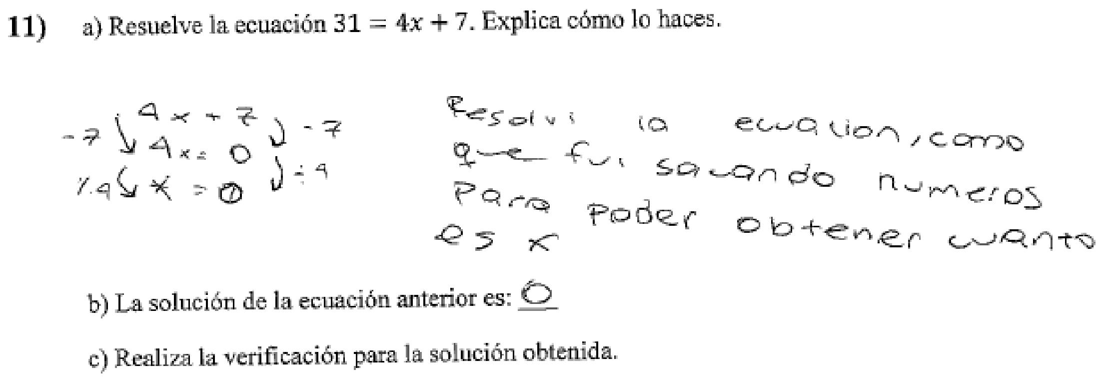
> P: En el 10 te decimos que 9 es solución de la ecuación "$x + 18 = 27$" y te preguntamos si 9 también es solución de la ecuación "$x + 18 + 11 = 27 + 11$". ¿A qué te referías con la respuesta que diste?

> S: Que por ejemplo, si vos mirás acá *(en referencia a la ecuación "$x + 18 + 11 = 27 + 11$")*, como que…para mí… como que da distinto resultado, porque tiene como más números y… no sé, está mal…
>
> P: No, no lo sé…
>
> S: Tiene como… Yo lo veía así a simple vista y para mí, me doy cuenta que no son *igual*es porque como que esta tiene más números *(en referencia a "$x + 18 + 11 = 27 + 11$")*, y esta solamente tiene dos *(en referencia a "$x + 18 = 27$")*, no sé…
>
> P: Yo lo único que te pregunto es a qué te referís con esto de distinto resultado, ¿resultado de qué?
>
> S: De esto, por ejemplo acá ya me da 27 más 11, que eso me da 38, y acá está me da como resultado 27.

Por un lado, cuando el estudiante dice que "esta tiene más números y esta solamente tiene dos", en alusión a los términos numéricos que intervienen en cada ecuación, está ignorando por completo la variable, solamente presta atención a los números y con ellos es que opera y elabora una respuesta. Nosotros interpretamos este fenómeno como un tipo del mecanismo que se conoce como *hacer caso omiso de lo desconocido* (Kieran, 1984). Por otro lado, cuando dice "acá ya me da 27 más 11, que eso me da 38, y acá esta me da como resultado 27", refiriéndose al valor numérico que arroja el segundo miembro de cada ecuación, el estudiante otra vez deja al descubierto una visión *operacional* del signo de *igual*, porque desde su perspectiva el primer miembro de estas ecuaciones plantea una operación, y el segundo miembro es entendido como el resultado de las mismas. Asimismo, como estos difieren, y Sebastián asocia resultado con solución, vuelve a justificar de este modo que las ecuaciones planteadas no tienen la misma solución.

Actividad 11

Veamos la respuesta presentada por el estudiante para esta actividad:


11) a) Resuelve la ecuación $31 = 4x + 7$. Explica cómo lo haces.

-7 $4x + 7$ -7
$4x = 0$
$\div 4$ $x = 0$ $\div 4$

Resolvi la ecuacion, como que fui sacando numeros para poder obtener cuanto es x

b) La solución de la ecuación anterior es: 0

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

Sebastián intenta resolver la ecuación planteada, aplicando la misma estrategia que en las actividades 5 y 9: el "principio de la balanza". Sin embargo, no parte de la ecuación, sino del segundo miembro, "$4x + 7$", identificándolo como una ecuación. Aplica entonces una estrategia de resolución de ecuaciones y va acomodando la expresión de acuerdo a los requerimientos del procedimiento, por ejemplo, agregando 0 como segundo miembro. Esto da cuenta de que la estrategia empleada por el estudiante le resulta útil cuando la variable aparece solo a la izquierda del signo de *igual*, no así cuando aparece solo a la derecha, como lo es en este caso. Es como si invirtiera los miembros de la ecuación dada pero en realidad se queda solo con el segundo miembro, que en sus razonamientos pasa a ser considerado como el primer y único miembro. De acuerdo al razonamiento realizado, Sebastián señala que la solución de la ecuación es 0. Al igual que en la actividad 5, el estudiante no realiza la *verifica*ción solicitada.

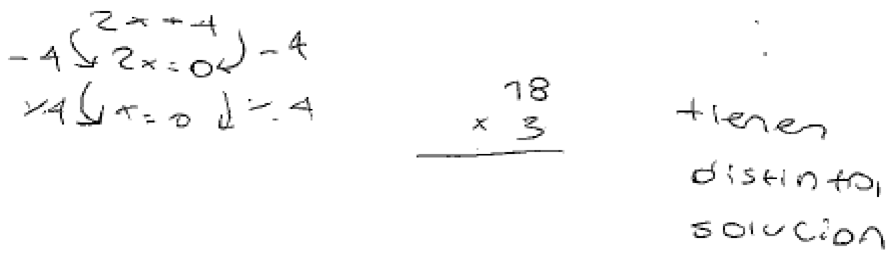
Vemos que Sebastián en esta actividad tampoco logra interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque ni siquiera encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica. No obstante logra vincular la palabra ecuación con la puesta en marcha de un procedimiento de resolución de ecuaciones que en otras actividades le resultó eficaz. La visión *operacional* del signo de *igual* que ha caracterizado la mayoría de sus respuestas le impide en este caso, darle sentido a una ecuación cuya variable aparece solo a la derecha del signo de *igual*. Dicho con otras palabras, que en una expresión aparezca un solo número a la izquierda y un polinomio a la derecha del signo de *igual* no resulta compatible con su interpretación del signo de *igual* como *operador*.

Actividad 12

Observemos el trabajo realizado por Sebastián al resolver esta actividad:

12) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$18 = 2x + 4$ $\qquad\qquad$ $3 \,.\, 18 = 3 \,.\, (2x + 4)$



Sebastián intenta resolver la primera ecuación, en forma análoga a la actividad anterior: su punto de partida es el segundo miembro de la ecuación, “$2x + 4$”, y no la ecuación en sí misma, “$18 = 2x + 4$”. Eso hace que sus planteos tengan poco sentido, y que en definitiva vuelva a aplicar una estrategia de resolución sin tener cabal conocimiento de lo que está haciendo. Dicha estrategia vuelve a ser ineficaz para Sebastián, frente a una ecuación cuya variable se encuentra a la derecha del signo de *igual*. Sebastián llega a que “$x = 0$”. En la segunda ecuación, señala que el valor de “$2x + 4$” es 0, tal vez motivado por el valor que obtuvo al despejar la variable en la primera ecuación. De ser así, no queda claro qué entiende el estudiante por solución de una ecuación. Finalmente, y sin dar ninguna explicación complementaria, Sebastián concluye que las ecuaciones dadas “tienen distinta solución”.

Vemos que Sebastián en esta actividad tampoco interpreta el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque ni siquiera encuentra el valor de la variable que *verifica* cada ecuación. Asimismo, no reconoce que al multiplicar ambos miembros de una ecuación por un mismo número, se obtiene otra equivalente.

Actividad 13

Consultado sobre la posibilidad de que 8 sea solución de la ecuación “$2x + 1 = 17$”, sabiendo que lo es de la ecuación “$17 = 2x + 1$”, Sebastián presenta la siguiente respuesta:

> *“Si, es la misma solución porque el orden del factor no altera el producto. Estos dos tienen como solución 8”.*

Sebastián responde afirmativamente y explica su respuesta. Cuando dice que "el orden del factor no altera el producto", deja entrever que al intercambiar los miembros de lugar respecto al signo de *igual*, no cambia la solución de la ecuación inicial. Eso hace que en esta actividad esté aceptando la propiedad simétrica del signo de *igual*. Cuando al completar su respuesta dice que "tienen solución 8", damos por sentado que por primera vez en todo el cuestionario, el estudiante deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, que se revela en un reconocimiento implícito de que dos ecuaciones son equivalentes cuando se intercambian de lugar sus miembros respecto al signo de *igual*. En otras palabras, Sebastián aplica una propiedad que es equivalente a la definición de ecuaciones equivalentes.

Actividad 14

Consultado sobre la posibilidad de que Juan haya terminado la tarea de reducir términos semejantes, al escribir en su cuaderno "$4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$", Sebastián escribe la siguiente respuesta:

> *"Yo creo que está terminada porque a Juan le dijeron que tenía que reducir los téminos y los redujo".*

Cuando el estudiante dice "tenía que reducir los términos y los redujo", en alusión a la tarea que debía realizar Juan, y a lo que realmente hizo, Sebastián está aceptando que al simplificar un polinomio que se encuentra a la izquierda del signo de *igual*, se puede obtener otro con más de un término a la derecha del signo de *igual*. Recordemos que la visión *operacional* del signo de *igual* que caracteriza las respuestas de Sebastián en contexto aritmético, implica escribir un solo número a la derecha, con el resultado de la operación escrita a su izquierda. Sin embargo, vemos que esa visión no lo conduce a pensar que frente a esta situación, debe obtenerse un polinomio con un solo término como resultado de la simplificación solicitada. Más allá de eso, no encontramos mayores evidencias que nos permitan determinar de qué modo el estudiante, en esta actividad, está interpretando el signo de *igual* si no es en su carácter de *operador*.

Actividad 15

Veamos la forma en que Sebastián analiza las siguientes afirmaciones:

a) F $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

porque si hace $x^2 - 9$ no da $(x+3)(x-3)$

b) $4x = x + 3x$ V

es verdadera porque si vos haces la suma de la cuenta te da 4x porque per elempio al principio pone x y aledante del x hay un 1 y si sumamos 1+3=4 y como tenemos x es 4x

En la parte a), Sebastián sostiene que la afirmación es falsa. Cuando al justificar dice que "$x^2 - 9$ no da $(x + 3)(x - 3)$", está interpretando el signo de *igual* como un *operador* porque entiende que la expresión que está escrita a la izquierda del signo de *igual* plantea una operación, "$x^2 - 9$", mientras que la expresión escrita a su derecha, "$(x + 3)(x - 3)$", es entendida como un resultado. Desde su perspectiva, el problema radica en que operación y resultado no se corresponden, pero nunca deja de interpretar la afirmación planteada del modo en que lo estamos describiendo: "operación=resultado". Esto se fundamenta, principalmente, en el uso de la palabra "da". Lo que no sabemos es qué espera el alumno que pueda "dar" la expresión planteada.

En la parte b), Sebastián sostiene que la afirmación es verdadera. Cuando dice "es verdadera porque si vos haces la suma de la cuenta te da $4x$", está considerando que la expresión "$x + 3x$" es la cuenta y "$4x$" el resultado. Desde la perspectiva del estudiante, la expresión que aparece a la derecha del signo de *igual* plantea una operación, mientras que la expresión de la izquierda es entendida como el resultado de la misma. Eso hace que en este caso, el estudiante esté interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*.

d) $x = x$ V,

es verdadero porque un numero x es igual a un numero cualquiera pero como adelante de x siempre hay un 1 sino hay nada adelante de la x entonces quedaria 1x = 1x

e) V $\underbrace{5 + x}_{5x} = \underbrace{5 + x}_{5x}$

osea en este caso es verdadera

Sebastián contesta Verdadero a la parte d). Cuando al justificar dice que "un número x es igual a un número cualquiera", deja entrever que al razonar está pensando en expresiones del tipo $x = 1$, $x = 2$, etc., donde el signo de *igual* se utiliza como *asignación de un valor numérico*. La duda que nos queda es si contesta verdadero porque ambos miembros tienen coeficiente 1 y piensa en que $1 = 1$, o si está pensando en que $x = x$ para todo valor de x, interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*.

El estudiante también contesta Verdadero la parte e). Para justificar simplifica términos que no son semejantes, pero aun así, acepta la afirmación planteada. Sebastián contesta verdadero porque luego de operar obtiene el mismo polinomio a cada lado del signo de *igual* y/o porque reconoce que $5x = 5x$ se *verifica* para todo valor de x. Al igual que antes, la interpretación del signo de *igual* como *expresión de una identidad estricta* y como *expresión de una equivalencia simbólica* son las que el estudiante puso en juego para responder a la situación planteada.

c) V $\underbrace{3x^2}_{6} + \underbrace{4x^2}_{8} = \underset{4}{2x^2} + \underset{10}{5x^2}$

si sumamos todos estos numeros en los dos dan 14

f) $\underbrace{7x + 2x}_{9x} = 9x$ V

En la parte c), el estudiante multiplica el coeficiente de cada monomio por el respectivo exponente de la variable para obtener, supuestamente, un valor numérico del término. Sin embargo, siguiendo su razonamiento, en su explicación deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, al entender que se obtiene el mismo número a cada lado del signo de *igual*. Obtiene el mismo valor numérico a ambos miembros pues su razonamiento equivale a haber multiplicado a ambos miembros por dos.

En la parte f), por su parte, sostiene que la afirmación dada es verdadera. Al justificar, señala que la expresión que se ubica a la izquierda del signo de *igual* se reduce a $9x$, coincidiendo así, con la expresión escrita a su derecha. Vemos que en este último caso, el estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque hace alusión a que en ambos lados del signo de *igual* se obtiene la misma expresión algebraica. Sostenemos que la presencia de un solo término a la derecha del signo de *igual*, no está favoreciendo una interpretación *operacional* del signo de *igual* de parte de este estudiante. En los hechos, él no dice que el resultado de$7x + 2x$ es $9x$, sino que por el contrario, señala que la expresión obtenida a cada lado del signo de *igual* es la misma.

Actividad 16

Sabiendo que $x + x + 5 + 7 = 2x + 12$, veamos la forma en que Sebastián analiza las siguientes afirmaciones.

16) La profesora escribe en el pizarrón que si reducimos monomios semejantes en la expresión $x + x + 5 + 7$ obtenemos $2x + 12$. Es decir que:

$$x + x + 5 + 7 = 2x + 12$$

Luego solicita a los alumnos que indiquen si lo escrito en cada renglón es Verdadero (V) o Falso (F). En caso de ser verdadero, les pide que expliquen por qué, y en caso de ser falso, les pide que indiquen qué es lo que está mal.

Te pedimos que resuelvas la tarea que la profesora les planteó a sus alumnos.

a) V $-5(x + x + 5 + 7) = -5(2x + 12)$

b) V $2x + 12 = \overbrace{x + x}^{2x} + \overbrace{5 + 7}^{12}$

porque si sumamos todo nos da x + x + 5 + 7
que eso es igual a 2x + 12

c) F $x + x + 5 + 7 - 4 = 2x + 12 - 6$

Sebastián sostiene que la afirmación a) es verdadera y que la afirmación c) es falsa, pero sin presentar ninguna justificación. En particular, no señala que se multiplicaron ambos polinomios de la expresión inicial por -5 en la parte a), ni que se restó un número distinto a cada lado de la expresión inicial en la parte c).

En la parte b), mientras tanto, Sebastián sostiene que la afirmación es verdadera. Cuando dice “si sumamos todo nos da $x + x + 5 + 7$ que eso es igual a $2x + 12$”, está considerando que $x + x + 5 + 7$ es una operación cuyo resultado es $2x + 12$. Entonces, está aceptando una afirmación en la que, desde su perspectiva, la operación aparece a la derecha y su resultado a la izquierda del signo de *igual*. Eso hace que en este caso, el estudiante esté interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*. Nuevamente aparece la palabra “da” como evidencia.

Síntesis:

En contexto aritmético, Sebastián interpreta el signo de *igual* como un *operador* o como *propuesta de actividad* (actividades 1 y 2b), excepto cuando acepta una afirmación en la que, desde su perspectiva, la operación aparece a la derecha y el resultado a la izquierda del signo de *igual*, caso en el que interpreta el signo de *igual* como *expresión de una acción* (actividad 2a). El estudiante no logra interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, incluso en aquellos casos en que es necesario para resolver con acierto la actividad planteada.

En contexto de ecuaciones, Sebastián sostiene que por ejemplo, el signo de *igual* “marca que la cuenta $x + 3 = 3x + 5$ da como resultado $3x + 5$” (actividad 6). Eso hace que Sebastián continúe mostrando una visión *operacional* del signo de *igual*, incluso cuando se enfrenta a una ecuación. Desde su perspectiva, el signo de *igual* vuelve a separar una operación de su resultado: el primer miembro de la ecuación plantea una operación, y el segundo miembro es entendido como el resultado de esa operación.

Aun así, el estudiante logra resolver ecuaciones aplicando el “principio de la balanza”, siempre y cuando la variable esté solo a la izquierda del signo de *igual* (actividades 5 y 9 sí, actividades 11 y 12 no). Sin embargo, no realiza las *verifica*ciones correspondientes, ni cuando se le pide explícitamente (actividad 5). Sebastián muestra dificultades para interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque si bien encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica, su trabajo no da cuenta de que esté entendiendo la relación que existe entre dicho valor y la equivalencia dada por la ecuación. Más bien aplica en forma mecánica un procedimiento para resolver la ecuación.

En ocasiones deja entrever que conviven en él dos ideas respecto a la solución de una ecuación: como raíz y como segundo miembro de la ecuación, empleando el término “resultado” para referirse indistintamente a una cosa o a la otra (actividades 7 y 10). Esto puede deberse a la visión *operacional* que caracteriza la mayoría de sus respuestas al cuestionario, y es coherente con lo reportado en otros estudios relacionados con este asunto (Papaieronymou, 2007; Sessa et al., 1995).

Cuando se presentan dos ecuaciones equivalentes, Sebastián recurre a la resolución de cada una de ellas (actividades 9 y 12) o indirectamente hace alusión a la propiedad simétrica del signo de *igual* (actividad 13) para justificar que ambas tienen la misma solución. Asimismo, no explicita que al multiplicar dos expresiones equivalentes por un mismo número (actividad 16a), o al invertirlas de lugar respecto al signo de *igual* (actividad 16b), continúan siendo equivalentes. Por el contrario, prefiere simplificar términos semejantes y comparar las expresiones así obtenidas (actividad 16b), o no proporcionar ninguna justificación (actividad 16a).

En contexto de polinomios, el estudiante no muestra indicios de estar interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, a excepción de un caso en el que, curiosamente, aparece un solo término a la derecha del signo de *igual* (actividad 15f). Sebastián sí interpreta el signo de *igual* como *expresión de una acción*, porque al igual que en contexto aritmético acepta expresiones que, desde su perspectiva, incluyen operaciones a la izquierda del signo de *igual* y sus resultados a la izquierda del signo de *igual* (actividades 15b y 16b). En el resto de los casos, el estudiante interpreta el signo de *igual* como un *operador* (actividad 15a) o sus respuestas no permiten extraer conclusiones en ese sentido (actividades 16a y 16c)

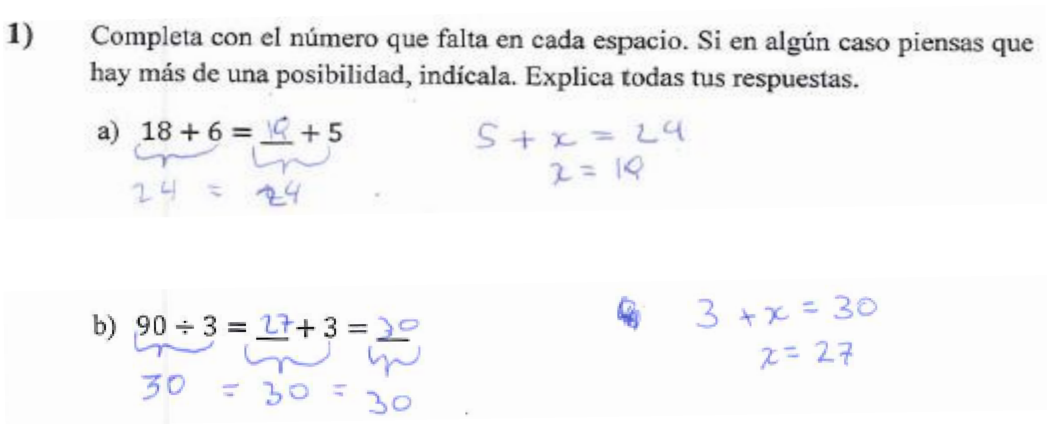
Sobre la expresión "$x = x$" (actividad 15d), Sebastián dice que "un número x es igual a un número cualquiera". De este modo deja entrever que al razonar está pensando en expresiones del tipo $x = 1$, $x = 2$, etc. En este caso interpreta el signo de *igual* como *asignación de un valor numérico* y no como expresión de una equivalencia, que sería lo adecuado para esa situación.

5.2.5 Respuestas de Gerónimo (14 años)

Gerónimo en la actividad 4b presenta una respuesta que clasificamos como *relacional*, porque desde su perspectiva, el signo de *igual* relaciona expresiones numéricas o simbólicas que arrojan el mismo valor numérico: "todo lo que esté a sus lados finalmente luego de hacer esas cuentas son iguales, tienen el mismo valor".

Actividad 1

Observemos el trabajo realizado por Gerónimo al resolver esta actividad:


1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a) $\underbrace{18 + 6}_{24} = \underbrace{\underline{19} + 5}_{24}$

$5 + x = 24$

$x = 19$

b) $\underbrace{90 \div 3}_{30} = \underbrace{\underline{27} + 3}_{30} = \underbrace{\underline{30}}_{30}$

$3 + x = 30$

$x = 27$

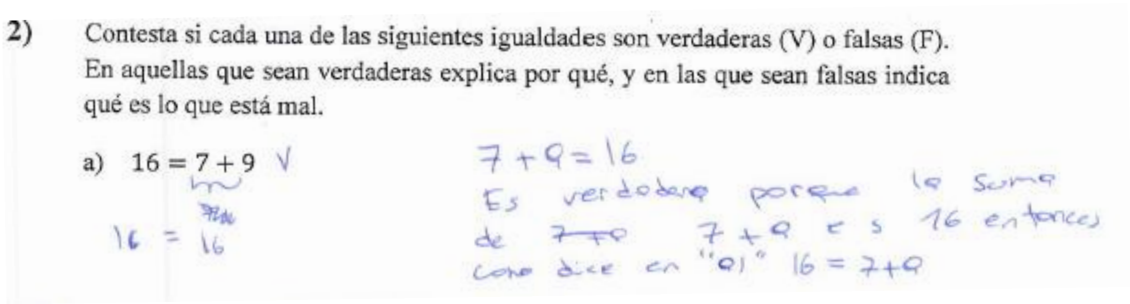
En la parte a), Gerónimo completa el espacio vacío con un 19. Para dar con ese número, el estudiante plantea y resuelve la ecuación $5 + x = 24$, que surge de la afirmación dada luego de reducir $18 + 6$, de representar con una x el espacio en blanco y de intercambiar de lugar las expresiones con respecto al signo de *igual*. Cuando Gerónimo plantea y resuelve dicha ecuación, está utilizando el signo de *igual* para expresar una *equivalencia condicional*, reconociendo que el valor de la variable obtenido es el que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica. Asimismo, cuando completa el espacio vacío con un 19 y señala que de ese modo, a cada lado del signo de *igual* se obtiene el mismo número, está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, porque reconoce que en ese caso relaciona dos expresiones aritméticas que representan al mismo número.

En la parte b), Gerónimo completa los espacios vacíos con un 27 y un 30. Trabaja en forma análoga al caso anterior. Plantea y resuelve una ecuación, además de señalar en la afirmación así completada, que las tres expresiones aritméticas involucradas en ella arrojan el mismo valor numérico. Pese a la presencia de dos signos de *igual* en la misma afirmación, Gerónimo vuelve a utilizar e interpretar el signo de *igual* del mismo modo que antes: como *expresión de una equivalencia condicional* y como *expresión de una equivalencia numérica*.

Observamos que Gerónimo al responder experimenta una transición entre dos usos distintos del signo de *igual*. En ambos casos, el uso como expresión de equivalencia condicional le permite interpretar mejor el uso como *expresión de una equivalencia numérica*, que es el uso esperado en esta actividad. Aunque es necesario seguir avanzando con el análisis de las respuestas presentadas por este estudiante, lo anterior puede indicar que un elemento a tener en cuenta para la enseñanza es que la transición entre usos retroalimenta la comprensión de los distintos usos, es decir, que favorece una mejor comprensión de cada uno de ellos. Volveremos a este asunto llegando al final del presente capítulo.

Actividad 2

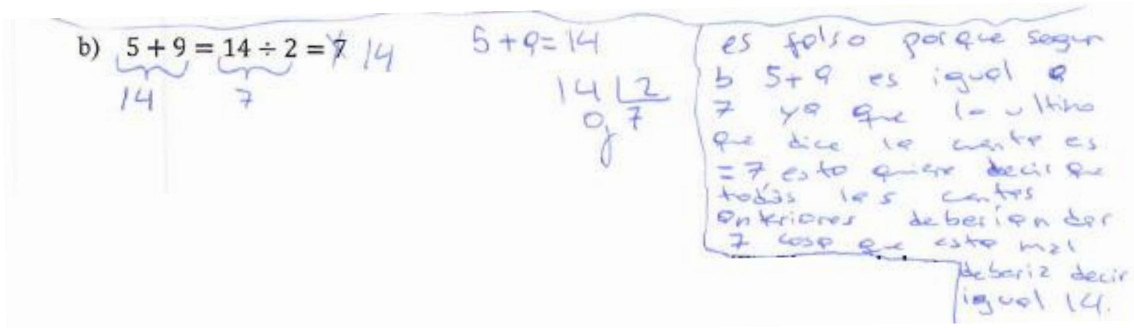
Observemos el trabajo del estudiante en esta actividad:


2) Contesta si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

a) 16 = 7 + 9 V

16 = 16

7+9=16
Es verdadera porque la suma de ~~7+9~~ 7+9 es 16 entonces como dice en "a)" 16 = 7+9


b) 5 + 9 = 14 ÷ 2 = ~~7~~ 14

14 7

5+9=14

14 | 2
0 7

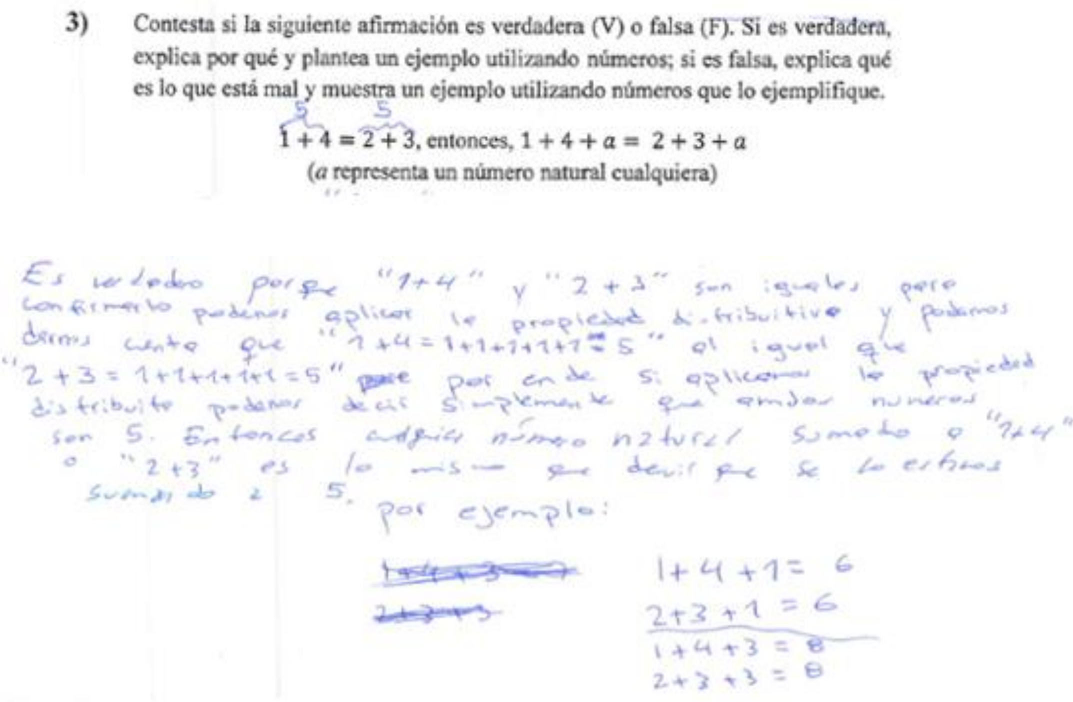
es falso porque según b 5+9 es igual a 7 ya que la última que dice la cuenta es =7 esto quiere decir que todas las cuentas anteriores deberían dar 7 cosa que esta mal
debería decir igual 14.

En la parte a), Gerónimo señala que la *igualdad* es verdadera. Cuando al justificar dice que "la suma de 7+9 es 16", el estudiante está interpretando la *igualdad* de derecha a izquierda, para indicar que el resultado de la operación 7+9 es 16. Eso da cuenta de que en este caso, está entendiendo el signo de *igual* como *expresión de una acción*, porque acepta una *igualdad* en la que, desde su perspectiva, el resultado aparece a la izquierda, y la operación a la derecha del signo de *igual*. Asimismo, cuando debajo de ella escribe 16=16, Gerónimo deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, por señalar que a cada lado se obtiene el mismo número.

En la parte b), Gerónimo señala que la expresión dada es falsa. Cuando dice "todas las cuentas anteriores deberían dar 7", el estudiante está centrando su atención en el segundo signo de *igual* que interviene en la expresión, y lo está interpretando como un *operador*, pues considera que está indicando el resultado de todas las operaciones que se ubican a su izquierda. Ahora bien, cuando luego agrega "está mal, debería decir *igual* 14", lo que Gerónimo no reconoce es que de ese modo, la afirmación no deja de ser falsa, pues el primer signo de *igual* sigue relacionando dos expresiones aritméticas que no son equivalentes: 5+9 y 14:2. Además, podría haber dicho que lo que había que eliminar es 5+9 pues 14:2 sí es igual a 7, pero lo que plantea eliminar es lo que sigue al primer signo de *igual*. Esto reafirma la idea de que está interpretando la situación como estándar en el sentido de operación *igual* respuesta. La dificultad que muestra el estudiante en esta actividad para interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica* convive con la visión *relacional* que deja entrever en respuesta a las actividades previamente analizadas.

Actividad 3

Veamos la forma en que Gerónimo resuelve esta actividad:



3) **Contesta si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa, explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique.**

$$\underbrace{1+4}_{5} = \underbrace{2+3}_{5}, \text{ entonces, } 1+4+a = 2+3+a$$

(*a* representa un número natural cualquiera)

Es verdadero porque "1+4" y "2+3" son iguales para confirmarlo podemos aplicar la propiedad distributiva y podemos darnos cuenta que "1+4=1+1+1+1+1=5" al igual que "2+3=1+1+1+1+1=5" ~~para~~ por ende si aplicamos la propiedad distributiva podemos decir simplemente que ambos numeros son 5. Entonces cualquier número natural sumado a "1+4" o "2+3" es lo mismo que decir que se lo estamos sumando a 5. por ejemplo:

~~1+4+3~~ $1+4+1=6$
~~2+3+3~~ $2+3+1=6$
$1+4+3=8$
$2+3+3=8$

El estudiante sostiene que la afirmación es verdadera. Explica su respuesta y presenta dos ejemplos acordes a la implicación planteada.

Gerónimo destina gran parte de su explicación en justificar que 1+4 y 2+3 son *igual*es, aceptando así que el signo de *igual* de 1+4=2+3 está expresando una equivalencia numérica. El estudiante deja entrever que también interpreta el signo de *igual* como *expresión de una acción*, cuando al explicar escribe las siguientes expresiones: "1 + 4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1" y "2 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1". Asimismo, cuando Gerónimo agrega que "cualquier número natural sumado a 1+4 o 2+3 es lo mismo que decir que se lo estamos sumando a 5", deja entrever que la equivalencia dada por $1 + 4 + a = 2 + 3 + a$ es cierta para cualquier valor de la variable, por lo que muestra indicios de estar interpretando ese signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*.

El estudiante propone dos ejemplos. En un caso le asigna a la variable el valor 1, mientras que en el otro le asigna el valor 3. Esto da cuenta de su percepción de a como variable. En ambos casos, observamos que Gerónimo siente la necesidad de plantear por separado el resultado que se obtiene a cada lado en la expresión $1 + 4 + a = 2 + 3 + a$, cuando se sustituye la variable por el valor correspondiente. Con esto último el estudiante muestra cierta tendencia a utilizar el signo de *igual* como un *operador*, en una situación en que ello no es imprescindible. Esto nos muestra que distintos usos del signo de *igual* conviven en un mismo estudiante y que puede utilizarlos en forma flexible de acuerdo a lo que desea expresar. Nos referimos a que aun cuando un alumno sea capaz de entender el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica* también sigue viéndolo como *operador*, es decir, la adopción de un uso en particular no desplaza el uso de los otros.

Actividad 4

Consultado sobre el nombre y el significado del símbolo =, Gerónimo responde lo siguiente.

> *"Igual".*
>
> *"Que refiere a que los dos términos que están a su derecha e izquierda son iguales, es decir, todo lo que esté a sus lados finalmente luego de hacer esas cuentas son iguales, tienen el mismo valor".*

Gerónimo señala que el símbolo presentado se llama "*Igual*" y explica el significado que ese símbolo tiene para él. Por un lado, cuando dice que "los dos términos que están a su derecha e izquierda son *igual*es", el estudiante está reconociendo la propiedad simétrica de la *igualdad*, propia de una interpretación del signo de *igual* como expresión de una equivalencia. Lejos de suponer que se lee de izquierda a derecha, para indicar el resultado de una operación, por el contrario, Gerónimo entiende que el signo de *igual* puede leerse en cualquiera de las dos direcciones, indistintamente. Por otro lado, cuando más adelante dice "luego de hacer esas cuentas son *igual*es, tienen el mismo valor", deja entrever que la equivalencia que se desprendía de su explicación inicial, es de carácter numérico, porque se refiere a "cuentas" y a "valores". Tomado lo anterior en conjunto, Gerónimo en este caso está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*.

Observemos ahora las situaciones de clase que destaca Gerónimo, en relación al uso del signo de *igual*, y las explicaciones que proporciona al respecto:

c) ¿En qué situaciones de clase has utilizado este símbolo? Ejemplifica mostrando, al menos, tres situaciones distintas.

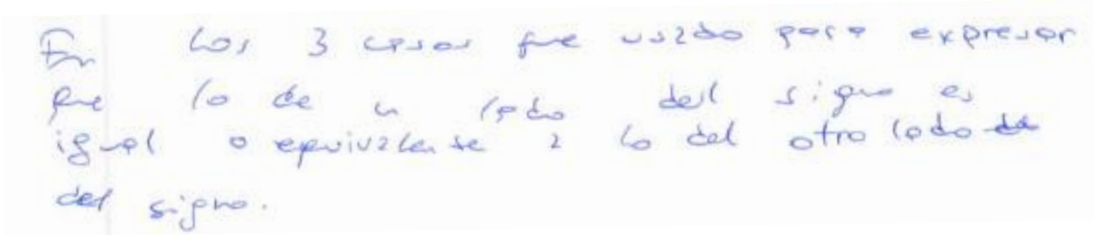
La balanza:
$3x = 9$

funciones:
$f(x) = 6x - 3$

Cuentas comunes:
$5 + 5 = 10$

d) ¿Para qué se utiliza el símbolo = en cada una de las situaciones que presentaste en la parte c?

* En la balanza para representar cuanto valen 3x en numeros naturales para así mediantes diversas cuentas poder hayar a "x" que es la incognita.
* En la funcion para explicar que la funcion correspondiente al grafico ~~f(x)~~ f(x) ~~es~~ es 6x - 3
* En los cuentas para expresar que lo de la derecha ~~es ig~~ del signo es igual a lo de la izquierda

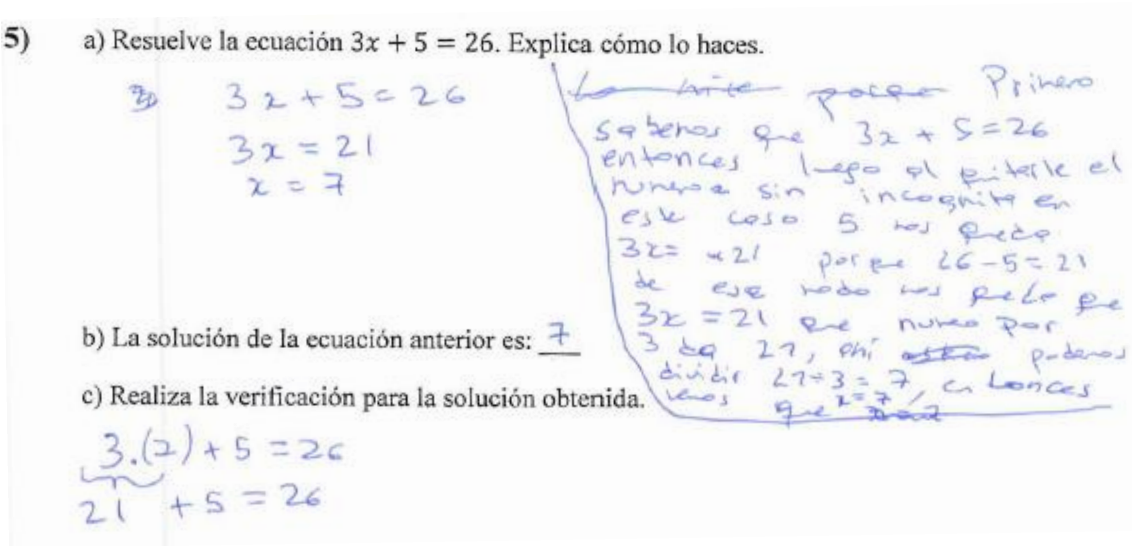

En los 3 casos fue usado para expresar que lo de un lado del signo es igual o equivalente a lo del otro lado ~~de~~ del signo.

En el primer ejemplo, Gerónimo escribe “La balanza”, en alusión a una estrategia de resolución de ecuaciones utilizada en clase. Plantea la ecuación $3x = 9$ y aclara que en ese caso, el signo de *igual* “representa cuánto valen $3x$ en números naturales, para así mediante diversas cuentas poder hallar x”. El estudiante está interpretando el signo como *expresión de una equivalencia condicional*, porque sabe que la ecuación planteada se transforma en una *igualdad* numérica para el caso en que la variable tome un valor en particular. En el segundo ejemplo, Gerónimo escribe “Funciones”, en alusión a otro de los temas trabajados en el curso. Plantea la expresión $f(x) = 6x - 3$ y aclara que en ese caso, el signo de *igual* se utiliza “para explicar que la función correspondiente al gráfico $f(x)$ es $6x - 3$”. El estudiante lo está interpretando como definición de un objeto matemático, porque lo utiliza para asignarle un nombre a una función.

En el tercer ejemplo, Gerónimo escribe “Cuentas comunes”, y plantea la expresión aritmética 5+5=10. Hasta aquí, podemos pensar que el estudiante está utilizando el signo de *igual* entendiéndolo en forma *operacional*, porque lo escribe para relacionar una operación con su resultado. Sin embargo, cuando luego explica que en ese caso, el signo de *igual* se utiliza “para expresar que lo de la derecha del signo es igual o equivalente a lo del otro lado del signo”, vemos que vuelve a interpretarlo como *expresión de una equivalencia numérica*, como hiciera al comienzo de esta actividad. Asimismo, observamos que emplea el término “equivalente” en forma explícita. Tomados los ejemplos y las explicaciones en conjunto, vemos que Gerónimo logra interpretar y usar el signo de *igual* de diversas formas, dando explicaciones claras que son acordes a los ejemplos presentados.

Actividad 5

La respuesta que proporciona Gerónimo para esta actividad es la siguiente:


5) a) Resuelve la ecuación $3x + 5 = 26$. Explica cómo lo haces.

$3x+5=26$
$3x=21$
$x=7$

~~La parte~~ porque Primero sabemos que $3x+5=26$ entonces luego al restarle el numero sin incognita en este caso 5 nos queda $3x=21$ porque $26-5=21$ de ese modo nos queda que $3x=21$ que numero por 3 da 21, ahí podemos dividir $21 \div 3 = 7$, entonces vemos que $x=7$

b) La solución de la ecuación anterior es: 7

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

$\underbrace{3.(7)}_{21}+5=26$
$21+5=26$

El estudiante resuelve la ecuación, identifica su solución y *verifica* que es la correcta. Veámoslo con más detalle.

Gerónimo resuelve la ecuación complementando sus planteos con una explicación verbal de la estrategia empleada, mostrando comprensión de lo que hizo. Señala que "$3x = 21$ porque 26 – 5 = 21" y luego agrega que x = 7, situación a la que llega luego de preguntarse "qué número por 3 da 21". El estudiante identifica que la solución es 7 y procede a realizar la *verifica*ción solicitada: $21 + 5 = 26$.

Vemos que Gerónimo en esta actividad está interpretando el signo de *igual* de la ecuación planteada como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que transforma la ecuación en una *igualdad* numérica y *verifica* que es el correcto. Además lo asocia con la solución de la ecuación.

Actividad 6

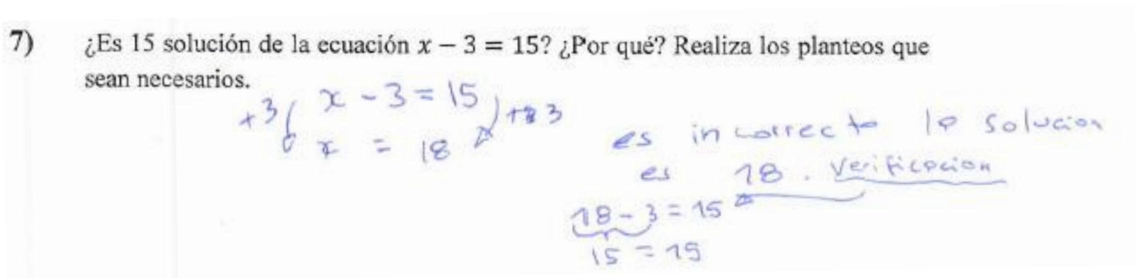
Gerónimo sostiene que en la expresión $x + 3 = 3x + 5$, el signo de *igual* tiene el siguiente significado:

"Que ambos tienen el mismo valor numérico".

Gerónimo sostiene que el signo de *igual* de la ecuación $x + 3 = 3x + 5$ indica que sus dos miembros "tienen el mismo valor numérico". El estudiante está pensando en una sustitución de la variable que transforme la ecuación en una *igualdad* numérica, o bien está suponiendo que dicha *igualdad* tiene lugar para cualquier valor de la variable. Nos inclinamos por la primera opción, atendiendo la solvencia con la que Gerónimo viene resolviendo las diferentes actividades del cuestionario, con lo cual está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. No obstante, de no ser así, lo está interpretando como *expresión de una equivalencia simbólica*. En cualquiera de los casos, el estudiante deja entrever una interpretación *relacional* del signo de *igual*, que es consistente con pensar en una ecuación, aunque no observamos que explicite la condicionalidad que caracteriza dicha equivalencia en el contexto de una ecuación.

Actividad 7

Veamos la forma en que Gerónimo resuelve esta actividad:


7) ¿Es 15 solución de la ecuación $x - 3 = 15$? ¿Por qué? Realiza los planteos que sean necesarios.

$x - 3 = 15$

$x = 18$

es incorrecto la solucion es 18. Verificacion

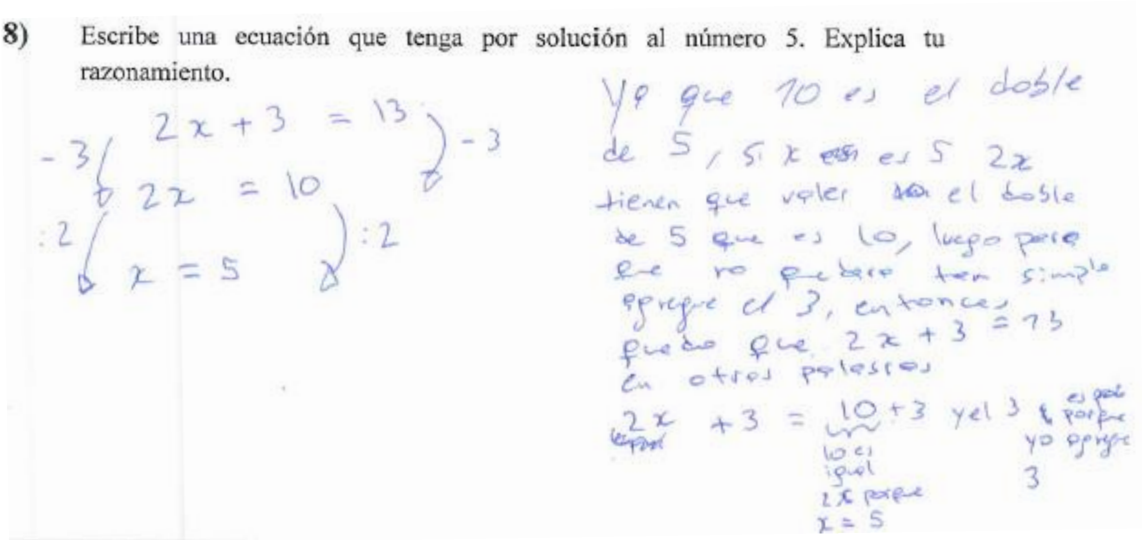
$18 - 3 = 15$

$15 = 15$

El estudiante resuelve y *verifica* la ecuación planeada. Eso lo conduce a negar que 15 sea solución de la ecuación, y a sostener que "la solución es 18". Vemos que Gerónimo no *verifica* que 15 no transforma la ecuación en una *igualdad* numérica, sino que opta por resolver la ecuación y *verificar* que para el valor obtenido es cierta dicha equivalencia. Implícitamente, el estudiante está asumiendo que este tipo de ecuaciones tienen una sola solución, lo cual es cierto, por ser ecuaciones polinómicas de primer grado. Asimismo, vemos que el estudiante no asocia solución con lado derecho de una ecuación, lo que lo hubiese conducido a responder en forma afirmativa a la pregunta planteada. Gerónimo está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, al reconocer que la equivalencia dada por la ecuación presentada no es cierta para cualquier valor de la variable, en particular para el 15.

Actividad 8

El trabajo de Gerónimo en esta actividad es el siguiente:


8) Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.

$$2x + 3 = 13 \quad -3$$
$$2x = 10 \quad :2$$
$$x = 5$$

Yo sé que 10 es el doble de 5, si x es 5 2x tienen que valer el doble de 5 que es 10, luego para que no quedara tan simple agregué el 3, entonces quedó que 2x + 3 = 13 en otras palabras
2x + 3 = 10 + 3 y el 3 es igual porque yo agregué 3
10 es igual 2x porque x = 5

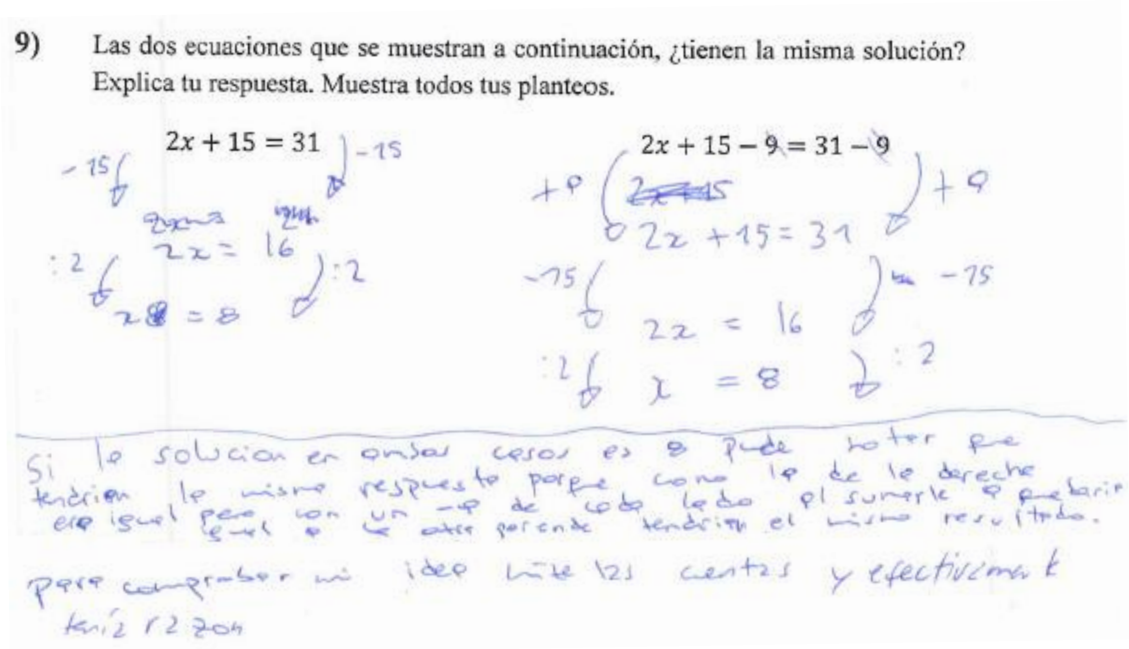
Gerónimo escribe la ecuación $2x + 3 = 13$ y la resuelve para mostrar que tiene la solución solicitada. Por un lado, vemos que en la ecuación que escribe el estudiante la variable aparece solo del lado izquierdo, y su coeficiente es dos, no uno como sucediera con la mayoría de las ecuaciones escritas por otros estudiantes en esta actividad. Por otro lado, observamos que al resolver dicha ecuación Gerónimo cambia de estrategia en comparación con la actividad 5, pasando a utilizar el "principio de la balanza", indicando además la operación aplicada en cada caso.

Gerónimo explica de qué modo obtuvo la ecuación solicitada. Por un lado, cuando dice "si x es 5, $2x$ tiene que valer 10", el estudiante entiende desde un principio que la equivalencia dada por la ecuación que escriba, debe ser cierta para el caso en que la variable tome el valor 5. Por otro lado, cuando al continuar con su explicación dice "para que no quedara tan simple agregué el 3", "$2x + 3 = 10 + 3$", observamos que en forma implícita el estudiante reconoce que al sumar un mismo número a ambos miembros de una ecuación, se obtiene otra equivalente. De este modo, Gerónimo hace uso de una propiedad equivalente a la definición de ecuaciones equivalentes, utilizando la igualdad como herramienta para dar respuesta a la actividad propuesta.

Las consideraciones anteriores nos permiten sostener que en este caso, claramente, Gerónimo está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque obtiene una ecuación que se *verifica* para el caso específico en que la variable valga 5, que era lo solicitado en esta actividad.

Actividad 9

Observemos el trabajo realizado por Gerónimo al resolver esta actividad:


9) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$2x + 15 = 31$ (−15)

$2x = 16$ (:2)

$x = 8$

$2x + 15 - 9 = 31 - 9$ (+9)

$2x + 15 = 31$ (−15)

$2x = 16$ (:2)

$x = 8$

Si la solución en ambas casos es 8 puede notar que tendrían la misma respuesta porque como la de la derecha era igual pero con un −9 de cada lado al sumarle 9 quedaría igual a la otra por ende tendrían el mismo resultado.

para comprobar mi idea hice las cuentas y efectivamente

El estudiante resuelve las dos ecuaciones del mismo modo en que resolviera la ecuación escrita en la actividad 8: empleando el "principio de la balanza", e indicando la operación aplicada a los dos miembros, en cada caso. Sus planteos dan cuenta de que tiene cierto dominio de la estrategia algebraica de resolución que está aplicando. Cuando al responder dice que "la solución en ambos casos es 8", Gerónimo asocia el valor obtenido en cada resolución con la solución de la ecuación correspondiente. Eso lo conduce a responder en forma afirmativa a la pregunta planteada.

Gerónimo no se conforma con la respuesta dada hasta ese momento. Agrega que "la de la derecha era *igual* pero con un -9 de cada lado", y que "al sumarle 9 quedaría *igual* a la otra". De ese modo, está reconociendo que al aplicar la misma operación a ambos miembros de la ecuación $2x + 15 = 31$, se obtiene la ecuación $2x + 15 - 9 = 31 - 9$, y que por ende, al aplicar la operación inversa en esta última, se vuelve a obtener aquella. Observemos que al resolver la ecuación $2x + 15 - 9 = 31 - 9$, el estudiante naturalmente suma 9 de cada lado, como parte de la estrategia de resolución que habitualmente utiliza, y eso lo conduce a obtener $2x + 15 = 31$, que coincide con la otra ecuación que se presenta en esta actividad.

Al margen de que el estudiante necesita resolver las dos ecuaciones para complementar su explicación verbal, cosa que además admite: "para comprobar mi idea hice las cuentas y efectivamente tenía razón", su respuesta a esta actividad da cuenta de que vuelve a interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional,* al reconocer que ambas ecuaciones se transforman en una *igualdad* numérica para el mismo valor de la variable.

Actividad 10

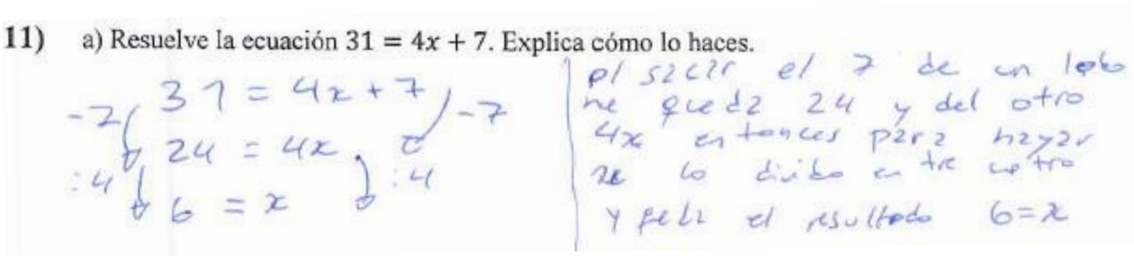
Consultado sobre la posibilidad de que 9 sea solución de la ecuación $x + 18 + 11 = 27 + 11$, sabiendo que lo es de la ecuación $x + 18 = 27$, Gerónimo escribe la siguiente respuesta:

> *"Si, porque ambas son iguales a las anteriores pero con un +11 de cada lado. Al agregar el mismo valor a cada lado de la "balanza", la misma sigue estabilizada. Al agregar el mismo valor, tal vez la ecuación tenga un paso más pero la solución será la misma".*

Gerónimo responde afirmativamente, y explica su respuesta. Cuando dice que "al agregar el mismo valor a cada lado de la balanza, la misma sigue estabilizada", el estudiante está asociando cada ecuación con una "balanza" imaginaria, cuyo contenido de sus platillos está representando a cada uno de sus miembros. Vemos que ese modelo utilizado en clase, para dotar de sentido a la estrategia de resolución empleada, está contribuyendo para que en este caso el estudiante reconozca la equivalencia de las ecuaciones presentadas. Por otro lado, cuando dice que "Al agregar el mismo valor, tal vez la ecuación tenga un paso más, pero la solución será la misma", entiende que ambas ecuaciones se *verifica*n para el mismo valor de la variable. Una vez más, Gerónimo está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. Lo hace valiéndose de una propiedad que le permite obtener una ecuación equivalente, la cual se apoya en la igualdad como herramienta para dar respuesta a la actividad planteada. Consideraciones similares realizábamos al analizar la respuesta dada por Gerónimo a la actividad 8 de este cuestionario.

Actividad 11

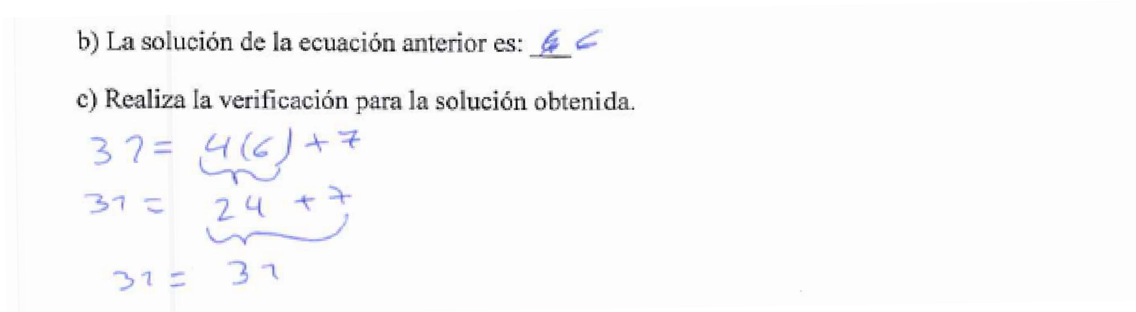
Veamos la respuesta presentada por el estudiante para esta actividad:



11) a) Resuelve la ecuación $31 = 4x + 7$. Explica cómo lo haces.

$$31 = 4x + 7 \quad -7$$
$$24 = 4x \quad :4$$
$$6 = x$$

p/ sacar el 7 de un lado me queda 24 y del otro 4x entonces para hayar x lo divido entre cuatro y me da el resultado 6=x



b) La solución de la ecuación anterior es: 6

c) Realiza la verificación para la solución obtenida.

$$31 = 4(6) + 7$$
$$31 = 24 + 7$$
$$31 = 31$$

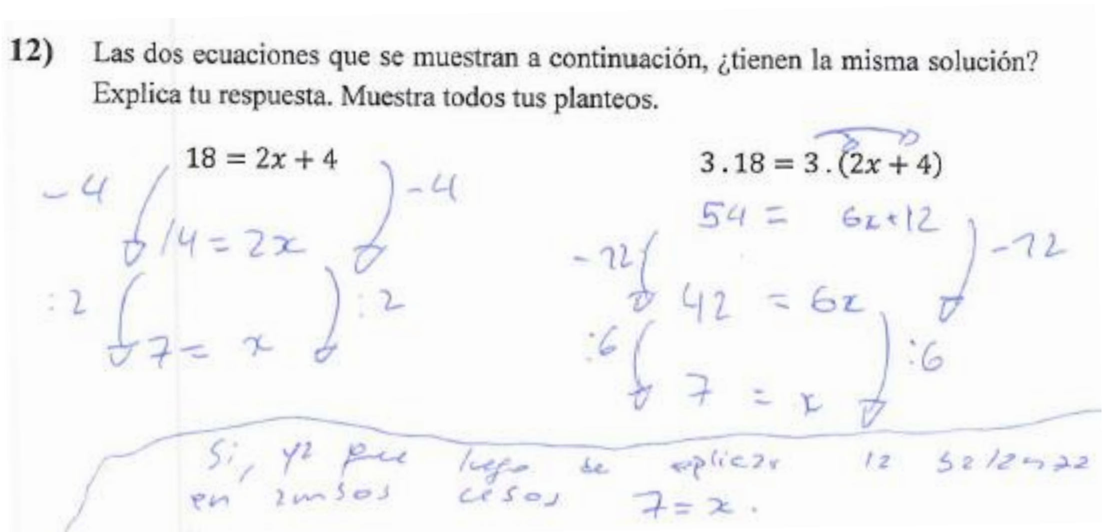
El estudiante resuelve la ecuación, identifica su solución y *verifica* que es la correcta. Veámoslo con más detalle.

Gerónimo resuelve la ecuación en forma análoga a como resuelve las ecuaciones de la actividad 9, esto es, aplicando el "principio de la balanza" e indicando la operación aplicada a ambos miembros, en cada caso: resta siete y divide entre cuatro. Complementa sus planteos con una explicación verbal de la estrategia empleada, mostrando comprensión de lo que hizo: "al sacar el 7 de un lado me queda 24 y del otro $4x$, entonces para hallar x lo divido entre 4". El estudiante identifica que la solución es 6 y procede a realizar la *verifica*ción solicitada, con la cual comprueba que la solución obtenida transforma la ecuación en una *igualdad* numérica: 31=31.

Observamos que Gerónimo no siente la necesidad de invertir los miembros de lugar respecto al signo de *igual*, tanto al resolver como al *verificar* la ecuación con la solución obtenida. Por otra parte, está interpretando el signo de *igual* de la ecuación planteada como *expresión de una equivalencia condicional*, porque encuentra el valor de la variable que hace cierta la equivalencia dada por la ecuación y *verifica* que es el correcto. Además lo asocia con su solución.

Actividad 12

Observemos el trabajo realizado por Gerónimo al resolver esta actividad:



12) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$18 = 2x + 4$ $\quad -4$

$14 = 2x$ $\quad :2$

$7 = x$

$3 . 18 = 3 . (2x + 4)$

$54 = 6x + 12$ $\quad -12$

$42 = 6x$ $\quad :6$

$7 = x$

Si, ya que luego de aplicar la ... en ambos casos $7 = x$.

El estudiante resuelve las dos ecuaciones empleando el "principio de la balanza", indicando la operación aplicada a ambos miembros en cada caso. Los planteos del estudiante ponen de manifiesto que domina la estrategia algebraica de resolución que está utilizando. Al igual que en la actividad 11, Gerónimo no necesita invertir los miembros de lugar respecto al signo de *igual*, mientras resuelve cada ecuación. Cuando al explicar dice que "luego de aplicar la balanza en ambos casos $7 = x$", Gerónimo explicita la estrategia de resolución empleada, y asocia el valor obtenido en cada resolución con la solución de la ecuación correspondiente. Eso lo conduce a responder en forma afirmativa a la pregunta planteada.

En este caso, a diferencia de la actividad 9, Gerónimo no señala que al aplicar la misma operación a ambos miembros de la ecuación $18 = 2x + 4$ se obtiene la ecuación $3.18 = 3.(2x + 4)$. Eso hace que posteriormente no reconozca que al aplicar la operación inversa en esta última, se vuelve a obtener aquella, y que debido a eso, ambas tienen la misma solución. Esto puede deberse a que, cuando el estudiante se dispone a resolver la ecuación $3.18 = 3.(2x + 4)$, no le resulta natural comenzar por dividir ambos miembros entre 3, lo que le hubiese permitido obtener $18 = 2x + 4$, que es la otra ecuación que interviene en esta actividad.

De cualquier manera, lo anterior no quita que Gerónimo en esta actividad vuelva a interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional,* al reconocer que las dos ecuaciones tienen la misma solución. Gerónimo entiende que ambas ecuaciones se transforman en una *igualdad* numérica para el mismo valor de la variable.

Actividad 13

Consultado sobre la posibilidad de que 8 sea solución de la ecuación $2x + 1 = 17$, sabiendo que lo es de la ecuación $17 = 2x + 1$, Gerónimo presenta la siguiente respuesta:

> *"Si, ya que el único cambio es cuál de los dos números o grupo de números está a la izquierda y cuál a la derecha, por lo que no hay ningún cambio. El igual explica que lo que esté a sus lados vale numéricamente lo mismo y por ende es correcto, sin importar cuál esté a la derecha y cuál a la izquierda".*

Gerónimo responde en forma afirmativa. Cuando al justificar dice que "el único cambio es cuál de los dos números o grupo de números está a la izquierda y cuál a la derecha", el estudiante da cuenta de que acepta la propiedad simétrica del signo de *igual*. Hasta aquí, afirmamos que el estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, porque desde su perspectiva, la ubicación de los miembros de una ecuación respecto al signo de *igual* no afecta su solución. Al igual que la mayoría de los estudiantes cuya respuesta a esta actividad hemos analizado previamente, Gerónimo aplica implícitamente una propiedad equivalente a la definición de ecuaciones equivalentes que le permite dar con la respuesta de esta actividad.

Ahora bien, cuando más adelante agrega que el signo de *igual* "explica que lo que esté a sus lados vale numéricamente lo mismo y por ende es correcto", Gerónimo no aclara que lo está diciendo para el caso particular en que la variable valga 8. Si se trata de una simple omisión, el estudiante sigue interpretando el signo de *igual* en el mismo sentido que señalábamos antes. De lo contario, deja entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, por asumir que a cada lado del signo de *igual* se obtiene el mismo valor numérico, sea cual sea el valor de la variable, que no es el caso de la actividad propuesta.

Actividad 14

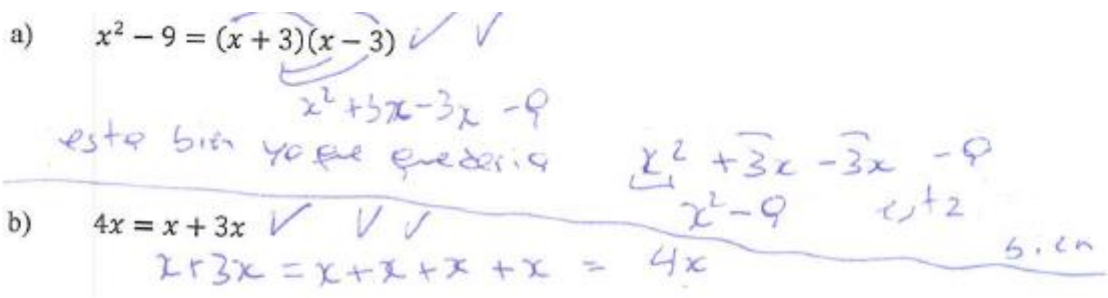
Consultado sobre la posibilidad de que Juan haya terminado la tarea de reducir términos semejantes, al escribir en su cuaderno $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$, Gerónimo escribe la siguiente respuesta:

> *"Creo que está en lo correcto ya que además de reducirlos bien, están perfectamente ordenados de mayor exponente a menor exponente".*

Por un lado, cuando Gerónimo dice que "está en lo correcto", en alusión a la tarea que realizó Juan, está aceptando que al simplificar un polinomio que se encuentra a la izquierda del signo de *igual*, se obtenga otro con más de un término, a la derecha del signo de *igual*. Esto es coherente, por ejemplo, con la visión *relacional* que caracteriza sus respuestas en contexto aritmético, donde acepta expresiones aritméticas con más de un término a cada lado del signo de *igual*. Por otro lado, cuando al justificar dice que “están perfectamente ordenados de mayor exponente a menor exponente”, en alusión a la forma en que Juan planteó el polinomio reducido que le solicitaban, Gerónimo deja entrever que frente al pedido de simplificar un polinomio, ello implica ordenarlo al mismo tiempo. No encontramos mayores evidencias que nos permitan determinar de qué modo el estudiante en esta actividad, está interpretando el signo de *igual*, si no es en su carácter de *operador*.

Actividad 15

Veamos la forma en que Gerónimo analiza la validez de las siguientes afirmaciones.


a) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ ✓ √

$x^2+3x-3x-9$

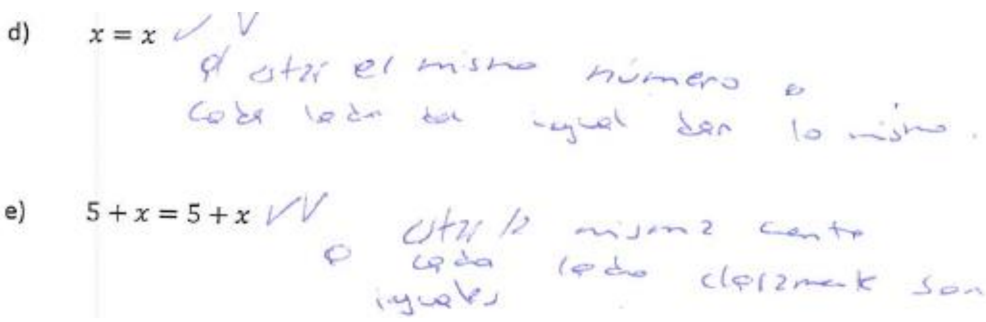
esta bien ya que quedaria $x^2+3x-3x-9$

x^2-9

b) $4x = x + 3x$ ✓ √ ✓

$x+3x = x+x+x+x = 4x$

Gerónimo sostiene que las dos afirmaciones son verdaderas. En la parte a), cuando dice que “está bien ya que quedaría $x^2 + 3x - 3x - 9$”, y abajo escribe $x^2 - 9$, deja entrever que el resultado de la operación $(x+3)(x-3)$ es $x^2 - 9$. En la parte b), mientras tanto, cuando escribe “$x + 3x = x + x + x + x = 4x$”, lo hace para señalar que el resultado de la operación $x + 3x$ es $4x$. Desde la perspectiva del estudiante, las expresiones que aparecen a la derecha del signo de *igual* plantean una operación, mientras que las expresiones de la izquierda son entendidas como los resultados de las mismas. Por ese motivo, en ambos casos está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una acción*. En particular, observamos que al realizar la operación $x + 3x$, Gerónimo empieza escribiendo “$x + 3x = x + x + x + x$”, donde utiliza el signo de *igual* en el mismo sentido en que lo acabamos de señalar. Él procedió del mismo modo en la actividad 3 para justificar que 1+4 y 2+3 son equivalentes, escribiendo que “1+4=1+1+1+1+1” y que “2+3=1+1+1+1+1”.


d) $x = x$ V
a está el mismo número a cada lado del igual son lo mismo.

e) $5 + x = 5 + x$ V
está la misma cuenta a cada lado claramente son iguales

Gerónimo sostiene que las dos afirmaciones son verdaderas. En la parte d), cuando dice que está “el mismo número a cada lado del *igual*”, vemos que el estudiante asocia las dos x que intervienen en la expresión con un mismo número, asumiendo con acierto que la variable toma un solo valor por vez. Esto es coherente con los dos ejemplos que él proporciona en la actividad 3, donde la variable toma primero el valor uno y después el valor tres, cada vez que aparece en la implicación planteada. En la parte e), mientras tanto, cuando dice que está “la misma cuenta a cada lado”, vemos que interpreta la expresión $5 + x$ como una operación, tanto la que se encuentra a la izquierda como a la derecha del signo de *igual*, siendo eso es lo que le permite aceptar la afirmación planteada.

En ambos casos, el estudiante está interpretando el signo de *igual* como expresión de una *identidad estricta*, porque reconoce que a cada lado del signo de *igual* se encuentra el mismo representante del mismo objeto matemático. Esto se fundamenta principalmente en el uso de la frase “la misma cuenta a cada lado”. Asimismo, Gerónimo también puede estar interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, si en verdad asume que en estas afirmaciones se obtiene el mismo valor numérico a cada lado del signo de *igual*, para cualquier valor de la variable. De ser así, acude a distintos usos del signo de *igual* para dar respuesta a la situación planteada, como hiciera por ejemplo en la actividad 1, dejando de manifiesto que el pasaje por los distintos usos fortalece el entendimiento de cada uno de ellos.

c) $\overbrace{3x^2 + 4x^2}^{7x^2} = \overbrace{2x^2 + 5x^2}^{7x^2}$ ✓ ✓

ya que las sumas de ambos lados del "=" dan $7x^2$.

f) $\overbrace{7x + 2x}^{9x} = \overbrace{9x}^{9x}$ ✓ ✓

Ambos lados dan $9x$ por ende son iguales

El estudiante acepta la validez de las dos afirmaciones. Cuando al justificar dice que "las sumas de ambos lados del = dan $7x^2$", en alusión a la parte c), y que "ambos lados dan $9x$", en alusión a la parte f), Gerónimo está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, porque hace alusión al resultado que se obtiene a cada lado del signo de *igual*, que por cierto es el mismo en cada caso. Esto último, para cualquier valor de la variable, desde el momento en que no sostiene lo contrario. Vemos que en este caso, pese a la presencia de un polinomio con un solo término a la derecha del signo de *igual* (parte f), Gerónimo interpreta el signo de *igual* en el sentido señalado, de igual forma que al enfrentarse a una expresión con más de un término a cada lado del signo de *igual* (parte c).

El estudiante también está interpretando el signo de *igual* como expresión de una *identidad estricta*, dado que en la parte c) pasa por la expresión $9x = 9x$ y en la parte f) pasa por la expresión $7x^2 = 7x^2$. Es decir, para resolver ambas situaciones opera con el polinomio que se encuentra a cada lado del signo de *igual*, en busca de una misma expresión a cada lado. De ser así, al igual que en las partes d) y e), Gerónimo acude a distintos usos del signo de *igual* para dar respuesta a las situaciones planteadas, dejando al descubierto que el pasaje por los distintos usos fortalece el entendimiento de cada uno de ellos.

Actividad 16

Observemos la respuesta que presenta el estudiante para esta actividad:

16) La profesora escribe en el pizarrón que si reducimos monomios semejantes en la expresión $x + x + 5 + 7$ obtenemos $2x + 12$. Es decir que:

$$x + x + 5 + 7 = 2x + 12$$

Luego solicita a los alumnos que indiquen si lo escrito en cada renglón es Verdadero (V) o Falso (F). En caso de ser verdadero, les pide que expliquen por qué, y en caso de ser falso, les pide que indiquen qué es lo que está mal.

Te pedimos que resuelvas la tarea que la profesora les planteó a sus alumnos.

a) $-5(x + x + 5 + 7) = -5(2x + 12)$ $\quad -10x + -60$

$-5x + -5x + -25 + -35$

$-10x + -60 = -10x + -60$ V son Es correcto

Son iguales ya que el término fue multiplicado por el mismo número cambiaron su valor pero siguen siendo equivalentes

b) $2x + 12 = x + x + 5 + 7$

$= 2x \quad 12$ V

Es correcto es lo que propuso la profesora luego de sumar dio igual.

c) $x + x + 5 + 7 - 4 = 2x + 12 - 6$ F

$2x + 12 - 4 = 2x + 12 - 6$

$2x + 8 = 2x + 6$

Son diferentes porque como antes eran iguales como el de la derecha se le restó 4 mientras que el de la izquierda 6 serán diferentes.

Gerónimo sostiene que las afirmaciones a) y b) son verdaderas, mientras que la afirmación c) es falsa. En los tres casos, el estudiante emplea un razonamiento similar, por eso los analizamos en forma conjunta.

Por un lado, realiza operaciones hasta obtener un polinomio ordenado y reducido a cada lado del signo de *igual*, y con ello decide si las equivalencias dadas son ciertas o no: "$-10x-60=-10x-60$" (parte a), "$2x+12=2x+12$" (parte b), y "$2x+8=2x+6$" (parte c).

Por otro lado, presenta una explicación verbal que complementa los cálculos realizados en cada caso. Para ello, toma como referencia la equivalencia dada inicialmente: $x+x+5+7=2x+12$. Cuando se aplica la misma operación a cada lado, o se intercambian los polinomios de lugar respecto al signo de *igual*, Gerónimo reconoce que la equivalencia se mantiene, de lo contrario no. Este modo de proceder de parte del estudiante, además de dar cuenta de una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, es coherente con lo realizado en la actividad 9, pues reconoce la equivalencia realizando cálculos y complementando su respuesta con una explicación verbal similar a la anterior. No así con la actividad 12, donde se limita a realizar cálculos.

Observamos también que, al igual que en algunas partes de la actividad 15, Gerónimo pone en juego otra interpretación del signo de *igual*, esto es, como expresión de una *identidad estricta*. Lo anterior se fundamenta en que, para dar respuesta a cada situación, el estudiante siente la necesidad de obtener el mismo polinomio a cada lado del signo de *igual*, es decir, el mismo representante del mismo objeto matemático.

Síntesis:

En contexto aritmético, el estudiante interpreta el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica*, cuando completa ciertas afirmaciones de modo tal que relacione dos expresiones diferentes del mismo número (actividad 1); y como expresión de una acción cuando acepta la validez de una afirmación en la que, desde su perspectiva, la operación aparece a la derecha y el resultado a la izquierda del signo de *igual* (actividad 2a). El estudiante también deja entrever una visión *operacional* del signo de *igual*, contrariamente a lo mostrado más arriba, cuando al justificar la falsedad de otra afirmación, propone una corrección que no refleja una interpretación del signo de *igual* en un sentido *relacional* (actividad 2b).

En contexto de ecuaciones, para Gerónimo el signo de *igual* señala "que ambos tienen el mismo valor numérico", en alusión a los dos miembros que conforman una ecuación (actividad 6). El estudiante deja entrever una interpretación *relacional* del signo de *igual*, entendiéndolo como expresión de una equivalencia, aunque no observamos que explicite la condicionalidad que caracteriza dicha equivalencia en el contexto de una ecuación.

El estudiante resuelve y *verifica* cada ecuación, identificando adecuadamente sus respectivas soluciones (por ejemplo, actividades 5 y 11). En general, utiliza el "principio de la balanza", indicando la operación aplicada a ambos miembros, en cada caso. Si la variable de la ecuación aparece solo del lado derecho, no siente la necesidad ni de invertir los miembros de lugar respecto al signo de *igual*, ni de cambiar una estrategia de resolución por otra (actividades 11 y 12), mostrando un dominio de la estrategia de resolución empleada.

Gerónimo no señala que al multiplicar el mismo número a ambos miembros de una ecuación, se obtiene otra con la misma solución (actividad 12), limitándose a resolver ambas ecuaciones y comparar las soluciones obtenidas. No así cuando la operación realizada es una suma o una resta (actividades 9 y 10), aunque si la consigna lo permite, también en estos casos incluye en su respuesta la resolución de ambas ecuaciones y la comparación de las soluciones obtenidas (actividad 9). Asimismo, el estudiante explicita que al realizar la misma operación en dos polinomios que se saben equivalentes (actividad 16a), se mantiene la equivalencia, aunque al igual que antes complementa su respuesta realizando cálculos, esta vez simplificando términos semejantes y comparando las expresiones así obtenidas en busca de una *identidad estricta*. El estudiante hace mención explícita a "la balanza" en varias de sus respuestas, dejando entrever que dicho modelo favorece la comprensión de la estrategia de resolución empleada en ciertos casos.

Cuando se intercambian de lugar los miembros de una ecuación, respecto al signo de *igual* (actividad 13), o se invierten de lugar dos polinomios que se saben equivalentes (actividad 16b), el estudiante alude a la propiedad simétrica del signo de *igual* para justificar que las dos ecuaciones tienen la misma solución, y que los polinomios así obtenidos también son equivalentes. Sin embargo, complementa sus respuestas con cálculos cuando la consigna lo permite (actividad 16b).

En contexto de polinomios, el trabajo de Gerónimo se caracteriza por interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, excepto cuando la afirmación incluye un polinomio reducido a la izquierda del signo de *igual*, caso en el que suele interpretarlo, aunque no siempre, como *expresión de una acción* (actividades 15a y 15b). En general el estudiante realiza las simplificaciones que correspondan para luego comparar los polinomios obtenidos a cada lado del signo de *igual*. En otras palabras, resuelve las situaciones indagando si hay presencia de una *identidad estricta*. Esto deja al descubierto que acude a distintos usos del signo de *igual* en forma simultánea con el objetivo de dar respuesta a una situación problemática.

5.3 Análisis global

Los estudiantes fueron consultados sobre el significado que tenía para ellos el signo de *igual* (actividad 4b). Un poco más de la mitad de las respuestas dejaron entrever una interpretación *relacional*, como en los casos de Gerónimo y Mateo. Mientras tanto, un tercio de las respuestas dejó al descubierto una interpretación *operacional*, ya sea en forma exclusiva, como en los casos de Miguel y Sebastián, o combinada con una interpretación *relacional*, como en el caso de Rocío.

En contexto aritmético, se plantearon dos igualdades numéricas para completar (actividad 1) y dos igualdades numéricas para analizar (actividad 2). En ellas, era necesario interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia numérica* o como *expresión de una acción*. Uno de cada tres estudiantes presentó al menos una respuesta que no fue consistente con estas interpretaciones, ya sea porque en su lugar lo interpretó como un *operador* o como *propuesta de actividad*. Rocío, Miguel y Sebastián fueron ejemplos de esto último.

Observamos que una proporción importante de estudiantes, aun habiendo incursionado en el estudio del álgebra, muestra indicios de estar interpretando el signo de *igual* en su carácter de *operador*. Asimismo, pudimos constatar, en los casos que analizamos, que si los alumnos manifiestan una visión *operacional* del signo de *igual* cuando explican el significado que tiene para ellos este signo (actividad 4b), son más propensos a interpretarlo de ese modo cuando se enfrentan a una igualdad numérica para completar o a una igualdad para analizar (actividades 1 y 2).

Los alumnos también fueron consultados sobre el significado que tenía para ellos el signo de *igual*, pero en el contexto de una ecuación específica: $x + 3 = 3x + 5$. La mayoría de las respuestas dejaron entrever una interpretación *relacional* del signo de *igual* que fue consistente con pensar en una ecuación, aunque en general no explicitaron que la equivalencia era cierta, en ese caso, para un solo valor de la variable. Durante las entrevistas realizadas, exceptuando la de Sebastián, quien no logró apartarse de una visión *operacional*, cobró fuerza la idea de que estaban interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. Esto último, porque Miguel encontró la raíz de una ecuación, y Rocío comparó valores numéricos a ambos miembros, que es consistente con esa interpretación.

Cuando se plantearon ecuaciones para resolver, verificar e indicar su solución (actividades 5 y 11), la mayoría de los estudiantes encontraron el valor de la variable que transformaba cada ecuación en una *igualdad* numérica, y lo asociaron con su solución. Un tercio de los estudiantes, al igual que Gerónimo, aplicó lo que en clase denominábamos el "principio de la balanza", mientras que, otra proporción igual de estudiantes, como Miguel, prefirió aplicar lo que en clase llamábamos la "técnica de la tapadita". El resto de los estudiantes, entre ellos Mateo, aplicaron en forma alternada estas u otras estrategias para resolver una o ambas ecuaciones.

Pudimos observar que, si la variable de la ecuación aparecía solo del lado derecho de la igualdad (actividad 11), dos de cada cinco de los estudiantes participantes, como es el caso de Rocío, invirtieron los miembros de lugar respecto al signo de *igual*, tanto al resolver como al verificar dicha ecuación. Esto pudo deberse a la práctica habitual de resolver ecuaciones con la variable del lado izquierdo, o a la necesidad de visualizar un solo número a la derecha de la igualdad, que es consistente con una visión *operacional* del signo de *igual*. Asimismo, también constatamos que en lugar de verificar, algunos estudiantes volvieron a resolver cada ecuación, en el mismo sentido en que lo plantean otros investigadores (Kieran, 1989; Sessa et al., 1995; Ochoviet y Oktaç, 2009). Fueron los casos de Rocío y Miguel. No obstante, Miguel verificó la ecuación luego de resolverla por segunda vez.

Cuando se les preguntó a los estudiantes si la ecuación $x - 3 = 15$ tenía solución 15 (actividad 7), uno de cada cinco de los estudiantes del grupo, respondió en forma afirmativa, así como cuando se les solicitó que escribieran una ecuación con solución 5 (actividad 8), uno de cada cuatro presentó una ecuación del tipo $ax + b = 5$. Estas respuestas, entre ellas las de Rocío y Mateo, dejaron al descubierto que algunos estudiantes asocian el concepto solución de una ecuación con el segundo miembro de la ecuación, siendo este un fenómeno ya estudiado por otros investigadores (Papaieronymou, 2007; Sessa et al., 1995). Habitualmente, esta asociación entre solución y lado derecho estuvo acompañada de una interpretación del segundo miembro como "resultado de la ecuación". De todas maneras, otros estudiantes que no asociaron lado derecho con solución, y que por ende trabajaron con acierto en las actividades 7 y 8, interpretaron el segundo miembro de ese modo al resolver estas u otras actividades del cuestionario.

En general, la asociación entre solución y lado derecho no implicó que los estudiantes perdieran de vista la equivalencia condicional dada por el signo de *igual* en una ecuación. Simplemente, las dos ideas que tenían respecto a la solución de una ecuación (como raíz y como segundo miembro de la ecuación), unida a una visión *operacional* del signo de *igual*, hizo que trabajaran de un modo u otro. Asimismo, tanto Rocío en la actividad 8 como Mateo en la actividad 12 fueron capaces de congeniar ambas ideas en una misma respuesta, siendo esto un ejemplo de lo que Vinner (1990) denomina *pensamiento inconsistente*.

Cuando se presentan dos ecuaciones equivalentes, porque se aplicó la misma operación a ambos miembros de una de ellas para obtener la otra (actividades 9, 10 y 12), todos los estudiantes sintieron la necesidad de resolver (cuando se les permitía) o de *verificar* las ecuaciones para comprobar que ambas tenían la misma solución. Sin embargo, un tercio de las respuestas presentadas en la actividad 9, por ejemplo, incluyó una explicación verbal referida a la operación que transformaba una ecuación en la otra, como es el caso de Miguel y Gerónimo. Estas respuestas, en su mayoría provenían de estudiantes que, consultados sobre el significado del signo de *igual*, habían mostrado una interpretación *relacional*. Como lo señala Knuth et. al (2006), observamos que la comprensión del signo de *igual* está ligada a las estrategias que desarrollan los estudiantes cuando resuelven tareas relacionadas con ecuaciones equivalentes.

Asimismo, cuando se presentaron dos ecuaciones equivalentes, porque se intercambiaron los miembros de lugar respecto al signo de *igual* (actividad 13), la mayoría de los estudiantes sostuvo que las dos ecuaciones tenían la misma solución, debido a ese motivo. En vez de *verificar* que ambas ecuaciones tenían la misma solución, que sería consistente con pensar en la definición de ecuaciones equivalentes, los estudiantes optaron por aplicar en forma implícita una propiedad equivalente a esa definición: "si se invierten de lugar los miembros de una ecuación respecto al signo de *igual*, entonces, se obtiene una ecuación equivalente a ella". Es lo que Vergnaud (1996) denomina utilizar teoremas en acto.

Tanto en contexto de ecuaciones como en contexto de polinomios, encontramos que algunos estudiantes admitieron la posibilidad de que la variable tomara más de un valor por vez en una misma expresión, lo que se conoce como doble asignación de la variable (Vaiyavutjamai y Clements, 2006; Fujii, 2003). Eso es lo que le impidió a Rocío, por ejemplo, aceptar expresiones como "$1 + 4 + a = 2 + 3 + a$" (actividad 3) y "$x = x$" (actividad 15d). En estos casos, el problema no fue con la interpretación del signo de *igual*, sino más bien con el concepto de variable que tenían los estudiantes. El principio aristotélico de la *igualdad* no resultó evidente para estos alumnos, y eso influyó en la interpretación de ciertas expresiones que estaban ligadas al signo de *igual*.

En contexto de polinomios, encontramos que algunos estudiantes como Gerónimo, en casi todos los casos simplificaron la expresión algebraica que se encontraba a cada lado del signo de *igual* y compararon las expresiones así obtenidas (actividades 15 y 16). Ellos operaron en busca de una *identidad estricta* que les permitiera aceptar la afirmación planteada, dejando al descubierto una interpretación del signo de *igual* en ese sentido. Al mismo tiempo, si bien no estuvo presente en sus pensamientos que la equivalencia dada era cierta para todos los valores de la variable, que sería propio de una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, en clase lo usaron en este sentido aunque no haya sido explícito, por lo cual también hubo una adopción implícita de este significado en los estudiantes.

Otros estudiantes, en este mismo contexto dejaron entrever una interpretación *operacional* o *relacional* del signo de *igual*, dependiendo de cada actividad. Por ejemplo, la presencia de un solo término a la derecha del signo de *igual* (actividad 15f), condujo a algunos a interpretar el signo de *igual* como un *operador*, mientras que la presencia de varios términos a cada lado (actividades 15c y 16c), los condujo a interpretarlo como *expresión de una equivalencia simbólica*. Cuando las expresiones presentadas incluyeron un polinomio reducido a la izquierda del signo de *igual* (actividades 15b y 16b), los estudiantes también interpretaron el signo de *igual* como *expresión de una acción*, porque al igual que en contexto aritmético, aceptaron expresiones que desde su perspectiva, planteaban una operaciones a la derecha y su resultado a la izquierda del signo de *igual*.

A diferencia de lo encontrado en contexto de ecuaciones, aquí los estudiantes pocas veces señalaron que al multiplicar dos expresiones equivalentes por un mismo número (actividad 16a), o al invertirlas de lugar respecto al signo de *igual* (actividad 16b), continuaban siendo equivalentes. Por el contrario, prefirieron realizar cálculos para arribar a una respuesta, dejando de manifiesto uno o más significados del signo de *igual*, como señalamos en los párrafos anteriores.

CAPÍTULO 6

Análisis del desarrollo de las sesiones de trabajo

En este capítulo presentamos evidencias que pudimos recoger al desarrollar dos sesiones de trabajo con el grupo de estudiantes, y las analizamos a la luz del marco teórico adoptado (Molina, 2006; Molina et al., 2009; Burgell, 2012). De este modo, complementamos el análisis de las respuestas al cuestionario y las entrevistas, ya realizado en el capítulo anterior, y obtenemos más información para extraer conclusiones relacionadas con la temática abordada.

A modo exploratorio, comenzamos el análisis con una revisión del trabajo escrito que entregaron los alumnos, en respuesta a la tarea planteada en cada sesión. Luego nos adentramos en el análisis de la puesta en común de cada una de ellas. Finalizamos el capítulo con una síntesis del análisis realizado.

6.1 Primeras impresiones

En la sesión 1 desarrollamos una actividad de clasificación (Zaslavsky, 2008). Para ello, como señaláramos en la sección 4.4, diseñamos seis juegos de veinticinco tarjetas cada uno. Cada tarjeta contiene una expresión en la que interviene el signo de *igual*, ya sea en contexto aritmético (cinco tarjetas), en contexto de ecuaciones (diez tarjetas) o en contexto de operaciones con polinomios (diez tarjetas).

Los estudiantes se organizan en equipos, como se indica en el cuadro 13, y clasifican las expresiones de acuerdo a todos los criterios que les parecen oportunos. Luego se realiza una puesta en común y a continuación, se discute en forma colectiva cómo clasificar las expresiones de acuerdo a un criterio específico: uso del signo de *igual*.

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4	Equipo 5	Equipo 6
Alfonso	Agustina	Jaime	Federica	Candelaria	Mariana
Belén	Enzo	Julieta	Gerónimo	Faustina	Juana
Fabián	Juan	Rocío	Josefina	Ignacio	Lucía
Felipe	Rodrigo	Santiago	Paola	Mateo	Miguel
Martina	Nicole	Sara	Tomás	Sebastián	Pedro
				Victoria	

Cuadro 13. Integración de cada equipo de estudiantes, para la realización de la tarea de la sesión 1.

Del trabajo escrito presentado por los estudiantes, se desprende que el criterio de clasificación más evocado por ellos es la presencia o no, de una variable en la expresión. Los seis equipos, de esta manera, establecen una distinción entre las expresiones planteadas en contexto aritmético y las expresiones planteadas en contexto algebraico: "En un grupo todas las expresiones que tienen x" y "En un grupo las que no tienen x" (equipo 1), "En toda la ecuación se encuentra x" y "En toda la ecuación no se encuentra x" (equipo 2), entre otras.

Otro de los criterios de clasificación más utilizado por los estudiantes es el grado de los polinomios involucrados en la expresión. De hecho, cuatro de los seis equipos hacen alusión a la presencia de potencias en cada una de ellas: "Algunas tienen potencias y otras no" (equipo 4), "Potencia", "No potencia" y "Potencia y no potencia" (equipo 6), entre otras. Asimismo, la presencia de polinomios reducibles en la expresión es el tercer criterio más utilizado por los estudiantes, siendo tres los equipos que lo señalan en sus respectivas producciones escritas: "Expresiones reducibles e irreducibles" (equipo 3), "Las que se reducen" y "Las que no se reducen" (equipo 4) y "Las que se reducen y las que no" (equipo 5).

Destacamos otros tres criterios que, habiendo sido utilizados por uno o dos equipos cada uno, nos pueden dar indicios de los usos y significados que del signo de *igual* manifiestan los estudiantes al trabajar en esta actividad. Estos criterios son: presencia del mismo polinomio a cada lado del signo de *igual*, carácter condicional de la equivalencia dada por el signo de *igual*, y paridad del segundo miembro. Analicemos brevemente cada uno de ellos.

Los equipos 2 y 4 destacan aquellas expresiones en las que aparece el mismo polinomio a cada lado del signo de *igual*: "A ambos lados del signo de *igualdad* se encuentran los mismos números con x" (equipo 2), "Algunas tarjetas tienen el mismo número o variable de ambos lados" (equipo 4). Mientras que el equipo 2 hace alusión a estas expresiones en sentido amplio, el equipo 4 focaliza en aquellas que, cumpliendo lo anterior, presentan un solo término (numérico o literal) a cada lado del signo de *igual*. Ambos equipos encuentran en el uso del signo de *igual* como expresión de una *identidad estricta* (numérica o simbólica), un motivo para clasificar las expresiones presentadas.

El equipo 5 es el único que distingue explícitamente entre las expresiones planteadas en el contexto de una ecuación, y las expresiones planteadas en el contexto de una operación con polinomios: "x puede ser cualquier número" y "x es un número en específico". En otras palabras, los integrantes de este equipo reconocen la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en una ecuación, que diferencia a estas expresiones de aquellas cuya equivalencia es cierta para todos los valores de la variable. Observamos que ellos encuentran en el uso del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, y en el uso del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, un motivo para clasificar todas las expresiones que se plantean en contexto algebraico.

El equipo 1, en tanto, hace alusión a la paridad del "resultado" que figura en cada expresión, entendiendo por "resultado" el segundo miembro de cada una de ellas: "En un grupo todas las que su resultado es par", "En un grupo todas las que su resultado es impar" y "No sabemos si es par o impar". Muchas de las expresiones presentadas en las tarjetas contenían un solo número a la derecha (o a la izquierda) del signo de *igual*, siendo este uno de los motivos que pudo llevar a los integrantes de este equipo a considerar este criterio de clasificación, aunque reconocen que no es posible aplicarlo en aquellas expresiones cuya variable interviene a ambos lados del signo de *igual*. Ellos manifiestan una visión *operacional* del signo de *igual*, porque entienden que en todos los casos indica el resultado de una operación, que desde sus perspectivas, se plantea a la izquierda (o derecha) del signo de *igual*. Esto, incluso en contexto algebraico, donde tienen lugar la mayoría de las expresiones presentadas.

El resto de los criterios empleados, por uno o dos equipos cada uno de ellos, son los siguientes: presencia de paréntesis en la expresión (equipos 3 y 4), ubicación de la variable respecto al signo de *igual* (equipos 1 y 4), presencia de un solo término a cada lado del signo de *igual* (equipos 2 y 3), presencia de números negativos en la expresión (equipo 1), ecuación con solución 8 (equipo 3) y cantidad de términos a cada lado del signo de *igual* (equipo 6). La tabla 4 resume todos los criterios que pudimos identificar en las producciones escritas de los diferentes equipos, algunos de los cuales analizamos anteriormente:

Criterios de clasificación	Número de equipos (Total=6)
Presencia de la variable en la expresión	6
Grado de los polinomios involucrados en la expresión	4
Presencia de polinomios reducibles en la expresión	3
Presencia de paréntesis en la expresión	2
Ubicación de la variable respecto al signo de *igual*	2
Presencia de un solo término a cada lado del signo de *igual*	2
Presencia de los mismos términos a cada lado del signo de *igual*	2
Carácter de la equivalencia dada por el signo de *igual* (condicional o no)	1
Presencia de números negativos en la expresión	1
Paridad del segundo miembro ("resultado" par o impar)	1
Ecuación con solución 8	1
Cantidad de términos a cada lado del signo de *igual*	1

Tabla 4. Resultados de la tarea de la sesión 1.

En la sesión 2 desarrollamos una actividad de comparación (Zaslavsky, 2008). Como señaláramos en la sección 4.4, les presentamos a los estudiantes dos expresiones en contexto algebraico, $2x + 3x + 7 = 5x + 7$ (operación con polinomios) y $5x + 7 = 6x + 4$ (ecuación), para que ellos analicen en busca de diferencias y semejanzas.

Los estudiantes trabajan en forma individual. Registran en una tabla confeccionada para tal fin, todas las diferencias y semejanzas que desde sus perspectivas, tienen las expresiones dadas. Luego, a solicitud del profesor, analizan específicamente si el uso del signo de *igual* es una diferencia o una semejanza de estas expresiones. Esto último se discute oralmente, no sin antes pedirles a los alumnos que entreguen el trabajo escrito realizado hasta ese momento.

En una primera etapa, como dijimos, los alumnos completan la tabla con las diferencias y semejanzas encontradas. De la revisión de sus trabajos escritos, se desprende que dieciséis estudiantes reconocen la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en la ecuación. Ellos dejan entrever que en una de las expresiones, el signo de *igual* expresa una equivalencia que es cierta (en este caso) para un solo valor de la variable, mientras que en la otra expresión, el signo de *igual* expresa una equivalencia que es cierta para todos los valores de la variable. Estos estudiantes, al igual que los integrantes del equipo 5 en la sesión anterior, encuentran en el uso del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, y en el uso del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, un motivo para diferenciar a las dos expresiones presentadas en esta actividad. A continuación mostramos algunas de las explicaciones presentadas por los estudiantes:

- “Al tener la misma cantidad de variables, la x en la expresión A puede ser cualquier valor numérico para que sea equivalente, mientras que en la B, x debe ser un valor determinado para que se cumpla la equivalencia” (Josefina, 14 años).
- “En la A x puede ser cualquier número, pero en B solo un número específico” (Mateo, 14 años).

- "En A x puede valer cualquier número mientras que B solo hay un número correcto" (Federica, 14 años).
- "En el caso de A la variable x puede tener cualquier valor, mientras que en B la variable vale 3" (Paola, 14 años).
- "En la B la x es igual a 3 y solo a 3, pero en la A le puedo dar el valor que quiera a x porque siempre se cumple la *igualdad*" (Felipe, 14 años).
- "Si se reduce la A, a ambos lados del signo de *igualdad* se muestra lo mismo expresado igual, pero en la B es más indirectamente, no lo expresa igual. En la A no se podría hallar el valor de x, solo se podría reducir, mientras que en la B sí" (Nicole, 14 años).

Cuatro alumnos complementan la lista de los dieciséis que, como dijimos antes, señalan explícitamente la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en la ecuación. Estos cuatro alumnos, a diferencia de los otros doce, consideran que no es apropiado el uso del signo de *igual* en el contexto de la ecuación planteada, al menos cuando el valor asignado a la variable no transforma la ecuación en una *igualdad* numérica:

- "El signo de *igual* está usado de diferentes maneras ya que en la A se cumple la *igualdad* pero en la B no" (Belén, 14 años).
- "El polinomio A muestra que $2x + 3x + 7 = 5x + 7$ lo cual es cierto, mientras que el polinomio B muestra que $5x + 7 = 6x + 4$, lo cual no es cierto" (Agustina, 14 años).
- "En la expresión A el símbolo de = está bien usado siempre ya que, si sustituimos la x por cualquier número nos da el mismo resultado de cada lado. Sin embargo, en la expresión B no siempre es igual lo que hay de un lado y lo que hay del otro" (Julieta, 13 años).
- "En B poniendo cualquier número en las x te da diferente resultado" y "En A siempre te va a dar lo mismo poniendo las mismas x de cada lado" (Miguel, 14 años).

Observamos que los estudiantes muestran por primera vez este conflicto acerca del uso del signo de *igual*, que implica una reflexión profunda sobre el uso del símbolo. Ellos están avalando su uso cuando los dos miembros son iguales para todo valor de la variable y, en consecuencia, el uso del signo de *igual* en una ecuación representa una dificultad a ser atendida, interpretada y explicitada junto a los estudiantes. Asimismo encontramos que el entendimiento de este uso no está ligado solamente a una interpretación relacional del signo de *igual* (Knuth et. al, 2006).

En una segunda etapa, como dijimos, los alumnos analizan específicamente si el uso del signo de *igual* es una diferencia o una similitud de las expresiones presentadas. De la revisión de sus trabajos escritos, se desprende que siete estudiantes, de los dieciséis que mencionamos antes, responden que se trata de una diferencia, algunos de los cuales lo explican del siguiente modo:

- "Sería una diferencia porque el uso que tiene el signo de *igual* en la expresión B es diferente al de la A, porque en la A, el igual se usa para mostrar que en las dos ecuaciones vas a llegar al mismo resultado, pero en B las dos ecuaciones no son iguales entonces está usado de mal manera" (Belén, 14 años).
- "Sería una diferencia ya que en A el uso del signo de *igual* es que si x corresponde a cualquier valor, es correcta la expresión. Pero en B el signo de *igual* es que x tiene que ser 3 sino no se cumple la expresión dada" (Juana, 14 años).
- "Una diferencia. En A el signo de *igual* es para decir que ambos lados tienen el mismo valor porque tienen la misma cantidad de x y de unidades. Lo que te dice que, sin importar qué número sea x, la equivalencia siempre se cumple. En cambio en B, te está diciendo que a la equivalencia entre ambos lados le afecta x, sin x no hay equivalencia, o sea x es un número en particular" (Victoria, 14 años).
- "Una diferencia porque en la A quiere dar a saber que a ambos lados del signo de *igual*dad está la misma expresión y en la B se usa para poder averiguar el valor de x, cosa que en la A no se podría hacer" (Nicole, 14 años).

Asimismo, otros ocho alumnos que, al completar la tabla habían explicitado la condicionalidad de la equivalencia de la ecuación, no perciben en ello una diferencia de las expresiones presentadas, al menos en lo que respecta al uso del signo de *igual*. Ellos responden que se trata de una similitud, y algunos lo justifican de la siguiente manera:

- "Lo ubicaría en una similitud, porque el uso del signo de igual siempre indica que los dos miembros de una expresión son equivalentes. Es decir, no importa de qué manera estén expresados los dos lados, siempre van a tener el mismo valor numérico" (Josefina, 14 años).
- "Una similitud porque el signo de *igual* quiere decir que lo que está a la derecha y lo que está a la izquierda tiene el mismo valor al fin y al cabo, aunque estas estén expresadas diferentes" (Mateo, 14 años).
- "Similitud porque en ambos casos aunque x pueda que sea un numero cualquiera o tenga que ser un número específico, las dos cuentas terminan dando bien el resultado" (Pedro, 13 años).
- "El signo de *igual* solo tiene un uso que es indicar que de ambos lados (del signo) está el mismo valor expresado de cualquier manera: $2 = 2$ o $1 + 1 = 2$. Si las cuentas son equivalentes, entonces, es una similitud" (Federica, 14 años).

El alumno que completa la lista de los dieciséis que mencionábamos antes, en esta parte de la actividad, responde por escrito que el uso del signo de *igual* en ambas expresiones es una diferencia o una semejanza, dependiendo de cada caso (Miguel, 14 años).

En suma, al completar la tabla con las diferencias y semejanzas encontradas, dieciséis estudiantes reconocen la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en la ecuación. Luego, consultados específicamente por el uso del signo de *igual* en cada expresión, siete de estos alumnos responden que se trata de una diferencia, ocho responden que es una similitud, y uno responde que depende de cada caso.

6.2 Análisis por sesión

A continuación transcribimos y analizamos algunos tramos de las sesiones 1 y 2, las cuales fueron audio-grabadas.

6.2.1 Sesión 1

La puesta en común comienza con nuestra invitación a que cada equipo exponga el trabajo realizado hasta el momento. Así es como Martina, en representación del equipo 1, es la primera estudiante en intervenir.

> Martina: El primer grupo que hicimos eran todas las expresiones que tenían una equis, que eran casi todas. Después hicimos un sub grupo que eran las que no tenían potencia, las que tenían potencia, o sea "x" y "x^2", y las que tienen solo equis de un lado.

Observamos que la primera intención de los integrantes del equipo 1 es separar las expresiones aritméticas de las expresiones algebraicas, según la presencia o ausencia de la variable x en cada una de ellas. Asimismo, clasifican las expresiones planteadas en contexto algebraico según su grado y según la ubicación de la variable respecto al signo de *igual*, sin distinguir hasta el momento entre aquellas que se plantean en contexto de ecuaciones o en contexto de operaciones con polinomios. Hasta aquí, el trabajo realizado por los estudiantes del equipo 1 se asemeja con el realizado por los integrantes de otros equipos, y está dentro de lo esperado. Martina sigue explicando el trabajo realizado por su equipo, y Belén la interrumpe para hacer una aclaración:

> Martina: Otro grupo eran las que tenían números negativos o sea, las que su resultado era negativo.
>
> Profesor: ¿Por ejemplo?
>
> Martina: F (en referencia a $2x + 15 - 9 = 31 - 9$)
>
> Profesor: ¿Qué otra?
>
> Belén: No, una que tenía número negativo, no importaba si el resultado que tenía dentro de la ecuación era un número negativo.
>
> Martina: Por ejemplo la F tiene -9. Otro grupo eran las que no tenían números negativos, que eran todas menos F.

Martina presenta otro criterio de clasificación, siempre en referencia a las expresiones planteadas en contexto algebraico. Se trata de la presencia o no, de términos negativos en la expresión. Si bien este criterio no aporta nada relevante en sí mismo, lo traemos a colación para observar cómo el discurso inicial de Martina, y la aclaración posterior de Belén, dejan entrever que ambas están interpretando el signo de *igual* en su carácter de *operador*, porque asumen que el lado derecho de las expresiones corresponde al resultado de lo planteado en el lado izquierdo: "las que su resultado era negativo", "no importaba si el resultado que tenía dentro de la ecuación era un número negativo". Con esta última afirmación también observamos que Belén no distingue entre ecuación y operación con polinomios, al menos en su discurso, asumiendo por el contrario que todas las expresiones son ecuaciones. Martina sigue con su intervención, presentando un criterio más de clasificación, que luego Alfonso complementa con un ejemplo:

> Martina: Otro grupo eran todas las que su resultado era par.
>
> Profesor: ¿Y a ver eso?, cuéntenos un poquito a todos esa última idea.
>
> Martina: O sea nosotros una parte de la tarjeta como que la reducíamos y después hacíamos la cuenta y verificábamos si el resultado era par o impar y ta, lo dividíamos en los grupos.
>
> Profesor: Díganos alguna tarjeta donde ustedes creen que el resultado es par.
>
> Martina: F *(en referencia a* $2x + 15 - 9 = 31 - 9$*).*
>
> Profesor: Por ejemplo la F, en donde el resultado cuál sería…
>
> Alfonso: Complicada esa…, la D por ejemplo *(en referencia a* $16 = 7 + 9$*).*
>
> Profesor: La D.
>
> Alfonso: 22.
>
> Martina: 22 es par.
>
> Profesor: El 22 sería la F y por eso la pusieron dentro de las que tienen resultado par.
>
> Equipo 1: Sí.
>
> Profesor: Bien, ¿alguna otra? Me dijeron la D, ¿cuál sería el resultado ahí?
>
> Varios equipo 1: 16.

El nuevo criterio presentado por el equipo 1 tiene que ver con la presencia de un único término numérico par o impar, a la izquierda o a la derecha del signo de *igual*, antes o después de reducir la expresión correspondiente. Por ejemplo, Martina sostiene que la expresión $2x + 15 - 9 = 31 - 9$ tiene resultado par, porque luego de reducir el segundo miembro se obtiene 22, que es un número par. Asimismo, Alfonso señala que la expresión $16 = 7 + 9$ es otro ejemplo de este subgrupo, porque de antemano el lado izquierdo está constituido por el número 16, que también es par. Los estudiantes de este equipo son consultados sobre la posibilidad de identificar expresiones que, desde sus perspectivas, tengan "resultado impar". Martina, que continúa representando a su equipo, dice lo siguiente:

> Martina: La A.
>
> Profesor: La A: $11 + 6 = 17$ ¿otra?
>
> Martina: La W.
>
> Profesor: W, ¿por qué esa les quedó con resultado impar?
>
> Martina: Me confundí, pará, no veo nada.
>
> Profesor: $3x + 5 = 2x + x + 5$
>
> Martina: Ta, esa no era impar. La Y es impar.
>
> Profesor: La Y: $2x + 15 = 31$.

El criterio presentado por el equipo 1 sigue siendo el mismo, ahora para indicar expresiones que desde su perspectiva, tienen "resultado impar": $11 + 6 = 17$ y $2x + 15 = 31$. Dicha interpretación es válida en el primero de los casos, dado que aparece una operación aritmética a la izquierda del signo de *igual*, y su resultado, efectivamente, a la derecha. Sin embargo, eso no es lo que ocurre en la segunda expresión, que es una ecuación del tipo $ax + b = c$. En ambos casos, tanto en la expresión aritmética como en la ecuación, los estudiantes del equipo 1 están interpretando el signo de *igual* como un *operador*, porque asumen que está indicando el resultado de una operación. Martina y Alfonso hacen una aclaración respecto al criterio que estamos analizando:

> Martina: Hay otro grupo que es los que no sabemos si es par o impar porque no sabemos el resultado.
>
> Alfonso: $x = x$ no sabés si es par o impar.
>
> Profesor: Ustedes tienen una categoría más en ese criterio…
>
> Alfonso: Sí, son 5.
>
> Profesor: 5 tarjetas que no supieron saber si el resultado es par o impar, ¿por ejemplo?
>
> Martina: O *(en referencia a* $x + 3 = 3x + 5$*)*
>
> Alfonso: Z
>
> Profesor: En la Z: $x = x$, ¿por qué ahí no saben si es par o impar el resultado?
>
> Alfonso: Porque la x ahí puede ser 5...

> Martina: Puede ser cualquier número, puede ser un número impar o un número par.
>
> Profesor: ¿Qué otra?
>
> Martina: La V.
>
> Profesor: La V: $5 + x = 5 + x$, ¿ahí la explicación cual sería?
>
> Martina: O sea, como no sabemos cuál es x, no sabemos qué número es x, no sabemos cuál es el resultado.

Martina y Alfonso señalan que, según el criterio que emplean en este caso, hay cinco expresiones cuyo "resultado" no logran determinar si es par o impar. Se trata expresiones que, siendo ecuaciones u operaciones con polinomios indistintamente, incluyen a la variable en ambos lados del signo de *igual*. Cuando Martina dice que "no sabemos qué número es x, no sabemos cuál es el resultado", deja entrever que en dichas expresiones la variable puede tomar cualquier valor, o en su defecto, uno en particular que no sabe cómo averiguar. Eso hace que en este caso, no quede claro si la estudiante está interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia* o *expresión de una equivalencia condicional*. El resto de la clase es consultada sobre el último criterio presentado por el equipo 1. Rodrigo y Jaime opinan al respecto:

> Rodrigo: Para mí no es muy certera esa porque en la ecuación no sabes bien cuál es el resultado, no podes saber si el resultado es par o impar.
>
> Jaime: Se podría poner otro…
>
> Rodrigo: Claro…
>
> (Discuten varios al unísono)
>
> Profesor: A ver, de a uno, es interesante la discusión pero de a uno.
>
> Rodrigo: O sea, podés poner un criterio como el que habían dicho antes, que sí diferencia a todas, pero este como que no es muy certero digamos, o sea, puede estar bien o mal.
>
> Profesor: No es muy certero porque depende…
>
> Rodrigo: No sabemos los resultados. Es una ecuación, tendríamos que saber los resultados de todos y es una transa.
>
> Profesor: Jaime.
>
> Jaime: Estas haciendo un criterio de algo que no sabes, en vez de hacer otro criterio del que podrías saber algo… en este como que no sabes los resultados.
>
> Profesor: Claro, pero ellos tienen un par de tarjetas en donde dicen que no saben justamente donde ponerlas…
>
> Rodrigo: Pero cualquiera que tenga equis de los dos lados no vas a saber cuál poner, porque no sabes si el número es par o impar.

Tanto Rodrigo como Jaime sostienen que el criterio de "resultado par e impar" presentado por el equipo 1 es impreciso, dado que en ciertos casos el "resultado" se desconoce y averiguarlo es muy costoso. Ambos estudiantes dejan entrever que la variable debe tomar un valor en particular en cada expresión, incluso en aquellas en que se plantea una equivalencia simbólica. Eso hace que estén interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, en todos los casos, y que por tanto, no estén distinguiendo entre una ecuación y una operación con polinomios. Asimismo, Rodrigo y Jaime, al igual que Martina, Alfonso y el resto de los integrantes del equipo 1, no encuentran inconvenientes en sostener que, aun en el contexto de una ecuación, el signo de *igual* está indicando un "resultado", lo cual es propio de una visión *operacional*. Lo vemos cuando Rodrigo dice que "en la ecuación no sabes bien cuál es el resultado", o cuando Jaime agrega que "como que no sabes los resultados". Observamos que el uso de la palabra *resultado* y sus significados representan un problema para los estudiantes, en tanto obstaculiza la comprensión del concepto de solución de una ecuación. En particular, la asociación de la palabra *resultado* con todo lo que aparezca escrito del lado derecho del signo de *igual*. Lo mismo señalábamos en el capítulo anterior, cuando analizábamos algunas de las respuestas al cuestionario.

La puesta en común continúa con la descripción del trabajo realizado por el equipo 3. Al igual que el equipo 1, los estudiantes de este equipo consideran como criterios de clasificación la presencia de la variable (con x o sin x) y el grado de la expresión (uno o dos). Agregan a ellos la distinción entre expresiones reducibles e irreducibles, y la diferenciación entre expresiones que incluyen paréntesis y expresiones que no incluyen paréntesis. Mientras Tomas y Federica describen y ejemplifican estos criterios, Gerónimo, que también es integrante del equipo 3, interrumpe para realizar la siguiente intervención:

> Gerónimo: También nos surgió una pregunta que es, si lo que estás simplificando está del lado izquierdo sigue siendo una simplificación y… o sea, ahí nos surgió la pregunta, y creemos que sí porque no importa el lado, o sea, si está simplificado…
>
> Profesor: ¿Qué tarjeta concreta les creó la duda de esta cuestión de que si está simplificando o no?
>
> Gerónimo: $4x = 3x + x$ que no recuerdo cual es la letra.

> Federica: La T.
>
> Gerónimo: La T, pero creemos que sí porque no tiene valor de qué lado este.
>
> Profesor: ¿De qué lado esté qué cosa?
>
> Gerónimo: Simplificado o distribuido, si usaste la propiedad distributiva para juntar todo o para separar todo.

Cuando Gerónimo dice que “nos surgió una pregunta que es, si lo que estás simplificando está del lado izquierdo sigue siendo una simplificación”, de algún modo está poniendo en duda la aceptación del signo de *igual* como *expresión de una acción*, o al menos deja de manifiesto que no está habituado a trabajar con expresiones de este tipo. En un primer momento, la presencia de un polinomio reducido a la izquierda del signo de *igual*, como ocurre en la expresión $4x = 3x + x$, les generó a los integrantes del equipo 3 ciertos inconvenientes que luego lograron superar. Lo vemos cuando más adelante, en su discurso, Gerónimo aclara que “no tiene valor de qué lado esté”, haciendo alusión a la ubicación del polinomio reducido respecto al signo de *igual*. El grupo entero es consultado sobre el asunto planteado por Gerónimo, frente a lo cual acuerdan con la conclusión mostrada por este último.

La puesta en común continúa con la descripción del trabajo realizado por el equipo 5, a cargo de Candelaria y Faustina:

> Candelaria: Pusimos los que x puede valer cualquier número y se sigue cumpliendo la *igualdad*, y los que tiene que ser un número específico.
>
> Faustina: Eso es cuando tiene la misma cantidad de x de cada lado, entonces puede ser cualquier número porque tiene la misma cantidad de x, y si ponele, tiene $2x$ de un lado y $3x$ de otro, capaz que no puede ser el mismo número…
>
> Candelaria: No puede ser cualquier número.
>
> Faustina: Ahí va, tiene que ser uno específico, tenés que hacer la cuenta para saber qué número es.

Observamos que el equipo 5 introduce un nuevo criterio de clasificación, con el que distingue las expresiones planteadas en el contexto de una ecuación, de las expresiones planteadas en el contexto de operaciones con polinomios. Candelaria y Faustina, en representación de este equipo, señalan que en algunos casos la variable debe tomar un valor en particular para transformar la expresión dada en una *igualdad* numérica, mientras que en otros casos puede tomar cualquier valor para que ello ocurra: "Pusimos los que x puede valer cualquier número y se sigue cumpliendo la *igualdad*, y los que tiene que ser un número específico". Eso significa que frente a una ecuación están interpretando el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, mientras que frente a una operación con polinomios lo están interpretando como *expresión de una equivalencia simbólica*.

Según Faustina, siempre en representación del equipo 5, si la variable x aparece la misma cantidad de veces a ambos lados del signo de *igual*, entonces puede tomar cualquier valor, de lo contrario, si aparece más veces de un lado que del otro, entonces debe tomar un valor en particular. La clase es consultada sobre el criterio señalado por el equipo 5. Jaime, Gerónimo y Mateo son los primeros en intervenir:

> Jaime: Por ejemplo, en $x = x$ puede valer 4 o… la *igualdad* siempre te va a dar… Puede ser con cualquier número ahí. Pero en cambio, en la I por ejemplo (en referencia a $2x + 1 = 17$), tiene que ser sí o sí un número específico, o sea la x tiene que ser un número específico.
>
> Profesor: ¿Y cómo nos damos cuenta en qué caso la x…? A ver allá, Gerónimo.
>
> Gerónimo: Cuando la x está solamente de un lado, tiene que ser un valor específico porque como el otro ya es el número… O sea, no hay manera de modificarlo, tenés que llegar de ese lado con esa x, suponete $2x + 1 = 17$, con esa "x" tenés que llegar a 17. Pero sin embargo, con equis de los dos lados vos podés hacer que la *igualdad* sea el número, o sea, entre las soluciones un número que vos quieras pero de los dos lados puede variar hasta el mismo número.
>
> Profesor: Interesante lo que dice Gerónimo. Él dice: si la x está sólo de un lado entonces va a tener que valer un valor específico, ¿sí? Y si está de los dos lados debe valer cualquier número. ¿Qué opinan?
>
> (Varios hablan al unísono)
>
> Profesor: A ver, por acá…
>
> Mateo (equipo 5): Que está bien pero en realidad no tiene por qué ser uno… Puede ser que haya cinco equis de un lado y cinco equis del otro, pero sigue siendo la *igualdad*. O sea, que esté la misma cantidad de cada lado, se cumple la *igualdad*.

Jaime está de acuerdo con el criterio de clasificación propuesto por el equipo 5 y propone dos ejemplos acordes a ese criterio: una equivalencia simbólica y una ecuación. Señala con ellos que en un caso la variable puede tomar cualquier valor, mientras que en el otro debe tomar uno en particular para que la expresión se transforme en una *igualdad* numérica. Jaime, al igual que Candelaria, Faustina y el resto de los integrantes del equipo 5, está mostrando que puede interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional* y como *expresión de una equivalencia simbólica*.

Gerónimo y Mateo por su parte, como hiciera Faustina anteriormente, discuten sobre las condiciones necesarias para que ocurra una cosa o la otra. Mientras que para Gerónimo alcanza que la variable aparezca en ambos lados del signo de *igual* para que pueda tomar cualquier valor y aun así, transformar la expresión en una *igualdad* numérica, para Mateo es necesario que además, la variable aparezca la misma cantidad de veces a cada lado del signo de *igual*. Otros estudiantes se muestran interesados en dar su punto de vista y por tal motivo permitimos que Juana, Federica y Julieta se integren a la discusión:

> Juana: Que por ejemplo en O hay x de los dos lados pero tiene que ser un número específico porque si no como que no te da, imagínate x fuera dos, dos más tres, cinco, pero del otro lado no te da cinco, porque tres por dos más cinco…
>
> Profesor: ¿Gerónimo?... Tiene razón… ¿A ver…?
>
> Federica: No, porque en O de un lado es una sola equis y del otro lado son tres equis. O sea, no es la misma cantidad de equis de los dos lados. O sea, eso no cuenta como una ecuación que puedas usar x, el valor que quieras, porque hay diferente cantidad de x de los dos lados.
>
> Julieta: Pero el criterio de Gerónimo nunca dijo que tenía que haber la misma cantidad de equis de los dos lados.
>
> Profesor: De acuerdo.
>
> Julieta: Dijo que tenía que haber una variable de cada lado, o sea, no importa el número de equis… No importa la cantidad de equis…

Tanto Juana, como Federica y Julieta complementan lo que Mateo ya había señalado anteriormente, esto es, que la variable debe aparecer la misma cantidad de veces a cada lado del signo de *igual* para que pueda tomar cualquier valor, y aun así, transformar la expresión en una *igualdad* numérica. Eso hace que Gerónimo se corrija y afirme que en realidad, él había querido decir lo mismo. Ahora bien, lo que no reconoce ninguno de los estudiantes que está discutiendo este asunto, tampoco ninguno de los que está escuchando dicha discusión, es que frente a expresiones como $5x = 5x + 1$ se cumplen las condiciones señaladas, y sin embargo no tiene lugar una *igualdad* numérica para ningún valor de la variable. Presentamos esta situación a todo el grupo, frente a la cual Alfonso, Rodrigo y Candelaria comparten su punto de vista:

> Alfonso: Es imposible porque la equis el valor que tenga de un lado lo tiene que tener del otro. Si sumás 1 es imposible que sean *igual*es.
>
> Profesor: ¿Entonces ahí para vos qué valor puede tomar x?

> Rodrigo: Cualquiera… No, no…, ninguno.
>
> Alfonso: No es posible eso así como está, porque no es igual.
>
> (Varios hablan al unísono)
>
> Rodrigo: La ecuación va a ser fácil. Si vos pones, por ejemplo, cinco por dos diez, y cinco por dos más uno once, siempre te da mal.
>
> Profesor: Bueno entonces, a ver, veo más manos, sí, por allá, ustedes.
>
> Candelaria: No importa cuánto sea equis la ecuación no se va a cumplir porque ponele que hacés balanza, te queda…, sacás 5 de cada lado te queda 0 y 1, o sea no se va a cumplir la ecuación.

Cuando Alfonso dice que "la equis el valor que tenga de un lado lo tiene que tener del otro", está asumiendo que la variable debe tomar un solo valor por vez en la expresión, y eso hace que en el caso de la ecuación planteada no se obtenga una *igualdad* numérica para ningún valor de x. Rodrigo y Candelaria explicitan esto último, y proporcionan un argumento más: mientras que Rodrigo le asigna a la variable el valor dos para mostrar, a modo de ejemplo, que en ese caso se obtiene un número distinto a cada lado del signo de *igual*, Candelaria intenta resolver la ecuación aludiendo al modelo de la balanza, llegando a que $0 = 1$, afirmación que no es cierta.

La discusión cambia de rumbo cuando Paola afirma que en el caso de $5x = 5x + 1$ "no se cumple la equivalencia", situación que aprovechamos para indagar qué noción tienen los alumnos sobre el concepto de equivalencia. Varios responden al unísono "que tienen el mismo valor", y cuando se les pide algún ejemplo, Rodrigo señala $5x = 5x$, Federica dice $2 = 2$, Mateo $2x = 1x + 1x$, Mariana $2 + 3 = 5$, Juana $2 + 3 = 1 + 4$, Martina $5x = 2x + 3x$ y Lucía $x = x$. De los siete ejemplos presentados, cuatro corresponden a un contexto de operaciones con polinomios y los tres restantes corresponden a un contexto aritmético. En ellos, el signo de *igual* se utiliza tres veces para expresar una *identidad estricta* (ejemplos de Rodrigo, Lucía y Federica), dos veces como *expresión de una acción* (ejemplos de Mateo y Martina), y una vez como *operador* (ejemplo de Mariana) y como *expresión de una equivalencia numérica* (ejemplo de Juana).

Nos surgen dos puntualizaciones respecto a los ejemplos presentados. Por un lado, observamos que estos estudiantes muestran cierta tendencia a asociar el concepto de equivalencia con el de *identidad estricta*, dado que tres de los siete ejemplos tienen que ver con ello. Por otro lado, ningún alumno presenta un ejemplo en el contexto de resolución de ecuaciones, dejando entrever que dichas expresiones no están asociadas al concepto de equivalencia. Esto puede deberse a la condicionalidad que caracteriza la equivalencia dada por el signo de *igual*, en este tipo de expresiones. Los estudiantes son consultados sobre esto último, frente a lo cual se genera una nueva discusión entre todo el grupo. Vuelven a participar Rodrigo, Martina, Jaime y Mateo, junto con Nicole, Juan y Josefina, que lo hacen por primera vez en esta sesión:

> Profesor: Pregunto, cuándo uno escribe por ejemplo: $2x + 1 = 17$, ¿ahí podemos hablar de equivalencia, no podemos hablar de equivalencia?
>
> Nicole: Depende de qué sea equis, o sea, del valor de equis porque…
>
> (Varios discuten al unísono)
>
> Juan: Si es ocho, dos por ocho dieciséis, más uno diecisiete. Depende del número que vos le busques.
>
> Rodrigo: Ahí si tiene que ser un valor específico para que la ecuación sea cierta, ¿entendés?
>
> Juan: Si es uno cualquiera no, pero si es justo ocho ahí sí te daría la ecuación.
>
> Nicole: Si es ocho, si es ocho equis, entonces sería una equivalencia, pero si no es 8, no.
>
> Rodrigo: Pero tiene que ser 8.
>
> (Varios discuten al unísono)
>
> Martina: O sea, todo depende cuanto valga x porque si x vale, no sé, 6, no te daría, daría 13.
>
> Juana: Tenés que encontrar una solución que permita la equivalencia, ocho.
>
> Profesor: Que permita la equivalencia. Entonces…
>
> Jaime: O sea, depende del valor de equis.
>
> Profesor: Depende del valor de equis dice Jaime.
>
> Mateo: O sea, es equivalente siempre y cuando x sea 8.

Observamos que al relacionar el concepto de equivalencia con las ecuaciones, algunos estudiantes explicitan por primera vez la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en este tipo de expresiones: “depende de qué sea equis”, “Depende del número que vos le busques”, “ahí sí tiene que ser un valor específico para que la ecuación sea cierta”. Varios reconocen que ocho es el único valor de la variable que transforma la ecuación $2x + 1 = 17$ en una *igualdad* numérica: “Si es uno cualquiera no, pero si es justo ocho ahí sí te daría la ecuación”, "si es ocho equis, entonces sería una equivalencia, pero si no es 8, no", "es equivalente siempre y cuando x sea 8". Asimismo, Martina explicita que para otros valores no es cierta dicha equivalencia: "si x vale no sé 6, no te daría, daría 13". Destacamos la afirmación de Josefina que de algún modo resume la discusión y deja de manifiesto una clara interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*: "Tenés que encontrar una solución que permita la equivalencia".

Para retomar el criterio introducido por el equipo 5, y asociarlo con el concepto de equivalencia recientemente analizado, les preguntamos a los estudiantes cómo clasificarían las expresiones presentadas si el criterio empleado fuese: uso del signo de *igual*. Es una pregunta concreta que busca sintetizar lo discutido hasta el momento. Julieta, Jaime y Rodrigo son los primeros en participar:

> Julieta: Que el signo *igual* tiene significado dependiendo de lo que haya de cada lado. Si lo que hay de cada lado tiene el mismo valor numérico, se puede decir que el *igual* está bien usado.
>
> Jaime: Hay veces que significa que los valores de un lado y del otro del *igual* son equivalentes, pero en otras, por ejemplo la cuenta, puede dar el resultado de una cuenta. Dependiendo del caso significa distintas cosas, ¿entendés?
>
> Rodrigo: No, en realidad el único significado es "*igual* a", tanto más tanto es "*igual* a", uno más uno es "*igual* a" dos.

Julieta y Jaime realizan una distinción respecto al uso del signo de *igual*. Julieta, por un lado, sostiene que se utiliza adecuadamente cuando se obtiene el mismo valor numérico de cada lado, dejando entrever que su uso es inapropiado en el contexto de una ecuación. Ella está distinguiendo de algún modo entre el uso del signo de *igual* como expresión de una equivalencia y *expresión de una equivalencia condicional*, pero asumiendo que el primero es un uso adecuado, mientras que el segundo no. Jaime, por otro lado, distingue entre el signo de *igual* como *operador* y como *expresión de una equivalencia numérica*: "hay veces que significa que los valores de un lado y del otro del *igual* son equivalentes", pero también "puede dar el resultado de una cuenta". Él focaliza su análisis en contexto puramente aritmético, dejando de lado las expresiones que en contexto algebraico se plantearon en esta actividad.

Rodrigo, en cambio, se opone a los planteos realizados por Julieta y Jaime, dado que no encuentra distinción posible en relación al uso del signo de *igual*. Desde su perspectiva, este signo siempre significa "*igual* a", y para respaldar su apreciación propone un ejemplo en contexto aritmético de tipo *operacional*: "uno más uno es igual a dos". Observamos que Juan es uno de los estudiantes que previamente había explicitado la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en el contexto de una ecuación, pero sin embargo, no encuentra en ello una distinción posible al aplicar el criterio: uso del signo de *igual*.

Reformulamos la pregunta anterior para que más alumnos compartieran su punto de vista sobre lo consultado: según el criterio mencionado, uso del signo de *igual*, ¿todas las tarjetas quedan en un mismo grupo, o por el contrario, quedan separadas? Mateo, Paola y Gerónimo son los que participan ahora:

> Mateo: Supongo están separadas porque por ejemplo en la Z (en referencia a $z = z$) o en la V (en referencia a $5 + x = 5 + x$) el signo de *igual* puede significar que el número que está a la izquierda es exactamente el mismo que está a la derecha, pero en A (en referencia a $11 + 6 = 17$) no es lo mismo, o sea, el valor absoluto sí, pero no…
>
> Profesor: Mh. Esa sería una posible respuesta.
>
> Paola: O sea, ¿puede ser que en uno te dé el resultado, y en el otro te dé dos cuentas? Como que en uno ya sabés el resultado y lo tenés que sumar a ver si te da, y en el otro tenés que hacer las dos.
>
> Profesor: Mh. Por allá, Gerónimo.
>
> Gerónimo: Que en ambos lados del signo está expresado el mismo valor numérico…
>
> Profesor: ¿En qué caso sería más simple y en qué caso más complicado?
>
> Gerónimo: 8=8 es más simple por estar *igual* de los dos lados, pero por ejemplo en la Q (en referencia a $5(x + x + 5 + 7) = 5(2x + 12)$) está bastante más complejo, pero lo resolvés como resolvés cualquier cuenta, tenés lo mismo a los dos lados pero expresado de diferente manera.

Mateo y Paola también realizan una distinción respecto al uso del signo de *igual*, como hicieran Julieta y Jaime en el tramo anterior. Mateo, por un lado, destaca las expresiones que dan cuenta de una *identidad estricta*, ejemplificando con $z = z$ y con $5 + x = 5 + x$, y distinguiéndolas del resto al asumir que en esos casos, "el número que está a la izquierda es exactamente el mismo que está a la derecha". Paola, por otro lado, realiza la misma distinción que Jaime, en tanto señala que "en uno te da el resultado y en el otro te da dos cuentas".

Gerónimo en cambio, al igual que Rodrigo en el tramo anterior, no encuentra distinción posible en relación al uso del signo de *igual*, aun cuando en forma previa ha señalado la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en el contexto de una ecuación. Desde su perspectiva, siempre significa que "en ambos lados del signo de *igual* está expresado el mismo valor numérico". No obstante, luego aclara que en ciertas expresiones como "$8 = 8$" es "más simple", en respuesta al planteo de Mateo. Gerónimo deja al descubierto su interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica* cuando dice que en $5(x + x + 5 + 7) = 5(2x + 12)$ está la misma expresión de cada lado pero "expresada de diferente manera".

Para terminar, formulamos la pregunta por tercera y última vez, pero excluyendo de la clasificación las cinco expresiones planteadas en contexto aritmético. Martina, Julieta, Mateo, Federica y Gerónimo vuelven a participar en este último tramo de la sesión:

> Martina: Si no tiene x que es como para que cada cuenta te dé un número, y en el otro caso puede ser con x que te sirva para descubrir qué valor es.
>
> Julieta: En las que tiene que dar un resultado sí o sí, para mí que son una categoría y las otras no.
>
> Profesor: Que tiene que haber un resultado sí o sí… ¿a qué te referís?
>
> Julieta: A que la x tiene que valer un número determinado, porque si no por ejemplo, en la N si no decís que la x vale un número determinado es imposible, ahí el *igual* está mal usado.
>
> Mateo: De los dos lados tiene que ser el mismo valor.
>
> Profesor: Mh. Bueno, ¿algo más?
>
> Federica: Si x es igual, el signo *igual* siempre tiene, o sea, su función es marcar que de los dos lados está el mismo valor, o sea, no importa cómo llegás al resultado, si está puesto como la V que dice que es igual a 8, pero el signo de *igual* indica que de los dos lados es lo mismo.
>
> Gerónimo: Es lo mismo sin expresar, o sea, sin importar la manera que esté expresado.

Por un lado, Martina y Julieta señalan como una distinción la condicionalidad de la equivalencia, presente en el contexto de una ecuación: "puede ser que con x te sirva para descubrir qué valor es", "las que tiene que dar un resultado sí o sí", haciendo alusión a la solución de cada ecuación. Mateo, Federica y Gerónimo, en cambio, si bien no desconocen lo anterior, no encuentran en ello un motivo de distinción respecto al uso del signo de *igual*, acordando entonces que en todos los casos el signo de *igual* se utiliza del mismo modo: “de los dos lados tiene que ser el mismo valor”, “indica que de los dos lados es lo mismo”, “es lo mismo, sin importar la manera que esté expresado”.

Por otro lado, la propia Julieta señala que es inapropiado el uso del signo de *igual* en el contexto de una ecuación, a menos que en ese caso la variable sea sustituida por su raíz: “En la N, si no decís que la x vale un número determinado, es imposible, ahí el igual está mal usado”. Esto guarda relación con lo que adelantábamos en la sección anterior, en cuanto a que ciertos estudiantes, como Julieta, avalan el uso del signo de *igual* cuando los dos miembros son iguales para todo valor de la variable, pero no así en el contexto de una ecuación. Como señalábamos en aquella oportunidad, esto representa una dificultad a ser atendida, interpretada y explicitada junto a los estudiantes, al tiempo que además, el entendimiento de este uso no está ligado solamente a una interpretación *relacional* del signo de *igual* (Knuth et. al, 2006).

6.2.2 Sesión 2

La puesta en común se focaliza en la segunda parte de la actividad, en la cual se pregunta si el signo de *igual* se utiliza del mismo modo en las dos expresiones que se plantean. Rodrigo y Mateo son los primeros en intervenir:

> Rodrigo: Hay algo que acá se confirma… lo que ayer decía Gerónimo, que si había *igual* equis de cada lado, va *igual* equis no, si había una equis de un lado por lo menos y otra equis de otro lado, no importa cuántas, si hay por lo menos una equis de cada lado, puede ser cualquier número, no tiene por qué ser uno específico.
>
> Mateo: Que en la expresión A “x” puede valer cualquier número pero siempre se va a cumplir la *igualdad*, y en la B es un número específico, es 3.

Rodrigo retoma un planteo realizado por Gerónimo en la sesión anterior, relacionado con las condiciones que, desde su perspectiva, dan lugar al uso del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*. Para él, y también para Gerónimo en un primer momento de la mencionada sesión, alcanza con que la variable aparezca al menos una vez a cada lado del signo de *igual* para que pueda tomar cualquier valor, y aun así, transformar la expresión dada en una *igualdad* numérica: "si hay por lo menos una equis de cada lado, puede ser cualquier número, no tiene por qué ser uno específico"

Mateo, por su parte, diferencia el uso que se le da al signo de *igual* en cada expresión planteada. Sostiene que en el primer caso la equivalencia es cierta para cualquier valor de la variable, mientras que en el segundo caso lo es para un valor en particular: "en la expresión A x puede valer cualquier número", "en la B es un número específico". Así es como Mateo, en esta oportunidad, deja de manifiesto una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica* y como *expresión de una equivalencia condicional*. Gerónimo es consultado sobre lo mencionado por Rodrigo. Se genera un intercambio entre ambos estudiantes:

> Gerónimo: No puede valer cualquier número porque al no haber la misma cantidad de equis, no puede ser…
>
> Profesor: O sea que vos estás agregando una condición más.
>
> Gerónimo: Sí.
>
> Profesor: No alcanza solamente con que haya equis de los dos lados, sino que además, tendría que haber la misma cantidad… ¿Rodrigo?
>
> Rodrigo: No sé… Por ejemplo la primera, cualquier número, si equis es cualquier número está bien… Pero en la segunda las equis no son *igual*es…
>
> (Varios discuten al unísono)

Gerónimo vuelve a retractarse, como hiciera en la sesión anterior. Según dice, no es suficiente que la variable aparezca al menos una vez a cada lado del signo de *igual*, para estar frente a una equivalencia simbólica. Por el contrario, es necesario que la variable aparezca la misma cantidad de veces de cada lado: "al no haber la misma cantidad de equis, no puede ser". Si bien Rodrigo asume que la condición señalada por Gerónimo está presente solo en la primera expresión, hasta el momento no encuentra en ello motivo suficiente para cambiar de parecer: "Por ejemplo la primera, cualquier número, si equis es cualquier número está bien… Pero en la segunda las equis no son *igual*es… " Ahora son Candelaria, Jaime, Tomas y Miguel los que aportan al debate, siguiendo Rodrigo y su planteo en el centro de la discusión:

> Candelaria: En la primera de cada lado hay $5x$. En la segunda, en un lado hay 6 y en el otro hay 5, entonces en la segunda tiene que ser un valor específico.
>
> Jaime: Sí, al no haber la misma cantidad de equis…

> Rodrigo: No, porque después está cuatro y más siete.
>
> Candelaria: Claro, pero *igual*, cuando haces la balanza…
>
> Profesor: ¿Cómo lo convencemos a Rodrigo de que solo sirve con un número?
>
> Tomás: Por ejemplo, ponele seis.
>
> Mateo: O cinco.
>
> Tomás: No, seis creo que da.
>
> Felipe: No.
>
> (Varios discuten al unísono)
>
> Profesor: ¿A ver?
>
> Miguel: Rodrigo, si haces con uno: cinco por uno cinco, más siete doce, seis por uno seis, más cuatro diez.

Candelaria y Jaime intervienen en el mismo sentido en que lo hacía Mateo anteriormente, para señalar la condicionalidad de la equivalencia dada en la segunda expresión, por no cumplirse la condición planteada por Gerónimo: “En la primera de cada lado hay $5x$. En la segunda, en un lado hay 6 y el otro hay 5, entonces en la segunda tiene que ser un valor específico”. Rodrigo mantiene su postura, a lo que Tomas, Mateo y Miguel intentan asignarle un valor a la variable, de modo que dicha expresión no se transforme en una *igualdad* numérica. Tomas justo considera el valor seis, que es la solución de la ecuación, cuestión que él mismo reconoce cuando luego aclara “no, seis creo que da”. Mateo en tanto propone el valor cinco, mientras que Miguel propone el valor uno, siendo este último el que profundiza en su explicación: “si haces con uno: cinco por uno cinco, más siete doce, seis por uno seis, más cuatro diez.” Felipe interviene para hacer una aclaración relacionada con lo planteado por sus compañeros, frente a la cual Pedro y Jaime comparten su opinión en relación a ella:

> Felipe: Pero por ejemplo, si en la de arriba no hubiera siete y siete, y hubiera otro número, no da…
>
> Profesor: A ver, ¿cómo es eso?
>
> Felipe: Que no importa si tiene la misma cantidad de equis de los dos lados, también tiene que tener la misma cantidad de los otros números que no tienen equis, tipo independientes, para que sea cualquier número la equis.
>
> Profesor: ¿Qué opinan de eso? Pedro…
>
> Pedro: Que sí, porque por ejemplo si de un lado sería siete y del otro cinco, eh… por ejemplo si lo hacés con 2, te daría diez por dos más siete y diez por dos más cinco, te daría 25 y 27, entonces no podría ser cualquier número.

> Profesor: Y diez por dos… ¿Qué cambios hiciste ahí? Me perdí un poquito, pero capaz que fui yo nomás…
>
> Pedro: Dos equis más tres equis te da cinco equis.
>
> Profesor: Sí, entonces ahí estás cambiando la "x" ¿por cuánto?
>
> Pedro: Por 2, entonces… ah pará, sería cinco equis dos más siete y cinco equis dos más cinco, y cinco equis te da 10, más siete diecisiete, y cinco equis dos te da diez, más cinco quince.
>
> Jaime: Pero ahí hay la misma cantidad de equis de los dos lados, y la misma cantidad de número…, entonces ahí sí se puede con cualquier número.

Felipe, tal vez motivado por la discusión que se había desarrollado en la sesión anterior respecto a la pertinencia de utilizar el signo de *igual* en la expresión $5x = 5x + 1$, agrega una condición más a lo planteado por Gerónimo, para que tenga lugar una equivalencia simbólica. Cuando el estudiante dice que "no importa si tiene la misma cantidad de equis de los dos lados, también tiene que tener la misma cantidad de los otros números que no tienen equis", asumimos que en su pensamiento está la idea de que "no alcanza" con que la variable aparezca la misma cantidad de veces de cada lado, si junto con eso los términos numéricos ubicados a cada lado del signo de *igual* no arrojan el mismo valor.

Pedro modifica uno de los términos numéricos de la primera expresión, transformando así la equivalencia simbólica en equivalencia condicional. Eso le permite sustituir la variable por un valor en particular, el dos, y obtener un valor numérico distinto a cada lado del signo de *igual*, con lo cual *verifica* la pertinencia de lo planteado por Felipe: "cinco equis te da 10, más siete diecisiete, y cinco equis dos te da diez, más cinco quince". Jaime, en tanto, retoma la expresión original para sintetizar lo discutido en este tramo de la sesión: "Pero ahí hay la misma cantidad de equis de los dos lados, y la misma cantidad de números, entonces ahí sí se puede con cualquier número", dejando entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*. Más adelante es Julieta la que opina sobre lo planteado por Felipe:

> Julieta: Viste que Felipe dijo que vos podés… ¿Cómo fue que dijiste? (A Felipe). Si ponele que el siete de este lado vale dos, ¿tiene que valer un número específico la equis? Para mí que no porque…
>
> Felipe: No dije eso.
>
> Julieta: ¿Qué dijiste?

> Felipe: Que si de un lado hay cinco equis y del otro hay cinco equis, pero si de este hay siete y del otro hay otro número que no sea siete, ahí no podes hacer la equis con cualquier número.
>
> Julieta: Para mí no podes con cualquier número y no podés con ninguno porque tenés la misma cantidad de equis y va a dar el mismo resultado ese total de equis. Entonces, si vos ponele que del primer lado tenés cinco equis, y ponele que eso da veinte, y le sumás siete da veintisiete, y del otro lado también, las cinco equis dan veinte, y le sumás tres te da veintitrés, o le sumás cuatro te da veinticuatro, pongas el número que pongas nunca te va a dar *igual*
>
> Profesor: Mh… (A Felipe) ¿Estás de acuerdo?
>
> Felipe: Sí, sí, pero yo decía que no sólo dependía de las equis que sean *igual*es, porque también dependía de los otros números…

Julieta reconoce la condicionalidad de la equivalencia dada por una expresión en la que, aun apareciendo la misma cantidad de equis de cada lado, los términos numéricos no arrojan el mismo valor. Sin embargo, siente la necesidad de aclarar que en ese caso dicha expresión no se transforma en una *igualdad* numérica, para ningún valor de la variable: "pongas el número que pongas nunca te va a dar *igual*". Felipe, mientras tanto, acuerda con Julieta y en su nuevo discurso confirma lo que anticipábamos: "también dependía de los otros números". Este estudiante acepta la condición plantada por Gerónimo, pero le agrega otra más, en lugar de sustituirla por la que él plantea.

Federica retoma una discusión que ya se había desarrollado en la sesión anterior, relacionada con pertinencia o no, de utilizar el signo de *igual* en el contexto de una ecuación. Candelaria y Miguel opinan al respecto:

> Federica: La misma cantidad de equis tiene que estar siempre ¿no? Pero si está el signo de *igual* por eso ya va… como que… le va a agregar de que… O sea, si yo le sumo más siete, del otro lado de alguna manera se va a tener que sumar más siete si está el signo de *igual*, si no, no se va a cumplir y está mal la expresión.
>
> Profesor: Estaría mal…
>
> Candelaria (o Martina): Podría tener en vez de un siete, un tres más cuatro, que sería lo mismo.
>
> Profesor: O un siete o una operación que diera siete. Y si el segundo siete fuera un cinco, un tres, lo que fuese, ese signo de *igual* estaría mal puesto…
>
> Varios al unísono: Sí.
>
> Profesor: Estaría mal puesto…
>
> Miguel: Lo que dice Federica está bien porque, es como una balanza, están las mismas cosas de los dos lados, y si cambias, yo que sé, el siete por un dos, te va a dar diferente, la balanza va a cambiar.

Federica refuerza la idea introducida por Gerónimo y complementada por Felipe posteriormente, esto es, que el signo de *igual* expresa una equivalencia simbólica cuando a cada lado interviene la misma cantidad de x y el mismo término numérico. Sin embargo, deja entrever que de no identificar dichas condiciones, el uso del signo de *igual* es inadecuado: “si no, no se va a cumplir y está mal la expresión”. Candelaria y Miguel respaldan la intervención de Federica. Candelaria, aclarando que en lugar de estar el mismo término numérico a cada lado del signo de *igual*, puede haber otros que en definitiva arrojen el mismo valor, al reducirlos: “Podría tener en vez de un siete, un tres más cuatro”. Miguel en tanto, aludiendo al modelo de “la balanza”: “si cambias, yo que sé, el siete por un dos, te va a dar diferente, la balanza va a cambiar.” El resto del grupo es consultado sobre la pertinencia de utilizar el signo de *igual* en el contexto de la segunda expresión, que es una ecuación. Julieta, Martina y Nicole son los que intervienen a continuación:

> Profesor: Mh… Pero quiero insistir en esto: ese signo de *igual* estaría mal puesto si yo cambio uno de los siete por otro número...
>
> Varios al unísono: Sí.
>
> Profesor: Y el segundo signo de *igual* ¿está bien puesto entonces?
>
> Julieta: No, para mí no.
>
> Otros varios: Sí.
>
> Profesor: Martina…
>
> Martina: Porque si a cinco lo multiplicas por un número, o sea cinco por tres más siete nos da 22 y seis por tres más cuatro nos da 22; pero si a equis lo usas con otro número nos va a dar resultados diferentes de los dos lados, entonces ahí sí estaría mal puesto.
>
> Profesor: Nicole.
>
> Jaime: Para mí está bien puesto.
>
> Julieta: No, no…
>
> Profesor: Tenía la mano levantada Nicole allá, ¿a ver?
>
> Nicole: En la A tengo para decir que de un lado del signo muestra lo mismo que del otro lado del signo. Pero en la B es como para averiguar cuánto es equis.
>
> Profesor: ¿Qué me querías decir?
>
> Julieta: Que para mí no está bien usado porque, sólo está bien usado con el número 3, entonces no está bien usado.

Martina sostiene que el signo de *igual* solo está “bien” usado cuando la variable toma el valor tres, pues en ese caso se transforma la ecuación en una *igualdad* numérica. Julieta, en la misma línea, realiza esta distinción y concluye que debido a ella, el signo de *igual* no está "bien" en este contexto. Observamos que la condicionalidad de la equivalencia que caracteriza al uso del signo de *igual* en el contexto de una ecuación, es lo que conduce a estas estudiantes a responder de este modo. Mientras que Martina sostiene que la pertinencia de utilizar el signo de *igual* en dicho contexto está ligada al valor asignado a la variable, Julieta no puede aceptarlo: "para mí no está bien usado".

Nicole, en tanto, compara las dos expresiones presentadas en la actividad, sosteniendo que en ambas el signo de *igual* se utiliza en forma adecuada, aunque con diferente significado. Mientras que en un caso, señala la equivalencia de los polinomios que se ubican a cada lado del signo de *igual*, mostrando una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*, en el otro caso permite averiguar la solución de la ecuación, dejando entrever una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*. Las tres estudiantes hacen alusión a la condicionalidad de la equivalencia de la ecuación analizada, pero responden en forma distinta a la pregunta planteada. Mientras que Nicole se muestra a favor y Julieta en contra, Martina se ubica en una posición intermedia, asociando su respuesta al valor que toma la variable en cada caso. Jaime, Rodrigo y Federica también aportan a esta discusión, junto con Martina que vuelve a intervenir:

> Jaime: Para mí está bien usado…
>
> Federica: Está bien porque es para averiguar cuánto es equis.
>
> Julieta: Para mí no.
>
> Jaime: Esa *igualdad* es cómo averiguas la ecuación, si no, no tiene sentido.
>
> Profesor: De a uno… ¿Lo qué Rodrigo?
>
> Rodrigo: Si hacés mal la ecuación, si vos la resolvés y te queda mal, el signo *igual* está mal porque no va a dar *igual*.
>
> Profesor: Ajá… ¿Allá?
>
> Federica: Para mí lo que dice Julieta está mal porque si vos estás usando el signo de *igual* como que tendría que ser lo mismo, entonces, de alguna manera lo tenés que resolver para que te dé lo mismo, y si estás usando el signo *igual*, es lo mismo.
>
> Jaime: Claro, si está ahí, es para que encuentres la *igualdad*.
>
> Martina: Tenés que encontrar un número para que cumpla la *igualdad*.

Los planteos de Jaime, Federica y Martina respaldan al planteo de Nicole, sosteniendo que el uso del signo de *igual* en el contexto de una ecuación conduce a averiguar el valor de la variable que transforma dicha ecuación en una *igualdad* numérica: "es para averiguar cuánto es equis", "es para que encuentres la *igualdad*", "Tenés que encontrar un número para que cumpla la *igualdad*". Estos estudiantes aceptan el uso del signo de *igual* en este contexto, asociándolo con la necesidad de encontrar la solución correspondiente. Rodrigo, en tanto, advierte que en el contexto de una ecuación el signo de *igual* está mal usado solo en el caso de resolverla y obtener un valor que no la verifique: "si vos la resolvés y te queda mal, el signo *igual* está mal porque no va a dar *igual*". Rodrigo, Jaime y Martina continúan discutiendo sobre la pertinencia de utilizar el signo de *igual* en el contexto de una ecuación:

> Rodrigo: Ayer había una de estas en que la ecuación daba mal, ahí está mal usado el signo.
>
> Jaime: No, en realidad, lo que está mal usado es el número que vos ponés, porque el *igual* está para que vos encuentres la *igualdad*. No puede estar mal, lo que está mal es el número, como la resolvió…
>
> (Varios hablan al unísono)
>
> Profesor: A ver, vamos a escucharlo. Martina…
>
> Martina: O sea, el signo de *igual* te lo ponen para que busques el número que tiene que tener equis, y que tiene que ser un número específico. Porque si encontras un número que no es el que tiene que ser, no se cumple la *igualdad*, entonces sería diferente.

Frente al planteo de Rodrigo, los estudiantes Jaime y Martina reiteran su punto de vista sobre el asunto discutido, afirmando que en una ecuación el signo de *igual* se utiliza para poder resolverla y encontrar su solución: "el *igual* está para que vos encuentres la *igualdad*", "el signo de *igual* te lo ponen para que busques el número que tiene que tener equis". Ambos estudiantes acuerdan en que es válido utilizar el signo de *igual* en una ecuación, y que llegado el caso, lo incorrecto es no encontrar el valor que la transforma en una *igualdad* numérica: "lo que está mal es el número, como la resolvió", "si encontras un número que no es el que tiene que ser, no se cumple la *igualdad*, entonces sería diferente". En este caso, el uso adecuado del signo de *igual* estaría ligado a una correcta resolución de la ecuación.

Retomamos la cuestión inicial para sintetizar lo discutido a lo largo de la presente sesión: el uso del signo de *igual* en las dos expresiones planteadas, ¿es una similitud o una diferencia? Transcribimos a continuación las respuestas que al respecto presentan Ignacio, Federica y Juana:

> Ignacio: Es una similitud, porque quiere decir que la primera parte como dos equis más tres equis más siete es igual, como que va a tener el mismo resultado que cinco equis más siete. Que en los dos tiene como el mismo significado pero capaz que no da bien los dos lados.
>
> Profesor: ¿Algo más que queramos decir sobre esto?
>
> Federica: Que el signo de *igual* solamente tiene un uso que es marcar la *igualdad*, o sea, no importa…, está mal la expresión pero… el signo de *igual* tiene solamente un uso, o sea, es una similitud.
>
> Profesor: ¿Juana?
>
> Juana: Que para mí, o sea, es una diferencia capaz que esté mal, pero en la primera por ejemplo, equis puede ser cualquier número y en la otra no, entonces para mí el *igual* en el primero es que puede ser cualquiera y en el segundo es que tiene que ser uno específico.

Ignacio y Federica sostienen que el signo de *igual* se utiliza del mismo modo en ambas expresiones, y que tiene que ver con que, de un lado y del otro se obtiene el mismo valor numérico. Sin embargo, en su discurso ambos dejan entrever que en el contexto de una ecuación, eso no ocurre para cualquier valor de la variable: “en los dos tiene como el mismo significado pero capaz que no da bien los dos lados”, “está mal la expresión pero… el signo de *igual* tiene solamente un uso”. Tanto Ignacio como Federica dan muestras de que interpretan el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, pero no encuentran en esa condicionalidad un motivo suficiente como para distinguir que el uso dado al signo de *igual* en el contexto de una ecuación difiere del uso dado a este signo en el contexto de una equivalencia simbólica.

Juana, en tanto, se opone al planteo de Ignacio y Federica, señalando que en la primera expresión la equivalencia es cierta para cualquier valor de la variable, mientras que en la segunda expresión lo es para un valor en particular. Juana interpreta el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica* y como *expresión de una equivalencia condicional*, asumiendo que se trata de dos usos distintos del signo de *igual*.

Resaltamos las dos posturas presentadas hasta el momento, respecto al uso del signo de *igual* en las dos expresiones dadas: una similitud, defendida por Ignacio y Federica, y una diferencia, defendida por Juana. Consultamos al resto de la clase cuál es su postura al respecto, frente a lo cual Candelaria, Gerónimo, Martina, Jaime, Felipe y Mateo deciden intervenir:

> Candelaria: Para mí es una similitud porque en los dos casos quiere decir que la parte que está a la derecha y a la izquierda vale lo mismo. En la B también. El signo *igual* siempre dice lo mismo, que de un lado es lo mismo que el otro.
>
> Profesor: Bueno, hay una discusión clara acá, si es una similitud o es una diferencia… Gerónimo…
>
> Gerónimo: Para mí es una similitud, solo que en el caso A podes hacerlo con cualquier número, mientras que en el B para que sea correcto se te reducen las posibilidades para… o sea, vale lo mismo.
>
> Federica: Tienen el mismo uso los dos.
>
> Martina: Es una similitud, pero depende de qué y cómo lo pongas.
>
> (Varios discuten al unísono)
>
> Jaime: Sebastián, en los dos lados el *igual* demuestra que hay una equivalencia o que los valores son *igual*es de los dos lados del *igual*. Para mí es una similitud.
>
> Felipe: En la B yo a equis le pongo el valor que quiero, y si le pongo a equis el valor 3, ahí me da que es una similitud, y está para que yo le ponga el valor que yo quiera para hallar la *igualdad*, entonces es una similitud.
>
> Mateo: Es una similitud, porque todo lo que está a la izquierda, al fin y al cabo va a ser el mismo número que está a la derecha, pero si, o sea, depende si las expresiones están bien hechas, porque si diría cinco *igual* a seis, no, está mal, no sería una similitud.

Estos estudiantes, en forma unánime, se inclinan por la postura defendida inicialmente por Ignacio y Federica, en tanto asumen que el signo de *igual* se utiliza del mismo modo en ambas expresiones. Sin embargo, varios de estos estudiantes, al igual que Ignacio y Federica, dejan entrever en su discurso que en un caso la equivalencia es cierta para cualquier valor de la variable, mientras que en el otro lo es para un valor en particular. Es el caso de Gerónimo cuando dice que "en el caso A podes hacerlo con cualquier número, mientras que en el B para que sea correcto se te reducen las posibilidades", o cuando Martina agrega que "depende de qué y cómo lo pongas", o cuando Felipe sentencia que "a equis le pongo el valor que quiero, y si le pongo a equis el valor 3, ahí me da que es una similitud". Observamos entonces que estos estudiantes, si bien distinguen entre equivalencia simbólica y equivalencia condicional, no encuentran en ello un motivo suficiente como para considerar que el uso dado al signo de *igual* es diferente en cada caso.

Por lo dicho, resulta evidente la necesidad de que los alumnos aprecien que el signo de *igual* no tiene un único uso sino que se usa de distintas formas, siendo esta una implicación didáctica sobre la cuál volveremos en el último capítulo del presente trabajo.

6.3 Análisis global

En la sesión 1, los estudiantes se organizaron en seis equipos y clasificaron de acuerdo a sus criterios, veinticinco expresiones en las que intervenía el signo de *igual*. Cada equipo registró por escrito el trabajo realizado, lo entregó, y posteriormente se desarrolló una puesta en común de la actividad planteada.

Del trabajo escrito presentado por cada equipo, se desprende que el criterio de clasificación más evocado por ellos fue la presencia o no, de una variable en la expresión (seis equipos), seguido del grado de los polinomios involucrados (cuatro equipos) y de la presencia o no, de polinomios reducibles en cada expresión (tres equipos). Otros criterios menos utilizados, pero más vinculados a los usos y significados del signo de *igual*, fueron la presencia del mismo polinomio a cada lado del signo de *igual* (dos equipos), el carácter condicional de la equivalencia dada por el signo de *igual* (un equipo), y la paridad del segundo miembro (un equipo). Con estos últimos criterios, los estudiantes pusieron de manifiesto varios significados del signo de *igual,* como ser el de *identidad estricta*, *expresión de una equivalencia condicional*, *expresión de una equivalencia simbólica*, y *operador*.

En la puesta en común realizada, los equipos 1, 3 y 5 describieron la forma en que habían resuelto la actividad planteada:

- El equipo 1 presentó como criterios de clasificación, la presencia de la variable en la expresión (con x o sin x), el grado de la expresión (uno o dos), la ubicación de la variable respecto al signo de *igual* (en uno solo o en ambos lados), la presencia de términos negativos, y “resultado” (par, impar o indefinido). Este último criterio dejó en evidencia que los estudiantes de este equipo, por momentos, interpretaron el signo de *igual* como un *operador*, aun en contexto de ecuaciones.

- El equipo 3, al igual que el equipo 1, consideró como criterios de clasificación la presencia de la variable (con x o sin x) y el grado de la expresión (uno o dos). Agregó a ellos la distinción entre expresiones reducibles e irreducibles, y la diferenciación entre expresiones que incluyen paréntesis y expresiones que no incluyen paréntesis. Los integrantes de este equipo discutieron explícitamente la pertinencia de utilizar el signo de *igual* como *expresión de una acción*, en contexto algebraico.

- El equipo 5, por su parte, introdujo un nuevo criterio de clasificación, al señalar que en algunos casos la variable debe tomar un valor en particular para transformar la expresión dada en una *igualdad* numérica, mientras que en otros casos puede tomar cualquier valor para que ello ocurra. Los integrantes de este grupo interpretaron el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional* y como *expresión de una equivalencia simbólica*, cuando se enfrentaron a una ecuación y a una operación con polinomios, respectivamente.

Luego, se discutió el concepto de equivalencia en el contexto de las expresiones presentadas. Varios sostuvieron "que tienen el mismo valor", y de los ejemplos presentados, el signo de *igual* se utilizó tres veces para expresar una *identidad estricta* (ejemplos de Rodrigo, Lucía y Federica), dos veces como *expresión de una acción* (ejemplos de Mateo y Martina), y una vez como *operador* (ejemplo de Mariana) y como *expresión de una equivalencia numérica* (ejemplo de Juana). Observamos que los estudiantes mostraron cierta tendencia a asociar el concepto de equivalencia con el de *identidad estricta*, y que ningún alumno presentó un ejemplo en el contexto de las ecuaciones.

Más adelante, se analizó la pertinencia de aplicar el concepto de equivalencia en el contexto de una ecuación. Fue aquí cuando varios estudiantes explicitaron la condicionalidad de la equivalencia dada por este tipo de expresiones. La afirmación de Josefina resumió la discusión y dejó de manifiesto una clara interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*: "Tenés que encontrar una solución que permita la equivalencia".

Finalmente, se discutió la clasificación de las expresiones de acuerdo al criterio uso del signo de *igual*. Martina y Julieta, por ejemplo, diferenciaron las operaciones con polinomios de las ecuaciones, debido a la condicionalidad de la equivalencia dada por estas últimas. Mateo, Federica y Gerónimo, en cambio, si bien no desconocían dicha condicionalidad, no encontraron en ello un motivo suficiente como para diferenciar ambos tipos de expresiones.

En la sesión 2, los estudiantes en forma individual analizaron y compararon las expresiones $2x + 3x + 7 = 5x + 7$ (operación con polinomios) y $5x + 7 = 6x + 4$ (ecuación). Cada uno de ellos completó una tabla con aquellas diferencias y semejanzas que logró identificar, y luego analizó específicamente si el uso del signo de *igual* era una diferencia o una semejanza de las mismas. Los alumnos entregaron sus producciones escritas y se realizó una puesta en común de la actividad planteada.

Del trabajo escrito presentado por cada estudiante, se desprende que al completar la tabla con las diferencias y semejanzas encontradas, dieciséis alumnos reconocieron la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en la ecuación. Luego, consultados específicamente por el uso del signo de *igual* en cada expresión, siete de estos alumnos respondieron que se trataba de una diferencia, mientras que ocho respondieron que era una similitud, y uno respondió que era una similitud o una diferencia, dependiendo de cada caso.

En la puesta en común realizada, primero se discutieron las condiciones que daban lugar al uso del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia simbólica*. Gerónimo, por ejemplo, señaló que la variable debía intervenir la misma cantidad de veces a cada lado del signo de *igual*, mientras que Felipe agregó que los términos numéricos presentes a cada lado también debían arrojar el mismo valor.

Julieta, entre tanto, aclaró que de no cumplirse esto último, la expresión así obtenida no se *verificaba* para ningún valor de la variable.

Luego, se analizó la pertinencia de utilizar el signo de *igual* en el contexto de una ecuación. Todos los estudiantes que participaron en la discusión hicieron alusión a la condicionalidad que caracteriza la equivalencia dada por una ecuación, pero aun así arribaron a conclusiones diferentes en relación a este asunto. Martina, Nicole y Jaime, por ejemplo, sostuvieron que era válido utilizar el signo de *igual* en el contexto de una ecuación, siempre y cuando la ecuación estuviera bien resuelta. Observamos que para estos estudiantes, la pertinencia de utilizar el signo de *igual* en el contexto de una ecuación estaba ligada a la necesidad de encontrar la solución correspondiente. Julieta, mientras tanto, señaló de antemano que usar el signo de *igual* en el contexto de una ecuación era inadecuado, dado que no se obtenía una *igualdad* numérica al sustituir la variable por un valor cualquiera.

Finalmente, se discutió si el uso dado al signo de *igual* en ambas expresiones representaba una similitud o una diferencia. Los estudiantes volvieron a explicitar la condicionalidad de la equivalencia dada en el contexto de una ecuación, pero difirieron en las respuestas dadas a este asunto. Gerónimo y Federica, por ejemplo, sostuvieron que era una similitud porque en ambos casos, desde su perspectiva, el signo de *igual* significaba lo mismo: que a cada lado se obtenía el mismo valor numérico. Reconocieron que en un caso la equivalencia era cierta para cualquier valor y que en el otro no, pero no encontraron en ello motivo suficiente como para responder de un modo diferente al que lo hicieron. Juana, en tanto, que también distinguió equivalencia simbólica y equivalencia condicional, consideró que ello representaba una diferencia en cuanto al uso del signo de *igual* en cada una de las dos expresiones dadas.

CAPÍTULO 7

Conclusiones, implicaciones didácticas y reflexiones finales

En este capítulo presentamos las conclusiones, tomando en conjunto las evidencias presentadas y analizadas en los dos capítulos anteriores. Respondemos las preguntas de investigación que nos hemos formulado, cumpliendo así con los objetivos de investigación que nos hemos propuesto. También planteamos un conjunto de implicaciones didácticas que se desprenden de las conclusiones extraídas, junto a una narrativa (Chapman, 2008) en la que reflexiono desde el rol docente, los aportes que ha dejado la realización de este trabajo.

7.1 Conclusiones

En términos generales, nos propusimos aportar al conocimiento del desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de enseñanza secundaria de Uruguay, en lo que refiere a la comprensión del signo de *igual* en contexto algebraico, y realizar aportes que contribuyan a comprender las dificultades de los estudiantes cuando ingresan al estudio del álgebra, brindando recomendaciones que les permitan a los profesores mejorar sus diseños de enseñanza. En particular, quisimos explorar y analizar qué significados le atribuyen al signo de *igual*, en un contexto algebraico, un grupo de estudiantes de segundo año de Enseñanza Secundaria (13-14 años) que acaba de ingresar al estudio del álgebra, en un liceo de la ciudad de Montevideo. Nos preguntamos qué tanto avanzan los estudiantes de segundo año en la comprensión del signo de *igual*, luego de incursionar en el estudio del álgebra (pregunta 1), qué dificultades genera la comprensión limitada del signo de *igual*, cuando estos alumnos trabajan en contexto algebraico (pregunta 2), y cómo favorecer la comprensión del signo de *igual* en contexto algebraico, que contribuya a superar esas dificultades (pregunta 3).

En cuanto a la primera pregunta, qué tanto avanzan los estudiantes de segundo año en la comprensión del signo de *igual*, luego de haber incursionado en el estudio del álgebra, los resultados de nuestro estudio ponen de manifiesto la existencia de una relación dialéctica entre dicha comprensión, y el trabajo con el signo de *igual* en contexto algebraico. Nos referimos a que la comprensión del signo de *igual* no se presenta como algo que antecede el estudio de las ecuaciones y los polinomios, en el sentido de que debería existir una comprensión *relacional* previa y acabada antes de que el alumno inicie sus estudios de álgebra, sino que el estudio del álgebra fortalece la comprensión del signo de *igual* y su funcionamiento en los diferentes contextos, abriendo un abanico de significados a incorporar. Un conocimiento *relacional* del signo de *igual* facilita la comprensión del trabajo a dos miembros con las ecuaciones (Knuth et. al, 2006), pero también es cierto que este trabajo con las ecuaciones alimenta la comprensión *relacional* del signo de *igual*. De acuerdo a lo observado, no se aprende primero la equivalencia numérica y luego se avanza hacia la equivalencia condicional, por ejemplo, sino que cada uso que surge permite comprender más en profundidad los usos que el estudiante ya está utilizando y los que ya había estudiado previamente. Entonces, no podemos sostener que el estudiante va a comprender primero el significado *relacional* del signo de *igual* para luego adentrarse en el estudio de las ecuaciones, sino que el estudio de las ecuaciones va a abrir y alimentar la comprensión de nuevos usos así como el fortalecimiento de otros usos ya bien conocidos por el alumno.

Encontramos que la adopción de un uso del signo de *igual* en particular, no desplaza los otros usos de este signo. Esto queda de manifiesto cuando distintos usos del signo de *igual* conviven en un mismo estudiante y puede utilizarlos en forma flexible de acuerdo a lo que desea expresar en cada caso. Aun cuando un alumno sea capaz de entender el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia,* por ejemplo, también sigue viéndolo como *operador.* De esta manera, discutimos la idea de secuencialidad del aprendizaje, en el sentido que la comprensión del signo de *igual* se presenta como algo cíclico y no lineal, y que la transición entre sus usos retroalimenta la comprensión de cada uno de ellos.

Incorporamos un nuevo significado del signo de *igual* a la perspectiva teórica adoptada en este trabajo (Molina, 2006; Molina et al., 2009, posteriormente ampliadas por Burgell, 2012). Este nuevo significado, que optamos por llamar *Operador Condicional*, tiene lugar cuando el signo de *igual* es interpretado como el indicador de un resultado, pero en el contexto de una ecuación del tipo $ax + b = c$. Pudimos constatarlo cuando al participar de esta investigación, los estudiantes asociaron el segundo miembro de estas ecuaciones con lo que ellos denominaron "resultado de la ecuación", aunque previamente las hubieren resuelto y *verificado*. Desde esta perspectiva, la raíz de la ecuación no es interpretada como el número que la transforma en una igualdad numérica, propio de una interpretación del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, sino que es entendida como el número que da lugar a una operación, planteada en el primer miembro, cuyo resultado es el que figura en el segundo miembro. Entonces, al realizar la *verificación*, estos estudiantes no perciben una equivalencia, sino más bien, una operación y su respectivo resultado. Molina (2006) y Molina et al. (2009) ya distinguían entre los usos del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia* y *expresión de una equivalencia condicional*, para mostrar la diferencia entre una equivalencia que es cierta para cualquier valor de la variable y una equivalencia que lo es para un conjunto finito de valores. Nosotros ahora, a la luz de los resultados obtenidos, contemplamos la posibilidad de asignarle un carácter condicional al significado de *Operador*. Cabe destacar que no hicimos mención a este nuevo significado en los dos capítulos anteriores, porque necesitábamos analizar las evidencias en conjunto para extraer una conclusión en este sentido.

Pudimos constatar un nuevo uso del signo de *igual*, que tuvo lugar cuando los estudiantes utilizaron sus significados como herramienta para la exploración y resolución de problemas nuevos. Es que frente a dos ecuaciones equivalentes, en lugar de *verificar* que ambas ecuaciones tenían la misma solución, que hubiese sido consistente con pensar en la definición de ecuaciones equivalentes, varios alumnos optaron por utilizar en forma implícita propiedades equivalentes a esa definición que los entendimos como *teoremas en acto* (Vergnaud, 1996):

- Si se resta, suma o multiplica un mismo número a ambos miembros de una ecuación, entonces, se obtiene otra ecuación equivalente a ella (actividades 9, 10 y 12 respectivamente).
- Si se invierten de lugar los miembros de una ecuación respecto al signo de *igual*, entonces, se obtiene una ecuación equivalente a ella (actividad 13).
- Si se multiplica un mismo número a dos polinomios equivalentes, entonces, los polinomios resultantes también son equivalentes (actividad 16a)
- Si se invierten de lugar dos polinomios equivalentes respecto al signo de *igual*, entonces, siguen siendo equivalentes (actividad 16b)

Entonces, la interpretación *relacional* del signo de *igual* es lo que le permitió a estos estudiantes aplicar propiedades y extraer conclusiones sobre situaciones que no fueron analizadas en clase previamente, y en las que utilizaron los significados del signo de *igual* para explorarlas. Podemos decir que la comprensión *relacional* del signo de *igual* aparece ligada al reconocimiento de las transformaciones que conservan la *igualdad*, y al conocimiento de su propiedad simétrica, tal como lo señalan otros investigadores (Rojano y Gallardo, 1988; Matthews et al., 2012).

En relación a la segunda pregunta que dirigió nuestra investigación, qué dificultades genera una comprensión limitada del signo de *igual*, cuando los alumnos de segundo año trabajan en contexto algebraico, identificamos varios obstáculos que, en mayor o menor medida, guardan relación con esa compresión del signo de *igual*. Algunos de estos ya han sido reportados en diversas investigaciones, lo que le aporta consistencia a nuestro trabajo, mientras que otros se incorporan a ese repertorio, enriqueciéndolo.

Asociación entre lado derecho y solución de una ecuación. En consonancia con lo reportado por Sessa et al. (1995), encontramos estudiantes que frente a ecuaciones del tipo $ax + b = c$, asociaron solución con lado derecho de la ecuación, en lugar de asociarlo con la raíz de la ecuación. Una interpretación *operacional* del signo de *igual*, como anuncio de un resultado, sumado a un entendimiento de la solución de una ecuación como resultado, hizo que los estudiantes procedieran de este modo. Esto significa que el uso de la palabra *resultado* y sus significados representan un problema para los estudiantes, en tanto obstaculiza la comprensión del concepto de solución de una ecuación. En particular, la asociación de la palabra resultado con todo lo que aparezca escrito del lado derecho del signo de *igual*. Asimismo, observamos que en algunos estudiantes convivían dos ideas en simultáneo, respecto al concepto solución de una ecuación, sin percatarse que eran contradictorias (*pensamiento inconsistente*; Vinner, 1990): solución como valor de la variable que convierte a la expresión en una igualdad numérica y solución como segundo miembro de la ecuación.

Invertir miembros. Tal como lo señalan Sfard y Linchevski (1994) y Herscovics y Linchevski (1994), también identificamos dificultades de los estudiantes para resolver ecuaciones donde la variable aparecía solamente en el segundo miembro de la ecuación. Esto puede deberse a la práctica habitual de resolver ecuaciones donde la variable aparece solo del lado izquierdo, o a la necesidad de visualizar un solo número a la derecha de la igualdad, que es consistente con una visión *operacional* del signo de *igual*. Asimismo, constatamos que en ocasiones, los estudiantes cambiaron la situación planteada en una actividad cuya resolución desconocían, por otra conocida para evitar dificultades en el proceso de solución. Es lo que Kieran (1984; citado en Ochoviet y Oktaç, 2009) denomina hacer *caso omiso a lo desconocido*.

La condicionalidad. Pudimos constatar que el entendimiento del uso del signo de *igual*, en el contexto de una ecuación, no está ligado solamente a una interpretación *relacional* del signo de *igual* (Knuth et. al, 2006), y que por tanto representa una dificultad a ser atendida, interpretada y explicitada junto a los estudiantes. Es que algunos de los alumnos que participaron de las sesiones de trabajo, por ejemplo, avalaron el uso del signo de *igual* cuando los dos miembros eran iguales para todos los valores de la variable, pero no así en el contexto de una ecuación. Asimismo, otros estudiantes distinguían entre equivalencia condicional y equivalencia simbólica, pero no encontraban en ello un motivo suficiente como para diferenciar el uso dado al signo de *igual* en cada caso. De este modo, la condicionalidad que caracteriza la equivalencia en el contexto de una ecuación representa un obstáculo a la hora de comprender el uso del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, y queda de manifiesto la necesidad de que los alumnos aprecien la variedad de usos distintos que admite este signo.

Resolver en lugar de verificar. En consonancia con Sessa et al. (1995) y Ochoviet y Oktaç (2009), encontramos estudiantes que resolvieron una ecuación e identificaron su solución, pero cuando se les pidió *verificar* volvieron a resolver la ecuación. Ellos no reconocen que la solución transforma la ecuación en una igualdad numérica, dejando entrever una limitada comprensión del signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, o bien no asocian la palabra *verificar* con el hecho de comprobar que la solución obtenida es la adecuada. Esto último, cuando resuelven una ecuación a solicitud de la actividad y realizan la *verificación* por iniciativa propia, pero luego optan por volver a resolver cuando se les pide la *verificación* en forma explícita.

Doble asignación de la variable. Algunos estudiantes admitieron la posibilidad de que la variable tomara más de un valor por vez en una misma expresión (Rojano y Gallardo, 1988; Sfard y Linchevski, 1994; Vaiyavutjamai y Clements, 2006, citado en Ochoviet y Oktaç, 2009; Fujii, 2003, citado en Ochoviet y Oktaç, 2009), y eso les impidió aceptar afirmaciones que se habían planteado en contexto algebraico, como por ejemplo $x = x$. Al producirse este fenómeno no falla la visión *relacional* del signo de *igual*, sino más bien la comprensión del funcionamiento de la variable en una expresión ligada a través del signo de *igual*. Es que para los estudiantes, no resultó ser intuitivo el principio aristotélico de identidad (toda cosa es igual a sí misma), repercutiendo ello en la aceptación de expresiones en las que intervenía este signo en contexto algebraico.

Con respecto a la tercera pregunta que nos formulamos al comenzar este trabajo, cómo favorecer la comprensión del signo de *igual*, en contexto algebraico, que contribuya a superar las dificultades señaladas, acordamos con Zaslavsky (2008) que las tareas de clasificación y comparación, como las diseñadas para el desarrollo de las sesiones de trabajo, resultaron ser tareas de naturaleza abierta que permitieron:

- Generar intensos debates entre los estudiantes.
- Profundizar en los pensamientos de los estudiantes.
- Reconocer el grado de comprensión matemática de los estudiantes.
- Múltiples puntos de acceso a la temática abordada, abarcando a una amplia gama de estudiantes.
- Variadas estrategias de resolución.

De este modo, pudimos constatar que la implementación de estas tareas supuso una transición o un avance en cuanto a la interpretación del signo de *igual* de los estudiantes que participaron de las mismas, al menos en una proporción importante. Si bien en la actividad 6 del cuestionario, por ejemplo, la mayoría de las respuestas dejaban entrever una interpretación *relacional* del signo de *igual* que era consistente con pensar en una ecuación, en general los estudiantes no explicitaban que la equivalencia era cierta, en ese caso, para un solo valor de la variable. Sin embargo, durante el desarrollo de la tarea de comparación (Zaslavsky 2008) que tuvo lugar en la segunda sesión, tres de cada cinco estudiantes participantes reconocieron explícitamente la condicionalidad de la equivalencia dada por el signo de *igual* en la ecuación; del mismo modo que en el desarrollo de la tarea de clasificación (Zaslavsky 2008) que tuvo lugar en la primera sesión, uno de los equipos ya había utilizado como criterio de clasificación, el carácter de la equivalencia dada por el signo de *igual* en cada expresión.

Reconocimos que el uso del modelo de la balanza, en contexto algebraico, les permitió a los estudiantes pensar en situaciones donde era necesario conservar la *igualdad*, no solo contribuyendo a la conceptualización de la estrategia de resolución de ecuaciones, consistente en aplicar la misma operación a ambos miembro hasta despejar la variable, sino además, favoreciendo la comprensión *relacional* del signo de *igual*. De utilizarse este modelo, vemos que los estudiantes lo incorporan como herramienta para resolver problemas, y que logran desprenderse del mismo cuando en el propio contexto algebraico es necesario operar, por ejemplo, con números negativos. Más investigación es necesaria, sin embargo, para analizar si el uso de este modelo al resolver ecuaciones no impide aplicar dicho conocimiento en el contexto de otras actividades. En la sección que sigue, presentamos más respuestas en relación a la tercera pregunta de investigación que nos formulamos al comenzar este trabajo.

7.2 Implicaciones didácticas

Como señalábamos en la sección anterior, las tareas de clasificación y de comparación (Zaslavsky 2008) planteadas en las dos sesiones de trabajo que fueron audio-grabadas, permitieron abordar aspectos conceptuales relacionados con el signo de *igual* que de otro modo hubiesen sido difíciles de abordar. Ya observamos que al trabajar en dichas tareas, los estudiantes avanzaron en la comprensión de los diversos significados del signo de *igual*. Por lo dicho, sugerimos a los docentes desarrollar propuestas en este sentido, es decir, tareas que impliquen clasificar un número importante de expresiones en las que intervenga el signo de *igual* (entre 20 y 30), o tareas que requieran analizar un par de estas expresiones, en busca de diferencias y semejanzas. Como dice Zaslavsky (2008), en concordancia con los resultados obtenidos en este trabajo, las tareas descritas despiertan el interés de los estudiantes y generan interesantes discusiones que favorecen la adquisición y/o consolidación de nociones y conceptos matemáticos.

Hemos observado la dificultad que presentaron algunos estudiantes, mientras participaban de las sesiones de trabajo, para entender el uso del signo de *igual* en el contexto de una ecuación. Esto, debido a la condicionalidad que caracteriza a la equivalencia dada en este tipo de expresiones. Entonces, resulta necesario trabajar en forma previa con la condicionalidad, antes de introducir a los alumnos en el estudio de las ecuaciones. Es que a la luz de los resultados obtenidos, no parece oportuno que el docente introduzca el trabajo con ecuaciones directamente, sin un trabajo previo que esté enfocado a la comprensión de la expresión condicional. Sostenemos que un trabajo en este sentido, basado en tareas adecuadas y especialmente diseñadas, que favorezca la comprensión de la condicionalidad, y más aún, la comprensión del signo de *igual* en una ecuación, es un tema abierto del que podrán ocuparse futuras investigaciones.

En la sección anterior, también señalábamos que el uso del modelo de la balanza no solo contribuyó a la conceptualización de una estrategia de resolución de ecuaciones, sino que también favoreció la comprensión *relacional* del signo de *igual* en varios estudiantes que participaron de este estudio. Sugerimos entonces, a la luz de las conclusiones extraídas, que el modelo de la balanza puede resultar valioso para introducir a los estudiantes en la resolución de ecuaciones, al menos cuando estas presentan la variable a ambos miembros.

Tanto en las respuestas al cuestionario como en el desarrollo de las sesiones de trabajo, hemos observado que el uso de la palabra *resultado* y sus significados representaron un problema para los estudiantes, en tanto obstaculizó la comprensión del concepto de solución de una ecuación. En particular, la asociación de la palabra resultado con todo lo que aparecía escrito del lado derecho del signo de *igual*. En tal sentido, nos parece apropiado que en contexto escolar, los docentes utilicen la palabra solución solamente para referirse a la raíz de una ecuación, y utilicen otras alternativas para referirse al resultado de una operación (por ejemplo, encontrar la suma, producto, etc.) o a la respuesta de un problema (por ejemplo, encontrar una respuesta a la situación planteada).

También señalábamos en la sección anterior, producto del análisis de los resultados obtenidos, la necesidad de que los alumnos apreciaran que el signo de *igual* no tiene un único uso. Motivados principalmente por lo ocurrido en el desarrollo de las sesiones de trabajo, donde algunos estudiantes participantes de las mismas, aun distinguiendo entre equivalencia condicional y equivalencia simbólica, no percibieron en ello una diferencia en cuanto a los usos del signo de *igual*, entendemos apropiado que los docentes expliciten a sus estudiantes que el signo de igual se utiliza de diversas formas. Del mismo modo, dada la tendencia de algunos estudiantes a utilizar el signo de *igual* en su carácter de *operador*, lo que da cuenta de la dificultad que implica para el docente de segundo año de enseñanza secundaria, impactar con otros usos del signo de *igual* que el estudiante comienza a ver en ese curso, cuando en realidad su historia previa en el sistema escolar está caracterizada por un uso primordialmente *operacional* del signo de *igual*, sostenemos que es necesario mantener una enseñanza a lo largo de la escolarización que enriquezca los usos del signo de *igual* desde etapas tempranas, siendo este otro tema abierto del que futuras investigaciones podrán ocuparse.

7.3 Reflexiones finales

7.3.1 ¿Qué me aportó este trabajo, desde mi rol docente?

Según Chapman (2008) una narrativa "es una forma relevante para expresar la comprensión sobre la práctica por parte de los docentes, porque el conocimiento de los docentes está estructurado de eventos y las historias proporcionarían un acceso especial a ese conocimiento" (p. 15). Por ello, elaboré la siguiente narrativa como forma de expresar la reflexión y el aprendizaje desde el rol docente.

La realización de este trabajo implicó tres grandes etapas. En la primera etapa, elegimos un tema de investigación, realizamos una revisión bibliográfica, y seleccionamos un marco teórico apropiado. En la segunda etapa, elegimos un método de investigación y desarrollamos un trabajo de campo, que en este caso incluyó la aplicación de cuestionarios, la realización de entrevistas y el desarrollo de sesiones de trabajo. En la tercera etapa, analizamos los resultados obtenidos y extrajimos las conclusiones correspondientes. Cada etapa contribuyó con nuestro crecimiento profesional y académico, en tanto nos aportó herramientas útiles para desarrollar la investigación en matemática educativa que redundaron también en tareas propias de la docencia. En los siguientes párrafos fundamentamos esta última apreciación, situándonos en nuestro rol como docentes.

Durante la primera etapa (tema de investigación, revisión bibliográfica y marco teórico), accedí a un amplio espectro de información que había sido poco explorado por mí hasta este momento. Pude apreciar que la matemática educativa, como disciplina científica, proporciona desde hace ya algunas décadas variadas respuestas a problemáticas que a diario surgen en el aula, relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Y que en ese sentido, nuestro trabajo pretendía aportar una respuesta más. En mí país existe un divorcio importante entre la práctica docente y la investigación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Eso hace que las decisiones tomadas, tanto a nivel de las autoridades educativas como a nivel de los docentes, a menudo guarden poca relación con las implicaciones didácticas que se desprenden de las diversas investigaciones desarrolladas en este ámbito. Por lo dicho, es relevante y significativo que la realización de este trabajo, en su primera etapa, me haya permitido a mí como docente, vincular fenómenos que tienen lugar en nuestras aulas con las problemáticas que vienen siendo investigadas en el campo de la matemática educativa.

Durante la segunda etapa (método y trabajo de campo), como ya dijimos, aplicamos un cuestionario, realizamos entrevistas y desarrollamos dos sesiones de trabajo. Algunas de las actividades que incluimos en el cuestionario, por ejemplo, me sirvieron de inspiración para diseñar otras actividades que, en otros contextos, me permitieron desarrollar otros temas junto a los estudiantes. En las situaciones de entrevista y en el desarrollo de las sesiones de trabajo, mientras tanto, adopté una nueva metodología de trabajo que me permitió conocer un poco más sobre la forma en que los estudiantes piensan. Esta metodología consistió en la jerarquización de la conversación en clase de matemática, buscando la confrontación y el intercambio de ideas entre los alumnos. Implicó un cuestionamiento permanente de los planteos presentados por ellos, pero siempre manteniéndome al margen de sus intervenciones y reduciendo al mínimo mis intervenciones. La metodología descrita se presenta entonces como una opción que nos permite, como docentes, realizar intervenciones más acertadas que ayuden a los estudiantes a avanzar en la comprensión de la matemática.

Durante la tercera etapa (análisis de resultados y conclusiones), fui incorporando la necesidad de cuestionarme qué pensó cada alumno cuando en el cuestionario escribió tal o cual cosa, o cuando en la entrevista o en la sesión de trabajo intervino de determinada manera, y no de otra. Esta práctica de interrogar sobre el porqué de cada respuesta, unido a la información que obtuvimos en la primera etapa, hizo que se me ampliara el universo de posibles interpretaciones de lo que un alumno dice y hace, cuando trabaja en una actividad matemática. Esta fue sin duda, otra de las contribuciones que como docentes me ha dejado, la realización de esta investigación.

En síntesis, la realización de este trabajo implicó relacionar mi práctica docente con la investigación en matemática educativa, implicó adoptar una nueva metodología de trabajo caracterizada por la conversación en clase de matemática, y me permitió ampliar el universo de interpretaciones relativas a lo que un alumno piensa y hace, cuando trabaja en clase de matemática.

7.3.2 ¿Qué limitaciones encontramos en este estudio?

Por un lado, encontramos que la extensión que ya tiene este trabajo es una de sus limitaciones. De hecho, analizamos en profundidad las respuestas al cuestionario de nueve casos, de los cuales nos limitamos a presentar cinco; y desarrollamos tres sesiones de trabajo colectivo, de las cuales reportamos dos. Del mismo modo, podría haber extendido la narrativa personal, donde reflexiono sobre los aportes de este trabajo a mi práctica docente.

Por otro lado, el reducido número de actividades que incluimos en el cuestionario, para explorar los significados del signo de *igual* en contexto de operaciones de polinomios, es otra de las limitaciones que encontramos. Esto, debido a la dificultad que implicó diseñar actividades en dicho contexto, de modo tal que la resolución por parte de los estudiantes dejara al descubierto variados significados del signo de *igual*. El cuestionario piloto, a propósito, incluía más actividades en este sentido, pero las evidencias recogidas con ellas daban cuenta que no contribuían con los objetivos de investigación que nos habíamos propuesto, y por eso las excluimos del cuestionario definitivo.

Finalmente, la tercera limitación encontrada tiene que ver con el diseño de la actividad 14 del cuestionario:

14) *Juan está trabajando en un ejercicio planteado en clase que dice lo siguiente:*

Reducir términos semejantes.

$$4x^2 + x + x + 5x^2$$

En su cuaderno escribe: $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$

¿Consideras que ya ha terminado la tarea indicada? En caso afirmativo explica por qué y en caso negativo explica qué le faltaría hacer para completar la tarea.

En nuestra práctica docente, hemos constatado que al operar con polinomios, algunos estudiantes sienten la necesidad de reducir términos que no son semejantes, hasta obtener un solo término a continuación del signo de *igual*, como "resultado" de esa operación. Sin embargo, las evidencias recogidas con la actividad 14 del cuestionario no dieron cuenta de tal dificultad. Si bien la mayoría de los estudiantes proporcionó una respuesta que dejó entrever una interpretación *operacional* del signo de *igual*, que era lo esperado en este caso, ello no les impidió aceptar la presencia de un polinomio con más de un término a la derecha del signo de *igual*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. (2000). Working on the inside: Using one´s own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education,* 365-402. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1976). How children view equality sentences, Project for the Mathematical Development of Children. *ERIC Document Reproduction Services No. ED144802*.

Bornstein, M. (1984). A descriptive taxonomy of psychological categories used by infants. *Origins of cognitive skills*, 313-338.

Burgell, F. (2012). *¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de primer año del Ciclo Básico de Enseñanza Media? Aportes para pensar los cimientos del álgebra* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional del Camahué. Neuquén, Argentina.

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education.*The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, *2*, 15-38.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (2006). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.

Collis, K. (1974). Cognitive development in mathematics learning (Paper prepared for a Psychology in Mathematics Education workshop). *Centre for Science Education, Chelsea College, London*.

Denmark, T. (1976). Final Report: A Teaching Experiment on Equality. PMDC Technical Report No. 6.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 183-217.

Filloy, E., y Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought.(A clinical study with 12-13 years old). En *Proceedings of the 6 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 51-56).

Gallardo, A. y Rojano, T. (1988). Difficulties areas in the acquisition of the arithmetic-algebraic language. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(2), 155-188.

Godfrey, D., y Thomas, M. O. (2008). Student perspectives on equation: The transition from school to university. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 71-92.

Herscovics, N., y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, *73*(8), 572-580.

Herscovics, N., y Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. In *Proceedings of the 3rd PME International Conference* (Vol. 1, pp. 128-133).

Kieran, C. (1980). Constructing Meaning for Non-Trivial Equations.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kieran, C. (1983). Relationships between novices' views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures. En *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA* (Vol. 1, pp. 161-168).

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra, En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 390-419.

Knuth, E., Alibali, M., Hattikudur, S., McNeil, N., y Stephens, A. (2008). The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 514-519.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., y Stephens, A. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable. En *Early algebraization* (pp. 259-276). Springer Berlin Heidelberg.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., y Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312.

Linchevski, L., y Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations.*Educational studies in mathematics*, *30*(1), 39-65.

MacGregor, M., y Stacey, K. (1999). A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(2), 78-85.

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., y Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 316-350.

McNeil, N. y Alibali, M. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, *6*(2), 285-306.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada. Granada, España.

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, *1*(1), 33-46.

Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2009). Elementary students understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*(7 (1)), 341-368.

Ochoviet, C., y Oktaç, A. (2009). If AB= 0 then A= 0 or B= 0?. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *6*, 113-136.

Panizza, M., Sadovsky, P., y Sessa, C. (1995). Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. Informe sobre una investigación en marcha. *Trabajo presentado en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Río Cuarto, Argentina*.

Papaieronymou, I. (2007). Student difficulties in understanding the difference between the algebraic expressions and the concept of linear equation. *CERME–5 Proceedings. Larnaca, Cyprus*, 934-943.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer Berlin Heidelberg.

Reed, S. (1972). Pattern recognition and categorization. *Cognitive psychology*, *3*(3), 382-407.

Rosch, E. (1973). Natural categories. *Cognitive psychology*, *4*(3), 328-350.

Rosch, E., y Mervis, C. (1975). Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. *Cognitive psychology*, *7*(4), 573-605.

Sánchez, M. y Molina, J. (2012). Un método para realizar una búsqueda bibliográfica en didáctica de las matemáticas. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones* (pp. 29-39). México: Lectorum.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A., y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(1), 191-228.

Silver, E. (1979). Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems. *Journal for research in mathematics education*, 195-210.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 217-237.

Szydlik, J. (2015). Mathematical Conversations to Transform Algebra Class.*Mathematics Teacher*, *108*(9), 656-661.

Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(23), 133-170.

Vinner, S. (1990). Inconsistencies: Their Causes and Function in Learning Mathematics. *Focus on learning problems in mathematics*, *12*, 85-98.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. *Topic Study Group 34: Research and development in task design and analysis, ICME*, *11*.

ANEXOS

Presentamos las actividades que incluimos en el cuestionario piloto y en el cuestionario definitivo. También transcribimos tres de las cinco entrevistas que les realizamos a cinco alumnos, y las dos sesiones de trabajo que hemos audio-grabadas.

Cuestionario piloto

1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a) $18 + 6 = \_\_\_ + 5$

b) $90 \div 3 = \_\_\_ + 3 = \_\_\_$

2) Contesta si cada una de las siguientes igual*dad*es son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

a) $16 = 7 + 9$

b) $17 = 17$

c) $8 = 16$

3) Contesta si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa, explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique.

$$1 + 4 = 2 + 3, \text{ entonces, } 1 + 4 + a = 2 + 3 + a$$

(a representa un número natural cualquiera)

4) Las siguientes actividades se refieren al símbolo que te presentamos a continuación:

=

a) ¿Cuál es el nombre que tiene este símbolo?

b) Explica con tus palabras cuál es el significado que tiene para ti este símbolo.

c) ¿En qué situaciones de clase has utilizado este símbolo? Ejemplifica mostrando, al menos, tres situaciones distintas.

5) Contesta si cada una de las siguientes igual*dad*es son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

a) $5 + 9 = 14 \div 2 = 7$

b) $8 = 5$

6) a) Resuelve la ecuación $3x + 5 = 26$. Explica cómo lo haces.

b) La solución de la ecuación anterior es: ___

c) Realiza la *verifica*ción para la solución obtenida.

7) Cuando planteamos la ecuación $x + 3 = 3x + 5$, ¿qué significa el signo de *igual* que se coloca entre las expresiones de la izquierda y de la derecha?

8) ¿Es 15 solución de la ecuación $x - 3 = 15$? ¿Por qué? Realiza los planteos que sean necesarios.

9) Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.

10) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$2x + 15 = 31$ $\qquad\qquad$ $2x + 15 - 9 = 31 - 9$

11) Sabemos que 9 es la solución de la ecuación $x + 18 = 27$. ¿Es 9 solución de la ecuación $x + 18 + 15 = 27 + 15$? ¿Por qué? Responde sin resolver las ecuaciones.

12) Milagros resolvió la ecuación: $2x + 18 = 36$

En su cuaderno escribió:

$$2x + 18 = 36$$

$$\frac{2x + 18}{2} = 36$$

$$x + 9 = 36$$

$$x = 36 - 9$$

$$x = 27$$

¿Estás de acuerdo con el planteo que hizo Milagros? Explica tu respuesta

13) a) Resuelve la ecuación $31 = 4x + 7$. Explica cómo lo haces.

b) La solución de la ecuación anterior es: ___

c) Realiza la *verifica*ción para la solución obtenida.

14) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$18 = 2x + 4$ $\qquad\qquad$ $3 \,.\, 18 = 3 \,.\, (2x + 4)$

15) Sabemos que 8 es solución de la ecuación $2x + 1 = 17$. ¿Es 8 solución de la ecuación $17 = 2x + 1$? ¿Por qué? Responde sin resolver las ecuaciones.

16) Trabajemos con la ecuación $x + 7 = 2x + 4$

Si a x le asignamos valor 6 y sustituimos en la expresión, llegamos a que $6 + 7 \neq 2 \,.\, 6 + 4$, pues $13 \neq 16$ (el símbolo $\neq$ significa "es distinto de").

¿Puedes explicar por qué sustituyendo x por 6 no se llega a una *igualdad*?

17) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$x + 32 = 5x + 8$ $\qquad\qquad$ $x + 32 - 4 = 5x + 8 - 4$

18) El profesor les pidió a sus alumnos que resuelvan la ecuación $4 + \frac{x}{2} = x + \frac{x}{2}$

Manuela, sin haber escrito nada en su cuaderno, pidió la palabra y dijo que 4 era la solución de esa ecuación.

¿Tiene razón? ¿Cuál crees que fue su razonamiento?

19) Si tenemos que $2x - 3 = 5$ y que $5 = x + 2$, ¿podemos afirmar que $2x - 3 = x + 2$? Explica tu respuesta.

20) El profesor propuso como tarea domiciliaria, reducir el polinomio:

$$x + x + x^2 + 3x^2$$

Al otro día los alumnos presentaron sus respuestas.

- María obtuvo la expresión $2x + 4x^2$.
- Candelaria no estuvo de acuerdo con María. Ella opinó que al reducir un polinomio, siempre se debe obtener un solo término.

¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

21) El profesor le planteó a sus estudiantes una tarea para trabajar con el tema polinomios. Te pedimos que la resuelvas.

Indica si cada una de las siguientes expresiones son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas señala qué es lo que está mal, y corrígelas para que sean verdaderas.

a) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
b) $4x = x + 3x$
c) $3x^2 + 4x^2 = 2x^2 + 5x^2$

d) $x = x$

e) $5 + x = 5 + x$

f) $7x + 2x = 9x$

22) Juan está trabajando en un ejercicio planteado en clase que dice lo siguiente:

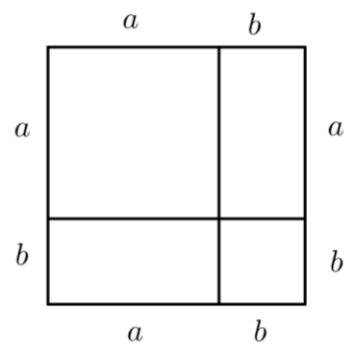
Reducir términos semejantes.

$$4x^2 + x + x + 5x^2$$

En su cuaderno escribe: $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$

¿Consideras que ya ha terminado la tarea indicada? En caso afirmativo explica por qué y en caso negativo explica qué le faltaría hacer para completar la tarea.

23) Lucía y Santiago están discutiendo cómo expresar el área del cuadrado que ves a tu derecha.



Lucía dice que el lado del cuadrado grande es $a + b$, entonces, en su cuaderno escribe:

$$Área\ cuadrado = (a + b)^2$$

Santiago dice que el cuadrado grande está formado por un cuadrado de lado a, un cuadrado de lado b, y dos rectángulos de lados a y b, entonces, en su cuaderno escribe:

$$Área\ cuadrado = a^2 + b^2 + ab + ab$$

A todo esto, Manuel, que ha observado el trabajo de sus dos compañeros, llega a la conclusión de que:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab$$

¿Tiene razón Manuel? ¿Cómo lo sabes?

24) La profesora escribe en el pizarrón que si reducimos monomios semejantes en la expresión $x+x+5+7$ obtenemos $2x+12$. Es decir que:

$$x+x+5+7=2x+12$$

Luego solicita a los alumnos que indiquen si lo escrito en cada renglón es Verdadero (V) o Falso (F). En caso de ser verdadero, les pide que expliquen por qué, y en caso de ser falso, les pide que indiquen qué es lo que está mal.

Te pedimos que resuelvas la tarea que la profesora les planteó a sus alumnos.

a) $-5(x+x+5+7)=-5(2x+12)$

b) $2x+12=x+x+5+7$

c) $x+x+5+7-4=2x+12-6$

Cuestionario definitivo

1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a) $18+6=\_\_\_+5$

b) $90\div 3=\_\_\_+3=\_\_\_$

2) Contesta si cada una de las siguientes igual*dad*es son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

a) $16=7+9$

b) $5+9=14\div 2=7$

3) Contesta si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa, explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique.

$$1 + 4 = 2 + 3, \text{entonces}, 1 + 4 + a = 2 + 3 + a$$

(a representa un número natural cualquiera)

4) Las siguientes actividades se refieren al símbolo que te presentamos a continuación:

=

a) ¿Cuál es el nombre que tiene este símbolo?
b) Explica con tus palabras cuál es el significado que tiene para ti este símbolo.
c) ¿En qué situaciones de clase has utilizado este símbolo? Ejemplifica mostrando, al menos, tres situaciones distintas.
d) ¿Para qué se utiliza el símbolo **=** en cada una de las situaciones que presentaste en la parte c?

5) a) Resuelve la ecuación $3x + 5 = 26$. Explica cómo lo haces.
b) La solución de la ecuación anterior es: ___
c) Realiza la *verifica*ción para la solución obtenida.

6) Cuando planteamos la ecuación $x + 3 = 3x + 5$, ¿qué significa el signo de *igual* que se coloca entre las expresiones de la izquierda y de la derecha?

7) ¿Es 15 solución de la ecuación $x - 3 = 15$? ¿Por qué? Realiza los planteos que sean necesarios.

8) Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.

9) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$2x + 15 = 31$ $\qquad\qquad$ $2x + 15 - 9 = 31 - 9$

10) Sabemos que 9 es la solución de la ecuación $x + 18 = 27$. ¿Es 9 solución de la ecuación $x + 18 + 11 = 27 + 11$? ¿Por qué? Responde sin resolver las ecuaciones.

11) a) Resuelve la ecuación $31 = 4x + 7$. Explica cómo lo haces.

b) La solución de la ecuación anterior es: ___

c) Realiza la *verifica*ción para la solución obtenida.

12) Las dos ecuaciones que se muestran a continuación, ¿tienen la misma solución? Explica tu respuesta. Muestra todos tus planteos.

$18 = 2x + 4$ $\qquad\qquad$ $3\,.\,18 = 3\,.\,(2x + 4)$

13) Sabemos que 8 es solución de la ecuación $2x + 1 = 17$. ¿Es 8 solución de la ecuación $17 = 2x + 1$? ¿Por qué? Responde sin resolver las ecuaciones.

14) Juan está trabajando en un ejercicio planteado en clase que dice lo siguiente:

Reducir términos semejantes.

$4x^2 + x + x + 5x^2$

En su cuaderno escribe: $4x^2 + x + x + 5x^2 = 9x^2 + 2x$

¿Consideras que ya ha terminado la tarea indicada? En caso afirmativo explica por qué y en caso negativo explica qué le faltaría hacer para completar la tarea.

15) El profesor le planteó a sus estudiantes una tarea para trabajar en el tema polinomios. Te pedimos que la resuelvas.

Indica si cada una de las siguientes expresiones son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas señala qué es lo que está mal, y corrígelas para que sean verdaderas.

a) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
b) $4x = x + 3x$
c) $3x^2 + 4x^2 = 2x^2 + 5x^2$
d) $x = x$
e) $5 + x = 5 + x$
f) $7x + 2x = 9x$

16) La profesora escribe en el pizarrón que si reducimos monomios semejantes en la expresión $x + x + 5 + 7$ obtenemos $2x + 12$. Es decir que:

$$x + x + 5 + 7 = 2x + 12$$

Luego solicita a los alumnos que indiquen si lo escrito en cada renglón es Verdadero (V) o Falso (F). En caso de ser verdadero, les pide que expliquen por qué, y en caso de ser falso, les pide que indiquen qué es lo que está mal.

Te pedimos que resuelvas la tarea que la profesora les planteó a sus alumnos.

a) $-5(x + x + 5 + 7) = -5(2x + 12)$
b) $2x + 12 = x + x + 5 + 7$
c) $x + x + 5 + 7 - 4 = 2x + 12 - 6$

Entrevistas a alumnos

Entrevista a Rocío (14 años)

Profesor: Por ejemplo, en la actividad 1 ustedes tenían que completar con unos números estos espacios en blanco. En el 1b vos contestaste con un 27 y con un 30, y diste ahí una explicación. Después en el 2b respondiste que esta expresión era verdadera. ¿Te animas a contarme qué fue lo que pensante, tanto en el 1b como en el 2b?

Rocío: En el 1b primero hice 90 dividido 3 que me dio 30, y al hacer eso ta, lo dejé y dije: esto es 30. Después dije: ¿cuánto más 3 me tiene que dar 30? Entonces, resté 30 menos 3, que me dio 27, y después dije: como el primero, o sea, 90 dividido 3 es 30, y 27 más 3 es 30, el *igual* es 30.

P: ¿Y en el 2b, por qué te parece que es verdadero?

R: Primero porque sumé 9 más 5, que me dio 14, y…, 14 dividido 7…, pará…, no…

P: ¿Qué te parece a vos que te llevó a poner que esta afirmación es verdadera?

R: Seguramente me imaginé que después esto lo tenía que dividir entre 2, entonces, también me iba a dar 7… No sé, no sé cómo llegué a ese planteo.

P: Mh. Si volvieras a pensarlo, ¿cambiarías algo del 1b o del 2b?

R: Seguramente de este (señala el 2b), no sé si del primero.

P: Del 2b cambiarías algo…

R: Sí

P: ¿Qué cambiarías?

R: Que es falso porque…

P: Borremos el *igual* 7 del final. Si vos tuvieras 5 más 9 *igual* 14 dividido 2. Si tuvieras que volver a pensarlo, ¿te parece verdadero, te parece falso, o te parece que pueden ser las dos cosas?

R: Me parece falso porque acá te está dando 14, te está diciendo que esto es igual a 7, o sea, 14 dividido 2, que no, que es otra cosa.

P: Ajá. Entonces ahora pasaría a ser falso.

R: Sí

P: ¿Y con el *igual* 7?

R: No, porque uno es el doble y otro es la mitad. O sea, porque en uno me estás diciendo 5 más 9 que te da 14, y eso no te puede dar 7, pero 14 divido 2, sí.

P: ¿Entonces?

R: No, no sé cómo explicarlo, no…

P: Entonces, no podrías decidir si es verdadera o falsa, tenés la duda…

R: Ahí va

P: Bien, seguimos. En la actividad 3 te planteábamos que 1 más 4 es igual a 2 más 3, entonces, 1 más 4 más a es igual a 2 más 3 más a. Te preguntábamos si eso era verdadero o falso. ¿Qué fue lo que vos pensaste ahí?

R: Dije como 1 más 4 es igual a 2 más 3 que es 5, o sea, ahí está bien. Pero, si haces 1 más 4 más a, yo supuse que a era el mismo número que 2 más 3 más a, entonces, hice que a valiera 1 en los dos casos, entonces, 1 más 4 más a que sería 6 y 2 más 3 más a que también sería 6, entonces supuse que a era 1 y que era verdadero.

P: ¿Y hay algún caso en que esto podría llegar a ser falso?

R: Si a fuera diferente en estos dos casos.

P: A ver, poneme un ejemplo acá en el que a vos te parece que sería falso.

R: No sé cómo explicarlo…

P: Escribilo y ahora me contás.

R: Que…

P: Vos me decías recién, si a vale 1 esto sería verdadero.

R: Mh.

B – Bien, ese era un ejemplo para el cual esto sería verdadero. Yo ahora te pido un ejemplo en que esto pase a ser falso, o a vos te parezca que es falso.

R: Ta, ya sé entonces…, y también es lo mismo, o sea te dice que…, o sea me imagino que a también es lo mismo pero en este caso como cambia este número, si yo supongo 2 más 4, ta es 6, pero en este caso sería 7 y en este 6, no… sí… sí está bien.

P: Seguimos. En la actividad 6 te planteábamos una ecuación, y te preguntábamos qué significa el signo de *igual* que se coloca entre las expresiones de la izquierda y la derecha. Vos respondiste que está demostrando que el resultado de esas dos ecuaciones es el mismo, que están planteados de diferente manera pero su resultado es igual. ¿Te animas a explicarme un poco más qué fue lo que pensaste ahí?

R: Dejame pensar…

P: Dale

R: Es que no es igual…, el resultado no es igual porque ponele x vale 2, si yo sumo 2 más 3 me da 5, y si multiplico 3 por 2 más 5 me da diferente ya. Entonces, ese *igual* no es demostrando que el resultado es igual.

P: Porque… ¿El resultado de qué? ¿A qué te referís cuando hablás de resultado?

R: De la ecuación de $x + 3$ y de la $3x + 5$

P: Entonces, si tuvieras que volver a responder esta pregunta, ese signo de *igual* que se coloca entre esas expresiones, ¿qué significado tendrá?

R: Mmm…

P: ¿Pasamos a otra?

R: Sí

P: En el 9 te planteábamos dos ecuaciones y te preguntábamos si tenían la misma solución. Vos hiciste allí algunos planteos y respondiste que no tienen la misma solución porque en la primera el resultado es 31 y en la segunda es 22. ¿Me contás qué fue lo que pensaste ahí? Primero, de dónde salieron esos números: el 31 y el 22, y si volverías a pensar lo mismo.

R: Agarré el resultado final o sea 31 y le reste 15, y eso me hizo averiguar cuánto tiene que valer x con 2, o sea, 2 por cuánto me tiene que dar 16. Ahí me puse a pensar y dije 2 por 8 es 16, entonces, x es 18. No sé qué te pedía…

P: 2 por x entonces… ¿tenía que valer cuánto me dijiste?

R: 16

P: 16, y entonces ¿el valor de x?

R: Es 8. Entonces después, 16 más 15, 31, y x es ocho. Ta, no sé, eso para mí está bien. Y en el b… no…

P: Vos debajo del $2x$ pones un 16.

R: Seguramente lo planteé como en la a que dije 16+15 me tiene que dar 31, pero ahí hay un -9… ah… 31-9 tiene que ser 22, entonces, es lo mismo, está bien… 2 por x 16, más 15 31, menos 9 es 22. Está bien lo que hice porque el total es 31 menos 9 que me tiene que dar 22, el resultado me está diciendo que es 31 menos 9, que también me da 22. Entonces en los dos casos es 22.

P: ¿Y entonces, tienen la misma solución estas dos ecuaciones? Tú acá contestaste que no, o sea… ¿seguimos con esa respuesta?

R: Solución…

P: Si por un momento nos olvidamos de la segunda ecuación y nos quedamos a trabajar solo con la primera, y te pregunto cuál es la solución de esta primera ecuación, ¿vos qué me decís?

R: Solución… que x es 8… no, o sea, si tiene que ser por lo de 2x sería *igual* porque tuve que hallar el x que… ah claro, es lo mismo porque hice $2x$ o sea 2 por 8 las dos veces, y después más 15 que me tiene que dar 31, pero en uno le resté 9 y en el otro no.

P: Mh… ¿Entonces?

R: Entonces me parece que tienen la misma solución.

P: En la Actividad 7 te preguntábamos si 15 es solución de la ecuación $x - 3 = 15$. Si querés mira para acordarte qué fue lo que respondiste…, y me explicas…

R: No estoy segura pero por lo que leí, por lo que puse, me imaginé que si x valía 18 y le resto 3, la solución tendría que ser 15… Pero si no vale 18, no sería, no sé…

P: Si x vale 18, la solución sería 15…

R: Sí, o sea, el resultado sería 15.

P: Volviendo a esta de acá entonces, a la 9, si x vale 8 la solución es 31

R: No porque también depende del 15, ay me mezcla…

P: Yo lo que veo es que en un caso lo estamos pensando de una manera y en otro de otra, que puede estar bien o no. Es decir, acá en un momento llegamos a la conclusión de que la solución es 8 ¿sí? Pero en algún momento habíamos hablado del 31, entonces, por eso la confusión que tenemos, ¿no?

R: Sí, mal…

P: ¿En qué quedamos entonces? ¿Qué te parece?

R: Solución… Para mí me mezclé con solución y resultado.

P: Ajá.

R: Y la solución no sería 15 sino que x, o sea x tendría que ser la solución, entonces no.

P: Entonces contestarías que no

R: Ahí va. No sé si está bien o mal…

P: Y entonces en la 8, cuando te pedíamos que escribas una ecuación que tenga por solución el número 5.

R: Y está bien ahí…

P: ¿Vos qué hiciste?

R: Eh… Ah claro…, marqué solución como resultado… Puse 10-x que x tenía que ser la solución, y como resultado, o sea lo que te está pidiendo que sea 5, entonces hice 10-5, 5. Ta, pero en este caso tendría que ser esta la solución y este el resultado. Pero…

P: Mh… Pero la ecuación que pusiste, en definitiva ¿tiene solución 5 o no?

R: No sé…, creo que no… No, pará… Sí, para mí sí… No estoy segura, es que no puedo plantear de otra forma esa ecuación

P: ¿Por qué te parece que 5 sí es solución de esa ecuación?

R: Porque al restarle 5 a 10, le estoy restando 5 y el resultado es 5. No sé…

P: No lo tenés claro

R: No, no estoy segura…

P: Lo último que te pregunto. Llegando al final del cuestionario te pedíamos analizar si estas expresiones eran verdaderas o falsas. En la d, $x = x$, tú pusiste que es falso, ¿por qué te parece que eso es falso?

R: Para mí puse falso porque capaz que x en los dos casos no valen lo mismo, no estoy segura.

P: Poneme un ejemplo en el que eso sería falso.

R: O sea… ¿Te lo pongo con números?

P: Sí…

R: (Escribe 1=2) O sea, que la primer x valdría 1 y la segunda 2. Pero ta, si valen lo mismo, o sea ponele 2 es igual a 2, sí.

P: Depende de cada caso entonces.

R: Sí

P: Muchas gracias Rocío.

Entrevista a Miguel (14 años)

Profesor: En la Actividad 1b había que completar los espacios vacios y vos pusiste un 30 y un 33. ¿Te animás a contarme por qué?

Miguel: Porque 3 dividido 90 te da 30.

P: A ver, ¿cómo? 3 dividido 90…

M: Sí, te da 30. Después te pide que le sumes 3, y 30 más 3 te da 33.

P: ¿33?

M: Sí, 33.

P: Y en el 2b vos ponés que esta expresión es verdadera.

M: 5 más 9, 14. Después a 14 lo divido entre 2, 7. Entonces ahí ya está.

P: Si le sacamos el =7. Si nos quedáramos con 5 más 9 *igual* 14 dividido 2, ¿qué pensás?

M: Que eso es falso.

P: ¿Por qué?

M: Porque 5 más 9 da 14, y no estás haciendo ninguna cuenta, estás comparando dos ecuaciones, entonces, ahí estás sumando y en la otra estás dividiendo, y te dan diferentes resultados.

P: Y si agregamos el =7 pasa a ser verdadero…

M: Sí

P: Seguimos… En la actividad 6 te preguntábamos qué significado tiene para ti el signo de *igual* en esta ecuación. Tú pusiste que x+3 y 3x+5 son *igual*es porque te dan el mismo resultado. ¿A qué te referís cuando hablás del mismo resultado? ¿Cuál sería ese resultado, en esta ecuación?

M: No sé… Ahora que me pongo a pensar lo hice mal.

P: ¿Sí?

M: Sí

P: ¿Por qué?

M: Porque son diferentes ecuaciones.

P: ¿Cuántas ecuaciones ves ahí?

M: Dos. $x + 3$ es 3, y 3x+5 te da diferente, no te da el mismo resultado.

P: ¿No?

M: No

P: ¿Qué resultado te da una y qué resultado te da la otra?

M: Acá te da $3x$ y acá te da $8x$.

P: Esta te da $3x$ y esta $8x$… Y por ejemplo, si yo te preguntara cuáles son esos resultados de los que hablás, en la ecuación: $2x + 15 = 31$… ¿Qué significa el signo de *igual* en esta ecuación?

M: Que ahí te da… que $2x$… 2 por 8, que es la solución, más 15, te da 31.

P: Entonces, si vos tuvieras que explicarle a alguien qué significado tiene ese signo de *igual*… ¿Para qué ponemos ese signo de *igual*? ¿Vos qué responderías?

M: Para dar el resultado final.

P: ¿Qué en este caso cuál sería?

M: 31

P: En la actividad 7 te preguntábamos si 15 es solución de esa ecuación y tú pusiste que no, porque el 15 ya está como resultado.

M: Sí

P: ¿Si?

M: Sí

P: ¿Qué pasa por ejemplo en esta ecuación: $3 + x - 3 = 15$, si te volviéramos a preguntar lo mismo?

M: ¿Si la solución es 15?

P: Sí, si la solución es 15.

M: Te da lo mismo. Sí, es la solución ahí. Pero acá no porque… si no te da… no porque te da diferente: 15 menos 3 te da 12.

P: ¿Cuál sería entonces la solución de la ecuación de la Actividad 7?

M: 18

P: ¿Por qué?

M: Porque 18 menos 3 te da 15.

P: Seguimos. En la actividad 11 te pedíamos que resuelvas la ecuación $31 = 4x + 7$. ¿Te animás a contarme cuál fue el planteo que hiciste, y cómo lo fuiste pensando?

M: Primero pensé que 4 por algo te tiene que dar algo, que más 7 te de 31. Entonces, empecé a sumar y vi que el 6, 6 por 4 que te da 24, más 7 te da 31. Entonces hice 24 dividido 4, 6. Ahí ya tenés que 24 más 7 ya es 31, entonces, la ecuación te quedaría 24 más 7 por 31, perdón, es igual a 31.

P: Explícame lo que escribiste en este renglón, el penúltimo.

M: Acá hice… acá, y después saqué el 24 y puse 24 dividido 4 que está acá, me da 6, es la solución.

P: Pero en este renglón anterior ¿qué fue que escribiste?

M: $4x$ es igual a 24, ó más 7 *igual* 31.

P: Ajá. ¿Algo más que me quieras comentar de eso?

A– No.

P: Lo último que te voy a preguntar. En el 14 te planteamos una actividad en la que Juan tenía que reducir términos semejantes, llegó a esta expresión, o sea, escribió esto, y te preguntábamos a vos si la tarea estaba terminada. Vos pusiste que no, porque nunca reduce los términos, sino que suma todos, ve cuanto da, y entonces pone otra ecuación que de lo mismo que la primera. Explícame qué fue lo que pensante acá.

M: Estaba viendo si son las mismas ecuaciones, no las estaba reduciendo.

P: ¿Qué más tendríamos que hacer para terminar con esa tarea?

M: Hacer... para terminar la tarea…

P: Si no está terminada, ¿qué más tendríamos que hacer?

M: Sacar esto, sacar toda la cuenta y poner… eh… reducir te da esto, reduciendo te da eso.

P: Pero… yo te escribo acá lo que escribió Juan… ¿Qué escribirías ahí para terminar con esa tarea, si no está terminada? O sea, escribí por ahí abajo lo que te parezca para terminar con esa tarea... O sino contáme por qué no está terminada.

M: Porque él está diciendo que esta cuenta, esto, es igual a esto. No es que está terminando, no está reduciendo, no sé, para mí está diciendo que son *igual*es, no está reduciendo.

P: Mh... Ajá…

M: Yo lo tendría de otra forma. En verdad está bien, redujo, pero yo lo tomé de otra forma... Como que estaba comparando, que no estaba reduciendo, que ahí está reducido.

P: Bueno, muchas gracias.

Entrevista a Sebastián (13 años)

Profesor: Bueno, vamos a ver. Por ejemplo, en el 1b había que completar estos espacios vacios y vos completaste con un 30 y con un 33. ¿Me contás por qué?

Sebastián: Acá dice 90 dividido 3 que eso me da 30, y entonces es igual a 30. Y si vos a 30 le sumás 3, te da 33.

P: Y en el 2b te preguntábamos si esto era verdadero o falso y vos pusiste que es falso.

S: Falso porque si vos hacés 5 más 9 te da 14, y acá es 14 dividido 2… ah esperá…, puede ser que esta esté mal, porque no sé si acá había un menos o un más. ¿Es un más no?

P: ¿En dónde?

S: Si para hacer… viste que acá es igual a 7, entonces yo lo que hice fue 5 más 9, 14, como separé en términos digamos, y acá hice 14 dividido 2 que me dio 7. Pero si vos hacés 14 más 7 te da 21, entonces yo puse que era falso porque para mí era 21 y no 7.

P: ¿Y si borramos el =7 y yo te dejo eso otro? ¿Tú dirías que es verdadero o falso?

S: Falso…

P: O que no se sabe, que no podes decir nada…

S: También falso creo.

P: ¿Por qué?

S: Porque 14 dividido 2 es 7, y 5 más 9 no es 7, es 14.

P: ¿Y si volvemos al =7?

S: También es falso.

P: También es falso…

S: No sé, capaz le estoy errando, pero para mí…

P: Seguimos adelante. En la actividad 3 te planteábamos que 1 más 4 es igual a 2 más 3, entonces, 1 más 4 más a es igual a 2 más 3 más a. Te pedíamos que vos pensaras si esto te parecía verdadero o falso. Leé lo que pusiste y contáme en qué pensaste.

S: Yo había puesto como que todas estas: 1 más 4 es igual a 2 más 3, como que todas eran verdaderas porque todas me daban como resultado 5, todas me daban el mismo resultado. Si vos hacías 1 más 4 te da 5, 2 más 3 te da 5, 1 más 4 te da 5 y 2 más 3 te da 5.

P: ¿Y qué hacemos con el a? Porque yo ahí veo que estás pensando solamente en los números conocidos: el 1, el 4, el 2 y el 3.

S: Como no sé cuál es a lo puse como x, y como no sabía qué número era, solo me fijé en estos dos numeritos, y ahí puse que era verdadera porque todas tenían como resultado 5.

P: Seguimos.

S: Ah… esta… O sea, en la cabeza la sé, pero no sé cómo explicarlo.

P: En el 4 te planteábamos un símbolo y te preguntábamos cuál era el nombre. Vos pusiste que era el signo de *igual*. Después te pedíamos que explicaras con tus palabras qué significado tenía ese signo para vos, y pusiste que para poder marcar cuánto es que te da una cuenta, ponés el signo.

S: No lo supe explicar bien, no sé si está mal…

P: No, no, está claro, lo que vos pusiste ahí está claro. En el 6 te preguntamos qué significado tiene el signo de *igual* en esta expresión, que es una ecuación: $x + 3 = 3x + 5$. Vos pusiste que $x + 3$ da como resultado $3x + 5$, o sea que el signo de *igual* marca que la cuenta $x + 3$ da como resultado $3x + 5$. ¿Querés comentarme algo más sobre esa pregunta?

S: Es como que marca el *igual* de una cuenta, vos tenés una cuenta y querés saber el *igual*, entonces ponés,… querés saber cuánto da esa cuenta, entonces ahí ponés el *igual* para poder obtener el…, o sea, para poner el número que da la cuentita que hiciste ¿no?

P: La cuentita que estaba al lado izquierdo…

S: Izquierdo… Vos querés saber por ejemplo este resultado, entonces, ponés el *igual* como para decir: esto es igual a $3x + 5$.

P: Seguimos. En la actividad 7 no me quedó muy clara tu respuesta. Te preguntábamos si 15 es solución de la ecuación $x - 3 = 15$. Vos pusiste que tenés que averiguar cuánto vale x para que dé como resultado 15. Después respondés que sí, o sea, x vale 18. Entonces yo te vuelvo a preguntar, ¿es 15 solución de esta ecuación?

S: A ver…, esperá…

P: Miralo tranquilo.

S: Yo acá creo me confundí porque mirá…, yo estaba averiguando a ver cuánto valía esta x y dije ta…, estaba pensando en un número, probando ¿no?, entonces estaba pensando en un número que… este número menos 3 me dé 15. No sé si era esa la consigna.

P: Bueno, entonces vos, ¿cómo responderías a esa pregunta: si es 15 solución de la ecuación $x - 3 = 15$?

S: En realidad había que hacer una ecuación ¿no?

P: ¿Qué ecuación?

S: Digo, para averiguar si es 15 la solución.

P: ¿Resolver una ecuación decís vos?

S: Ahí va.

P: Bueno, ¿y cómo la resolverías? Si necesitas escribir acá… ¿Qué hiciste del primer renglón al segundo?

S: Acá pasé, como que en la ecuación hay que ir sacando números para poder obtener cuánto es x, entonces yo lo que hice acá… saco -3, o sea, pongo $+3$, porque como acá está negativo y acá…

P: ¿Por qué acá también?

S: Porque… ¿no siempre tiene que ir de los dos lados?

P: ¿Por qué?

S: Porque si no para poder como que… para que te queden *igual*… porque si por ejemplo en uno hacés +3 y en otro +6 capaz que… como que no queda, es que no sé cómo explicarlo…

P: No queda *igual*, como dijiste recién…

S: Ahí va, no queda *igual*. Y me dio… y después a 15 le sumé 3, me dio 18, entonces me quedó que x es igual a 18, y ahora lo tengo que hacer dividido tres, ¿no?

P: ¿Por qué te parece que tenés que hacerlo dividido tres, ahora?

S: Porque siempre que hacés una ecuación, siempre tenía… yo a lo último siempre ponía el dividido… o el número que estaba acá, pero como ahora es x...

P: Bueno, pero con lo que tenés hecho hasta ahora, ¿será 15 solución de la ecuación o no? ¿Podemos contestarlo? ¿No sabemos? ¿Sí? ¿No?

S: Yo creo que no, porque da como resultado 18. Pero acá justo también me dio cuánto vale x, y me dio 18, entonces x es igual a 18, entonces acá haces 18 menos 3 y da 15.

P: ¿Entonces?

S: Yo creo que sí, ¿no? Que es solución.

P: Que es solución… Una de las últimas cosas que te voy a preguntar. En el 10 te decimos que 9 es solución de la ecuación $x + 18 = 27$ y te preguntamos si 9 también es solución de esta otra ecuación. Vos respondiste que no, porque para vos viendo las dos cuentas a ojo te podés dar cuenta que tienen distintos resultados. ¿A qué te referías con eso?

S: Que por ejemplo, si vos mirás acá, como que…para mí… como que da distinto resultado, porque tiene como más números y… no sé, está mal…

P: No, no lo sé…

S: Tiene como… Yo lo veía así a simple vista y para mí, me doy cuenta que no son *igual*es porque como que esta tiene más números y esta solamente tiene dos, no sé…

P: ¿Y si tuvieras ahora la posibilidad de escribir algo más como para sacarte la duda? Porque vos hablás de que lo ves a ojo…

S: Sería bueno hacer las cuentas ¿no?

P: ¿Qué cuentas?

S: La ecuación.

P: ¿Resolverla decís vos?

S: Sí.

P: Pero viste que dice que respondamos sin resolver.

S: ¡Ah!... sin resolver…

P: O sea, sin hacer lo que hiciste acá.

S: Sin resolver la ecuación…, tampoco sin sumar por ejemplo 18, tengo que hacer con el número acá…, todo eso…

P: Eso sí podes

S: Pero sin escribirlo.

P: No, podés escribirlo…

S: ¿Ah, se puede?

P: Sí

S: Acá va un 9, ¿no?

P: Mh

S: 9 más 18 me da 27, y ahora acá…, yo acá…, más 11, esperá…, esto acá…

P: Escribime acá mejor… Esta es la segunda ecuación.

S: Entonces acá…, esto me da 29, y entonces tengo que hacer… tengo que hacer un número acá que… esto es un 11, entonces me da 38, entonces menos…

P: Pero vos ahí la estás tratando de resolver, que es distinto de lo que me habías dicho hace un rato que ibas a hacer. Resolver no podemos.

S: Ah, ah, pensé que…

P: O sea, esta cuenta si, pero lo que estás intentando hacer ahora, que es averiguar el valor de x, a partir de las cuentas que hiciste, eso no va.

S: Ah, ¿eso no?

P: ¿Te parece que la respuesta volvería a ser la misma o no nos queda claro?

S: No, para mí esta no es una respuesta clara, porque haciéndola así a simple vista y eso… como que habría que explicar un poco más por qué…

P: Yo lo único que te pregunto es a qué te referís con esto de distinto resultado ¿resultado de qué?

S: De esto, por ejemplo acá ya me da 27 más 11, que eso me da 38, y acá está me da como resultado 27.

P: Bueno, muchas gracias.

Sesiones de trabajo

Sesión 1

Profesor: Vamos a conversar entre todos chiquilines. Yo sé que algunos grupos no terminaron pero vamos a compartir lo que pensamos hasta ahora. Trabajaron muy bien en cada grupo, ahora vamos a ver si podemos compartir lo que pensamos con el resto de los compañeros. Destaco que en cada equipo se tomaron la tarea en serio y la trabajaron bien. No estoy diciendo que lo que hayan hecho concretamente desde el punto de vista matemático esté bien o no, estoy diciendo que se lo tomaron con seriedad y que armaron ciertas clasificaciones con criterio. Ahora me gustaría que esa eficiencia que tuvieron para trabajar en cada equipo la tengamos para compartir lo que hicimos con el resto de los compañeros. Empezamos con un grupo cualquiera, no sé, por ejemplo ustedes, acá en el centro, cuéntenos a ver, fuerte para que nos escuchemos todos.

Martina: El primer grupo que hicimos eran todas las expresiones que tenían una equis, que eran casi todas. Después hicimos un sub grupo que eran las que no tenían potencia, las que tenían potencia x^2 y x^1, y las que tienen solo equis de un lado.

Profesor: A ver si entiendo, por un lado expresiones que tienen equis y expresiones que no ¿estoy bien?

Martina: Si

Profesor: Ese criterio fue compartido por varios grupos

Varios: Si

Profesor: Por todos, diría

Varios: Si

Profesor: Bien, dentro de las expresiones que tienen equis, repítanme cómo fue que…

Martina: Las que tienen potencia, y las que tienen potencia…, o sea ese era un sub grupo del sub grupo que eran las que tenían potencia x^2 y solo x

Belén: x^1, x^2, o sea las que tenían potencia y las que no

Martina: Y otro sub grupo eran las que tenían solo equis de un lado de la ecuación

Profesor: ¿No importaba de cuál?

Martina: No. Otro grupo eran las que tenían números negativos o sea, las que su resultado era negativo

Profesor: ¿Por ejemplo?

Martina: F

Profesor: ¿Qué otra?

Belén: No, una que tenía número negativo, no importaba si el resultado que tenía dentro de la ecuación era un número negativo

Martina: Por ejemplo la F tiene -9

Profesor: Si dentro de la expresión había un término negativo, por ejemplo la F ¿otra?

Martina: No, no encontramos ninguna más

Profesor: No encontraron otra.

Martina: Otro grupo eran las que no tenían números negativos, que eran todas menos F. Otro grupo eran todas las que su resultado era par.

Profesor: ¿Y a ver eso?, cuéntenos un poquito a todos esa última idea.

Martina: O sea nosotros una parte de la tarjeta como que la reducíamos y después hacíamos la cuenta y verificábamos si el resultado era par o impar y ta, lo dividíamos en los grupos.

Profesor: Dígannos, este es un criterio que manejaron ellos, después podemos discutirlo, dígannos alguna tarjeta donde ustedes creen que el resultado es…

Martina: F.

Profesor: Por ejemplo la F, en dónde el resultado cuál sería…, o sino la miramos allá en el pizarrón: $2x + 15 - 9 = 31 - 9$, ¿cuál sería el resultado en esa expresión para ustedes?

Alfonso (equipo 1): Complicada esa…, la D por ejemplo.

Profesor: La D.

Alfonso: 22.

Martina: 22 es par.

Profesor: El 22 sería la F y por eso la pusieron dentro de las que tienen resultado par.

Varios equipo 1: Si.

Profesor: Bien, ¿alguna otra? Me dijeron la D, ¿cuál sería el resultado ahí?

Varios equipo 1: 16.

Profesor: ¿Y está escrito del lado izquierdo o derecho? Del lado izquierdo… Bueno, ¿alguna con resultado impar?

Martina: La A.

Profesor: La A: $11 + 6 = 17$ ¿otra?

Martina: La W.

Profesor: W, ¿por qué esa les quedó con resultado impar?

Martina: Me confundi, Pará, no veo nada.

Profesor: $3x + 5 = 2x + x + 5$

Martina: Ta, esa no era impar. La Y es impar.

Profesor: La Y: $2x + 15 = 31$. ¿Qué opinan los demás sobre este criterio de los compañeros? Este último criterio, ¿alguien tiene algo para decir?... ¿no? O sea, están de acuerdo, lo comparten, no lo entienden, les parece bien…

(Varios discuten al unísono)

Martina: No, pará, ahora hay un sub grupo.

Profesor: ¿A ver?

Martina: O sea, hay otro grupo que es los que no sabemos si es par o impar porque no sabemos el resultado.

Alfonso: $x = x$ no sabés si es par o impar.

Profesor: Ustedes tienen una categoría más en ese criterio…

Alfonso: Si, son 5

Profesor: 5 tarjetas que no supieron saber si el resultado es par o impar ¿por ejemplo?

Martina: O

Alfonso: Z

Profesor: En la Z: $x = x$, ¿por qué ahí no saben si es par o impar el resultado?

Alfonso: Porque la x ahí puede ser 5...

Martina: Puede ser cualquier número, puede ser un número impar o un número par

Profesor: ¿Qué otra?

Martina: La V

Profesor: La V: $5 + x = 5 + x$, ¿ahí la explicación cual sería?

Martina: O sea, como no sabemos cuál es x, no sabemos qué número es x, no sabemos cuál es el resultado

Profesor: A ver, Rodrigo…

Rodrigo: Para mí no es muy certera esa porque en la ecuación no sabes bien cuál es el resultado, no podes saber si el resultado es par o impar

Jaime: Se podría poner otro…

Rodrigo: Claro…

(Discuten varios al unísono)

Profesor: A ver, de a uno, es interesante la discusión pero de a uno.

Rodrigo: O sea, podés poner un criterio como el que habían dicho antes, que sí diferencia a todas, pero este como que no es muy certero digamos, o sea, puede estar bien o mal.

Profesor: No es muy certero porque depende…

Rodrigo: No sabemos los resultados. Es una ecuación, tendríamos que saber los resultados de todos y es una transa.

Profesor: Jaime.

Jaime: Estas haciendo un criterio de algo que no sabes, en vez de hacer otro criterio del que podrías saber algo… en este como que no sabes los resultados

Profesor: Claro, pero ellos tienen un par de tarjetas en donde dicen que no saben justamente dónde ponerlas…

Paola: Pero cualquiera que tenga equis de los dos lados no vas a saber cuál poner, porque no sabes si el número es par o impar

Profesor: ¿Ustedes clasificaron como par o impar, con resultado par o impar, alguna expresión en donde la x esté de los dos lados?

Varios equipo 1: Si

Profesor: ¿Por ejemplo?

Belén: Solo una tiene una x de un lado y…

Martina: Si

Belén: Fíjate cual

Martina: Si pero no sé cuál…

Profesor: ¿O mirándolas allá, de pronto?

Belén: En cuáles dijimos que eran pares… Decime una que sea par

Martina: F

Belén: ¿Y F tiene equis de los dos lados o no?

Martina: Mirá en el pizarrón

Profesor: Bueno, lo dejamos en suspenso… Otro grupo, vamos a otro grupo, vamos allá, los escuchamos… Van a participar todos los grupos pero nos escuchamos, ustedes, vamos.

Tomás (equipo 3): Nosotros pusimos lo de ellos, lo de los pares. También pusimos las que se reducen y las que no se reducen.

Profesor: Expresiones que se reducen y otras que no.

Tomás: Sí, y además las que tienen paréntesis y las que no tienen paréntesis.

Profesor: Díganos algún ejemplo de una expresión que se reduce.

Tomás: La A.

Profesor: ¿Y alguna que tenga x?

Tomás: La J

Profesor: La J que… ¿cuál es? ¿Qué dice?

Tomás: $2x + 12 =$…

Federica (equipo 3): O la M… No, la Q tiene paréntesis

(Varios equipo 3 discuten)

Federica: La N.

Profesor: ¿La N?

Federica: $7x + 2x = 9x$

Profesor: $7x + 2x = 9x$, esa entraría dentro de las que se reducen.

Federica: Si

Profesor: ¿Y qué no se reducen?

Federica: La V larga

Gerónimo Gutiérrez (equipo 3): La O

Profesor: ¿La O por ejemplo? ¿Qué sería ahí?

Gerónimo: $x + 3 = 3x + 5$

Profesor: ¿Algún criterio más?

Gerónimo: El de los paréntesis. Y también nos surgió una pregunta que es, si lo que estás simplificando está del lado izquierdo sigue siendo una simplificación y… o sea, ahí nos surgió la pregunta, y creemos que sí porque no importa el lado, o sea, si está simplificado…

Profesor: ¿Qué tarjeta concreta les creó la duda de esta cuestión de que si está simplificando o no?

Gerónimo: $4x = 3x + x$ que no recuerdo cual es la letra.

Federica: La T.

Gerónimo: La T, pero creemos que si porque no tiene valor de qué lado este.

Profesor: ¿De qué lado esté qué cosa?

Gerónimo: Simplificado o distribuido, si usaste la propiedad distributiva para juntar todo o para separar todo.

Profesor: ¿Entienden la duda que tenían los compañeros? Ellos hicieron allí una clasificación entre expresiones en donde hay reducciones y en las que no.

Gerónimo: Si

Profesor: Pero se les generaba la duda por ejemplo en la tarjeta T, donde aparece 4x=x+3x. Ellos ahí tienen la duda si hay una simplificación, hay una reducción, o no. ¿Qué opinan los demás?

Varios: Que sí…

Profesor: ¿Todos opinan que sí? ¿Todos están de acuerdo con eso?

Rodrigo: Sería $4x$ y $4x$

Profesor: $4x$ y $4x$, bien. ¿Algún criterio más por acá?... Seguimos, ustedes chiquilines, a ver…

Faustina: Los de nosotros ya los dijeron todos.

Profesor: Me parece que no.

Faustina: Ah, no…

Candelaria: El primer criterio fue el de orden alfabético, que ta…, y después pusimos los que x puede valer cualquier número y se sigue cumpliendo la *igualdad*, y los que tiene que ser un número específico.

Fa: Eso es cuando tiene la misma cantidad de x de cada lado, entonces puede ser cualquier número porque tiene la misma cantidad de x, y si ponele, tiene $2x$ de un lado y $3x$ de otro, capaz que no puede ser el mismo número…

Candelaria: No puede ser cualquier número.

Faustina: Ahí va, tiene que ser uno específico, tenés que hacer la cuenta para saber qué número es.

Profesor: ¿Qué opinan sobre esto? Es interesante lo que están planteando ellos acá, como todo lo que hemos escuchado. Pero ahora analicemos en particular eso. Primero, ¿lo escucharon?

Varios: Si

Profesor: Ellos están diciendo que hay expresiones en donde x puede valer cualquier número, corríjanme, a ver, si me equivoco

Varios equipo 5: Sí

Profesor: ¿Sí? y otras en dónde tiene que valer un valor específico. ¿Un valor específico para qué?

Candelaria: Para que se cumpla la *igualdad*.

Profesor: Para que se cumpla la *igualdad* dice. ¿Qué opinan de eso los demás?

(Varios hablan al unísono)

Profesor: ¿Sí? ¿Están de acuerdo? A ver Rodrigo…

Rodrigo: Para mí que no porque si es una ecuación se supone que el x siempre va a ser *igual* para que te dé el mismo resultado.

(Varios hablan al unísono)

Profesor: De a uno, primero Jaime y después vamos para allá de vuelta.

Jaime: Por ejemplo, $x = x$ que por ahí puede valer 4 o… la *igualdad* siempre te va a dar… Puede ser con cualquier número ahí. Pero en cambio, en la I por ejemplo, tiene que ser si o si un número específico, o sea la x tiene que ser un número específico.

Profesor: ¿Y cómo nos damos cuenta en qué caso la x…? A ver allá, Gerónimo

Gerónimo: Cuando la x está solamente de un lado, tiene que ser un valor específico porque como el otro ya es el número… O sea, no hay manera de modificarlo, tenés que llegar de ese lado con esa x, suponete $2x + 1$, 17, con esa x tenés que llegar a 17. Pero sin embargo, con equis de los dos lados, vos podés hacer que la *igualdad* sea el número, o sea, entre las soluciones un número que vos quieras pero de los dos lados puede variar hasta el mismo número.

Profesor: Interesante lo que dice Gerónimo. Él dice: si la x está sólo de un lado entonces va a tener que valer un valor específico, ¿sí? Y si está de los dos lados debe valer cualquier número. ¿Qué opinan?

(Varios hablan al unísono)

Profesor: A ver, por acá…

Mateo: Que está bien pero en realidad no tiene por qué ser uno… Puede ser que haya cinco equis de un lado y cinco equis del otro, pero sigue siendo la *igualdad*. O sea, que esté la misma cantidad de cada lado, se cumple la *igualdad*

Profesor: Para cualquier número.

Varios equipo 5: Si.

Profesor: Bien, ustedes están encontrando con otra forma de darnos cuenta cómo clasificar estas expresiones de un lado y del otro, pero no me están diciendo nada sobre lo que acaba de decir Gerónimo… Más manos, alguien que no haya hablado, a ver, volvemos para allá…

Juana: Que por ejemplo en O hay x de los dos lados pero tiene que ser un número específico porque si no como que no te da, imagínate x fuera dos, dos más tres, cinco, pero del otro lado no te da cinco, porque tres por dos más cinco…

Profesor: ¿Gerónimo?... Tiene razón… ¿A ver…?

Federica: No, porque en O de un lado es una sola equis y del otro lado son tres equis. O sea, no es la misma cantidad de equis de los dos lados. O sea, eso no cuenta como una ecuación que puedas usar x, el valor que quieras, porque hay diferente cantidad de x de los dos lados.

Julieta: Pero el criterio de Gerónimo nunca dijo que tenía que haber la misma cantidad de equis de los dos lados.

Profesor: De acuerdo.

Julieta: Dijo que tenía que haber una variable de cada lado, o sea, no importa el número de equis… No importa la cantidad de equis…

Profesor: A ver, capaz que entendimos mal…

Gerónimo: Lo que dijo Juana ahí es tres, o sea, son tres equis no es solo una equis, entonces ahí si multiplicas te va a dar diferente pero yo lo que decía era, si de los dos lados hay una variable, que no tiene que estar multiplicada o puede estarlo, ahí va a ser el mismo valor…

Federica: Pero tiene que ser la misma cantidad de equis…

Gerónimo: Por eso, la misma cantidad de equis

Federica: De los dos lados

Gerónimo: De ambos lados

Profesor: La misma cantidad de cada lado. Quedó grabado, vamos a ver si lo dijiste antes *igual* que ahora (varios se ríen). A ver acá…

Faustina: Ta, era eso, que tiene que haber la misma cantidad de equis de los dos lados, o sea, cero o veinticinco equis, tiene que dar *igual* de los dos lados.

Profesor: Y entonces…

Julieta: No, quería decir lo que dijo Gerónimo… O sea, para que sea un número específico tiene que haber la misma cantidad de equis de los dos lados, por ejemplo, en la Q hay dos equis de un lado y hay una equis del otro, y no tiene por qué ser un número específico, ¿entendés? Y no sé, en la ecuación…

Jaime: En la O…

Profesor: ¿En la O por ejemplo?

Julieta: No, en la O no porque hay una equis y en el otro lado hay tres equis

Profesor: ¿Y cuál queres buscar ahora? Ahí me perdí un poquito

Julieta: Una que tenga la misma cantidad de equis de los dos lados

Profesor: Por ejemplo la N, ¿te sirve?

Julieta: A ver…, ¿dónde está?

Jaime: Si, si, te sirve

Julieta: Si porque están distribuidas distintas pero la cantidad…, el valor absoluto es el mismo

Profesor: O sea que ahí ¿qué pasaría? ¿La x puede valer cualquier número o uno en particular?

Julieta: Pará, estoy pensando… Tiene que valer uno en especial

Profesor: ¿Uno en particular?

Julieta: Sí, porque por ejemplo si lo haces…ah no, no, no, no tiene por qué valer uno en especial porque ponele que lo haces con dos ¿no?, siete con dos catorce, más dos por dos que es cuatro dieciocho, y nueve por dos dieciocho… Y si lo haces ponele con uno pasa lo mismo: siete por uno siete, más dos nueve, y nueve por uno nueve.

Profesor: Ahí te entreveraste con las cuentas pero da *igual*, da *igual* de los dos lados.

Rodrigo: Ahí volvió a decir lo que había dicho Gerónimo.

Profesor: ¿En qué sentido?

Rodrigo: Si había un equis de un lado tiene que ser un valor específico, y si hay las mismas equis de los dos lados como que podes vos llevar a que sea cualquier número. O sea, los que dijeron que si había un equis de un lado, o sea, la misma cantidad de equis de cada lado tendría que ser uno específico no, porque por ejemplo en el Z, no tiene por qué ser, si fuese imagínate, puede ser 2 y 2, 8 y 8.

Profesor: Ajá. Y yo pregunto una cosa y ya con esto vamos a ir redondeando ¿de acuerdo? Pregunto una cosa, si yo tuviera esta expresión: 5x=5x+1, ahí tengo la misma cantidad de equis de cada lado y quiero saber si acá x puede valer cualquier número, o puede valer uno solo, o qué pasa…

Jaime: El 1 ese te cambia todo

Profesor: Levantando la mano… ¿Qué pasa en ese caso, $5x = 5x + 1$? ¿Qué pasa en ese caso? Calandra…

Alfonso: Es imposible porque la equis el valor que tenga de un lado lo tiene que tener del otro. Si sumás 1 es imposible que sean *igual*es.

Profesor: ¿Entonces ahí para vos qué valor puede tomar x?

Rodrigo: Cualquiera… No, no…, ninguno.

Alfonso: No es posible eso así como está, porque no es igual.

(Varios hablan al unísono)

Rodrigo: La ecuación va a ser fácil. Si vos pones, por ejemplo, cinco por dos diez, y cinco por dos más uno once, siempre te da mal.

Profesor: Bueno entonces, a ver, veo más manos, sí, por allá, ustedes.

Candelaria: No importa cuánto sea equis la ecuación no se va a cumplir porque ponele que hacés balanza, te queda…, sacás 5 de cada lado te queda 0 y 1, o sea no se va a cumplir la ecuación.

Profesor: Mh. En eso caso no se va a cumplir para ningún valor.

Mateo: No, para mí está mal, porque eso no es igual.

Paola: No se cumple la equivalencia

Profesor: ¿Y qué significa que sean equivalentes?

(Varios responden al unísono: que tengan el mismo valor)

Profesor: A ver, levantando la mano. Ejemplos, así rápidos, en donde uno pueda hablar de equivalencia… Lo primero que se me viene a la cabeza

Rodrigo: En esa ecuación sacarle el +1 y ya está

Profesor: Le saco el $+1$, $5x = 5x$…

Rodrigo: Si.

Profesor: Más ejemplos de equivalencia, así, cómo rápidos…

Federica: 2=2

Profesor: 2=2, ¿algo más?

Mateo: $2x = 1x + 1x$

Profesor: $2x = 1x + 1x$. Más ejemplos de equivalencia quiero, más ejemplos…

Mariana: $2 + 3 = 5$

Profesor: $2 + 3 = 5$. Usando equis, usando equis más ejemplos de equivalencia…

Juana: $2x + 3 = 1x + 1x + 4$

Profesor: Ahí…

Juana: No, es que lo había pensado sin equis. Había pensado $2 + 3 = 1 + 4$.

Profesor: Y ahí te entreveré.

Martina: $5x = 2x + 3x$

Paola: $x = x$

Profesor: Pregunto, cuándo uno escribe por ejemplo, $2x + 1 = 17$, ¿ahí podemos hablar de equivalencia, no podemos hablar de equivalencia?

Mariana Cómo, cómo, no escuché

Profesor: Agarré la tarjeta I y yo pregunto ¿puedo hablar de equivalencia o no puedo hablar de equivalencia? La trajeron ustedes esa palabra, yo no, ustedes. ¿Ahí podemos hablar de equivalencia, o no podemos hablar de equivalencia? A ver Nicole…Nos escuchamos, nos escuchamos para opinar después…

Nicole: Depende de qué sea equis, o sea, del valor de equis porque…

(Varios discuten al unísono)

Juan: Si es ocho, dos por ocho dieciséis, más uno diecisiete. Depende del número que vos le busques.

Rodrigo: Ahí si tiene que ser un valor específico para que la ecuación sea cierta, ¿entendés?

Juan: Si es un cualquiera, no, pero si es justo ocho ahí sí te daría la ecuación

Nicole: Si es ocho, si es ocho equis, entonces sería una equivalencia, pero si no es 8, no.

Rodrigo: Pero tiene que ser 8

(Varios discuten al unísono)

Martina: O sea, todo depende cuanto valga x porque si x vale, no sé, 6, no te daría, daría 13.

Josefina Bartesaghi: Tenés que encontrar una solución que permita la equivalencia, ocho.

Profesor: ¿Escucharon lo que dijo Josefina?

Varios: No

Juana: Que para que sea equivalente tenés que buscar una solución para x que permita la equivalencia.

Profesor: Que permita la equivalencia. Entonces…

Jaime: O sea, depende del valor de equis.

Profesor: Depende del valor de equis dice Jaime

Mateo: O sea, es equivalente siempre y cuando x sea 8.

Profesor: Entonces para redondear chiquilines, y trabajaron muy pero muy bien, si en pocas palabras tuviéramos que definir de qué manera estamos usando el signo *igual* en estas expresiones, me gustaría que fuésemos capaces de establecer dos o tres categorías como para que nos termine de quedar esto claro, es decir, en algunos casos usamos el signo de *igual* en tal y tal condición, y en tal caso el signo de *igual* significa tal otra. Me gustaría que en estos minutos que nos quedan podamos resumir esto en esos términos, ¿se entiende lo que dije o no se entendió nada?

Varios: Más o menos

Profesor: Yo veo el signo de *igual* 25 veces ahí, pero por lo que ustedes me contaron a veces el signo de *igual* significa una cosa y a veces significa otra… ¿o yo estoy confundido?

(Varios responden al unísono)

Profesor: Levantando la mano

Jaime: Eso fue lo que preguntante en el cuestionario…

Mateo: ¿Es en tres categorías?

Profesor: No, dos, tres, las que quieran, o una sola. Capaz que usamos siempre lo mismo, capaz que el signo *igual* significa siempre lo mismo, es lo que les estoy preguntando y con esto redondeamos. Dale, a ver…

Julieta: Que el signo *igual* tiene significado dependiendo de lo que haya de cada lado. Si lo que hay de cada lado tiene el mismo valor numérico, se puede decir que el *igual* está bien usado

Jaime: No, le tenés que decir que…

Julieta: Ahí va, eso, o sea el *igual* define…

Profesor: A ver, lo pensamos…

Jaime: Hay veces que significa que los valores de un lado y del otro del *igual* son equivalentes, pero en otras, por ejemplo la cuenta, puede dar el resultado de una cuenta. Depende del coso significa distintas cosas, ¿entendés?

Rodrigo: No, en realidad el único significado es igual a, tanto más tanto es igual a, 1+1 es igual a dos.

Profesor: Si yo dijera: uso del signo de *igual* en la expresión. ¿Cómo clasificarían estas tarjetas? ¿Todas adentro del mismo grupo? O dirían: no, estas van acá y estas van acá, porque acá uso el signo *igual* de esta manera y acá uso el signo *igual* de esta otra. ¿Se dividen o me quedarían todas juntas? Si yo pienso en el uso del signo de *igual*… Esa es la pregunta.

Mateo: Supongo están separados porque por ejemplo en la Z o en la V el signo de *igual* puede significar que el número que está a la izquierda es exactamente el mismo que está a la derecha, pero en A no es lo mismo, o sea, el valor absoluto sí, pero no…

Profesor: Mh. Esa sería una posible respuesta.

Paola: O sea, ¿puede ser que en uno te dé el resultado, y en el otro te dé dos cuentas? Como que en uno ya sabés el resultado y lo tenés que sumar a ver si te da, y en el otro tenés que hacer las dos.

Profesor: Mh. Por allá, Gerónimo.

Gerónimo: Que en ambos lados del signo está expresado el mismo valor numérico…

Profesor: ¿En qué caso sería más simple y en qué caso más complicado?

Gerónimo: $8 + 8$ es más simple por estar *igual* de los dos lados, pero por ejemplo en la O, no, en la Q, está bastante complejo pero lo resolvés como resolvés cualquier cuenta, tenés lo mismo a los dos lados pero expresado de diferente manera.

Profesor: ¿Y allá?

Martina: Que no tiene x que es como para que cada cuenta te da un número, y en el otro caso puede ser con x que te sirva para descubrir qué valor es

Profesor: Bien, ¿y si me olvido de las 5 tarjetas que no tienen x? Me quedo con las otras 20 tarjetas y me pongo a pensar otra vez en el uso del signo de *igual*: ¿quedan todas las tarjetas dentro de la misma categoría, o tengo que hacer alguna distinción?

Agustina Howard: Podrías dividir si no tenés la x, números que la suma de un lado y del otro dé lo mismo, o que la resta de un lado y del otro dé lo mismo.

Julieta: En las que tiene que dar un resultado sí o sí, para mí que son una categoría y las otras no

Profesor: Que tiene que haber un resultado sí o sí… ¿a qué te referís?

Julieta: A que la x tiene que valer un número determinado, porque si no por ejemplo, en la Ñ si decís que la x vale un número determinado es imposible, ahí el *igual* está mal usado.

Mateo: De los dos lados tiene que ser el mismo valor

Profesor: Mh. Bueno, ¿algo más?

Federica: Si x es igual, el signo *igual* siempre tiene, o sea, su función es marcar que de los dos lados está el mismo valor, o sea, no importa cómo llegás al resultado, si está puesto como la V que dice que es igual a 8, pero el signo de *igual* indica que de los dos lados es lo mismo.

Gerónimo: Es los mismo sin expresar, o sea, sin importar la manera que esté expresado.

Profesor: Bueno, muy bien. Gracias chicos.

Sesión 2

Profesor: Bueno, vamos a tomarnos unos minutos ahora para conversar sobre la segunda cuestión, la pregunta que tenía que ver específicamente con el signo de *igual*.

Rodrigo: Hay algo que acá se confirma… lo que ayer decía Gerónimo, que si había *igual* equis de cada lado, va *igual* equis no, si había una equis de un lado por lo menos y otra equis de otro lado, no importa cuántas, si hay por lo menos una equis de cada lado, puede ser cualquier número, no tiene por qué ser uno específico.

Profesor: Bueno, ahora le preguntamos a la clase si eso es así. A ver, vamos a escuchar todos lo que queramos decir. ¿Quién quiere empezar a hablar? A ver Mateo…

Mateo: Que en la expresión A x puede valer cualquier número pero siempre se va a cumplir la *igualdad*, y en la B es un número específico, es 3.

Profesor: ¿Quién puso algo parecido a lo de Mateo?

Federica: ¿De la primera o de la segunda?

Profesor: Estamos hablando de las dos expresiones.

Federica: De la primera hoja…

Profesor: Ah no, de la segunda hoja… Bueno, primera segunda, tienen que ver las dos una con otra. Dice el compañero (Mateo) que en la primera, equis puede valer cualquier número, y en la segunda, un valor específico. ¿Cuál sería ese valor, Mateo?

Mateo: Creo que tres

Profesor: ¿Vos Rodrigo qué decías?

Rodrigo: Para mí puede ser cualquiera, o sea, si hay dos equis de cada lado por lo menos, puede ser cualquier número, no tiene por qué ser uno específico.

Profesor: ¿En las dos?

Rodrigo: Si, o sea, si las dos equis son *igual*es, ¿entendés?

Profesor: Eh… sí, entiendo más o menos, no sé el resto de la clase…

Rodrigo: Vos imagínate, en la izquierda hay una equis como ahí, y en la derecha hay otra equis, cada equis vale lo mismo, porque puede ser cualquier número… en esta ecuación.

Profesor: Vos decís que en estas dos expresiones, en ambos casos, como hay equis de los dos lados, equis podría valer cualquier número, ¿te entendí bien? Y que eso, vos decías, era un poco lo que decía Gerónimo ayer. Gerónimo, vamos con vos…

Gerónimo: … al no haber la misma cantidad de equis, no puede ser…

Profesor: O sea que vos estás agregando una condición más

Gerónimo: Si

Profesor: No alcanza solamente con que haya equis de los dos lados, sino que además, tendría que haber la misma cantidad… ¿Rodrigo?

Rodrigo: No sé… Por ejemplo la primera, cualquier número, si equis es cualquier número está bien… Pero en la segunda las equis son *igual*es…

(Varios discuten al unísono)

Profesor: A ver Candelaria…

Candelaria: En la primera de cada lado hay $5x$. En la segunda, en un lado hay 6 y el otro hay 5, entonces en la segunda tiene que ser un valor específico.

Jaime: Si, al no haber la misma cantidad de equis…

Rodrigo: No, porque después está cuatro y más siete.

Candelaria: Claro, pero *igual*, cuando haces la balanza…

Profesor: ¿Cómo lo convencemos a Juan de que solo sirve con un número?

Tomás: Por ejemplo, ponele 6

Mateo: O 5

Tomás: No, 6 creo que da

Felipe: No

(Varios discuten al unísono)

Profesor: ¿A ver?

Miguel Arocena: Juan, si haces con 1: cinco por uno cinco, más siete doce, seis por uno seis, más cuatro diez.

Profesor: Por ejemplo cuando x vale 1, dice Miguel, de un lado nos queda 12, del otro 10 ¿tiene razón, no? Bueno entonces, a ver Jaime…

Jaime: Si la cantidad de equis es diferente en los dos lados del *igual*, o sea, no puede ser un valor cualquiera, tiene que ser uno específico, ya lo había dicho.

Rodrigo: ¿Cómo, cómo?

Profesor: Que cuando hay distinta cantidad de equis de cada lado, según lo que dijo Jaime, lo que dijo hace un rato Gerónimo también, ahí la equis tendría que valer un valor específico, y cuando hay distinta cantidad de equis… Dale (a Felipe Pérez)

Felipe: Pero por ejemplo, si en la de arriba no hubiera siete y siete, y hubiera otro número, no da…

Profesor: A ver, ¿cómo es eso?

Felipe: Que no importa si tiene la misma cantidad de equis de los dos lados, también tiene que tener la misma cantidad de los otros números que no tienen equis, tipo independientes, para que sea cualquier número la equis.

Profesor: ¿Qué opinan de eso? Pedro…

Pedro: Que sí, porque por ejemplo si de un lado sería siete y del otro cinco, eh… por ejemplo si lo hacés con 2, te daría diez por dos más siete y diez por dos más cinco, te daría 25 y 27, entonces no podría ser cualquier número.

Profesor: Y diez por dos… ¿Qué cambios hiciste ahí? Me perdí un poquito, pero capaz que fui yo nomás…

Pedro: Dos equis más tres equis te da cinco equis

Profesor: Sí, entonces ahí estás cambiando la x¿por cuánto?

Pedro: Por 2, entonces… ah pará, sería cinco equis dos más siete y cinco equis dos más cinco, y cinco equis te da 10, más siete diecisiete, y cinco equis dos te da diez, más cinco quince.

Jaime: Pero ahí hay la misma cantidad de equis de los dos lados, y la misma cantidad de número…, entonces ahí sí se puede con cualquier número.

Rodrigo: Pero…

Profesor: ¿Dónde vez la contradicción Rodrigo?

Rodrigo: Cuando… ahí no hay equis distintas ¿no? En el A puede ir cualquier número…

Profesor: Al parecer estamos diciendo eso

Rodrigo: Entonces se están contradiciendo, ¿no habían dicho que si hay distintas equis de un lado y diferentes…?

(Varios le responden al unísono)

Profesor: A ver, Agustina

Agustina: Para mí puede haber más de un número en estás que tienen la equis de los números y los que no tienen la equis, y pueden haber más que un número en un lado sin equis, porque si vos ponés por ejemplo, la misma cantidad de equis en la B, o sea seis equis más siete menos cuatro, entonces, y tenés la misma cantidad de equis, más la cantidad de números que te dé del otro lado *igual* …

Profesor: Mh… ¿Y ahí qué? No entendí mucho…

Agustina: Que podés tener más de un número que no tenga equis en un lado, y en el otro tener uno y que sean diferentes números mientras que te dé el mismo resultado.

Profesor: Ahora sí. A ver…

Julieta: Viste que Felipe dijo que vos podés… (A Felipe) ¿Cómo fue que dijiste?... Si ponéle que el siete de este lado vale dos, ¿tiene que valer un número específico la equis? Para mí que no porque…

Felipe: No dije eso

Julieta: ¿Qué dijiste?

Felipe: Que si de un lado hay cinco equis y del otro hay cinco equis, pero si de este hay siete y del otro hay otro número que no sea siete, ahí no podes hacer la equis con cualquier número.

Julieta: Para mí no podes con cualquier número y no podés con ninguno porque tenés la misma cantidad de equis y va a dar el mismo resultado ese total de equis. Entonces, si vos ponéle que del primer lado tenés cinco equis, y ponéle que eso da veinte, y le sumás siete da veintisiete, y del otro lado también, las cinco equis dan veinte, y le sumás tres te da veintitrés, o le sumás cuatro te da veinticuatro, pongas el número que pongas nunca te va a dar *igual*

Profesor: Mh… (A Felipe) ¿Estás de acuerdo?

Felipe: Sí, sí, pero yo decía que no sólo dependía de las equis que sean *igual*es, porque también dependía de los otros números…

Profesor: O sea, lo de Felipe, ¿por qué surgió? ¿Por qué la aclaración de Felipe? Porque estábamos diciendo que…

Felipe: Qué sólo si tienen la equis, es igual

Profesor: Estábamos diciendo que si teníamos la misma cantidad de equis de cada lado entonces equis podía tener cualquier número. Entonces, ahí surgió la aclaración de Felipe, que estamos viendo si tiene razón o no ¿sí? Bueno, ¿qué más Jaime?

Jaime: No, nada…, que al haber la misma cantidad de equis, o sea, lo que define es el número…, o sea lo que él dice está bien

Profesor: Ajá

Jaime: O sea, al haber la misma cantidad de equis, el número que se le suma es el que define si podes usar cualquier número.

Profesor: ¿Allá?

Federica: La misma cantidad de equis tiene que estar siempre ¿no? Pero si está el signo de *igual* por eso ya va… como que… le va a agregar de que… O sea, si yo le sumo más siete, del otro lado de alguna manera se va a tener que sumar más siete si está el signo de *igual*, si no, no se va a cumplir y está mal la expresión.

Profesor: Estaría mal…

Candelaria (o Martina): Podría tener en vez de un siete, un tres más cuatro, que sería lo mismo.

Profesor: O un siete o una operación que diera siete. Y si el segundo siete fuera un cinco, un tres, lo que fuese, ese signo de *igual* estaría mal puesto…

Varios al unísono: Sí.

Profesor: Estaría mal puesto…

Miguel: Lo que dice Federica está bien porque, es como una balanza, están las mismas cosas de los dos lados, y si cambias, yo que sé…, el siete por un dos, te va a dar diferente…, la balanza va a cambiar.

Profesor: Mh… Pero quiero insistir en esto, ese signo de *igual* estaría mal puesto si yo cambio uno de los siete por otro número.

Varios al unísono: Sí.

Profesor: Y el segundo signo de *igual* ¿está bien puesto entonces?

Julieta: No, para mí no.

Otros varios: Si.

Profesor: Martina…

Martina: Porque si a cinco lo multiplicas por un número, o sea cinco por tres más siete nos da 22 y seis por tres más cuatro nos da 22; pero si a equis lo usas con otro número nos va a dar resultados diferentes de los dos lados, entonces ahí sí estaría mal puesto.

Profesor: Nicole

Jaime: Pará mí está bien puesto

Julieta: No, no…

Profesor: Tenía la mano levantada Nicole allá, ¿a ver?

Nicole: En la A tengo para decir que de un lado del signo no está lo mismo que del otro lado del signo. Pero en la B es como para averiguar cuánto es equis.

Profesor: ¿Qué me quería decir?

Julieta: Que para mí no está bien usado porque, sólo está bien usado con el número 3, entonces no está bien usado.

Profesor: ¿No está bien usado?

Julieta: No…

Profesor: O sea que muchas veces lo usamos mal…

Jaime: Para mí está bien usado…

Fabián: Está bien porque es para averiguar cuánto es equis.

Julieta: Para mí no.

Jaime: Esa *igualdad* es como averiguas la ecuación, si no, no tiene sentido.

Profesor: De a uno… ¿Lo qué Rodrigo?

Rodrigo: Si hacés mal la ecuación, si vos la resolvés y te queda mal, el signo *igual* está mal porque no va a dar *igual*.

Profesor: Ajá… ¿Allá?

Federica: Para mí lo que dice Julieta está mal porque si vos estás usando el signo de *igual* como que tendría que ser lo mismo, entonces, de alguna manera lo tenés que resolver para que te dé lo mismo, y si estás usando el signo *igual*, es lo mismo.

Jaime: Claro, si está ahí, es para que encuentres la *igualdad*.

Martina: Tenés que encontrar un número para que cumpla la *igualdad*

Profesor: Y entonces, volviendo a la pregunta original y vamos redondeando, ¿es una similitud o es una diferencia la forma en que usamos el signo de *igual* en la expresión A y en la expresión B? ¿Lo estamos usando del mismo modo? ¿Tiene el mismo significado en un caso y en el otro?

Ignacio Ferres: Si porque quiere decir que la primera parte como dos equis más tres equis más siete es igual, como que va a tener el mismo resultado que cinco equis más siete. Que en los dos tiene como el mismo significado pero capaz que no da bien los dos lados.

Profesor: ¿Algo más que queramos decir sobre esto?

Rodrigo: Ayer había una de estas en que la ecuación daba mal, ahí está mal usado el signo.

Jaime: No, en realidad, lo que está mal usado es el número que vos ponés, porque el *igual* está para que vos encuentres la *igualdad*. No puede estar mal, lo que está mal es el número, como la resolvió…

(Varios hablan al unísono)

Profesor: A ver, vamos a escucharlo. Martina…

Martina: O sea, el signo de *igual* te lo ponen para que busques el número que tiene que tener equis, y que tiene que ser un número específico. Porque si encontras un número que no es el que tiene que ser, no se cumple la *igualdad*, entonces sería diferente.

Federica: Que el signo de *igual* solamente tiene un uso que es marcar la *igualdad*, o sea, no importa…, está mal la expresión pero… el signo de *igual* tiene solamente un uso, o sea, es una similitud.

Profesor: ¿Juana?

Juana: Que para mí, o sea, es una diferencia capaz que esté mal, pero en la primera por ejemplo, equis puede ser cualquier número y en la otra no, entonces para mí el *igual* en el primero es que puede ser cualquiera y en el segundo es que tiene que ser uno específico.

Profesor: ¿Y entonces?, ¿quién contradice a Juana? Hay que contradecir a Juana ahora. Candelaria…

Candelaria: Para mí es una similitud porque en los dos casos quiere decir que la parte que está a la derecha y a la izquierda vale lo mismo. En la B también. El signo *igual* siempre dice lo mismo, que de un lado es lo mismo que el otro.

Profesor: Bueno, hay una discusión clara acá, si es una similitud o es una diferencia… Gerónimo…

Gerónimo: Para mí es una similitud, solo que en el caso A podes hacerlo con cualquier número, mientras que en el B para que sea correcto se te reducen las posibilidades para… o sea, vale lo mismo.

Profesor: O sea, es una similitud pero, en una caso una cosa, en el otro otra…

Julieta: Ta, entonces no es una similitud

Profesor: No sé, pregunto…

(Varios discuten al unísono)

Federica: Tienen el mismo uso los dos

Martina: Es una similitud, pero depende de qué y cómo lo pongas

(Varios discuten al unísono)

Jaime: Sebastián, en los dos lados el *igual* demuestra que hay una equivalencia o que los valores son *igual*es de los dos lados del *igual*. Para mí es una similitud.

Felipe: En la B yo a equis le pongo el valor que quiero, y si le pongo a equis el valor 3, ahí me da que es una similitud, y está para que yo le ponga el valor que yo quiera para hallar la *igualdad*, entonces es una similitud.

Mateo: Es una similitud, porque todo lo que está a la izquierda, al fin y al cabo va a ser el mismo número que está a la derecha, pero si, o sea, depende si las expresiones están bien hechas, porque si diría cinco *igual* a seis, no, está mal, no sería una similitud

Profesor: Bueno, ¿quiénes irían por una similitud? Levantando la mano (muchos levantan la mano). O mejor bajen. ¿Quiénes irían por una diferencia? ¿Quiénes sostienen que es una diferencia? (seis levantan la mano) 6, ahí está, 6… ¿por algún motivo distinto al que dijo Juana, o están de acuerdo con lo que ella dijo? Y el resto cree que es una similitud, pero bueno, aún en esa diferencia de que en algún caso con cualquier valor de equis, y en otro caso con uno solo

Jaime: En realidad eso no es una diferencia, como que…

Profesor: Bueno, muy bien. Gracias chicos.