



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

---

---

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA  
MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Análisis del Comportamiento Mecánico de Grietas  
Inducidas en Material Compuesto empleando la  
Mecánica de Grietas Auto-afines

TESIS

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Presenta:

Ing. Pedro Flores Espinosa

Director:

Dr. Orlando Susarrey Huerta

Co-director:

Dr. Carlos Alberto Mora Santos



Mexico, D. F., Julio 2014



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14 BIS

**ACTA DE REVISIÓN DE TESIS**

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 10:00 horas del día 26 del mes de Mayo del 2014 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.M.E. para examinar la tesis titulada:

**“ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE GRIETAS INDUCIDAS EN MATERIAL COMPUESTO EMPLEANDO LA MECÁNICA DE GRIETAS AUTO-AFINES”.**

Presentada por el alumno:

**FLORES**

Apellido paterno

**ESPINOSA**

Apellido materno

**PEDRO**

Nombre(s)

Con registro: 

A	1	2	0	6	0	9
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISION REVISORA**

Directores de tesis

DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA

Presidente

DR. CARLOS ALBERTO MORA SANTOS

Segundo Vocal

DR. ALEXANDER BALANKIN

Tercer Vocal

DR. GERMAN ANIBAL RODRÍGUEZ CASTRO

Secretario

DR. EZEQUIEL ALBERTO GALLARDO HERNÁNDEZ

DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO



DR. MAURO ALBERTO ENCISO AGUILAR  
 SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, D.F. el día **05** del mes de **Junio** del año **2014**, el que suscribe **Ing. Pedro Flores Espinosa** alumno del Programa de **Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica**, con número de registro **A120609**, adscrito a la **Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Profesional Adolfo López Mateos**, manifiesto que es el autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de los Doctores **Orlando Susarrey Huerta y Carlos Alberto Mora Santos** y cede los derechos del trabajo titulado **Análisis del Comportamiento Mecánico de Grietas Inducidas en Material Compuesto Empleado la Mecánica de Grietas Auto-afines**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: **Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Edificio número 5, 3er Piso, Col. Lindavista, C. P. 07738, Mexico, D. F., Tel. 5729-6000 ext. 54586, Fax 5729-6000 ext. 54588**. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

**Ing. Pedro Flores Espinosa**

# DEDICATORIAS

*El presente trabajo representa un logro muy importante en mi carrera profesional y se lo dedico con afecto y respeto a mis padres, Pedro y María Luisa, que con sus consejos y apoyo incondicional han logrado moldear y pulir a un hombre de provecho.*

*A mis hermanos, Arturo y Wendy, porque se han convertido en confidentes de mi vida y han sido participes en los momentos más importantes.*

*A mis amigos Miguel, Edgar, Liliana y Emmanuel por su sinceridad y porque siempre se han preocupado por mi bienestar.*

*Por último y no menos importante, les dedico este trabajo a mis colegas ingenieros aeronáuticos y mecánicos que hicieron de esta faceta de mi vida una experiencia llena de alegrías y momentos amenos.*

# AGRADECIMIENTOS

*Estoy infinitamente agradecido con el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme brindado los recursos necesarios para desarrollar este trabajo de investigación.*

*A mi Alma Mater Studiorum, con la cual estaré agradecido eternamente por abrirme sus puertas y permitir que siguiera superándome por casi diez años. Gracias Instituto Politécnico Nacional.*

*A mis profesores docentes que en sus cátedras, sembraron esos pequeños granitos de la curiosidad y a su vez del conocimiento.*

## RESUMEN

En el presente trabajo se analiza el comportamiento mecánico con una grieta inducida del papel filtro (poro cerrado y poro abierto) debido a su particular anisotropía que presenta en su microestructura, ya que es un material compuesto orgánico de fibras aleatorias. Se demuestra que la energía de absorción del material tiene concordancia con las dimensiones de las probetas hechas de papel filtro cuando se le aplica una carga a desplazamiento constante. Se estudia además la rugosidad auto-afín que muestran las superficies de fractura y se obtiene el exponente de Hurst y así determinar el tipo de fractura que prevalece en el momento de la ruptura de las fibras del papel filtro. Se relacionan el esfuerzo de crecimiento de grieta con las dimensiones de las probetas para comprobar que el valor del esfuerzo se mantiene constante conforme el ancho remanente (desde la punta de grieta hasta el borde próximo de la probeta) por cada tipo de papel.

# ABSTRACT

In this work, the mechanical behavior is analyzed with an induced crack filter paper (pore closed and open pores) due to their particular anisotropy posing in their microstructure, as it is an organic composite random fibers. It's shown that the energy absorption of the material is consistent with the size of the specimens made from filter paper when a load is applied at a constant displacement. It also examines the self-affine roughness showing the fracture surfaces and Hurst exponent is obtained and to determine the type of fracture that prevails at the time of the rupture of the fibers of the filter paper. The effort to crack growth is related to the dimensions of the specimens to ensure that the value of effort is kept constant as the remaining width (from the crack tip to the proximal edge of the specimen) for each paper type.

# INTRODUCCIÓN

¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo “frío” y “seco”? Una de las razones es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas son cónicas, ni las costas circulares, ni la corteza es suave, ni tampoco el rayo es rectilíneo.

En términos más generales, al parecer que muchas formas naturales son tan irregulares y fragmentadas que, en comparación con Euclides —un término que en este trabajo de tesis denotará todo lo referente a la geometría común— la naturaleza no sólo presenta un grado superior de complejidad, sino que ésta se da a un nivel completamente diferente. El número de escalas de longitud de las distintas formas naturales es, a efectos prácticos, indistinto.

La existencia de estas formas representa un desafío: el estudio de las formas de Euclides descarta por “informes”, la investigación de la morfología de lo “amorfo”. Los matemáticos; sin embargo, han desdeñado este desafío y, cada vez más, han optado por huir de lo natural, ideando teorías que nada tienen que ver con aquello que se puede ver o sentir.

En respuesta a este desafío se ha creado y desarrollado una nueva geometría de la naturaleza y se ha empezado a usar en diferentes campos de la ingeniería; esto es porque permite muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías bien fundamentadas, identificando una serie de formas llamadas “fractales”.



# JUSTIFICACIÓN

Actualmente la Mecánica de Grietas Auto-fines, como método para analizar grietas en materiales, no ha tenido la suficiente difusión para su aplicación en proyectos de ingeniería debido a que es un método estocástico; con el paso del tiempo la mecánica de grietas auto-afines ha ido ganando confianza por los resultados que se han obtenido y que son similares o más certeros y confiables a los mostrados por la Mecánica de Fractura Lineal Elástica. Por lo que este trabajo se encamina a seguir aportando datos confiables para la implementación de este método para analizar grietas en materiales con comportamiento tanto isotrópico como anisotrópico, para ello se usaran lotes grandes de papel filtro de poro cerrado y poro abierto.

# OBJETIVOS

Analizar la propagación de grietas en probetas hechas de papel filtro de poro cerrado y poro abierto empleando la mecánica de grietas auto-afines.

Analizar la rugosidad auto-afín mediante la obtención del parámetro fractal, exponente de Hurst, del papel filtro de poro abierto y poro cerrado y su efecto en la propagación de grietas utilizando el método del análisis de la Longitud Rugosa del programa de cómputo Benoit 1.2.

# Contenido

DEDICATORIAS	IV
AGRADECIMIENTOS	V
RESUMEN	VI
ABSTRACT	VII
INTRODUCCIÓN	VIII
JUSTIFICACIÓN	IX
OBJETIVOS	IX
ÍNDICE DE FIGURAS	XIII
ÍNDICE DE TABLAS	XV
1. ESTADO DEL ARTE	1
2. COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LOS MATERIALES COMPUESTOS DE FIBRAS ALEATORIAS	7
2.1. Trascendencia de los materiales en Ingeniería . . . . .	.7
2.2. Clasificación de los materiales . . . . .	.9
2.3. Isotropía y anisotropía. . . . .	.15
2.4. Formación e importancia de las imperfecciones en los materiales . . . . .	.15

2.5. Materiales compuestos. . . . .	.17
2.5.1. Materiales compuestos con fibras. . .	.19
2.5.2. Propiedades de los materiales compuestos reforzados con fibras . . . . .	.20
2.5.3. Carga en dirección longitudinal a una fibra unidireccional . . . . .	.21
2.5.4. Carga en dirección transversal a una fibra unidireccional de un material compuesto. . .	.23
2.6. Fallas en los materiales . . . . .	.23
2.7. Consecuencias por la presencia de Grietas en los materiales. . . . .	.24
2.8. Fractura en materiales compuestos. . . . .	.26
3. MECÁNICA DE GRIETAS AUTO-AFINES	28
3.1. Geometría fractal. . . . .	.28
3.1.1. Fractales auto-similares. . . . .	.34
3.1.2. Fractales auto-afines . . . . .	.36
3.2. Morfología de las superficies de fractura. .	.39
3.3. Mecánica de Grietas Auto-afines. . . . .	.40
3.4. Métodos para determinar el exponente de Hurst. . . . .	.42
3.4.1. Método del Variograma . . . . .	.42
3.4.2. Método del Espectro de Potencia . .	.44
3.4.3. Método de la Longitud Rugosa. . . .	.45
3.4.4. Método del Rango Rescalado. . . . .	.46
3.4.5. Método de la Ondeleta . . . . .	.48

4. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL	50
4.1. Procedimiento. . . . .	.50
5. ANÁLISIS DE RESULTADOS	59
5.1. Comportamiento mecánico del papel filtro .	.59
5.1.1. Esfuerzo de Inicio de Crecimiento de Grieta . . . . .	.62
5.2. Determinación del exponente Hurst. . . . .	.63
CONCLUSIONES	67
TRABAJOS FUTUROS	68
REFERENCIAS	69
ANEXOS	73
A. Conceptos Generales	73

# Índice de figuras

2.1. Clasificación de los materiales. . . . .	.14
2.2. Clasificación de las imperfecciones en los materiales . . . . .	.16
2.3. Clasificación del refuerzo de los materiales compuestos . . . . .	.19
2.4. Fallas en materiales reforzados con fibras . . .	.27
3.1. Medición de la dependencia de una curva. . . . .	.34
3.2. Perfil de fractura de un bloque de hielo del mar Báltico después de aplicarle una carga de tensión . .	.37
4.1. Geometría y dimensión de las probetas. . . . .	.51
4.2. MTS 858 Table Top System . . . . .	.52
4.3. HPU modelo SilentFlo 505.07. . . . .	.53
4.4. Montaje de la probeta en la MTS 585 Table Top System. . . . .	.54
4.5. Búsqueda del lugar de inicio de propagación de grieta con el flexo con lupa y luz. . . . .	.55
4.6. Escáner fotográfico modelo HP G4050. . . . .	.56
4.7. Fractura de la probeta de poro abierto de dimensiones 400x100 mm. . . . .	.56
4.8. Imagen de la línea de ruptura obtenida con el escáner de alta resolución en donde se muestra con una marca roja el inicio de la propagación inestable de la grieta. . . . .	.57
4.9. Esquema del procedimiento experimental simplificado. . . . .	.58

5.1. Grafica esfuerzo-deformación del papel filtro de poro cerrado y poro abierto en dirección longitudinal a la fibra. . . . .	.61
5.2. Gráfica Esfuerzo de Inicio de Crecimiento de Grieta ( $\sigma_0$ )-Ancho de probeta (W) del papel filtro de poro abierto y cerrado. . . . .	.63
5.3. Gráfica Exponente de Hurst (H)- Ancho de probeta (W) del papel filtro de poro abierto en (a) Propagación estable y (b) Propagación inestable. . . . .	.64
5.4. Gráfica Exponente de Hurst (H)- Ancho de probeta (W) del papel filtro de poro cerrado en (a) Propagación estable y (b) Propagación inestable. . . . .	.65
A.1. (a) Seccionamiento de un cuerpo; (b) Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas internas; (c) área ampliada $\Delta A$ con componentes de fuerza $\Delta F$ . . . . .	.74
A.2. Desplazamiento y deformación unitaria . . . . .	.76
A.3. Diagrama de esfuerzo-deformación convencional y verdadero para un material dúctil. . . . .	.78
A.4. Clasificación de la fractura, según la cantidad deformación plástica . . . . .	.80
A.5. Clasificación de la fractura en función de la extensión de la deformación plástica . . . . .	.81

# Índice de Tablas

4.1. Dimensiones de las probetas y longitud de grieta	.51
5.1. Esfuerzo de Inicio de Crecimiento de Grieta para el Papel Filtro de Poro Abierto. . . . .	.62
5.2. Esfuerzo de Inicio de Crecimiento de Grieta para el Papel Filtro de Poro Cerrado. . . . .	.62
5.3. Exponentes de Hurst para el Papel Filtro de Poro Abierto . . . . .	.64
5.4. Exponentes de Hurst para el Papel Filtro de Poro Cerrado . . . . .	.65

# Capítulo 1

## ESTADO DEL ARTE

En el trabajo de A. S. Balankin [1] se probaron experimentalmente hojas de cartón de espesor de 0.23 mm., con el objeto de demostrar que las líneas de ruptura del cartón poseen un escalamiento auto-afín asociado con la invariancia estadística de las trayectorias de grieta bajo la transformación de coordenadas de escala auto-afín. Los resultados experimentales de este trabajo confirma el fenómeno de no linealidad que ocurre en la mecánica de grietas auto-afín en un sólido frágil; esto es el esfuerzo inicial decrece en función del producto del factor de escalamiento por la longitud de la grieta inicial e incrementa de acuerdo a la ley de potencia.

Por otra parte en la investigación realizada por el mismo autor, A. S. Balankin y O. Susarrey [2] se analizó la rugosidad auto-afín en la propagación de grietas en papel Xerox, un material perfectamente frágil. El espesor de los especímenes sometidos a carga de tensión uniaxial fueron al menos 100 veces menos que el ancho de la probeta, así que los experimentos se analizaron en un estado de esfuerzo plano; las líneas de ruptura en las hojas de papel mostraron una geometría auto-afín dentro de un amplio rango de longitudes de escala, donde el límite máximo medible  $l_0$  fue de 1 mm., la longitud de



correlación auto-afín  $\xi_C$  fue de 10 cm. y la rugosidad saturada  $r_{rmf}$  fue de 0.5 cm. aproximadamente. La dependencia en el valor de la tenacidad a la fractura  $K_C$  muestra que los resultados de las pruebas mecánicas normalizadas no son válidas al menos cuando no se usan probetas lo suficientemente grandes; se observa también que las normas ASTM para las piezas de prueba para la medición de la fractura deberían ser completadas con la especificación del tamaño absoluto de la probeta, el cual debe ser mayor que la longitud de la correlación auto-afín de la superficie de la fractura rugosa.

En la investigación de A. S. Balankin [3] se aplica la mecánica de grietas auto-afines y el concepto de trayectoria virtual de la grieta, para analizar una grieta en hojas de papel. El criterio de iniciación de grietas se determina para tres tipos de papel (Couche, Squetch y Eurokote); estos papeles tienen una anisotropía bien definida en sus propiedades mecánicas, que están asociadas preferentemente con la orientación de las fibras en dirección de la aplicación de la carga de tensión de la máquina, sin embargo, todos los datos reportados en este trabajo de investigación fueron obtenidos con probetas preparadas de hojas de tamaño  $120 \times 92$  cm. Las fluctuaciones espaciales correlacionadas de la microestructura del papel determinaron estadísticamente la invariancia auto-afín de la trayectoria de la grieta dentro de un considerable rango de escalas de longitud. Es razonable asumir que la propagación de la grieta a lo largo de una trayectoria particular en el papel consiste de una secuencia de pasos bien correlacionados de longitud, los cuales son controlados por un criterio de fractura microscópico. En este sentido, se sugiere que el exponente de rugosidad es gobernado por la microestructura del papel; esto no necesariamente significa que el exponente de rugosidad

sea inequívocamente determinado por la microestructura del material. Por otra parte, existe evidencia experimental que dice que las grietas estables e inestables son caracterizadas por diferentes valores de  $H$ , desafortunadamente en este artículo de investigación solo el crecimiento de grieta inestable fue observado.

En el trabajo de W. Klonowski [4] y colaboradores se propone un nuevo simple método para determinar la rugosidad de un material para implante empleando una técnica llamada microscopía electrónica que consiste en escanear el material de estudio para obtener imágenes; para este propósito se han combinado un método de procesamiento de imágenes que ha sido usado en histopatología, rama de la patología que se encarga de estudiar los tejidos orgánicos, con un método fractal usado en análisis de series de tiempo no lineales. En el procesamiento la imagen es transformada en señales en una dimensión que son subsecuentemente analizadas.

En la publicación de I. Campos y colaboradores [5] se analiza la fractura en roca de yeso, un material frágil en esencia y poroso; debido a que las propiedades mecánicas del yeso dependen de la relación de la mezcla agua y sulfato de calcio, se realizaron tres muestras con diferente relación de mezcla (0.28, 0.31 y 0.40).

Es importante mencionar que la teoría auto-afín permite una formulación matemática confiable que satisface los requerimientos adoptados en la mecánica de sólidos, por lo que se concluye en este trabajo que el comportamiento en la región cercana en la punta de la grietas en la roca de yeso es similar al esperado por la mecánica de grietas auto-afines, el cual es diferente al

de la mecánica de fractura lineal elástica y que el comportamiento del esfuerzo es regido por el exponente de rugosidad, y que este último depende de las propiedades del material.

En el trabajo de L. Ponson y colaboradores [6] se presenta una investigación extensiva acerca del escalamiento de las propiedades de las superficies en materiales frágiles, vidrio de sílice, aleación de aluminio, madera y mortero, estos materiales fueron probados de cuatro diferentes formas.

Las superficies de fractura observadas en todos los modos de falla muestran un comportamiento auto-afín de acuerdo a lo que se dice en la literatura, sin embargo, las propiedades de escalamiento no son isotrópicas por eso requieren una función de correlación de dos dimensiones llamadas peso-peso para una completa descripción. Esta descripción envuelve dos exponentes de escalamiento independientes, estos exponentes son los de Hurst medidos a lo largo y a lo ancho de la propagación de la grieta; estos corresponden al exponente de rugosidad y al exponente de crecimiento,  $\zeta$  y  $\beta$ , respectivamente, para describir los colectores elásticos en un medio aleatorio, pero para describir por completo el escalamiento de las propiedades de las superficies de fractura se introduce un tercer exponente,  $z$ , que es el exponente dinámico; estos tres parámetros varían conforme la naturaleza del material y la velocidad de propagación de la grieta.

Finalmente, es de valor mencionar que las propiedades de escalamiento exhibidas por las superficies de fractura podrían tener aplicaciones interesantes, por ejemplo, determinar la dirección de propagación de una

grieta o reconstruir la historia del proceso de nucleación de grieta de una estructura.

En el trabajo realizado por C. A. Mora Santos y colaboradores [7], se presenta el patrón auto-afín de grieta en hojas de papel filtro, material compuesto que se caracteriza por tener un comportamiento anisotrópico. Este tipo de material tiene sus propiedades mecánicas bien definidas, con una densidad de  $110 \pm 10 \text{ g/m}^2$ , módulo de Young en su dirección longitudinal de  $E_L = 3075 \pm 50 \text{ MPa}$  y en su dirección transversal de  $E_T = 797 \pm 20 \text{ MPa}$  y un esfuerzo último en la dirección longitudinal de  $\sigma_{UL} = 17.5 \pm 0.4 \text{ MPa}$  y un esfuerzo ultimo en la dirección transversal de  $\sigma_{UT} = 4.73 \pm 0.35 \text{ MPa}$ ; preferencialmente, las pruebas experimentales que se realizaran se les aplicara la carga en la dirección longitudinal del material.

Los resultados en este trabajo mostraron que las superficies de las grietas en el papel filtro tienen una invariancia auto-afín estadística, donde el exponente de rugosidad obtenido fue  $H = 0.49 \pm 0.01$ , un valor diferente al reportado por otros autores. También fue demostrado que este valor no varia con la escala y la velocidad de propagación de la grieta porque durante el proceso de fractura del papel, no todas las fibras localizadas a través de la trayectoria de las grietas fallaron; más bien fue la separación de los enlaces entre las mismas fibras; por lo tanto estos resultados confirman que para exponentes de rugosidad críticos, el valor del esfuerzo que inicia el crecimiento de la grieta se mantiene constante en el intervalo auto-afín, opuesto a lo que la mecánica de la fractura establece. También se observó que cuando la exponente de rugosidad toma valores críticos la correlación entre incrementos es despreciable para los valores de  $r$  y está asociado con la transición frágil a dúctil, el cual es manifestado principalmente por el

efecto de la microestructura del material, como es la porosidad y la ruptura de las fibras.

En el siguiente artículo de investigación elaborado por el grupo de mecánica fractal del Instituto Politécnico Nacional, Alexander S. Balankin y colaboradores [8], se estudia el efecto de las correlaciones de largo alcance entre la microestructura del papel filtro y el papel secante, y la concentración del esfuerzo alrededor de la punta de la muesca previamente hecha en los materiales mencionados.

Los datos que se obtuvieron demuestran que el papel secante obedece la ley de escalamiento de tamaño con el exponente de escalamiento. En contraste con este, la esfuerzo que comienza a propagar la grieta en el papel filtro es independiente a la longitud de la grieta en un rango de 5 a 150 mm, así como también de la relación  $a/W$  en el rango de 0.025 a 0.375, entonces se dice que la trayectoria que siguen las grietas es de forma irregular; y esto demuestra lo aleatorio de los constituyentes de la microestructura del papel y los esfuerzos fluctuantes. Los exponentes de rugosidad fueron determinados por medio de los métodos de variograma, espectro de potencia, longitud rugosa y rango re-escalado con ayuda del programa Benoit, los datos obtenidos para el papel secante y para el papel filtro fueron de  $0.64 \pm 0.003$  y  $0.49 \pm 0.01$ , respectivamente, dichos valores son estadísticamente indistinguibles de los exponentes de rugosidad obtenidos a partir de las pruebas de tensión en los papeles de ambos materiales sin muesca, por lo que se deduce que los exponentes de rugosidad están relacionados con la dimensión fractal de las fibras.

## Capítulo 2

# COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LOS MATERIALES COMPUESTOS DE FIBRAS ALEATORIAS

### **2.1. Trascendencia de los materiales en ingeniería**

La ciencia e ingeniería de los materiales es un campo interdisciplinario que se ocupa de inventar nuevos materiales y mejorar los ya conocidos, mediante el desarrollo de un conocimiento más profundo de las relaciones entre microestructura, composición, síntesis y procesamiento. El término composición se refiere a la constitución química de un material. El término estructura se refiere a la descripción de los arreglos de los átomos. Los científicos e ingenieros de materiales no sólo tratan con el desarrollo de materiales y los procesos de fabricación relacionados con la producción de componentes. El término síntesis se refiere a cómo se fabrican los materiales a partir de sustancias químicas de estado natural o hechos por el hombre. El término

procesamiento se refiere a cómo se transforman los materiales en componentes útiles. Una de las funciones más importantes de los científicos e ingenieros de materiales es establecer las relaciones entre las propiedades de un material y su desempeño. En la ciencia de materiales, el énfasis está en las relaciones básicas entre la síntesis y el procesamiento, la estructura y las propiedades de los materiales. En la ingeniería de materiales, el enfoque está en cómo convertir o transformar materiales en dispositivos o estructuras útiles; uno de los aspectos más fascinantes de la ciencia de materiales involucra la investigación de la estructura de un material; la estructura de los materiales tiene una influencia profunda sobre muchas propiedades de los materiales, aun si la composición general no cambia.

Históricamente, el desarrollo y la evolución de las sociedades han estado íntimamente vinculados a la capacidad de sus miembros para producir y conformar los materiales necesarios para satisfacer sus necesidades.

La evolución de la humanidad ha estado ligado estrechamente al tipo de materiales que cada sociedad ha desarrollado. Es por esto que se conocen varias etapas históricas en este sentido, sin que necesariamente exista una fecha exacta, o incluso, dándose en diferentes momentos en las diferentes sociedades humanas. La edad de piedra se refiere entonces al periodo en el que un grupo humano en particular empleaba este material junto con otros de origen natural como la madera o el hueso de forma preponderante. La edad de bronce, a la cual algunos se refieren como "edad de los metales" se refiere el uso de metales y aleaciones en culturas clásicas y para la era de la revolución industrial. Las eras más recientes se conocen como "era de los polímeros", debido a que el uso de los mismos definitivamente se deba a avances en la química de gran complejidad. Los polímeros pueden tener virtualmente cualquier propiedad física, así que su uso se hizo tan masivo que define muy bien a las sociedades

modernas. No obstante la historia, como el desarrollo de los materiales, no se detiene. Actualmente se imponen los materiales compuestos y los nanomateriales.

La creación de nuevos materiales y el procesado de estos hasta convertirlos en productos acabados, constituyen una parte importante de nuestra economía actual. Puesto que la producción necesita materiales, los ingenieros deben conocer de la estructura interna y propiedad de los materiales, de modo que sean capaces de seleccionar el más adecuado para cada aplicación y también capaces de desarrollar los mejores métodos de procesado.

## **2.2. Clasificación de los materiales**

Los materiales se pueden clasificar de diferentes formas, eso depende de las características o cualidades seleccionadas para realizar dicha clasificación. En este trabajo se mencionaran las clasificaciones de algunos autores para poder apreciar las diferencias entre cada uno de ellos.

Los materiales pueden ser clasificados como cristalinos o amorfos [9], esto es de acuerdo con la disposición de los átomos o moléculas en los sólidos. Si existe una disposición regular de los átomos que da por resultado un patrón que se repite en tres dimensiones, se dice que el material es cristalino y tiene un orden de largo alcance. Si la disposición de los átomos es localizada y no se repite en tres dimensiones, se dice que el material es amorfo (no cristalino) y tiene un orden de corto alcance. Algunos materiales cristalinos pueden estar en la forma de un cristal y se les conoce como monocristales. Otros consisten en varios cristales o granos, y se les conoce como policristalinos. Las características de los cristales o granos y la de las regiones entre ellos, conocidas como límites de grano,



también afectan las propiedades de los materiales. El que un sólido adquiriera la forma cristalina o amorfa depende de la facilidad con que la estructura atómica al azar del líquido se pueda transformar en un estado ordenado durante la solidificación. El material amorfo se caracteriza por la compleja estructura atómica y molecular, que se puede ordenar con relativa dificultad. El enfriamiento rápido favorece la formación de sólidos no cristalinos. Algunos materiales cerámicos son cristalinos mientras que otros, como los vidrios inorgánicos, son amorfos, cristalinos o una mezcla de ambos.

Los materiales también pueden ser clasificados en función de una de las propiedades mecánicas de cualquier material, que es la resistencia [10]; el listado consta de cinco grupos:

Metales y aleaciones. Estos incluyen aceros, aluminio, magnesio, zinc, hierro fundido, titanio, cobre y níquel. En general los metales tienen buenas conductividades eléctricas y térmicas. Los metales y aleaciones tienen resistencias mecánicas relativamente altas, rigidez alta, ductilidad o conformabilidad y resistencia al impacto. Son particularmente útiles en aplicaciones estructurales o de carga. Aunque en ocasiones se utilizan metales puros, las combinaciones de metales llamadas aleaciones proveen una mejora en una propiedad deseable en particular o permiten mejores combinaciones de las propiedades.

Cerámicas. Las cerámicas pueden definirse como materiales cristalinos inorgánicos. Las cerámicas son probablemente los materiales más naturales. La arena de la playa y las rocas son ejemplos de cerámicas de procedencia natural. Las cerámicas avanzadas son materiales preparados por la refinación de cerámicas de procedencia natural y otros procesos especiales. Las cerámicas avanzadas se utilizan en los sustratos que

albergan chips de computadora, sensores y activadores, capacitores, bujías de motores, inductores y aislantes eléctricos. Las cerámicas también se utilizan en productos de consumo como pinturas, plásticos, neumáticos y en aplicaciones industriales tales como losetas para transbordadores espaciales, soporte de catalizadores y los sensores de oxígeno utilizados en automóviles. Las cerámicas tradicionales se utilizan para fabricar ladrillos, vajillas, sanitarios, refractarios (material resistente al calor) y abrasivos. En general, debido a la presencia de porosidad (agujeros pequeños), las cerámicas tienden a ser quebradizas.

Vidrios y vitrocerámicos. El vidrio es un material amorfo, aunque no siempre, derivado de la sílice fundida. El término amorfo se refiere a materiales que no tienen arreglo regular y periódico de átomos. Los vidrios también se utilizan en casas, automóviles, pantallas de computadoras, televisores y cientos de otras aplicaciones. Los vidrios pueden tratarse de manera térmica (templarse) para hacerlos más resistentes. La formación de vidrios y la nucleación (creación) de cristales pequeños dentro de ellos por medio de un proceso térmico especial crea materiales que se conocen como vitrocerámicas.

Polímeros. Los polímeros son por lo regular materiales inorgánicos producidos utilizando un proceso conocido como polimerización. Los materiales poliméricos incluyen el caucho (elastómeros) y varios tipos de adhesivos. Muchos polímeros tienen muy buena resistencia a químicos corrosivos. Los polímeros tienen miles de aplicaciones que van desde chalecos antibalas, discos compactos, cuerdas y pantallas de cristal líquido, hasta tazas para café. Los polímeros termoplásticos, en los que las cadenas moleculares grandes no están conectadas de manera rígida, tienen buena ductilidad y conformabilidad; los polímeros termofijos son más resistentes pero más

quebradizos debido a que las cadenas moleculares están enlazadas estrechamente.

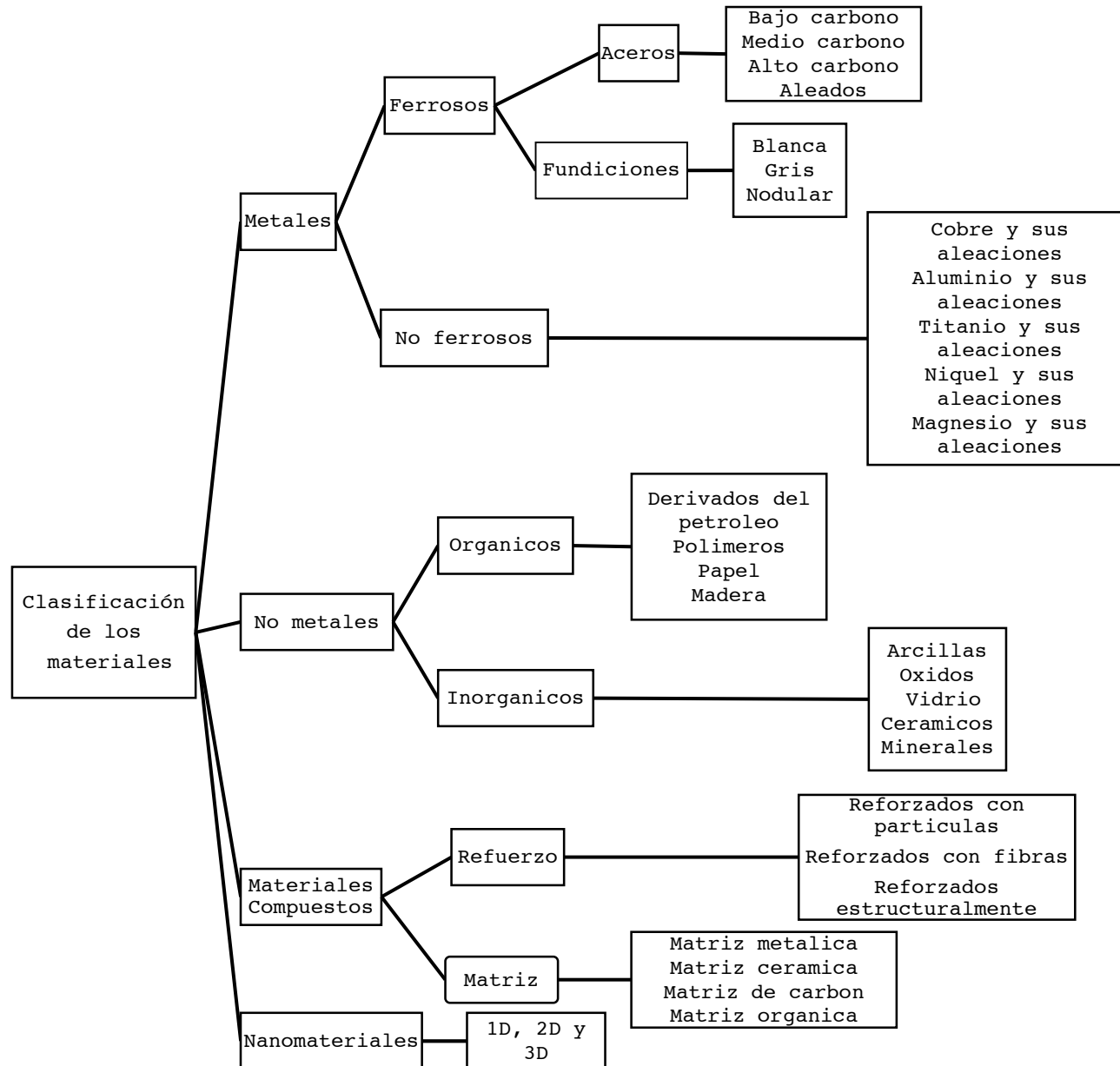
Semiconductores. Los semiconductores o base de silicio, germanio y arseniuro de galio son parte de una amplia clase de materiales conocidos como materiales electrónicos. La conductividad eléctrica de los materiales semiconductores esta entre de los aislantes cerámicos y los conductores metálicos. En los semiconductores, el nivel de conductividad se controla para permitir su uso en dispositivos electrónicos tales como transistores, diodos, etc., se utilizan para construir circuitos integrados.

Materiales compuestos. La idea principal en el desarrollo de compuestos es combinar las propiedades de distintos materiales. Los compuestos se forman a partir de dos o más materiales, produciendo propiedades que no se encuentran en un solo material. El concreto, la madera laminada y fibra de vidrio son ejemplos de materiales compuestos. Con los compuestos se pueden producir materiales ligeros, resistentes, dúctiles y resistentes a altas temperaturas o pueden producirse herramientas de corte rígidas, pero resistentes al impacto que de otra manera se romperían. Los aviones avanzados y los vehículos aeroespaciales dependen en gran medida de compuestos, tales como polímeros reforzados con fibra de carbono. El equipamiento deportivo tal como bicicletas, palos de golf, raquetas de tenis.

Sin embargo, existen más clasificaciones, por ejemplo la funcional [11], como su nombre lo indica, la organización se realiza con base en la función más importante que desempeña el material, esto quiere decir, si el material va a satisfacer una necesidad en el área de la mecánica, la biología, la eléctrica, magnética u óptica; aunque este listado puede tener más divisiones. Pero sin duda la clasificación que a continuación nuestro

por medio de la figura (2.1), es una compilación de los materiales que se usan en ingeniería y está basado en la tabla periódica de los elementos de Mendeleiev.

Figura 2.1. Clasificación de los materiales



### **2.3. Isotropía y anisotropía**

Debido a las diferencias en el arreglo atómico en los planos y direcciones dentro de un cristal, algunas propiedades también varían con la dirección. Un material es cristalográficamente anisotrópico si sus propiedades dependen de la dirección cristalográfica a lo largo de la cual se mide la propiedad. Por ejemplo, el módulo de elasticidad del aluminio es de 75.9 GPa en las direcciones  $\langle 111 \rangle$ , pero de solo 63.4 GPa en las direcciones  $\langle 100 \rangle$  [12]. Si las propiedades son idénticas en todas las direcciones, el material es cristalográficamente isotrópico. Obsérvese que un material como el aluminio, el cual es cristalográficamente anisotrópico, puede comportarse como un material isotrópico si está en una forma policristalina. Esto se debe a que las orientaciones al azar de los distintos cristales en un material policristalino cancelaran en su mayoría cualquier efecto de la anisotropía como resultado de la estructura cristalina. Los materiales que son monocristalinos o en los cuales varios granos están orientados a lo largo de ciertas direcciones (obtenidas de manera natural o deliberada por medio del procesamiento) por lo general tendrán propiedades mecánicas, ópticas, magnéticas y dieléctricas anisotrópicas.

### **2.4. Formación e importancia de las imperfecciones en los materiales**

En la microestructura de los materiales siempre hay defectos (imperfecciones) debido a la incorrecta disposición de los átomos en la red cristalina. Los defectos en la estructura cristalina se clasifican por indicios geométricos en puntuales o puntiformes, lineales y superficiales [13]. Los átomos realizan movimientos oscilatorios junto a los nudos de la red y al elevarse la temperatura, aumenta la amplitud de estas oscilaciones. La mayoría de los átomos de una red cristalina determinada poseen una energía igual (media) y oscilan a una temperatura dada con igual amplitud.

Sin embargo, algunos átomos tienen una energía considerablemente mayor a la energía media y se desplazan de un lugar a otro. El lugar donde se hallaba este átomo se denomina hueco. Este tipo de defecto se le denomina puntiforme, y también pertenece el átomo intersticial de la red cristalina y el átomo sustituido, que sucede cuando el lugar del átomo de un metal es sustituido en la red cristalina por otro átomo de impurezas.

Los defectos lineales son otro tipo muy importante de la imperfección de la red cristalina, cuando a consecuencia del desplazamiento a una distancia interatómica de una parte de la red con respecto a la otra a lo largo de cierto plano el número de las series de los átomos en la parte superior de la red es en uno mayor que la parte inferior.

Los defectos superficiales representan los límites de división entre los distintos cristales. En el límite de división los átomos del cristal están dispuestos menos ordenadamente que en su volumen.

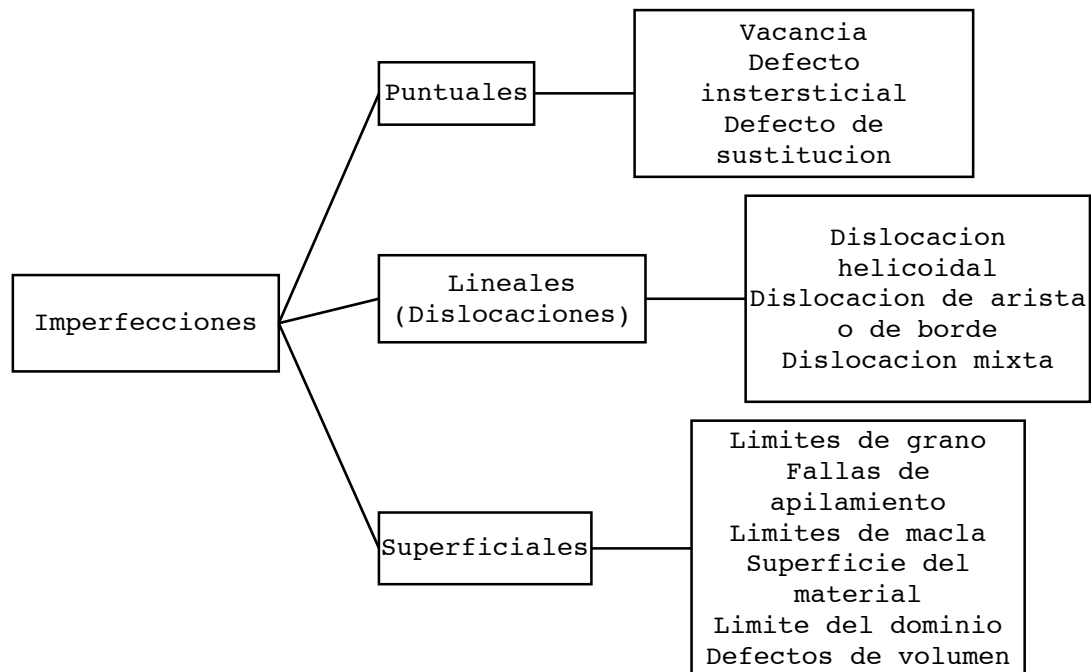


Figura 2.2. Clasificación de las imperfecciones en los materiales

## 2.5. Materiales Compuestos

Los materiales compuestos son materiales sintéticos obtenidos por la combinación de dos o más micro o macro constituyentes que difieren de forma y composición química y que son esencialmente insolubles entre sí [14]. La idea principal del desarrollo de materiales compuestos es combinar las propiedades mecánicas de materiales distintos para obtener valores no usuales de rigidez, peso, desempeño a altas temperaturas, resistencias a la corrosión, dureza o conductividad. Los materiales compuestos ponen de manifiesto la forma en que materiales distintos pueden trabajar sinérgicamente.

Uno de los componentes que crean a los materiales compuestos es la matriz (base), el otro son los reforzadores (fibras, partículas). En calidad de matrices se utilizan materiales poliméricos, metálicos, cerámicas y carbonosos. Como reforzadores sirven las fibras de vidrio, de boro, de carbono, orgánicas, cristales filiformes (de carburos, boruros, nitruro y otros) y los alambres metálicos los que poseen una alta resistencia y rigidez. Al elaborarse las composiciones se aprovechan eficazmente las propiedades individuales de los componentes de los compuestos. Las propiedades de los materiales compuestos dependen del carácter de los componentes, su correlación cuantitativa y la buena unión entre ellos. Combinando el contenido volumétrico de los componentes es posible, en dependencia de la destinación, obtener materiales con un requerido valor de solidez, resistencia al fuego, módulo de elasticidad u obtener compuestos con propiedades especiales requeridas, por ejemplo, propiedades magnéticas, etc.

El contenido de reforzadores en los materiales compuestos constituye el 20 - 80 % de su volumen. Las propiedades de la matriz determinan la resistencia del material compuesto a la compresión y el cizallamiento. Las



propiedades del reforzador determinan la resistencia y rigidez del material compuesto.

Los materiales compuestos tienen elevada resistencia, rigidez, pirorresistencia y estabilidad térmica. Así, para los carbofibroles el esfuerzo de tensión va desde los 650 hasta los 1700 MPa, mientras que para los borofibroles de 900 hasta 1750 MPa. La densidad de los materiales compuestos es de 1.35 a 4.8 g/cm<sup>3</sup>. Los materiales compuestos tienen buena perspectiva como materiales para construcciones en muchas ramas de la industria.

El carbofibrol es un material compuesto de una matriz polimérica y reforzadores de fibras de carbono, para la matriz polimérica se emplean poliamidas, resinas epoxídicas y de formol-fenol.

Los borofibroles son composiciones de un vehículo polimérico y el reforzador: fibras de boro. Para obtener los borofibroles se emplean vehículos epoxídicos y poliamidicos modificados. Los borofibroles poseen elevada resistencia a la compresión, a la cizalladura, alta dureza conductibilidad eléctrica y térmica.

Los organofibroles son composiciones de un vehículo polimérico y reforzadores de fibras sintéticas. Como reforzadores sirven fibras elásticas como el lavsán, caprón, nitrón y otros. Como vehículos se emplean las poliamidas, las resinas epoxídicas y de formol-fenol. Los organofibroles tienen pequeña densidad, relativamente una elevada resistencia específica y alta resistencia. Los organofibroles se utilizan en la industria aeronáutica, electrotécnica y la construcción de máquinas para la industria química y otras.

Los metales reforzados con fibras son materiales compuestos con base metálica y reforzadores en forma de fibras. Como reforzadores se emplean fibras de boro, carbono, cristales filiformes de composiciones de bajo punto de

fusión, alambre de tungsteno o acero. A continuación se presenta la ramificación a la que pertenece el papel filtro, figura (2.3).

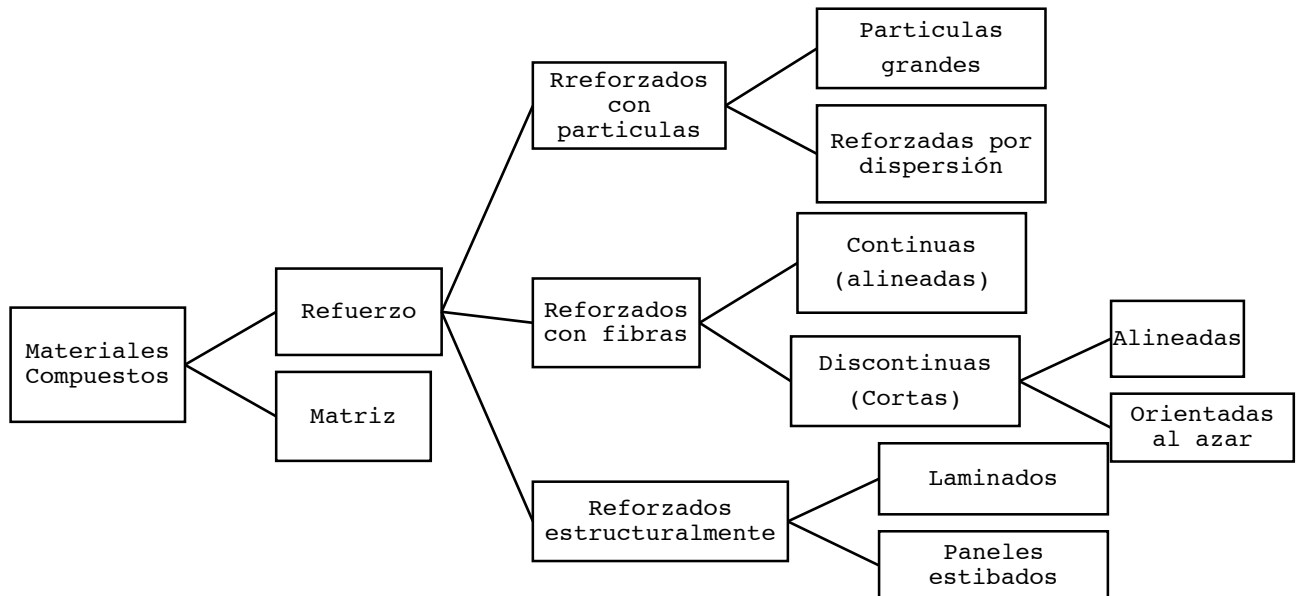


Figura 2.3. Clasificación del refuerzo de los materiales compuestos

### 2.5.1. Materiales compuestos reforzados con fibras

La fibra es el componente del material compuesto. Aporta resistencia mecánica, rigidez y dureza y va a ser determinante para obtener las principales propiedades mecánicas. Las características más sobresalientes de las fibras de los materiales compuestos son su resistencia a la tensión y su elevado modulo específico.

Los tipos de fibras de refuerzo se pueden clasificar según su origen. Las fibras pueden ser de origen mineral y de origen orgánico, dentro de esta clasificación se encuentra las fibras cerámicas, las fibras metálicas y las fibras de origen inorgánico (carbono, vidrio, boro, por mencionar algunos) para el caso de los de origen mineral y para los de

origen orgánico encontramos la aramida, polietileno y el papel filtro, es nuestro caso de estudio.

Sin embargo existe una clasificación general donde se distinguen las fibras continuas y la fibra discontinua o cortada.

En los materiales compuestos de fibra corta o discontinua, las propiedades varían con la longitud de la fibra. Cuando esta es de una magnitud tal que todo incremento adicional de longitud ya no aumenta el modulo del material compuesto, entonces el material esta reforzado con fibras continuas. En la mayor parte de los materiales compuestos de fibra continua, de hecho, la longitud de las fibras es comprable a la dimensión global del componente o estructura.

Como análisis de estas dos formas de clasificar a los materiales compuestos reforzados con fibras, el papel filtro es entonces, un material compuesto orgánico de fibras cortas y puestas aleatoriamente en su matriz.

### **2.5.2. Propiedades de los materiales compuestos reforzados con fibras**

Hasta ahora se ha hablado sobre las generalidades de los materiales compuestos; ahora se analizaran las propiedades resultantes de la combinación. La combinación macroscópica de las fibras con la matriz da por resultado propiedades que no se consiguen mediante los componentes por separado [15]. Por ejemplo, las fibras tienen gran resistencia a la tensión y módulos grandes, pero no soportan en absoluto el esfuerzo de compresión o de deflexión; en cambio los plásticos tienen módulos y resistencias pequeñas. La combinación, una matriz reforzada con fibras, tiene propiedades deseables, debe existir alguna forma de unión entre las superficies comunes de los dos materiales para constituir el material compuesto. De lo contrario, la combinación no es un material y las propiedades que se buscan no se consiguen.

Las propiedades de los materiales compuestos se pueden estimar mediante la regla de mezclas, matemáticamente la regla establece:

$$P_c = \sum_{i=1}^n V_i P_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (2.1) \text{ y } (2.2)$$

Donde  $P_c$  es la propiedad del material compuesto, y el subíndice  $i$  se refiere al componente  $i^{\text{ésimo}}$ ,  $V$  es su fracción volumétrica y  $P$  es su propiedad. Es necesario señalar que  $V$  es la fracción volumétrica y no la fracción en masa o en peso mediante la cual se expresan la mayor parte de las soluciones solidas o mezclas. Para un sistema de dos componentes, la regla de mezclas es:

$$P_c = V_1 P_1 + V_2 P_2 \quad V_1 + V_2 = 1 \quad (2.3)$$

La propiedad del material compuesto puede ser isotrópica o anisotrópica. Un ejemplo de propiedad isotrópica es la densidad, la cual no depende de la dirección y, por tanto, la ecuación anterior se aplica a todo tipo de materiales compuestos. Otras propiedades pueden ser isotrópicas o anisotrópicas, según el tipo de material compuesto. Las propiedades son isotrópicas en los materiales compuestos particulados y de fibras cortas orientadas al azar, pero son anisotrópicas en los materiales compuestos de fibra continua, así como en los de fibra corta orientada o alineada.

### **2.5.3. Carga en dirección longitudinal a una fibra unidireccional**

La deducción de las propiedades mecánicas de los materiales compuestos, con base a la regla de mezclas, depende de los supuestos siguientes: (1) tanto la fibra como la matriz se comportan como materiales elásticos lineales, es decir, ambos presentan un curva esfuerzo-deformación elástica lineal, (2) sus relaciones de Poisson son aproximadamente

iguales y (3) la adhesión entre la fibra y la matriz es perfecta. Si el material compuesto de fibra unidireccional se somete a esfuerzo a lo largo de la dirección longitudinal de la fibra, las deformaciones del material compuesto, la matriz y la fibra son todas iguales:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (2.4)$$

Donde los subíndices c, m, f se refieren al material compuesto, la matriz y la fibra. Para este caso la regla de las mezclas para el modulo del material compuesto es:

$$E_c = V_m E_m + V_f E_f = (1 - V_f) E_m + V_f E_f \quad (2.5)$$

Puesto que  $E_f$  es mucho mayor que  $E_m$ , vemos que el modulo del material compuesto en la dirección longitudinal depende del módulo de la fibra. Multiplicando ambos lados de la ecuación por las deformaciones iguales, obtenemos lo siguiente:

$$E_c \varepsilon_c = (1 - V_f) E_m \varepsilon_m + V_f E_f \varepsilon_f \quad (2.6)$$

De donde se obtiene la resistencia mecánica del material compuesto que es:

$$\sigma_c = (1 - V_f) \sigma_m + V_f \sigma_f \quad (2.7)$$

Vemos que el esfuerzo aplicado sobre el material compuesto, o la deformación de él, también siguen la regla de las mezclas.

### 2.5.4. Carga en dirección transversal a una fibra unidireccional de un material compuesto

Cuando un material compuesto de fibra unidireccional se somete a esfuerzo en la dirección transversal, el esfuerzo sobre el material compuesto es el mismo que actúa sobre la matriz, lo mismo que sobre la fibra:

$$\sigma_c = \sigma_f = \sigma_m \quad (2.8)$$

En este caso, la deformación del material compuesto sigue la regla de las mezclas; por tanto:

$$\varepsilon_c = (1 - V_f)\varepsilon_m + V_f\varepsilon_f \quad (2.9)$$

Combinando las anteriores ecuaciones, obtenemos la relación siguiente, que describe el módulo del compuesto en la dirección transversal.

$$\frac{1}{E_c} = \frac{(1 - V_f)}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad (2.10)$$

Puesto que  $E_f$  es mucho mayor que  $E_m$ ,  $V_f/E_f < (1 - V_f)/E_m$ , y vemos que, en la dirección transversal, el módulo de elasticidad de un material compuesto unidireccional de matriz polimérica está gobernado por el módulo de la matriz.

### 2.6. Falla en los materiales

La falla ocurre cuando un miembro estructural o una estructura cesan de ejecutar la función para la cual fueron diseñados. Un elemento puede cesar en el desempeño de su función, o sea, fallar por una o más de varias razones. La palabra falla suele usarse erróneamente con el solo significado de ruptura o fractura. La ruptura es un tipo de falla frecuente e importante, pero no toda falla es una ruptura. Algunas fallas pueden ocurrir aun antes de la acción

inelástica o deformación permanente de un elemento. Es posible que un miembro o una estructura deje de realizar su función debido a una deformación elástica excesiva. Como un ejemplo, un torno de taller mecánico que ya no tienen la suficiente rigidez no servirá para conservar las estrechas tolerancias que se necesitan para su funcionamiento apropiado. Esta excesiva deformación elástica puede ocurrir a un nivel de esfuerzo muy bajo. De manera, se debe recordar que la falla de un miembro estructural se define con respecto a la función del mismo, y no necesariamente a su grado de deterioro.

Puesto que la función primaria de un elemento de ingeniería es la de resistir cargas, se debe relacionar la falla con la carga; esto es, la falla ocurrirá cuando la carga alcance un cierto valor, llamado carga de falla, en el cual el elemento cesa de realizar debidamente su función. El margen de seguridad de un miembro estructural depende de cuán cerca este de la carga de falla su carga de trabajo. La carga de trabajo o carga de diseño, es la carga que el elemento soporta realmente en su uso normal.

### **2.7. Consecuencias por la presencia de grietas en los materiales**

Cuando se encuentra una grieta o un defecto que se comporte como tal en el componente mecánico, el análisis previsto por la mecánica del medio continuo cambia por completo. Los desplazamientos y deformaciones serán mayores en la región de la grieta; habrá una concentración de esfuerzos en el extremo de la grieta y con esto una deformación local muy superior a la deformación global y, finalmente, las sustancias agresivas del ambiente encontrarán una trayectoria hacia el interior del material. Esto trae consigo las siguientes consecuencias: (1) reducción de la capacidad de soportar cargas, (2) desempeño inadecuado, (3) reducción de la vida útil.

Además de las consecuencias anteriores, que de por sí son ya bastante severas, la experiencia ha demostrado que él considera la presencia de grietas en una estructura es muy importante porque una grieta potencialmente conduce a una falla que por lo general es inesperada y catastrófica, y cuando las condiciones de servicio propician la propagación de grietas, el periodo de tiempo en que una grieta que se propaga hasta ocasionar una falla, constituye el límite de la vida útil del componente.

Como la grieta es una discontinuidad en el cuerpo, la mecánica del medio continuo no es aplicable para el análisis de un cuerpo agrietado, y por ello se desarrolló la mecánica de fractura y la mecánica de grietas auto-afines.

La inevitabilidad de la presencia de grietas en estructuras y componentes mecánicos por una parte y los desarrollos de la mecánica de fractura por otra, han permitido la reciente introducción del concepto de integridad, que puede definirse como la capacidad de un componente para desempeñar la función para la cual fue concebido en función de su contenido de defectos.

La evaluación de la integridad requiere por lo tanto de un procedimiento a través del cual se realiza la inspección no destructiva para determinar el contenido de defectos, la recopilación de los datos de diseño y condiciones de operación y el análisis del comportamiento de los defectos, para que, apoyado en la mecánica de fractura o la mecánica de grietas auto-afines, se determine la aptitud para el servicio, en términos de la resistencia residual y la vida remanente.



## 2.8. Fractura en materiales compuestos

Muchas personas han intentado aplicar la ciencia de la Mecánica de la Fractura a materiales compuestos reforzados con fibras, y se han topado con resultados no tan acertados; esto es porque la metodología de la Mecánica de la Fractura convencional asume una grieta simple que crece con una tendencia auto-similar, esto quiere decir, una grieta incrementa en tamaño (aun si el crecimiento es estable o inestable), pero su forma y orientación permanecen iguales. Sin embargo la fractura de los materiales compuestos reforzados con fibras algunas veces es controlada por numerosas microgrietas distribuidas a través del material, que por una grieta macroscópica simple [27]. Existen muchas situaciones donde la Mecánica de la Fractura puede ser aplicada a los materiales compuestos., pero es importante reconocer las limitaciones de teorías que fueron aplicadas a los materiales homogéneos. La siguiente imagen muestra varios mecanismos de falla.

Una ventaja de los materiales compuestos es que la fractura raramente ocurre catastróficamente sin peligro, pero tiende a ser progresivo, con daño subcritico extensamente dispersado a través del material. Una carga de tensión que se le aplique a un material compuesto puede ocasionar la fractura de la matriz, el deslizamiento de fibras, la ruptura de fibras, estiramiento de fibras, y desunión de la composición matriz-fibra. La resistencia ultima hace que falle un material compuesto e implica muchas de las veces estos mecanismos. Los esfuerzos fuera del plano pueden conducir al fenómeno de la delaminación porque las fibras no contribuyen significativamente con la resistencia en esta dirección. Las cargas de compresión pueden crear el micropandeó de las fibras; debido a que la matriz de polímero es dúctil comparado con las fibras, entonces se deduce que las fibras se comportan inestablemente cuando se les aplica una carga de compresión; sin embargo, se ha observado que las carga de compresión pueden conducir a la delaminación por

medio del pandeo macroscópico, particularmente si el material contiene una región delaminada preexistente.

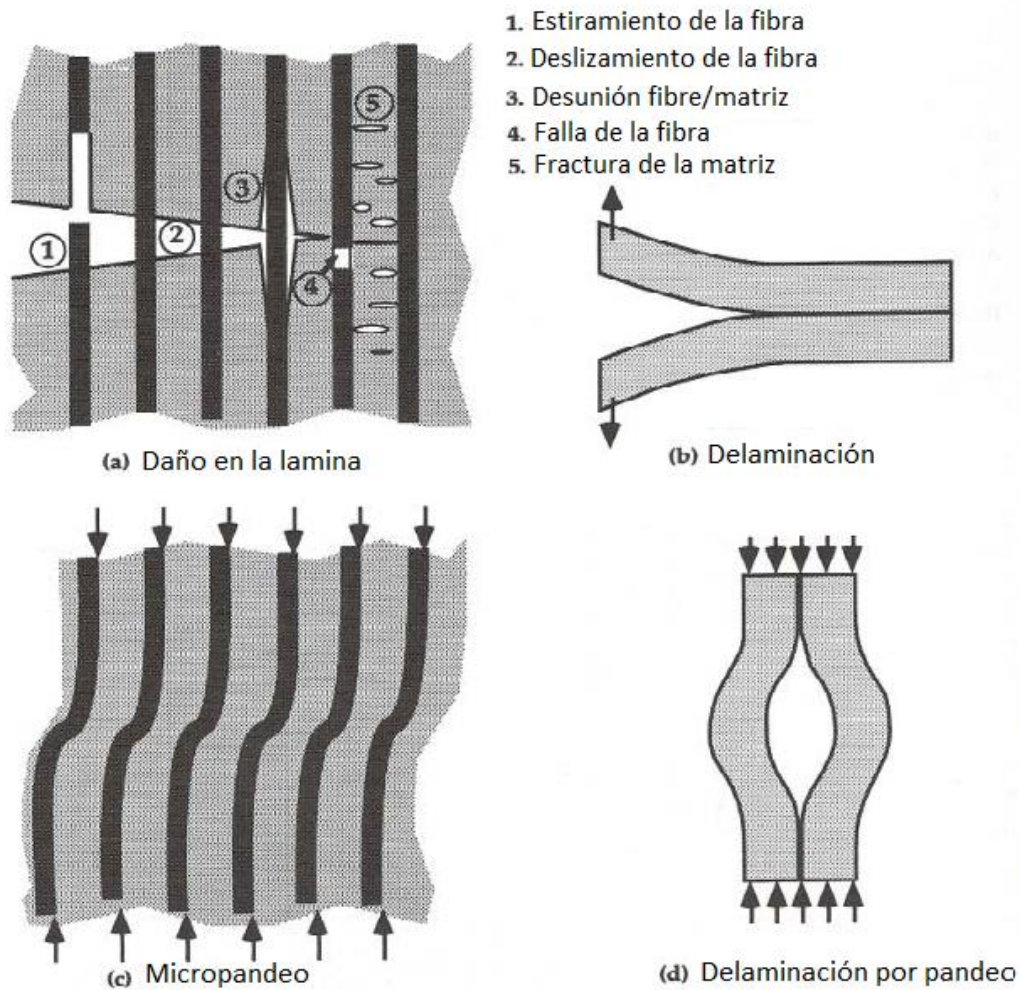


Figura 2.4. Fallas en materiales compuestos reforzados con fibras [28]

## Capítulo 3

# MECÁNICA DE GRIETAS AUTO-AFINES

### 3.1. Geometría Fractal

Históricamente, Benoit Mandelbrot fue la primera persona en introducir el concepto "fractal" y "dimensión fractal" basado en la definición de Hausdorff (1886-1942) mencionada en 1919 [29]. El primero reconoció que muchos fenómenos naturales son tan irregulares y complejos que no pueden ser descritos por la clásica geometría Euclidiana. Bajo este contexto, la cita de Mandelbrot parece ser la más apropiada para mencionar: "¿Por qué la geometría algunas veces es descrita como algo "frio" y "seco"?". Una de las razones yace en su incapacidad de describir algunas de las formas naturales más importantes en la Tierra, por ejemplo la forma de una nube, de un árbol, de una costa o de una costa. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y una corteza de árbol no es lisa. Motivado por la teoría de turbulencia del Dr. Kolmogorov (1903-1987) en su definición de 1958 acerca de la capacidad de una figura geométrica, Mandelbrot publicó un artículo de investigación titulado, "¿Que tan largo es la costa de Bretaña? Auto-similitud estadística y dimensión

fraccional", y hacer un intento para explicar la distribución de la energía en turbulencia intermitente. Su famoso libro sobre "La geometría fractal de la naturaleza" es la referencia común utilizada y contiene tanto ideas elementales y un amplio rango de conceptos avanzados tales como los multifractales y sistemas dinámicos. El también hace un intento de convencer a los lectores de que la geometría fractal comparte con la Geometría Euclidiana una gran variedad de fenómenos irregulares observados en la naturaleza.

En términos rigurosos, un fractal es una curva geométrica que consiste en una forma idéntica repetida en una escala que decrece. Mandelbrot menciona que muchos de los ejemplos comunes de fractales incluyen grabaciones de los latidos de un corazón, promedios industriales de Dow Jones, variaciones de flujo de tránsito, fluctuaciones electromagnéticas en ruido de radiación galáctica, textura en imágenes de terreno natural. Algunas de las curvas mencionadas anteriormente son formas altamente irregulares. Otro ejemplo es la velocidad del viento durante una violenta tormenta. Con la llegada de las computadoras y el poder del análisis de gráficas, los fractales y el caos han recibido mayor atención en recientes años. Debido al avance tecnológico, en especial en el ámbito de las computadoras, matemáticos y científicos le han dado interés a la geometría fractal y a los sistemas dinámicos caóticos y sus diferentes áreas. Actualmente investigaciones sobre fractales y caos están asociados con nombre famosos tales como George Cantor (1845-1918), Henri Poincaré (1854-1912), Waclaw Sierpinski (1882-1969), Herman Minkowski (1864-1909), Gaston Julia (1893-1978), Pierre Fatou (1878-1929) y Benoit Mandelbrot (1924)[29].

En matemáticas, la dimensión topológica de un conjunto es tradicionalmente considerada como la dimensión natural. Esto es definido por un número natural. Así, un punto una línea recta, un plano o un

volumen tienen una dimensión topológica 0, 1, 2 y 3 respectivamente. Mandelbrot reconoció que la definición de la dimensión topología no puede ser usada para definir la dimensión de algunos conjuntos tan irregulares (tales como las costas)[30].

En 1919 Hausdorff señaló que la dimensión topológica no es adecuada para algunos conjuntos e introdujo una nueva definición para la dimensión basada en las variaciones de tamaños de conjuntos cuando las escalas medidas son diferentes. Así, las definiciones de Hausdorff de la medida y la dimensión proporcionar las bases fundamentales del estudio de la teoría de la medición geométrica. La dimensión de Hausdorff puede ser definida por algún subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , abierto o cerrado. Desafortunadamente la dimensión topología, la dimensión de Hausdorff no es invariante bajo el homeomorfismo.

Mandelbrot definió a los fractales como un conjunto con dimensión de Hausdorff no integrable, dimensión fractal simple [30]. Sin embargo no hay una definición aceptada universalmente de los fractales; pero estos pueden ser vistos en diferentes escalas, desde tamaños macroscópicos a tamaños microscópicos, y en cada escala la estructura persiste. Así que esto puede ser tratado estadísticamente como auto-similar en el sentido que de que una parte pequeña indefinidamente de una forma es geoméricamente similar a un agujero. Por ejemplo, el conjunto de puntos sobre una línea recta en el espacio Euclidiano ordinario tiene la dimensión topológica  $D_T=1$ . Obviamente, la línea no es un fractal de acuerdo con la definición de Mandelbrot. Sin embargo, hay muchos ejemplos donde existe un conjunto fractal por la cual la dimensión de Hausdorff no es integrable. Los ejemplos similares son  $D=D_T=0$  para puntos,  $D=D_T=1$  para líneas,  $D=D_T=2$  para superficies y planos y  $D=D_T=3$  para esferas y otros volúmenes.

La dimensión de capacidad es una simplificación de la dimensión de Hausdorff que está relativamente fácil computada numéricamente. Se considera un conjunto frontera  $S$  en  $\mathbb{R}^n$  y se cuenta el número mínimo  $N(r)$  de esferas de radio  $r$  requeridas para cubrir el conjunto  $S$ . Basado en diagramas experimentales de las costas de Bretaña y la trayectoria de la frontera entre España y Portugal de L. F. Richardson (1881-1953), el comportamiento del escalamiento esta descrito por la relaciona fundamental de un fractal auto-similar determinado por:

$$N(r)r^D = 1 \quad (3.1)$$

Donde  $N(r)$  es el número de segmentos los cuales son graficados contra sus longitudes unitarias  $r$  en un diagrama logarítmico, para que esto de una línea recta de la cual la pendiente es el valor  $-D$ .

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \quad (3.2)$$

La dimensión capacidad  $D$  de  $S$  generaliza este resultado y está definida por:

$$D = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \quad (3.3)$$

La medida de  $\log N(r)$  es:

$$M = \lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^D \quad (3.4)$$

La dimensión de Hausdorff es una medida fractal que incluye todos los conjuntos de  $S$  con esferas de radio menores que  $r$ . Cabe mencionar que la dimensión de capacidad también es llamada dimensión fractal. Puede ser demostrado que la dimensión fractal  $D$  puede ser

relacionada con la dimensión de Hausdorff para conjuntos auto-similares. Cuando la longitud  $l$  no es igual a uno, la ecuación (3.1) se transforma a la siguiente relación:

$$N(r)r^D = l^D \quad (3.5)$$

Así que la dimensión de los fractales auto-similares está dada por:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \quad (3.6)$$

La longitud nominal puede ser obtenida por:

$$l_n = N_n r_n \quad (3.7)$$

Esto claramente implica que los conjuntos fractales no son medibles usando potencias integrables de longitud. La dimensión de Hausdorff provee la clara posibilidad de tomar medidas finitas de estos conjuntos inusuales, si la dimensión ordinaria es reemplazada por un valor no integrable. Se observa que la definición anterior muestra la dimensión de Hausdorff  $D$  como una propiedad local en el sentido de que mide las propiedades de conjuntos de puntos en el límite de radio  $r \rightarrow 0$  de la función empleada para cubrir el conjunto. La definición anterior puede generalizarse fácilmente a espacios de elevadas dimensiones e incluye también la euclidiana.

En las aplicaciones, la dimensión fractal se puede interpretar como el grado de meandros de una curva. En la práctica, la longitud  $r$  se utiliza como una pequeña fracción de  $\log N(r)/\log(1/r)$  tiende a un valor fijo de  $D$  en el límite. En algunos casos, esta fracción tiene el mismo valor en cada paso de manera que se puede escribir esta relación simplemente como:

$$D = \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \quad (3.8)$$

O también puede ser escrito de la siguiente forma:

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^D \quad (3.9)$$

Claramente la longitud total  $L = Nr$  puede ser expresada como:

$$L = \left(\frac{1}{r}\right)^{D-1} \quad (3.10)$$

Esto demuestra que la longitud total aumenta conforme  $r$  disminuye. Ahora, basándose en la idea anterior de la dimensión fractal y un modelo simplificado de la atmósfera con nubes como fractales auto-afines, Hentschel y Procaccia [31] calcularon la dimensión fractal de los perímetros de nubes y los resultados obtenidos fue que la dimensión de Hausdorff se encuentra en el rango de  $1.37 < D < 1.41$ .

Este resultado teórico está en excelente acuerdo con la observación. Por otra parte, con base en la suposición de que todos los ríos y arroyos y sus bases son geoméricamente similares, y la zona longitudinal de drenaje de un río en la forma  $L = 1.4A^\alpha$  donde  $\alpha = 0.60$ , Mandelbrot obtuvo la dimensión fractal de los ríos y arroyos como  $D = 2\alpha$  donde  $\alpha = 1.2$  [30]. Estos ejemplos ilustran que las dimensiones de las nubes y ríos no son enteros mayores al valor unitario.



### 3.1.1. Fractales auto-similares

De acuerdo a la Geometría Fractal el concepto de fractal auto-similar y la dimensión fractal se pueden definir si primeramente se considera una curva sobre un plano, como lo indica la figura 3.1.

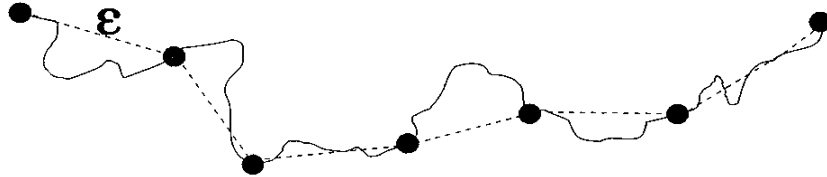


Figura 3.1. Medición de la dependencia de una curva [32]

Para medir la longitud de esta curva, se emplea un criterio lineal, considerando una longitud  $\varepsilon$ ; la medida de la longitud es  $L(\varepsilon) = N \times \varepsilon$ , para una línea recta de longitud  $L$  esta medida  $L(\varepsilon)$  es obviamente independiente de  $\varepsilon$ , debido a que  $N = L/\varepsilon$ . Para curvas típicas,  $L(\varepsilon)$  converge asintóticamente hacia una constante  $L$  tal que  $\varepsilon \rightarrow 0$  [32]. Sin embargo, algunas curvas con geometría compleja están determinada con la siguiente relación matemática:

$$L(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D+1} \quad (3.11)$$

En donde  $D$  toma valores mayores a 1 y menores o iguales a 2. El número de pasos necesarios para medir la curva  $N(\varepsilon)$  puede ser determinado con el factor de escalamiento  $\varepsilon^{-D}$  y no con la relación  $1/\varepsilon$ , por lo que estas curvas son fractales auto-similares de dimensión  $D$ . Así que se pueden generar fractales matemáticos empleando la anterior relación con cualquier valor de  $\varepsilon$ , tendiendo a cero, un ejemplo de esto es la curva triádica de Koch. Sin embargo existen fractales naturales, en donde la relación anterior es solo aplicable hasta un rango limitado de escalas. Así que definir fractales tiene una importante característica, la cual se puede definir de la

siguiente forma: el fractal matemático siempre trata de adaptarse a la escala real del fractal natural siempre y cuando se encuentre en el rango especificado por la anterior relación matemática, a esto se le dice que tiene escalamiento invariante. Las líneas que determinan la forma de las costas son un ejemplo claro de curvas fractales auto-similares.

Una alternativa para determinar la dimensión fractal de una curva sobre un plano es el llamado método de conteo de cajas, esto es el plano se cubre con una malla de celdas cuadradas de tamaño  $\varepsilon^2$ , entonces se puede observar que  $N(\varepsilon)$  representa el número mínimo de celdas necesarias para cubrir la curva. Adaptando el método de conteo de cajas con la anterior ecuación, la relación nos queda de la siguiente forma:

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D} \quad (3.12)$$

El método de conteo de cajas, de gran aplicabilidad en numerosos campos de la física, puede ser fácilmente extendida a una superficie fractal en un espacio tridimensional (las celdas bidimensionales se hacen cajas de tres dimensiones). Debido a que la longitud de la curva  $L(\varepsilon)$  se escala con  $N(\varepsilon) \times \varepsilon$ , ambos métodos son equivalentes y se puede demostrar con las dos anteriores relaciones matemáticas.

Para una curva fractal definida sobre un plano  $xy$ , las coordenadas  $x$  y  $y$  son estrictamente equivalentes. La invariancia en la escala es obtenida cuando se incrementa o se acorta la escala por un factor idéntico  $\lambda$  a través de las dos direcciones ( $x \rightarrow \lambda x$  y  $y \rightarrow \lambda y$ ). De forma análoga, la invariancia de escala de una superficie auto-similar de dimensión fractal  $3 \geq D > 2$  dentro de un espacio  $xyz$  es obtenido cuando se escala por un factor idéntico a lo largo de  $x, y$  y  $z$  ( $x \rightarrow \lambda x$ ,  $y \rightarrow \lambda y$  y  $z \rightarrow \lambda z$ ). Sin embargo, como se ha mencionado, las superficies de fractura no son

auto-similares, tienden a ser auto-afines; esto es porque la elevación en el eje  $z$ , que es perpendicular al plano de la grieta no es equivalente a los ejes  $x$  y  $y$ , como lo había mencionado Bažant y Plant [33], las superficies o perfiles de fractura generalmente exhiben voladizos, debido a las discrepancias con la separación cinemática de las superficies; por lo tanto Bažant y Plant [33] concluyeron que solo los fractales auto-afines se asemejan a las grietas. Por supuesto, esto no es estrictamente verdadero, porque algunas superficies auto-similares permiten la separación cinemática (Borodich, [34]).

### 3.2. Fractales auto-afines

Mientras los fractales auto-similares son por definición isotrópicos, los fractales auto-afines son estadísticamente anisotrópicos. En el caso de una curva sobre un plano  $xy$ , la invariancia en la escala es obtenida escalando empleando un factor diferente a lo largo de las direcciones  $x$  y  $y$  ( $x \rightarrow \lambda x$  y  $y \rightarrow \lambda^H y$ ), donde  $H \neq 1$ , y es conocido también como el exponente Hurst [31]. Una definición formal de un fractal auto-afín en un espacio bidimensional es aquel que empleando el método de conteo de cajas, la medida  $N(\lambda x, \lambda y, \lambda^H z)$  es estadísticamente auto-similar a  $N(x, y)$ :

$$N(\lambda x, \lambda^H y) = \lambda^{-D} N(x, y) \quad (3.13)$$

De manera similar se puede definir las superficies de fractura dentro de un espacio tridimensional, en este caso el conteo de cajas  $N(\lambda x, \lambda y, \lambda^H z)$  es estadísticamente auto-similar a  $N(x, y, z)$ .

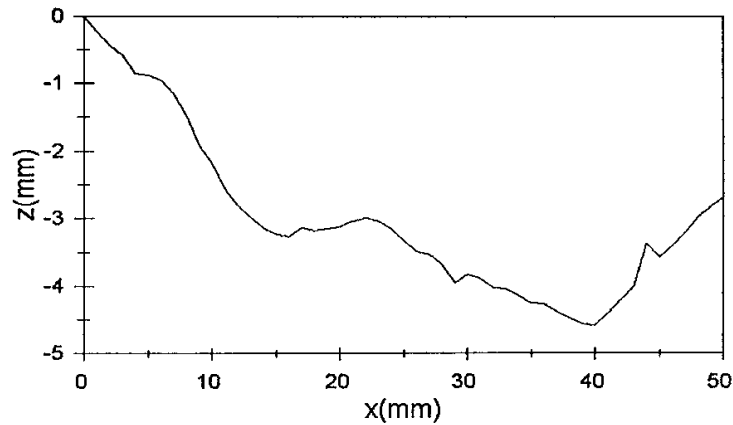


Figura 3.2. Perfil de fractura de un bloque de hielo del mar Báltico después de aplicarle una carga de tensión [31]

La topografía de la Tierra, así como también, las superficies de fractura son ejemplos naturales de superficies auto-afines. En estos dos ejemplos, la autosimilitud esta preservada sobre el plano  $xy$  y la auto-afinidad surge de la dirección vertical  $z$ , con  $H < 1$ ; en otras palabras, el significado de la auto-afinidad en estos casos donde la coordenada  $z$  esta estadísticamente relacionada a la coordenada horizontal, pero tiene sistemáticamente una magnitud más pequeña. La relación entre las direcciones horizontal y vertical se puede expresar también utilizando la siguiente relación matemática:

$$\Delta z \sim (\Delta r)^H \quad (3.14)$$

Donde  $\Delta r$  es una distancia horizontal ( $\Delta r = \Delta x$  para una curva auto-afín, o  $\Delta r^2 \sim \Delta x^2 + \Delta y^2$  para una superficie auto-afín) y  $\Delta z$  es la diferencia máxima de elevación ( $z_{\max} - z_{\min}$ ), o la desviación estándar dentro de la ventana; entonces se podría decir que para un fractal auto-afín el escalamiento se tendría que hacer con el mismo factor  $\lambda$  para ambas direcciones, pero realmente se tiene que

emplear un factor diferente  $\lambda^H$  para el eje vertical. Ejemplos de esto se pueden visualizar en la figura 2, en donde se han generado perfiles auto-afines, cabe mencionar que las superficies más rugosas tienen un exponente de Hurst más bajos que las superficies menos rugosas, estas últimas tienden a un valor unitario debido a que presentan más suavidad en sus trayectorias.

Debido a la gran cantidad de geometrías auto-afines en la naturaleza se han desarrollado varios métodos para determinar el exponente de Hurst o exponente de rugosidad como también es nombrado, uno de estos métodos es el Análisis de Hurst que consiste en graficar la longitud de la ventana de la caja  $\Delta x$ , con el correspondiente rango máximo de elevación dentro de la ventana de caja  $\Delta z$ ; una de las características de este tipo de gráficos es la forma lineal que adopta la serie de datos que se analizan, esto se debe a que las series de datos están mostrados en un sistema coordenado plog-plog, en donde el valor de la pendiente es el exponente de Hurst. Este no es el único método para determinar esta propiedad fractal, existen otros más que con la ayuda de los avances informáticos ha facilitado la labor de hacer este tipo de análisis; por mencionar algunos se encuentran el método de Análisis del Espectro de Potencia, Análisis de Variograma, Análisis de la Longitud de Onda, Análisis de Rango Rescalado y el Análisis de la Longitud Rugosa; estos métodos serán explicados brevemente en el siguiente capítulo.

Schmittbuhl y colaboradores [35], empleando los anteriores métodos incluyendo el Análisis de Hurst, analizaron los perfiles de las grietas de granito y gneis (roca compuesta por cuarzo, feldespato y mica, y es similar al granito), estos materiales que claramente presentan un comportamiento anisotrópicos fueron probados empleando la técnica de flexión con tres puntos apoyo en las probetas, y encontraron un comportamiento auto-afín

con un exponente de Hurst aproximado de 0.8, con una resolución de  $25\mu\text{m}$  en la obtención de las imágenes de los perfiles de las grietas, tal valor es mucho menor al promedio del tamaño de grano (1mm) de los materiales. En otro trabajo realizado por Weiss [36] encontró que las superficies de fractura analizadas en muestras de hielo de mar, mantenían un exponente de Hurst igual a 0.8, este valor es similar al encontrado por Schmittbuhl y colaboradores [35] en los materiales porosos de granito y gneis. Estas observaciones argumentan un escalamiento universal de las superficies de fractura sin tomar en cuenta la escala de la microestructura y tamaño de grano que presente el material en cuestión.

### **3.2. Morfología de las superficies de fractura**

La morfología de las superficies de fractura representan un mosaico complejo de artefactos microestructurales, en donde las características de la microestructura y el modo de fractura pueden ser escaladas desde el tamaño de las dimensiones atómicas de las imperfecciones de los enlaces hasta dimensiones macroscópicas como un tamaño de grano.

Para entender la morfología de las superficies de fractura se requiere de la deconvolución de las dimensiones anteriormente citadas, las cuales en conjunto construyen bloques de las superficies de fractura. Las características de las dimensiones de fractura están relacionadas significativamente con las longitudes microestructurales, los cuales influyen en los micromecanismos de fractura [37]. Por esta razón, en años recientes, el análisis cuantitativo de las superficies de fractura se ha vuelto parte esencial en el estudio de la deformación y ruptura de materiales. El análisis de las superficies de fractura a menudo provee información acerca de la morfología de la superficie la cual es complementaria a la que se obtiene por métodos

metalúrgicos. Existen numerosas investigaciones enfocadas a la caracterización de la morfología de las superficies de fractura dentro del ámbito de la geometría fractal que han podido establecer parámetros confiables basados en la relación de las propiedades físicas y la microestructura de un material, por lo que al día de hoy se pueden establecer patrones de fractura en materiales con comportamiento aleatorio, basados en objetos fractales.

La aplicación de la geometría fractal provee un efectiva herramienta en el estudio de superficies de fractura altamente irregulares; muchos materiales han sido investigados con diferentes modos de fractura, comportamiento frágil y dúctil, desde la escala nanométrica empleando instrumentos de observación microscópicos sofisticados hasta la escala macrométrica en donde se emplea la perfilometría y técnicas de análisis de imágenes.

Cabe mencionar que las mediciones de las topografías de superficies se han relacionado con propiedades mecánicas, tales como la tenacidad, la resistencia a la tensión, la energía de impacto, la ductilidad, por mencionar algunas. Sin embargo, la caracterización cuantitativa y el modelado de la rugosidad de las superficies de fractura es un importante reto tanto para la Mecánica de la Fractura tanto para la Mecánica de Grietas Auto-afines.

Por tal motivo, este trabajo está enfocado a estudiar la naturaleza de un material que hasta la fecha no había sido caracterizado, el papel filtro.

### **3.3. Mecánica de Grietas Auto-afines**

La propagación de las grietas es un problema tanto de intereses tecnológicos como científicos, esto ha motivado que una gran cantidad de investigadores analicen

por qué se generan las grietas (nucleación) y cómo estas ya formadas puedan crecer y propagarse. Es bien conocido que las grietas reales en materiales sólidos tenga una pequeña semejanza con grietas idealizadas con trayectorias lisas las cuales son usualmente consideradas en la Mecánica de la Fractura, por esta razón, en años recientes, el análisis cuantitativo de las superficies de fractura se ha convertido en parte integral de estudio de la deformación y ruptura de materiales, este análisis de las superficies de fractura algunas veces proveen información acerca de la morfología de la superficie la cual complementa a lo obtenido por métodos metalúrgicos.

Debido al progreso de la ciencia, la habilidad de describir el fenómeno de fractura en términos cuantitativos precisos conduce a importantes avances en el entendimiento en esta área, esto ciertamente parece ser verdadero en el caso de la formación de la superficie de fractura. Retomando el trabajo de Nowicki [38], él ha descrito 32 parámetros y funciones que han sido usados para caracterizar superficies rugosas, obviamente es importante clasificar el fenómeno de fractura en un sentido que la labor del entendimiento y descripción pueda ser reducido a magnitudes más razonables, por lo que este objetivo puede ser logrado dentro de un marco topográfico estadístico de grietas.

El término Topografía Estadística fue introducido por Ziman [39] por medio de la teoría de formas de campos aleatorios con un énfasis especial en las líneas y superficies de contorno de un potencial aleatorio. Un estudio matemático de la topografía estadística de los campos aleatorios de Gaussian fue elaborado por Adler [40]. El ejemplo más importante de la topografía estadística esta presentada por los patrones de islas y costas naturales; y como se ha mencionado anteriormente las consideraciones geográficas inspiraron a Mandelbrot a introducir el concepto de fractales.



Comenzando con uno de los primeros trabajos de Mandelbrot y colaboradores [41], se han encontrado numerosas investigaciones enfocadas en la caracterización morfológica de las trayectorias de las grietas dentro de un panorama de la geometría fractal. Diversos materiales se han investigado de forma tal que se pueda describir el comportamiento de fractura y en muy diferentes escalas, desde la escala nanométrica utilizando fuerza atómica o microscopía de efecto túnel hasta las escalas micrométricas utilizando la perfilometría y técnicas de análisis de imagen y métricas en donde se analizan fallas geológicas [42].

Ahora se ha establecido con claridad que a primera vista los patrones de fractura pueden ser tratados como objetos fractales y que la geometría fractal desarrollada por Mandelbrot [41], permite la descripción de tales formas irregulares que son más complejos que las formas euclidianas.

### **3.4. Métodos para determinar el exponente de Hurst**

#### **3.4.1. Método del Variograma**

El método del Variograma o también conocido como la Varianza de los incrementos, como el valor esperado de la diferencia al cuadrado entre dos valores de  $y$  separados por una distancia  $w$  [43]. En otras palabras el Variograma  $V(w)$  de un serie  $y(x)$  esta medida como sigue:

$$V(w) = [y(x) - y(x + w)]^2 \quad (3.15)$$

Es decir,  $V(w)$  es el valor promedio de la diferencia al cuadrado entre los pares de puntos que se encuentran a la distancia  $w$ . Esta expresión para el variograma es con frecuencia dividida en dos, en la literatura

geoestadística para obtener el semi-variograma, el cual puede ser inmediatamente relacionado a la función de auto-covarianza. Para obtener la relación entre  $V(w)$  y el exponente de Hurst, se considera lo que pasa en un trazo fraccional del movimiento Browniano. Si se toma una longitud igual a  $w$ , el valor de la diferencia entre  $y(w)$  y  $y(0)$  estará normalmente distribuida con una varianza  $s(w)^2$  donde  $s$  es la desviación normal, que es proporcional a  $w^{2H}$ ; si se toma la diferencia al cuadrado, el valor esperado va a ser igual a  $s(w)^2$ , por lo que se puede escribir la siguiente relación matemática:

$$V(w) \approx w^{2H} \quad (3.16)$$

En la práctica, para obtener un valor estimado de  $H$ , el promedio de la diferencia al cuadrado entre todos los pares de puntos separados por la distancia  $w$  es calculada como en la ecuación (3.15) para un número de longitudes, y los logaritmos de  $V(w)$  son graficados contra los logaritmos de  $w$ . Si el trazo es auto-afín, esta gráfica debe seguir una trayectoria recta, en la cual la pendiente es igual a dos veces el exponente de Hurst. La dimensión fractal del trazo puede ser calculado de la relación del exponente de Hurst:

$$D_{\text{fractal}} = 2 - H \quad (3.17)$$

Donde  $D_{\text{fractal}}$  denota la dimensión fractal empleando el método del Variograma.

Este método puede ser aplicado a series que no tiene un intervalo de muestras constantes, significa que se pueden tomar puntos separados por distancias  $w \pm dw$ , donde  $dw$  es un pequeño porcentaje de  $w$ . Una medida de la amplitud del trazo puede ser estimado con el valor de la longitud  $w_0$ , donde  $V(w_0)^{0.5} = w_0$ , por lo que el método de variograma precisamente mide el valor al cuadrado

promedio de una tendencia, la cual es proporcional al exponente de Hurst.

### 3.4.2. Método del Análisis del Espectro de Potencia

Este método usa las propiedades del espectro de potencia de trazos auto-afines. En la práctica, para obtener una dimensión fractal estimada, se calcula el espectro de potencia  $P(k)$  (donde  $k=2p/l$  es el número de onda y  $l$  es la longitud de onda) y se grafica el logaritmo de  $P(k)$  contra los logaritmos de  $k$ . Si el trazo es auto-afín, este gráfico debe seguir una línea recta con una pendiente negativa,  $-b$  [43]. Este exponente está relacionado con la dimensión fractal con la siguiente ecuación:

$$D_{\text{fractal}} = \frac{5 - b}{2} \quad (3.18)$$

Donde  $D_{\text{fractal}}$  denota la dimensión fractal estimada desde el espectro de potencia.

Una medida de la amplitud del trazo puede ser estimado como  $P(k_0)$ , en donde el valor del espectro de potencia en algún número de onda es  $k_0$ , este valor es un parámetro que puede ser usado para ser comparado con diferentes conjuntos de datos. Debe ser enfatizado que obtener una estimación adecuada del espectro de potencia de una función muestreada no es una labor trivial; por ejemplo, se podría tomar una transformación de Fourier de las series de datos de entrada usando algoritmos de transformaciones de Fourier directas y ajustando los coeficientes de las transformaciones. La operación se ve reflejado en un periodograma, la cual es una estimación pobre del espectro de potencia. El defecto principal del periodograma es que la estimación de la potencia en cualquier frecuencia es muy ruidosa, con la amplitud del

ruido siendo proporcional al espectro de potencia, sin embargo promediando los periodogramas obtenidos de intervalos logarítmicos iguales del conjunto de datos puede suavizarse el ruido de la estimación espectral.

Antes de la transformación de Fourier, es mejor eliminar cualquier tendencia lineal promedio y multiplicar las series de datos de entrada por una función que suavice la transformación haciendo que tienda a cero en sus extremidades. Los algoritmos de transformación de Fourier directas o rápidas asumen que la serie es periódica (su punto final esta conecta a su punto inicial); este procedimiento tiene que ser hecho para evitar o minimizar las fugas de espectro.

Todas estas consideraciones se aplican para obtener la estimación espectral usando las transformaciones de Fourier, cabe mencionar que los datos deben estar uniformemente espaciados; por lo que de todos los métodos auto-afines, este es el más problemático para obtener la dimensión fractal, aunque paradójicamente es el método más común en la literatura.

### 3.4.3. Método de la Longitud Rugosa

Este método es similar al método del rango rescalado, esto es debido a que en el método de la Longitud Rugosa se toman las desviaciones normales o el valor medio cuadrático (RMS por sus siglas en inglés) de la rugosidad de los datos dentro del tamaño  $w$ , en lugar del rango vertical [43]. Para un trazo auto-afín, la rugosidad  $s(w)$  del RMS está relacionada con el exponente de Hurst de la siguiente forma:

$$s(w) \approx w^H \quad (3.19)$$

En la práctica, para una longitud  $w$ , las series de entrada están subdivididas en un número de intervalos de

longitud  $w$ , la rugosidad del RMS es calculada por cada valor de  $w$ , después de sustraer la tendencia lineal local. La estimación final de  $s(w)$  es el promedio de rugosidad de la RMS medida en por cada subdivisión de  $w$ . Este proceso es repetido para un numero de longitudes  $w$  y valores de los logaritmos promedio de  $s(w)$  y usualmente son graficados contra los logaritmos de  $w$ . Si el trazo es auto-afín, esta gráfica debe describir una trayectoria recta, en la cual la pendiente es igual al exponente de Hurst. La dimensión fractal del trazo puede ser calculado tomando el valor del exponente de Hurst de la siguiente forma:

$$D_{\text{fractal}} = 2 - H \quad (3.20)$$

Donde  $D_{\text{fractal}}$  denota la dimensión fractal estimado utilizando el método de la rugosidad de la RMS. Este método puede ser aplicado a series de datos que tienen un intervalo de muestras constantes, esto es debido a que la rugosidad de la RMS no depende del número de muestras.

#### 3.4.4. Método del Rango Rescalado

El método estadístico del Rango Rescalado (R/S) fue propuesto por Mandelbrot y Walls [44] y basado en análisis previos en Hidrología de Hurst [45] permite el cálculo del parámetro auto-afín,  $H$ , el cual mide la intensidad de la intensidad de dependencia de rangos largos en series de tiempo.

Para series de tiempo de longitud  $n, X = \{X:t = 1,2, \dots, n\}$  la relación R/S esta definida como la relación del rango máximo de la señal integrada,  $R(n)$  normalizada a la desviación estándar  $S(n)$ :

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \frac{\max\{0, r_t: t = 1,2, \dots, n\} - \min\{0, r_t: t = 1,2, \dots, n\}}{\sqrt{S^2(n)}}, \quad (3.21)$$

Donde

$$r_k = \sum_{t=1}^k X_t - \frac{k}{n} \sum_{t=1}^k X_t \quad (3.22)$$

Y

$$S(n) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( X_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

Una medición fiable de  $S(n)$  requiere datos con un intervalo de muestras constantes, debido a la diferencia esperada entre los valores sucesivos de  $X$ , la cual es una función de la distancia entre ellas.  $S(n)$  en el método del Rango Rescalado es usado para normalizar el rango  $R(w)$  para permitir comparaciones de los diferentes conjuntos de datos; si  $S(n)$  no es usado, se debe a que el rango  $R(n)$  puede ser calculado en conjuntos de datos que no tienen un intervalo de muestras constante.

En la práctica para una longitud  $w$ , se puede subdividir las series de entrada en un número de intervalos de longitud  $w$ , las medidas de  $R(w)$  y  $S(w)$  en cada intervalo y calcular  $R/S(w)$  como la relación promedio  $R(w)/S(w)$ . Este proceso es repetido para un número de longitudes y los logaritmos de  $R/S(w)$  son graficados contra los logaritmos de  $w$ . Si el trazo o la huella es auto-afín, esta gráfica debe describir una línea recta de la cual el valor de la pendiente es el valor del exponente de Hurst,  $H$  [43]; y siguiendo el procedimiento se puede determinar también el valor de la dimensión fractal con la siguiente relación, en donde se utiliza el exponente de Hurst:

$$D_{\text{fractal}} = 2 - H \quad (3.24)$$

Donde  $D_{\text{fractal}}$  denota la dimensión fractal estimado desde el método del rango rescalado.

### 3.4.5. Método de la Ondeleta

El método de la Ondeleta es una extensión del análisis de Fourier y la transformada de la señal sinusoidal es computacionalmente similar en principio a la Transformada Rápida de Fourier (FFT)[43]. La FFT utiliza cosenos, senos y funciones exponenciales para representar una señal, y en particular es más útil para representar funciones lineales. Dado que muchas series de tiempo muestran un comportamiento caótico no lineal, el análisis de Fourier es menos adecuado para el análisis de dichas series. El método de la Ondeleta es un método alternativo para analizar series de tiempo complejo. El objetivo del método consiste en emitir una señal de entrada en una serie de coeficientes determinados en cuanto a la "energía".

Los números discretos asociados a cada coeficiente contienen toda la información necesaria para describir completamente la serie siempre y cuando se haya utilizado el análisis de la ondeleta para la descomposición.

El método del Coeficiente de la Ondeleta Promedio (AWC por sus siglas en inglés) es un método que emplea la transformación de las ondas sinusoidales de acuerdo a la medida de las correlaciones auto-afines, por ejemplo, para medir el exponente de Hurst. Esto se realiza por medio de la transformación de las series de tiempo,  $X(t)$ , dentro del dominio,  $W[X](a;b)$ , donde  $a$  denota un parámetro de escala, y  $b$  indica las ubicaciones. El método AWC consiste en usar una escala  $a$ , para encontrar un valor de energía o amplitud representativo en una escala en particular. Esto puede ser hecho simplemente tomando el promedio aritmético de  $W[X](a;b)$  sobre todos los parámetros de  $b$ . Por tanto, podemos construir, a partir

de la transformada de la onda sinusoidal de  $X(t)$ , el espectro  $W[X](a)$  que sólo depende de la escala de  $a$ , y se define a continuación. Si  $X(t)$  es un proceso auto-afín que se caracteriza por el exponente de Hurst, este espectro se debe escalar como:

$$W[X](a) = \langle |a, b| \rangle_b \propto a^{H+1/2} \quad (3.25)$$

Si se traza  $W[X](a)$  en una gráfica la pendiente debe ser  $H + 1/2$  si la señal es auto-afín. Se debe notar que este método es un método multi-escala en el sentido de que el comportamiento en diferentes escalas no influye mutuamente de manera significativa, esto significa que el método desacopla escalas. El análisis de la ondeleta es una herramienta para el estudio de las variaciones localizadas por la descomposición de series de tiempo en el espacio de frecuencia de tiempo para determinar tanto los modos dominantes de variabilidad, cómo aquellos modos que varían en el tiempo. Este método es apropiado para el análisis de series no estacionarias, es decir, donde la varianza no se mantiene constante con el aumento de la longitud del conjunto de datos. Las propiedades fractales están presentes en donde el espectro de la potencia de la onda sinusoidal sea una función de ley de potencia de la frecuencia. El método de la Oscilación de Onda se basa en la propiedad de que las transformaciones de la Ondeleta de las trazas tienen propiedades auto-afines.



# Capítulo 4

## METODOLOGÍA

## EXPERIMENTAL

### 4.1. Procedimiento

Para estudiar el efecto de la rugosidad auto-afín en las superficies de fractura en el papel filtro de poro abierto y poro cerrado se elaboraron lotes de probetas de diferentes tamaños y se les indujo una grieta en la parte central de la misma, variando este tamaño de grieta en función del ancho de probeta.

Debido a la anisotropía en el comportamiento que presenta este material se seleccionó para poder caracterizarlo desde el punto de vista fractal. Se construyeron 30 probetas de forma rectangular por cada tamaño (50,100,150,200,250,300,350,400 mm de ancho,  $W$ , y de alto,  $L=100$  mm para todas las medidas anteriores) y tienen un espesor de 0.2431 mm para el caso del papel de poro abierto y 0.3287 mm para el papel de poro cerrado. A cada una de estas probetas se les indujo una grieta de longitud  $2a$  en la parte central que respeta la siguiente relación matemática:

$$2a = 0.25W \quad (4.1)$$

Tabla 4.1. Dimensiones de las probetas y longitud de grieta		
W (mm)	L (mm)	2a (mm)
50	100	12.5
100		25
150		37.5
200		50
250		62.5
300		75
350		87.5
400		100

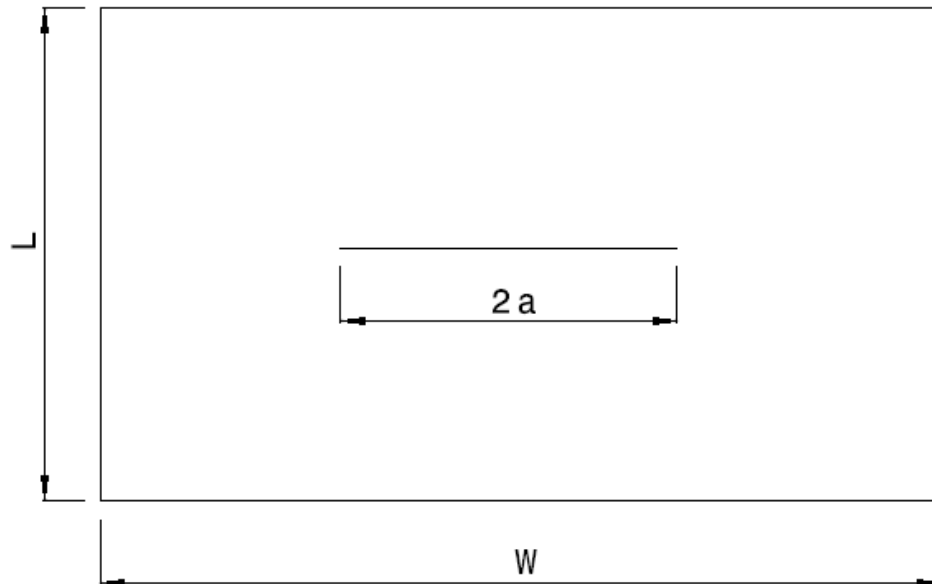


Figura 4.1. Geometría y dimensión de las probetas

Para la realización de las pruebas experimentales, se empleó un Sistema para Pruebas en Materiales (MTS por sus siglas en inglés) o Maquina Universal de Ensayo de Materiales, como también se le conoce. El modelo de la MTS corresponde a la MTS 858 Table Top System [46] y esta funciona a través de una unidad de potencia hidráulica (HPU por sus siglas en inglés) y se encuentran en el edificio de Laboratorios Pesados dentro de la Unidad Adolfo López Mateos, Zacatenco.

Con este equipo para realizar pruebas mecánicas es posible aplicar cargas estáticas y dinámicas de tensión, compresión, flexión y fatiga en un rango de carga que puede ir a los 5 kN o hasta 25 kN.



Figura 4.2. MTS 858 Table Top System [46]



Figura 4.3. HPU modelo SilentFlo 505.07 [46]

A cada una de las probetas se les aplico una carga de tensión, con la especificación de que el desplazamiento sea constante a un valor de 1 mm/min; durante la prueba se buscó la carga en la cual la grieta inducida comienza a propagarse; es importante mencionar que se empleó un flexo con lupa de magnificación de 3x y luz blanca para visualizar el momento de la propagación inestable de la grieta, figura 4.4 y 4.5.



Figura 4.4. Montaje de la probeta  
en la MTS 858 Table Top System



Figura 4.5. Búsqueda del lugar de inicio de propagación de grieta con ayuda del flexo con lupa y luz

Con los datos obtenidos de los ensayos se crearon graficas esfuerzo-deformación en el programa de computo Excel y a partir de ello se determinó la ecuación que representa al conjunto de puntos de cada prueba con la opción de línea de tendencia polinomial cuadrática que tiene el mismo programa.

Para la obtención de las fotografías se escanearon las probetas empleando un escáner fotográfico modelo HP G4050 [47] que cuenta con un software para el procesamiento de imágenes, sin embargo para procesar las imágenes se empleó un programa de computo realizado en Matlab y tiene la función de convertir a escala de grises y binarizar las imágenes, además de generar los trayectorias de las líneas de fractura de las probetas.

La resolución del Hardware del escáner es de 4800 x 9600 ppp y la resolución de las unidades ópticas es de

4800 dpi. La profundidad de bits de color es de 96-bit y el nivel de escala de grises hasta 256.



Figura 4.6. Escáner fotográfico modelo HP G4050 [47]

Los archivos generados por Matlab fueron guardados con la extensión '.ts' para que guardara compatibilidad con el programa de computo Benoit 1.2.



Figura 4.7. Fractura de la probeta de poro abierto de dimensiones 400x100 mm



Figura 4.8. Imagen de la línea de ruptura obtenida con el escáner de alta resolución en donde se muestra con una marca roja el inicio de la propagación inestable de la grieta

Por último se obtuvieron el exponente de rugosidad o exponente de Hurst empleando el programa de computo Benoit 1.2 por medio del método de la Longitud Rugosa (Roughness Length method en inglés). Es importante enfatizar que las pruebas fueron realizadas en un medio donde se controló la humedad con un deshumidificador para evitar que el papel absorbiese la humedad y se modificaran sus propiedades.

En el siguiente esquema se presentan los pasos simplificados del procedimiento experimental para su mejor comprensión.



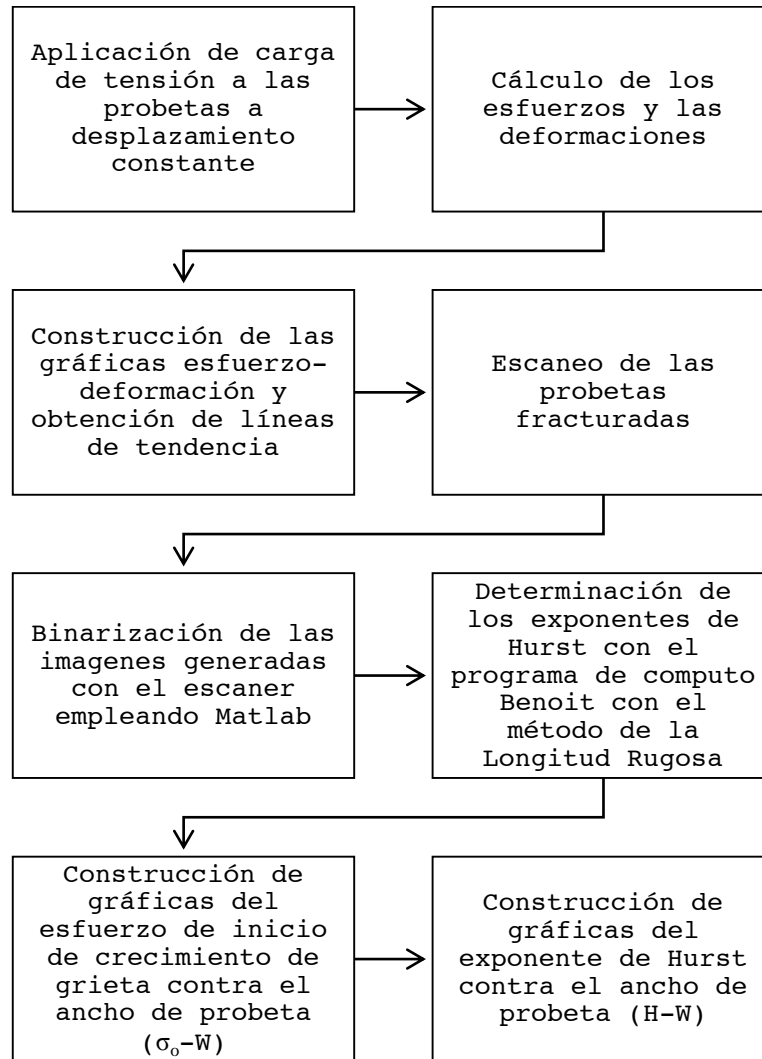


Figura 4.9. Esquema del procedimiento experimental simplificado

# Capítulo 5

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 5.1. Comportamiento mecánico del papel filtro

Como se había mencionado en el procedimiento, se probaron las probetas hechas de papel filtro con configuración de poro abierto y poro cerrado para analizar su comportamiento mecánico. Las pruebas se realizaron a desplazamiento constante. En la siguientes gráfica (figura 5.1) se muestra las curvas que denotan la relación del esfuerzo con la deformación de cada una de las medidas de las probetas en ambos tipos de papel filtro, además se marca el valor del esfuerzo de crecimiento de grieta  $\sigma_0$  (se debe recordar que  $W$  es el ancho de probeta).

Claramente se puede observar que el Papel Filtro de Poro Abierto (líneas continuas) tiene menor capacidad de absorción de energía que el Papel Filtro de Poro Cerrado (líneas punteadas); sin embargo, también se observa que las curvas de ambos tipos de papel siguen absorbiendo energía exhibiendo un crecimiento de grieta estable pero al mismo tiempo el valor de la carga va aumentando y sin llegar aun al punto donde el crecimiento de grieta se hace inestable. Esto en primera instancia hace parecer

que la fractura es de tipo dúctil, sin embargo en los valores de los exponentes de Hurst obtenidos empleando el método de la Longitud Rugosa mediante el manejo del programa de computo Benoit 1.2 muestra que los valores corresponden a una fractura de tipo frágil, esto último es más certero ya que el material exhibe un arreglo microestructural aleatorio que hace que sin duda alguna se clasifique como una fractura frágil.

Los valores de las gráficas de la figura 5.1 muestran que existe un aumento gradual de la cantidad de energía que puede una probeta almacenar y liberar cuando se le aplica una carga conforme aumenta el valor del ancho de la probeta a pesar de que la longitud de la grieta esta en estrecha relación con el ancho de las probetas con el modelo matemático  $2a = 0.25W$ .

Como se puede observar en los datos obtenidos de las tablas 5.1 y 5.2 existe un esfuerzo de inicio de crecimiento por cada tipo de papel, lo que hace que la relación  $2a = 0.25W$  tenga la capacidad de dictaminar el valor del esfuerzo mientras se va incrementando el valor del ancho de probeta o la longitud de grieta. Para el caso del papel filtro de poro abierto se tiene  $\sigma_0 = 10.58 \pm 0.426 \text{ MPa}$  y para el papel filtro de poro cerrado  $\sigma_0 = 14.55 \pm 0.414 \text{ MPa}$ .

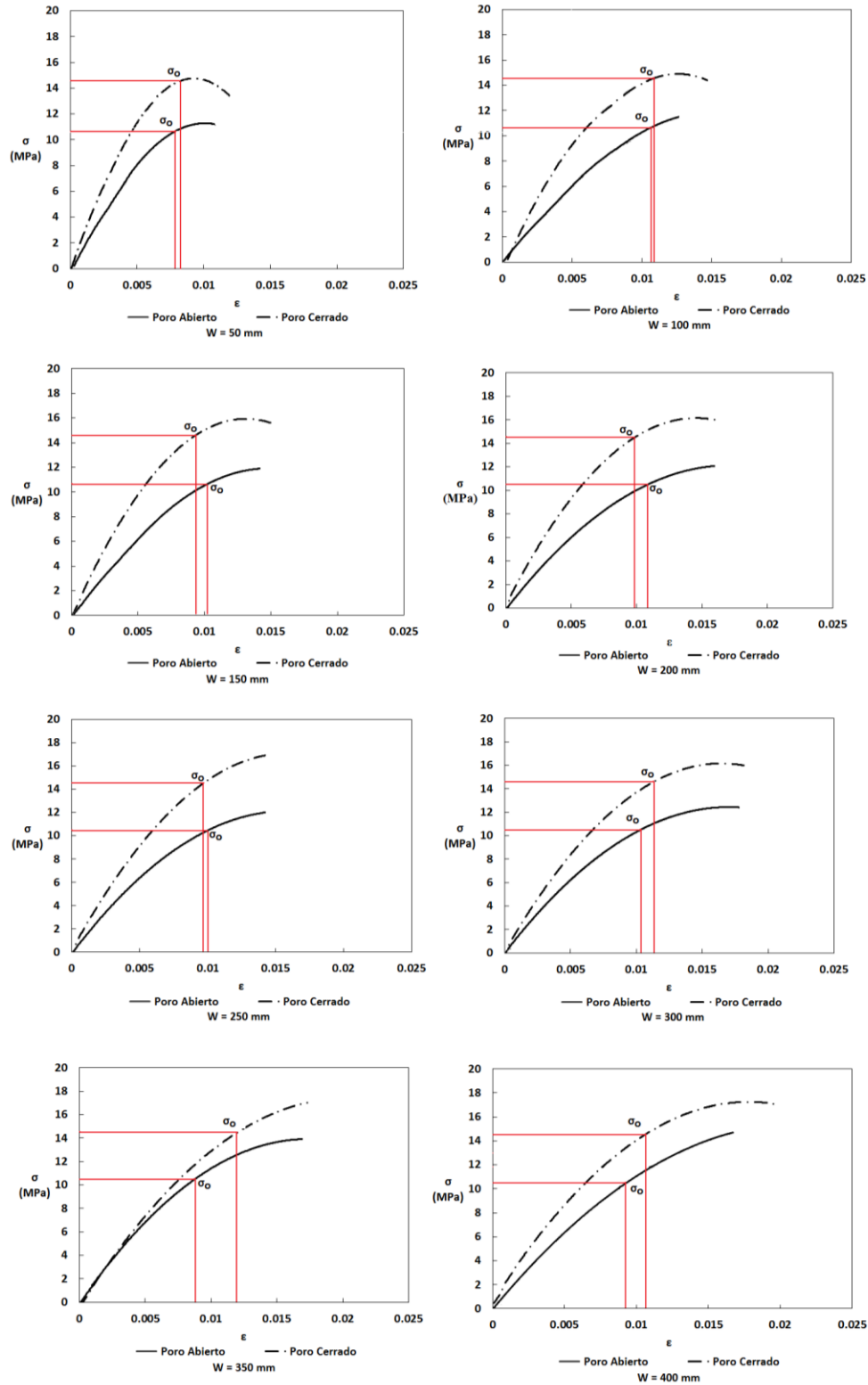


Figura 5.1. Gráficas esfuerzo-deformación del papel filtro de poro cerrado y poro abierto en dirección longitudinal a la fibra

### 5.1.1. Esfuerzo de Inicio de Crecimiento de Grieta

Se buscó el valor del esfuerzo donde la grieta comenzó a crecer,  $\sigma_0$ , para todas las probetas en cada tipo de papel y se observó que la magnitud del esfuerzo para cada tamaño de probeta y por cada tipo de papel se mantuvo constante, esto significa que el valor del esfuerzo no varió significativamente bajo la relación  $2a = 0.25W$  para el papel filtro de poro abierto y para el papel de poro cerrado, aunque el papel de poro cerrado demostró que necesita magnitudes mayores de carga para poder romper las fibras que el papel de poro abierto. Lo anterior dicho se muestra en las gráficas de la imagen 5.2 y en las tablas 5.1 y 5.2.

W (mm)	$\sigma_0$ (MPa)	Desviación Estándar (MPa)
50	10.5190	0.536
100	10.5490	0.681
150	10.6849	0.351
200	10.5404	0.267
250	10.5670	0.625
300	10.5375	0.471
350	10.5839	0.320
400	10.5833	0.152

W (mm)	$\sigma_0$ (MPa)	Desviación Estándar (MPa)
50	14.4843	0.484
100	14.5256	0.353
150	14.5139	0.462
200	14.5525	0.533
250	14.6315	0.332
300	14.4514	0.333
350	14.6221	0.266
400	14.5755	0.553

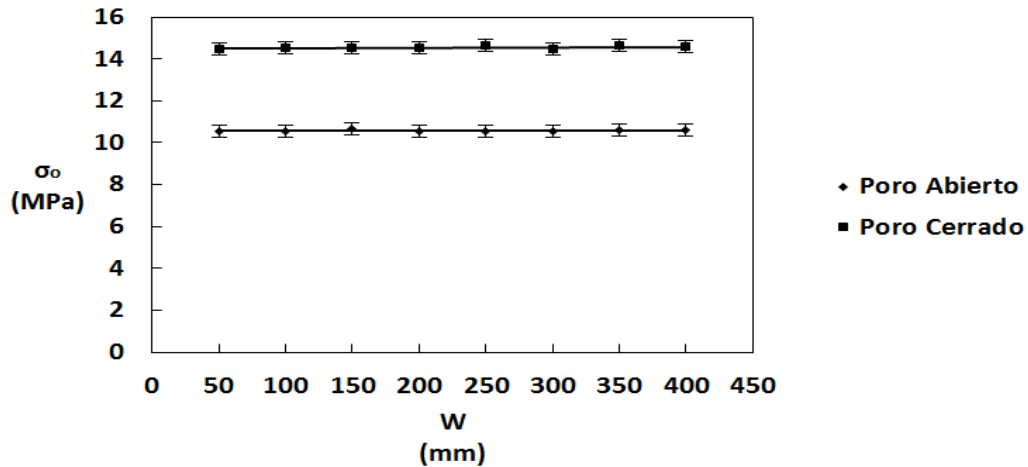


Figura 5.2. Gráfica Esfuerzo de Inicio de Crecimiento de Grieta ( $\sigma_0$ )-Ancho de probeta ( $W$ ) del papel filtro de poro abierto y cerrado

## 5.2. Determinación del exponente Hurst

La obtención de los exponentes de rugosidad o exponente de Hurst,  $H$ , se llevó a cabo mediante el uso de la herramienta de computo Benoit 1.2 a través del método del análisis de la Longitud Rugosa, este método fue seleccionado por la facilidad con que las líneas de tendencia se adaptan a los valores de los perfiles de las superficies de fractura, aun así se probaron los otros métodos disponibles en el programa de computo, al final se obtuvieron exponentes de Hurst similares para cada tipo de papel, no hubo efecto del tamaño de las probetas en el momento de obtener  $H$ . Lo que es relevante mencionar es que se han obtenido dos valores de  $H$ , uno para la propagación estable y otro para la propagación inestable en cada probeta, sin embargo, los valores no varían de forma significativa de una fase de propagación y la otra, depende de la rugosidad que posee cada tipo de papel; por lo que se obtuvieron dos exponentes de Hurst.

Tabla 5.3. Exponentes de Hurst para el Papel Filtro de Poro Abierto				
W (mm)	H (Propagación estable)	Desviación Estándar	H (Propagación Inestable)	Desviación Estándar
50	0.33	0.053	0.31	0.029
100	0.33	0.062	0.31	0.046
150	0.32	0.052	0.29	0.057
200	0.32	0.036	0.30	0.030
250	0.33	0.039	0.31	0.050
300	0.33	0.037	0.30	0.040
350	0.33	0.032	0.30	0.047
400	0.33	0.032	0.30	0.042

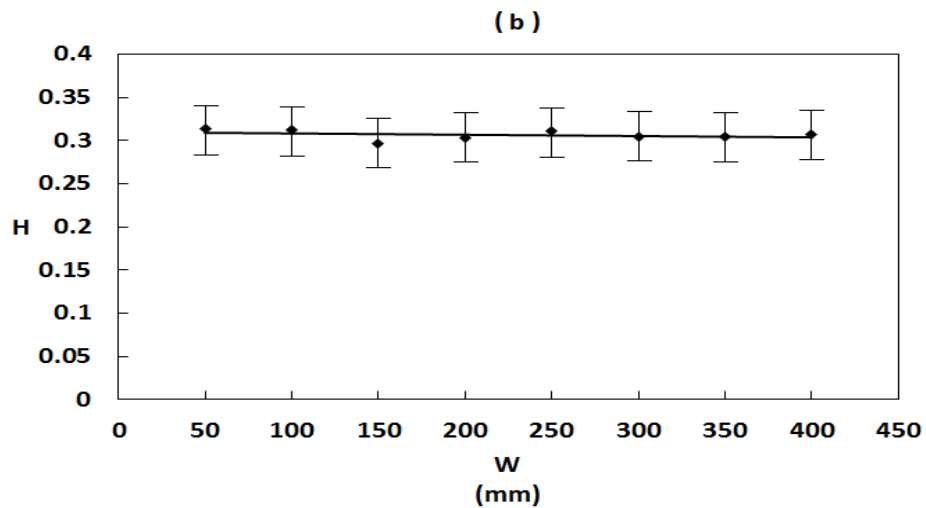
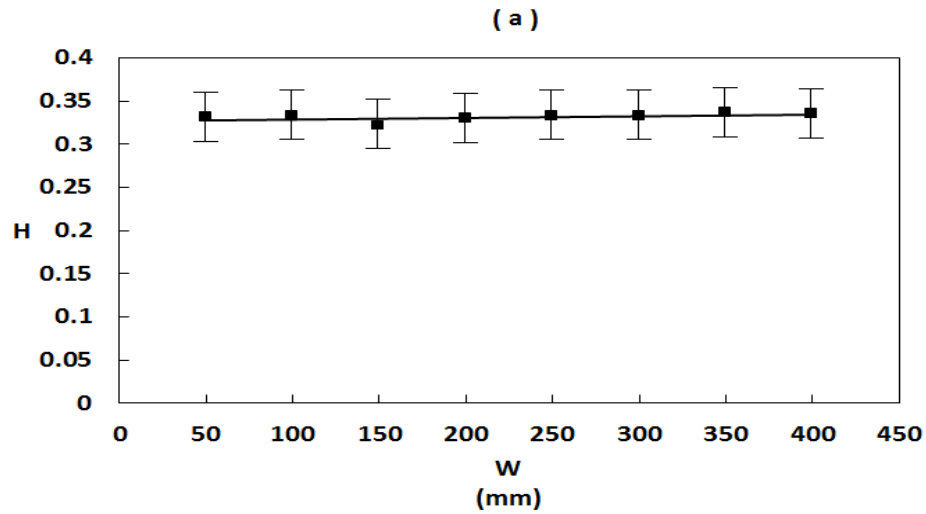


Figura 5.3. Grafica Exponente de Hurst (H)-Ancho de probeta (W) del papel filtro de poro abierto en (a) Propagación estable y (b) Propagación inestable

Tabla 5.3. Exponentes de Hurst para el Papel Filtro de Poro Cerrado				
W (mm)	H (Propagación estable)	Desviación Estándar	H (Propagación Inestable)	Desviación Estándar
50	0.45	0.066	0.42	0.039
100	0.43	0.047	0.41	0.034
150	0.43	0.034	0.41	0.065
200	0.44	0.032	0.42	0.022
250	0.43	0.022	0.41	0.057
300	0.43	0.028	0.41	0.047
350	0.45	0.041	0.43	0.034
400	0.45	0.032	0.43	0.041

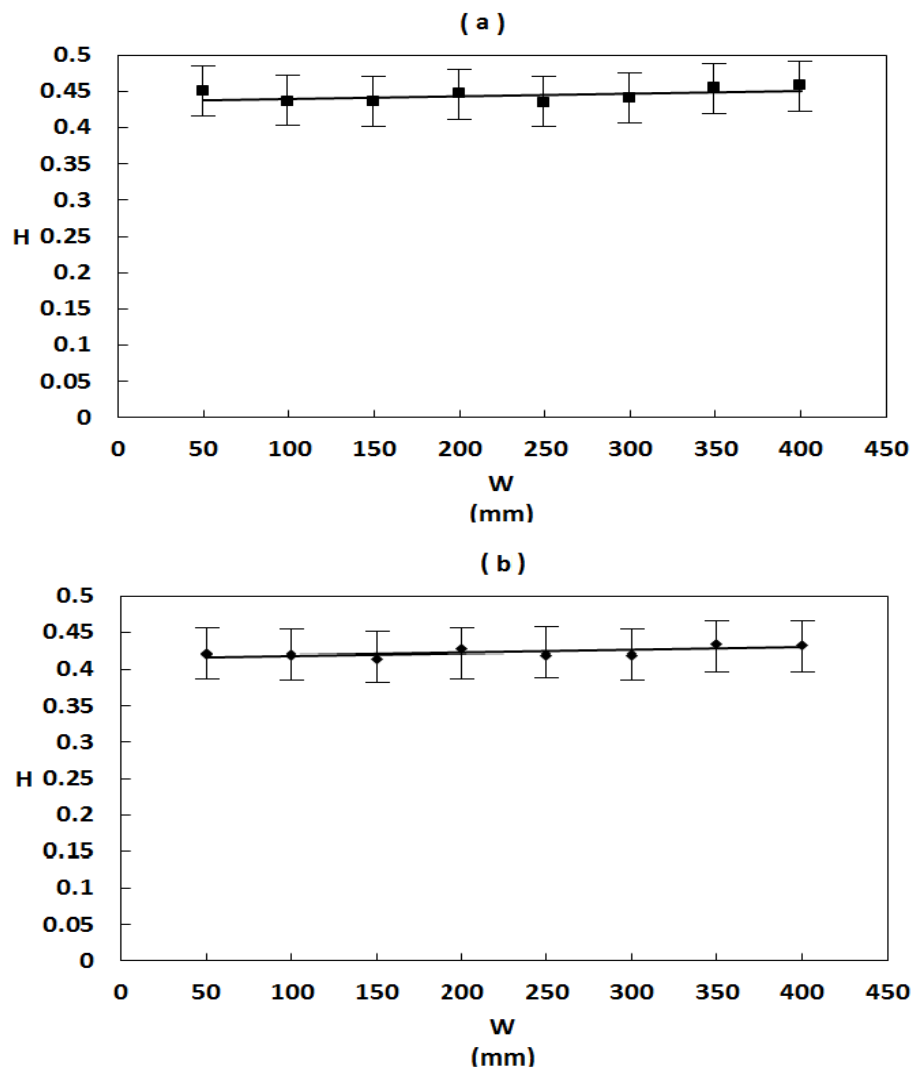


Figura 5.4. Grafica Exponente de Hurst (H)-Ancho de probeta (W) del papel filtro de poro cerrado en (a) Propagación estable y (b) Propagación inestable



De los valores obtenidos se deduce que los valores del exponente de Hurst varían de manera no significativa en la fase inestable de la propagación de grieta respecto a la fase estable. Esto quiere decir que el valor del exponente de Hurst se generaliza para cada tipo de papel, para el papel filtro de poro abierto se encontró que  $H = 0.315 \pm 0.042$  y para el papel filtro de poro abierto de  $H = 0.428 \pm 0.040$ ; además se puede percibir que las fracturas en el papel de poro cerrado son menos rugosas que las del papel de poro abierto, esto quiere decir que el papel de poro cerrado tiene más fibras que permiten que la velocidad de la propagación de grieta se alente y puedan romperse generando así superficies de fractura más uniformes y por lo tanto valores de exponentes de Hurst mayores.

## CONCLUSIONES

Se analizó el comportamiento mecánico de las probetas del papel filtro poro abierto y poro cerrado, y se demostró que el esfuerzo generado por el material incrementó conforme la propagación de grieta avanzaba hasta el punto donde ocurrió la fractura total; además el valor del esfuerzo que provocó el crecimiento de grieta incremento conforme el ancho remanente de las probetas era mayor (de la punta de la grieta al borde de la probeta).

También se obtuvieron los exponentes de Hurst para ambos tipos de papeles en donde los valores para el papel de tipo poro cerrado son menos aleatorios que los del tipo de poro abierto; esto se debe a que existen más enlaces de las fibras en el papel de poro cerrado lo que hace que cuando la grieta comience a propagarse lo haga de una forma más constante en relación con las pocas fibras que posee el papel de poro abierto. Es importante mencionar que el exponente de Hurst se obtuvo por el método de la Longitud Rugosa debido a que las líneas de tendencia generadas por el programa de cómputo Benoit 1.2 describen mejor los conjuntos de puntos de las trayectorias de fractura. Es posible determinar un exponente de Hurst para cada tipo de papel debido a la poca variabilidad de este valor por cada tamaño de probeta; por lo que es importante mencionar que la velocidad de propagación de grieta, ya sea en su fase estable o inestable no afecta el valor que describe la rugosidad.

## TRABAJOS FUTUROS

Existe un detalle importante que repercute sin lugar a duda los valores del exponente de Hurst, y este es la calidad de imagen que se obtenga de las superficies de fractura y de la forma de obtener los perfiles de las líneas de fractura. En este trabajo como ya se había expuesto anteriormente se empleó un programa desarrollado en Matlab para la obtención de los perfiles, sin embargo es conveniente que se desarrolle un trabajo donde de igual forma se obtengan los parámetros de energía y los exponentes de Hurst para otro tipo de material que exhiba un comportamiento igualmente anisotrópico empleando un programa de cómputo, Matlab, para binarizar imágenes y obtener los perfiles de grieta, de otra forma se obtendrían valores que pueden ser no comparables con este trabajo y no se podría realizar un análisis.

Por otro lado, este trabajo puede ser utilizado para desarrollar otras tesis o artículos de investigación con la finalidad de obtener parámetros de Mecánica de materiales o Metalurgia, por ejemplo: el factor de intensidad de esfuerzos fractal u algunos otros parámetros como la tenacidad a la fractura fractal o hasta la dureza.

## REFERENCIAS

- [1] S. Balankin, J. Méndez, J. C. Gómez, G. Urriolagoitia, "*Mechanics of self-affine cracks in carton*", International Journal of Fracture, Vol. 90, pp. L57-L62, 1998.
- [2] S. Balankin y O. Susarrey, "*Mecánica de las grietas auto-afines en hojas de papel fragilizado*", Revista Mexicana de Física, Vol. 45, No. 4, pp. 388-392, 1999.
- [3] S. Balankin, L. H. Hernandez, G. Urriolagoitia, O. Susarrey, J. M. González y J. Martínez, "*Probabilistic mechanics of self-affine cracks in paper sheets*", Proc. Royal Society, London A, Vol. 455, pp. 2565-2575, 1999.
- [4] W. Klonowski, E. Olejarczyk y R. Stepien, "*SEM Image Analysis for Roughness Assessment of Implant Materials*", Advances in Intelligent and Soft Computing, Vol. 30, pp. 553-560, 2005.
- [5] Campos, A. S. Balankin, O. Bautista y G. Ramírez, "*Self-affine cracks in a brittle porous material*", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 44, pp. 187-191, 2005.
- [6] L. Ponson, D. Bonamy, H. Auradou, G. Mourot, S. Morel, E. Bouchaud, C. Guillot y J. P. Hulin, "*Anisotropic self-affine properties of experimental fracture surfaces*", International Journal of Fracture, Vol. 140, pp. 27-37, 2006.
- [7] A. Mora Santos, M. del R. Rivera Martínez, O. Susarrey Huerta, A. S. Balankin, M. A. Mendoza Núñez,

- "Self-Affine Crack Pattern in Filter Paper Sheets"*, Key Engineering Materials, Vol. 449, pp 23-28, 2010.
- [8] S. Balankin, O. Susarrey, C. A. M. Santos, J. Patiño, A. Yoguez y E. I. Garcia, *"Stress concentration and size effect in fracture of notched heterogeneous material"*, Physical Review E83, 015101, 2011.
- [9] P. L. Mangonon, *"Cinecia de Materiales. Seleccion y Diseño"*, Prentice Hall, pp. 29-35, 2001.
- [10] D. R. Askeland, P. P. Fulay y W. J. Wright, *"Ciencia e Ingenieria de Materiales"*, Cengage Learning, pp. 7-10, 2011.
- [11] D. R. Askeland, P. P. Fulay y W. J. Wright, *"Ciencia e Ingenieria de Materiales"*, Cengage Learning, pp. 11-17, 2011.
- [12] D. R. Askeland, P. P. Fulay y W. J. Wright, *"Ciencia e Ingenieria de Materiales"*, Cengage Learning, pp. 83 y 84, 2011.
- [13] Yu Kozlov, *"Ciencia de los Materiales"*, edit. Mir Moscu, pp. 10 -15, 1983.
- [14] A. Miravete, *"Materiales compuestos. Tomo I"*. Reverté, pp. 9-36, 2004.
- [15] P. L. Mangonon, *"Cinecia de Materiales. Seleccion y Diseño"*, Prentice Hall, pp. 700-731, 2001.
- [16] P. L. Mangonon, *"Cinecia de Materiales. Seleccion y Diseño"*, Prentice Hall, pp. 721-723, 2001.
- [17] A. C Ugural, *"Advanced strength and applied elasticity"*, Prentice Hall PTR, pp. 5, 1993.
- [18] S. P. Timoshenko, *"History of strength of materials"*, Dover, New York, 1983.
- [19] A. P. Boresi, *"Elasticity in engineering Mechanics"*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [20] A. C Ugural, *"Advanced strength and applied elasticity"*, Prentice Hall PTR, pp. 51-55, 1993.
- [21] P. L. Mangonon, *"Cinecia de Materiales. Seleccion y Diseño"*, Prentice Hall, pp. 141-146, 2001.
- [22] J. L. Gonzalez Velazquez, *"Mecánica de la fractura"*, Limusa, pp. 11-21, 2011.

- [23] T. L. Anderson, *"Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications"*, Taylor and Francis Group, pp. 3-12, 2005
- [24] J. L. Gonzalez Velazquez, *"Mecánica de la fractura"*, Limusa, pp. 26-29, 2011.
- [25] J. L. Gonzalez Velazquez, *"Mecánica de la fractura"*, Limusa, pp. 22, 2011.
- [26] J. L. Gonzalez Velazquez, *"Mecánica de la fractura"*, Limusa, pp. 27, 2011.
- [27] T. L. Anderson, *"Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications"*, Taylor and Francis Group, pp. 271-275, 2005
- [28] T. L. Anderson, *"Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications"*, Taylor and Francis Group, pp. 273, 2005
- [29] L. Debnath, *"A brief historical introduction to fractals and fractal geometry"*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 37, No. 1, 2006.
- [30] B.B. Mandelbrot, *"The Fractal Geometry of Nature"*, New York: W.H. Freeman, 1983.
- [31] H.G.E. Hentschel y Procaccia, I., *"Relative diffusion in turbulent media. The fractal dimension of clouds"*, Phys. Rev., A29, 1461-1470, 1984.
- [32] J. Weiss, *"Self-affinity of fracture surfaces and implications on a possible size effect on fracture energy"*, International Journal of Fracture 109: 365-381, 2001.
- [33] Z. P. Bazant y J. Planas, *"Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials"*. CRC Press, Boca Ratón, 1998.
- [34] F. M. Borodich. *"Some fractal models of fracture"*, Journal of Mechanical and Physics Solids 45, 239-259, 1997.
- [35] J. Schmittbuhl, F. Schmitt y C. Scholz. *"Scaling invariance of crack surfaces"*, J. Geophys. Res. 100, 5953-5973, 1995.
- [36] J. Weiss. *"Fracture and fragmentation of ice: a fractal analysis of scale invariance"*, Engineering Fracture Mechanics, in press, 2000.

- [37] A. S. Balankin y F. J. Sandoval, "Self-affine properties of fracture surfaces", *Revista Mexicana de Física* 43, No. 4, 545-591, 1997.
- [38] B. Nowicki. "Wear", 102, 161-182, 1985.
- [39] J. M. Ziman. "Models of Disorder", Cambridge University, New York, 1979.
- [40] R. J. Adler. "The Geometry of Random Fields". Wiley, New York, 1981.
- [41] B. B. Mandelbrot. "The Fractal Geometry of Nature. Freeman", New York, 1984.
- [42] V. S. Ivanova, A. S. Balankin, I. J. Bunin y A. A. Oksogoev. "Synergetics and Fractals in Materials Science". Nauka, Moscow, 1994 (in Russian); English version will be published by Gordon and Beach in 1997.
- [43] TruSoft Int'l Inc. [CD-ROOM]. Benoit. Versión 1.2. Programa de cómputo. 1997.
- [44] B.B. Mandelbrot and JR Wallis. "Noah Joseph and Operational hydrology", *Water Resources Research*, 4 pp. 909-918, 1969.
- [45] H. E. Hurst. "Long-term storage capacity of reservoirs", *Trans. Am. Soco Civil Eng.*, 116, pp. 770, 1951.
- [46] MTS Systems Corporation [en línea]. "MTS 810 & 858 Material Testing Systems", 2006. Disponible en: [http://www.upc.edu/sct/documents\\_equipament/d\\_77\\_id-412.pdf](http://www.upc.edu/sct/documents_equipament/d_77_id-412.pdf)
- [47] Hewlett-Packard Development Company, L.P [en línea]. "Escáner Fotográfico HP Scanjet G4050 soporte". 2014. Disponible: [http://h10025.www1.hp.com/ewfrf/wc/document?docname=c01491177&tmp\\_task=prodinfoCategory&cc=es&dlc=es&lc=es&product=3236377](http://h10025.www1.hp.com/ewfrf/wc/document?docname=c01491177&tmp_task=prodinfoCategory&cc=es&dlc=es&lc=es&product=3236377)

# ANEXOS

## Anexo A

### CONCEPTOS GENERALES

#### **A.1. Concepto de esfuerzo**

Considérese un cuerpo en equilibrio sujeto a un sistema de fuerzas externas, como lo muestra la figura (A.1.a). Bajo la acción de estas fuerzas, fuerzas internas serán generadas dentro del cuerpo. Para examinar este último en un punto  $Q$  en su interior, usamos un plano imaginario para cortar el cuerpo en una sección a-a a través de  $Q$ , dividiendo el cuerpo en dos partes. Como las fuerzas están actuando sobre el cuerpo entero que están equilibrio, las fuerzas que están actuando en una sola de las dos partes tiene que estar en equilibrio: para que esto suceda, se requiere de la presencia de fuerzas en el plano a-a. Estas fuerzas internas, aplicadas en ambas partes están distribuidas continuamente sobre la superficie cortada. El proceso descrito, se refiere u obedece al método de las secciones.



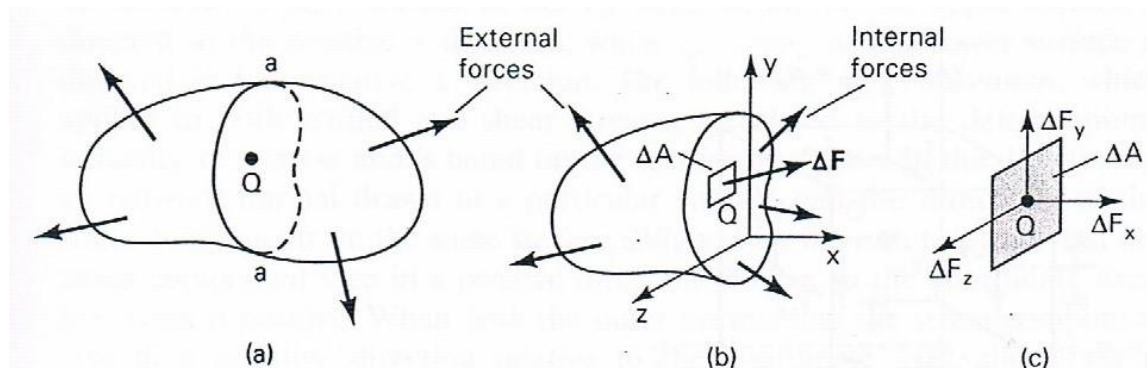


Figura A.1. (a) Seccionamiento de un cuerpo; (b) Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas internas; (c) área ampliada  $\Delta A$  con componentes de fuerza  $\Delta F$  [17]

La figura (A.1.b) muestra la parte izquierda del cuerpo aislada. En un elemento de área  $\Delta A$ , localizada en el punto  $Q$  sobre la superficie cortada está siendo afectada por la fuerza  $\Delta F$ . Dejar el origen de las coordenadas ubicadas en el punto  $Q$ , con  $x, y$  y  $z$  tangentes a  $\Delta A$ . En general,  $\Delta F$  no está actuando sobre  $x, y$  y  $z$ . Descomponiendo a  $\Delta F$  en sus respectivos componentes paralelos a  $x, y$  y  $z$ , se definen el esfuerzo normal y los esfuerzos de corte, figura (A.1.c).

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA} \quad (\text{A.1})$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dF_y}{dA}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{dF_z}{dA} \quad (\text{A.2}) \text{ y } (\text{A.3})$$

Estas definiciones proporcionan las componentes del esfuerzo en un punto  $Q$ , en el cual la  $\Delta A$  es reducida en el límite. Nuestra consideración es con el esfuerzo promedio sobre áreas, el cual es pequeño en comparación con el cuerpo y es grande comparado con las distancias interatómicas en el sólido; por lo que el termino de esfuerzo está definido adecuadamente para propósitos ingenieriles. Como lo muestran las ecuaciones anteriores la intensidad de la fuerza perpendicular, o normal, a la superficie está determinada por el esfuerzo normal en un punto, mientras que la intensidad de la fuerza paralela a la

superficie es el esfuerzo cortante en un punto. Los valores obtenidos matemáticamente de los límites difieren de un punto a otro sobre la superficie conforme  $\Delta F$  varia. Sin embargo las componentes del esfuerzo no solo varían en función de  $\Delta F$ , sino que también influye la orientación del plano en el cual este actúa en el punto Q.

Incluso en un punto dado, los esfuerzos van a diferir dependiendo de los planos que se estén considerados. La completa descripción del esfuerzo en un punto requiere de la especificación del esfuerzo en los planos pasando a través de un punto [18].

## **A.2. Concepto de deformación**

Para definir adecuadamente el concepto de deformación, vamos a considerar un cuerpo sujeto a un conjunto de cargas externas que provoquen el cambio de posición del cuerpo como lo muestra la figura (A.2), en la cual es desplazado a A', B a B', y así sucesivamente, hasta que todos los puntos en el cuerpo sean desplazados a las nuevas posiciones. Los desplazamientos de dos puntos cualquiera tales como A y B son simples AA' y BB', respectivamente, y podría ser una consecuencia de deformación, movimiento de cuerpo rígido (traslación y rotación), o alguna combinación [19]. El cuerpo se dice que esta deformado si las posiciones relativas de puntos en el cuerpo están alterados. Si la deformación no ha tomado lugar, los desplazamientos AA' y BB' se atribuyen al movimiento de cuerpo rígido. En el último del caso, la distancia entre A y B permanece fijo.

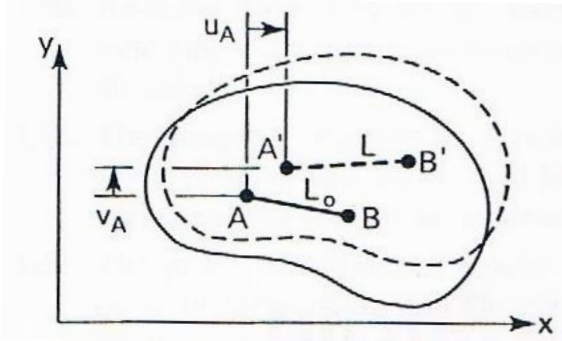


Figura A.2. Desplazamiento y deformación unitaria [20]

Para describir la magnitud y dirección de los desplazamientos, puntos dentro del cuerpo están localizados respecto a un apropiado sistema coordenado. Por lo tanto, para el caso bidimensional, las componentes del desplazamiento del punto A al punto A' puede ser representado por  $u$  y  $v$  en la dirección de las coordenadas  $x$  y  $y$ , respectivamente. En general, las componentes del desplazamiento en un punto, ocurren en la dirección de  $x, y$  y  $z$ , y están denotados por  $u, v$  y  $w$ , respectivamente. El desplazamiento en cada punto dentro del cuerpo constituye el campo de desplazamientos,  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  y  $w = w(x, y, z)$ . En este trabajo, solo los desplazamientos pequeños son considerados, una consistente simplificación con la magnitud de la deformación comúnmente se encuentra en estructuras ingenieriles. Las deformaciones producidas son más pequeñas en comparación a la unidad, por lo que se pueden considerar despreciables.

Para propósitos de definir la deformación normal, se toma de la figura anterior la línea AB y a la cual se le aplica una carga axial, por lo que el cuerpo ha sufrido una deformación A'B'. La longitud de AB es  $\Delta x$ . Como lo muestra la figura los puntos A y B han sido desplazados; A una cantidad  $u$ , y B una cantidad  $u + \Delta u$ . Dicho de otra forma, el punto B ha sido desplazado por una cantidad  $\Delta u$  de acuerdo al desplazamiento del punto A, y la longitud de  $\Delta x$  ha ido incrementándose por  $\Delta u$ . La deformación normal, la unidad de cambio en longitud, está definida por:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (\text{A.4})$$

Pero si consideramos que la deformación está distribuida uniformemente sobre la longitud original, la deformación normal podría ser escrita como sigue:

$$\varepsilon_0 = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0} \quad (\text{A.5})$$

Donde  $L, L_0$  y  $\delta$  son la longitud final, la longitud original y el cambio de longitud del cuerpo, respectivamente. Cuando la deformación uniforme no ocurre, lo antes mencionado es el promedio de la deformación.

### **A.3. Relación entre el esfuerzo y la deformación**

La resistencia de un material depende de su capacidad para soportar una carga excesiva sin presentar deformación o falla. Esta propiedad es inherente al propio material y debe determinarse mediante la experimentación. Una de las pruebas más importantes a este respecto es el ensayo de tensión o compresión. Aunque a partir de esta prueba se pueden establecer varias propiedades mecánicas importantes de un material, se utiliza principalmente para determinar la relación entre el esfuerzo normal promedio y la deformación normal promedio en muchos materiales de ingeniería como metales, cerámicas, polímeros y materiales compuestos [21].

Para la realización de los ensayos los datos de la carga y la deformación se utilizan para calcular distintos valores del esfuerzo y las correspondientes deformaciones en la probeta. La representación gráfica de los resultados produce una curva llamada diagrama esfuerzo-deformación, figura (A.3). Por lo general hay dos formas de describir este diagrama.

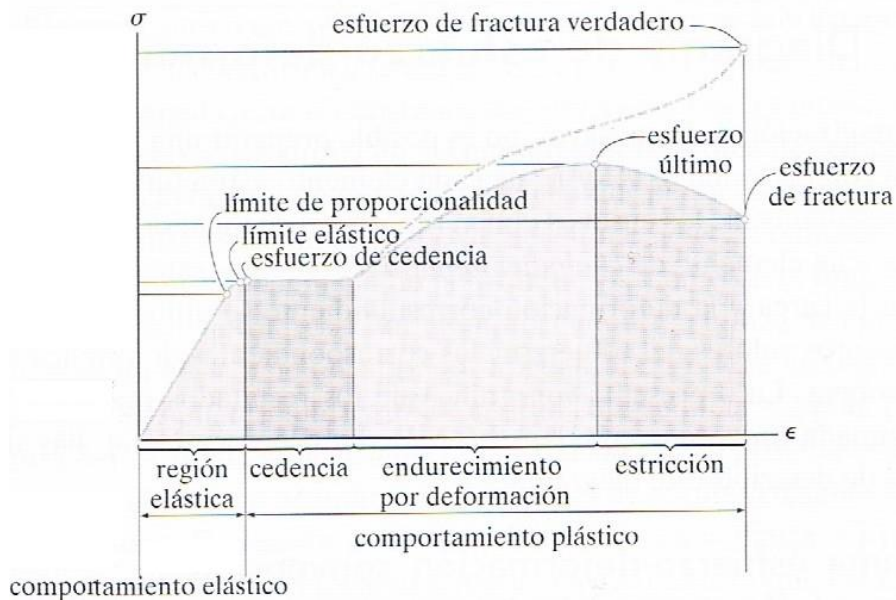


Figura A.3. Diagrama de esfuerzo-deformación convencional y verdadero para un material dúctil

La primera de ellas es determinar el esfuerzo nominal o de ingeniería al dividir la carga aplicada  $P$  entre el área  $A_0$  de la sección original de la probeta. En este cálculo se supone que el esfuerzo es constante en la sección transversal y en toda la longitud calibrada. Se tiene:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad (\text{A.6})$$

Del mismo modo, la deformación nominal o de ingeniería se determina de manera directa al leer el medidor de deformación, o al dividir el cambio  $\delta$  en la longitud calibrada de la probeta entre la longitud calibrada original  $L_0$  de la probeta. Aquí se supone que la deformación es constante a lo largo de la región entre los puntos marcados. Por lo tanto,

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad (\text{A.7})$$

Si los valores correspondientes de  $\sigma$  y  $\epsilon$  se trazan de manera que el eje vertical sea el esfuerzo y el eje horizontal

sea la deformación, la curva resultante se llama diagrama de esfuerzo-deformación convencional. Sin embargo, se debe tener en cuenta que dos diagramas de esfuerzo-deformación para un material particular serán muy similares pero nunca exactamente iguales. Esto se debe a que los resultados en realidad dependen de variables tales como la composición del material, imperfecciones microscópicas, la forma en que se fabrica, la rapidez con que se aplica la carga y la temperatura durante la realización del ensayo.

#### **A.4. Fractura mecánica**

La fractura es la separación o fragmentación de un sólido bajo la acción de una carga externa, a través de un proceso de creación de nuevas superficies, las superficies de fractura [22]. Usualmente, para fracturar un material se requiere incrementar la carga progresivamente hasta que un proceso de nucleación de grietas ocurra. Dependiendo de las condiciones de carga, geometría del cuerpo y propiedades mecánicas del material, para fracturar un componente estructural puede ser necesario sostener e incluso incrementar la carga después de que la nucleación ha tenido lugar, mientras que en otros casos bastara con alcanzar el punto de nucleación de grietas, para que después se propague espontáneamente.

#### **A.5. Tipos de fractura**

El hecho de que una fractura pueda iniciar en regiones muy localizadas y frecuentemente pequeñas de un componente estructural y de que ocurra a esfuerzos menores de los de diseño, le dan sus características de ser súbito, inesperada y catastrófica [23]. Desde el punto de vista del comportamiento de los materiales, se reconocen dos tipos de fractura, dependiendo de la cantidad de deformación plástica previa [24]; estos son:

Fractura frágil. Es la que ocurre cuando la deformación de la mayor parte del cuerpo es elástica, de manera que después

de la fractura, los fragmentos de la pieza pueden volver a juntarse sin que hay cambios significativos en la geometría.

**Fractura dúctil.** Es la fractura que ocurre después de una apreciable deformación plástica del cuerpo, entendiéndose que los esfuerzos en una región relativamente grande de la pieza rebasaran el esfuerzo de cedencia o límite elástico.

La figura (A.4) presenta en forma esquemática dos cuerpos con fractura frágil y dúctil, respectivamente. La clasificación de las fracturas en frágiles y dúctiles es estrictamente ingenieril, ya que, de hecho, en algunas fracturas de aspecto frágil puede existir una intensa deformación plástica, solo que esta se localiza en una región pequeña alrededor de la grieta y el resto del material permanece sin deformación plástica, como muestra el tercer cuerpo de la figura (A.4).

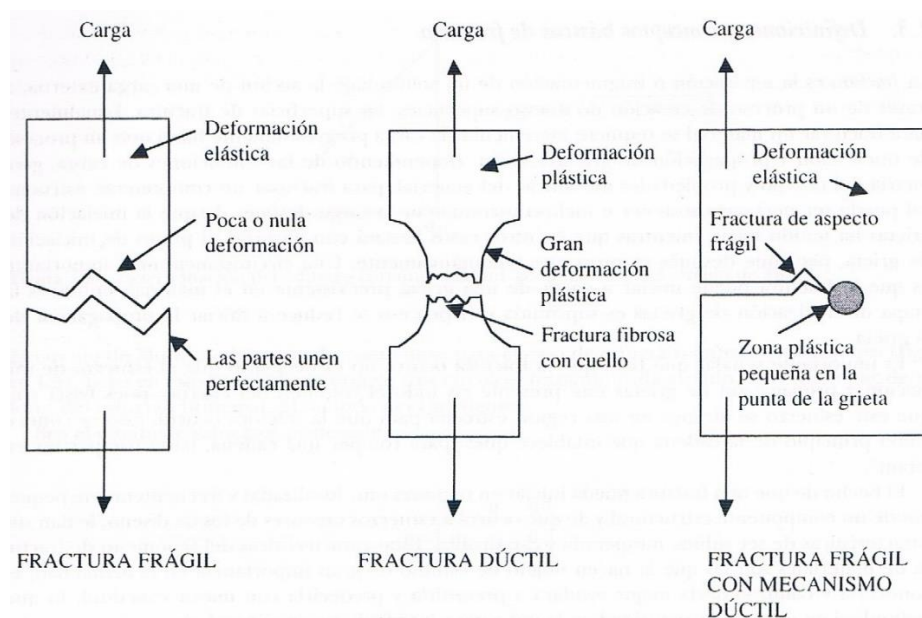


Figura A.4. Clasificación de la fractura, según la cantidad de deformación plástica [25]

Tradicionalmente, la mayor atención se le ha dado a la fractura frágil por sus características de ser súbita, catastrófica y de ocurrir a esfuerzos por debajo de los esfuerzos de diseño, aunque en la actualidad, la fractura

dúctil también es ampliamente estudiada, en particular en aquellos casos en los que se utilizan materiales de baja resistencia y los niveles de esfuerzo son altos. En la práctica ambos tipos de fractura pueden llegar a presentarse en un mismo componente fallado.

Existen varias metodologías de análisis de fractura, dependiendo de la extensión de la deformación plástica que procede a la fractura. De acuerdo con la extensión de la deformación plástica, las categorías de la fractura son:

**Fractura lineal-elástica.** Cuando la extensión de la zona plástica esta confinada a una pequeña región frente a la punta de la grieta y la deformación del resto del cuerpo es elástica.

**Fractura elastoplástica.** La zona plástica se extiende en el total remanente del ancho de la pieza, pero permaneciendo como una región relativamente estrecha alrededor del plano que contiene a las grietas.

**Colapso plástico** La fractura es precedida de deformación plástica generalizada. La figura (A.5) muestra esquemáticamente estas tres categorías.

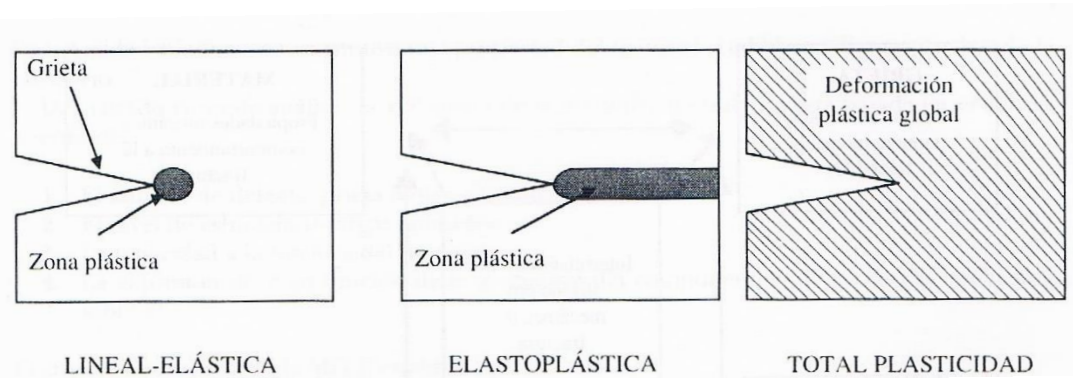


Figura A.5. Clasificación de la fractura en función de la extensión de la deformación plástica [26]

Por otra parte la Mecánica de Fractura considera que el proceso de fractura inicia con una grieta que se propaga hasta la separación final o fragmentación de la pieza. Si durante la



propagación de la grieta, esta puede detenerse al disminuir o desaparecer los esfuerzos, se dice que la propagación es estable, y si la grieta se propaga de manera rápida, auto-acelerada y es prácticamente imposible de detener, entonces la propagación es inestable.

La Mecánica de Fractura también separa la fractura en función de su dependencia del tiempo. De acuerdo con esto, la fractura se clasifica en:

**Fractura estática:** es la fractura bajo una sola aplicación de carga de un sólido que contiene una grieta inicialmente estática que comienza a propagarse rápidamente en condiciones de inestabilidad. Estos tipos de fractura incluyen la fractura frágil, la fractura dúctil y el colapso plástico.

**Fractura lenta, retardada o estable:** es la fractura que ocurre por la propagación lenta de una grieta a través del tiempo o por la acción de cargas repetitivas o fluctuantes. Es de carácter estable e incluye a la fatiga, la propagación de grietas por termofluencia y al agrietamiento por corrosión y esfuerzos.