



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA
MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRA-
DO E INVESTIGACIÓN

**Algunas características de la dinámica del
consenso en dos y tres estados en modelos de
la regla mayoritaria**

TESIS

que parara obtener el grado de

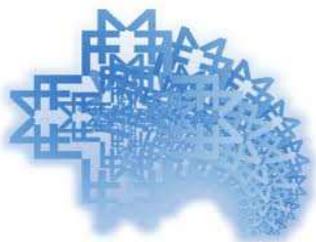
DOCTOR EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

presenta

Felipe Gayosso Martínez

Directores de tesis:

Dr. Alexander Balankin y Dr. Miguel Ángel Martínez Cruz



Ciudad de México, Enero del 2014.

Agradecimientos

En esta parte de mi vida, agradezco profundamente a todas y cada una de las personas que con su ayuda ha sido posible la culminación de esta etapa escolar.

Con aprecio al Grupo Interdisciplinario de Mecánica Fractal y Sistemas de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, por el espacio brindado durante la realización de estos estudios, con un agradecimiento especial al Dr. Alexander Balankin por todas sus valiosas aportaciones y sugerencias en la supervisión del presente trabajo.

A todos los profesores, compañeros, trabajadores y colegas del IPN por el tiempo compartido entre clases y pláticas académicas.

Mi agradecimiento para todas las Instituciones educativas y de investigación que me brindaron tanto los servicios administrativos como el apoyo económico suficiente para lograr este título.

Felipe Gayosso Martínez
SEPI ESIME IPN
Ciudad de México, Enero del 2014

A María de Jesús, Nohemi Antelma, Rebeca y Nashira

A la manera que el río hace sus propias riberas, así toda idea legítima hace sus propios caminos y conductos.

—Ralph W. Emerson

Resumen

El presente trabajo, mediante modelos tipo spin regidos por la regla de la mayoría, estudia los efectos que tienen la heterogeneidad espacial inicial y las coaliciones dobles en la dinámica de la opinión de sistemas con dos y tres estados ($s = +1, 0, -1$), lo cuales están asociados a los nodos de un enrejado \mathcal{R} con tamaño N con \sqrt{N} nodos por lado. El proceso evolutivo de los sistemas dinámico-sociales ha sido estudiado ampliamente, Galam *et al.* en [17] realizan estudios sobre la formación de jerarquías dentro de una sociedad regida por la regla de la mayoría, Balankin *et al.* en [10] presentan modelos tipo espin para el análisis de la heterogeneidad espacial. Algunos resultados de los efectos de la regla de la mayoría para sistemas finitos con dos estados se encuentran en [35]. Axelrod [1] aborda el problema del intercambio de opiniones, la dimensionalidad de la cultura, y la formación de grupos que comparten una misma opinión. Las bases de nuestros estudios se encuentran en la aplicación de técnicas provenientes de áreas como la mecánica estadística, la mecánica fractal, la modelación y simulación computacional. Los nodos con spin $\{-1, +1\}$ son considerados los agentes activos del sistema y pueden ejercer influencia sobre otros nodos, mientras que los nodos con estado 0 son agentes pasivos que no ejercen influencia alguna sobre otros nodos. Para efectos de nuestros análisis se consideraron redes con $N = 50^2, 75^2, 100^2$, las cuales contienen $\frac{N}{100}$ distritos. Las simulaciones numéricas se realizan por medio de métodos Monte Carlo, donde en una actualización, se selecciona un nodo aleatoriamente y este adopta el estado determinado por la mayoría de su 4-vecindad y el nodo mismo. Los efectos de la heterogeneidad espacial inicial de los spins, se miden a través de la variación que tiene la mediana de los estados con spin -1 dentro de los distritos. Nuestro análisis indica que los estados neutrales ($s = 0$) desaparecen después de $\tau_0 = (3 \pm 0,5)N$ ciclos, enseguida el sistema entra en un régimen de dos estados. Encontramos que la diferencia de probabilidades de salida son funciones lineales de $\Delta H_0 = H_{+1}(0) - H_{-1}(0)$ con $H_s(0) = \frac{M_s(0)}{m_s(0)}$ (M_s son las medianas de las distribuciones iniciales de los nodos con spin $s = 1$, y la distribución de medias son iguales $m_1 = m_{-1} = m_0 \ll N$), mientras que el tiempo de consenso es independiente de las distribuciones spin iniciales. La formación de franjas, las probabilidades de salida, los porcentajes de cada partido en el instante después de desaparecer los votantes nulos, son cantidades analizadas y expresadas en términos de la heterogeneidad $H_s(0)$. Por la parte de coaliciones, presentamos cuatro modelos para el estudio de coaliciones dobles que compiten ante un tercer partido. El comportamiento estadístico dentro de estos modelos exhibe los tres posibles resultados finales que el partido menor (en cuanto al número inicial de nodos) dentro de la coalición puede tener: que la coalición lo beneficie, que no lo beneficie, y por último que ningún integrante resulte beneficiado. Nuestros resultados estadísticos y observaciones, son discutidos y comparados dentro del contexto político y social de la dinámica de la opinión.

Abstract

We study through spin models with majority update rule, the effects of spatial heterogeneity and double coalitions on spin dynamics in a three-state system ($s = +1, 0, -1$) over a square lattice network \mathcal{R} of order N , with \sqrt{N} per side and divided into spatial cells (districts). Dynamics of social systems has been subject of extense studies, particular, in [17] Galam *et al* study majority rule models and hierarchies formation, in [10] Balankin *et al* introduces models to study the effects of initial spatial heterogeneity. Majority rule effects on two state systems are studied in [35]. Opinion interchanges, dimension of culture, and clustering opinion is widely study by Axelrod in [1].

The foundations of our studies are techniques from statistical mechanics, fractal mechanics, and computer modelation and simulation. Nodes with spins $\{+1, -1\}$ are considered as active agents and they can influence to other nodes, meanwhile nodes with neutral state are represented by 0 and considered as passives and they do not have influence into the system. For numerical simulations we considered lattice type networks with orders $N = 50^2, 75^2, 100^2$, divided into $d = \frac{N}{100}$ districts of size 100, numeric simulations are realized by Montecarlo methods, where an update step randomly selects a vertex, and it adopts the state of the vertex itself and its 4-neighbourhood according to the majority rule.

We study the heterogeneity through increments of the median (M_{-1}) of spins -1 over districts. By varying M_{-1} from 1 to $\frac{n_{-1}}{d}$ (n_{-1} the initial proportion of -1 states) we found that neutral states ($s = 0$) entirely disappear after $\tau_0 = (3 \pm 0,5)N$ update steps, according that, the system enters into a two-state regime. The difference between the exit probabilities is found to be linear functions of $\Delta H_0 = H_{+1}(0) - H_{-1}(0)$ with $H_s(0) = \frac{M_s(0)}{m_s(0)}$ (with distribution means equal $m_1 = m_{-1} = m_0 \ll N$), whereas time to consensus is independent of the initial spin distributions. Exit probabilities, formation of states with slow evolution, magnetization, means into the two state regimen, are parameters expressed in $H_s(0)$ terms. On other hand, for double party coalitions we obtain results of classification of types of updating rules each of one inducing a new model; then we introduce four spin models and analyze their statistical behaviour. Each model is characterized by its coalition and draw rules and attempt to describe three possible scenarios for the dynamics: benefit to the small party (party with the small initial number of nodes), another one for huge party, and the last one without profit for any of the two parties in coalition. Results and observations are discussed and compared into the political context of the opinion dynamics.

Índice general

Índice de figuras	XI
Índice de cuadros	XII
Lista de algoritmos	XIII
Glosario y acrónimos	XV
Lista de símbolos	XVIII
Introducción	XIX
Plantamiento de los problemas	XXIII
Justificación	XXV
Objetivos	XXIX
Metodología	XXX
1. Marco teórico	1
1.1. Introducción a los sistemas complejos	1
1.1.1. Sistemas complejos y sistemas complicados	1
1.2. La ciencias sociales y sus metodologías	2
1.2.1. Mecánica estadística	3
1.2.2. Dinámica de sistemas	4
1.2.3. Ciencia social computacional	4
1.3. Coaliciones en organizaciones	6
1.4. Redes	7
1.4.1. Redes sociales	10
1.5. Algunos modelos para sistemas sociales	10
1.6. Modelos clásicos	11
1.6.1. El modelo del votante	11

1.6.2.	Modelos basados en la regla de la mayoría	12
1.6.3.	El modelo de Ising	13
1.6.4.	El modelo de Sznajd	15
1.6.5.	El modelo de Galam sobre estructuras jerárquicas	16
1.6.6.	El modelo de Axelrod sobre difusión y emergencia de cultura	17
1.6.7.	El modelo de Erdős-Renyi	19
1.6.8.	El modelo de Watts-Strogatz	19
1.6.9.	El modelo de Barabási-Albert	21
1.6.10.	El modelo de segregación de Schelling	22
1.7.	Métodos y modelos computacionales	23
1.7.1.	Métodos Monte Carlo	24
1.7.2.	Modelación basada en agentes	26
2.	Nuestros modelos, características y algoritmos	28
2.1.	Las redes subyacentes y sus topologías	28
2.1.1.	Los grupos de discusión	29
2.2.	Modelo sobre heterogeneidad, para dos partidos y votantes indecisos	29
2.2.1.	Distribuciones espaciales iniciales	30
2.2.2.	Regla de transición para dos partidos e indecisos	31
2.2.3.	Estado notables dentro del sistema	31
2.2.4.	El pseudo-código	32
2.2.5.	Los diagramas de flujo	34
2.3.	Modelos para tres partidos dos de ellos formando una coalición	34
2.3.1.	Posibles configuraciones para tres partidos	38
2.3.2.	Reglas de transición para tres partidos y una coalición	39
2.3.3.	Estados notables dentro del sistema	39
2.3.4.	Modelo con selección aleatoria	40
3.	Heterogeneidad en sistemas con tres estados	43
3.1.	Descripción general	44
3.1.1.	Desarrollo del modelo	44
3.1.2.	Análisis y resultados	46
4.	Coaliciones dobles en sistemas con cuatro estados	53
4.1.	Características generales para los modelos	54
4.1.1.	Criterio para evaluar la coalición	55
4.2.	Modelo que favorece al partido menor de la coalición	56
4.2.1.	Modelo 1: Selección aleatoria	56
4.3.	Modelo que favorece al partido mayor de la coalición	59
4.3.1.	Modelo 2: Doble regla de la mayoría y empates aleatorios	59
4.3.2.	Modelo 2,1: Acuerdos previos dentro de la coalición	61
4.4.	Modelo que no favorece ningún integrante de la coalición	63
4.4.1.	Modelo 3: Mantener la proporción inicial	63

5. Conclusiones y trabajo futuro	69
Anexos	72
Anexo A: Diagramas de Flujo y código fuente	73
.1. Diagramas de flujo para el modelo de la Sección 2.3.4	73
.2. Código fuente del para el modelo del Capítulo 3	76
Anexo B: Constancias	89
.3. Publicaciones y participaciones	89
Bibliografía	98

Índice de figuras

1.	Relación con otras areas del conocimiento	XXVIII
2.	Diagrama de flujo para nuestra metodología	XXXIII
1.1.	Redes sociales	5
1.2.	Una red compleja	8
1.3.	Redes 3-regulares	8
1.4.	Una red de mundo pequeño	9
1.5.	La regla de la mayoría	12
1.6.	Lazos en el modelo de Sznajd (nodos blancos)	15
1.7.	Redes generadas mediante el modelo de Barabási-Albert	22
2.1.	El mundo: un enrejado plano y uno toroidal, $N = 25$	29
2.2.	Los grupos de discusión	29
2.3.	P_{+1} gris, P_{-1} negro, U blanco	30
2.4.	Efecto de regla de actualización	31
2.5.	Posibles estados durante la dinámica	32
2.6.	Procedimiento PRINCIPAL	35
2.7.	Procedimiento DISTRIBUIR	36
2.8.	Procedimiento DINAMICA	37
2.9.	Posibles estados para los modelos de coalición	40
3.1.	Distritos dentro del sistema	45
3.2.	Transición de tres a dos estados en t_0 actualizaciones	46
3.3.	T_0 versus $H_{-1}(0)$	46
3.4.	$\Delta p(t_0)$ versus ΔH_0	47
3.5.	$p_i(t_0)$ versus $H_{-1}(0)$	47
3.6.	Un estado de tipo franja	48
3.7.	$m_{+1}(t_0), m_{-1}(t_0)$ versus ΔH_0	49
3.8.	Δm_0 versus $\Delta p(t_0)$	49

3.9.	P_{+1} (arriba), P_{-1} (abajo) en términos de ΔH_0	50
3.10.	ΔP versus H_0 y $\Delta p(t_0)$	50
4.1.	Distribuciones iniciales para los tres partidos	55
4.2.	Reglas de transición para el modelo que beneficia al partido menor .	57
4.3.	Reglas de transición para el modelo que mantiene la proporción . .	58
4.4.	Un estado final para el modelo 1	58
4.5.	F versus I en el modelo de selección aleatoria	59
4.6.	Reglas de transición para el modelo que beneficia al partido mayor .	60
4.7.	Un estado final para el modelo 2	61
4.8.	F versus I en el modelo con doble regla de la mayoría	62
4.9.	Transiciones con un nuevo conjunto para los empates	62
4.10.	F versus I en el modelo 2,1	63
4.11.	Reglas de transición para el modelo que mantiene la proporción . .	65
4.12.	Un estado final para el modelo 3	65
4.13.	F versus I en el modelo que mantiene la proporción	66
1.	Procedimiento PRINCIPAL2	73
2.	Procedimiento DISTRIBUIR2	74
3.	Procedimiento DINAMICA2	75

Índice de cuadros

2.1. Tabla de empates en la regla de la mayoría para tres estados	39
3.1. Características para el modelo sobre la heterogeneidad espacial inicial	45
4.1. Parámetros iniciales y resultados de las simulaciones en el modelo 1	59
4.2. Parámetros iniciales y resultados de las simulaciones en el modelo 2	61
4.3. Parámetros iniciales y resultados de las simulaciones en el modelo 2,1	63
4.4. Parámetros iniciales y resultados de las simulaciones en el modelo 3	65
4.5. Características para los modelos de coalición	67

Lista de algoritmos

1.	METROPOLIS-HASTINGS	25
2.	PRINCIPAL	32
3.	DISTRIBUIR	33
4.	DINAMICA	34
5.	PRINCIPAL2	40
6.	DISTRIBUIR2	41
7.	DINAMICA2	42

comicio Elecciones o juntas para designar cargos políticos. 7, 70

consenso Consentimiento o acuerdo, especialmente el de todas las personas que componen una corporación, dos o más partidos políticos, un grupo social, etc., en torno a un tema de interés general. 11, 12, 17, 43, 52, 55

franja Dentro de las simulaciones de modelos spin basados en la regla de la mayoría, una franja indica un estado con engrosamiento difuso y cinética lenta que retrasa la dinámica del sistema. 12, 38, 48

grupo de discusión Conjunto de nodos al cual se le aplica una regla de transición que cambia el estado de todos los integrantes del conjunto. 29

hecatombe Término usado en la antigua Grecia para referir a un sacrificio religioso de animales. Popularmente se usa para señalar una gran catástrofe, con gran mortandad. 10

heterogeneidad En nuestro modelos, refiere a que tan sesgada esta la concentración inicial de uno de los partidos, entre los distritos del enrejado. 18, 44

magnetización En modelos espin, la diferencia entre la cantidad de spins +1 y spins -1 dentro del sistema. 3

NetLogo Un lenguaje de programación basado en agentes y un ambiente integrado de modelación. 11, 27

paradigma Conjunto de prácticas que definen una disciplina científica durante un período específico. 5

partido Conjunto de agentes con un mismo estado spin. 30

segregación Apartar, separar a alguien de algo o una cosa de otra. En política se refiere al completo aislacionismo de un grupo racial en particular por parte de un grupo social predominante o mayoritario, frecuentemente motivada por motivos sociales, culturales o políticos. 17, 22, 23

votación Conjunto de los estados dentro de un grupo. 39, 57, 60

Acrónimos

BSD Berkley Software Distribution. 22

COFIPE Código Federal de Instituciones y Procedimientos Electorales. 70

IFE Instituto Federal Electoral. 7

MBA Modelación Basada en Agentes. 26, 27

RM Regla de la Mayoría. 12, 13, 16, 17, 30, 31, 35–39, 43–45, 47–51, 53, 54, 57, 60, 62, 64, 66, 71

SAC Sistema Adaptativo Complejo. 1, 2

WWW World Wide Web. 8

Lista de símbolos

\mathbb{Z}^n	Espacio de las n -tuplas de enteros.
\propto	Relación de proporcionalidad
\ll	Relación mucho menor que
N	Tamaño de red (número de nodos)
D	Número total de distritos
H_s	Heterogeneidad de los agentes con spin $s = \pm 1$
\mathcal{R}	Red subyacente en el sistema
M	Magnetización del sistema
$N(v)$	Vecindad del nodo v
$N[v]$	Vecindad cerrada del nodo v , $N(v) \cup \{v\}$
c_{max}	Número máximo de ciclos para terminar la dinámica
R_{max}	Número máximo de repeticiones para una instancia del sistema
n_i	Número inicial de nodos con estado $i \in \{-1, 1, 0, 2, 3\}$
f_i	Número final de nodos con estado $i \in \{-1, 1, 0, 2, 3\}$
$n_{0,i}$	Número inicial de nodos con estado i sin indecisos en el sistema.
t_0	Tiempo para desaparecer los nodos neutrales (en número de actualizaciones)
T_0	Tiempo para desaparecer los nodos neutrales (en número de ciclos)
t_c	Tiempo para consenso (en número de actualizaciones)
T_c	Tiempo para consenso (en número de ciclos)
M_i	Mediana de la distribución inicial de P_i entre los distritos
m_i	Media de la distribución inicial de P_i entre los distritos
$p_i(t_0)$	Porcentaje de nodos de P_i al desaparecer los nodos neutrales
P_s	Probabilidad de salida para el estado s
P_{cs}	Probabilidad de obtener una franja en el sistema
I	Proporción inicial entre los partidos de una coalición doble
F	Proporción final entre los partidos de una coalición doble
I^*	Proporción inicial del partido menor dentro de una coalición doble

Introducción

Entre las diversas líneas de investigación que el Grupo Interdisciplinario Mecánica Fractal de la ESIME IPN Unidad Zacatenco, dirigido por el Dr. Alexander Balankin, se encuentra el estudio de comportamiento fractal de sistemas complejos y dinámica social, mediante métodos de análisis fractal, mecánica estadística y modelación por computadora.

Un sistema es un conjunto de objetos unidos por alguna forma de interacción o interdependencia para llegar a un objetivo en común; existe una gran variedad de sistemas y una amplia gama de tipologías para clasificarlos, de acuerdo con ciertas características básicas. Por ejemplo, en cuanto a su constitución, los sistemas pueden ser físicos o abstractos, en cuanto a su naturaleza pueden ser cerrados o abiertos, en cuanto a su origen naturales o artificiales. La teoría general de sistemas es la historia de una filosofía y un método para analizar y estudiar la realidad y desarrollar modelos, a partir de los cuales se puede intentar una aproximación paulatina a la percepción de una parte de esa globalidad que es el universo [8].

Es a través del estudio sistémico, que conjuntamente con varias disciplinas (Ver Figura 1), encontramos una forma de modelar sistemas complejos. La ingeniería de los sistemas complejos es actualmente una filosofía de pensamiento en expansión. Algunas de las ciencias que interaccionan son: los campos del conocimientos tradicionales como son las ciencias de la ingeniería y la organización, ciencias como las ciencias políticas, la biología, la psicología y la psiquiatría, la lingüística, y la sociología. Las ciencias han sido integradas desde un inicio, como es el caso de la informática, la inteligencia artificial, y las ciencias contemporáneas como la ciencia social computacional, que hoy en día en la era digital destaca como una alternativa para estudiar sistemas a grandes escalas a través de las redes complejas que se producen [36].

El uso de los modelos tipo spin para simular la dinámica de la opinión se basa en la observación social que la gente tiende a cooperar mientras intercambia sus opiniones, y esas interacciones causan que la opinión se dirija a cierto estado global que puede ser consenso, o compromiso entre algunas alternativas, evocando a los estados magnéticos estables de los modelos spin sobre redes. La importancia en estos modelos y sus simulaciones no solo es de índole académica, los modelos tipo spin permiten reproducir y estudiar características generales de sistemas sociales reales. Las elecciones otorgan una medida precisa y global del estado de la opinión del electorado, además constituyen un lugar para la aplicación de la mecánica estadística en la modelación de la dinámica de la opinión.

En general, un modelo dinámico spin consiste de una red suayacente \mathcal{R} de tamaño N (número de nodos), donde cada nodo puede asumir el estado con spin, por ejemplo dos estados $+1$, -1 , o permanecer en estado neutral $s = 0$. En el contexto de la dinámica social spins con diferentes signos pueden asociarse con agentes activos de dos partidos políticos, mientras que los nodos con estado neutral se consideran como los *votantes indecisos*. El sistema evoluciona siguiendo una regla

de evolución y generalmente tiende a un estado magnético estable.

Las reglas de la dinámica social pueden ser divididas en dos grupos, aquellas en las que los individuos forman sus creencias basados en las opiniones de sus vecinos dentro de una red social de conocidos, y aquellas en las que contrariamente, las conexiones dentro de la red se forman por individuos de creencias similares [10].

Trabajos previos Nuestro interés en el estudio de la heterogeneidad espacial dentro de sistemas spin con tres estados, proviene del trabajo realizado por Balankin *et al.* en [10]. Algunas diferencias significativas entre los trabajos presentados en [10] y nuestros estudios radican en que la regla de actualización utilizada difiere sustancialmente de la Regla de la Mayoría (RM) que nosotros utilizamos, el efecto de la regla utilizada en [10] aplica sólo sobre un nodo dentro del grupo de discusión, otra diferencia es que las distribuciones espaciales iniciales para los agentes activos son o bien normal y de colas pesadas, o ambas con distribuciones normal dentro de los distritos. Un aspecto interesante mencionado en [10], es que el sistema puede converger a estados sin consenso, algo similar al comportamiento de algunos autómatas celulares bidimensionales.

Estudios sobre la dinámica de sistemas con dos estados regidos por la RM se encuentran en [35]. En su trabajo se presentan los estados de consenso, o engrosamiento con evolución lenta (estados *franja*) como los posibles escenarios finales. Se estudian los efectos de los estados de evolución lenta en el tiempo de consenso. La atención en [35] se dirige a medir las variables que indican el tiempo de consenso, las distribuciones de los tiempos de consenso, y las probabilidades de alcanzar un estado franja. Las diferencias entre nuestros estudios y el trabajo en [35], sobresale la inclusión de los estados neutros o votantes indecisos, sin embargo, al paso de un cierto tiempo t_0 el sistema solo tiene dos estados y tiene sus mismas condiciones que en [35], con una cierta heterogeneidad inicial tras haber eliminado los estados neutrales. Nuestros criterios para considerar un estado dentro de la dinámica como un estado franja están basados en las conclusiones presentadas en [35]. En los capítulos 2 y 3 mencionaremos los detalles.

En [17] S. Galam estudia el efecto que tiene la RM en la formación de jerarquías y ascenso al poder dentro de una sociedad. Se analizan principalmente las probabilidades que tiene cada partido de lograr el poder, y el tiempo necesario para que un partido pierda posibilidades de lograr el ascenso. Una observación proveniente en [17] es como se tratan los empates dentro de los grupos de discusión de la RM, como alternativa proponen que se mantengan sin alteración. Sin embargo, puede ocurrir que el número de empates sea lo suficientemente significativo como para determinar las tendencias de cada partido, discusión que llevamos a cabo en el Capítulo 4.

El modelo de Axelrod en [1] estudia mediante un proceso dinámico la diseminación de la cultura en una sociedad, como emerge y como se expande. La cultura se define en términos de una lista de características de tamaño l (dimensión de la cultura), y a cada característica se le asigna una lista de rasgos de tamaño s .

Dentro de la dinámica, es más probable que dos agentes con mayores similitudes culturales intercambien características de cultura. Dentro de los posibles estados en el modelo de Axelrod están las configuraciones con distintas regiones culturales.

Los modelos de Axelrod y Schelling [1, 41] son ejemplos de modelos sociales, que ayudan a la comprensión de distintos comportamientos dentro de una comunidad. La programación basada en agentes es una herramienta útil dentro de la modelación y simulación de los modelos sociales. Axelrod en [1] comenta algunas ventajas que tiene la programación basada en agentes sobre otros paradigmas y lenguajes de programación, y las sugerencias sobre el buen empleo de estas técnicas.

En [14] S. Castellano, C. Fortunato y V. Loreto presentan una revisión general del panorama actual de la mecánica estadística y la dinámica social y de cómo las partículas (nodos) vecinas pueden establecer mutuas relaciones e influenciarse las unas a la otras. El modelo de Ising es el mejor ejemplo de este tipo de modelos.

En [3], Capítulo 12 se realiza un análisis de la importancia de las coaliciones dentro de las agrupaciones sociales. Se revisan situaciones sociales donde se requieren de elecciones mutuamente exclusivas, pasando desde un contexto histórico y comparándolo con fenómenos físicos como la dinámica de partículas. Se menciona la analogía entre algunos modelos sociales y sus relaciones con la física estadística.

Contribuciones El estudio de los efectos de la heterogeneidad espacial inicial para sistemas con tres estados se propone un enfoque inicial distinto al sugerido en [10]. En particular, la regla de actualización que rige la dinámica y los parámetros que controlan la heterogeneidad dentro del sistema, difieren significativamente. En nuestro trabajo se propone una distribución espacial inicial en términos de la mediana M_{-1} , y el empleo de la RM. Nuestros resultados, son estudios estadísticos de las variables, como por ejemplo los tiempos de consenso, las probabilidades de salida del sistema, el efecto de los agentes neutros, y complementan los resultados obtenidos en [10], [35]. Mostramos los detalles de este análisis en el Capítulo 3.

En cuanto al estudio de las coaliciones dobles para sistemas con tres estados, nuestras contribuciones son la creación y análisis de modelos que estudian el beneficio o perjuicio que una coalición doble le asigna a uno de los partidos que la integran. En particular, cuando una dinámica beneficia al partido menor, cuando al partido mayor, y cuando a ninguno de los dos. Los detalles de este análisis los presentamos en el Capítulo 4.

Condiciones, suposiciones y limitaciones de nuestros análisis La dinámica de la opinión la estudiamos bajo la óptica de la sociofísica, suponiendo que los fenómenos sociales se pueden describir a través de las propiedades emergentes de un conjunto de individuos que interactúan entre sí para producir nuevas conductas que no pueden reducirse al estudio de los componentes aislados. El número de estados permitidos dentro de nuestros sistemas está acotado y clasificado en dos tipos de agentes: pasivos y activos, suponemos que la dinámica del intercambio de opinión se produce dentro de una red \mathcal{R} finita y cuya topología está restringida a

enrejados de \mathbb{Z}^2 con o sin condiciones de frontera (enrejados toroidales o planos) dónde cada nodo representa un elemento dentro del sistema. En nuestros sistemas no consideramos la acción de fuerzas externas, si bien esta es una restricción en nuestros análisis, simplifica de manera substancial el trabajo. Para nuestros propósitos, no presentamos argumentos a favor de algún tipo particular de red, sin embargo, notamos que las relaciones humanas no están confinadas a un grupo fijo de conocidos como sucede en un asiento dentro de un salón de clases, por el contrario son redes con estructuras generales [14, 13].

Los nodos de la red se distribuyen siguiendo unas distribuciones espaciales específicas (Capítulos 2,3) y suponemos que la influencia exterior es nula. Otra limitación importante la tenemos con el tamaño de redes. Entre más nodos tenga la red el tiempo de computación (en términos de algoritmos Monte Carlo) y su complejidad crece considerablemente. Debido a que nuestros modelos se implementaron mediante MBA por medio de NetLogo, nuestras simulaciones se llevan a cabo mediante un tipo particular de simulador, el Analizador del Comportamiento de Modelos de NetLogo, en esta dirección, en el Capítulo 5 se comentan algunas otras técnicas de programación que pueden producir resultados favorables en cuanto a rapidez de cómputo.

Análisis realizado Una parte de nuestro análisis corresponde al análisis de sistemas sociales, particularmente sistemas democráticos de votaciones. Una vez implementados los modelos, se efectuaron series de simulaciones las cuales nos proporcionan los valores de las variables de interés durante la dinámica del modelo, en forma de series de datos. De los datos provenientes de las simulaciones, realizamos un análisis estadístico, de esta forma verificamos nuestras hipótesis. Capítulos 2, 3, 4.

Planteamiento de los problemas

Los sistemas complejos y la dinámica de la opinión La opinión dentro de una sociedad puede ser considerada como un sistema abierto complejo adaptativo, en el cual interactúan un número finito de individuos, es por medio de estas interacciones que se produce el intercambio de opiniones y se forman creencias, por ejemplo preferencias sobre algún partido o representante político, o sobre algún producto o servicio ligado a un mercado. La mayoría de los sistemas sociales presentan un carácter complejo, además la cantidad de variables que participan es tan amplia, que necesariamente presentan un factor aleatorio, usualmente causado por la no-linealidad de su dinámica y la interacción con los agentes externos.

Generalmente los sistemas complejos exhiben una invarianza a diferentes escalas; es decir, su comportamiento no cambia si escalamos las variables que gobiernan su dinámica (por ejemplo: tiempo y espacio), esto nos permite emplear el enfoque de escalamiento dinámico para estudiar la cinética de los sistemas sociales.

Una de las hipótesis naturales y democráticas dentro de la formación de opinión, es suponer que la opinión que un grupo de individuos G manifestará sobre algún cuestionamiento, dependerá del número de opiniones similares contenidas dentro de G , por ejemplo, si todo el grupo tiene una misma opinión, el grupo tendrá formar una opinión homogénea. A menudo algunas decisiones cotidianas se someten al criterio de su mayoría; a este tipo de dinámica, se le conoce como la RM.

En nuestros estudios la heterogeneidad espacial inicial se manifiesta cuando uno de los partidos contiene más simpatizantes dentro de algunos distritos, es decir está más concentrado y con más representación que en otros distritos. En México, de acuerdo con las últimas elecciones y reportes del IFE, existen tres partidos que predominan: PRI, PAN, y PRD. El PRD mantiene un bastión en la capital, y algunos estados del centro del país, siendo menor su representatividad en el norte y sur de la república, de esta manera decimos que el PRD tiene una distribución espacial geográficamente heterogénea en México.

Una primera parte de este trabajo, propone un modelo tipo spin para sistemas con tres estados sobre enrejados bidimensionales finitos, con N nodos, divididos en células o distritos con un número fijo de nodos. Dichos modelos evolucionan conforme a una regla de actualización basada en la RM. De manera particular abordamos el siguiente problema:

Problema 0.0.1. *Proponer un modelo que permita estudiar los efectos que tiene la heterogeneidad espacial inicial en un sistema constituido por dos partidos (opiniones) y votantes indecisos, bajo la dinámica de la regla de la mayoría.*

Las coaliciones son un aspecto relevante en el futuro político de muchos partidos, empresas, o instituciones. El buen manejo de las coaliciones, es crucial dentro de los objetivos particulares de los partidos que la integran. Suponemos que nuestro sistema tiene cuatro estados, de los cuales tres de ellos representan los agentes

activos de tres partidos políticos, dos partidos forman una coalición, y los agentes pasivos representan a los votantes indecisos. Nos planteamos el siguiente problema:

Problema 0.0.2. *En un sistema con tres partidos, dos de ellos en una coalición y votantes indecisos; determinar tres tipos de modelos tipo spin, dos modelos de los cuales su dinámica favorezca estadísticamente al partido mayor (menor) de la coalición y un tercer modelo que no favorezca a ningún integrante de la coalición.*

Cabe señalar que si la paridad el grupo de discusión y el número de opiniones distintas dentro de la vecindad cambian entonces la dinámica cambia. A lo largo de este trabajo suponemos que los grupo de discusiones estan formados por el individuo junto con su 4-vecindad. De esta forma si el sistema tiene solo dos estados y como la cardinalidad del grupo de discusión es impar, no estan presentes los empates. Como consecuencia, si no se considera la presencia de los estados neutrales en el sistema, no hay situaciones de empates para la RM.

Justificación

Los comportamientos sociales como sistemas complejos El comportamiento complejo puede suscitarse en cualquier sistema que esté constituido por un gran número de elementos que interactúan de forma no-lineal; por ejemplo átomos, células en un organismo vivo; negociadores en un mercado financiero, miembros de un mismo partido político, secta religiosa, asociación profesional, o votantes en el registro electoral. La complejidad del sistema es el resultado de diferentes procesos que operan en una gran variedad de escalas (temporales y espaciales) asociadas con un gran número de grados de libertad. La complejidad puede ser caracterizada por el grado de incertidumbre en el sistema. Frecuentemente encontramos sistemas complejos que surgen como resultado de algún comportamiento social, por ejemplo: la formación de opiniones, la diseminación del lenguaje y la cultura, precios financieros en economía, transmisión de enfermedades, la emergencia de comportamientos sociales como la segregación racial o la formación de grupos con determinada opinión.

El enfoque tradicional dentro de las ciencias sociales considera los factores psicológicos como componentes irreducibles dentro de las interacciones humanas. Los intentos actuales contemplan modelos que usan métodos y herramientas de la física estadística, y en muchas ocasiones hay amplias razones para suponer que el comportamiento de grandes grupos de individuos puede ser entendido mediante simple reglas de interacción, donde los individuos esencialmente se comportan como autómatas que reciben estímulos en su medio ambiente, semejante al proceso magnético, en el cual las orientaciones de cada individuo tienen influencia en sus vecinos (tratándolo de persuadir para adoptar la misma opinión), de esta manera, los modelos spin sociales suponen que existe una cierta fuerza social semejante al magnetismo que orienta a los individuos hacia determinadas tendencias [4].

Redes complejas como modelos para sistemas complejos De manera general, cualquier sistema, como conjunto de elementos que interactúan, puede ser considerado como una red (gráfica), donde los nodos son los elementos del sistema y las aristas son las interacciones que existen entre ellos. La eficiencia de un sistema, en términos de información, está íntimamente relacionada con la topología del modelado de la red. En este contexto, en años recientes se ha despertado un enorme interés en las llamadas redes complejas que poseen la propiedad de mundo pequeño; es decir, el número de enlaces que uno debe recorrer para conectar dos sitios de la red crece como logaritmo del número de nodos.

En el ámbito de las redes sociales existe una gran variedad de redes a considerar, por ejemplo: las redes de amistades y conocidos en grupos sociales restringidos; como actores, sectas religiosas y partidos políticos, redes de mercados financieros, redes de correo electrónico, redes de colaboraciones científicas; redes de contactos sexuales, etc. Recientemente, el análisis de una variedad de redes ha demostrado que

sus estructuras no son puramente aleatorias, como venía suponiendo desde hace muchos años, sino más bien son redes con propiedades como redes de pequeño mundo, o libres de escala. De alguna manera, la naturaleza ha encontrado que este tipo de estructura es óptima en el balance entre el beneficio de un enlace a un vecino lejano y el costo que este supone. Como consecuencia, las redes sociales a menudo poseen muchas de las propiedades características de los sistemas complejos estudiados en la física, como capacidad las de auto-organización, cooperación y adaptación.

La física estadística como una herramienta social A lo largo de la historia, la física ha sido comparada con el estudio de los eventos mecánicos deterministas, como la caída de la manzana, o que la fuerza es igual a la aceleración por la masa. Sin embargo, un estudio físico dentro de los sistemas complejos sociales nos acerca mas a los estudios de naturaleza aleatoria.

En el siglo XIX Ludwig E. Boltzmann inició lo que ahora conocemos como física estadística. Las simulaciones por computadora dentro de la física estadística estan basadas en el comportamiento individual de las partículas, su influencia sobre partículas vecinas y el estudio global de propiedades que emergen dentro del sistema. Por medio de la física estadística se estudian modelos simples con solo dos estados (spin), representados por los símbolos \uparrow, \downarrow , ó $\{+1, -1\}$, ó $\{0, 1\}$ en el lenguaje binario de las computadoras, ocupado o vacío en percolación, republicanos y demócratas en política, vivo o muerto en biología. Boltzmann predijo que el movimiento de moléculas con temperatura T tiene una velocidad v la cual puede cambiar con el tiempo, pero sigue una distribución de probabilidad: La probabilidad para la velocidad v es proporcional a $e^{(-E/T)}$, donde E es la energía cinética de la molécula debida a su velocidad.

A pesar que los humanos no son ni spins ni átomos, podemos modelar su comportamiento mediante modelos spin. Supongamos que contamos con un conjunto de los individuos portando solo un estado: vivo o muerto, es casi imposible predecir el descenso de algún de ellos en particular, sin embargo, tomando un promedio sobre un número considerable de personas nos otorgaría un resultado mas exácto, hasta podriamos saber la probabilidad de que un individuo que vive en determinado país viva como máximo x años; algo semejante ocurre con el lanzamiento de una moneda o la vida de un automóvil. De esta forma, simular la opinión de una persona y sus decisiones dentro de una computadora no parece ser del todo realista, pero hacer los mismo con millones de personas puede dar mejores resultados en términos de promedios. Los humanos no son ni spins ni átomos, sin embargo, podemos modelar y estudiar bastante bien su comportamiento grupal mediante modelos spin [30].

Por otra parte, el análisis estadístico revela la emergencia de distribuciones de ley de potencia, indicando que los sistemas sociales auto-organizados fluyen hacia un estado crítico sin escalas características de tiempo o longitud. Recientemente, se ha reportado que varios fenómenos con invarianza de escala, presentes en los sistemas sociales; como por ejemplo, en las morfologías fractales de las ciudades,

en la dinámica fractal de la actividad económica, en la dinámica compleja de las opiniones asociadas con la propagación de rumores y en las preferencias electorales.

La dinámica de la opinión dentro de elecciones políticas Uno de los procesos fundamentales en las sociedades democráticas concierne al de las elecciones. Las elecciones son procesos democráticos convincentes, en donde se tiene el mismo tipo de interacción entre los votantes y las influencias externas (publicidad política, campañas, etc). Desde el punto de vista científico de los sistemas complejos, el resultado de un proceso electoral puede considerarse como una respuesta de un sistema abierto, con muchos elementos que interactúan, gobernado por una dinámica (desconocida) compleja interna. La influencia familiar como influencia local en las decisiones de los individuos puede verse como el punto de partida para la toma de decisiones de preferencia política. Las coaliciones entre grupos de agentes son alternativas que se presentan comúnmente en compañías, y partidos políticos. La consolidación de una coalición es de vital importancia ya que tiene repercusiones dentro del sistema y en cada uno de sus integrantes.

La formación y evolución de la opinión dentro de una sociedad es una actividad social que tiene gran impacto en dentro de distintas actividades sociales, como son la emisión de votos, las preferencias por determinado producto o la diseminación de la cultura, por mencionar algunas. Debido a esto, cada vez es más necesario la creación de nuevos y mejores modelos que permitan mejorar nuestra comprensión actual de los procesos sociales que actúan en la formación de la opinión.

Estudios multidisciplinarios Hoy en día, la tecnología permite que las personas e individuos estén cada vez más comunicados e informados. La forma en como intercambiamos nuestra información e interaccionamos unos con otros, está en constante cambio. Todas estas nuevas formas de interacción social estimulan nuevos desafíos a las ciencias sociales, las cuales se apoyan de técnicas y métodos provenientes de diversas áreas del conocimiento. Algunas de las disciplinas científicas relacionadas con nuestro trabajo las presentamos en el mapa mental de la Figura 1.

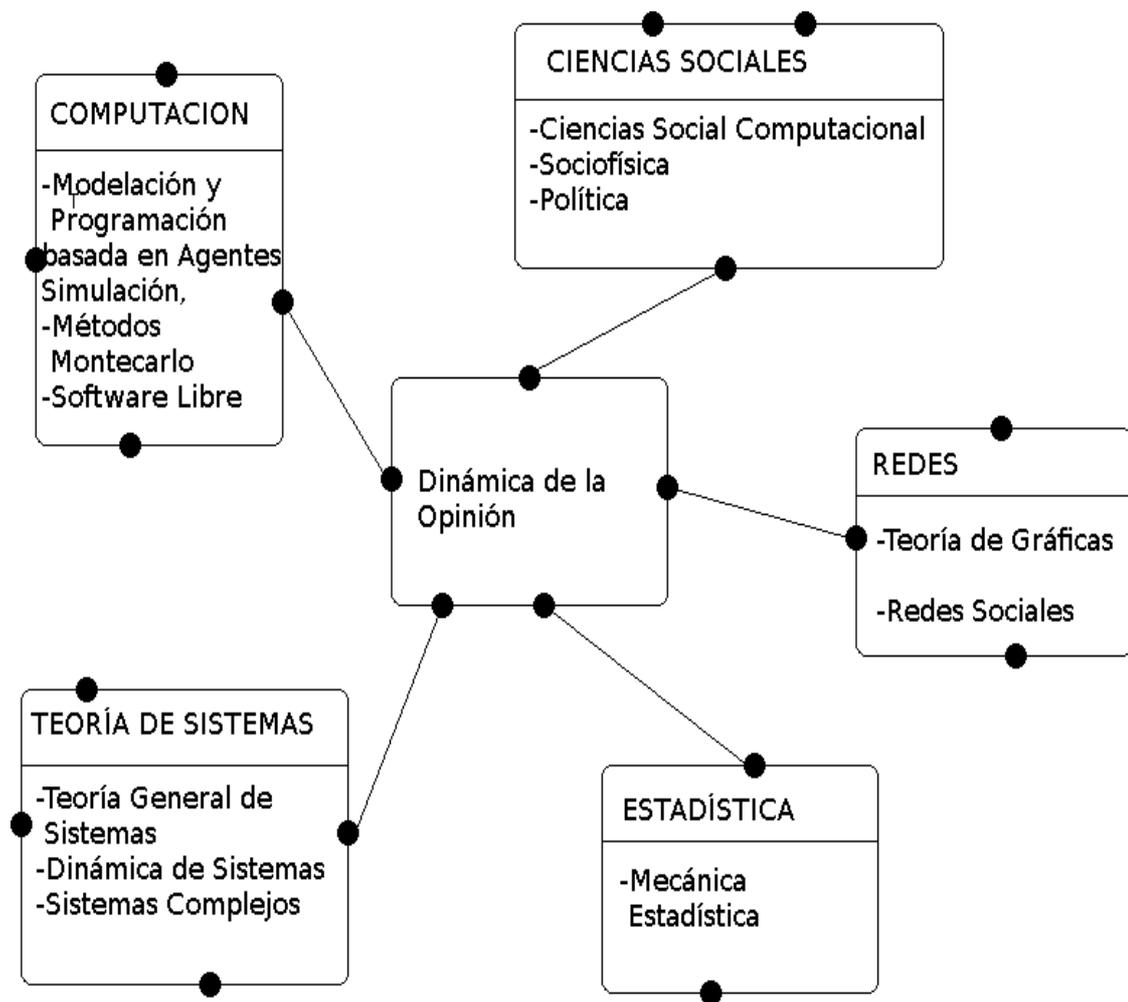


Figura 1: Relación con otras areas del conocimiento

Objetivo general

Estudiar bajo el enfoque de la mecánica estadística y los sistemas complejos, los efectos que tienen la heterogeneidad espacial inicial y las coaliciones dobles, en la dinámica de la opinión de sistemas con dos y tres estados, por medio de modelos tipo spin basados en agentes los cuales se rigen por la regla de la mayoría.

Objetivos particulares

- Proponer un modelo tipo spin con dos estados, mas un estado neutral, para el estudio de los efectos que tiene la heterogeneidad espacial inicial mediante la regla de la mayoría absoluta.
- Proponer modelos basados en agentes, para sistemas con tres estados mas un estado nulo, para estudiar los efectos que tiene una coalición doble en cada uno de los partidos que la integran, a través de la regla de la mayoría y bajo reglas particulares de coalición y desempate.
- Identificar y analizar los principales parámetros y magnitudes que gobiernan la dinámica en nuestros modelos, como son la magnetización, las probabilidades de salida, los tiempos de consenso, esto con el fin de determinar las posibles tendencias y comportamientos, así como las relaciones causales que existen entre ellos.
- Presentar los resultados en un contexto político y social que sugieran posibles aportaciones físicas relevantes de nuestros estudios.

Metodología

Características de los modelos

A lo largo de este trabajo, consideramos la dinámica de la opinión como un sistema complejo compuesto esencialmente de un número finito de individuos, en donde cada individuo se comporta como un ente autónomo capaz de tomar decisiones conjuntamente con los agentes externos que lo influyen. La formación y diseminación de la opinión es el resultado de las múltiples interacciones e influencias de todos los agentes que forman el sistema. En el contexto político o económico la información fluye con el objetivo de maximizar el número de integrantes de cierto partido. La abstracción del sistema la realizamos mediante la analogía entre la ciencia social y la física de partículas atómicas. Por medio de esta analogía, se obtienen valiosas herramientas en la comprensión de diversos sistemas sociales. Los estados spin son considerados como opiniones que los individuos profesan dentro de su entorno. La gran cantidad de interacciones llevadas a cabo dentro de una sociedad puede ser representada mediante una red dinámica, donde la información fluye de acuerdo a complejas configuraciones o estados de la red. Por ejemplo, hoy en día las opiniones de una gran parte de nuestra sociedad se comparten por medio de redes sociales.

Abstracción y modelación

En esta etapa pasamos de la realidad social a la abstracción. Establecemos los principios básicos para la abstracción del sistema y sus características, por ejemplo la influencia del medio particular un individuo como pueden ser su familia o grupo de trabajo. También se describen las reglas de interacción que determinarán la dinámica de nuestros modelos. Finalmente, describimos cada una de las características particulares dentro de nuestros modelos.

Implementación computacional

Descripciones generales de la parte de codificación, diseño e implementación de nuestros modelos. En esta parte detallamos las herramientas y recursos utilizados para simular nuestros modelos por medio de computadoras. Algunos aspectos relevantes como son la selección del lenguaje de programación y sus características, el tipo de simulador, y las restricciones en cuanto a recursos del sistema, tipo de algoritmos y limitantes dentro de nuestros modelos. Particularmente para codificar y simular los modelos usamos Netlogo, el cual, es software libre bajo la licencia GPL (Para su instalación revisar el sitio [38]).

Programación de nuestros modelos. Codificación

En esta parte se realizan los algoritmos y procedimientos necesarios, codificamos cada uno de nuestros modelos con Netlogo. Realizamos los diagramas de flujo adecuados para nuestros modelos, y se revisan los posibles errores, esto con la finalidad de que nuestros programas presenten de salida correcta y realicen las simulaciones de nuestros modelos de acuerdo a su formulación.

Simulaciones

El proceso dinámico de nuestras simulaciones se lleva a cabo mediante un proceso repetitivo. Para la simulación de nuestros modelos usamos un esquema de selección con repetición que se basa en métodos Monte Carlo. El Analizador del Comportamiento de Modelos de Netlogo nos permite simular, y a la vez, medir aquellas variables de nuestro interés a lo largo de toda la dinámica.

Análisis e inferencia estadística

A partir de los datos finales obtenidos de nuestras simulaciones, se identifican los estados notables dentro de la evolución del sistema. Analizamos estadísticamente las series de datos para describir los comportamientos y relaciones causales de algunas variables notables, como son: tiempos de consenso, probabilidades de salida, magnetización media, probabilidades de consenso, distribuciones sin votantes indecisos, entre otras. Se establecen las relaciones causales entre los parámetros que controlan las dinámicas.

Interpretación y reporte de resultados

En esta parte presentamos todos los resultados, tanto cuantitativos como cualitativos, como son posibles tendencias estadísticas que presentan las variables cuantificadas y sus relaciones entre ellas. Se discuten nuestros resultados bajo un contexto político y social.

Conclusiones y trabajo futuro

Mencionamos las conclusiones generales de nuestros estudios, sus limitantes, los resultados obtenidos, y las interrogantes y las futuras investigaciones de nuestro trabajo. Presentamos propuestas para nuevos proyectos e investigaciones, y algunas posibles generalizaciones en nuestros modelos.

Estructura de la tesis

La presente tesis esta organizada como sigue, una introducción, que muestra la importancia actual de la sociofísica y algunas temas involucrados, los problemas y objetivos planteados así como algunas soluciones relacionadas, y el tipo de análisis realizado. En el Capítulo 1 presentamos la revisión de la literatura, los resultados, métodos y modelos clásicos e sobresalientes dentro de la sociofísica y sus aplicaciones. En el Capítulo 2 mostramos la descripción de los modelos que presentamos en este trabajo, sus características y reglas, y también los algoritmos usados para su codificación. En el contexto de la dinámica de la opinión, el Capítulo 3 presenta un estudio y análisis de los efectos de la heterogeneidad espacial inicial bajo la regla de la mayoría para tres estados, las aportaciones que se presentan son discutidas y comparadas con resultados reportados en otros artículos. El Capítulo 4 presenta cuatro modelos para estudiar la dinámica entre una coalición doble, un tercer partido más estados nulos. La tesis termina en con las conclusiones y los planteamientos para el futuro trabajo del Capítulo 5. El Anexo A presenta una parte de los diagramas de flujo y código fuente utilizado en las simulaciones. La figura 2 presenta un diagrama de flujo para nuestra metodología.

METODOLOGÍA

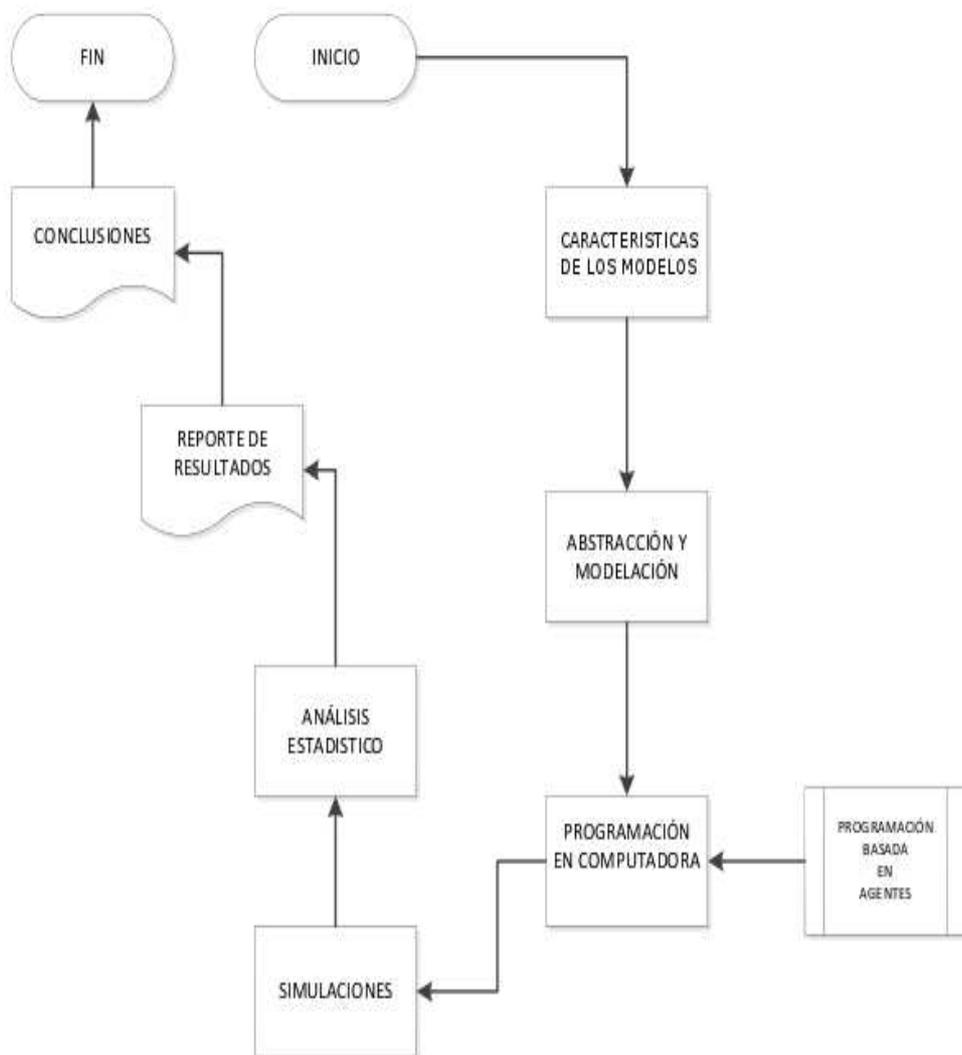


Figura 2: Diagrama de flujo para nuestra metodología

CAPÍTULO 1

Marco teórico

1.1. Introducción a los sistemas complejos

1.1.1. Sistemas complejos y sistemas complicados

Al observar nuestro entorno podemos notar que estamos rodeados de una gran variedad de sistemas, mundos en los cuales existen demasiados habitantes y estos a su vez pueden realizar interacciones que impiden substancialmente su rápida comprensión. Si calificamos alguno de estos mundos como un *sistema complejo* (SC) será por que tenemos evidencias de que sus habitantes mantienen una cierta independencia en cuanto a sus relaciones. Por el contrario designaremos algún mundo como *sistema complicado* (SCo) como aquel formado por una gran cantidad de componentes que exhiben interrelaciones de tipo lineal.

Algunas características de los sistemas sociales que los vuelven sistemas complejos se observan cuando los individuos en un sistema social están inmersos en una red de conexiones, y estos individuos transitan entre una gran variedad de procesos adaptativos. Algo muy notorio en redes o mundos sociales es el rápido crecimiento de las conexiones y como éste crecimiento tiende hacia la complejidad. Los individuos deben predecir y reaccionar en base a las acciones y predicciones de otros individuos. Las conexiones entre los individuos exacerban esas acciones y los individuos están juntos uno con otro, y el sistema se vuelve difícil de descomponer y la complejidad sobreviene.

Un *sistema adaptativo complejo* es un tipo especial de SC; es complejo en el sentido de que es diverso y conformado por múltiples elementos interconectados; y adaptativo, porque tiene la capacidad de cambiar y aprender de la experiencia.

La expresión “Sistema Adaptativo Complejo (SAC)” es a menudo usada para describir el campo académico libremente organizado que se ha desarrollado alre-

dedor de estos sistemas. La ciencia de la complejidad no es una teoría única, ya que abarca más de un marco teórico, es sumamente interdisciplinaria y busca las respuestas a algunas preguntas fundamentales sobre los sistemas vivos, adaptables y cambiables. Los ejemplos de sistemas adaptativos complejos incluyen la bolsa de valores, las sociedades de insectos y colonias de hormigas, la biósfera y el ecosistema, el cerebro y el sistema inmunitario, las células y el desarrollo embrionario, negocios de fabricación y cualquier esfuerzo de grupos sociales humanos dentro de un sistema cultural y social dado, tales como partidos políticos o comunidades. Hay una estrecha relación entre el campo de los SAC y la vida artificial, en ambas áreas los principios emergentes y de auto organización son muy importantes [9].

Comportamientos simples y estratégicos En los SAC podemos observar que existen niveles adaptación de sus agentes y del comportamiento mismo del sistema. Un comportamiento estratégico apropiado no está del todo claro, la gente en ocasiones es estratégica y en otros solo sigue reglas. Sin embargo, se tiene buena evidencia que los humanos no actúan siempre como agentes racionales y que el comportamiento adaptativo puede llevar a muchos resultados diferentes, entonces se necesita flexibilidad para ser capaces de explorar el interés entre los extremos estratégicos que tenemos.

La complejidad puede ser caracterizada también por la incertidumbre del sistema o por el grado de perfectibilidad en la evolución del sistema. El análisis cuantitativo de los datos generados por los sistemas complejos es un problema común en la física estadística, la cual encuentra aplicaciones en varias ramas de las ciencias naturales y sociales [9].

1.2. La ciencias sociales y sus metodologías

La ciencias sociales han luchado por tratar de describir o modelar el comportamiento humano. Desde sus inicios las ciencias sociales han perseguido una gran variedad de metodologías, como investigaciones empíricas, experimentos naturales y en laboratorios, investigaciones históricas, métodos cualitativos, matemáticos y modelos computacionales.

Los métodos computacionales constituyen una reciente técnica usada en ciencias sociales la cual a su vez complementa otras técnicas, es decir el trabajo empírico puede complementar los trabajos de laboratorio y los modelos computacionales pueden complementar a los modelos matemáticos. Debido a todo esto la comprensión de los procesos sociales está continuamente usando las ciencias y tecnologías de vanguardia.

Por ejemplo los modelos computacionales del comportamiento de mercados extraen características que permiten la predicción de precios y patrones de comercio en ellos. Dichos modelos han mostrado que reglas simples que mejoran las ya existentes puede ser suficientes para observar los comportamientos y predecir.

Algunos modelos simples sobre el comportamiento cooperativo en los sistemas sociales eran ya conocidos por economistas y sociólogos desde hace muchos años. Sorprendentemente muchos de estos modelos clásicos en la sociología fueron simplemente reformulados en términos de modelos existentes en mecánica estadística, tales como el modelo de Ising, o el modelo de Axelrod de formación de dominios culturales.

1.2.1. Mecánica estadística

El propósito de la mecánica estadística es describir sistemas constituidos por un gran número de partículas. En principio esta descripción viene dada en términos del estado cuántico, pero en general solo disponemos de una limitada información para la especificación puntual de dicho estado. El estado del sistema, está caracterizado por cantidades como la magnetización, energía total, presión, temperatura. No es posible precisar el estado cuántico en el que se encuentra el sistema, entonces se procede a describirlo en términos de probabilidades. La mecánica estadística relaciona las propiedades microscópicas de los individuos y moléculas con las propiedades macroscópicas de los materiales que observamos diariamente, de esta forma explica la termodinámica como consecuencia de las descripciones clásicas y cuánticas de la estadística y mecánica a nivel microscópico.

Mediante la noción de *colectividad* o ensemble (microcanónico para sistemas aislados, canónico para sistemas no-aislados y gran canónico): un conjunto constituido por un gran número de sistemas similares, podemos obtener una descripción estadística del estado del sistema. La mecánica estadística tiene sus bases en el principio de la igualdad *a priori* de las probabilidades: “Cuando un sistema macroscópico aislado está en equilibrio, el sistema se encontrará en cualquiera de sus estados accesibles con la misma probabilidad”.

La analogía entre partículas e individuos y entre los sistemas de partículas y los sistemas sociales permite las aplicaciones de la mecánica estadística en las ciencias sociales. La reformulación de modelos clásicos en mecánica estadística como el modelo de Ising sobre ferromagnetismo y el modelo de Schelling dentro del contexto social son ejemplos de esta relación.

El interés dentro de la aplicación de métodos de la mecánica estadística en las ciencias sociales, forma parte de lo que actualmente conocemos como *sociofísica*, en donde la dinámica de la opinión es uno de los más notables y difundidos temas.

Muchos modelos sociales requieren para ser tratables que estén constituidos de al menos dos elementos o muchos elementos. Desafortunadamente muchas interacciones en sistemas económicos, políticos y sociales envuelven un moderado número de gente. Por ejemplo el mundo de la política no es plenamente entendido o capturado por la interacción de dos personas. Aunque veamos a dos senadores llevar una batalla electoral, detrás de esto hay que considerar que un senador interactúa con muchos otros senadores. Observemos entonces que los senadores deben navegar en un panorama estratégico que involucra votaciones, grupos de interés, grupos de

presión, burócratas y otras ramas del gobierno.

Entonces tan pronto como empecemos a incrementar el número de agentes a considerar en nuestro modelo, los mecanismos que faciliten la interacción entre los agentes son muy importantes. Los nuevos modelos que combinan matemáticas y computación permiten crear hipótesis apegadas a la realidad.

Para nuestros propósitos, los sistemas que presentamos en este trabajo no se ven afectados por algún agente externo, son sistemas aislados, donde los comportamientos futuros de la dinámica son producto solo de la interacción de los agentes que componen el sistema.

1.2.2. Dinámica de sistemas

La *dinámica de sistemas* es un enfoque para entender el comportamiento de sistemas complejos a través del tiempo. Esta relacionada con ciclos de realimentación interna y retrasos en los tiempos, mismos que afectan el comportamiento del sistema total. Dentro de la modelación de sistemas complejos mediante la dinámica de sistemas se requiere identificar las variables de almacenamiento, de flujo, y auxiliares, estas variables determinarán las relaciones causa-efecto dentro del sistema y los ciclos de retroalimentación.

Lo que hace diferente al enfoque de dinámica de sistemas de otros enfoques para estudiar sistemas complejos, es el uso de ciclos de realimentación, y el empleo de modelos matemáticos. Estos elementos, que se describen como sistemas aparentemente simples, despliegan una desconcertante no linealidad.

Observación 1.2.1. *Nuestros modelos si bien tienen cualidades dinámicas, difieren un tanto del enfoque de la dinámica de sistemas clásica. Nuestra dinámica no se rige por ecuaciones en las cuales estén plasmadas las leyes de causa y efecto para las variables relevantes dentro del sistema, en su lugar, en cada momento de la dinámica la incertidumbre en cuanto a la posible relaciones entre las variables es inevitable.*

1.2.3. Ciencia social computacional

Hoy en día, pasamos nuestras vidas rodeados de redes, revisamos regularmente nuestro correo electrónico, realizamos llamadas por teléfonos móviles, realizamos compras con tarjetas de crédito, *etc.*

Nuestros movimientos en lugares públicos pueden ser capturados por video cámaras, nuestros registros médicos guardados en archivos digitales. Podemos realizar comentarios, o mantener relaciones de amistad a través de redes sociales. Cada una de esas transacciones induce caminos o rutas digitales, que pueden ser compiladas en imágenes de comportamiento individual o grupal, con el fin de transformar la comprensión de nuestras vidas, organizaciones, y sociedades.

Es posible aprender como es una red social gigante y como se desenvuelve en el tiempo. Compañías telefónicas han registrado patrones de llamadas entre sus consumidores a lo largo de múltiples años, al igual sitios de comercio electrónico como Google y Yahoo! recolectan mensajes instantáneos sobre la comunicación global.

Actualmente es relativamente fácil realizar un seguimiento de los movimientos de la gente. Los teléfonos móviles permiten identificar las rutas que sigue la gente, algo útil por ejemplo, como información valiosa para estudios de epidemia.

Internet ofrece un canal diferente para entender que dice la gente, y como están conectados. Los mundos virtuales hoy en día ofrecen, por su naturaleza un medio para capturar registros de comportamiento individual, y ofrecen amplias oportunidades de investigación [36].

Similarmente, sitios web de redes sociales ofrecen una oportunidad de entender el impacto de la posición de una persona en la red, desde sus gustos hasta su estado de humor o su salud, junto a esto el procesamiento del lenguaje natural ofrece una capacidad de organizar y analizar cantidades enormes de texto de internet u otras fuentes.

La ciencia social computacional, está surgiendo de la capacidad de recolectar y analizar datos sin precedentes en amplitud profundidad y escala.

Sin embargo faltan muchos caminos por recorrer y existen limitantes, por ejemplo las personas no reaccionan como los “quarks” o las células, que no les importa que indaguen en ellas. Otro problema es que existen pocos recursos para ciencias sociales en cuanto al análisis y captura de datos o que los conjuntos de datos masivos son privados.

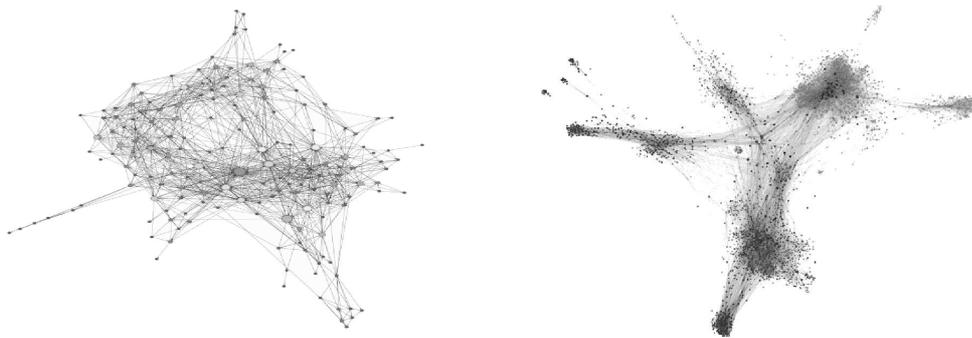


Figura 1.1: Redes sociales

La aparición de una ciencia social computacional comparte con otras nuevas disciplinas la necesidad de desarrollar un paradigma en la formación de nuevas investigaciones. Un trabajo conjunto entre las ciencias sociales y la computación [37].

1.3. Coaliciones en organizaciones

En el ámbito mercantil, la selección de un producto enfrenta una multiplicidad de posibles opciones, en otras solo hay una opción, pero algunas se presentan dos opciones mutuamente excluyentes; izquierda o derecha, verdad o mentira.

A lo largo de nuestras vidas nos encontramos con muchas interrogantes que requieren una decisión binaria. Estas decisiones nos asemejan a los átomos magnéticos preguntándose de que forma apuntar por su estado spin. Estamos de cierta forma con una tendencia a ser influenciados por las decisiones de los que nos rodean. El resultado de estas interacciones llevan a resultados difíciles de predecir si no consideramos la dinámica de todo el grupo como un todo.

Las grandes compañías no siempre crecen por la acumulación de trabajadores o el aumento gradual de ventas, a veces es necesario unirse con un competidor con la esperanza de obtener una ventaja sinérgica, o colaborar manteniendo paralelamente su identidad. Aún las grandes firmas que rigen algún mercado se ven forzadas a cooperar más que a competir, por ejemplo cuando aparecen nuevas tecnologías demandando estándares y compatibilidades.

Las decisiones para las alianzas deben considerar el tamaño de la parte con la que se formará la alianza. La interacción entre dos grupos depende del grado de antipatía que exista entre ellas, y que posiblemente depende de que tanto sus intereses o productos se sobrepongan.

R. Axelrod en su modelo del panorama para la formación de alianzas considera a cada firma como una partícula la cual tiene una individualidad adaptada a la fuerza de interacción con el resto de las partículas. La fuerza de atracción que ejerce una partícula a otra depende de su tamaño, la fuerza repulsiva depende si están cerca o distantes. Axelrod define una “Energía total” para un grupo de firmas (partículas), la cual calcularon sumando todas las fuerzas de atracción y repulsión entre cada par, cuando las firmas están alineadas en varias coaliciones. A su vez, se define un vector para cada configuración posible dentro del sistema, al cual se le asocia una energía, la gráfica de estas magnitudes proporciona el panorama general para visualizar la energía, y observar su fluctuación.

En sociedades democráticas con distintos partidos políticos, las alianzas entre ellos pueden determinar el balance del poder. Cuando el número de partidos incrementa, las alianzas se vuelven significativas, a veces es mucho más lo que puede realizar un partido en buena coalición que estando solo. Los partidos de menor tamaño repentinamente se encuentran con la dicotomía de crear o romper poderes. La historia muestra las consecuencias de las coaliciones entre políticos y naciones.

La cima de los negocios y la economía está constituida por solo unos pocos, su supremacía definida por tamaño, porcentaje de mercado y ganancias. Aún las grandes firmas han tenido que cooperar con sus rivales [3].

Partidos políticos, votaciones y coaliciones Los partidos políticos son entidades de interés público que tienen como fin promover la participación de los

ciudadanos en la vida democrática de la sociedad, contribuir a la integración de la representación nacional como organizaciones de ciudadanos, hacer posible el acceso de éstos al ejercicio del poder público, de acuerdo con los programas, principios e ideas que postulan y mediante el sufragio universal, libre, secreto y directo. Sólo los ciudadanos podrán formar partidos políticos y afiliarse libre e individualmente a ellos.

Las votaciones electorales (elecciones ó comicios) en una sociedad democrática es un proceso democrático en dónde se tiene el mismo tipo de interacción entre los votantes y las influencias externas como son publicidad política y campañas. Desde el punto de vista de los sistemas físicos la elección se puede considerar como una respuesta de un sistema abierto en contacto con un campo magnético externo. Las elecciones se llevan a cabo periódicamente y es mediante este proceso que se eligen y renuevan los representantes políticos como senadores, diputados, y presidente de la nación.

Se conoce como *coalición política* al pacto entre dos o más partidos políticos, normalmente de ideas afines, para gobernar un país, en general una entidad administrativa. En la mayoría de los regímenes democráticos, las coaliciones están permitidas y pueden formarse antes o después de la celebración de las elecciones. Pueden ir a la convocatoria electoral con sus listas fusionadas, en cuyo caso se lo denomina una alianza electoral.

Por ejemplo, en México los poderes federales de elección popular, son el Poder Ejecutivo y el Poder Legislativo. En el Poder Ejecutivo se renuevan el cargo de Presidente de la República, y en el Legislativo los miembros del Senado de la República y de la Cámara de Diputados. A su vez dichas actividades electorales son realizadas por el Instituto Federal Electoral (IFE) un organismo autónomo en la República Mexicana. Para una explicación más amplia de política en México revisar [23, 21].

1.4. Redes

Muchos sistemas biológicos, sociales o de comunicación se pueden describir adecuadamente a través de redes complejas cuyos nodos representan individuos u organizaciones, y los enlaces simbolizan las interacciones entre ellos, dichas redes pueden ser clasificadas de acuerdo a su topología, si son dinámicas o estáticas, de acuerdo al tipo de enlaces como dirigidas, o de acuerdo a los procedimientos usados en su creación como aleatorias o determinista, *etc.*

El concepto *red* tiene un significado físico, mientras que matemáticamente una red \mathcal{R} es sinónimo de *gráfica*, es decir \mathcal{R} es un par (V, A) dónde V es un conjunto finito de elementos llamados nodos de la red con cardinalidad $|V| = N$ y A es un conjunto finito, de cardinalidad $|A| = M$, de parejas no ordenadas de nodos llamados aristas (o bandas). En la Figura 1.2 observamos un ejemplo de una red compleja.

El estudio de la dinámica de la opinión y algunos comportamientos de sistemas complejos son estudiados a través de redes complejas. Entre las redes complejas, las redes sociales aparecen de manera muy natural. Las redes sociales, como las redes naturales, están conformadas por un gran número de individuos, quienes generalmente tienen interacciones locales entre ellos mismos. De manera similar a los sistemas físicos susceptibles a acciones y campos externos, el comportamiento de las redes sociales también depende de factores externos. Por ello, las herramientas matemáticas desarrolladas en el contexto de la física estadística, para tratar fenómenos colectivos se han venido aplicando recientemente a diversos problemas sociales.

Actualmente se cuenta hoy con las grandes cantidades de datos e información almacenadas dentro de las redes sociales. Y es dentro de estas redes donde la opinión y preferencias de sus integrantes se transmite. La Internet y World Wide Web (WWW) son dos de los ejemplos más conocidos de redes sociales.



Figura 1.2: Una red compleja

En cuanto a su composición existen distintos tipo de redes: redes conexas, redes bipartitas, redes k -regulares (el número de vecinos de cada nodo es k), redes completas, *etc.* En la Figura 1.3 podemos observar dos redes 3-regulares.

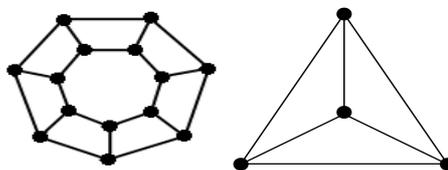


Figura 1.3: Redes 3-regulares

Recientemente se ha despertado un enorme interés en las llamadas redes complejas que poseen la propiedad de *mundo pequeño*; es decir, el número mas grande de enlaces o bandas l que uno debe recorrer para conectar dos sitios dentro de la red (la distancia mas grande entre cualesquiera dos nodos, ó $l = \text{diam}(R)$) crece como logaritmo del número total de sitios N en la red, es decir $l \propto \ln(N)$ ó $N \propto e^l$,

en contraste con el caso de redes regulares (Figura 1.3), donde $l \propto N$. Una red de pequeño mundo la observamos en Figura 1.4.

El diámetro dentro de las redes de mundo pequeño presenta un crecimiento lento con respecto al tamaño de la red, en otras palabras muchos nodos de la red no son vecinos unos de otros pero entre cualesquiera dos nodos existe un camino muy corto para llegar de uno al otro.

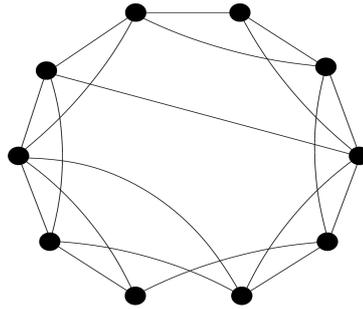


Figura 1.4: Una red de mundo pequeño

Otro tipo de redes comunmente encontradas en la naturaleza son las redes *libres de escala*. Si definimos $p(k)$ como el número esperado de nodos con grado k , algunas redes poseen distribuciones que decaen como leyes de potencias $p(k) \propto k^{-\alpha}$. Las redes que presentan esta distribución han sido denominadas redes libres de escala por su analogía con los fractales, para los cuales no podemos definir una escala característica.

Algunas de las propiedades que presentan las redes libres de escala son:

- Son robustas ante la eliminación de nodos. Esto es, la red tiende a estar conectada después de haber eliminado nodos aleatoriamente.
- Sin embargo, son más vulnerables (se rompe su conexión) a ataques eliminando nodos de acuerdo a su grado.
- La longitud promedio de caminos es pequeña.

Las redes de pequeño mundo no son auto-similares bajo la transformación de escalamiento basada en la longitud de la red (l). Sin embargo, el análisis de una gran variedad de redes complejas confirma que son auto-similares en toda escala de longitud, conclusión que se deriva de medir una relación de potencia entre el número de cajas necesarias para cubrir la red y el tamaño de las cajas usadas, esto último llamado *escalamiento fractal*.

A lo largo de este trabajo, las redes utilizadas son del tipo *enrejados* ó *lattices* de \mathbb{Z}^m , los cuales son una clase de redes referidas como aquellas redes que tienen como nodos al conjunto \mathbb{Z}^m , y cualesquiera dos nodos son adyacentes si están a distancia

uno. Para el caso de redes planas, el conjunto de nodos es \mathbb{Z}^2 . Si restringimos nuestro estudio a un enrejado rectangular con s nodos de ancho y t nodos de alto, entonces podemos representar nuestras redes como el producto cartesiano $\mathcal{R} = P_s \times P_t$ de dos caminos con número de nodos s y t respectivamente. Cuando identificamos los lados opuestos de una red plana, obtenemos una red toroidal, que podemos representar como el producto cartesiano de dos ciclos $\mathcal{R} = C_n \times C_m$.

1.4.1. Redes sociales

Muchas redes de mundo pequeño son también redes "libres de la escala", estas últimas se caracterizan por un escaso número de nodos con muchos enlaces (concentradores) y una enorme cantidad de nodos con muy pocas conexiones. Este tipo de estructura explica por qué algunas redes son generalmente muy estables y robustas (frente a posibles errores aleatorios), pero muy propensas a ocasionales colapsos catastróficos (por posibles ataques maliciosos). En efecto, si se elimina una gran fracción de nodos al azar, la red aun es capaz de funcionar con normalidad; pero si se quita alguno de los concentradores, el sistema puede sufrir una hecatombe. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando desaparece el líder de un partido político. Esta topología también es capaz de explicar la gran capacidad de crecimiento de estas redes sociales y por qué algo insignificante puede transformarse en un fenómeno de colosales proporciones si encuentra el camino adecuado.

Se especula que los sistemas naturales evolucionan hacia redes de mundo pequeño, porque tienen una elevada tolerancia a las fallas (la conexión de cualquier pareja de nodos puede establecerse a través de varios caminos alternativos), y hacia redes independientes de la escala, porque utiliza más eficientemente los recursos que las redes aleatorias (resuelve adecuadamente el conflicto entre las necesidades de bajo costo y alto rendimiento).

1.5. Algunos modelos para sistemas sociales

Las *leyes de potencia* son un tipo de relaciones matemáticas entre dos cantidades, en estadística si estas dos cantidades son una variable aleatoria y su frecuencia, en una distribución de leyes de potencia las frecuencias disminuyen según un exponente cuando la variable aleatoria aumenta. Una relación de potencias entre x y y se suele representar como $y(x) = ax^k$ donde a, k son dos constantes. Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación anterior tenemos $\log(y) = k\log(x) + a$ lo cual quiere decir que la ley de potencias entre x y y puede interpretarse como una línea recta en una gráfica doblemente logarítmica.

El principal interés en las leyes de potencia es su invariancia de escala. Esto es, si $s(x) = ax^k$ entonces $s(cx) = a(cx)^k = c^k s(x)$ y también $s(cx) \propto s(x)$. También quiere decir que las funciones de leyes de potencia quedan determinadas por el exponente k , formando así una clase de equivalencia.

Muchas distribuciones empíricas encontradas en sistemas económicos, sociales y otros campos de investigación muestran un comportamiento de ley de potencia. Las distribuciones de ley de potencia no varían ante un cambio en la escala de tiempo, o sea que la probabilidad relativa para observar un evento de cierto tamaño y un evento diez veces más grande es independiente de la escala de referencia.

Varios fenómenos con invarianza de escala aparecen en los sistemas sociales; por ejemplo, en las morfologías fractales de las ciudades, en la dinámica fractal de la actividad económica, en la dinámica compleja de las opiniones asociadas con la propagación de rumores y en las preferencias electorales.

Un aspecto importante para entender la emergencia de un consenso o polarización social es la red de interacciones sociales que da soporte y determina las interacciones entre individuos que participan del fenómeno colectivo. Estos estudios tienen por objeto el estudio de estructuras sociales: de las relaciones de amistad, de rumores, culturas, enfermedades, comunicación electrónica, crisis financieras, apagones eléctricos, aeropuertos colapsados, organización empresarial o terrorista, colaboraciones científicas, relaciones sexuales, votos en urnas electorales, *etc.* En la actual “era conectada”, vivimos inmersos en redes de todo tipo que conectan objetos en formas diversas y que condicionan y determinan cómo opera el conjunto de esos objetos. Un estudio mas amplio sobre redes complejas se encuentra en [6].

1.6. Modelos clásicos

1.6.1. El modelo del votante

El *modelo de votante* es un modelo de interacción de partículas. Es un modelo ampliamente estudiado, que cuenta con soluciones analíticas para enrejados, el cual describe como el consenso emerge dentro de individuos sin una decisión fija. Los nodos de una red son indentificados con los votantes, y cada votante x tiene una opinión $s(x)$, que en el caso mas simple es afirmativa o negativa (Demócratas o Republicanos) representados por $+1$ ó -1 .

La dinámica del modelo de voto selecciona un votante x aleatoriamente y este adopta la opinión $s(y)$ de alguno de sus vecinos, seleccionado aleatoriamente. Un votante sin confianza en si mismo mira a su vecindad y elige la opinión de alguno de sus vecinos. Repetimos la regla de actualización tantas veces como se requiera o hasta alcanzar el consenso. Notese que el votante x solo cambia de opinión cuando su vecino tiene opinión opuesta. En el modelo del votante la opinión fluye de afuera hacia dentro, en el sentido que el votante obtiene su opinión de uno de sus vecinos, o de la mayoría con común opinión, lo cual permite considerar a los individuos que acepta la opinión de la mayoría en su exterior como oportunistas.

Si tenemos instalado NetLogo dentro de nuestro sistema operativo, basta con revisar su biblioteca de modelos y observar la dinámica del modelo del votante. Tambien es posible revisar el moedlo “en línea”, para esto ver el sitio web [40].

1.6.2. Modelos basados en la regla de la mayoría

La RM es un tipo de regla de decisión que permite establecer democráticamente la opinión dentro de un grupo, es ampliamente utilizada en organismos democráticos. Es amplia las referencias a estudios que utilizan la RM, como son modelos en la dinámica de la opinión pasando a cualidades intrínsecas de la RM como el teorema de May en el ámbito social y político. Básicamente la RM admite dos modalidades.

Mayoría absoluta Requiere que la opción ganadora haya obtenido mas de la mitad del total.

Mayoría relativa La opción ganadora es la más numerosa entre todas las opciones, quizá si sumamos las demas opciones superen a la opción ganadora.

El empleo de la RM, lo podemos resumir en los siguientes pasos.

- Seleccionar un conjunto G de nodos ó *grupo de discusión* cuya cardinalidad sea impar.
- Todas las opiniones de los individuos dentro del grupo de discusión G adoptan el estado de la mayoría (aboluta ó relativa) dentro del grupo G .

La *vecindad* de un nodo v es el conjunto de sus nodos vecinos, y la denotamos por $N(v)$, mientras que la *vecindad cerrada* $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. En la Figura 1.5 podemos observar el empleo de la RM para una red regular con $G = N[v]$ para algún nodo v de R .

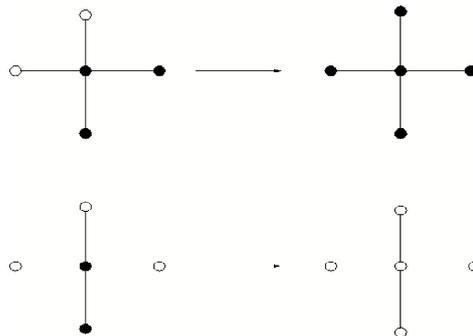


Figura 1.5: La regla de la mayoría

Nótese que si sólo se contemplan dos opiniones, la reglas de la mayoría absoluta y relativa coinciden, pero en el caso que se considere mas de dos opiniones, no necesariamente se mantiene. Para la dinámica del sistema repetimos la RM hasta alcanzar un estado final o un consenso. Dentro de la evolución del sistema se distinguen principalmente dos estados: consenso, y franja (engrosamiento con cinética lenta).

A pesar que los modelos basados en la RM ignoran aspectos de la formación de opinión, tales como aspectos psicológicos, genera modelos simples con comportamientos interesantes por su simplicidad y rapidez de aplicación. Algunas cuestiones que se busca responder en este tipo de modelos son

- ¿Cual es el tiempo necesario (en número de actualizaciones) para alcanzar el estado de censo como función de N y de las distribuciones iniciales de las opiniones?
- ¿Cual es la probabilidad de alcanzar un estado final como función de las distribuciones iniciales de opiniones?

Los modelos cuya dinámica se basa en la RM exhiben el mismo grado de simplicidad similar al modelo del votante, solo que con un comportamiento sustancialmente diferente [35]. A lo largo de este trabajo usaremos la RM principalmente sobre grupos de discusión G con $G = N[v]$ y con $|G| = 5$ sobre enrejados, a $N(v)$ en el ámbito de autómatas celulares se le conoce *vecindad de Von-Neumann*, y con $|N(v)| = 8$ como *vecindad de Moore* del nodo v .

1.6.3. El modelo de Ising

El *modelo de Ising* es uno de los principales modelos de interacción de partículas. Es un modelo que exhibe transiciones ferromagnéticas. En el modelo de Ising las partículas corresponden a nodos de un enrejado d -dimensional las cuales adoptan el estado (spin) s_i con $s_i = \pm 1$. Las parejas de nodos vecinos mantienen una interacción ferromagnética que favorece su alineación. En un material ferromagnético como el hierro, el estado estable o de equilibrio es aquel en que todas las partículas apuntan a una misma dirección, mientras que algunos materiales magnéticos las interacciones son tales que partículas vecinas prefieren no alinear sus spines (antiferromagnetos).

En el contexto social, el enrejado \mathcal{R} simboliza una sociedad dónde a cada individuo i tiene asociado una opinión spin $s_i = \pm 1$. Una asignación de spines a todos los individuos de \mathcal{R} es un estado S dentro de la sociedad, cada pareja $\langle i, j \rangle$ de vecinos mas cercanos en \mathcal{R} produce una energía $-Js_i s_j$, dónde J es una constante de proporcionalidad. La *energía total*¹ E dentro de \mathcal{R} es la suma de todas las energías por parejas, sumada sobre todas las posibles parejas vecinas en \mathcal{R} , es decir, el Hamiltoniano del sistema en el estado S es

$$H(S) = -J \sum_{\langle i, h \rangle} s_i s_j \quad (1.6.1)$$

Cada pareja de nodos con mismo spin aporta $-J$ a la energía del sistema, y $+J$ si tienen distinto spin. La probabilidad de encontrar al sistema en un estado

¹La energía total es una medida de "infelicidad" dentro de la sociedad, es decir que tan heterogéneo es el sistema.

S con energía E es $e^{\frac{E}{k}T}$ (distribución de Boltzmann). La principal característica del modelo de Ising es que el ferromagnetismo aparece en ausencia de un campo externo cuando la temperatura es menor que una cierta temperatura crítica T^* (Temperatura de Curie) para $d > 1$. Algunas de las propiedades del modelo de Ising dependen de la naturaleza de su dinámica. Por ejemplo, los spins pueden cambiar uno a la vez o en bloques, y las dinámicas pueden o no conservar la magnetización. En la dinámica de Glauber, se selecciona un nodo de forma aleatoria y este nodo modificara su spin conforme al incremento de energía en el sistema, es decir el nodo seleccionado cambiará de spin si y solo si al generar un número aleatorio entre 0 y 1, este es menor a $e^{\frac{\Delta E}{k}T}/(1 + e^{\frac{\Delta E}{k}T})$ (función de aceptación de Glauber).

Es bien sabido que la temperatura afecta las propiedades magnéticas del material, a mayor temperatura menor magnetismo. En un contexto social, la temperatura T es una aproximación global para eventos aleatorios que tienen influencia en las decisiones pero que no estan incluidos dentro del modelo. Más aun, T no solo toma en cuenta los posibles eventos raros no contemplados dentro del modelo, también es una medida de tolerancia, entre mas grande sea T los individuos tienen mas disposición a vivir dentro de vecindades con spines distintos.

En un contexto político el efecto de un campo magnético externo se compara con el efecto producido por los medios masivos de propaganda, o la influencia que gobierno electo tiene sobre el electorado.

El modelo de Ising podria representar dos opiniones en una sociedad, donde algunos tratan de convencer a sus vecinos de su propia opinión (aportando J a la energía del sistema), y además el gobierno trata de convencer a toda la sociedad con su propia opinión. Entonces la temperatura promueve la tendencia de que los individuos no opinen como la mayoría de sus vecinos ó el gobierno [30].

A temperatura cero significa completa conformidad y una temperatura infinita significa opiniones completamente aleatorias [30].

De entre las dinámicas estudiadas en el modelo de Ising destacan las dinámicas tipo Glauber, Metropolis, o Kawasaki. En las dinámicas tipo Glauber y Metropolis los cambios se efectuan sobre un spin, y despues de un tiempo (medido en número de barridos en la red) una de las dos opiniones domina, si T no es mas grande que una temperatura crítica T^* , en cambio, en la dinámica tipo Kawasaki se analiza el cambio de spin entre parejas con spines opuestos, formandose dominios de opiniones opuestas [31].

De acuerdo con [32], la opinión esta influenciada por relaciones psicológicas que algunas ocaciones deja de lado los hechos que estan en debate, o como si algunos manejadores ejercieran suficiente presión sobre la opinión, esto ocasiona que la opinión alterne entre polos opuestos, algo muy similar a lo que ocurre en el modelo de Ising.

Si se desea refivisar algunas simulaciones del modelo de Ising, revisar al sitio web en [39].

1.6.4. El modelo de Sznajd

El *modelo Sznajd* es un modelo de la sociofísica de interacciones humanas, modela la formación de opinión dentro de una sociedad. La opinión general de los individuos dentro de una sociedad es determinada observando como cada individuo forma su opinión. La diferencia principal entre el modelo de Sznajd y los modelos del votante o de Ising, radica en la forma en que influyen los grupos de discusión, en el caso del modelo del votante un individuo se ve afectado por la opinión de sus vecinos más cercanos, la opinión se ve reflejada dentro del grupo, en contraste con el modelo del votante, en el modelo de Sznajd es el individuo o uniones de individuos quienes influyen en la opinión de sus vecinos.

Suponemos que cada individuo tiene que decidir entre dos opiniones: $+1$ ó -1 . Además suponemos que la sociedad en cuestión es una sociedad cerrada, lo cual quiere decir que desde el inicio y hasta el fin de las elecciones, no hay inclusión o exclusión en el electorado, esto es, mantenemos el mismo número de votantes durante las elecciones. En el modelo de Sznajd con dos opiniones el consenso es su estado final.

Asignamos a cada individuo i el spin $s_i = \pm 1$, en el caso unidimensional los nodos están ordenados en un camino infinito. La opinión general m en el modelo de Sznajd se define como $m = \frac{1}{N} \sum_i s_i$, donde N es el número de personas que conforman la sociedad (tamaño de red). La dinámica del modelo de Sznajd unidimensional la podemos resumir en las siguientes reglas:

- En cada paso, escogemos aleatoriamente un par de spines s_i, s_{i+1} , los cuales referimos como un lazo, estos spines interactúan con sus vecinos más cercanos s_{i-1} y s_{i+2} .
- Si $s_i = s_{i+1}$ entonces $s_{i-1} = s_i$ y $s_{i+2} = s_i$
- Si $s_i = -s_{i+1}$ entonces $s_{i-1} = s_{i+1}$ y $s_{i+2} = s_i$

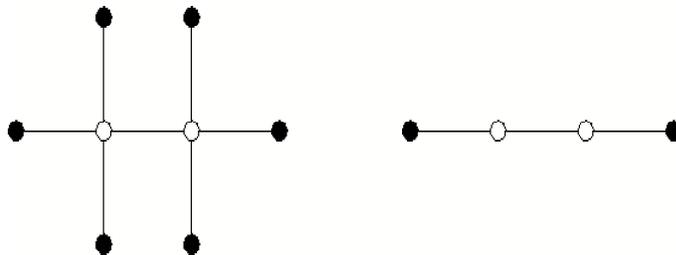


Figura 1.6: Lazos en el modelo de Sznajd (nodos blancos)

De esta forma el lazo s_i, s_{i+1} influye en la decisión de sus vecinos. Si el lazo tiene el mismo valor, entonces sus vecinos tendrán ese mismo valor, de lo contrario tendrán diferentes valores, y formarán una secuencia alternante de cuatro spines.

Este es el conocido principio “Unidos somos mas fuertes que divididos” conocido tambien como *validación social*, que fundamentalmente dice que la forma en que decidimos que hacer en una determinada situación es mirar lo que otros hacen. Dentro de una familia los padres con la misma opinión tendran mas posibilidad de convencer a sus hijos que solo uno de ellos. El modelo de Sznajd es un tipo de modelo llamado de ”misionarios“. Los estados finales en el modelo de Sznajd son consenso (estado ferromagnético) o estancamiento (estado antiferromagnético).

En el caso dos dimensional, dos vecinos con la misma opinión convencen a sus seis vecinos dentro del enrejado, en caso contrario no convencen a ninguno de sus vecinos, en general un grupo G de vecinos de preferencia conectados dentro de la red, convence a $N(G)$. Una generalización natural dentro del modelo de Sznajd es considerar q opiniones o variar la forma en que misionarios influyen a su vecindad, en [29] y sus referencias menciona algunas modificaciones. Los gobiernos y partidos políticos usualmente pierden soporte si las diferencias en su opinión interna se hace pública. De entra las aplicaciones del modelod de Sznajd destacan las simulaciones realizadas en para predecir las elecciones de Brasil citadas en [29]. Si al usar el modelo de Sznajd en lugar de usar un enrejado consideramos una red libre de escala (por ejemplo redes Barabási-Albert) con mas de dos opiniones se obtienen obtienen resultados los cuales tras ser escalados por factores adecuados se muestran mas reales y confiables [31, 29].

1.6.5. El modelo de Galam sobre estructuras jerárquicas

El *modelo de Galam* introducido en [17] es una modelo sobre la formación de estructuras jerárquicas y el ascenso al poder en una sociedad por medio de la RM. El modelo de Galam busca encontrar condiciones iniciales que le garanticen a cierto partido el ascenso al poder. En su evolución el modelo de Galam produce puntos críticos, y muestra como una regla democrática como lo es la RM puede llevar al totalitarismo, algo conocido consecuencia del teorema de imposibilidad de Arrow.

Supongamos que dentro de una sociedad tenemos dos tipos de individuos, los cuales se distinguen por tener opiniones $+1$ y -1 , y tienen un porcentaje total dentro de la sociedad de p_0 y $1 - p_0$ respectivamente. Supongamos tambien que la población esta constituida por grupos G de tamaño finito $|G| = r$ (un hogar o un lugar de trabajo), los cuales pueden formarse aleatoriamente, formando asi el nivel 0 de la jerarquía.

Para cada grupo G se elije un representante de acuerdo a la RM, por ejemplo para $r = 3$ un representante del partido -1 se elige siempre que el grupo contenga tres -1 o dos -1 . En caso de haber empates se mantienen sin cambio. Cada representante electo en el nivel 0 constituye una nueva sociedad. En el nivel uno podemos encontrar un representate del $+1$ con probabilidad $p_1 = R_3(p_0) = p_0^3 + 3p_0^2(1 - p_0)$ o a un representate del tipo -1 con probabilidad $1 - p_1$.

Sobre los representantes en nivel $n - 1$ se forman nuevamente los nuevos grupos (con tamaño r) los cuales formaran a sus representantes siguiendo la misma regla

de votación, de esta forma en el nivel jerárquico n tiene la función de votación:

$$p_n = R_r(p_{n-1})$$

Para las situaciones que consideran la formación de grupos con $r > 3$ debido a que la función de votación $R_r(p_{n-1})$ sigue la RM, se expresa como

$$R_r(p_{n-1}) = \sum_{k=r}^m \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

con $m = \frac{r+1}{2}$. Repitiendo este proceso en cierto nivel jerárquico n se tiene un solo grupo, el cual eventualmente elige su presidente. Del análisis de $R_3(p_n)$ se observa que si $p_0 < 1/2$ la dinámica de la votación no permite que el partido +1 resulte electo, si $p > 1/2$ el partido +1 resultara electo. Con base a estos análisis se determina (para ciertos valores de r) el número de niveles de votación que son necesarios para eliminar a un cierto partido.

1.6.6. El modelo de Axelrod sobre difusión y emergencia de cultura

Muchas sociedades muestran un alto grado de fragmentación cultural. A pesar de que los individuos que la integran tratan de formar acuerdos con sus conocidos. En el *modelo de Axelrod* sobre emergencia de cultura esta presente esta dicotomía. Establece que poblaciones de individuos con más similitudes culturales tienen más posibilidades de interactuar. El mecanismo mediante el cual las personas se vuelven más semejantes culturalmente es la interacción social, o influencia. El modelo de Axelrod exhibe una transición de fase en su estado final, por un lado es posible que se presente un consenso, y por otro puede presentarse fracturación cultural o segregación.

En [1] se propone un modelo de difusión de cultura. El modelo asume que la cultura de un individuo puede ser descrita en términos de sus atributos, como el lenguaje, religión, tecnología, vestido, *etc.* Describe a la cultura como una lista de características o atributos, llamadas también dimensiones de la cultura, y cada característica tiene asignada un conjunto de rasgos, los cuales son valores alternativos que una cierta característica de cultura puede tener.

Si por ejemplo, describimos una cultura por medio de cinco atributos y cada atributo por medio de a lo más 10 rasgos. Entonces el concepto cultura puede ser descrita por medio de 5 números 8, 7, 2, 5, 4. De esta forma, dos individuos tienen la misma cultura si tienen exactamente los mismos rasgos para cada uno de los cinco atributos de su cultura, y se define el grado de similitud cultural entre dos individuos como el porcentaje de sus atributos que tienen rasgos idénticos.

Los actores básicos dentro del modelo de Axelrod son los individuos. El modelo incluye una distribución de individuos sobre una geografía determinada, por ejem-

plo una red tipo enrejado, visto de esa forma los individuos pueden representar ciudades, estados.

Como es de esperar, muchos de los sitios no comparten mas de una característica con sus vecinos. El proceso de influencia social puede ser descrito como una serie de eventos, que para efectos de la dinámica se usa el método Monte Carlo y se repiten cierto número de veces. La idea básica es que agentes que son similares uno con otro con mas probables de interactuar y entonces llegar a ser mas similares. Se implementa el modelo de Axelrod suponiendo que la posibilidad de interacción es proporcional a la similitud cultural entre dos individuos, esto se puede parafrasear diciendo “Con probabilidad igual a su similitud cultural, un nodo seleccionado aleatoriamente adoptará una de las características culturales de uno de sus vecinos tambien elegido aleatoriamente”

La dinámica para el modelo de Axelrod la podemos resumir en las siguientes reglas.

- Seleccionar un sitio aleatoriamente y marcarlo como “activo”, y seleccionar aleatoriamente uno de sus vecinos.
- Con probabilidad igual a su similitud cultural, esos dos sitios interactúan. Una interacción consiste en seleccionar aleatoriamente un atributo para el agente activo y su nodo en el cual difieren y a continuación cambiar el rasgo de este atributo del agente activo por el rasgo correspondiente de su vecino.

O mediante símbolos, el modelo consiste en seleccionar aleatoriamente un sitio s y uno de sus vecinos n y un atributo (característica de cultura) f . Sea $G(s, n)$ el conjunto de atributos, g , tal que los rasgos culturales son distintos, esto es $c(s, g) \neq c(n, g)$. Si $c(s, f) = c(n, f)$ y $G \neq$ entonces elegir un atributo aleatorio, g , en $G(s, g)$ y asignar a $c(s, g)$ el valor $c(n, g)$.

En el modelo de Axelrod [1], podemos observar que la probabilidad de que un cierto atributo f , tenga el mismo rasgo para dos sitios es igual a la similitud cultural entre esos sitios. Otros aspectos relevantes que presenta el modelo de Axelrod, estan la formación de regiones culturales (un conjunto de sitios con culturas idénticas) bajo el efecto de la dimensionalidad de la cultura, otros en terminos del número de vecinos.

En la complejidad de un sistema cultural, se debe distinguir entre el número de diferentes características que la distinguen y el número de rasgos que cada característica toma, esto con el fin de estudiar el número de regiones estables al final de la dinámica, que a su vez se consideran una medida de heterogeneidad [1]. Los estudios de R. Axelrod son una referencia necesaria dentro de los modelos sociales, ya que otorgan evidencias y justificación sobre que tan adecuados y exactos pueden ser los resultados al ponerlos a prueba bajo situaciones reales. Por ejemplo el modelo de formación de alianzas comentado en la Sección 1.3 fue aplicado bajo el escenario mundial previo a la segunda guerra mundial, con resultados muy parecidos a la historia [42, 4]. Para revisar el modelo de Axelrod en acción, visitar el sitio web en [42].

1.6.7. El modelo de Erdős-Rényi

El estudio de las redes aleatorias tienen sus inicios en 1959 dentro de los trabajos de P. Erdős y A. Rényi, quienes propusieron un modelo actualmente conocido como el modelo de Erdős-Rényi. Escencialmente es un modelo para generar redes aleatorias. Denotemos por $G(n, p)$ a la *red aleatoria* con n nodos construida agragando m aristas aleatoriamente de entre las $\binom{n}{2}$ posibles y de forma independiente. En total hay $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ redes de orden n y tamaño m .

Una definición equivalente es el modelo binomial, cada arista entre cualesquiera dos nodos es incluido con probabilidad p independiente de otras aristas, es decir, suponemos que para efecto de incluir o no una determinada arista tenemos a nuestra disposición una moneda con parcialidad p , esto define el espacio muestral de $G(n, p)$ como $Bin(n, p)$. Además, el número esperado de aristas es $\mathbb{E}(m) = \binom{n}{2}p$. Si G_0 es una red con n nodos y m aristas, la probabilidad de obtenerla por medio de este proceso es $P(G_0) = p^m(1 - p)^{\binom{n}{2} - m}$ [6].

Algunas de las propiedades observadas en las redes del modelo de Erdős-Rényi:

- Tiene un bajo coeficiente de agrupamiento.
- Su distribución de grados converge a una distribución del tipo Poisson, a diferencia de las redes mundo pequeño para las cuales su secuencia de grados en redes de la cual converge a una distribución del tipo ley de potencias.

Si bien las características de algunas redes encontradas en el la vida real y la naturaleza difieren de las redes construidas por el modelo de Erdős-Rényi, estas últimas pueden ser utilizadas como punto de referencia para modelación y estudios empíricos [6].

1.6.8. El modelo de Watts-Strogatz

Las redes de pequeño mundo fueron popularizadas por Watts y Strogatz en 1998 al introducir un modelo que interpola entre redes aleatorias y las redes regulares ya que permite crear redes pequeño mundo a partir de redes regulares como los enrejados.

Los orígenes del *modelo de Watts-Strogatz* se encuentran en los sistemas sociales, en los cuales los individuos tienen amigos entre los amigos de sus vecinos inmediatos, por ejemplo vecinos en la misma calle, colegas, gente que los presenta unos a otros. Aun mas, cada quien tiene algún amigo el cual vive en algún lugar lejano, amigos en paises distantes, viejos conocidos.

Supongamos que en cierta red, cada individuo conoce al menos a 100 personas distintas, entonces cada uno de los vecinos conoce tambien a al menos 100 personas entonces en dos pasos cubrimos 100^2 personas de entre la red, y asi sucesivamente en j pasos podremos llegar a 100^j personas. Con $j = 5$ alcanzariamos 10 billones de personas.

Algo que sucede comúnmente en redes sociales es que dado un individuo sus vecinos se conocen mutuamente, abundan triadas, esto es conjuntos de tres que se conocen mutuamente y forman triángulos (ciclos de longitud tres). En consecuencia, muchas de las aristas de los conocidos de un individuo no salen al resto de la red, y el número 100^2 de conocidos que puedes alcanzar en dos pasos es mucho menor. Entonces el efecto de las triadas en redes sociales limita el número de personas que se pueden alcanzar por caminos cortos. En efecto, esto último es la parte que causa sorpresa cuando escuchamos sobre los seis grados y las redes de pequeño mundo.

Desde una perspectiva local, cada nodo en una red social aparece altamente agrupado. Definimos a continuación el concepto de agrupamiento en redes. Para cualquier nodo v en una red \mathcal{R} no dirigida, sea $N(v)$ la vecindad abierta de v , y $d(v) = |N(v)|$ el grado de v dentro de la red. El coeficiente de agrupamiento C_v para v es la proporción entre los enlaces existentes entre los vecinos de v y los enlaces posibles entre ellos (el número de enlaces del clique). Formalmente tenemos,

$$C_v = \frac{|e_{ij}|}{\binom{d(v)}{2}} = \frac{2|e_{ij}|}{d(v)((d(v) - 1))}, \quad v_i, v_j \in N_v, \quad e_{ij} \in E(R)$$

Por lo tanto el coeficiente de agrupación de la red \mathcal{R} es

$$C(R) = \frac{\sum_{v \in V(R)} C_v}{|V(R)|}$$

En seguida, imaginemos que nuestra red esta formada a partir de un enrejado de $n \times n$ y cada nodo conoce a nodos que estan a un radio de r pasos en el enrejado, esta sería la parte de la gente que un individuo conoce por el simple hecho de vivir cerca de ella. Además supongamos que para cada entero positivo k , cada individuo conoce a otras k personas en la red seleccionadas aleatoriamente de manera uniforme en el enrejado, esta es la clase de personas distantes que cada individuo llega a conocer.

Lo anterior proporciona una red dirigida $R = WS(n, r, k)$ donde cada nodo tiene aproximadamente $r^2 + k$ enlaces salientes. La red $WS(n, r, k)$ presenta las características requeridas, que son: un índice de agrupamiento $C(WS)$ (el cual viene dado por la regularidad de la red) alto y distancias muy cortas entre parejas de nodos (lo cual se da por haber agregado nodos aleatoriamente).

Podemos resumir que, en la construcción de una red \mathcal{R} mediante el modelo de Watts-Strogatz sobresalen dos pasos: El primero es empezar con una red regular como un enrejado o un ciclo en donde cada nodo es adyacente a A nodos ($A/2$ nodos de cada lado) con $\ln(n) \ll A \ll n$, y el segundo “aleatorizar” recableando una arista con probabilidad p . En [43] se encuentra un modelo para crear redes de pequeño mundo.

De esta manera, en el modelo de Watts-Strogatz el fenómeno de “mundo pequeño” se presenta como una mezcla de dos propiedades: una estructural y otra

aleatoria. Es un modelo muy útil para explicar el fenómeno de “mundo pequeño” en una gran variedad de redes como son redes neuronales y redes de actores de películas, o redes sociales.

1.6.9. El modelo de Barabási-Albert

Como mencionamos en la Sección 1.4, las redes libres de escala son redes que se caracterizan principalmente porque que su distribución de probabilidad para el grado de cada nodo no tiene un valor típico bien definido (una “escala” característica), por lo contrario se extiende hasta valores muy grandes del número de enlaces. Siendo mas específico, la probabilidad de que un nodo de la red tenga k enlaces es inversamente proporcional a la potencia k^γ , con γ un exponente característico de la red, lo que indica que hay un número pequeño de nodos que tiene un número de enlaces muy alto (concentradores). Es decir, hay individuos muy bien conectados socialmente y cabe preguntarse por el efecto de esos nodos con muchos enlaces en la dinámica colectiva del sistema.

Esto es diferente a lo que sucede en las redes de pequeño mundo para las que la misma distribución de probabilidad tiene forma exponencial $\exp^{-\frac{k}{\gamma}}$, con γ precisamente la escala característica de la que carecen las redes libres de escala y donde no pueden identificarse agentes sensiblemente mejor conectados que la media.

El *modelo de Barabási-Albert* es un tipo de modelo representativo dentro del género de modelos que generan redes complejas denominadas “libres de escala”. Redes de este tipo son muy frecuentes en los sistemas elaborados por el ser humano y por la naturaleza, además proporcionan un modelo un tanto mas realista para las interacciones sociales.

En el modelo de Barabási-Albert, se construye una red a partir de una red iniciar \mathcal{R} con $n \geq 2$ nodos dónde cada nodo tiene almenos un vecino, agregamos nuevo nodos a la red, uno a la vez, y cada nuevo nodo agregado se conecta con s nodos existentes con una probabilidad que es proporcional al número de enlaces que los nodos existentes tienen, es decir, la probabilidad p_{uv} de que el nuevo nodo u este conectado con el nodo v es

$$p_{uv} = \frac{d(v)}{\sum_{w \neq u, w \in V(\mathcal{R})} d(w)}$$

En la construcción de una red del modelo de Barabási-Albert los nodos con grados altos tienen mas preferencia de ser conectados con nodos nuevos, este fenómeno es conocido como adhesión preferencial, dónde “el rico se vuelve mas rico”. La distribución de grados en el modelo de Barabási-Albert sigue una ley de potencias; en particular tenemos que

$$P(k) \sim k^{-3}$$

También, como cada nuevo nodo se conecta con s nodos, cualquier subred de una red en el modelo de Barabási-Albert tiene grado a lo mas s , en este sentido se dice que la red resultante es s -degenerada.

Como ejemplo tenemos las redes de la Figura 1.7, las cuales fueron generadas siguiendo el procedimiento de Barabási-Albert.

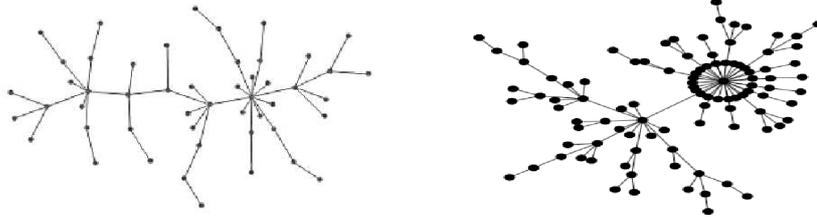


Figura 1.7: Redes generadas mediante el modelo de Barabási-Albert

El sitio web en [44] se encuentra un modelo para crear redes libres de escala siguiendo el modelo de Barabási-Albert.

1.6.10. El modelo de segregación de Schelling

Hace muchos años el filósofo griego Empédocles (495/490 – 435/430 a.c.) dijo: “Los hombres son como líquidos: Algunos como el vino y el agua se mezclan fácilmente, otros como el aceite y el agua no”. El economista T. Schelling se preguntó si la segregación racial en America podría emerger del comportamiento intrínseco de los individuos, en lugar de causas extrínsecas como la discriminación.

El *modelo de Schelling* parte del modelo de Ising, pero evitando ciertas reglas probabilistas, considera los estados $s_i = \pm 1$ con temperatura cero. Sin importar si todos los vecinos de un individuo o una mayoría pertenecen al mismo grupo.

Supongamos que tenemos solo dos tipos de individuos en nuestra red (enrejado): usuarios de sistemas Windows y usuarios Berkley Software Distribution (BSD), o usuarios árabo parlantes y usuarios ingles parlantes, o individuos bien vestidos o pobremente vestidos, o cualquier dicotomía exhaustiva y a su vez identificable.

Supongamos que repartimos aleatoriamente $|A|$ individuos del tipo 1 y $|B|$ individuos y el resto $N^2 - |A| - |B|$ nodos vacantes, considerando la 4-vecindad que cada agente A ó B tiene 8 vecinos. Fijamos un índice $T \in 1, \dots, 8$ decimos que el agente X es feliz si hay T o mas de sus vecinos son de su mismo tipo, en otro caso decimos que es infeliz.

Dinámica del Modelo Dada la configuración inicial, seleccionamos aleatoriamente un agente infeliz X del tipo 1, y un agente vacante dodeado de almenos T vecinos en su 8 vecindad del mismo tipo que X , suponiendo que esto es posible, intercambiamos los roles del individuo infeliz por el vacante a fin de que el nodo X se vuelva feliz, en seguida seleccionamos un agente infeliz Y de tipo 2 y un nodo

vacante que contenga al menos T nodos del tipo 2 en su 8-vecindad (suponiendo esto es posible) en intercambiamos sus roles, volviendo a Y feliz.

Repetimos esta dinámica hasta alcanzar un estado final, dentro del cual, ningún intercambio es posible para alcanzar la felicidad. Notese que el esquema de selección utilizado es secuencial con alternaciones de agentes de tipo 1 y tipo 2, pero para fines de rapidez computacional lo podemos cambiar por un esquema de selección aleatorio sin que se alteren los resultados significativamente.

Schelling inicialmente considero una ciudad de tamaño $N = 8$ y un umbral de comodidad de $T = 3$ con un radio de ocupación $v = 33\%$. Observo también que para $T = 3, 4$ y $v = 0$ el estado final del modelo es un tablero de damas o de ajedrez.

Observaciones y resultados de Schelling Schelling realizo varias simulaciones de su modelo en ciudades pequeñas ($N = 8$) y observo que los estados finales presentan un alto grado de agregación global (relación de las fuerzas de unión de los nodos), comparo la agregación global con la segregación de una ciudad.

En [28], estudian los comportamientos de distintas medidas de agregación y su dependencia con los tamaños de las ciudades, la función de comodidad, y la densidad de población, introduciendo medidas de agregación nuevas y algoritmos para simular el modelo de Schelling en ciudades grandes. Se encuentra que la agregación en ciudades grandes es altamente sensitiva a la función de comodidad T y el número de nodos desocupados en la red, en particular para $T = 3$ la agregación es una función creciente de v (el promedio de nodos vacantes).

La segregación social en el modelo de segregación de Schelling vista desde la perspectiva física se asemeja a la mezcla de agua con aceite y es otra mas de las analogías físico-sociales. Para observar una implementación del modelo de segregación de Schelling visitar [41].

1.7. Métodos y modelos computacionales

Desde la creación de la computadora hasta la actualidad la modelación ha sido una pieza clave para estudiar y llevar a la práctica las ideas plasmadas dentro de los modelos físicos, o matemáticos. Hoy en día es una pieza fundamental para efectuar simulaciones de sistemas con un gran número de componentes.

Los métodos cualitativos proporcionan una gran flexibilidad en términos de los tipos de problemas que pueden ser analizados con ellos. Al mismo tiempo que en ocasiones sus resultados pueden ser incompletos. Al contrario de los métodos matemáticos tienden a ser mas rigurosos y a predecir con exactitud, pero el costo de este rigor esta frecuentemente reflejado en la perdida de riqueza de lo que se esta tratando de estudiar. Los modelos de los sistemas complejos deben abrir un puente entre la riqueza del modelo y el rigor y exactitud.

1.7.1. Métodos Monte Carlo

Los *métodos Monte Carlo* se sitúan entre las técnicas numéricas y de aproximación más aplicadas en diversas áreas, como son: la en mecánica estadística, la ingeniería, *etc.* Se conocen los métodos Monte Carlo desde 1940, y rápidamente se expandieron con el auge y desarrollo de las computadoras. De entre los problemas básicos que se pueden resolver mediante métodos Monte Carlo están el cómputo de integrales definidas, sin embargo, las técnicas Monte Carlo son ampliamente usadas en otras disciplinas, por ejemplo en física y química para simular reacciones complejas.

Supongamos que tenemos un experimento con dos posibles resultados: éxito o fracaso, representados por los estados $\{0, 1\}$, ejemplo de estos experimentos los observamos por ejemplo el lanzamiento de una moneda, el tiro al blanco, supongamos que estamos jugando al tiro al blanco, y que deseamos saber la probabilidad de que en diez lanzamientos obtengamos un número impar de éxitos. Sabemos que hay una probabilidad de 0,2 de que un lanzamiento tenga éxito. Podemos dar respuesta a esta pregunta por medio del método Monte Carlo, realizando N simulaciones del experimento, en cada simulación se realizan diez lanzamientos, después de entre todas las simulaciones contamos todas aquellas que tienen un número impar de éxitos, este número de simulaciones lo dividimos entre N , de esta forma obtenemos una media, la cual (para N suficientemente grande) es una aproximación a la probabilidad buscada. La parte de simulación y generación de números aleatorios está presente al simular el experimento en una computadora, se genera un número aleatorio s en el intervalo $[0, 1]$, si pertenece al subintervalo $[0, 0,2]$ consideramos el experimento (tiro) como un “éxito”, o “fracaso” en caso contrario.

Nuestros modelos utilizan los métodos Monte Carlo de forma similar al ejemplo anterior, en lugar de un experimento tipo “tiro al blanco”, nuestros experimentos, son elegir cada uno de los N nodos dentro del enrejado, sin repetición², y aplicar a cada uno de ellos la dinámica característica del modelo, repitiendo como máximo c_{max} veces el proceso, y cada instancia del modelo se repite un número R_{max} de ocasiones.

En mecánica estadística, a menudo se requiere conocer cantidades que involucren una suma o una integral sobre el espacio de estados de un sistema. Ejemplos típicos de esto son las funciones de partición, o promedios de cantidades como la energía o la magnetización del sistema. Aún para sistemas que consisten de un número limitado de partículas, el espacio de estados puede ser muy grande, tanto que ni la computadora puede calcular esas magnitudes, en un tiempo razonable, por lo que es necesario buenos algoritmos que optimicen el tiempo de ejecución.

²Es más rápida la dinámica si se permite repetir nodos.

El algoritmo de Metropolis-Hastings

El principio fundamental dentro del método de Monte Carlo, son las cadenas de Markov. La suma sobre el espacio de estados del sistema es remplazada por una suma de una cadena de Markov sobre el espacio de estados, así en lugar de sumar todos los elementos del espacio de estados, solo sumamos una muestra aleatoria de estados seleccionados aleatoriamente dentro espacio. Con esto obtendremos un estimador de la cantidad deseada en lugar de una solución exacta [25].

Sea S el espacio de estados del sistema, dada una función de densidad objetivo $F = \sum_{i \in S} f(i)^3$ la cual se requiere aproximar mediante una cadena de Markov $X_n = (\lambda, T, N)$, donde λ es la distribución inicial, T la matriz de transición, y N el número de pasos en la cadena, se asocia a F el estimador

$$\bar{F}_{(\lambda, T, N)} = \frac{1}{N} \sum_{i \in \{X_n\}_{n=0}^{N-1}} \frac{f(i)}{\pi_i}$$

con π_i la distribución estacionaria de la cadena. La convergencia del estimador $\bar{F}_{(\lambda, T, N)}$ hacia F esta garantizada siempre y cuando la cadena sea irreducible y aperiodica. En práctica, se cuenta con una distribución π y se desea encontrar una matriz T para la cual π sea su distribución estacionaria, esto se lleva a cabo construyendo las probabilidades de transición de una matriz de propuesta P y una matriz de aceptación A . Si $X_n = j$, una propuesta se realiza siguiendo las probabilidades P_{ij} para que i sea el proximo estado en el que se encuentre la cadena, la propuesta es aceptada ($X_{n+1} = i$) con probabilidad A_{ij} , se rechaza ($X_{n+1} = j$) con probabilidad $(1 - A_{ij})$. En símbolos,

$$T_{ij} = P_{ij}A_{ij} + \delta_{ij} \sum_{k \in S} P_{kj}(1 - A_{kj})$$

La matriz de aceptación A debe satisfacer las ecuaciones de balance con respecto a π , lo cual usualmente se consigue mediante una función de aceptación, por historia se toma $f : x \rightarrow \min\{1, x\}$ (Metropolis) ó $f : x \rightarrow \frac{1}{1+x}$ (Glauber).

Algoritmo 1 METROPOLIS-HASTINGS

Require: Una cantidad a determinar de la forma $F = \sum_{i \in S} f(i)$ (función objetivo). Una distribución de probabilidad $\pi_i, i \in S$ sobre el espacio de estados S (distribución estacionaria). Una matriz estocástica simétrica P_{ij} con $i, j \in S$ (matriz de propuesta). Una función $f : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = xf(\frac{1}{x})$ para todo x (función de aceptación).

Ensure: Una cadena de Markov $X_n = (\delta, T, N)$ con un estimador F de la forma $\bar{F}_{(\pi_0, T, N)} = \frac{1}{N} \sum_{i \in \{X_n\}_{n=0}^{N-1}} \frac{f(i)}{\pi_i}$ tal que $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{F}_{(\pi_0, T, N)} = F$ casi seguramente para toda distribución inicial π_0 .

- 1: Crear la matriz $A_{ij} = f(\pi_i/\pi_j)$ con $i, j \in S$ (matriz de aceptación).
 - 2: Crear la matriz $T_{ij} = P_{ij}A_{ij} + \delta_{ij} \sum_{k \in S} P_{kj}(1 - A_{kj})$ (matriz de transición para X_n).
 - 3: Hacer $X_n = (\delta, T, N)$ para cualquier δ .
-

³En sistemas de partículas se requiere calcular cantidades como la energía, la magnetización.

1.7.2. Modelación basada en agentes

La Modelación Basada en Agentes (MBA), es una forma de modelar sistemas los cuales se componen de agentes autónomos interactuando entre si. Es una prominente alternativa fundamentalmente utiliza las computadoras para implementar los modelos. Los avances computacionales hacen posible el crecimiento de una gran variedad de aplicaciones para modelado basado en agentes. Por mencionar algunas, tenemos: modelos para la bolsa de valores y cadenas de suministro, modelos para predecir la difusión de enfermedades, modelos para el crecimiento de poblaciones, entre otros.

Un agente en MBA es un tipo de componente independiente, que se caracteriza principalmente por tener un comportamiento autónomo y tomar decisiones independientes. Las reglas de comportamiento de los agentes pueden variar desde reglas de decisión primitivas (que corresponderían a las reglas del medio ambiente en el que se encuentra) hasta reglas más complejas que permiten la adaptación.

Desde el punto de vista práctico de la modelación, consideramos un agente a un ente que tiene las siguientes características:

- Un agente es un ente discreto que permite saber que es parte de el y que no. Posee un conjunto de reglas gobernando su comportamiento y es capaz de tomar decisiones.
- Un agente esta habitando en un determinado medio e interactuando con otros agentes. Tiene protocolos de interacción con otros agentes.
- Un agente tiene metas que alcanzar con respecto a su comportamiento.
- Un agente es autónomo y puede funcionar independientemente en su medio ambiente.
- Un agente puede adaptar sus comportamientos basandose en su experiencia. Es decir puede tener reglas que modifican sus reglas de comportamiento.

La amplia difusión que ha tenido la MBA es debido a que, por un lado vivimos en un mundo (sistema) complejo, el cual exhibe una gran variedad de relaciones, en donde los sistemas que necesitamos analizar y modelar se vuelven cada vez más complejos en cuanto a sus interdependencias. Por otro lado, algunos sistemas resultan muy complejos para modelar lo más confiablemente posible. Es aquí, que el beneficio de la MBA junto con el rápido crecimiento del poder de computación otorgan otra alternativa sobresaliente para producir modelos que puedan describir sistemas complejos eficazmente.

La MBA tiene una estrecha relación con otras disciplinas científicas como son: las ciencias sociales, modelación, la ciencias de la computación (simulación), la teoría de sistemas, dinámica de sistemas.

Una de las aplicaciones de la MBA es la modelación de procesos sociales, en dónde los agentes representan a individuos o grupos de individuos, y las relaciones entre agentes representan procesos de interacciones sociales. Aquí estamos bajo el supuesto que la sociedad puede ser modelada almenos en un cierto nivel y para ciertos propósitos.

Gracias al trabajo de la comunidad científica, hoy en día existen una gran variedad de programas libres que perminten la modelación basada en agentes. De especial interés para los propositos de este trabajo fue el entorno de programación y modelado NetLogo, el cual es posible descargar de forma gratuita desde su sitio web oficial.

Finalmente, describimos los pasos generales para construir un modelo basado en agentes.

Agentes. Identificación de los tipos de agentes y demas objetos junto con sus respectivos atributos.

Medio Ambiente. Definir el medio ambiente en el cual los agentes viviran e interaccionaran.

Métodos de agentes. Especificar los métodos por medio de los cuales los atributos de los agentes seran actualizados en respuesta a las interacciones con otros agentes o con el medio ambiente.

Interacciones de agentes. Especificar los métodos que controlan la interacción de los agentes durante la simulación.

Nuestros modelos, características y algoritmos

Los modelos nos ayudan a entender la inherente complejidad de la naturaleza y también proporcionan bases para su aprendizaje. Los modelos que proponemos están basados en agentes, y a su vez están asociados a los nodos de una red \mathcal{R} (finita) tipo enrejado, el cual es una red 4-regular. Una de las hipótesis dentro de nuestros modelos, es que, la evolución del sistema es producto solo de las interacciones de sus agentes e independiente de la influencia exterior. Los grupos de discusión que estamos considerando se forman por la vecindad de un nodo dentro de la red más el nodo mismo, y tienen tamaño cinco el cual es invariable. La forma particular de las distribuciones espaciales iniciales de cada partido, las reglas de actualización y evolución de la dinámica y los estados que presentan el sistema, son características importantes dentro de cada uno de los modelos que presentamos.

2.1. Las redes subyacentes y sus topologías

Debido a su simplicidad, los enrejados son redes muy utilizadas en simulación de modelos físicos, como lo podemos observar en los modelos de Ising o Sznajd 1.6.3, 1.6.4. Las redes sobre las cuales se lleva a cabo las interacciones de todos los modelos que presentamos son de dos tipos: enrejados cuadrados de \mathbb{Z}^2 con un total N nodos (con $l = \sqrt{N}$ nodos por cada lado) y enrejados toroidales, recordar que son redes 4-regulares, donde cada nodo es adyacente con sus 4-vecinos más cercanos, los cuales están a distancia uno. La Figura 2.2 muestra un ejemplo de este tipo de redes.

Observación 2.1.1. *Demográficamente el parámetro N controla el tamaño de una ciudad, o de una sociedad.*

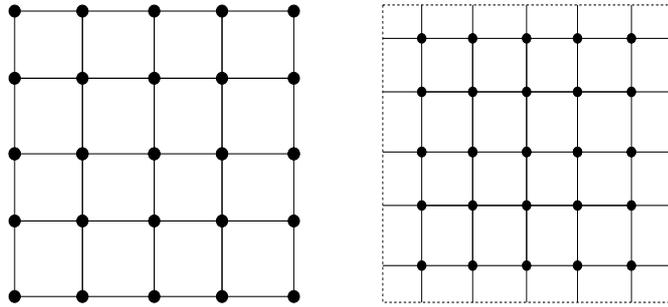


Figura 2.1: El mundo: un enrejado plano y uno toroidal, $N = 25$

2.1.1. Los grupos de discusión

Durante toda la dinámica, los grupo de discusiones que utilizamos tienen una forma preestablecida e invariable, que consiste de la *vecindad cerrada* $N[v]$ (4-vecindad de Von-Neumann más el nodo v).

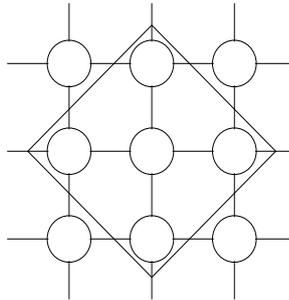


Figura 2.2: Los grupos de discusión

2.2. Modelo sobre heterogeneidad, para dos partidos y votantes indecisos

La dinámica consiste en repartir sobre el enrejado \mathcal{R} los partidos $\{P_1, P_2\}$ representados por los estados $\{+1, -1\}$, conforme a distribuciones espaciales *a priori*, y considerando al complemento de los nodos de P_1, P_2 como el conjunto U de los votantes indecisos con estado $s = 0$. Cada individuo (nodo de la red) tiene asociado dos variables: su influencia y su partido. Los nodos de $\{P_1, P_2\}$ cuya influencia es distinta de cero los consideramos agentes activos, los votantes indecisos los asociamos con los estados neutrales. Los tres tipos de nodos dentro de la red están representados por estados distintos. El valor $|U|/N$ controla la densidad de población, o radio de ocupación que tienen los partidos dentro del sistema.

Suponemos, que inicialmente todos los nodos en nuestra red tienen influencia y estados igual a 0. La dinámica se lleva a cabo seleccionando aleatoriamente un

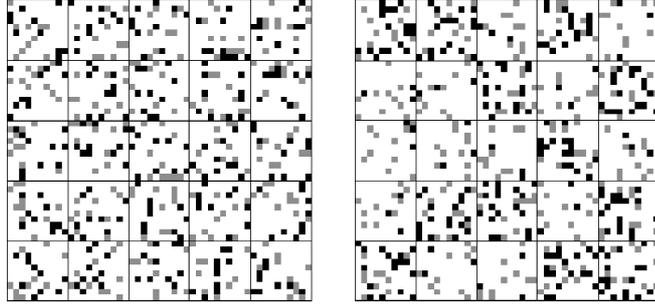


Figura 2.3: P_{+1} gris, P_{-1} negro, U blanco

nodo v de \mathcal{R} y examinando el resultado de la regla de la mayoría sobre el grupo de discusión G formado por la vecindad cerrada $N[v]$, permitiendo repetir nodos durante el proceso de selección. Como el grupo de discusión contempla la presencia de votantes indecisos, la RM permite *empates*, un ejemplo lo tenemos cuando $N[v] = (-1, 1, -1, 1, 0)$. La terminología que usamos proviene del contexto político y refiere a los nodos con un estado distinto de cero como partidos y a todos los nodos de la red como votantes. El término “estado” proviene de la física y refiere a partículas como los átomos las cuales pueden adoptar diferentes estados spin.

2.2.1. Distribuciones espaciales iniciales

Cada partido P_i esta representado por su spin $c(P_i) \in \{-1, 1\}$ y por su influencia $i(P) \in \{0, 1\}$, la cual determina si es un agente activo o pasivo; por ejemplo $c(P_1) = +1, c(P_2) = -1$. Los votantes indecisos tienen spin e influencia cero. Suponemos que inicialmente todos los nodos en nuestra red estan sin estado y tienen influencia y partido igual a 0. Inicialmente repartimos n_i nodos por cada partido P_i , y realizamos una división de \mathcal{R} en $d = \frac{N}{100}$ distritos, en seguida consideramos la mediana entre los distritos del partido P_{-1} , la cual representamos por M_{-1} . Repartimos n_{+1}/N nodos en cada distrito, $n_{+1} = n_{-1} = 0,1N$, y en cada uno de los $d_1 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ distritos se reparten $1 \leq k \leq m_{+1}$ nodos y en los restantes $d - d_1$ distritos los restantes $n_{-1} - d_1 \times M_{-1}$ nodos, así $m_{+1} = M_{+1} = 10$ mientras que $M_{-1} = k, m_{-1} = m_{+1}$.

Observación 2.2.1. *La distribución de P_{+1} consiste en distribuir m_{+1} nodos en cada distrito, sin embargo para distribuir P_2 hay que realizar algunos cálculos. Se distribuyen M_{+1} nodos en $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ distritos, lo cual distribuye solo $w = M_{+1} \times (\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)$ nodos, los restantes $n_{+1} - w$ nodos hay que repartirlos entre los $d_1 = d - (\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)$ distritos. Suponemos que $d_1 = x + y$ y $w = rx + sy$, tomando s como la parte entera de $\frac{w}{d_1}$, entonces $w = sd_1 + q$ con $0 \leq q < d_1$, entonces $w = sx + sy + q$ y si $x = q$ tenemos $r = s + 1$ y $y = d_1 - x = d_1 + q$, lo cual determina r, x, s, y .*

2.2.2. Regla de transición para dos partidos e indecisos

La dinámica se lleva a cabo seleccionando aleatoriamente un nodo v sin remplazo y tomando en cuenta el resultado de la RM sobre $N[v]$. Sea v un nodo seleccionado y $N[v]$ su vecindad cerrada, sea $P(v)$ el partido del nodo v y $i(v)$ su influencia. Definimos los estados e influencias para los grupos de discusión como $c(N[v]) = \cup_{y \in N[v]} c(P(y))$ y $i(N[v]) = \cup_{y \in N[v]} i(y)$ respectivamente.

Las reglas de transición y actualización usadas en nuestros modelos de tres estados son básicamente el empleo de la RM (absoluta) para dos opiniones introducidas en la Sección 1.6.2. El uso de esta regla lo resumimos a continuación. Al tiempo t seleccionamos un nodo v aleatoriamente, entonces al tiempo $t + 1$ el estado y la influencia para $N[v]$ estará dada por la siguiente ecuación,

$$c(N[v]) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sum_{y \in N[v]} c(y) > 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{y \in N[v]} c(y) < 0 \\ - & \text{si } \sum_{y \in N[v]} c(y) = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

con $i(N[v]) = 1$.

Observación 2.2.2. En caso de empate al aplicar la regla en 2.2.1, el símbolo “-” indica que $N[v]$ se mantiene sin cambio.

En la Figura 2.4 se muestran algunos ejemplos del efecto en el uso de la regla en 2.2.1.

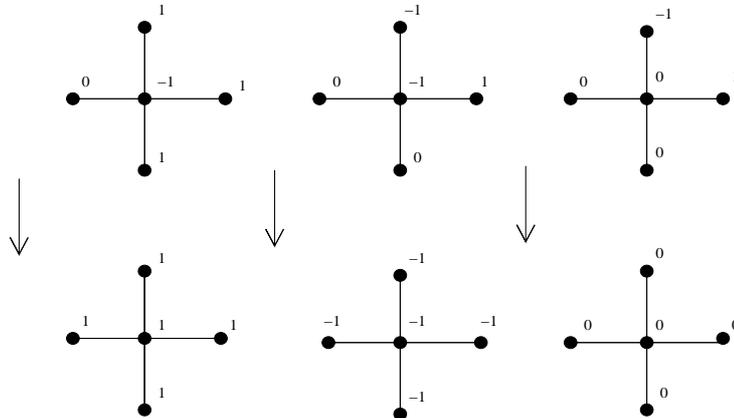


Figura 2.4: Efecto de regla de actualización

2.2.3. Estado notables dentro del sistema

Durante la dinámica del modelo, sobresalen cuatro estados: el estado inicial del sistema el cual está determinado por las distribuciones espaciales de cada partido, el estado después de la desaparición del último votante indeciso, los estados franjas,

y el consenso, Figura 2.5. En el momento en que desaparece el último votante indeciso el estado es un sistema con dos estados regido por la regla de la mayoría, para el cual tienen estudios.

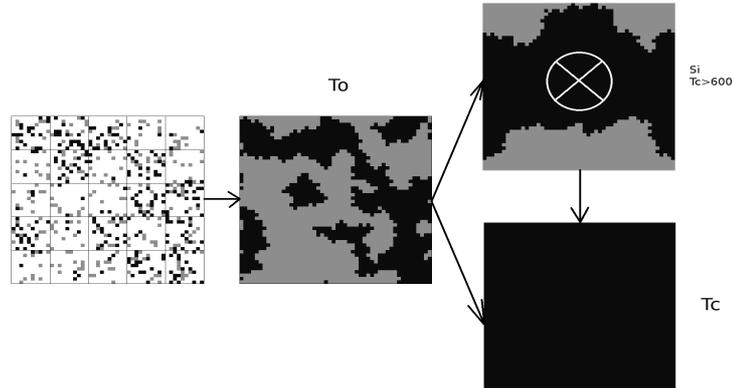


Figura 2.5: Posibles estados durante la dinámica

Los estados franja son situaciones en que la dinámica no obtuvo el consenso en un tiempo razonable. En nuestro análisis estadístico del modelo M0, consideramos un estudio sin presencia de franjas, y otro para los estados franja.

2.2.4. El pseudo-código

Para una mejor comprensión de nuestros modelos presentamos el pseudo-código y los diagramas de flujo. Nuestros modelos se componen de tres algoritmos, el Algoritmo DISTRIBUIR, conforme a las condiciones iniciales necesarias inicializa el mundo y lo prepara para las interacciones de la dinámica y el Algoritmo DINAMICA1 que mediante repetición de tipo Monte Carlo aplica la regla de actualización repetidamente. Los Algoritmos DISTRIBUIR y DINAMICA son coordinados por el procedimiento PRINCIPAL.

Pseudo-códigos

El Algoritmo 2 describe el procedimiento PRINCIPAL.

Algoritmo 2 PRINCIPAL

Require: $N, M_{+1}, R, n_{-1}, n_{+1}$ y tipo de selección.

Ensure: $f_{-1}, f_{+1}, t_0, T_c, n_{0,-1}, n_{0,1}$.

1: Llamar a DISTRIBUIR.

2: Mostrar $l_{-1}, l_{+1}, med(l_{-1}), med(l_{+1})$.

3: Llamar a DINAMICA.

4: **return** Mostrar $l'_{-1}, l'_{+1}, med(l'_{-1}), med(l'_{+1}), t_0, n_{0,-1}, n_{0,+1}, t_c, T_c, f_{-1}, f_{+1}$ y sus distribuciones a lo largo de la dinámica.

Los Algoritmos 4 y 3 describen los procedimientos DISTRIBUIR Y DINAMICA.

Algoritmo 3 DISTRIBUIR

Require: $n_{-1}, n_{+1}, m_{-1}, M_{+1}$

Ensure: Distribución de P_1 uniforme en los distritos de \mathcal{R} con m_{-1} nodos por distrito. Distribución de P_2 sesgada en los distritos de R , dónde $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ distritos tienen M_{+1} nodos.

```
1:  $c(v) = i(v) = 0 \forall v \in N(R)$ ,  $d \leftarrow \frac{N}{100}$ ,  $b3 \leftarrow \lceil \frac{d}{2} \rceil$ ,  $b2 \leftarrow d - \lceil \frac{d}{2} \rceil$ ,  $nb3 \leftarrow b3 \times M_{+1}$ ,  $nb2 \leftarrow p \times N - nb3$ 
2:  $nsd \leftarrow \lfloor \frac{nb2}{b2} \rfloor$ ,  $ntd1 \leftarrow nsd + 1$ ,  $b4 \leftarrow nb2 - (nsd \times b2)$ ,  $b5 \leftarrow b4 \times ntd1$ ,  $b5 \leftarrow d - b3 - b4$ ,  $ntd2 \leftarrow nsd$ ,  $nb5 \leftarrow b5 \times ntd2$ 
3:  $nad \leftarrow \lfloor \frac{nb1}{b1} \rfloor$ ,  $ntd \leftarrow \lfloor \frac{nb3}{b3} \rfloor$ 
4:  $l_{-1}, l_{+1} \leftarrow [\emptyset]$ 
5: while  $\sum l_{-1}[v] \neq nad \times b1$  do
6:   repeat
7:      $l_{-1} \leftarrow l_{-1} \cup nad$ 
8:   until  $b1$ 
9: end while
10: while  $\sum l_{+1}[v] \neq nad \times b1$  do
11:   repeat
12:      $l_{+1} \leftarrow l_{+1} \cup ntd$ 
13:   until  $b3$ 
14:   repeat
15:      $l_{+1} \leftarrow l_{+1} \cup ntd1$ 
16:   until  $b4$ 
17:   repeat
18:      $l_{+1} \leftarrow l_{+1} \cup ntd2$ 
19:   until  $b3$ 
20: end while
21:  $distritos \leftarrow [\emptyset]$ 
22:  $casillas \leftarrow [\emptyset]$ 
23:  $k \leftarrow 0$ 
24: repeat
25:    $i \leftarrow random(\sqrt{N}) \times 10$ 
26:    $J \leftarrow random(\sqrt{N}) \times 10$ 
27:   if  $reemplazo = false$  then
28:     while  $nodo(i, j) \in distritos$  do
29:        $i \leftarrow random(\sqrt{N}) \times 10$ 
30:        $J \leftarrow random(\sqrt{N}) \times 10$ 
31:     end while
32:   end if
33:    $distritos \leftarrow distritos \cup nodo(i, j)$ 
34:   if  $k < b3$  then
35:     repeat
36:        $x \leftarrow i + random(10)$ 
37:        $y \leftarrow j + random(10)$ 
38:       while  $nodo(i, j) \in casillas$  do
39:          $x \leftarrow i + random(10)$ 
40:          $y \leftarrow j + random(10)$ 
41:       end while
42:        $i(nodo(x, y)) = 1$ ,  $c(nodo(i, j)) = +1$ 
43:        $distritos \leftarrow distritos \cup nodo(i, j)$ 
44:     until  $l_{+1}[k]$ 
45:   end if
46:   if  $k \geq b3$  then
47:     repeat
48:        $x \leftarrow i + random(10)$ 
49:        $y \leftarrow j + random(10)$ 
50:       while  $nodo(i, j) \in casillas$  do
51:          $x \leftarrow i + random(10)$ 
52:          $y \leftarrow j + random(10)$ 
53:       end while
54:        $i(nodo(x, y)) = 1$ ,  $c(nodo(i, j)) = +1$ 
55:        $distritos \leftarrow distritos \cup nodo(i, j)$ 
56:     until  $l_{+1}[k]$ 
57:   end if
58:   repeat
59:      $x \leftarrow i + random(10)$ 
60:      $y \leftarrow j + random(10)$ 
61:     while  $nodo(i, j) \in casillas$  do
62:        $x \leftarrow i + random(10)$ 
63:        $y \leftarrow j + random(10)$ 
64:     end while
65:      $i(nodo(x, y)) = 1$ ,  $c(nodo(i, j)) = -1$ 
66:      $distritos \leftarrow distritos \cup nodo(i, j)$ 
67:   until  $l_{-1}[k]$ 
68:    $k \leftarrow k + 1$ 
69: until  $b1$ 
```

Una vez establecidas las condiciones iniciales del sistema a través de las distribuciones espaciales, el procedimiento DINAMICA selecciona un nodo aleatoriamente y aplica la regla 2.2.1 mediante repeticiones Monte Carlo.

Algoritmo 4 DINAMICA

Require: P_1, P_2 distribuidos entre los distritos de \mathcal{R} conforme a $M_{+1} = med(l_{+1})$.
Ensure: Dinámica, repetición Monte Carlo para R . Reporte de parámetros.

```

1:  $c_{max} \leftarrow 600$ 
2:  $casillas \leftarrow [\emptyset]$ 
3:  $T_c \leftarrow 1$ 
4: repeat
5:    $t \leftarrow 1$ 
6:   repeat
7:      $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
8:      $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
9:      $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
10:    if  $remplazo = 0$  then
11:      while  $v \in casillas$  do
12:         $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
13:         $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
14:         $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
15:      end while
16:    end if
17:     $casillas \leftarrow casillas \cup v$ 
18:    if  $|\{u \in N[v] : spin(u) = -1\}| > |\{u \in N[v] : spin(u) = +1\}|$  then
19:       $spin(V[v]) \leftarrow -1, i(V[v]) \leftarrow 1$ 
20:    end if
21:    if  $|\{u \in N[v] : spin(u) = -1\}| < |\{u \in N[v] : spin(u) = +1\}|$  then
22:       $spin(V[v]) \leftarrow +1, i(V[v]) \leftarrow 1$ 
23:    end if
24:    if  $|\{u \in N[v] : spin(u) = -1\}| = |\{u \in N[v] : spin(u) = +1\}|$  then
25:       $spin(N[v]), i(N[v])$  sin cambio.
26:    end if
27:     $t \leftarrow t + 1$ 
28:  until  $t > N$ 
29:   $t_0, n_{0,-1}, n_{0,+1}, med(l'_{-1}), med(l'_{+1})$ 
30:   $T_c \leftarrow T_c + 1$ 
31: until  $consenso$  ó  $T_c > c_{max}$ 

```

2.2.5. Los diagramas de flujo

En esta Sección, incluimos los correspondientes diagramas de flujo para los procedimientos presentados en la Sección anterior, esto con la finalidad de complementar la comprensión de los Algoritmos subyacentes en nuestros modelos. El diagrama de flujo correspondiente al Algoritmo 2 lo observamos en la Figura 2.6.

La Figura 2.7 muestra el diagrama de flujo correspondiente al Algoritmo 3.

En la Figura 2.8 observamos el diagrama de flujo para Algoritmo 4

2.3. Modelos para tres partidos dos de ellos formando una coalición

Muchas de las decisiones que toman cada uno de los individuos dentro de sus sociedades, están en gran medida influenciadas por el exterior, por aquello que perciben nuestros sentidos, por impresiones que provienen de su entorno. Por ejemplo, desde la niñez los niños van adquiriendo su conocimiento y lo van aplicando a

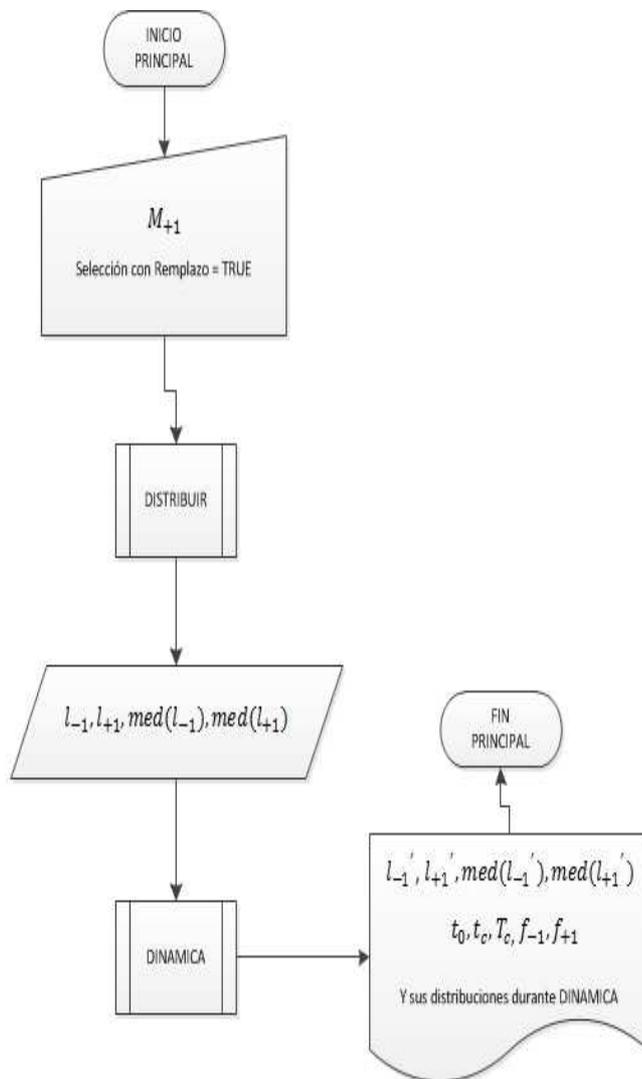


Figura 2.6: Procedimiento PRINCIPAL

través de todo lo que miran en su familia, de la información que transmite su mas cercano entorno. Los consumidores se comportan de una forma similar, adquieren gustos muy semejantes a los gustos de sus compañeros mas cercanos. Es importante señalar que la preferencia electoral como la opinión en general se transmite y decide con una alta influencia de la vecindad de cada individuo.

A continuación vamos a describir las características para nuestros modelos que estudian la dinámica de coaliciones dobles en un sistema formado por tres partidos P_1, P_2, P_3 , dónde P_1 y P_2 forman la coalición P_{12} . La distribución inicial de los tres partidos sobre el enrejado \mathcal{R} es uniforme, y aplican una regla de transición basada en la RM más dos reglas particulares de cada modelo, una para otorgar el voto de la coalición a uno de sus partidos que la integran y otra regla para los empates. La dinámica se realiza examinando cada uno de los nodos de \mathcal{R} mediante repeticiones

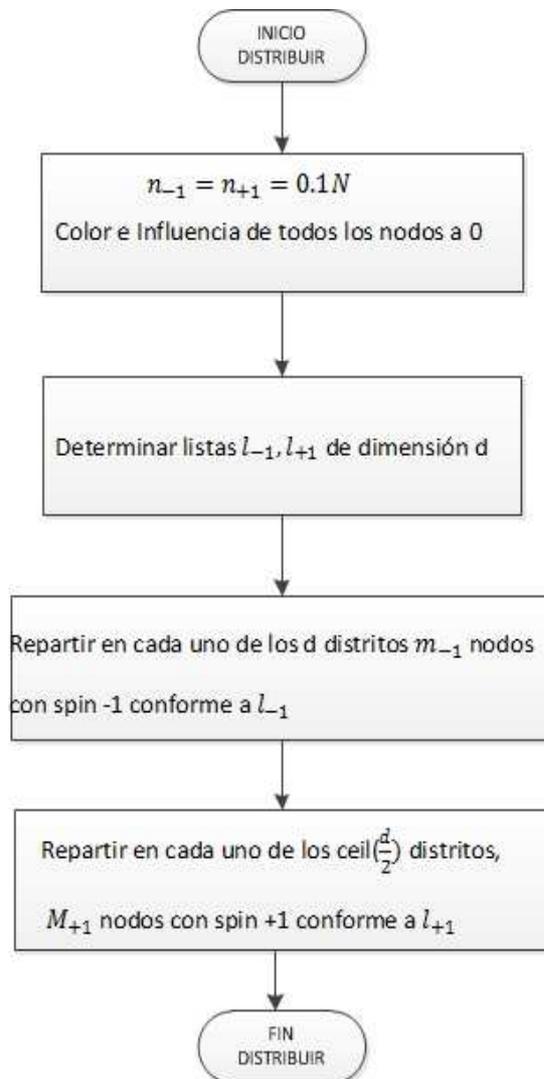


Figura 2.7: Procedimiento DISTRIBUIR

tipo Monte Carlo.

Hipótesis para los modelos de coalición

- Los partidos P_1 y P_2 forman la coalición P_{12} , el cual es un nuevo partido.
- Repartimos de forma equitativa y uniforme sobre la red \mathcal{R} de tamaño N , n_1 , n_2 , n_3 nodos por cada partido P_i respectivamente, con $n_1 + n_2 = n_3$.
- Nuestros análisis no contemplan la presencia de indecisos, por lo tanto no hay empates en la RM, solo puede haber empates al usar la regla para otorgar el voto de la coalición.

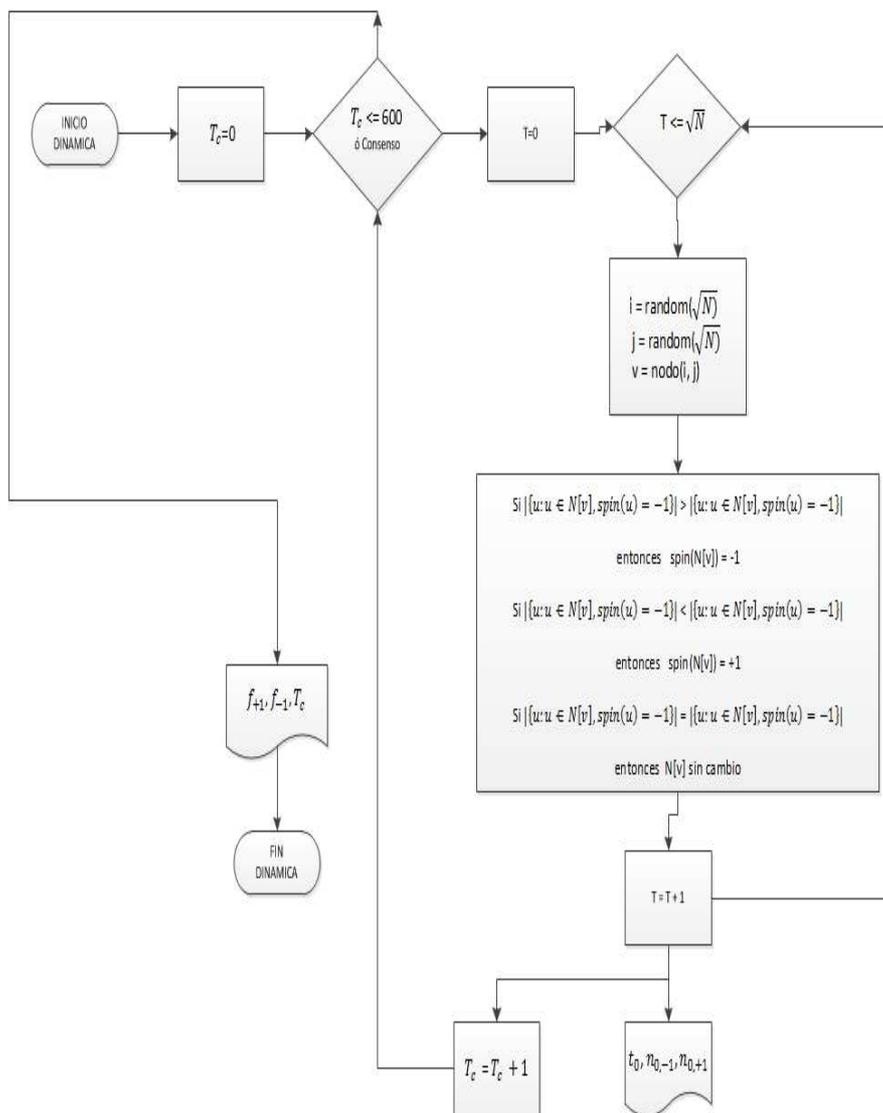


Figura 2.8: Procedimiento DINAMICA

- Los partidos P_1, P_2 no compiten entre ellos. Esto quiere decir que para una determinada vecindad si existen solo integrantes de P_1 y de P_2 , entonces la regla de transición no realiza cambio.
- Los empates bajo la RM estan contemplados en la Tabla 2.1, y aparecen en presencia de votantes indecisos.
- No se hace distinción en cuanto al orden de los elementos en la vecindad, así una vecindad del como $(1, 2, 3, 3, 3)$ es igual a $(3, 3, 3, 2, 1)$, solo tomamos un representante de esta relación.

- La dinámica contempla dos variantes en cuanto a la selección de nodos: con remplazo o sin remplazo.
- Tenemos tres posibles estados finales de nuestro sistema: consenso para P_{12} , consenso para P_3 , ó franja.
- El conjunto U de los votantes indecisos no tiene influencia (influencia igual a 0). En caso de tener influencia, formarían un nuevo partido.

Objetivos Bajo la perspectiva de la mecánica estadística y los sistemas complejos, determinar tres tipos de modelos (reglas de transición); en dónde el partido más pequeño (en cuanto a número de simpatizantes) de la coalición P_{12} se beneficie, el partido grande de la coalición P_{12} , y el tercero que estadísticamente no beneficia a ningún partido.

Características generales de nuestros modelos de coalición De manera general nuestros modelos los podemos identificar y distinguir por cuatro reglas; una vez que gana la coalición la regla de preferencia escoge al ganador. El tipo de regla de desempate que se aplica cuando se nos presenta uno de los posibles empates. La tercera regla es la forma en que distribuimos inicialmente cada uno de nuestros partidos dentro la nuestra red y la cuarta es el tamaño de nuestra red y su topología.

2.3.1. Posibles configuraciones para tres partidos

Empates dentro el sistema

Supongamos que en un enrejado \mathcal{R} distribuimos uniformemente tres partidos P_1, P_2, P_3 (agentes activos), considerando el resto de los nodos los votantes indecisos (agentes pasivos) dichos partidos están representados por los estados $c(P_i) = i$ con $i = 1, 2, 3$ y 0 para los votantes indecisos. Cada partido tiene asociada una influencia $i(P_j) = 1$. Una de las implicaciones que se tiene al considerar votantes indecisos es que la RM dentro los grupos de discusión presenta empates. En el caso una vecindad este formada solo por votantes indecisos, la RM deja sin cambio el grupo. Existen configuraciones dentro de los grupos de discusión para las cuales la RM (en base a los estados) no puede decidir la transición.

El problema de distinguir los empates dentro de algún grupo de discusión, está relacionado en como se decide la opinión usando la RM, los empates aparecen en presencia de votantes indecisos. Por ejemplo para los grupos $\{1, 0, 3, 1, 3\}$ y $\{1, 2, 0, 0, 0\}$ la RM no decide quien es su ganador.

Mientras en la Tabla 2.1 se muestra los posibles empates dentro del grupo de discusión, la decisión de como tratar los empates varía de acuerdo al modelo, a la forma en que cada modelo trata los empates la llamamos la *regla de desempate*. Cada vez que analizamos un grupo de discusión o bien gana la coalición P_{12} o

Clase 1	{1, 3, 0, 0, 0}
	{2, 3, 0, 0, 0}
Clase 2	{1, 1, 3, 3, 0}
	{2, 2, 3, 3, 0}
	{1, 2, 3, 3, 0}

Cuadro 2.1: Tabla de empates en la regla de la mayoría para tres estados

bien el partido P_3 o hay un empate. En el caso que gane la coalición tenemos un subgrupo de discusión que tiene la mayoría.

2.3.2. Reglas de transición para tres partidos, una coalición doble e indecisos

Supongamos que seleccionamos aleatoriamente un nodo v dentro de \mathcal{R} ., asociados a v tenemos su estado $c(v)$, que lo identifica con el partido al que pertenece v y su influencia $i(v)$ que lo distingue como activo o pasivo, la regla de actualización es usar la RM (1.6.2) entre P_{12} y P_3 , su resultado determinará si la votación de $N[v]$ es para la coalición o para el tercer partido. En el caso que la votación sea en favor de P_{12} , depende de cada modelo como decidir quien, entre P_1 y P_2 se quedará con la votación del grupo. La forma de decidir la votación del grupo entre los partidos de la coalición la llamamos la *regla de la coalición*. En símbolos, tenemos la siguiente ecuación.

$$c(N[v]) = \begin{cases} x & \text{si } \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=1\}} i(y) + \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=2\}} i(y) > \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=3\}} i(y) \\ & \text{y } \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=3\}} i(y) > 0 \\ x & \text{si } \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=1\}} i(y) + \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=2\}} i(y) < |G| \\ & \text{y } \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=3\}} i(y) = 0 \\ - & \text{si } \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=1\}} i(y) + \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=2\}} i(y) = |G| \\ - & \text{si } \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=0\}} = |G| \\ 3 & \text{si } \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=3\}} i(y) > \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=1\}} i(y) + \sum_{\{y \in N[v]: c(y)=2\}} i(y) \\ z & \text{si empate} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Dónde $x \in \{1, 2\}$ y $z \in \{1, 2, 3\}$ son los valores de las reglas de la coalición y de empate de cada modelo 2.3.2. Una vez determinado el partido de $N[v]$ su influencia será 1 si el grupo lo gana un agente activo. Con ayuda de la ecuación podemos describir los modelos de coalición.

2.3.3. Estados notables dentro del sistema

El análisis que se realizó a los modelos de coalición no incluyó la presencia de votantes indecisos, como consecuencia tenemos tres estados notables en la evolución

de cada modelo: el estado inicial dado por las distribuciones iniciales de los tres partidos, los estados franja con cinética lenta, y el consenso.

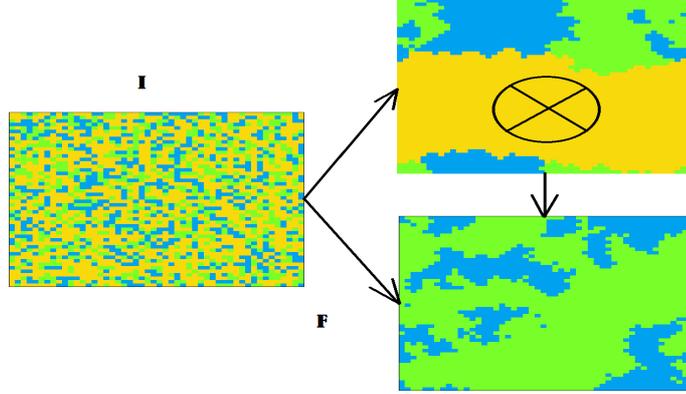


Figura 2.9: Posibles estados para los modelos de coalición

Aquellas simulaciones que presentaron estados franja, fueron eliminadas de nuestro análisis, concentrandonos solamente en consensos, esto lo indicamos con una marca en la Figura 2.9.

2.3.4. Modelo con selección aleatoria

Descripción Una vez que la coalición P_{12} tiene la mayoría en un grupo de discusión, la regla de coalición consiste en seleccionar el representante aleatoriamente entre P_1 y P_2 , (parámetro x en la ecuación 2.3.2) y la regla de desempate elige el representante aleatoriamente entre los partidos empatados. Estas reglas introducen un modelo particular para la dinámica de la opinión en nuestro sistema.

Algoritmos y procedimientos

El algoritmo principal dentro de este modelo es parecido al Algoritmo 2 de la Sección 2.2.2, con la diferencia que el parámetro M_{+1} es necesario para este último.

Algoritmo 5 PRINCIPAL2

Require: N, R, n_1, n_2, n_3 y el tipo de selección.

Ensure: $f_{-1}, f_{+1}, t_0, T_c, n_{0,-1}, n_{0,1}$.

1: Llamar a DISTRIBUIR.

2: Llamar a DINAMICA.

3: **return** Mostrar $t_0, n_{0,-1}, n_{0,1}, t_c, T_c, f_{-1}, f_{+1}$ y sus distribuciones a lo largo de la dinámica.

El procedimiento DISTRIBUIR2 distribuye los tres partidos dentro del sistema; reparte los nodos de \mathcal{R} uniformemente con n_1 nodos para P_1 , n_2 de P_2 y n_3 para P_3 , los restantes se consideran votantes indecisos.

La parte de la dinámica de nuestro modelo se realiza siguiendo la regla de actualización 2.3.2, considerando los empates descritos en la Tabla 2.1, y las reglas

Algoritmo 6 DISTRIBUIR2

Require: n_1, n_2, n_3, N, R , tipo de selección (con o sin remplazo).

Ensure: Distribución de n_1 nodos de P_1 sobre R . Distribución de n_2 nodos de P_2 sobre R . Distribución de n_3 nodos de P_3 sobre R .

```
1:  $i(v) = c(v) = 0 \forall v \in N(R)$ 
2:  $l_i \leftarrow [\emptyset]$ 
3: while  $longitud(l_1) \leq n_1$  do
4:    $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
5:    $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
6:    $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
7:   if  $reemplazo = false$  then
8:     while  $v \in l_1$  do
9:        $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
10:       $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
11:       $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
12:    end while
13:  end if
14:   $c(v) = i(v) = 1$ 
15:   $l_1 \leftarrow l_1 \cup v$ 
16: end while
17: while  $longitud(l_2) \leq n_2$  do
18:    $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
19:    $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
20:    $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
21:   if  $reemplazo = false$  then
22:     while  $v \in l_2$  ó  $v \in l_1$  do
23:        $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
24:        $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
25:        $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
26:     end while
27:   end if
28:    $c(v) = 2, i(v) = 1$ 
29:    $l_2 \leftarrow l_2 \cup v$ 
30: end while
31: while  $longitud(l_3) \leq n_3$  do
32:    $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
33:    $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
34:    $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
35:   if  $reemplazo = false$  then
36:     while  $v \in l_3$  ó  $v \in l_2$  ó  $v \in l_1$  do
37:        $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
38:        $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
39:        $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
40:     end while
41:   end if
42:    $c(v) = 3, i(v) = 1$ 
43:    $l_3 \leftarrow l_3 \cup v$ 
44: end while
```

de coalición y desempate. Los detalles del procedimiento que realiza estas acciones los muestra el Algoritmo 7.

Algoritmo 7 DINAMICA2

Require: P_1, P_2, P_3 distribuidos uniformemente en R .

Ensure: Dinámica y repetición Monte Carlo para R . Reporte de parámetros.

```
1:  $c_{max} \leftarrow 600$ 
2:  $casillas \leftarrow [\emptyset]$ 
3:  $T_c \leftarrow 1$ 
4: repeat
5:    $t \leftarrow 1$ 
6:   repeat
7:      $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
8:      $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
9:      $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
10:    if  $reemplazo = 0$  then
11:      while  $v \in casillas$  do
12:         $i \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
13:         $J \leftarrow random(\sqrt{N})$ 
14:         $v \leftarrow nodo(i, j)$ 
15:      end while
16:    end if
17:     $casillas \leftarrow casillas \cup v$ 
18:     $s_1 \leftarrow |\{u \in N[v] : c(u) = 1\}|$ 
19:     $s_2 \leftarrow |\{u \in N[v] : c(u) = 2\}|$ 
20:     $s_3 \leftarrow |\{u \in N[v] : c(u) = 3\}|$ 
21:     $s_4 = |N[v]| - \sum s_i$ 
22:    if  $s_1 + s_2 > s_3$  then
23:      if  $(s_i = 0, s_j > 0, i, j \in \{1, 2\})$  y  $(s_3 > 0$  ó  $s_4 > 0)$  then
24:         $c(N[v]) \leftarrow j, i(V[v]) \leftarrow 1$ 
25:      end if
26:      if  $(s_1, s_2 > 0)$  y  $(s_3 > 0$  ó  $s_4 > 0)$  then
27:         $c(N[v]) \leftarrow random(1, 2), i(V[v]) \leftarrow 1$ 
28:      end if
29:    end if
30:    if  $s_1 + s_2 < s_3$  then
31:       $c(N[v]) \leftarrow 3, i(V[v]) \leftarrow 1$ 
32:    end if
33:    if  $s_1 + s_2 = s_3$  then
34:       $c(N[v]) \leftarrow random(i, j)$   $i, j \in \{1, 2, 3\}, i(V[v]) \leftarrow 1$ 
35:    end if
36:     $t \leftarrow t + 1$ 
37:  until  $t = N$ 
38:   $t_0, n_{0,-1}, n_{0,+1}$ 
39:   $T_c \leftarrow T_c + 1$ 
40: until  $T_{party_1} = N$  or  $T_{party_2} = N$  ó  $T_c > c_{max}$ 
```

Heterogeneidad en sistemas con tres estados

El estudio de la dinámica social se ha vuelto una corriente novedosa de investigación en física. En particular, los modelos spin aleatorios sobre redes son ampliamente usados para estudiar las características de la formación de opinión. En este ambiente, la evolución de la opinión es usualmente modelada como dinámica colectiva en la cual los agentes (nodos) actualizan su opinión siguiendo una regla específica de evolución.

En general, los modelos dinámicos de spin consisten de N agentes fijados como nodos de una red \mathcal{R} . Cada agente puede asumir el estado con spin $+1$ o -1 o permanecer neutral, es decir $s = 0$. La evolución spin esta gobernada por una regla de actualización y controlada por propiedades de la red, como son su topología, su conectividad, su heterogeneidad, etc. Una extensa clase de modelos de la dinámica de la opinión están basados en la RM, en la cual un grupo seleccionado de agentes adopta el estado de la mayoría local. En el modelo clásico de Galam [18] un número variable de grupos de tamaño arbitrario son formados simultáneamente y la RM es aplicada simultáneamente también a cada grupo, dónde el sistema tiende a un estado magnético constante (consenso). Sin embargo, los modelos de RM no conservan la magnetización promedio debido a la perdida de balance detallado. Consecuentemente, la probabilidad de alcanzar un consenso específico tiene una dependencia no trivial del estado inicial. Además, se ha encontrado que la dinámica de los modelos de RM es profundamente dependiente de la topología estadística de la red.

3.1. Descripción general

Estudiamos bajo la óptica de la mecánica estadística y los sistemas complejos la dinámica de la opinión para sistemas con tres estados s_i , los estados spin $\{+1, -1\}$ y un tercer estado neutro 0, los estados $\{+1, -1\}$ son agentes activos que en un contexto político-social respresentan a los partidos P_{+1} y P_{-1} , y los agentes con estado 0 son agentes inactivos considerados como votantes indecisos.

En particular, estudiamos los efectos de la heterogeneidad espacial en la distribución inicial de spines -1 en la dinámica de la opinión del sistema, a través de la RM. En esta dirección nuestros resultados son breves, y señalan los efectos de la heterogeneidad en la distribución inicial espacial de spines distintos de cero en la dinámica de la RM para un sistema de tres estados. Encontramos que después de $t_0 = (3 \pm 0,5)N$ ciclos los nodos indecisos desaparecen y el sistema se convierte en un sistema de dos estados ($s = +1, -1$), estudiado por ejemplo en [35]. Se observó que las densidades de estado en la transición del régimen de tres a dos estados decrece si la heterogeneidad de en la distribución espacial crece. Se encontró que las probabilidades de salida P_{+1}, P_{-1} son funciones lineales de $H_{-1}(0)$ y su diferencia $\Delta P = P_{+1} - P_{-1}$ es una función lineal de $\Delta H_0 = H_{+1}(0) - H_{-1}(0)$, dónde $H_s = \frac{M_s(0)}{m_s(0)}$, con $M_s(0), m_s(0)$ las medianas y la media entre los distritos del partido $s = -1, +1$. Nuestros resultados provenientes de las simulaciones Monte Carlo son discutidas en el contexto de la dinámica de la opinión.

3.1.1. Desarrollo del modelo

El modelo utilizado para este análisis lo presentamos en el Capítulo 2 Sección 2.2. Distribuimos sobre el enrejado \mathcal{R} un número preestablecido de nodos por partido identificados por distintos colores, mientras que los nodos neutros se caracterizan por tener influencia 0 y color blanco. Además, se divide a \mathcal{R} en distritos cuadrangulares de igual tamaño, con un total de $\frac{N}{100} = d$ distritos, cada uno con 100 nodos.

Antes de distribuir los agentes activos todos los nodos de la red son agentes pasivos. Los nodos de los partidos se distribuyen siguiendo una distribuciones espaciales particulares dentro de \mathcal{R} de acuerdo a los distritos, y se procede con la dinámica del modelo.

Para nuestras simulaciones se usaron enrejados con $N = 50^2, 100^2, 150^2$ nodos. Cada nodo $i \in [1, N]$ puede estar en uno de los estados spin $-1, 1$ ó 0. Las características generales para el modelo utilizado las encontramos en la Tabla 3.1.

La medida para la heterogeneidad espacial

Para estudiar la heterogeneidad espacial dentro del sistema, el enrejado fue dividido en d distritos cuadrados con 100 nodos cada uno (ver Figura 3.1).

Modelo	Heterogeneidad inicial
Distribuciones iniciales	P_{+1} uniforme en los distritos P_{-1} conforme a M_{-1} en los distritos
Dinámica	RM
Regla de desempate	Sin cambio
Número máximo de ciclos para franja	600

Cuadro 3.1: Características para el modelo sobre la heterogeneidad espacial inicial

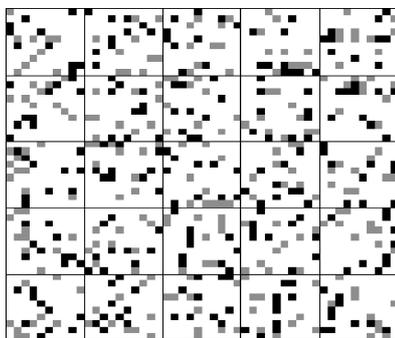


Figura 3.1: Distritos dentro del sistema

La medida de la heterogeneidad espacial para el partido $s \in \{+1, -1\}$ en el tiempo $t = 0$ es el cociente

$$H_s(0) = \frac{M_s(0)}{m_s(0)},$$

dónde M_s, m_s representan las medianas y la media entre los distritos para los nodos con estado s . En las simulaciones realizadas en este trabajo, los spines positivos fueron fijados a 10 nodos aleatorios en cada distrito, tal que la distribución es esencialmente uniforme sobre \mathcal{R} y $H_{+1}(0) = 1$. En cambio, los nodos con spin -1 , se reparten, asignando a k nodos elegidos aleatoriamente ($0 \leq k \leq 10$) en $d' = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ distritos elegidos aleatoriamente con los $250 - d'k$ nodos restantes distribuidos casi uniformemente entre los restantes $d - d'$ distritos, mientras los restantes 2000 nodos se mantienen en el estado $s = 0$. (ver Figura 3.1).

De esta forma $m_{+1}(0) = m_{-1}(0) = 10$ y $H_{+1} = 1$ mientras que H_{-1} lo cambiamos a través de $M_{-1}(0)$ en el rango de $0,1 \leq H_{-1}(0) \leq 1$.

Una vez que se distribuyen los spins distintos de cero, el sistema evoluciona siguiendo la RM descrita en 2.2.2. En cada actualización $t = 1, 2, 3, \dots$ todos los nodos en $N[v]$ para algun n elegido aleatoriamente, adopta el estado con spin

$$s(t) = \text{signo} \left\{ \sum_{i=1}^5 s_i(t-1) \right\} \text{ si } s(t) \neq 0$$

ó conserva su estado si $s(t) = 0$. Las actualizaciones se repiten hasta que el sistema necesariamente alcanza el estado final de consenso, esto en t_c pasos. Nótese que en contraste con modelos de regla de mayoría multi-estado, en nuestro modelo el tercer estado es neutral (agente inactivo), esto implica que si al menos un nodo en el grupo es neutral y el resto de los nodos están en un empate, entonces no hay cambio alguno en los spines.

3.1.2. Análisis y resultados

Tiempo para desaparecer votantes indecisos De nuestros experimentos notamos que los votantes indecisos ($s = 0$) desaparecen después de aproximadamente tres ciclos de $N = 2500$ actualizaciones (ver Figura 3.2), sin embargo, no todos los nodos son necesariamente actualizados en cada ciclo. Mas aún, se encontró que el tiempo de transición para el régimen de dos estados $T_0 = t_0/N = (3 \pm 0,5)N$ resultó ser independiente de las distribuciones spin iniciales (Figura 3.2). Además observamos que T_0 crece logarítmicamente cuando $H_{-1}(0)$ se aleja de 1. Ver Figura 3.3.

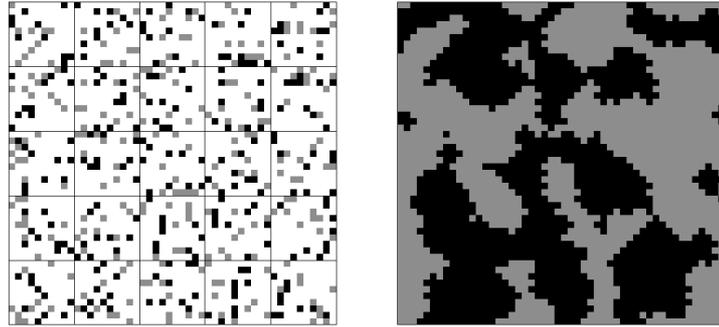


Figura 3.2: Transición de tres a dos estados en t_0 actualizaciones

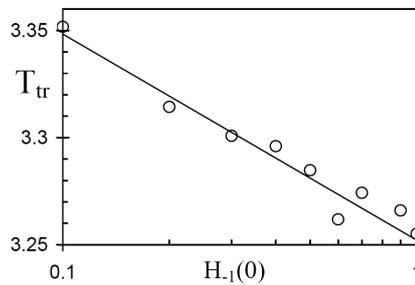


Figura 3.3: T_0 versus $H_{-1}(0)$

Magnetización media, en el régimen de dos estados En el momento que desaparece el último indeciso, la magnetización media del sistema $\Delta p(t_0) = p_{+1}(t_0) - p_{-1}(t_0)$ aumenta cuando $\Delta H_0 = H_{+1}(0) - H_{-1}(0)$ crece, siguiendo un comportamiento del tipo

$$\Delta p(t_0) = a(\Delta H_0)^\alpha \quad (3.1.1)$$

con $a = 0,17$, $\alpha = 1,47 \pm 0,7$. Ver Figura 3.4.

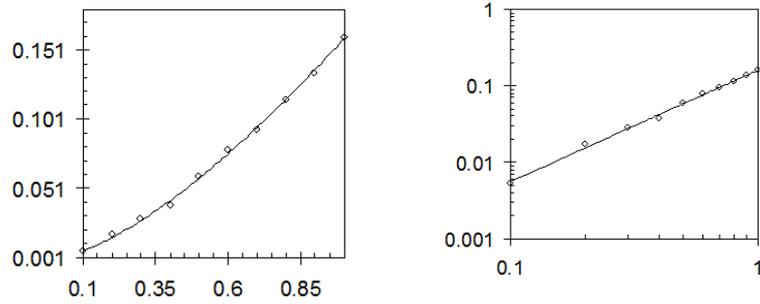


Figura 3.4: $\Delta p(t_0)$ versus ΔH_0

Densidades en el régimen de dos estados Encontramos que las densidades spin $p_i(t_0)$ al desaparecer los votantes indecisos y expuestas como función de $H_{-1}(0)$ se comportan como lo muestra la Figura 3.5, sin embargo, las distribuciones espaciales despues de t_0 actualizaciones difieren de las distribuciones del modelo de la RM estudiado en [35] con dos estados despues de t_0 actualizaciones, debido al efecto de los votantes indecisos.

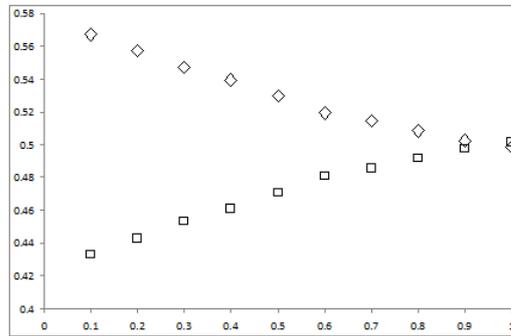


Figura 3.5: $p_i(t_0)$ versus $H_{-1}(0)$

Número máximo de ciclos para consenso y probabilidades para franjas

- Nuestros experimentos señalan que en la mayoría de los casos la opinión se vuelve dominante y termina después de T_c ciclos con $T_c \propto N^{1,24}$, validando lo reportado [35], también notamos que $T_c \sim \text{Pearson}$.
- Confirmamos que cuando el grupo de discusión tiene tamaño 3 tenemos $T_s = 600$. Pero cuando los grupos de discusión tienen tamaño 5 las realizaciones con más de $T_s = 210$ ciclos, se vuelven franjas.



Figura 3.6: Un estado de tipo franja

Probabilidad de obtener franjas Si las distribuciones iniciales son homogéneas $H_{+1}(0) = H_{-1}(0) = 1$ tenemos $P_{cs} = 30 \pm 3\%$, al igual que en modelos de RM con dos estados $P_{cs} = 30\%$, o el de Ising con cinética de Glauber, además encontramos que $T_c \propto N^{1,77}$.

En general, P_{cs} crece a medida que ΔH_0 crece a pesar que $\Delta p_0(t_0)$ también es una función creciente de ΔH_0 . (Ver [35, 11])

Tiempo para consenso sin franjas En cuanto al análisis sin franjas, nuestros experimentos indican que $T_c = \frac{t_c}{N} = 97 \pm 4$, y que T_c es independiente de $H_{-1}(0)$.

Medias en el régimen de dos estados Observamos que las medias $m_s(t_0)$ son funciones monótonas de ΔH_0 (Figura 3.7) tales que $\Delta m_0 = m_{+1}(t_0) - m_{-1}(t_0)$ se comporta como

$$\frac{\Delta m_0}{100} = 0,5 - b_1(\Delta p(t_0)) - c_1(\Delta p(t_0))^2$$

con $b_1 = 0,018$ y $c_1 = 0,15$ (Ver Figura 3.8).

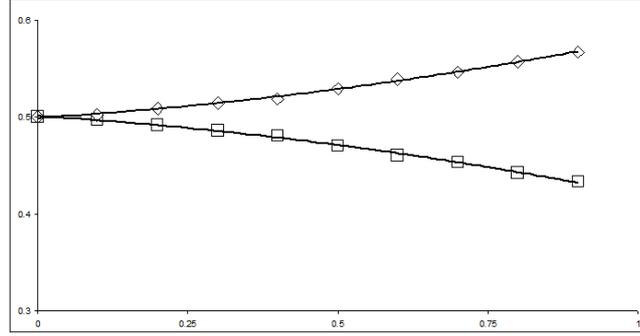


Figura 3.7: $m_{+1}(t_0), m_{-1}(t_0)$ versus ΔH_0

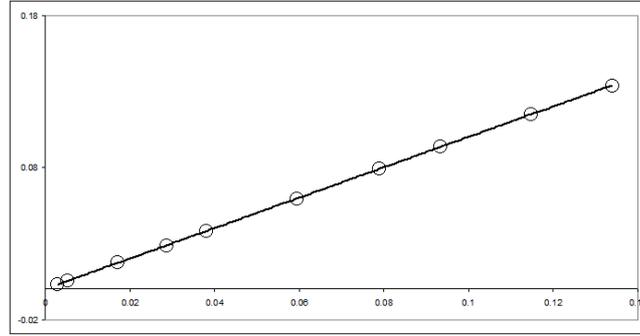


Figura 3.8: Δm_0 versus $\Delta p(t_0)$

Probabilidades de salida En cuanto a las probabilidades de consenso, tenemos que P_1, P_{-1} se comportan como funciones lineales de ΔH_0 (ver Figura 3.9) tales que

$$\Delta P = P_{+1} - P_{-1} \cong g(\Delta H_0)$$

mientras que la dependencia de P con $\Delta p(t_0)$ se comporta como

$$\Delta P \cong b_2(\Delta p(t_0)) - c_2(\Delta p(t_0))^2,$$

con $b_2 = 0,747$, $c_2 = 16,22$, y $g = 0,81 \pm 0,04$ (ver Figuras 3.10, [11]).

Observaciones Se encontró que $T_0 = t_0/N = 3 \pm 0,5$, el cual es independiente del tamaño del sistema, de la heterogeneidad (M_{-1}) y de la concentración inicial de spins distintos de cero en el rango de 10–20% ($5 \leq m_0 \leq 40$). Las simulaciones Monte Carlo preliminares con $N \leq 1600$ sugieren que el parámetro a es una función de N , mientras que el exponente de escalamiento $\alpha = 1,45 \pm 0,1$ (Ecuación 3.1.1) parece ser independiente del tamaño del sistema. Nótese que $\Delta p = 0$ cuando $\Delta M = M_{+1} - M_{-1} = 0$. Una vez que los votantes indecisos desaparecen, la futura evolución espera ser esencialmente la misma que como en el modelo de la RM en dos estados estudiado en [35]. La única diferencia radica en la heterogeneidad espacial de las

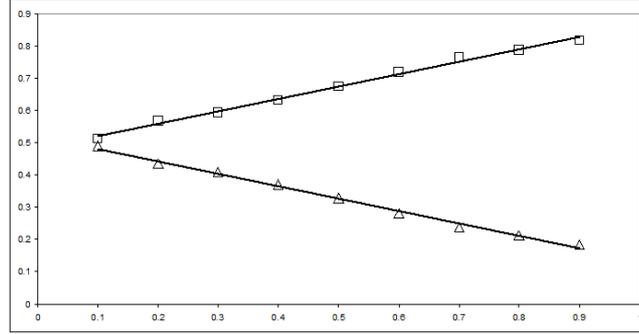


Figura 3.9: P_{+1} (arriba), P_{-1} (abajo) en términos de ΔH_0

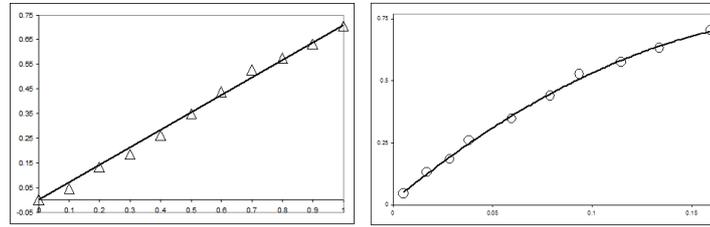


Figura 3.10: ΔP versus H_0 y $\Delta p(t_0)$

distribuciones después de t_0 actualizaciones. En consecuencia, encontramos que hay dos escenarios diferentes para la evolución del sistema de tres estados en el régimen de dos estados, similar a las observaciones del modelo RM de [35]. Específicamente, encontramos que en la mayoría de las realizaciones, una opinión rápidamente se vuelve dominante y eventualmente gana después de $T_C = t_C/N < 600$ ciclos sobre enrejados de tamaño $N = 2500$ [35].

En el resto de las realizaciones, el sistema alcanza una larga configuración sin consenso asociada con la segregación de estados alternativos. Esas franjas son a la larga inestables y el consenso es siempre alcanzado, sin embargo muy lentamente.

Las simulaciones Monte Carlo para modelos con RM y dos estados, sobre enrejados de dimensión dos, sugieren que el tiempo característico para consenso en sistemas con franjas es $t_C \propto N^{2.75} \gg N^{2.24}$ [35]. Cuando los spines iniciales en el modelo RM con dos estados son aleatoriamente distribuidos con densidades iguales, la probabilidad de alcanzar un estado coherente donde no hay consenso en el sistema de tamaño $N = 2500$ es aproximadamente 30 % y decrece cuando la diferencia entre las dos densidades crece [35]. Sin embargo, en el modelo RM con tres estados encontramos que la probabilidad de alcanzar una configuración franja sin consenso es $P_{CS} = 17 \pm 1\%$, lo cual es significativamente menor que la del modelo de dos estados, y sorprendentemente se incrementa tanto como ΔM se incrementa, no obstante que Δp es una la función creciente de ΔM . Esta característica puede ser atribuida a la heterogeneidad espacial de la distribución spin al inicio del régimen de dos estados y requiere mas análisis. En este trabajo, nos limitamos al estudio

de la dinámica del consenso en el caso de evolución sistémica sin formación de configuraciones con estados coherentes sin consenso (franjas). En consecuencia, y conforme a [35], aquellas simulaciones Monte Carlo que requieran mas de $1,5 \times 10^6$ ciclos fueron excluidas del análisis.

Observaciones A pesar que las variaciones de $P_{CS}(\Delta M)$ son muy pequeñas, la tendencia claramente difiere de disminuir P_{CS} con el incremento in la diferencias de las densidades iniciales spin observadas en el modelo de RM de dos estados en [35].

Se encontró que los tiempos de consenso en realizaciones sin lfranjas están distribuidos siguiendo una distribución de Pearson, mientras que la media, la mediana y la moda son independientes de ΔM , no obstante que Δp incrementa con ΔM . Al mismo tiempo, encontramos que las probabilidades de alcanzar consenso para spines positivos (P_1) o negativos (P_{-1}) son casi funciones lineales de ΔM , es decir,

$$\Delta P = P_1 - P_{-1} \cong b\left(\frac{\Delta M}{m_0}\right)$$

Mientras que

$$\Delta P \cong c(\Delta p)^\beta,$$

con $b = 0,71$ $c = 3,33$ y $\beta = 0,8$ (Ver Figura 3.9), mientras que el símbolo \cong denota igualdad aproximada en la precisión de los datos, así las ecuaciones anteriores reflejan las tendencias, mas que relaciones exáctas.

En el contexto de la dinámica de la opinión, que disminuya p_{-1} y la probabilidad de ganar P_{-1} cuando la heterogeneidad en la distribución espacial del partido aumenta explica el muy bien conocido hecho que “la fuerza electoral de un partido político no solo depende del número de miembros activos, si no también sobre su distribución espacial sobre los distritos electorales” [10]. En este marco, la drástica disminución de la probabilidad de obtener configuraciones largas de estados coherentes en el modelo RM de tres estados ilustra el efecto de los votantes indecisos sobre la posibilidad de formar regiones geográficas con cuasi estable preferencia política. Sin embargo, a pesar que la concentración de adeptos en los partidos en pocos distritos permite disminuir la posibilidad de ganar, esto permite la formación de regiones estables con dominancia de un partido.

Conclusiones sobre el modelo para la heterogeneidad espacial inicial

Proponemos un nuevo modelo de tres estados de RM en el cual uno de los estados es neutral. Este modelo permite estudiar los efectos de la heterogeneidad en la distribución inicial espacial de spins distintos de cero sobre dinámicas que siguen la RM. Encontramos que los estados neutrales desaparecen completamente después de $t_0 = (3 \pm 0,5)N$ ciclos (pasos de actualización) después de los cuales el sistema se desenvuelve en un régimen de dos estados. La diferencia de las densidades de spines distintos de cero, en la transición de tres estados a dos estados se encontró ser una

función creciente de $|H_{+1} - H_{-1}|$. Además, la diferencia entre las probabilidades para alcanzar el consenso con todos los nodos en estado $s = 1$ ó todos en $s = -1$ se encontró que es una función lineal de $|H_{+1} - H_{-1}|$, mientras que los tiempos de consenso sin estados coherentes es independiente de las distribuciones espaciales iniciales de estados alternativos. No obstante, sorprendentemente, encontramos que la probabilidad de formar un estado coherente sin consenso, es una función creciente de $|H_{+1} - H_{-1}|$. Esos resultados son discutidos en el contexto de la dinámica de la opinión. Mas aún, nuestros resultados otorgan un destello en la dinámica de sistemas de tres estados que se desenvuelven de acuerdo a la regla de la mayoría, las cuales modelan una vasta variedad de sistemas físicos, biológicos, y sociales. Esperamos que los resultados presentados en este breve estudio estimularán futuras investigaciones tanto analíticas como numéricas en esta dirección [11].

Efectos en las coaliciones de dos partidos

En el presente Capítulo estudiamos la dinámica de la opinión bajo la RM en un sistema compuesto por tres partidos P_1, P_2 y P_3 (agentes activos) mas votantes indecisos U (agentes inactivos), y dónde los partidos P_1, P_2 forman la coalición P_{12} . Los partidos estan distribuidos sobre una red \mathcal{R} , que para efectos de nuestros análisis consideramos solo los tamaños $N = 50^2, 100^2, 150^2$. Al formar la coalición un partido, nuestra dinámica esencialmente es una dinámica bajo la RM para dos estados estudiado en [35]. Axelrod (Ver [3]) estudia la formación de alianzas, considerando a cada partido como una partícula que interacciona con el resto. Presentamos cuatro modelos tipo spin, tres de los cuales exhiben los posibles escenarios finales que comparten los dos partidos que integran la coalición, uno donde el resultado de los comicios favorece al partido menor, otro en el cual el partido que se favorece es el partido mayor, y por último un modelo que no favorece a ninguno de los dos partidos de la coalición, el cuarto modelo examina los efectos que resultan de considerar un nuevo conjunto en las configuraciones de empate. Nuestros análisis fueron relizados mediante la óptica de la física estadística, con simulaciones tipo Monte Carlo. Nuestros resultados son discutidos bajo un contexto sociofísico e interpretados en situaciones político sociales.

La actividad política y las leyes electorales, son dos aspectos de gran interes dentro de toda sociedad democrática. Uno de las actividades mas importantes dentro de las estrategias efectuadas por los distintos partidos políticos es el manejo de su alianzas electorales o coaliciones. Del buen manejo que se realice con las alianzas determinara en gran medida el futuro político de un partido. La sinergia que surge dentro del bloque de partidos coaligados repercute sustancialmente dentro de los intereses políticos (índices de votación, escaños) de cada partido. Es un derecho contitucional en muchos sistemas democráticos permitir la formación y participación de coaliciones dentro de la actividad política.

En términos generales, la evaluación final que tiene un partido político de su coalición puede ser favorable, desfavorable o neutral. Una de las motivaciones para realizar este trabajo fue abordar el problema de la dinámica de la opinión y las coaliciones bajo el enfoque de los sistemas complejos y la sociofísica y llevar los modelos clásicos de formación de opinión de dos estados, a modelos mas generales que contemplaran la formación de coaliciones. Nuestro objetivo inicial es plantear modelos de tipo spin que describen la dinámica de la opinión y los posibles escenarios finales para un partido dentro de una coalición doble que compite con un tercer partido. El ejemplo social referente a nuestros modelos, lo encontramos en un proceso de votación. A pesar que no consideramos la influencia externa dentro del sistema, ni los factores psicológicos de los individuos, y en su lugar consideramos solo simples reglas de interacción local como la regla de la mayoría, que simplifican la formulación y su análisis, las conclusiones que se desprenden de nuestros análisis pueden ayudara la mejor entendimiento de un sistema tan complejo como lo es el un sistema social-político, y además estimular futuros estudios en estas direcciones.

4.1. Características generales para los modelos

Las características principales de los modelos que usaremos en este Capítulo son similares al modelo introducido en el Capítulo 2, Sección 2.3. De manera general, la dinámica de los modelos que proponemos, consiste en distribuir tres partidos de forma aleatoria y uniforme sobre el enrejado \mathcal{R} (Figura 4.1) para despues proceder a seleccionar aleatoriamente cada uno de los nodos e inspeccionar el grupo de discusión G formado por su vecindad cerrada, en este punto la RM decide entre P_{12} y P_3 quien gana la votación de G . Si G esta constituido solo por elementos de P_1 y P_2 no hay cambio alguno ya que los partidos en coalición no compiten entre si.

Una vez que por medio de la RM la coalición P_{12} obtiene la mayoría, hay que decidir a quien de los dos integrantes se le proporcionará la votación del grupo, lo cual se realiza mediante una regla de actualización particular de cada modelo, la cual referimos como *regla de distribución de la votación entre partidos de la coalición*, o si el contexto lo permite, simplemente regla de la coalición. Otra consideración importante son los empates (ver la Tabla 2.1 del Capítulo 2), es decir configuraciones dentro del grupo de discusión para de las cuales la RM o la regla de la coalición no puede decidir a que partido otorgarle la votación, para estos casos la forma en la cual cada modelo elige un partido es mediante la *regla de desempate*. Un ejemplo lo tenemos en un grupo de discusión con cinco elementos, formado por dos integrantes de la coalición y dos del tercer partido mas un votante indeciso, esta configuración no la puede descidir la RM, asi que necesitamos de una nueva regla para este tipo de empates. Si el sistema no contiene votantes indecisos no se presentan empates entre la coalición y el tercer partido, solo se presentan empates al decidir el voto de la coalición, esto ultimo dependiendo de la regla de coalición



Figura 4.1: Distribuciones iniciales para los tres partidos

utilizada. La regla para la distribución de la votación entre partidos de la coalición y la regla de desempate, junto a la forma de distribuir inicialmente cada uno de los partidos son parámetros que caracterizan nuestros modelos de coalición. En todas las simulaciones y análisis realizados en cada uno de los modelos de este Capítulo no hay votantes indecisos, lo que implica que no consideramos empates entre P_{12} y P_3 .

Figura 4.1 muestra una distribución inicial típica para nuestro sistema, el color blanco es para P_3 , el negro para P_1 y el gris para P_2 .

Otra característica importante son los posibles estados finales que se presentan. La regla de la mayoría entre P_{12} y P_3 ocasiona que eventualmente llegue el consenso, lo cual dependiendo si se forman estados con cinética lenta (franjas) lleva un tiempo considerable. Siguiendo a [35], las dinámicas que presenten más de 600 ciclos (actualizaciones de tamaño N) son consideradas como estados franjas y termina la dinámica sin lograr el consenso. Entonces, los posibles estados finales dentro de nuestros modelos de coalición son: consenso para P_{12} ó consenso para P_3 ó presencia de un estado franja, y dependiendo de cada modelo, tenemos distintos valores de para las densidades finales de P_1 , P_2 .

4.1.1. Criterio para evaluar la coalición

Una de las motivación principal que originó el interés por buscar modelos de coalición que generalizaran nuestros estudios para dos partidos. Nuestro interés inicial es evaluar la dinámica de la opinión dentro de los integrantes de la coalición.

Al inicio de cada simulación tenemos n_1 y n_2 nodos por cada partido de la coalición P_{12} , más n_3 nodos del partido P_3 ($n_1 + n_2 + n_3 \leq N$), al final de la dinámica, y dependiendo del estado final que se presente, el sistema tiene f_i nodos del partido P_i con $i = 1, 2, 3$, en caso que la coalición obtenga el consenso tenemos ($f_1 + f_2 = N$). Aplicamos el método Monte Carlo (Ver Sección 1.7.1) y repetimos el experimento R_{max} veces, tomamos el número de veces que gana la coalición P_{12} el cual designamos por g_{12} , y tomamos el promedio de nodos finales que pertenecen

al partido menor entre el número de nodos finales del partido mayor. Es decir,

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{g_{12}} \frac{f_1(j)}{f_2(j)}}{g_{12}} \quad (4.1.1)$$

dónde $f_i(j)$ indica el número de nodos finales del partido i ($i = 1, 2$) en la simulación j ($j = 1, \dots, g_{12}$). Suponiendo que P_1 es el partido menor dentro de la coalición (menor en cuanto a número de simpatizantes iniciales), consideramos las variables: $I = \frac{n_1}{n_2}$, F . Entonces, para decidir quien de los dos partidos que forman la coalición se favoreció usamos los siguientes criterios.

- Si $F > I$, el partido menor se favoreció en la coalición.
- Si $F < I$, el partido mayor se favoreció en la coalición.
- Si $F \approx I$, la coalición no favoreció a ninguno de sus partidos que la integran.

El caso que presenta $F \approx I$, indica que al final de la dinámica del modelo, ambos partidos en promedio conservaron sus proporciones iniciales que tenían al inicio de la dinámica.

De esta forma para cada distribución inicial con n_1, n_2, n_3 simpatizantes por partido, y dependiendo de R_{max} , y del número de ocasiones que la coalición logre el consenso, tenemos un conjunto de densidades promedio finales por partido, las cuales designamos por p_1 y p_2 . Graficamos en una dispersión estos valores y analizamos su comportamiento estadísticamente, esto para decidir a quien favoreció el modelo. En las siguientes secciones presentaremos los detalles de cada uno de modelos.

4.2. Modelo que favorece al partido menor de la coalición

4.2.1. Modelo 1: Selección aleatoria

Para este modelo, las reglas de coalición y desempate consisten en seleccionar aleatoriamente entre P_1 y P_2 con la misma probabilidad (Figura 4.2 partes (b) y (d)), y cuando hay un empate que involucra a solo un elemento de la coalición y el tercer partido, digamos P_1 y P_3 se elige aleatoriamente entre P_1 y P_3 con la misma probabilidad (Figura 4.2 parte (c)).

Los diagramas de flujo y los procedimientos para este modelo fueron presentados previamente en la Sección 2.3.4 del Capítulo 2.

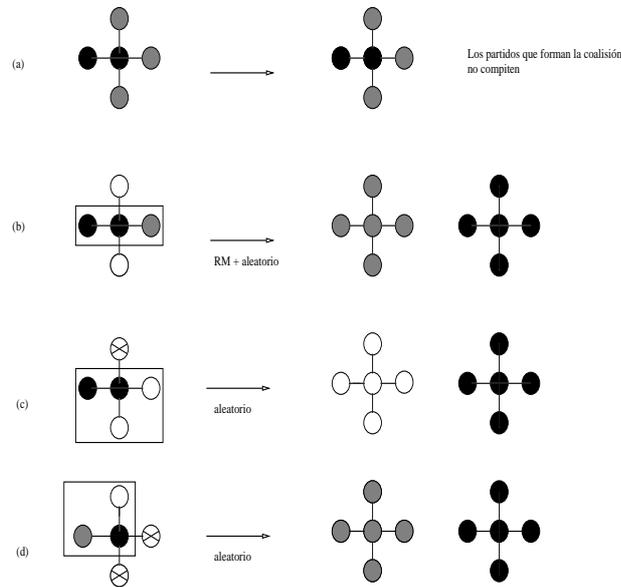


Figura 4.2: Reglas de transición para el modelo que beneficia al partido menor

Distribuciones iniciales Repartimos cada uno de los tres partidos (agentes activos) de forma uniforme sobre el enrejado \mathcal{R} , esto sin considerar alguna división distrital. La Figura 4.1 muestra una distribución típica, la coalición tiene colores gris, el tercer partido tiene color blanco, sin presencia de votantes indecisos.

Las reglas de actualización La regla de transición que decide si un determinado grupo de discusión dentro la red cambia a favor de la coalición P_{12} ó a favor de P_3 es la RM. Una vez que gana la coalición dentro de un grupo de discusión, decidimos a quien de sus integrantes se le asignará la votación de todo el grupo. Una vez que la RM otorga la votación a P_{12} seleccionamos aleatoriamente con la misma probabilidad (lanzamiento de una moneda) entre el partido P_1 y P_2 , lo cual asigna la votación del grupo de discusión. Si se presenta algún empate (Ver Tabla 2.1) estos se deciden seleccionando aleatoriamente entre los partidos empatados, esto con la misma probabilidad.

En la Figura 4.2 se muestra un ejemplo del empleo de estas reglas dentro de nuestro modelo.

S. Galam en [17] señala que una forma oportuna de desempatar es simplemente no realizar nada, que la dinámica siga su curso. Desde la perspectiva del partido menor, el no haber cambio en los empates le resta posibilidad de ganar votos, lo cual beneficia al partido grande. Las reglas para los empates pueden determinar la dirección de la votación siempre y cuando el porcentaje con que se presenten los empates sea lo suficientemente cuantioso para tomarlo en consideración. En nuestros modelos los empates solo se presentan cuando hay votantes indecisos.

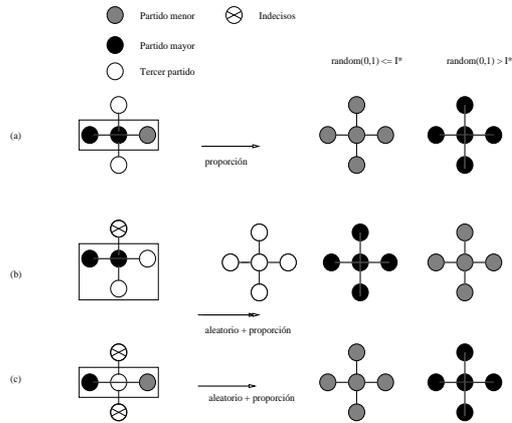


Figura 4.3: Reglas de transición para el modelo que mantiene la proporción

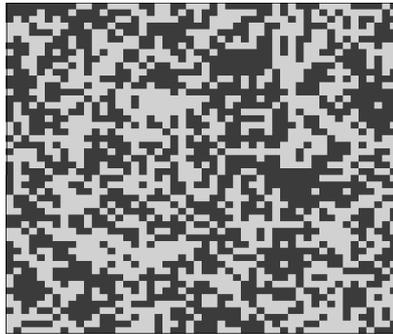


Figura 4.4: Un estado final para el modelo 1

Dinámica del modelo Iniciamos repartiendo el 50% del total de nodos como nodos de la coalición P_{12} ($n_1 + n_2 = \frac{N}{2}$), los nodos restantes para P_3 . Mediante nuestro simulador variamos n_1 desde $0,05N$ a $0,25N$ con incrementos de $0,05$, repitiendo el experimento cada vez 300 ocasiones.

Otra característica importante en este modelo es que la selección aleatoria solo se aplica cuando la coalición gana o tiene mayoría dentro de un cierto grupo y además hay al menos un individuo por cada integrante de cada partido, por el contrario si gana la coalición pero solo con elementos de un partido entonces la vecindad se transforma en el partido que gana y no se selecciona aleatoriamente, de esta forma no se involucra el otro partido.

La Figura 4.4 muestra un estado final en el cual gana la coalición.

La Tabla 4.1 podemos ver los resultados de algunas simulaciones dentro de nuestro modelo (realizadas mediante el ACM).

El análisis de los datos provenientes de las simulaciones realizadas a este modelo, observamos que bajo el criterio de la Sección 4.1.1, el partido que se beneficia en la coalición es el partido menor. En la gráfica de dispersión de la Figura 4.5 observamos $F > I$ y que la tendencia que siguen los datos es logarítmica y se comportan como $F(I) \approx 0,12 \ln(I) + 1$. Mas aún, a medida que aumenta el número

N	n_1	n_2	R_{max}	g_{12}	I	F	σ	Error
2500	625	625	300	110	1	1,0003	0,0675	$1 \pm 0,0675$
	500	750		122	0,666	0,9922	0,0644	$0,9922 \pm 0,0644$
	375	875		132	0,4285	0,9412	0,0704	$0,9412 \pm 0,07$
	250	1000		134	0,25	0,9048	0,0805	$0,9048 \pm 0,08$
	125	1125		129	0,11	0,8015	0,1165	$0,8015 \pm 0,1165$

Cuadro 4.1: Parámetros iniciales y resultados de las simulaciones en el modelo 1 de nodos iniciales del partido menor, aumenta su planilla al final de la dinámica.

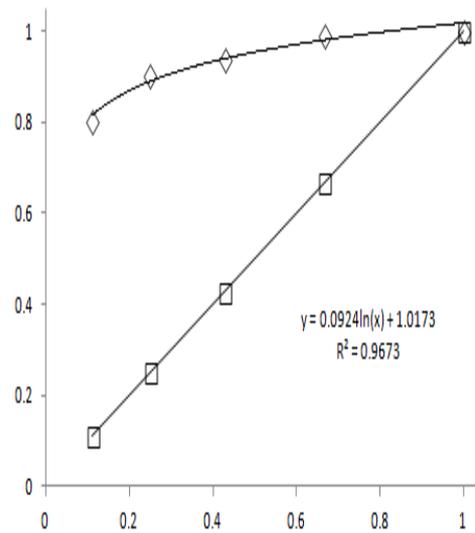


Figura 4.5: F versus I en el modelo de selección aleatoria

Una forma de tomar decisiones binarias es mediante el clásico lanzamiento de una moneda, si bien esta experimento y su distribución es equitativo y no favorece a ninguna opción. La regla de coalición aleatoria usada en este modelo muestra como el beneficio depende de la cantidad de nodos iniciales por cada partido.

4.3. Modelo que favorece al partido mayor de la coalición

4.3.1. Modelo 2: Doble regla de la mayoría y empates aleatorios

En este modelo los resultados de la dinámica bajo el criterio de la Sección 4.1.1 favorecen al partido mayor de la coalición. La idea básica, consiste en impedir

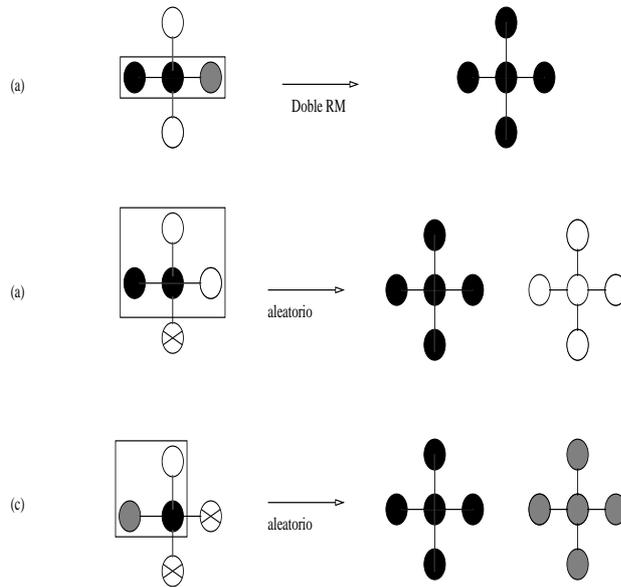


Figura 4.6: Reglas de transición para el modelo que beneficia al partido mayor

que el partido menor gane adeptos, o dicho de otra forma, permitir que el partido mayor aumente su votación; esto lo conseguimos usando por segunda vez la RM, pero ahora dentro de la coalición, con esta nueva aplicación tenemos que el partido beneficiado es el partido que tenga mas representatividad, lo cual favorece al partido mayor de forma amplia. Si la aplicación de la RM dentro de la coalición no puede descidir (empate) entonces elegimos aleatoriamente y con la misma probabilidad al partido ganador. La regla para los empates consiste en seleccionar como ganador aleatoriamente entre los partidos involucrados.

La distribuciones iniciales para los tres partidos son uniformes en el enrejado, al igual que en el modelo de la Sección 4.2.

Dinámica del modelo Inicia la dinámica seleccionando N nodos, un nodo a la vez, y permitiendo la repetición, esto es lo que llamamos un ciclo de repetición. La regla de transición para la coalición es inspeccionar un nodo y su grupo de discusión, si bajo la RM gana P_{12} , volvemos a aplicar la RM pero ahora al subgrupo formado por los nodos que integran la coalición, de esta forma aquel partido tenga más integrantes es el que determinara el estado futuro del grupo de discusión. Si se presenta un empate al aplicar la RM a la coalición seleccionamos aleatoriamente entre P_1 y P_2 . La regla para los empates es elegir aleatoriamente entre los partidos presentes en el empate.

Esta regla favorece al partido mayor y que el partido menor ciertamente no tiene posibilidades de ganar alguna vecindad, queda totalmente devastado. La Figura 4.6 muestra un ejemplo del uso de estas reglas.

En presencia de empate, el grupo elige de forma aleatoria. Esto último resta



Figura 4.7: Un estado final para el modelo 2

N	n_1	n_2	R_{max}	g_{12}	I	F	σ	Error
2500	625	625	300	123	1	1,02	0,858	$1 \pm 0,858$
	500	750		131	0,666	0,4878	0,355	$0,4878 \pm 0,355$
	375	875		107	0,4285	0,1705	0,1291	$0,17 \pm 0,129$
	250	1000		120	0,25	0,0646	0,0788	$0,065 \pm 0,078$
	125	1125		120	0,11	0,0108	0,0217	$0,012 \pm 0,022$

Cuadro 4.2: Parámetros iniciales y resultados de las simulaciones en el modelo 2

las pocas posibilidades que el partido menor tiene para ganar votos. Este modelo favorece al partido mayor con una marcada tendencia, exhibiendo la desaparición casi total del partido menor.

La Figura 4.7 muestra un estado final dentro de este modelo, en el cual gana la coalición.

En la Tabla 4.2 podemos ver los resultados de algunas simulaciones para el modelo 2.

Si el partido menor es P_1 , y suponemos que tenemos los valores iniciales de la tabla 4.2, donde el comportamiento de F en función de I que se ajusta adecuadamente por la función cuadrática $F = 1,05I^{2,07}$ (Figura 4.8).

Estos resultados indican que a medida que disminuyen los simpatizantes iniciales del partido mayor, disminuye su proporción final dentro de la coalición, de forma exponencial.

4.3.2. Modelo 2,1: Acuerdos previos dentro de la coalición

Las coaliciones tienen acuerdos previos que determinan como repartirse las votaciones, en situaciones donde los votantes que marcan en la planilla a toda la coalición. Nótese que la regla de la coalición dentro del modelo 2 el cual exhibe un beneficio final para el partido mayor, presenta situaciones en las que no puede decidir a quien de los dos partidos coalicionados asignarle la votación, situación que desempata de forma aleatoria. Al tomar en cuenta estos casos de empate como un nuevo conjunto en la dinámica, tenemos una forma de representar una

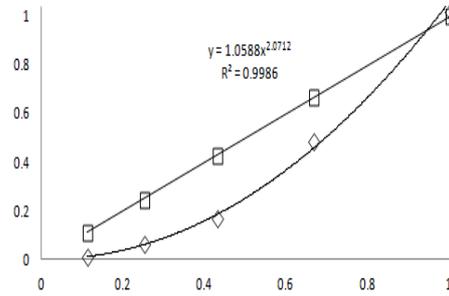


Figura 4.8: F versus I en el modelo con doble regla de la mayoría

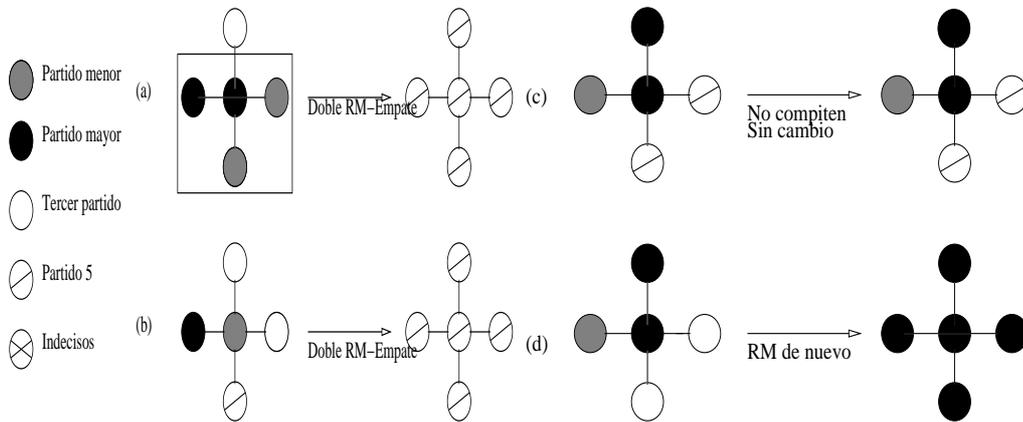


Figura 4.9: Transiciones con un nuevo conjunto para los empates

votación que ha elegido a ambos partidos, y por lo tanto se repartirá proporcionalmente conforme a los acuerdos. Modificando nuestro modelo anterior obtenemos un análisis que considera la situación.

Modificaciones al modelo 2 Tanto la forma de inicial de repartir los nodos iniciales como el tamaño de los grupos de discusión, y la forma de elegir seleccionar los nodos, es similar al modelo de la Sección 4.3.

Cada vez que encontramos algún empate bajo la RM para P_{12} , marcamos a los integrantes del grupo de discusión como nodos de un nuevo conjunto de la coalición que designamos por E (Ver la Figura 4.9 parte (a)). Los partidos P_1 , P_2 y el conjunto E no compiten entre si. Esto quiere decir que si tenemos un grupo de discusión formado con integrantes de P_1 , P_2 , E su estado depende de la cantidad de nodos de P_1 y P_2 y si es el caso que se presente un empate el grupo se volviera del tipo E .

El análisis de nuestras simulaciones muestra que la cantidad de votantes del

N	n_1	n_2	R_{max}	g_{12}	I	F	$ E $	$\sigma(F)$	Error	$\sigma(E)$
2500	625	625	300	198	1	1,09	168	0,5	$1,09 \pm 0,5$	42,6
	500	750		212	0,666	0,32	124,3	0,24	$0,32 \pm 0,24$	45,1
	375	875		207	0,4285	0,1	68,5	0,08	$0,1 \pm 0,08$	36,2
	250	1000		212	0,25	0,02	21,0	0,025	$0,02 \pm 0,025$	18,2
	125	1125		206	0,11	0,004	5	0,009	$0,004 \pm 0,009$	7,14

Cuadro 4.3: Parámetros iniciales y resultados de las simulaciones en el modelo 2,1

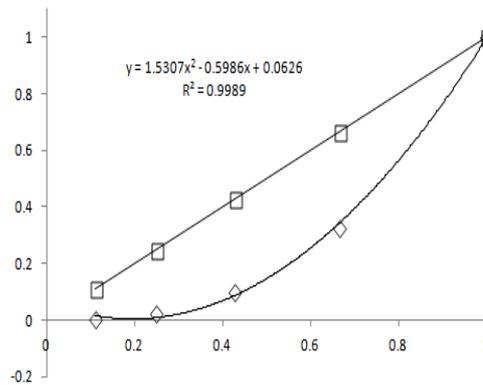


Figura 4.10: F versus I en el modelo 2,1

conjunto E crece a medida que aumentamos el número de simpatizantes iniciales del partido menor. El modelo 2,1 favorece al partido mayor, como lo muestra los datos en la Tabla 4.3, con una tendencia cuadrática del tipo $F(I) = 1,53I^2 - 0,6I + 0,06$. Ver Figura 4.10.

4.4. Modelo que no favorece ningún integrante de la coalición

4.4.1. Modelo 3: Mantener la proporción inicial

En esta sección vamos a introducir un modelo para el sistema con tres estados e indecisos, el cual al final de la dinámica mantiene la proporción inicial de individuos para integrante de la coalición ($I \approx F$). Al igual que en los modelos de las Secciones 4.2 y 4.3, suponemos que el partido menor es P_1 , y que los agentes activos del sistema están inicialmente repartidos de forma uniforme en el enrejado, Figura 4.1. Para cada instancia inicial del sistema consideramos la proporción de nodos que hay del partido menor con respecto a la coalición, la cual designamos

por I^* . Ver Ecuación 4.4.2. Es decir,

$$I^* = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad (4.4.2)$$

Una vez que se reparten todos los tres partidos en \mathcal{R} , el parámetro I^* decidirá a que integrante de la coalición asignamos la votación del grupo. Seleccionamos un número aleatorio r de manera uniforme en $[0, 1]$, si $r \leq I^*$ el partido menor sale electo, si no se elige al partido mayor. Para una mejor comprensión de esta regla ver la Figura 4.11.

Dinámica Iniciamos la dinámica seleccionando los nodos del enrejado e inspeccionando cada una de sus vecindades, esto lo realizamos seleccionando aleatoriamente cada nodo permitiendo dentro de la selección el remplazo. Si al analizar un grupo de discusión conforme la dinámica de la RM entre P_{12} y P_3 , se determina que gana la coalición (Figura 4.11 parte (a)), se escoje un número aleatorio r en $[0, 1]$, si $r \leq I^*$ la votación del grupo se asigna a P_1 , si por el contrario $r > I^*$ entonces la votación del grupo es para P_2 , esta regla la llamamos regla de la proporción. De esta forma, estamos seleccionando la votación del grupo de discusión entre P_1 y P_2 , con una probabilidad que mantiene la proporción de sus simpatizantes.

Si tenemos un grupo de discusión el cual solo contiene únicamente algún miembro de la coalición, o bien P_1 o bien P_2 , la regla de la proporción se aplica nuevamente, dándose el caso que el grupo de discusión otorge la votación a un partido de la coalición que no tenía ningun simpatizante (Figura 4.11 parte (b)). Esta regla la llamamos regla de *coalición permanente*. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.1. *Supongamos que $I^* = 0,2$ y $random(0, 1) = 0,1$, entonces el actual grupo de discusión se volvera a favor del partido P_1 . Si estamos examinando una vecindad del tipo $\{2, 3, 2, 2, 2\}$ entonces este grupo cambiará su estado a $\{1, 1, 1, 1, 1\}$.*

La regla para los empates consiste en seleccionar uno de ellos aleatoriamente con la misma probabilidad, si gana la coalición, de nuevo aplicamos la regla de proporción para elegir entre P_1 ó P_2 .

Ejemplo 4.4.2. *Supongamos que $I^* = 0,3$ y $random(0, 1) = 0,4$, entonces el grupo de discusión examinado se volvera a favor del partido P_2 . Si estamos examinando una vecindad del tipo $\{1, 2, 0, 0, 0\}$ entonces esta cambiará a $\{2, 2, 2, 2, 2\}$, en cambio si examinamos el grupo $\{2, 2, 3, 3, 0\}$, este no presentara cambio alguno.*

La Figura 4.12 muestra un estado final en el cual gana la coalición.

La Tabla 4.4 podemos ver los resultados de algunas simulaciones.

Con la reglas de proporción y de coalición permanente, evitamos que un partido aumente sus adeptos de manera desproporcionada superando a su compañero, asi, la estabilidad para las proporciones I, F se mantiene durante la dinámica. Al final de la dinámica tenemos $F \approx I$ (Figura 4.13). Si por el contrario, se omite la regla

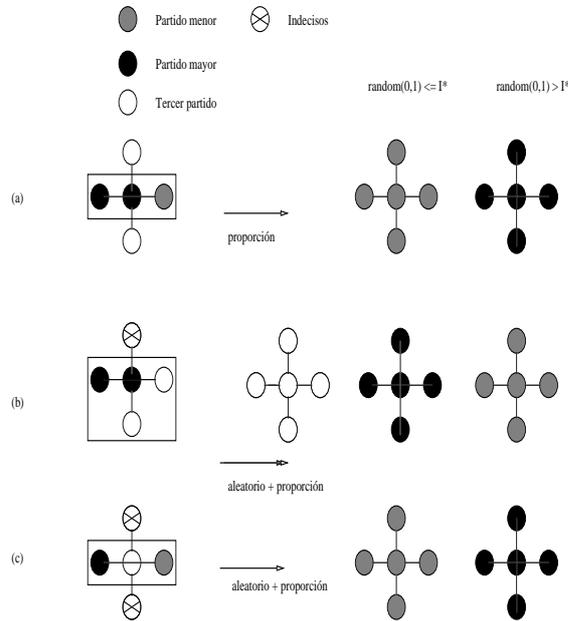


Figura 4.11: Reglas de transición para el modelo que mantiene la proporción

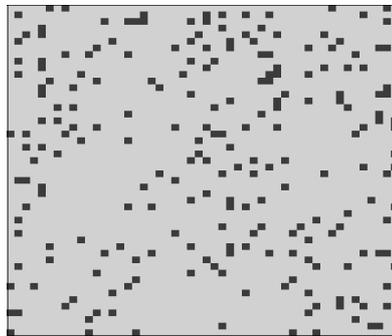


Figura 4.12: Un estado final para el modelo 3

N	n_1	n_2	R_{max}	I^*	g_{12}	I	F	σ	Error
2500	625	625	300	0,5	121	1	1,0004	0,0066	$1 \pm 0,006$
	500	750		0,4	126	0,6666	0,6655	0,0116	$0,666 \pm 0,01$
	375	875		0,3	122	0,4285	0,4297	0,0196	$0,43 \pm 0,02$
	250	1000		0,2	134	0,2500	0,2502	0,0263	$0,25 \pm 0,026$
	125	1125		0,1	117	0,1111	0,1115	0,0445	$0,11 \pm 0,04$

Cuadro 4.4: Parámetros iniciales y resultados de las simulaciones en el modelo 3

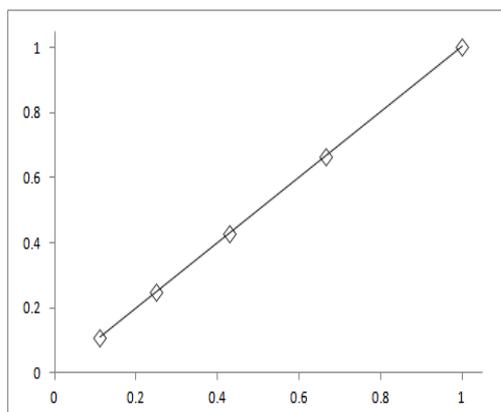


Figura 4.13: F versus I en el modelo que mantiene la proporción

de coalición permanente, entonces el partido que tiene mayor presencia en el grupo tendría la votación, aumentando su número de simpatizantes, es decir lo beneficia.

Observaciones en el Modelo 3

- La dinámica entre P_{12} , P_3 y U y su análisis de las variables sobre el tiempo para consenso, tiempo para desaparecer indecisos, y probabilidades de salida, son semejantes al modelo de la RM para dos estados y votantes indecisos.
- El hecho que un grupo de discusión adopte el voto por un determinado partido dentro de la coalición a pesar que no contar con simpatizantes de dicho partido es un tanto irreal, sin embargo puede ser considerado con una medida dónde los acuerdos de coalición se respetan durante toda la dinámica.
- Si en nuestro modelo fijamos $I^* = c$ con $c \in (0, 1)$ para toda instancia inicial, lo que obtenemos es un modelo nuevo el cual dependiendo del valor de c favorece o no al partido menor (partido mayor). Con $c = 0,5$ recuperamos el modelo que favorece al partido menor (Sección 4.2), si c es suficientemente pequeño tenemos otro nuevo modelo que favorece al partido mayor.

El resumen de las características (siempre y cuando gane la coalición) para cada uno de los modelos presentados en este Capítulo lo podemos ver en la Tabla 4.5. Recordar que cada uno de los modelos las distribuciones iniciales son uniformes en \mathcal{R} , su dinámica esta basada en la RM con un máximo de 600 ciclos para considerar la dinámica como un estado franja.

Conclusiones de los modelos de coalición En el espíritu de la mecánica estadística, examinamos la diseminación y dinámica de la opinión para tres partidos u opiniones, un estado neutral, y una coalición doble. La dinámica de la opinión se rige por la RM. Distintos modelos como el modelo de Ising, Sznajd o el del votante

Modelo	$M1$	$M2$	$M3$	$M2,1$
Regla de distribución de la votación entre los partidos de la coalición	Aleatorio con igual probabilidad	RM local	Aleatorio con probabilidad	RM, con un nuevo conjunto de coalición para los empates
Regla de desempate		Aleatorio entre los partidos empatados	$I^* = \frac{n_1}{n_1+n_2}$ para el partido menor	Si no hay votantes de P_4 : aleatorio entre los partidos empatados, sino, la votación es para P_4
Partido de la coalición favorecido	Menor	Mayor	Ninguno	Mayor

Cuadro 4.5: Características para los modelos de coalición

(ver Secciones 1.6.3, 1.6.1, 1.6.4) toman en cuenta que la opinión tiene solo dos estados, si bien las respuestas a muchas cuestiones sociales tienen un carácter de dicotomía. Introducir mas opiniones (o partidos políticos) a un sistema generaliza los estudios y tiene sentido en situaciones donde la opinión contempla más de dos opciones excluyentes. Por ejemplo, a diferencia de E.U. donde las votaciones las representan únicamente dos corrientes políticas, en sociedades democráticas como México, la pugna por la preferencia política esta representada por almenos tres, y a su vez estos realizan coaliciones con partidos de menor impacto.

Los modelos presentados en este Capítulo son novedosos ya que incluyen un estado neutral como analogía a los votantes indecisos, consideran las interacciones de más de dos opiniones, y a su vez perminten que dos opiniones coalicionen. Reportamos la evidencia estadística de que cumplen con las características de su formulación, y el comportamiento estadístico verificado por los datos. La dinámica entre P_{12} , P_3 y U se comporta como un sistema de dos estados más votantes indecisos su análisis de las variables para los tiempos de consenso, probabilidades de salida, y los votantes indecisos es similar a nuestro análisis del Capítulo 3, expuesto también en [35]. Debido a que nuestros sistemas no estan afectados por ningún agente externo, nuestro análisis indica es los individuos que lo consituyen el sistema y ciertas reglas de interacción entre ellos pueden lograr el comportamiento planteado en cada uno de los modelos, esto sin necesidad de alguna influencia externa. De esta forma, el modelo de proporción, el cual no beneficia a ningún partido dentro de la coalición sugiere un forma particular de repartir los intereses dentro de una coalición doble y sus posibles efectos.

CAPÍTULO 5

Conclusiones y trabajo futuro

La naturaleza de los modelos spin presentados en este trabajo omite las consideraciones sociales clásicas sobre los aspectos psicológicos de los individuos, sin embargo permiten de manera relativamente sencilla y atractiva entender un poco algo tan complicado y complejo como el estudio y análisis del comportamiento colectivo de los sistemas sociales o económicos. Para destacar los desafíos a los que se enfrenta la física social, basta con detenerse a pensar en la cantidad de variables que se tienen que considerar para entender (y pronosticar) cada uno de los detalles involucrados en un proceso social, como el resultado de una elección, o la fluctuación del un activo financiero, o la formación de alianzas, o la influencia de las propagandas políticas en el electorado. El grado de influencia exterior varia de acuerdo a cada persona o cada grupo social, sin embargo en la colectividad global las personas reaccionan favorablemente a influencias o reglas de propaganda mediática. Cuando un dirigente (o el mismo modelador) dentro de su función se abstrae del sistema, lo considera como totalidad, dejando aun lado muchos valores individuales, la forma en como actua el sistema es muy poca información para saber sobre un individuo y *viceversa*. Cuestiones como el libre albedrío (libre voluntad) y determinismo o si los seres humanos se pueden responden a ciertas reglas que los asemejan a los estados spin magnéticos de los átomos estan sujetas a debates de índole filosófica [4, 5].

En el Capítulo 3, se introduce un modelo tipo espin, con estados neutral, que generalizan el clásico modelo spin de la regla de la mayoría con dos estados. A través de este modelo se estudiaron los efectos de la heterogeneidad inicial espacial dentro del sistema, como resultado de la interacción de los agentes y suponiendo que no existe influencia exterior alguna, analizamos y discutimos los comportamientos estadístico de algunas de las variables mas importantes del sistema. Al entrar el modelo en el régimen de dos estados, los resultados del Capítulo 3, obser-

vamos que confirman varias similitudes comparados con los resultados reportados del modelo clásico de la regla de la mayoría de dos estados. Nuestros análisis pueden ser aplicados sin dificultad en redes con tamaño arbitrario, no obstante, debido a que la complejidad temporal de los algoritmos crece rápidamente con el tamaño de la red, solo trabajamos sobre redes de tamaño $50^2, 70^2, 100^2$.

Encontramos que los estados neutrales desaparecen después de $t_0 = (3 \pm 0,5)N$, tiempo después el sistema entra en un régimen de dos estados. Se encontró que la diferencia de las densidades de opinión en el régimen de dos estados es una función creciente de ΔH_0 . Además la diferencia de las probabilidades de salida, es una función lineal de ΔH_0 , mientras que el tiempo de consenso es independiente de las distribuciones espaciales iniciales. Sorprendentemente, encontramos que la probabilidad de formar un estado de cinética lenta es menor comparado con un sistema de dos estados, y es una función creciente de ΔH_0 .

En el contexto de la dinámica de la opinión, los resultados presentados en el Capítulo 3 confirman el conocido hecho que la fuerza electoral de un partido depende no solo del número de integrantes que lo conforman, si no también de como esta distribuido geográficamente en su sociedad.

El hecho que nuestros análisis muestren que la probabilidad de alcanzar estados con cinética lenta disminuya, comparado con el sistema de dos estados, indica que los votantes indecisos pueden formar regiones geográficas con preferencias políticas semiestables, lo cual requiere un análisis particular. Nuestros resultados otorgan un estudio dentro de la dinámica de sistemas con tres estados que se rigen por medio de la regla la mayoría los cuales modelan una gran variedad de sistemas físicos y sociales.

En el Capítulo 4 se introducen cuatro nuevos modelos basados en agentes en los cuales interaccionan tres partidos y votantes indecisos sobre un enrejado; dos partidos forman una coalición, y suponemos que no hay influencia dentro del sistema proveniente de algún agente externo. Los escenarios finales posibles que un integrante de la coalición durante el transcurso de los comicios son tres: que aumente su votación, que disminuya, o que permanezca tal y como estaba al inicio del proceso. Los modelos presentados en el Capítulo 4 estan caracterizados por medio de sus reglas de evolución, y describen estadísticamente los tres escenarios finales posibles que pueden ocurrir al final de la dinámica. El hecho que nuestros modelos no esten influenciados por agentes externos muestra que es posible obtener estos comportamientos únicamente con la interacción de los agentes que componen el sistema.

Si bien, los modelos presentados en el Capítulo 4 estan restringidos en cuanto a consideraciones mas generales como la influencia exterior, o el tipo de red utilizada, conceptualizan de manera adecuada las interacciones entre tres partidos, y permiten un análisis apropiado y simple.

En el sistema democrático mexicano, las reglas de votación y la forma en como se reparten los votos dentro de las coaliciones estan en constante cambio, desde la reforma al Código Federal de Instituciones y Procedimientos Electorales (COFIPE)

efectuada en el 2007 y puesta en marcha en el 2008, el apartado de coaliciones modificó la forma en que la sociedad mexicana emite su voto en las urnas y boletas, los votos por una coalición registran el voto que se emite por cada uno de los partidos que la conforman, de este forma tenemos un registro mas preciso en cuanto a la simpatía tanto por un candidato y por un partido, estas observaciones fueron tomadas en cuenta mediante dentro del modelo de la Sección 4.3. Nuestros estudios en esta dirección pueden proveer información importante en estas direcciones, asi como también estimular futuros trabajos en materia electoral y política.

Trabajo futuro

Una generalización natural a nuestros estudios es considerar modelos spin sobre redes distintas a los enrejados, por ejemplo considerar redes dirigidas, o redes aleatorias, por mencionar algunas. Otra consideración útil sería usar grupos de discusión con tamaño variable, o considerar sistemas con mas de dos estados, asi como incluir la presencia de algún agente externo que influye el sistema.

El objetivo principal de los modelos presentados en el Capítulo 4 fue que cumplieran con características requeridas en su formulación, un trabajo posterior es incluir escenarios mas generales para nuestros modelos. Nuestros modelos de coalición se basan en la RM, una generalización en esta dirección sería considerar otra regla, por ejemplo la regla del modelo de Sznajd (ver 1.6.4), y comparar los resultados.

Otra generalidad a nuestros estudios son las consideraciones sobre la estructura sobre la cual los individuos propagan su opinión. En [7] realizan una comparación entre los resultados de las votaciones realizadas en Brazil en el año 1998 y el modelo de Sznajd (revisar 1.6.4) sobre redes tipo Barabási-Albert, obteniendo resultados satisfactorios. Los estudios de [13] *et al* sobre las elecciones de Brasil, muestran que la distribuciones de votos que sigue los candidatos siguen una ley de potencias, este hecho junto al la observación que las relaciones sociales deben ser respresentadas por medio de redes mas generales en lugar de enrejados, sustentan el uso de redes tipo Barabási-Albert en [7], y la Sección 1.6.9 del Capítulo 1.

Diversos estudios se han realizado para estudiar la dinámica de la opinión sobre redes, existiendo vastante material al respecto, ver [7, 33, 34]. Nuestros intereses en esta dirección se dirigen a justificar el uso y empleo de redes que permitan implementar y analizar nuestros modelos de opinión y votación, desde una perspectiva social y política; en particular nos cuestionamos cuales son el tipo de redes adecuadas para modelar sistemas sociales como los comicios o las coaliciones entre partidos. En general, el universo de sistemas que pueden ser modeledos por agentes es amplio: síntomas sociales como el estrés, o la ansiedad, el humor, *etc* pueden ser investigados mediante comportamientos colectivos de sistemas, y modelados mediante agentes.

Anexos

Anexo A: Diagramas de Flujo y código fuente

.1. Diagramas de flujo para el modelo de la Sección 2.3.4

Diagramas de flujo para los procedimientos: PRINCIPAL2, DISTRIBUIR2, Y DINAMICA2 en el modelo del Capítulo 2, Sección 2.3.4.

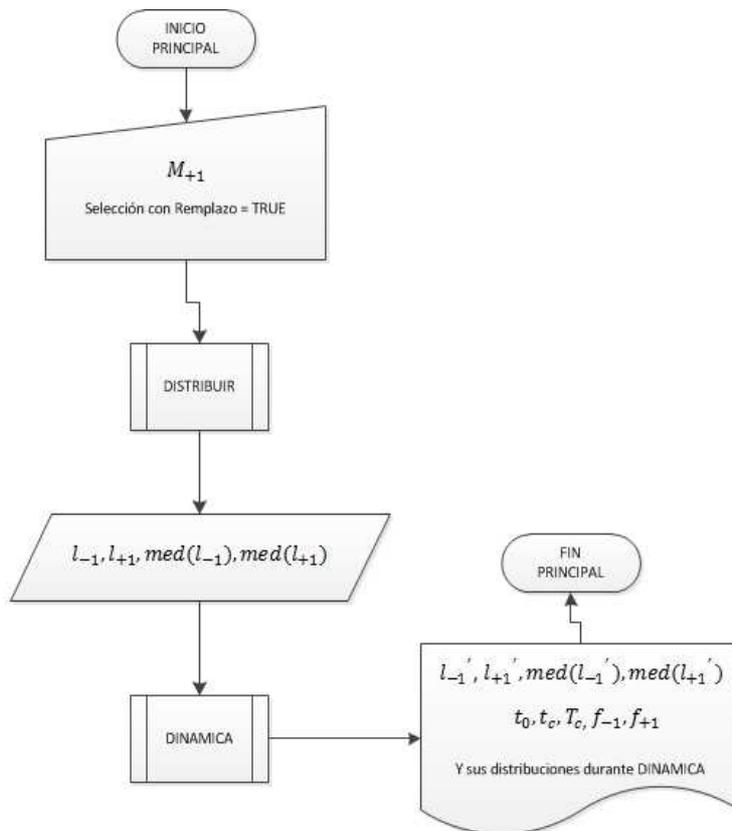


Figura 1: Procedimiento PRINCIPAL2

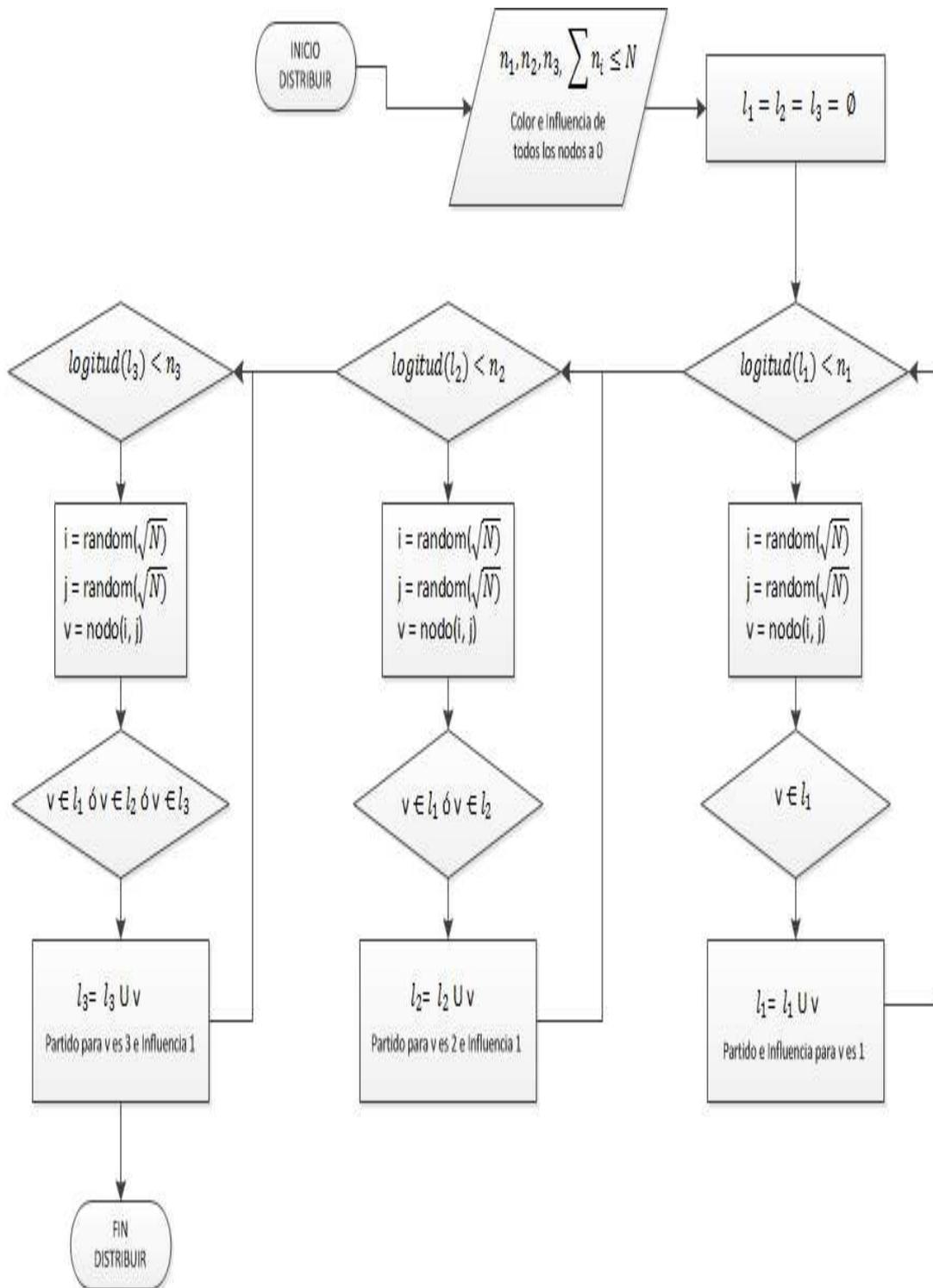


Figura 2: Procedimiento DISTRIBUIR2

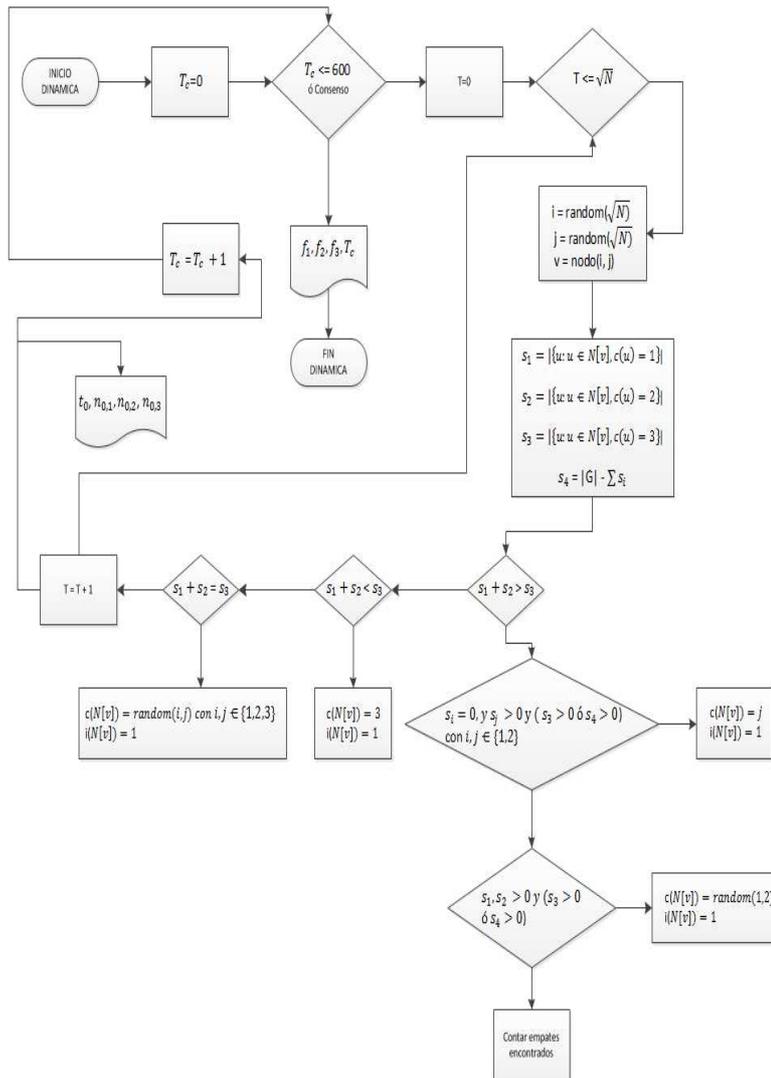


Figura 3: Procedimiento DINAMICA2

.2. Código fuente del para el modelo del Capítulo 3

```
;heteromediana.nlogo

;##### PREAMBULO: Variables generales, variables de patche.

globals[npixel i j casillas nodos nnodos2 nnodos3 n1 n2
        s0 sublista p2list p2listordered nnodostemp k r m
        d var medianalista LugardelNodoenCasilla x y
        ciclos xi yj sum-inf1 sum-inf2 a azul amarillo
        contador contciclos0 inip1 inip2 distritos p10
        p20 m1 m2 p10ordered p20ordered p10median p20median]

patches-own [partido influencia]

;##### PROCEDIMIENTO Setup

;Inicializacion del mundo, condiciones iniciales del sistema.
;Distribuciones iniciales entre los distritos.

to Setup

  __clear-all-and-reset-ticks    ;Borramos el mundo
  ask patches [set pcolor white] ;Indecisos color blanco

  ;Opcion para mostrar las fronteras de los distritos
  if mostrar-distritos = true
  [
    draw_cuadrícula
  ]

  ;Inicialmente todos los patches tienen partido e
  ;influcia 0
  ask patches [set partido 0 set influencia 0]

  set npixel[] ;lista 1:
  set nnodos[] ;lista 2: Lista auxiliar
  set nnodos2[] ;lista 3: Lista auxiliar
  set nnodos3[] ;lista 4: Lista auxiliar

  ;Tnodos almacena el numero total de nodos en el sistema
```

```

set Tnodos world-height * world-width

;La variable d almacena el numero total de distritos
;(25 para un mundo con dimensiones 50x50)
set d (Tnodos / 100)
set bloque3 ceiling (d / 2) ; Con d = 25, -> bloque3 = 13
set bloque2 d - bloque3      ; Con d = 25, -> bloque4 = 12

;nodos_bloque3 = 22*M2, Si M2 = 3, -> nodos_bloque3 = 39
set nodos_bloque3 bloque3 * mediana
;nodos_bloque2 = 10%N - nodos_bloque3,
;nodos_bloque2 = 250 - 39 = 211
set nodos_bloque2 (.1 * Tnodos) - nodos_bloque3

;numskewdistrict = 17
set numskewdistrict (floor (nodos_bloque2 / bloque2))
;numtaildistrict1 = 18
set numtaildistrict1 numskewdistrict + 1

;bloque3 = 211 - 17*12 = 6
set bloque4 nodos_bloque2 - (numskewdistrict * bloque2)
;nodos_bloque4 = 6 * 18 = 108
set nodos_bloque4 bloque4 * numtaildistrict1

;bloque5 = 25 - 13 - 6 = 6
set bloque5 ((d - bloque3) - bloque4)
;numtaildistrict2 = 17
set numtaildistrict2 numskewdistrict
;nodos_bloque5 = 102
set nodos_bloque5 bloque5 * numtaildistrict2

;Hay party 1 nodos por cada distrito, nodos_bloque1 y bloque1 son
;variables de entrada, comunmente con valores 250 and 25
set numleadistrict (floor (nodos_bloque1 / bloque1))

;Hay Party 2 nodos por cada distrito, 39 / 3 = 13, ya
;calculamos previamente nodos_bloque3 y bloque3
set numtaildistrict (floor (nodos_bloque3 / bloque3))

;Llenamos las listas auxiliares

repeat Bloque1 ;Repetimos 25 veces, esta es una variable de entrada.
[

```

```

;Llenamos lista nnodos con 0 [0 0 0 0 ... 0]
set nnodos sentence nnodos 0
;Llenamos lista nnodos2 con 101 [101 101 ... ]
;101 es un valor arbitrario para cumplir una condicion
set nnodos2 sentence nnodos2 101
;Llenamos lista nnodos3 con 0 [0 0 0 .. ]
set nnodos3 sentence nnodos3 0
]

;La lista nnodos esta asignada a P1
;Distribuimos los nodos de P1, P2 de tal forma
;que cada la suma de sus simpatizantes en cada distrito
;no sea mayor que 100
while[( map  [?1 + ?2 <= 100 ] nnodos nnodos2) != [true true true
true true true true true true true true true true true true
true true true true true true true true true true true]]
[
;Necesitamos que la suma de cada entrada en la lista
;nnodos sea igual a la establecida por la variable
;Nodos_Bloque1
while [sum nnodos != numaleadistrict * bloque1]
[
set j 0
set nnodos []
repeat Bloque1
[
;El numero de nodos por distrito del partido
;P1 (uniformemente distribuido), Nodos_bloques1 = 9
;La variable nnodos contiene la distribucion
;de p2 entre los distritos
set nnodos sentence nnodos numaleadistrict
set j j + 1
]
]
]

;La lista nnodos2 contiene los valores para
;la distribucion entre distritos
while [sum nnodos2 != nodos_bloque1 or (map
[?1 + ?2 <= 100 ] nnodos nnodos2) != [true true true true
true true true true true true true true true true true
true true true true true true true true true true true]]
[

```

```

    set j 0
    set nnodos2[]

    ;El numero de nodos por distrito del partido
    ;P2 (distribucion sesgada), Nodos_bloques1 = 9
    repeat Bloque3
[
set nnodos2 sentence nnodos2 numtaildistrict
set j j + 1
]

    repeat Bloque4
[
set nnodos2 sentence nnodos2 numtaildistrict1 ;
set j j + 1
]

    repeat Bloque5
[
set nnodos2 sentence nnodos2 numtaildistrict2 ;
set j j + 1
]
]
] ;Temina while/map

;Esta seccion distribuimos los nodos conforme
;a las listas anteriores

;Variable para contar el indice de lista
set k 0
;Lista de las coordenadas de distritos
set casillas[]

;Seleccionamos un distrito mediante la coordenadas
;(i,j) with i,j=0,10,20,...,d

;Necesitamos que bloque2 < bloque1
repeat Bloque1
[
;Un numero aleatorio entre 0, 10, 20, 30, 40
set i (random sqrt (Tnodos / 100)) * 10
set j (random sqrt (Tnodos / 100)) * 10

```

```

;El patche i j ya se inspecciono?
;Si es asi, repetimos la seleccion
while [member? patch i j casillas = true]
[
;Un numero aleatorio entre 0, 10, 20, 30, 40
set i (random sqrt (Tnodos / 100)) * 10
set j (random sqrt (Tnodos / 100)) * 10
]

;La lista Casillas contiene los patches
;revisados hasta la fecha

set casillas sentence casillas patch i j

;Una vez que seleccionamos una coordenada de
;un distrito, llenamos el distrito conforme
;a las listas para P1,P2.
;Iniciamos con P2

;List de coordenadas para patches
set LugardelNodoenCasilla []

;Los valores para k van de 0 hasta el
;numero de distritos para P2,
;las coordenadas i j
if k < Bloque3
[
repeat item k nodos2
[
set x i + random 10
set y j + random 10

;El patche x y ha sido ya elegido? si
;es asi repetimos
while [member? patch x y LugardelNodoenCasilla = true]
[
set x i + random 10
set y j + random 10
]
;El color para P2 es el negro.
ask patch x y [set pcolor black set partido 2 set influencia 1]
;La lista LugardelNodoenCasilla guarda los patches

```

```

    ;x y
    set LugardelNodoenCasilla sentence LugardelNodoenCasilla patch x y
  ]
]

if k >= Bloque3
[
  repeat item k nodos2
  [

    set x i + random 10
    set y j + random 10

    ;El patche x y ha sido ya elegido? si
    ;es asi repetimos
    while [member? patch x y LugardelNodoenCasilla = true]
    [
      set x i + random 10
      set y j + random 10
    ]

    ask patch x y [set pcolor black set partido 2 set influencia 1]

    if item k nodos2 = max nodos2
    [
      ask patch x y [set pcolor black set partido 2 set influencia 1]
    ]
  ]
  set LugardelNodoenCasilla sentence LugardelNodoenCasilla patch x y
]

repeat item k nodos
[
  set x i + random 10
  set y j + random 10

  ;El patche x y ha sido ya elegido? si
  ;es asi repetimos
  while [member? patch x y LugardelNodoenCasilla = true]
  [
    set x i + random 10
    set y j + random 10
  ]
]

```

```

    ;El color usado para P1 es el gris
    ask patch x y [set pcolor gray set partido 1 set influencia 1]
    set LugardelNodoenCasilla sentence LugardelNodoenCasilla patch x y
  ]

  set k k + 1

]
;Contamos el numero de nodos/patches grises/negros y blancos

set Tparty1 count patches with [pcolor = gray]
set Tparty2 count patches with [pcolor = black]
set Tparty0 count patches with [pcolor = white]
;
;Values distributed initially into districts for P2
set Tparty21 count patches with [pcolor = black]
set Tparty22 count patches with [pcolor = black]
;Para crear las listas ordenadas de las
;distribuciones de P2 y obtener su mediana

set p2list []
set p2listordered []
set r 0

while [r < length nnodos3 and item r nnodos3 = 0]
[
  set var item r nnodos2
  set p2list sentence p2list var
  set r r + 1
]

set m r

while [m < length nnodos3]
[
  set p2list sentence p2list (item m nnodos3)
  set m m + 1
]

set p2listordered sort p2list
set medianalista median p2listordered

end

```

```

##### Termina Setup

##### PROCEDIMIENTO inicio
;Inicia la dinamica del sistema

to inicio
;Distribucion de nodos para P1
set azul []
;Distribucion de nodos para P2
set amarillo []
;Variable para contar el numero
;de ciclos necesarios para
;consenso
set ciclos 0
;Variable para medir el numero
;de ciclos necesarios para
;desaparecer indecisos
set contciclos0 1
;Variable para guardar el numero
;de miembros de P1 despues de
;eliminar el ultimo indeciso
set n1 0
;Variable para guardar el numero
;de miembros de P1 despues de
;eliminar el ultimo indeciso
set n2 0
set inip1 []
set inip2 []

;Utilizamos 600 como el numero maximo
;de ciclos permitidos para considerar
;franjas, de acuerdo con el articulo
;de Chen & Redner
repeat 600
[
;Condicion de paro para el programa:
;Si tenemos consenso
if tparty1 = Tnodos or tparty2 = Tnodos [stop]

;Lista para la seleccion sin remplazo
set sublista []

;Iniciamos un ciclo examinando el total

```

```

;de nodos de la red
repeat Tnodos
[
    set xi random (sqrt Tnodos)
    set yj random (sqrt Tnodos)

    ;Selección con o sin remplazo
    if sampling-type = true
    [
        while [member? patch xi yj sublista = true]
        [
            set xi random (sqrt Tnodos)
            set yj random (sqrt Tnodos)
        ]
    ]

    ;Guardamos el parche en la lista sublista
    set sublista sentence sublista patch xi yj

    ;Examinamos el parche xi yj
    ;de acuerdo al color, partido, también
    ;su vecindad Von-Neumann
    ask patch xi yj
    [
        if partido = 1
        [
            ask patch xi yj [set sum-inf1 sum ([influencia] of neighbors4 with
                [partido = 1]) + [influencia] of patch xi yj]
            ask patch xi yj [set sum-inf2 sum ([influencia] of neighbors4
                with [partido = 2])]
        ]

        if partido = 2
        [
            ask patch xi yj [set sum-inf2 sum ([influencia] of neighbors4 with
                [partido = 2]) + [influencia] of patch xi yj]
            ask patch xi yj [set sum-inf1 sum ([influencia] of neighbors4
                with [partido = 1])]
        ]

        if partido = 0

```

```

[
  ask patch xi yj [set sum-inf1 sum ([influencia] of neighbors4 with
    [partido = 1])]
  ask patch xi yj [set sum-inf2 sum ([influencia] of neighbors4 with
    [partido = 2])]
]

;Aplicamos la regla de la mayoria para P1,P2

if (sum-inf1 > sum-inf2 )
[
  ask patch xi yj [set pcolor gray set partido 1 set influencia 1]
  ask neighbors4 [set pcolor gray set partido 1]
]

if (sum-inf2 > sum-inf1)
[
  ask patch xi yj [set pcolor black set partido 2 set influencia 1] ;it was y
  ask neighbors4 [set pcolor black set partido 2] ;it was yellow
]

];Termina Ask
];Termina repeat

;Contamos el numero de nodos por partido
set tparty1 count patches with [partido = 1]
set tparty2 count patches with [partido = 2]
set tparty0 count patches with [partido = 0]

;Guardamos el valor #agentes activos / patches
set a ((count patches with [partido = 1]) +
(count patches with [partido = 2]))
;Tipo de grafico
set-current-plot "grafic"

set-current-plot-pen "party 1"
;Media de P1
set azul sentence azul (count(patches with [partido = 1]) / a)
plot count ( patches with [partido = 1] ) / a
set-plot-pen-color gray

set-current-plot-pen "party 2"
;Media de P2

```

```

    set amarillo sentence amarillo (count(patch
with [partido = 2]) / a)
    plot count ( patches with [partido = 2] ) / a
    set-plot-pen-color black

;Actualizamos la variable que guarda el numero de ciclos
;necesarios para acabar con los votantes indecisos
    if tparty0 > 0
    [
        set contciclos0 contciclos0 + 1
    ]

;Medimos las densidades por partido inmediatamente
;despues de acabar con el ultimo indeciso
    if tparty0 = 0
    [
        set inip1 sentence inip1 tparty1
        set inip2 sentence inip2 tparty2

        set n1 item 0 inip1
        set n2 item 0 inip2
        set s0 (n1 + n2)
    ]

;Calculamos las medianas de P1,P2 entre distritos, sin indecisos
if tparty1 = n1 and tparty2 = n2
    [
        coountmedian0
        ;stop
    ]

    set ciclos ciclos + 1
]
stop
end
;##### Termina Setup

;##### Procedimiento draw_cuadricula para dibujar las fronteras
;de los distritos

to draw_cuadricula

set contador 10;(sqrt nnodos); / 100

```

```

set i 0
set j 0

repeat contador
[ crt 1 [
  setxy i * 10 j * 10
  set heading 0
  set color gray - 1
  set shape "line"
  set size (world-height + 50)
  stamp
  rt 90
  set size (world-width + 50)
  stamp
  set i i + 1
  set j j + 1
]
]
end
##### Termina draw_cuadrícula

##### PROCEDIMIENTO coountmedian0 para registrar los cambios
;de mediana entre los distritos cuando no hay indecisos

to coountmedian0

;Una lista para examinar los distritos
set distritos []
;Lista para guardar la media de los p1 nodos
set p10 []
;Lista para guardar la media de los p2 nodos
set p20 []
;Lista de P1 sin indecisos y ordenada para calcular su media
set p10ordered []
;Lista de P2 sin indecisos y ordenada para calcular su media
set p20ordered []

;Repetimos tantas veces como distritos hay en
;la red, esto para crear dos listas con este
;valor
repeat (Tnodos / 100)
[
  ;Generamos numeros aleatorios en {0, 10, 20, 30, 40}

```

```

set i (random sqrt (Tnodos / 100)) * 10
set j (random sqrt (Tnodos / 100)) * 10

;Revisamos si el patche ya ha sido visitado
while [member? patch i j distritos = true]
[
  set i (random sqrt (Tnodos / 100)) * 10
  set j (random sqrt (Tnodos / 100)) * 10
]
;Guardamos las coordenadas del patche
set distritos sentence distritos patch i j

;Contamos el numero de nodos P1 en el distrito i j
set m1 count patches with [pcolor = gray and pxcor >= i
  and pxcor < i + 10 and pycor >= j and pycor < j + 10]
;Contamos el numero de nodos P2 en el distrito i j
set m2 count patches with [(pcolor = black or pcolor = black)
and pxcor >= i and pxcor < i + 10 and pycor >= j and pycor < j + 10]

;Verificamos que la suma de nodos
;por distrito no sobrepase a 100
if m1 + m2 = 100
[
  ;Guardamos el numero de nodos P1,P2 en el distrito i j
  set p10 sentence p10 m1
  set p20 sentence p20 m2
]

set p10ordered sort p10
set p20ordered sort p20

set p10median median p10
set p20median median p20

] ;Termina repeat
end
;#### Termina coountmedian0

```

.3. Publicaciones y participaciones

PHYSICAL REVIEW E 87, 052806 (2013)

Fractal features of a crumpling network in randomly folded thin matter and mechanics of sheet crushing

Alexander S. Balankin,¹ Antonio Horta Rangel,² Gregorio García Pérez,¹ Felipe Gayosso Martínez,¹ Hugo Sanchez Chavez,¹ and Claudia L. Martínez-González¹

¹Grupo "Mecánica Fractal," ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., Mexico 07738

²Universidad de Guanajuato, Guanajuato, Mexico 36250

(Received 25 January 2013; revised manuscript received 24 April 2013; published 20 May 2013)

We study the static and dynamic properties of networks of crumpled creases formed in hand crushed sheets of paper. The fractal dimensionalities of crumpling networks in the unfolded (flat) and folded configurations are determined. Some other noteworthy features of crumpling networks are established. The physical implications of these findings are discussed. Specifically, we state that self-avoiding interactions introduce a characteristic length scale of sheet crumpling. A framework to model the crumpling phenomena is suggested. Mechanics of sheet crushing under external confinement is developed. The effect of compaction geometry on the crushing mechanics is revealed.

DOI: 10.1103/PhysRevE.87.052806

PACS number(s): 89.75.Fb, 61.43.Hv, 05.45.Df, 46.65.+g

I. INTRODUCTION

Randomly folded configurations of thin matter are ubiquitous in nature and engineering. Examples range from crumpled nanosheets of graphene [1–3], graphene oxide [4–6], and proteins [7–9], to hand folded paper [10–15] and geological formations [16]. Even when the crumpling processes appear quite haphazard, the geometry of randomly folded materials are well defined in a statistical sense and rather well reproducible in experiments [1–15], because the topology and self-avoiding interactions are the two most important factors when dealing with the crushing of thin matter [17–19]. Accordingly, the studies of crumpling phenomena remain an active area of research, both theoretically and experimentally (see, for example Refs. [20–43] and references therein).

A remarkable feature of thin matter is that its stretching rigidity is much more than the bending rigidity. Consequently, the curvature imposed on an elastic sheet by external confinement is concentrated largely in sharp creases and developable cones [44], whereas a major fraction of sheet area remains relatively flat and unstrained [45]. In the limit of an infinitely thin sheet, creases and developable cones asymptote to lines (ridges) and points (vertices) in accordance with the Gauss's *theorem egregium* which states that surfaces could not change their Gaussian curvature without changing distances and so sheet elements that are curved in two directions must be strained [18]. Sharp ridges which meet at pointlike vertices form the branched crumpling network with an anomalously larger resistance to hydrostatic compression [2,6,19,23,27–29,46,47], but a very low stiffness under axial compression [13,15,31,43]. In this context, it was shown that the total energy stored in a single ridge scales with its size l as $E_r \propto h^3(l/h)^{1/3}$, where h is the sheet thickness [44]. Furthermore, it was assumed that that when a square sheet of size L is folded in a ball of diameter R , the mean ridge length and the total number of ridges obey simple scaling relations $\langle l \rangle \propto R$ and $N_r \propto (L/l)^2 \propto R^{-2}$. Accordingly, the total energy stored in the crumpling network formed in the sheet folded in a ball is suggested to scale as $E_N \propto N_r E_r \langle l \rangle \propto h^{8/3} L^{1/3} K^{5/3}$, where $K = L/R$ is the compaction ratio [44]. If so, the folding force $F = \partial E_N / \partial R$ should scale with the

ball diameter as $F \propto L^2 (h/R)^{8/3}$. Consequently, a set of balls folded from elastic sheets of different sizes $L \gg h = \text{const}$ under the same force $F_0 = \text{const}$ is expected to obey the fractal mass scaling relation,

$$R^D \propto L^2, \quad (1)$$

with the fractal dimension $D = 8/3$. Numerical simulations of phantom elastic sheets crushing under hydrostatic compression [23] have confirmed the scaling relation (1) with $D = 8/3$. However, in the case of self-avoiding elastic sheets, the fractal dimension defined by Eq. (1) is less than $8/3$ due to the effect of self-avoiding interactions [23]. Accordingly, based on scaling arguments, it was argued [33] that in the case of self-avoiding sheet crushing the mean ridge length and the total number of ridges both should scale with L and K as

$$\langle l \rangle \propto L K^{-\alpha} \quad \text{and} \quad N_r \propto (L/l)^2 \propto K^{2\alpha}, \quad (2)$$

respectively. Accordingly, the total elastic energy stored in the ridges is suggested to scale as

$$E_N \propto N_r \langle l \rangle / h \propto (L/h)^\beta K^{\alpha(2-\beta)}, \quad (3)$$

where the scaling exponents are α and β ; $\alpha \geq 1$ and $1/3 \leq \beta < 2$ [33]. Consequently, it is expected that the diameter of a ball folded from the crumpled sheet depends on the hydrostatic confinement force F as

$$F \propto L^{2\alpha/D} R^{-\mu}, \quad (4)$$

where

$$\mu = 1 + (2 - \beta)\alpha, \quad (5)$$

and so, a set of balls folded from self-avoiding elastic sheets of different sizes under the same confinement force will obey the fractal relation (1) with the mass fractal dimension

$$D = 2 + \frac{2(1-\beta)}{\beta + (2-\beta)\alpha}. \quad (6)$$

In numerical simulations of elastic self-avoiding sheets [33] it was found that relations (1)–(4) hold in the range of $2.5 \leq K \leq 8$ with $\mu = 3.83 \pm 0.11$, while $\alpha = 1.65$, $\beta = 1/3$, and $D = 2.5 \pm 0.1$. Furthermore, it was argued [33] that

Bibliografía

- [1] AXELROD R.: The Dissemination of Culture: A Model with Local Convergence and Global Polarization, *The Journal of Conflict Resolution*, Volume 41, Issue 2, Pag. 203 – 226, April 1997.
- [2] AXELROD R.: *The Complexity of Cooperation: Agent-Based Models of Competition and Collaboration*, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1997. *Resources for Agent-Based Modeling*, Appendix B.
- [3] BALL P.: *Critical mass: How One Thing Leads To Another*, Gottfried Achenwall, England 2004.
- [4] BALL P.: *The Physical Modelling of Human Social Systems*, ComPlexUs, Karger, 190 – 206, 2003.
- [5] DUPUY J.-P.: Note On Philip Ball's Article: *The Physical Modelling of Human Social Systems: ComPlexUs*, Karger, 207 – 208, 2003.
- [6] ALBERT R., BARABASI A. L.: Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Physics*, Vol. 74 No. 1, January 2002.
- [7] BERNARDES A.T., STAUFFER D., KERTÉSZ J.: Election results and the Sznajd model on Barabasi network, *European Physics Journal B*, No. 25, Pages 123 – 127, 2002.
- [8] MARTÍNEZ CRUZ M.: *Dinámica de sistemas sociales complejos: Análisis fractal de elecciones federales 1991 – 2003*, Tesis de Maestría. SEPI ESIME-IPN. 2005.
- [9] MILLER J.H., PAGE S.E.: *Complex Adaptive Systems*, Princeton University Press, (2007).

- [10] BALANKIN S. A., MARTÍNEZ CRUZ M. A., TREJO MARTÍNEZ A.: Effect of initial concentration and spatial heterogeneity of active agent distribution on opinion dynamics. *Physica A* 30 (2011) 3876 – 3887.
- [11] BALANKIN A., MARTÍNEZ CRUZ M., GAYOSSO MARTÍNEZ F., MARTÍNEZ-GONZÁLEZ C. L., PATIÑO ORTIZ J.: Effect of spatial heterogeneity on majority rule dynamics in three state system, Preprint 2013.
- [12] ROBERT C. P., CASELLA G.: *Introducing Monte Carlo Methods with R, Use R*, DOI 10.1007/978 – 1 – 4419 – 1576 – 4₆, Springer Science+Business Media, LLC 2010.
- [13] COSTA FILHO R. N., ALMEIDA M. P., ANDRADE J. S., MOREIRA J. E.: Scaling behavior in a proportional voting process, *Physical Review E*, Vol. 60, No. 1, July 1999.
- [14] CASTELLANO C., FORTUNATO S., LORETO V.: Statistical physics of social dynamics, *Review of Modern Physics* 81, Issue 2, Pages 591 – 646, 2009.
- [15] GILBERT N., TROITZSCH K. G.: *Simulation for the Social Scientist*, 2nd Edition, Open University Press, Maidenhead and New York 2005.
- [16] GILES J.: Making the links, *Nature*, Vol. 488, No. 23, Agosto del 2012.
- [17] GALAM S.: Application of Statistical Physics to Politics, *Physica A* 274, pags. 132 – 139, 1999.
- [18] GALAM S.: Sociophysics: A review of Galam models. arXiv:0803.1800v1 [physics.soc-ph] 12 Mar 2008.
- [19] IZQUIERDO L. R., GALÁN J. M., SANTOS J. I., DEL OLMO R.: Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas, *Empiria, Revista de Metodología de Ciencias Sociales*. No 16, julio-diciembre, 2008, pp. 85 – 112 ISSN: 1139-5737.
- [20] WEST CHURCHMAN C.: *El enfoque de sistemas para la toma de decisiones*. Editorial Diana, México 1963.
- [21] LANGSTON J.: *Las reformas al Cofipe, 2007. Política y gobierno, Volumen temático 2009, Elecciones en México*, pp. 245 – 272. México.
- [22] MACAL Ch. M., NORTH M. J.: Tutorial on agent-based modeling and simulation part 2: How to model with agents, *Proceedings of the 2006 Winter Simulation Conference*. L. P. Perrone, F. P. Wieland, J. Liu, B. G. Lawson, D. M. Nicol and R. M. Fujimoto, eds.

- [23] MENDOZA O., SÁNCHEZ R., TOLEDO A.: De votos a curules. Las reglas del sistema electoral mexicano y sus implicaciones políticas en la elección federal de 2012. *Política y gobierno* Volumen XX, Número 1, primer semestre del 2013, pp. 107 – 140. México.
- [24] METROPOLIS N.: The beginning of the Monte Carlo method: Los Alamos Special Issue 1987.
- [25] KASTNER M.: Monte Carlo methods in statistical physics: Mathematical foundations and strategies, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 15, Issue 6, Pages 1589 – 1602, June 2010.
- [26] KESTEN H.: What is ... Percolation?, *Notices of the American Mathematical Society*, 53 (5), May 2006. 572 – 573.
- [27] AIGNER A.: A course on enumeration, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.
- [28] SINGH A., VAINCHTEIN D., WEISS H.: Schelling's Segregation Model: Parameters, Scaling, and aggregation., *Demographic Research: Volume 21, Article 12, Research Article* 2009.
- [29] SZNAJD-WERON K.: Sznajd model and its applications, *Acta Physica Polonica B*, Vol. 36, No. 8, 2005.
- [30] STAUFFER D.: Statistical Physics for Humanities: A Tutorial, ArXiv file, arXiv:1109.2475v1 [physics.pop-ph] 12 Sep 2011.
- [31] STAUFFER D.: Opinion Dynamics and Sociophysics, ArXiv file, arXiv:0705.0891v1 [physics.soc-ph] 7 May 2007.
- [32] STAUFFER D.: Social applications of two-dimensional Ising models, *American Association of Physics Teachers*, Vol. 76, No. 4 – 5, April/May 2008.
- [33] SOUSA A.O.: Consensus formation on a triad scale-free network, ArXiv file arXiv:cond-mat/0406390v1 [cond-mat.stat-mech] 17 Jun 2004.
- [34] GONZÁLEZ M.C., SOUSA A.O., HERRMANN H.J.: Opinion Formation on a Deterministic Pseudo-fractal Network, ArXiv file, arXiv:cond-mat/0307537v2 [cond-mat.stat-mech] 23 Jul 2003.
- [35] CHEN P., REDNER S.: Majority rule dynamics in finite dimensions, *Physical Review E*, Volume 71, 2005.
- [36] GILES J.: Making the links. *Nature* Vol. 488 No. 23 Agosto 2012.

- [37] LAZER D., PENTLAND A., ADAMIC L., ARAL S., BARABASI A.L., BREWER D., CHRISTAKIS N., CONTRACTOR HN., FOWLER J., GUTMANN M., JEBARA T., KING G., MACY M., ROY D., VAN ALSTYNE M.: Computational Social Science, Science , AAAS Vol. 323 Febrero 2009.
- [38] WILENSKY U.: NetLogo. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern Institute on Complex Systems, Northwestern University, Evanston, IL. (1999).
- [39] WILENSKY U.: Wilensky, U. NetLogo Ising model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Ising>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern Institute on Complex Systems, Northwestern University, Evanston, IL. 2003.
- [40] WILENSKY U.: Wilensky, U. NetLogo Voting model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Voting>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern Institute on Complex Systems, Northwestern University, Evanston, IL. 1998.
- [41] WILENSKY U.: Wilensky, U. NetLogo Segregation model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Segregation>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern Institute on Complex Systems, Northwestern University, Evanston, IL. 1997.
- [42] WILENSKY U.: Modelo de Axelrod sobre diseminación de cultura, Librería de Modelos de Netlogo, sitio web: Dissemination of Culture.
- [43] WILENSKY U.: NetLogo Small Worlds model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/SmallWorlds>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern Institute on Complex Systems, Northwestern University, Evanston, IL. 2005.
- [44] WILENSKY U.: NetLogo Preferential Attachment model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/PreferentialAttachment>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern Institute on Complex Systems, Northwestern University, Evanston, IL. 2005.

Índice alfabético

- Agentes
 - Activos, 29
 - Pasivos, 29
- Algoritmo de Metropolis-Hastings, 25
- Alianza electoral, 7
- Cadenas de Markov, 25
- Ciencias Sociales, 2
 - Dinámica de sistemas, 4
- Coaliciones, 6
- Colectividad
 - Ensemble, 3
- Diagrama de flujo, 34
- Dinámica de la opinión, 3
- Elecciones
 - Brasil, 16
- Empédocles, 22
- Enrejados, Látices, 10
- Familia, 16
 - Hijos, 16
 - Padres, 16
- Grupo de discusión, 12
- Métodos Monte Carlo, 24
- Mecánica estadística, 3
- Modelo de Axelrod, 3, 17
 - Atributos de cultura, 17
 - Cultura, 17
 - Rasgos de cultura, 17
- Modelo de Barabási-Albert
 - Adhesión preferencial, 21
- Modelo de Galam
 - Jerarquía, 16
- Modelo de Ising, 3, 13
- Modelo de Schelling, 3
- Modelo de segregación de Schelling, 22
- Modelo de Sznajd, 15
- Modelo del votante, 11
- Modelo para coaliciones, 34
- Partido político, 7
- Pseudo-código, 32
- Red, 9
 - Diámetro, 9
 - Libre de escala, 9
 - Mundo pequeño, 9
 - Pequeño mundo, 20
 - Red compleja, 8
 - Regular, 9
 - Social, 10
 - Topología, 28
- Redes
 - Libres de escala
 - Modelo de Barabási-Albert, 21
- Redes aleatorias
 - Modelo de Erdős-Renyi, 19
 - Modelo de Watts-Strogatz, 19
- Regla de coalición permanente, 64
- Regla de desempate, 39

- Desempate alatorio, 64
- Regla de la coalición, 39
- Regla de la mayoría
 - Absoluta
 - Relativa, 12
- Empates, 30
- Modelo de Galam, 16
- Regla de proporción, 64
- Regla de transición
 - Cuatro estados, 39
 - Tres estados, 31

- Sistema aislado, 3
- Sistema Complejo, 1
- Sistema Complicado, 1
- Sociofísica, 3

- Totalitarismo
 - Teorema de Arrow, 16

- Umbral de comodidad, 23

- Validación social, 16
- Vecindad de Moore, 13
- Vecindad de Von-Newmann, 13
- Votaciones electorales, 7