



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



**PROCEDIMIENTO DE CUANTIFICACIÓN – RECONSTRUCCIÓN DE
PROCESOS NO GAUSSIANOS EN LA SALIDA DEL CONVERTIDOR
NO LINEAL.**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN

INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES

PRESENTA:

ING. HUGO ANTONIO CASTAÑEDA RUFINO

DIRECTORES DE TESIS:

DR. VLADIMIR KAZAKOV

DR. DANIEL RODRIGUEZ SALDAÑA

MÉXICO, D. F.

Marzo 2014

Agradecimientos:

Dr. U. Kazakov:

Gracias por compartir su conocimiento y trabajo de muchos años, por su paciencia y tiempo dedicado.

Dr. Daniel Rodríguez:

Gracias por su confianza depositada y cada uno de sus consejos.

A todos mis profesores de la maestría:

Gracias, por que directa o indirectamente contribuyeron con sus consejos y enseñanzas durante sus cursos al término de este trabajo.

A mis padres Hugo y Rosa:

Gracias por su apoyo y motivación día a día. Gracias por creer en mí y tener siempre tiempo para escucharme. Los amo!

A mi hermana Areli:

Gracias por siempre tener un comentario y un punto de vista sincero. Te quiero!

A mi novia Jacqueline:

Gracias por tu comprensión. Gracias por animarme a realizar las cosas que me gustan y siempre tener palabras de motivación. Te amo!

El 90% de cualquier trabajo consiste en decidirse a empezarlo.



Contenido

Índice de Tablas	v
Índice de Figuras	v
Lista de símbolos.	x
Objetivos	xii
Justificación	xii
Resumen	xiii
Abstract	xiii
Capítulo 1 Antecedentes	1
1.1 Introducción	1
1.2 Teorema de muestreo	1
1.3 Teorema de Balakrishnan	3
1.3.1 Desventajas del teorema de Balakrishnan	4
1.4 Descripción de los procesos aleatorios estacionarios	5
1.5 Función de covarianza	6
1.6 Densidad espectral de potencia	8
1.6.1 Teorema de Wiener – Khintchine	8
1.7 Ruido Blanco	9
1.8 Respuesta de los Sistemas lineales	10
1.8.1 Respuesta de los Sistemas lineales para funciones determinísticas	10
1.8.2 Respuesta de un sistema lineal con procesos aleatorios	11
1.9 Regla de la Esperanza Matemática Condicional (Caso General)	12
1.10 Cuantificación.	15
Capítulo 2 Procedimiento de Muestreo–Reconstrucción de procesos aleatorios Gaussianos	18
2.1 Introducción	18
2.3 Propiedades de los procesos Gaussianos	19
2.4 Regla de la Esperanza matemática Condicional de Procesos Aleatorios Gaussianos.	20
2.5 Reconstrucción de procesos a la salida de filtros RC (Sistemas lineales)	22



2.5.1 Procesos Markovianos (Salida del filtro RC de una etapa)	23
2.5.2 Procesos no Markovianos (Salida del filtro RC de dos etapas)	31
2.5.3 Procesos no Markovianos (Salida del filtro RC de tres etapas)	39
Capítulo 3 Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de procesos Gaussianos.	49
3.1 Simulaciones	49
3.1.1 Simulación de Ruido Blanco Gaussiano.	49
3.1.2 Simulación del Proceso Gaussiano Markoviano (salida del Filtro RC de 1 Etapa).	51
3.1.3 Simulación del Proceso Gaussiano No Markoviano (salida del Filtro RC de 2 Etapas).	56
3.2 Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios Gaussianos Markovianos.	60
3.2.1 Cuantificación-Reconstrucción con 4 niveles	61
3.2.2 Cuantificación-Reconstrucción con 8 niveles	61
3.2.3 Cuantificación-Reconstrucción con 16 niveles	62
3.2.4 Cuantificación-Reconstrucción con 32 niveles	62
3.2.5 Cuantificación-Reconstrucción con 64 niveles	63
3.2.6 Cuantificación-Reconstrucción con 128 niveles	65
3.3 Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios Gaussianos No Markovianos.	67
3.3.1 Cuantificación-Reconstrucción con 4 niveles	67
3.3.2 Cuantificación-Reconstrucción con 8 niveles	67
3.3.3 Cuantificación-Reconstrucción con 16 niveles	68
3.3.4 Cuantificación-Reconstrucción con 32 niveles	69
3.3.5 Cuantificación-Reconstrucción con 64 niveles	69
3.3.6 Cuantificación-Reconstrucción con 128 niveles	70
Capítulo 4 Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios No Gaussianos a la salida del convertidor No Lineal exponencial	73
4.1 Respuesta de los Sistemas no lineales no inerciales	73
4.1.1 Análisis del PMR en la salida de dispositivos no lineales	74
4.1.2 Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal – Exponencial.	75
4.1.3 Función de densidad de Probabilidad de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal – Exponencial.	77
4.1.4 Esperanza Matemática de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal – Exponencial.	79



4.1.5 Varianza de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal – Exponencial.	80
4.1.6 Función y tiempo de covarianza de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal – Exponencial.	80
4.1.7 Procedimiento de Reconstrucción en base a la Regla de la Esperanza Matemática Condicionales de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal – Exponencial.	81
4.2 Procedimiento de Cuantificación–Reconstrucción en la salida de dispositivos No lineales	81
4.3 Simulaciones.	83
4.4 Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios No Gaussianos Markovianos.	84
4.4.1 Cuantificación-Reconstrucción con 4 niveles	84
4.4.2 Cuantificación-Reconstrucción con 8 niveles	85
4.4.3 Cuantificación-Reconstrucción con 16 niveles	85
4.4.4 Cuantificación-Reconstrucción con 32 niveles	86
4.4.5 Cuantificación-Reconstrucción con 64 niveles	87
4.4.6 Cuantificación-Reconstrucción con 128 niveles	87
4.5 Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios No Gaussianos No Markovianos.	89
4.5.1 Cuantificación-Reconstrucción con 4 niveles	89
4.5.2 Cuantificación-Reconstrucción con 8 niveles	89
4.5.3 Cuantificación-Reconstrucción con 16 niveles	90
4.5.4 Cuantificación-Reconstrucción con 32 niveles	91
4.5.5 Cuantificación-Reconstrucción con 64 niveles	91
4.5.6 Cuantificación-Reconstrucción con 128 niveles	92
Capítulo 5 Conclusiones	95
Gráficas comparativas de Error de reconstrucción por Números de Niveles.	96
Recomendaciones y sugerencias para trabajos futuros.	101
Apéndices	102
A.- Código de programas utilizados.	102
B.- Artículos y ponencias:	117
Bibliografía	124





Índice de Tablas

<i>Tabla 3-1 Resultados del PCR de un proceso Gaussiano Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128</i>	66
<i>Tabla 3-2 Resultados del PCR de un proceso Gaussiano No Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128</i>	71
<i>Tabla 4-1 Resultados del PCR de un proceso No Gaussiano Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128</i>	88
<i>Tabla 4-2 Resultados del PCR de un proceso No Gaussiano No Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128</i> 93	
<i>Tabla 5-1 Comparativo de Procesos Gaussianos y No Gaussianos, Procesos Markovianos y No Markovianos para valores de N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.</i>	100

Índice de Figuras

<i>Figura 1-1 Función de Covarianza para a) Proceso Caótico y, b) Proceso Suave.</i>	7
<i>Figura 1-2 Respuesta de los Sistemas lineales para funciones determinísticas</i>	10
<i>Figura 1-3 Respuesta de sistemas lineales en cascada a procesos estocásticos.</i>	12
<i>Figura 1-4 Realizaciones que pasan a través las muestras.</i>	14
<i>Figura 1-5 Operación de la cuantificación “tradicional” (No lineal).</i>	16
<i>1-6 Operación de la cuantificación por “cruce por niveles” (utilizada en este trabajo).</i>	17
<i>Figura 2-1 w_{xx} para diferentes valores de σ_x^2.</i>	18
<i>Figura 2-2 ω_{xx} para diferentes valores de μ_x</i>	19
<i>Figura 2-3 Respuesta a la salida de filtros RC de a) Una etapa b) Dos etapas y, c) Tres etapas.</i>	23
<i>Figura 2-4 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.2s$, $N=2$.</i>	25
<i>Figura 2-5 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=3$.</i>	25
<i>Figura 2-6 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=4$.</i>	26
<i>Figura 2-7 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.</i>	26
<i>Figura 2-8 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=10$.</i>	26
<i>Figura 2-9 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.05s$, $N=5$.</i>	27
<i>Figura 2-10 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.1s$, $N=5$.</i>	27
<i>Figura 2-11 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.15s$, $N=5$.</i>	28
<i>Figura 2-12 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.2s$, $N=5$.</i>	28
<i>Figura 2-13 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.25s$, $N=5$.</i>	28
<i>Figura 2-14 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.</i>	29
<i>Figura 2-15 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 1.0s$, $N=5$.</i>	29
<i>Figura 2-16 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 1.5s$, $N=5$.</i>	30
<i>Figura 2-17 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 2.0s$, $N=5$.</i>	30
<i>Figura 2-18 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=2$.</i>	32
<i>Figura 2-19 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=3$.</i>	33
<i>Figura 2-20 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=4$.</i>	33



<i>Figura 2-21 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.</i>	34
<i>Figura 2-22 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=6$.</i>	34
<i>Figura 2-23 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=10$.</i>	35
<i>Figura 2-24 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.1s$, $N=5$.</i>	36
<i>Figura 2-25 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.15s$, $N=5$.</i>	36
<i>Figura 2-26 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.2s$, $N=5$.</i>	37
<i>Figura 2-27 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.25s$, $N=5$.</i>	37
<i>Figura 2-28 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.3s$, $N=5$.</i>	38
<i>Figura 2-29 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.</i>	38
<i>Figura 2-30 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 1.0s$, $N=5$.</i>	39
<i>Figura 2-31 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 1.5s$, $N=5$.</i>	39
<i>Figura 2-32 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=2$.</i>	41
<i>Figura 2-33 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=3$.</i>	41
<i>Figura 2-34 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=4$.</i>	42
<i>Figura 2-35 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.</i>	42
<i>Figura 2-36 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=10$.</i>	42
<i>Figura 2-37 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.1s$, $N=5$.</i>	43
<i>Figura 2-38 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.1s$, $N=5$ (Detalle de asimetría).</i>	44
<i>Figura 2-39 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.15s$, $N=5$.</i>	45
<i>Figura 2-40 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.2s$, $N=5$.</i>	45
<i>Figura 2-41 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.25s$, $N=5$.</i>	46
<i>Figura 2-42 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.</i>	46



<i>Figura 2-43 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 1.0s$, $N=5$.</i>	47
<i>Figura 2-44 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 1.5s$, $N=5$.</i>	47
<i>Figura 3-1 Diagrama a bloques de las simulaciones de procesos Gaussianos Markovianos $x(t)$ y No Markovianos $y(t)$.</i>	49
<i>Figura 3-2 Simulación de 0.5s de Ruido Gaussiano e Histograma de la FDP.</i>	49
<i>Figura 3-3 Simulación de 10s de Ruido Gaussiano e Histograma de la FDP.</i>	50
<i>Figura 3-4 Simulación de 100s de Ruido Gaussiano e Histograma de la FDP.</i>	50
<i>Figura 3-5 Simulación de 500s de Ruido Gaussiano e Histograma de la FDP.</i>	51
<i>Figura 3-6 Diagrama a bloques de la simulación de procesos Markovianos.</i>	52
<i>Figura 3-7 Simulación de 0.5s de un proceso Gaussiano Markoviano a la salida del filtro RC de una Etapa.</i>	52
<i>Figura 3-8 Simulación de 10s de un proceso Gaussiano Markoviano a la salida del filtro RC de una Etapa.</i>	53
<i>Figura 3-9 Simulación de 100s de un proceso Gaussiano Markoviano a la salida del filtro RC de una Etapa.</i>	53
<i>Figura 3-10 Simulación de 500s de un proceso Gaussiano Markoviano a la salida del filtro RC de una Etapa.</i>	54
<i>Figura 3-11 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano Markoviano de 0.5s.</i>	54
<i>Figura 3-12 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano Markoviano de 10s.</i>	55
<i>Figura 3-13 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano Markoviano de 100s.</i>	55
<i>Figura 3-14 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano Markoviano de 500s.</i>	55
<i>Figura 3-15 Diagrama a bloques de la simulación de procesos No Markovianos.</i>	56
<i>Figura 3-16 Simulación de 0.5s de un proceso Gaussiano No Markoviano a la salida del filtro RC de dos Etapas.</i>	57
<i>Figura 3-17 Simulación de 10s de un proceso Gaussiano No Markoviano a la salida del filtro RC de dos Etapas.</i>	57
<i>Figura 3-18 Simulación de 100s de un proceso Gaussiano No Markoviano a la salida del filtro RC de dos Etapas.</i>	57
<i>Figura 3-19 Simulación de 500s de un proceso Gaussiano No Markoviano a la salida del filtro RC de dos Etapas.</i>	58
<i>Figura 3-20 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano No Markoviano de 0.5s.</i>	58
<i>Figura 3-21 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano No Markoviano de 10s.</i>	59
<i>Figura 3-22 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano No Markoviano de 100s.</i>	59
<i>Figura 3-23 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano No Markoviano de 500s.</i>	59
<i>Figura 3-24 Comparativo del Ruido Gaussiano y su correspondiente salida del filtro RC de una Etapa (Proceso Markoviano).</i>	59
<i>Figura 3-25 Comparativo de un proceso Markoviano y su correspondiente salida del filtro RC de una Etapa (Proceso No Markoviano).</i>	60
<i>Figura 3-26 Cruces por niveles ($N=4$) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.</i>	61
<i>Figura 3-27 Cruces por niveles ($N=8$) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.</i>	62
<i>Figura 3-28 Cruces por niveles ($N=16$) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.</i>	62



<i>Figura 3-29 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.</i>	63
<i>Figura 3-30 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano (Detalle a 4s).</i>	63
<i>Figura 3-31 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.</i>	64
<i>Figura 3-32 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano (detalle a 4s).</i>	64
<i>Figura 3-33 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.</i>	65
<i>Figura 3-34 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano (Detalle a 4s).</i>	66
<i>Figura 3-35 Cruces por niveles (N=4) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.</i>	67
<i>Figura 3-36 Cruces por niveles (N=8) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.</i>	68
<i>Figura 3-37 Cruces por niveles (N=16) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.</i>	68
<i>Figura 3-38 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.</i>	69
<i>Figura 3-39 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.</i>	70
<i>Figura 3-40 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.</i>	70
<i>Figura 3-41 Comparativo del número de muestras y error de reconstrucción en la simulación del Proceso Gaussiano Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128</i>	71
<i>Figura 3-42 Comparativo del número de muestras y error de reconstrucción en la simulación del Proceso Gaussiano No Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128</i>	72
<i>Figura 4-1 Convertidor No Lineal Exponencial, $\eta t = A \exp[b(x(t))]$, $b=1$.</i>	76
<i>Figura 4-2 Convertidor No Lineal Exponencial, $\eta t = A \exp[b(x(t))]$, $A=1$.</i>	76
<i>Figura 4-3 Función de densidad de probabilidad de la salida del convertidor No Lineal exponencial. $A=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. $b=1$</i>	78
<i>Figura 4-4 Función de densidad de probabilidad de la salida del convertidor No Lineal exponencial. $b=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. $A=1$</i>	79
<i>Figura 4-5 Diagrama de generación de una realización de procesos aleatorios No Gaussianos (salida del convertidor No Lineal exponencial).</i>	82
<i>Figura 4-6 Salida del convertidor No Lineal exponencial.</i>	82
<i>Figura 4-7 Detalle (15s y 4s) de la simulación de una realización de un proceso No Gaussiano Markoviano.</i>	83
<i>Figura 4-8 Detalle (15s y 4s) de la simulación de una realización de un proceso No Gaussiano No Markoviano.</i>	84
<i>Figura 4-9 Cruces por niveles (N=4) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.</i>	85
<i>Figura 4-10 Cruces por niveles (N=8) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.</i>	85



<i>Figura 4-11 Cruces por niveles (N=16) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.</i>	86
<i>Figura 4-12 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.</i>	86
<i>Figura 4-13 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.</i>	87
<i>Figura 4-14 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.</i>	88
<i>Figura 4-15 Cruces por niveles (N=4) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.</i>	89
<i>Figura 4-16 Cruces por niveles (N=8) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.</i>	90
<i>Figura 4-17 Cruces por niveles (N=16) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.</i>	90
<i>Figura 4-18 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.</i>	91
<i>Figura 4-19 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.</i>	92
<i>Figura 4-20 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.</i>	92
<i>4-21 Comparativo del número de muestras y error de reconstrucción en la simulación del Proceso No Gaussiano Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.</i>	93
<i>4-22 Comparativo del número de muestras y error de reconstrucción en la simulación del Proceso Gaussiano No No Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.</i>	94
<i>Figura 5-1 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=4.</i>	96
<i>Figura 5-2 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=8.</i>	96
<i>Figura 5-3 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=16.</i>	97
<i>Figura 5-4 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=32.</i>	97
<i>Figura 5-5 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=64.</i>	98
<i>Figura 5-6 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=128.</i>	98
<i>Figura 5-7 Comparativo del Promedio Temporal del Error de Reconstrucción.</i>	99



Lista de símbolos.

A	Coeficiente del filtro No Lineal exponencial $Ae^{bx(t)}$.
α	Inverso de la constante de tiempo de un filtro RC, $\alpha = RC$.
$\ a_{ij}\ $	Elemento i, j de la matriz inversa de covarianza.
b	Exponente del filtro No Lineal exponencial $Ae^{bx(t)}$.
$b_j(t)$	Función básica de la j -ésima muestra.
$\delta(\tau)$	Función delta.
$g[\]$	Función No Lineal.
$h(t)$	Respuesta al impulso.
$H(j\omega)$	Función de transferencia de un sistema lineal.
k	Constante de Boltzmann en el ruido blanco Gaussiano.
K_x	Función de covarianza.
ΔL	Intervalo de cuantificación.
$m(t)$	Función de la Esperanza matemática.
$\tilde{m}(t)$	Función de la Esperanza matemática condicional.
$n(t)$	Proceso a la salida del convertidor No Lineal exponencial.
N	Número de niveles de cuantificación ($N \in \mathbb{N}$).
N_0	Factor del ruido blanco Gaussiano: $S_{ruido}(\omega) = \frac{N_0}{2}$.
$\eta(t)$	Proceso a la salida de convertidores No Lineales.
R_x	Función de covarianza normalizada.
S_x	Densidad espectral de potencia.
t	Tiempo.
ΔT	Intervalo de muestreo.
T_j	Instante de ocurrencia de la j -ésima muestra.
T_e	Temperatura de ruido equivalente en el receptor.
τ	Variable independiente de la función de covarianza: $\tau = t_2 - t_1$.
τ_c	Tiempo de covarianza.



$\sigma^2(t)$	Función de la varianza.
$\tilde{\sigma}^2$	Función de la varianza.
$\overline{\tilde{\sigma}^2}$	Promedio temporal de función de la varianza.
$\omega_x(x)$	Función de densidad de probabilidad.
$x(t)$	Proceso Gaussiano a la salida del filtro RC de una etapa.
$\langle x(t)^n \rangle$	Función del momento inicial de orden n .
$\langle \dot{x}(t)^n \rangle$	Función del momento central de orden n .
$x^s(T_i)$	Valor de la i -ésima muestra cuantificada.
$y(t)$	Proceso Gaussiano a la salida del filtro RC de dos etapas.
ξ	Ruido blanco Gaussiano con esperanza matemática cero y desviación estándar igual a 1.
$\langle . \rangle$	Operador promedio estadístico.



Objetivos

Realizar el estudio del Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción (calidad de la reconstrucción de acuerdo al promedio temporal del error) de realizaciones de procesos aleatorios No Gaussianos a la salida del convertidor No Lineal exponencial en base a la regla de la esperanza matemática condicional.

Realizar la comparación entre el Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de realizaciones de procesos aleatorios Gaussianos y No Gaussianos.

Realizar la comparación entre el Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de realizaciones de procesos aleatorios para diferentes funciones de covarianza: Procesos Markovianos y No Markovianos.

Realizar la comparación de la calidad de la reconstrucción para diferentes cantidades de niveles de cuantización en base a la "Cuantización por cruce de niveles".

Justificación

En la actualidad existen muchas áreas de investigación las cuales hacen uso de procesos aleatorios y un problema fundamental es establecer procedimientos óptimos para el procesamiento de dichos procesos.

Durante las etapas involucradas en la digitalización destacan el muestreo, la cuantificación, la codificación y la reconstrucción. El presente trabajo provee la investigación de un procedimiento óptimo para realizar la cuantificación-reconstrucción de dichos procesos tomando en cuenta sus principales características estadísticas.

Actualmente los procedimientos utilizados se basan en funciones del tipo $\text{Sin}(x)/x$, los cuales no son óptimos y no nos proveen una función para la evaluación de la calidad de la reconstrucción. Los procedimientos propuestos en este trabajo nos permiten evaluar de forma estadística el error de reconstrucción que se tendrá durante el procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de procesos No Gaussianos a la salida del convertidor No Lineal exponencial.



Resumen

El presente trabajo hace uso de las principales propiedades estadísticas de los procesos aleatorios como la Esperanza Matemática, la Función de Densidad de Probabilidad y la Función de Covarianza mediante la Regla de la Esperanza Matemática condicional para llevar a cabo el Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de procesos No Gaussianos (Markovianos y No Markovianos) a la salida del convertidos No Lineal de tipo exponencial $g[x(t)] = A \exp[b(x(t))]$.

Se realiza una investigación sobre la función de varianza condicional la cual nos proporciona un método para determinar la calidad de la reconstrucción, y mediante un promedio temporal de dicho Error se lleva a cabo la comparación de diferentes tipos de procesos aleatorios, tanto en su FDP (Gaussianos y No Gaussianos) como de su estructura a lo largo del tiempo (procesos Markovianos y No Markovianos).

En el presente trabajo se realiza la simulación de procesos Gaussianos Markovianos, Gaussianos No Markovianos, No Gaussianos Markovianos y No Gaussianos Markovianos, a los cuales se les aplica el procedimiento de Cuantificación por "Cruce por niveles" sin muestreo previo, y posteriormente se calcula el Error de reconstrucción. Los resultados se presentan utilizando L=4, 8, 16, 32, 64 y 128 niveles de Cuantificación.

Abstract

The present work applies the random processes statistics properties such as the mean, Probability Density Function and the Covariance function by Conditional Mean Rule to perform the Quantization-Reconstruction Procedure of No Gaussian Process (Markovian and Non- Markovian) at the Nonlinear exponential output of converter $g[x(t)] = A \exp[b(x(t))]$.

Research on the conditional variance function which provides a method to evaluate the reconstruction quality and by a time average error is comparing types of random processes by PDF(Gaussian and non-Gaussian) and its structure over time (Markov processes and No Markov process).

In this work the simulation of Gaussian Markovian, Gaussian No Markovian , No Gaussian Markovian, No Gaussian No Markovian process are made to which is applie Quantization-Reconstruction Procedure by "Crossing level" without sampling, and then calculates the reconstruction error. The results are presented using L = 4, 8, 16, 32, 64, 128 Quantization levels.





Capítulo 1 Antecedentes

1.1 Introducción

Son muchas las áreas que tienen la necesidad práctica de analizar señales y formas de onda de los más variados orígenes: Sísmicas, biológicas, telecomunicaciones, etc. Frecuentemente están acompañadas por señales no deseadas, como el ruido, que interfieren en mayor o menor medida.

Para el caso específico de los sistemas de comunicaciones, tenemos el problema fundamental de establecer una descripción estadística de los procesos aleatorios. Generalmente, los sistemas modernos se basan en comunicaciones digitales por lo que se hacen necesarias las llamadas conversiones Analógica-Digital / Digital-Analógica y las metodologías que nos permitan describir dichos procesos.

Los sistemas de comunicaciones contienen elementos clasificados como No Lineales-No inerciales y elementos Lineales-inerciales. El presente trabajo contiene un análisis sobre procesos aleatorios a la salida de convertidores No lineales, específicamente de convertidores exponenciales y la descripción de su Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción (PCR).

El procedimiento de Muestreo-Reconstrucción y Cuantificación-Reconstrucción basado en la Regla de la Esperanza Matemática Condicional toma en cuenta las principales características estadísticas de los procesos aleatorios en estudio.

1.2 Teorema de muestreo

Un problema fundamental de las comunicaciones, es la definición de procedimientos para la reconstrucción de procesos aleatorios a partir del conocimiento de un conjunto de valores o puntos por los que pasa dicho proceso, a este conjunto de valores se les denomina muestras.

Desde el siglo XVIII se ha tratado de resolver dicha problemática, en un principio, se utilizaron las propiedades básicas de los polinomios algebraicos, se buscaba determinar un polinomio adecuado $P_n(x)$ el cual permitiera obtener los valores y_0, y_1, \dots, y_n de una función asociada con todas las $n+1$ abscisas diferentes t_0, t_1, \dots, t_n .

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(t). \quad (1.1)$$

Para $k \in \mathbb{N} = 0, 1, \dots, n$

$$l_k(t) = \frac{g_{n+1}(t)}{(t - t_k)g'_{n+1}(t_k)}; \quad g_{n+1}(t) = (t - t_0) \dots (t - t_n). \quad (1.2)$$



Dichas expresiones fueron presentadas en 1795 por J.L. Lagrange [1], para obtener la interpolación definida por un polinomio $P_n(x)$ en términos de las muestras conocidas.

E. T. Whittaker en 1915 [2], también analizó la interpolación entre determinados puntos de una función. Whittaker propone como solución, encontrar los valores de la función $f(t)$ que pasa por ciertos puntos (t_k, f_k) para $t_k = a + kw$ y $f_k = f(t_k)$, donde a, w son complejos y $k \in \mathbb{Z}$.

Al conjunto de todas las funciones las llamó *conjunto cotabular* asociado a la secuencia $\{f_k\}$ de los valores conocidos y destacó una función especial a la cual llamó *función cardinal del conjunto cotabular*:

$$C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(a + k\omega_b) \frac{\sin \frac{\pi}{\omega_b} (t - a - k\omega_b)}{\frac{\pi}{\omega_b} (t - a - k\omega_b)}. \quad (1.3)$$

En 1933 en la Unión Soviética, Kotel'nikov [3] publicó un artículo en el que presenta el llamado teorema del muestreo, mismo que fue utilizado en 1948 por Shannon [4,5] para demostrar que una señal analógica limitada en banda es equivalente a la secuencia de las muestras tomadas a un intervalo determinado conocido como *intervalo de Nyquist*[6].

Actualmente, y después de establecer algunas pruebas al teorema, se le conoce como "*Teorema de muestreo Whittaker-Kotel'nikov-Shannon*" (WKS) y enuncia lo siguiente:

Toda función de una señal $f(t)$ con espectro limitado en banda dentro del intervalo $[-\omega_b, \omega_b]$ para $\omega_b > 0$, puede ser completamente reconstruida con respecto a toda $t \in \mathbb{R}$ partiendo de sus valores muestreados $f(k\pi/\omega)$ que son tomados en los puntos $k\pi/\omega$, donde $k \in \mathbb{Z}$ igualmente espaciados sobre el eje real \mathbb{R} en términos de:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_b}\right) \frac{\sin(\omega_b t - k\pi)}{\omega_b t - k\pi}. \quad (1.4)$$

A. V. Balakrishnan en el año de 1957 [7] generaliza los resultados del teorema de muestreo para procesos aleatorios estacionarios. En el año 1960, A. Lindon y N. M. Abramson [8] lo generalizan expresando las M-derivadas de una función limitada en banda aproximándola a una serie de Taylor caracterizada con una densidad Gaussiana sobre cada muestra.

En 1962 P. Petersen y D. Middleton [9] engloban el teorema de muestreo para dimensiones espaciales de orden mayor. El teorema *Whittaker-Kotel'nikov-Shannon* y sus diferentes generalizaciones son válidos para funciones determinísticas con espectro limitado en banda [10-13].



Existen publicaciones con trabajos de generalizaciones tanto para procesos aleatorios estacionarios [14,15] como para procesos aleatorios no estacionarios [16-19]. La aplicación práctica de estos últimos no es sencilla, el proceso dado primero se transforma a un proceso estacionario diferente para poder realizar la reconstrucción [20,23].

Recientemente, existen muy pocos trabajos y publicaciones referentes a la reconstrucción de procesos aleatorios en base a las muestras dadas. La mayoría de los trabajos se han centrado en el estudio de procesos determinísticos, sin embargo, podemos destacar los trabajos sobre procesos estocásticos publicados en 2002 por M. Pawlak [24] quien amplió la fórmula de reconstrucción de interpolación escrita en el teorema de Whittaker – Shannon, y la aplicó a proceso en presencia de ruido limitados y no limitados en banda.

En 2004 B. Lacaze y C. Mailhes [25] trabajaron sobre el problema de la reconstrucción de procesos aleatorios estacionarios, proponiendo la utilización de filtrado lineal de las muestras, dando la expresión del mínimo error de reconstrucción.

En el año 2005 de nueva cuenta B. Lacaze [26] comenzó a tomar en cuenta el espectro de potencia dado por la descripción de dispositivos físicos para la reconstrucción de los procesos aleatorios estacionarios, asumiendo que se conocen los tiempos de muestreo. En el año 2009 criticó la fórmula de Shannon basada en instantes de muestreo periódicos, variando la secuencia dentro y fuera del área de muestreo, acercándola más a una reconstrucción real [27].

En 2007, H. Ogawa y A. Hirabayashi [28] proponen un teorema tomando en cuenta un número finito de muestras comparando los resultados obtenidos mediante un pulso real y un pulso ideal, tomando en cuenta sólo procesos Gaussianos Markovianos.

Hasta estos momentos, los teoremas propuestos no hablan sobre propiedades estadísticas de los procesos aleatorios a analizar como los son las funciones de densidad o sus funciones de covarianza.

1.3 Teorema de Balakrishnan

La gran mayoría de las generalizaciones del teorema clásico de muestreo estuvieron orientadas a la descripción del procedimiento de muestreo y reconstrucción de procesos determinísticos. Una de las generalizaciones del teorema WKS que más ha influido en las investigaciones del PMR es la presentada por A. V. Balakrishnan, que a diferencia de sus antecedentes, presenta una generalización para procesos aleatorios estacionarios con espectro finito. La presentación del teorema es la siguiente [7]:

Sea $x(t)$ en el intervalo $-\infty < t < \infty$ un proceso estocástico evaluado real o complejo, estacionario en el "sentido amplio" y que posee una densidad espectral de potencia, la cual



desaparece fuera del intervalo de la frecuencia angular $[-\omega_b, \omega_b]$, entonces $x(t)$ tiene la representación siguiente:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n}{2\omega_b}\right) \frac{\sin \pi(2\omega_b t - n)}{\pi(2\omega_b t - n)}. \quad (1.5)$$

Para cada t , donde \lim simboliza el límite en el sentido cuadrático medio. Esto es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[x(t) - \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n}{2\omega_b}\right) \frac{\sin \pi(2\omega_b t - n)}{\pi(2\omega_b t - n)} \right]^2 \right\} = 0. \quad (1.6)$$

Asumiendo que todos los procesos tienen varianzas y promedios finitos.

El teorema de Balakrishnan es quizá el más citado en la descripción del PMR de procesos estocástico incluso citado en muchos trabajos actuales.

La descripción estadística del proceso de muestreo y reconstrucción de los procesos estocásticos basados en el teorema Balakrishnan no toman en cuenta algunas características estadísticas básicas y sostiene que es suficiente con conocer la frecuencia de corte del espectro de potencia para obtener una reconstrucción sin error. Dicha reconstrucción es determinada únicamente por la suma del conjunto de muestras infinitas multiplicadas por las funciones básicas de la forma $\sin(x)/x$.

1.3.1 Desventajas del teorema de Balakrishnan

El teorema de Balakrishnan deja algunas dudas al prescindir de las características estadísticas más importantes de los procesos aleatorios. Esto no significa que el teorema sea incorrecto, simplemente nos indica que dicho teorema debe de formularse con algunas especificaciones más detalladas y mencionar que se trata de un caso particular del proceso general del PMR.

La propuesta del presente trabajo es utilizar la Regla de la Esperanza Matemática Condicional, la cual ha demostrado con algunos resultados tener ciertas ventajas respecto a los resultados que obtendríamos si se realizara el PMR utilizando el teorema de Balakrishnan.

Algunas observaciones al teorema de Balakrishnan [7] se enuncian a continuación [39]:

1. El teorema no utiliza la función de densidad de probabilidad, que es considerada como la característica más importante de cada proceso aleatorio.
2. Para cualquier proceso solo toma en cuenta el valor de ω_b .
3. No toma en consideración las funciones espectrales.



4. Las condiciones no son realizables, ya que se necesita un número infinito de muestras del proceso.
5. Solo se limita a procesos aleatorios estacionarios.
6. No menciona alguna diferencia en el procedimiento para diferentes tipos de procesos aleatorios, menciona un algoritmo único basado en la función SINC.
7. Sin importar el tipo de proceso aleatorio en cuestión, este teorema indica una función de error de reconstrucción siempre igual a cero.
8. No muestra en su formulación el procedimiento de extrapolación.

En general, los procesos aleatorios Gaussianos pueden caracterizarse en su totalidad por tres funciones:

- a) La función de la esperanza matemática.
- b) La función de la varianza y,
- c) La función de covarianza.

Los procesos Gaussianos pueden tener la esperanza matemática y varianza diferente a cero y los momentos impares de mayor orden son igual a cero [29-32], en cambio, en los procesos no Gaussianos las funciones de momentos de mayor orden no son iguales a cero.

Las funciones de los momentos de cualquier orden están relacionadas a su correspondiente función espectral mediante la transformada de Fourier [33,34]. Para el caso particular de los procesos Gaussianos, se caracterizan totalmente por el espectro de potencia, relacionado con la función de covarianza mediante el teorema de Wiener – Khintchine.

El teorema de Balakrishnan trabaja únicamente con el espectro de potencia y utiliza la función de covarianza para su demostración por lo que el autor supone que todos los espectros de mayor orden del proceso estocástico en cuestión son iguales a cero indicando claramente que se trata de un teorema exclusivamente para procesos aleatorios Gaussianos.

Por último, es de suma importancia mencionar que si se considera un número finito de muestras, la función básica $\sin(x)/x$ no proporciona la reconstrucción óptima o el mínimo error cuadrático medio en la reconstrucción del procesos ni la descripción en la región de extrapolación.

1.4 Descripción de los procesos aleatorios estacionarios

Un proceso aleatorio o estocástico continuo es un conjunto de variables aleatorias definidas en un intervalo de tiempo $(t_{inicial}, t_{final})$ finito o infinito. Dicho proceso está formado por muchas



realizaciones $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(j)}(t), \dots, x^{(M)}(t)$. Cada realización $x^{(j)}(t)$ puede estar definida en una continuidad de valores sobre el eje del tiempo y posee ciertas características de probabilidad.

Si conocemos las funciones de densidad de probabilidad unidimensionales del proceso aleatorio ($w[x(t_1)], w[x(t_2)], \dots, w[x(t_m)]$) en cada t_1, t_2, \dots, t_m , entonces podemos obtener la información estadística más importante del proceso estocástico en cuestión, esto es:

a) Función de la esperanza matemática:

$$m(t) = \langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w[x(t)]dx(t). \quad (1.7)$$

b) Función de la varianza:

$$\sigma^2(t) = \langle (x(t) - m(t))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m(t))^2 w[x(t)]dx(t). \quad (1.8)$$

c) Función del momento inicial de orden n:

$$\langle x(t)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^n w[x(t)]dx(t). \quad (1.9)$$

d) Función del momento central de orden n:

$$\langle \dot{x}(t)^n \rangle = \langle (x(t) - m(t))^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m(t))^n w[x(t)]dx(t). \quad (1.10)$$

1.5 Función de covarianza

Una de las características estadísticas que refleja las diferencias de la estructura a lo largo del tiempo de cada proceso aleatorio la podemos encontrar en la *función de covarianza* $K_x(t_1, t_2)$. Dicha función determinada con dos argumentos t_1 y t_2 muestra cómo cambia el momento de covarianza conforme la distancia entre ambas secciones varía.

$$K_x(t_1, t_2) = \langle \dot{x}(t_1)\dot{x}(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))w_2[x; t_2 - t_1] dx(t_1)dx(t_2). \quad (1.11)$$

Si se fija a t_1 y desplazamos a t_2 se puede observar que grado de dependencia estadística tiene el proceso en ese intervalo de tiempo. En la Figura 1.1 a) se muestra un proceso caótico, en donde la función de covarianza tiende rápidamente a cero en comparación con la Figura 1.1 b) en donde se muestra un proceso suave en el cual su función de covarianza tiende lentamente a cero conforme la distancia entre ambas secciones se incrementan.

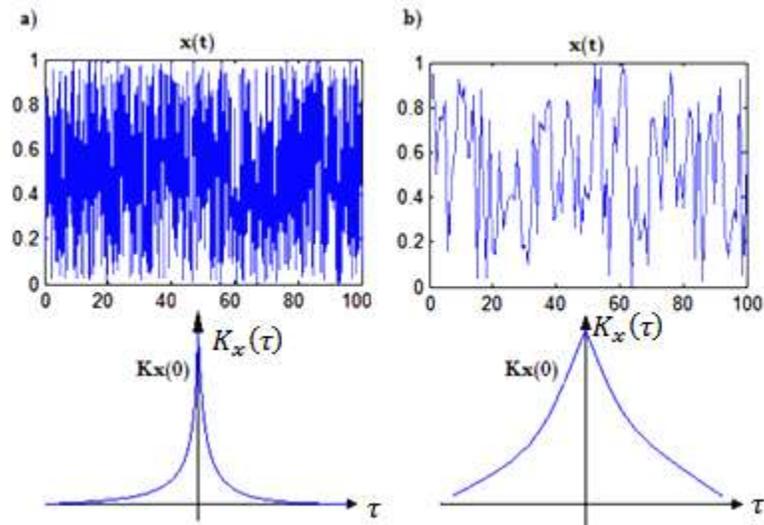


Figura 1-1 Función de Covarianza para a) Proceso Caótico y, b) Proceso Suave.

Dentro de las principales características de la función de covarianza tenemos las siguientes [23]:

- a) Tiene un valor máximo cuando $t_1 = t_2$, donde $\tau = t_1 - t_2 = 0$:

$$K_x(0) = \langle \dot{x}(t)\dot{x}(t + \tau) \rangle = \langle \dot{x}(t)^2 \rangle = \sigma^2(t) = \sigma_x^2. \quad (1.12)$$

- b) Es una función par:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (1.13)$$

- c) Tiende a cero cuando $\tau \rightarrow \infty$:

$$K_x(\infty) = 0. \quad (1.14)$$

- d) Tiene una función de covarianza normalizada $R_x(\tau)$:

$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)} = \frac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2}. \quad (1.15)$$

- e) Su rango de valores está contenida en:

$$|K_x(\tau)| \leq K_x(0). \quad (1.16)$$



$$0 \leq R_x(\tau) \leq 1. \quad (1.17)$$

f) Se relaciona con el parámetro denominado tiempo de covarianza:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau. \quad (1.18)$$

Este parámetro indica el tiempo en el que existe dependencia estadística, es decir, el tiempo en el cual existe influencia entre los mismos valores del proceso aleatorio.

Cuando el proceso es caótico se tiene un tiempo de covarianza pequeño, en contraste, un proceso suave tiene un tiempo de covarianza mayor.

1.6 Densidad espectral de potencia

Se tiene otro parámetro que sugiere caracterizar las propiedades espectrales de los procesos estocásticos con la distribución de potencia de cada armónico en función de la frecuencia. Esta función debe caracterizar las propiedades espectrales de todas las realizaciones del proceso.

1.6.1 Teorema de Wiener – Khintchine

El teorema Wiener – Khintchine establece que *la función de covarianza $K_x(\tau)$ esta relacionada con la función de densidad espectral de potencia $S_x(\omega)$ mediante la transformada de Fourier [24-28,35-36].*

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.19)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.20)$$

De estas fórmulas podemos notar que un proceso caótico tendrá una densidad espectral de potencia más ancha en comparación con un proceso aleatorio suave. La transformada tiene las siguientes propiedades:

- $S_x(\omega)$ siempre es real.
- $S_x(\omega) \geq 0$.
- Es simétrica, es decir: $S_x(\omega) = S_x(-\omega)$.



1.7 Ruido Blanco

El Ruido blanco Gaussiano es un modelo matemático que define a aquellos procesos estocásticos cuyos valores en cualquier tiempo no guardan ninguna correlación estadística alguna. La densidad espectral de potencia del ruido Gaussiano es independiente de la frecuencia de operación, es decir, se presenta como una constante a lo largo del eje de las frecuencias. De lo anterior se deduce que dicha señal contiene a todas las frecuencias con la misma potencia, esta similitud con la luz blanca (frecuencias dentro de la banda visible de radiación electromagnética) fue el origen de la denominación de ruido “blanco”.

La densidad espectral de potencia del ruido blanco está expresada por [37]:

$$S_x(\omega) = \frac{N_0}{2}. \quad (1.21)$$

Donde las unidades de N_0 son watts/hertz.

Una forma común de expresar el parámetro N_0 está basada en la relación que tiene con la etapa de entrada al receptor de los sistemas de comunicaciones de la siguiente manera:

$$N_0 = kT_e. \quad (1.22)$$

Donde k es la constante de Boltzmann y T_e es la temperatura de ruido equivalente en el receptor que se define como la temperatura a la cual debe de mantenerse un transistor con ruido a la entrada de una versión del sistema sin ruido para producir a la salida la misma potencia de ruido que la producida por todas las fuentes del sistema real. La temperatura del ruido equivalente solo depende del sistema y sus parámetros.

Con la transformada inversa de Fourier de la densidad espectral de potencia podemos obtener la función de auto correlación del ruido blanco de la siguiente manera:

$$K_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (1.23)$$

Esto significa que la correlación en el mismo instante de tiempo ($\tau = 0$) está dada por la función delta con el factor $\frac{N_0}{2}$, mientras que no existe relación alguna en cualquier otra diferencia de tiempo (muestras estadísticamente independientes):

$$K_x(\tau) = 0, \quad \text{para } \tau \neq 0. \quad (1.24)$$

Matemáticamente el ruido blanco posee una potencia promedio infinita por lo que es físicamente imposible de realizar, sin embargo, la simplicidad de sus propiedades estadísticas lo hacen útil para el análisis de sistemas estocásticos.

En este trabajo haremos uso de simulaciones de números aleatorios estadísticamente independientes con función de densidad de probabilidad tipo Gaussianos con los cuales a la salida de filtros RC de primer y segundo orden obtendremos procesos aleatorios Markovianos y No Markovianos para su análisis.

1.8 Respuesta de los Sistemas lineales

1.8.1 Respuesta de los Sistemas lineales para funciones determinísticas

Veamos en [38]: Sea $u(t)$ y $v(t)$ funciones determinísticas, que corresponden a la entrada y salida de un sistema lineal con parámetros fijos. Si $u(t)$ produce a la salida del sistema a $v(t)$, entonces $u(t+\tau)$ generará $v(t+\tau)$ a la salida del sistema. Si $u_1(t)$ produce a la salida del sistema a $v_1(t)$, entonces la entrada $u(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)$ produce la salida $v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$.

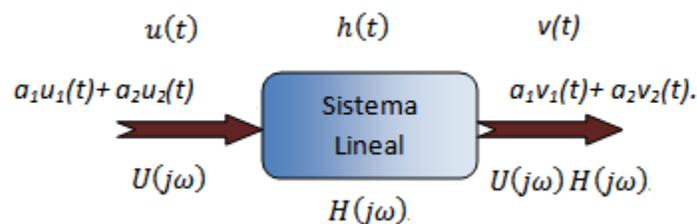


Figura 1-2 Respuesta de los Sistemas lineales para funciones determinísticas

La función de transferencia con parámetros fijos, es la relación entre las amplitudes complejas de $x(t)$ y $u(t)$ en función de ω , esto es:

$$H(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{U(j\omega)}. \quad (1.25)$$

Si deseamos conocer la salida del sistema en base a la entrada del mismo, tenemos que:

$$V(j\omega) = U(j\omega)H(j\omega), \quad (1.26)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.27)$$

$X(j\omega)$ y $U(j\omega)$ son las transformadas de Fourier de la señal de salida y entrada del sistema lineal.



Cuando la entrada $u(t)$ es el impulso unitario, cuya transformada de Fourier es la unidad para cualquier ω , considerando (1.26, 1.27), la salida en el dominio de Fourier será:

$$X(j\omega) = 1 * H(j\omega) = H(j\omega), \quad (1.28)$$

$$v(t) = h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.29)$$

Donde $h(t)$ es la respuesta al impulso unitario del sistema lineal. La respuesta a una entrada transitoria se puede expresar en términos de la respuesta al impulso unitario, en lugar de la función de transferencia:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (1.30)$$

1.8.2 Respuesta de un sistema lineal con procesos aleatorios

Si conocemos las principales propiedades estadísticas (función de la esperanza matemática, varianza y covarianza) de un proceso aleatorio Gaussiano $y(t)$ a la entrada de un sistema lineal, para determinar las propiedades del proceso aleatorio en la salida, se necesita usar en principio la función de covarianza[36]:

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \langle \dot{x}(t_1) \dot{x}(t_2) \rangle \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) \dot{y}(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) \dot{y}(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) \langle \dot{y}(t_1 - \tau_1) \dot{y}(t_2 - \tau_2) \rangle d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) K_y(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) d\tau_2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Donde $h(\tau)$ es la respuesta al impulso del sistema lineal. Si el proceso en la entrada es un proceso estacionario en el sentido amplio, se tendrá que:

$$K_y(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) = K_y(\tau - \tau_1 + \tau_2). \quad (1.32)$$

Donde $\tau = t_1 - t_2$, la función de covarianza en la salida será:

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) K_y(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_2. \quad (1.33)$$

Nos remitimos nuevamente a las ecuaciones dadas por Wiener – Khintchine.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.34)$$

De tal forma que tenemos:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) d\tau_2 K_y(\tau - \tau_1 + \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.35)$$

Si introducimos una nueva variable “z”, donde $z = \tau - \tau_1 + \tau_2$, tenemos que $\tau = z - \tau_1 - \tau_2$, y al sustituirlo en la ecuación (1.35) tendremos lo siguiente:

$$S_x(\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega)S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_y(\omega). \quad (1.36)$$

Podemos observar que la densidad espectral en la salida del sistema lineal, como respuesta a un proceso estocástico estacionario en la entrada, es igual al cuadrado de la magnitud de la función del sistema multiplicado por la densidad espectral de potencia del proceso de la entrada.

Podemos aplicar las fórmulas anteriores para el análisis de los procesos estocásticos a través de sistemas lineales en cascada como se muestra en la Figura 1-3

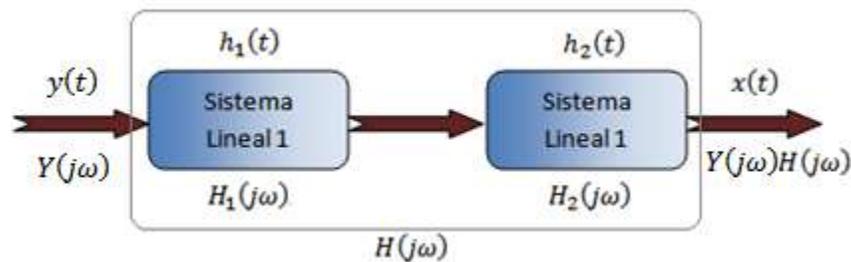


Figura 1-3 Respuesta de sistemas lineales en cascada a procesos estocásticos.

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t), \quad (1.37)$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega). \quad (1.38)$$

1.9 Regla de la Esperanza Matemática Condicional (Caso General)

Un proceso estocástico $x(t)$ lo podemos caracterizar por sus funciones de densidad de probabilidad (FDP) multidimensionales $w_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m),]$.



Supongamos que tenemos el conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ obtenidas al discretizar una realización de dicho proceso aleatorio en instantes de tiempo arbitrarios $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$. Tanto el número de muestras como sus tiempos de ocurrencia son arbitrarios por lo que las nuevas funciones de densidad de probabilidad dependerán de los valores en cada muestra $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$. Se les denomina función y densidad de probabilidad condicional o a “posteriori” [30],[31].

$$w[x(t)|X, T] = w[x(t)|x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)], \quad (1.39)$$

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t)|X, T \rangle = \langle x(t)|x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N) \rangle, \quad (1.40)$$

$$\tilde{m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w[x(t)|X, T] dx(t), \quad (1.41)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 |X, T \rangle, \quad (1.42)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \tilde{m}(t))^2 w[x(t)|X, T] dx(t). \quad (1.43)$$

Es claro que la reconstrucción del proceso resultante dependerá tanto del conjunto de muestras como de su función de densidad de probabilidad.

El número de realizaciones que pasa a través de todas las muestras puede ser infinito como se muestra en la Figura 1-4.

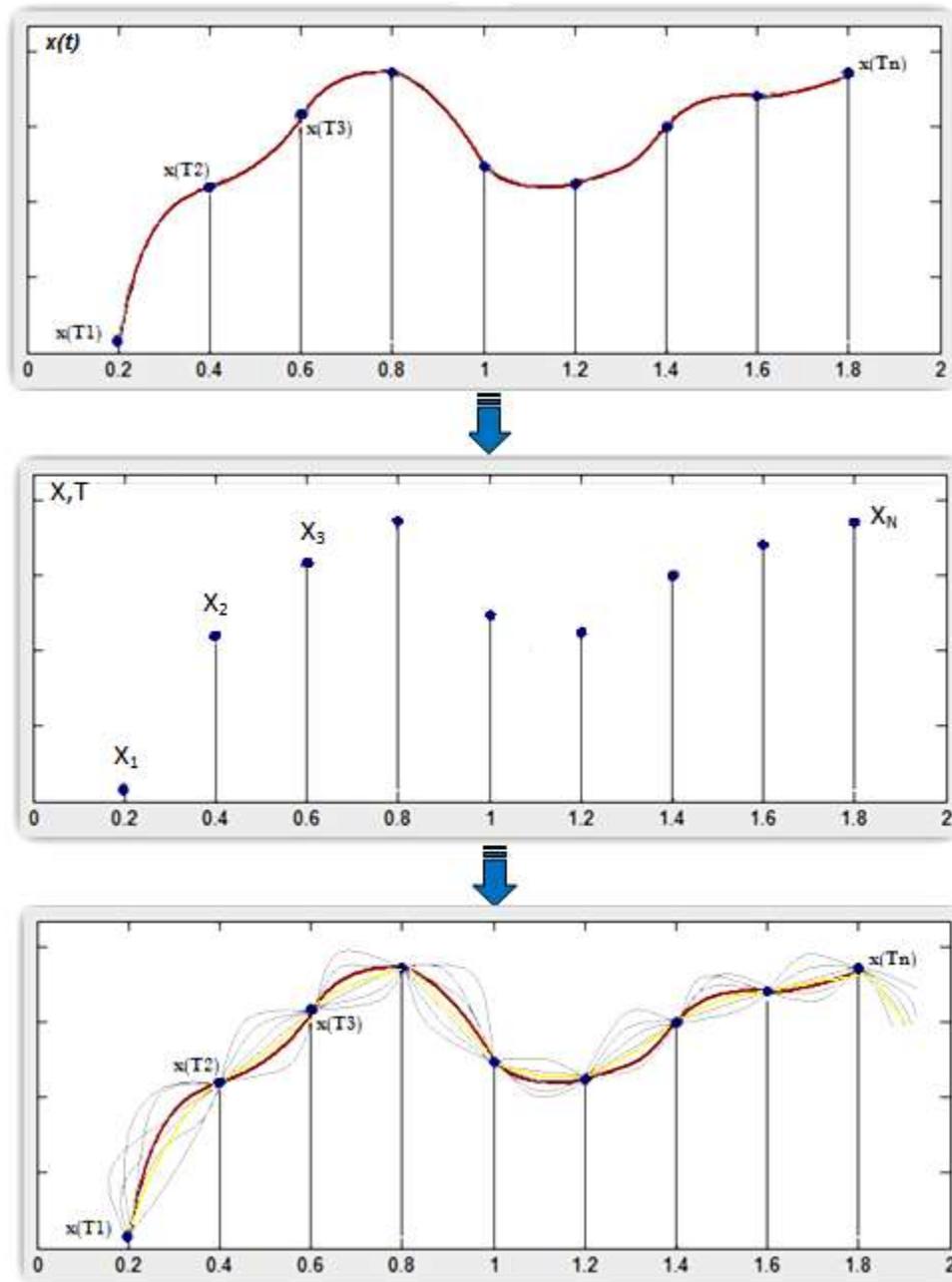


Figura 1-4 Realizaciones que pasan a través las muestras.

No podemos conocer exactamente la realización, sin embargo, podemos obtener una aproximación para cada instante de tiempo seleccionando la regla estadística adecuada para obtener una reconstrucción.

La regla de la esperanza matemática condicional nos da un criterio estadístico para la estimación de una variable aleatoria proporcionándonos el mínimo error para cualquier función de densidad



de probabilidad. De igual forma, podemos utilizar la varianza condicional para evaluar la calidad de la reconstrucción. A esta función se le conoce como función de error de reconstrucción [38,39].

1.10 Cuantificación.

El proceso muestreo nos entrega una cantidad de muestras cuyas amplitudes pueden tomar una infinidad de valores, es decir, el rango de valores que pueden tener dichas muestras es continuo.

Consideremos el problema del Procedimiento Muestreo - Cuantificación – Reconstrucción (PMCR) de realizaciones de los procesos aleatorios. Aquí hay algunas diferencias específicas en comparación con el problema PMR. La operación de la cuantificación es no lineal, a la salida del convertidor “análogo – cifra” en lugar de valores precisos $x(T_i)(i = 1,2, \dots, N)$ tenemos otros valores de los muestreos $x^s(T_i)(i = 1,2, \dots, N)$ iguales a algunos niveles de la cuantificación. Enfatizamos, que el procedimiento del muestreo en el tiempo está caracterizado con valores determinísticos $T_i(i = 1,2, \dots, N)$. La cantidad de niveles L de la cuantificación puede variar, usualmente son utilizados 4, 8, 16, 32, 64, 128.

En la operación del muestreo, la función de reconstrucción debe tener otra forma, no precisa. Esta función pasa dentro de los valores de muestreos $x^s(T_i)(i = 1,2, \dots, N)$. Con dicho efecto se genera un error adicional además del error de la reconstrucción usual. Dicho error depende fuertemente del número L , o del intervalo de la cuantificación ΔL . Es claro que, cuando el valor del intervalo es grande, entonces el error adicional sería más grande también. En el caso del proceso Gaussiano el valor de la desviación estándar σ debe ser conocida a priori. Entonces el valor $L * \Delta L$ está calculado en la base de la regla seis sigmas:

$$L * \Delta L = 6\sigma. \quad (1.44)$$

Para investigar PMCR se necesita conocer las características del proceso dado y la cantidad L de los niveles. El resultado de la investigación debe ser el algoritmo (o la función) de la reconstrucción y la función del error de la reconstrucción. La función se debe ser sumada al error usual.

Hay muchos trabajos dedicados al problema de PMCR. Mencionamos algunas publicaciones importantes [40-42] en las cuales están consideradas diferentes variantes de los filtros no óptimos de la reconstrucción de las realizaciones de procesos aleatorios. No existen artículos con análisis del problema en base a la Regla de la Esperanza Matemática Condicional. Enfatizamos que dicha regla nos da algoritmos de reconstrucción, acoplados con propiedades del proceso muestreado, por ello tales algoritmos aseguran el mínimo error de reconstrucción. Hay una publicación dedicada a PMCR en la base de REMC para procesos Gaussianos [43].

Además del PMCR existe otro problema, el cual se llama el Procedimiento de la Cuantificación – Reconstrucción (PCR) de las realizaciones de los procesos aleatorios. Este término no contiene una palabra: “Muestreo”. Realmente el procedimiento del muestreo en el tiempo existe, pero los momentos instantáneos de ocurrencia de las muestras están determinados por el punto del cruce de la realización y el nivel correspondiente de la cuantificación. Es decir, los momentos del

tiempo T_i ($i = 1, 2, \dots, N$) son aleatorios y por consecuencia, los intervalos entre muestras son aleatorios también. En dicha variante es obligatorio usar una metodología de la investigación usando la simulación de las realizaciones de los procesos aleatorios. El primer artículo, dedicado a PCR de las realizaciones de los procesos Gaussianos en la base de REMC fue publicado en Memorias del Congreso CNIES del ESIME-Zacatenco en 2011[43,44].

El presente trabajo está dedicado a la generalización del artículo [44]. Aquí el problema de PCR está considerado para las realizaciones del proceso No Gaussiano. Para cumplir dicha investigación se necesita simular las realizaciones del proceso aleatorio en la salida del convertidor no lineal. Elegimos el proceso en la salida del el convertidor No lineal - No inercial tipo exponencial, cuando en la entrada está el proceso Gaussiano Markoviano.

En la Figura 1-5 se puede observar la cuantificación “tradicional” No lineal. Está claro que la aproximación de cada muestra al nivel más cercano agregará un error adicional anteriormente descrito.

En este trabajo se tomará el muestreo al momento del “Cruce por cada nivel”, con esto nos aseguramos de no tener el error por cuantificación, obteniendo muestras No equidistantes como se observa en la Figura 1-6.

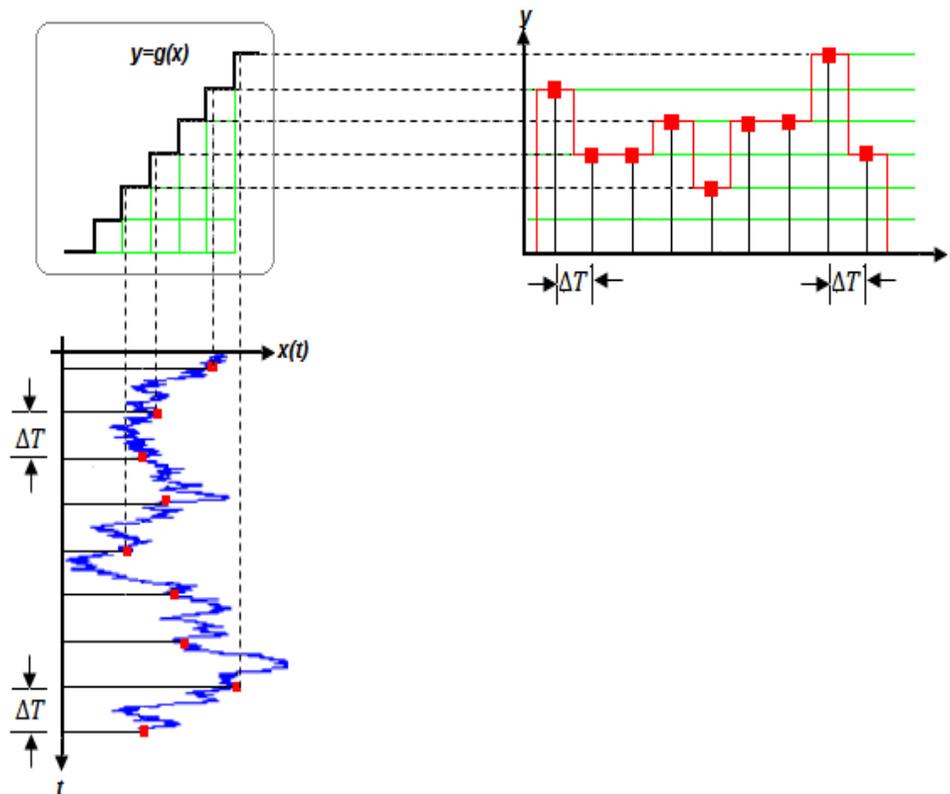
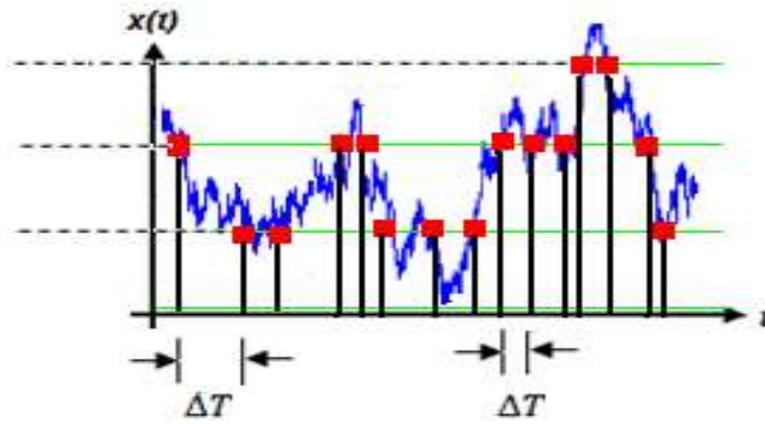


Figura 1-5 Operación de la cuantificación “tradicional” (No lineal).



1-6 Operación de la cuantificación por "cruce por niveles" (utilizada en este trabajo).



Capítulo 2 Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de procesos aleatorios Gaussianos

La Función de Densidad de Probabilidad tipo Gaussiana es la más utilizada en todas las áreas científicas y se puede encontrar prácticamente en cualquier procesos estocástico en la naturaleza.

En este capítulo se revisa el procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de procesos estocásticos con FDP Gaussiana, tanto Markovianos como No Markovianos obtenidos a la salida de filtros pasa baja de una y dos etapas cuya entrada son secuencias aleatorias de tipo Gaussiano.

2.1 Introducción

Una variable aleatoria X tiene una función de densidad de probabilidad si tiene la forma [45,46]:

$$w_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma_x^2}, \quad (2.1)$$

donde la varianza ($\sigma_x^2 > 0$), y la media ($-\infty < m_x < \infty$) son constantes reales ($\sigma_x^2, m_x \in \mathbb{R}$).

En la Figura 2-1 se puede observar $w_x(x)$ para diferentes valores de σ_x^2 , mientras que la Figura 2.2 se ejemplifica el comportamiento que se tiene para diferentes valores de m_x .

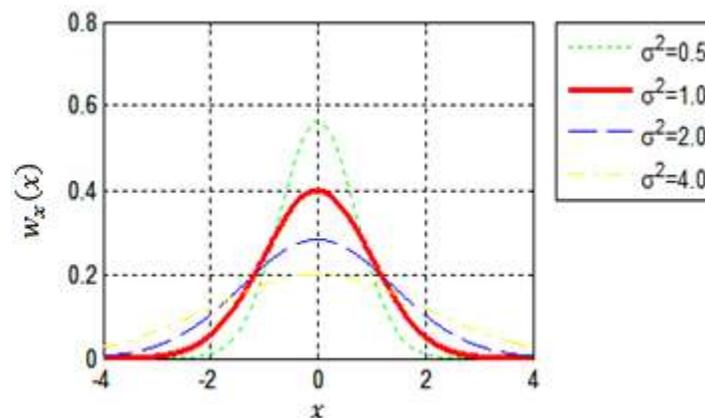
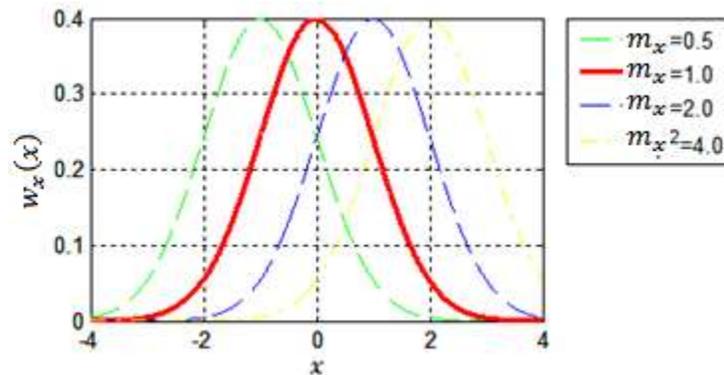


Figura 2-1 $w_x(x)$ para diferentes valores de σ_x^2 .


 Figura 2-2 $w_x(x)$ para diferentes valores de μ_x

La función de distribución usando (2.1), está definida por:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^x e^{-(-x-m_x)^2/2\sigma_x^2} dx. \quad (2.2)$$

Un proceso aleatorio es Gaussiano si las variables aleatorias $x_1=x(t_1)$, $x_2=x(t_2)$, ..., $x_M=x(t_M)$ tienen una FDP Gaussiana M -Dimensional para cualquier M y cualquier t_1, t_2, \dots, t_M . Su función de densidad será [45]:

$$w_x(x_1, \dots, x_M; t_1, \dots, t_M) = \frac{\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)[x - \bar{X}]^t [C_x]^{-1} [x - \bar{X}]\right\}}{\sqrt{(2\pi)^M |C_x|}}. \quad (2.3)$$

donde $[x - \bar{X}]$ y $[C_x]$ son las matrices de covarianza y \bar{X} es la media de $X(t)$

2.3 Propiedades de los procesos Gaussianos

Dentro de las principales características de los procesos aleatorios Gaussianos tenemos las siguientes [22,23],[30-35]:

- Si un proceso aleatorio Gaussiano $y(t)$ entra en un filtro lineal estable, entonces, el proceso aleatorio $x(t)$ a la salida del filtro será también de tipo Gaussiano.
- La función de densidad de probabilidad de tipo Gaussiana, M -dimensional está completamente especificada por los momentos de primer y segundo orden, es decir, las medias, las varianzas y las covarianzas.
- Si un proceso Gaussiano es estacionario en el sentido amplio, también lo será en el sentido estricto. Estos es, $w_n[x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n] = w_x[x_1, t_1 + t'; x_2, t_2 + t'; \dots; x_n, t_n + t']$ llamados procesos estacionarios en el sentido estricto. La estacionariedad menos estricta



se presenta cuando la función de covarianza depende únicamente de la diferencia de dos argumentos del tiempo $K_x(\tau) = K_x(t_2 - t_1) = \langle x(t_1) - m(t_1) \rangle \langle x(t_2) - m(t_2) \rangle$. Cuando un proceso obedece a esta expresión se dice que es estacionario en el sentido amplio o estacionario de segundo orden.

- d) Si la matriz de covarianza es de tipo diagonal, las variables aleatorias no están correlacionadas y por lo tanto se concluye que las variables Gaussianas aleatorias son independientes.
- e) Ya que $\{x_i = x(t_i)\}$ son conjuntamente Gaussianos, los términos $x_i = x(t_i)$ son individualmente Gaussianos.
- f) Una transformación lineal de un conjunto de variables aleatorias Gaussianas produce otro conjunto de las mismas.

2.4 Regla de la Esperanza matemática Condicional de Procesos Aleatorios Gaussianos.

Considerando el caso general de un proceso Gaussiano no estacionario $x(t)$, la esperanza matemática $m(t)$, la varianza $\sigma^2(t)$ y la función de covarianza $K_x(\tau)$ constituyen la información necesaria para modelar completamente el proceso aleatorio en cuestión, debido a esto, podemos escribir la FDP multidimensional de orden m arbitraria como [38-39]:

$$w_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m),] = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} [Det K_x(t_i, t_j)]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [x(T_i) - m(T_i)] [x(T_j) - m(T_j)] \right\}. \quad (2.4)$$

donde $Det K_x(t_i, t_j)$ en (2.4) es el determinante de la matriz de covarianza:

$$\|K_x(t_i, t_j)\| = \left\| \begin{array}{ccc} K_x(t_1, t_1) & \cdots & K_x(t_1, t_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_x(t_m, t_1) & \cdots & K_x(t_m, t_m) \end{array} \right\| \quad (2.5)$$

y $\|a_{ij}\|$ Representa la matriz inversa de covarianza:

$$\|a_{ij}\| = \|K_x(t_i, t_j)\|^{-1}. \quad (2.6)$$

Fijando el conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$, la función de densidad de probabilidad condicional será también de tipo Gaussiana, el proceso condicional denominado por



$\tilde{x}(t)$ lo podemos describir completamente con las expresiones que reflejan las principales características estadísticas del proceso [31-35]:

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)]. \quad (2.7)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t), \quad (2.8)$$

$$\tilde{K}_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t) - \quad (2.9)$$

Donde $m(t)$ y $\sigma^2(t)$ son la media y la varianza No condicional del proceso inicial $x(t)$. La matriz a_{ij} representa los elementos de la matriz inversa de covarianza en función de los instantes de muestreo $A = K^{-1}(T_i, T_j)$. Partiendo de un proceso aleatorio Gaussiano cuya esperanza matemática $m(t)=m=0$, y tiene una función de covarianza $K(t, T_i)$, entonces es posible encontrar la expresión que describe la influencia que proporciona cada muestra en la reconstrucción del proceso, debido a esto, en lugar de (2.7), se tiene:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t - T_i) a_{ij} [x(T_j)] = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t). \quad (2.10)$$

Este resultado nos proporciona una fórmula para la reconstrucción del proceso que solamente depende de la sumatoria del producto de cada muestra $x(T_j)$ por una función a la cual se le conoce como función básica $b_j(t)$, la cual está determinada por:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N K(t - T_i) a_{ij}. \quad (2.11)$$

La función básica depende, en general, del comportamiento de la función de covarianza del proceso aleatorio, de la cantidad de N de muestras, del conjunto de tiempos de muestreo arbitrarios T_i , y del momento de covarianza que existe entre las secciones del proceso en los instantes T_i y T_j . Es importante destacar el hecho de que existe una función básica por cada muestra.



En la misma forma que los principales parámetros estadísticos del proceso aleatorio influyen sobre la función básica, influirán en la función de reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y en la función de error de reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$.

2.5 Reconstrucción de procesos a la salida de filtros RC (Sistemas lineales)

Un sistema lineal es aquel que satisface el principio de superposición, el cual exige que la respuesta de un sistema a una suma de señales, sea igual a la correspondiente suma de las salidas en cuya entrada se tengan cada una de las señales, es decir, un sistema es lineal si y solo si:

$$\begin{aligned} y(t) &= l[a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_nx_n(t)] \\ &= a_1l[x_1(t)] + a_2l[x_2(t)] + \dots + a_nl[x_n(t)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $l[*]$ denota el operador de sistema lineal, $y(t)$ es la salida y $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_nx_n(t)$ corresponde a la entrada [58].

Cuando se aplica la regla de la esperanza matemática condicional para casos Gaussianos (como los que se obtienen en la salida de un filtro RC alimentado con ruido blanco Gaussiano), como se ve en la Figura 2-3, la respuesta estará dada por la función de covarianza normalizada de tipo exponencial. Las características estadísticas no condicionales del proceso aleatorio en la entrada son $m(t) = 0$, $\tau_c = 1$.

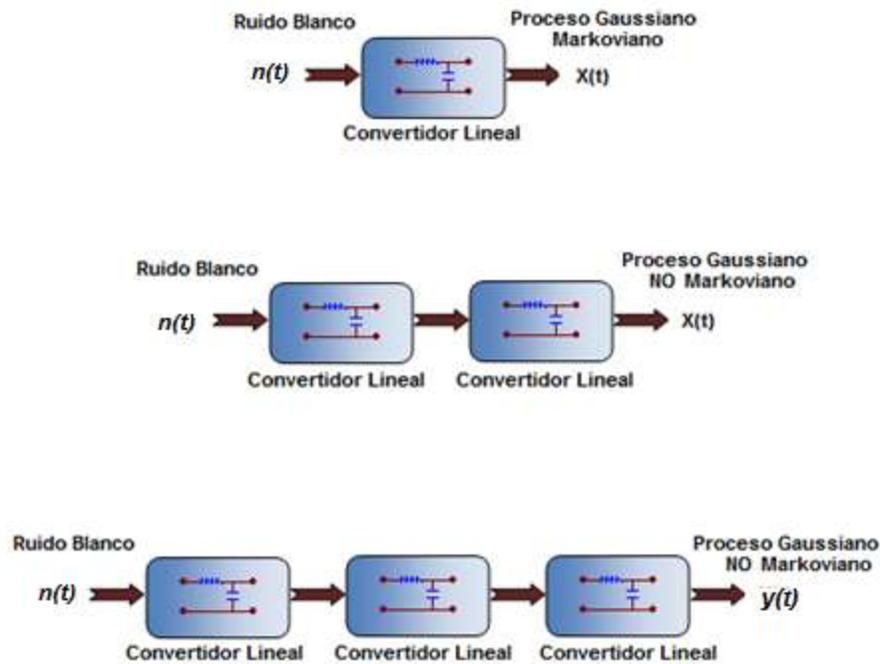


Figura 2-3 Respuesta a la salida de filtros RC de a) Una etapa b) Dos etapas y, c) Tres etapas.

En el presente trabajo, se realizará la investigación tanto de sistemas Markovianos como de sistemas No Markovianos, de estos últimos se analizarán los procesos a la salida de un filtro RC de dos etapas.

2.5.1 Procesos Markovianos (Salida del filtro RC de una etapa)

El caso más simple del procedimiento de Muestreo –Reconstrucción de procesos Gaussianos, corresponde a los procesos Markovianos unidimensionales, los cuales pueden ser obtenidos en la salida de un filtro RC de una etapa en cuya entrada se tenga un proceso Gaussiano como el Ruido Blanco Gaussiano, ver Figura 2-3.

La respuesta de dicho procesos estará dada por la función de covarianza normalizada:

$$R_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|). \quad (2.13)$$

Para efectos del análisis, se trabajará con la función de covarianza normalizada $R_x(\tau)$. Por otro lado, se definirá la varianza y el tiempo de covarianza igual a la unidad ($\tau_c = 1$ y $\sigma^2(t) = 1$).

Sustituyendo (2.13) en (1.18) tenemos lo siguiente:



$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha|\tau|) d\tau = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.14)$$

Podemos observar que el tiempo de covarianza (tiempo de influencia entre los mismos valores de un proceso) dependerá del valor $\alpha = 1/RC$. Para que el tiempo de covarianza sea unitario, es necesario que α también lo sea ($\alpha = 1$).

La función de covarianza $R_x(\tau)$ tiene las propiedades de un proceso Markoviano por lo que se puede definir la función básica, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción de la siguiente manera:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N R_x(t - T_i) a_{ij} = \sum_{i=1}^N \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij}. \quad (2.15)$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij}. \quad (2.16)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \exp(-\alpha|T_j - t|). \quad (2.17)$$

Las funciones anteriores dependen de la matriz a_{ij} la cual está dada por:

$$\|a_{ij}\| = \|K_x(T_i, T_j)\|^{-1}. \quad (2.18)$$

Es importante señalar algunas características de suma importancia respecto a las ecuaciones anteriores:

1. Es claro que la función de reconstrucción (esperanza matemática condicional) en la ecuación (2.16) siempre dependerá del valor de la muestra, esto lo podemos observar analíticamente, ya que se incluye el término $x(T_j)$.
2. La función de Error de reconstrucción (varianza condicional) en la ecuación (2.17), no contiene términos que dependan del valor de la muestra, es decir, solo depende de la separación que exista entre el tiempo de la muestra actual y las demás muestras. En el presente trabajo se tendrá especial atención en el análisis del Error de reconstrucción bajo diferentes escenarios.

La Figura 2-4 ejemplifica el comportamiento que tiene la Función de Error de reconstrucción cuando se tienen dos muestras separadas 0.2s.

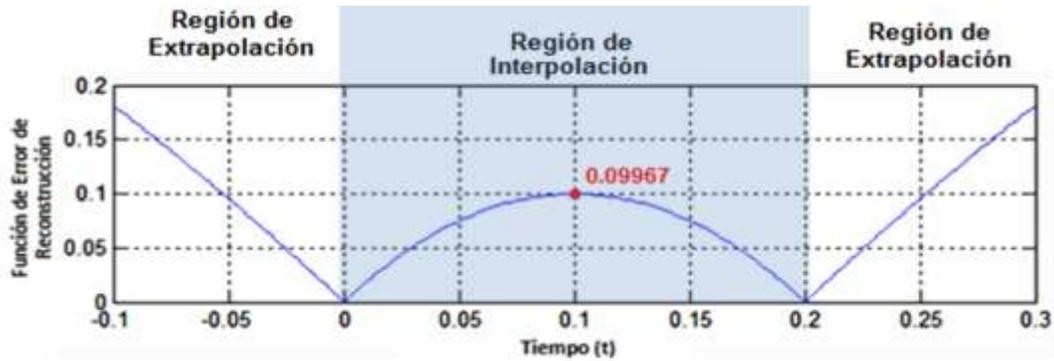


Figura 2-4 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.2s$, $N=2$.

Es claro que el máximo error de reconstrucción dentro de la Región de interpolación se dará justo a la mitad del tiempo entre muestra y muestra. Este ejemplo nos proporciona un valor máximo de Error en el tiempo $t=0.1s$ igual a 0.09967.

Es importante revisar que es lo que sucede bajo dos condiciones principales:

- 1) ¿Qué sucede cuando se incrementa el número de muestras manteniendo constante la separación del tiempo entre ellas?, y
- 2) ¿Cómo varía el error de reconstrucción cuando mantenemos constante el número de muestras pero variamos la separación entre ellas?

Para el primer punto, graficamos la función de Error de reconstrucción manteniendo una separación entre muestras de 0.5s. Esto se realizará para un número de muestras $N = 3, 4, 5$ y 10.

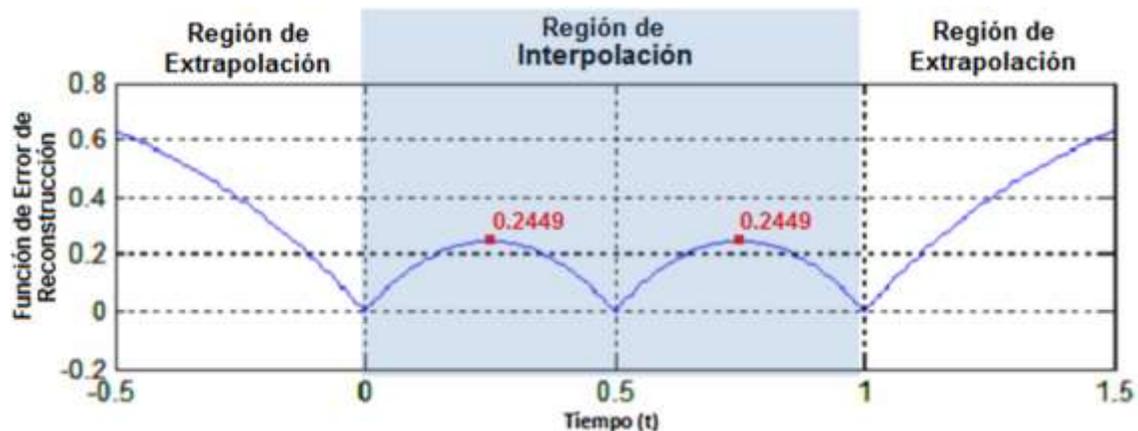


Figura 2-5 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=3$.

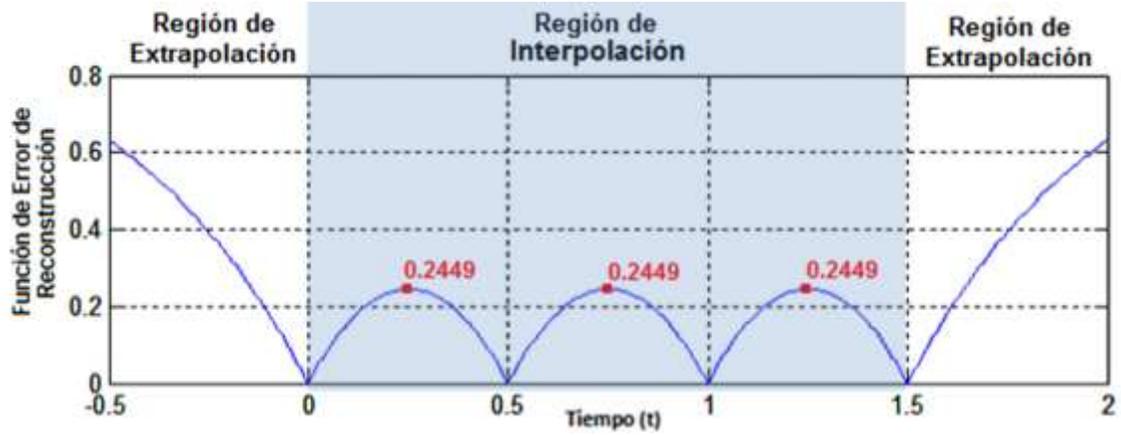


Figura 2-6 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=4$.

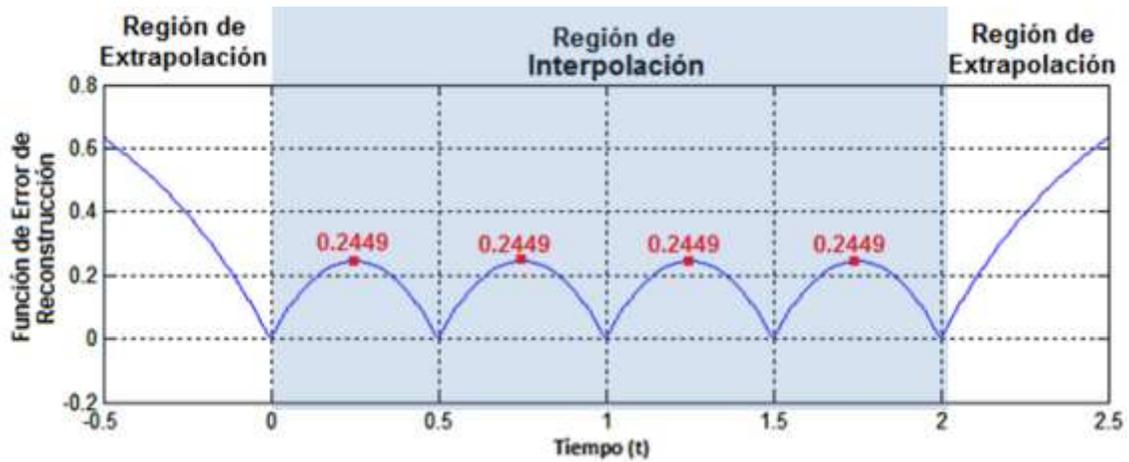


Figura 2-7 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.

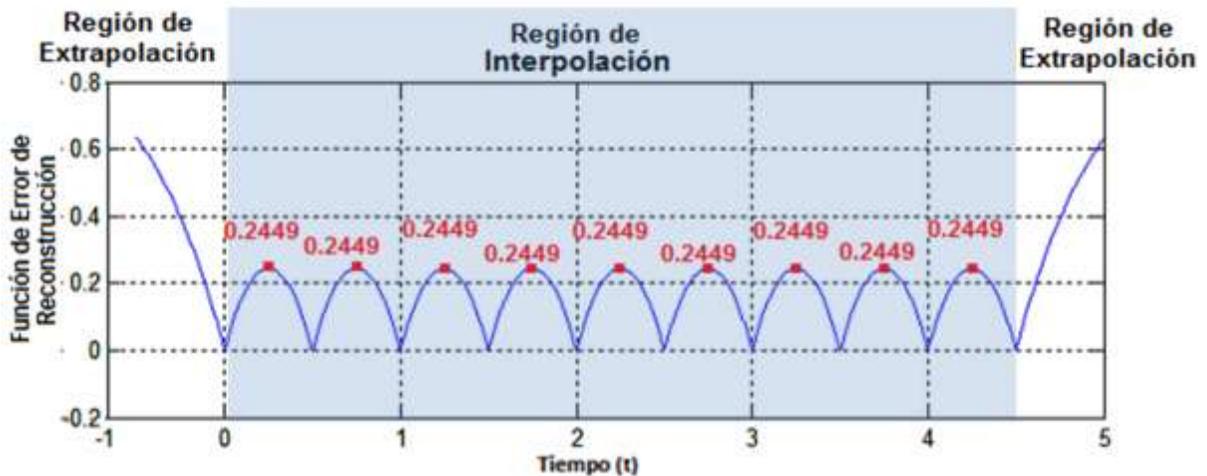


Figura 2-8 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=10$.



En base a las gráficas anteriores, podemos destacar que el Error de reconstrucción no depende del número de muestras que se tengan. En todas las gráficas se puede observar que el máximo error de reconstrucción se encuentra en el tiempo medio entre muestra y muestra, y en particular, este máximo error es el mismo (0.2449) independiente de la cantidad de muestras.

El mínimo error de reconstrucción, se dará en el momento justo en los instantes de muestreo y será igual a cero..

Teniendo la misma cantidad de muestras $N=5$, analizamos el comportamiento cuando variamos la distancia entre dichas muestras. Se ejemplifican las gráficas cuando la separación entre muestras $\Delta T = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.50, 1.00, 1.50$ y 2.00 .

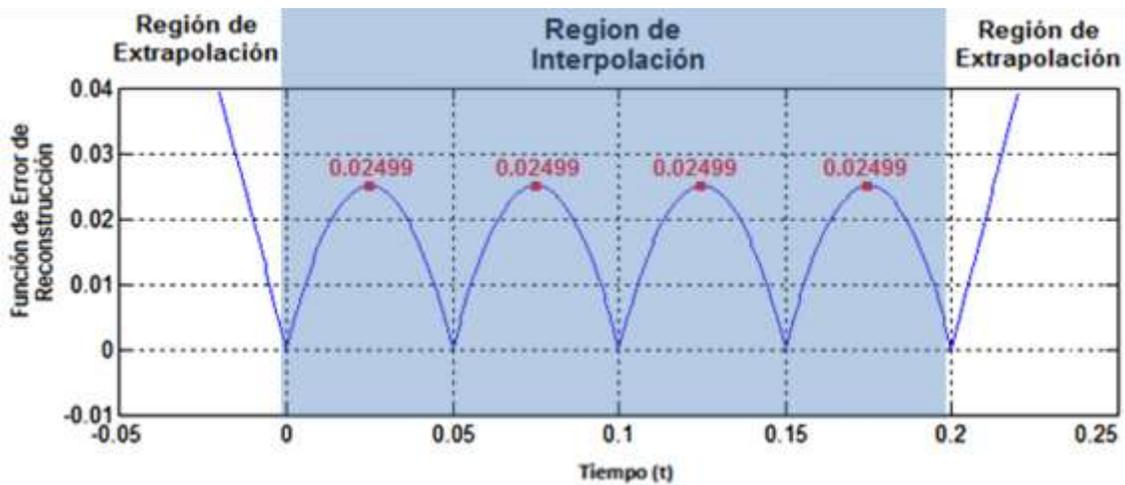


Figura 2-9 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.05$ s, $N=5$.

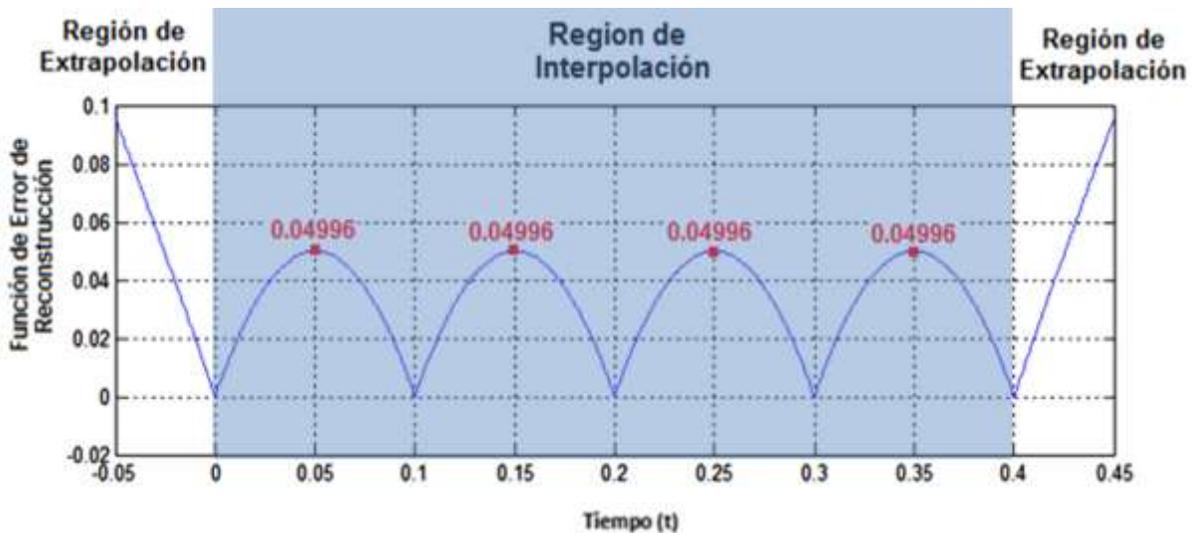


Figura 2-10 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.1$ s, $N=5$.

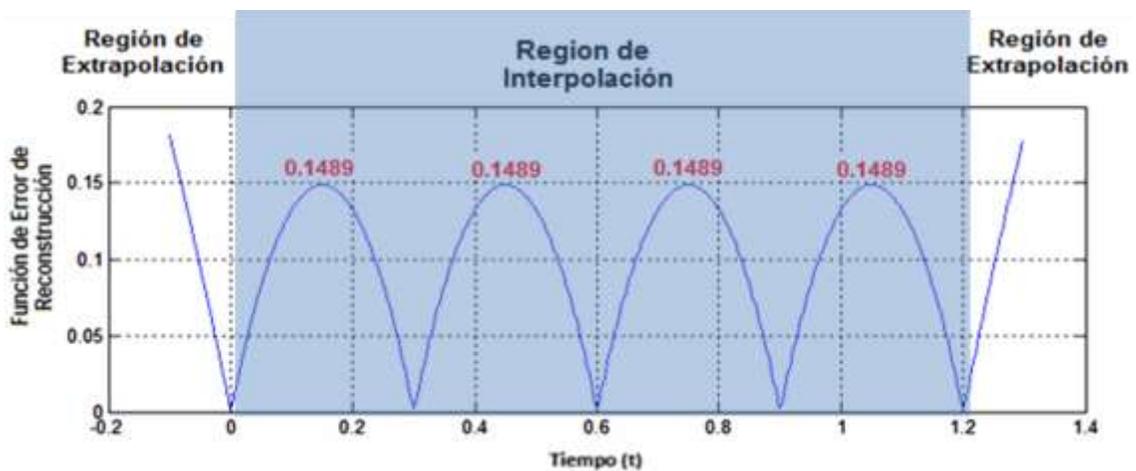
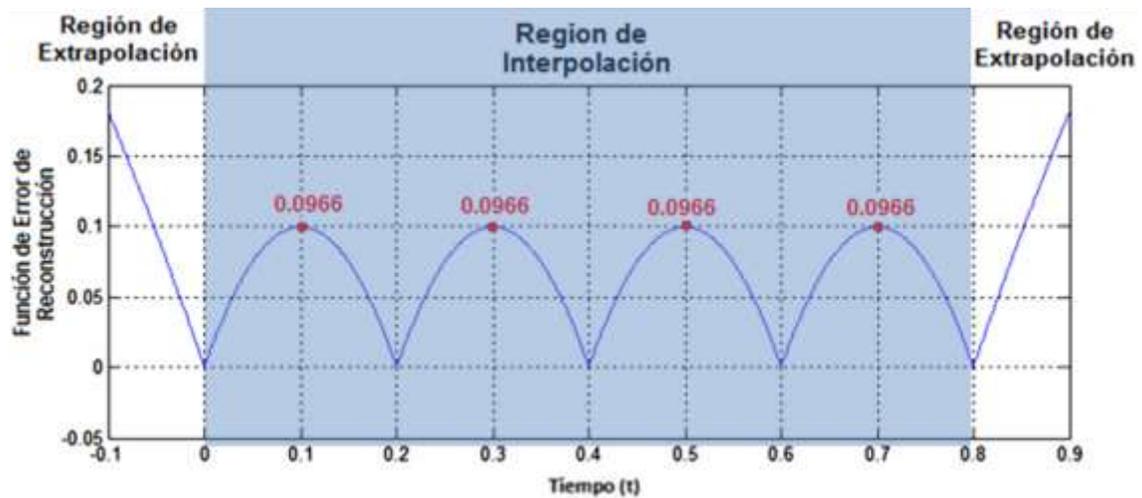
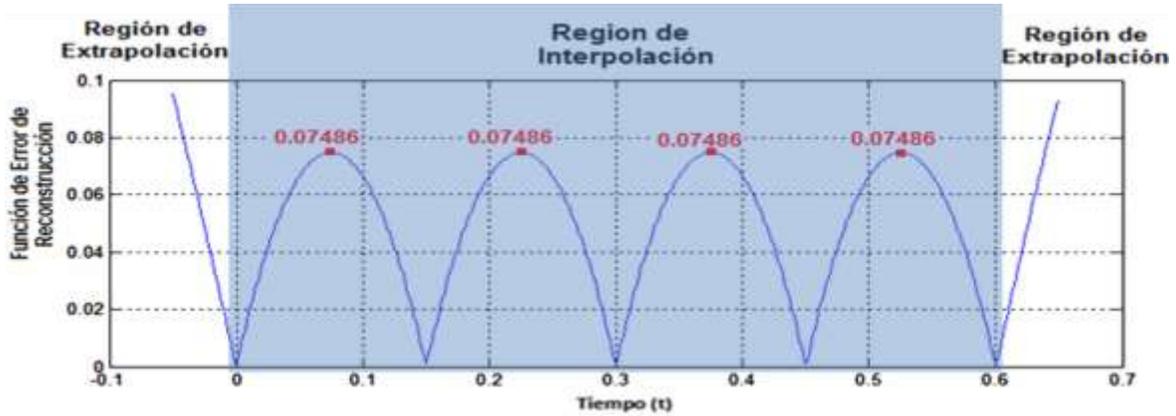




Figura 2-14 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.

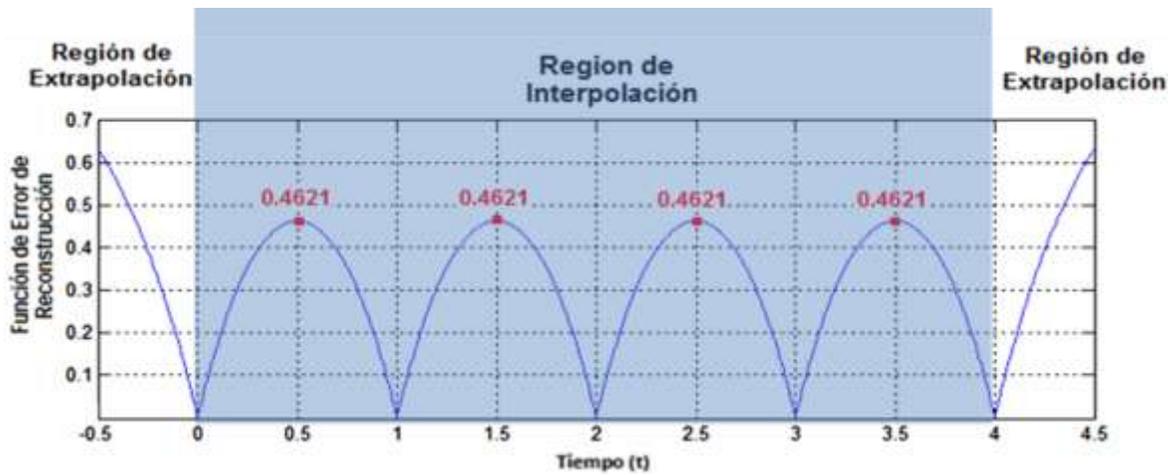
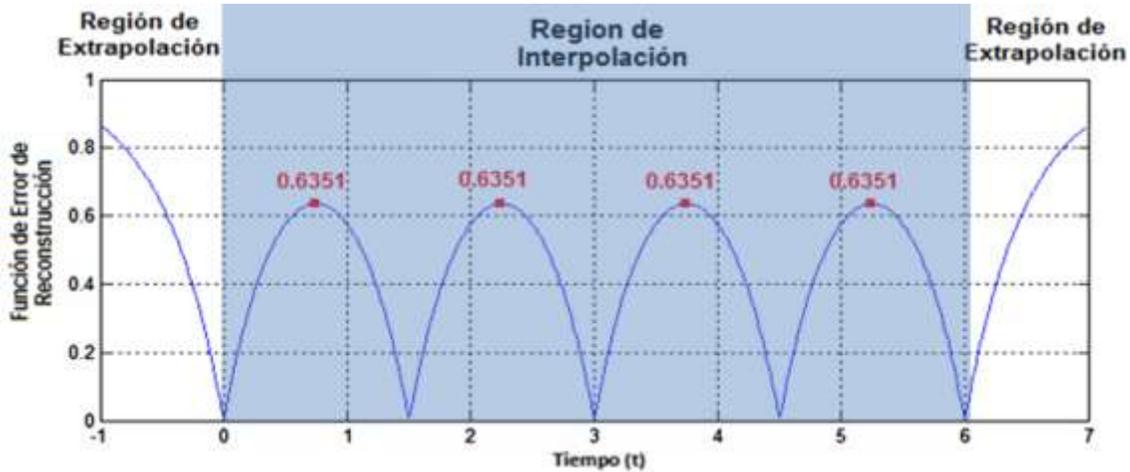
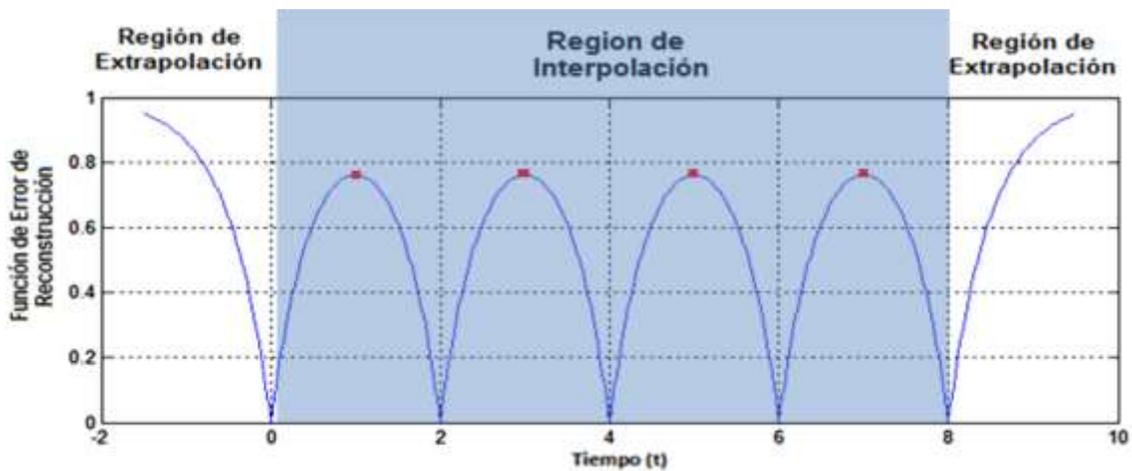


Figura 2-15 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 1.0s$, $N=5$.


 Figura 2-16 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 1.5s$, $N=5$.

 Figura 2-17 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos Markovianos $\Delta T = 2.0s$, $N=5$.

Es importante destacar el hecho de que para los procesos Markovianos, la reconstrucción del proceso, así como el Error de Reconstrucción, solo depende de las dos muestras más cercanas a la posición del tiempo t , es decir, no tenemos influencia de otras muestras más que las dos más cercanas, esto para la reconstrucción en la región de interpolación. En lugar de (2.14), (2.15) y (2.16) tendremos:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^2 R_x(t - T_i) a_{ij} = \sum_{i=1}^2 \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^2 x(T_j) b_j(t) = \sum_{j=1}^2 x(T_j) \sum_{i=1}^2 \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij}, \quad (2.20)$$



$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \exp(-\alpha|T_j - t|). \quad (2.21)$$

Para el caso de la extrapolación, la reconstrucción de los procesos dependerá solo de la muestra más cercana, es decir, solo tenemos influencia de una muestra, ya sea $x(T_1)$ si hablamos de la zona de extrapolación inicial, o bien, $x(T_n)$ si hablamos de la zona de extrapolación final.

2.5.2 Procesos no Markovianos (Salida del filtro RC de dos etapas)

Cuando se habla de procesos Gaussianos No Markovianos, como se puede observar en la Figura 2-3, se pueden obtener a la salida un filtro RC de dos etapas. Es claro que el comportamiento del proceso aleatorio a la salida de un filtro RC de dos etapas será más suave en comparación con los procesos Markovianos que se obtuvieron a la salida de un filtro RC de una etapa. La función de covarianza normalizada la podemos obtener mediante las siguientes ecuaciones:

$$R_x(\tau) = (1 - \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|), \quad (2.22)$$

El tiempo de covarianza τ_c de esta función será:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |(1 - \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|)| d\tau = \frac{2}{\alpha}. \quad (2.23)$$

Nuevamente podemos observar que el tiempo de covarianza dependerá del valor $\alpha = 1/RC$, lo cual nos obliga a que $\alpha = 2$ para tener el valor unitario $\tau_c = 1$. La función básica, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción estarán dadas por las siguientes ecuaciones:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N R_x(t - T_i) a_{ij} = \sum_{i=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij}, \quad (2.24)$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij}, \quad (2.25)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} (1 + \alpha|T_j - t|) \exp(-\alpha|T_j - t|). \quad (2.26)$$

Al igual que en los procesos Markovianos, tanto la función básica y la función de reconstrucción (2.23), (2.24) dependerá de los valores propios de las muestras obtenidas, mientras que la función



de error de reconstrucción (2.25) solo dependerá de los intervalos de tiempo que existan entre las muestras, estos se puede observar claramente ya que no se tiene el término $x(T_j)$.

Revisando el caso más sencillo, Figura 2.18, en donde tenemos dos muestras, la función de error de reconstrucción dada por (2.24) será de la siguiente forma:

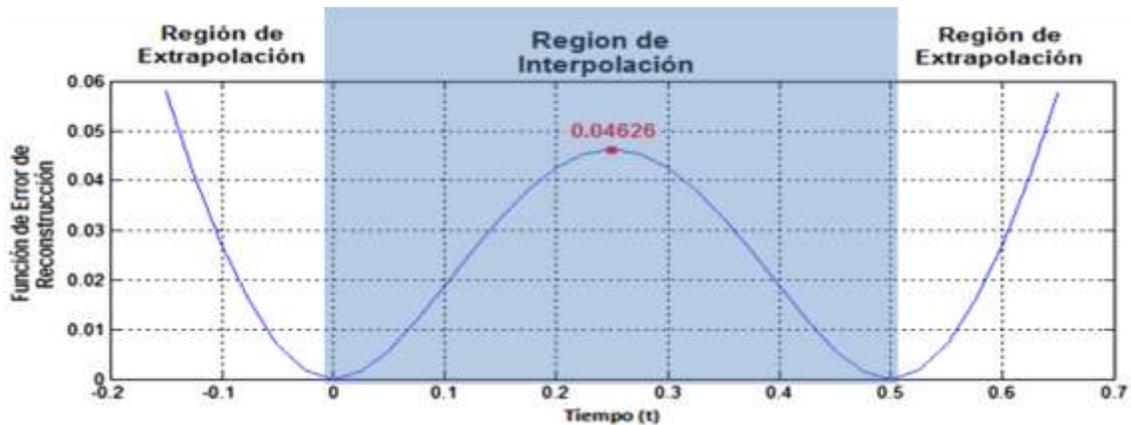


Figura 2-18 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=2$.

La Figura 2-18 tiene ciertas semejanzas con la función de error de reconstrucción para el caso de los procesos Markovianos, por ejemplo, destaca el hecho de que tenemos el mínimo error de reconstrucción en los instantes de las muestras, y será mayor conforme se aleje.

Es notorio que tanto en la zona de interpolación como en la zona de extrapolación la forma de la función de error en la reconstrucción es más suave en comparación con los procesos Markovianos.

Analizamos ahora lo que sucede cuando incrementamos el número de muestras, manteniendo la misma separación entre ellas, esto se representa en las Figuras 2-18 a la Figura 2-23:

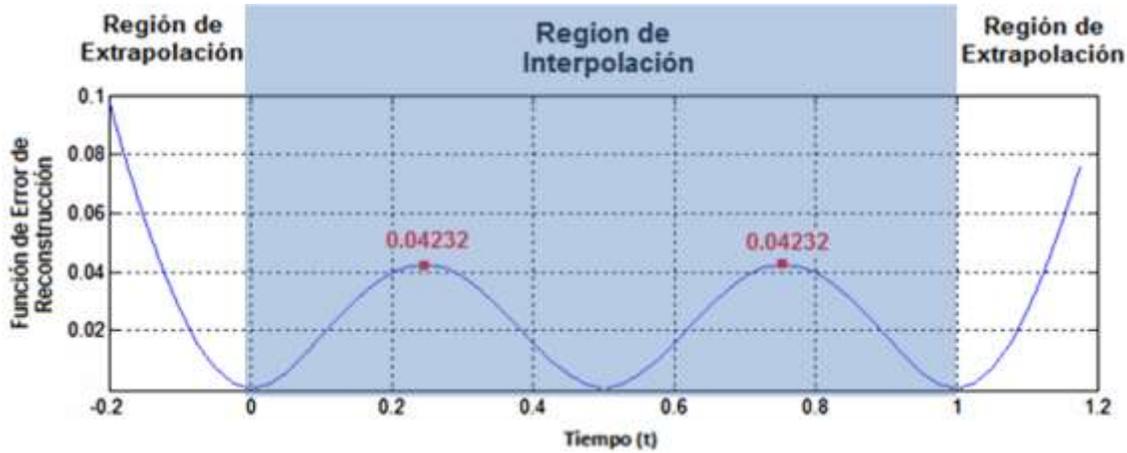


Figura 2-19 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=3$.

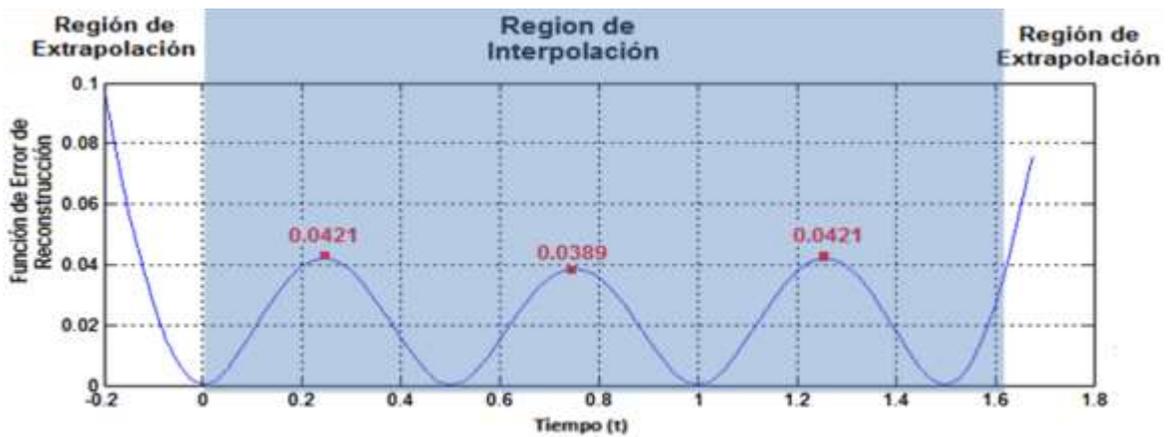


Figura 2-20 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=4$.

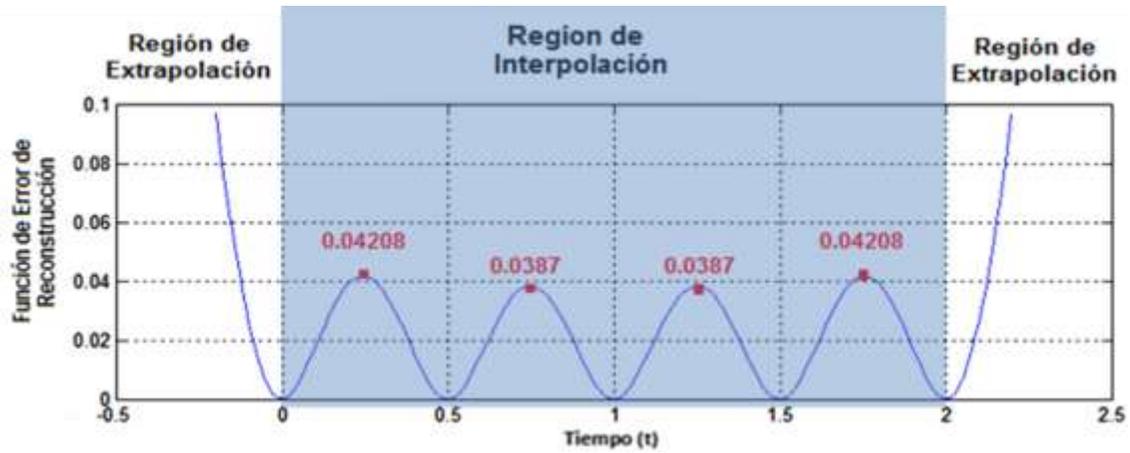


Figura 2-21 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.

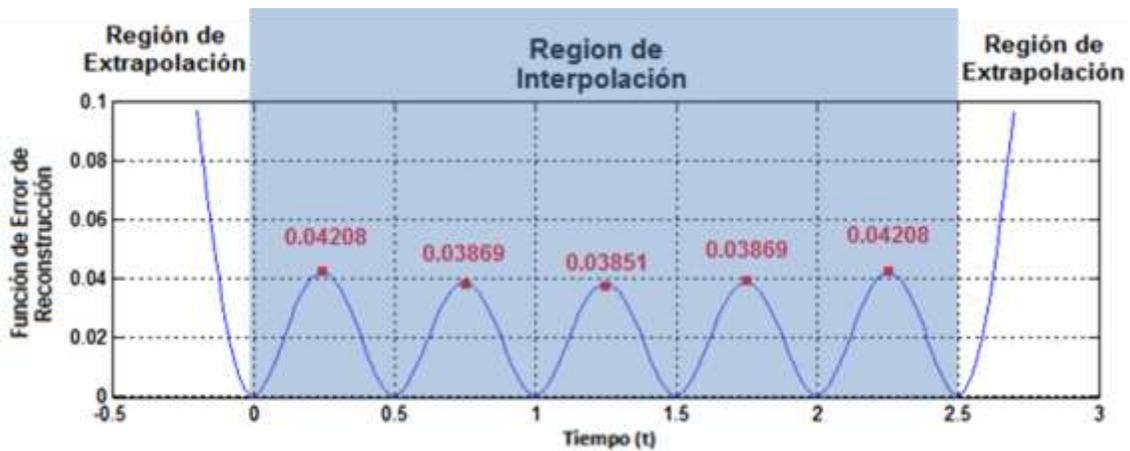


Figura 2-22 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=6$.

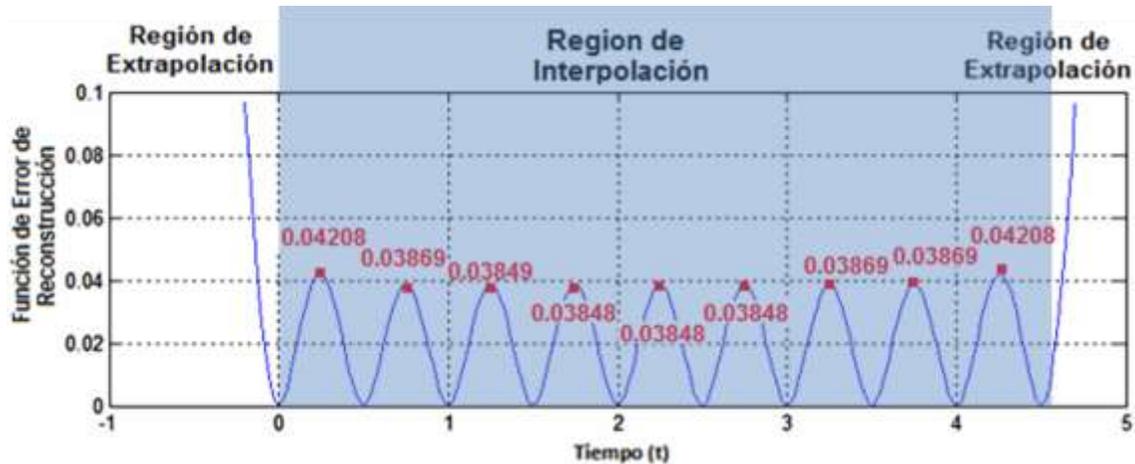


Figura 2-23 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=10$.

Destaca el hecho de que los valores obtenidos son menores que los calculados en el caso Markoviano, por ejemplo, para $N=2$ muestras separadas $\Delta T = 0.5s$, para el caso Markoviano obtuvimos un Error de reconstrucción máximo de 0.2449 mientras que en el caso No Markoviano obtuvimos un valor de máximo error de 0.04232.

Es importante destacar también el hecho de que el error de reconstrucción en la zona central de la región de interpolación es menor que las zonas más cercanas a la región de extrapolación. Esto se debe a la influencia que tienen las muestras que rodean. Esta es la principal diferencia respecto a los procesos Markovianos: El error de reconstrucción depende del número de muestras que se tengan.

Teniendo la misma cantidad de muestras $N=5$, analizamos el comportamiento cuando variamos la distancia entre dichas muestras. Se ejemplifican las gráficas cuando la separación entre muestras $\Delta T = 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.50, 1.00$ y 1.50 . Ver Figuras 2-24 a la Figura 2-31.

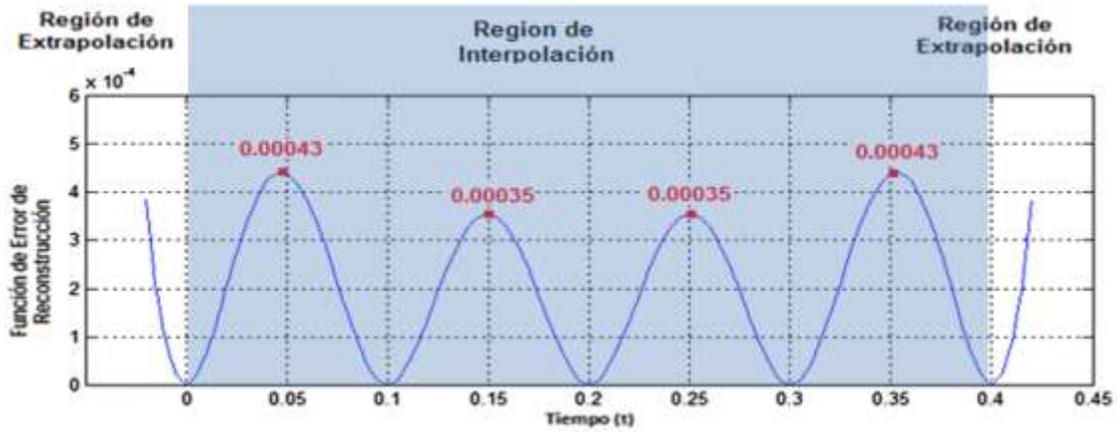


Figura 2-24 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T=0.1s$, $N=5$.

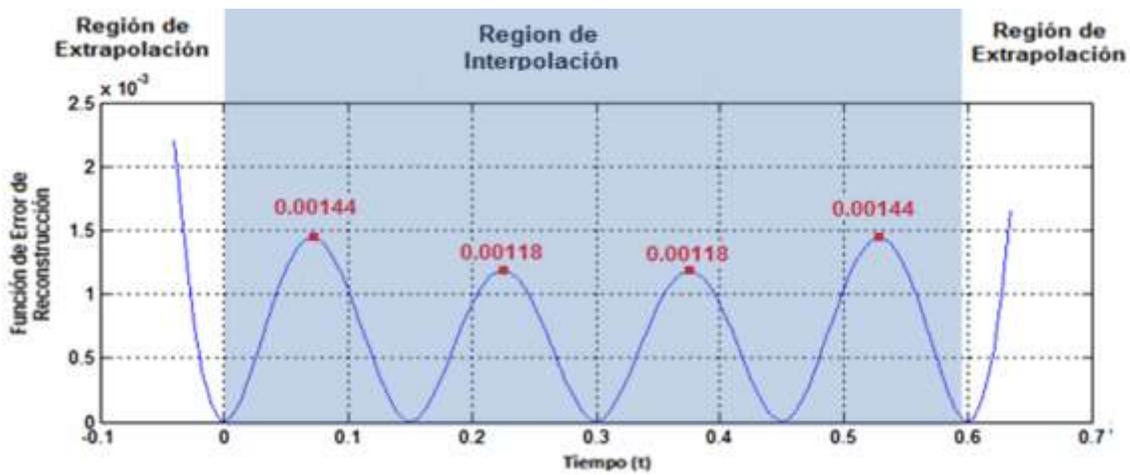


Figura 2-25 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T=0.15s$, $N=5$.

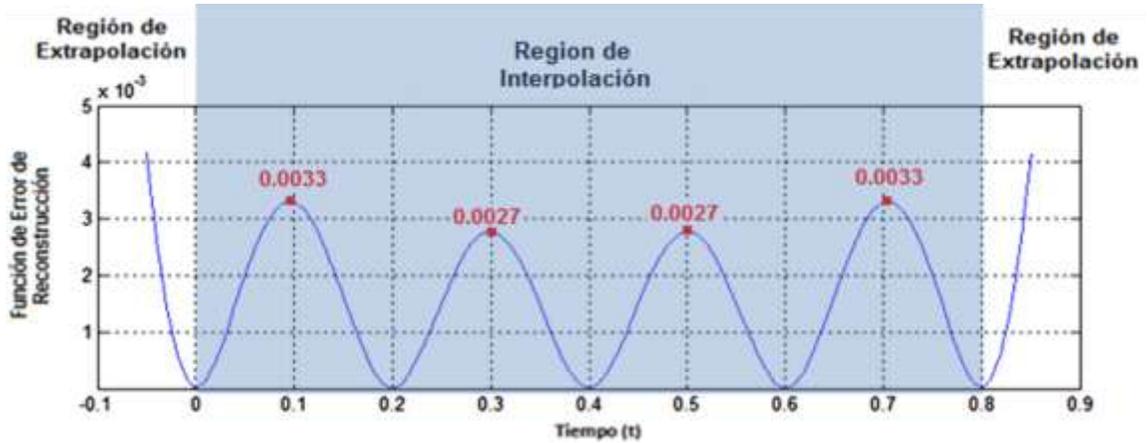


Figura 2-26 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.2s$, $N=5$.

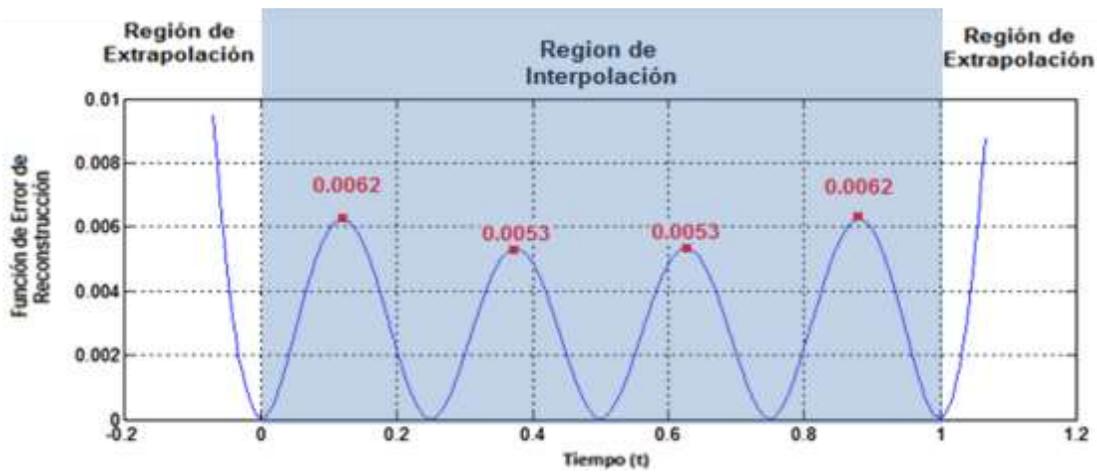


Figura 2-27 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.25s$, $N=5$.

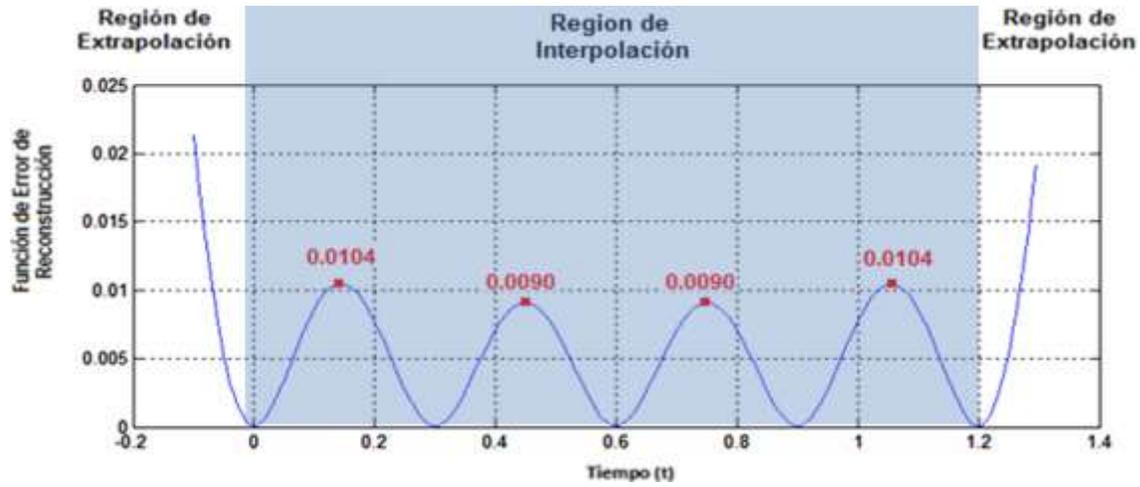


Figura 2-28 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.3s$, $N=5$.

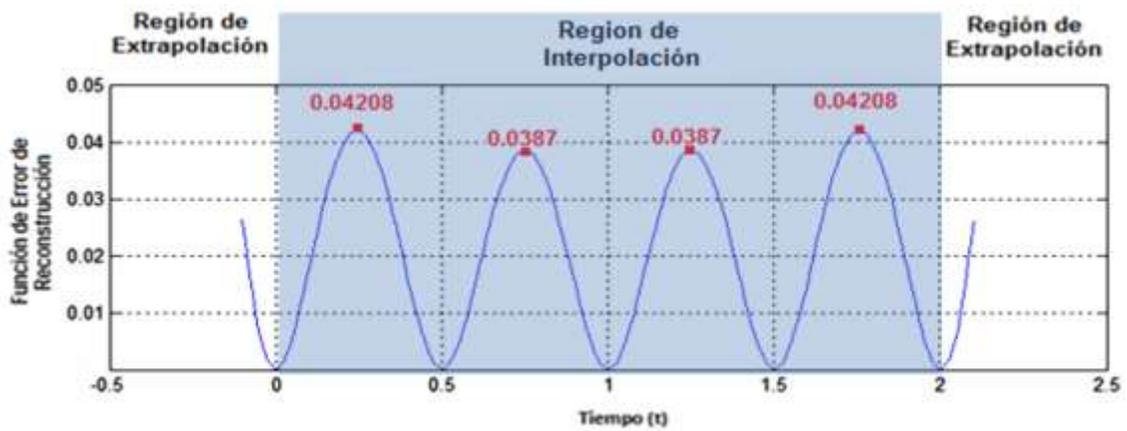


Figura 2-29 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.

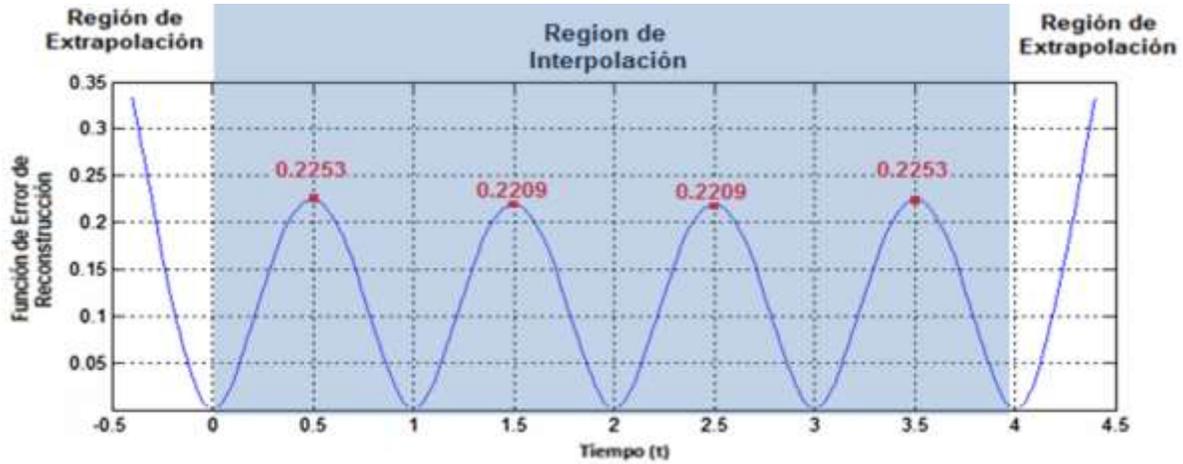


Figura 2-30 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 1.0s$, $N=5$.

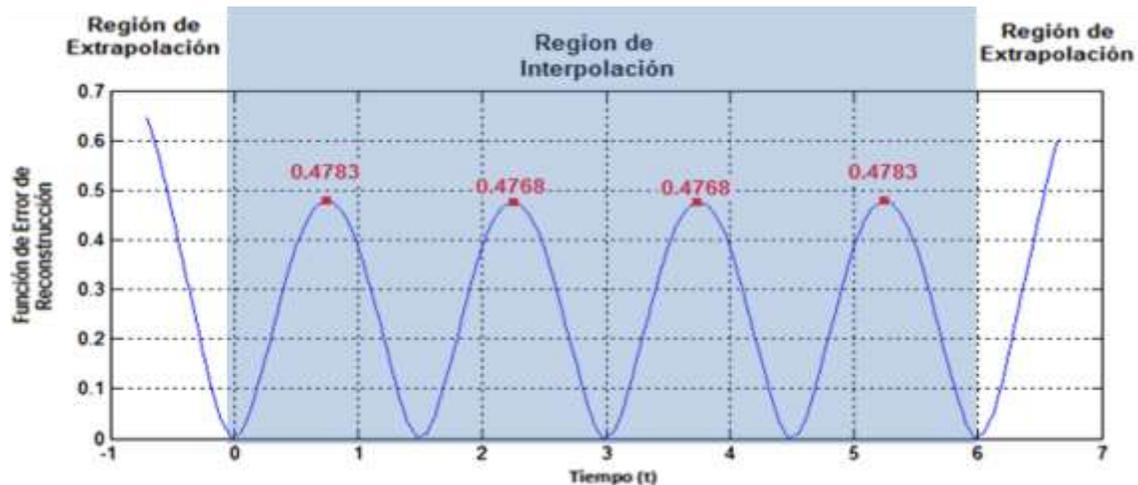


Figura 2-31 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de dos Etapas, $\Delta T = 1.5s$, $N=5$.

Nuevamente, es claro que disminuye tanto el máximo error de reconstrucción respecto a los procesos Markovianos. También se observa claramente que la reconstrucción cercana a las muestras centrales produce un error de reconstrucción menor que la reconstrucción en los extremos del proceso incluyendo la zona de extrapolación.

2.5.3 Procesos no Markovianos (Salida del filtro RC de tres etapas)

Una respuesta aún más suave la podemos obtener a la salida un filtro RC lineal de tres etapas. Esto lo podemos generar agregando una etapa más al análisis realizado en la sección anterior.



Realizando lo anterior, tendremos un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano con filtro RC de tres etapas cuya función de covarianza se representa mediante la siguiente función:

$$R_x(\tau) = \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3}\right) \exp(-\alpha|\tau|), \quad (2.27)$$

El tiempo de covarianza τ_c de esta función será:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3}\right) \exp(-\alpha|\tau|) d\tau = \frac{8}{3\alpha}. \quad (2.28)$$

Para obtener un tiempo de covarianza unitario $\tau_c = 1$ y valores de covarianza normalizada necesitamos que $\alpha = 8/3$. Conservando las características de la entrada, las funciones quedarán de la siguiente forma:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N R_x(t - T_i) a_{ij} = \sum_{i=1}^N \left(1 + \alpha|t - T_i| + \frac{\alpha^2|t - T_i|^2}{3}\right) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij}, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}(t) &= \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N \left(1 + \alpha|t - T_i| + \frac{\alpha^2|t - T_i|^2}{3}\right) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2(t) &= 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(1 + \alpha|t - T_i| + \frac{\alpha^2|t - T_i|^2}{3}\right) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \times \\ &\quad \times \left(1 + \alpha|T_j - t| + \frac{\alpha^2|T_j - t|^2}{3}\right) \exp(-\alpha|T_j - t|). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Al igual que en los casos anteriores, la función de reconstrucción depende del parámetro $x(T_j)$, es decir, del valor que tomen las muestras, mientras que la función de error de reconstrucción solo dependerá de la separación en tiempo de dichas muestras.

Para revisar nuevamente estas características, se revisará en primera instancia, el comportamiento cuando mantenemos constante la separación entre muestras $\Delta T = 0.5s$ para un número de muestras $N = 2, 3, 4, 5$ y 10 :

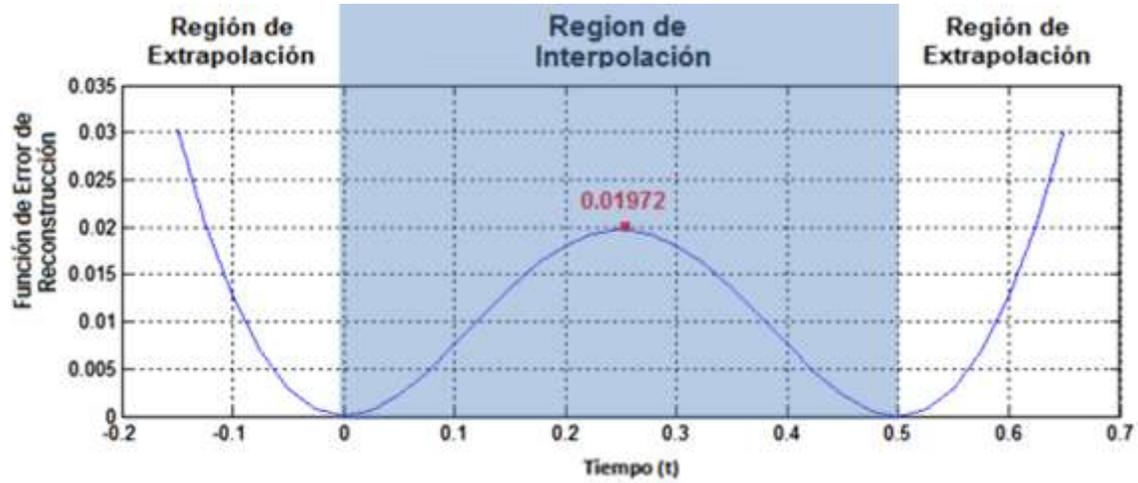


Figura 2-32 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=2$.

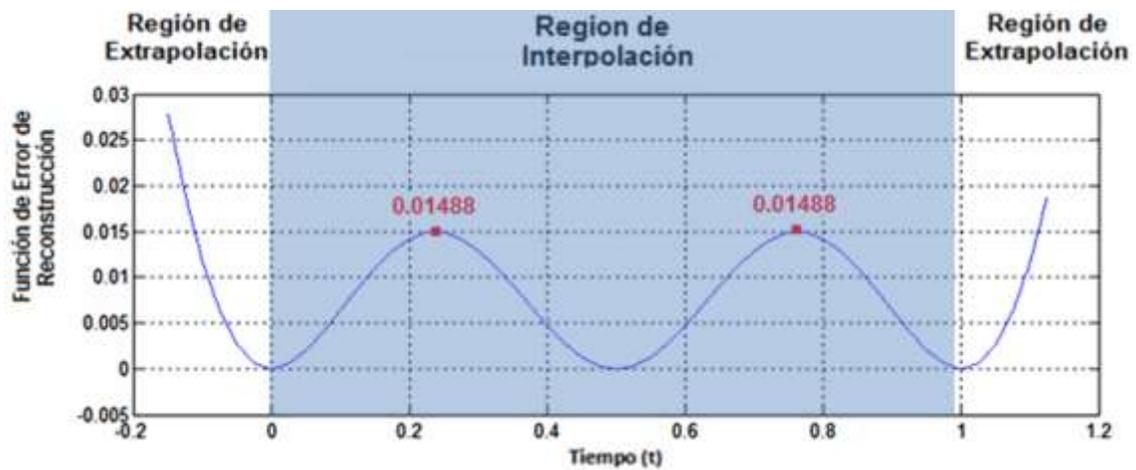


Figura 2-33 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=3$.

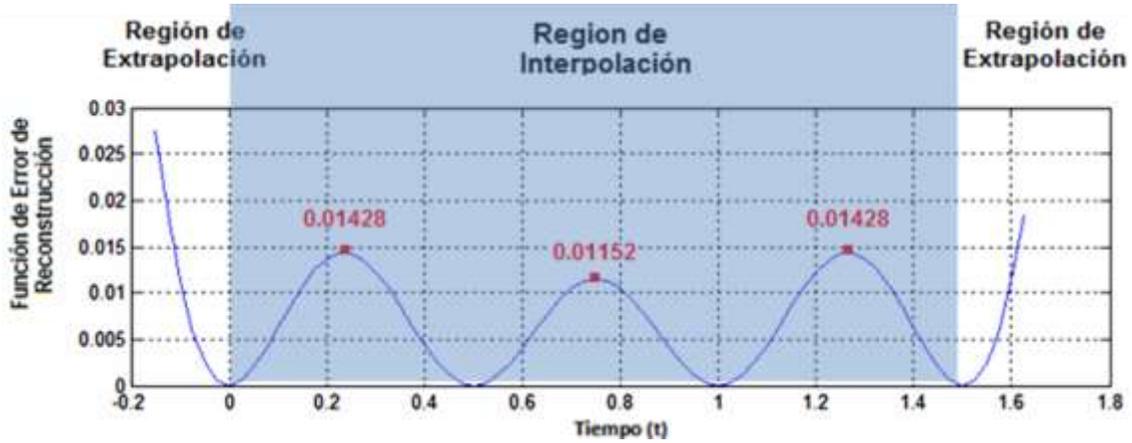


Figura 2-34 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=4$.

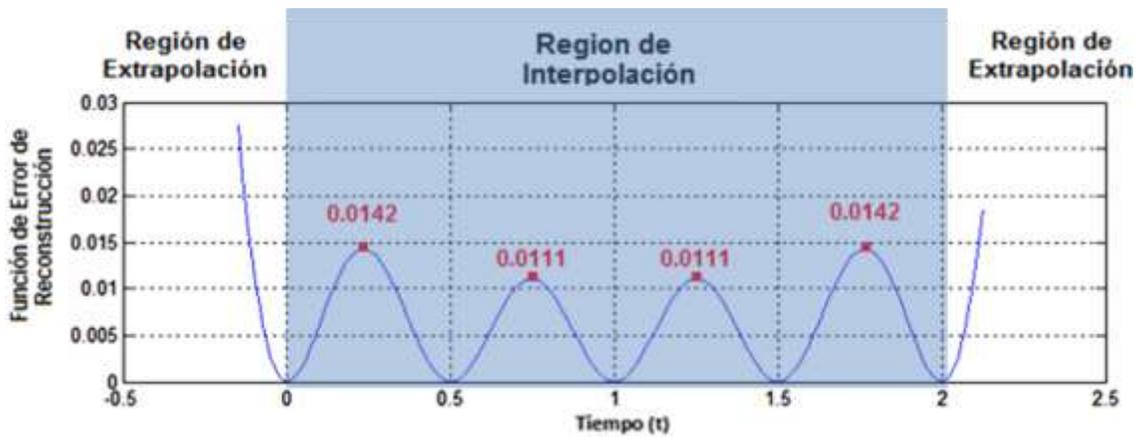


Figura 2-35 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.

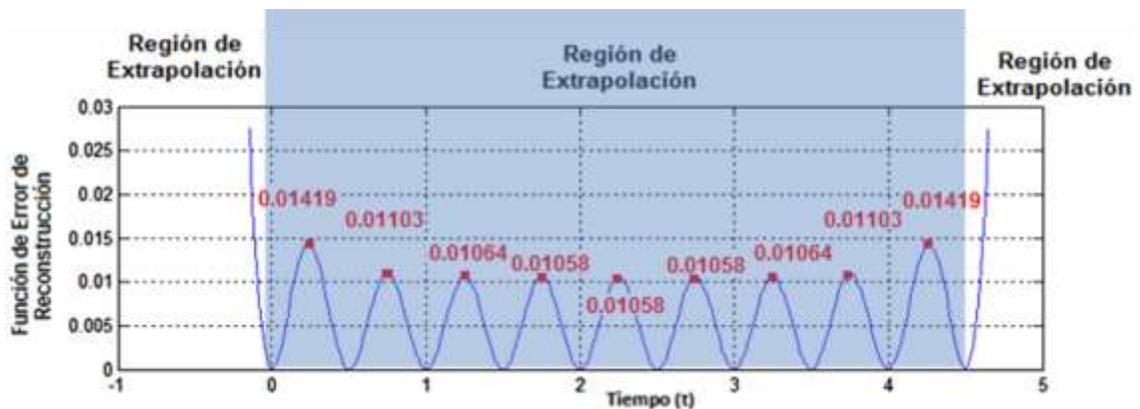


Figura 2-36 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=10$.

Al igual que en los procesos Markovianos a la salida del filtro RC de dos etapas, los procesos a la salida del filtro RC de tres etapas dependerá claramente del número de muestras que se tengan, la influencia de todas las muestras hacia la derecha y hacia la izquierda es tomada en cuenta para la función de error de reconstrucción en cada instante t .

La reconstrucción cercana a las muestras centrales tendrá valores menores respecto a los correspondientes tiempos cercanos a las primeras o ultimas muestras, ya que la influencia de las muestras disminuye conforme la distancia aumenta.

Teniendo la misma cantidad de muestras $N=5$, analizamos el comportamiento cuando variamos la distancia entre dichas muestras. Se ejemplifican las gráficas cuando la separación entre muestras $\Delta T = 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.50, 1.00$ y 1.50 .

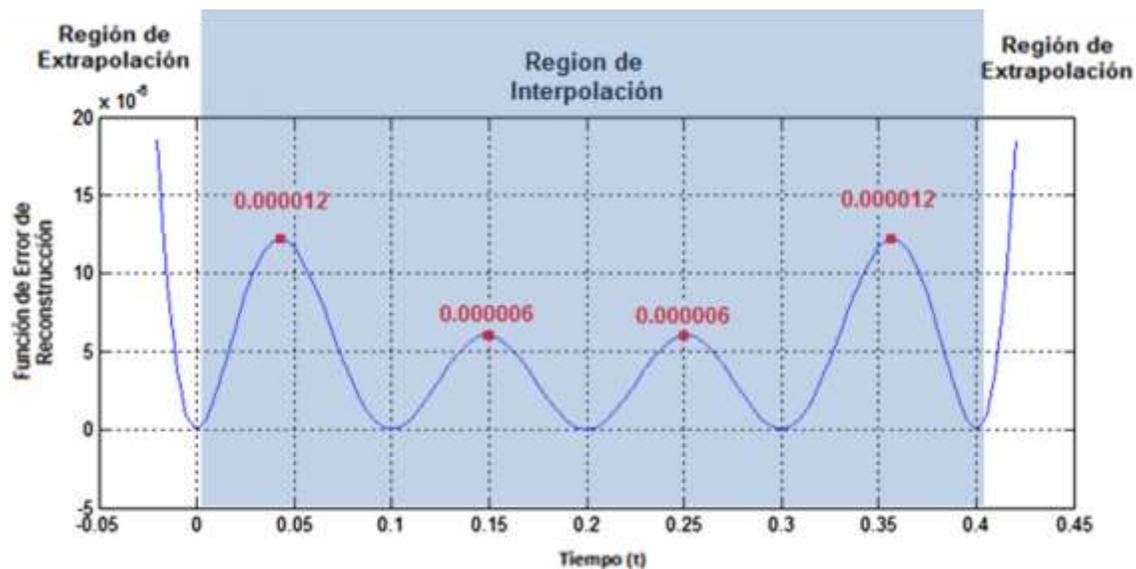


Figura 2-37 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.1s$, $N=5$.

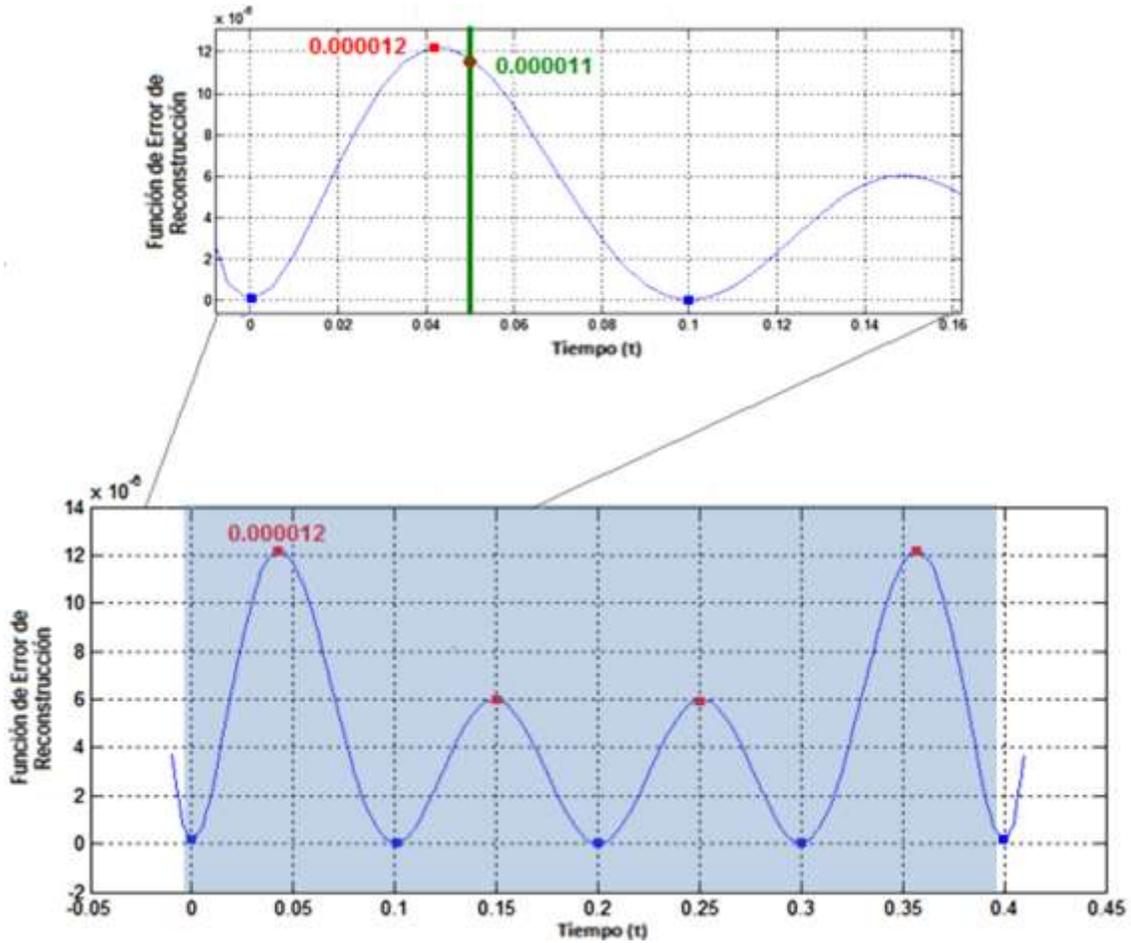


Figura 2-38 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.1s$, $N=5$ (Detalle de asimetría).

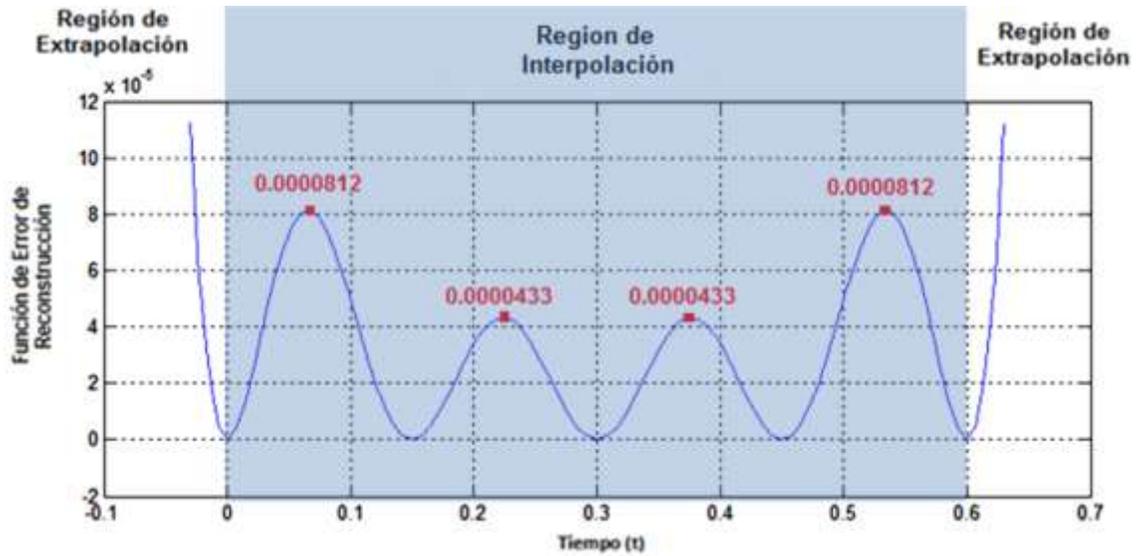


Figura 2-39 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.15s$, $N=5$.

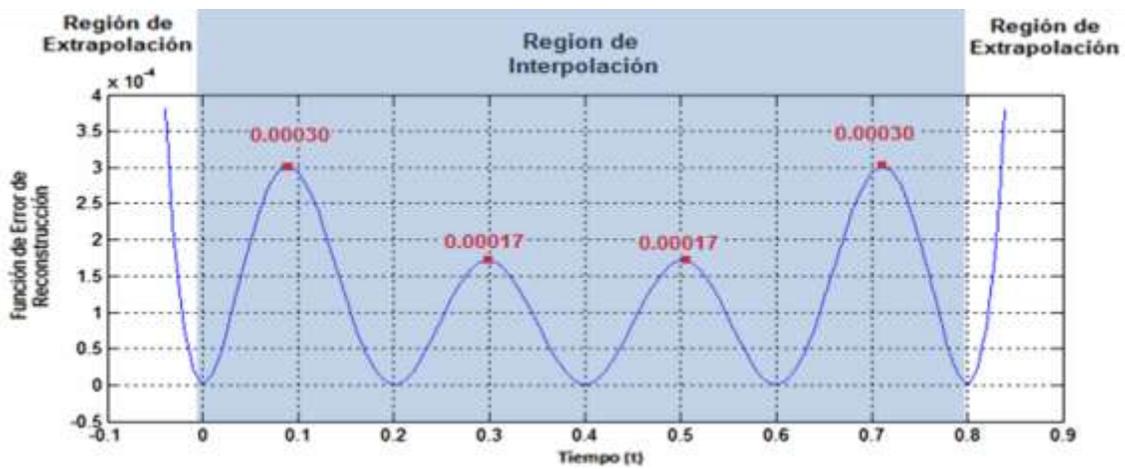


Figura 2-40 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.2s$, $N=5$.

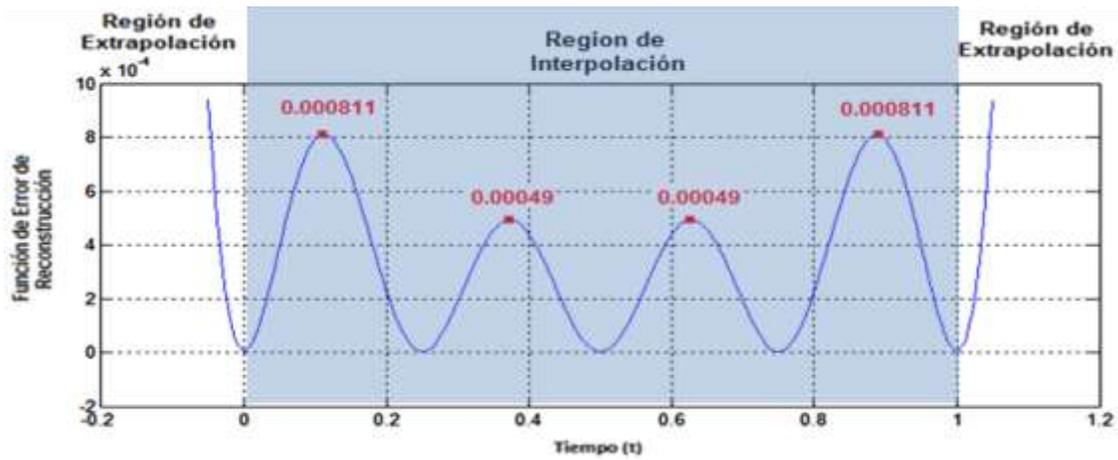


Figura 2-41 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.25s$, $N=5$.

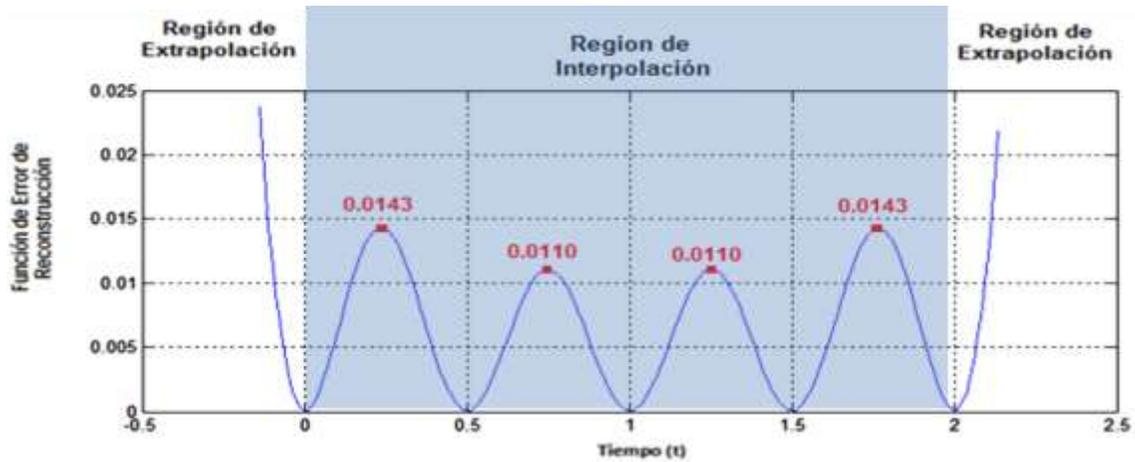


Figura 2-42 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 0.5s$, $N=5$.

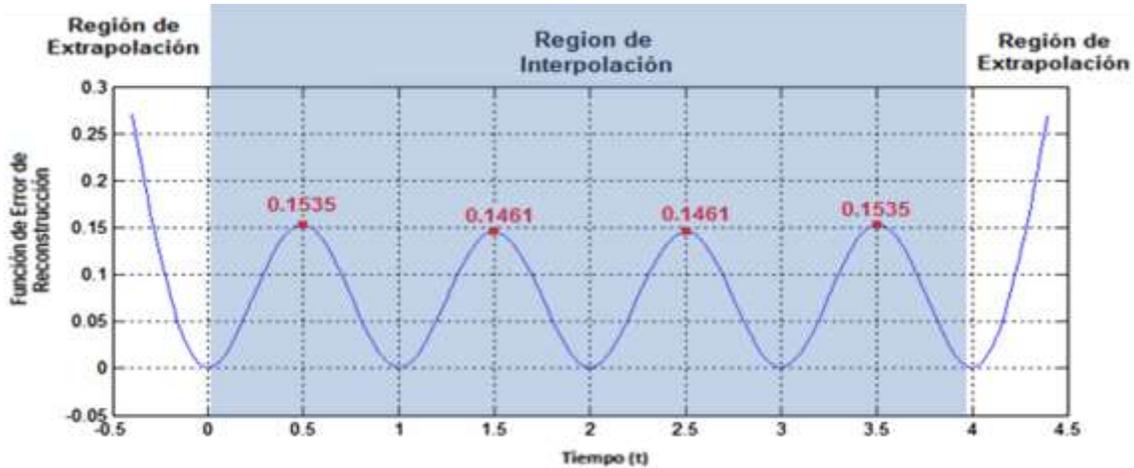


Figura 2-43 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 1.0s$, $N=5$.

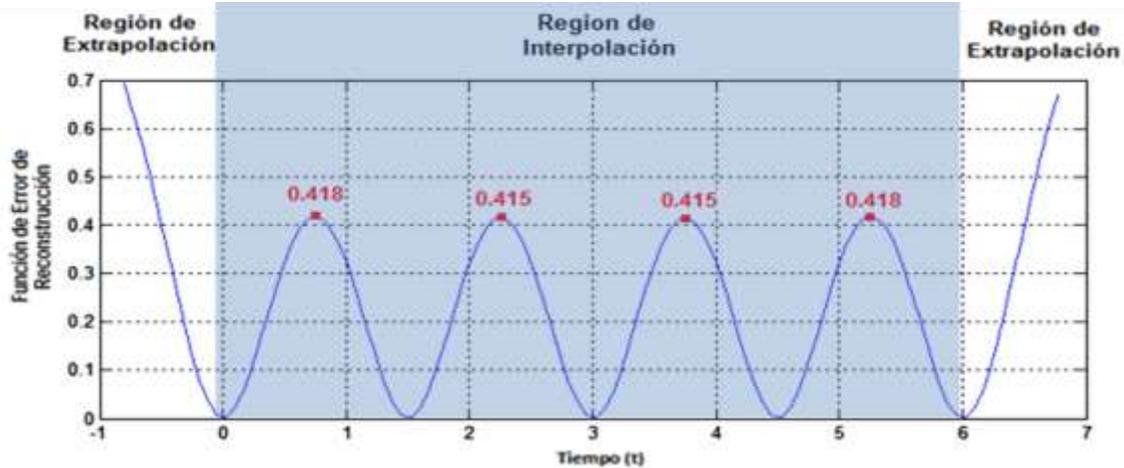


Figura 2-44 Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos No Markovianos a la salida del filtro RC de tres Etapas, $\Delta T = 1.5s$, $N=5$.

En la Figura 2-38 se puede observar que la reconstrucción realizada entre un par de muestras no es simétrica, esto debido a que al depender de la cantidad de muestras anteriores y posteriores, se genera una asimetría de influencia de las muestras.

Sólo en el caso de tener la misma cantidad de muestras a la izquierda y derecha, se tendrá una reconstrucción simétrica entre el par de muestras.



Capítulo 3 Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de procesos Gaussianos.

3.1 Simulaciones

Es de suma importancia que las simulaciones que utilizaremos para obtener la cuantificación tengan las características estadísticas lo más cercanas a la teoría posible. Dentro de las características más importantes, se tendrá especial cuidado con la función de covarianza, la varianza, la esperanza matemática y la función de densidad de probabilidad (FDP).

Se simularán procesos aleatorios de tal forma que tengamos las características de: a) Procesos estocásticos a la salida de un circuito RC de primer orden cuya entrada es Ruido Blanco Gaussiano, y b) El proceso estocástico a la salida de una filtro RC de dos etapas cuya entrada también es Ruido Blanco Gaussiano. Particularmente esta segunda simulación es el equivalente de utilizar el inciso “a)” a la entrada de un segundo filtro RC:

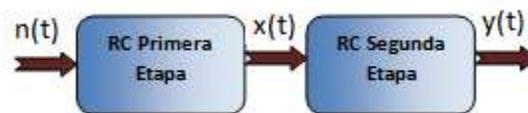


Figura 3-1 Diagrama a bloques de las simulaciones de procesos Gaussianos Markovianos $x(t)$ y No Markovianos $y(t)$.

3.1.1 Simulación de Ruido Blanco Gaussiano.

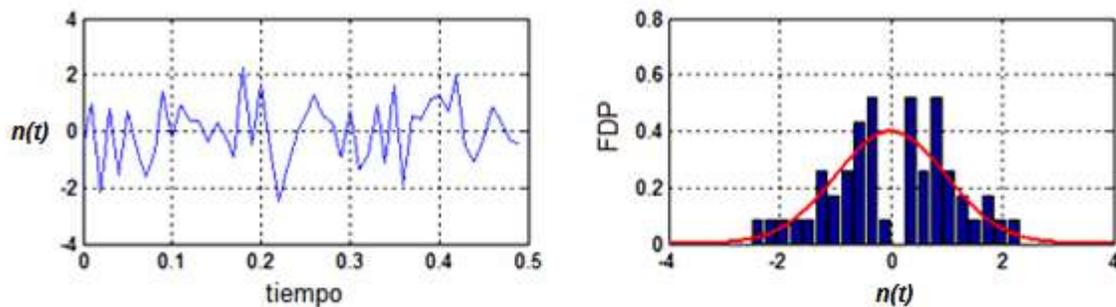


Figura 3-2 Simulación de 0.5s de Ruido Gaussiano e Histograma de la FDP.



La simulación de 0.5 segundos nos muestra un proceso posiblemente Gaussiano, sin embargo, no posee la exactitud en su FDP ni esperanza matemática requerida.

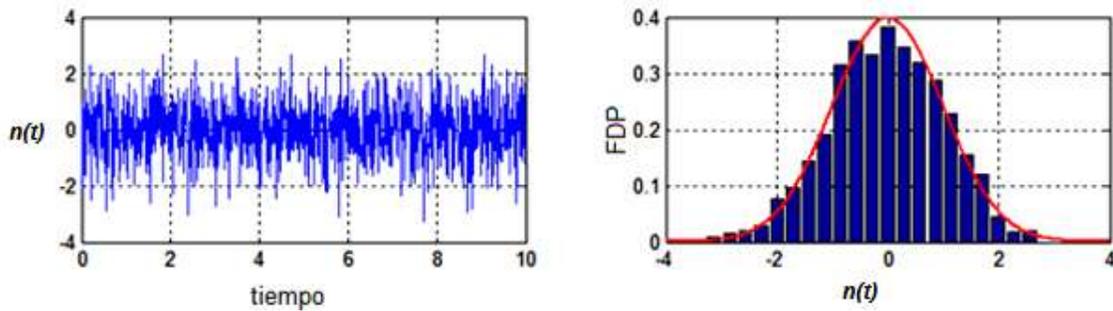


Figura 3-3 Simulación de 10s de Ruido Gaussiano e Histograma de la FDP.

Cuando se realiza la simulación de 10 segundos, se obtienen las características estadísticas deseadas. Se observa claramente que se trata de una realización de un proceso aleatorio con una FDP de tipo Gaussiana.

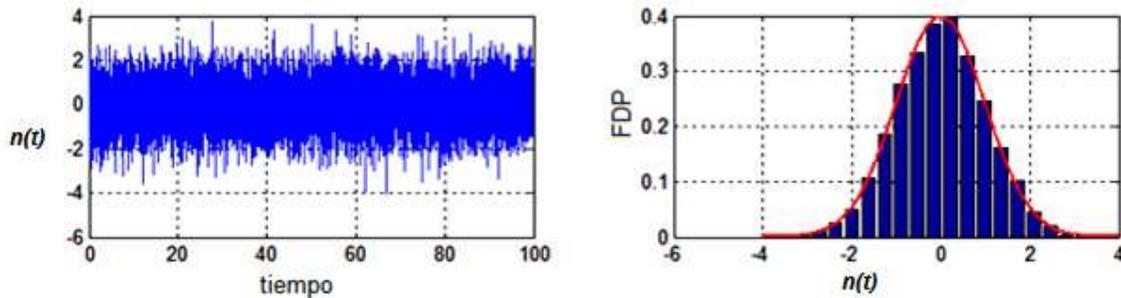


Figura 3-4 Simulación de 100s de Ruido Gaussiano e Histograma de la FDP.

Por último, la simulación del Ruido durante 100 y 500 segundos muestra una excelente calidad de simulación, ideal para obtener cálculos muy precisos, sin embargo, debemos de tener presente el compromiso que conlleva trabajar con gran cantidad de datos en términos de tiempo de procesamiento computacional.

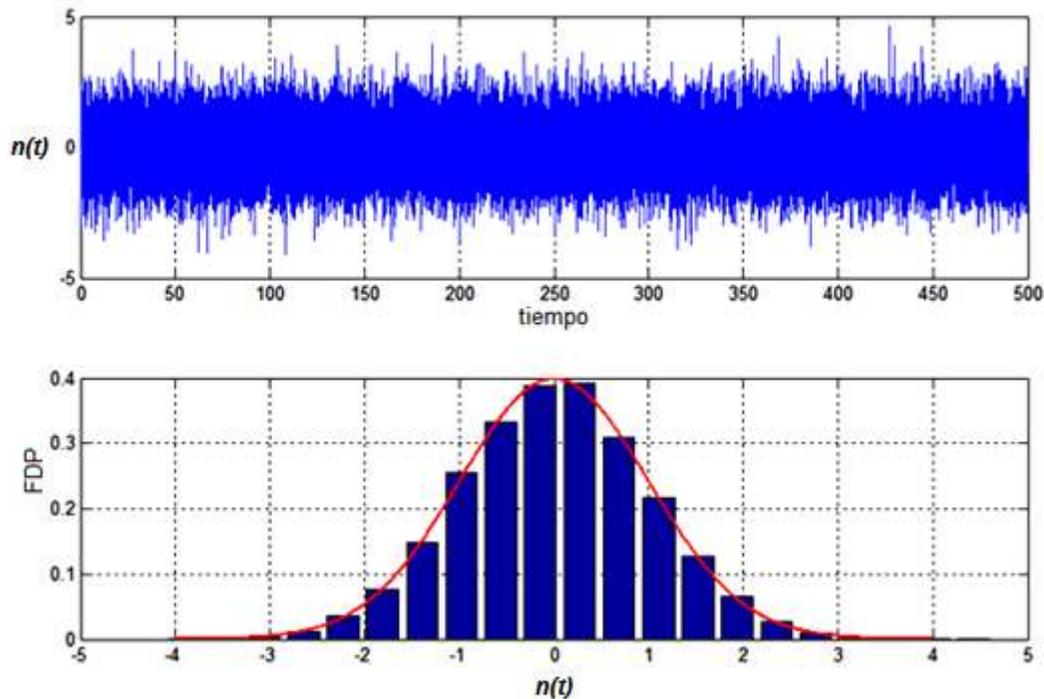


Figura 3-5 Simulación de 500s de Ruido Gaussiano e Histograma de la FDP.

3.1.2 Simulación del Proceso Gaussiano Markoviano (salida del Filtro RC de 1 Etapa).

Mediante el teorema de Wiener - Khintchine es posible obtener la función de covarianza de la primera etapa, dicho teorema relaciona la función de transferencia con la función de covarianza. De estas operaciones tendremos para la primera etapa la función de covarianza normalizada correspondiente es:

$$R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|). \quad (3.1)$$

La simulación del proceso $x(t)$ de la Figura 3-1, a la salida de este circuito RC estará dado por la siguiente ecuación:

$$x(t_n) = \exp(-\alpha(\tau)) x(t_{n-1}) + \sigma n(t_n). \quad (3.2)$$

Donde $\tau = \tau_n - \tau_{n-1}$, $n(t_n)$ corresponde al ruido blanco Gaussiano con esperanza matemática cero y desviación estándar igual a 1, y σ corresponde a una constante dada por:

$$\sigma = \sqrt{1 - \exp(-2\alpha\tau)}. \quad (3.3)$$

Podemos observar el diagrama de bloques para la generación del proceso Markoviano en la Figura 3-2:

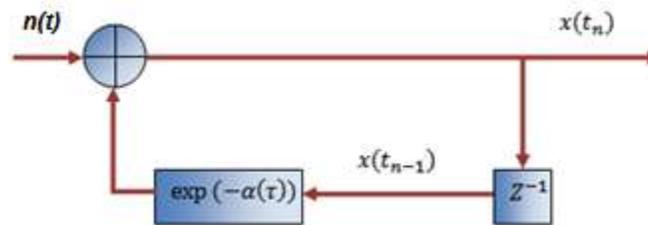


Figura 3-6 Diagrama a bloques de la simulación de procesos Markovianos.

Las características de la simulación del Ruido Blanco Gaussiano se muestran de la Figura 3-3 a la Figura 3-6. La calidad respecto a las características estadísticas dependerá de la longitud simulada, mientras la realización simulada sea mayor, mas exactas serán los resultados.

Como ya se ha comentado, con la simulación de 0.5 segundos no se obtienen las características deseadas. La simulación en la cual se comienza a apreciar la FDP Gaussiana, debe de ser cercana a 10 segundos, obteniendo excelentes resultados con una simulación de 100 y 500 segundos.

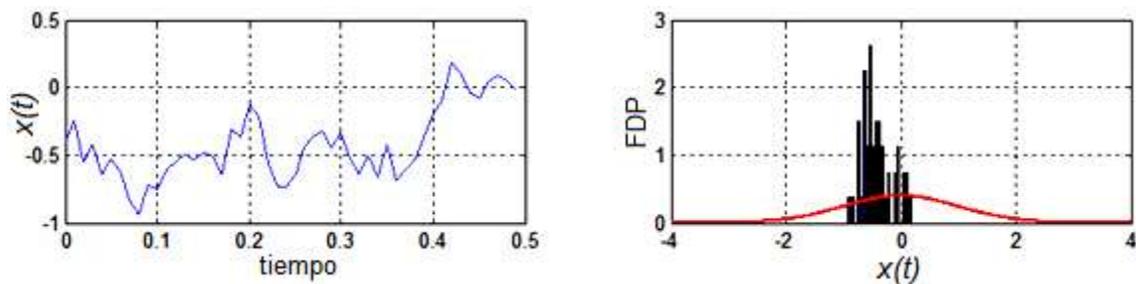


Figura 3-7 Simulación de 0.5s de un proceso Gaussiano Markoviano a la salida del filtro RC de una Etapa.

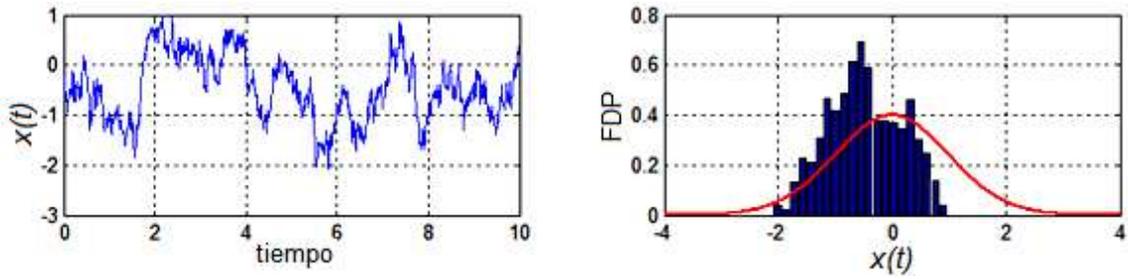


Figura 3-8 Simulación de 10s de un proceso Gaussiano Markoviano a la salida del filtro RC de una Etapa.

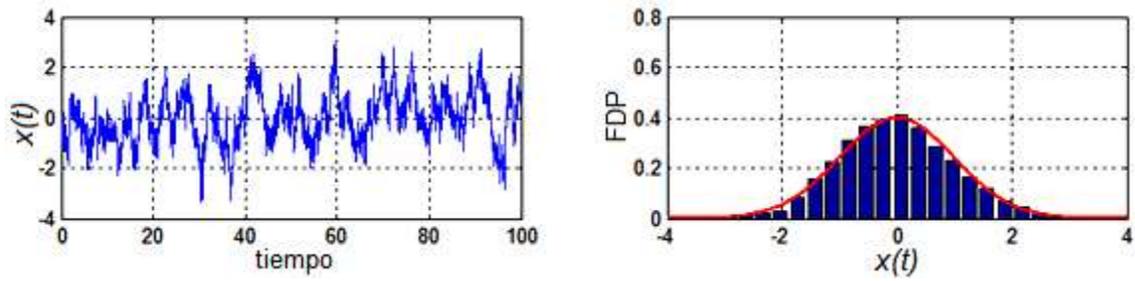


Figura 3-9 Simulación de 100s de un proceso Gaussiano Markoviano a la salida del filtro RC de una Etapa.

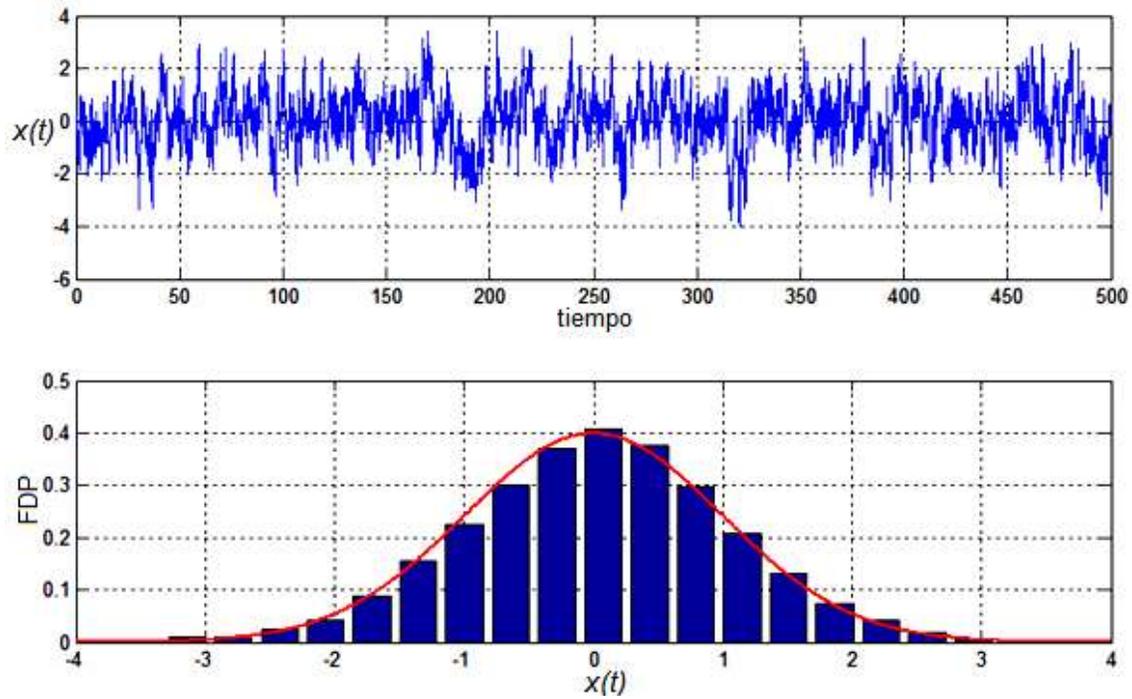


Figura 3-10 Simulación de 500s de un proceso Gaussiano Markoviano a la salida del filtro RC de una Etapa.

La función de covarianza es una de las principales características de cualquier proceso aleatorio pues nos representa su comportamiento respecto al tiempo, es decir, nos dice que tan suave o caótico es.

Las calidades de las simulaciones respecto a la función de covarianza se muestran de la Figura 3-11 a la Figura 3-14 para diferentes tiempos de simulación.

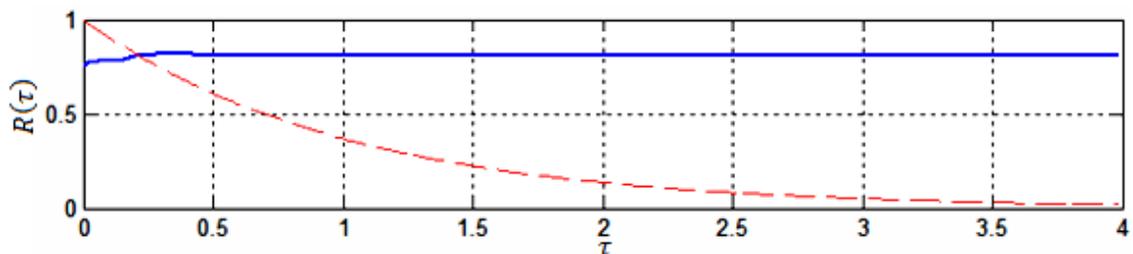


Figura 3-11 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano Markoviano de 0.5s.

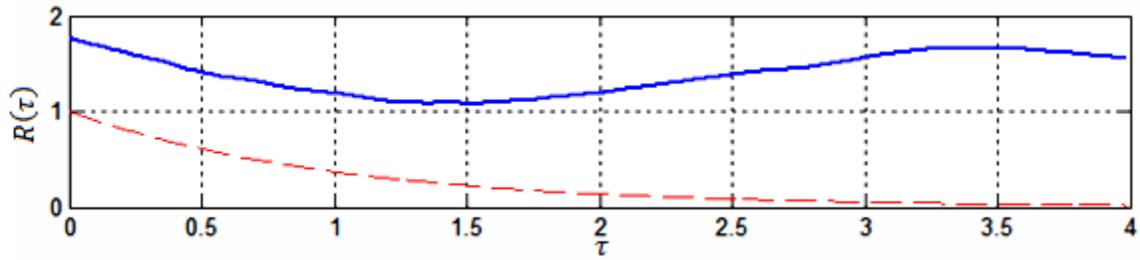


Figura 3-12 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano Markoviano de 10s.

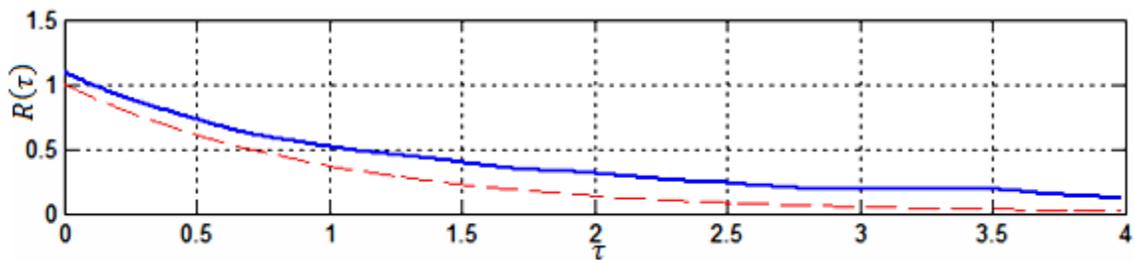


Figura 3-13 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano Markoviano de 100s.

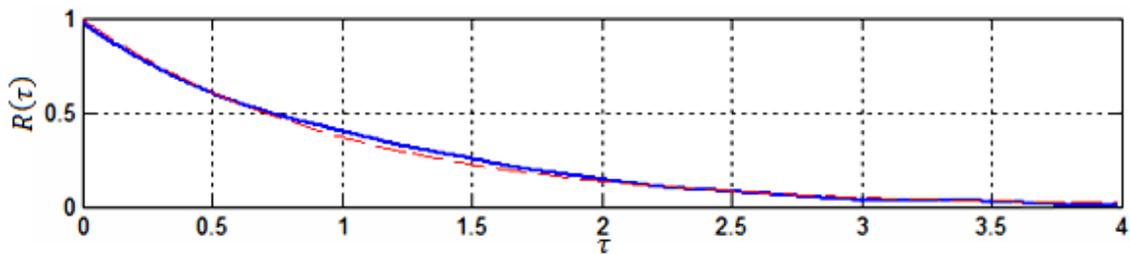


Figura 3-14 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano Markoviano de 500s.

La función de la continua en las Figuras anteriores representa la función de covarianza calculada con las simulaciones mientras que la gráfica discontinua representa la función de covarianza teórica requerida. Al igual que la FDP y esperanza matemática, es necesario realizar una simulación mayor a 10s para obtener los resultados correctos.



3.1.3 Simulación del Proceso Gaussiano No Markoviano (salida del Filtro RC de 2 Etapas).

Al igual que en las simulaciones anteriores, la función de covarianza la obtenemos con el de Wiener Khintchine y estará dada por:

$$R(\tau) = (1 + \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|). \quad (3.4)$$

Para proceso no Markovianos hacemos uso de las simulaciones anteriores y las pasamos por una segunda etapa de un filtro RC. La ecuación correspondiente a este proceso a la salida de la 2ª etapa es dada por:

$$y(t_n) = x(t_{n-1})a_0 + x(t_{n-1})a_1 + y(t_{n-1})b_1. \quad (3.5)$$

Donde:

$$a_0 = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha(t_n - t_{n-1})}{2}\right), \quad (3.6)$$

$$a_1 = \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha(t_n - t_{n-1})}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{\alpha(t_n - t_{n-1})}{2}\right), \quad (3.7)$$

$$b_1 = \exp(-\alpha(t_n - t_{n-1})). \quad (3.8)$$

En la Figura 3-15 podemos observar el diagrama a bloques.

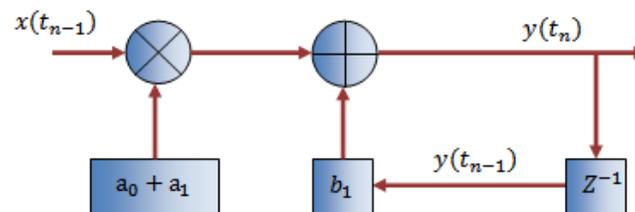


Figura 3-15 Diagrama a bloques de la simulación de procesos No Markovianos.



Como ya se ha mencionado, el proceso No Markoviano se obtiene a la salida del filtro RC cuya entrada es un proceso Markoviano. Es por esto que la calidad del proceso anterior influye en las nuevas simulaciones.

En este apartado se muestra la calidad del proceso No Markoviano simulado:

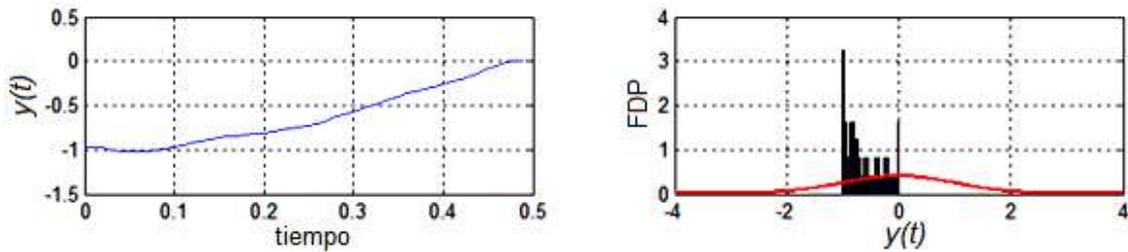


Figura 3-16 Simulación de 0.5s de un proceso Gaussiano No Markoviano a la salida del filtro RC de dos Etapas.

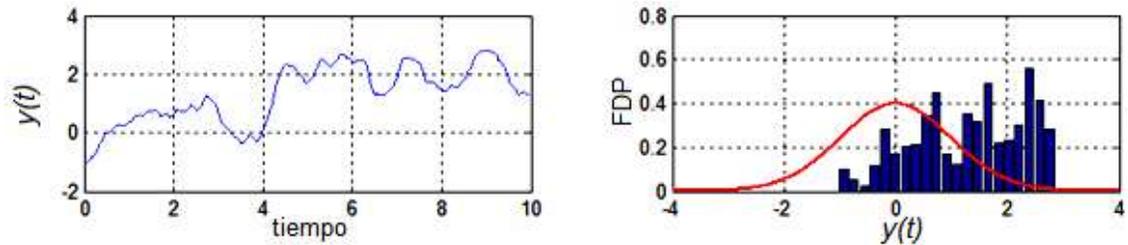


Figura 3-17 Simulación de 10s de un proceso Gaussiano No Markoviano a la salida del filtro RC de dos Etapas.

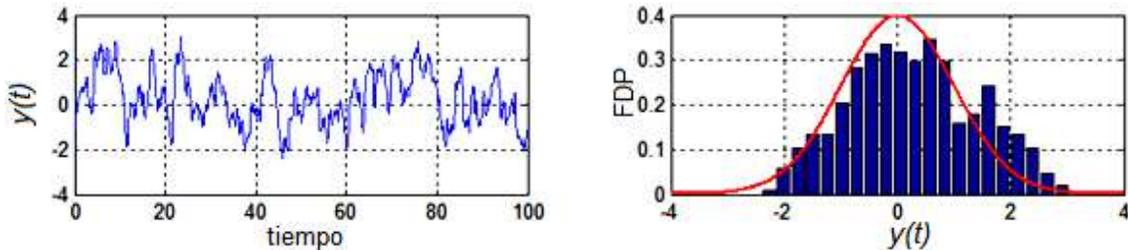


Figura 3-18 Simulación de 100s de un proceso Gaussiano No Markoviano a la salida del filtro RC de dos Etapas.

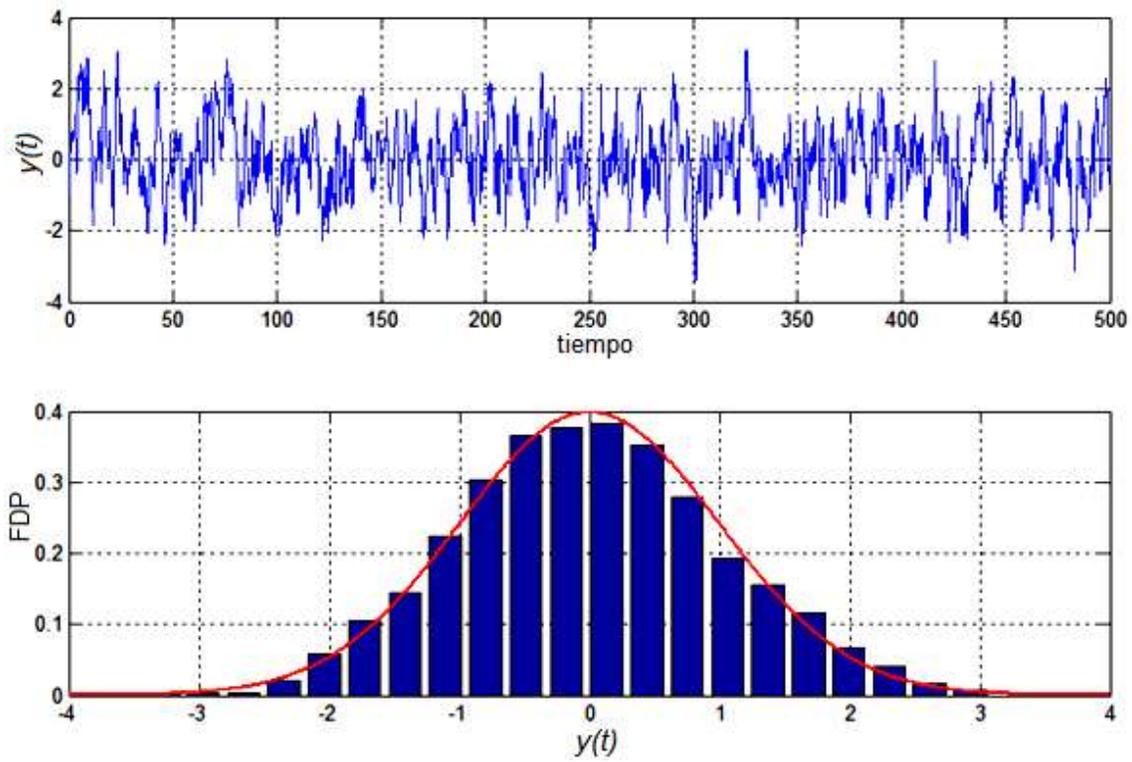


Figura 3-19 Simulación de 500s de un proceso Gaussiano No Markoviano a la salida del filtro RC de dos Etapas.

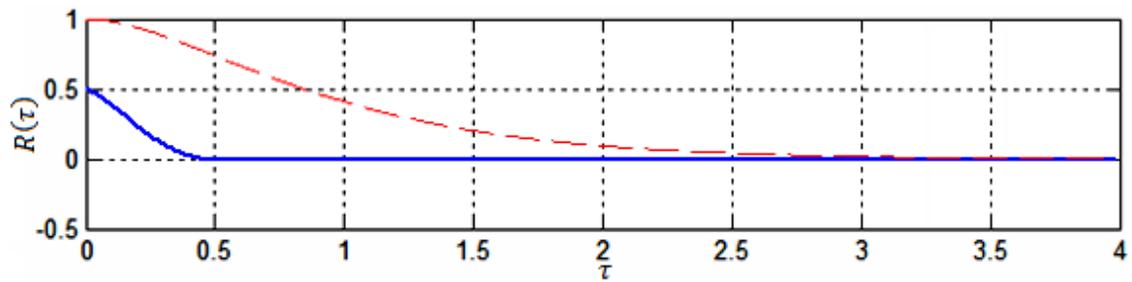


Figura 3-20 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano No Markoviano de 0.5s.

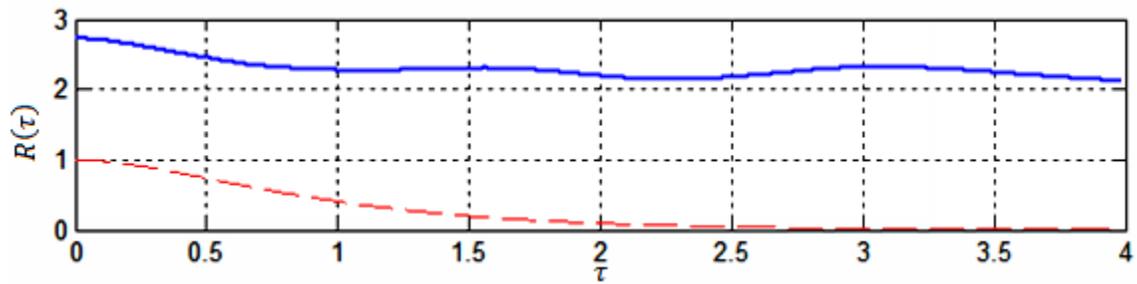


Figura 3-21 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano No Markoviano de 10s.

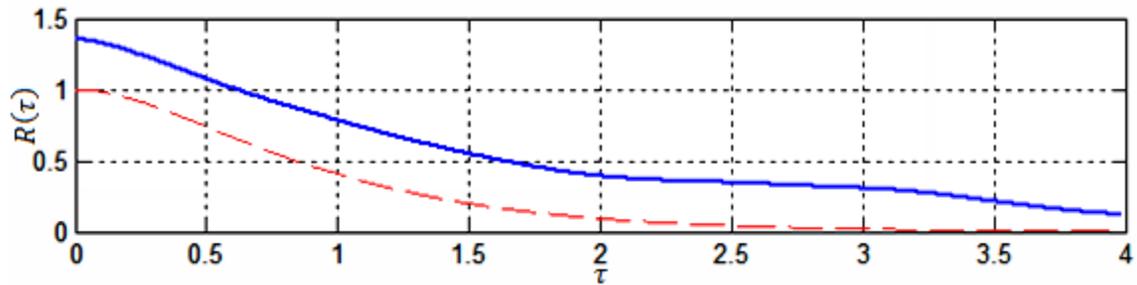


Figura 3-22 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano No Markoviano de 100s.

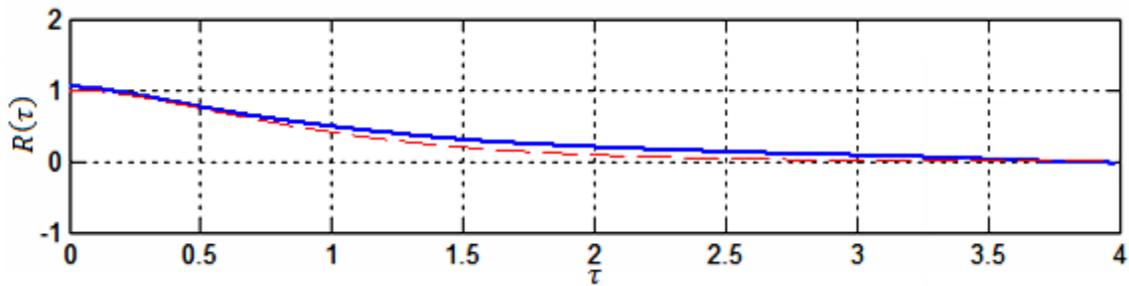


Figura 3-23 Función de Covarianza de la simulación del proceso Gaussiano No Markoviano de 500s.

En la Figura 3-24 podemos observar a detalle el procedimiento llevado a cabo para la obtención del proceso Markoviano. Se muestra en primer plano el ruido blanco Gaussiano pasando a través del primer filtro RC de una etapa, y en segundo plano, el detalle a 4 segundos:

Figura 3-24 Comparativo del Ruido Gaussiano y su correspondiente salida del filtro RC de una Etapa (Proceso Markoviano).

De igual forma, en la Figura 3-25 podemos observar a detalle el procedimiento llevado a cabo para la obtención del proceso No Markoviano. Se muestra en primer plano el proceso Markoviano pasando a través de un filtro RC, y en segundo plano, el detalle a 4 segundos:

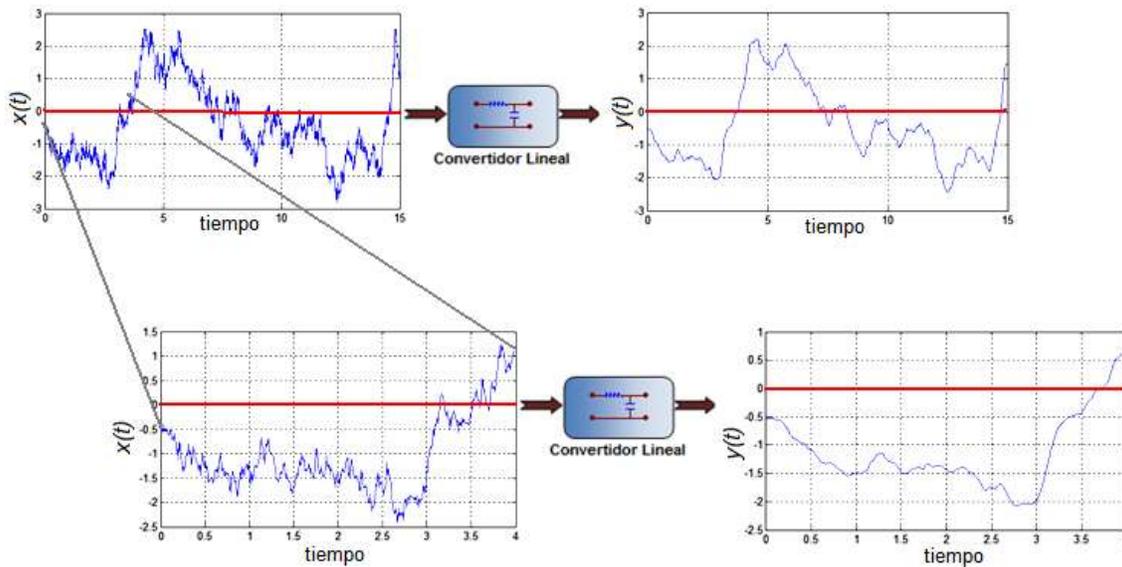


Figura 3-25 Comparativo de un proceso Markoviano y su correspondiente salida del filtro RC de una Etapa (Proceso No Markoviano).

3.2 Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios Gaussianos Markovianos.

En esta sección, se revisará el comportamiento que tiene el procedimiento de muestreo y reconstrucción de las simulaciones de los procesos aleatorios Gaussianos cuando se define cierta cantidad de niveles de cuantificación N .

Dentro del procedimiento de digitalización de procesos continuos, la etapa siguiente a la cuantificación y previo a la transmisión de la señal, se introduce la etapa de codificación en la cual se establecen códigos (usualmente binarios) para definir cada uno de los niveles de cuantificación.

A pesar de que la etapa de codificación está fuera del alcance de esta investigación, debemos de tomar en cuenta la definición de $N=2^k$ niveles, en donde k es igual a la cantidad de bits con los cuales se realizará la codificación, de tal manera que estudiaremos $N=4, 8, 16, 32, 64$ y 128 niveles.

3.2.1 Cuantificación-Reconstrucción con 4 niveles

Observemos la Figura 3-24, en donde se muestra el detalle de un proceso Gaussiano Markoviano. Al establecer $N=4$ niveles de cuantización se obtienen las muestras marcadas de color rojo en la Figura 3-26. En la Figura también se ejemplifica la función de error de reconstrucción obteniendo un promedio temporal de 0.0992.

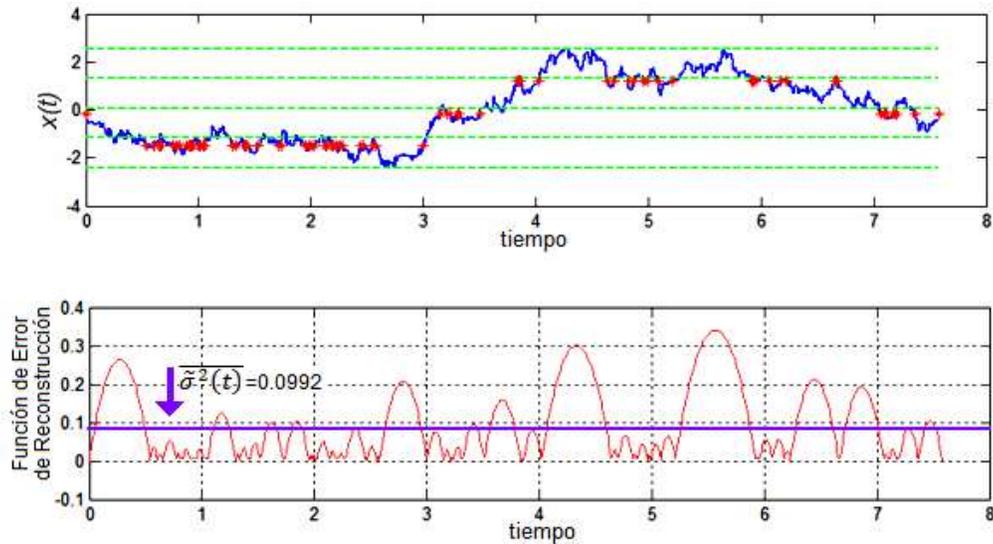


Figura 3-26 Cruces por niveles ($N=4$) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.

3.2.2 Cuantificación-Reconstrucción con 8 niveles

Para el proceso PCR con 8 Niveles (ver la Figura 3-27) se obtuvo un promedio temporal de 0.0409 en la función de Error de reconstrucción.

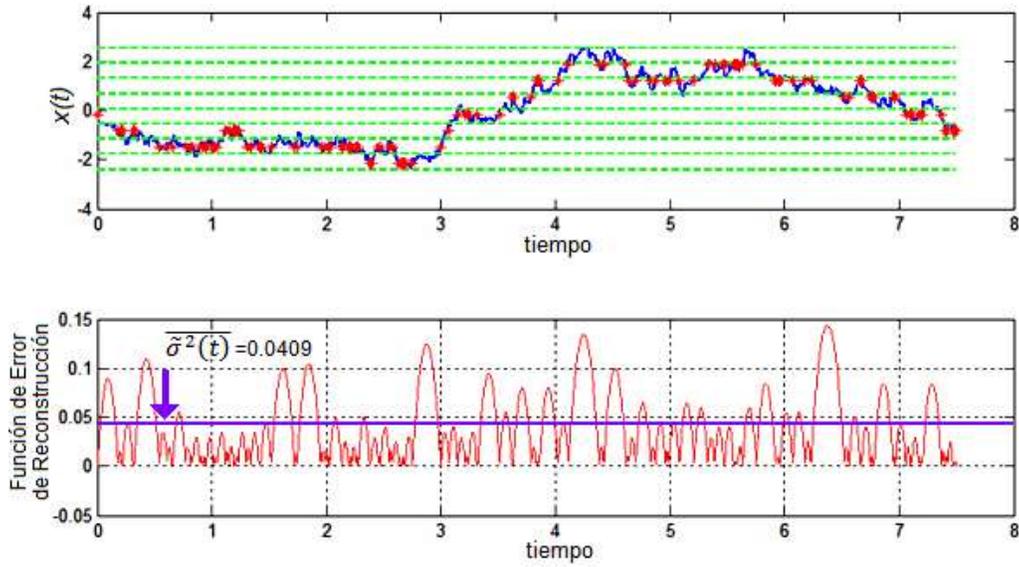


Figura 3-27 Cruces por niveles (N=8) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.

3.2.3 Cuantificación-Reconstrucción con 16 niveles

Para el proceso PCR con 16 Niveles que se muestra en la Figura 3-28 se obtuvo un promedio temporal de 0.0179 en la función de Error de reconstrucción.

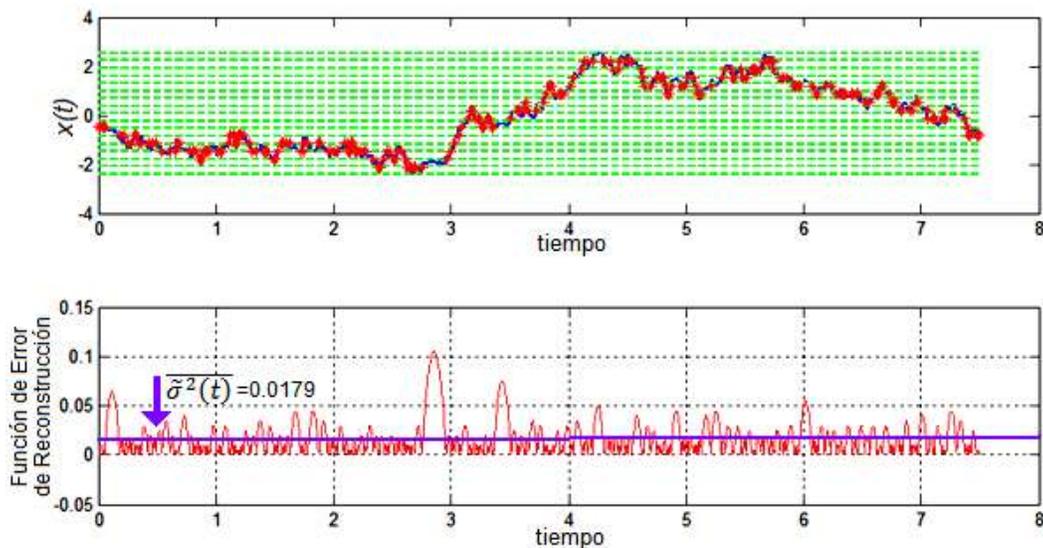


Figura 3-28 Cruces por niveles (N=16) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.

3.2.4 Cuantificación-Reconstrucción con 32 niveles

Para el proceso PCR con 32 Niveles (ver Figuras 3-29, 3-30) se obtuvo un promedio temporal de 0.0088 en la función de Error de reconstrucción.

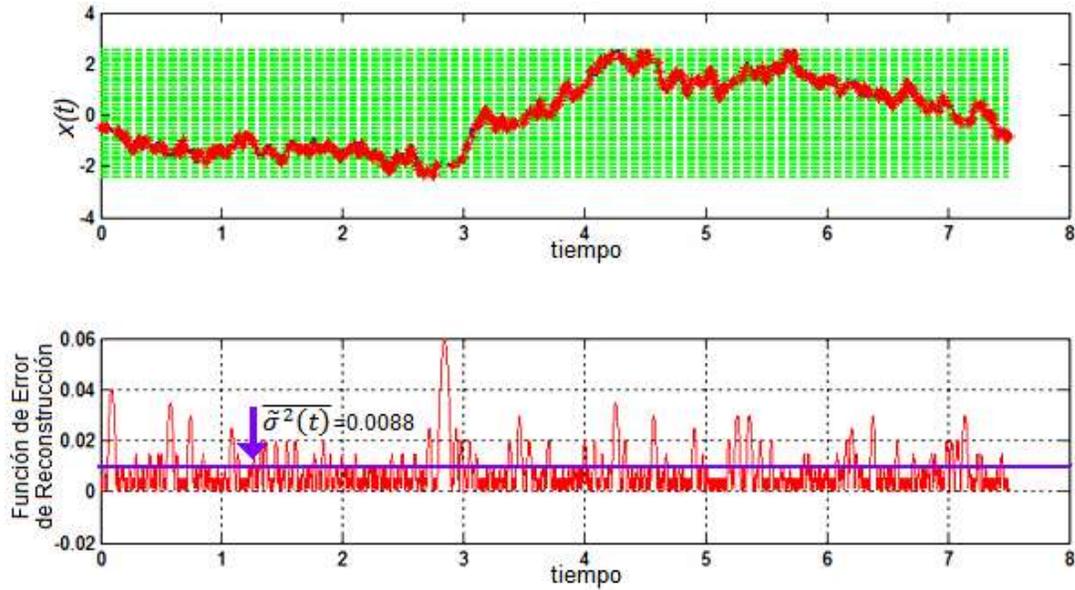


Figura 3-29 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.

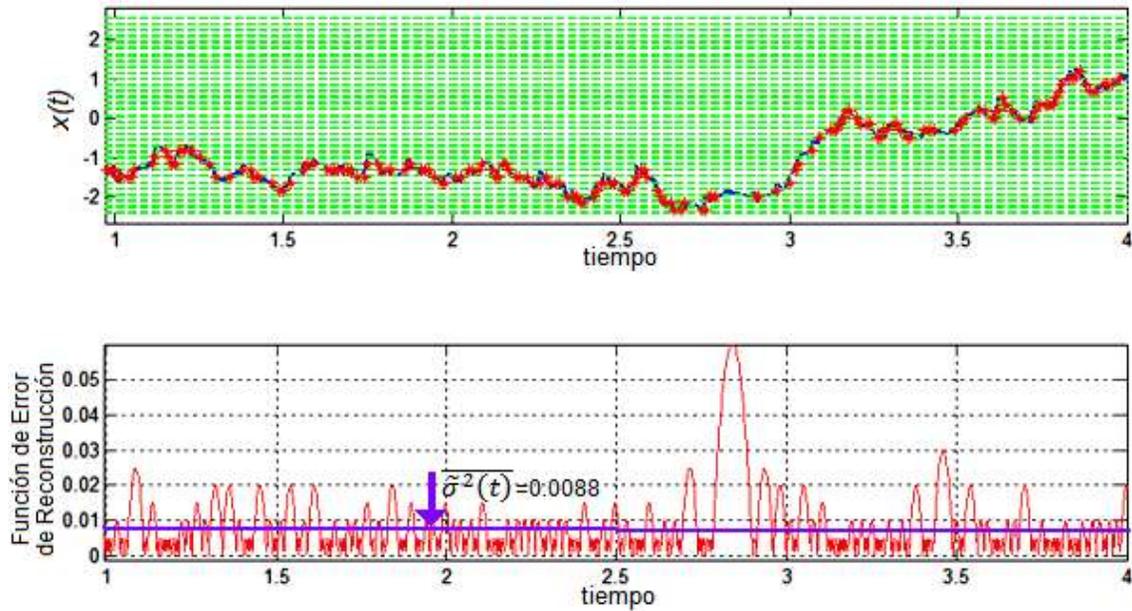


Figura 3-30 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano (Detalle a 4s).

3.2.5 Cuantificación-Reconstrucción con 64 niveles

Para el proceso PCR con 64 Niveles (ver Figuras 3-31, 3-32) se obtuvo un promedio temporal de 0.0054 en la función de Error de reconstrucción.

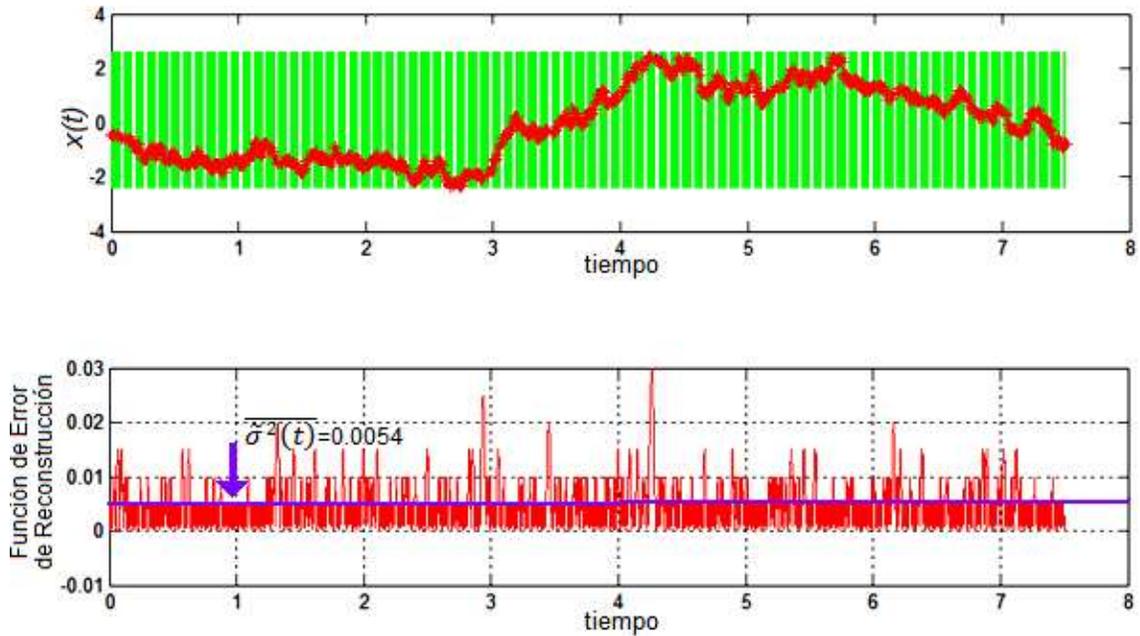


Figura 3-31 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.

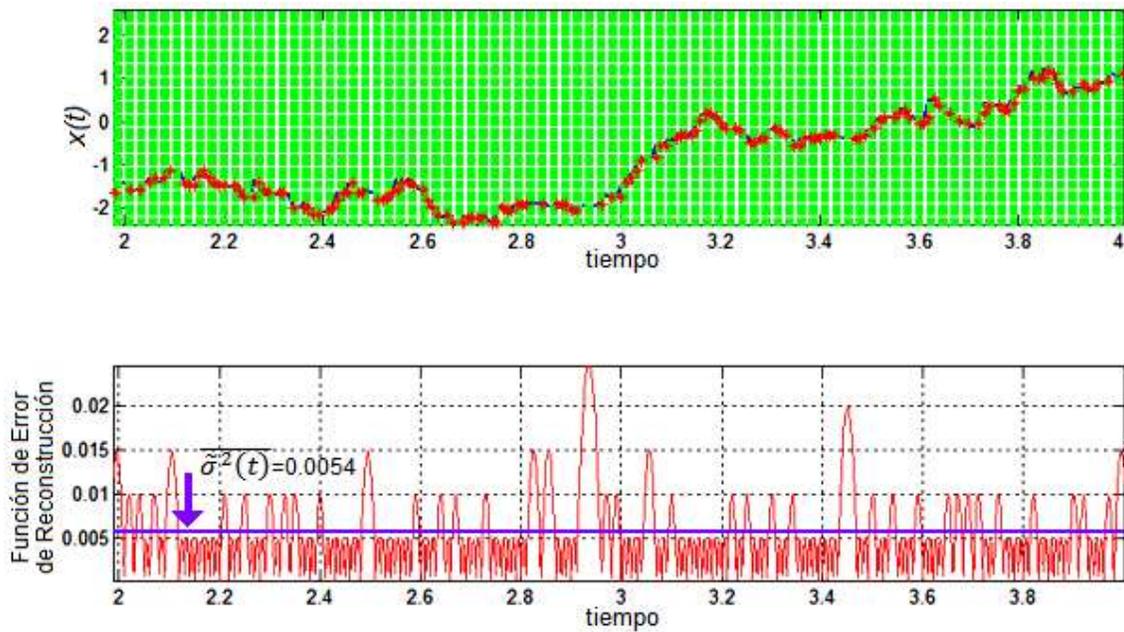


Figura 3-32 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano (detalle a 4s).



3.2.6 Cuantificación-Reconstrucción con 128 niveles

Para el proceso PCR con 128 Niveles (ve Figura 3-33, 3-34) se obtuvo un promedio temporal de 0.004 en la función de Error de reconstrucción.

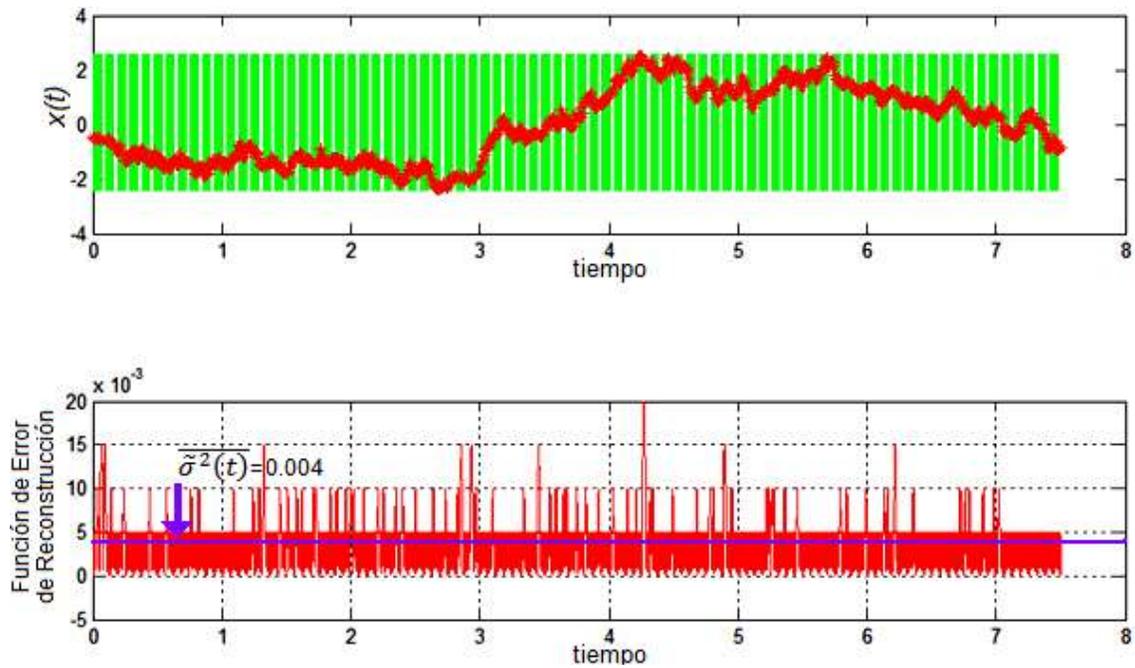


Figura 3-33 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano.

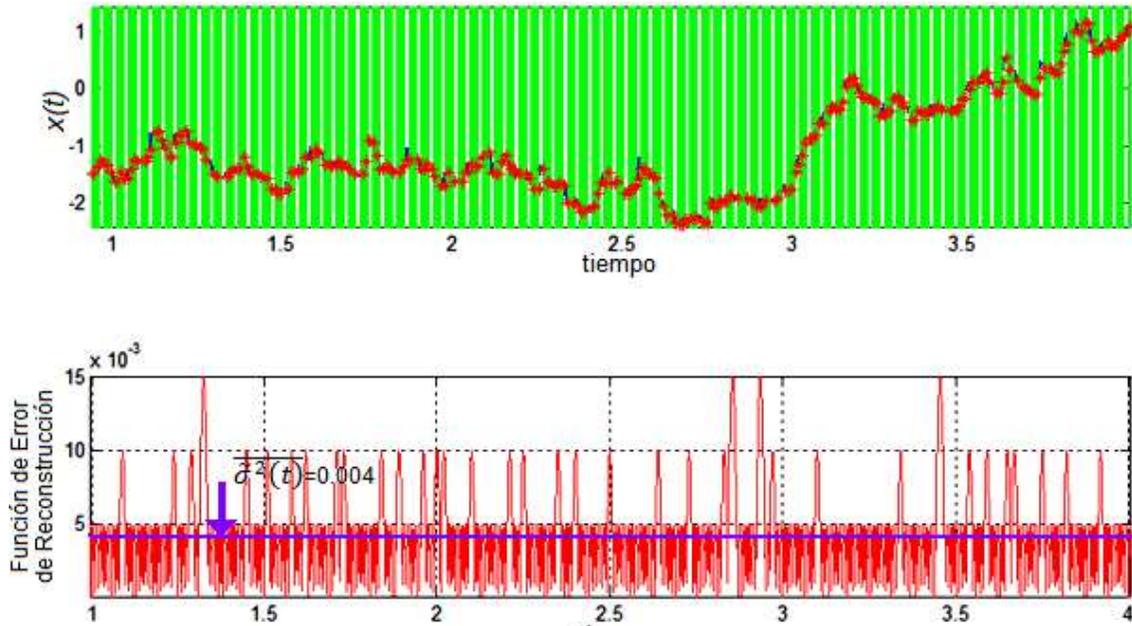


Figura 3-34 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano Markoviano (Detalle a 4s).

Los resultados en el proceso PCR del proceso Gaussiano Markoviano simulado se muestran en la Tabla 1. Se muestra la cantidad de muestras obtenidas y el promedio temporal de la función de Error de reconstrucción.

Tabla 3-1 Resultados del PCR de un proceso Gaussiano Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.

Proceso	N	#Muestras	Promedio de Error	Máximo Error
Proceso Gaussiano Markoviano	4	78	0.0992	0.3408
Proceso Gaussiano Markoviano	8	127	0.0409	0.144
Proceso Gaussiano Markoviano	16	239	0.0179	0.1046
Proceso Gaussiano Markoviano	32	436	0.0088	0.0599
Proceso Gaussiano Markoviano	64	572	0.0054	0.03
Proceso Gaussiano Markoviano	128	664	0.0042	0.02

3.3 Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios Gaussianos No Markovianos.

3.3.1 Cuantificación-Reconstrucción con 4 niveles

Para el proceso PCR con 4 Niveles (ver la Figura 3-35) se obtuvo un promedio temporal de 0.0579 en la función de Error de reconstrucción. Es importante destacar que tanto el proceso No Markoviano simulado como la función de Error de reconstrucción son más suaves respecto al apartado anterior de procesos Markovianos:

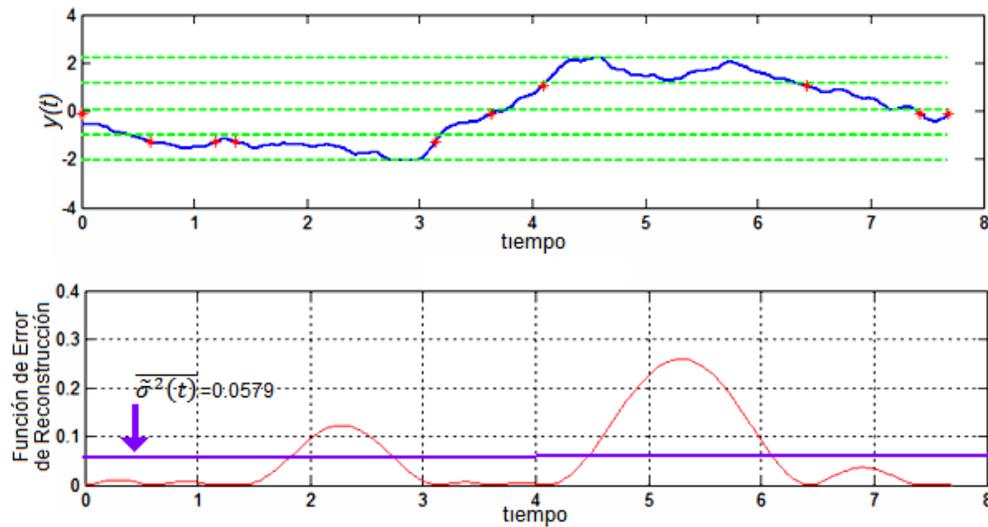


Figura 3-35 Cruces por niveles (N=4) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.

3.3.2 Cuantificación-Reconstrucción con 8 niveles

Para el proceso PCR con 8 Niveles (ver la Figura 3-36) se obtuvo un promedio temporal de 0.0066 en la función de Error de reconstrucción.

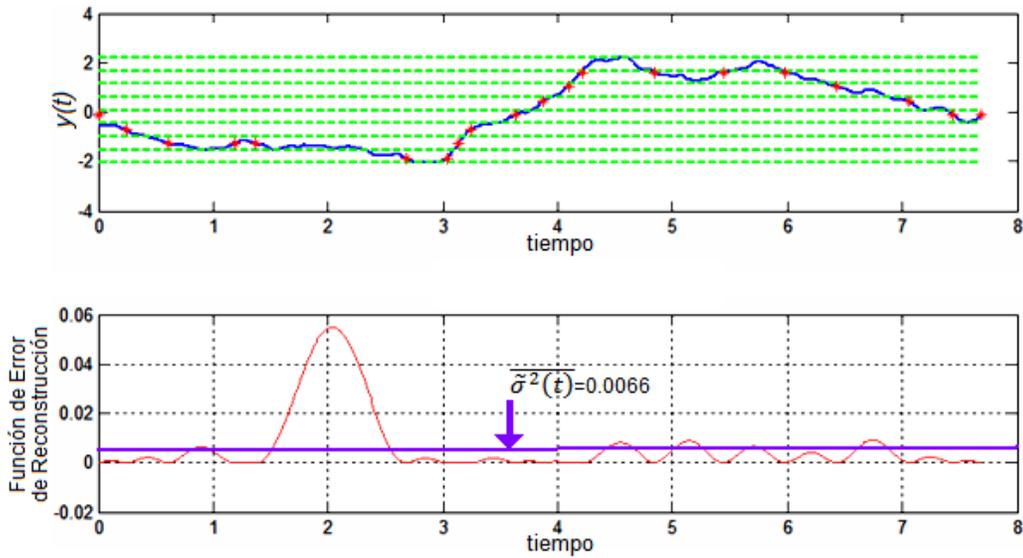


Figura 3-36 Cruces por niveles (N=8) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.

3.3.3 Cuantificación-Reconstrucción con 16 niveles

Para el proceso PCR con 16 Niveles (ver la Figura 3-37) se obtuvo un promedio temporal de 0.0022 en la función de Error de reconstrucción.

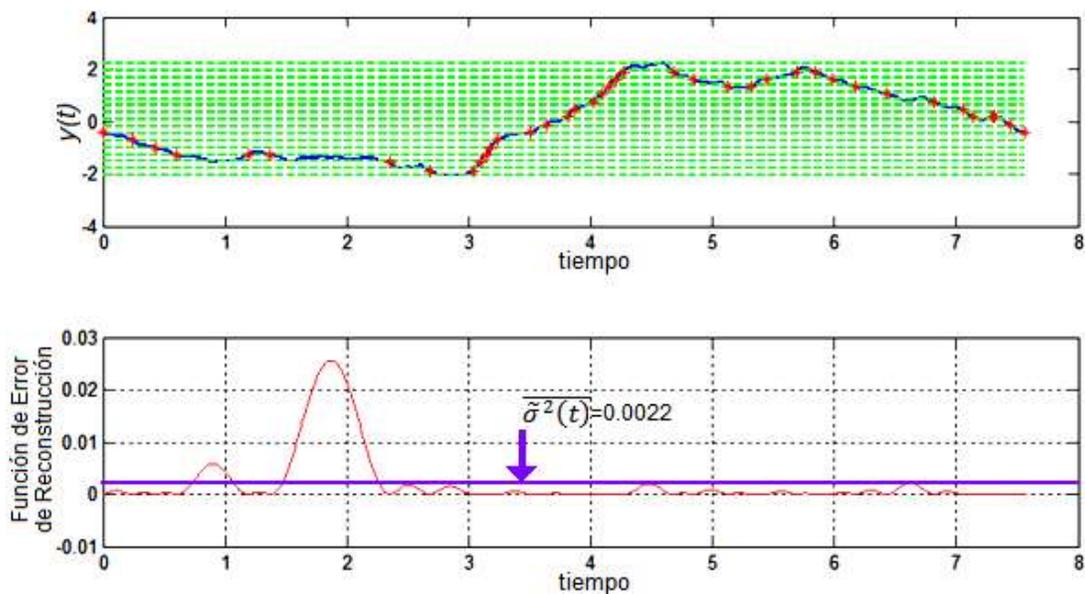


Figura 3-37 Cruces por niveles (N=16) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.

3.3.4 Cuantificación-Reconstrucción con 32 niveles

Para el proceso PCR con 32 Niveles (ver la Figura 3-38) se obtuvo un promedio temporal de 0.00012 en la función de Error de reconstrucción.

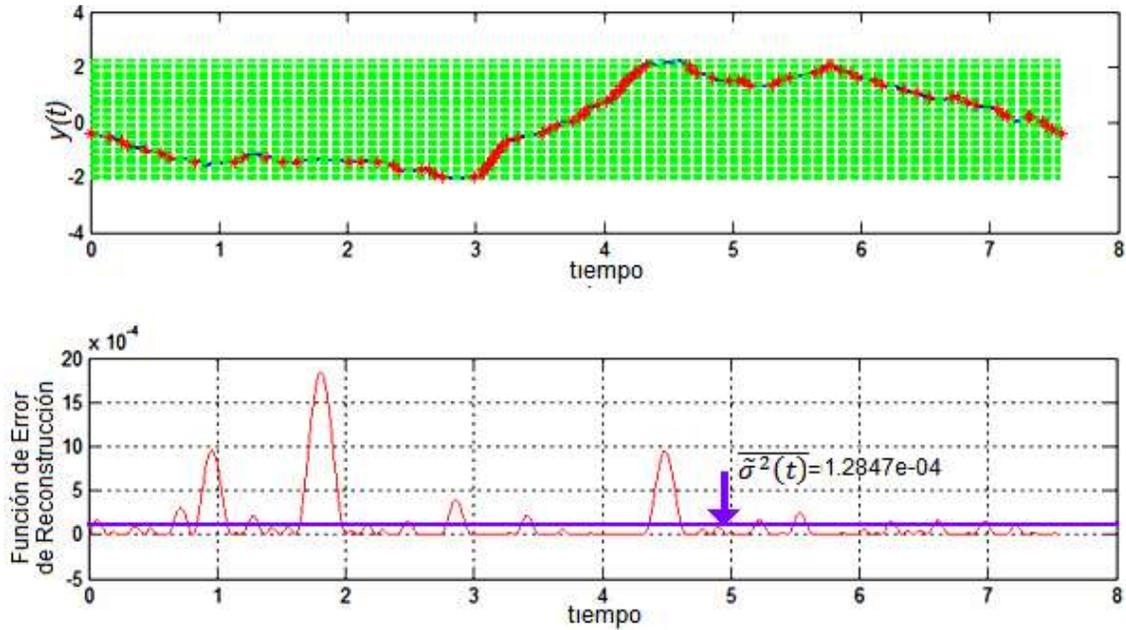


Figura 3-38 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.

3.3.5 Cuantificación-Reconstrucción con 64 niveles

Para el proceso PCR con 32 Niveles (ver la Figura 3-39) se obtuvo un promedio temporal de 0.000022 en la función de Error de reconstrucción.

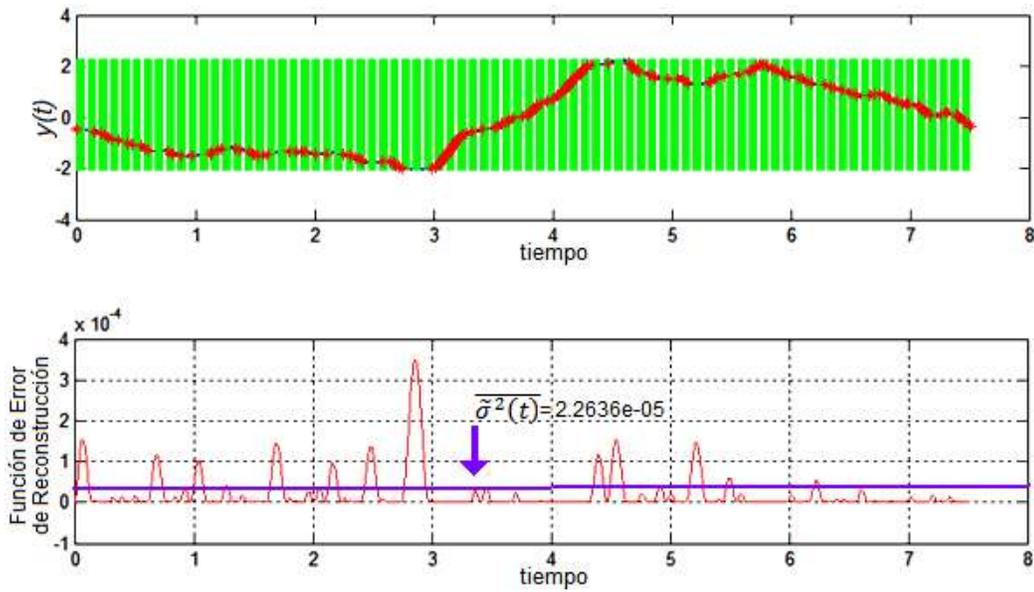


Figura 3-39 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.

3.3.6 Cuantificación-Reconstrucción con 128 niveles

Para el proceso PCR con 64 Niveles (ver la Figura 3-40) se obtuvo un promedio temporal de 0.0000038 en la función de Error de reconstrucción.

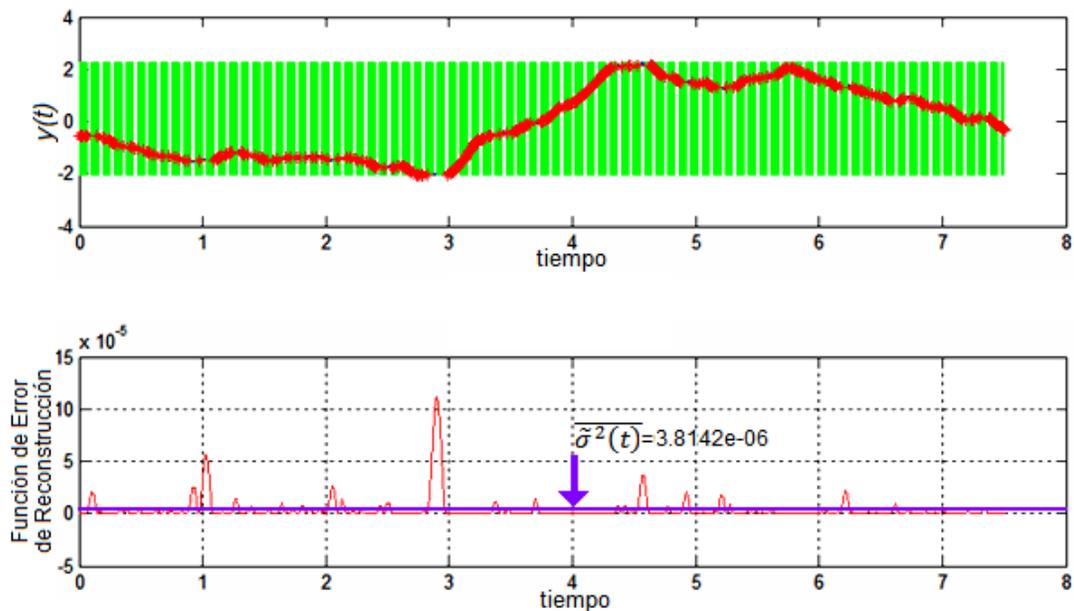


Figura 3-40 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio Gaussiano No Markoviano.



Los resultados en el proceso PCR del proceso Gaussiano No Markoviano simulado se muestran en la Tabla 2. Se muestra la cantidad de muestras obtenidas y el promedio temporal y máximo de la función de Error de reconstrucción.

Tabla 3-2 Resultados del PCR de un proceso Gaussiano No Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.

Proceso	N	#Muestras	Promedio de Error	Máximo Error
Proceso Gaussiano NO Markoviano	4	10	0.0579	0.2591
Proceso Gaussiano NO Markoviano	8	20	0.0066	0.0549
Proceso Gaussiano NO Markoviano	16	39	0.0022	0.0256
Proceso Gaussiano NO Markoviano	32	87	1.28E-04	0.0018
Proceso Gaussiano NO Markoviano	64	171	2.26E-05	3.52E-04

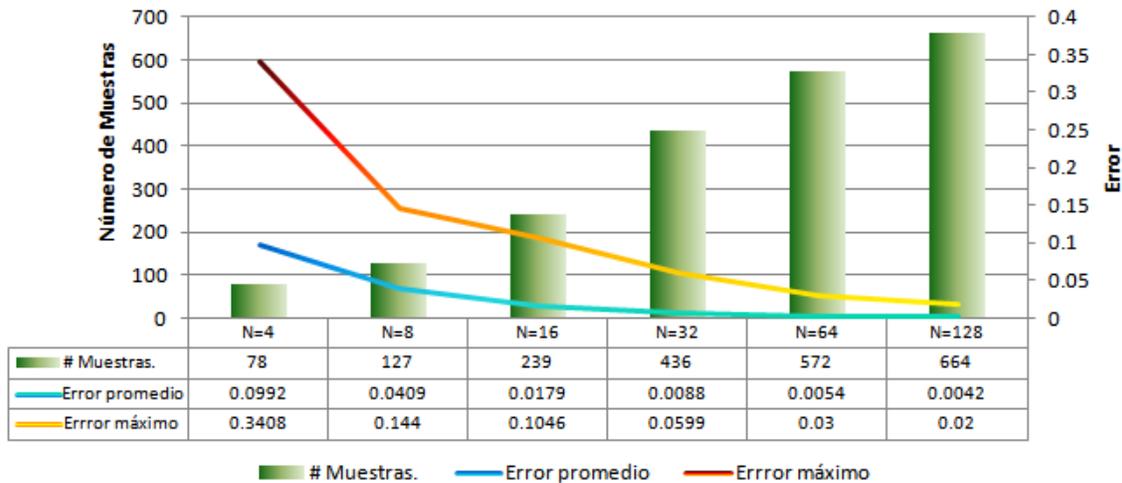


Figura 3-41 Comparativo del número de muestras y error de reconstrucción en la simulación del Proceso Gaussiano Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128

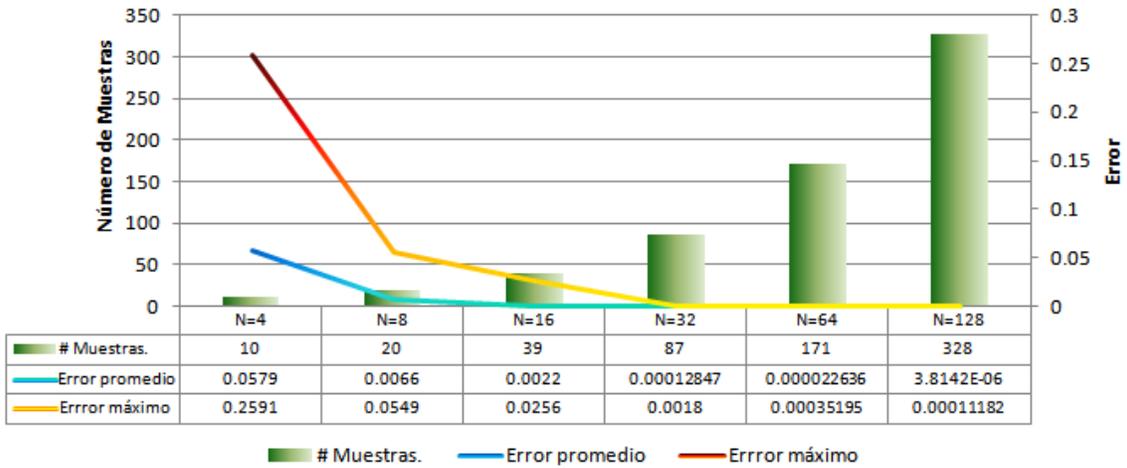


Figura 3-42 Comparativo del número de muestras y error de reconstrucción en la simulación del Proceso Gaussiano No Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128



Capítulo 4 Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios No Gaussianos a la salida del convertidor No Lineal exponencial

4.1 Respuesta de los Sistemas no lineales no inerciales

Los sistemas de comunicaciones están compuestos por elementos que generalmente se dividen en elementos Lineales-Inerciales y No Lineales-No inerciales. Es difícil desarrollar un método práctico y universal para la solución de problemas sobre las transformaciones No Lineales- No inerciales de señales aleatorias [47].

Los sistemas No Lineales más sencillos son aquellos en los cuales el valor de la función de salida $\eta(t)$ en cualquier instante de tiempo es determinado por el valor de la función de entrada $\xi(t)$ en el mismo instante de tiempo:

$$\eta(t) = g[\xi(t)]. \quad (4.1)$$

Donde $g[\xi(t)]$ es una función No Lineal [31,47]. A estos dispositivos se les conoce como convertidores No Lineales – No Inerciales.

La función (4.1) es conocida como la función característica, función de transferencia o función equivalente del convertidor No Lineal y generalmente es determinada experimentalmente de las características de corriente-voltaje de elementos No Lineales, además, los convertidores con dicha característica, en muchos casos describen con suficiente exactitud de funcionamiento de un grupo considerable de elementos de comunicaciones de los cuales forman parte los limitadores de amplitud, rectificadores, mezcladores, convertidores de frecuencia, moduladores, etc.

La solución del problema de las transformaciones No Lineales, se obtiene si se conoce la densidad de probabilidad M-dimensional $w_{\xi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)$ de las variables aleatorias $\xi_1 = \xi(t_1), \dots, \xi_M = \xi(t_M)$, y si se desea encontrar la densidad de probabilidad $w_{\eta}(\eta_1, \dots, \eta_M)$ de las nuevas variables aleatorias:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= g_1(\xi_1, \dots, \xi_M) \\ \eta_2 &= g_2(\xi_1, \dots, \xi_M) \\ &\vdots \\ \eta_M &= g_M(\xi_1, \dots, \xi_M) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Las funciones g_1, g_2, \dots, g_M son continuas a trozos. Si el inverso del sistema es:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M) \\ \xi_2 &= h_2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M) \end{aligned} \quad (4.3)$$



$$\begin{matrix} \vdots \\ \xi_M = h_M(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M) \end{matrix}$$

Donde las funciones h_1, h_2, \dots, h_M , son univaluadas, entonces la densidad de probabilidad es:

$$\omega_n(\eta_1, \dots, \eta_M) = \omega_\xi[h_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M), \dots, h_N(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M)]|D_M| \quad (4.4)$$

D_M es el jacobiano de la transformación de las variables aleatorias ξ_1, \dots, ξ_M a las variables aleatorias $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M$, es decir:

$$D_M = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial \eta_M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_M}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial h_M}{\partial \eta_M} \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Este procedimiento es de especial interés práctico en las transformaciones No Lineales – No Inerciales de funciones de densidad de probabilidad, sin embargo, para una función característica $g[\xi(t)]$ pueden surgir dificultades cuando sea complicado obtener la función inversa $h(\eta)$ de forma general, lo que impediría encontrar la solución analítica de la ecuación (4.1). Por eso es necesario utilizar otra metodología que permita encontrar las características estadísticas del proceso aleatorio, y así poder establecer la reconstrucción a partir de un conjunto dado de muestras [31-49].

4.1.1 Análisis del PMR en la salida de dispositivos no lineales

Para determinar la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción de un proceso No Gaussiano en la salida $\eta(t)$, se debe conocer el proceso de entrada $\xi(t)$ caracterizado por la FDP multimencional $\omega_N[\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N)]$, el conjunto de muestras del proceso de salida $\eta(t) = \{\eta(t_1), \eta(t_2), \dots, \eta(t_N)\}$ con sus tiempos de ocurrencia $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, la función de transferencia del convertidor No Lineal $\eta(t) = g[\xi(t)]$, así como su función inversa única $\xi(t) = h[\eta(t)]$.

Aplicando la regla de la esperanza condicional para reconstruir el proceso aleatorio en la salida del convertidor No Lineal, se establece que la Función del valor medio condicional es [38, 39]:

$$\tilde{m}_1^\eta(t) = \langle \eta(t) | \eta(T_i) \rangle. \quad (4.6)$$



Será la función de reconstrucción, mientras que la calidad de reconstrucción se estimará por medio de la función de la varianza condicional dada por:

$$\tilde{\sigma}_{\eta}^2(t) = \langle [\eta(t) - m_1^{\eta}(t)]^2 | \eta(T_i) \rangle. \quad (4.7)$$

Para determinar las funciones de los momentos condicionales del proceso $\eta(t)$, se deben de calcular los momentos condicionales de orden n de $\eta(t)$.

$$\tilde{m}_n^{\eta}(t) = \langle [\eta(t)]^n | \eta(T_i) \rangle. \quad (4.8)$$

$$\tilde{m}_n^{\eta}(t) = \langle g[\xi(t)]^n | \eta(T_i) \rangle. \quad (4.9)$$

Por medio de la función inversa $\xi(t) = h[\eta(t)]$ se puede recalculer el proceso discretizado de entrada $X(T_i) = \{\xi(T_1), \xi(T_2), \dots, \xi(T_N)\}$ a partir de la realización discretizada del proceso de salida $\eta(T_i) = \{\eta(T_1), \eta(T_2), \dots, \eta(T_N)\}$ en el mismo instante de tiempo $T_i, i = 1, 2, \dots, N$, de tal forma que las funciones de momentos condicionales serán:

$$\tilde{m}_n^{\eta}(t) = \langle g[\xi(t)]^n | X(T_i) \rangle. \quad (4.10)$$

La función de reconstrucción se definirá por el primer momento condicional de salida, es decir, por la Función de la Esperanza Matemática Condicional:

$$\tilde{m}_1^{\eta}(t) = \langle g[\xi(t)] | X(T_i) \rangle. \quad (4.11)$$

La función para determinar la calidad de la reconstrucción estará dada por la varianza condicional determinada por el primer y segundo momento condicional del proceso a la salida:

$$\tilde{\sigma}_{\eta}^2 = \tilde{m}_2^{\eta}(t) - [\tilde{m}_1^{\eta}(t)]^2. \quad (4.12)$$

Donde el segundo momento condicional de salida se calculará a partir de la ecuación (4.10).

4.1.2 Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal - Exponencial.

Muchos elementos electrónicos como transistores, amplificadores, etc. presentan regiones cuyo comportamiento es lineal, sin embargo, otras regiones del dispositivo tienen un comportamiento No Lineal. El convertidor Exponencial nos permitirá observar de forma sencilla el comportamiento



del procedimiento de Muestreo y reconstrucción cuando se trabaja con procesos aleatorios No Gaussianos.

En este trabajo se analizará el Proceso No Gaussiano (No simétrico) obtenido a la salida del convertidor No Lineal Exponencial, esto para procesos Markovianos y No Markovianos.

La No Linealidad del convertidor exponencial se expresa mediante [31, 34]:

$$\eta(t) = g[x(t)] = A \exp[b(x(t))]. \tag{4.13}$$

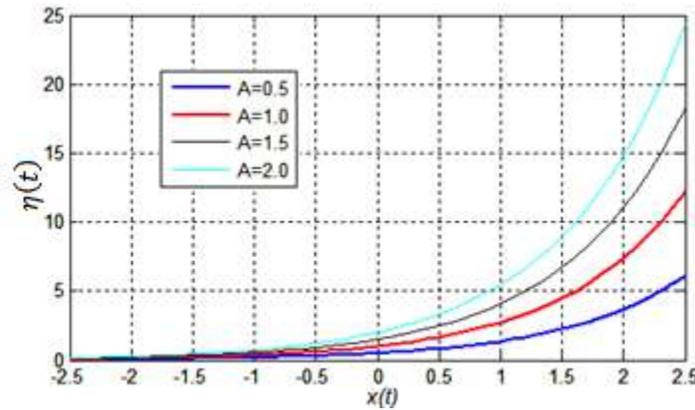


Figura 4-1 Convertidor No Lineal Exponencial, $\eta(t) = A \exp[b(x(t))]$, $b=1$.

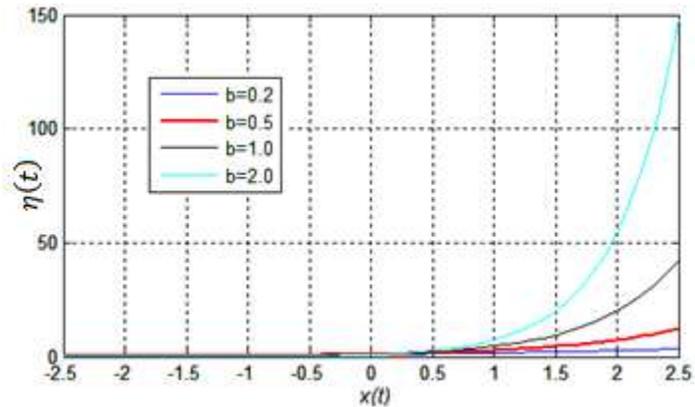


Figura 4-2 Convertidor No Lineal Exponencial, $\eta(t) = A \exp[b(x(t))]$, $A=1$.

Las funciones de momentos del proceso de salida $\eta(t)$ de un convertidor No Lineal de tipo exponencial, se pueden expresar en términos de la función característica del proceso de entrada $x(t)$.



4.1.3 Función de densidad de Probabilidad de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal – Exponencial.

Para conocer las características estadísticas en la salida del convertidor exponencial, se debe de tomar en cuenta que el proceso en la entrada es de tipo Gaussiano $x(t)$. Las principales propiedades del proceso a la salida serán la esperanza matemática, la varianza, la función de covarianza y el tiempo de covarianza.

Partiendo de que el proceso a la entrada tiene una función de densidad de probabilidad de tipo Gaussiana tendremos lo siguientes [50-62]:

$$w(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x(t) - \langle x(t) \rangle}{\sigma_x} \right)^2 \right]. \quad (4.14)$$

Si $\langle x(t) \rangle = 0$ y $\sigma_x^2 = 1$, se tiene lo siguiente:

$$w(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} x(t)^2 \right]. \quad (4.15)$$

La función de densidad de probabilidad en la salida resultará de:

$$w(\eta) = w(h(\eta)) \frac{1}{\frac{d\eta}{dx}}. \quad (4.16)$$

$$w(h(\eta)) = w(x(t)). \quad (4.17)$$

$$\eta = A \exp(bx). \quad (4.18)$$

Sustituyendo (4.15), (4.17) y (4.18) en (4.16) tendremos que:

$$w(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} x(t)^2 \right] \frac{1}{(Ab) \exp(bx)}. \quad (4.19)$$

Despejando $x(t)$ de (4.18) y sustituyendo en (4.19) obtenemos la FDP:

$$x(t) = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{\eta(t)}{A} \right). \quad (4.20)$$



$$w(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{b} \ln \left(\frac{\eta(t)}{A} \right) \right]^2 \right] \frac{1}{(Ab) \exp \left(b \left[\frac{1}{b} \ln \left(\frac{\eta(t)}{A} \right) \right] \right)}$$

(4.21)

$$= \frac{1}{(Ab)\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{b} \ln \left(\frac{\eta(t)}{A} \right) \right]^2 \right] - \ln \frac{\eta(t)}{A}.$$

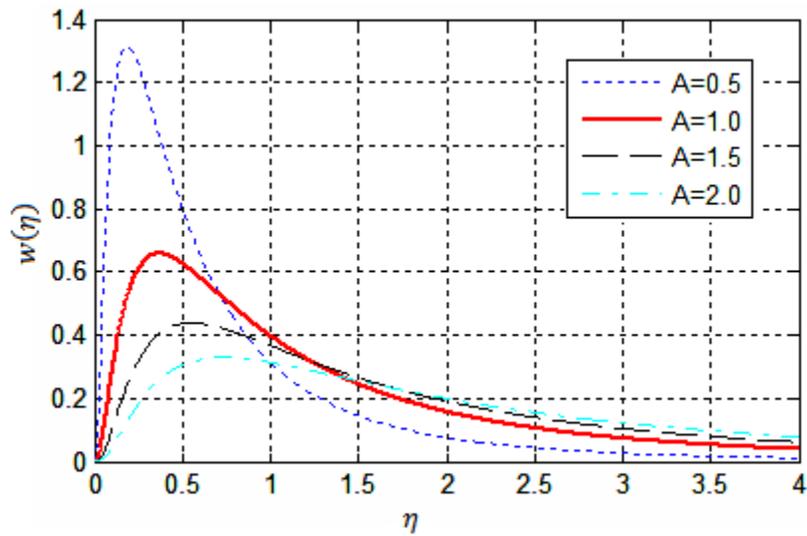


Figura 4-3 Función de densidad de probabilidad de la salida del convertidor No Lineal exponencial. A=0.5, 1.0, 1.5, 2.0. b=1

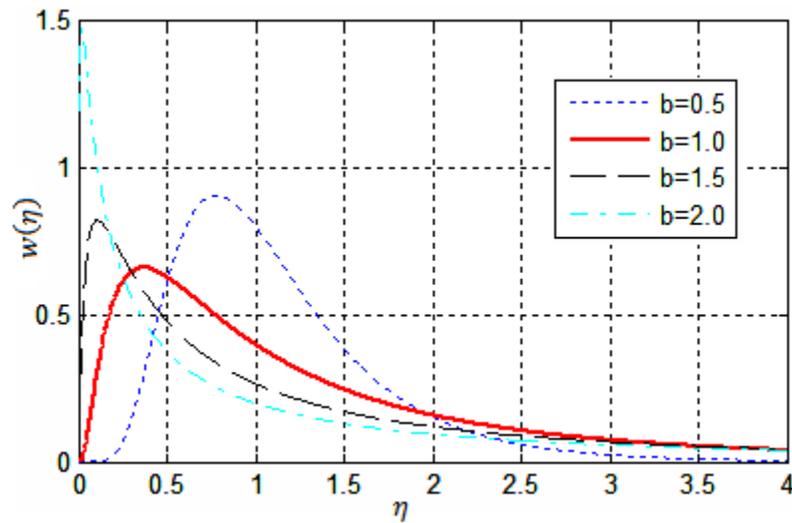


Figura 4-4 Función de densidad de probabilidad de la salida del convertidor No Lineal exponencial. $b=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. $A=1$

4.1.4 Esperanza Matemática de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal - Exponencial.

Para obtener la esperanza matemática a la salida, utilizamos (1.7):

$$\langle \eta(t) \rangle = \langle g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)w(x)dx. \quad (4.22)$$

Donde $g(x) = \eta$, Resolviendo se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= \langle g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(bx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] dx = \\ \langle \eta(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[bx - \frac{1}{2}x^2\right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x^2 - 2bx + \left(-\frac{2b}{2}\right)^2 - \left(\frac{2b}{2}\right)^2\right]\right\} dx = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{b^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x - b]^2\right\} dx = A \exp\left(\frac{b^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.23)$$



4.1.5 Varianza de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal - Exponencial.

Para obtener la ecuación de la varianza, se utiliza la ecuación (1.8), se deduce que:

$$\sigma_{\eta}^2 = \langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2. \quad (4.24)$$

Calculando $\langle \eta^2 \rangle$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \eta^2 \rangle &= \langle g^2(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \exp(2bx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \frac{A^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{4b^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-2b)^2\right) dx = A^2 \exp(2bx). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sustituyendo (4.23) y (4.25) en (4.24) se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta}^2 &= A^2 \exp(2bx) - \left(A \exp\left(\frac{b^2}{2}\right)\right)^2 = \\ &= A^2 [\exp(2b^2x) - \exp(b^2)]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.1.6 Función y tiempo de covarianza de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal - Exponencial.

Para el cálculo de la función y tiempo de covarianza, reescribimos (4.13) para dos instantes de tiempo: t , $t + \tau$. Al multiplicar ambas expresiones y sacando el promedio es posible encontrar la función de covarianza en la salida $n(t)$ del proceso:

$$\begin{aligned} K_{\eta}(\tau) &= A^2 \exp(b^2) \left[\exp\left(b^2 \frac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2}\right) - 1 \right] = \\ &= A^2 \exp(b^2) [\exp(b^2 R_x(\tau)) - 1]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Donde $R_x(\tau)$ es la función de covarianza normalizada en la entrada. Utilizando (1.18) se puede determinar el tiempo de covarianza τ_c en la salida.



$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_{\eta}(\tau)| d\tau = \frac{A^2 \exp(b^2)}{\sigma_{\eta}^2} \int_0^{\infty} |\exp(b^2 R_x(\tau)) - 1| d\tau. \quad (4.28)$$

El tiempo de covarianza τ_c depende de los valores de la función de covarianza a la entrada y la varianza a la salida.

4.1.7 Procedimiento de Reconstrucción en base a la Regla de la Esperanza Matemática Condicionales de Procesos aleatorios a la salida de un convertidor No Lineal – Exponencial.

Fundamentadas en la regla de la esperanza matemática condicional [58], y utilizando las funciones de momentos condicionales se tiene lo siguiente:

$$\tilde{m}_1^{\eta}(t) = A \exp \left\{ b \tilde{m}_1^x(t) + \frac{1}{2} b^2 \right\}. \quad (4.29)$$

Donde $\tilde{m}_1^{\eta}(t)$ es la esperanza matemática condicional del proceso a la salida. El segundo momento condicional $\tilde{m}_2^{\eta}(t)$ será:

$$\tilde{m}_2^{\eta}(t) = A^2 \exp \{ 2b \tilde{m}_1^x(t) + b^2 + b^2 \tilde{\sigma}_x^2(t) \}. \quad (4.30)$$

\tilde{m}_1^x y $\tilde{\sigma}_x^2$ corresponden a las funciones condicionales del proceso en la entrada del convertidor No Lineal, dichas funciones están descritas por (2.7) y (2.8).

La Función de Error de Reconstrucción estará dada por:

$$\tilde{\sigma}_{\eta}^2(t) = \tilde{m}_2^{\eta}(t) - [\tilde{m}_1^{\eta}(t)]^2. \quad (4.31)$$

Donde $\tilde{\sigma}_{\eta}^2(t)$ es la varianza condicional a la salida, y al igual que en los procesos Gaussianos, nos dará una función para determinar la calidad de la reconstrucción.

4.2 Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción en la salida de dispositivos No lineales

Los resultados del capítulo anterior (análisis de procesos Gaussianos) serán utilizados como entrada del convertidor No Lineal exponencial para obtener los procesos No Gaussianos, esto

tanto para procesos Markovianos como para procesos No Markovianos como se observa en la Figura 4-6

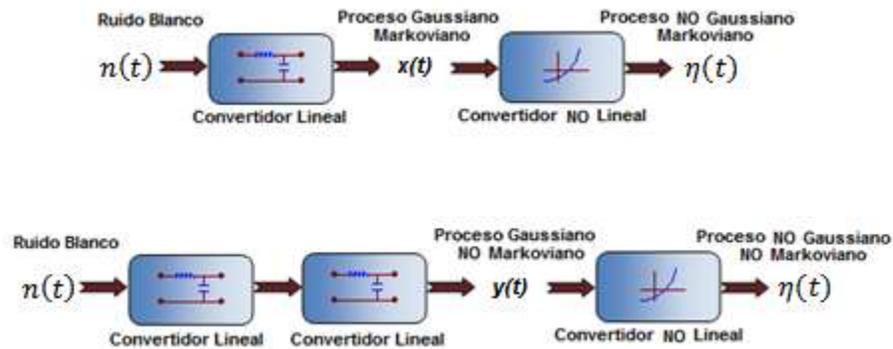


Figura 4-5 Diagrama de generación de una realización de procesos aleatorios No Gaussianos (salida del convertidor No Lineal exponencial).

En la Figura 4-7 se ejemplifica el comportamiento de los procesos Gaussianos al pasar por el convertidor No Lineal. A la salida se observa una FDP asimétrica.

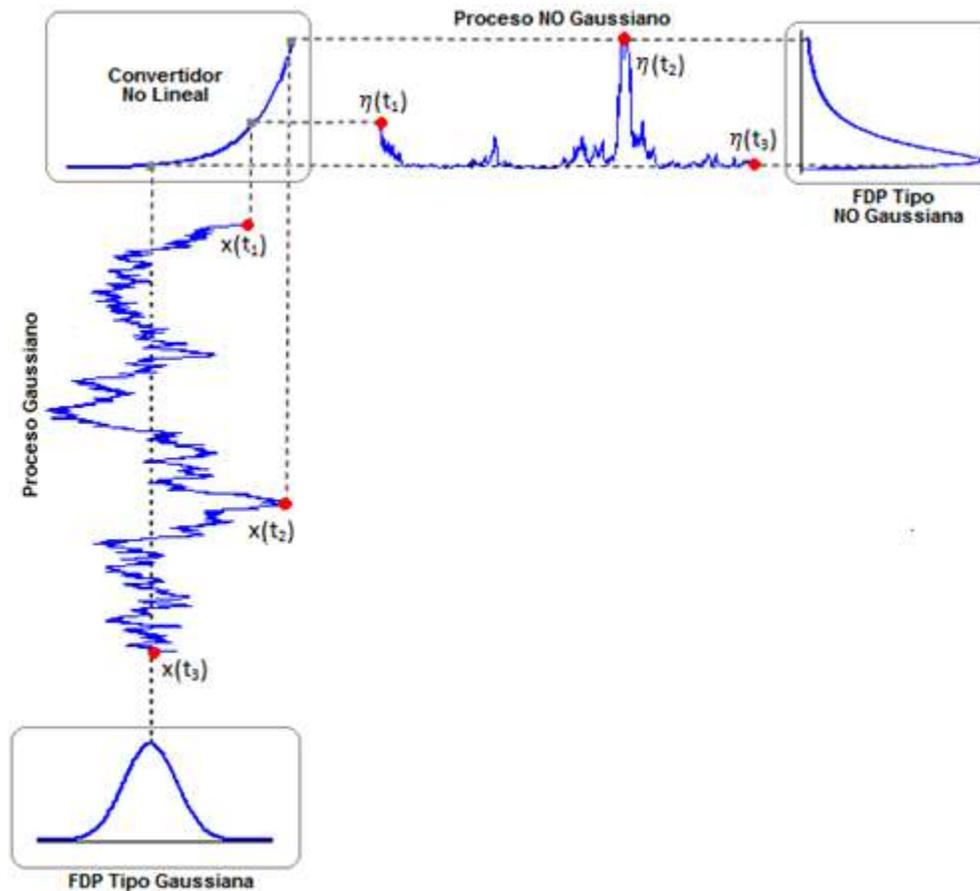


Figura 4-6 Salida del convertidor No Lineal exponencial.

4.3 Simulaciones.

En la Figura 4-8 podemos observar a detalle el procedimiento llevado a cabo para la obtención del proceso No Gaussiano Markoviano. Se muestra en primer plano la simulación de un proceso Gaussiano Markoviano pasando a través del convertidor No Lineal exponencial, y en segundo plano, el detalle a 4 segundos:

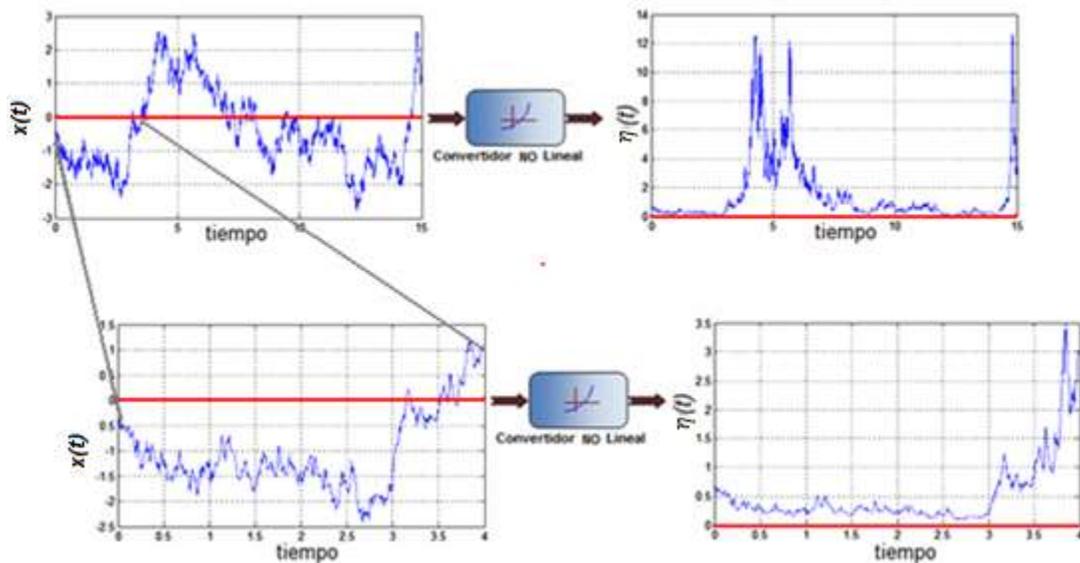


Figura 4-7 Detalle (15s y 4s) de la simulación de una realización de un proceso No Gaussiano Markoviano.

En la Figura 4-9 se observa a detalle para obtener el proceso No Gaussiano No Markoviano. Se muestra en primer plano la simulación de un proceso Gaussiano No Markoviano que pasa a través del convertidor No Lineal exponencial, y en segundo plano, el detalle a 4 segundos:

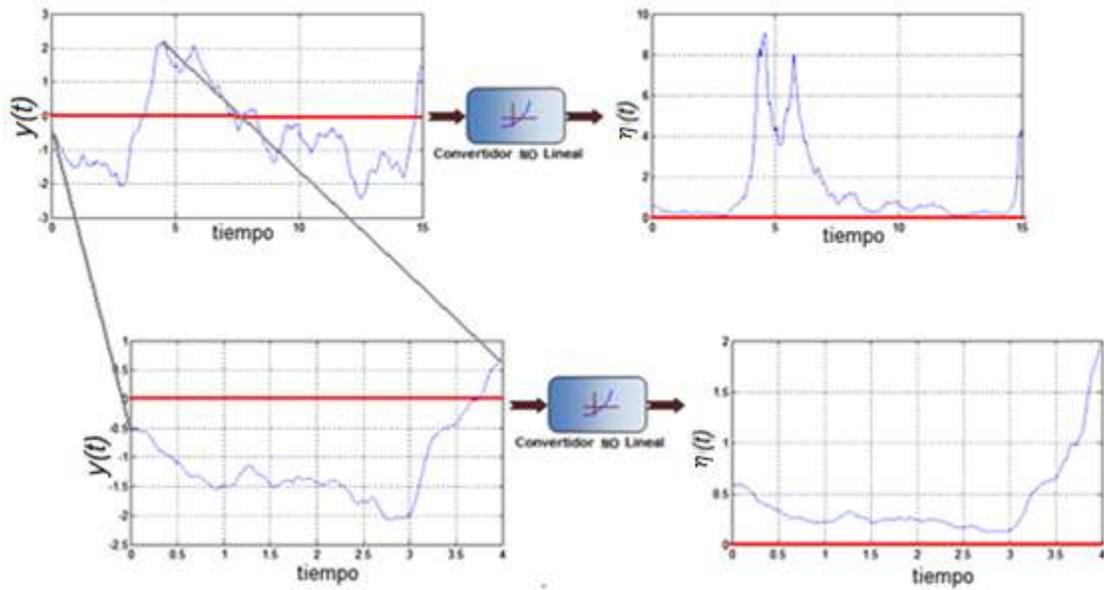


Figura 4-8 Detalle (15s y 4s) de la simulación de una realización de un proceso No Gaussiano No Markoviano.

4.4 Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios No Gaussianos Markovianos.

4.4.1 Cuantificación-Reconstrucción con 4 niveles

Para el proceso PCR con 4 Niveles (ver la Figura 4-10) se obtuvo un promedio temporal de 0.6184 en la función de Error de reconstrucción, mayor que el obtenido para el proceso Gaussiano Markoviano y Gaussiano No Markoviano:

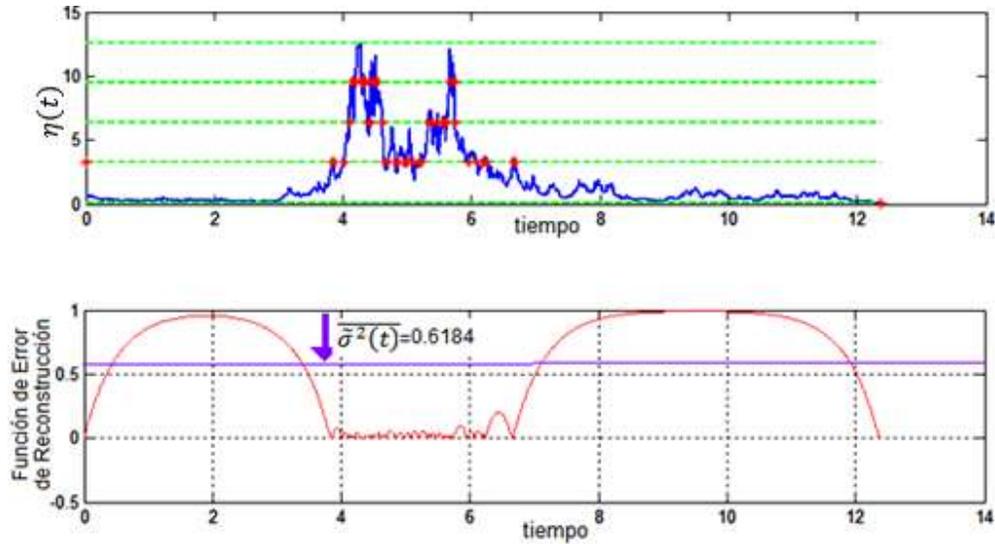


Figura 4-9 Cruces por niveles (N=4) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.

Para el proceso PCR con 8 Niveles (ver la Figura 4-11) se obtuvo un promedio temporal de 0.6184 en la función de Error de reconstrucción.

4.4.2 Cuantificación-Reconstrucción con 8 niveles

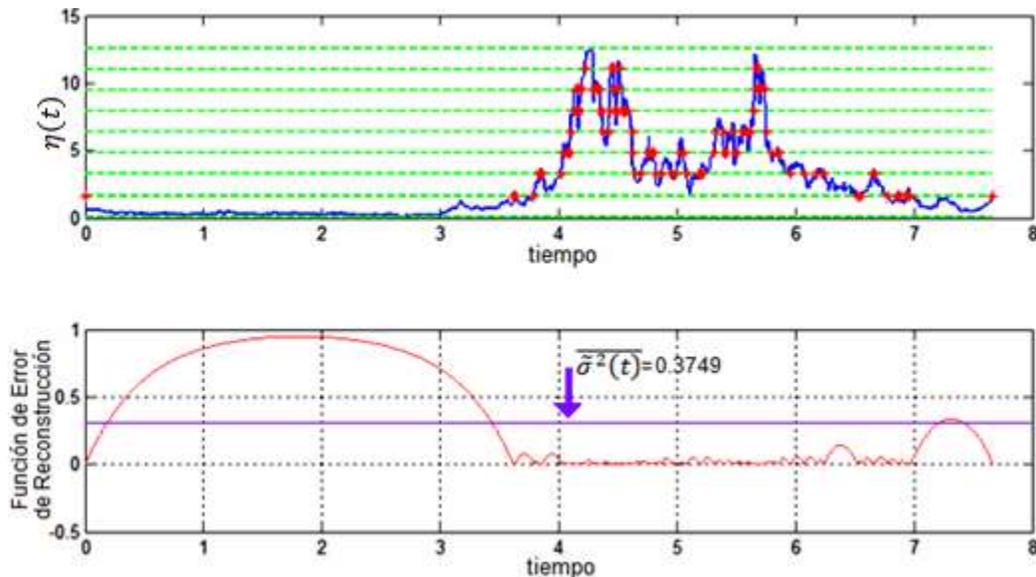


Figura 4-10 Cruces por niveles (N=8) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.

4.4.3 Cuantificación-Reconstrucción con 16 niveles

Para el proceso PCR con 16 Niveles (ver la Figura 4-12) se obtuvo un promedio temporal de 0.2970 en la función de Error de reconstrucción.

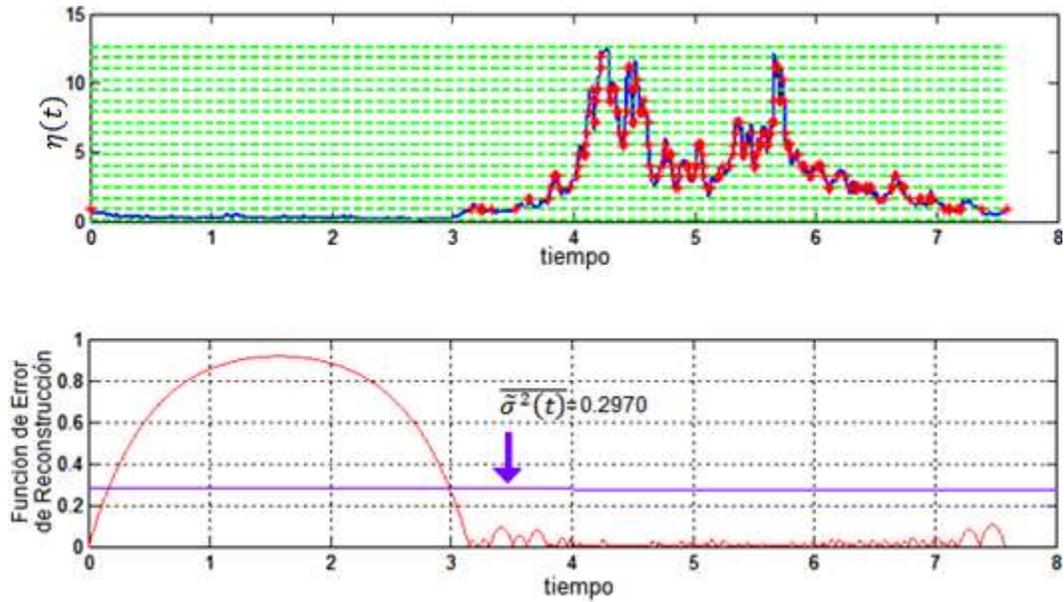


Figura 4-11 Cruces por niveles (N=16) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.

4.4.4 Cuantificación-Reconstrucción con 32 niveles

Para el proceso PCR con 32 Niveles (ver la Figura 4-13) se obtuvo un promedio temporal de 0.1671 en la función de Error de reconstrucción.

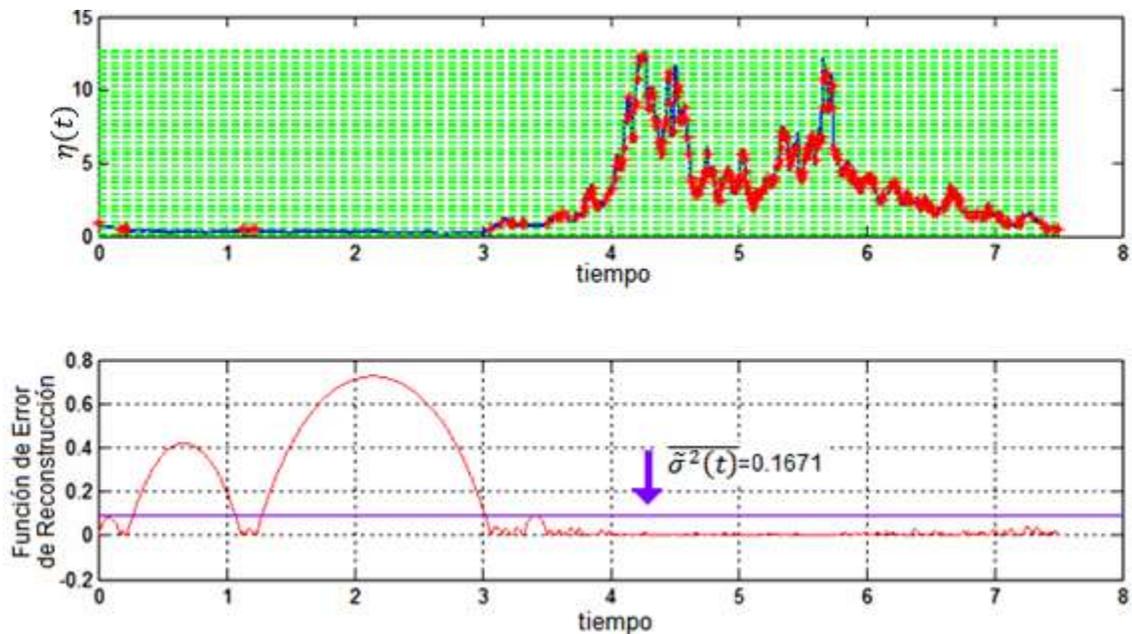


Figura 4-12 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.

4.4.5 Cuantificación-Reconstrucción con 64 niveles

Para el proceso PCR con 64 Niveles (ver la Figura 4-14) se obtuvo un promedio temporal de 0.0238 en la función de Error de reconstrucción.

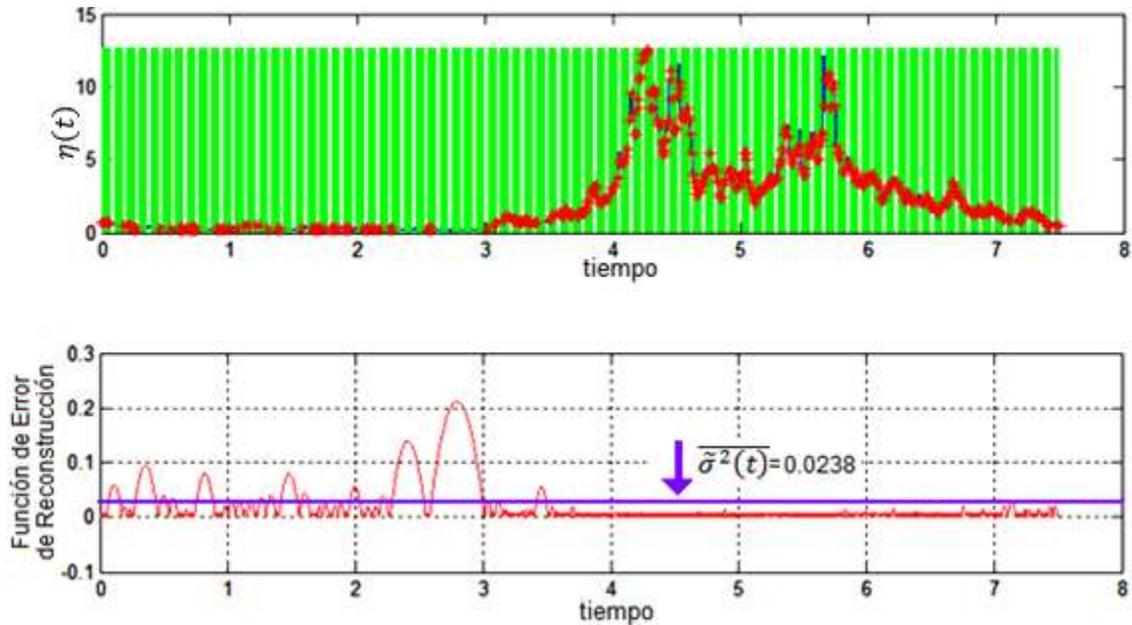


Figura 4-13 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.

4.4.6 Cuantificación-Reconstrucción con 128 niveles

Para el proceso PCR con 128 Niveles (ver la Figura 4-15) se obtuvo un promedio temporal de 0.0149 en la función de Error de reconstrucción.

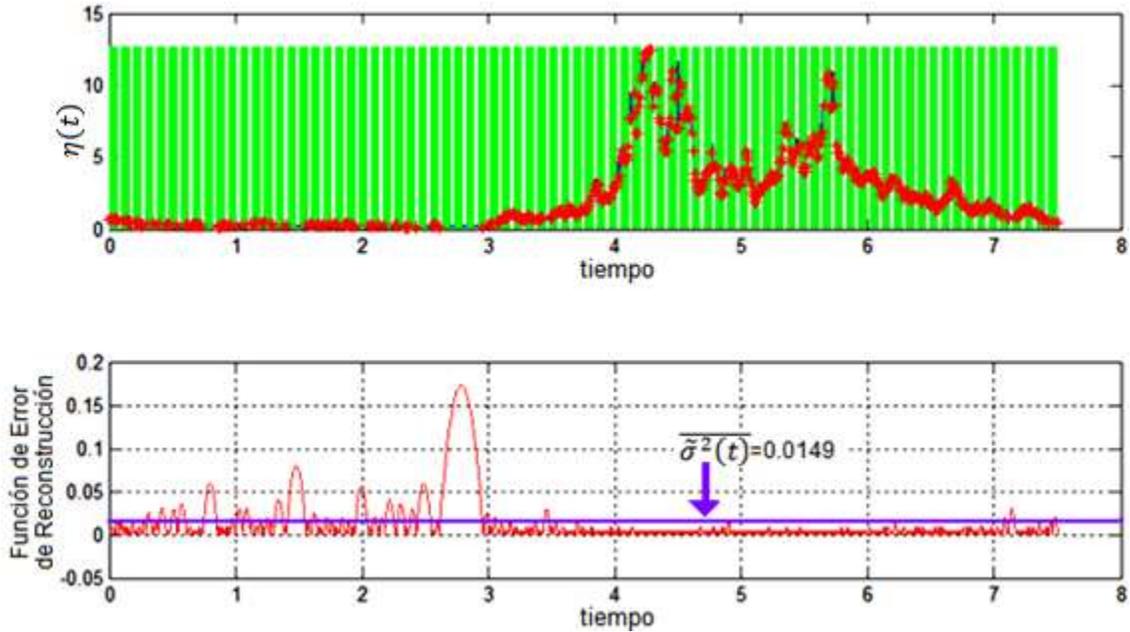


Figura 4-14 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano Markoviano.

Los resultados en el proceso PCR del proceso No Gaussiano Markoviano simulado se muestran en la Tabla 3. Se muestra la cantidad de muestras obtenidas y el promedio temporal de la función de Error de reconstrucción.

Tabla 4-1 Resultados del PCR de un proceso No Gaussiano Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.

Proceso	N	#Muestras	Promedio de Error	Máximo Error
Proceso No Gaussiano Markoviano	4	52	0.6184	0.9933
Proceso No Gaussiano Markoviano	8	99	0.3749	0.9478
Proceso No Gaussiano Markoviano	16	185	0.297	0.9178
Proceso No Gaussiano Markoviano	32	266	0.1671	0.7259
Proceso No Gaussiano Markoviano	64	395	0.0238	0.2117
Proceso No Gaussiano Markoviano	128	469	0.0149	0.1732

4.5 Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios No Gaussianos No Markovianos.

4.5.1 Cuantificación-Reconstrucción con 4 niveles

Para el proceso PCR con 4 Niveles (ver la Figura 4-16) se obtuvo un promedio temporal de 0.3576 en la función de Error de reconstrucción.

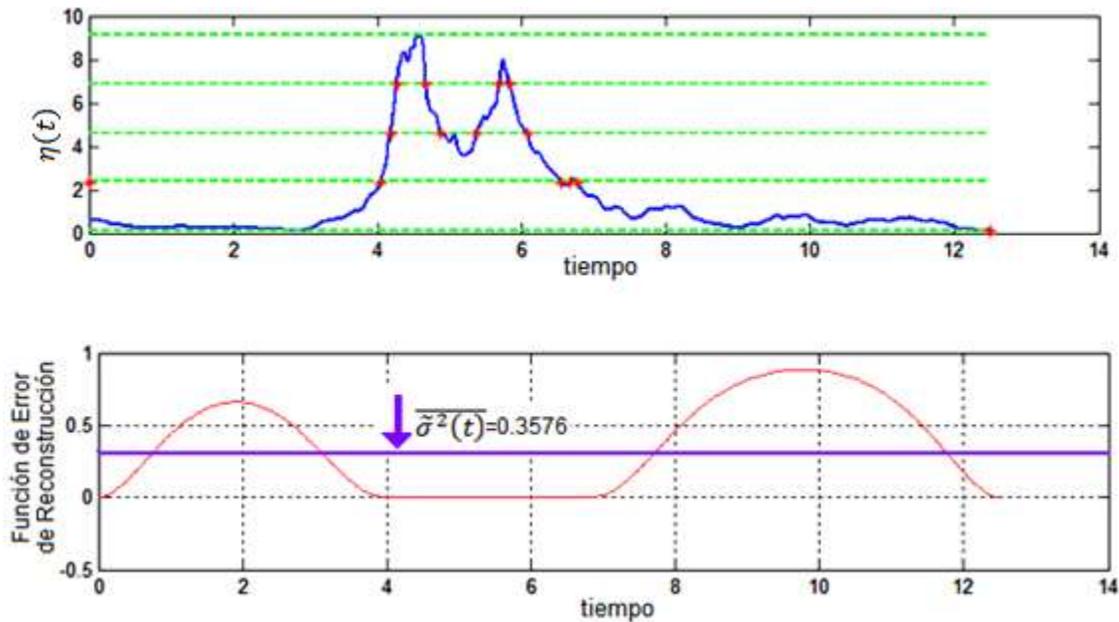


Figura 4-15 Cruces por niveles (N=4) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.

4.5.2 Cuantificación-Reconstrucción con 8 niveles

Para el proceso PCR con 8 Niveles (ver la Figura 4-17) se obtuvo un promedio temporal de 0.1598 en la función de Error de reconstrucción.

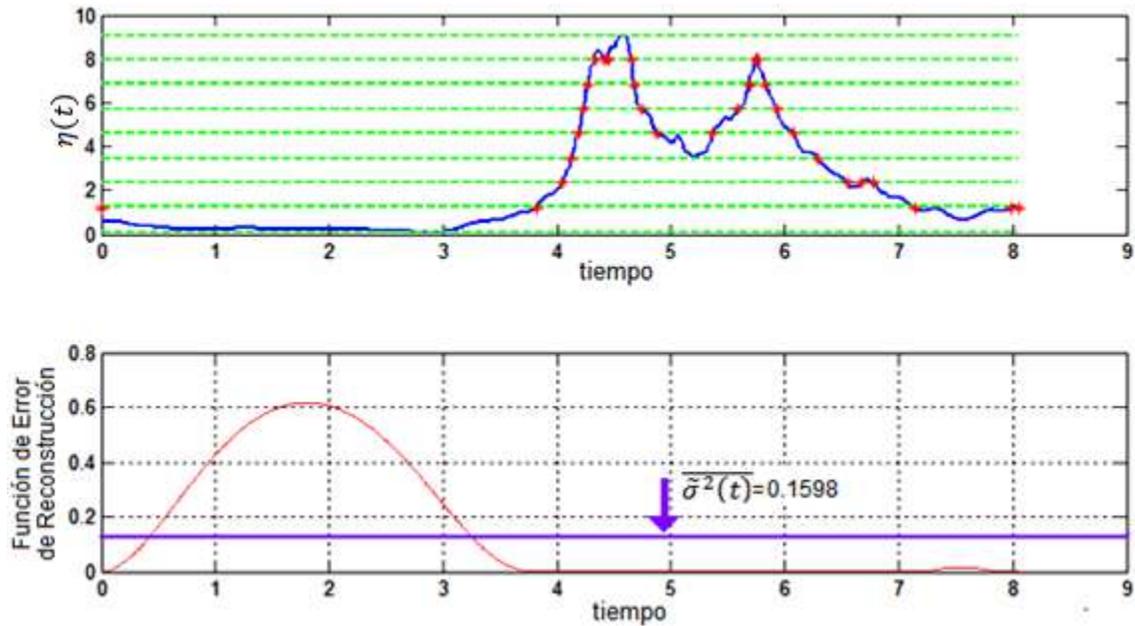


Figura 4-16 Cruces por niveles (N=8) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.

4.5.3 Cuantificación-Reconstrucción con 16 niveles

Para el proceso PCR con 16 Niveles (ver la Figura 4-18) se obtuvo un promedio temporal de 0.1296 en la función de Error de reconstrucción.

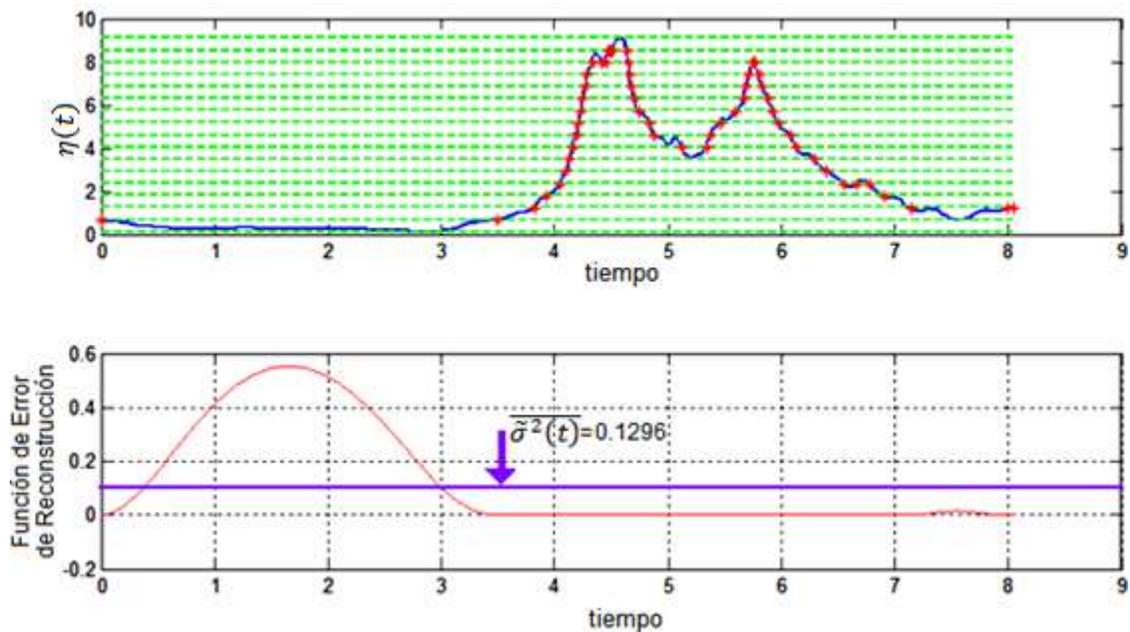


Figura 4-17 Cruces por niveles (N=16) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.

4.5.4 Cuantificación-Reconstrucción con 32 niveles

Para el proceso PCR con 32 Niveles (ver la Figura 4-19) se obtuvo un promedio temporal de 0.0583 en la función de Error de reconstrucción.

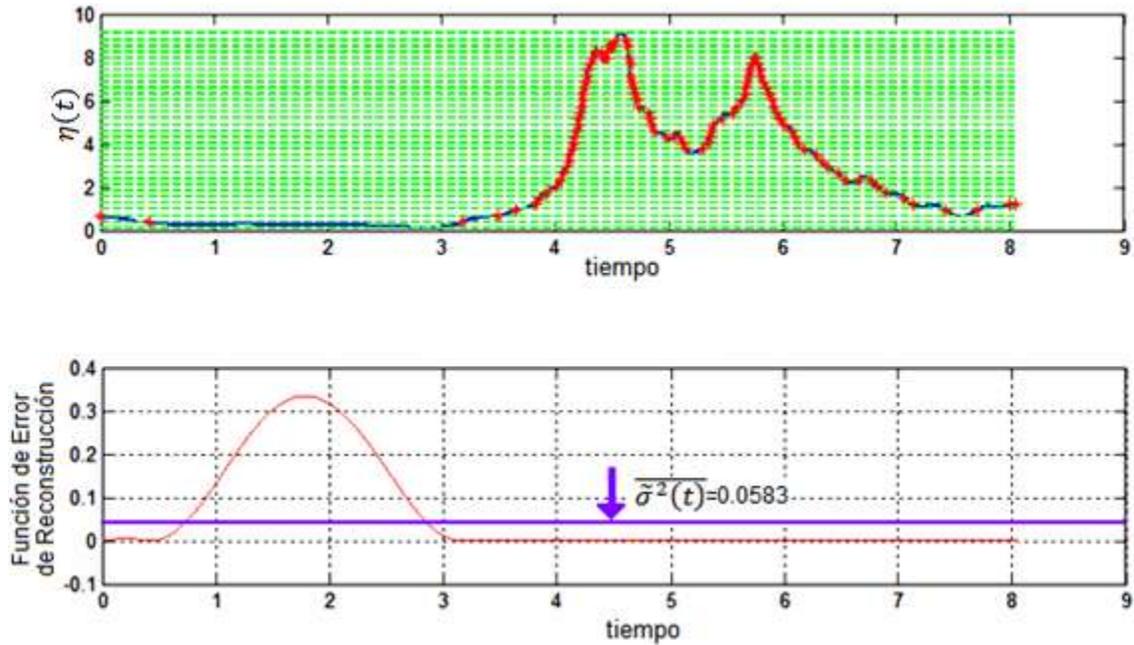


Figura 4-18 Cruces por niveles (N=32) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.

4.5.5 Cuantificación-Reconstrucción con 64 niveles

Para el proceso PCR con 64 Niveles (ver la Figura 4-20) se obtuvo un promedio temporal de 0.0015 en la función de Error de reconstrucción.

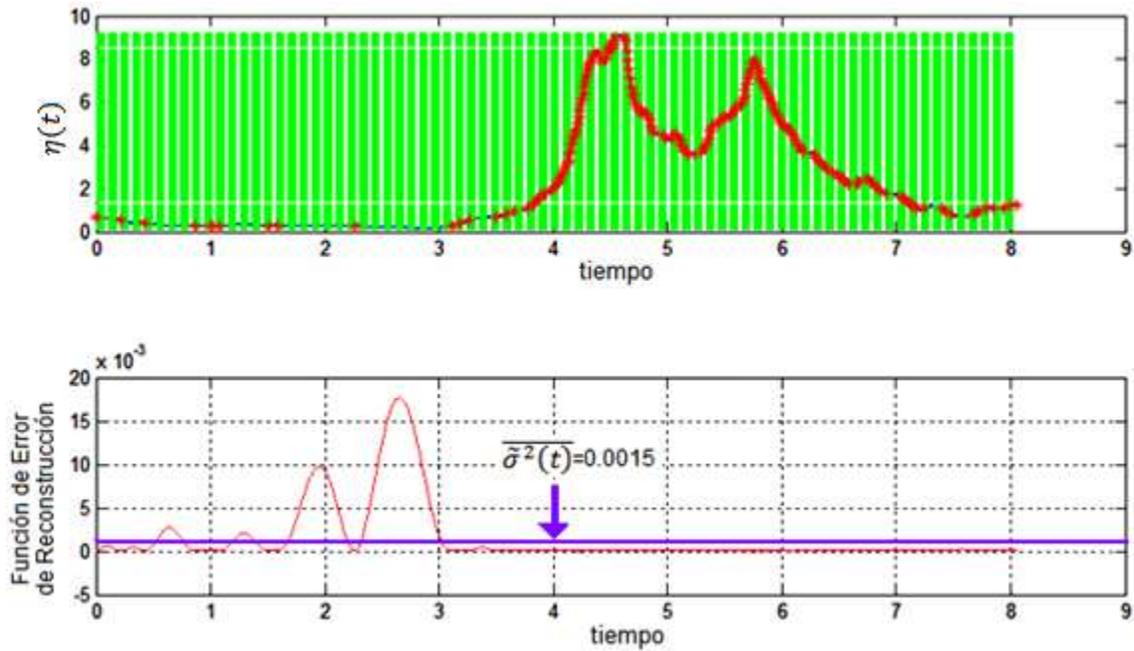


Figura 4-19 Cruces por niveles (N=64) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.

4.5.6 Cuantificación-Reconstrucción con 128 niveles

Para el proceso PCR con 128 Niveles (ver la Figura 4-21) se obtuvo un promedio temporal de 0.00051 en la función de Error de reconstrucción.

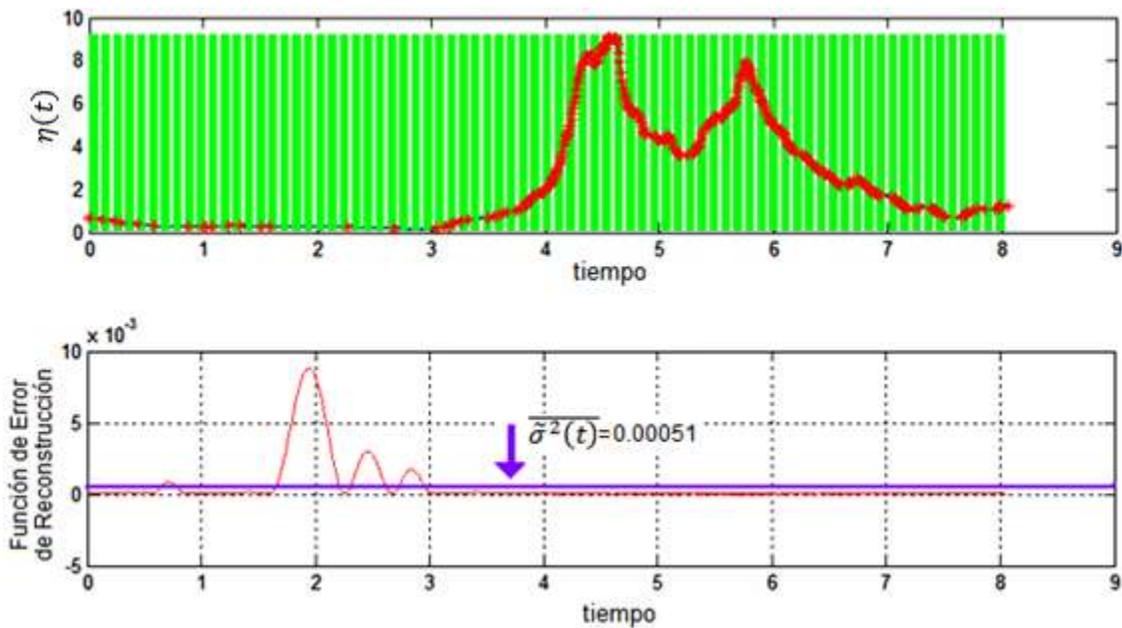


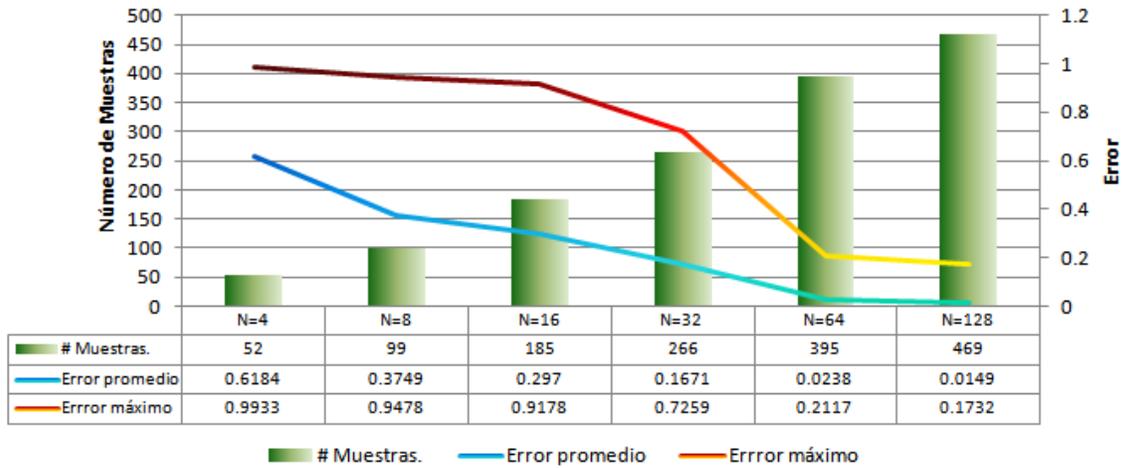
Figura 4-20 Cruces por niveles (N=128) y Error de reconstrucción de una realización de un proceso aleatorio No Gaussiano No Markoviano.



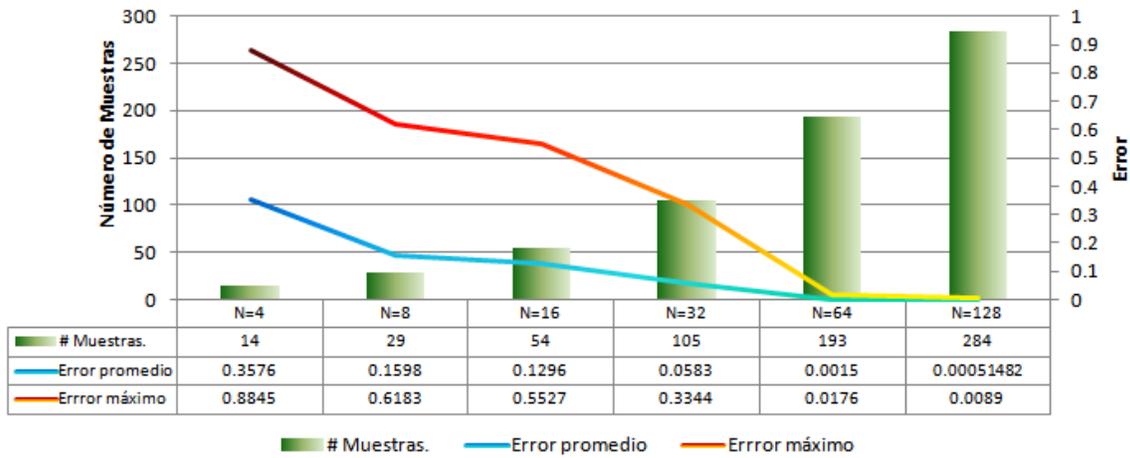
Los resultados en el proceso PCR del proceso No Gaussiano No Markoviano simulado se muestran en la Tabla 4. Se muestra la cantidad de muestras obtenidas y el promedio temporal y máximo de la función de Error de reconstrucción.

Tabla 4-2 Resultados del PCR de un proceso No Gaussiano No Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.

Proceso	N	#Muestras	Promedio de Error	Máximo Error
Proceso No Gaussiano NO Markoviano	4	14	0.3576	0.8845
Proceso No Gaussiano NO Markoviano	8	29	0.1598	0.6183
Proceso No Gaussiano NO Markoviano	16	54	0.1296	0.5527
Proceso No Gaussiano NO Markoviano	32	105	0.0583	0.3344
Proceso No Gaussiano NO Markoviano	64	193	0.0015	0.0176
Proceso No Gaussiano NO Markoviano	128	284	5.15E-04	0.0089



4-21 Comparativo del número de muestras y error de reconstrucción en la simulación del Proceso No Gaussiano Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.



4-22 Comparativo del número de muestras y error de reconstrucción en la simulación del Proceso Gaussiano No No Markoviano para N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.



Capítulo 5 Conclusiones

La metodología del Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción de procesos aleatorios No Gaussianos basada en la Regla de la Esperanza Matemática Condicional nos permite obtener una reconstrucción óptima, la cual está sustentada por las principales características estadísticas de cada proceso aleatorio en estudio.

La Cuantificación-Reconstrucción sin muestreo previo es de fácil implementación con el algoritmos basado en la Regla de la Esperanza Matemática Condicional debido a que en dicho algoritmos el error de reconstrucción se puede calcular para cualquier separación entre muestras arbitrarias, estas sean o no equidistantes.

El algoritmo del PCR nos entrega la Función de Error de Reconstrucción con la cual podemos evaluar la calidad de la reconstrucción mediante el error máximo y el error promedio. Indirectamente, la calidad de la reconstrucción depende de la cantidad de muestras y la separación que se tenga entre ellas.

El PCR basado en la Regla de la esperanza matemática condicional nos permite realizar un tratamiento diferente a procesos caóticos que a procesos suaves (en este trabajo se analizaron los procesos Markovianos y No Markovianos), optimizando la cantidad de muestras que se obtienen. Indirectamente se puede tener una ventaja de ello ya que en sistemas de transmisión se reduce el ancho de banda requerido o bien, la cantidad de información a procesar.

Tenemos la posibilidad de determinar la calidad de reconstrucción mínima o deseada, y en base a ello determinar la cantidad de niveles que deben ser utilizados en el procedimiento de cuantización. Como ya se ha comentado, debemos de tener en cuenta la etapa posterior a la cuantización (codificación), ya que se tiene cierto compromiso con la cantidad de bits necesarios para la codificación de los niveles utilizados.

En base a la simulación de diferentes tipos de procesos aleatorios podemos realizar una comparativa del comportamiento de la función del Error de Reconstrucción. En primera instancia podemos realizar la comparación en base a su FDP ya que se revisaron tanto procesos Gaussianos como procesos No Gaussianos. También podemos observar la comparación de procesos suaves o caóticos pues se revisaron procesos Markovianos y No Markovianos.

En comparación, el error de reconstrucción de los procesos No Gaussianos es mayor que en la reconstrucción de los procesos Gaussianos, esto debido a que las muestras se distribuyen uniformemente en los procesos Gaussianos y en los procesos No Gaussianos las muestras se distribuyen solo en los valores más altos del proceso.

En comparación, los procesos Markovianos presentan un mayor error de reconstrucción que los procesos No Markovianos. Esto debido a que los procesos No Markovianos son más suaves en el dominio del tiempo lo cual nos dice que hay una mayor influencia de las muestras cercanas al tiempo de reconstrucción.



Gráficas comparativas de Error de reconstrucción por Números de Niveles.

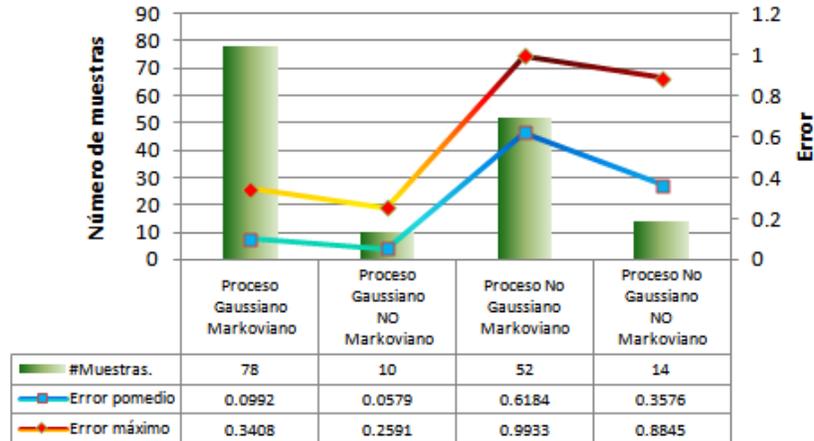


Figura 5-1 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=4.

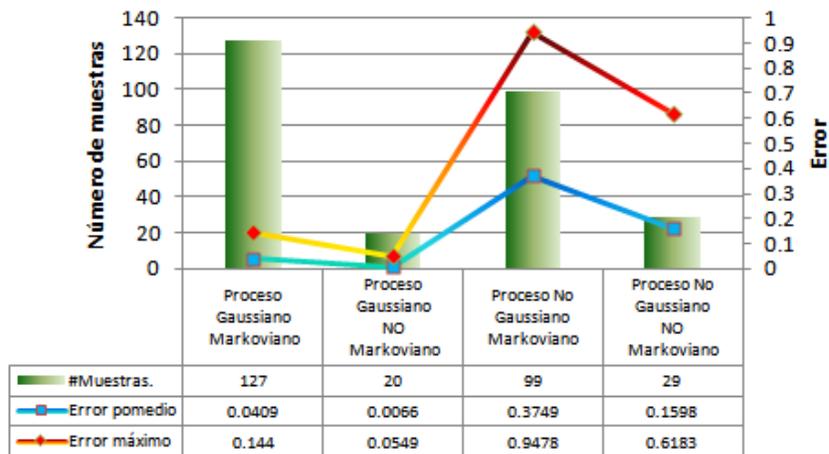


Figura 5-2 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=8.

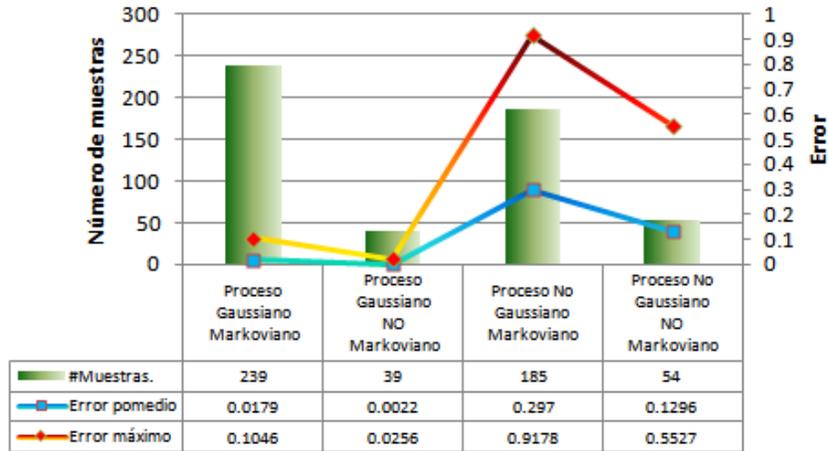


Figura 5-3 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=16.

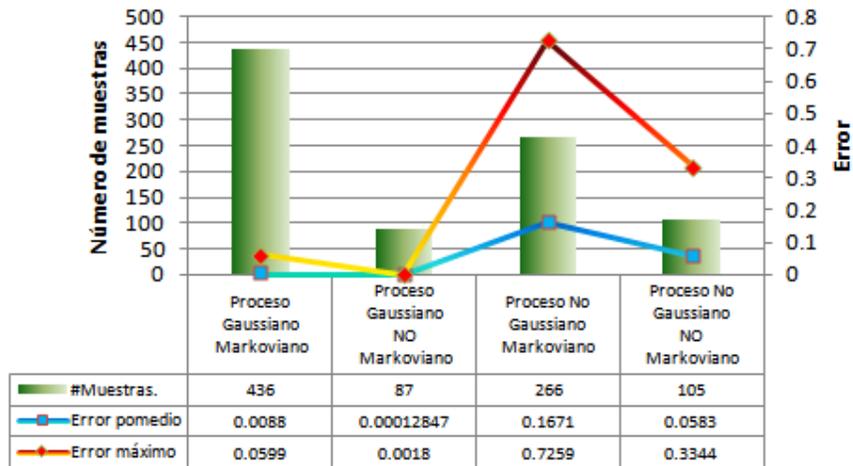


Figura 5-4 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=32.

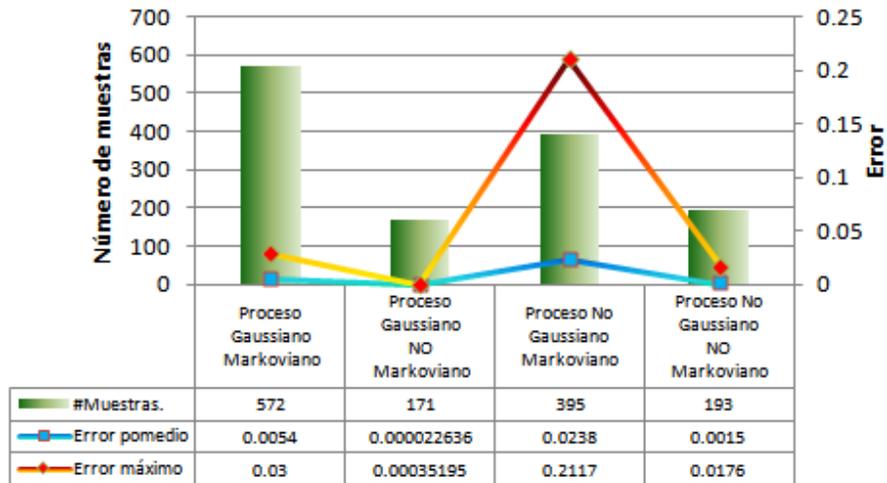


Figura 5-5 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=64.

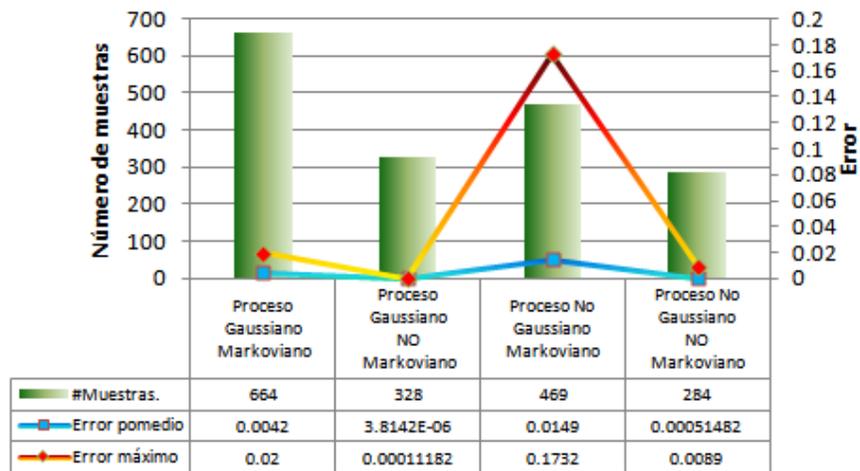
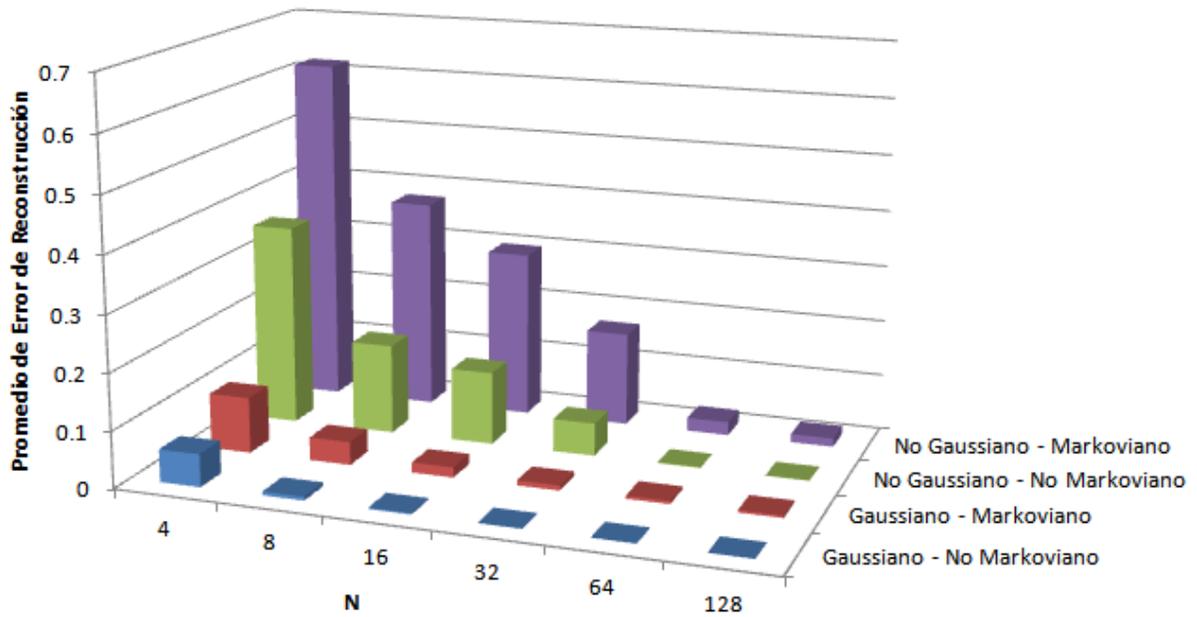


Figura 5-6 Comparativo de proceso Gaussinos y No Gaussianos, Markovianos y No Markovianos, para N=128.



	4	8	16	32	64	128
Gaussiano - No Markoviano	0.0579	0.0066	0.0022	0.00012847	0.000022636	3.8142E-06
Gaussiano - Markoviano	0.0992	0.0409	0.0179	0.0088	0.0054	0.0042
No Gaussiano - No Markoviano	0.3576	0.1598	0.1296	0.0583	0.0015	0.00051482
No Gaussiano - Markoviano	0.6184	0.3749	0.297	0.1671	0.0238	0.0149

Figura 5-7 Comparativo del Promedio Temporal del Error de Reconstrucción.



Tabla 5-1 Comparativo de Procesos Gaussianos y No Gaussianos, Procesos Markovianos y No Markovianos para valores de N=4, 8, 16, 32, 64 y 128.

Procesos			N=4	N=8	N=16	N=32	N=64	N=128
Proceso Gaussiano	Markovianos	#Muestras	78	127	239	436	572	664
		Error Promedio	0.0992	0.0409	0.0179	0.0088	0.0054	0.0042
		Error Máximo	0.3408	0.144	0.1046	0.0599	0.03	0.02
	No Markovianos	#Muestras	10	20	39	87	171	328
		Error Promedio	0.0579	0.0066	0.0022	1.28E-04	2.26E-05	3.81E-06
		Error Máximo	0.2591	0.0549	0.0256	0.0018	3.52E-04	1.12E-04
Proceso No Gaussiano.	Markovianos	#Muestras	52	99	185	266	395	469
		Error Promedio	0.6184	0.3749	0.297	0.1671	0.0238	0.0149
		Error Máximo	0.9933	0.9478	0.9178	0.7259	0.2117	0.1732
	No Markovianos	#Muestras	14	29	54	105	193	284
		Error Promedio	0.3576	0.1598	0.1296	0.0583	0.0015	5.15E-04
		Error Máximo	0.8845	0.6183	0.5527	0.3344	0.0176	0.0089

En la tabla anterior, se puede observar el resumen de todos los resultados obtenidos (promedios de error). Se ejemplifican tonalidades de color verde hacia tonos de color rojo indicando promedios de error menores a mayores respectivamente.



Recomendaciones y sugerencias para trabajos futuros.

1. Estudiar el comportamiento de la No Linealidad de Ae^{bx} , para diferentes valores de A y b.
2. Revisar procesos No Lineales Exponenciales con una tercera etapa de procesos No Markovianos.
3. Revisión del comportamiento con otras No linealidades como convertidores Polinomiales o procesos aleatorios de Rayleigh, etc.
4. Revisión de alternativas de distribución de niveles de cuantificación.
5. Realizar el estudio de asignación de códigos de la cuantificación de acuerdo a las propiedades estadísticas de los proceso.



Apéndices

A.- Código de programas utilizados.

Gráficas de la Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos a la salida del filtro RC de una Etapa.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% 12/01/2013 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% SEPI ESIME Zacatenco %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Hugo Antonio Castañeda Rufino %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc; clear all; close all;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Primera etapa
tSeparacionMuestras=.2;
%NumMuestras=5;
T=[0,2,4,6,8]
%T=[0,.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9,1,1.1];
Var=1; a=1;
sizeT=size(T);

%inicio=min(T)-((max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1));
%inicio=0;
inicio=-1.5;
%final=max(T)+((max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1));
%final=max(T);
final=9.5;
resolucion=((max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1))/100;
TiempoSimulacion=final-inicio

for i=1:1:sizeT(1,2)
    for j=1:sizeT(1,2)
        Kt(i,j)=Var*exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
    end
end

aij=inv(abs(Kt));
t=inicio:resolucion:final;

for x=1:1:(TiempoSimulacion/resolucion)+1
    Error(1,x)=1;
    for i=1:1:sizeT(1,2)
        for j=1:sizeT(1,2)
            Error(1,x)=Error(1,x)-...
                ((Var*exp(-a*abs(t(1,x)-T(1,i))))*...
                aij(i,j)*...
                (Var*exp(-a*abs(T(1,j)-t(1,x)))));
        end
    end
end

figure(2)
plot(t,Error)
title('Error de reconstrucción')
grid on

Promedio=mean(Error)

```



Gráficas de la Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos a la salida del filtro RC de dos etapas.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% 12/01/2013
%% SEPI ESIME Zacatenco
%% Hugo Antonio Castañeda Rufino
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc; clear all; close all;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%2a etapa
T1=[0, .5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5];
Var=1; a=2;
sizeT=size(T1);

%inicio=min(T1)-.3*( (max(T1)-min(T1))/(sizeT(1,2)-1))
%final=max(T1)+.3*( (max(T1)-min(T1))/(sizeT(1,2)-1))
inicio=-.2;
final=4.7;
resolucion=( (max(T1)-min(T1))/(sizeT(1,2)-1))/20;
TiempoSimulacion=final-inicio;

for i=1:1:sizeT(1,2)
    for j=1:sizeT(1,2)
        Kt(i,j)=(1+a*abs(T1(i)-T1(j)))*...
            exp(-a*abs(T1(i)-T1(j)));
    end
end

aij=inv(abs(Kt));
t1=inicio:resolucion:final;

for x=1:1:(TiempoSimulacion/resolucion)+1
    Error2(1,x)=1;
    for i=1:1:sizeT(1,2)
        for j=1:sizeT(1,2)
            Error2(1,x)=Error2(1,x)-...
                ( 1+a*abs(t1(1,x)-T1(1,i)) ) *...
                exp( -a*abs(t1(1,x)-T1(1,i)) ) *...
                aij(i,j) *...
                ( 1+a*abs(T1(1,j)-t1(1,x)) ) *...
                exp( -a*abs(T1(1,j)-t1(1,x)) );
        end
    end
end
s=size(Error2);
plot(t1(1:s(1,2)),Error2)
title('Error de reconstrucción')
grid on

```

Gráficas de la Función de Error de reconstrucción de procesos Gaussianos a la salida del filtro RC de tres etapas.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% 12/01/2013
%% SEPI ESIME Zacatenco
%% Hugo Antonio Castañeda Rufino
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc; clear all;

```



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%3ra etapa
T=[0, .5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5];
Var=1; a=8/3;
sizeT=size(T);

%inicio=min(T)-.2*( (max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1))
%final=max(T)+.2*( (max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1))
inicio=-.15;
final=4.65;
resolucion=( (max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1))/20
TiempoSimulacion=final-inicio

for i=1:1:sizeT(1,2)
    for j=1:sizeT(1,2)
        Kt(i,j)=(1+ a*abs(T(i)-T(j))+ ((a^2)*(T(i)-T(j))^2)/3 )*...
            exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
    end
end

aij=inv(abs(Kt));
t=inicio:resolucion:final;

for x=1:1:(TiempoSimulacion/resolucion)+1
    Error(1,x)=1;
    for i=1:1:sizeT(1,2)
        for j=1:sizeT(1,2)
            Error(1,x)=Error(1,x)-...
                (1+ a*abs(t(1,x)-T(i))+ ((a^2)*(t(1,x)-T(i))^2)/3 )*...
                exp(-a*abs(t(1,x)-T(i)))*...
                aij(i,j)*...
                (1+ a*abs(T(j)-t(1,x))+ ((a^2)*(T(j)-t(1,x))^2)/3 )*...
                exp(-a*abs(T(j)-t(1,x)));
        end
    end
end
s=size(Error)
plot(t(1:s(1,2)),Error)
title('Error de reconstrucción')
grid on

```

Simulaciones de Procesos Estocásticos:

```

#####
##### Instituto Politécnico Nacional #####
##### Sección de Estudio de Posgrado e Investigación (SEPI), ESIME Zacatenco #
#####

#####
##### "Procedimiento de Cuantización-Reconstrucción de procesos aleatorios #
##### No Gaussianos a la salida del convertidor No Lineal exponencial" #####
#####
##### Ing. Hugo Antonio Castañeda Rufino #####
##### Dr. Vladimir Kazakov #####
##### Dr. Daniel Rodríguez Saldaña #####
#####

clc; close all; clear all;
%Constantes
alfa=1;
Tsim=15; %Tiempo total de simulación
TiempoDetalleAux=7.5; %Tiempo para las gráficas 10, 11, 12 y 13
MuestrasPorSeg=100;
TsimDetalle=Tsim*.001; %Intervalos para observar detalles
TsimDetalle2=Tsim*.02;

```



```
TsimDetalle3=Tsim*.2;
TsimCov=4;           %Tiempo para la simulación de la funcion de covarianza
A=1; b=1;           %constantes de: A*e^bx
NumNiveles=8;       %Numero de niveles para la cuantización
                    NumNiveles=NumNiveles+1;

%Vector del tiempo
VectorTiempoSimulado=0:1/MuestrasPorSeg:Tsim;

%Simulación de Ruido Gaussiano:
%VectorRuidoGaussiano = randn(1, (Tsim*MuestrasPorSeg)+1); %Generación de muestras de RuidoBlanco
load VectorRuidoGaussianoVar.mat

%Simulación de Proceso Markoviano 1a Etapa:
ProcesoMarkoviano1E=zeros(1, (Tsim*MuestrasPorSeg)+1);
ProcesoMarkoviano1E(1,1)=VectorRuidoGaussiano(1,1);
Sigma=sqrt(1-exp(-2*alfa*(1/MuestrasPorSeg)));
for i=2:1:(Tsim*MuestrasPorSeg)
    ProcesoMarkoviano1E(1,i)=( ( exp(-alfa*(1/MuestrasPorSeg) ) ) * ...
        ( ProcesoMarkoviano1E(1,i-1) ) ) + ...
        ( Sigma*VectorRuidoGaussiano(1,i) ) );
end

%Simulación de Proceso NoMarkoviano 2a Etapa:
ProcesoNoMarkoviano2E=zeros(1, (Tsim*MuestrasPorSeg)+1);
auxalfa=6; factor=1.05;
a0=1-exp(-auxalfa*(1/MuestrasPorSeg)/2);
a1=(1-exp(-auxalfa*(1/MuestrasPorSeg)/2))*(exp(-auxalfa*(1/MuestrasPorSeg)/2));
b1=exp(-auxalfa*(1/MuestrasPorSeg));
ProcesoNoMarkoviano2E(1,1)=ProcesoMarkoviano1E(1,1);
for i=2:1:(Tsim*MuestrasPorSeg)
    ProcesoNoMarkoviano2E(1,i)=a0*ProcesoMarkoviano1E(1,i-1)+...
        a1*ProcesoMarkoviano1E(1,i-1)+...
        b1*ProcesoNoMarkoviano2E(1,i-1);
end
ProcesoNoMarkoviano2E=factor*ProcesoNoMarkoviano2E;

%FDP Gaussiana Teórica
AuxFDPGaussiana=-4:.01:4;
FDPGaussiana=1/sqrt(2*pi)*exp(-AuxFDPGaussiana.^2/2);

%Funcion de kovarianza 1 y 2 Etapas
%Funcion covarianza 1E
for i=1:TsimCov*MuestrasPorSeg
    FCovarianzaTeorica(1,i)=exp(-1*VectorTiempoSimulado(1,i));
end
%Funcion covarianza 2E
for i=1:TsimCov*MuestrasPorSeg
    FCovarianzaTeorica2(1,i)=(1+2*((i-1)*(1/MuestrasPorSeg)))*exp(-2*((i-1)*(1/MuestrasPorSeg)));
end

%Procesos Gaussianos markovianos 1Etapa a la salida del convertido exponencia Aexp(bx)
SalidaConvExpX1Etapa=A*exp(ProcesoMarkoviano1E.*b);

%Funcion inversa al convertidor No Lineal (Entrada 1Etapa)----> reconstruccion a gaussiano
ReconstruccionInv=log(SalidaConvExpX1Etapa/b)/A;

%Procesos Gaussianos NO markovianos 2Etapas a la salida del convertido exponencia Aexp(bx)
SalidaConvExpX2Etapa=A*exp(ProcesoNoMarkoviano2E.*b);

%Funcion inversa al convertidor No Lineal (Entrada 2Etapas) ----> reconstruccion a gaussiano
ReconstruccionInv2E=log(SalidaConvExpX2Etapa/b)/A;

%Markoviano1E::: Calcular Cruces por los N niveles del proceso Markoviano1E (Todo el tiempo simulado)
TamNivel=((max(ProcesoMarkoviano1E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)))-
(min(ProcesoMarkoviano1E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))))/(NumNiveles-1);

N=min(ProcesoMarkoviano1E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)):TamNivel:max(ProcesoMarkoviano1E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg));

%Se calcula el nivel de cada instante de tiempo
for i=1:1:Tsim*MuestrasPorSeg
    for Ni=1:1:NumNiveles
        if (ProcesoMarkoviano1E(1,i)<=N(1,Ni))
            Nivel(1,i)=N(1,Ni); %Se asigna un nivel en cada instante t
            break
        end
    end
end
end
%Se calcula el cambios de un nivel a otro
```



```
CruceNivel(2,1)=Nivel(1,1);
j=2;
for i=2:1:Tsim*MuestrasPorSeg
    if (Nivel(1,i)>Nivel(1,i-1)) %Si el nivel actual es mayor al anterior
        CruceNivel(1,j)=VectorTiempoSimulado(1,i); %Tiempo
        CruceNivel(2,j)=Nivel(1,i-1); %Nivel
        %CruceNivel(2,j)=ProcesoMarkoviano1E(1,i-1);
        j=j+1;
    else
        if (Nivel(1,i)<Nivel(1,i-1)) %Si el nivel actual es menor a ant
            CruceNivel(1,j)=VectorTiempoSimulado(1,i);
            CruceNivel(2,j)=Nivel(1,i);
            %CruceNivel(2,j)=ProcesoMarkoviano1E(1,i);
            j=j+1;
        else
            end
        end
    end
end
%Se obtienen datos de interes:
MuestrasCuantizacionMarkoviano1E=CruceNivel;
%Calcular separacion entre muestras:
SizeA=size(MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(1,:));
VectorIntervaloCrucesMarkoviano1E=MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(1,:)-
([0,MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(1,1:SizeA(1,2)-1)]);
%Calcular algunas características sobre el vector de tiempos de separacion entre muestras
del proceso Markoviano de 1 Etapa
maxTiempoEntreMuestrasPMarkoviano1E=max(VectorIntervaloCrucesMarkoviano1E);
%Valor tiempo maximo de separación entre muestras
meanTiempoEntreMuestrasPMarkoviano1E=mean(VectorIntervaloCrucesMarkoviano1E);
%Valor de tiempo promedio de separación entre muestras
SizeTiempoEntreMuestrasPMarkoviano1E=size(VectorIntervaloCrucesMarkoviano1E);
%Número de cruces
clear CruceNivel;

%NO Markoviano2E:::Calcular Cruces por los N niveles del proceso NO Markoviano2E
(Todo el tiempo simulado)
TamNivel=((max(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)))-
(min(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))))/(NumNiveles-1);

N=min(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)):TamNivel:max(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:Tsim*Muestra
sPorSeg));
%Se calcula el nivel de cada instante de tiempo
for i=1:1:Tsim*MuestrasPorSeg
    for Ni=1:1:NumNiveles
        if (ProcesoNoMarkoviano2E(1,i)<=N(1,Ni))
            Nivel(1,i)=N(1,Ni); %Se asigna un nivel en cada instante t
            break
        end
    end
end
%Se calcula el cambios de un nivel a otro
CruceNivel(2,1)=Nivel(1,1);
j=2;
for i=2:1:Tsim*MuestrasPorSeg
    if (Nivel(1,i)>Nivel(1,i-1)) %Si el nivel actual es mayor al anterior
        CruceNivel(1,j)=VectorTiempoSimulado(1,i); %Tiempo
        CruceNivel(2,j)=Nivel(1,i-1); %Nivel
        %CruceNivel(2,j)=ProcesoMarkoviano1E(1,i-1);
        j=j+1;
    else
        if (Nivel(1,i)<Nivel(1,i-1)) %Si el nivel actual es menor al
            CruceNivel(1,j)=VectorTiempoSimulado(1,i);
            CruceNivel(2,j)=Nivel(1,i);
            %CruceNivel(2,j)=ProcesoMarkoviano1E(1,i);
            j=j+1;
        else
            end
        end
    end
end
%Se obtienen datos de interes:
MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E=CruceNivel;
%Calcular separacion entre muestras:
SizeA=size(MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(1,:));
VectorIntervaloCrucesNOMarkoviano2E=MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(1,:)-
([0,MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(1,1:SizeA(1,2)-1)]);
%Calcular algunas características sobre el vector de tiempos de separacion entre muestras del
proceso Markoviano de 1 Etapa
maxTiempoEntreMuestrasPNOMarkoviano2E=max(VectorIntervaloCrucesNOMarkoviano2E); %Valor
tiempo maximo de separación entre muestras
```



```
meanTiempoEntreMuestrasPNOMarkoviano2E=mean(VectorIntervaloCrucesNOMarkoviano2E); %Valor
de tiempo promedio de separación entre muestras
SizeTiempoEntreMuestrasPNOMarkoviano2E=size(VectorIntervaloCrucesNOMarkoviano2E); %Número
de cruces
clear CruceNivel;

%SalidaConvExpX1Etapa::::Calcular Cruces por los N niveles del proceso SalidaConvExpX1Etapa (Todo el
tiempo simulado)
TamNivel=((max(SalidaConvExpX1Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))-
(min(SalidaConvExpX1Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))))/(NumNiveles-1);
N=min(SalidaConvExpX1Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)):TamNivel:max(SalidaConvExpX1Etapa(1,1:Tsim*MuestrasP
orSeg));
%Se calcula el nivel de cada instante de tiempo
for i=1:1:Tsim*MuestrasPorSeg
for Ni=1:1:NumNiveles
if (SalidaConvExpX1Etapa(1,i)<=N(1,Ni))
Nivel(1,i)=N(1,Ni); %Se asigna un nivel en cada instante.
break
end
end
end
%Se calcula el cambios de un nivel a otro
CruceNivel(2,1)=Nivel(1,1);
j=2;
for i=2:1:Tsim*MuestrasPorSeg
if (Nivel(1,i)>Nivel(1,i-1)) %Si el nivel actual es mayor al anterior.
CruceNivel(1,j)=VectorTiempoSimulado(1,i); %Tiempo
CruceNivel(2,j)=Nivel(1,i-1); %Nivel
%CruceNivel(2,j)=ProcesoMarkoviano1E(1,i-1);
j=j+1;
else
if (Nivel(1,i)<Nivel(1,i-1)) %Si el nivel actual es menor al
CruceNivel(1,j)=VectorTiempoSimulado(1,i);
CruceNivel(2,j)=Nivel(1,i);
%CruceNivel(2,j)=ProcesoMarkoviano1E(1,i);
j=j+1;
else
end
end
end
%Se obtienen datos de interes:
MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa=CruceNivel;
%Calcular separacion entre muestras:
SizeA=size(MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(1,:));
VectorIntervaloCrucesSalidaConvExpX1Etapa=MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(1,:)-
([0,MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(1,1:SizeA(1,2)-1)]);
%Calcular algunas características sobre el vector de tiempos de separacion entre muestras del
proceso Markoviano de 1 Etapa
maxTiempoEntreMuestrasSalidaConvExpX1Etapa=max(VectorIntervaloCrucesSalidaConvExpX1Etapa);
%Valor tiempo maximo de separación entre muestras
meanTiempoEntreMuestrasSalidaConvExpX1Etapa=mean(VectorIntervaloCrucesSalidaConvExpX1Etapa);
%Valor de tiempo promedio de separación entre muestras
SizeTiempoEntreMuestrasSalidaConvExpX1Etapa=size(VectorIntervaloCrucesSalidaConvExpX1Etapa);
%Número de cruces
clear CruceNivel;

%SalidaConvExpX2Etapa::::Calcular Cruces por los N niveles del proceso SalidaConvExpX1Etapa (Todo el
tiempo simulado)
TamNivel=((max(SalidaConvExpX2Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))-
(min(SalidaConvExpX2Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))))/(NumNiveles-1);
N=min(SalidaConvExpX2Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)):TamNivel:max(SalidaConvExpX2Etapa(1,1:Tsim*MuestrasP
orSeg));
%Se calcula el nivel de cada instante de tiempo
for i=1:1:Tsim*MuestrasPorSeg
for Ni=1:1:NumNiveles
if (SalidaConvExpX2Etapa(1,i)<=N(1,Ni))
Nivel(1,i)=N(1,Ni); %Se asigna un nivel en cada instante t
break
end
end
end
end
```



```
%Se calcula el cambios de un nivel a otro
CruceNivel(2,1)=Nivel(1,1);
j=2;
for i=2:1:Tsim*MuestrasPorSeg
    if (Nivel(1,i)>Nivel(1,i-1)) %Si el nivel actual es mayor al anterior (-
        CruceNivel(1,j)=VectorTiempoSimulado(1,i); %Tiempo
        CruceNivel(2,j)=Nivel(1,i-1); %Nivel
        %CruceNivel(2,j)=ProcesoMarkoviano1E(1,i-1);
        j=j+1;
    else
        if (Nivel(1,i)<Nivel(1,i-1)) %Si el nivel actual es menor al
            CruceNivel(1,j)=VectorTiempoSimulado(1,i);
            CruceNivel(2,j)=Nivel(1,i);
            %CruceNivel(2,j)=ProcesoMarkoviano1E(1,i);
            j=j+1;
        else
            end
        end
    end
end
%Se obtienen datos de interes:
MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa=CruceNivel;
%Calcular separacion entre muestras:
SizeA=size(MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(1,:));
VectorIntervaloCrucesSalidaConvExpX2Etapa=MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(1,:)-
([0,MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(1,1:SizeA(1,2)-1)]);
%Calcular algunas características sobre el vector de tiempos de separacion entre muestras del
proceso Markoviano de 1 Etapa

maxTiempoEntreMuestrasSalidaConvExpX2Etapa=max(VectorIntervaloCrucesSalidaConvExpX2Etapa);
%Valor tiempo maximo de separación entre muestras

meanTiempoEntreMuestrasSalidaConvExpX2Etapa=mean(VectorIntervaloCrucesSalidaConvExpX2Etapa);
%Valor de tiempo promedio de separación entre muestras

SizeTiempoEntreMuestrasSalidaConvExpX2Etapa=size(VectorIntervaloCrucesSalidaConvExpX2Etapa);
%Número de cruces
clear CruceNivel;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% GRAFICAS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Figure(1) %Gráficar el Ruido Blanco Gaussiano (realización & FDP) a diferentes tiempos.
subplot(3,2,1)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg));
    grid on
    subplot(3,2,2)
    [h,ejex]=hist(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
    deltax=(max(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg))-
    min(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
    area=TsimDetalle*MuestrasPorSeg*deltax;
    fx=h/area;
    bar(ejex, fx);
    [Nj
    abcisax]=hist(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
    grid on
    hold on
    plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
    grid on
    hold off
    subplot(3,2,3)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg));
    grid on
    subplot(3,2,4)
    [h,ejex]=hist(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
    deltax=(max(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg))-
    min(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
    area=TsimDetalle2*MuestrasPorSeg*deltax;
    fx=h/area;
    bar(ejex, fx);
    [Nj
    abcisax]=hist(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
    grid on
    hold on
    plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
    grid on
```



```
        hold off
        subplot(3,2,5)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle3*Muestras
PorSeg));

        grid on
        subplot(3,2,6)
        [h,ejex]=hist(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
        deltax=(max(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg))-
min(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
        area=TsimDetalle3*MuestrasPorSeg*deltax;
        fx=h/area;
        bar(ejex, fx);
        [Nj
abcisax]=hist(VectorRuidoGaussiano(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
        grid on
        hold on
        plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
        grid on
        hold off
figure(2) %Gráficar el Ruido Blanco Gaussiano (realización & FDP) Todo el tiempo simulado
        subplot(2,2,1:2)
        plot(VectorTiempoSimulado,VectorRuidoGaussiano);
        grid on
        subplot(2,2,3:4)
        [h,ejex]=hist(VectorRuidoGaussiano,NumBarrasHist);
        deltax=(max(VectorRuidoGaussiano)-min(VectorRuidoGaussiano))/NumBarrasHist;
        area=Tsim*MuestrasPorSeg*deltax;
        fx=h/area;
        bar(ejex, fx);
        [Nj abcisax]=hist(VectorRuidoGaussiano,NumBarrasHist);
        grid on
        hold on
        plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
        grid on
        hold off
figure(3) %Gráficar el Proceso Markoviano 1 Etapa (realización & FDP) Tiempos de detalle
        subplot(3,2,1)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPor
Seg));

        grid on
        subplot(3,2,2)
        [h,ejex]=hist(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
        deltax=(max(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg))-
min(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
        area=TsimDetalle*MuestrasPorSeg*deltax;
        fx=h/area;
        bar(ejex, fx);
        [Nj abcisax]=hist(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
        grid on
        hold on
        AuxFDPGaussiana=-4:.01:4;
        FDPGaussiana=1/sqrt(2*pi)*exp(-AuxFDPGaussiana.^2/2);
        plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
        grid on
        hold off
        subplot(3,2,3)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasP
orSeg));

        grid on
        subplot(3,2,4)
        [h,ejex]=hist(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
        deltax=(max(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg))-
min(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
        area=TsimDetalle2*MuestrasPorSeg*deltax;
        fx=h/area;
        bar(ejex, fx);
        [Nj
abcisax]=hist(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
        grid on
        hold on
        AuxFDPGaussiana=-4:.01:4;
        FDPGaussiana=1/sqrt(2*pi)*exp(-AuxFDPGaussiana.^2/2);
        plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
        grid on
        hold off
        subplot(3,2,5)
```



```
plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg));
    grid on
    subplot(3,2,6)
    [h,ejex]=hist(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
    deltax=(max(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg))-min(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
    area=TsimDetalle3*MuestrasPorSeg*deltax;
    fx=h/area;
    bar(ejex, fx);
    [Nj abcisax]=hist(ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
    grid on
    hold on
    AuxFDPGaussiana=-4:.01:4;
    FDPGaussiana=1/sqrt(2*pi)*exp(-AuxFDPGaussiana.^2/2);
    plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
    grid on
    hold off
figure(4) %Gráficar el Ruido Blanco Gaussiano (realización & FDP) Todo el tiempo simulado
    subplot(2,2,1:2)
    plot(VectorTiempoSimulado,ProcesoMarkoviano1E);
    grid on
    subplot(2,2,3:4)
    [h,ejex]=hist(ProcesoMarkoviano1E,NumBarrasHist);
    deltax=(max(ProcesoMarkoviano1E)-min(ProcesoMarkoviano1E))/NumBarrasHist;
    area=Tsim*MuestrasPorSeg*deltax;
    fx=h/area;
    bar(ejex, fx);
    [Nj abcisax]=hist(ProcesoMarkoviano1E,NumBarrasHist);
    grid on
    hold on
    plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
    grid on
    hold off
figure(5)
    %Gráficas de las funciones de covarianzas de proceso Markoviano a la salida de la Etapa en diferentes tiempo de detalles
    subplot(4,1,1)
    for j=1:TsimCov*MuestrasPorSeg+1
        for i=1:(TsimDetalle*MuestrasPorSeg)-(j-1)
            AuxR(1,i)=(ProcesoMarkoviano1E(1,i))*(ProcesoMarkoviano1E(1,i+(j-1)));
        end
        fcovarianza(1,j)=mean(AuxR);
    end

    plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),fcovarianza(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),'LineWidth',2)

    hold on
    plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),FCovarianzaTeorica,'--r')
    hold off
    grid on
    subplot(4,1,2)
    for j=1:TsimCov*MuestrasPorSeg+1
        for i=1:(TsimDetalle2*MuestrasPorSeg)-(j-1)
            AuxR(1,i)=(ProcesoMarkoviano1E(1,i))*(ProcesoMarkoviano1E(1,i+(j-1)));
        end
        fcovarianza(1,j)=mean(AuxR);
    end

    plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),fcovarianza(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),'LineWidth',2)

    grid on
    hold on
    plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),FCovarianzaTeorica,'--r')
    hold off
    subplot(4,1,3)
    for j=1:TsimCov*MuestrasPorSeg+1
        for i=1:(TsimDetalle3*MuestrasPorSeg)-(j-1)
            AuxR(1,i)=(ProcesoMarkoviano1E(1,i))*(ProcesoMarkoviano1E(1,i+(j-1)));
        end
        fcovarianza(1,j)=mean(AuxR);
    end

    plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),fcovarianza(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),'LineWidth',2)

    grid on
    hold on
    plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),FCovarianzaTeorica,'--r')
```



```
hold off
subplot(4,1,4)
for j=1:TsimCov*MuestrasPorSeg+1
for i=1:(Tsim*MuestrasPorSeg)-(j-1)
AuxR(1,i)=(ProcesoMarkoviano1E(1,i))*(ProcesoMarkoviano1E(1,i+(j-1)));
end
fcovarianza(1,j)=mean(AuxR);
end

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),fcovarianza(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),'LineWidth',2)

hold on
plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),FCovarianzaTeorica,'--r')
hold off
grid on
figure(6) %Gráficar Proceso NO Markoviano a la salida de la 2a Etapa, realizaciones y FDP a diferentes
tiempos de detalle
subplot(3,2,1)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg));
grid on
subplot(3,2,2)
[h,ejex]=hist(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
deltax=(max(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg))-min(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
area=TsimDetalle*MuestrasPorSeg*deltax;
fx=h/area;
bar(ejex, fx);
[Nj
abcisax]=hist(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
grid on
hold on
plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
grid on
hold off
subplot(3,2,3)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg));
grid on
subplot(3,2,4)
[h,ejex]=hist(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
deltax=(max(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg))-min(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
area=TsimDetalle2*MuestrasPorSeg*deltax;
fx=h/area;
bar(ejex, fx);
[Nj
abcisax]=hist(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
grid on
hold on
plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
grid on
hold off
subplot(3,2,5)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg));
grid on
subplot(3,2,6)
[h,ejex]=hist(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
deltax=(max(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg))-min(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg)))/NumBarrasHist;
area=TsimDetalle3*MuestrasPorSeg*deltax;
fx=h/area;
bar(ejex, fx);
[Nj
abcisax]=hist(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),NumBarrasHist);
grid on
hold on
plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
grid on
hold off
figure(7)
%Gráficar Proceso NO Markoviano a la salida de la 2a Etapa, realizaciones y FDP todo e tiempo simulado
subplot(2,2,1:2)
plot(VectorTiempoSimulado,ProcesoNoMarkoviano2E);
grid on
```



```
subplot(2,2,3:4)
[h,ejex]=hist(ProcesoNoMarkoviano2E,NumBarrasHist);
deltax=(max(ProcesoNoMarkoviano2E)-min(ProcesoNoMarkoviano2E))/NumBarrasHist;
area=Tsim*MuestrasPorSeg*deltax;
fx=h/area;
bar(ejex, fx);
[Nj abcisax]=hist(ProcesoNoMarkoviano2E,NumBarrasHist);
grid on
hold on
plot(AuxFDPGaussiana,FDPGaussiana,'r','LineWidth',2)
grid on
hold off

figure(8)
%Gráficas de las funciones de covarianzas de proceso NO Markoviano a la salida de 2a Etapa en
diferentes tiempo de detalles
subplot(4,1,1)
for j=1:TsimCov*MuestrasPorSeg+1
for i=1:(TsimDetalle*MuestrasPorSeg)-(j-1)
AuxR(1,i)=(ProcesoNoMarkoviano2E(1,i))*(ProcesoNoMarkoviano2E(1,i+(j-1)));
end
fcovarianza(1,j)=mean(AuxR);
end

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),fcovarianza(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),'LineWi
dth',2)

hold on
plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),FCovarianzaTeorica2,'--r')
hold off
grid on
subplot(4,1,2)
for j=1:TsimCov*MuestrasPorSeg+1
for i=1:(TsimDetalle2*MuestrasPorSeg)-(j-1)
AuxR(1,i)=(ProcesoNoMarkoviano2E(1,i))*(ProcesoNoMarkoviano2E(1,i+(j-1)));
end
fcovarianza(1,j)=mean(AuxR);
end

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),fcovarianza(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),'LineWidth'
,2)

grid on
hold on
plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),FCovarianzaTeorica2,'--r')
hold off
subplot(4,1,3)
for j=1:TsimCov*MuestrasPorSeg+1
for i=1:(TsimDetalle3*MuestrasPorSeg)-(j-1)
AuxR(1,i)=(ProcesoNoMarkoviano2E(1,i))*(ProcesoNoMarkoviano2E(1,i+(j-1)));
end
fcovarianza(1,j)=mean(AuxR);
end

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),fcovarianza(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),'LineWidth'
,2)

grid on
hold on
plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),FCovarianzaTeorica2,'--r')
hold off
subplot(4,1,4)
for j=1:TsimCov*MuestrasPorSeg+1
for i=1:(Tsim*MuestrasPorSeg)-(j-1)
AuxR(1,i)=(ProcesoNoMarkoviano2E(1,i))*(ProcesoNoMarkoviano2E(1,i+(j-1)));
end
fcovarianza(1,j)=mean(AuxR);
end

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),fcovarianza(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),'LineWidth'
,2)

hold on
plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimCov*MuestrasPorSeg),FCovarianzaTeorica2,'--r')
hold off
grid on

figure(9) %Gráficar los procesos gaussianos (1a Etapa) cuando son pasados por el convertidor NO Lineal y
cuando se reconstruyen
%Proceso Markoviano 1a Etapa:
subplot(3,3,1)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle3*MuestrasP
orSeg))

subplot(3,3,4)
```



```
plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg))
    subplot(3,3,7)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),ProcesoMarkoviano1E(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg))
    %Proceso Markoviano la Etapa-Conv Exponencial:
    subplot(3,3,2)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),SalidaConvExpX1Etapa(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg))
    subplot(3,3,5)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),SalidaConvExpX1Etapa(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg))
    subplot(3,3,8)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),SalidaConvExpX1Etapa(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg))
    %Proceso Markoviano la Etapa-Conv Exponencial-Reconstrucción:
    subplot(3,3,3)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg),ReconstruccionInv(1,1:TsimDetalle3*MuestrasPorSeg))
    subplot(3,3,6)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg),ReconstruccionInv(1,1:TsimDetalle2*MuestrasPorSeg))
    subplot(3,3,9)

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg),ReconstruccionInv(1,1:TsimDetalle*MuestrasPorSeg))

figure(10) %Gráficas del Proceso Markoviano 1E: Original, Cruces por Niveles y Función de Error en PCR
(Tiempo indicado en TiempoDetalleAux)
    %Tiempo para graficar a detalle sugerido
    %TiempoDetalleAux=8;
    for in=1:1:SizeTiempoEntreMuestrasPMarkoviano1E(1,2)
        if ( MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(1,in)>= TiempoDetalleAux )
            %Calcular cual muestra corresponde al intervalo de tiempo original
            break
        end
    end
    TiempoDetalleAux=MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(1,in );
    %Solo nos interesa hasta la ultima muestra del tiempo indicado
    subplot(3,1,1)
        %Graficar señal original

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TiempoDetalleAux*MuestrasPorSeg),ProcesoMarkoviano1E(1,1:TiempoDetalleAux*MuestrasPorSeg),'LineWidth',2)
    hold on
    %Graficar los Niveles
    TamNivel=(max(ProcesoMarkoviano1E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))-min(ProcesoMarkoviano1E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)))/(NumNiveles-1);
N=min(ProcesoMarkoviano1E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)):TamNivel:max(ProcesoMarkoviano1E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg));
    for i=1:1:NumNiveles
        plot([0,MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(1,in)],[N(i),N(i)],'--g','LineWidth',1.5)
        hold on
    end
    %Graficar los cruces por los niveles

plot(MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(1,1:in),MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(2,1:in),'*r')
    hold off
subplot(3,1,2) %Error de reconstrucción.
T=MuestrasCuantizacionMarkoviano1E(1,1:in);
Var=1; a=1;
sizeT=size(T);
    inicio=0; final=max(T); resolucion=((max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1))/10;
    for i=1:1:sizeT(1,2)
        for j=1:sizeT(1,2)
            Kt(i,j)=Var*exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
        end
    end
    aij=inv(abs(Kt));
    t2=inicio:resolucion:final;
    for x=1:1:(TiempoDetalleAux/resolucion)+1
```



```

Error(1,x)=1;
for i=1:1:sizeT(1,2)
    for j=1:sizeT(1,2)
        Error(1,x)=Error(1,x)-...
            ((Var*exp(-a*abs(t2(1,x)-T(1,i))))*...
            aij(i,j)*...
            (Var*exp(-a*abs(T(1,j)-t2(1,x)))));
    end
end
end
plot(t2,Error,'r','LineWidth',1.1)
grid on
title('Error de reconstrucción')
MaxErrorGauss1Etapa=max(Error)
MeanErrorGauss1Etapa=mean(Error); clear Error;

figure(11) %Gráficas del Proceso NO Markoviano 2E: Original, Cruces por Niveles y Función de Error en PCR
(Tiempo indicado en TiempoDetalleAux)
%Tiempo para graficar a detalle sugerido
%TiempoDetalleAux=8;
for in=1:1:SizeTiempoEntreMuestrasPNOMarkoviano2E(1,2)
    if ( MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(1,in)>=
TiempoDetalleAux ) %Calcular cual muestra corresponde al intervalo de tiempo original
        break
    end
end
TiempoDetalleAux=MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(1,in );
%Solo nos interesa hasta la ultima muestra del tiempo indicado
subplot(3,1,1)
%Gráficar señal original

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TiempoDetalleAux*MuestrasPorSeg),ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:TiempoDetalleAux
*MuestrasPorSeg),'LineWidth',2)
hold on
%Gráficar los Niveles
TamNivel=(max(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))-
(min(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))))/(NumNiveles-1);
N=min(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)):TamNivel:max(ProcesoNoMarkoviano2E(1,1:Tsim*Muestra
sPorSeg));
for i=1:1:NumNiveles
    plot([0,MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(1,in)],[N(i),N(i)],'--
g','LineWidth',1.5)
    hold on
end
%Gráficar los cruces por los niveles

plot(MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(1,1:in),MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(2,1:in),'*r')
hold off
subplot(3,1,2) %Error de reconstrucción.
T=MuestrasCuantizacionNOMarkoviano2E(1,1:in);
Var=1; a=1;
sizeT=size(T);
inicio=0; final=max(T); resolucion=(max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1)/35;
for i=1:1:sizeT(1,2)
    for j=1:sizeT(1,2)
        Kt(i,j)=Var*exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
    end
end
aij=inv(abs(Kt));
t2=inicio:resolucion:final;
for x=1:1:(TiempoDetalleAux/resolucion)+1
    Error(1,x)=1;
    for i=1:1:sizeT(1,2)
        for j=1:sizeT(1,2)
            Error(1,x)=Error(1,x)-...
                ((Var*exp(-a*abs(t2(1,x)-T(1,i))))*...
                aij(i,j)*...
                (Var*exp(-a*abs(T(1,j)-t2(1,x)))));
        end
    end
end
if(length(t2)>length(Error))
    t2=t2(1:length(Error));
else
    end
end
plot(t2,Error,'r','LineWidth',1.1)
grid on
title('Error de reconstrucción')
MaxErrorGauss2Etapas=max(Error)

```



```
MeanErrorGauss2Etapas=mean(Error)
clear Error;

figure(12) %Gráficas del Proceso Markoviano 1E->NoLinealidad: Original, Cruces por Niveles y Función de
Error en PCR (Tiempo indicado en TiempoDetalleAux)
    %Tiempo para graficar a detalle sugerido
    %TiempoDetalleAux=8;
    for in=1:1:SizeTiempoEntreMuestrasSalidaConvExpX1Etapa(1,2)
        if ( MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(1,in)>= TiempoDetalleAux )
            %Calcular cual muestra corresponde al intervalo de tiempo original
            break
        end
    end
    TiempoDetalleAux=MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(1,in );
    %Solo nos interesa hasta la ultima muestra del tiempo indicado
    subplot(3,1,1)
        %Gráficar señal original

plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TiempoDetalleAux*MuestrasPorSeg), SalidaConvExpX1Etapa(1,1:TiempoDetalleAux*
MuestrasPorSeg), 'LineWidth',2)
    hold on
    %Gráficar los Niveles
    TamNivel=( (max(SalidaConvExpX1Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)))-
(min(SalidaConvExpX1Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg))))/(NumNiveles-1);
N=min(SalidaConvExpX1Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)):TamNivel:max(SalidaConvExpX1Etapa(1,1:Tsim*MuestrasP
orSeg));
    for i=1:1:NumNiveles
        plot([0,MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(1,in)], [N(i),N(i)], '--
g', 'LineWidth',1.5)
    end
    %Gráficar los cruces por los niveles

plot(MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(1,1:in), MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(2,1:in), '*
r')
    hold off
    subplot(3,1,2) %Error de reconstrucción.
    T=MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX1Etapa(1,1:in);
    Var=1; a=1;
    sizeT=size(T);
    inicio=0; final=max(T); resolucion=( (max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1))/20;
    for i=1:1:sizeT(1,2)
        for j=1:sizeT(1,2)
            Kt(i,j)=Var*exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
        end
    end
    ai=inv(abs(Kt));
    t2=inicio:resolucion:final;
    for x=1:1:(TiempoDetalleAux/resolucion)+1
        Error(1,x)=1;
        for i=1:1:sizeT(1,2)
            for j=1:sizeT(1,2)
                Error(1,x)=Error(1,x)-...
                    ((Var*exp(-a*abs(t2(1,x)-T(1,i))))*...
                    ai(j,i))*...
                    (Var*exp(-a*abs(T(1,j)-t2(1,x)))));
            end
        end
    end
    plot(t2,Error,'r','LineWidth',1.1)
    grid on
    title('Error de reconstrucción')
MaxErrorNoGauss1Etapa=max(Error)
MeanErrorNoGauss1Etapa=mean(Error)
clear Error;

figure(13)
    %Gráficas del Proceso NO Markoviano 2E->NoLinealidad: Original, Cruces por Niveles y Función de
Error en PCR (Tiempo indicado en TiempoDetalleAux)
    %Tiempo para graficar a detalle sugerido
    %TiempoDetalleAux=8;
    for in=1:1:SizeTiempoEntreMuestrasSalidaConvExpX2Etapa(1,2)
        if ( MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(1,in)>= TiempoDetalleAux )
            %Calcular cual muestra corresponde al intervalo de tiempo original
            break
        end
    end
    TiempoDetalleAux=MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(1,in );
    %Solo nos interesa hasta la ultima muestra del tiempo indicado
```



```
subplot(3,1,1)
    %Gráficoar señal original
plot(VectorTiempoSimulado(1,1:TiempoDetalleAux*MuestrasPorSeg), SalidaConvExpX2Etapa(1,1:TiempoDetalleAux*
MuestrasPorSeg), 'LineWidth',2)
    hold on
    %Gráficoar los Niveles
    TamNivel= (max(SalidaConvExpX2Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)) -
(min(SalidaConvExpX2Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)))/(NumNiveles-1);
N=min(SalidaConvExpX2Etapa(1,1:Tsim*MuestrasPorSeg)):TamNivel:max(SalidaConvExpX2Etapa(1,1:Tsim*MuestrasP
orSeg));
    for i=1:1:NumNiveles
        plot([0,MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(1,in)], [N(i),N(i)], '--
g', 'LineWidth',1.5)
    end
    hold on
    %Gráficoar los cruces por los niveles
plot(MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(1,1:in),MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(2,1:in), '*
r')
    hold off
subplot(3,1,2) %Error de reconstrucción.
T=MuestrasCuantizacionSalidaConvExpX2Etapa(1,1:in);
Var=1; a=1;
sizeT=size(T);
    inicio=0; final=max(T); resolucion=(max(T)-min(T))/(sizeT(1,2)-1)/35;
    for i=1:1:sizeT(1,2)
        for j=1:sizeT(1,2)
            Kt(i,j)=Var*exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
        end
    end
    aij=inv(abs(Kt));
    t2=inicio:resolucion:final;
    for x=1:1:(TiempoDetalleAux/resolucion)+1
        Error(1,x)=1;
        for i=1:1:sizeT(1,2)
            for j=1:sizeT(1,2)
                Error(1,x)=Error(1,x)-...
                    ((Var*exp(-a*abs(t2(1,x)-T(1,i))))*...
                    aij(i,j)*...
                    (Var*exp(-a*abs(T(1,j)-t2(1,x)))));
            end
        end
    end
    plot(t2,Error,'r','LineWidth',1.1)
    grid on
    title('Error de reconstrucción')

MaxErrorNoGauss2Etapas=max(Error)
MeanErrorNoGauss2Etapas=mean(Error)
clear Error;
```



B.- Artículos y ponencias:



Estudio del Error de Reconstrucción del PCR de Realizaciones de Procesos Aleatorios a la salida del Convertidor Exponencial afectado con Proceso Markoviano Gaussiano

México D.F., 11 al 15 de Noviembre 2013

V. Kazakov, H. Castañeda

Resumen— En el presente trabajo se estudió la función de Error de Reconstrucción del Procedimiento de Cuantificación-Reconstrucción (PCR) de realizaciones de procesos estocásticos No Gaussianos en la salida del convertidor con entrada de proceso Markoviano Gaussiano. El estudio de la cuantificación se realizó con número de niveles $n=4, 8, y 16$.

Palabras Clave— *Cuantificación - Reconstrucción, Procesos No Gaussianos, Convertidor No Lineal, Procesos Markovianos.*

Abstract— In this paper there is an analysis of the Reconstruction Error Function on Quantification - Reconstruction Procedure (PCR) of no Gaussian Stochastic Processes Realization in the output of Exponential Converter and with Markov Gaussian process in an input. The Quantification was done with number of levels $n = 4, 8, and 16$.

Keywords— *Quantification-Reconstruction Procedure, no Gaussian Stochastic Processes, Exponential Nonlinear Converter.*



INTRODUCCIÓN

En muchas de las áreas que tienen la necesidad práctica de analizar dos problemas actuales: el Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción (PMR) y el Procedimiento Cuantificación – Reconstrucción (PCR) de realizaciones de los procesos aleatorios de varios tipos. Primeramente discutimos de manera breve el problema de PMR. Revisamos el teorema de V. Balakrishnan [1] y sus generalizaciones (ver, por ejemplo [2, 3]), mencionando que tienen algunas desventajas ya que no toman en cuenta la característica principal de cada proceso aleatorio: su función de densidad de probabilidad (FDP), el número de muestreos debe ser infinito, el tipo de la función de covarianza no influye para el algoritmo de PMR, etc.

Existe otra metodología para la descripción estadística de PMR basada en la Regla de la Esperanza Matemática Condicional (REMC) (ver, por ejemplo [4]). La aplicación de dicha metodología para la descripción de PMR de procesos y campos aleatorios de varios tipos fue considerada detalladamente en [5, 6]. En todos los casos investigados fueron obtenidas dos funciones principales: la función de la reconstrucción $\tilde{m}(t)$ (o la función de la esperanza matemática condicional) y la función del error de la reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ (o la función de la varianza condicional). Es claro que, en el caso general, se necesita conocer la multitud de los muestreos $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ y FDP condicional del proceso dado $\omega[x(t)|X, T]$. En la base del FDP se puede obtener las funciones buscadas:

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t) | X, T \rangle \quad (1)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \langle \dot{x}^2 | X, T \rangle \quad (2)$$

Dichas investigaciones fueron cumplidas para un número N arbitrario de muestreos, para procesos con diferentes FDP, para muestreos con jitter [7], etc. En el caso general para calcular (1) y (2) se necesita conocer la FDP condicional multidimensional del orden $(N+1)$. En el caso no gaussiano es muy difícil conocer tal FDP, pero en el caso Gaussiano existen las expresiones analíticas para describir las características principales de PMR [8].

Ahora consideremos el problema del Procedimiento Muestreo - Cuantificación – Reconstrucción (PMCR) de realizaciones de los procesos aleatorio. Aquí hay algunas diferencias específicas en comparación con el problema PMR. La operación de la cuantificación es una operación no lineal, a la salida del convertidor “análogo – cifra” en lugar de valores precisos $x(T_i) (i = 1, 2, \dots, N)$ tenemos otros valores de los muestreos $x^c(T_i) (i = 1, 2, \dots, N)$ iguales a algunos niveles de la cuantificación. Enfatizamos, que el procedimiento del muestreo en el tiempo está caracterizado

con valores determinísticos $T_i (i = 1, 2, \dots, N)$. La cantidad de niveles L de la cuantificación puede variar, usualmente son utilizados 4, 8, 16, 32, 64, 128.

En la operación del muestreo - , la función de reconstrucción debe tener otra forma, no precisa. Esta función pasa dentro de los valores de muestreos $x^c(T_i) (i = 1, 2, \dots, N)$. Con dicho efecto se genera un error adicional además del error de la reconstrucción usual (2). Dicho error depende fuertemente del número L , o del intervalo de la cuantificación ΔL . Es claro, cuando el valor del intervalo es grande, entonces el error adicional sería más grande también. En el caso del proceso gaussiano el valor de la desviación estándar σ debe ser conocida a priori. Entonces el valor ΔL está calculado en la base de la regla seis sigmas:

$$\Delta L = 6\sigma \quad (3)$$

Para investigar PMCR se necesita conocer las características del proceso dado y la cantidad L de los niveles. El resultado de la investigación debe ser el algoritmo (o la función) de la reconstrucción y la función del error de la reconstrucción. La función (3) se debe ser sumada al error usual (2).

Hay muchos trabajos dedicados al problema de PMCR. Mencionamos algunas publicaciones importantes [9] - [11] en las cuales están consideradas diferentes variantes de los filtros no óptimos de la reconstrucción de las realizaciones de procesos aleatorios. No existen artículos con análisis del problema en base a la Regla de la Esperanza Matemática Condicional. Enfatizamos que dicha regla nos da algoritmos de reconstrucción, *acoplados* con propiedades del proceso muestreado, por ello tales algoritmos aseguran el mínimo error de reconstrucción. Hay una publicación dedicada a PMCR en la base de REMC para procesos Gaussianos [12].

Además del PMCR hay otro problema, el cual se llama el Procedimiento de la Cuantificación – Reconstrucción (PCR) de las realizaciones de los procesos aleatorios. Este término no contiene una palabra: “muestreo”. Realmente el procedimiento del muestreo en el tiempo existe, pero los momentos instantáneos de ocurrencia de las muestras están determinados por el punto del cruce de la realización y el nivel correspondiente de la cuantificación. Es decir, los momentos del tiempo $T_i (i = 1, 2, \dots, N)$ son aleatorios y por consecuencia, los intervalos dentro de muestreos son aleatorios también. En dicha variante es obligatorio usar una metodología de la investigación usando la simulación de las realizaciones de los procesos aleatorios. El primer artículo, dedicado a PCR de las realizaciones de los procesos gaussianos en la base de REMC fue publicado en Memorias del Congreso CNIES del ESIME-Zacatenco en 2011[13].

El presente trabajo está dedicado a la generalización del artículo [13]. Aquí el problema de PCR está considerado para



las realizaciones del proceso *No Gaussiano*. Para cumplir dicha investigación se necesita simular las realizaciones del proceso aleatorio en la salida del convertidor no lineal. Elegimos el proceso en la salida del el convertidor no lineal no inercial tipo exponencial, cuando en su entrada está el proceso Gaussiano Markoviano.

Debido a que hacemos uso de la REMC, entonces consideremos el algoritmo de PMR para los procesos Gaussianos. Esta variante será usada en el presente artículo.

PROCEDIMIENTO ÓPTIMO DE MUESTREO –RECONSTRUCCIÓN DE LAS REALIZACIONES DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS

Enfatizamos que la REMC asegura automáticamente el mínimo del error de la reconstrucción para cualquier FDP de los procesos aleatorios. Para el caso de los procesos gaussianos existen las expresiones generales para las dos características principales (1) y (2) para la mayoría de casos de PMR. Tales formulas se puede encontrar en [14]:

$$\tilde{m}(t) = m(t) - \sum_i^N \sum_j^N K(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} K(T_j, t) \quad (5)$$

Aquí: $m(t)$, $\sigma^2(t)$ y $K(\tau)$ son esperanza matemática, la varianza y la función de covarianza del proceso dado; a_{ij} es un elemento de la matriz de covarianza inversa del proceso dado. Dicha matriz está determinada con la formula:

$$\|a_{ij}\| = \|K(T_i, T_j)\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} \langle \dot{x}(T_1)\dot{x}(T_1) \rangle & \dots & \langle \dot{x}(T_1)\dot{x}(T_N) \rangle \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \dot{x}(T_N)\dot{x}(T_1) \rangle & \dots & \langle \dot{x}(T_N)\dot{x}(T_N) \rangle \end{matrix} \right\|^{-1}$$

Estas fórmulas (4) - (6) son generales y válidas para procesos no estacionarios. Es claro que para procesos estacionarios las formulas serán más sencillas.

Fijamos $m(t) = 0$, $\sigma^2(t) = 1$ De forma que (4) y (5) se simplifican:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t - T_i) a_{ij} x(T_j) \quad (7)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t - T_i) a_{ij} K(T_j - t) \quad (8)$$

Es importante señalar dos hechos:

1) la función de la reconstrucción $\tilde{m}(t)$ es una función lineal con respecto de los valores de muestreos $x(T_i)$;

2) la función de la varianza condicional (la función del error) $\tilde{\sigma}^2(t)$ no depende del valor del muestreo, solo depende de su posición en el eje del tiempo o depende de los intervalos del tiempo dentro de los muestreos.

Procesos Markovianos

Podemos obtener un proceso aleatorio Markoviano en la salida de un filtro RC de una etapa cuando a la entrada se tiene Ruido Blanco Gaussiano. La respuesta de tales filtros RC está dada por la función de covarianza normalizada de tipo exponencial. Las características del proceso aleatorio en el régimen estacionario a la salida son:

$$m(t) = 0, \sigma^2(t) = 1 \quad (9)$$

y su función de covarianza normalizada es:

$$R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \quad (10)$$

Donde $\alpha = 1/RC$ (11)

En el caso del proceso Markoviano $N=2$, es decir, solamente dos muestras participan en el procedimiento de la reconstrucción. (6)

Tomando en cuenta (9) – (11), podemos expresar la función básica $b_j(t)$, la función de reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y la función de error de reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^2 R_x(t - T_i) a_{ij} \sum_{i=1}^2 \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \quad (12)$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^2 x(T_j) b_j(t) = \sum_{j=1}^2 x(T_j) \sum_{i=1}^2 \exp[-\alpha(t - T_i)] a_{ij} \tag{13}$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \exp(-\alpha|T_j - t|) \tag{14}$$

Convertidor No Lineal exponencial.

Podemos expresar la No Linealidad del Convertido Exponencial por:

$$\eta(t) = g[\xi(t)] = A \exp(B\xi(t)) \tag{15}$$

Si el proceso a la entrada $\xi(t)$ tiene una FDP de tipo Gaussiana con parámetros $\langle \xi(t) \rangle = 0$ y $\sigma_\xi^2 = 1$, entonces vamos a tener [15]:

$$\omega(n) = \frac{1}{AB\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} \ln \frac{n}{A} \right)^2 - \ln \frac{n}{A} \right] \tag{16}$$

$$\langle \eta^2(t) \rangle = \langle g^2[\xi(t)] \rangle = A^2 [\exp(2B^2) - \exp(B^2)] \tag{18}$$

$$K_\eta(\tau) = \langle \eta(t) \rangle \exp \{ [B^2 R_\xi(\tau)] - 1 \} \tag{19}$$

Simulación de la realización del proceso aleatorio NO Gaussiano.

La simulación de la realización se obtuvo en tres etapas: La generación de Ruido Blanco Gaussiano, lo pasamos a través de un filtro RC de una etapa obteniendo a la salida un proceso Markoviano y, por último, afectamos dicho proceso con un convertido No Lineal Exponencial.

Los parámetros A y B de la no linealidad del convertidor determinan las amplitudes que tendrá la realización del proceso aleatorio no Gaussiano. En las Fig. 1 y 2 se muestran el comportamiento de la Amplitud para diferentes valores de A y B.

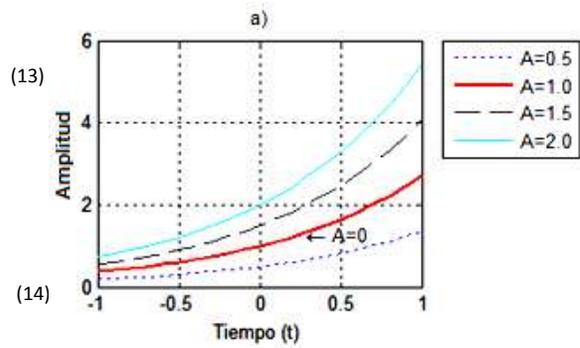


Fig. 1.- Convertidor No lineal para diferentes valores de A.

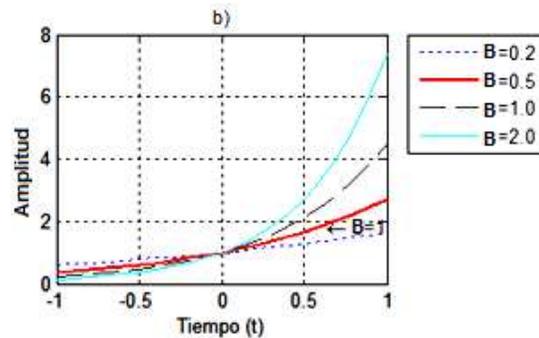


Fig. 2.- Convertidor no lineal para diferentes valores de B.

Para la simulación realizada se eligió A=1, B=1. En la Figura 3 se muestra la FDP en comparación con otros valores de A, B.

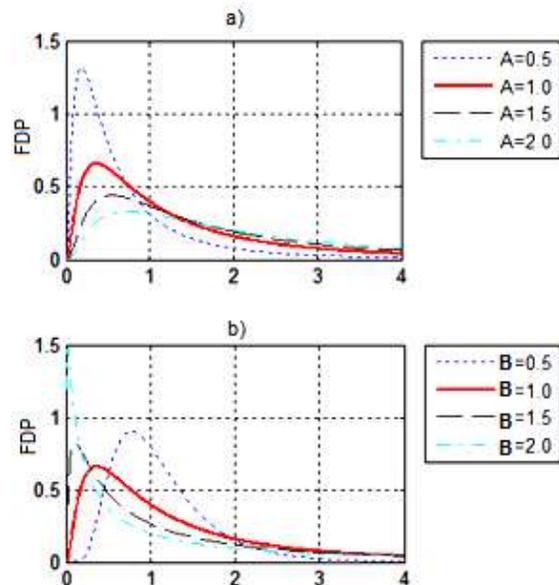


Fig. 3.- FDP del proceso no Gaussiano a la salida del convertidor no lineal con diferentes valores de a) A, y b) B

Es claro que mientras el tiempo de simulación sea más grande, los resultados serán más precisos debido a que las características estadísticas del proceso aleatorio se apegaran más a las funciones teóricas.

Para una simulación de 200seg, tenemos el siguiente proceso Markoviano a la entrada del convertidor exponencial:

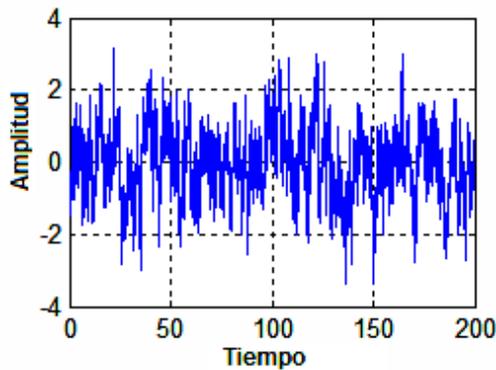


Fig. 4.- Realización simulada de un proceso Markoviano de 200seg

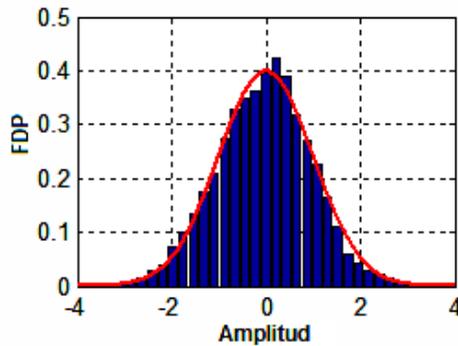


Fig. 5.- FDP de la realización simulada del proceso Markoviano de 200seg

Podemos observar en la Fig. 5 la calidad que obtenemos con 200s para la FDP Gaussiana.

La limitante del de procesamiento que llevaría la simulación de procesos largos, nos ha obligado a definir un tiempo corto para ejemplificar los resultados, de esta forma, se simuló la realización de un proceso aleatorio de 10seg, de los cuales presentamos los primeros 6seg a detalle.

Cuantificación con 4 niveles

Una vez obtenida la realización del Proceso aleatorio no Gaussiano, procedemos a calcular los cruces con cada nivel definido. En la Fig. 6. a) podemos apreciar a detalle los 6seg. Simulados, y sus respectivos cruces con cada nivel.

Es importante resaltar que una de las diferencias con respecto al PCR de los sistemas Gaussianos, es el hecho de que tenemos muy pocas muestras para valores pequeños, mientras que para las amplitudes grandes tenemos una gran cantidad de muestras. El error de reconstrucción mostrado en la Fig. 6. b) ejemplifica claramente el efecto del PCR de amplitudes pequeñas en comparación con amplitudes mayores.

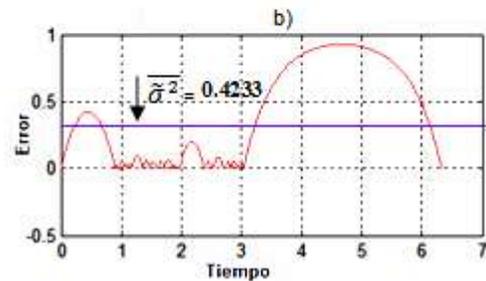
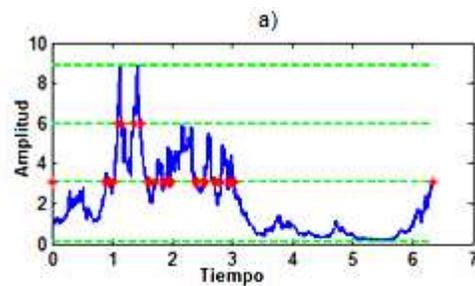


Fig. 6.- a) Detalle de la realización y sus cruces por cada uno de los 4 niveles. b) Detalle de la Función de error de reconstrucción

Tabla 1.- Valores obtenidos para Cuantificación de 4 niveles.

Número de muestras obtenidas	34
Máximo tiempo de separación entre muestras	3.3000
Promedio de tiempo de separación entre muestras	0.1862
Máximo Error de Reconstrucción	0.9289
Promedio de Error de Reconstrucción	0.4233

Para calcular el promedio en el tiempo del error de reconstrucción se utilizó la siguiente fórmula:



$$\overline{\sigma^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt \quad (20)$$

Donde T es el intervalo del promedio.

Tanto el promedio temporal de error como el error máximo son los parámetros que nos importa mantener controlados. La separación promedio y máxima entre muestras repercute directamente en los valores que toma la función de error de reconstrucción por lo que es claro que mientras más niveles se definan menor será el error.

Cuantificación con 8 y 16 niveles

En las Fig. 9, 10 podemos observar que el error de reconstrucción con 8 y 16 niveles decreció notablemente respecto al PCR con 4 niveles. Esto se debe a la cantidad de muestras obtenidas al aumentar el número de niveles.

La máxima separación entre muestras es el parámetro que determina el máximo error, y en los tres ejercicios se puede observar claramente que el Error es muy grande para muestras con amplitud baja mientras que el mayor error lo encontramos en los intervalos de tiempo en donde la realización toma amplitudes muy altas y con ellos una gran cantidad de cruces por los niveles.

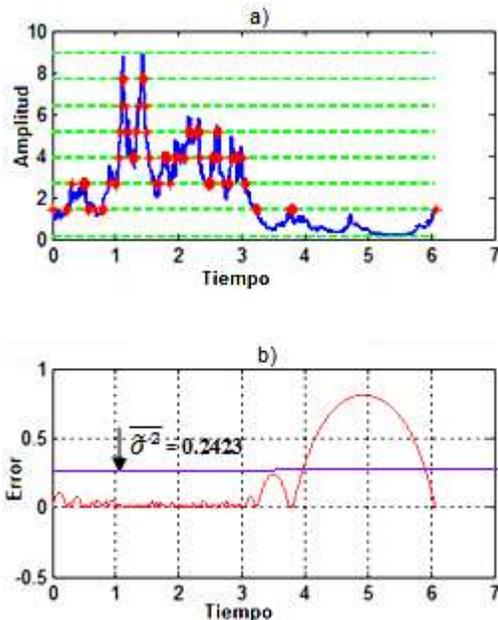


Fig. 7.- a) Detalle de la realización y sus cruces por cada uno de los 8 niveles. b) Detalle de la función de error de reconstrucción

Tabla 2.- Valores obtenidos para Cuantificación de 8 niveles.

Número de muestras obtenidas	101
Máximo tiempo de separación entre muestras	2.2600
Promedio de tiempo de separación entre muestras	0.0601
Máximo Error de Reconstrucción	0.8110
Promedio de Error de Reconstrucción	0.2423

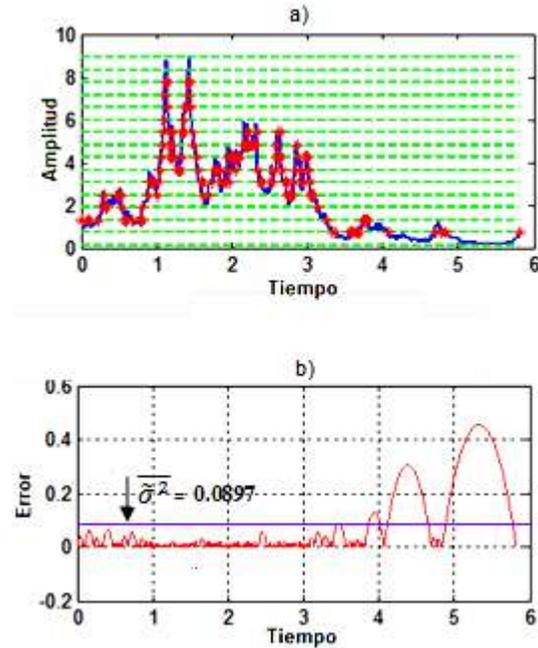


Fig. 8.- a) Detalle de la realización y sus cruces por cada uno de los 16 niveles. b) Detalle de la función de Error de Reconstrucción

Tabla 3.- Valores obtenidos para cuantificación de 16 niveles.

Número de muestras obtenidas	164
Máximo tiempo de separación entre muestras	0.9800
Promedio de tiempo de separación entre muestras	0.0355
Máximo Error de Reconstrucción	0.4542
Promedio de Error de Reconstrucción	0.0897

CONCLUSIONES

Por medio de la Regla de la Esperanza Matemática condicional es posible reconstruir con el mínimo error una realización de un proceso aleatorio tomando en cuenta sus características estadísticas, incluyendo los procesos aleatorios No Gaussianos.

Podemos cuantificar la realización obteniendo los tiempos en los cuales suceden los cruces con cada nivel definido, de esta forma podemos calcular el error de reconstrucción debido a



que la función de error de reconstrucción solo depende de la separación en el tiempo entre las muestras obtenidas.

El número de muestras obtenidas en cada intervalo de tiempo es variable (a diferencia del procedimiento de muestreo convencional), esto dependerá tanto de las características estadísticas del proceso aleatorio, como del número de niveles definidos. A mayor cantidad de niveles se obtiene una cantidad mayor de muestras, lo que repercute en que los valores de error de reconstrucción (máximos y promedio temporal) disminuyen considerablemente.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Politécnico Nacional, a la Sección de estudios de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal por el apoyo brindado.

REFERENCIAS

[1] A. Balakrishnan. "A note on the sampling principle for continuous signal". IRE Transactions on information theory. IT-3, PP 143-146, 1957.

[2] A. J. Jerry. "The Shannon sampling theorem: its various extensions and applications". A tutorial review. Proc. IEEE, Vol. 65, No.11, pp 1565-1596, 1977.

[3] R. J. Marks. "Advanced Topics on Shannon Sampling and Interpolation Theory". Springer – Verlag, New York, p. 924, 2001.

[4] P.E. Pfeiffer. Probability for applications. Springer Verlag, 1990.

[5] V.Kazakov. "Sampling - reconstruction procedures of Gaussian process realizations. Capitulo 9 en el libro: "Probability: Interpretation, Theory, and applications", edited by Y.S.Shmaliy. Nova Science Publishers, Inc. USA, N.Y. 2012, pp. 269 - 298.

[6] V.Kazakov. "Sampling - reconstruction procedures of non-Gaussian process realizations. Capitulo 10 en el libro: "Probability: Interpretation, Theory, and applications", edited by Y.S.Shmaliy. Nova Science Publishers, Inc. USA, N.Y. 2012, pp. 299 – 326.

[7] D. Rodríguez, V.Kazakov. Procedimiento de Muestreo y reconstrucción. Analisis de Procesos gaussianos con Jittr. Editorial Academica Española, Madrid, 2012.

[8] J. Max. Quantizing for minimum distortion. IRE trans. On Information Theory. 1960, V. IT-6, No 1, pp.7-10.

[9] A.I. Velichkin. Transmission of analogues messages on the digital communication channels. Moscow, "Radio y Sviaz", 1983. (In Russian.)]

[10] N.U. Pilipchuk, V.P. Yakovlev. Adaptive Pulse- cODE Modulation. Moscow, "Radio y Sviaz", 1986. (In Russian.)

[11] V.P. Yakovlev. Signal filtering on the output of an analog – digital converter. Problems of Information Transmission. 1988, V. 24, No 2, pp. 51-58.

[12] V.Kazakov, J. F. Reyes Diaz. Analisis de error de reconstrucción del procesamiento de cuantificación en la base de la regla de la esperanza matemática condicional. Memoria del Vigésimatersera Reunión Internacional de Otoño de Comunicaciones, Computación, Electronica Automatización, Robotica y Exposición Industrial. ROC&C 2012. Las redes inteligentes en los sistemas eléctricos. IEEE Sección de México. Mexico, Acapulco, GRO, del 11-15 de Noviembre 2012. 5 pag.

[13] V.Kazakov, B.Gayosso. Investigación del Procedimiento de la Cuantización-Reconstrucción de las Realizaciones de Procesos Gaussianos Markovianos. Memorias del "VI International Conference on Electromechanics and Systems Engineering (CIES)". Mexico City, IPN, ESIME-Zacatenco, Mexico, November, 7-11, 2011, Telecommunication Engineering, TEL-23, pp. 120-125.

[14] R.L. Stratonovich. "Topics in the Theory of Random Noise", Vol. I, N.Y. Gordon & Breach., 1963.

[15] A.N.Malakhov. Cumulant analysis of non gaussian random processes and their transformations. Moscow, "Sov. Radio", 1978. (In Russian.)

Nombre Hugo Antonio Castañeda Rufino

Fecha de Nacimiento: 22/05/1986

Lugar de Nacimiento: México D.F.

Nacionalidad: Mexicana

Ocupación: Estudiante de posgrados en SEPI

Área: Maestría en Ciencias en Ingeniería de las Telecomunicaciones.

Campo de investigación: Teoría de las Comunicaciones

Educación: Ingeniería Telemática, Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías avanzadas, IPN. 2010.



Bibliografía

- [1] **A. Zayed, P. L. Búster.** “Lagrange Interpolation and Sampling Theorems” En F. Marvasti, Editor. “Nonuniform Sampling: Theory and Practice”, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, p. 924, 2001.
- [2] **E. T. Whittaker.** “On the functions which are Represented by the Expansion of the Interpolation Theory”, Proc. Royal Society of Edinburgh, Vol. 35, pp. 181-194, 1915.
- [3] **V. A. Kotel’nikov.** “On the Transmission Capacity of the “Ether” and Wire in Electrocommunications”, Izd. Red. Upr. Suyazi RSKA, Moscow, 1933.
- [4] **C. E. Shannon.** “A Mathematical Theory of Communication”, Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656, 1948.
- [5] **C. E. Shannon.** “Communications in the Presence of Noise”, Proc. IRE, Vol. 37, pp. 10-21, 1949.
- [6] **H. Nyquist.** “Certain Topics in Telegraph Transmission Theory”, AIEE Trans., Vol. 47, pp. 617-644, 1928.
- [7] **A. V. Balakrishnan.** “A Note on the Sampling Principle for Continuous Signals”, IRE Trans. On Inf. Theory, Vol. IT-3, pp. 143-146, 1957.
- [8] **D. A. Linden, N. M. Abramson,** “A Generalization of the Sampling Theorem”, Information and Control, Vol. 3, pp. 26-31, 1960.
- [9] **D. P. Petersen, D. Middleton.** “Sampling and Reconstruction of Wave Number Limited Functions in N Dimensional Euclidean Spaces”, Information and Control, Vol. 5, pp. 279-323, 1962.
- [10] **R. J. Marks II,** Editor, “Advanced Topics on Shannon Sampling and Interpolation Theory” Springer – Verlag, New York, 360 p., 1993.
- [11] **A. J. Jerri.** “The Shannon Sampling Theorem – Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review”, Proc. IEEE, Vol 65, No. 11, pp. 1565-1596, 1977.
- [12] **A. I. Zayed.** “Advances in Shannon’s Sampling Theory”, Boca Raton: CRC Press, 334 p., 1993.
- [13] **F. Marvasti,** Editor. “Nonuniform Sampling: Theory and Practice”, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, p. 924, 2001.
- [14] **S. P. Lloyd.** “A Sampling Theorem for Stationary (Wide Sense) Stochastic Processes”, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 92, pp.1-12, 1959.
- [15] **F. J. Beutler.** “Sampling Theorem and Bases in a Hilbert Space”, Information and Control, Vol. 4, pp. 97-117, 1961.



- [16] **W. A. Gardner.** "A Sampling Theorem for Nonstationary Random Processes", IEEE Trans. On Information Theory, Vol. IT-18, pp. 808-809, 1972.
- [17] **M. Zakai.** "Band – Limited Functions and the Sampling Theorem", Information and Control, Vol. 8, pp. 143-158, 1965.
- [18] **Z. A. Piranashvili.** "On the Problem of Interpolation of Stochastic Processes", Theory of Probability and its Applications, Vol. 12, pp. 647-657, 1967.
- [19] **B. D. Sharma, F. C. Metha.** "A Generalized Sampling Theorem for Nonstationary Processes", J. Cybernatics, pp. 87-95, 1974.
- [20] **J. J. Clark, M. R. Palmer, P. D. Lawrence.** "A Transformation Method for the Reconstruction of Functions form Nonuniformly Spaced Samples", IEEE Trans. On Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-33, No. 4, pp. 1151-1165, 1985.
- [21] **Y. Y. Zeevi, E. Shlomot.** "Nonuniform Sampling and Antialiasing in Image Representation", IEEE Trans. On Signal Processing, Vol. 41, No. 3, pp. 1223-1236, 1993.
- [22] **J. G. Proakis.** "Digital Communications", 4th Edition, McGraw-Hill, 2000.
- [23] **R. G. Brown, P. Y. C. Hwang.** "Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering", 3rd Edition, N. Y.: J. Wiley & Sons, 1997.
- [24] **M. Pawlak.** "Signal Sampling and Recovery under Dependent Noise", Sampling Theory in Signal and Image Processing, Vol. 1, No. 1, pp. 77-86, 2002.
- [25] **B. Lacaze, C. Mailhes.** "Random Process Reconstruction from Multiple Noisy Source Observations", Sampling Theory in Signal and Image Processing, Vol. 3, No. 3, pp. 257-278, 2004.
- [26] **B. Lacaze.** "A Theoretical Exposition of Stationary Processes Sampling", Sampling Theory in Signal and Image Processing, Vol. 4, No. 3, pp. 201-230, 2005.
- [27] **B. Lacaze.** "The Ghost Sampling Sequence Method", Sampling Theory in Signal and Image Processing, Vol. 8, No. 1, pp. 13-21, 2009.
- [28] **H. Ogawa, A. Hirabayashi.** "Sampling Theorem with Optimum Noise Suppression", Sampling Theory in Signal and Image Processing, Vol. 6, No. 2, pp. 167-184, 2007.
- [29] **R. Deutch.** "Nonlinear Transformation of Random Processes", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [30] **H. Cramer.** "Mathematical Methods of Statistic", Princeton, N. J.:Princeton University Press, 1946.
- [31] **R. L. Stratonovich.** "Topics in the Theory of Random Noise", New York: Gordon and Breach, 1963.
- [32] **A. Stuart, K. Ord.** "Kendall's Advanced Theory of Statistic", 6th Edition, Vol. 1, "Distribution Theory." London: Arnold, 2000.



- [33] **C. L. Nikias, A. P. Petropulu.** "Higher – Order Spectra Analysis", PTR Prentice-Hall, N. J., 1993.
- [34] **A. N. Malakhov.** "Cumulant Analysis of Random non Gaussian Processes and their Transformations", Moscow: Sov. Radio, 1978. (In Russian).
- [35] **D. Middleton.** "An introduction to Statical Communication Systems", 5th Editios, Prentice Hall, Englewood Clifts, N.J., 1993
- [36] **W. B. Davenport, Jr. and W. L. Root.** "An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.
- [37] **Haykin,S.:** Sistemas de Comunicación, Limusa Wiley, p. 61-64, 2005.
- [38] **V. Kazakov,** "Regeneration of samples of random processes following non linear inertialess convertions", Telecommunication and Radio engineering, Vol. 43, pp. 94-96, NIO, 1988.
- [39] **V. Kazakov.** "The Sampling – Reconstruction Procedure with a Limited Number of Samples of Stochastic Processes and Fields on the Basis of the Conditional Mean Rule", Electromagnetic Waves and Electronic Systems, Vol. 10, No. 1-2, pp. 98-115, 2005.
- [40] **A.I. Velichkin.** Transmission of analogues messages on the digital communication channels. Moscow, "Radio y Sviaz", 1983. (In Russian.)]
- [41] **N.U. Pilipchuk, V.P. Yakovlev.** Adaptive Pulse- cOde Modulation. Moscow, "Radio y Sviaz", 1986. (In Russian.)
- [42] **V.P. Yakovlev.** Signal filtering on the output of an analog – digital converter. Problems of Information Transmission. 1988, V. 24, No 2, pp. 51-58.
- [43] **V. Kazakov, J. F. Reyes Diaz.** Analisis de error de reconstrucción del procesamiento de cuantificación en la base de la regla de la esperanza matemática condicional. Memoria del Vigésimatersera Reunión Internacional de Otoño de Comunicaciones, Computación, Electronica Automatización, Robotica y Exposición Industrial. ROC&C 2012. Las redes inteligentes en los sistemas eléctricos. IEEE Sección de México. Mexico, Acapulco, GRO, del 11-15 de Noviembre 2012. 5 pag.
- [44] **V.Kazakov, B.Gayosso.** Investigación del Procedimiento de la Cuantización-Reconstrucción de las Realizaciones de Procesos Gaussianos Markovianos. Memorias del "VI International Conference on Electromechanics and Systems Engineering (CIIES)". Mexico City,IPN, ESIME-Zacatenco, Mexico, November, 7-11, 2011, Telecommunication Engineering, TEL-23, pp. 120-125.
- [45] **P. Z. Peebles, Jr.** "Principios de Probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias", 4ta. Edición, McGraw-Hill, España, 2006.
- [46] **J. B. Kennedy y A. M. Neville.** "Basic Statistical Methods for Engineers and Scientist", 3ra Edition, Harper & Row, New York, 1986.
- [47] **B. R. Levin.** "Fundamentos de Radiotecnica Estadística", Marcombo Boixareo Editores, Barcelona, 1992.



- [48] **K. Ogata.** “Ingeniería de Control Moderna”, 4ta Edición, Pearson Education, Madrid, 2003.
- [49] **R. E. Ziemer, W. H. Tranter.** “Principles of Communication”, 5th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [50] **V. A. Kazakov,** “Regeneration of samples of random processes following non linear inertialess conversions”, Telecommunication and Radio engineering, Vol. 43, pp. 94-96, NIO, 1988.
- [51] **V. Kazakov.** “The Sampling – Reconstruction Procedure with a Limited Number of Samples of Stochastic Processes and Fields on the Basis of the Conditional Mean Rule”, Electromagnetic Waves and Electronic Systems, Vol. 10, No. 1-2, pp. 98-115, 2005.
- [52] **V. Kazakov, S. A. Africanov, M. A. Belyaev.** “Comparison of Two Algorithms of the Realization Restoration Using Random Numbers of Counts”, Radioelectronics and Communications Systems, Vol. 37, No. 4, pp. 43-45, 1994.
- [53] **V. Kazakov, M. A. Belyaev.** “Reconstruction of Realizations of Gaussian Processes from Readings of Process and Linear Transformation of It”, Telecommunications and Radioengineering, Vol. 49, pp. 97-102, 1995.
- [54] **V. Kazakov, M. A. Belyaev.** “Sampling Reconstruction Procedure of Some Nonstationary Processes”, Radioelectronics and Communications Systems, Vol. 40, No. 9, pp. 43-49, 1997.
- [55] **V. Kazakov, M. A. Belyaev.** “Sampling Reconstruction Procedure of Random Processes Based on Conditional Expectation Rule” Sampling Theory in Signal and Image Processing, Vol. 1, pp. 135-153, 2002.
- [56] **V. Kazakov, D. Rodríguez.** “Estudio del Procedimiento de Discretización y Reconstrucción de los Procesos Gaussianos con una Cantidad de Muestras Limitada”, Memorias de la Reunión de Otoño de Comunicaciones, Computación y Electrónica ROC&C 2002, Acapulco Gro., 2002.
- [57] **L. W. Couch, II.** “Sistemas de Comunicación Digitales y Analógicos”, 7ma Edición, Pearson Prentice-Hall, México, 2008.
- [58] **P. E. Pfeiffer,** “Probability for applications”, Springer Verlag, 1990.
- [59] **V. Kazakov, Y. Olvera.** “Two Reconstructions Algorithms of Non Gaussian Processes on the Output of a Polynomial Converter”, Research in Computing Science: Advances in Computer Science and Engineering, Vol. 42, pp. 287-295, 2009.
- [60] **V. Kazakov, Y. Olvera.** “Algoritmos de Reconstrucción de procesos No Gaussianos a la Salida de un Convertidor Polinomial de Quinto Orden”, Memorias del VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico CIINDET, Cuernavaca, Morelos, México, 2009.
- [61] **V. Kazakov, Y. Olvera.** “Algoritmos de Reconstrucción de Procesos No Gaussianos en la Salida de un Convertidor Polinomial de Quinto Orden en la Región de Interpolación”,



Memorias de la 20° Reunión de Otoño de Comunicaciones, Computación, Electrónica Y Exposición Industrial ROC&C, Acapulco, Gro., México, 2009.

- [62] **V. Kazakov, Y. Olvera.** “Investigación de los algoritmos óptimos y no óptimos de muestreo - reconstrucción de algunos procesos No Gaussianos.”, Tesis, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, ESIME Z. IPN. México D.F, Diciembre 2009.
- [63] **V. Kazakov, D. Saldaña, H. Castañeda, D.** “Estudio del Error de Reconstrucción del PCR de Realizaciones de Procesos Aleatorios a la salida del Convertidor Exponencial afectado con Proceso Markoviano Gaussiano”. XIV CNIES. Noviembre 2013.