



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
Centro de Estudios Científicos Y  
Tecnológicos No.11  
“Wilfrido Massieu”



**El papel de las representaciones en la comprensión de textos en  
problemas de Cálculo Diferencial**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

“TÉCNICO EN INTALACIONES Y MANTENIMIENTO ELÉCTRICOS”

**Presenta:**

**Luis Manuel Hernández Peña**

**Directora:**

**Alma Alicia Benítez Pérez**

**Ciudad de México  
Junio2016**

## **Agradecimientos**

Quiero agradecer en primer lugar a mis padres, los cuales me brindaron el apoyo para la realización de este trabajo. A mi hermana, quien me ayudo en la redacción de varias partes del mismo. A Martín, cuyas correcciones me ayudaron a poder tener un trabajo de mayor calidad dándole orden y coherencia. Por último y más importante mi agradecimiento y sincero afecto a la Dra. Alma Benítez, por su confianza en mí, conduciéndome y asesorándome paso a paso, en el contenido, la redacción, la estructura y forma. Gracias a ese esfuerzo conjunto fue que este trabajo pudo desarrollarse. También quiero hacer un reconocimiento a todos los autores de publicaciones anteriores, mismas que aportaron significativamente dándome claridad y entendimiento con sus trabajos, conceptos e ideas.



Oficio No. 503-M/16

Ciudad de México, a 2 de marzo del 2016

**DRA. ALMA ALICIA BENÍTEZ PEREZ**  
PRESENTE


Con base a sus características personales, el compromiso demostrado en las actividades encaminadas en esta Unidad Académica y de acuerdo a los conocimientos adquiridos durante los proyectos de investigación realizados, tengo a bien designarla:

Directora de tesis  
**"El papel de las representaciones en la comprensión de texto en problemas de Cálculo Diferencial"**  
Del alumno:  
**Luis Manuel Hernández Peña**

Por lo anterior, la exhorto a desarrolla con responsabilidad, entusiasmo, dedicación e interés la función encomendada a fin de lograr la excelencia y calidad educativa que la sociedad nos demanda en la formación de sus educandos.

Sin más por el momento, quedo de usted.

**ATENTAMENTE**  
**"LA TÉCNICA AL SEVICIO DE LA PATRIA"**

  
**ING. MARIA ANTONIA ARIAS MARQUEZ**  
**DIRECTORA**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
C.E.T.  
"WILFRIDO MASSIEU"  
DIRECCIÓN

Ccp- SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA, WM  
ARCHIVO

WARR/ynb

# ÍNDICE

<b>ÍNDICE DE TABLAS</b> .....	4
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	4
<b>Resumen</b> .....	5
<b>Abstract</b> .....	5
<b>Introducción</b> .....	6
<b>Planteamiento del Problema</b> .....	7
<b>Capítulo I. Marco Teórico</b> .....	8
<b>Capítulo II. Metodología</b> .....	19
2.1 Métodos Cualitativos .....	19
2.2 Validez de los Métodos Cualitativos .....	22
2.3 Desarrollo de una Investigación con Métodos Cualitativos .....	23
2.4 Análisis Conversacional .....	24
2.5 El Cuestionario en la Investigación Cualitativa .....	24
<b>Capítulo III. Acercamiento en el estudio de las representaciones durante la Resolución de Problemas</b> .....	27
3.1 Problemas analizados .....	31
3.2 Vértigo .....	35
3.3 Dédalo y Calipso .....	42
3.4 ¡Queremos rock! .....	48
3.5 Compañía de discos .....	53
<b>Capítulo IV. Análisis de problemas</b> .....	59
<b>Conclusiones</b> .....	67
<b>Bibliografía</b> .....	70

## **ÍNDICE DE TABLAS**

Tabla 1. Acercamiento al estudio de las representaciones, Benítez (2014). .....30

## **ÍNDICE DE FIGURAS**

Figura 1. Análisis de la Primera Representación Gráfica (Benítez, 2007).....15

## **Resumen**

El presente trabajo explora e identifica la información explícita e implícita durante la comprensión de problemas no rutinarios en matemáticas, para construir la primera representación y establecer el vínculo entre la comprensión del texto y el discurso explicativo. La experiencia se llevó a cabo en la unidad de aprendizaje de cálculo diferencial con tres alumnos de Nivel Medio Superior (16-17 años). El análisis de la producción de los alumnos se realizó a través del diseño de una rúbrica para explorar el acercamiento al análisis de las representaciones, lo cual permitió identificar los indicadores que contribuyeron para valorar los procedimientos desarrollados. A nivel de resultados, hay un desarrollo manifiesto de capacidades y habilidades, así como la influencia de contenido redaccional en la comprensión de textos en matemáticas y el desarrollo de inferencias. Los registros y las transcripciones de las clases fueron analizados considerando un modelo particular de la investigación cualitativa, empírico / experimental.

## **Abstract**

The present job explore and identify explicit information and implicit during the not routine problems comprehension in mathematics, for construct the first representation and set the link between the text comprehension and the explanatory speech. The experience had place into the differential calculus knowledge unity with three students of the upper secondary level (16-17 years). The analyses of the student's production were carried out through the designs of a rubric to explore the approach to the representations analyses, which allowed identifying the indicators that contributed to value the developed procedures. In terms of results, there's a manifest develop of capacities and skills, as well as the influence of redaccional content in the mathematic text comprehension and the inferences develop. The registers and the transcriptions of the classes were analyzed considering a particular model of the qualitative investigation, empiric/experimental.

## **Introducción**

Actualmente, el principal problema en la resolución de problemas matemáticos, no es la falta de conocimientos de los estudiantes, si no, la falta de comprensión de lo que están leyendo, el concepto de comprensión está relacionado con el verbo comprender, que se refiere a entender, justificar o contener algo. Por lo tanto, entendemos por comprensión a la aptitud o astucia para alcanzar un entendimiento de las cosas. Siendo precisamente esto el enfoque principal de este trabajo.

Es bien sabido que en cualquier tema que se desee estudiar, de cualquier área es de gran utilidad una representación, siendo en este caso representaciones pictóricas y simbólicas, es decir, en primera instancia la realización de un dibujo que se asemeje al significado de la información asimilada y posteriormente al ser en algunos casos muy complejo la realización de una representación gráfica, ya sea por el desconocimiento de los datos necesarios, la falta de instrumentos o la decisión de querer realizar una idea previa, se sustituye por una representación en la que se incluyen símbolos que se asemejan a la representación necesaria.

Al tener un ejemplo o un apoyo visual, este nos ayuda a comprender de manera más clara una idea. De la misma forma, en la resolución de problemas, es de gran ayuda realizar una representación basada en los datos obtenidos que pueda simbolizar el comportamiento de estos y la relación que mantienen si es que existe una.

Así, una representación puede ser realizada de distintas formas dependiendo del análisis y la recontextualización que cada individuo le da al problema basado en sus conocimientos previos, dentro de los cuales se podría incluir la habilidad para realizarlas. Siendo esto la base del estudio, el análisis de dichas representaciones, ya sean pictóricas o simbólicas, debe enfocarse a la interpretación que se haya obtenido de los problemas realizados, es decir, basarse en dicha representación, con la finalidad de que el problema se pueda comprender e interpretar de la misma forma que lo hizo el lector que anteriormente realizó la representación propuesta.

## **Planteamiento del Problema**

Es muy importante al resolver cualquier tipo de problema, ya que el enunciado del problema nos proporciona toda la información de la que disponemos para poder comprender el problema. El enunciado contiene las pistas, claves, herramientas, etc., que nos sirven para dar solución al problema.

Para esto, la Comprensión del Problema juega un papel muy relevante, siendo éste el primer paso para comenzar la resolución de un problema, ya que de esto depende si se lleva a cabo un buen comienzo. Esto implica saber ¿qué es lo que se está buscando?; ¿qué datos se tienen y cómo se pueden usar?; así como los recursos con los que se cuenta, todos estos aspectos se deben de tomar en cuenta al leer el enunciado correspondiente al problema. Si el alumno comienza a comprender el problema, tendrá bases para explicarlo y comenzar su argumentación, así como la formulación de las primeras conjeturas.

Debido a lo anterior, resulta comprensible la importancia de comprender el enunciado de un problema antes de comenzar a intentar resolverlo; es decir, la formulación de conjetura, aunque dicho intento de comprensión necesariamente estará limitado al no contarse con un conocimiento profundo de las particularidades del problema.

Luego entonces, se tiene que la comprensión del enunciado de un problema, no necesariamente se podrá realizar a plenitud antes de resolverlo, por lo que independientemente de la importancia de su comprensión, ésta se hará en plenitud, hasta después de su resolución. En este contexto, debe considerarse que la comprensión del enunciado de un problema, en la etapa en que pueda darse su comprensión, incluye, interpretar el texto para trasladar la información a un contexto comprensible al resolutor, haciendo uso de representaciones para enriquecer el contenido de la primera representación.

Para poder lograr lo anterior, podemos transcribir todo el enunciado del problema en gráficas, ecuaciones y fórmulas, entre otras herramientas, con lo cual nuestra visión del problema crecerá considerablemente, pero no se logrará completamente antes de su solución.



## Capítulo I. Marco Teórico

El desarrollo de las matemáticas siempre ha influenciado el desarrollo de las ciencias en general. Así, en momentos particulares la ciencia se ha ligado al estado de las matemáticas en diversos momentos históricos. Por ejemplo, el estudio de las cónicas en el año 200 A. de C. contribuyó al establecimiento de las leyes del movimiento de los planetas en 1609 (Leyes de Kepler). El conjunto de relaciones abstractas que puede obtenerse de las matemáticas es una herramienta importante en la tarea de ordenar estos hechos. Por otro lado, el matemático también necesita de otras ciencias para no solamente aplicar algunos resultados sino también para entender las actividades relacionadas con el quehacer matemático.

Un aspecto esencial en el entendimiento de como el individuo resuelve problemas ha sido el observar, codificar y analizar los procesos utilizados por los expertos de determinada área al resolver problemas. Observar a los estudiantes en acción resolviendo problemas también ha ayudado a caracterizar algunos factores que aparecen cuando realizan esta actividad. En este sentido, es importante considerar métodos de observación, de codificación de datos y de organización que ayuden a analizar la información que se obtiene al caracterizar el proceso observado en el estudiante y el experto al resolver problemas.

Schoenfeld (1987) revisó algunos estudios realizados en las ciencias cognitivas y particularmente en el área de inteligencia artificial. Encontró que en estas disciplinas se han producido programas que son capaces de resolver problemas de ajedrez, lógica simbólica, y cálculo integral con mucho éxito.

Las ideas empleadas en estos programas incorporan estrategias usadas por expertos al resolver problemas. Para describir y posteriormente codificar las actividades usadas por los expertos, se emprende una observación sistemática del proceso que ellos utilizan al resolver los problemas. Generalmente, estas observaciones se organizan en conjuntos de procedimientos descriptivos que las computadoras usan para producir resultados.

Schoenfeld (1987) menciona que para entender el proceso llevado a cabo por quienes resuelven problemas matemáticos y poder proponer líneas a seguir en la instrucción matemática, es necesario tomar en cuenta la disciplina, la dinámica del salón de clases y el aprendizaje junto con el proceso de pensar. Es decir, es importante la incorporación del conocimiento de los matemáticos, profesores de matemáticas, educadores, y especialistas de las ciencias cognitivas.

En cuanto a los matemáticos es importante considerar la información acerca del tipo de estrategias que utilizan inicialmente al resolver un problema, los cambios que ocurren durante el proceso, los aspectos metacognitivos, y la evaluación continua del proceso de solución.

Los profesores de matemáticas son uno de los agentes más importantes dentro del desarrollo de aprendizaje, al momento de impartir el conocimiento sus puntos de vista con respecto a la interacción entre el grupo así como el desarrollo de las actividades es esencial. Sus colaboraciones y aportaciones han sido importantes en la caracterización de cómo un individuo resuelve algún problema con los elementos y resultados obtenidos en el salón de clases. Así mismo en otras áreas por ejemplo: la inteligencia artificial, ha habido gran interés por entender y simular el desarrollo que realiza un experto al resolver un problema. La observación sistemática del comportamiento del experto se debe considerar detalladamente los métodos utilizados para la resolución de dicho problema.

Gardner (1999) sugiere que para entender el proceso de resolver problemas se tiene que considerar información de áreas como psicología, filosofía, inteligencia artificial, lingüística y antropología. Entre los elementos esenciales que Gardner identifica en las ciencias cognitivas destacan los siguientes:

La matemática impulsa las competencias cognitivas, así como las competencias específicas, relacionadas con algún tipo de análisis conceptual, las cuales se mencionan a continuación:

1. **Pensar y razonar.** Incluye plantear preguntas características de las matemáticas (“¿Cuántas ... hay?”, “¿Cómo encontrar ...?”); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos
2. **Argumentar.** Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos
3. **Comunicar.** Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
4. **Plantear y resolver problemas.** Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.
5. **Representar.** Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y

situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.

6. **Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.** Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos
7. **Utilizar ayudas y herramientas.** Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática.

Por lo cual es importante impulsar las competencias en la escuela y principalmente en el salón de clase. La discusión sobre las diversas interpretaciones que pueden generarse con respecto a la solución de problemas es importante identificar los elementos que interviene en el desarrollo del problema y el potencial adquirido por el estudiante de esta disciplina. Dicho de otra forma, el conocimiento matemático obtenido en clase fortaleciendo las competencias de la disciplina.

La resolución de problemas trae consigo diversos puntos a tratar. Un aspecto importante es el papel que juegan las representaciones para el fortalecimiento del razonamiento y resolución de un problema, pues en éste hay diversas representaciones, en las cuales no se interpreta el contenido de éstas, por lo tanto es importante ayudar al alumno a poder comprender e interpretar dichas representaciones para la correcta resolución de su problema.

En las últimas dos últimas décadas se ha expuesto el uso las representaciones por parte de los educandos y su impacto positivo como instrumento de trabajo para la resolución de problemas (Castro, 2008; DeBellis y Goldin, 2006) Además, el uso de diversas representaciones han expuesto su utilidad para desarrollar de manera más profunda y reflexible la comprensión de conceptos y procesos; (Cuoco y Curcio, 2001). Si bien, es importante poseer varias representaciones de un concepto, la pura existencia de estas no es suficiente para permitir un uso flexible del concepto de problemas, las representaciones deben ser correctos y estar fuertemente vinculadas: “uno necesita tener la posibilidad de cambiar de una representación a otra, cuando la otra sea más eficiente ara el nuevo paso que queremos dar” (Dreyfus, 1991).

Se evidencia el excelente empleo de las múltiples representaciones para exhorta su flexibilidad como herramientas para resolver problemas. Entre los de la

enseñanza en el NMS destaca que los alumnos logren tener buen conocimiento de las distintas formas de representar, pueden articular sin contradicciones estas representaciones y recurran a ellas en forma espontánea durante la resolución de problemas ya que esto es calve y esencial para el éxito (Hitt, 1996).

Zubieta (1996) también puntualiza que esta interacción con las representaciones es un componente básico en el desarrollo cognitivo, y que aparecen vinculadas con los avances en la matemática. Así que es pertinente que para comprender algo, se requiere operar o interaccionar con aquello que se requiere entender, y esto es, lo fundamental de la actividad de formulación de problemas. De ahí la importancia de este tipo de práctica en el aprendizaje de las matemáticas.

Lester (1994) señala que la investigación en resolución de problemas muestra signos de declinación entre los años (1970-1994), pero ha sido verdadero hasta nuestros días, ya que el interés de los investigadores ya no se concentra en la resolución de problemas. Él señala las posibles causas de esta declinación: una de las más importantes es pensar que ya sabemos todo acerca de la resolución de problemas y que la resolución de problemas es aun más compleja de lo que se pensaba.

Pensar que ya sabemos todo de la resolución de problemas, cuando este tema es retroalimentación del educador con el estudiante y pensar que es más compleja, lleva a los investigadores a no enfatizar ningún punto de problemática que nos lleve a una complejidad. Los cambios que se han producido en los contextos de aprendizaje, debido a la introducción de nuevas tecnologías.

Relacionando algunos conceptos derivados de los trabajos de Ausbel (1990) se refiere a un aprendizaje significativo, que involucra dos tipos de componentes; componentes lógicos (estructuración de redes de significación) y componentes psicológicos (motivación, actitud).

En la elección de la representaciones apropiadas por parte de los estudiantes les brindará la oportunidad de aprender a sopesar las ventajas y desventajas de las diferentes formas de representación (Schultz y Waters, 2000), ya a emplearlas como herramientas para la resolución de problemas.

Uno de los factores que más influencia tiene en los resultados de aprendizaje en los estudiantes es el tipo de enseñanza que desarrollan los profesores en el aula, por ello se plantea la siguiente cuestión ¿Cómo diseñar Estrategias de enseñanza que promueva el aprendizaje de las matemáticas?. Dilucidar estos temas no es fácil ya que están ligas con otro tipo de problemas más complejos: la naturaleza de las matemáticas. Desde este punto de vista, un paso importante es tener una caracterización acerca de lo que es la matemática.

Una mirada rápida, a los diferentes períodos de la matemática, muestra su naturaleza cambiante. Por ejemplo, Hilbert y Cohn-Vossen (1980) hablan de una proclividad a abstraer “relaciones lógicas que están presentes en un material confuso y una tendencia hacia una mayor comprensión intuitiva... de los objetos que se estudian”. Halmos (1980) afirma: “La principal razón de ser de los matemáticos es resolver problemas”, Teppo (1998) distingue dos aspectos en la naturaleza de las matemáticas: El hacer y la disposición. El primero incluye explorar situaciones, buscar patrones, inventar estrategias, usar intuiciones, generalizar y abstraer. La segunda es “una manera de percibir y hacer que permita moverse en el dominio”. Lo importante en esta polémica es hacer explícito el paradigma en que se apoya el diseño de una instrucción, y en este sentido se está de acuerdo que la enseñanza de las matemáticas debe promover disposiciones consistente con su misma naturaleza.

El papel que desempeñan las representaciones en el aprendizaje de la matemática es fundamental, ya que permiten la comunicación y comprensión del sujeto con su medio y con el mismo. Las representaciones son configuraciones (palabras, gráficas, ecuaciones etc.), que pertenecen a sistemas altamente estructurados, denominados; “Esquemas Simbólicos” (Kaput, 1987), “Sistemas Representacionales” (Goldin, 1987) o “Sistemas Semióticos” (Duval, 1993), los cuales están constituidos de caracteres o signos primitivos, para ser combinados a través de reglas particulares en cada sistema, dichas reglas estructuran el sistema de producción de la representación, el cual contribuye para enriquecer su contenido (Duval, 1997; Goldin & Kaput, 1996).

La relación que guarda la representación y el objeto representado, es un aspecto importante que caracteriza a la representación, Kaput (1991) considera la tradicional estructura del signo lingüístico, ya que identifica el significante como un objeto material y el significado como configuraciones mentales, destacando la relación entre ambos a través de un proceso de interpretación simbólica, que es accesible a toda persona que está involucrada en la dinámica que marcan los sistemas de representación, al cual pertenecen estas representaciones.

Duval (1999), considera esta relación como una denotación, y menciona que cada nuevo sistema semiótico provee nuevos significados para la representación, es decir, cualquier objeto matemático tiene diferentes representaciones producidas por diferentes sistemas semióticos, por lo cual expone la necesidad de enfocar la atención a tres aspectos básicos para lograr la aprehensión conceptual; el objeto, uno de los varios sistemas semióticos y la composición de signos.

Sin embargo, Duval enfatiza la importancia de manejar varios sistemas semióticos para lograr la aprehensión del objeto, pero advierte los problemas que origina la coordinación de estos sistemas. Los objetos matemáticos no pueden ser identificados con cuales quiera de sus representaciones, esta actividad ocasiona

que muchos estudiantes no puedan identificar el contenido de la representación y el objeto representado.

Otro aspecto que no debe ser soslayado, es la razón por la cual la representación es un aspecto determinante en el proceso del aprendizaje; primero porque beneficia la comunicación y segundo porque permite el desarrollo de tratamientos, los cuales consisten en transformar la representación, dentro del mismo sistema, sobre la base de reglas propias para obtener otras representaciones que puedan constituir aportes diferentes de la representación inicial (Duval, 1996).

Los aspectos que caracterizan a las representaciones están estrechamente ligados a un estado de desarrollo y dominio del sistema, siendo accesible a toda persona que se encuentra relacionada con esta dinámica (Goldin & Kaput, 1996), ya sean sistemas representacionales, esquemas simbólicos o bien sistemas semióticos.

Desde esta perspectiva el texto es un intermediario para la construcción del modelo mental de la situación, este modelo se basa en las representaciones matemáticas, lo cual conduce según Kaput a una relación más directa para la conceptualización de la situación.

Por su parte Callejo (1994), estudia el empleo de las representaciones gráficas por alumnos de nivel secundario cuando se resuelven problemas, su investigación reporta los elementos que desde su perspectiva determinan la elección, interpretación y modificación de las representaciones gráficas, es decir, descripción de la situación, las preguntas y el contexto matemático en el cual está envuelto el enunciado. Estos factores influyen directamente para elegir el primer acercamiento con la representación gráfica, a lo cual Callejo denomina representación generatriz, por ser ésta la primera representación gráfica que inicia el proceso de resolución del problema, siguiendo un acompañamiento de representaciones diseñadas con la misma finalidad del proceso, por ejemplo, ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar una estrategia de solución etc., de tal manera que el acompañamiento de las representaciones gráficas diseñadas en el curso de la resolución del problema esta determinado por la primera representación generatriz.

En este sentido, Callejo habla sobre la “Rigidez Perceptiva “que se presenta entre la percepción del problema y el proceso de resolución, y por consecuencia en el uso de la primera representación gráfica, al respecto, la autora considera que la rigidez perceptiva es debida a la presentación del problema, en cuanto a su formulación, es decir, en forma de texto, vocablos, gráficos etc., y por las condiciones dentro de las cuales el problema está inmerso, referido en términos de la comunicación.

Por otra parte, la rigidez perceptiva está influenciada por las dificultades para re-interpretar o modificar la primera representación, mencionando algunas estrategias para modificar la primera representación generatriz, estas son: el cambio de estrategia de resolución frente a un obstáculo, reformulación del problema y las preferencias personales por ciertos métodos. Las estrategias se desarrollaron en un ambiente dinámico, originando reflexiones individuales dentro del comportamiento de resolución, así como las discusiones grupales. Con ello se constituye un ambiente de actitudes abiertas, reflexivas y críticas dentro del empleo de las representaciones gráficas.

En esta misma dirección aunque con sus respectivos matices Keller, B. & Hirsch, C. (1998), enfocan su investigación para analizar la preferencia cognitiva de estudiantes universitarios que cursan el primer semestre de cálculo, en las representaciones de funciones, la tarea consiste en elegir la representación que emplean para resolver la situación, sin que ésta se resolviera. Las situaciones que presentan a los estudiantes están caracterizadas por situaciones en contexto y no contextualizadas.

Para esta situación el estudiante elige la opción que considere para iniciar el proceso de solución, sin efectuar el proceso. Los resultados reportan la preferencia por el uso de ecuaciones en tareas no contextualizadas, mientras que las contextualizadas, el alumno se inclina por el uso de tablas de valores.

En consecuencia, elegir una representación inicial puede estar influenciada por diversos factores uno de los cuales es la preferencia cognitiva de los estudiantes, es decir, la manera personal por la cual un individuo escoge inicialmente el proceso de información de una actividad intelectual, así como la experiencia del alumno con una representación, el nivel de la tarea, la descripción de la situación, las preguntas aplicadas, el contexto del enunciado, el lenguaje de las tareas y el contexto en el cual se representa la situación. Las actividades también están influenciadas por la percepción del estudiante, por el pragmatismo de las preguntas escolares, y por las herramientas de procedimiento que fueron dadas para manipular sucesivamente la elección de las representaciones. Por ejemplo: ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar una estrategia de solución etc., de tal manera que el acompañamiento de las representaciones gráficas diseñadas en el curso de la resolución del problema está determinado por la primera representación generatriz (Benítez, 2007). El siguiente esquema muestra el análisis de la primera representación gráfica durante la resolución de los problemas

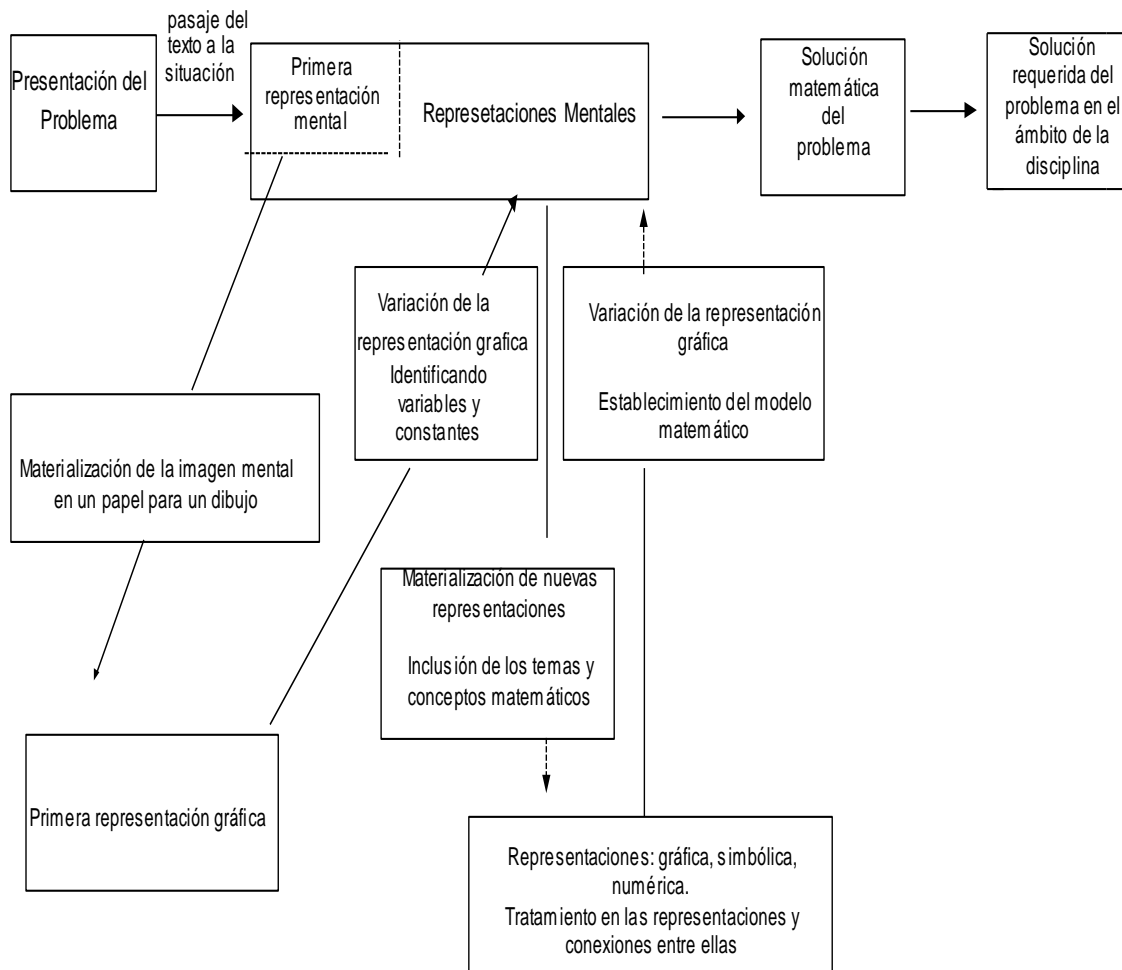


Figura 1. Análisis de la Primera Representación Gráfica (Benítez, 2007)

En la primera etapa (Ver Figura 1) de la solución de procesamiento del problema, el alumno desarrolla una representación del problema mediante la definición y descomponiendo el problema en situaciones básicas. La definición de estas situaciones consiste en identificar aquellos elementos de forma apropiada en el contexto del problema, lo cual está amalgamado con los conocimientos previos y principios relacionados con las condiciones que exponga, permitiendo tener una plataforma para iniciar con las estrategias cognitivas y los principios de apoyo a la solución del problema.

Identificar el esquema problema para un problema bien definido puede ser relativamente sencillo: El problema puede tener características distintivas que dejar claro que los principios y estrategias de un dominio particular, debe aplicarse de forma selectiva. Un solucionador de problemas calificados reconoce que la situación actual es análoga a una situación problemática anterior, para establecer relaciones entre las características del problema actual con las a las características esenciales del esquema de problema que se almacena en la memoria del experto. Cuando esta asignación se relaciona con vínculos



significativos y conceptuales y no por similitudes en las características de superficie se produce realmente el aprendizaje significativo para otorgar el conocimiento que aportará al problema los elementos necesarios suficientes para resolver la situación.

En ocasiones, el alumno puede reconocer a un problema como análogo a una situación similar pero más simple situación o problema en un contexto muy diferente para los que una solución es aparente y que a continuación, aplica la misma solución al problema que nos ocupa.

Duval (2000), considera esta relación como una denotación y menciona que cada nuevo sistema semiótico provee nuevos significados para la representación, es decir, cualquier objeto matemático tiene diferentes representaciones producidas por diferentes sistemas semióticos, por lo cual expone la necesidad de enfocar la atención a tres aspectos básicos para lograr la aprehensión conceptual; el objeto, uno de los varios sistemas semióticos y la composición de signos. Razón por la cual la representación es un aspecto determinante en el proceso del aprendizaje; primero porque beneficia la comunicación y segundo porque permite el desarrollo de tratamientos, los cuales consisten en transformar la representación, dentro del mismo sistema, sobre la base de reglas propias para obtener otras representaciones que puedan constituir aportes diferentes de la representación inicial (Duval, 2000).

Para lo cual, La Interpretación Global concentra su atención en la figura-forma, punto central y decisivo en el aprendizaje de las representaciones gráficas, ya que permite discriminar los valores visuales y su coordinación con los valores categóricos de la expresión algebraica, atendiendo la discriminación de los valores visuales con relación a la figura-fondo. Para ello las actividades diseñadas deben permitir explorar las variaciones de una sola variable y mantener constantes los valores de las otras variables, con la finalidad de que los valores de las distintas variables visuales se unifiquen para ser exploradas como única figura forma/fondo.

Este aprendizaje involucra que el estudiante sea capaz de relacionar sus conocimientos previos, es decir todo de lo que ya tienen noción, conoce o sabe acerca del problema que se le está planteando e involucrarlo con los nuevos saberes y que pueda transferir o aplicar estos saberes a nuevos problemas.

Es decir, con base a lo descrito anteriormente se pretende inducir al alumno a que realice su propia interpretación y por esta razón se señala lo que es una representación de acuerdo a lo citado por diversos personajes.

Particularmente la interpretación adquiere un papel importante en el estudio de las representaciones y en consecuencia en el proceso de solucionar una situación problemática, pues la interpretación se refiere al acto por el cual un estudiante

adquiere sentido de una situación, a través de una gráfica, una ecuación o bien una tabla numérica. La interpretación puede ser de dos tipos: Global ó Local. La primera enfoca a tareas que involucran la interpretación de la gráfica, por ejemplo, cuando el estudiante determina la pendiente de una recta a partir de su gráfica (Duval, 1988; Schoenfeld, 1993).

La segunda se refiere a la localización de puntos interesantes en el plano cartesiano, la interpretación que se realiza particularmente en la gráfica puede desarrollarse dentro de la misma gráfica o bien puede moverse a la expresión algebraica.

Mencionan la necesidad de desarrollar métodos instruccionales y herramientas de enseñanza que permitan al estudiante emplear aproximaciones múltiples, realizando verificaciones paralelas y resolviendo aparentes contradicciones. Para la enseñanza es un proceso interactivo, donde al alumno se le debe dar oportunidad para reconocer discrepancias y refinar su pensamiento de acuerdo a ello.

En tareas de interpretación de gráficas de funciones, es importante la traslación entre representaciones, ya que es un proceso psicológico, para ir de un modo de representación de una función a otra, o bien para construir una representación dada otra; en este sentido, la traslación no es exclusiva de la interpretación sino también de la construcción, pues es una actividad fundamental para el concepto de función. En esta dirección los trabajos realizados por Barba & Confrey (1996) con apoyo de la computadora, han resultado significativos esfuerzos. Por ejemplo, Barba & Confrey trabajaron las transformaciones de funciones bajo los siguientes lineamientos:

1. “Visualización de gráficas”
2. Relación de los puntos que constituyen la gráfica con la tabla de valores.
3. Relación entre las representaciones gráficas y la representación algebraica

Las autoras mencionan la importancia que tiene para el estudiante moverse con mayor facilidad en el simbolismo algebraico, mientras éste mantenga un significado visual, además estiman que el razonamiento visual para observar las transformaciones como movimientos “sobre” o “del” plano tienen un poder potencialmente cognitivo en el alumno, el cual requiere tiempo, oportunidades y recursos para hacer construcciones, investigaciones, conjeturas y modificaciones.

El dominio de Competencias en Matemáticas concierne la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas al tiempo que se plantean, formulan, resuelven e interpretan tareas matemáticas en una variedad de contextos. El nivel de competencias en matemáticas se refiere a la

medida en la que estudiantes pueden ser considerados como ciudadanos reflexivos y bien informados además de consumidores inteligentes. OCDE/PISA define de la siguiente manera la competencia en matemáticas:

*“La competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivos, comprometidos y reflexivo”.*

Una habilidad crucial implícita en esta noción de la competencia matemática es la capacidad de plantear, formular, resolver e interpretar problemas empleando las matemáticas dentro de una variedad de situaciones y contextos. Estos contextos van desde los puramente matemáticos a aquellos que no presentan ninguna estructura matemática aparente (en este caso la persona debe introducir ella misma la estructura matemática) También es importante enfatizar que la definición no se refiere solamente a un nivel mínimo básico de conocimientos de las matemáticas. Al contrario, la definición atañe a la capacidad de utilizar las matemáticas en situaciones que van de los cotidiano a lo inusual y de lo simple a lo complejo.

## Capítulo II. Metodología

### 2.1 Métodos Cualitativos

La búsqueda del conocimiento mediante el apoyo de datos cualitativos no es reciente. Desde la antigüedad clásica se manifiesta la generación del saber a través de la lógica, la observación y el lenguaje, en reflexiones de grandes filósofos como Demócrito, Epicuro, Platón y Aristóteles.

Esta búsqueda atraviesa la edad media, con el desarrollo del pensamiento teológico de Santo Tomás de Aquino, apoyado en las propuestas aristotélicas.

En la edad moderna irrumpe la búsqueda cuantitativa, científica (Galileo, Newton), bajo la presunción de que todos los eventos de la naturaleza pueden ser explicados matemáticamente. Sin embargo, el pensamiento discursivo filosófico (Leibniz, Descartes, Kant, Hegel) sigue vigente.

Es en el siglo XX cuando surgen y se desarrollan los métodos cualitativos en el marco de la investigación social. Las pesquisas tipo podían describir las características homogéneas de grandes sectores de la población; pero no permitían el estudio en profundidad de fenómenos sociales complejos.

La escuela de Chicago se aventura en el uso del método de Historias de Vida. Desde aquí, se intentaba, a partir de uno o más relatos de vida, lograr una visión global y profunda de un grupo social dado.

Los seres humanos construimos permanentemente la realidad mediante la negociación y la interacción. Y esa concepción de los actores constituye el objeto esencial de la búsqueda sociológica (Coulon, 1988).

La etnometodología brinda un nuevo punto de apoyo a la búsqueda de conocimiento de base cualitativa. Los seres humanos no son meros seguidores de reglas ideales, sino que las modifican y las transforman en la búsqueda de una vida más razonable; la etnometodología se centra en el estudio de este proceso (Coulon, 1988; Goetz y LeCompte, 1988).

Los métodos cualitativos, en su proceso de desarrollo y afianzamiento, sufren constantes reajustes, críticas y autocríticas. Pero esto no es asunto que sólo toca a este ámbito del conocimiento social, sino que tiene que ver con la ciencia en su totalidad. El conocimiento humano, vale repetirlo, está en crisis. La realidad se ha tornado sumamente compleja.

Algunos autores identificados con los métodos cualitativos sostienen una postura crítica contra la metodología de investigación social de corte positivista y el modelo de sociedad que lo sustenta, por ejemplo, Ferrarotti (1983) rechaza la sacralización de la metodología de investigación, que impide ver los rostros concretos de la gente. Por su parte, Schemelkes (1986) sostiene que la investigación participativa implica una postura integral, en contradicción con la ciencia tradicional. Kincheloe y McLaren (1995) dan un paso más adelante, al señalar que el pensamiento crítico, más que una opción metodológica, supone la intención de superación de un desarrollo desigual de la sociedad, con un gran porcentaje de la población en situación de exclusión, y apuesta por el sueño comunitario como una política deseable.

En todo caso, de una u otra forma, los cultores de los métodos cualitativos señalan o dejan entrever una declaración de diferencia con respecto a la investigación tradicional. No obstante, todos coinciden en que los métodos cualitativos deben mantenerse dentro del status de la ciencia social, abocándose específicamente al estudio de fenómenos naturales, de tipo social y cultural (Myers, 1997).

Así, como vemos, la búsqueda del conocimiento por vía cualitativa (lenguaje y lógica) no constituye una moda pasajera. Se trata de una propuesta válida para el desarrollo del conocimiento social. Como propuesta, aún se encuentra en proceso de evolución y de transformación.

Se habla de métodos cualitativos en plural. No hay una cosa única que podamos denominar metodología cualitativa. Se trata de una diversidad de caminos en el marco de la investigación social.

Esa diversidad de opciones viene dada tanto por la naturaleza de cada método empleado, como por la diversidad de paradigmas, modelos y procedimientos que le dan sustento. No hay unidad en cuanto a qué son y cómo se operacionalizan los llamados métodos cualitativos.

Se trata de una búsqueda abierta de conocimiento comprometido con la verdad y con el bienestar de los seres humanos. Implica un compromiso entre las personas, una interacción y una negociación constante. Los principales métodos cualitativos son: Investigación-acción, método etnográfico, método biográfico (Historias de Vida), Método comparativo constante, evaluación iluminativa.

- a) Investigación acción: Se trata de una investigación que intenta promover que un colectivo social identifique problemas y busque las vías de solucionarlos, mediante procedimientos de acción

sistemática y reflexión sostenida. Cultores de este método son: John Elliott, Shirley Grundy, W. Carr y Kemmis, etc.

b) Método biográfico, o historias de vida. Se refiere un camino sociológico, en el cual se interpreta uno o varios relatos de vida, para interpretar aspectos globales de la vida social, tales como movilidad social, inmigración, estructura de empleos, etc. Este método requiere de una doble hermenéutica, donde el entrevistado interpreta su vida, y el investigador interpreta esa interpretación. Representantes: Franco Ferrarotti, Daniel Bertoux, y en Venezuela, Víctor Córdova.

c) Evaluación iluminativa: Se trata de la aplicación de los métodos cualitativos en el contexto de la evaluación educativa. Los miembros de una institución educativa intentan comprender, desde las perspectivas personales, las profundidades de una situación. Desde allí, se planificará y desarrollará un conjunto de acciones compartidas, dirigidas a la solución de problemas específicos. Sustentadores de esta corriente: Guba y Lincoln.

d) Método comparativo constante: Se trata de estudiar grupos humanos concretos, sobre cuyo comportamiento se generará una explicación razonable. Para ello, se hace un cuidadoso acopio de los datos, llevándolos cada vez más hacia una progresiva generalización, una elaboración teórica. Creadores de este camino: B. Glasser y A. Strauss.

e) Método etnográfico: Se trata de una descripción con profundidad de un grupo humano, con el fin de detectar estructuras que no se ven a simple vista. Para ello, se parte de la determinación de los puntos de vista de las personas involucradas con la situación y, a partir de allí, ir develando poco a poco las relaciones que subyacen a ese grupo humano. Representantes: J.P. Goetz y M.D. LeCompte, Alain Coulon.

Estos métodos, a pesar de su diversidad, comparten las siguientes características:

1. El procesamiento de los datos se realiza, predominantemente, atendiendo más a las cualidades que a las cantidades, por medio del estudio del lenguaje, de las descripciones detalladas, de los procesos de codificación y categorización. (Lógica inclusiva, formal o dialéctica; análisis de lenguaje (discurso, contenido).

2. Buscan la comprensión holística de un evento dado, intentando una visión global que esté por encima de los detalles y los fragmentos.
3. Tendencia a la totalidad (círculo hermenéutico). Relación partes-todo. El proceso sigue principalmente una vía inductiva, de los datos a la teoría (aún cuando pueden aceptar un camino deductivo en algún momento del proceso).
4. Es necesario considerar la intersubjetividad, la posibilidad de objetivar el mundo subjetivo de las personas, de interpretar los significados que ellos dan a los acontecimientos, Los significados no son absolutos, sino negociados, puestos en común y discutidos con los actores de los eventos.

## **2.2 Validez de los Métodos Cualitativos**

La validación y fiabilidad en la investigación cualitativa tiene que ver con el grado de acercamiento existente entre la investigación y la realidad, así como de la pertinencia de las técnicas empleadas.

En la recolección de datos, es importante el tiempo y la calidad de la permanencia del investigador en el campo. Su grado de vinculación con el grupo social en estudio, que permitiría la recolección de datos fiables. Estos datos, sujetos a la variabilidad, deben estar expuestos a la vista de todos, siempre visibles, recogidos de diversas fuentes y a través de una combinación de técnicas.

El análisis de datos se verifica a través de un diálogo permanente entre los científicos y el grupo social en estudio, con el fin de negociar los significados y constituir realidades comunes. Implica la máxima coherencia posible entre los distintos momentos del proceso, para garantizar que no haya un paso en falso, que cada resultado proviene de un momento anterior visible por todos.

Por otra parte, exige una revisión de la relación teoría-método, en el sentido de lograr que la teoría explique esos datos específicos, y que esos datos específicos sirvan para revisar (y modificar) la teoría.

La presentación de resultados debe incluir una exposición lo más transparente posible del proceso, de modo que quede claro de dónde surgen y si hay algún sesgo en la interpretación del investigador.

Debe ser explícita la teoría inicial, y su vínculo con los datos generados en la investigación, así como su eventual transformación a la luz de los resultados que se vayan generando. Ello permitirá la generalización del estudio.

### **2.3 Desarrollo de una Investigación con Métodos Cualitativos**

Si bien cada método de tipo cualitativo sigue su propia ruta, es posible proponer un modelo amplio que puede ser común a todos ellos. Este modelo puede presentarse través de cuatro fases. Estas fases, aun cuando se presenten por razones didácticas de manera secuencial, generalmente están imbricadas unas en otras, de modo tal que muchas veces no se sabe dónde culmina una y dónde inicia la otra.

Las fases son:

- 1) Preparación, que incluye la reflexión inicial, la definición del área problemática y el diseño inicial del estudio (susceptible de ser modificada posteriormente). Incluye la revisión previa de la literatura, la reflexión inicial (maduración de la idea) y el diseño
- 2) Trabajo de campo o ejecución: es el proceso complejo de entrar en el campo, siendo transparente en su presentación, y entrando en un reporte con el grupo en investigación. Incluye también la recogida de datos, empleando una diversidad de técnicas y criterios.
- 3) Fase Analítica: Procesamiento y análisis de datos, mediante una diversidad de técnicas y mediante una discusión permanente entre los científicos y los actores sociales; los eventos y la teoría, la fiabilidad y validación.
- 4) Fase informativa: Es la presentación de resultados, de modo transparente, coherente, y la elaboración del informe final..

### **2.4 Análisis Conversacional**

Algunos consideran que el modelo interpretativo el análisis conversacional es una variante clara de la etnometodología. En vez de interesarse por el discurso y la interacción, se privilegia el discurso en la interacción (J. Holstein y J. Gubrium 1998) resume en tres premisas los puntos fundamentales del análisis conversacional.



- La interacción está organizada estructuralmente y esto se observa en las regularidades de la conversación común y corriente. Todos los elementos de la interacción muestran patrones organizados de características estructurales estables e identificables. Dichos patrones son independientes de las características psicológicas o de cualquier otra de las que emite el discurso.
- Toda interacción está orientada hacia el contexto, y la conversación es productiva y refleja las circunstancias en las cuales se produce.
- Las propiedades anteriores caracterizan todas las interacciones, de tal modo que no puede dejarse pasar ningún detalle para la interacción en cuestión, aunque se considere desordenado, accidental o irrelevante.

El análisis de los datos, según este marco interpretativo, se centra en la estructura colaborativa que emerge de la conversación, identificando los elementos que apuntalan la organización secuencial de tal conversación, como el manejo del turno para tomar la palabra y las prácticas de apertura, sostenimiento y cierre de la conversación.

## **2.5 El Cuestionario en la Investigación Cualitativa**

En la investigación en general, los investigadores buscan preguntarles “cosas” a las personas a quienes investigan. La entrevista individual cuenta con guías de lo que preguntaremos; igualmente, los grupos focales echan mano de una guía de temas sobre los que queremos que las personas hablen u opinen. En ambos casos, se usan cuestionarios que generalmente no son del conocimiento de los participantes en forma evidente.

Es muy cierto lo que dicen Roberto Hernández Sampieri y sus colaboradores respecto a que “el instrumento más utilizado para recolectar datos es el cuestionario” (1998), particularmente cuando hablamos del paradigma cuantitativo, y probablemente este hecho ha inducido a muchos investigadores cualitativos a no considerarlo una opción válida, ni siquiera a tomarse en cuenta.

En el paradigma cuantitativo resulta usual que el cuestionario preferido sea el de preguntas cerradas, porque son fáciles de codificar y analizar, y seguramente son más sencillas de contestar. La principal desventaja de las preguntas cerradas es que limitan las respuestas y con frecuencia, “ninguna de las categorías describe con exactitud lo que las personas tienen en mente, no siempre capturan lo que pasa por las cabezas de los sujetos” (R. Hernández y cols. 1998).

Tradicionalmente se habla de dos tipos de cuestionarios, los cerrados y los abiertos. Los primeros preestablecen las opciones de respuesta, es decir que las preguntas están precodificadas. Esto requiere que se anticipen las posibles alternativas de contestación.

Los instrumentos clásicos para medir actitudes, en el formato Likert o en el del diferencial semántico, también requieren que el investigador decida previamente los elementos a investigar.

El cuestionario cerrado no se integra a los postulados teóricos de la investigación cualitativa. De ahí que la única opción para la investigación cualitativa mediante cuestionarios consista en utilizar preguntas abiertas. Debe ponerse en relieve que autores de metodología cuantitativa mencionan que estas preguntas son susceptibles de codificarse, mediante:

- 1) Observar la frecuencia con la que aparece cada respuesta a la pregunta.
- 2) Elegir las respuestas que se presentan con mayor frecuencia
- 3) Clasificar las respuestas en temas, aspectos o rubros
- 4) Darle un nombre o título a cada tema, aspecto o rubro (patrón general de respuesta)
- 5) Asignar el código a cada patrón de respuesta. (R. Hernández y cols. 1998, p.289).

En primer lugar, el cuestionario tiene que elaborarse con mucha claridad del problema y las preguntas de la investigación en cuestión. En segundo término, se deberán diseñar las preguntas para que lleven a quien las responda a un proceso de reflexión propia y personal, que refleje su sentir ante el asunto investigado. Inclusive un cuestionario abierto bien diseñado puede llevar de la mano a la persona que lo contesta en un proceso de cuidadosa, aunque muchas veces inadvertida, introspección.

No se trata de darle a alguien la posibilidad de escribir tres páginas con su respuesta; en la elaboración mecanográfica o impresa del cuestionario podemos limitar el número de líneas disponibles para ésta: ni varias páginas ni una línea sola.

Muy importante es incluir en la presentación del cuestionario una breve explicación de lo que se espera del encuestado, los propósitos del estudio, los beneficios que puede acarrear éste y, en algunas ocasiones, garantizar el anonimato a la persona que responde.

El diseño de un cuestionario cualitativo requiere un cuidadoso proceso que cuide de manera fundamental los aspectos de las preguntas y los propósitos de la investigación.

El análisis que se realiza debe ser verificable, esto es, se deben conservar las grabaciones y las transcripciones por un tiempo razonable, sin que exista un lapso predeterminado.

Se habla de consistencia interna cuando están en grupo o en una persona no se dan cambios de punto de vista durante la sesión. Se registra la frecuencia de los comentarios, y en el grupo el número de personas que los comparten; esto se denomina *medida de extensión*, e igualmente constituye un elemento de análisis de la intensidad de los comentarios.

Importa señalar que el análisis de la información cualitativa es un proceso que requiere tiempo; no se hace rápido, y se considera que comienza antes del análisis de los datos cuantitativos y que suele durar mucho más.

En síntesis, el análisis de la información busca conducir a una mejor comprensión de un fenómeno, lleva a explicaciones alternativas, representa un proceso de comparación que encuentra patrones y compara datos, y es a la vez un proceso ordenado y cuidadoso con gran flexibilidad. Éste constituye el corazón del análisis de datos cualitativos.

### **Capítulo III. Acercamiento en el estudio de las representaciones durante la Resolución de Problemas**

Desde hace más de dos décadas, el estudio de las representaciones ha permitido abordar el análisis de los procesos cognitivos de un sujeto, y en el nivel medio superior se han presentado diversas situaciones como estudiantes, cuando enfrentamos problemas que lejos de apoyarnos en su solución, nos limitan por comprender parcialmente su contenido o bien por no comprenderlo en su totalidad.

Las representaciones como se mencionó en el marco teórico, contribuyen durante el análisis de la situación, para identificar elementos que pudieran beneficiar la comprensión del texto. Para ello se consideró recontextualización, debido a que los textos que se exploraron están redactados para aplicar tratamientos matemáticos determinados a una situación del entorno económico, social o físico. A partir de esto se desprende la relevancia de la segmentación del texto por basarse en representaciones que son independientes a las expresiones lingüísticas y a la explicitación redaccional. La recontextualización moviliza esencialmente los conocimientos relativos a la situación que se está trabajando y por ello el contexto adquiere relevancia, pues depende de ello para que podamos identificar su contenido y establecer posibles conexiones con nuestras ideas.

Desde el punto de vista de un aprendizaje de la comprensión de textos, Duval (1999) menciona la movilización explícita de la forma de segmentación y recontextualización. Esta última se caracteriza por emplear el proceso inductivo de comprensión, el cual parte de una base de conocimientos que corresponde al contenido cognitivo del texto, y de los conocimientos que tiene el lector sobre la temática que aborda.

Específicamente en el proceso inductivo hay una organización propia del contenido cognitivo, donde la recontextualización son fundamentales, ya que depende de la selección que se realice en el texto, para identificar la información relevante que permita plantear el tratamiento matemático que se debe aplicar. Por

lo que la aprehensión sinóptica requiere del cambio de representación para fortalecer la recontextualización de la información identificada o bien para enriquecer con otras relaciones el tratamiento matemático que exige la situación. De acuerdo con Benítez (2014) muestra un acercamiento al análisis de las representaciones empleadas cuando se abordan problemas en situaciones contextuales (Tabla 1).

Acercamiento al Análisis de las Representaciones

	Indicadores	Criterios
Representaciones Mentales. (Descripción del problema)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura en voz alta el texto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entonación</li> <li>Espontaneidad</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los alumnos leen el texto en voz baja.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li></li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante expone el problema con su lenguaje natural.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Incomprensión del texto</li> <li>Una parte del texto incomprendida</li> <li>Comprensión total del texto</li> </ul>
Representación Pictórica (Opera y modifica la representación)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No identifica información</li> <li>Identifica parcialmente información</li> <li>Identifica información relevante</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Opera con la representación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No establece tratamientos</li> <li>Establece parcialmente tratamientos</li> <li>Establece tratamientos con la información</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No expone con claridad la información</li> <li>• Expone parcialmente información</li> <li>• Expone con claridad información relevante</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expone la representación a través de diferentes movimientos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No expone movimiento</li> <li>• Expone parcialmente movimiento</li> <li>• Expone totalmente los movimientos</li> </ul>
Representaciones Simbólicas (Modifica representaciones simbólicas)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expone una expresión simbólica identificando las variables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No identifica variables</li> <li>• Identifica algunas variables</li> <li>• Identifica las variables</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No establece ninguna relación</li> <li>• Establece parcialmente las relaciones entre las variables</li> <li>• Relaciona las variables correctamente</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica o elimina la expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta ninguna modificación</li> <li>• Establece parcialmente modificaciones</li> <li>• Establece modificaciones a la expresión simbólica</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica su expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No justifica</li> <li>• Justifica parcialmente</li> <li>• Justifica plenamente</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación verbal y la representación Pictórica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No establece conexiones</li> <li>• Establece parcialmente algunas conexiones</li> <li>• Establece conexiones</li> </ul>

(Conexiones entre la representación pictórica con una representación verbal).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta modificaciones</li> <li>• Presenta parcialmente modificaciones</li> <li>• Modifica la representación</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta relaciones</li> <li>• Presenta parcialmente relaciones</li> <li>• Establece relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta elementos pictóricos</li> <li>• Presenta e algunos elementos</li> <li>• Presenta elementos pictóricos</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación pictográfica y la representación simbólica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formula una expresión desde una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta</li> <li>• Presenta parcialmente</li> <li>• Presenta totalmente</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta relaciones</li> <li>• Presenta parcialmente relaciones</li> <li>• Presenta totalmente las relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta cambios</li> <li>• Presenta parcialmente cambios</li> <li>• Realiza totalmente los cambios</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta cambios</li> <li>• Presenta parcialmente cambios</li> <li>• Realiza totalmente los cambios</li> </ul>

Tabla 1. Acercamiento al estudio de las representaciones, Benítez (2014).

Consideramos el acercamiento pertinente para analizar el estudio realizado, para los cual a continuación muestro el análisis que se realizó de los problemas estudiados.

### 3.1 Problemas analizados

Un presidente conservador

$G(t)$  es el número de personas desempleadas en un país  $t$  semanas después de la elección de un presidente conservador en cuestiones fiscales. Interpreta cada uno de los hechos siguientes, relativos a la gráfica de  $G(t)$ , mediante la formulación de enunciados sobre la situación del desempleo:

La intersección de  $y = G(t)$  con el eje vertical es 2000000.

$$G(20) = 3000000.$$

La pendiente de  $y = G(t)$  en  $t = 20$  es 10000.

$$G''(36) = 800 \text{ y } G'(36) = 0.$$

- Escribe un enunciado que sintetice el conjunto de afirmaciones que formulaste.
- Traza una gráfica que muestre cómo varía el número de desempleados con respecto al tiempo.

### El crimen es cobarde

El cadáver de la víctima de un crimen se encuentra al mediodía en un cuarto que tiene una temperatura constante de  $20^\circ$  Celsius. Al mediodía la temperatura del cuerpo es  $35^\circ$  C; dos horas después, la temperatura del cuerpo es  $33^\circ$  C. En el momento del crimen, la víctima tenía la temperatura normal de un cuerpo vivo, es decir  $37^\circ$  C. ¿Cuándo ocurrió el crimen?

- Dado que  $Y$  es la temperatura del cuerpo, en grados Celsius;  $t$ , el tiempo transcurrido desde que fue encontrado, en horas;  $T$  es la temperatura del medio y  $k$  es una constante de proporcionalidad, escribe una ecuación que modele la relación siguiente: 'Un cuerpo se enfría o se calienta con una



rapidez proporcional a la diferencia de la temperatura del medio y la temperatura del cuerpo'.

- b) Comprueba que  $Y = T - Ae^{-kt}$  satisface la ecuación que encontraste.
- c) Encuentra la temperatura del cuerpo,  $Y$ , en función de  $t$ , usando la información que se proporciona en el enunciado.
- d) Traza la gráfica de  $Y$  versus  $t$ .
- e) ¿Cuándo ocurrió el crimen?
- f) ¿Qué ocurre con la temperatura del cadáver conforme el tiempo transcurre? Descríbelo en un párrafo, además de hacerlo gráfica, numérica y algebraicamente.

## 1. Vértigo

Se dibuja un triángulo equilátero de lado  $a$ . Al unir los puntos medios de los lados se forma otro triángulo equilátero. Se repite la misma operación una y otra vez, por los siglos de los siglos.

- a) ¿Cuál es la suma de los perímetros de estos triángulos?
- b) ¿Cuál es la suma de las áreas de estos triángulos

## 2. Compañía de discos

Una compañía de discos estima que podrá vender siete mil álbumes de una nueva versión de "Così fan tutte" de Mozart-Da Ponte a \$640 cada álbum. Por cada reducción de \$20 en el precio por álbum, calcula que venderá 300 álbumes más. A la compañía cada álbum le cuesta \$150 y sus costos fijos son de \$200000.

- a) Encuentra el número de álbumes que dará a la compañía la ganancia máxima.

- b) Encuentra el número de álbumes que dará a la compañía la ganancia máxima por cada peso invertido.
- c) Escribe un problema inspirado en éste, con un cuestionario detallado, y resuélvelo.

### 3. ¡Queremos rock!

Por problemas con las autoridades delegacionales se tiene que cambiar el escenario de un concierto de rock. Se debe acondicionar en menos de 8 horas. Una empresa puede instalar los asientos en 12 horas y cobra \$20 000, otra se tarda 18 horas y cobra \$15 000 por hacer el mismo trabajo.

- a) ¿Se podrá realizar el concierto si se contrata a las dos empresas?
- b) ¿En qué términos se debe establecer el contrato para que los organizadores paguen lo menos posible?

### 4. Retrato hablado 1

Bosqueja la gráfica de una función que tiene las características siguientes:

- a)  $f$  está definida para todos los reales.
- b)  $f$  es creciente en  $(-3,-1)$  y  $(2,\infty)$ .
- c)  $f$  es decreciente en  $(-\infty,-3)$  y  $(-1,2)$ .
- d)  $f$  es cóncava hacia arriba en  $(-\infty,-2)$  y  $(1,\infty)$ .
- e)  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(-2,1)$ .
- f)  $f'(-3)=f'(-1)=f'(2)=0$ .
- g)  $f$  tiene puntos de inflexión en  $(-2,0)$  y  $(1,1)$ .

### 5. Retrato hablado 2

Gráfica una función que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a)  $f(0) = 0, f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0,$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = -\infty$

d)  $f'(x) < 0$  sobre  $(-\infty; -2), (1; 6)$  y  $(9; \infty)$

e)  $f'(x) > 0$  sobre  $(-2; 1)$  y  $(6; 9)$

f)  $f''(x) > 0$  sobre  $(-\infty; 0)$  y  $(12; \infty)$

g)  $f''(x) < 0$  sobre  $(0; 6)$  y  $(6; 12)$

## 6. Dédalo y Calipso

En una ciudad chica hay dos misceláneas, «La gruta de Calipso» y «El laberinto de Dédalo» que compiten por 1000 clientes potenciales. Cada mes, el 80% de los clientes de Calipso queda satisfecho y regresa a comprar ahí mismo, mientras que el 20% restante prefiere irse con Dédalo. En cambio, de los clientes de Dédalo, sólo el 70% queda satisfecho, el otro 30% se va con Calipso. El número de clientes en cada miscelánea se estabiliza cuando el número de los que dejan de comprar en una miscelánea es igual a los que vienen a comprar de la otra, ¿cuántos clientes habrá en cada tienda en ese momento?

Resuelve el mismo problema suponiendo que al principio hay 500 clientes en cada tienda y observando cómo evoluciona la situación mes por mes. ¿Qué ocurre si se suponen otros datos iniciales, por ejemplo, 920 clientes en una miscelánea y 80 en la otra, etcétera?

De los problemas analizados se seleccionaron los siguientes por considerar la riqueza que existe en su contenido desde el punto de vista redaccional y se procedió a su discusión y análisis.

### 3.2 Vértigo

Se dibuja un triángulo equilátero del lado  $a$ . Al unir los puntos medios de los lados se forma otro triángulo equilátero. Se repite la misma operación una y otra vez por los siglos de los siglos.

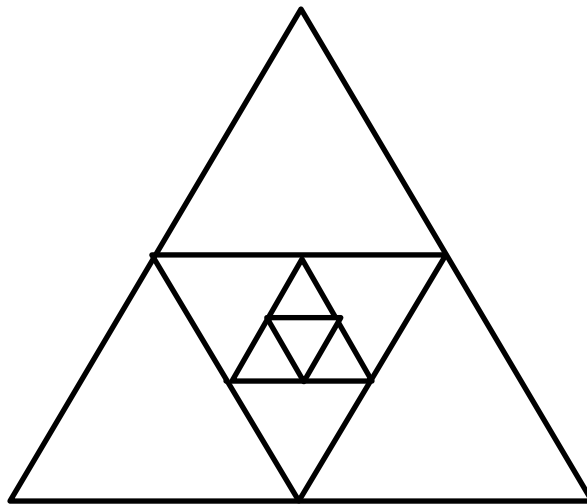
- ¿Cuál es la suma de los perímetros de estos triángulos?
- ¿Cuál es la suma de las áreas de estos triángulos?

	<b>Significado matemático</b>	<b>Significado en el contexto</b>
<b>Describe la situación</b>	Se dibuja un triángulo dentro de otro tomando como vértices el punto medio de los lados del anterior, queriéndose conocer su perímetro y su área.	Se quiere saber cuál sería la suma de las áreas y los perímetros de los triángulos si estos se van haciendo uno dentro de otro infinitamente.
<b>Cuántos enunciados</b>	3	3
<b>Los enunciados son especificaciones o generalidades</b>	Son especificaciones para resolver el problema.	Son especificaciones para entender el problema.
<b>Presenta ejemplos</b>	No	No
<b>Ilustraciones</b>	No	No
<b>Cuál es el tema</b>	Áreas y perímetros.	Áreas y perímetros
<b>Identifica las palabras claves</b>	Triángulo equilátero, al unir los puntos medios de los lados, se repite la misma operación.	Triángulo equilátero, al unir los puntos medios de los lados, se repite la misma operación.
<b>Ideas Previas</b>	Perímetro y área de un triángulo.	Perímetro y área de un triángulo.
<b>Interpretación de la situación</b>	El área y perímetro de cada triángulo ira disminuyendo en mientras más sean.	Si se hace infinitamente, no se puede obtener un resultado definitivo.
<b>¿El contenido del texto es suficientemente claro, si no por qué?</b>	Si, tiene todas las especificaciones para poder construir una representación y las preguntas realizadas son claras.	Si, plantea de forma clara la situación para poder entender el texto.
<b>¿Qué cambios realizarías en el texto?</b>	Los resultados que pide. Una medida inicial de donde partir.	Los resultados que pide. Una medida inicial de donde partir.

### Primer acercamiento.

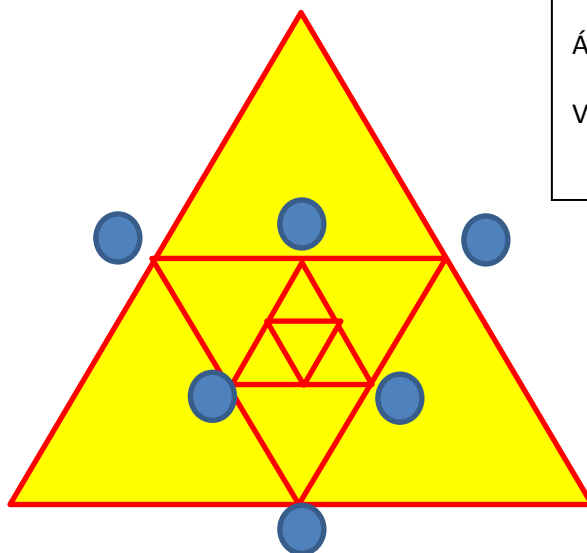
Al leer el texto, parece algo sencillo, con especificaciones claras y preguntas concisa, sin embargo, a la hora de resolverlo, parece no tener una respuesta concisa debido a que el proceso se repite indefinidamente. Por otro lado, podríamos acercarnos a un resultado, pues llega un momento en que los datos son tan insignificantes que son despreciables para llegar a una conclusión.




Con base en la información, se puede hacer un modelo que cumpla con las características señaladas, no con los infinitos triángulos, pero nos podemos dar una idea. El modelo quedaría así:



### Segundo acercamiento.

Habiendo construido un modelo de la figura, es preciso identificar las partes que nos serán útiles de éste. Para ello se volverá a ocupar el mismo modelo pero con un código de colores sencillo de interpretar.



Perímetro	
Área	
Vértices del siguiente triángulo	

### Tercer acercamiento.

Ya al haber construido el modelo, al querer resolverlo, se presenta otra problemática, que es el no tener las medidas del triángulo principal que da origen a los demás dentro de él. Se podrían suponer los datos, pero el resultado podría variar con respecto a otra persona que le dé un enfoque diferente, a pesar de esto se le pueden dar unos valores en abstracto y de esta manera plantear una situación original.

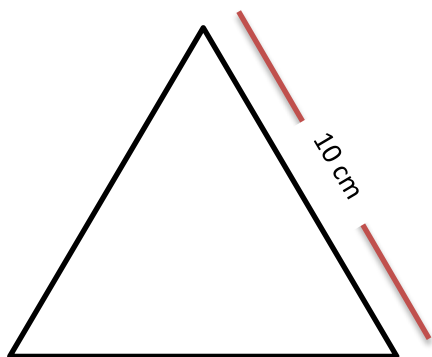
A causa de no tener las medidas y que obtener un resultado de algo que se repite infinitamente es casi imposible, la solución podría darse simplemente como sumatoria de los valores que pudieran obtener.

Para el perímetro, haciendo pruebas y suponiendo valores, se puede observar que el perímetro del triángulo contenido en su predecesor, es la mita de este, por lo que se podría proponer esto:

$$\sum P = P + P/2 + P/4 + P/8 + P/16 + P/32 \dots$$

Esto lo podemos comprobar con un simple proceso de dos triángulos, el principal y su sucesor:

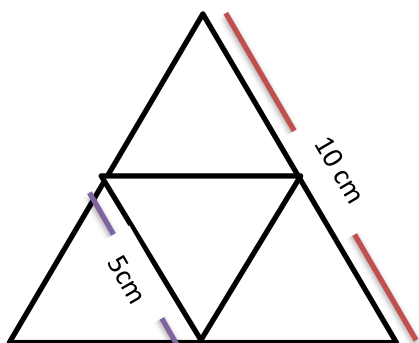
En principio se tiene un triángulo por ejemplo de 10cm de lado, al ser equilátero, basta con multiplicar por 3 el valor de su lado.



$$P = 3(10\text{cm})$$

Dándonos un perímetro de 30 cm

Posteriormente se ubica el triángulo sucesor como lo indica el problema. Al realizar las medidas correspondientes, se puede observar que el valor del lado de ese triángulo resultante es la mitad del de su antecesor.



$$P = 3(5\text{cm})$$

Dándonos así un perímetro de 15cm, que es la mitad del perímetro original.

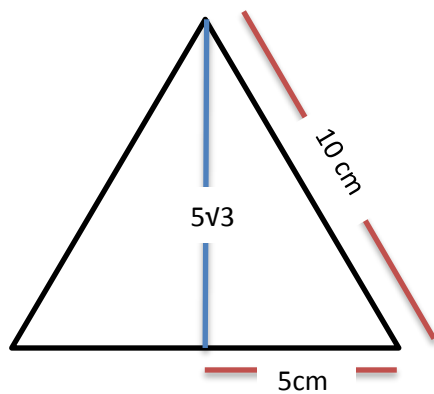
Así podemos comprobar que el perímetro es la mitad del triángulo del que procede.

En cuanto a las áreas, se puede observar que va disminuyendo en una proporción de cuatro veces con respecto a la anterior, por lo que se podría representar de esta forma:

$$\Sigma A = A + A/4 + A/16 + A/64 + A/256 + A/1024$$

Esto se puede comprobar de la misma forma con dos triángulos.

En principio se tiene un triángulo por ejemplo de 10cm de lado, al ser equilátero, su altura se puede calcular con teorema de Pitágoras.



$$h = \sqrt{10^2 - 5^2}$$

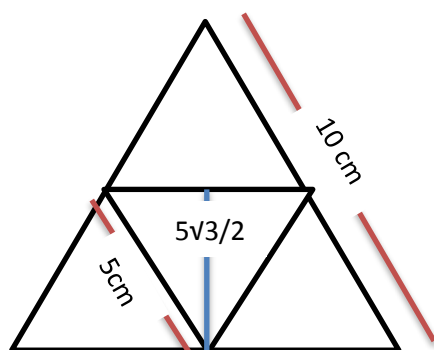
$$h = 5\sqrt{3}$$

Realizamos la operación del área:

$$A = (10\text{cm} \times 5\sqrt{3}\text{cm})/2$$

Y obtenemos un área de  $25\sqrt{3}\text{cm}^2$

Luego ponemos el segundo triángulo y de igual forma calculamos su altura y su área, ya conocemos la medida de sus lados gracias a la comprobación anterior.



$$h = \sqrt{5^2 - 2.5^2}$$

$$h = 5\sqrt{3}/2$$

Obtenemos su área:

$$A = (5\text{cm} \times 5\sqrt{3}/2)/2$$

$$A = 25\sqrt{3}/4$$

Así queda comprobada su relación de que el área del triángulo siguiente es una cuarta parte del área del triángulo que lo antecede.

De esta forma, no importan los datos iniciales que se supongan, la correspondencia en cuanto al perímetro y el área de dichos triángulos, será la misma, de  $\frac{1}{2}$  para los perímetros y de  $\frac{1}{4}$  para las áreas.

#### Cuarto acercamiento.

Ya teniendo la correspondencia o relación entre estos triángulos, podemos proceder a resolver el problema.

La forma de hacerlo se puede realizar para la suma de los perímetros y de las áreas por igual, en este caso lo haremos con los primeros. Así, podríamos plantear los resultados como una sucesión numérica, pues hay una relación constante con respecto uno de otro, esto se puede expresar con un modelo matemático que indica su forma general, para este caso, en el que cada uno de los resultados (exceptuando al primero) se puede obtener multiplicando por un medio el anterior, tenemos lo siguiente:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{Siendo "n" el lugar que ocupa el término.}$$

También debemos considerar la condición de las sucesiones, la cual nos dice que solo es una sucesión geométrica si cumple con lo siguiente:  $a_{k+1} = qa_k$

Donde "q" es un número fijo llamado razón de la sucesión. Así, en el caso de las sucesiones geométricas, basta con conocer el primer término " $a_1$ " y la razón, para conocer los demás:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$$

Con esta propiedad podemos obtener la suma de los primeros "k" términos de la sucesión, que podemos denotar como:  $S_k$

Realizando esta suma tendríamos que:

$$S_k = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{k-1} \quad \text{Ahora, si } qS_k = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^k$$

$$S_k - qS_k = a_1 - a_1q^k$$

$$S_k(1-q) = a_1(1-q^k)$$

$$S_k = a_1(1-q^k)/(1-q)$$

$$S_k = a_1(1-q^k/1-q)$$



Para este caso, “k” tiende a infinito, por lo que hay que considerar que cuando “k” tiende a infinito, si  $|q| < 1$ , entonces  $q^k = 0$  y nuestro valor de “q” es  $\frac{1}{2}$  por lo que sustituyendo obtenemos que la suma de total sería:

$$S_k = 30(1 - 0/1 - \frac{1}{2})$$

$$S_k = 30(1 - \frac{1}{2})$$

$$S_k = 30(2)$$

$$S_k = \mathbf{60cm}$$

Esto no es del todo cierto, puesto que la sucesión es infinita, sin embargo, en estos casos, el resultado se acerca tanto a este número que podríamos decir que el resultado de todos los perímetros converge a 60cm partiendo de un perímetro inicial de 30cm.

De igual forma se puede hacer lo mismo con la suma de las áreas pero cambiando la relación de sucesión a  $\frac{1}{4}$  y el primer término:

$$S_k = 25\sqrt{3} (1 - 0/1 - \frac{1}{4})$$

$$S_k = 25\sqrt{3} (1 - \frac{1}{4})$$

$$S_k = 25\sqrt{3} (4)$$

$$S_k = \mathbf{173.2cm^2}$$

## Análisis y discusión: Vértigo

Momentos	Indicadores	Criterios
Representaciones Mentales. (Descripción del problema)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura en voz alta el texto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entonación</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura del texto en voz baja.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li></li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante expone el problema con su lenguaje natural.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprensión total del texto</li> </ul>
Representación Pictórica (Opera y modifica la representación)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica información relevante</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Opera con la representación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establece tratamientos con la información</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone con claridad información relevante</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone la representación a través de diferentes movimientos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone totalmente los movimientos</li> </ul>
Representaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone una expresión simbólica identificando las variables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica las variables</li> </ul>

Simbólicas (Modifica representaciones simbólicas)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relaciona las variables correctamente</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica o elimina la expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece modificaciones a la expresión simbólica</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica su expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica plenamente</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación verbal y la representación Pictórica. (Conexiones entre la representación pictórica con una representación verbal).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece conexiones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica la representación</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta elementos pictóricos</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación pictográfica y la representación simbólica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formula una expresión desde una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta totalmente</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta totalmente las relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza totalmente los cambios</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza totalmente los cambios</li> </ul>

**Análisis:** En el presente problema la situación que presente fue inicialmente analizar su contenido y como lo indica el cuadro inicial, establecí la recontextualización de su contenido a través del siguiente análisis: Se dibuja un triángulo dentro de otro tomando como vértices el punto medio de los lados del anterior, queriéndose conocer su perímetro y su área y se quiere saber cuál sería la suma de las áreas y los perímetros de los triángulos si estos se van haciendo uno dentro de otro infinitamente. Ello me permitió considerar las ideas previas para abordar la situación.

### 3.3 Dédalo y Calipso

En una ciudad chica hay dos misceláneas, “La gruta de Calipso” y “El laberinto de Dédalo” que compiten por 1000 clientes potenciales. Cada mes, el 80% de los clientes de Calipso queda satisfecho y regresa a comprar ahí mismo, mientras que el 20% restante prefiere irse con Dédalo. En cambio, de los clientes de Dédalo, solo el 70% queda satisfecho, el otro 30% se va con Calipso. El número de clientes de cada miscelánea se estabiliza cuando el número de los que dejan de comprar en una miscelánea es igual a los que vienen a comprar en la otra, ¿Cuántos clientes habrá en cada tienda en ese momento?

Resuelve el mismo problema suponiendo que al principio hay 500 clientes en cada tienda y observando cómo evoluciona la situación mes por mes. ¿Qué ocurre si se suponen otros datos iniciales, por ejemplo, 920 clientes en una miscelánea y 80 en la otra, etcétera?

	<b>Significado matemático</b>	<b>Significado en el contexto</b>
<b>Describe la situación</b>	Se deben repartir cierto número de clientes que representan un 100% en dos tiendas, las cuales tienen relaciones porcentuales dependientes una de otra.	Dos misceláneas compiten por 1000 clientes, pero estos van cambiando cada mes de preferencia en relaciones especificadas, lo que hace que no se mantenga igual ni constante el número de clientes que tiene una con respecto a su contrincante.
<b>Cuántos enunciados</b>	4	4
<b>Los enunciados son especificaciones o generalidades</b>	Especificaciones de las relaciones porcentuales.	Especificaciones de los clientes que adquieren y pierden en relación.
<b>Presenta ejemplos</b>	Si	Si
<b>Ilustraciones</b>	No	No
<b>Cuál es el tema</b>	Relación porcentual.	Relación porcentual.
<b>Identifica las palabras claves</b>		
<b>Ideas Previas</b>	Porcentaje, tabulación, funciones.	Porcentaje, tabulación, funciones.
<b>Interpretación de la situación</b>	Los clientes de las tiendas, dependen del porcentaje de los clientes insatisfechos de la otra, así como el porcentaje de	Las pérdidas de una representan la ganancia de otra, y como siempre existe este factor, ninguna de las dos puede

	efectividad para conservar los propios.	quedarse sin clientes, sin embargo una puede tener más que otra debido a la capacidad para satisfacer a sus clientes.
<b>¿El contenido del texto es suficientemente claro, si no por qué?</b>	Si, cuenta con las especificaciones necesarias para poder obtener los datos que se puedan necesitar.	Si, cuenta con las especificaciones necesarias para poder obtener los datos que se puedan necesitar.
<b>¿Qué cambios realizarías en el texto?</b>	La pregunta principal.	La pregunta principal.

### **Primer acercamiento.**

Al realizar la lectura del problema, pude observar que tiene los datos necesarios, incluye la explicación de la situación, las relaciones, los porcentajes y un buen planteamiento, sin embargo, al llegar al final, a la pregunta que se debe dar solución, encuentro que el objetivo de esta no es claro, pues podría suponer que la dicha “estabilización” sería cuando hay el mismo número de clientes en cada miscelánea, es decir 50% y 50% de los clientes existentes, esto es lo que pude suponer en base a lo que explica como estabilización, por lo que no tendría sentido resolver el problema con los datos de porcentajes proporcionados, pues la respuesta se puede suponer.

### **Segundo acercamiento.**

Para construir una tabla, basta con hacer una fórmula de relación, en la primera fila se ponen los datos iniciales, para las posteriores, en cuanto a la columna de Calipso, el dato inicial que llamaremos “X” se multiplica por 0.8 que representa el 80% y se le suma el 30% del dato que tenemos en la columna de Dédalo que llamaremos “Y”, es decir

$$\text{Clientes de Calipso} = X(0.8) + Y(0.3)$$

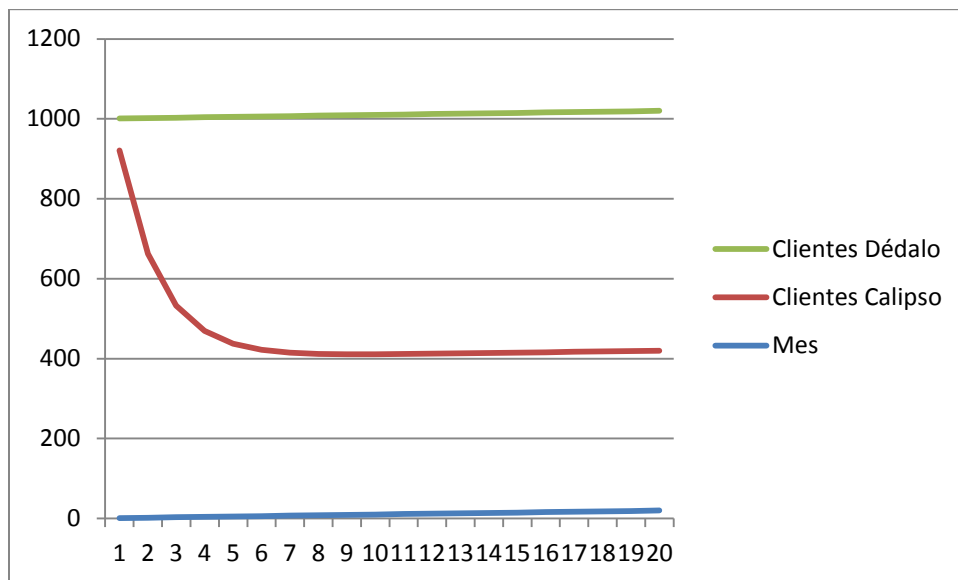
En cuanto a la columna de Dédalo, se tiene una relación similar, pero con los datos proporcionados de esta, empezando por considerar el 70% del dato original denotado como “Y” y sumándole el 20% de “X”, quedando una expresión de esta forma:

$$\text{Clientes de Dédalo} = Y(0.7) + X(0.2)$$

Cambiando los valores de “X” y “Y” con respecto a la fila en la que nos encontremos, considerando estos valores de la fila anterior pero que mantienen la misma relación.

**Tercer acercamiento.**

MES	CLIENTES CALIPSO	CLIENTES DÉDALO
1	920	80
2	660	340
3	530	470
4	465	535
5	432.5	567.5
6	416.25	583.75
7	408.125	591.875
8	404.0625	595.9375
9	402.03125	597.96875
10	401.015625	598.984375
11	400.507813	599.492188
12	400.253906	599.746094
13	400.126953	599.873047
14	400.063477	599.936523
15	400.031738	599.968262



En conclusión del problema, se presenta una gran barrera, pues los datos que se obtienen al aplicar las formulas propuestas, a pesar de estar bien aplicadas, llegan a un punto en el que tienden a tener valores decimales, y son los únicos que se van modificando, mientras que el número antes del punto permanece constante. Esto

puede significar que hay un error en las condiciones del problema o en la solución propuesta. Por lo que habría que replantear una solución y en caso de obtener el mismo resultado, suponer que el error está en el problema.

## Análisis y Discusión

Momentos	Indicadores	Criterios
Representaciones Mentales. (Descripción del problema)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura en voz alta el texto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entonación</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura del texto en voz baja.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No presenta</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante expone el problema con su lenguaje natural.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Un parte de texto fue incomprendida. “sin embargo, al llegar al final, a la pregunta que se debe dar solución, encuentro que el objetivo de esta no es claro, pues podría suponer que la dicha “estabilización” sería cuando hay el mismo número de clientes en cada tienda”</li> </ul>
Representación Pictórica (Opera y modifica la representación)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica parcialmente la información</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Opera con la representación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establece parcialmente el tratamiento. “sería cuando hay el mismo número de clientes en cada miscelánea, es decir 50% y 50% de los clientes existentes, esto es lo que pude suponer en base a lo que explica como estabilización, por lo que no tendría sentido resolver el problema con los datos de porcentajes proporcionados, pues la respuesta se puede suponer.”</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expone parcialmente la información</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expone la representación a través de diferentes movimientos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica algunas variables “ es decir 50% y 50% de los clientes existentes, esto es lo que pude suponer en base a lo que explica como estabilización, por lo que no tendría sentido resolver el problema con los datos”</li> </ul>
Representaciones Simbólicas (Modifica representaciones simbólicas)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expone una expresión simbólica identificando las variables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente modificaciones; “En cuanto a la columna de Dédalo, se tiene una relación similar, pero con los datos proporcionados de esta, empezando por considerar el 70% del dato original denotado como “Y” y sumándole el 20% de “X”, quedando una expresión de esta forma: Clientes de Dédalo=<math>Y(0.7)+X(0.2)</math>”</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente las relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica o elimina la expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Parcialmente las modificaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica su expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica parcialmente</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación verbal y la representación Pictórica. (Conexiones entre la representación pictórica con una representación verbal).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece algunas conexiones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica la representación; “Cambiando los valores de “X” y “Y” con respecto a la fila en la que nos encontremos, considerando estos valores de la fila anterior pero que mantienen la misma relación”</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente las relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta elementos pictóricos</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación pictográfica y la representación simbólica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formula una expresión desde una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta totalmente</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta parcialmente las relaciones.” ¿Se grafica el avance de los meses y puedes representar otra variable?”</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza parcialmente los cambios</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Parcialmente los cambios: “Esto puede significar que hay un error en las condiciones del problema o en la solución propuesta. Por lo que habría que replantear una solución y en caso de obtener el mismo resultado, suponer que el error está en el problema.”</li> </ul>

**Análisis:** el análisis me permitió identificar algunos elementos que inicialmente deje de lado, sin embargo cuando reflexioné sobre la situación y la discusión con mis compañeros me permitió identificar elementos para nuevamente recontextualizar la situación y conectarlas con mis ideas previas: Porcentaje, tabulación, funciones.



### 3.4 ¡Queremos rock!

Por problemas con las autoridades delegacionales se tienen que cambiar el escenario de un concierto de rock. Se debe acondicionar en menos de 8 horas. Una empresa puede instalar los asientos en 12 horas y cobra \$20,000, otra se tarda 18 horas y cobra \$15,000 por hacer el mismo trabajo.

- ¿Se podrá realizar el concierto si se contrata a las dos empresas?
- ¿En qué términos se debe establecer el contrato para que los organizadores paguen lo menos posible?

	<b>Significado matemático</b>	<b>Significado en el contexto</b>
<b>Describe la situación</b>	Se tiene que evaluar el tiempo y el precio de realizar un trabajo con dos variables que deben trabajar conjuntamente.	Se deben acomodar las sillas de un concierto en cierto tiempo y dos empresas pueden realizar el trabajo juntas, pero cada una tiene sus tiempos y precios.
<b>Cuántos enunciados</b>	3	3
<b>Los enunciados son especificaciones o generalidades</b>	Son especificaciones.	Son especificaciones.
<b>Presenta ejemplos</b>	No	No
<b>Ilustraciones</b>	No	No
<b>Cuál es el tema</b>	Problema con variables.	Problema con variables.
<b>Identifica las palabras claves</b>	Menos de 8hrs, precios, si se contrata a las dos.	Menos de 8hrs, precios, si se contrata a las dos.
<b>Ideas Previas</b>	Tabulación.	Tabulación.
<b>Interpretación de la situación</b>	Se debe acomodar los precios y los horarios de tal forma que cumpla con los requerimientos que son el tiempo establecido y la mejor inversión.	Se deben contratar a las dos empresas pero comparando su precio y el tiempo para poder terminar en el lapso establecido y que se invierta el menor dinero posible.
<b>¿El contenido del texto es suficientemente claro, si no por qué?</b>	No, debido a que le falta información para contestar el problema.	No, debido a que le falta información para contestar el problema.
<b>¿Qué cambios realizarías en el texto?</b>	Que diera especificaciones sobre los contratos que se puede realizar con cada empresa.	Que diera especificaciones sobre los contratos que se puede realizar con cada empresa.

### Primer acercamiento.

Analizando el problema, cuenta con los datos suficientes para poder resolverlo de forma simple, sin embargo es necesario hacer suposiciones, pues no especifica si las empresas pueden hacer medios contratos, es decir, si cobran la mitad por hacer la mitad del trabajo que ofertan o si se pueden manipular las cifras con respecto al tiempo de trabajo que establecen, esto es importante, pues para cumplir uno de los puntos, pide que se haga de la forma más económica posible, sin embargo, no se cuenta con los datos suficientes, se tendrían que hacer suposiciones sin la certeza de que se acoplan al problema de manera correcta.

### Segundo Acercamiento.

Después de volver a analizar el problema y querer proponer una solución, note que al no tener los datos de la flexibilidad de los precios con respecto a las horas, es decir, que si se paga más el trabajo se hará más rápido, pero al no contar con estos datos, no es posible continuar con la resolución.

Se podrían plantear los datos y una supuesta relación, en una tabla como esta:

Empresa	Costo	Tiempo	¿Se acaba a tiempo?
1	\$20,000	12hrs	No
2	\$15,000	18hrs	No

Así con estos datos, se pueden hacer suposiciones, por ejemplo, se podría pensar que si se contratan a ambas empresas, cada una realizaría la mitad del trabajo, tardaría la mitad del tiempo y por consecuencia cobraría la mitad, para ello habría que sumar la mitad del precio de cada una y considerar en el tiempo lo la mitad del más tardado, es decir, el mayor tiempo que lleva hacer todo el trabajo, son 18hrs, pero al solo hacer la mitad del trabajo, les llevaría 9hrs y es este el tiempo que se considera pues ambas empresas trabajarían al mismo tiempo, con esto nos quedaría algo así:

Empresa	Costo	Tiempo	¿Se acaba a tiempo?
1 y 2	\$17,500	9hrs	No

En conclusión, el problema no cuentas con los datos suficientes para poder darle una solución, pues los resultados tendrían que basarse en meras suposiciones, lo cual no es correcto, pues la interpretación puede variar de un lector a otro. Para

solucionar esto, habría que incluir los datos de relación que tienen las empresas entre sí, es decir, como va cambiando la relación del tiempo con el precio, por ejemplo ¿Si se les paga el doble harían el trabajo en la mitad del tiempo?, y si es esto, ¿Cuál sería el menor tiempo en el que podrían realizar el trabajo?, con estos datos, podríamos evaluar que tan rentable es contratar a una u otra empresa o a ambas con relación al tiempo y a los costos.

## Análisis y Discusión

Momentos	Indicadores	Criterios
Representaciones Mentales. (Descripción del problema)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura en voz alta el texto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entonación</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura del texto en voz baja.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No presenta</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante expone el problema con su lenguaje natural.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Un parte de texto fue incomprendida.</li> <li>“Se tiene que evaluar el tiempo y el precio de realizar un trabajo con dos variables que deben trabajar conjuntamente” es decir optimización</li> </ul>
Representación Pictórica (Opera y modifica la representación)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica parcialmente la información</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Opera con la representación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establece parcialmente el tratamiento. “Tabulación”, Se podría plantear los datos y una supuesta relación”</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone parcialmente la información. “Se deben contratar a las dos empresas pero comparando su precio y el tiempo para poder terminar en el lapso establecido y que se invierta el menor dinero posible”, comentario: hallar una relación explícita entre el porcentaje de trabajo realizado, el</li> </ul>

		tiempo y los costos que implican.
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expone la representación a través de diferentes movimientos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica algunas variables, parcialmente</li> </ul>
Representaciones Simbólicas (Modifica representaciones simbólicas)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expone una expresión simbólica identificando las variables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente modificaciones;</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente las relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica o elimina la expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Parcialmente las modificaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica su expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica parcialmente</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación verbal y la representación Pictórica. (Conexiones entre la representación pictórica con una representación verbal).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece algunas conexiones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica la representación;</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente las relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta elementos pictóricos</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación pictográfica y la representación simbólica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formula una expresión desde una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta totalmente :</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta parcialmente las relaciones.” Para solucionar esto, habría que incluir los datos de relación que tienen las empresas entre sí, es decir, como va cambiando la relación del tiempo con el precio, por ejemplo”</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta los cambios</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta los cambios: “el problema no cuenta con los datos suficientes para poder darle una solución, pues los resultados tendrían que basarse en meras suposiciones”</li> </ul>
--	---	--

**Análisis:** Con base al análisis del problema, a pesar de la recontextualización realizada, no pude llegar a una resolución, debido a la clara falta de información previamente señalada en las conclusiones del problema, de igual forma no se tienen los elementos suficientes para realizar una representación pictórica para su resolución más que una en la que englobe los datos expuestos. Al discutirlo con mi compañero, tuvo opiniones y resultados similares, por lo que a pesar del conocimiento previo para la resolución del problema, esto no es posible sin la información necesaria.

### 3.5 Compañía de discos

Una compañía de discos estima que podrá vender siete mil álbumes de una nueva versión de “Così fan tutte” de Mozart-Da ponte a \$640 cada álbum. Por cada reducción de \$20 en el precio del álbum, calcula que venderá 300 álbumes más. A la compañía cada álbum le cuesta \$150 y sus costos fijos son de \$200,000.

- Encuentra el número de álbumes que dará a la compañía la ganancia máxima.
- Encuentra el número de álbumes que dará a la compañía la ganancia máxima por cada peso invertido.

	<b>Significado matemático</b>	<b>Significado en el contexto</b>
<b>Describe la situación</b>	Se requiere aumentar el número de productos vendido para obtener una ganancia reduciendo el precio de este pero sin que la ganancia sea mayor que los gastos de producción.	Se estima que se venderán cierto número de discos, pero si se reduce el precio, se venderán más, se debe obtener el precio al que se puedan vender el mayor número de discos y obtener la mayor ganancia.
<b>Cuántos enunciados</b>	3	3
<b>Los enunciados son especificaciones o generalidades</b>	Generalidades y especificaciones.	Generalidades y especificaciones.
<b>Presenta ejemplos</b>	No.	No.
<b>Ilustraciones</b>	No	No
<b>Cuál es el tema</b>	Optimización	Optimización
<b>Identifica las palabras claves</b>		
<b>Ideas Previas</b>	Tabulación, funciones.	Tabulación, funciones.
<b>Interpretación de la situación</b>	Se debe obtener el número de discos apropiados para que se pueda obtener la mayor ganancia y la pérdida sea la menor posible, considerando que cada reducción del precio representa una pérdida y de igual forma una ganancia.	La ganancia de la venta debe ser la mayor, por lo que se debe encontrar el punto exacto donde la oferta sea rentable para obtener la mayor ganancia con respecto a los gastos de producción.

¿El contenido del texto es suficientemente claro, si no por qué?	Si, cuenta con los datos y las especificaciones suficientes para resolverlo.	Si, cuenta con los datos y las especificaciones suficientes para resolverlo.
¿Qué cambios realizarías en el texto?	Las preguntas a resolver.	Las preguntas a resolver.

### Primer acercamiento.

Considero que el problema está muy bien planteado, cuenta con una explicación sencilla y con los datos suficientes para su resolución, sin embargo, las preguntas que se deben contestar no son lo suficientemente claras pues su respuesta podría ser la misma pues son muy similares, depende mucho de la interpretación que se le dé a éstas. El planteamiento del problema es correcto, pero el problema radica en las preguntas de resolución, dado que estos dos factores funcionan como un conjunto, de una forma general, el problema está mal redactado pues el resultado que se solicita no es suficientemente claro.

### Segundo acercamiento.

Realizando un segundo análisis del problema, nos podemos dar cuenta que proporciona los datos suficientes para poder construir una tabla con ellos donde está la relación del descuento realizado con la inversión y las ganancias respecto al número de álbumes.

Para poder obtenerla el primer factor que debemos considerar sería el precio del álbum, que se va reduciendo en \$20 cada vez, alterando las demás columnas. En la segunda columna por cada reducción de precio se aumentan 300 álbumes, cambiando la inversión que se requiere para su producción así como la ganancia obtenida. Estas dos columnas se pueden obtener sin necesidad de un cálculo muy complejo.

En cuanto a la tercera y cuarta columna, estas cambian en función de las dos anteriores con respecto a la fila en la que se encuentren, con los datos proporcionados podemos inferir que para la tercera columna considerando los gastos fijos y los costos de producción con respecto al número de álbumes tenemos esto:

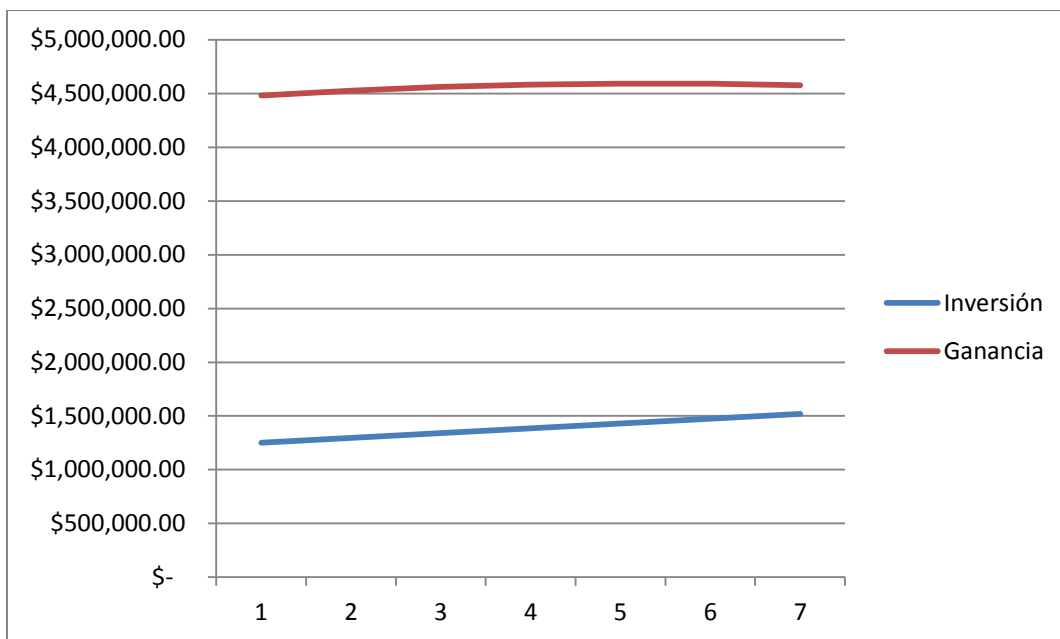
$$\text{Inversión} = \$200,000 + \$150(X) \quad \text{Siendo "X" el número de álbumes.}$$

Para la obtención de la cuarta columna, basta con el producto de ambas variables, que son las dos primeras columnas, quedando algo así:

$$\text{Ganancias} = XY \quad \text{Siendo "X" el número de álbumes y "Y" el precio de éstos.}$$

La construcción de la tabla quedaría de esta forma:

Precio de álbum	Número de álbumes	Inversión	Ganancia
\$640	7000	\$1,250,000	\$4,480,000
\$620	7300	\$1,295,000	\$4,526,000
\$600	7600	\$1,340,000	\$4,560,000
\$580	7900	\$1,385,000	\$4,582,000
\$560	8200	\$1,430,000	\$4,592,000
\$540	8500	\$1,475,000	\$4,590,000
\$520	8800	\$1,520,000	\$4,576,000



Con los datos obtenidos, se puede concluir que la inversión es constantemente creciente, mientras que las ganancias, tienen un pico que representa la mayor ganancia que se puede obtener que es cuando el álbum tiene un precio de \$560, después de eso, la ganancia empieza a descender, hasta llegar a un punto que en la gráfica, pueda tocar la línea de la inversión y cuando sea menor, empezar a generar pérdidas haciendo que la reducción de precio ya no sea rentable.

Ya con estos datos, sería de esperarse el poder darle solución al problema, sin embargo, continúa la problemática de la mala formulación de las preguntas de resolución, las cuales representan un muro para la finalización de éste, pues a pesar de tener los datos suficientes o en el caso de que se deban obtener nuevos, no hay una especificación clara de lo que se desea obtener.



Momentos	Indicadores	Criterios
Representaciones Mentales. (Descripción del problema)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura en voz alta el texto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entonación</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura del texto en voz baja.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No presenta</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante expone el problema con su lenguaje natural.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Un parte de texto fue incomprendida. "Considero que el problema está muy bien planteado, cuenta con una explicación sencilla y con los datos suficientes para su resolución, sin embargo, las preguntas que se deben contestar no son lo suficientemente claras"</li> </ul>
Representación Pictórica (Opera y modifica la representación)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica parcialmente la información</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Opera con la representación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establece parcialmente el tratamiento. "su respuesta podría ser la misma pues son muy similares, depende mucho de la interpretación que se le dé a éstas."</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone parcialmente la información</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone la representación a través de diferentes movimientos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica algunas variables "Realizando un segundo análisis del problema, nos podemos dar cuenta que proporciona los datos suficientes para poder construir una tabla con ellos donde está la relación del descuento realizado con la inversión y las ganancias respecto al número de álbumes."</li> </ul>
Representaciones Simbólicas	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone una expresión simbólica identificando las variables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establece parcialmente modificaciones;</li> </ul>

(Modifica representaciones simbólicas)		“Para poder obtenerla el primer factor que debemos considerar sería el precio del álbum, que se va reduciendo en \$20 cada vez, alterando las demás columnas. En la segunda columna por cada reducción de precio se aumentan 300 álbumes, cambiando la inversión que se requiere para su producción así como la ganancia obtenida.”
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente las relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica o elimina la expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Parcialmente las modificaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica su expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica parcialmente</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación verbal y la representación Pictórica. (Conexiones entre la representación pictórica con una representación verbal).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece algunas conexiones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta modificación</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente las relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta elementos pictóricos</li> </ul>
Establecer conexiones entre la representación pictográfica y la representación simbólica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formula una expresión desde una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta totalmente</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta totalmente; “Con los datos obtenidos, se puede concluir que la inversión es constantemente creciente, mientras que las ganancias, tienen un pico que representa la mayor ganancia”</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza parcialmente los cambios</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta cambios</li> </ul>

**Análisis:** En el presente problema, mi primer paso fue analizar las variables e identificarlas como datos, posteriormente dar una recontextualización con los datos obtenidos para obtener la relación que existe entre ellos y como el cambio de uno afecta a todos los demás. En conjunto con mis conocimientos previos y la invención de una representación, pude abordar este problema considerando algunos elementos que había dejado de lado en el primer acercamiento.

## Capítulo IV. Análisis de problemas

A continuación se analizarán los problemas por compañeros de sexto semestre para analizar sus acercamientos desde las representaciones.

### Problema: “¡Queremos Rock!”

Por problemas con las autoridades delegacionales se tiene que cambiar el escenario de un concierto de rock. Se debe acondicionar en menos de 8 horas. Una empresa puede instalar los asientos en 12 horas y cobra \$20,000, otra se tarda 18 horas y cobra \$15,000 por hacer el mismo trabajo.

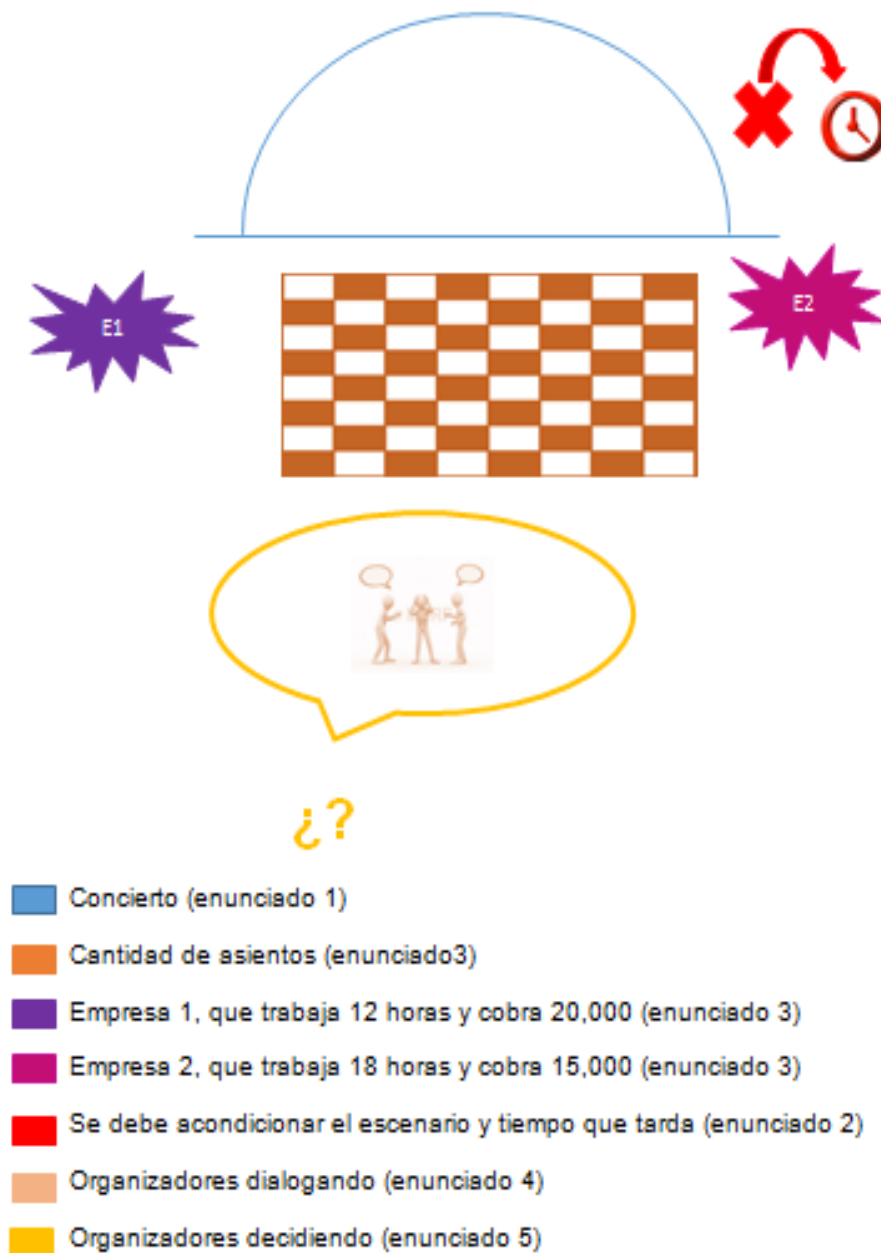
- ¿Se podrá realizar el concierto si se contrata a las dos empresas?
- ¿En qué términos se debe establecer el contrato para que los organizadores paguen lo menos posible?

	Significado matemático	Significado en el contexto
Describe la situación	Engloba algunos datos que se requieren para comenzar a formular ideas previas y ver posibles maneras de solución al problema.	Plantea el problema desde una perspectiva más apegada a la realidad y por consecuente genera un poco más de comprensión y entendimiento.
Cuantos enunciados	Es la cantidad de renglones necesarios para crear especulaciones acerca de la solución del problema. Además esta información contenida en los renglones es seleccionada para no caer en errores o redundancias.	Es el problema o párrafo en sí, en el cual hay que depurar la información para obtener solo la necesaria. En este caso es el desarrollo o narración del problema.
Lo enunciados son específicos o generalidades	Son generalidades ya que no presenta datos cerrados o específicos, además de que aborda en si temas generales.	En este caso son generalidades ya que no establecen el número específico de asientos del concierto, lo cual se puede prestar a especulaciones.
Presenta ejemplos	No, ya que no presenta semejanzas o analogías con otro caso, sino que abordó el mismo caso, estableciendo al final 2 incógnitas.	Sólo presenta datos que nos podrían, servir para generar nuestros propios ejemplos, pero en sí sólo establece una relación entre presupuestos de 2

		empresas.
Ilustraciones	Son aquellas representaciones que nos ayudan a esclarecer los datos numéricos más fácilmente.	Es aquel dibujo espacial en el cual plasmamos todos los datos, para posteriormente llevarlo a pale o empezar a trabajar sobre él.
Cuál es el tema	Es aquella rama de las matemáticas que engloba ciertos subtemas que nos servirán para resolver el problema.	En este caso, el tema podría ser una regla de 3, pero también podemos generar tablas debido a que no existe un dato específico sobre el número de asientos.
Identifica las palabras claves	Son aquellos datos que se nos proporcionan dispersos en el texto, que darán pauta a la resolución del problema.	Son los datos que nos ayudan a generar ideas acerca del problema y como es que lo podemos solucionar, como por ejemplo en este caso, las horas de trabajo y los costos.
Ideas previas	Son los criterios que se establecen previamente al desarrollo y resolución del problema. Además son aquellas ideas que surgen posterior a la lectura del texto que contiene el problema.	En este caso lo primero es interpretar el texto, y posteriormente recordar y seguir algunos temas, ecuaciones y operaciones para encontrar la solución del problema.
Interpretación del problema	Se entiende como la traducción al lenguaje matemático del texto, y depurando sobre todo la información que solo habla de cómo se desarrolla el problema.	Es aquella representación gráfica en la cual se refleja el grado de comprensión y entendimiento, para poder solucionar el tema. En este caso es un escenario con $n$ número de asientos y tiempo de trabajo con su costo.
El contenido del enunciado es suficiente claro, si no ¿Por qué?	No es lo suficientemente claro, debido a que no establecen cuantos asientos colocan cada empresa en sus horas totales de trabajo.	No, ya que establecen sólo un panorama general del problema, pero no dan detalles, ni datos que se pueden considerar como útiles para la resolución

		del problema.
Que cambios realizarías en el texto.	En este caso, cambiaríamos la parte de la cantidad de asientos, en lugar del tiempo de acondicionamiento.	Para llegar a la resolución del problema haríamos más legible el objetivo de la segunda pregunta “¿En qué términos se debe establecer el contrato para que los organizadores paguen lo menos posible?”

### Representación 1



Podríamos comenzar a establecer ecuaciones con los datos que nos dan, y en realidad el número de asientos es irrelevante ya que el punto de mayor interés es el costo y con quien tienen que tratar.

### Reflexiones acerca del problema

\* En la primera lectura que se le dio al problema, se tomó como dato principal el número de asientos, por lo cual se establecían 2 incógnitas al momento de intentar resolver el problema.

\* Posteriormente en la segunda lectura, se comprendió que el dato que tenía mayor peso en sí era, si se llegaban a contratar las 2 empresas se lograría el trabajo, y además al menor costo.

\* Finalmente se estableció, que en si ya tenemos los datos relevantes, por así decirlo el porcentaje de trabajo, el costo y las horas de trabajo por cada empresa, a partir de estos datos se puede comenzar a trabajar.

Momentos	Indicadores	Criterios
Representaciones Mentales. (Descripción del problema)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura en voz alta el texto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entonación</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los alumnos leen el texto en voz baja.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No presenta</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante expone el problema con su lenguaje natural.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprensión total del texto</li> </ul>
Representación Pictórica (Opera y modifica la representación)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica información relevante</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Opera con la representación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establece tratamientos con la información</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No expone con claridad la información</li> <li>Expone parcialmente información</li> <li>Expone con claridad información relevante</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone la representación a través de diferentes movimientos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone totalmente los movimientos</li> </ul>
Representaciones Simbólicas (Modifica representaciones simbólicas)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Expone una expresión simbólica identificando las variables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica algunas variables; "En la primera lectura que se le dio al problema, se tomó como dato principal el número de asientos, por lo cual se establecían 2 incógnitas al momento de intentar resolver el problema."</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establece parcialmente las relaciones entre las variables; "Podríamos comenzar a establecer ecuaciones con los datos que nos dan, y en realidad el número de asientos es irrelevante ya que el punto de mayor interés es el costo y con quien tienen que tratar."</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modifica o elimina la expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Establece modificaciones a la expresión simbólica "Posteriormente en la segunda lectura, se comprendió que el dato que tenía mayor peso en sí era, si se llegaban a contratar las 2 empresas se lograría el trabajo, y</li> </ul>



		además al menor costo.”
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica su expresión simbólica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifica plenamente</li> </ul>
<p>Establecer conexiones entre la representación verbal y la representación Pictórica. (Conexiones entre la representación pictórica con una representación verbal).</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece parcialmente algunas conexiones; “Finalmente se estableció, que en si ya tenemos los datos relevantes, por así decirlo el porcentaje de trabajo, el costo y las horas de trabajo por cada empresa, a partir de estos datos se puede comenzar a trabajar.”</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta modificaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta e algunos elementos, “Se sabe, que el trabajo de ambas empresas no puede exceder a las 8 horas, por lo cual el tope máximo de tiempo por cada empresa es de 8 horas.”</li> </ul>
<p>Establecer conexiones entre la representación pictográfica y la representación simbólica.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formula una expresión desde una representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta totalmente</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta totalmente las relaciones</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No presenta cambios</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No presenta cambios</li> </ul>

**Análisis:** En este problema, el compañero hizo un análisis partiendo de una representación en la que englobaba los datos obtenidos, gracias a esto pudo hacer una recontextualización, la cual junto con sus conocimientos previos, lo llevaron a idear una posible solución a dicho problema.

## Conclusiones

Este trabajo tenía como propósito analizar la importancia que tienen las representaciones en el análisis de problemas matemáticos, específicamente en el nivel medio superior. Esto se cumplió de forma satisfactoria gracias a la aplicación de distintos problemas, de los cuales la mayoría de ellos se veían beneficiados con una representación, mientras que otros no la necesitaban o al contrario, no se podían resolver sin una. También es un hecho que el uso de una o más representaciones depende totalmente del lector que está tratando de darle solución, por lo que a pesar de partir de los mismos datos, estas pueden variar según la percepción y los conocimientos previos de quien lo está resolviendo, pues mientras que alguien podría necesitar de muchas representaciones por cada dato individual, otra persona podría necesitar solo una en la que englobe todo lo que considere necesario.

En cuanto a la metodología aplicada, los resultados que se esperaban de esta fueron satisfactorios, haber reducido el grupo de estudio al nivel medio superior de diferentes grados, me ayudo a tener una percepción más clara de cómo influye e entorno en el que se desarrollan, es decir, los conocimientos inmediatos a los que tienen acceso dependiendo del grado en el que cursan y si es un grado superior si todavía cuentan con esos conocimientos, pues estos conocimientos previos son indispensables para la resolución de los problemas, ya que dan una mayor fuente de recursos que son de utilidad en el análisis, la recontextualización y la resolución.

La primera parte que era el análisis propio de los problemas, me ayudo a familiarizarme con ellos y tener mis conclusiones individuales, para posteriormente poder evaluar el trabajo de otros, de esta forma podría aplicar mis conocimientos previos y dar una recontextualización basado mis percepciones, así mismo tendría mis propias representaciones de lo previamente analizado, esto para no solo tener una idea general, si no, estar adentrado en cada uno de los problemas a analizar al haber tenido mis propias experiencias. Esto a mi consideración, fue muy productivo, pues posteriormente me ayudaría en el análisis y comparación de trabajos ajenos.

En el primer problema analizado que fue el de “Vértigo”, desde el principio fue necesario hacer una representación para poder entender lo que planteaba el

problema, pues un apoyo visual era de gran ayuda. Ya con los datos agrupados en una representación, para mí fue necesario seguir cada enunciado del problema con su respectiva representación para tener un mejor panorama. En los primeros análisis, no tuve una idea clara de como resolver el problema, fue hasta después de darle una recontextualización y buscar información, ya que mis conocimientos previos no me fueron suficientes, que pude dar una propuesta de resolución, aplicando lo investigado y ayudándome de las representaciones.

El segundo problema fue el de “Dédalo y Calipso” para este problema no me fue necesario realizar una representación inicial, lo que hice fue analizar las variables, y encontrar la relación que había entre ellas con los datos proporcionados, para ello propuse dos fórmulas que trabajaban una dependiente del resultado anterior de la otra. Ya al tener estos datos organizados en una tabla, fue cuando consideré pertinente una representación de dichos datos para poder tener un apoyo gráfico en el análisis final, dicha representación me fue de gran utilidad, pues con los datos en la tabla no era suficiente para entender el comportamiento de dichas variables y de las fórmulas propuestas.

Para el tercer problema llamado “¡Queremos Rock!” tuve dificultades en su resolución, pues a mi parecer, los datos expuestos no eran suficientes para darle una solución y mucho menos para poder construir una apropiada representación de la cual pudiera partir en favor de darle una recontextualización a dicho problema, por lo que mis análisis fueron meras suposiciones de los datos que deberían incluir para tener con que trabajar.

El último y cuarto problema fue “Compañía de discos” en este tampoco necesite una representación inicial, basto con un análisis de los datos y mis conocimientos previos para poder construir una tabla que tuviera los datos en conjunto, para poder darle una solución apropiada al problema, basado en los datos de la tabla, construí una representación con la finalidad de observar el comportamiento de dichos datos en un plano y analizar sus características, de esta forma la recontextualización para la resolución del problema fue bastante simple.

Para finalizar, la parte más importante fue el análisis del trabajo de un compañero, en este punto fue la gran utilidad de haberlos realizado yo en primera instancia, pues de esta forma podía comparar mi criterio y mis resultados con los de él, es

decir, pude comparar nuestros trabajos. El problema analizado fue el de “¡Queremos rock!” desde el principio pude notar diferencias pues mientras que yo no construí una representación, él propuso una en la que juntaba los datos que proporcionaba el problema en forma gráfica. Mi conclusión de dicho problema fue la falta de datos, por su parte el intento obtener esos datos apoyándose en sus conocimientos previos, los cuales le sirvieron de herramienta para dar una propuesta de solución basada en porcentajes, realizó los pasos necesarios y dio una recontextualización al problema para intentar llegar a una solución, así mismo expuso sus resultados basados en su análisis, un análisis que difería de mi opinión, sin embargo, el proceso que llevo a cabo fue ordenado y eficiente, el cual le permitió entregar resultados.

## **Bibliografía**

- Ausubel, Novak y Hanesian (1983). *Psicología educativa, Un punto de vista cognoscitivo* (2ª. ed.). Trillas. México.
- Benítez, A. (2007) Estudio acerca de las estrategias para identificar el contenido de las Representaciones “Vía la Interpretación Global”. Reporte técnico de investigación del proyecto número de registro CGPI 20061484, México, IPN.
- Callejo, M. (1994), Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes: une expérience d'entraînement D'étudiants dans un club mathématique in *Educational Studies in Mathematics* 27, pp. 1-33.
- Cuoco, A. A., & Curcio, F. R. (Eds.). (2001). *The roles of representation in school mathematics*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc
- Duval, R. (1993), “Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres”. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives* 1. IREM Strasbourg.
- Duval, R. (1997). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization : Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. México, Vol. I, 3-26.
- Duval, R. (2000), *Basic Issues for Research in Mathematics Education*, in Proceedings of the 24<sup>nd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I, 55-69.
- Garder, H. (1999) *La Educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas*. Barcelona. Paidós.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237 - 284.
- Goldin, G. y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, and B. Greer (Eds.). *Theories of mathematical learning* (pp. 987-439), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87(7), 519- 524.
- Hernández Sampieri, Fernández, C, (1998) *Metodología de la investigación*, México: McGraw Hill.
- Hitt, E. F. (1994). Educación matemática y el uso de nuevas tecnologías. En E. Sánchez y M. Sanos (ED.), *Perspectivas en educación matemáticas*. (pp. 21-42). México: CINVESTAV, Departamento de Matemática Educativa
- Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. *Geometry and the Imagination*. New York: Chelsea, p. 47, 1999.
- Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- OCDE/PISA (2003). Las competencias en Matemáticas. Recuperado el 10 de julio de 2009 de [www.eduteka.org/Pisa2003Math.php](http://www.eduteka.org/Pisa2003Math.php)
- Schoenfeld, A. (1987). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.
- Skemp, R. (1988). *La Psicología del Aprendizaje de la Matemática*, Hillsdale, N.J.: Lawrence
- Sonneman, U., *Existence and Therapy: An Introduction to Phenomenological Psychology and Existential Analysis*, Nueva York: Gestalt Legacy Press.
- Strauss, A. y CORBIN, J. (1998). *Basics of Qualitative Research. Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*, Londres: Sage Publications.
- Szasz, I., y Lerner, S. (1994). *Para comprender la subjetividad. Investigación cualitativa en salud reproductiva y sexualidad*, México: El Colegio de México, pp. 11-12.
- Taylor, S. Y R Bodgan (1990). *Introducción a los Métodos Cualitativos de investigación*. Buenos Aires: Paidós.

- Teppo, A. R. (1998). *Qualitative Research Methods in Mathematics Education*.  
Reston,VA: The National Council of Teachers of Mathematics
- Zubieta, G. (1996). *Sobre número y variación: antecedentes del cálculo*. Tesis  
Doctoral. Cinvestav, IPN