



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD PROFESIONAL “ADOLFO LÓPEZ MATEOS”**

ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIONES**

TESIS

**“PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN
METAMATERIALES PRODUCIDAS POR UNA FUENTE EN
MOVIMIENTO”**

Como requisito parcial para la obtención del grado de maestro en
ciencias en ingeniería de telecomunicaciones

PRESENTA:

Oswaldo Estrada Arrenchú

ASESORADO POR:

Dr. Vladimir Rabinovitch
Dr. Héctor Oviedo Galdeano



CDMX, AGOSTO 2017

Resumen

Se obtuvieron resultados con simulaciones numéricas, usando Mathematica, del efecto Doppler y el efecto Cherenkov en un metamaterial con características electromagnéticas hipotéticas utilizando el modelo de Drude sin pérdidas. Se explica a detalle qué son los metamateriales, sus características y sus aplicaciones actuales y futuras. También se presentan simulaciones del campo electromagnético ante diferentes parámetros. Se demuestra por medio de simulaciones la negatividad del índice de refracción para un cierto rango de frecuencias.

En el Capítulo 1 se trata sobre las generalidades de los metamateriales y sus aplicaciones. Se hace una clasificación de los medios de acuerdo con sus propiedades electromagnéticas con el propósito de ubicar y definir a los metamateriales y su importancia en la presente investigación. Se mencionan las publicaciones más importantes a lo largo de la historia que dieron inicio a la investigación formal de los metamateriales, también conocidos como materiales izquierdos. (En este trabajo, al leer - metamateriales NIM, LHM, materiales artificiales- se habla expresamente de los materiales doblemente negativos).

En el Capítulo 2 se trata acerca de los modelos más utilizados para metamateriales, se presentan sus ecuaciones y se justifica del por qué el uso del modelo de Drude para el presente trabajo. Se habla sobre los valores negativos del índice de refracción para determinada banda de frecuencia, y se deducen las ecuaciones para la velocidad de grupo y la velocidad de fase.

En el Capítulo 3 se desarrollan las ecuaciones utilizadas en este trabajo, las cuales fueron obtenidas mediante el análisis asintótico (con el método de fase estacionaria) de las integrales que describen el campo electromagnético considerando que lo genera una fuente con movimiento en un medio dispersivo. Al obtener las ecuaciones asintóticas del campo electromagnético es posible analizar el efecto Doppler y el efecto Cherenkov.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados de las simulaciones del efecto Doppler ante diferentes velocidades de fuente y diferentes posiciones de receptor. También se presentan simulaciones del campo electromagnético con velocidad de fuente menor a la velocidad de fase en el medio, velocidad de fuente igual a la velocidad de fase y velocidad de fuente mayor a la velocidad de fase con el objetivo de mostrar el efecto Cherenkov.

Abstract

Results were obtained with numerical simulations, using Mathematica software, of the Doppler effect and the Cherenkov effect in a metamaterial with hypothetical electromagnetic characteristics using the lossless Drude model. It explains in detail what metamaterials are, their characteristics and their current and future applications. Simulations of the electromagnetic field are also presented with different parameters. The negativity of the refractive index for a certain range of frequencies is demonstrated by simulations.

Chapter 1 is about the generalities of metamaterials and their applications. A classification of the media is made according to their electromagnetic properties with the purpose of locating and defining the metamaterials and their importance in the present investigation. The most important publications throughout history that gave rise to the formal investigation of metamaterials, also known as left materials, are mentioned. (In this work, when reading - metamaterials NIM, LHM, artificial materials- expressly speaking of the doubly negative materials).

Chapter 2 is about the most used models for metamaterials, presents their equations and justifies why the use of the Drude model for the present work. The negative values of the refractive index for a given frequency band are discussed, and the equations for the group velocity and the phase velocity are deduced.

In Chapter 3 the equations used in this work are developed, which were obtained by the asymptotic analysis (with the stationary phase method) of the integrals that describe the electromagnetic field considering that it is generated by a source with movement in a dispersive medium. By obtaining the asymptotic equations of the electromagnetic field it is possible to analyze the Doppler effect and the Cherenkov effect.

Chapter 4 presents the results of the Doppler effect simulations at different source speeds and different receiver positions. Simulations of the electromagnetic field are also presented with lower source speed at the phase velocity in the medium, source velocity equal to the phase velocity and source velocity greater than the phase velocity in order to show the Cherenkov effect.

Dedicatoria

A Ximena S., quien siempre será mi inspiración.

Agradezco infinitamente al Dr. Vladimir Rabinovich por guiarme en todo el proceso de investigación y escritura de este trabajo. Por su enorme paciencia cuando no entendía alguna ecuación y cuando no sabía qué debía hacer. Por contestar a cada uno de mis correos con mis dudas y peticiones. Por compartir sus conocimientos y experiencias que me permitieron conocerlo mejor como persona y como científico. Por dedicarme el tiempo necesario para que este trabajo fuera finalizado y por todas aquellas citas semanales muy productivas en las cuales me hacía correcciones sustanciales que me permitían mejorar el trabajo. Sinceramente, sin él esta tesis no hubiera sido posible.

Gracias al Dr. Héctor Oviedo, por su apoyo incondicional y por encaminarme en el interesante mundo de los metamateriales. En nuestras conversaciones siempre aprendía algo nuevo, se nota su amplio acervo cultural. Por explicarme algunas ecuaciones paso a paso. Su pasión por la tecnología me estimulaba a seguir adelante con mi tema de tesis.

Agradezco al Dr. Raúl Castillo, por su sencillez y disponibilidad de tiempo ante cualquier petición de ayuda. Es una persona que inspira como persona y como profesional.

Gracias a mis papás: a mi padre, quien siempre me ha enseñado a ser mejor con su ejemplo. Es un gran hombre, que admiro y respeto mucho. Gracias por apoyarme en todas mis decisiones. Por sacrificar su comodidad y felicidad para que nosotros tuviéramos la oportunidad de seguir adelante. A mi madre, por su fortaleza e inteligencia que me enseñaron a convivir en esta sociedad, por sus consejos acertados. Gracias por amortiguar mis problemas. Por ese primer libro que me regaló que cambió mi vida. A ambos les debo tanto. Deseo que fueran eternos, y que nunca se fueran de este mundo. Sé que no es posible, pero mientras estén aquí, siempre les haré saber mi amor profundo por ustedes.

A mis hermanos, que siempre me enseñan que el amor sí existe. Por todas las experiencias vividas. Por hacerme reír y todos esos buenos momentos que me hacen pasar. Son mi mejor terapia y mis mejores amigos.

A Tania Mejía D., porque me ha apoyado más de lo que ella se imagina. Gracias por tolerar tantas cosas. Tantas ausencias. Ha simplificado mi vida., ahora es menos desordenada. Agradezco tu amor incondicional. Te amo.

Objetivo general

Obtener simulaciones numéricas con diferentes parámetros para el efecto Doppler, el efecto Vavilov-Cherenkov y el campo electromagnético en metamateriales con las fórmulas asintóticas obtenidas mediante el análisis de la propagación de ondas producidas por una fuente en movimiento en medios dispersivos considerando el modelo de Drude sin absorción siguiendo los trabajos de investigación [9] [10] [3] [4].

Objetivos particulares

- **Objetivo 1**

Estudio del estado actual de las propiedades físicas de los metamateriales, efectos importantes tales materiales: efecto Doppler y efecto Vavilov-Cherenkov.

- **Objetivo 2**

Estudio de las aplicaciones actuales y futuras de los metamateriales en la ingeniería de telecomunicaciones.

Los metamateriales han sido tema de amplia investigación científica en el mundo debido a sus potenciales aplicaciones en diversas áreas. Algunas de estas aplicaciones se han llevado a la práctica y algunas otras siguen siendo teóricas hasta que haya la disponibilidad tecnológica para lograrlo. La invisibilidad en el rango de frecuencias visibles no se descarta, pero en la actualidad no es posible debido a que para que un metamaterial tenga refracción negativa es necesario que los detalles de su estructura sean menores que la longitud de onda de la luz utilizada. Sin embargo, la acelerada actividad científica puede hacer posible que se anuncie la invisibilidad total en el espectro visible en una época no muy lejana.

La investigación en la fabricación de diferentes estructuras de metamateriales ha crecido en los últimos años por sus variadas aplicaciones en diferentes áreas como la nanotecnología, óptica y telecomunicaciones. En la actualidad, gracias a las estructuras metamateriales, es posible la reducción en tamaño de las antenas y aumento en su ancho de banda, logrando instalar arreglos MIMO en un espacio mínimo en los teléfonos móviles o en los satélites. Su importancia es tal que incluso se espera que, en el futuro, los metamateriales sean la base para el rápido desarrollo de la fotónica, ciencia que es considerada por varios científicos como el futuro de la computación y sustituto de la electrónica. La fotónica hará posible que los dispositivos con mucha potencia de procesamiento no sufran de sobrecalentamiento como las computadoras personales de hoy en día, esto debido a que en lugar de hacer uso de electrones para su funcionamiento se usarán fotones para la oscilación de los dispositivos. Por lo que los sistemas de refrigeración desaparecerán y el tamaño de las computadoras y de otros sistemas, como las consolas de videojuegos, se reducirá considerablemente. Es decir, podremos tener de manera portátil sistemas muy avanzados en procesamiento con un alto rendimiento en la autonomía de la batería. Por decir algo, contar con una consola de videojuegos portátil del tamaño de un Smartphone con 100 veces más que el poder de procesamiento de la actual videoconsola de sobremesa de Microsoft, Xbox One. Es decir, la fotónica sustituirá a la electrónica en un futuro, mejorando considerablemente el procesamiento y eliminando los cuellos de botella en las computadoras, reduciendo considerablemente el consumo de energía de los dispositivos portátiles y generando menos calor que los dispositivos actuales.

La historia moderna de los metamateriales electromagnéticos, algunas veces denominados simplemente como metamateriales puede ser contada psiblemente desde la publicación de un artículo de J. B. Pendry [47], donde establecía un objetivo ambicioso de diseñar la lente perfecta. Para tal lente es necesario diseñar un medio artificial que posea propiedades específicas, no observadas en materiales naturales. A saber, el material de la lente perfecta debe ser un medio con permitividad y permeabilidad ambas con valores negativos simultáneamente en el mismo rango de frecuencia. De hecho, la focalización de la luz en la lente perfecta estudiada por Pendry fue previamente considerada por Víctor G. Veselago [70]. En su artículo se dedicó al estudio de los fenómenos que ocurrirían en los extraños “medios izquierdos” (medios con $\epsilon < 0$ y $\mu < 0$) como tales medios no existían en esa época se consideraban como “composiciones futuras”. Veselago, antes de la publicación de su artículo creía que los medios izquierdos sólo podían ser encontrados entre los semiconductores magnéticos homogéneos fabricados químicamente. Sin embargo, se ha logrado obtener semiconductores no magnéticos con parámetros del material doblemente negativos. Por otro lado, se ha reportado que estas composiciones pueden ser extremadamente dispersivas [26] [13].

En 1968, Veselago sugirió en una de sus publicaciones [70] que las ondas electromagnéticas podrían propagarse en un medio que tuviera tanto permitividad como permeabilidad negativa. Estudió teóricamente las propiedades de dicho medio y predijo varios fenómenos interesantes como inusuales, tales como la refracción negativa del medio, velocidad de fase negativa, efecto Doppler inverso, radiación invertida de Cherenkov, entre otros.

El estudio de los metamateriales ha ido en aumento en los últimos años debido a que presentan características electromagnéticas no encontradas en ningún material natural y tienen el potencial para que sea posible fabricar dispositivos de invisibilidad, lentes perfectos, antenas con anchos de banda y ganancia superiores a los valores convencionales, etc. Por definición, los metamateriales son un arreglo artificial estructural de elementos, diseñado para alcanzar propiedades electromagnéticas inusuales y/o ventajosas para determinadas aplicaciones tecnológicas [53].

En este trabajo se presentan varias simulaciones numéricas como consecuencia de la interacción de las ondas electromagnéticas en un medio doblemente negativo (DNG por sus siglas en inglés). Para un medio dispersivo, se requiere conocer las propiedades frecuenciales del índice de refracción del medio, por lo que es necesario elegir el tipo de dispersión del material. En la literatura reciente normalmente se utiliza el modelo de Lorentz o el modelo de Drude. En este trabajo se considera un modelo matemático para la propagación de ondas electromagnéticas en un medio dispersivo generadas por una fuente en movimiento y se analiza numéricamente para estudiar las propiedades dispersivas del efecto Doppler y del fenómeno de radiación de Cherenkov. Este trabajo se centra en metamateriales dispersivos, en el cual el índice de refracción es negativo $\text{Re}(n) < 0$, material de índice con refracción negativo (NIM).

ESTADO DEL ARTE.....	1
CAPÍTULO 1: CLASIFICACIÓN DE LOS MEDIOS DE PROPAGACIÓN	5
1.1 ¿Qué son los metamateriales?.....	5
1.2 Clasificación del medio.....	7
1.3 Aplicaciones de los metamateriales	8
CAPÍTULO 2: MODELOS MATEMÁTICOS DE LOS MATERIALES.....	14
2.1 Modelo de Lorentz.....	14
2.2 Modelo de Debye.....	15
2.3 Modelo de Drude.....	15
2.4 Índice de refracción negativo.....	17
2.5 Velocidad de fase.....	19
2.6 Velocidad de grupo.....	22
CAPÍTULO 3: PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PRODUCIDAS POR UNA FUENTE EN MOVIMIENTO EN UN MEDIO DISPERSIVO.....	25
3.1 Efecto Doppler en metamateriales	33
3.2 Efecto de Cherenkov en metamateriales.....	34
CAPÍTULO 4: RESULTADOS, SIMULACIONES NUMÉRICAS Y CONCLUSIONES	41
4.1 Simulación del índice de refracción.....	41
4.2 Simulación del número de onda.....	42
4.3 Simulación de la velocidad de fase.....	43
4.4 Simulación de la velocidad de grupo	44
4.5 Simulación del efecto Doppler con diferentes parámetros	44
4.6 Simulación del efecto Cherenkov	60
4.7 Simulación del campo electromagnético	63
Conclusiones.....	68
BIBLIOGRAFÍA	69

Lista de tablas

xii

Tabla 1: Clasificación del medio de acuerdo a sus características electromagnéticas.	7
Tabla 2: Argumentos de μ, ε y k para diferentes tipos de material.....	18

Figura 1: El vaso derecho tiene un líquido hipotético que presenta refracción negativa. 6

Figura 2: A la izquierda se muestra una onda plana en un medio isotrópico, a la derecha una onda plana en un medio metamaterial. 8

Figura 3: Estructura de un biosensor basado en SRR. 12

Figura 4: Proyección del vector $V(t)$ sobre el vector $X - X_0t$ 30

Figura 5: Radiación de Cherenkov en un RHM. 37

Figura 6: Radiación de Cherenkov en un metamaterial. 38

Figura 7: Índice de refracción de un metamaterial. 41

Figura 8: Numero de onda en un metamaterial. 42

Figura 9: Velocidad de fase en un metamaterial. 43

Figura 10: Velocidad de grupo en un metamaterial. 44

Figura 11: Ejemplo gráfico para cuando la fuente se mueve hacia el observador. 47

Figura 12: Efecto Doppler en un metamaterial cuando la fuente se mueve hacia al observador. 48

Figura 13: Ejemplo gráfico de cuando la fuente se aleja del observador 48

Figura 14: Efecto Doppler en un metamaterial cuando la fuente se aleja del observador. 49

Figura 15: Efecto Doppler con una velocidad de fuente menor, la fuente se mueve hacia el observador. 50

Figura 16: Efecto Doppler, la fuente se acerca y se aleja del receptor, en un periodo de 4 segundos. 51

Figura 17: Efecto Doppler producido por una fuente en movimiento en un periodo de 4 segundos. La frecuencia de la fuente es de 750MHz. 52

Figura 18: El receptor se mueve en 3D. 53

Figura 19: La Fuente se aleja del receptor en 3D 55

Figura 20: Efecto Doppler en un metamaterial con un receptor en 3D, la fuente se aleja del observador. 56

Figura 21: Efecto Doppler en un metamaterial con un receptor en 3D, la fuente se aleja del observador a mayor velocidad. 57

Figura 22: La fuente se mueve hacia el receptor en 3D. 57

Figura 23: Efecto Doppler en un metamaterial con un receptor en 3D, la fuente se mueve hacia el receptor. 58

Figura 24: Efecto Doppler en un metamaterial con un receptor en 3D, la fuente se mueve hacia el receptor a mayor velocidad. 59

Figura 25: Campo magnético por el efecto Cherenkov en un metamaterial. 61

Figura 26: Campo magnético generado cuando la partícula cargada viaja a una velocidad similar a la velocidad de fase. 62

Figura 27: Cono de Cherenkov con $v = 0.845 > vc$ 62

Figura 28: Intensidad de campo eléctrico, considerando sólo su parte real. 64

Figura 29: Intensidad de campo magnético, considerando sólo su parte real. 64

Figura 30: Campo eléctrico variando el tiempo y la frecuencia propia de la fuente. 65

Figura 31: Campo eléctrico con variación en la distancia para una fuente en movimiento en un metamaterial. 66

Figura 32: Campo eléctrico con variación en la distancia para una fuente en movimiento en un metamaterial. 67

ESTADO DEL ARTE

En la teoría electromagnética actual, los metamateriales han asegurado una posición importante en el paradigma general de la investigación. Además, no solo en la escena electromagnética los metamateriales han cambiado los tópicos y modos de investigación, sino también lo han hecho en áreas tales como la óptica, acústica y termodinámica, han sido afectados por el potencial de los nuevos descubrimientos en el campo de los metamateriales. La investigación de los materiales complejos ha sido de principal interés de muchos investigadores en las últimas décadas. Sin embargo, la palabra “metamateriales” ha sido un término acuñado en el siglo actual. Al parecer en la literatura clásica de electromagnetismo no se reconoce dicho término. En este trabajo se acepta la opinión de que el término fue utilizado por primera vez por Rodger Walser en el 2001 como materiales hechos por el hombre y optimizados con estructuras periódicas de material para que presenten propiedades macroscópicas deseadas, de acuerdo a determinadas necesidades. La definición del término “metamaterial” ha sido tema de discusión por un largo periodo de tiempo. En diferente literatura al respecto se pueden reconocer las varias ideas y aspectos en cómo la palabra ha alcanzado nuevos significados a lo largo de los últimos años.

Sin embargo, de la nada nada viene. Incluso la investigación de los metamateriales tuvo que surgir de algo. Existe una prehistoria fascinante en el tema de los metamateriales en las comunidades de investigación de microondas y en general de electromagnetismo. Es intención de este primer capítulo resaltar algunos acontecimientos que han impulsado el rápido desarrollo de la física y de la ingeniería en cuestión de los metamateriales.

EN 1948, W.E. Kock sugirió hacer una lente dieléctrica más ligera por medio del remplazo de pesados materiales refractivos con alta permitividad por una mezcla de pequeñas esferas de metal constituyendo así una ligera matriz. El material dieléctrico artificial fue definido en este trabajo pionero como un compuesto que reproduce, en una gran escala, procesos que ocurren a nivel molecular en un dieléctrico usual. Esto involucra arreglos de elementos metálicos en tres dimensiones (3D) o estructuras tipo malla para simular las mallas cristalinas de los materiales dieléctricos. Como un arreglo responde a ondas de radio tal y como las estructuras moleculares responde a las ondas de luz: los electrones libres en los elementos metálicos se mueven de un lado a otro bajo la acción del campo electromagnético. Los elementos de metal también llamados “inclusiones de malla” se vuelven dipolos oscilantes similares a los dipolos moleculares de un dieléctrico natural. Este concepto, sin embargo, probablemente fue sugerido por primera vez por Rayleigh en su trabajo pionero. Rayleigh consideró una malla de pequeños dispersores (Moléculas modeladas como esferas) donde su periodo es mucho más pequeño comparada con su longitud de onda, como en una muestra de un medio continuo equivalente. Kock reprodujo este concepto para arreglos de esferas de metal y las usó para aplicaciones prácticas. Posteriormente este concepto fue desarrollado y mejorado en un importante trabajo de M. M. Kharadly and W. Jackson. Ellos calcularon la permitividad efectiva de los dieléctricos artificiales que comprende elipsoides metálicos, discos y barras asumiendo que la

frecuencia es lo suficientemente baja para las restricciones cuasiestática de Rayleigh. Estas restricciones se satisfacen usualmente con precisión para dieléctricos artificiales utilizados en antenas. En el libro [19] es posible encontrar la teoría cuasiestática de dieléctricos artificiales. Esta teoría es válida cuando la malla de metal está lo suficientemente esparcida. Por ejemplo, la relación entre el periodo de la malla y el tamaño máximo de partícula es bastante grande. La teoría de los dieléctricos artificiales densos es más difícil. Los dieléctricos artificiales densos de inclusiones metálicas poseen mayores pérdidas y no son utilizados en antenas. Estos son aplicados en materiales de absorción. Los dieléctricos artificiales no son necesariamente arreglos regulares. Pueden ser mezclas aleatorias [61]. Incluso la concentración no uniforme de partículas algunas veces es permitida, la cual ofrece propiedades inusuales como los medios de composición. Cuando la concentración de partículas excede el umbral de percolación (las partículas se tocan unas a otras y/o el acoplamiento capacitivo ente partículas adyacentes es muy fuerte) los dieléctricos artificiales en la misma baja frecuencia se vuelven conductores artificiales con conductividad compleja. Su conductividad puede ser modificada (controlada por los parámetros de diseño) y en principio modificable magnética o eléctricamente. Los conductores artificiales han sido utilizados en dispositivos electromecánicos, como en celdas de combustible, y otras técnicas donde el calor el controlado por medio de la corriente eléctrica.

El magnetismo sin constituyentes magnéticos se conoce desde 1940 debido al trabajo de S. A. Schelkunoff y de H. T. Friis que sugirieron los llamados resonadores tipo anillo dividido (SRRs), los cuales son muy populares entre los especialistas en antenas de radio frecuencia. Una fórmula para la polaridad magnética de un elemento individual de SRR se deriva del comportamiento de la frecuencia de Lorentz del elemento.

Nótese, que el “magnetismo artificial” también ocurre en estructuras ordinarias, como en la nieve. En este caso, los copos formados por agua causan un comportamiento diamagnético. Pero en los arreglos SRRs el magnetismo artificial es significativamente mejorado en el rango de frecuencia resonante.

Las partículas de metal de varias formas fueron estudiadas en 1980 [56] [30]. En combinación con otras formas, se estudiaron en 1990, especialmente en conexión con materiales artificiales bianisotrópicos para aplicaciones de microonda. La polarización de estas partículas bianisotrópicas en el campo electromagnético fue estudiada analíticamente, numéricamente y experimentalmente. Dobles SRRs pueden ser utilizados para crear materiales magnéticos sin quiralidad. En [35] se puede encontrar probablemente el primer experimento que demuestra la permeabilidad magnética negativa en materiales artificiales de microonda.

El plasma artificial, es decir un medio con permitividad negativa, se conoce desde los años 60's debido al trabajo de J. Rotman [54] y J. Brown [8]. Este medio se compone de una malla conformada por delgados cables en paralelo los cuales son considerados en microondas como conductores perfectos. Estudios recientes arrojan nuevas características

interesantes desconocidas en el pasado. Estas nuevas características surgieron debido a la investigación de la dispersión espacial. Cuando la onda se propaga con respecto a los cables, la dispersión espacial no se presenta. Entonces, la permitividad efectiva de la malla cableada obedece al modelo de Drude eléctrico del plasma. La malla con cables delgados paralelos fue considerada desde los años 90's como un tipo de dieléctrico artificial debido a que fue inventada y prácticamente utilizada para aplicaciones en lentes. En los años 70's se insertaban diodos PIN en medios de plasma con el propósito de cambiar la negatividad de la permitividad efectiva de la malla a una permitividad eléctrica positiva [10]. El término de medio "cableado", como se le conoce actualmente a los medios compuestos por mallas de cables delgados, apareció justo después de que se descubriera teóricamente el efecto de dispersión espacial nulo [60]. La confirmación experimental de dicho efecto fue obtenida [5].

La primera publicación fundamental de las ondas electromagnéticas "hacia atrás" y de la refracción negativa fue, probablemente, del profesor L. I. Mandelshtan [39], aunque el tema de las ondas en un medio con velocidad de grupo negativa fue discutido a inicio del año 1904 por Lamb y en 1905 por H. Pocklington [49]. La lógica del profesor Mandelshtan fue simple. En un medio isotrópico, el valor absoluto del vector de onda está completamente determinado por la frecuencia. En el caso del signo negativo en la fórmula de la velocidad de grupo corresponde a dispersión negativa. Mandelshtam mencionó que en caso de dispersión negativa la onda en el medio está "al revés" (en referencia a la propagación de una onda en un medio normal) y la refracción negativa podría ocurrir. La posibilidad de refracción negativa también fue mencionada por A. Schuster en [57]; sin embargo, Schuster mencionó que la dispersión anómala y no la dispersión negativa era la razón del fenómeno de refracción negativa. Mandelshtam (con referencia a Lamb quien dio ejemplos de un medio 1D ficticio con velocidad de grupo negativa de una onda acústica) presentó al final de su vida un ejemplo físico de una estructura 3D en donde las ondas electromagnéticas se propagaban hacia atrás (en referencia a una onda con propagación normal). Fue un material no homogéneo con permitividad periódica que variaba espacialmente. Básicamente, en este trabajo se predijo la refracción negativa en cristales fotónicos descubierto más tarde por M. Notomi [42].

En 1946-1950 L. Brillouin [6] y J. R. Pierce [48] desarrolló una teoría de onda "hacia atrás" utilizando un arreglo electrónico en serie de capacitancias / inductancias, señaló las velocidades de fase/grupo antiparalelas. En 1951 G.D. Malyuzhinets (quien aparentemente no estaba al tanto de los trabajos científicos [6] y [55]) generalizó este concepto en el caso 3D en un artículo sobre la condición de radiación de Sommerfeld en un medio de onda hipotética "hacia atrás" [38]. Malyuzhinets notó que en tal medio la velocidad de fase de la onda debería apuntar desde la fuente. Una analogía a este medio en 1D fue una línea de transmisión artificial diseñada por Malyuzhinets.

Materiales con parámetros negativos como las ondas "al revés" fueron mencionadas por D. V. Sivukhin en 1957 [64]. Él fue el primero que probablemente notó que los medios con parámetros doblemente negativos son continuos y homogéneos. Además, estableció que

“los medios con permitividad y permeabilidad negativas no son conocidos. La cuestión de la posibilidad de su existencia no ha sido aclarada” [64].

Durante los años 60's, las estructuras con propiedades negativas 1D fueron mucho más estudiadas que en años anteriores en conexión con el diseño de tubos de microonda y sistemas de ondas lentas periódicas [32] [62]. Haciendo referencia a un artículo científico interesante escrito por R.A. Silin en 1959 [63], donde el fenómeno de la refracción negativa en un medio periódico 2D fue discutido.

Un importante avance fue hecho por V.G. Veselago (Instituto de física de Moscú) en el año de 1967. El profesor Veselago realizó un estudio sistemático de las propiedades electromagnéticas de los materiales con parámetros negativos que reportó en su infructuosa búsqueda de dichos materiales en el dominio de los semiconductores magnéticos [58]. Este estudio fue, sin embargo, optimista, indicando que medio continuos 3D podrían ser descubiertos en el futuro. En la actualidad tales medios son generalmente denominados como materiales izquierdos (LHM) o también se conocen como medios Veselago.

CAPÍTULO 1: CLASIFICACIÓN DE LOS MEDIOS DE PROPAGACIÓN

1.1 ¿Qué son los metamateriales?

En años recientes el interés por las estructuras fabricadas con materiales que presentan fenómenos físicos no disponibles de forma natural ha ido en aumento. A estas estructuras artificialmente fabricadas se les denomina *metamateriales*. Algunas propiedades exóticas de estos materiales han sido predichas desde hace ya varios años y experimentos recientes han confirmado algunas de ellas [26]. El principal interés en los metamateriales ha sido por el potencial que tienen sus propiedades electromagnéticas y ópticas para una variedad de aplicaciones, a saber que tienen la capacidad de curvar la dirección de propagación de las ondas electromagnéticas [26] [13]. Algunas de las propiedades electromagnéticas que presentan son: refracción negativa, velocidad de fase negativa, efecto Doppler inverso y radiación de Cherenkov invertida.

El impacto de los metamateriales puede ser significativo si se logra manipular las propiedades de las ondas, con lo cual sería posible reducir considerablemente el tamaño y peso de dispositivos electrónicos, fabricar antenas con mayores anchos de banda y mejores ganancias, dispositivos de invisibilidad, telescopios y microscopios de ultra-resolución, solo por mencionar algunas aplicaciones.

El estudio de materiales artificiales para aplicaciones electromagnéticas no es nuevo. En 1898, Jagadis Chunder Bose trabajó y experimentó con elementos que exhibían propiedades conocidas actualmente como características quirales. Desde entonces los materiales artificiales complejos han sido objeto de estudio de muchos investigadores alrededor del mundo [76].

Los metamateriales pueden tener permitividad eléctrica negativa y/o permeabilidad magnética negativa, a diferencia de los materiales convencionales que tienen tanto permitividad eléctrica como permeabilidad magnética positivas. De acuerdo con los signos de su permitividad y permeabilidad, un metamaterial presenta diferentes propiedades electromagnéticas y ópticas. Cuando la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica de un material son negativas, la refracción negativa sucede y la dirección de la velocidad de fase de la onda va en sentido contrario al número de onda [20] [46] [70] [58]. Por otro lado, cuando solo un parámetro constitutivo del material es negativo (ya sea la permitividad eléctrica o la permeabilidad magnética), aparecen ondas evanescentes.

En un medio compuesto de partículas, las ondas electromagnéticas interactúan con éstas induciendo momentos eléctricos y magnéticos, y afectando también la permeabilidad magnética y permitividad eléctrica efectivas del medio. Los metamateriales pueden ser sintetizados mediante inclusiones fabricadas artificialmente incrustadas en un medio huésped, del cual se tienen una gran cantidad de parámetros independientes que pueden modificarse tales como el tamaño, la forma y la composición de las inclusiones, incluso la

densidad, la distribución y el alineamiento de éstas en el medio huésped con el propósito de obtener una respuesta electromagnética definida que se adecúe a las necesidades de la aplicación. Todos estos parámetros de diseño pueden jugar un rol importante en el resultado final del proceso de síntesis.

Con el objetivo de apreciar de manera simple el comportamiento de los metamateriales, en la Figura 1, la cual fue tomada de [31], se aprecian dos vasos llenos de líquido. Imaginemos que el líquido del vaso derecho está constituido por un metamaterial, mientras que el líquido del vaso izquierdo es agua. Podemos apreciar que la refracción en el vaso derecho es diferente a la refracción tradicional observada en el agua.



Figura 1: El vaso derecho tiene un líquido hipotético que presenta refracción negativa.

El principal problema para la fabricación de determinados metamateriales no es teórico, sino práctico. Es necesario nuevas técnicas de fabricación para obtener metamateriales para ciertas aplicaciones que mejorarían considerablemente nuestro estilo de vida. Sin embargo, para algunas otras aplicaciones menos exigentes sí se han logrado fabricar metamateriales con características específicas. Por ejemplo, la empresa *Rayspan Corporation* ha sustituido sus antenas convencionales por otras fabricadas con metamateriales, logrando de este modo arreglos MIMO ultra-compactos para WiMAX. Otro ejemplo es la empresa LG, la cual ha fabricado terminales móviles con antenas basadas en metamateriales, reduciendo así cinco veces el tamaño de la antena con respecto al tamaño de una antena fabricada con materiales tradicionales [53].

1.2 Clasificación del medio

Se sabe que la respuesta de un sistema en presencia de un campo electromagnético está determinada por las propiedades del material. Estas propiedades se definen por los parámetros macroscópicos de permitividad ϵ y permeabilidad μ del material. Esto permite hacer una clasificación del medio: un medio con permitividad eléctrica y permeabilidad magnética ambas positivas ($\epsilon > 0$, $\mu > 0$) será designado como un *material doblemente positivo* (DPS); este es el medio que se da de forma natural (por ejemplo, los dieléctricos caen en esta designación). Un medio con permitividad negativa y permeabilidad positiva ($\epsilon < 0$, $\mu > 0$) serán designados como medios de *épsilon negativo* (ENG, *Epsilon-Negative*); a ciertas frecuencias muchos plasmas presentan esta característica, mientras que metales nobles (plata, oro) se comportan de este modo en frecuencias infrarrojas y visibles. Un medio con permitividad positiva y permeabilidad negativa ($\epsilon > 0$, $\mu < 0$) es designado como material de *mu-negativo* (MNG, *Mu-Negative*); a ciertas frecuencias algunos materiales girotrópicos presentan esta característica. Un medio con permitividad y permeabilidad ambas negativas ($\epsilon < 0$, $\mu < 0$) es designado como material *doblemente negativo* (DNG, *Double Negative*). Sin embargo, algunos materiales con características DPS, ENG y MNG han sido fabricados artificialmente para determinadas aplicaciones, por lo que algunos materiales DPS, ENG y MNG también pueden ser denominados metamateriales. Hasta la fecha, los materiales DNG solamente han sido obtenidos por medios artificiales [26] [27]. Esta clasificación de los medios está condensada en la Tabla 1.

Tabla 1: Clasificación del medio de acuerdo a sus características electromagnéticas.

MATERIAL	PROPIEDADES	
Doblemente positivos (DPS)	$\epsilon > 0$ y $\mu > 0$	Dieléctricos
Doblemente negativos (DNG)	$\epsilon < 0$ y $\mu < 0$	No encontrados en la naturaleza, pero físicamente realizables.
Mu negativo (MNG)	$\epsilon > 0$ y $\mu < 0$	Materiales magnéticos girotrópicos
Epsilon negativo (ENG)	$\epsilon < 0$ y $\mu > 0$	Plasmas

Recientemente la idea de materiales con permitividad eléctrica y permitividad magnética simultáneamente negativas en determinadas frecuencias ha recibido mucha atención [72]. En 1968, Veselago investigó teóricamente la propagación de una onda plana en un material en el cual se asumía tanto permitividad eléctrica y permeabilidad magnética negativas [70]. Su estudio demostró que para una onda plana monocromática en tal medio la dirección del vector Poynting es antiparalela a la dirección de la velocidad de fase. Recientemente, Smith, Schultz, y su equipo de investigación construyeron un material DNG para

frecuencias de microondas y demostraron experimentalmente la presencia de una refracción anómala en dicho medio [74].

Los materiales doblemente negativos, también son denominados por algunos autores como materiales izquierdos (LHM, *Left Handed Materials*), materiales de índice negativo (NIM, *Negative Index Media*) o materiales de onda-hacia atrás (BWM, *Backwards Wave Media*).

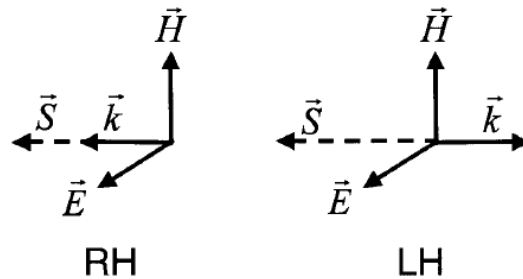


Figura 2: A la izquierda se muestra una onda plana en un medio isotrópico, a la derecha una onda plana en un medio metamaterial.

1.3 Aplicaciones de los metamateriales

Actualmente, la ciencia de los metamateriales ha alcanzado un alto grado de sofisticación. Como resultado de un progreso continuo en el diseño y fabricación de metamateriales a escalas nanométricas, por lo que es posible crear nuevas propiedades mejoradas en los metamateriales. [25] [53].

Los metamateriales prometen grandes cambios significativos en diversas áreas de la ciencia como: medicina, electrónica, telecomunicaciones debido a su capacidad de controlar la propagación de las ondas. Las aplicaciones de los metamateriales se encuentran en varios campos, incluyendo seguridad pública, sensores, defensa, salud, gestión de energía solar, antenas de alta ganancia y aplicaciones aeroespaciales, entre otras [53].

Con los metamateriales hay posibilidad para lograr la “invisibilidad” electromagnética, es decir, “invisibilidad” en el rango de frecuencias ópticas y/o en otro rango del espectro electromagnético (infrarrojo, microondas, UHF, etc.). Una de las aplicaciones más revolucionarias sería la de proteger ciudades enteras de terremotos, desviando las ondas mecánicas (invisibilidad acústica). Sin embargo, en la actualidad todavía existen muchas dificultades tecnológicas para llevar a cabo la materialización de esta aplicación. Otra de las aplicaciones potenciales de los metamateriales es la posibilidad de fabricar sistemas ópticos (microscopios, telescopios, etc.) con super resolución, mejorando de este modo los sistemas médicos de ultrasonido. Los metamateriales son utilizados para la construcción de antenas para teléfonos móviles, reduciendo hasta una quinta parte el tamaño respecto a una antena construida con materiales convencionales [26] [53].

Investigadores de las fuerzas armadas de distintos países (como Estado Unidos y Rusia) utilizan metamateriales para detectar la presencia de explosivos químicos, agentes biológicos peligrosos y contaminación [53]. Debido a las características de los metamateriales sería posible hacer que los submarinos fuesen invisibles al sonar enemigo, desviando las ondas sonoras alrededor de él. Otra aplicación con el mismo principio, es la de producir salas de insonorización con acústica perfecta.

Los ingenieros del ejército norteamericano utilizan los metamateriales como un dispositivo de conmutación para la construcción de equipos fotónicos rápidos y pequeños, porque para la siguiente generación de circuitos harán uso de la luz en lugar de la electricidad. Estos chips fotónicos son 10 ó hasta 100 veces más rápidos que los chips actuales, además se resuelve el problema de sobrecalentamiento de los aparatos electrónicos.

Es posible controlar la luz o el sonido para mejorar la resolución de ultrasonido y cambiar el color de un material con ciertas estructuras de metamateriales, los cuales pueden ser fabricados con el proceso de deposiciones multicapa y alta precisión.

Los revestimientos de Metamateriales son utilizados para mejorar la radiación y acoplamiento de dipolos. Las más recientes antenas construidas a base de metamateriales radian el 95% de la señal de entrada a una frecuencia de 350 MHz. Se conoce que las antenas compuestas por un material DNG son tan pequeñas como una quinta parte de la longitud de onda de la señal que se radia. Las antenas tipo cuerno con abertura plana construidas con índice de refracción nulo tienen la ventaja de mejorar la directividad. Es decir, el índice de refracción cero puede ser utilizado para alcanzar alta directividad en antenas. Debido a que una señal que se propaga en un metamaterial con índice de refracción nulo estimulará la estructura de un campo estático que varía con el tiempo; en cualquier punto la fase en un metamaterial con índice de refracción cero tendrá el mismo valor una vez haya alcanzado el estado estable. Los metamateriales pueden mejorar la ganancia y reducir las pérdidas por retorno de una antena tipo patch [11] [40].

Las antenas basadas en metamateriales son una clase de antenas las cuales usan de revestimiento metamateriales para mejorar o incrementar el rendimiento del sistema de comunicación. Los metamateriales pueden mejorar la potencia radiada de la antena. Los materiales que tienen permeabilidad magnética negativa permiten propiedades como un tamaño de antena pequeño, alta directividad y frecuencia operacional personalizada, incluyendo un sistema de varias antenas (MIMO). Incluso las antenas construidas a base de metamateriales pueden demostrar mejoras en la eficiencia del ancho de banda. Es decir, superan las limitaciones de eficiencia de ancho de banda respecto a antenas construidas con materiales convencionales. Las antenas de metamateriales, permiten elementos de la antena más pequeños que cubren un rango de frecuencias mayor permitiendo de este modo el uso eficiente del espacio para determinadas aplicaciones como por ejemplo nano satélites [11].

Los metamateriales empleados en los planos de tierra que rodean a las antenas ofrecen un mejor aislamiento entre la frecuencia radiada o los canales de microonda en los arreglos de antenas. Los metamateriales con planos de tierra de alta impedancia también pueden ser utilizados para mejorar significativamente la eficiencia de radiación. Varios sistemas con antenas construidas a base de metamateriales pueden ser empleadas para soportar sensores de vigilancia, enlaces de comunicación, sistemas de navegación y sistemas de comando y control [11].

El primer dispositivo absorbente basado en metamateriales (2008) utiliza tres capas, dos capas metálicas y una dieléctrica. En simulación numérica alcanzaba un 99% de absorción y experimentalmente alcanzó un 88%. Las diferencias entre los resultados simulados y medidos estuvieron en el proceso de fabricación [73].

Los superlentes usan metamateriales para ir más allá de los límites de la difracción. Los materiales ópticos convencionales se restringen por un límite de difracción inherente debido a que sólo los componentes de propagación son transmitidos por una fuente de luz. Un modo de mejorar la resolución de los lentes sería incrementar el índice de refracción, sin embargo, está limitado por la poca disponibilidad de materiales con altos índices de refracción. El camino para alcanzar la super lente se basa en recuperar las ondas evanescentes que transportan información a escalas muy pequeñas. En la actualidad ninguna lente es capaz de reconstituir todas las ondas evanescentes emitidas por un objeto. Por lo que el reto es diseñar lentes que puedan constituir todas las ondas evanescentes para obtener imágenes perfectas.

La invisibilidad puede ser posible mediante la cancelación del campo eléctrico y magnético generado por un objeto o guiando las ondas electromagnéticas alrededor del objeto.

El límite interdisciplinario entre la ciencia de los metamateriales y la tecnología en sensores se ha convertido en un terreno fértil para el nuevo desarrollo científico y tecnológico. Además, se han realizado considerables avances en la investigación de sensores basados en metamateriales lo cual ha llevado al desarrollo de diversos componentes para la detección de información.

Es bien conocido que los sensores pueden detectar pequeños cambios, dependiendo de los siguientes cuatro criterios: primero, el sensor debe tener una frecuencia de operación lo suficientemente baja para evitar mediciones erróneas. Esto plantea un gran desafío ya que los sensores convencionales tienen un área limitada, y tal espacio reducido tiende a aumentar la frecuencia de funcionamiento de los sensores. Por lo tanto, se requiere mantener una disposición pequeña del sensor mientras se disminuye su frecuencia de funcionamiento tanto como sea posible. En segundo lugar, los sensores deben producir una señal de la lectura medible con un comportamiento de resonancia lo suficientemente acoplado como para seguir con precisión el cambio en el rango de frecuencias de transmisión. El tercer criterio se refiere a la linealidad de la detección que está directamente relacionada con el facto de calidad de los sensores. El cuarto criterio es la sensibilidad del

sensor. Si hay un número limitado de puntos de datos en un barrido de frecuencia en el analizador de red, es más fácil resolver cambios pequeños en los espectros de transmisión en respuesta a la carga aplicada externamente cuando la sensibilidad es mayor [12].

Es posible con los metamateriales diseñar sensores con una sensibilidad específica. Los metamateriales proporcionan herramientas para mejorar significativamente la sensibilidad y resolución de un sensor. Los sensores basados en metamateriales son utilizados en la agricultura, biomedicina, etc. En agricultura los sensores están basados en un material resonante y emplean SRR (microcintas con formas rectangulares) para aumentar la sensibilidad [40].

Los biosensores son esenciales en muchas áreas, como en diagnósticos de enfermedades, monitoreo ambiental y seguridad alimenticia, y también son herramientas vitales para la investigación de fenómenos biológicos. Los métodos basados en fluorescencia han demostrado ser útiles en el análisis de ADN y la detección de una sola molécula dentro de las células vivas. Sin embargo, identificar moléculas con fluoróforos puede ser costoso y consumir tiempo. Incluso puede ser imposible para determinadas aplicaciones. Además, las reacciones biológicas generalmente se basan en la estructura tridimensional de las biomoléculas que puede verse afectada por la adición de un marcador fluorescente. Por lo tanto, ha habido grandes trabajos de investigación para las técnicas de detección bioanalítica que pueden detectar directamente las moléculas sin necesidad de etiquetado. Recientemente, la tecnología de biosensores basada en metamateriales ha atraído gran atención desde el rango de microondas hasta frecuencias ópticas debido a su detección de biomoléculas rentable y libre de etiquetas. De acuerdo con la frecuencia de detección de determinadas biomoléculas, los biosensores a base de metamateriales se clasifican en tres tipos: biosensor de microondas, biosensor en terahertz y biosensor plasmático [53] [18].

Entre los componentes de metamateriales, un resonador de anillo dividido (SRR, por sus siglas en inglés) se puede utilizar para generar un material de permeabilidad magnética negativa. En particular, la característica principal de los SRR utilizados para sintetizar un material de permeabilidad magnética negativo efectivo es que sea de un tamaño pequeño, el cual puede ser más pequeño que la longitud de onda de la señal de resonancia. Por lo tanto, los SRR pueden ser considerados como los elementos fundamentales para la miniaturización de los dispositivos de microonda, tales como filtros y antenas [40] [14].

Recientemente, SRR han sido utilizados para la fabricación de sensores y dispositivos. Por ejemplo, se ha logrado construir un biosensor basado en SRR que detecta la ocurrencia de uniones biomoleculares. La estructura de este biosensor consiste en dos pares de SRR y una línea de transmisión plana para microondas. Tal y como se muestra en la Figura 3

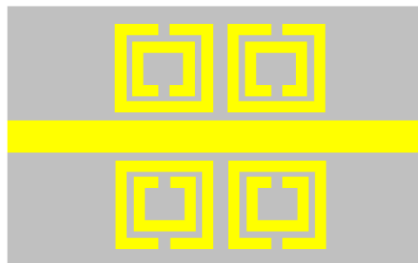


Figura 3: Estructura de un biosensor basado en SRR.

La microcinta planar genera un componente de campo magnético que varía con el tiempo en una dirección perpendicular a la superficie de los SRR. Por otro lado, existe un componente pequeño de campo eléctrico a lo largo del eje de la línea. Por lo tanto, los modos de propagación de las microondas a través de la línea no es un modo electromagnético transversal puro (TEM). De acuerdo con la ley de Faraday, cuando un componente de campo magnético variante en el tiempo es perpendicularmente incidente sobre la superficie de SRR, esta superficie generará resonancia. Esto es la razón por lo cual un RSS puede ser considerado como un circuito resonante LC. Por lo que los cambios en la frecuencia de resonancia dependen de los cambios de los valores de inductancia y/o capacitancia. Recientemente, se propuso un dispositivo de terahertz basado en metamaterial, el cual puede ser utilizado para el análisis cuantitativo en aplicaciones de detección bioquímica [11] [40] [14].

Los metamateriales también actúan como un compensador de fase, cuando la onda pasa a través de una capa de material DPS, el cual tiene fase positiva mientras que un material DNG tiene fase negativa, de este modo cuando la onda sale del material DNG la diferencia total de fase es igual a cero.

Los metamateriales están evolucionando de forma rápida debido al interés de diversas empresas y científicos de todo el mundo. Es difícil hacer un recuento de todas las aplicaciones y experimentos llevados a cabo en los laboratorios. Las características electromagnéticas de los metamateriales han sido comprobadas teórica, numérica y experimentalmente. Sin embargo, el tamaño de las inclusiones para la fabricación de determinados metamateriales sigue siendo grande, esto ocasiona un punto focal difuso de difracción incrementando de este modo pérdidas en la transmisión. Para obtener un fenómeno cercano a la pureza refractiva, es necesario que el metamaterial sea lo más homogéneo posible, es decir reducir el tamaño de las inclusiones. Esto se lograría con nuevas arquitecturas y nuevas tecnologías de fabricación [53].

Actualmente no se ha desarrollado algún metamaterial en el rango de frecuencias ópticas. Esto debido a que el componente metálico de los metamateriales actúa como plasmas, representando de este modo una gran complejidad en la fabricación de algún metamaterial para alcanzar la invisibilidad. Se puede afirmar que la combinación de la nanotecnología con materiales DNG darán inicio a nuevas estructuras de metamateriales innovadoras e

inteligentes que puedan ser reconfigurables automáticamente de acuerdo a la aplicación. Podemos esperar conceptos y aplicaciones potenciales de los metamateriales los cuales solo están limitadas por la imaginación humana.

CAPÍTULO 2: MODELOS MATEMÁTICOS DE LOS MATERIALES

Los modelos de material son utilizados para conocer los detalles espectrales del medio. Es decir, a partir de estos modelos es posible obtener tanto la permitividad eléctrica como la permeabilidad magnética del medio.

2.1 Modelo de Lorentz.

Uno de los modelos usados en la respuesta dieléctrica de materiales más conocido es el modelo de Lorentz [26] [55]. Se deriva a partir de una descripción del movimiento de los electrones en términos del oscilador armónico amortiguado. Se asumirá que los portadores eléctricos se mueven en la misma dirección a la que se establece el campo eléctrico. El modelo de Lorentz describe la respuesta temporal de una componente del vector de polarización del medio con respecto a la misma componente del campo eléctrico este modelo se expresa por la ecuación diferencial [26] [34]

$$\frac{d^2}{dt^2} P_j + \Gamma_L \frac{d}{dt} P_j + \omega_0^2 P_j = \varepsilon_0 X_L E_j \quad (1)$$

Donde el primer término del lado izquierdo de la ecuación (1) describe los mecanismos de aceleración de las cargas; el segundo término describe los mecanismos de amortiguamiento del sistema con un coeficiente de amortiguamiento Γ_L ; el tercer término representa las fuerzas de restitución con frecuencia característica $f_0 = \omega_0/2\pi$. El término del lado derecho incluye un coeficiente de acoplamiento X_L . La respuesta en el dominio de la frecuencia, asumiendo la dependencia en el tiempo de $e^{j\omega t}$ donde ω es la frecuencia angular, está dada por la siguiente expresión

$$P_j(\omega) = \frac{X_L}{-\omega^2 + i\Gamma_L\omega + \omega_0^2} \varepsilon_0 E_j(\omega),$$

donde ε_0 es la permitividad del vacío.

Para pequeños amortiguamientos $\frac{\Gamma_L}{\omega_0} \ll 1$ la respuesta es resonante a la frecuencia propia de la fuente f_0 . La polarización P_j y el campo eléctrico E_j están relacionados con la susceptibilidad eléctrica X_e de acuerdo con la expresión

$$X_{e,Lorentz}(\omega) = \frac{P_j(\omega)}{\varepsilon_0 E_j(\omega)} = \frac{X_L}{-\omega^2 + i\omega + \omega_0^2}. \quad (2)$$

Por lo tanto es posible expresar la permitividad eléctrica ε del medio con la fórmula

$$\varepsilon_{Lorentz}(\omega) = \varepsilon_0[1 + X_{e,Lorentz}(\omega)]$$

2.2 Modelo de Debye.

Existen algunos casos particulares que pueden derivarse del modelo de Lorentz. Cuando el término de aceleración de la ecuación (1) tiende a cero, se obtiene el modelo de Debye:

$$\Gamma_d \frac{d}{dt} P_j + \omega_0^2 P_j = \varepsilon_0 X_d E_j$$

$$X_{e,Debye}(\omega) = \frac{X_d}{i\Gamma_d \omega + \omega_0^2}$$

Donde X_d es el correspondiente acoplamiento de Debye.

2.3 Modelo de Drude.

Cuando el término de la fuerza de restitución de la ecuación (1) tiende a cero, se obtiene el modelo de Drude [26]

$$\frac{d^2}{dt^2} P_j + \Gamma_D \frac{d}{dt} P_j = \varepsilon_0 X_D E_j \quad (3)$$

$$X_{e,Drude}(\omega) = \frac{X_D}{-\omega^2 + i\Gamma_D \omega}, \quad (4)$$

donde el coeficiente de acoplamiento X_D es generalmente representado por la frecuencia de plasma $X_D = \omega_p^2$.

Asumiendo que el coeficiente de acoplamiento X es positivo, se puede concluir que sólo los modelos de Lorentz y Drude pueden dar lugar a permitividades negativas. Debido a que el modelo de Lorentz es un modelo de resonancia, la parte real de la susceptibilidad, y por lo tanto, de la permitividad se vuelven negativas para una pequeña banda de frecuencias inmediatamente por arriba de la frecuencia de resonancia. Por otra parte, en el Modelo de Drude la parte real de la permitividad puede tomar valores negativos en una banda de frecuencia más amplia para $\omega < \sqrt{\omega_p^2 - \Gamma_D^2}$.

La respuesta magnética se puede modelar de forma similar a la respuesta dieléctrica. Las ecuaciones de magnetización del medio M_j y la susceptibilidad magnética X_m son

obtenidas de las ecuaciones de polarización y susceptibilidad eléctrica haciendo los reemplazos $E_i \rightarrow H_i$, $\frac{P_i}{\epsilon_0} \rightarrow M_i$. En este sentido la permeabilidad está dada por

$$\mu(\omega) = \mu_0[1 + X_m(\omega)],$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.

Generalmente la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética de un material son dependientes de la frecuencia. Hay muchos modelos matemáticos para los materiales para describir la respuesta dieléctrica y magnética en frecuencia de un material.

El modelo de Drude es utilizado para simular un medio LHM. En este modelo la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética se describen en función de la frecuencia ya que el medio es dispersivo [66] [59] [65] [55]. En este trabajo se decidió trabajar con el modelo de Drude debido a que los metamateriales tienen un ingrediente metálico y además tiene una banda de frecuencias más amplia respecto al modelo de Lorentz, en que la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética toman valores negativos. Esta elección es por conveniencia numérica, y por lo tanto no afecta a ninguna conclusión derivada de estas simulaciones.

En el modelo de Drude, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética se escriben como

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\Gamma_e)} \right), \quad (5)$$

$$\mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega(\omega - i\Gamma_m)} \right), \quad (6)$$

donde ω_{pe} , ω_{pm} y Γ_e , Γ_m denotan la frecuencia de plasma y la frecuencia de absorción, tanto magnética como magnética, respectivamente, los valores de ϵ_0 y μ_0 son

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \approx 8.854 \times 10^{-12} F/m$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$$

Si se considera al medio como un medio sin absorción ($\Gamma_e, \Gamma_m = 0$) las ecuaciones (5) y (6) se reducen a

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \quad (7)$$

y

$$\mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2} \right) \quad (8)$$

Para modelar un material doblemente negativo, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \omega &< \omega_{pe} \\ \omega &< \omega_{pm} \end{aligned}$$

Con esto se asegura que tanto la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética serán negativas. Si $\varepsilon(\omega) < 0$ y $\mu(\omega) < 0$, el índice de refracción n debe calcularse tomando en cuenta la raíz negativa. De este modo se afirma que el índice de refracción en un metamaterial DNG es negativo.

2.4 Índice de refracción negativo.

El número de onda k y el índice de refracción n están dados por las siguientes expresiones

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (9)$$

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (10)$$

respectivamente, donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular del campo electromagnético.

Los radicales que aparecen en las fórmulas (9) y (10) dará lugar a dificultades especialmente cuando se considera un material DNG. Como ambos parámetros son cantidades complejas donde su parte real es negativa, el número de onda y el índice de refracción del medio dependen de qué rama de las raíces complejas sea seleccionada. Esta controversia apareció en la comunidad científica justo después de la idea del lente perfecto. La discusión se enfoca en la validez del índice de refracción negativo y la velocidad de fase negativa [47] [65].

La permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética de un medio metamaterial pueden ser expresadas como

$$\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\Phi_\varepsilon},$$

$$\mu = |\mu|e^{i\Phi_\mu},$$

donde Φ_ε y Φ_μ son argumentos de los números complejos ε , μ respectivamente. De forma similar, el número de onda puede ser escrito como

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = |k|e^{i\Phi_k} \quad (11)$$

donde

$$\Phi_k = \frac{1}{2}(\Phi_\mu + \Phi_\varepsilon)$$

La elección de una rama de la raíz cuadrada está basada en la causalidad física que debe existir en un medio lineal dispersivo, las direcciones de las ondas asociadas con la reflexión y la transmisión de la onda electromagnética. Esta elección es examinada a detalle en [76] para un material DNG, primero introduciendo pérdidas eléctricas y magnéticas pequeñas (en el caso de metamateriales aproximados por el modelo de Drude y Lorentz [47] [65]) y después decidiendo qué rama de la raíz cuadrada da una solución físicamente correcta. Un análisis similar para materiales DPS, MNG y ENG muestra que, la elección de la rama de la raíz cuadrada dada por la ecuación (11) sigue siendo válida para estos medios. Los argumentos de μ , ε y k para diferentes tipos de materiales se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Argumentos de μ, ε y k para diferentes tipos de material.

	Φ_μ	Φ_ε	Φ_k
DPS	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
DNG	$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$
MNG	$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$	$\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$
ENG	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$	$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$

En un medio dispersivo, el índice de refracción y el número de onda quedan expresados de la siguiente forma, respectivamente [65]

$$n(\omega) = \sqrt{|\varepsilon(\omega)\mu(\omega)|} e^{\frac{i[\Phi_\varepsilon(\omega) + \Phi_\mu(\omega)]}{2}}, \quad k(\omega) = k_0 n(\omega) \quad (12)$$

respectivamente, donde k_0 es el número de onda en el vacío.

Para metamateriales sin pérdidas (12) implica que

$$k(\omega) = \omega n(\omega) < 0. \quad (13)$$

2.5 Velocidad de fase.

En la teoría de la relatividad especial de Einstein surgen las siguientes relaciones [52] [24]

$$E = mc^2. \quad (14)$$

$$p = mv_g, \quad (15)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_g^2}{c^2}}}, \quad (16)$$

Donde

E : es la energía total relativista de una partícula

m : es la masa relativista de una partícula

m_0 : es la masa en reposo de una partícula

p : Momento de una partícula relativista

v_g : Velocidad de una partícula, que para una partícula cuántica equivale a la velocidad de grupo del paquete de ondas asociado con ésta.

Si dividimos las fórmulas (14) y (15) obtenemos

$$\frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv_g} = \frac{c^2}{v_g} = \frac{c}{v_g} c \quad (17)$$

Sea $s = \frac{E}{p}$, que tiene unidades de velocidad. Como la velocidad de grupo siempre es menor que la velocidad de la luz, entonces la velocidad S es mayor que la velocidad de la luz, c , denotemos por v_f la velocidad de fase que definimos como

$$v_f = \frac{E}{p}. \quad (18)$$

consideremos la relación de De Broglie [21]

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

del momentum p de una partícula cuántica con la longitud de onda λ de De Broglie asociada a ésta, donde h es la constante de Planck [2] [28].

Se sabe que el momentum de Compton para una partícula con masa en reposo m_0 , se define como

$$p_c := m_0 c$$

entonces la longitud de onda de Compton asociada con la partícula es

$$\lambda_c = \frac{h}{p_c} = \frac{h}{m_0 c} \quad (19)$$

La longitud de onda de Compton fue formulada por el físico estadounidense Arthur Compton para explicar la dispersión de los fotones debido a los electrones [2].

Podemos reescribir la fórmula (14), como sigue

$$E^2 = p^2 c^2 + p_c^2 c^2$$

Que en términos de λ y λ_c toma la forma

$$E^2 = c^2 \left(\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda_c^2} \right) = \frac{h^2 c^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \right) \quad (20)$$

Aplicando raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación (20) obtenemos

$$E = \frac{hc}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}} \quad (21)$$

Sustituyendo la fórmula (21) en (18), obtenemos

$$v_f = \left(\frac{hc}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}} \right) \frac{\lambda}{h}$$

Simplificando, obtenemos una fórmula de la velocidad de fase en términos de la longitud de onda de De Broglie λ y la longitud de onda de Compton, λ_c .

$$v_f = c \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2} \quad (22)$$

De acuerdo a la teoría cuántica, se sabe que los fotones carecen de masa [28] [2]. Por lo que matemáticamente

$$m_0 = 0,$$

esto implica que, de acuerdo con (19)

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} \rightarrow \infty$$

De acuerdo con la fórmula de velocidad de fase (22), el cociente entre las longitudes de onda de De Broglie y de Compton se anula

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \approx 0$$

Por lo que se concluye que la velocidad de fase para los fotones es igual a la velocidad de la luz.

$$v_f = c.$$

Consideremos la constante de Planck reducida.

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Entonces (18) puede expresarse como

$$v_f = \frac{\hbar E}{\hbar p}.$$

Sabemos que la energía de un fotón es proporcional a su frecuencia [2]

$$E = \hbar\omega, \quad (23)$$

y que el momentum de un fotón es proporcional a su número de onda k

$$p = \hbar k, \quad (24)$$

Por lo que la velocidad de fase puede escribirse como

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (25)$$

Tomando en cuenta que un metamaterial es un medio dispersivo, se debe considerar a la velocidad de fase en función de la frecuencia por lo que la ecuación (25) queda expresada como

$$v_f(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (26)$$

Para metamateriales sin pérdidas, fórmula (12), implica que la velocidad de fase $v_f(\omega)$ es negativa.

En términos generales, la velocidad de fase se define como la tasa a la cual la fase de la onda se propaga en el espacio; es decir, la velocidad a la cual la fase de cualquier componente de frecuencia de la onda se propaga.

2.6 Velocidad de grupo

Consideremos la fórmula de la energía total relativista de Einstein [52] [28]

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^2 \quad (27)$$

Al derivar esta expresión con respecto a p , resulta

$$\frac{d}{dp}(E^2) = \frac{d}{dp}(p^2 c^2 + m_0^2 c^2)$$

Observando que tanto c como m_0 son independientes de p , obtenemos que $\frac{d}{dp}(m_0^2 c^2) = 0$, por lo tanto

$$2E \frac{dE}{dp} = 2c^2, \text{ es decir } \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} \quad (28)$$

Sustituyendo el denominador de la expresión (28) con (14), se obtiene

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{mc^2} = \frac{p}{m}. \quad (29)$$

Ahora, si sustituimos en expresión (29) el valor dado por (15) se obtiene

$$\frac{dE}{dp} = \frac{mv_g}{m} = v_g$$

De este modo se obtiene una fórmula para la velocidad de grupo

$$v_g = \frac{dE}{dp}, \quad (30)$$

que establece que la velocidad de grupo de cualquier partícula es igual a la derivada de su energía total relativista con respecto a su momentum [28] [2].

Si consideramos las fórmulas (17) y (18) podemos observar que

$$v_g = \frac{c^2}{v_f} \quad (31)$$

Sustituyendo la fórmula (22) en (31), obtenemos la velocidad de grupo en términos de las longitudes de onda de de Broglie, y de Compton

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}} \quad (32)$$

Ahora la expresión (30) puede escribirse como

$$v_g = \frac{\hbar dE}{\hbar dp} = \frac{d(E/\hbar)}{d(p/\hbar)},$$

pero al usar las fórmulas (23) y (24), obtenemos

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (33)$$

En general, la velocidad de grupo se define como la tasa a la cual la envolvente de un paquete de ondas se propaga.

Al sustituir la definición (11) de $k(\omega)$ en la fórmula de (26), resulta

$$v_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}, \quad (34)$$

Y para metamateriales sin pérdidas, fórmula (12), implica que $v_p < 0$.

Por otro lado, por principio de causalidad con el objetivo de que los resultados numéricos tengan sentido físico, se considera una velocidad de grupo positiva, $v_g(\omega) > 0$.

**CAPÍTULO 3: PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
PRODUCIDAS POR UNA FUENTE EN MOVIMIENTO EN UN MEDIO
DISPERSIVO**

En esta sección consideraremos la propagación de ondas electromagnéticas en medios dispersivos, centrándonos en metamateriales, siguiendo los trabajos [9] y [10].

Para obtener las ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos es necesario el remplazo de ε y μ por operadores diferenciales $\varepsilon(D_t)$ y $\mu(D_t)$ que actúan conforme a

$$\varepsilon(D_t)\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega)\hat{\mathbf{u}}(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad \mu(D_t)\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega)\hat{\mathbf{u}}(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

donde la transformada de Fourier con respecto a tiempo se define por

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(t)e^{-i\omega t}dt$$

El sistema de las ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos homogéneos es

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon(D_t) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu(D_t) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \varepsilon(D_t) \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \end{aligned}$$

Con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

donde

- ρ : Es la densidad de carga eléctrica (C/m^3)
- \mathbf{j} : Es la densidad de corriente (A/m^2)
- \mathbf{E} : Es el campo eléctrico (V/m)
- \mathbf{H} : Es el campo magnético (A/m)

Al aplicar la transformada de Fourier con respecto al tiempo a las cinco ecuaciones anteriores se obtiene

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}}(\omega) = i\varepsilon(\omega)\omega\hat{\mathbf{E}}(\omega) + \hat{\mathbf{j}}(\omega), \quad (35)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\omega) = -i\mu(\omega)\omega\hat{\mathbf{H}}(\omega), \quad (36)$$

$$\varepsilon(\omega)\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega) = \hat{\rho}(\omega),$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{H}}(\omega) = 0,$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}} - i\omega\hat{\rho}(\omega) = 0.$$

En la forma estándar, se pueden desacoplar las ecuaciones (35) y (36) en un par de ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\omega) - k^2(\omega)\hat{\mathbf{E}}(\omega) = -i\omega\mu(\omega)\hat{\mathbf{j}}(\omega), \quad (37)$$

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{H}}(\omega) - k^2(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega) = \nabla \times \hat{\mathbf{j}}(\omega). \quad (38)$$

Si aplicamos la siguiente identidad vectorial será posible simplificar ésta expresión

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\omega) = -\nabla^2 \hat{\mathbf{E}}(\omega) + \nabla \left(\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega) \right),$$

donde

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega) = \varepsilon^{-1}(\omega)\hat{\rho}(\omega).$$

Se obtiene de este modo, la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\mathbf{E}}(\omega) + k^2(\omega)\hat{\mathbf{E}}(\omega) &= -i\omega\mu(\omega) \left(\hat{\mathbf{j}}(\omega) + \frac{1}{k^2(\omega)} \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}(\omega)) \right) \\ &=: \mathbf{F}_\omega, \end{aligned} \quad (39)$$

De forma similar a la ecuación (39), es posible reducir la ecuación (38)

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}}(\omega) + k^2(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega) = -\nabla \times \hat{\mathbf{j}}(\omega) =: \mathbf{\Phi}_\omega. \quad (40)$$

Consideremos la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz

$$\Delta g_\omega(\mathbf{x}) + k^2(\omega)g_\omega(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}),$$

En \mathbb{R}^3 como $g_\omega(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik(\omega)|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}$, la cual físicamente representa a una onda esférica armónica radiada por un impulso unitario $\delta(\mathbf{x})$.

Las soluciones en el tiempo de las ecuaciones (39) y (40) están dado por:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (g_\omega * \mathbf{F}_\omega)(\mathbf{x}) d\omega, \quad (41)$$

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (g_\omega * \mathbf{\Phi}_\omega)(\mathbf{x}) d\omega. \quad (42)$$

Sin embargo, es necesario especificar la fuente que genera el campo electromagnético. En el caso electromagnético, las densidades de corriente y de carga eléctrica son las fuentes de campo. Consideremos una fuente en movimiento expresada por la densidad de corriente

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)),$$

donde δ es la distribución de dirac, $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t)$ es la velocidad de la fuente, $A(t)$ es la amplitud de la fuente, \mathbf{x} es el punto de observación del campo y $\mathbf{x}_0(t)$ es la trayectoria de la fuente.

Usando la definición de convolución

$$(g * \boldsymbol{\psi})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Por una función $\boldsymbol{\psi}$ de prueba adecuada, se tiene que

$$(g_\omega * \mathbf{\Phi}_\omega)(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \nabla_{\mathbf{x}} \times \frac{e^{i(k(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|+\omega\tau)}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) d\tau, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} (g_\omega * \mathbf{F}_\omega)(\mathbf{x}) &= \frac{-i\omega\mu(\omega)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) (I \\ &+ k^{-2}(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}) \frac{e^{i(k(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|+\omega\tau)}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (44)$$

donde I es el operador identidad.

Al sustituir las ecuaciones (43) en (41) y (44) en (42), obtenemos las ecuaciones que describen la intensidad de campo eléctrico y la intensidad de campo magnético para un medio dispersivo.

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_x \times \left(\frac{e^{i(k(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|-\omega(t-\tau))}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) \right) A(\tau) d\omega d\tau, \quad (45)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2 i} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \frac{\omega \mu(\omega) (I + k^{-2}(\omega) \nabla_x \nabla_x) e^{i(k(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|-\omega(t-\tau))}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) d\omega d\tau. \quad (46)$$

La integración con respecto a τ cubre el intervalo $(-\infty, t)$ debido a la analiticidad de los integrandos para ω en \mathbb{C}_+ . Esto es, τ no puede exceder a t , de acuerdo con el principio de causalidad.

La fase de las integrales (45) y (46)

$$S(\omega, \tau) = k(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)| - \omega(t-\tau) \quad (47)$$

Buscamos obtener una representación asintótica de los campos generados por la fuente en movimiento. Consideremos a la amplitud de la fuente como $A(t) = a(t)e^{-i\omega_0 t}$, donde ω_0 es una frecuencia propia de la fuente. Introducimos un parámetro adimensional $\lambda > 0$, el cual caracterizará la lentitud de las variaciones de amplitud de la fuente y simultáneamente la lentitud de su aceleración. Introduzcamos el cambio de variable

$$\mathbf{x}_0(t) = \lambda \mathbf{X}_0 \left(\frac{t}{\lambda} \right)$$

Además usaremos los siguientes cambios de variable

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{X}, \quad t = \lambda T, \quad \tau = \lambda t.$$

Obtenemos:

$$\bar{\mathbf{H}}_\lambda(T, \mathbf{X}) = \frac{1}{8\pi^2 \lambda} \int_{\Gamma \times \mathbb{R}} \tilde{\mathbf{a}}(l) \nabla_{\mathbf{X}} \times \left(\frac{e^{i\lambda \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, l)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(l)|} \mathbf{V}(l) \right) d\omega dl, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_\lambda(T, \mathbf{X}) = & \frac{1}{8\pi^2 i} \int_{\Gamma \times \mathbb{R}} \tilde{\mathbf{a}}(\iota) \omega \mu(\omega) \left(I \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda^2 k^2(\omega)} \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{X}} \right) \frac{e^{i\lambda \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)|} \mathbf{V}(\iota) d\omega d\iota. \end{aligned} \quad (49)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{a}}(\iota) := A(\lambda \iota), \mathbf{V}(\iota) := \mathbf{v}(\lambda \iota), \bar{\mathbf{E}}_\lambda(T, \mathbf{X}) := \mathbf{E}\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right), \bar{\mathbf{H}}_\lambda(T, \mathbf{X}) := \mathbf{H}\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)$$

La fase \bar{S} de las dos integrales se define como

$$\bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota) = k(\omega) |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)| - \omega(T - \iota) - \omega_0 \iota.$$

Un problema interesante a estudiar es conocer cuál es el comportamiento asintótico de las integrales (48) y (49) cuando el parámetro λ tiende a infinito. En este caso, se analiza su comportamiento asintótico mediante el método de fase estacionaria. De acuerdo con la idea principal del método de fase estacionaria, hay una cancelación de las componentes armónicas en el término principal de las integrales, para variaciones muy rápidas de la fase. Sin embargo, en la vecindad de la región definida por $\frac{\partial \bar{S}}{\partial \omega} = 0$ y $\frac{\partial \bar{S}}{\partial \iota} = 0$ (punto estacionario) el integrando contribuye con el campo electromagnético asintóticamente. Las contribuciones del punto estacionario (ω_s, ι_s) en las asintóticas de \mathbf{H} y \mathbf{E} se calculan a continuación. Los puntos estacionarios de $\bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)$ con respecto a (ω, ι) para (T, \mathbf{X}) fijo son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}{\partial \omega} = \frac{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)|}{v_g(\omega)} - (t - \iota) = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}{\partial \iota} = -k(\omega) V(\mathbf{X}, \tau) + (\omega - \omega_0) = 0,$$

donde

$$V(\mathbf{X}, \tau) = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)|} \mathbf{V}(\iota)$$

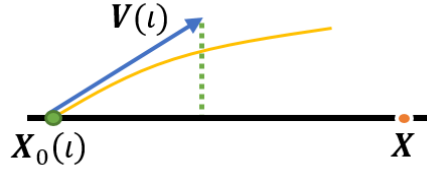


Figura 4: Proyección del vector $V(t)$ sobre el vector $\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(t)$.

Sea $\omega_s = \omega_s(T, \mathbf{X})$, $t_s = t_s(T, \mathbf{X})$ un punto estacionario no degenerado de la fase \bar{S} . Significa que (ω_s, t_s) es una solución del sistema (50) y, además

$$\det \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s) \neq 0,$$

donde

$$\bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s) = \begin{pmatrix} k''(\omega) |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(t)| & 1 - \frac{V(\mathbf{X}, \tau)}{v_g(\omega)} \\ 1 - \frac{V(\mathbf{X}, \tau)}{v_g(\omega)} & -k(\omega) \frac{\partial V(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

es la matriz Hessiana de la fase \bar{S} . La diferencia entre el número de eigenvalores positivos y negativos de la matriz $\bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)$ se denota como $\text{sgn } \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)$.

La contribución del punto estacionario (ω_s, t_s) en las asintóticas de $\bar{H}_\lambda(T, \mathbf{X})$, $\bar{E}_\lambda(T, \mathbf{X})$ está dada por las fórmulas

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\lambda,s}(T, \mathbf{X}) &= \frac{1}{4\pi\lambda^2} \nabla_x \\ &\times \left(\frac{e^{i\lambda\bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(t_s)|} \mathbf{V}(t_s) \right) \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)}}{|\det \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)|^{1/2}} \tilde{a}(t_s) \\ &\times \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \end{aligned} \quad (51)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\lambda,s}(T, \mathbf{X}) &= \frac{\tilde{a}(t_s)}{4\pi\lambda i} \left[\omega_s \mu(\omega_s) I + \frac{1}{\lambda^2 k^2(\omega_s)} \nabla_x \nabla_x \cdot \frac{e^{i\lambda\bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(t_s)|} \mathbf{V}(t_s) \right] \\ &\times \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)}}{|\det \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)|^{1/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Si la fase \bar{S} tiene un número finito de puntos estacionarios el término asintótico principal del campo electromagnético es la suma de las contribuciones de cada punto estacionario.

Las expresiones (51) y (52) pueden ser simplificadas si se consideran únicamente los términos de orden $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

$$\bar{\mathbf{H}}_{\lambda,s}(T, \mathbf{X}) \sim \frac{ik(\omega)\tilde{a}(t_s)}{4\pi\lambda} \frac{e^{i\lambda\bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s) + \frac{i\pi}{4}\text{sgn } \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)} (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}(t_s)) |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(t_s)|}{|\det \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)|^{1/2} |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(t_s)|} \quad (53)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_{\lambda,s}(T, \mathbf{X}) \sim & \frac{\tilde{a}(t_s)}{4\pi\lambda i} \left[\omega_s \mu(\omega_s) \mathbf{V}(t_s) - (\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}(t_s)) |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(t_s)| \right] \\ & \times \frac{e^{i\lambda\bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s) + \frac{i\pi}{4}\text{sgn } \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(t_s)| |\det \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_s, t_s)|^{1/2}} \end{aligned} \quad (54)$$

Regresando a las variables (t, \mathbf{x}) obtenemos las fórmulas asintóticas

$$\mathbf{H}_s(t, \mathbf{x}) \sim \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{x}} \times \left(\frac{e^{iS(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s)|} \mathbf{v}(\tau_s) \right) \frac{a(\tau_s) e^{\frac{i\pi}{4}\text{sgn } S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\det S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)|^{1/2}}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(t, \mathbf{x}) \sim & \frac{1}{4\pi i} a(\tau_s) \omega_s \mu(\omega_s) \left(I + \frac{1}{k^2(\omega_s)} \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \right) \frac{e^{iS(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s)|} \mathbf{v}(\tau_s) \\ & \times \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\text{sgn } S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\det S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (56)$$

donde los puntos estacionarios $(\omega_s = \omega_s(t, \mathbf{x}), \tau_s = \tau_s(t, \mathbf{x}))$ son soluciones del sistema

$$\frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega, \tau)}{\partial \omega} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0, \quad (57)$$

$$\frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega, \tau)}{\partial \tau} = -k(\omega)v(\mathbf{x}, \tau) + (\omega - \omega_0) = 0,$$

donde

$$v(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau).$$

Nótese que bajo las condiciones

$$\sup_{(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2} \left(\frac{|\mathbf{v}(\tau)|}{|v_g(\omega)|} + \frac{\Omega}{T_0} |k''(\omega)| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)| \right) < 1,$$

$$\sup_{(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2} \left(\frac{T_0}{\omega_0} k(\omega) \left| \frac{\partial v(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right| + \frac{|\mathbf{v}(\tau)|}{|v_g(\omega)|} \right) < 1,$$

donde (T_0, Ω) son la escala tiempo y frecuencia, el sistema (57) tienen una única solución que puede ser obtenida mediante el método de aproximaciones sucesivas.

Regresando a las variables (t, \mathbf{x}) a las fórmulas (53) y (54) simplificamos las fórmulas (55) y (56)

$$\mathbf{H}_s(t, \mathbf{x}) \sim \frac{ik(\omega_s)a(\tau_s) e^{i\lambda S(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s) + \frac{i\pi}{4} \text{sgn } S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)} (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}(\tau_s)) (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s)|)}{4\pi |\det S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)|^{1/2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s)|} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(t, \mathbf{x}) \sim & \frac{a(\tau_s)}{4\pi i} \left[\omega_s \mu(\omega_s) \mathbf{v}(\tau_s) - (\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\tau_s)) (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s)|) \right] \\ & \times \frac{e^{i\lambda S(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s) + \frac{i\pi}{4} \text{sgn } S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s)| |\det S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)|^{1/2}} \end{aligned} \quad (59)$$

3.1 Efecto Doppler en metamateriales

Para un punto fijo \mathbf{x} , las formulas del campo eléctrico y el campo magnético (55) y (56) pueden escribirse como

$$W(t) = A(t)e^{iF(t)}.$$

donde $A(t)$ es una función vectorial acotada, F es una función real tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty$.

De acuerdo con la teoría del procesamiento de señales, si $F(t)$ es la fase del proceso ondulatorio de $W(t)$, la frecuencia instantánea $\omega_{in}(t)$ del proceso ondulatorio de $W(t)$ está definida como $\omega_{in}(t) = -F'(t)$. En nuestro caso

$$\begin{aligned} F(t) &= S(t, \mathbf{x}, \omega_s(t, \mathbf{x}), \tau_s(t, \mathbf{x})) \\ &= k(\omega_s(t, \mathbf{x}))|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s(t, \mathbf{x}))| - \omega_s(t, \mathbf{x})(t - \tau_s(t, \mathbf{x})) - \omega_0\tau_s(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

donde $(\omega_s(t, \mathbf{x}), \tau_s(t, \mathbf{x}))$ es un punto estacionario de la fase S . Aplicando derivada a F como función compuesta se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} -F'(t) &= -\frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega_s(t, \mathbf{x}), \tau_s(t, \mathbf{x}))}{\partial t} - \frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega_s(t, \mathbf{x}), \tau_s(t, \mathbf{x}))}{\partial \omega} \frac{\partial \omega_s(t, \mathbf{x})}{\partial t} \\ &\quad - \frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega_s(t, \mathbf{x}), \tau_s(t, \mathbf{x}))}{\partial \tau} \frac{\partial \tau_s(t, \mathbf{x})}{\partial t}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\omega_{in}(t) = \omega_s(t, \mathbf{x}),$$

esto es, que la frecuencia instantánea $\omega_{in}(t)$ para un punto fijo \mathbf{x} de los procesos ondulatorios de $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ coincide con la componente $\omega_s(t, \mathbf{x})$ del punto estacionario.

De acuerdo con (57) la expresión para ω_s es:

$$\omega_s(t, \mathbf{x}) - \omega_0 = k(\omega_s(t, \mathbf{x}))v(\mathbf{x}, \tau_s(t, \mathbf{x})),$$

Que representa el desplazamiento de frecuencia Doppler.

Considerando el caso de un material DPS

$$k(\omega_s(t, \mathbf{x})) > 0,$$

se obtiene el efecto Doppler que comúnmente conocemos

$$v(\mathbf{x}, \tau) > 0 \Rightarrow \omega_s(t, \mathbf{x}) > \omega_0,$$

$$v(\mathbf{x}, \tau) < 0 \Rightarrow \omega_s(t, \mathbf{x}) < \omega_0.$$

En el caso de los metamateriales

$$k(\omega_s(t, \mathbf{x})) < 0,$$

se produce el efecto inverso de Doppler, es decir, la frecuencia captada por un receptor/observador es menor que la emitida por la fuente cuando ésta se mueve hacia el observador.

$$v(\mathbf{x}, \tau) > 0 \Rightarrow \omega_s(t, \mathbf{x}) < \omega_0,$$

En el otro caso, cuando la fuente se aleja del observador la frecuencia observada es mayor que la frecuencia de la fuente.

$$v(\mathbf{x}, \tau) < 0 \Rightarrow \omega_s(t, \mathbf{x}) > \omega_0.$$

Se tiene que $\tau_s(t, \mathbf{x})$, es el tiempo de excitación de la señal que llega al receptor situado en el punto \mathbf{x} en el instante t . Por lo tanto, el tiempo de retardo para el efecto Doppler es

$$t - \tau_s(\mathbf{x}, t) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s(t, \mathbf{x}))|}{v_g(\omega_s(t, \mathbf{x}))} > 0,$$

de modo que la velocidad de grupo $v_g(\omega) > 0$, por principio de causalidad.

3.2 Efecto de Cherenkov en metamateriales

Las partículas cargadas que se mueven más rápido que la velocidad de fase en un medio con velocidad uniforme producen radiación denominada radiación de Cherenkov. De modo convencional, en los materiales con índice de refracción positivo, la radiación viaja hacia adelante. Los metamateriales, con índice de refracción negativa, invierten el sentido de la radiación [17] [68] [69].

La velocidad de fase en un medio material puede ser excedida por la velocidad de las partículas en el material. Cuando una partícula cargada viaja a través de un medio dieléctrico con una velocidad uniforme mayor que la velocidad de fase en ese medio, radiación electromagnética se emite como radiación de Cherenkov. El resplandor azul visto en el agua de los reactores nucleares es un ejemplo de este tipo de radiación. Este fenómeno fue observado por primera vez por el físico ruso Pável Cherenkov y teóricamente

interpretado por Tamm y Frank. Ya que la energía y el ángulo de emisión depende de la velocidad de las partículas cargadas, la radiación puede ser usada para la detección y conteo de partículas. Tales dispositivos, llamados contadores Cherenkov, han hecho posibles descubrimientos prominentes en física nuclear y de partículas, incluyendo el descubrimiento del antiprotón y de la partícula j . Hoy en día la radiación de Cherenkov es ampliamente usada en experimentos para la identificación de partículas rápidas, medición de intensidad de reacciones, detección de biomoléculas marcadas y la determinación de la fuente e intensidad de los rayos cósmicos [17].

Debido a que las ondas Cherenkov sólo son emitidas si una partícula está viajando más rápido que la velocidad de fase en un medio, la radiación de Cherenkov sólo se observa en partículas de alta energía. También, en un medio dieléctrico convencional, la radiación emitida viaja en la misma dirección que las partículas y forman un cono. Por consiguiente, las partículas cargadas interferirán con la detección de esa radiación. Todos estos problemas pueden ser resueltos si la radiación y las partículas se mueven en direcciones opuestas. Esto es ahora posible, gracias a los desarrollos recientes en metamateriales que ofrecen propiedades electromagnéticas novedosas no encontradas en la naturaleza. En particular, los metamateriales ofrecen radiación de Cherenkov invertida, un fenómeno en el cual la radiación y la partícula cargada se separan de forma natural en direcciones opuestas por lo que su interferencia física es minimizada. Por lo tanto, la influencia del ruido de las partículas de alta energía sobre la información útil que se desea detectar puede ser suprimida y el detector Cherenkov queda protegido de daños por radiación. En cuanto a la radiación de Cherenkov invertida, es de particular interés que un metamaterial correctamente diseñado sea un medio con índice de refracción negativo (NIM). Es decir, a diferencia de todos los medios naturales conocidos, un metamaterial adecuadamente diseñado puede tener simultáneamente partes reales negativas tanto de la permitividad ϵ como de la permeabilidad μ . Estos parámetros, como el índice de refracción asociado, son cantidades complejas. En un medio LHM, el vector del campo eléctrico \mathbf{E} , el vector del campo magnético \mathbf{H} y el vector de onda \mathbf{K} forman la tríada de la mano izquierda, de ahí que se les denomine LHM (*Left Handed Medium*).

A diferencia de un medio convencional, la dirección de propagación de la fase que coincide con la dirección del vector de onda es opuesto al flujo de energía en un LHM, debido a la parte real negativa de su índice de refracción. En otras palabras, la onda sufre un cambio de fase negativo mientras se propaga hacia delante en un LHM. Esta característica conduce a una onda de Cherenkov emitida hacia atrás, que puede ser fácilmente separada a partir de las partículas de alta energía que lo producen. Tal medio puede ser construido a partir de elementos resonantes artificiales cuyos tamaños y espaciamientos son mucho más pequeños que la longitud de onda de interés. Los metamateriales permitirán explotar algunos fenómenos exóticos asociados con la radiación Cherenkov y así abrir una nueva ventana de aplicaciones novedosas en física de alta energía, astrofísica, biología y otros ámbitos de la ciencia.

Comprender por qué un (LHM) revierte la dirección de la radiación de Cherenkov requiere comprender el origen de dicha radiación [68] [69]. Fundamentalmente, es una onda de choque, el equivalente fotónico al auge supersónico de un jet. Esta onda de choque fotónica, o radiación de Cherenkov, es generada por una carga rápida a través de un medio. Sabiendo esto y la naturaleza de los metamateriales ayuda a explicar por qué no hay ni una causalidad ni una paradoja de conservación de energía-momento con la radiación de Cherenkov invertida.

En un material convencional, RHM, la radiación Cherenkov posee tres principales características:

- 1) Aparece sólo si la velocidad de la partícula cargada es mayor que la velocidad de fase en el medio.
- 2) El frente de fase constante de la onda radiada forma un cono y se propaga hacia adelante.
- 3) La polarización del vector de campo eléctrico se encuentra en el plano determinado por la velocidad la partícula y el vector de dirección de la potencia de radiación. Esta última característica significa que la radiación presenta un campo magnético transversal (TM), que tiene implicaciones para los atributos del metamaterial requeridos para radiación inversa.

La Figura 5 ilustra las tres características mencionadas de la radiación Cherenkov. La figura muestra el campo E_z de la onda radiada por una partícula cargada moviéndose a una velocidad $v > c/n$ a lo largo del eje z , donde c es la velocidad de fase en el medio y n es la parte real del índice de refracción del medio. El movimiento de la partícula genera un cono de radiación de Cherenkov en un material convencional con un índice de refracción positivo. En el momento t_0 , la partícula llega a la posición 0 e impulsa al medio a irradiar una onda esférica hacia afuera. Poco tiempo después (Δt), la partícula se ha movido una distancia de $v\Delta t$. Durante ese tiempo, el frente de fase de la onda radiada representado por las líneas discontinuas en la figura ha recorrido una distancia de $C\Delta t/n$. Una onda de choque se forma junto a la partícula con el frente de onda de grupo coincidente con el frente de onda de fase. Ambos son perpendiculares a el flujo de energía, representado por el vector de Poynting. El ángulo entre la dirección del flujo de energía y la velocidad de la partícula es θ , el cual es determinado por la velocidad de la partícula y el índice de refracción del medio por $\cos^{-1} \left[\frac{c}{nv} \right]$. La dirección de la onda de choque forma un cono de radiación Cherenkov con un ángulo de 2θ .

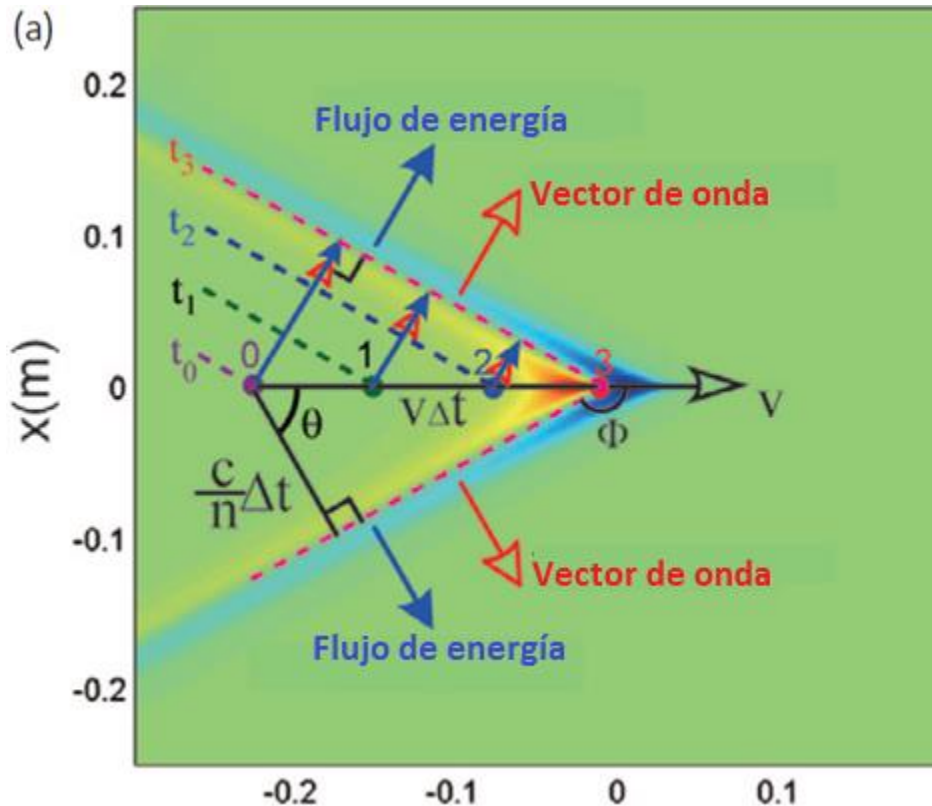


Figura 5: Radiación de Cherenkov en un RHM.

La Figura 6 muestra la radiación de Cherenkov correspondiente a un LHM, donde la parte real del índice de refracción es negativa. Como la partícula viaja a lo largo de la dirección z , la onda emitida tiene la energía fluyendo hacia afuera (flechas azules) en un cono con ángulo, $\theta = \cos^{-1}[c / (nv)]$. Para $n < -1$, el ángulo es obtuso. La propagación de la fase representada por el vector de onda (flechas rojas) es opuesta a la dirección del flujo de energía. Como puede verse por las líneas punteadas en la figura, los frentes de fase convergen hacia la trayectoria de la partícula conforme el tiempo pasa en lo que parece ser una violación de la causalidad. Esta aparente paradoja en la relación entre causa y efecto se resuelve porque la energía es llevada por la velocidad de grupo y no por la velocidad de fase. Un metamaterial es dispersivo por lo que depende de la frecuencia de radiación. En otras palabras, la velocidad de grupo y la velocidad de fase son diferentes. Así, mientras que la partícula de la figura 19 se mueve una distancia de $v\Delta t$ el frente de fase viaja a una distancia de $C\Delta t/n$ y la energía viaja una distancia de $c\Delta t/ng$, donde c/n y C/ng son las velocidades de fase y de grupo respectivamente. En este caso, El frente de onda del grupo no es perpendicular a la velocidad de grupo (dirección de la energía). El grupo de onda que surge de la propagación del grupo ya no es perpendicular al vector Poynting. La onda de choque está siempre detrás de la partícula en movimiento. Así, el cono hacia atrás formado por el grupo de frente de onda obedece el principio de causalidad.

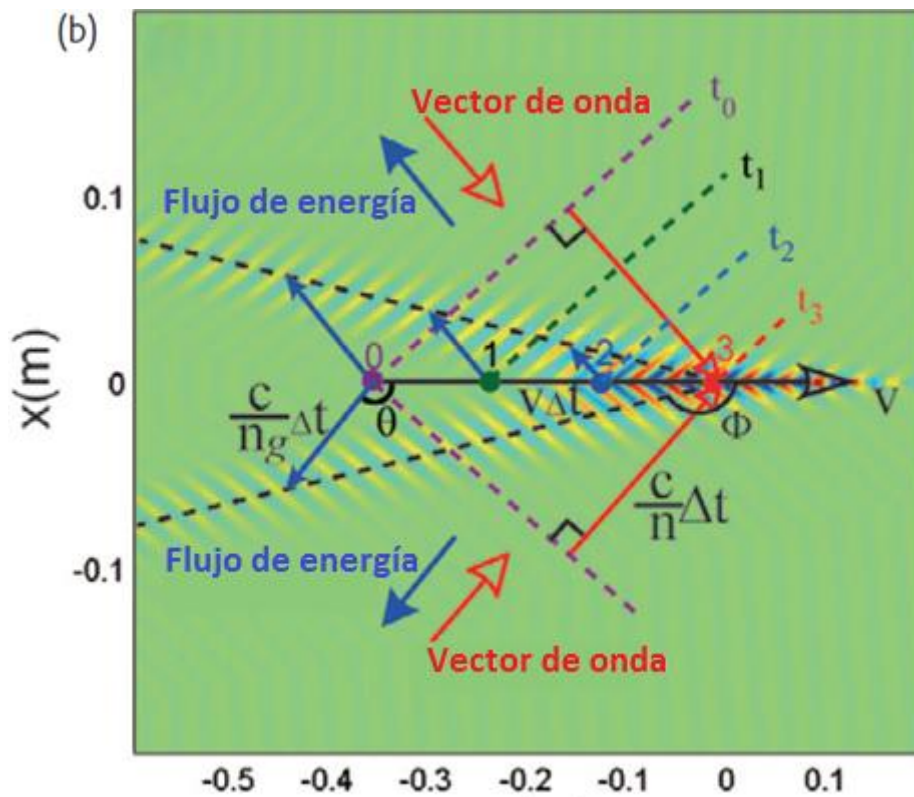


Figura 6: Radiación de Cherenkov en un metamaterial.

La teoría previamente desarrollada se puede aplicar formalmente para analizar el fenómeno de Cherenkov en metamateriales. En este apartado e es la carga de una partícula, mientras que $c(\omega) > 0$ es la velocidad de fase de un campo en el medio dispersivo isotrópico. Usamos de acuerdo con [3] [4] [9] [36]

$$\rho(t, \mathbf{x}) = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{vt}), \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = v e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{vt})$$

Suponemos que $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. En este caso la eigenfrecuencia de la partícula es $\omega_0 = 0$, y la fase S toma la forma

$$S(t, \mathbf{x}, \omega, \tau) = k(\omega)|\mathbf{x} - \mathbf{vt}| - \omega(t - \tau)$$

Por lo tanto, el sistema (57) acepta la forma

$$\frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega, \tau)}{\partial \omega} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{v}\tau|}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0, \quad (60)$$

$$\frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\omega}{c(\omega)} v(\mathbf{x}, \tau) + \omega = 0. \quad (61)$$

Suponemos que el sistema (60), (61) tiene una solución (ω_s, τ_s) no trivial $\omega_s > 0$ tal que

$$v(\mathbf{x}, \tau_s) = |\mathbf{v}| \cos(\theta(\mathbf{x}, \tau_s)) = c(\omega_s) < 0 \quad (62)$$

siendo $\theta(\mathbf{x}, \tau)$ el ángulo entre los vectores \mathbf{v} y $\mathbf{x} - \mathbf{v}\tau$. La relación (62) puede ser satisfecha si el valor de la proyección del vector velocidad \mathbf{v} sobre el vector $\mathbf{x} - \mathbf{v}\tau$ es negativa. Sea el par (ω_s, τ_s) un punto estacionario no degenerado de la fase S , que satisface

$$v(\mathbf{x}, \tau_s) = c(\omega_s), \quad (63)$$

$$\tau_s = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{v}\tau_s|}{v_g(\omega_s)}, \quad (64)$$

Y además

$$\det S''(t, \mathbf{x}, \omega, \tau) \neq 0$$

Al considerar un medio metamaterial se cumple la condición del cono de Cherenkov

$$vt - x_3 - |\mathbf{x}'| \sqrt{|\beta^2(\omega_s) - 1|} < 0, \quad (65)$$

donde

$$\mathbf{x}' = (x_1, x_2).$$

y

$$\beta(\omega) = v/v_g(\omega)$$

La condición (65) conecta el tiempo t con la posición $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ del punto donde la radiación de Cherenkov existe.

La sustitución (ω_s, τ_s) en las ecuaciones de campo electromagnético, (58) y (59), nos lleva a las siguientes expresiones para el campo electromagnético $\mathbf{E}_s(t, \mathbf{x}), \mathbf{H}_s(t, \mathbf{x})$ emitidos por

la carga en movimiento con una frecuencia instantánea $\omega_s = \omega_s(t, \mathbf{x}) > 0$ (radiación Cherenkov).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(t, \mathbf{x}) \sim & \frac{1}{4\pi i} \omega_s \mu(\omega_s) \left(I + \frac{1}{k^2(\omega_s)} \nabla_x \nabla_x \right) \frac{e^{iS(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{v}\tau_s|} \mathbf{v} \\ & \times \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\det S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)|^{1/2}} \Theta \left(vt - x_3 \right. \\ & \left. - |\mathbf{x}'| \sqrt{|\beta^2(\omega_s) - 1|} \right), \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s(t, \mathbf{x}) \sim & \frac{1}{4\pi} \nabla_x \times \left(\frac{e^{iS(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{v}\tau_s|} \mathbf{v} \right) \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}}{|\det S''(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)|^{1/2}} \\ & \times \Theta \left(vt - x_3 - |\mathbf{x}'| \sqrt{|\beta^2(\omega_s) - 1|} \right). \end{aligned} \quad (67)$$

Conforme $\lambda \rightarrow \infty$, donde $\Theta(r)$ es la función de Heaviside

$$\Theta(r) = \begin{cases} 1, & r > 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

CAPÍTULO 4: RESULTADOS, SIMULACIONES NUMÉRICAS Y

CONCLUSIONES

4.1 Simulación del índice de refracción

Resolviendo numéricamente en Mathematica la ecuación de índice de refracción (12) en un rango de frecuencia $f = [428.57\text{MHz} - 750\text{MHz}]$ y $f_{pe} = 209.63\text{THz}$, $f_{pm} = 666.86\text{GHz}$. Podemos observar en la Figura 7 que, en todo el rango de frecuencia especificado, el índice de refracción es negativo.

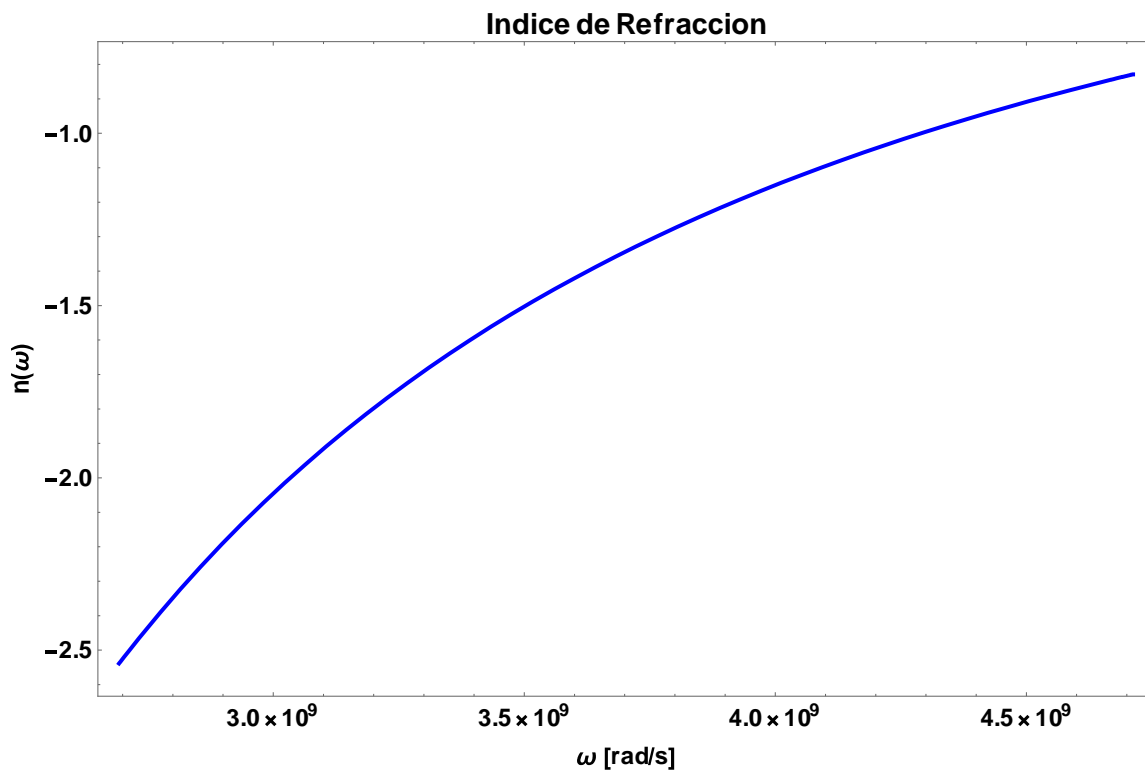


Figura 7: Índice de refracción de un metamaterial.

4.2 Simulación del número de onda

Del mismo modo, se simuló numéricamente la ecuación (13). Con los mismos parámetros de simulación considerados para obtener la Figura 7.

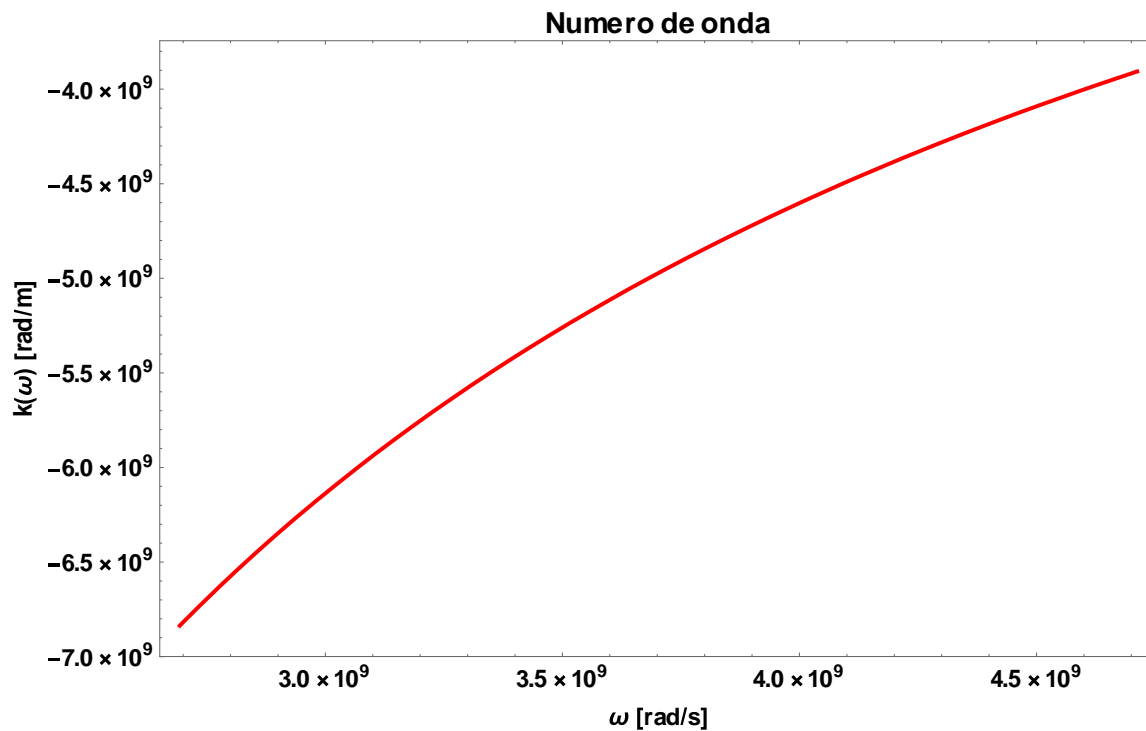


Figura 8: Numero de onda en un metamaterial.

Podemos observar en la Figura 8 que también el número de onda es negativo, tal y como se había concluido matemáticamente en el capítulo 2.

4.3 Simulación de la velocidad de fase

Con los mismos parámetros utilizados para resolver numéricamente el índice de refracción, se simuló la velocidad de fase y velocidad de grupo. Para obtener la Figura 9, se simuló numéricamente la ecuación (26).

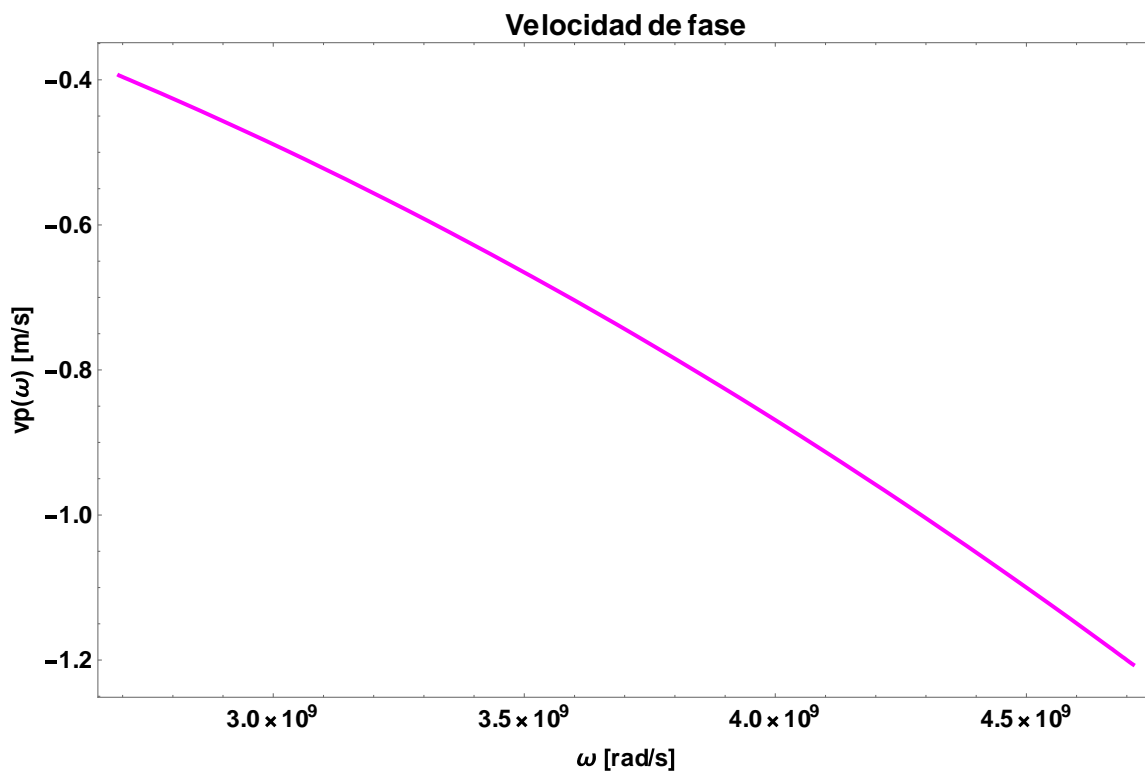


Figura 9: Velocidad de fase en un metamaterial.

4.4 Simulación de la velocidad de grupo

Ahora, utilizando la ecuación (33) para la simulación numérica, se obtuvo

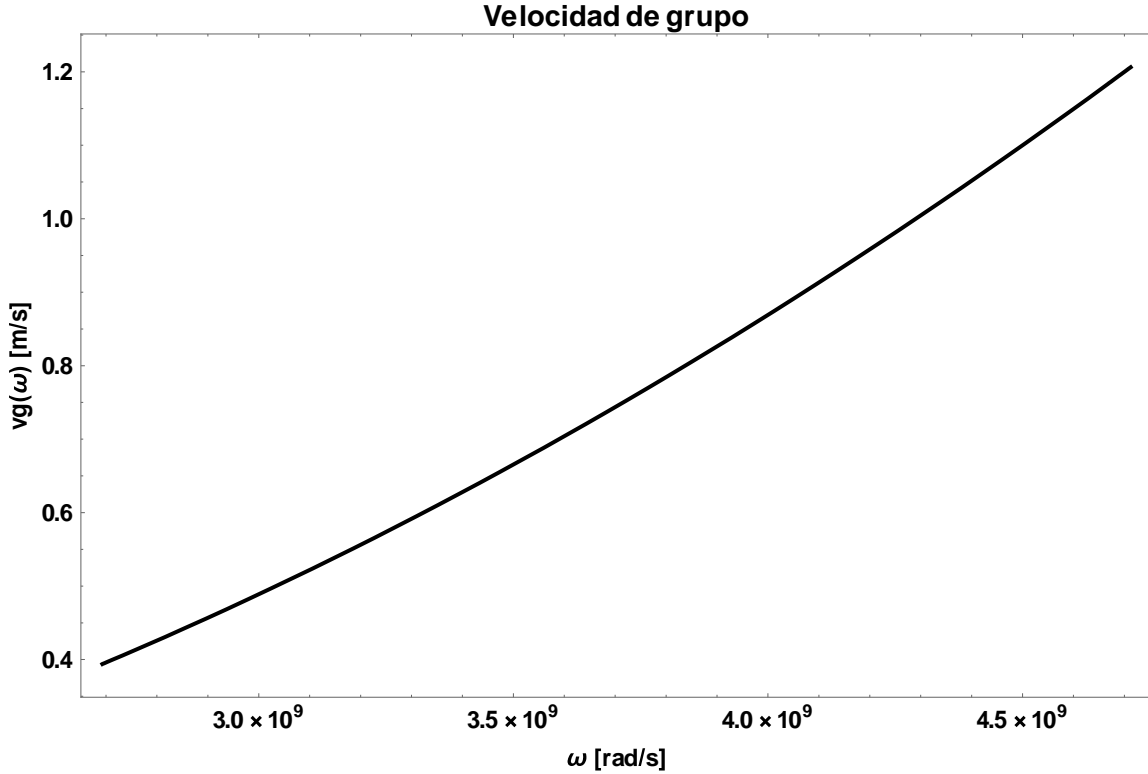


Figura 10: Velocidad de grupo en un metamaterial.

En la Figura 10 se observa que la velocidad de grupo para todo el rango de frecuencias utilizado en las simulaciones es positiva, cumpliendo el principio de causalidad.

4.5 Simulación del efecto Doppler con diferentes parámetros

Tomando en cuenta la fase de las integrales que describen el campo magnético y el campo eléctrico (58) y (59), y considerando $\omega_s = \omega_s(t, \mathbf{x})$, $\tau_s = \tau_s(t, \mathbf{x})$ se tiene

$$S(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s) = k(\omega_s)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)| - \omega_s(t - \tau_s) - \omega_0\tau_s,$$

Es un punto estacionario cuando cumple con las siguientes derivadas parciales de la fase

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}{\partial \omega_s} &= \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|}{v_g(\omega)} - (t - \tau_s) = 0, \\ \frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}{\partial \tau_s} &= -k(\omega_s)v(\mathbf{x}, t) + (\omega_s - \omega_0) = 0. \end{aligned}$$

Donde

- $\mathbf{x}_0(\tau)$: Posición de la fuente.
- \mathbf{x} : Posición del receptor.
- ω_s : Frecuencia percibida por el receptor.
- τ_s : Tiempo de retardo.
- ω_0 : Frecuencia propia de la fuente.

Para nuestro ejemplo, si consideramos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0(\tau) &= (0, v\tau, 0), \\ \mathbf{x} &= (0, x_2, 0).\end{aligned}$$

De este modo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau) &= (0, x_2 - v\tau, 0), \\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)| &= x_2 - v\tau,\end{aligned}$$

Con la condición

$$x_2 > v\tau.$$

Y sustituyendo en el sistema de ecuaciones, nos queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{x_2 - v\tau_s}{v_g(\omega_s)} - (t - \tau_s) &= 0, \\ -k(\omega_s)v + \omega_s - \omega_0 &= 0,\end{aligned}$$

Considerando:

$$\mathbf{v} = (0, v, 0).$$

Donde

x_2 : Posición del receptor [m].

v : Velocidad de la fuente [m/s].

τ_s : Tiempo de retardo [s].

ω_0 : Frecuencia propia de la fuente [rad/s].

ω_s : Frecuencia que percibe el receptor [rad/s].

Despejando los puntos estacionarios ω_s y τ_s . Obtenemos

$$\begin{aligned}\omega_s &= \frac{\omega_0}{1 - n(\omega_s)v} \\ \tau_s &= \frac{x_2 - v_g(\omega_s)t}{v - v_g(\omega_s)}\end{aligned}$$

El cual es un sistema de ecuaciones del punto de fase estacionaria (ω_s, τ_s) .

La primera fórmula del sistema describe el efecto Doppler. El desplazamiento de ω_s depende del signo de $n(\omega_s)\mathbf{v}$. El cual estará determinado por la velocidad, la velocidad será negativa cuando se aleje del observador y será positiva cuando ésta se mueva hacia el receptor. Sin embargo, podemos observar que al ser un metamaterial dispersivo el índice de refracción depende de la frecuencia y por lo tanto también la velocidad de grupo y la velocidad de fase. Para resolver la primera ecuación del sistema es necesario conocer los detalles espectrales del medio, ya que el índice de refracción depende de ω_s . En la segunda ecuación es necesario conocer el valor de ω_s para obtener τ_s , el cual será diferente para cada valor de frecuencia propia de la fuente. En las siguientes simulaciones numéricas se resolvió el sistema de ecuaciones en el software Mathematica 11, para un punto fijo x_2 y un tiempo t de observación. Se consideraron los dos casos, cuando la fuente se mueve hacia el observador tal y como se muestra en la Figura 11, se espera que el resultado de este caso es que para todo el rango de frecuencias propio de la fuente el receptor percibirá una frecuencia menor respecto a la de la fuente. Mientras que cuando la fuente se aleja del observador, tal y como se muestra en la Figura 13, se espera que la frecuencia percibida por el observador es mayor a la frecuencia de la fuente.

Para calcular numéricamente ω_s en un metamaterial. Es decir:

$$k(\omega_s(t, \mathbf{x})) < 0$$

Se consideraron los siguientes parámetros

- $v = 30 \times 10^6 m/s$, Velocidad de fuente.
- $\omega_{pe} = 1317.172 \times 10^{12} rad/s$, Frecuencia de plasma electrónica.
- $\omega_{pm} = 4.190 \times 10^{12} rad/s$, Frecuencia de plasma magnética.
- $\omega_0 = 2.693 \times 10^9 - 4.712 \times 10^9 rad/s$, Frecuencia propia de la fuente.

Donde $\omega = 2\pi f$

Caso 1: La fuente se mueve hacia al observador.

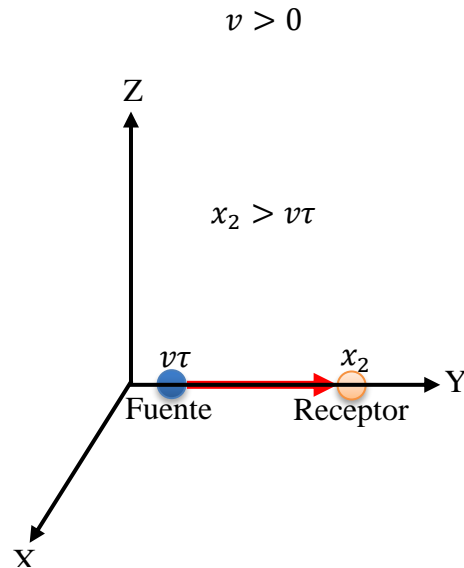


Figura 11: Ejemplo gráfico para cuando la fuente se mueve hacia el observador

La Figura 12 muestra el efecto Doppler en un metamaterial cuando la fuente se mueve a un observador, la curva muestra una forma no lineal el cual está determinado precisamente por la naturaleza dispersiva del material. Es posible comprobar que efectivamente, se percibe una frecuencia menor en todo el rango de frecuencia propia de la fuente, a modo de ejemplo práctico, podemos observar que cuando la fuente emite a una frecuencia de 4.5 GHz la frecuencia percibida es 3GHz es decir $\omega_s(t, x) < \omega_0$.

El rango de frecuencias de la fuente $f_0 = \omega_0/2\pi$ fue elegido con el objetivo de cumplir con las condiciones para obtener las propiedades físicas de un metamaterial, es decir $\varepsilon(\omega) < 0$ y $\mu(\omega) < 0$. Sin embargo, es posible cambiar a otro rango de frecuencias, en el orden de los GHz e incluso THz, aprovechando las ventajas del modelo de Drude.

Donde

f_0 : Frecuencia propia de la fuente.

f_s : Frecuencia desplazada por el efecto inverso de Doppler.

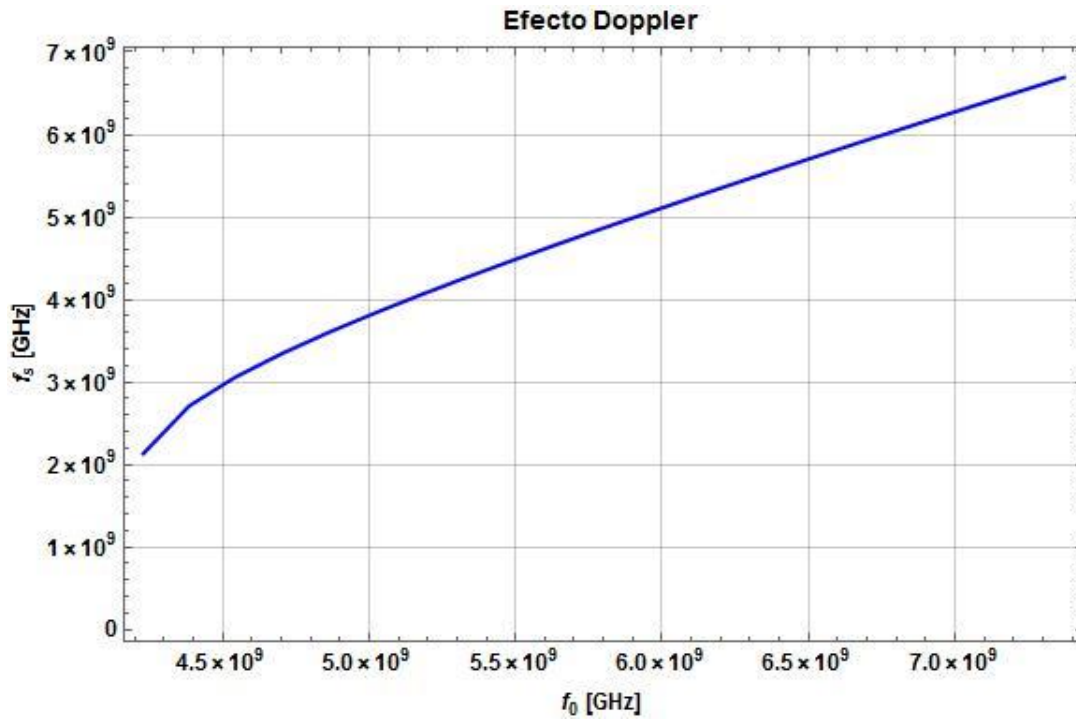


Figura 12: Efecto Doppler en un metamaterial cuando la fuente se mueve hacia al observador.

Caso 2: La fuente se aleja del observador.

$$v < 0$$

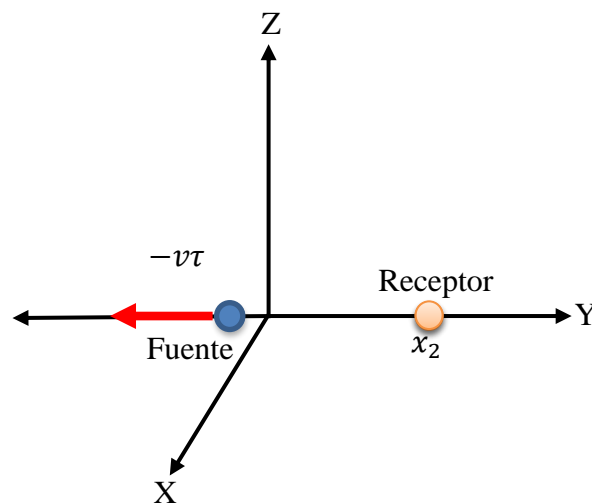


Figura 13: Ejemplo gráfico de cuando la fuente se aleja del observador

En la Figura 14 podemos observar que cuando la fuente emite a una frecuencia determinada, la frecuencia percibida es mayor a la emitida, dicho de otro modo, $\omega_s(t, x) > \omega_0$. En este caso se percibe una forma lineal de la curva. Sin embargo, no es así ya que es el mismo material dispersivo. Para poder observar de forma fácil la curva no lineal será necesario simular con un rango de frecuencia propia de la fuente más amplio al actual utilizado, con el objetivo de mostrar la no linealidad de los materiales dispersivos. Para ser preciso, de acuerdo a los valores de ω_{pe} y ω_{pm} , la eigenfrecuencia de la fuente podría variar de 1Hz hasta 666.7GHz, rango en el cual se sigue cumpliendo la condición de que la frecuencia de la fuente sea menor tanto para la frecuencia de plasma electrónica como para la frecuencia de plasma magnética, es decir

$$\omega < \omega_{pe}$$

$$\omega < \omega_{pm}$$

Para frecuencias más altas que 666.7 GHz, obtendríamos condiciones de un material MNG (Mu Negativo). Estas condiciones se cumplirían hasta 209.62 THz. A frecuencias más altas obtendríamos condiciones de un material natural DPS (Doblemente positivos).

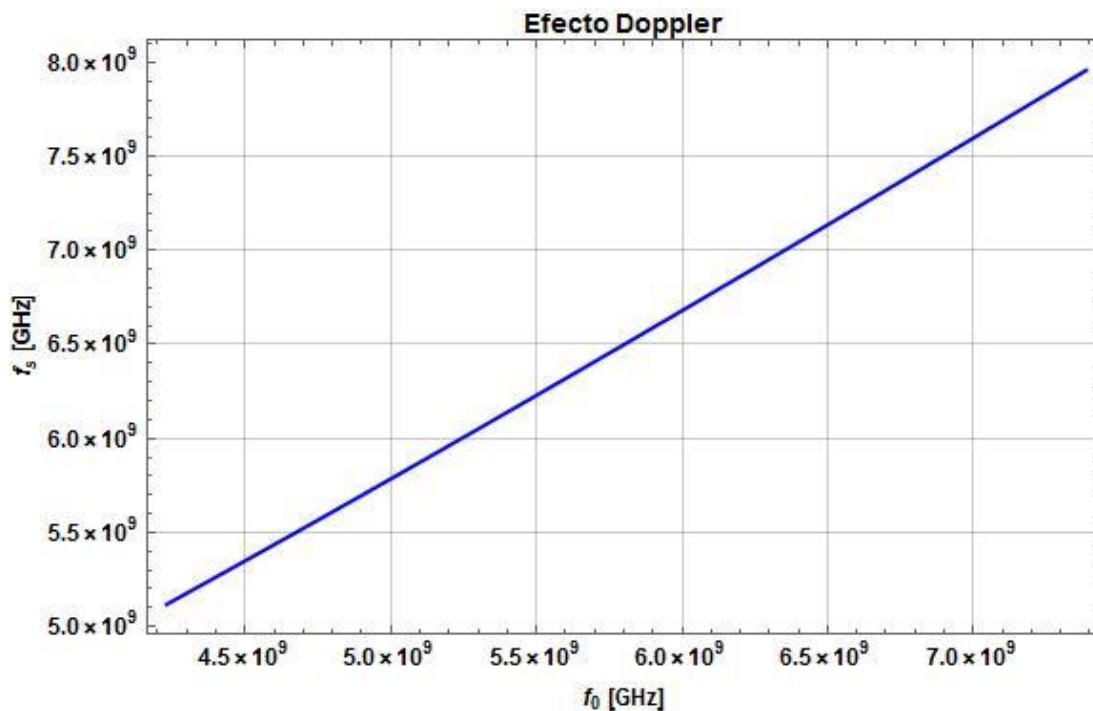


Figura 14: Efecto Doppler en un metamaterial cuando la fuente se aleja del observador.

Considerando una velocidad menor respecto a las simulaciones anteriores, y que la fuente se mueve hacia el observador. La Figura 15 muestra el efecto Doppler, podemos observar que la frecuencia percibida es menor a la frecuencia de la fuente, sin embargo es menos evidente que en el ejemplo anterior. Podemos decir que a mayor velocidad el efecto Doppler será más evidente mientras que a una velocidad de fuente relativamente pequeña

el desplazamiento en frecuencia del efecto Doppler es menos perceptible. Se consideró los siguientes valores

- $v = 3 \times 10^6 m/s$, Velocidad de fuente.
- $\omega_{pe} = 1317.172 \times 10^{12} rad/s$, Frecuencia de plasma electrónica.
- $\omega_{pm} = 4.190 \times 10^{12} rad/s$, Frecuencia de plasma magnética.
- $\omega_0 = 2.693 \times 10^9 - 4.712 \times 10^9 rad/s$, Frecuencia propia de la fuente.

La velocidad de la fuente en este ejemplo es 10 veces menor a la velocidad de fuente del ejemplo anterior, cuando la fuente se mueve hacia el receptor.

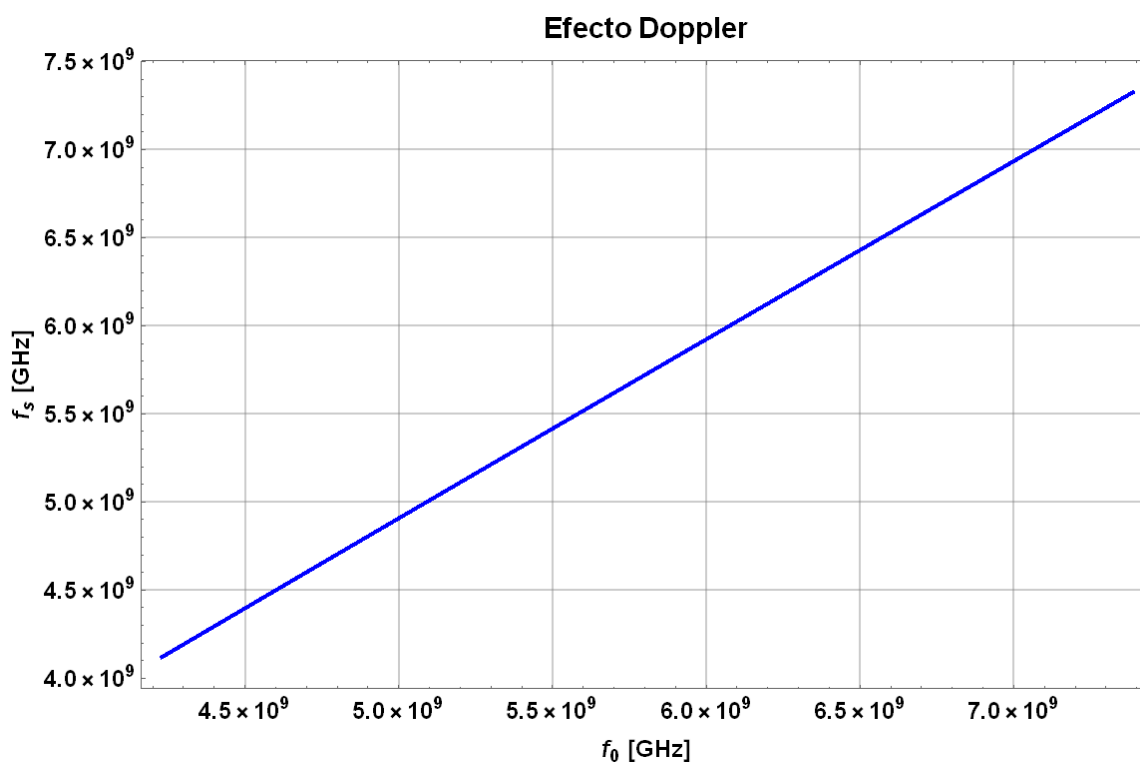


Figura 15: Efecto Doppler con una velocidad de fuente menor, la fuente se mueve hacia el observador.

Ejemplo 2

En la Figura 16 se muestra el efecto Doppler para cuando la fuente se mueve en un periodo de 4 segundos, comienza a una distancia $v\tau < x$ y termina a una distancia $v\tau > x$, asegurando de esta forma que la fuente se acerca al receptor y en un determinado tiempo la fuente se alejará del mismo. En cierto tiempo, la proyección de velocidad será igual a cero y entonces el efecto Doppler en ese instante será nulo. Para nuestro caso, se sugirió el siguiente modelo

$$\begin{aligned} x_0 &= (0, v\tau, H) \\ x &= (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Entonces, del sistema de ecuaciones (57) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}{\partial \omega_s} &= \frac{\sqrt{x_1^2 + (x_2 - v\tau)^2 + (x_3 - H)^2}}{v_g(\omega_s)} - (t - \tau_s) = 0, \\ \frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega_s, \tau_s)}{\partial \tau_s} &= -\omega_s n(\omega_s) \left[\frac{x_1 + (x_2 - v\tau) + (x_3 - H)}{\sqrt{x_1^2 + (x_2 - v\tau)^2 + (x_3 - H)^2}} v \right] + (\omega_s - \omega_0) = 0. \end{aligned}$$

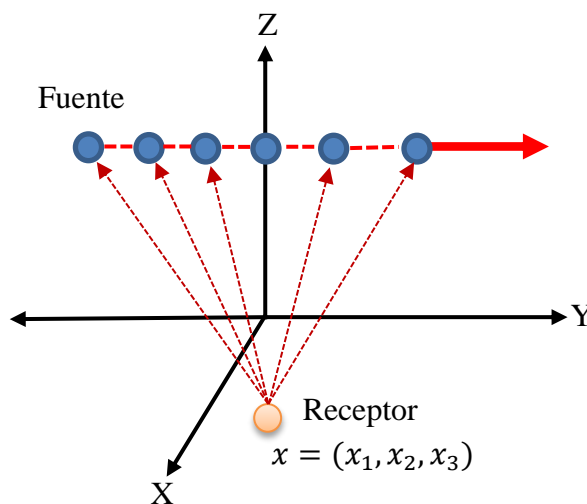


Figura 16: Efecto Doppler, la fuente se acerca y se aleja del receptor, en un periodo de 4 segundos.

Se consideraron los siguientes parámetros

- $v = 3 \times 10^5 \text{ m/s}$, Velocidad de fuente.
- $\omega_{pe} = 1317.172 \times 10^{12} \text{ rad/s}$, Frecuencia de plasma electrónica.
- $\omega_{pm} = 4.190 \times 10^{12} \text{ rad/s}$, Frecuencia de plasma magnética.
- $f_0 = 750 \times 10^{12} \text{ Hz}$, Frecuencia fija de la fuente.
- t , periodo de 0 a 4 segundos.

Donde $\omega = 2\pi f$

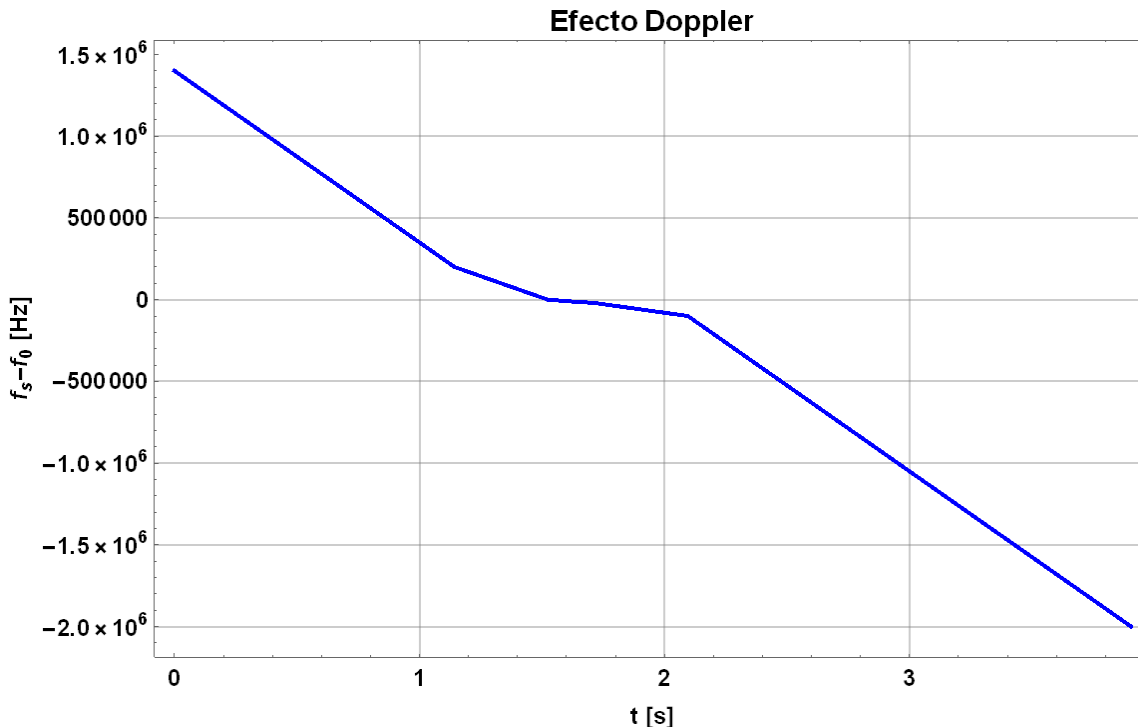


Figura 17: Efecto Doppler producido por una fuente en movimiento en un periodo de 4 segundos. La frecuencia de la fuente es de 750MHz.

Se puede observar de la Figura 17 que en el segundo 1.5 se produce el efecto Doppler nulo, debido a que la proyección de velocidad de la fuente es igual a cero. Mientras la fuente se acerca al observador, la frecuencia percibida es menor a los 750MHz, cuando la fuente se aleja del receptor (justo después de la proyección nula de velocidad) se percibe mayor frecuencia que la frecuencia de la fuente, en este caso 750MHz.

Ejemplo 3

Ahora consideremos la posición del receptor en 3D. Como ya notamos, las contribuciones en el término principal del comportamiento asintótico de las integrales que describen el campo eléctrico y el campo magnético están dados por los puntos estacionarios ($\omega_s = \omega_s(t, \mathbf{x})$, $\tau_s = \tau_s(t, \mathbf{x})$) en la fase, son soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega, \tau)}{\partial \omega} &= \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0, \\ \frac{\partial S(t, \mathbf{x}, \omega, \tau)}{\partial \tau} &= -k(\omega)v(\mathbf{x}, \tau) + (\omega - \omega_0) = 0, \end{aligned}$$

Donde

$$v(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|} v(\tau).$$

La Figura 18 muestra las condiciones del ejemplo 3, para obtener simulaciones numéricas del efecto Doppler.

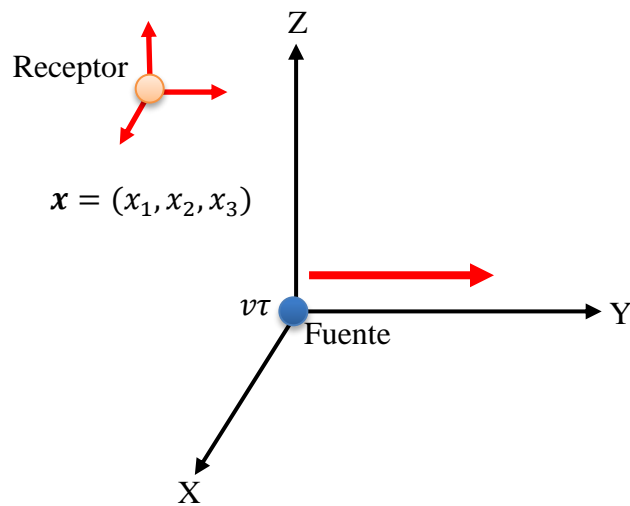


Figura 18: El receptor se mueve en 3D.

Si consideramos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(\tau) &= (0, v\tau, 0) \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Donde \mathbf{x} es la posición del receptor y $\mathbf{x}_0(\tau)$ la posición de la fuente.

De este modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau) &= (x_1, x_2 - v\tau, x_3) \\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)| &= (x_1^2 + (x_2 - v\tau)^2 + x_3^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{(x_1^2 + (x_2 - v\tau)^2 + x_3^2)^{1/2}}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0$$

$$-k(\omega) \frac{v(x_2 - v\tau)}{(x_1^2 + (x_2 - v\tau)^2 + x_3^2)^{1/2}} + (\omega - \omega_0) = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior en Mathematica se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{1}{v_g(\omega)(x_1^2 + (-tv + x_2)^2 + x_3^2)} (k(\omega)v^2(x_1^2 + x_3^2) \\ &+ k(\omega)tv^2 \sqrt{t^2v^2v_g(\omega)^2 - 2tvv_g(\omega)^2x_2 - v^2(x_1^2 + x_3^2)} + v_g(\omega)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &- k(\omega)vx_2 \sqrt{t^2v^2v_g(\omega)^2 - 2tvv_g(\omega)^2x_2 - v^2(x_1^2 + x_3^2)} + v_g(\omega)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &+ v_g(\omega)(x_1^2 + (-tv + x_2)^2 + x_3^2)\omega_0) \\ \tau_s &= - \frac{tv_g(\omega)^2 - vx_2 + \sqrt{t^2v^2v_g(\omega)^2 - 2tvv_g(\omega)^2x_2 - v^2(x_1^2 + x_3^2)} + v_g(\omega)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{v^2 - v_g(\omega)^2} \end{aligned}$$

El sistema anterior, es evidente, que cumple con el principio de causalidad $t > \tau$. Sin embargo, como se considera un medio dispersivo con índice de refracción negativo, es difícil resolver analíticamente las ecuaciones anteriores. En este trabajo, las propiedades del campo electromagnético en metamateriales dispersivos, donde $Re(n)$ para un determinado rango de frecuencias, se vuelve negativo $Re(n) < 0$. Con el objetivo de conocer la estructura de las ondas EM para el caso dispersivo requiere de una formulación explícita del modelo para un material dispersivo. Como se mencionó al principio de este trabajo, en literatura reciente el modelo de Drude o el modelo de Lorentz son normalmente usados como modelos básicos para metamateriales. Como se sabe, los metamateriales tienen como ingrediente algunos metales, por lo que también para este caso de simulación, cuando el observador está en 3D, se usó el modelo de Drude considerando medio sin absorción.

En cada caso (la fuente se acerca o la fuente se aleja del receptor) se presentarán dos ejemplos variando la posición del receptor y la velocidad de fuente con la finalidad de comprobar que a mayor velocidad de fuente el efecto Doppler, o el desplazamiento en frecuencia respecto a la frecuencia emitida por la fuente es mayor. Es decir, el desplazamiento en frecuencia del efecto Doppler es directamente proporcional a la velocidad de la fuente. Esto se cumple tanto para cuando la fuente se aleja como para

cuando esta se acerca al receptor. En nuestro caso, efecto doppler inverso, se notará mucho menor frecuencia cuando la fuente se acerca a mayor velocidad hacia el receptor y se percibirá una frecuencia mucho mayor cuando la fuente se aleje del receptor a mayor velocidad.

Caso 1. La fuente se aleja del receptor.

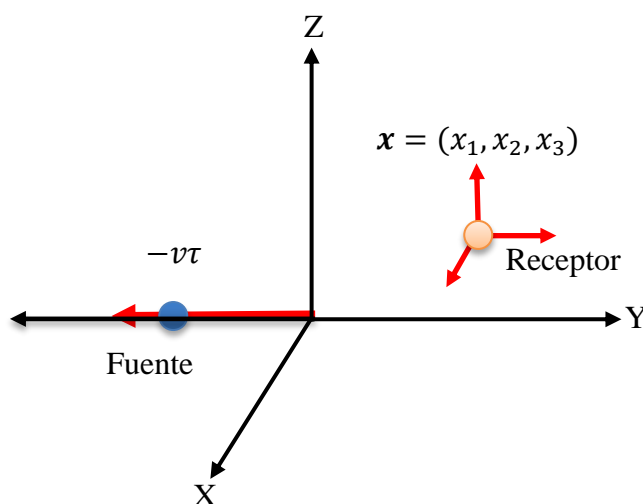


Figura 19: La Fuente se aleja del receptor en 3D

$$x_1 = 100 \text{ m};$$

$$x_2 = 300 \text{ m};$$

$$x_3 = 50 \text{ m};$$

$x_0(\tau)$: Posición de la fuente.

v : $20 \times 10^6 \text{ m/s}$, Velocidad de la fuente.

$v_g(\omega)$: Velocidad de grupo.

ω_s : Frecuencia desplazada por el efecto Doppler.

μ_0 : Permeabilidad magnética en el vacío.

En la figura 16 podemos observar que cuando la fuente emite a una frecuencia determinada, al igual que la posición de la fuente en 1D, la frecuencia percibida es mayor a la emitida, dicho de otro modo, $\omega_s(t, x) > \omega_0$. En este caso sí se puede percibir una curva no lineal a simple vista. Para ser preciso, de acuerdo a los valores de ω_{pe} y ω_{pm} , la eigenfrecuencia de la fuente podría variar de 1Hz hasta 666.7GHz, rango en el cual se sigue cumpliendo la condición de que la frecuencia de la fuente sea menor tanto para la frecuencia de plasma electrónica como para la frecuencia de plasma magnética.

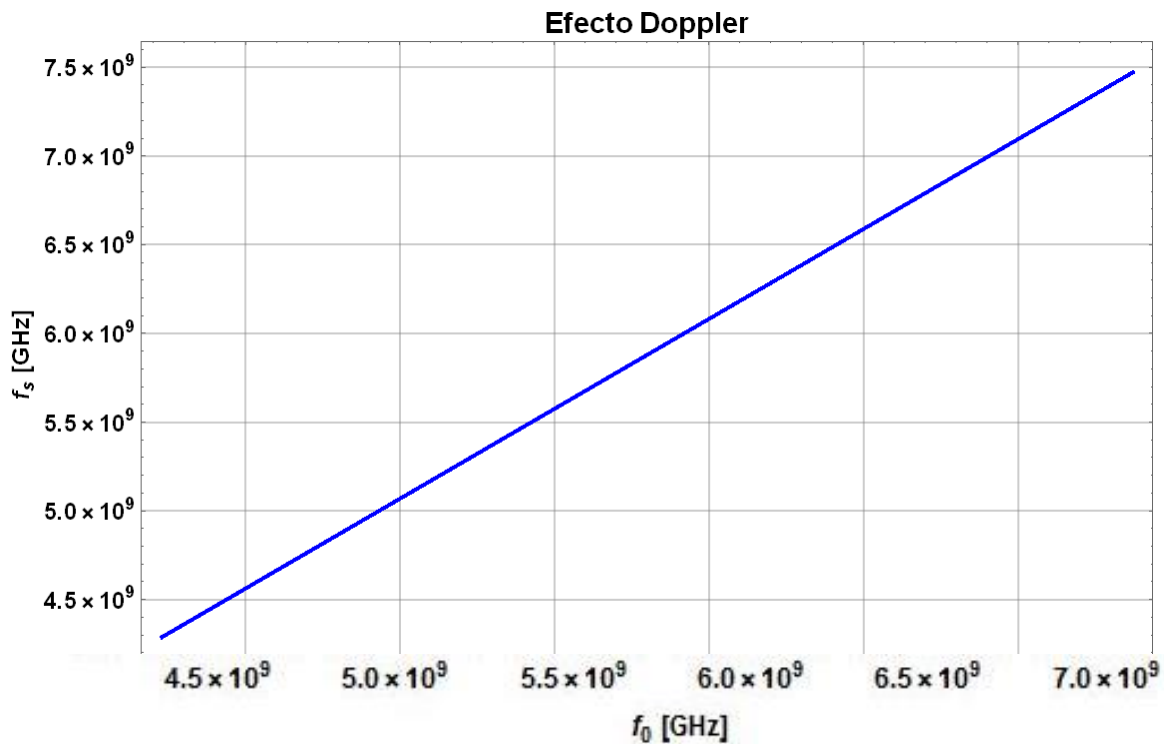


Figura 20: Efecto Doppler en un metamaterial con un receptor en 3D, la fuente se aleja del observador.

Con nuevos valores de ubicación del receptor y con una velocidad de fuente mayor que del ejemplo anterior, se puede observar en la Figura 21 que el desplazamiento en frecuencia es más perceptible, esto debido al cambio de velocidad de la fuente, si aumentáramos aún más la velocidad el cambio de frecuencia sería mucho mayor al presentado en la Figura 21.

$$x_1 = 0 \text{ m};$$

$$x_2 = 0 \text{ m};$$

$$x_3 = 100 \text{ m};$$

v : $40 \times 10^6 \text{ m/s}$, Velocidad de la fuente.

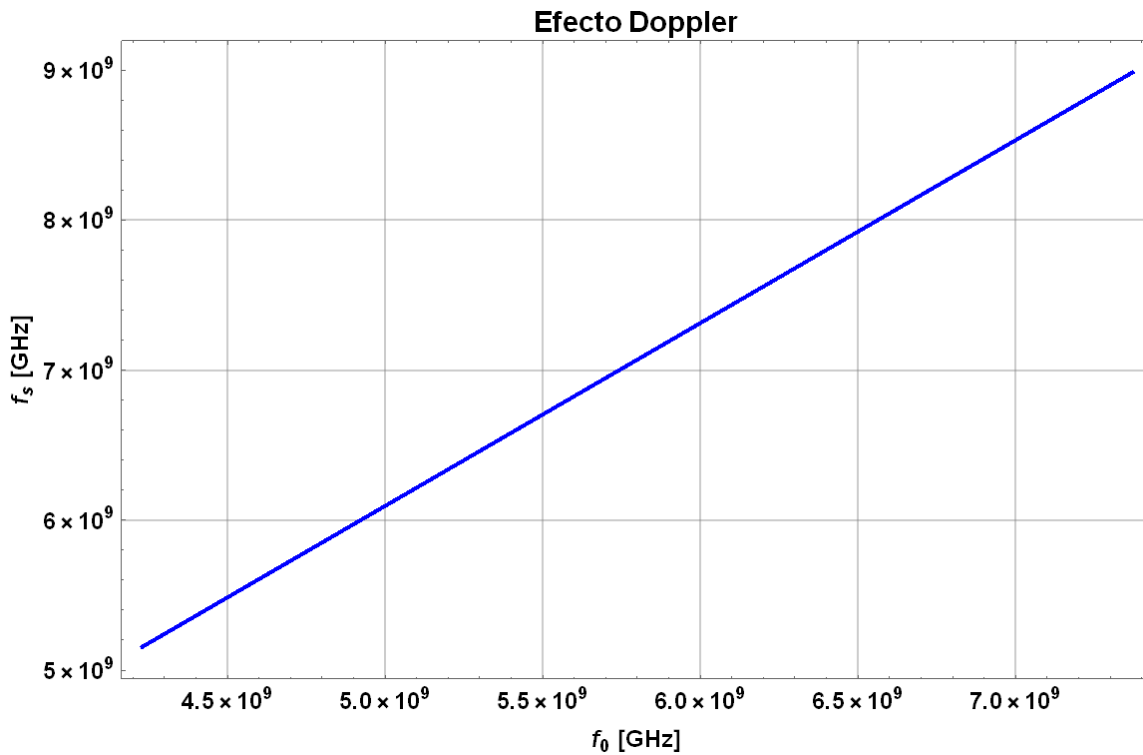


Figura 21: Efecto Doppler en un metamaterial con un receptor en 3D, la fuente se aleja del observador a mayor velocidad.

Caso 2. La fuente se mueve hacia el receptor.

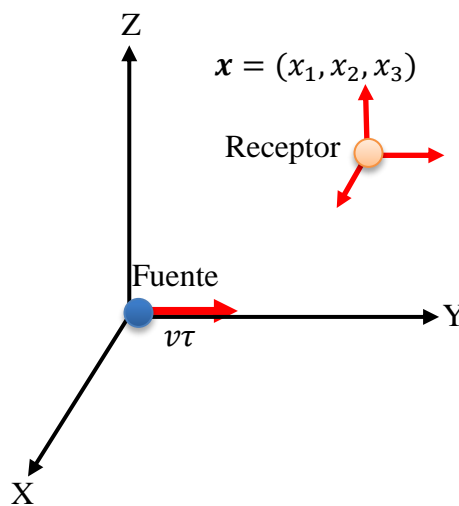


Figura 22: La fuente se mueve hacia el receptor en 3D

Considerando una misma velocidad de fuente como en el caso 1 ejemplo 3, con la diferencia de que esta se mueve hacia el receptor podemos observar en la Figura 23 que la frecuencia percibida es menor a la frecuencia de la fuente. Se consideraron los siguientes valores

$$x_1 = 100 \text{ m};$$

$$x_2 = 300 \text{ m};$$

$$x_3 = 50 \text{ m};$$

$x_0(\tau)$: Posición de la fuente.

v : $20 \times 10^6 \text{ m/s}$, Velocidad de la fuente.

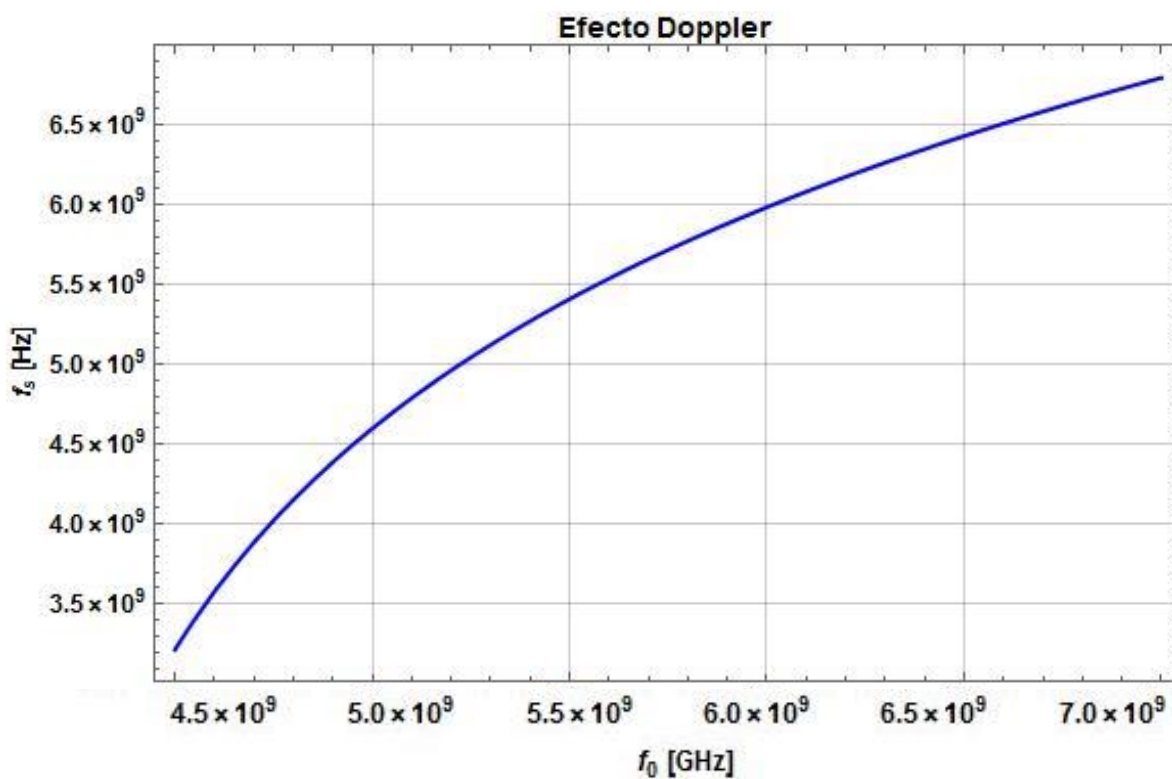


Figura 23: Efecto Doppler en un metamaterial con un receptor en 3D, la fuente se mueve hacia el receptor.

Ahora, como ya se mencionó, con el propósito de mostrar un mayor desplazamiento en frecuencia el efecto Doppler, se cambiará la velocidad de la fuente. Se puede observar en la Figura 24 que evidentemente la frecuencia percibida por el receptor es mucho menor a la frecuencia propia de la fuente. Se comprueba que a mayor velocidad de fuente el efecto Doppler es más perceptible.

Se consideraron los siguientes valores

$$x_1 = 10 \text{ m};$$

$$x_2 = 10 \text{ m};$$

$$x_3 = 100 \text{ m};$$

$$v: 55 \times 10^6 \text{ m/s, Velocidad de la fuente.}$$

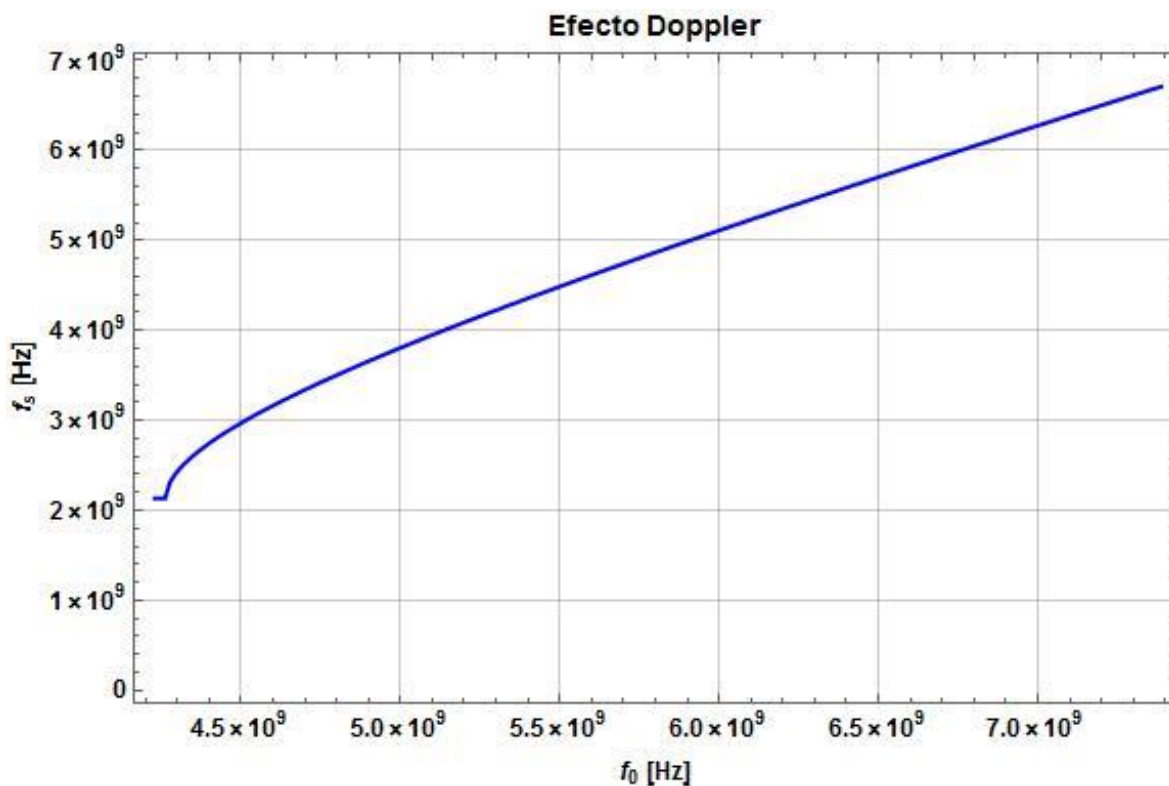


Figura 24: Efecto Doppler en un metamaterial con un receptor en 3D, la fuente se mueve hacia el receptor a mayor velocidad.

4.6 Simulación del efecto Cherenkov

La radiación de Cherenkov generada por una partícula cargada moviéndose a través de varios materiales ha sido estudiado en diferentes artículos, sin embargo, es de interés en este trabajo mostrar el campo electromagnético de una partícula cargada moviéndose a través de un metamaterial. De acuerdo a las ecuaciones del campo eléctrico y el campo magnético para el efecto Cherenkov, (66) y (67), es posible simularlo.

Conocemos que $x = (x_1, x_2, x_3)$ es la posición de un receptor y τ es el tiempo de retardo. El modelo se simplifica si se fija el eje x_2 paralelo a la dirección de velocidad de la partícula v_0 . Considerando $x = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (0, v_0, 0)$, y sustituyéndolos en el sistema (60), (61)(57) obtenemos

$$\begin{aligned} r(\tau) - (t - \tau)v_g(\omega) &= 0, \\ -v_0k(\omega)(x_2 - \tau v_0) + (\omega - \omega_0) &= 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Donde $r(\tau) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - \tau v_0)^2 + x_3^2}$, y v_0 es la velocidad de la partícula.

El caso más simple del sistema es cuando el índice de refracción es constante, es decir, que se considere al sistema para un medio sin dispersión, lo que permite la convergencia más rápida. Sin embargo, los metamateriales son considerados medios dispersivos. Por lo que es necesario la formulación explícita del modelo del material dispersivo, para nuestro caso se seguirá usando el modelo de Drude.

Primero se calcularon las soluciones de τ y ω del sistema no lineal (68), por medio del método Newton-Raphson. Posteriormente se calculó la fase S para τ y ω encontradas que nos permite estudiar la estructura del campo magnético y eléctrico.

En las simulaciones se usaron variables adimensionales, donde para la normalización se aplica la velocidad de la luz y la longitud de onda $l_0 = 75nm$ [25]. Los campos eléctrico y magnético son normalizados con la escala eléctrica $E_0 = ql_0\epsilon_0$ y la escala magnética $H_0 = (\epsilon_0/\mu_0)^{0.5}$ [41].

Los resultados de los cálculos, con una velocidad $V = 0.81 < v_c$, y un tiempo $t=2$ se obtiene

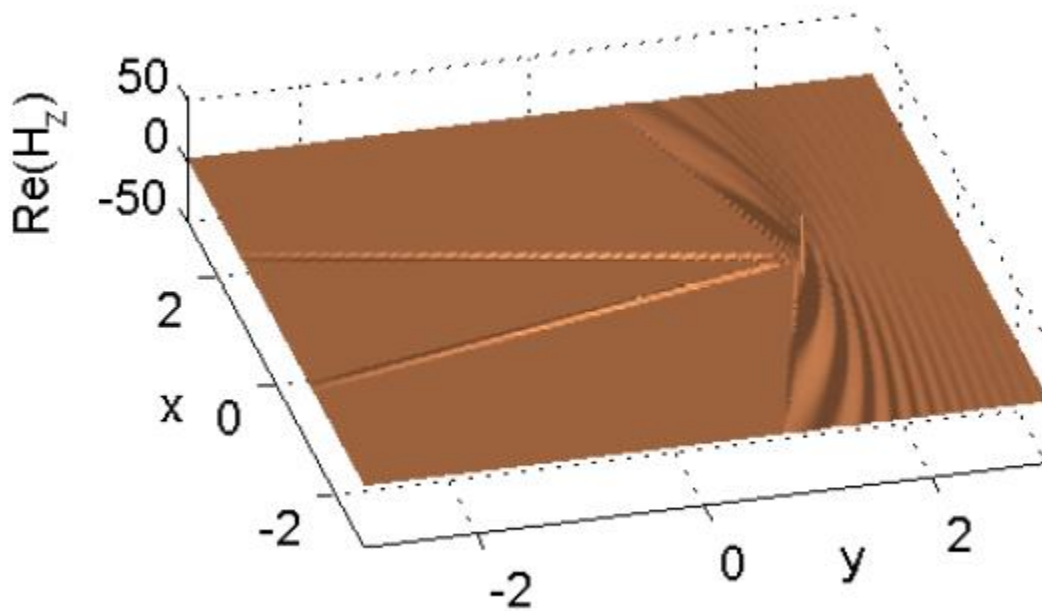


Figura 25: Campo magnético por el efecto Cherenkov en un metamaterial.

Ahora con una velocidad $V = 0.8333 \cong v_c$, es decir, la velocidad de la partícula es casi igual a la velocidad de la luz en el medio. Podemos observar en la Figura 26 la intensidad del campo magnético es mayor que en la Figura 25, pero ya no hay propagación más allá de 2 en el eje y .

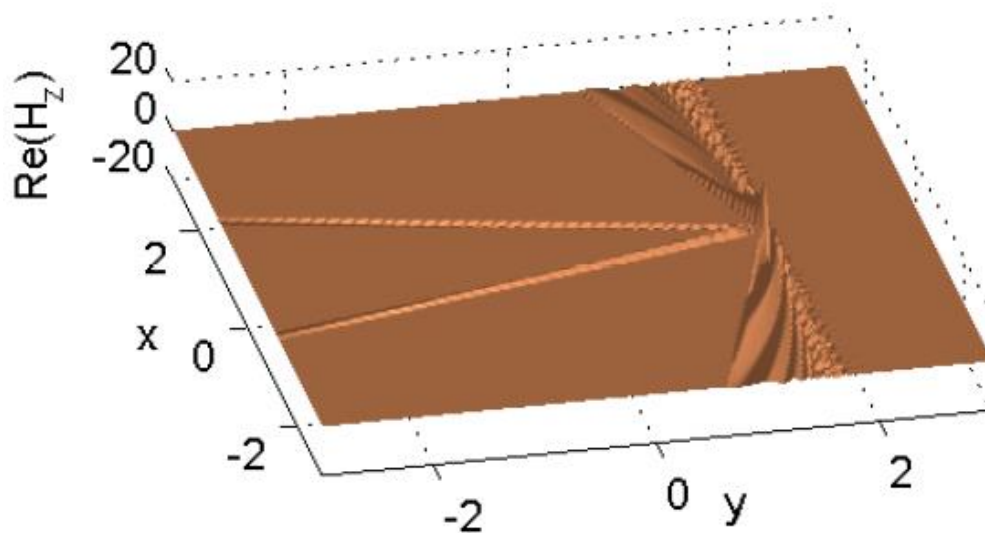


Figura 26: Campo magnético generado cuando la partícula cargada viaja a una velocidad similar a la velocidad de fase.

Finalmente se considera, una velocidad de partícula mayor a la velocidad de la luz en el medio, $V = 0.845 > v_c$, es con estas condiciones cuando se puede observar el cono de Cherenkov. La radiación va hacia la fuente.

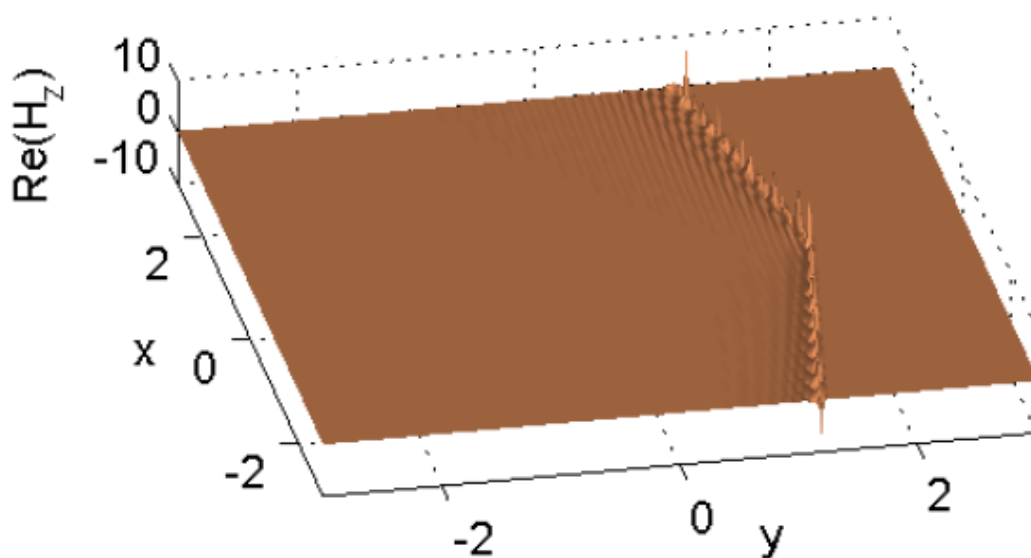


Figura 27: Cono de Cherenkov con $v = 0.845 > v_c$

4.7 Simulación del campo electromagnético

Considerando que $\omega = \omega_s$ de la fórmula que describe el desplazamiento en frecuencia del efecto Doppler tiene una única solución τ_s . Del ejemplo 1 para efecto Doppler de este trabajo, es posible ver que

$$\det S''(\mathbf{x}, t, \omega_s, \tau_s) = - \left(1 - \frac{|v|}{v_g(\omega)} \right)^2$$

$$\text{sgn} S''(\mathbf{x}, t, \omega_s, \tau_s) = 0$$

De este modo sustituyendo ω_s , ω_s , $\det S''$ y $\text{sgn} S''$ en las ecuaciones (55) y (56), la expresión para el campo eléctrico y el campo magnético queda de la siguiente forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\omega_s \mu(\omega_s) a(\tau_s) e^{i(S(\mathbf{x}, t, \omega_s, \tau_s))}}{4\pi i |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s)| \left(1 - \frac{|v|}{v_g(\omega)} \right)} \left(I + \frac{1}{k^2(\omega_s)} \nabla_x \nabla_x \right) \mathbf{v}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla_x \times \left(\frac{e^{i(S(\mathbf{x}, t, \omega_s, \tau_s))}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v} \right) \frac{a(\tau_s)}{\left(1 - \frac{|v|}{v_g(\omega)} \right)}$$

La Figura 28 y Figura 29 muestran la intensidad de campo eléctrico y la intensidad de campo magnético, considerando que la fuente se acerca al receptor, mediante los siguientes parámetros

- $x_2 = 200 \text{ m}$, Posición del receptor.
- $v = 150 \text{ m/s}$, velocidad de la fuente.
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$, Permeabilidad magnética del vacío.
- $\omega_{pe} = 1317.172 \times 10^{12} \text{ rad/s}$, Frecuencia de plasma electrónica.
- $\omega_{pm} = 4.190 \times 10^{12} \text{ rad/s}$, Frecuencia de plasma magnética.
- $\omega_0 = 4.7123 \times 10^9 \text{ rad/s}$, frecuencia propia de la fuente.

Donde Tm/A es equivalente a:

T: Tesla.

m: Metro.

A: Ampere.

Podemos observar que la amplitud del campo eléctrico es mayor cuando la fuente en movimiento se acerca al receptor. Sólo se graficó la parte real del comportamiento del campo eléctrico como también del campo magnético. Por sentido físico, si la fuente en movimiento se aleja del receptor lo que percibiremos es una disminución de la intensidad del campo eléctrico conforme la fuente avance, alejándose de la fuente.

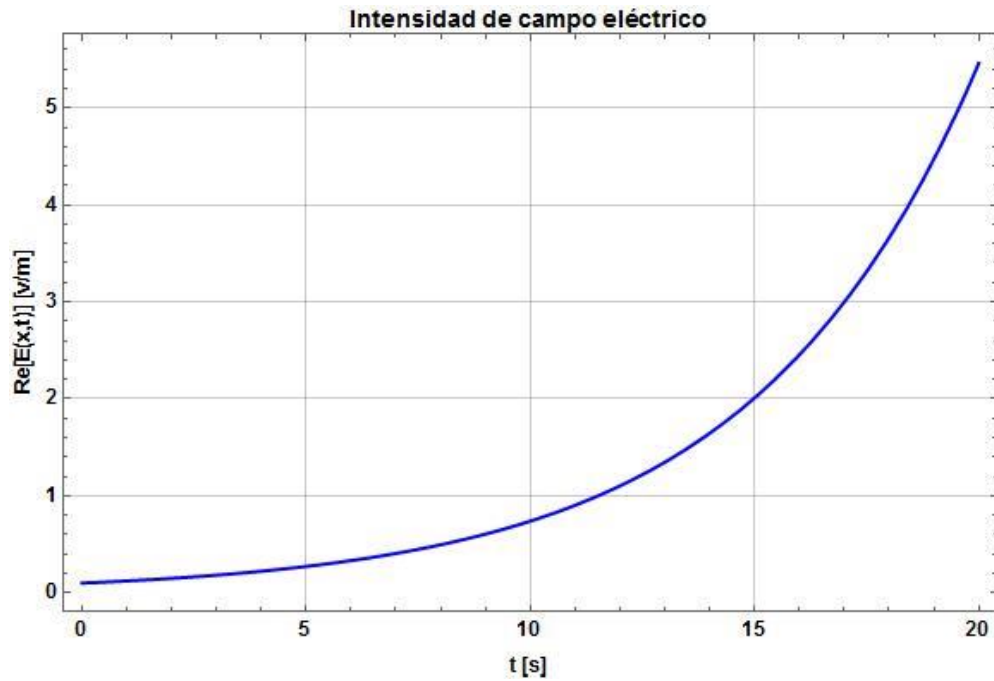


Figura 28: Intensidad de campo eléctrico, considerando sólo su parte real.

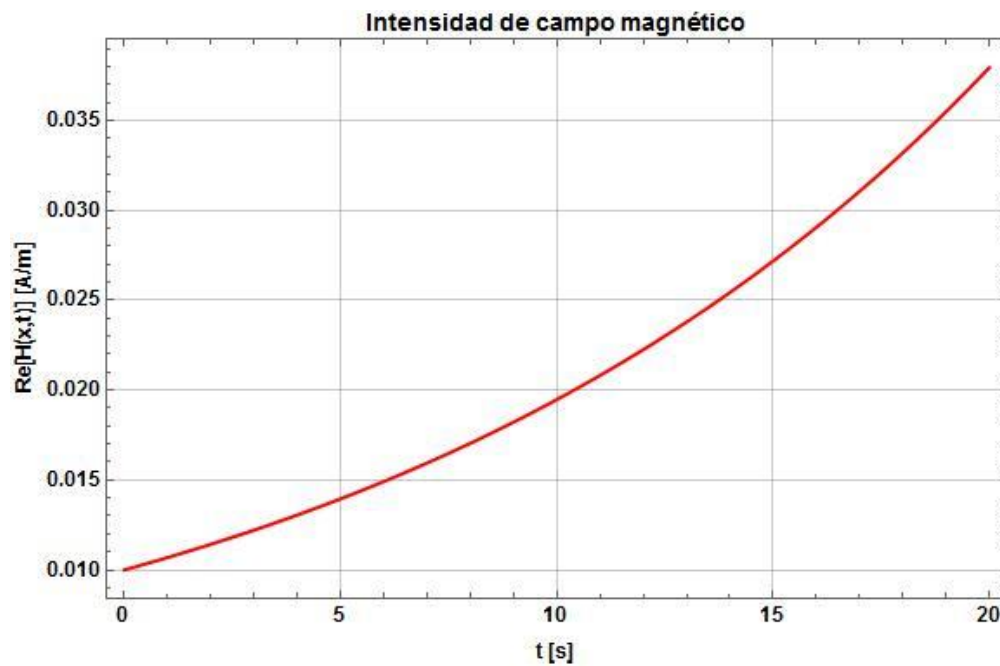


Figura 29: Intensidad de campo magnético, considerando sólo su parte real.

La Figura 30 muestra el campo eléctrico cuando se varía la frecuencia de la fuente y el tiempo de radiación de la fuente. Se consideraron los siguientes parámetros

- $x_2 = 200 \text{ m}$, Posición del receptor.
- $v = 150 \text{ m/s}$, velocidad de la fuente.
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$, Permeabilidad magnética del vacío.
- $\omega_{pe} = 1317.172 \times 10^{12} \text{ rad/s}$, Frecuencia de plasma electrónica.
- $\omega_{pm} = 4.190 \times 10^{12} \text{ rad/s}$, Frecuencia de plasma magnética.
- $\omega_0 = 2.693 \times 10^9 - 4.7123 \times 10^9 \text{ rad/s}$, Eigenfrecuencia de la fuente.
- $t = 0 - 20 \text{ s}$, tiempo recorrido de la fuente.

Es posible observar que, para diferentes frecuencias de la fuente, la intensidad de campo eléctrico varía. A mayor frecuencia propia de la fuente, la intensidad es mayor, mientras que para frecuencias menores a 750 MHz la intensidad del campo eléctrico es menor respecto a otras frecuencias en el mismo instante de tiempo. Obviamente cuanto mayor sea el tiempo (la fuente se encontrará más cerca del receptor) también influirá en la amplitud del campo. La gráfica se muestra con valores de frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ para la representación de la eigenfrecuencia de la fuente en movimiento.

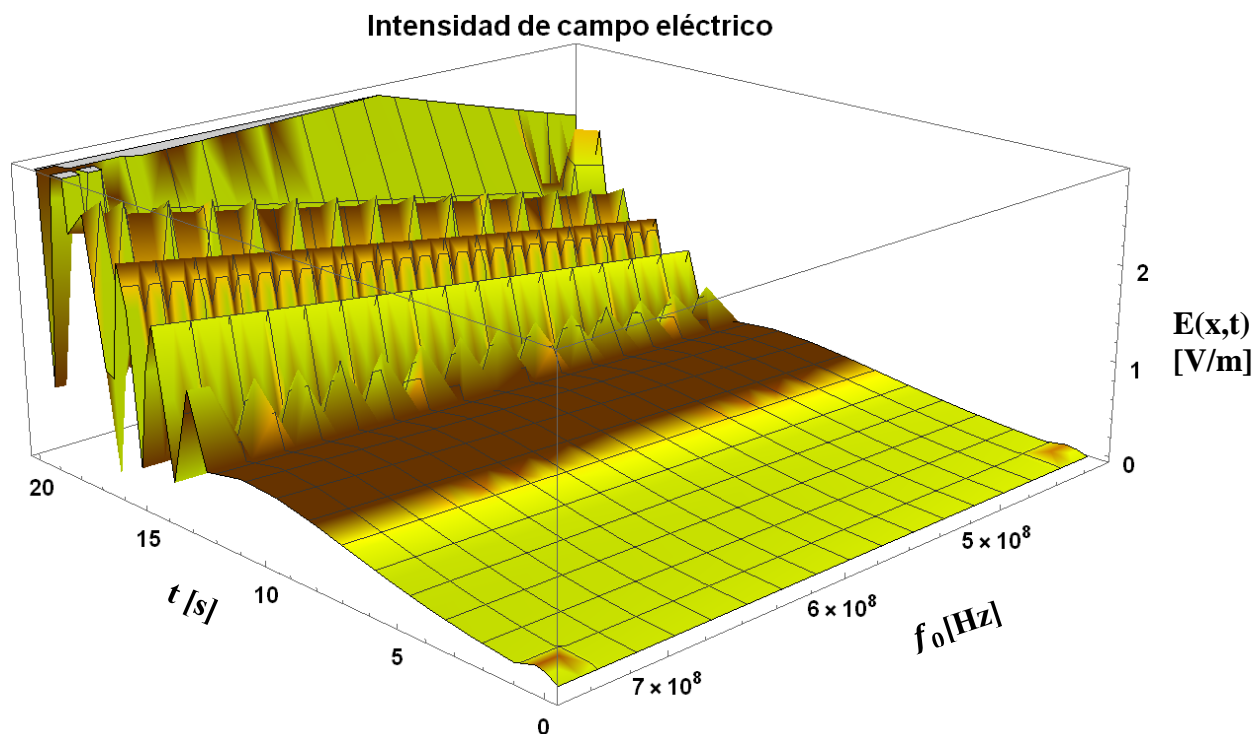


Figura 30: Campo eléctrico variando el tiempo y la frecuencia propia de la fuente.

La Figura 31 y Figura 32 muestra la intensidad de campo eléctrico y la intensidad de campo magnético cuando la posición del receptor cambia en un rango de 0 a 200m. Se utilizaron los siguientes parámetros

- $\mathbf{x} = (0,0,0)$, Posición del receptor.
- $v = 150 \text{ m/s}$, velocidad de la fuente.
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$, Permeabilidad magnética del vacío.
- $\omega_{pe} = 1317.172 \times 10^{12} \text{ rad/s}$, Frecuencia de plasma electrónica.
- $\omega_{pm} = 4.190 \times 10^{12} \text{ rad/s}$, Frecuencia de plasma magnética.
- $\omega_0 = 4.7123 \times 10^9 \text{ rad/s}$, frecuencia propia de la fuente.

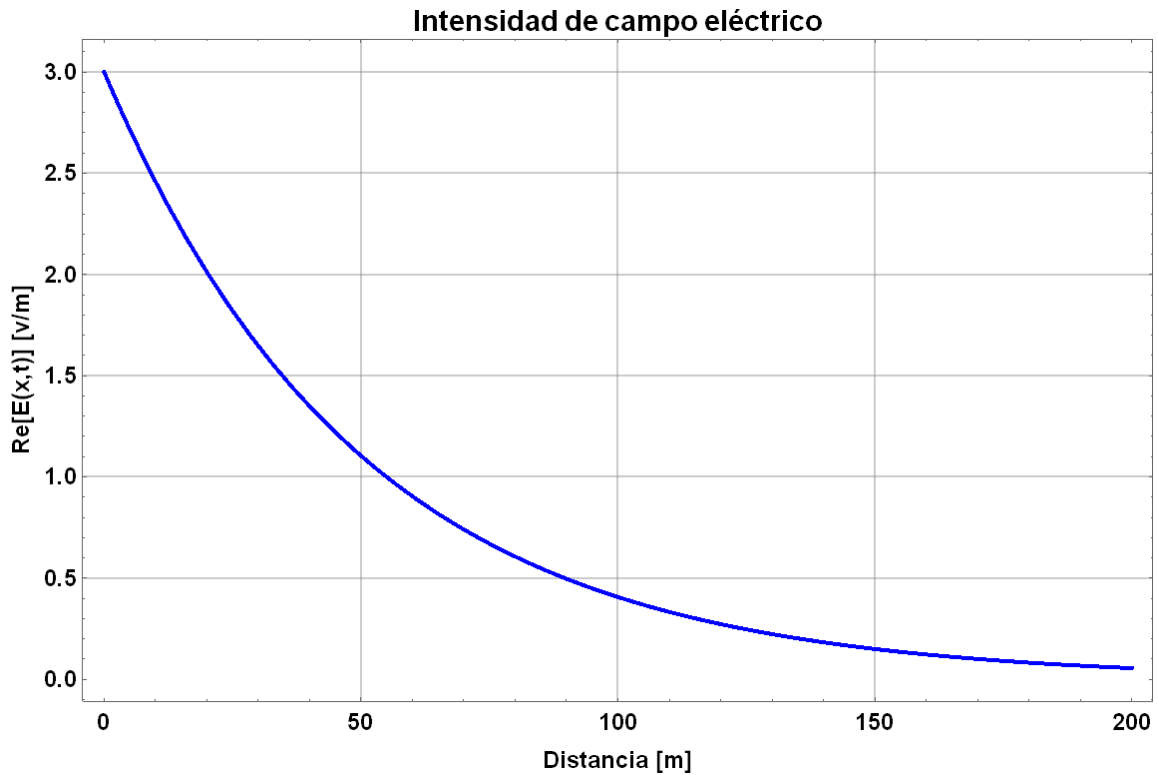


Figura 31: Campo eléctrico con variación en la distancia para una fuente en movimiento en un metamaterial.

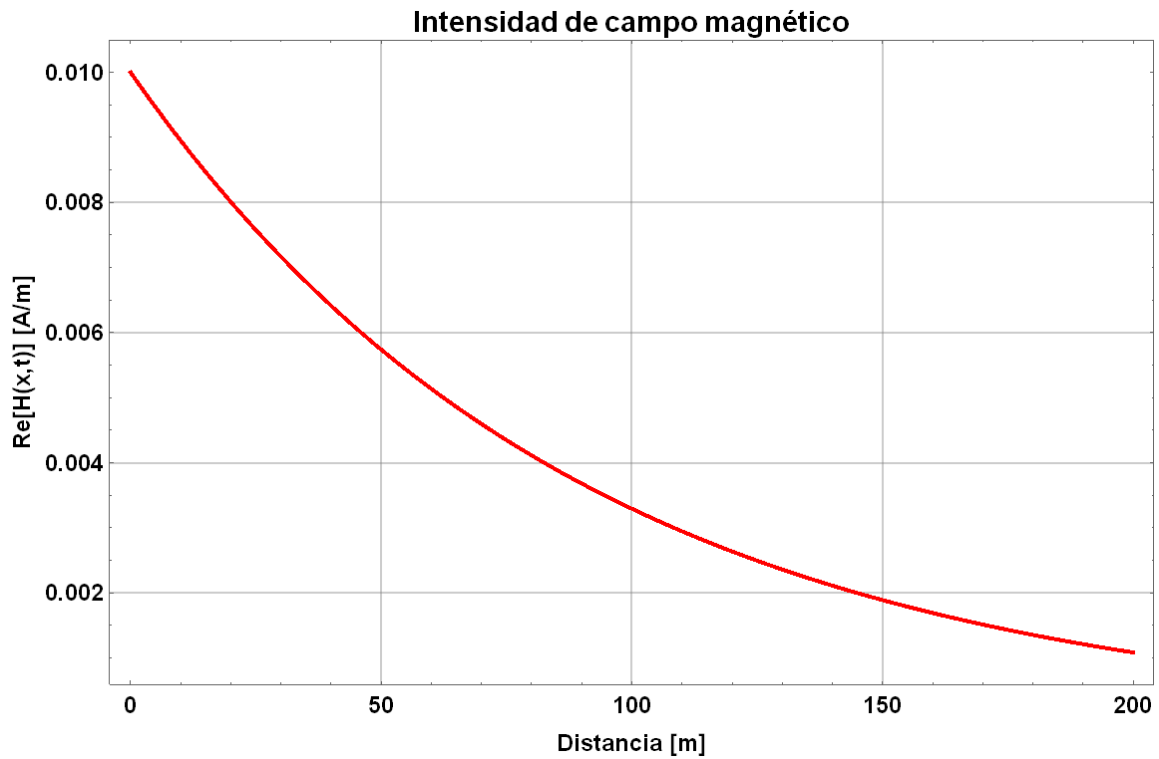


Figura 32: Campo eléctrico con variación en la distancia para una fuente en movimiento en un metamaterial.

Conclusiones

En este trabajo se consideraron las ecuaciones del campo electromagnético, las cuales fueron obtenidas aplicando el método de fase estacionaria con el principio del análisis asintótico, considerando que dicho campo se genera por una fuente en movimiento. Se tuvo en cuenta que el medio donde se propagan las ondas es dispersivo e isotrópico. Las ecuaciones de este trabajo funcionan tanto para medios RHM o medios LHM, solo se debe cuidar los signos a utilizar y el rango de frecuencia a la que se propagan las ondas. Tales ecuaciones hicieron posible en este trabajo comprobar por medio de simulaciones numéricas que en un material NIM se produce el efecto Doppler inverso y radiación invertida de Cherenkov debido a las propiedades inusuales de los metamateriales.

Se pudo observar que el efecto Doppler en un metamaterial, el fenómeno físico se invierte. En un caso, cuando la fuente se acerca al receptor la frecuencia desplazada es menor respecto a la fuente propia de la fuente. En el otro caso, cuando la fuente se aleja del receptor, la frecuencia desplazada es mayor que la frecuencia de la fuente. También se observa que a mayor velocidad de la fuente el desplazamiento en frecuencia captado por el receptor es más perceptible, es decir, si la fuente se acerca o se aleja al receptor a una velocidad mucho menor que la velocidad de fase, el receptor percibirá una frecuencia menor o mayor, respectivamente, a la emitida. Sin embargo, la diferencia será mínima. En cambio, si se acerca a una velocidad mayor, la frecuencia observada será más perceptible (mucho menor o mucho mayor, respectivamente) a la frecuencia propia de la fuente.

En el caso del efecto Cherenkov el cono es invertido debido a que, en la ecuación para el cono, el índice de refracción está involucrado junto con la velocidad de la luz y la velocidad de grupo. Como se explicó en este trabajo, en los metamateriales el índice de refracción es negativo en un determinado rango de frecuencia dando como resultado un cono de radiación invertido respecto al cono de radiación del efecto de Cherenkov en materiales convencionales, por lo que la radiación de Cherenkov se desplaza hacia la fuente.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Afanasiev G. V., Kartavenko V.G., Magar E.N., Vavilov Cherenkov radiation in dispersive medium, *Phys. B* 269 (1999).
- [2] Ashby N., Miller S., *Principles of Modern Physics 3*, Holden-Day 1970.
- [3] Barrera Figueroa V., Rabinovich V. S., Electromagnetic Field Generated by a Modulated Moving Point Source in a Planary Layered Waveguide, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2016, Vol. 23, No. 2.
- [4] Barrera-Figueroa V., Rabinovich V. Cherenkov radiation in a planarly layered waveguide in the case of polarized waves. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, Volume 22, number 2, Noviembre 2015.
- [5] Belov P. A., Hao Y., Sudhakaran S., *Phys. Rev. B*, **73** (2006) 033108.
- [6] Brillouin L., Wave propagation and group velocity, *Pure and Applied Physics*, Vol. 8, Academic Press, New York, 1960.
- [7] Brillouin L., *Wave Propagation in Periodic Structures*, New York: McGraw-Hill, 1946.
- [8] Brown J., Artificial dielectrics, in *Progress in Dielectrics*, Birks, J.B. (Ed.), New York: Wiley, 1960, pp. 193–225.
- [9] Burlak G., Rabinovich V. Time-Frequency Integrals and the Stationary Phase Method in Problems of Waves Propagation from Moving Sources, *SIGMA* 8 (2012), 096, 21 pages.
- [10] Burlak G., Rabinovich V. Propagation of electromagnetic waves generated by modulated moving source in dispersive lossy media, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, (Wileyonlinelibrary.com) DOI: 10.1002/mma.3191, vol.38, pp 2012-2026, 2015.
- [11] Caloz C. and Itoh T., *Electromagnetic Materials: Transmission Line Theory and Microwave Applications. The Engineering Approach*. United States, John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [12] Caloz C., Chang C.C., and T. Itoh, Full-wave verification of the fundamental properties of left-handed materials in waveguide configurations, *Journal of Applied Physics*, vol. 90, no. 11, pp. 5483–5486, 1 Dec. 2001.
- [13] Capolino F., *Theory and Phenomena of metamaterials*, CRC press, Taylor and Francis Group, LLC, 2009.

- [14] Carbonell J., Rogla L.J., Boria V.E., Left Handed behaviour of SRR filled waveguides, 2005 IEEE MTT-S Int. Microwave Sump. Dig., June 2005.
- [15] Carusotto I., Artoni M., La Rocca G.C, Bassani F. Slow group velocity and Cherenkov radiation, Phys. Rev. Lett. 87 (2001).
- [16] Chekroun C., Herrick D., Y. M. Michel et al., *L'Onde Electrique*, **59** (1979) 89.
- [17] Chen H., Chen M., Flipping photons backward: reversed Cherenkov radiation, Massachusetts Institute of Technology. Department of Physics, Elsevier B.V., Enero 2011.
- [18] Cheng C. Y., and Ziokolwsky R. W., Tailoring double-negative metamaterial responses to achieve anomalous propagation effects along microstrip transmission lines, IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol. 51, no. 12, pp. 2306-2314, December 2003.
- [19] Collin R. E., *FieldTheory of GuidedWaves*, 2nd edn., New York: IEEE Press, 1991, Chapter 6.
- [20] de Baas A. F. Nanostructured Metamaterials. Exchange between experts in electromagnetics and material science, European Commission, 2012.
- [21] de Broglie L., Journal de Physique 3, 422 (1922).
- [22] Duan Z., Wu B.I., Xi S., Chen H., Chen M., Research progress in reversed Cherenkov radiation in double-negative metamaterials, 2012.
- [23] Dung H. T., Buhmann S. Y., Knöll L., Welsch D.G., Scheel S., Kästel J., "Electromagnetic-field quantization and spontaneous decay in left-handed media", Phys. Rev. A 68 (2003), 066606.
- [24] Einstein A., Annalen der Physik 17 891 (1905), p. 914; English translation in: H. A. Lorentz et al., The Principle of Relativity (Methuen 1923), p. 58.
- [25] Eleftheriades G. V., and K. G. Balmain, Negative Refraction Materials: Fundamental Properties and Applications. United States, IEEE Press. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [26] Engheta N., Ziolkowski R., Metamaterials: Physics and engineering explorations, IEE Press Editorial Board, 2006.
- [27] Erdinc I., wave propagation in metamaterial structures and retrieval of homogenization parameters, institute of engineering and sciences of bilkent university, 2007.

- [28] French A. P. & Taylor E. F., *An Introduction to Quantum Physics*, Norton & Company 1978.
- [29] Galyamin S.N., Tyukhtin A.V., Electromagnetic field of a moving charge in the presence of a left-handed medium.
- [30] Hardy W. N., Whitehead L. A., *Rev. Sci. Instrum.*, **52** (1981) 213–216.
- [31] Hess O., “Optics: Farewell to Flatland” *Nature* **455**, 299-300 (18 September 2008) | doi:10.1038/455299a; Published online 17 September 2008.
- [32] Hutter R. G. E., *Beam and Wave Electronics in Microwave Tubes*, Princeton, NJ: Van Nostrand, 1960.
- [33] Jammer M., *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill 1966.
- [34] Kärkkäinen M. K., “Numerical study of wave propagation in uniaxially anisotropic Lorentzian backward-wave slabs,” *Phys. Rev. E*, vol. 68, 026602, Aug. 2003.
- [35] Lagarkov A. N., Semenenko V. N., Chistyayev V. A., *Electromagnetics*, **17** (1997) 213.
- [36] Landau L.D., E.M. Lifshits, *Theoretical physics, Vol. 8, Electrodynamics of continuous media*, Nauka, Moscow, 1982.
- [37] Lewis R.M., *Asymptotic methods for the solution of dispersive hyperbolic equations, in Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications*, Wiley, New York, 1964.
- [38] Malyuzhinets G. D., *Zhurnal Technicheskoi Fiziki*, **21** (1951) 1940 (English translation in *Sov. Phys. Tech. Phys.*).
- [39] Mandelshtam L., *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, **15** (1945) 476 (in Russian).
- [40] Martin F., Bonache J., Falcone F., Sorolla M., and Marques R., Split ring resonator-based left-handed coplanar waveguide, *Applied Physics Letters*, vol. 83, no. 22, pp. 4652–4654, 1 Dec. 2003.
- [41] Martinez-Sanchez E., Rabinovich V., Burlak G., *The Structure of the Cherenkov Field Emission in Metamaterials*, *Communications in Mathematical Analysis* Volume 17, Number 2, pp. 253–262 (2014)
- [42] Notomi M., *Phys. Rev. B*, **62** (2000) 10696.

- [43] Orfanidis S. J., *Electromagnetic Waves and Antennas*, Rutgers University, 2014.
- [44] Oughstun K. E., *Electromagnetic and optical pulse propagation volume 1: Spectral representations in temporally dispersive media*, Springer, 2006.
- [45] Oughstun K. E., *Electromagnetic and optical pulse propagation volume 2: Temporal pulse dynamics in dispersive, attenuative media*. Springer, 2006.
- [46] Padilla W. J., Basov D. N., Smith D. R., *Negative refractive index metamaterials*, *Materialstoday* volume 9, number 7-8, Julio-Agosto 2006.
- [47] Pendry J. B., “Negative refraction makes perfect lens”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3966-3969, Oct. 2000.
- [48] Pierce J. R., *Traveling-Wave Tubes*, New York: Van Nostrand, 1950.
- [49] Pocklington H. C., *Nature*, **71** (1905) 607–608.
- [50] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., *Numerical recipes. The art of scientific computing*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [51] Rabinovich V., Estrada Arrenchú O., H. Oviedo Galdeano, *Doppler effect in Metamaterials*, artículo no. 56 CIIES 2016.
- [52] Resnick R., *Introduction to Special Relativity*, John Wiley & Sons, 1968.
- [53] Riola Rodríguez J. M., *Los metamateriales y sus aplicaciones en defensa*, Ministerio de defensa, España, 2011.
- [54] Rotman W., *IRE Trans. Antennas Propagat.*, **10** (1962) 82.
- [55] Saadoun M. M. I., Engheta N., “Theoretical study of electromagnetic properties of non-local omega media” in *Progress in Electromagnetic Research (PIER) Monograph Series*, Vol. 9 (A. Priou, Guest Ed.), EMW Publishing, Cambridge, MA, 1994, Chapter 15, pp. 351–397.
- [56] Schneider H. J., Dullenkopf P., *Rev. Sci. Instrum.*, **48** (1977) 68.
- [57] Schuster A., *An Introduction to the Theory of Optics*, 2nd edn., London: E. Arnold, 1909.
- [58] Shalaev V.M., *Optical negative-index metamaterials*, *Nature Photonics* 1 (2007).

- [59] Shelby R. A., Smith D. R., Nemat-Nasser S. C., Schultz S., “Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterial,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 78, pp. 489–491, Jan. 2000.
- [60] Shvets G., Photonic approach to making a surface wave accelerator, *Advanced Accelerator Concept: Tenth Workshop*, C.E. Clayton and P. Muggli (Eds.), American Institute of Physics, Mandaly Beach, CA, 2002, pp. 371–382.
- [61] Sihvola A. H., *Electromagnetic Mixing Formulas and Applications*, London: IET Publishers, 1999.
- [62] Silin R. A., V. P. Sazonov, *Slow-Wave Structures*, Moscow: Soviet Radio, 1966 (in Russian).
- [63] Silin R. A., *Voprosy Radioelektroniki, Elektronika*, **4** (1959) 11 (in Russian).
- [64] Sivukhin D. V., *Opt. Spektroskopy*, **3** (1957) 308.
- [65] Smith D. R. and Kroll N., “Negative refractive index in left-handed materials”, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 85, pp. 2933-2936, Oct. 2000.
- [66] Smith D. R., Padilla W. J., D. C. Vier et al. *Phys. Rev. Lett.*, 84 (2000) 4184.
- [67] Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., and Schultz S., “Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, no. 18, pp. 4184–4187, May 2000.
- [68] Taflove A., Hagness S.C., *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*, 2nd ed., Artech House Inc., Boston, MA, 2000.
- [69] Tyukhtin A.V., Galyamin S.N., Vavilov Cherenkov radiation in passive and active media with complex resonant dispersion, *Phys. Rev. E* 77 (2008).
- [70] Veselago V.G., The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ , *Sov. Phys. Usp.* 10 (1968).
- [71] Vorobev V.V., Tyukhtin A.V., Cherenkov radiation in a wire metamaterial, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012).
- [72] Wartak M. S., Tsakmakidis K. L., Hess O. *Introduction to Metamaterials. Physics in Canada*, vol. 67, 2011.
- [73] Watts C. M., Liu X., and Padilla W. J. *Metamaterial Electromagnetic Wave Absorbers*, Wiley and Boston College, 2012.

- [74] Weiwei S. J., "Electromagnetic waves in double negative metamaterials and study on numerical resonances in the method of moments (MoM)" (2008). *Retrospective Theses and Dissertations*. Paper 15874.
- [75] Xi S., Chen H., Jiang T., Ran L., Huangfu J., Wu B.I., Kong J.A., Chen M. Experimental verification of reversed Cherenkov radiation in left-handed metamaterial, *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009).
- [76] Ziolkowski R. W., Heyman E., "Wave propagation in media having negative permittivity and permeability" *Phys. Rev. E*, Vol. 64, pp. 056625/1-15, Nov. 2001.

EFECTO DOPPLER EN METAMATERIALES

Dr. Vladimir Rabinovich*, Dr. Héctor Oviedo G.**, ing. Oswaldo Estrada Arrenchú***

Resumen— Usando el modelo de Drude sin pérdidas se simuló en el software Matlab el efecto Doppler en un metamaterial. Tal material presenta índice de refracción negativa, velocidad de fase negativa y velocidad de grupo positiva. Se observa que la frecuencia instantánea es menor a la frecuencia de la onda cuando la fuente se aproxima al observador y es mayor cuando la fuente se aleja.

Palabras Clave— metamaterial, efecto inverso de Doppler, índice de refracción negativa.

Abstract— Using Drude Model without losses, Doppler effect in metamaterials was simulated using Matlab. Metamaterials presents index and phase velocity both negative and positive group velocity. It was possible observed shift frequency is lower than frequency of the wave when source approaching to observer and the shift frequency is higher when source moves away from the observer.

Keywords— Metamaterials, inverse Doppler effect, negative index.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de metamateriales ha ido en aumento en los últimos años debido a que presentan características electromagnéticas no encontradas en ningún material natural y tienen el potencial para que sea posible fabricar dispositivos de invisibilidad, lentes perfectos, antenas con anchos de banda y ganancia superiores a los valores convencionales, etc. En sí, los metamateriales son un arreglo artificial estructural de elementos, diseñado para alcanzar propiedades electromagnéticas inusuales y/o ventajosas.

II. CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES

Los metamateriales pueden tener permitividad eléctrica (ϵ) negativa y/o permeabilidad magnética (μ) negativa. De acuerdo al signo de ϵ y de μ se constituyen cuatro grupos de materiales [1]. Los cuales se presentan en la tabla 1.

Tabla 1.- Tipos de materiales

MATERIAL	CARACTERÍSTICA
Doblemente positivos (DPS)	$\epsilon > 0$ y $\mu > 0$
Doblemente negativos (DNG)	$\epsilon < 0$ y $\mu < 0$
Mu negativo (MNG)	$\epsilon > 0$ y $\mu < 0$
Epsilon negativo (ENG)	$\epsilon < 0$ y $\mu > 0$

Son de interés para el presente trabajo los metamateriales doblemente negativos, también denominados materiales izquierdos (LHM, *Left Handed Materials*) o materiales de índice negativo (NIM, *Negative Index Media*). En particular, los materiales DNG presentan características electromagnéticas únicas tales como:

- Refracción negativa.
- Velocidad de fase negativa.
- Efecto inverso de Doppler.
- Radiación de Cherenkov invertida.

III. ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVA

El modelo de Drude es usado frecuentemente para describir las propiedades ópticas de los metales nobles [2], con los cuales son construidos la mayoría de los metamateriales. En este modelo, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética están en función de la frecuencia.

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \right] \quad (3.1)$$

$$\mu(\omega) = \mu_0 \left[1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \right] \quad (3.2)$$

Donde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética en el vacío respectivamente, los cuales tienen valores:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \approx 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{farads}}{\text{m}}$$

*vladimir.rabinovich@gmail.com
**hovigalde@yahoo.com.mx
***oswaldo.arrenchu@gmail.com

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{henrys}}{\text{m}}$$

ω_{pe} es la frecuencia de plasma electrónica y ω_{pm} es la frecuencia de plasma magnética.

Sin embargo, ha sido demostrado en experimentos recientes que las pérdidas en un DNG metamaterial es mínima. Por lo que es posible reescribir la ec. (3.1) y la ec (3.2)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2} \right) \quad (3.4)$$

Para lograr un metamaterial doblemente negativo, se debe cumplir con $\omega < \omega_{pe}$ y $\omega < \omega_{pm}$ para que tanto la permitividad eléctrica como la permeabilidad magnética sean simultáneamente negativas.

Si $\varepsilon(\omega) < 0$ y $\mu(\omega) < 0$ entonces

$$n(\omega) = -\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} \quad (3.5)$$

Resolviendo (3.5) numéricamente en Matlab, con los siguientes parámetros.

$$f = [428.57\text{MHz} - 750\text{MHz}]$$

$$f_{pe} = 209.63\text{THz}, \quad f_{pm} = 666.86\text{GHz} [3]$$

Donde $\omega = 2\pi f$

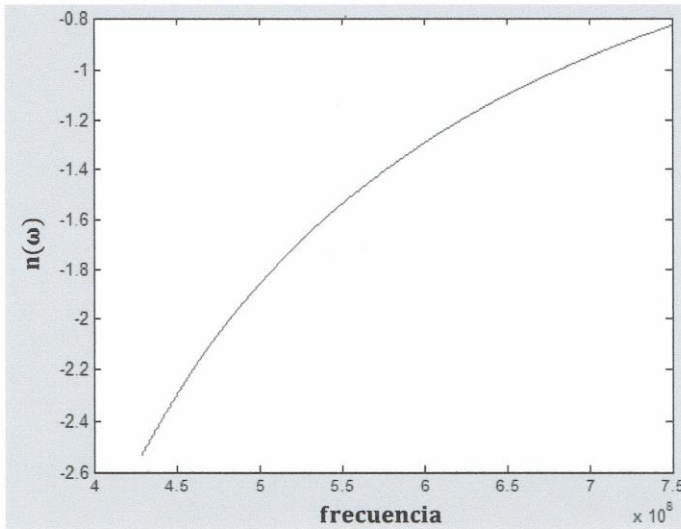


Figura 1. Índice de refracción negativo

El número de onda

$$k(\omega) = -\omega \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} = \omega n(\omega) \quad (3.6)$$

Por lo tanto

$$k(\omega) < 0$$

Tal condición es posible comprobarla en la figura 2.

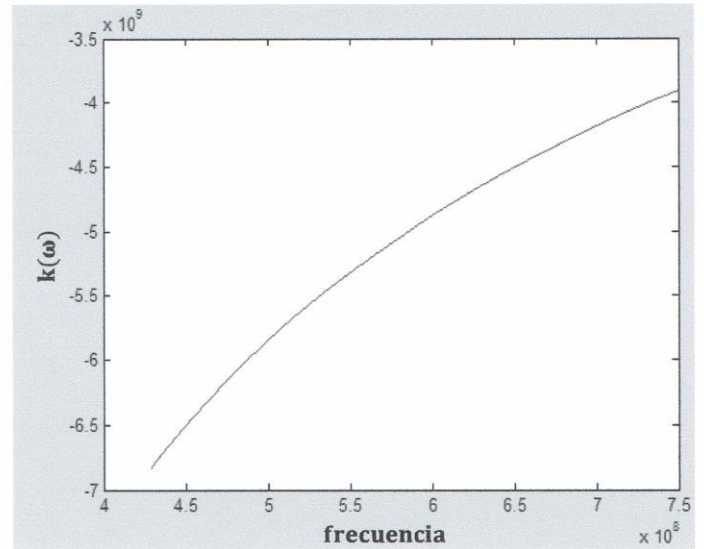


Figura 2. Número de onda en un metamaterial

IV. VELOCIDAD DE FASE Y VELOCIDAD DE GRUPO EN METAMATERIALES

La velocidad de fase es la tasa a la cual la fase de la onda se propaga en el espacio; es decir, la velocidad a la cual la fase de cualquier componente de frecuencia de la onda se propaga [4]. La velocidad de fase está dada en términos de la frecuencia de la onda ω y el número de onda $k(\omega)$.

$$v_p = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (4.1)$$

Al sustituir la ec. (3.6) en la ec. (3.7)

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{-\omega \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}} \quad (4.2)$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}} = \frac{1}{n(\omega)}$$

De acuerdo con la ec. (3.5) es posible afirmar que $v_p < 0$.

Con los mismos parámetros utilizados para resolver numéricamente el índice de refracción, se simuló la velocidad de fase y velocidad de grupo, mostrados en la figura 3 y figura 4 respectivamente.

Por otro lado, la velocidad de grupo es la tasa a la cual la envolvente de la onda se propaga [4]. Se define por

$$v_g(\omega) = \frac{1}{k'(\omega)} \quad (4.3)$$

Por principio de causalidad, $v_g(\omega) > 0$. Con el propósito de que tenga sentido físico.

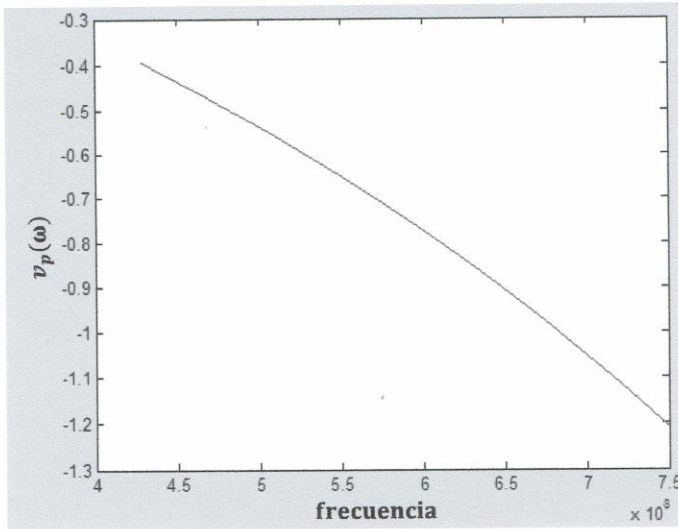


Figura 3. Velocidad de fase

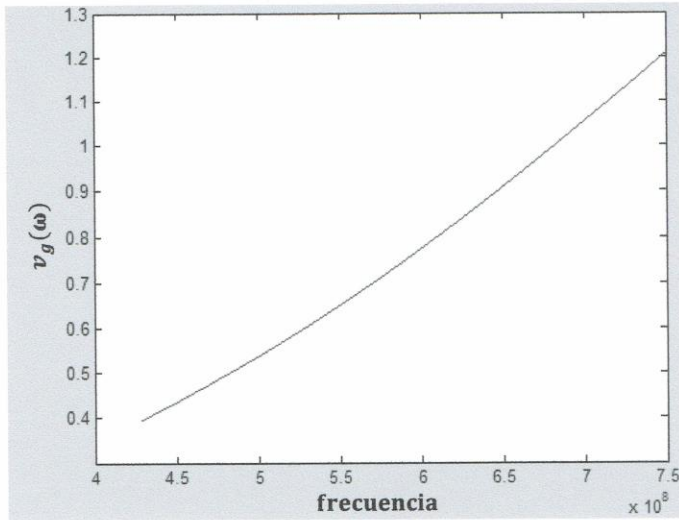


Figura 4. Velocidad de grupo

V. PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PRODUCIDAS POR FUENTE EN MOVIMIENTO EN UN MEDIO DISPERSIVO

Las ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos son

$$\nabla \times H = \varepsilon(D_t) \frac{\partial E}{\partial t} + j$$

$$\nabla \times E = \mu(D_t) \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\varepsilon(D_t) \nabla \cdot E = \rho$$

$$\nabla \cdot H = 0$$

Con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Al aplicar la transformada de Fourier a las cinco ecuaciones anteriores se obtiene

$$\nabla \times \hat{H}(\omega) = i\varepsilon(\omega)\omega\hat{E}(\omega) + \hat{j}(\omega) \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \hat{E}(\omega) = i\mu(\omega)\omega\hat{H}(\omega) \quad (5.2)$$

$$\varepsilon(\omega)\nabla \cdot \hat{E}(\omega) = \hat{\rho}(\omega)$$

$$\nabla \cdot \hat{H}(\omega) = 0$$

$$\nabla \cdot \hat{j} - i\omega\hat{\rho}(\omega) = 0$$

La ec. (5.1) y (5.2) son reducidas a un par de ecuaciones independientes [5].

$$\nabla \times \nabla \times \hat{E}(\omega) - k^2(\omega)\hat{E}(\omega) = i\omega\mu(\omega)\hat{j}(\omega) \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \hat{H}(\omega) - k^2(\omega)\hat{H}(\omega) = \nabla \times \hat{j}(\omega) \quad (5.4)$$

Donde $k(\omega) = i\sqrt{|k^2(\omega)|}$ es un número imaginario puro cuando $k^2(\omega) < 0$. Usando las siguientes relaciones

$$\nabla \times \nabla \times \hat{E}(\omega) = -\nabla^2 \hat{E}(\omega) + \nabla(\nabla \cdot \hat{E}(\omega))$$

Donde

$$\nabla \cdot \hat{E}(\omega) = \varepsilon^{-1}(\omega)\hat{\rho}(\omega)$$

Es posible reducir la ec. (5.3), [5].

$$F_\omega = \nabla^2 \hat{E}(\omega) + k^2(\omega)\hat{E}(\omega) = \varepsilon^{-1}(\omega)\nabla\hat{\rho}(\omega) - i\omega\mu(\omega)\hat{j}(\omega)$$

$$= -i\omega\mu(\omega) \left(\hat{j}(\omega) + \frac{1}{k^2(\omega)} \nabla(\nabla \cdot \hat{j}(\omega)) \right) \quad (5.5)$$

De forma similar es posible reducir la ec. (5.4).

$$\Phi_\omega = \nabla^2 \hat{H}(\omega) + k^2(\omega)\hat{H}(\omega) = -\nabla \times \hat{j}(\omega) \quad (5.6)$$

Como la ec. (5.5) y (5.6) son independientes, es posible usarlas para la definición de \hat{E} y \hat{H} . Sea $g_\omega(x) = \frac{e^{ik(\omega)|x|}}{4\pi|x|}$ la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz.

$$\nabla g_\omega(x) + k^2(\omega)g_\omega(x) = -\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

De este modo, las soluciones de la ec. (5.5) y ec. (5.6) son

$$E(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (g_\omega * F_\omega)(x) d\omega$$

$$H(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (g_{\omega} * \Phi_{\omega})(x) d\omega$$

Donde la convolución

$$(g_{\omega} * \Psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik(\omega)|x-y|}}{4\pi|x-y|} \Psi(y) dy$$

Cuando la fuente se encuentra en movimiento, la densidad de corriente se define por

$$j(t, x) = A(t)v(t)\delta(x - x_0(t))$$

Donde δ es la función δ estándar, $v(t) = \dot{x}_0(t)$ es la velocidad de la fuente, $A(t)$ es la amplitud de la fuente, x es el punto de observación de las ondas y $x_0(t)$ es la trayectoria de la fuente. Ahora bien, si introducimos un parámetro adimensional $\lambda > 0$ como

$$\lambda = \left(\inf_{t \in \mathbb{R}} |x - x_0(t)| \right) \frac{\Omega}{c_0} > 0$$

Donde Ω es la frecuencia característica del problema, c_0 es la velocidad de la luz en el vacío.

Como es necesario conocer los campos electromagnéticos generados por una fuente en movimiento. Supongamos que

$$A(t) = a(t)e^{-i\omega_0 t}$$

Donde

$$a(t) = \tilde{a}(t/\lambda)$$

Siendo $\tilde{a} \in C_b^{\infty}(\mathbb{R})$ y $\omega_0 > 0$ es la portadora de la fuente. $A(t)$ es una amplitud de la fuente.

$\lambda > 0$ es un parámetro adimensional que caracteriza las variaciones lentas de la amplitud de $a(t)$, y la velocidad.

$$x_0(t) = \lambda X_0(t/\lambda) \quad t \in \mathbb{R}$$

El cual nos indica la posición de la fuente en movimiento. Por lo que si le aplicamos derivada obtenemos la velocidad de la fuente.

$$\dot{x}_0(t) = \dot{X}_0(t/\lambda) \quad t \in \mathbb{R}$$

Donde $\dot{X}_0(t)$ es infinitamente diferenciable con un número de derivadas delimitadas [1].

De acuerdo a las ecuaciones de campo eléctrico y campo magnético [1], es posible reducirlas a una forma que contenga el parámetro $\lambda > 0$, usaremos los siguientes cambios de variable

$$x = \lambda X, \quad t = \lambda T, \quad \tau = \lambda t$$

De este modo se obtiene la representación del campo magnético y el campo eléctrico

$$\bar{H}_{\lambda}(T, X) = \frac{1}{8\pi^2 \lambda} \int_{\Gamma_{x\mathbb{R}}} \tilde{a}(t) \nabla_x x \left(\frac{e^{i\lambda \bar{S}(T, X, \omega, t)}}{|X - X_0(t)|} V(t) \right) d\omega dt \quad (5.7)$$

$$\bar{E}_{\lambda}(T, X) = \frac{1}{8\pi^2 i} \int_{\Gamma_{x\mathbb{R}}} \tilde{a}(t) \omega \mu(\omega) \left(I + \frac{1}{\lambda^2 k^2(\omega)} \nabla_x \nabla_x \right) \frac{e^{i\lambda \bar{S}(T, X, \omega, t)}}{|X - X_0(t)|} V(t) d\omega dt \quad (5.8)$$

Donde $\bar{H}_{\lambda}(T, X)$ y $\bar{E}_{\lambda}(T, X)$ dependen del parámetro λ .

La fase \bar{S} de las integrales (5.7) y (5.8) en $\lambda \rightarrow +\infty$ es

$$\bar{S}(T, X, \omega, t) = k(\omega)|X - X_0(t)| - \omega(T - t) - \omega_0 t$$

Los puntos estacionarios de $\bar{S}(T, X, \omega, t)$ respecto a (ω, t) para (T, X) son soluciones del sistema

$$\frac{\partial \bar{S}(T, X, \omega, t)}{\partial \omega} = \frac{|X - X_0(t)|}{v_g(\omega)} - (T - t) = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \bar{S}(T, X, \omega, t)}{\partial t} = -k(\omega)V(X, \tau) + (\omega - \omega_0) = 0$$

Sea $\omega_s = \omega_s(T, X)$, $t_s = t_s(T, X)$ un punto estacionario no degenerado, lo cual significa que (ω_s, t_s) es solución del sistema de ecuaciones (5.9) y que $\det \bar{S}''(T, X, \omega_s, t_s) \neq 0$

Si la fase \bar{S} tiene un número finito de puntos estacionarios el término principal asintótico del campo electromagnético será la suma de las contribuciones de cada punto estacionario.

Regresando a las variables (t, x) obtenemos las fórmulas asintóticas

$$H_s(t, x) \sim \frac{1}{4\pi} \nabla_x \times \left(\frac{e^{iS(t, x, \omega_s, \tau_s)}}{|x - x_0(\tau_s)|} v(\tau_s) \right) \frac{a(\tau_s) e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } S''(t, x, \omega_s, \tau_s)}}{|\det S''(t, x, \omega_s, \tau_s)|^{1/2}} \quad (5.10)$$

$$E_s(t, x) \sim \frac{1}{4\pi i} a(\tau_s) \omega_s \mu(\omega_s) \left(I + \frac{1}{k^2(\omega_s)} \nabla_x \nabla_x \right) \frac{e^{iS(t, x, \omega_s, \tau_s)}}{|x - x_0(\tau_s)|} v(\tau_s) \times \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } S''(t, x, \omega_s, \tau_s)}}{|\det S''(t, x, \omega_s, \tau_s)|^{1/2}} \quad (5.11)$$

donde

$$t = \frac{T}{\lambda}, \quad |x - x_0(t)| = \frac{|X - X_0(t)|}{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

Tenemos que la fase de las ec. (5.10) y (5.11) es $S(t, x, \omega, \tau) = k(\omega)|x - x_0(\tau)| - \omega(t - \tau) - \omega_0\tau$ y los puntos estacionarios ($\omega_s = \omega_s(t, x), \tau_s = \tau_s(t, x)$) son soluciones del sistema

$$\frac{\partial S(t, x, \omega, \tau)}{\partial \omega} = \frac{|x - x_0(\tau)|}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial S(t, x, \omega, \tau)}{\partial \tau} = -k(\omega)v(x, \tau) + (\omega - \omega_0) = 0 \quad (5.13)$$

Donde

$$v(x, \tau) = \frac{x - x_0(\tau)}{|x - x_0(\tau)|} v(\tau) \quad (5.14)$$

Las ecuaciones (5.10) y (5.11) son convenientes para consideración del campo electromagnético.

VI. EFECTO DOPPLER

Es un fenómeno físico en el cual, desde el punto de un observador, la frecuencia recibida es diferente a la emitida por la fuente en movimiento. Dicho cambio de frecuencia depende de la velocidad de la fuente. Es decir, a mayor velocidad el cambio de frecuencia aparente recibida será más notable.

Tomando en cuenta que $(\omega_s(t, x), \tau_s(t, x))$ es el punto estacionario de la fase S de las ec. (5.10) y (5.11), se obtiene que

$$\omega_{in}(t) = \omega_s(t, x)$$

Esto es, que la frecuencia instantánea $\omega_{in}(t)$ para un punto fijo x de los campos $H(t, x), E(t, x)$ coincide con $\omega_s(t, x)$.

En el caso de metamateriales, se produce el efecto inverso de doppler.

$$k(\omega_s(t, x)) < 0$$

Es decir, la frecuencia aparente recibida es menor a la emitida por la fuente cuanto ésta se acerca al observador. $\omega_s(t, x) < \omega_0$

De este modo, es posible obtener la ecuación para el desplazamiento en frecuencia y el desplazamiento en tiempo para el efecto Doppler.

Consideremos un ejemplo:

$$x_0(\tau) = (0, v\tau, 0) \\ x = (0, x_2, 0)$$

donde

$$v < c(\omega) \\ x_2 > v\tau$$

Entonces

$$x - x_0(\tau) = (0, x_2 - v\tau, 0), \\ |x - x_0(\tau)| = x_2 - v\tau \quad (6.1)$$

Sustituyendo (6.1) en la ec. (5.12), y considerando ec. (5.14) en la ec. (5.13), se obtiene un sistema de ecuaciones del punto de fase estacionaria ($\omega_s = \omega_s(t, x), \tau_s = \tau_s(t, x)$)

$$\frac{x_2 - v\tau}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0 \quad (6.2)$$

$$-k(\omega)v + \omega - \omega_0 = 0 \quad (6.3)$$

Para encontrar la solución para τ de la ecuación (6.2)

$$x_2 - v\tau - v_g(\omega)t + v_g(\omega)\tau = 0$$

Entonces

$$x_2 - v_g(\omega)t = \tau(v - v_g(\omega))$$

Por lo tanto

$$\tau = \frac{x_2 - v_g(\omega)t}{v - v_g(\omega)} \quad (6.4)$$

Ahora, para encontrar la solución para ω de la ecuación (6.3), de acuerdo con la ecuación (3.6)

$$-(-\omega\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)})v + \omega - \omega_0 = 0$$

Sabemos de la ec. (3.5) que el índice de refracción para un metamaterial es negativo. Entonces

$$-(\omega n(\omega)v) + \omega - \omega_0 = 0$$

Por lo tanto

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - n(\omega)v} \quad (6.5)$$

La ec. (6.5) describe el desplazamiento en frecuencia en un metamaterial conocido como efecto inverso de Doppler. Mientras que la ecuación (6.4) muestra el tiempo de retardo.

Con los siguientes parámetros fue posible resolver la ec. (6.5)

$$v = 0.4$$

En un rango de frecuencia de 428.57MHz a 750MHz. Utilizando el índice de refracción mostrado en la figura 1.

Al obtener la frecuencia aparente, es posible calcular la velocidad de grupo. Con $x_2 > vt$ como $t=2$, y $v=0.4$ entonces $x_2 = 3$, de este modo es posible resolver numéricamente la ec. (6.4).

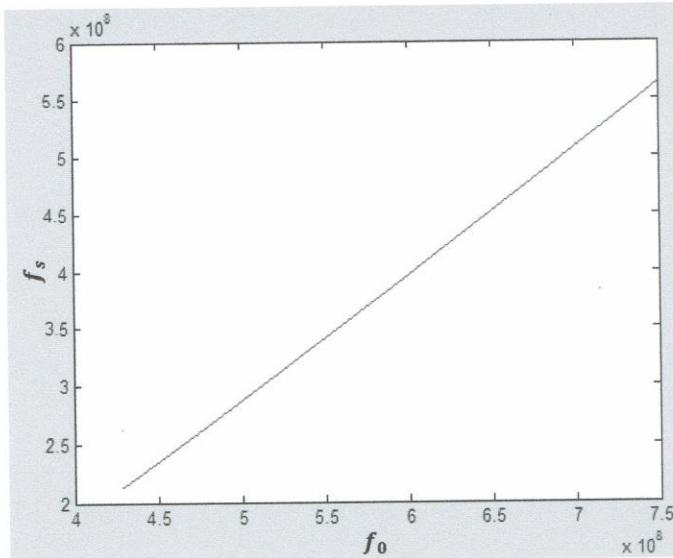


Figura 5. Desplazamiento en frecuencia por el efecto Doppler.

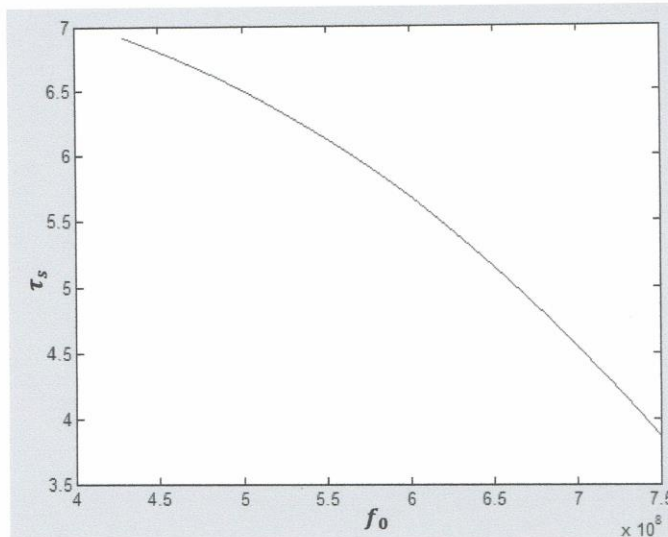


Figura 6. Desplazamiento en tiempo por efecto Doppler.

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo, aplicando resultados del artículo [4], fue posible verificar el efecto inverso de Doppler para metamateriales en un ejemplo numérico, en el cual la fuente se acerca al observador ($v>0$) por lo que la frecuencia recibida es menor a la de la frecuencia que emite la fuente tal y como se observa en la figura 5. Por otro lado, si la fuente se aleja del observador ($v<0$) se espera que la frecuencia recibida sea mayor.

En la figura 6 es posible observar el desplazamiento en tiempo del efecto Doppler.

VIII. AGRADECIMIENTOS

Al Instituto Politécnico Nacional, a la Sección de estudios de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal por todo el apoyo brindado.

IX. REFERENCIAS

- [1] Erdinc Irc. wave propagation in metamaterial structures and retrieval of homogenization parameters, bilkent university, 2007. 29-35.
- [2] Jichun Li, Yunqing Huang, Wei Yang. Time-Domain FEM for Wave Propagation in Metamaterials, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [3] Anne F. de Baas. Nanostructured Metamaterials Exchange between experts in electromagnetics and material science, European Commission, Publications Office of the European Union, 2010. 144 pp, 54-56.
- [4] A. N. Grigorenko, A. K. Geim, H. F. Gleeson, Y. Zhang, A. A. Firsov, I. Y. Khrushchev & J. Petrovic, Nanofabricated media with negative permeability at visible frequencies, Nature Publishing Group, 2005.
- [5] Burlak G., Rabinovich V. Time-Frequency integrals and stationary phase method in problems of waves propagation from moving sources, SIGMA, 8 (2012), 096, 5-10.
- [6] Andrey Petrin, Wave Propagation in Materials for Modern Applications, Mariya Golovkina, Cap. 8. Intech, 2010, 509 pp.
- [7] Makek S. Wartak, Kosmas L. Tsakmakidis, Ortwin Hess. Introduction to Metamaterials. Physics in Canada, vol. 67, 2011, 5pp.
- [8] José Represa, Ana Grande, Ismael Barba y Ana López. Metamateriales con índice de refracción negativo: una nueva frontera en Electromagnetismo. Departamento de Electricidad y Electrónica. Universidad de Valladolid, Revista de Ciencias, 1, 15-20, 2013. 6pp.
- [9] J. M. González-Arbesú, E. Úbeda y J. Romeu. metamateriales en microondas y antenas. Universitat Politècnica de Catalunya. 7pp