



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**



ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

UNIDAD ZACATENCO

**“SIMULACIÓN DE FLUJOS LENTOS A TRAVÉS DE  
MEDIOS POROSOS FRACTALES DETERMINÍSTICOS”**

# **T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA  
MECÁNICA**

PRESENTA:

**Ing. Gabriela González López**

DIRIGIDA POR:

**DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA  
DR. HELVIO R. MOLLINEDO PONCE DE LEÓN**

MÉXICO D.F. DICIEMBRE DE 2017



## SIMULACIÓN DE FLUJOS LENTOS A TRAVÉS DE MEDIOS POROSOS FRACTALES DETERMINÍSTICOS

### RESUMEN

Hoy en día el estudio de flujo de fluido a través de medios porosos tiene gran impacto en diversas áreas de estudio, como lo es la explotación del petróleo, el análisis del transporte de contaminantes en aguas subterráneas en el sector de la agricultura, en la construcción de filtros entre otras muchas más. La presente investigación tiene como propósito realizar el modelado de un medio poroso con una red pre-fractal, la inversa de la esponja de Menger de 4 iteraciones, con arreglos de 1 hasta 6 pre-fractales, para posteriormente realizar la simulación de flujo de fluidos a través de él y de esta manera analizar su comportamiento y sus propiedades hidrodinámicas. Para tal efecto, se utilizó el método de volúmenes finitos para discretizar el dominio llevando a cabo el análisis numérico del comportamiento del fluido a través de la red porosa. Se tomaron en cuenta las propiedades del fluido buscando obtener las gráficas de caída de presión y flujo. Cabe destacar que este proyecto ayudará a sustentar los resultados obtenidos en el desarrollo experimental en el cual se encontró que un flujo laminar en la red porosa pre-fractal obedece la ley tipo Darcy, pero no obedece a la ley de Hagen-Poiseuille; es decir, que la velocidad de filtración es una función lineal de la caída de presión, pero la permeabilidad absoluta aparente se incrementa con el aumento de la longitud de la muestra  $L$  en la dirección de flujo, es decir,  $k \propto L^\alpha$ , donde  $\alpha = 0.12 \pm 0.05 > 0$ , mientras las muestras de diferentes longitudes tengan la misma porosidad global[1]. Después de llevar a cabo todas las simulaciones se puede decir que la simulación de flujo de fluidos ayuda a verificar los datos obtenidos en el proyecto experimental, demostrando que por medio de las simulaciones numéricas se pueden obtener resultados muy aproximados del comportamiento de un fluido a través de un medio poroso fractal determinístico, pero difícilmente podrá predecir el comportamiento de un fluido en un red porosa no determinística, es decir, con redes porosas aleatorias. Esto brinda la oportunidad de realizar pruebas con redes porosas más finas o con un medio poroso con un mayor número de esponjas de Menger y analizar su comportamiento. Haciendo énfasis a su vez en que el mallado es una parte fundamental de los resultados de la simulación ya que entre más fino sea el mallado llevará más tiempo la solución pero será más preciso el resultado. Por último, se puede decir que para llevar a cabo este tipo de simulaciones se necesita de equipos con grandes capacidades de memoria ya que los elementos son de medidas muy pequeñas.

## **SIMULATION OF SLOW FLOWS THROUGH FRACTAL POROUS MEDIA DETERMINISTIC**

### **ABSTRACT**

Today the study of fluid flow through porous media has great impact in various areas of study, such as oil exploitation, analysis of transport of pollutants in groundwater in the agricultural sector, construction of filters among many others. The purpose of the present investigation was to model a porous medium with a pre-fractal network, the inverse of the Menger's sponge of 4 iterations, with arrangements of 1 to 6 pre-fractals, to perform the fluid flow simulation through it and in this way analyze its behavior and its hydrodynamic properties. For this purpose, the finite volume method was used to discretize the domino carrying out the numerical analysis of the behavior of the fluid through the porous network. The properties of the fluid will be taken into account in order to obtain its permeability. It should be noted that this project helped to support the results obtained in the experimental development in which it was found that a laminar flow in the pre-fractal porous network obeys the Darcy law, but does not obey Hagen-Poiseuille's law; that is, that the filtration rate is a linear function of the pressure drop, but the apparent absolute permeability is increased by increasing the length of the sample  $L$  in the flow direction, ie  $k \propto L^\alpha$ , where  $\alpha = 0.12 \pm 0.05 > 0$ , while samples of different lengths have the same overall porosity [1]. After performing all the simulations, it can be said that the fluid flow simulation helps verify the data obtained in the experimental project, demonstrating that through the numerical simulations very approximate results of the behavior of a fluid can be obtained through of a deterministic fractal porous medium, but it will be difficult to predict the behavior of a fluid in a non-deterministic porous network, that is, with random porous networks. This provides the opportunity to perform tests with finer porous networks or with a porous medium with a higher number of Menger sponges and analyze their behavior. Emphasizing in turn that meshing is a fundamental part of the results of the simulation because the finer the meshing will take more time the solution but the result will be more accurate. Finally, it is important to say that in order to carry out this type of simulation, equipment with high memory capacities is needed since the elements are of very small dimensions, so the simulations becomes hard for computers with low capacity.

## **DEDICATORIAS**

*A mis padres,*

***Joel y Matilde***

*Que con su amor y su esfuerzo me han conducido hacia el lugar donde estoy ahora.*

*A mi esposo,*

***Carlos Francisco De Jesús,***

*Por su amor, comprensión y apoyo incondicional, que siempre me apoya e impulsa a ser mejor persona.*

*A mis hermanas,*

***Carolina y Liliana***

*Que siempre me apoyan en todo*

*A mis abuelos*

***Cástulo González, Germana Báez †, Dominga Sepúlveda y Pantaleón López †***

*A mi tío,*

***Saúl González †***

*Que tuvo que partir antes de tiempo, pero que siempre me alentó a salir adelante*

## **AGRADECIMIENTOS**

*Al Dr. Orlando Susarrey Huerta*

*Que además de mi asesor ha sido un gran amigo y siempre me ha apoyado.*

*Al Dr. Helvio Mollinedo,*

*Por ser un excelente asesor y siempre apoyarme durante el desarrollo de la tesis.*

*Al Dr. Alexander Balankin,*

*Por sus excelentes comentarios y mejoras a mi trabajo.*

*Al Dr. Alexandre Michtchenko,*

*Por su apoyo como profesor y durante mi estancia científica.*

*Al Dr. José Alfredo Jiménez Bernal.*

*Por su disposición para apoyar el desarrollo del proyecto.*

*Al Dr. Didier Samayoa Ochoa.*

*Por sus comentarios para mejorar mi tesis.*

*Al grupo de Mecánica Fractal*

*Por permitirme formar parte de ellos.*

*A mis profesores*

*Quienes me brindaron sus conocimientos y experiencias.*

*A mis amigos de ESIME*

*Denisse, Omar, Josué, Gerardo y Sergio*

*Al CONACYT y BEIFI por su apoyo económico para poder realizar mis estudios de posgrado.*

# ÍNDICE

Resumen.....	iv
Abstract.....	v
Índice de figuras.....	x
Índice de tablas.....	xii
Nomenclatura.....	xiii
Introducción.....	1
Planteamiento del problema.....	2
Justificación.....	3
Objetivos.....	4
<b>CAPÍTULO I: ESTADO DEL ARTE.....</b>	<b>5</b>
1.1 Antecedentes.....	6
<b>CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....</b>	<b>9</b>
2.1 Mecánica Fractal.....	10
2.1.1 Fractal.....	10
2.1.2 Conjunto de Cantor.....	10
2.1.3 Curvas de Peano y Hilbert.....	12
2.1.4 Curva de Koch.....	12
2.1.5 Otros fractales.....	13
2.1.6 Tipos de fractales.....	14
2.1.7 Autosimilitud.....	14
2.1.8 Dimensión fractal.....	15
2.1.9 Dimensión de Hausdorff.....	15
2.1.10 Esponja de Menger.....	15
2.1.11 Dimensión Euclidiana y topológica.....	15
2.2 Flujo En Medios Porosos.....	17
2.2.1 Permeabilidad.....	17
2.2.2 Porosidad.....	18
2.2.3 Ley de Darcy.....	18
2.2.4 Número de Reynolds.....	19
2.2.5 Ley de Hagen-Poiseuille.....	21
2.3 Fluidos Computacionales.....	22
2.3.1 Método del elemento finito.....	22
2.3.2 Método del volumen finito.....	23
2.3.3 Generación de Malla.....	24
2.3.3.1 Tipos de malla.....	25
2.3.4 Ecuaciones de Movimiento.....	28
2.3.4.1 Ecuación de Continuidad.....	29
2.3.4.1 Ecuación de Navier-Stokes.....	30
<b>CAPÍTULO III: METODOLOGÍA.....</b>	<b>33</b>
3.1 Diagrama de flujo.....	34
3.2 Desarrollo del proyecto.....	35
3.3 Modelado.....	35
3.4 Mallado.....	35

3.5	Condiciones de frontera.....	36
3.6	Ecuaciones gobernantes.....	39
3.7	Cálculo de Parámetros.....	40
<b>CAPÍTULO IV: SIMULACIONES.....</b>		<b>42</b>
4.1	Construcción del modelo.....	43
4.2	Configuración del modelo en el programa CFD.....	44
4.3	Mallado del modelo.....	44
4.4	Simulación.....	46
<b>CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....</b>		<b>48</b>
Conclusiones.....		55
Trabajos futuros.....		56
Bibliografía.....		57
Anexos.....		59

## ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1	Conjunto de Cantor, en honor a su creador el matemático George Cantor.....	10
Fig. 2.2	El conjunto ternario de Cantor se obtiene de manera inductiva comenzando por el segmento unidad y quitando en cada etapa a cada intervalo el segmento medio resultante de dividirlo en tres partes iguales.....	11
Fig. 2.3	Primeras etapas de la generación de la curva de Hilbert.....	12
Fig. 2.4	Evolución de la Curva de Koch.....	12
Fig. 2.5	Imagen final aproximada del triángulo de Sierpinski.....	13
Fig. 2.6	Esponja de Menger.....	14
Fig. 2.7	Desarrollo de la Esponja de Menger en 4 iteraciones.....	15
Fig. 2.8	Objetos con dimensión entera.....	16
Fig. 2.9	Curvas de igual dimensión topológica.....	16
Fig. 2.10	Experimento de Henry Darcy.....	18
Fig. 2.11	El diámetro hidráulico $D_h = 4A_c/p$ se define de tal modo que se reduce a diámetro común para tubos circulares.....	20
Fig. 2.12	Representación de la Ley de Hagen-Poiseulle.....	22
Fig. 2.13	Estructura de 2D de mallado: a) Malla cuadrilátera estructurada; b) Malla triangular no estructurada; c) Malla cuadrilátera no estructurada.....	24
Fig. 2.14	Volumen de Control reducido a un tamaño infinitesimal.....	29
Fig. 3.1	Diagrama de flujo de la metodología.....	34
Fig. 3.2	Cuarta parte del cubo de la Esponja de Menger con diversas densidades de malla.....	36
Fig. 3.3	Condiciones de frontera del dominio computacional.....	36
Fig. 3.4	En una entrada o salida de presión se especifica la presión sobre la cara pero no puede especificarse la velocidad a través de la cara. Cuando la solución DFC converge la velocidad se ajusta a sí misma de tal manera que se cumplan las condiciones de frontera de presión prescritas.....	37
Fig. 3.5	Condición de frontera de simetría.....	38
Fig. 3.6	Volumen de muestra (Cuarta parte de la Esponja de Menger 4ta. Iteración)....	43

Fig. 4.1	Modelo CAD de la esponja de Menger con la 4ta. It. en CREO Parametric 3.0...	43
Fig. 4.2	Ensamble de dos pre-fractales de la 3ra. Iteración.....	43
Fig. 4.3	Representación del trabajo experimental con 2 cubo de 4 iteraciones.....	44
Fig. 4.4	Condiciones de frontera del modelo de 2 pre-fractales con 3 iteraciones.....	44
Fig. 4.5	Malla hexaédrica de 0.3 mm.....	46
Fig. 4.6	Modelo a la cuarta parte de la 4ta. Iteración.....	46
Fig. 4.7	Campo de velocidades del fluido a través del medio poroso.....	47
Fig. 4.8	Residuales de la simulación convergiendo a las 1000 iteraciones.....	47
Fig. 5.1	Gráfica $Q$ vs. $\Delta P$ con longitud constante (6 pre-fractales) variando la iteración...	51
Fig. 5.2	Gráfica $Q$ vs. $\Delta P$ con iteración constante (4ta. Iteración) variando la longitud.....	51
Fig. 5.3	Gráfica $Q$ vs. $\Delta P/L$ (Primera Iteración).....	52
Fig. 5.4	Gráfica $Q$ vs. $\Delta P/L$ (Segunda Iteración).....	52
Fig. 5.5	Gráfica $Q$ vs. $\Delta P/L$ (Tercera Iteración).....	53
Fig. 5.6	Gráfica $Q$ vs. $\Delta P/L$ (Cuarta Iteración).....	53
Fig. 5.7	Gráfica del comportamiento de $K$ vs. Número de cubos en cada iteración.....	54
Fig. 5.8	Gráfica esperada por Darcy de $\Delta P$ respecto a $Q$ .....	55

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1	Dimensión Topológica.....	16
Tabla 2.2	Tipos de mallados del programa CFD Star CCM+.....	26
Tabla 3.1	Cantidad de elementos del modelo de la cuarta parte (1 Cubo 4ta. Iteración)....	29
Tabla 3.2	Parámetros considerados en la simulación.....	39
Tabla 5.1	Cuadro de Permeabilidades ( $\mu m^2$ ) por iteración y número de cubos.....	54

## NOMENCLATURA

KC	Kozeny-Carman
MEF	Método del elemento finito
$l$	Lado
FVM	Método de volumen finito
IFS	Sistemas de funciones iteradas
SMD	Sistema Métrico Decimal
$Cm$	Centímetro
$M$	Metro
$K$	Permeabilidad absoluta
$\alpha$	Exponente métrico
$L$	Longitud de la muestra
$\rho$	Densidad
$D$	Diámetro
$Q$	Caudal volumétrico
$\Delta p$	Caída de presión
$Q$	Flujo
$Re$	Número de Reynolds
$\nabla p$	Gradiente de presión
$\phi$	Porosidad
$C$	Constante adimensional relacionada con el fluido
$\nu$	Viscosidad cinemática
$V_{prom}$	Velocidad promedio
$Re_{cr}$	Número de Reynolds crítico
$D_h$	Diámetro hidráulico

$A_c$	Área circular
$\mu$	Viscosidad dinámica
$d_E$	Dimensión euclidiana
$d_T$	Dimensión topológica
$d_{corte}$	Dimensión de corte
CFD	Computational Fluid Dynamics
$v$	Volumen de un líquido transferido en tiempo $t$ expresado en $m^3$
$v$	mediana de la velocidad expresada en $m/s$
$x$	Vector de dirección del flujo expresado en $m$
$R$	Radio interno del tubo dado en $m$
$\Delta P$	Diferencia de presión entre las dos terminales expresadas en $pa$
DFC	Dinámica de Fluidos Computacionales
$D_{eq}$	Diámetro equivalente

## INTRODUCCIÓN

El transporte fluidos a través de medios porosos trae consigo los conceptos de porosidad, permeabilidad y la ley de Darcy. La Ley de Darcy es considerada una de las herramientas más importantes de la hidrodinámica y la ingeniería que presenta numerosas aplicaciones en la recuperación de petróleo, ingeniería química, la seguridad nuclear y muchos otros campos de la ingeniería. Es importante mencionar que al pasar de los años la ley de Darcy se sigue utilizando en muchos campos de la industria debido a la versatilidad que presenta. Fue formulada por primera vez por el ingeniero francés Henry Darcy en 1856 [21].

Actualmente la necesidad en el ámbito de la industria petrolera por extraer de manera óptima y rápida los combustibles de los mantos acuíferos, ha llevado a ingenieros e investigadores a realizar diversos estudios del comportamiento del flujo de fluido a través de los medios porosos, es por ellos que surgen investigaciones como ésta.

El método del elemento finito, volúmenes finitos y el método de las diferencias finitas son herramientas de gran impacto desde años atrás por su sistema de aproximaciones numéricas. Estos métodos son utilizados en diversos programas computacionales de simulación, los cuales buscan predecir el comportamiento de un modelo propuesto a ciertas condiciones establecidas.

En el capítulo I y II se abordan conceptos generales acerca de los medios porosos, fractales y los principales teoremas relacionados con el flujo de fluidos en medios porosos. A su vez se hace mención de los trabajos realizados previamente referentes al tema, comparando y sustentando ésta investigación.

En el capítulo III se describe la metodología empleada para llevar a cabo esta investigación, así como los softwares y teoremas aplicados al proyecto.

Posteriormente, en el capítulo IV se muestran el procedimiento de las simulaciones realizadas, explicando brevemente su desarrollo; se analiza el comportamiento del fluido a través del medio poroso.

En el capítulo V se muestran los resultados y gráficos obtenidos por las simulaciones, comprando los datos obtenidos con los resultados experimentales.

Por último se presentan las conclusiones de la investigación, resaltando los puntos más importantes y proponiendo trabajos futuros.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

La necesidad de conocer el comportamiento del flujo de un fluido a través de una red porosa lleva a los investigadores a realizar diversos trabajos experimentales y numéricos en las diferentes áreas de aplicación (extracción de hidrocarburos, construcción de filtros, etc.).

La geometría fractal entre sus diversas aplicaciones brinda la oportunidad de analizar el comportamiento de los fluidos a través de un medio poroso.

En este trabajo se busca llevar a cabo el modelado de un medio poroso fractal determinístico, creando una red pre-fractal de la inversa de la esponja de Menger y posteriormente evaluar el fluido a través del medio a diversas longitudes, es decir, de 1 a 6 esponjas, cada una con una longitud de 81 mm, para un fluido viscoso. Se busca obtener principalmente la permeabilidad, así como otras propiedades hidrodinámicas del fluido a través de diversas simulaciones en un programa CFD y así comparar los datos obtenidos con los experimentales.

## JUSTIFICACIÓN

El estudio de flujo de fluidos a través de medios porosos tiene muchas aplicaciones científicas y tecnologías, lo cual lleva a realizar diversas investigaciones al respecto. La mecánica fractal nos brinda la oportunidad de reproducir un medio poroso para lo cual Darcy plantea que  $K$  se mantiene constante conforme la longitud del medio poroso en dirección de flujo aumenta [20]. Experimentalmente se encontró que en una red pre-fractal no sucede así, puesto que  $K$  aumenta conforme  $L$  [1], así que por medio de las simulaciones realizadas en este proyecto se busca comprobar lo que experimentalmente se obtuvo, que  $K$  varía con la longitud de muestra y la gráfica que describe el comportamiento del fluido fractalmente se mantiene lineal y no constante como lo plantea Darcy. Para ello se lleva a cabo el modelado de un medio poroso fractal determinístico, con la inversa de la esponja de Menger a través cual se hace pasar un fluido viscoso, aceite Turbinas 15, y de este modo se obtiene la permeabilidad del medio a través del cual pasa el fluido con diversas simulaciones y se compara con los datos experimentales. Se pretende demostrar que por medio de un programa CFD es posible simular el paso de fluidos a través de un medio y evaluar su comportamiento. En términos generales, los resultados obtenidos con el programa de CFD ayudan a reunir los datos necesarios para poder compararlos con las gráficas del proyecto experimental.

## **OBJETIVOS**

### Objetivo General

Verificar las propiedades hidrodinámicas en medios porosos con el modelado y simulación del flujo de fluidos a través de medios porosos fractales determinísticos y realizar un análisis de comparación con los resultados de los estudios experimentales

### Objetivos Específicos

- Estudiar el comportamiento de flujos lentos a través de medios porosos
- Estudiar los conceptos de medios fractales
- Modelar un medio poroso fractal determinístico
- Realizar una simulación del comportamiento de flujos lentos a través de medios porosos determinístico
- Comparar resultados del comportamiento de flujos lentos a través de medios porosos del trabajo experimental contra la simulación

# Capítulo I

## Estado del Arte

*En el Capítulo I se presentan los autores de los trabajos relacionados con la simulación de flujo de fluidos a través de medios porosos, trabajos de años anteriores así como los más actuales, poniéndonos brevemente en la situación actual de esta área de estudio. Se mencionan los trabajos más importantes relacionados al proyecto desarrollado.*

## CAPÍTULO I: ESTADO DEL ARTE

### 1.1 Antecedentes

En 1856, en la ciudad francesa de Dijon, el ingeniero Henry Darcy fue encargado del estudio de la red de abastecimiento de la ciudad. Parece que también debía diseñar filtros de arena para purificar el agua, así que se interesó por los factores que influían en el flujo del agua a través de los materiales arenosos, y presentó el resultado de sus trabajos como un apéndice a su informe de la red de distribución. Ese pequeño anexo ha sido la base de todos los estudios físico-matemáticos posteriores sobre el flujo del agua subterránea [15].

Xu & Yu (2008), “Plantean la ecuación Kozeny-Carman como la más famosa ecuación para la relación permeabilidad-porosidad. El modelo se expresa en función de las dimensiones fractales, porosidad y tamaño máximo de poro. La constante analítica KC sin constante empírica se obtiene a partir del supuesto del modelo geométrico cuadrado. Además, se encuentra una ley de escala lineal distinta entre la permeabilidad analítica más estrechamente relacionada con las microestructuras en comparación con las obtenidas a partir de métodos y modelos convencionales. Este trabajo solo se centra en el flujo de fluido newtoniano laminar totalmente desarrollado y los medios porosos no consolidados cuya distribución de poros sigue la ley de escalamiento fractal [10].”

Wang, Kosakowski & Kolditz (2008) “Presentan la implementación de un método paralelo de elementos finitos para el análisis numérico de problemas acoplados THM en poros. La paralelización fue lograda mediante el establecimiento simultáneo de la topología de malla del subdominio, ensamblaje sincrónico lineal del sistema de ecuaciones en subdominios y la obtención de la solución global con un solucionador lineal de subdominio. El código de paralelo se probó con éxito con un ejemplo 2D, destacando que la aceleración lograda para una extensión tridimensional del ejemplo de prueba demuestra la ventaja del esquema en diferentes computadoras [16].”

Valdés Prada (2009) “Utiliza un método de promediado de volumen para estimar la permeabilidad del medio poroso. A diferencia de los métodos tradicionales no requiere especificación de condiciones físicas y parámetros (caída de presión y viscosidad). Los resultados numéricos sobre modelos sintéticos de medios porosos mostraron que la configuración del medio poroso local tiene un efecto importante sobre el valor de permeabilidad. En sus resultados indican que la descripción del flujo en medios porosos reales es un problema complejo que está lejos de ser caracterizado por simples ecuaciones empíricas [9].”

Nélio Henderson (2010), “Deduce una ecuación de 3 parámetros de Kozeny-Carman, obtenida a partir de una estructura fractal, la cual implica la superficie específica y la tortuosidad del medio poroso. Buscó definir la relación permeabilidad-porosidad de materiales tales como arsénicas y fibras de vidrio, mostrando que los resultados obtenidos de

dichos 3 parámetros describen la relación permeabilidad-porosidad de diversos materiales naturales e industriales [6].”

Balankin & Espinoza Elizarráz, B. (2012), “Propone estudiar la hidrodinámica continua fractal y su aplicación para de esta manera, modelar los flujos de fluidos en yacimientos fractalmente permeables con base en un modelo auto consistente fractal continuo con el derivador de Hausdorff [17].”

Karim et al (2013) “Consideran el problema de la simulación de elementos finitos del flujo de fluido compresible en medio poroso. El medio poroso se caracteriza por la técnica de microtomografía de rayos X en las tres dimensiones. Se considera un preconditionador noble, el preconditionador diagonal del bloque nodal, cuyo funcionamiento se investiga a fondo. El rendimiento del preconditionador diagonal de bloque nodal se ha investigado a través de una serie de problemas de prueba, antes de aplicar si para predecir la permeabilidad de la microestructura real de arena obtenida por el XMT. El método de homogeneización computacional proporciona medios útiles para predecir la permeabilidad efectiva. Sin embargo, los valores predichos son ligeramente más pequeños en comparación con la estimación experimental debido a la resolución inadecuada de la imagen microtomográfica de rayos X para resolver los poros menos de 3,5  $\mu\text{m}$  como se considera en el presente estudio [3]”.

Xia, Ming (2015), “Presentó un modelo del método de Lattice Boltzmann para analizar fenómenos de flujo de fluido viscoso, transferencia de calor y transporte de masa. Utilizó dos microestructuras de geometría compleja con imágenes de micro tomografía computarizada (micro-TC) de alta resolución, mismas que se han incorporado como geometrías para el modelado de procesos de desplazamiento en medios porosos. Encontrando con su trabajo que: La existencia de micro estructura de escalamiento de poros puede tener efecto significativo sobre las morfologías frontales y la velocidad de propagación frontal del proceso. Además, demostró que un número mayor de  $R_e$  puede conducir a un aumento en la velocidad de propagación del frente de interfaz [18]

El método de discretización de elementos (DEM) promete ser una herramienta numérica para la simulación de problemas discretos/discontinuos naturales (Cundall and Strack 1979). El cual puede dar registro de la iteración y transporte de las partículas, y posteriormente se ha extendido a la modernización de la deformación mecánica y problemas de conducción de calor en el laboratorio en los últimos 10-15 años [18]

Balankin et al (2016), “Estudiaron el flujo de Darcy a través de medios porosos pre-fractales con un flujo viscoso (aceite) con una difusión de impulso del fluido. Experimentalmente encontraron que el flujo laminar constante en la esponja de Menger en su interior obedece la ley de Darcy, mas sin embargo no la de Hagen-Poiseuille. La permeabilidad aparente absoluta de la red pre-fractal de poros aumenta de acuerdo a la longitud de la muestra en dirección del flujo [1]”.

Berrone et al (2017) “Presentan un método basado en el modelo discreto de fractura y matriz con un nuevo enfoque para simulaciones de flujo 3D en medios porosos con redes

sumergidas en fracturas, buscando optimizar el proceso de mallado independientemente de que tan compleja sea la geometría, encontrando que el método relaja las restricciones de coincidencia de malla en las interfaces llegando a un mallado fácil y confiable [19]”

Mößner & Radespiel (2017) “Se presenta un modelo de cierre para calcular y evaluar el comportamiento de un flujo turbulento a través de medios porosos basándose en las ecuaciones de Navier-Stokes con términos de Darcy y Forchheimer. Estas ecuaciones describieron el arrastre dentro del medio poroso y a su vez se consideraron en las ecuaciones de Reynolds para tener en cuenta que el medio poroso no afectaba la turbulencia. Los datos arrojados por las simulaciones se compararon con los datos obtenidos numéricamente y coincidieron con la mayoría de los experimentos atribuyéndole la diferencia a las variaciones de los parámetros en el flujo, las cuales serán estudiadas a detalle [20]”.

# Capítulo II

## Marco Teórico

*En el Capítulo II se presentan los conceptos más importantes relacionados con el flujo de fluido en medios porosos fractales. El capítulo se divide en 3 partes para su mejor comprensión. Primero se muestra una breve descripción de la Mecánica fractal, en donde cuenta la historia de los fractales, como se componen, los tipos de fractales y sus propiedades. La segunda parte habla del flujo de fluidos donde se abordan los temas de la parte de Mecánica de fluidos y sus propiedades como la porosidad, permeabilidad, Ley de Darcy y Hagen-Poiseuille y por último se presentan los temas relacionados a las simulaciones CFD, generación de mallado y las ecuaciones gobernantes de nuestro sistema.*

## MARCO TEÓRICO

### 2.1 Mecánica Fractal

#### 2.1.1 Fractal

En 1975 Benoit Mandelbrot denominó *fractales* (del latín *factus*, irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional [7].

Los fractales mostraron su utilidad por primera vez cuando se generó con ellos un modelo simple para la aparición de ruido en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital; esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación (del tipo de las que estamos acostumbrados a oír cuando hablamos por teléfono o escuchamos el radio). El análisis de las señales demostró que las interrupciones aparecían como por paquetes, pero dentro de estos paquetes se distinguía una estructura intermitente, y dentro de ésta... ya podemos imaginar la historia.

Cuando el procedimiento se repite a toda escala; se obtiene el fractal conocido como conjunto de Cantor (Fig.2.1) en honor a su creador, el matemático alemán Georg Cantor; famoso por su desarrollo de la teoría de conjuntos [7].

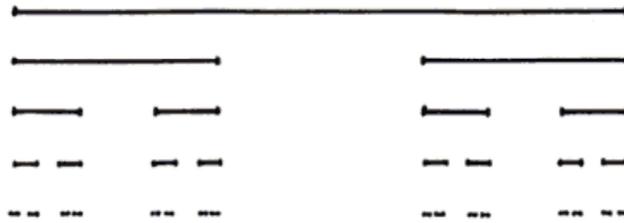


Fig. 2.1 Conjunto de Cantor, en honor a su creador el matemático George Cantor [7].

#### 2.1.2 Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es un ejemplo clásico de conjunto no numerable con el mismo cardinal que el continuo, pero, a pesar de ello, con medida de Lebesgue unidimensional (longitud) nula.

Para construir el conjunto de Cantor, partiremos del intervalo unidad  $E_{11} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Dividimos dicho intervalo en tres partes iguales y consideramos los intervalos cerrados de los extremos

$$E_{11} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad E_{12} = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \quad (2 - 1)$$

cada uno de ellos de longitud  $1/3$ .

El proceso anterior se repite sobre los nuevos conjuntos obtenidos. Cada uno de estos intervalos se divide en tres intervalos de igual longitud para prescindir del intervalo central y considerar los cuatro intervalos cerrados

$$E_{21} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \quad E_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \quad E_{23} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \quad E_{24} = \left[\frac{8}{9}, 1\right] \quad (2-2)$$

cada uno de ellos de longitud  $1/9$ .

Si continuamos indefinidamente de esta forma, en la etapa  $k$ -ésima tendremos  $2^k$  intervalos cerrados  $E_{kj}$  con  $j = 1, 2, \dots, 2^k$ , cada uno de ellos de longitud  $3^{-k}$ .

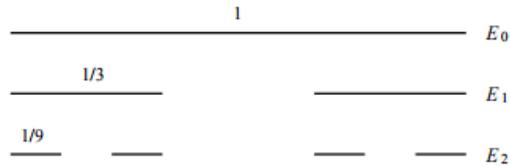


Fig. 2.2. El conjunto ternario de Cantor se obtiene de manera inductiva comenzando por el segmento unidad y quitando en cada etapa a cada intervalo el segmento medio resultante de dividirlo en tres partes iguales [14].

Consideremos ahora para cada  $k = 1, 2, \dots$  el conjunto

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} E_{kj} \quad (2-3)$$

Observamos que los conjuntos  $E_k, k = 1, 2, \dots$ , forman una sucesión monótonamente decreciente, esto es

$$E_{k+1} \subset E_k \forall k \quad (2-4)$$

El conjunto límite de este proceso

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad (2-5)$$

se denomina *conjunto ternario de Cantor* (Fig. 2.2), [14].

### 2.1.3 Curvas de Peano y Hilbert

Curvas de Peano y Hilbert En 1890 Peano construyó una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad  $[0, 1]$  . Era el primer ejemplo de una curva que llena un espacio. Años más tarde, Hilbert construye otra del mismo tipo con una construcción geométrica más simple de describir.

La curva de Hilbert se construye iterando el procedimiento que puede observarse en la figura 3. En cada etapa cada segmento se sustituye por otros cuatro con la mitad de longitud. La curva límite de tales poligonales llena el cuadrado unidad [14].

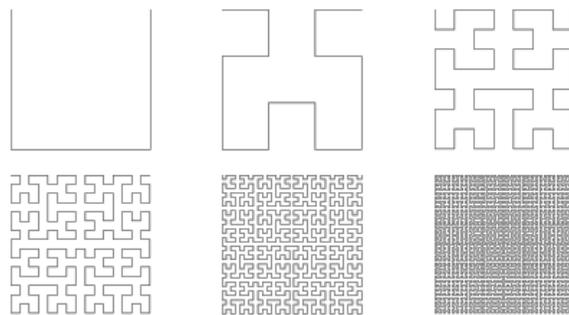


Fig. 2.3 Primeras etapas de la generación de la curva de Hilbert [14].

### 2.1.4 Curva de Koch

Esta curva fue construida en 1904 por el matemático Helge von Koch. Se parte del segmento unidad  $[0, 1]$  y se divide en tres partes iguales, sustituyendo la parte central por los dos segmentos que junto con dicha parte formarían un triángulo equilátero. Con cada uno de los cuatro segmentos que así queden determinados se repite la operación anteriormente descrita.



Fig. 2.4 Evolución de la Curva de Koch [14]

Primeros pasos del proceso de construcción de la curva de Koch. En el límite, dados dos puntos cualesquiera de la curva es imposible llegar a uno de ellos desde el otro por encima de la curva. La longitud de cualquier tramo de curva es infinita.

Se procede indefinidamente de esta forma obteniendo en cada etapa  $k$  una poligonal de longitud  $(4/3)^k$ . La curva de Koch se define como la curva límite a que converge la sucesión

cuando  $k$  tiende a infinito. Se trata, por tanto, de una curva de longitud infinita pues  $(4/3)^k$  tiende a infinito con  $k$ . Más aún, la longitud de la parte de curva comprendida entre dos puntos cualesquiera de la misma también es infinita. El área bajo la curva, por otra parte, viene dada por la serie

$$1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots \quad (2 - 6)$$

que converge a  $9/3$  asumiendo que el área bajo el triángulo de la primera iteración es 1. En la figura 4 pueden verse las primeras etapas de la generación de la curva de Koch [14].

### 2.1.5 Otros fractales

Los apartados anteriores han mostrado algunos conjuntos fractales de reconocida fama y prestigio. Sin embargo, no son, ni mucho menos, los únicos.

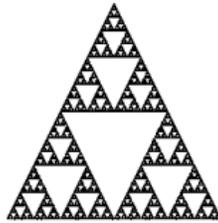


Fig. 2.5 Imagen final aproximada del triángulo de Sierpinski. Sabiendo que el conjunto inicial es un triángulo equilátero relleno, no es difícil deducir el proceso iterativo que permite obtener el fractal.

El triángulo de Sierpinski (Fig.2.5) es un fractal se genera a partir de un triángulo equilátero relleno de lado  $l$  del que se extrae el subtriángulo formado por los tres puntos medios de los lados del triángulo.

El proceso se repite con los tres nuevos triángulos de lado  $l/2$  así obtenidos. Si continuamos de esta manera, en la etapa  $k$  tendremos  $3^k$  triángulos equiláteros con lados de longitud  $l^{2-k}$  la figura 2.4 muestra el conjunto obtenido. El proceso seguido para la construcción del conjunto de Cantor puede generalizarse a dimensiones superiores. La generalización a tres dimensiones produce la denominada *esponja de Menger* (Fig.2.6).

Unos años antes de los primeros desarrollos de Mandelbrot, algunos científicos comenzaron a ponerse de acuerdo en la explicación de ciertos fenómenos irregulares que surgían en multitud de sistemas dinámicos. Eran los primeros intentos de descubrir algunos viejos trucos de magia de la naturaleza [14].

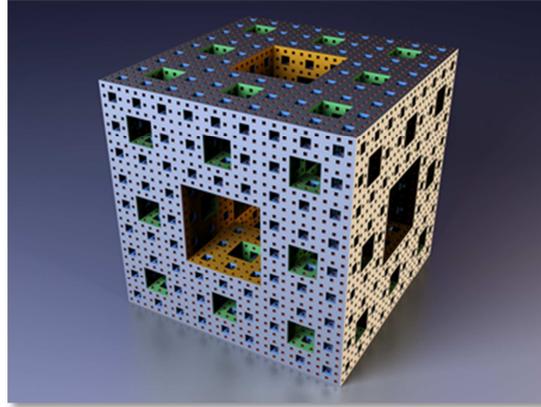


Fig. 2.6 Esponja de Menger.

### 2.1.6 Tipos de fractales

Los sistemas fractales se dividen en dos tipos: El primero contiene aquellos sistemas cuya morfología exhibe propiedades fractales, este tipo de sistema recibe el nombre de *fractales geométricos*. El segundo tipo de fractales son aquellos sistemas cuya dinámica posee propiedades fractales, se refiere a estos como *fractales dinámicos* [1].

### 2.1.7 Autosimilitud

Según B. Mandelbrot, un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas [4].

Los fractales pueden presentar tres tipos de autosimilitud:

- **Autosimilitud exacta.** este es el tipo más restrictivo de autosimilitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo la encontramos en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS).
- **Cuasiautosimilitud.** exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente D. Sullivan definió el concepto de conjunto cuasiauto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo.
- **Autosimilitud estadística.** Es el tipo más débil de autosimilitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo.

### 2.1.8 Dimension Fractal

La Dimensión Fractal está representada por un número fraccional que sirve para cuantificar o medir el grado de irregularidad de una geometría o de un objeto. Puede estar entre 0 y 1, como el conjunto de Cantor; entre 1 y 2; como el triángulo de Sierpinski; y entre 2 y 3.

### 2.1.9 Dimension de Hausdorff

La medida de Hausdorff es, sin lugar a dudas, la medida más importante en el estudio de los fractales. En efecto, al contrario que las anteriores, esta medida puede tomar cualquier valor real, no necesariamente entero, y por tanto, suministra el marco adecuado para comenzar a entender los fractales.

### 2.1.10 Esponja de Menger

Es un conjunto fractal descrito por primera vez en 1926 por Karl Menger mientras exploraba el concepto de dimensión topológica. Se comienza por un cubo iniciador, hacia un generador el cual al aumentar la iteración va perforando el cubo iniciador como se muestra en Fig. (2.7).

La dimensión fractal o de similitud de la esponja de Menger es de  $D = \frac{\ln(20)}{\ln(3)} = 2.72683 \dots$

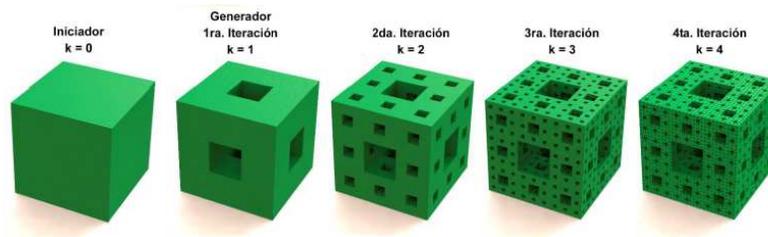


Fig. 2.7 Desarrollo de la Esponja de Menger en 4 iteraciones [1]

Mas sin embargo, solo después de un número infinito de iteraciones se obtiene la esponja de Menger, por lo cual, lo que nosotros tendríamos representado con tan solo 4 iteraciones se le denomina “*Pre-fractal*”.

### 2.1.11 Dimensión euclidiana y topológica

La dimensión euclidiana  $d_E$  es simplemente el número de coordenadas necesarias para especificar el objeto. En general es fácil comprender objetos con dimensiones enteras por ejemplo 0D (puntos), 1D (líneas), 2D (planos) y 3D (sólidos) (Fig.2.8).

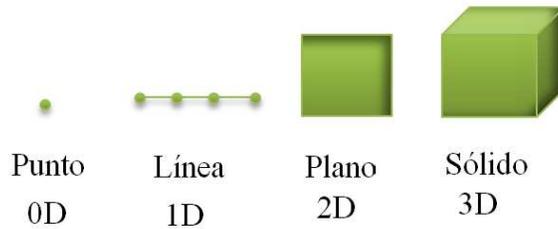


Fig.2.8 Objetos con dimensión entera

La dimensión topológica  $d_T$  por otro lado, considera entre otros aspectos la forma del objeto. La topología trata con la manera en que los objetos pueden ser distorsionados de una forma u otra sin perder sus características esenciales. Es decir, la dimensión topológica no cambia bajo la transformación del objeto. Por lo tanto, una línea recta se puede transformar en una curva suave o una curva plegada, en donde cada una de las construcciones son topológicamente equivalentes (Fig.2.9).

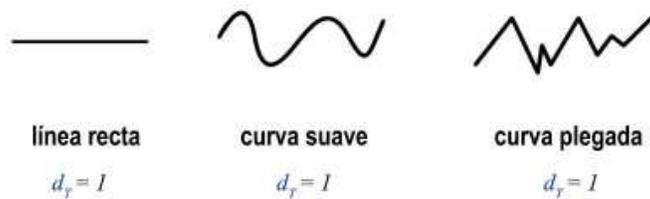


Fig. 2.9 Curvas de igual dimensión topológica.

La dimensión topológica se puede definir por  $d_T = d_{corte} + 1$ . Donde  $d_{corte}$  es la dimensión de corte, existen 5 dimensiones topológicas que son:

Tabla 2.1 Dimensión Topológica

Dimensión Topológica	Ejemplo
-1	Conjunto vacío
0	Un punto
1	Una línea
2	Un planeo
3	Un volumen

## 2.2 Fluidos a través de medios porosos

### 2.2.1 Permeabilidad

La permeabilidad es la capacidad que tiene un material de permitirle a un flujo que lo atraviese sin alterar su estructura interna. Se afirma que un material es *permeable* si deja pasar a través de él una cantidad apreciable de fluido en un tiempo dado, e *impermeable* si la cantidad de fluido es despreciable.

La velocidad con la que el fluido atraviesa el material depende de tres factores básicos:

- la porosidad del material y su estructura;
- la viscosidad del fluido considerado, afectada por su temperatura;
- la presión a que está sometido el fluido.

Para ser permeable, un material debe ser poroso, es decir, debe contener espacios vacíos o poros que permitan un paso fácil del fluido a través del material. A su vez, tales espacios deben estar interconectados para que el fluido disponga de caminos para pasar a través del material.

Por otro lado, hay que hablar de una "permeabilidad intrínseca" (también llamada "coeficiente de permeabilidad"); como constante ligada a las características propias o internas del terreno. Y de una "permeabilidad real" o de Darcy, como función de la permeabilidad intrínseca más las de las características del fluido [12]. La ecuación que define a la permeabilidad  $K$  es la Ley de Darcy:

$$K = \frac{Q \cdot \mu}{A \left(\frac{\Delta P}{L}\right)} \quad (2 - 7)$$

Donde  $Q$  es el flujo,  $\mu$  la viscosidad dinámica del fluido,  $A$  el área de la sección,  $\Delta P$  la caída de presión y  $L$  la longitud del medio.

La "permeabilidad intrínseca" en el SMD se mide en  $cm^2$  o  $m^2$ . La unidad derivada de la Ley de Darcy es el Darcy y habitualmente se utiliza en milidarcy:

Conversión:  $1 \text{ Darcy} = 9.86923 \cdot 10^{-3} m^2$

La permeabilidad de Darcy se mide en cambio, en unidades de velocidad: cm/segundo o m/segundo.

La permeabilidad real, en cambio, se puede determinar directamente de la Ley de Darcy o estimarla utilizando tablas empíricas derivadas de ella. La permeabilidad real es una parte de la constante proporcional en la Ley de Darcy, que se relaciona con las diferencias de la velocidad del fluido y sus propiedades físicas (por ejemplo, su viscosidad) en un rango de presión aplicado al promedio de la porosidad. La constante proporcional específica para el agua atravesando una porosidad media es la conductividad hidráulica. La permeabilidad intrínseca es una función de la porosidad, no del fluido. [12]

### 2.2.2 Porosidad

Se le considera como la propiedad por la cual todos los cuerpos poseen en su interior espacios que se llaman poros o espacios intermoleculares.

La porosidad ( $\phi$ ) es expresada como:

$$\phi = \frac{\text{Volumen de espacios para almacenar fluidos}}{\text{Volumen total}} \quad (2 - 9)$$

### 2.2.3 Ley de Darcy

Cuando se piensa en un medio poroso sin duda alguno el primer concepto que viene a la mente es la ley de Darcy, esta es, un factor determinante para el análisis de un fluido a través de un medio poroso. Desde muchos años atrás Darcy fue el encargado de diseñar la red de distribución de agua en su ciudad origen, trabajo que lo llevó a despertar su interés por el diseño de los filtros de arena.

Observó que al pasar el agua por un medio poroso se presentaba una caída de presión por lo cual empezó a cuantificar el proceso.

Midió el flujo de agua  $Q$  y la caída de presión  $\Delta h$ , que pasaba a través de una columna de arena (véase Fig.2.10.) de área transversal  $A$ .

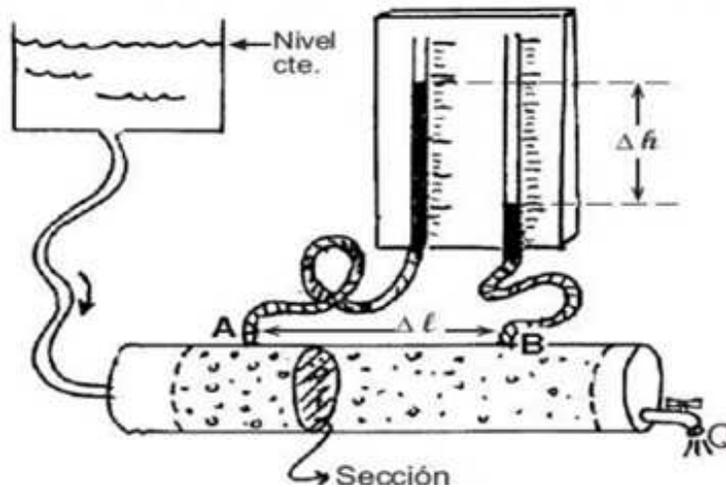


Fig. 2.10 Experimento de Henry Darcy.

Obteniendo así, la siguiente relación:

$$\frac{Q}{A} \propto \frac{\Delta p}{L} \quad (2 - 10)$$

El gasto por unidad de área, es proporcional al gradiente de presión.

Además llego a la conclusión que la razón de proporcionalidad dependía directamente del tipo de medio poroso que se estuviera utilizando para hacer pasar el fluido, fue así como planteó lo siguiente,

$$Q = KA \frac{\Delta p}{L} \quad (2 - 11)$$

Con ello se llegó a lo cual conocemos hoy en día como *ley de Darcy*

### 2.2.4 Número de Reynolds

El paso de flujo laminar a turbulento está relacionado con la *geometría*, la *rugosidad de la superficie*, la *velocidad del flujo*, la *temperatura de la superficie* y el *tipo de fluido*, entre otros factores. Después de realizar diversos experimentos en los años de 1880, Osborne Reynolds descubrió que el régimen de flujo depende principalmente de la razón de *fuerzas inerciales a fuerzas viscosas* en el fluido. A esta razón se le conoce como **número de Reynolds** y se expresa para flujo interno en una tubería circular.

$$Re = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{V_{prom}}{\nu} = \frac{\rho V_{prom} D}{\mu} \quad (2 - 12)$$

donde  $V_{prom}$  = Velocidad de flujo promedio (m/s),  $D$  = longitud característica de la geometría (diámetro en este caso, en m), y  $\nu = \mu/\rho$  = viscosidad cinemática del fluido ( $m^2/s$ ). Note que el número de Reynolds es una cantidad *adimensional*. Además, la viscosidad cinemática tiene la unidad  $m^2/s$  y se puede ver como *difusividad viscosa* o *difusividad de cantidad de movimiento* [12].

A números grandes de Reynolds, las fuerzas inerciales, que son proporcionales a la densidad del fluido y al cuadrado de la velocidad del fluido, son grandes en relación con las fuerzas viscosas y por lo tanto las fuerzas viscosas no pueden evitar las aleatorias y rápidas fluctuaciones del fluido. Sin embargo, a número de Reynolds *pequeños* o *moderados*, las fuerzas viscosas son lo suficientemente grandes como para suprimir dichas fluctuaciones y mantener al fluido “en línea”. Por lo tanto el flujo es *turbulento* en el primer caso y *laminar* en el segundo.

El número de Reynolds en donde el flujo se vuelve turbulento se llama **número de Reynolds crítico**,  $Re_{cr}$ . El valor del número de Reynolds crítico es diferente para geometrías y condiciones de flujo distintas. Para flujo interno en una tubería circular, el valor generalmente aceptado el número de Reynolds crítico es  $Re_{cr} = 2300$ .

Para flujo a través de tuberías no-circulares, el número de Reynolds se basa en el **diámetro hidráulico**  $D_h$  que se define en la Fig.2.11. [12]

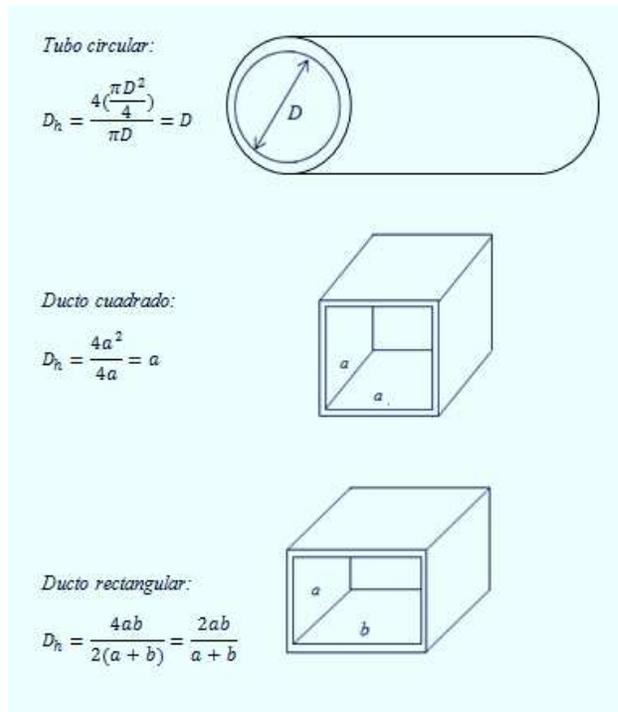


Fig. 2.11 El diámetro hidráulico  $D_h = 4A_c/p$  se define de tal modo que se reduce a diámetro común para tubos circulares [12].

*Diámetro hidráulico:*

$$D_h = \frac{4A_c}{p} \quad (2 - 13)$$

Donde  $A_c$  es el área de sección transversal de la tubería y  $p$  es su perímetro húmedo. El diámetro hidráulico se define de modo que se reduce a diámetro común  $D$  para tuberías circulares:

*Tubo circular:*

$$D_h = \frac{4(\frac{\pi D^2}{4})}{\pi D} = D \quad (2 - 14)$$

Es deseable tener valores precisos de número de Reynolds para flujos laminares, transicional y turbulento, pero éste no es el caso en la práctica. Es evidente que la transición de flujo laminar a turbulento también depende del grado de perturbación del flujo por la *rugosidad de la superficie*, las *vibraciones de la tubería* y las *fluctuaciones en el flujo*. En la mayoría de las condiciones prácticas, el flujo en una tubería circular es laminar para  $Re \lesssim 2300$ , turbulento para  $Re \gtrsim 4000$ , y transicional entre ellos. Es decir [12]

$Re \lesssim 2300$	Flujo Laminar
$2300 \lesssim Re \gtrsim 4000$	Flujo Transicional
$Re \gtrsim 4000$	Flujo Turbulento

### 2.2.5 Ley de Hagen-Poiseuille

La ley de Poiseuille, también llamada de Hagen- Poiseuille, es una ley física formulada en el año 1849 concerniente al volumen de flujos estacionarios laminares o líquidos viscosos uniformes e incompresibles que pasa a través de un tubo cilíndrico.

El fluido es impulsado a través de un ducto largo, recto y rígido imponiendo una diferencia de presión de ambos extremos del medio. A su vez, esta ley describe la relación cuantitativa entre la geometría del ducto, la tasa de flujo, las propiedades físicas del fluido que atraviesa el ducto y la presión diferencial a lo largo del medio la cual provoca el movimiento del fluido. La ecuación que define esta ley es:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{|P_1 - P_2|}{L} \quad (2 - 15)$$

Dónde:

$Q$ , es el flujo expresado en  $m^3/s$

$v$ , es el volumen de un líquido transferido en tiempo  $t$  expresado en  $m^3$

$v$ , es la mediana de la velocidad expresada en  $m/s$

$x$ , es el vector de dirección del flujo expresado en  $m$

$R$ , es el radio interno del tubo dado en  $m$

$\Delta P$ , la diferencia de presión entre las dos terminales expresadas en  $pa$

$\mu$ , es la viscosidad dinámica del fluido escrito en  $\left(\frac{kg}{m \cdot s}\right) \times 10^{-5}$

$L$ , la longitud del tubo escrita en metros.

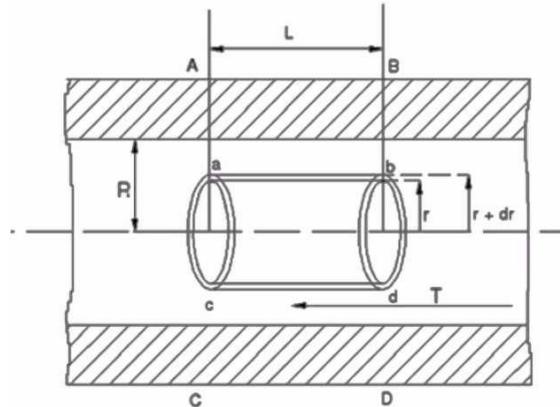


Fig. 2.12. Representación de la Ley de Hagen-Poiseuille

## 2.3 Fluidos Computacionales

La simulación de fluidos computacionales es una parte de la mecánica que se basa en el análisis numérico y una serie de estructuras de datos para analizar y resolver modelos que tengan que ver con modelos hidrodinámicos. Estos programas utilizan métodos de aproximaciones numéricas, como lo son el método de elementos finitos, diferencias finitas y volúmenes finitos.

### 2.3.1 Método del elemento finito

El método de los elementos finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy complejas utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

El MEF fue al principio desarrollado en 1943 por Richard Courant, quien utilizó el método de Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo para obtener soluciones aproximadas a un sistema de vibración. Poco después, un documento publicado en 1956 por M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp estableció una definición más amplia del análisis numérico [18].

El MEF permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) —sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en forma débil o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema— dividiéndolo en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados «elementos finitos».

El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados «nodos». Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama «malla».

Los cálculos se realizan sobre una malla de puntos (llamados nodos), que sirven a su vez de base para discretización del dominio en elementos finitos. La generación de la malla se realiza usualmente con programas especiales llamados generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad.

El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos [18].

### 2.3.2 Método del volumen finito

El Método del Volumen Finito (FVM) es una técnica numérica que transforma las ecuaciones diferenciales parciales que representan leyes de conservación sobre volúmenes diferenciales en ecuaciones algebraicas discretas sobre volúmenes finitos (o elementos o células). De manera similar al método de diferencias finitas o de elementos finitos, el primer paso en el proceso de solución es la discretización del dominio geométrico, que en el FVM se discretiza en elementos no superpuestos o volúmenes finitos.

Las ecuaciones diferenciales parciales son entonces discretizadas / transformadas en ecuaciones algebraicas integrándolas sobre cada elemento discreto. El sistema de ecuaciones algebraicas se resuelve para calcular los valores de la variable dependiente para cada uno de los elementos.

En el método del volumen finito, algunos de los términos de la ecuación de conservación son convertidos en flujos de cara y evaluados en las caras de volumen finito. Debido a que el flujo entra en un volumen dado es idéntico al que sale del volumen adyacente, el FVM es estrictamente conservador. Esta propiedad inherente a la conservación de la FVM hace este método el preferido en CFD. Otro atributo importante de la FVM es que puede ser formulado en el espacio físico en mallas poligonales no estructuradas.

Finalmente en el FVM es muy fácil de implementar una variedad de condiciones de contorno de una manera no invasiva, ya que las variables desconocidas se evalúan en los centroides de elementos de volumen, no en sus caras límite.

Estas características han hecho que el método del volumen finito sea una simulación numérica de una variedad de aplicaciones que implican flujo de fluido y calor y la transferencia de masa y la evolución del método se han vinculado estrechamente con avances en CFD. El FVM en un principio estuvo limitado a resolver problemas muy simples de física con mallas estructuradas, actualmente es capaz de resolver aplicaciones muy complejas [5].

### 2.3.3 Generación de Malla

El mallado es el primer paso (quizás el más importante) en una solución de CFD, es el que define las celdas en las que se calculan las variables de flujo (velocidad, presión, entre otras) en todo el dominio computacional. Los paquetes de CFD vienen con sus propios generadores de malla, pero también existen programas que generan mallas independientes.

Los programas CFD pueden correr mallas estructuradas o no estructuradas. Una malla estructurada es aquella entre cuyos elementos topológicos debidamente numerados se pueden establecer una aplicación

$$f: N \rightarrow N \quad (2 - 16)$$

consta de celdas planas de cuatro lados (2D) o celdas volumétricas con seis caras (3D). Aunque la forma rectangular de las celdas podría estar distorsionada, cada celda se numera de acuerdo con los índices  $(i,j,k)$  que no necesariamente corresponden a las coordenadas  $x, y, z$  (Fig. 2.13. a) [18].

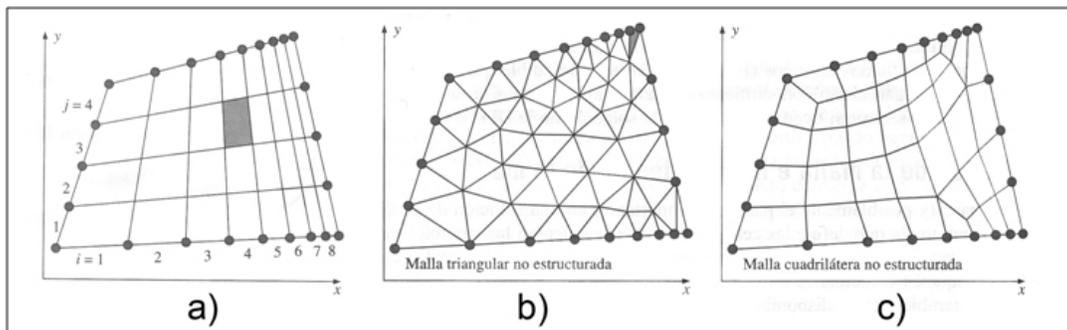


Fig. 2.13. Estructura de 2D de mallado: a) Malla cuadrilátera estructurada; b) Malla triangular no estructurada; c) Malla cuadrilátera no estructurada [18].

Una malla no estructurada por el contrario, consta de celdas de varias formas donde se emplean triángulos o cuadriláteros y tetraedros (Fig. 2.12. b). Es importante mencionar que una malla no estructurada de alta calidad es mejor que una malla estructurada de mala calidad. Una malla de alta calidad es imprescindible para una solución de la DFC de buena precisión y una de mala calidad puede dar lugar, inclusive, a una solución incorrecta [18].

### 2.3.3.1 Tipos de Malla

Una malla es la representación discretizada del dominio computacional, que los solucionadores físicos utilizan para proporcionar una solución numérica. Si bien es sabido, existen mallas estructuradas y no estructuradas.

\* Malla no estructurada:

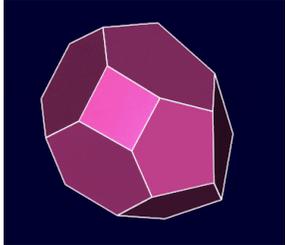
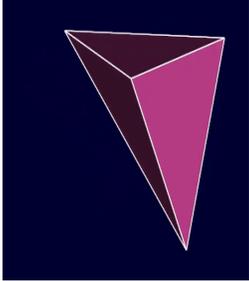
- Mallado basado en partes: el mallado basado en partes separa el mallado de la física y proporciona una tubería de mallado flexible y repetible. Esta estrategia proporciona varias ventajas sobre el mallado basado en regiones.
- Mallado basado en la región: el mallado basado en regiones mapea la superficie y el volumen a nivel de región. Utilice solo el mallado basado en regiones si tiene la intención de utilizar un mallador que no está disponible en el mallado basado en partes, consulte la Tabla de mallados soportados.

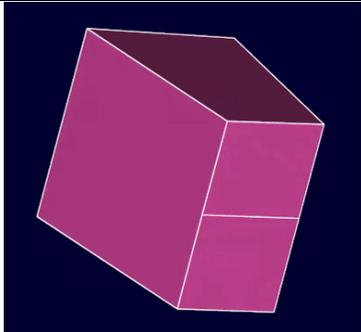
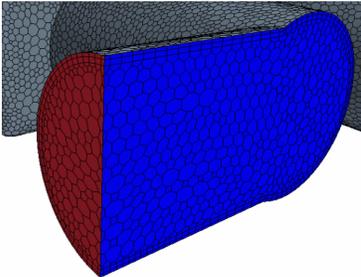
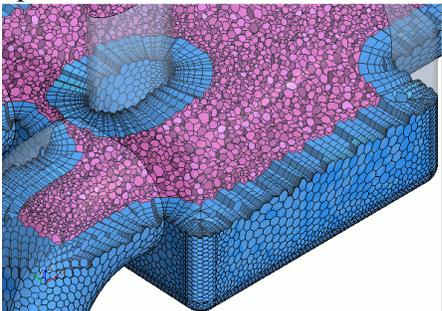
\* Mallado estructurado:

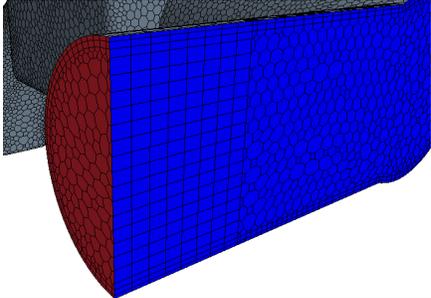
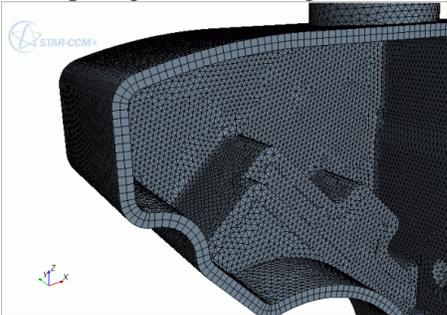
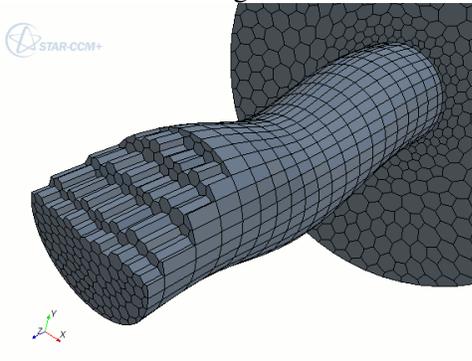
- Mallado directo: el mallado dirigido genera mallas estructuradas de alta calidad en geometría CAD. Esta estrategia opera barriendo una malla de superficie a lo largo de una superficie de guía comenzando desde la superficie de una geometría CAD o una malla de parche 2D a través del volumen de una pieza.

El programa CFD STAR-CCM + admite métodos de volumen finito y solución de elementos finitos. El enfoque de elemento finito impone ciertos requisitos en la malla, por ejemplo, las mallas poliédricas no son compatibles. Para obtener más información sobre los requisitos de mallado para aplicaciones de elementos finitos, consulte las siguientes secciones (Tabla.2.2)

Tabla 2.2 Tipos de mallas del programa CFD Star CCM+.

Malla	Descripción	Basado en partes	Basado en regiones
Surface Wrapper	Envuelve la superficie inicial para proporcionar una malla de superficie cerrada y múltiple de una geometría compleja.	✓	✓
Surface Remesher	Repea la superficie inicial para proporcionar una malla discretizada de calidad que es adecuada para CFD.	✓	✓
Automatic Surface Repair	Proporciona un procedimiento automático para corregir una gama de problemas geométricos que pueden existir en la superficie de malla una vez que se completa el proceso de mallado de superficie.	✓	✓
Polyhedral Mesher	<p>Genera una malla de volumen compuesta por células con forma poliédrica.</p>  <p>Las mallas poliédricas son adecuadas para:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>*Transferencia de calor</li> <li>* Flujo de remolino</li> <li>* Flujo complejo</li> </ul>	✓	✓
Tetrahedral Mesher	<p>Genera una malla de volumen que está compuesta de células con forma tetraédrica.</p> 	✓	✓
Trimmed Mesher	Genera una malla de volumen cortando una malla de plantilla hexaédrica con la superficie de geometría.	✓	✓

	 <p>Las mallas recortadas son adecuadas para:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Refrigeración electrónica</li> <li>* Flujo externo</li> </ul>		
<p>Prism Layer Mesher</p>	<p>Agrega capas de celdas prismáticas junto a los límites de la pared.</p> <p>Las capas prismáticas capturan gradientes viscosos y térmicos en la pared.</p> 	<p>✓</p>	<p>✓</p>
<p>Advancing Layer Mesher</p>	<p>Crea una malla de volumen que se compone de capas de células prismáticas junto a los límites de la pared y una malla poliédrica en otro lugar. El mesher crea una malla de superficie en la pared y la proyecta para crear las capas de celdas prismáticas.</p> 	<p>✓</p>	<p>✓</p>

<p>Extruder Mesher</p>	<p>Genera una región de malla extruida desde un límite que se ha mallado con uno de los elementos de malla del volumen del núcleo.</p> 	<p>✓</p>	<p>✓</p>
<p>Thin Mesher</p>	<p>Genera una malla de volumen en capas prismática para geometrías delgadas.</p> 	<p>✓</p>	<p>✓</p>
<p>Generalized Cylinder Mesher</p>	<p>Genera una malla de volumen apropiada para regiones cilíndricas alargadas.</p> 	<p>✓</p>	

### 2.3.4 Ecuaciones de Movimiento

Para un flujo laminar estacionario de un fluido viscoso, newtoniano, incompresible y sin efectos de superficie libre, las ecuaciones de movimiento son la *ecuación de continuidad*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2 - 17)$$

y la *ecuación de Navier-Stokes*:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{V} p' + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2 - 18)$$

En realidad la ecuación 2-16 es una ecuación de conservación de masa, mientras que la ecuación 2-17 es una ecuación de transporte que representa el transporte de cantidad de movimiento lineal en el dominio computacional.

### 2.3.4.1 Ecuación de Continuidad

Se presenta la siguiente expresión general para la conservación de masa que se aplica a un volumen de control:

*Conservación de masa para un volumen de control:*

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2 - 19)$$

La ecuación anterior es válida para volúmenes de control fijo y en movimiento. En el caso de que haya entradas y salidas definidas adecuadamente la ecuación 2-19 se puede presentar de la siguiente forma:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_{ent} \dot{m} - \sum_{sal} \dot{m} \quad (2 - 20)$$

Esta ecuación nos explica como la razón neta de cambio de masa dentro de un volumen de control es igual a la razón a la que fluye la masa hacia el volumen de control menos la razón a la que fluye la masa afuera del volumen de control, despreciando su tamaño. Para poder desarrollar una ecuación diferencial para la conservación de masa, se plantea un volumen de control (Fig.2.14.) reducido a un tamaño infinitesimal, con dimensiones  $dx, dy$  y  $dz$  en el volumen de control se encoge a un punto fijo.

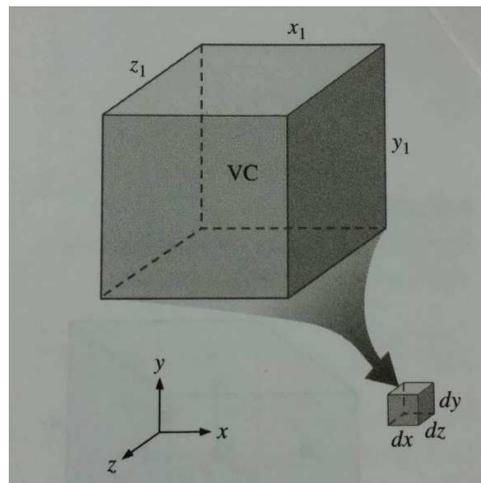


Fig. 2.14. Volumen de control reducido a un tamaño infinitesimal [18].

Para lograr deducir de manera diferencial la ecuación de conservación de masa se aplica el teorema de divergencia, también conocido como teorema de Gauss. Este teorema permite transformar una integral de volumen de la divergencia de un vector en una integral de área sobre la superficie de volumen.

*Teorema de Divergencia:*

$$\int_V \vec{v} \cdot \vec{G} dV + \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n} dA \quad (2 - 21)$$

Esta ecuación se aplica para cualquier volumen de control. El círculo en la integral significa que la integral debe evaluarse sobre toda el área de la superficie cerrada A que rodea el volumen V. Sustituyendo la ecuación 2-21 en la ecuación 2-19 hace que la integral de superficie se convierta en una de volumen:

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (2 - 22)$$

Ahora bien, combinando en una las dos integrales de volumen nos quedaría:

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (2 - 23)$$

Por lo tanto, se tiene una ecuación diferencial general para la conservación de masa, la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2 - 24)$$

#### 2.3.4.2 Ecuación de Navier-Stokes

Refiriéndose estrictamente a los fluidos newtonianos, se sabe que el tensor de esfuerzo es linealmente proporcional al tensor de razón de deformación. El resultado en general para un flujo compresible resulta complicado, es por ello que se considera un fluido incompresible (es decir,  $\rho$  es constante). Debido a esto y otras propiedades, un tensor de esfuerzo viscoso se reduce a:

*Tensor de esfuerzo viscoso para un fluido newtoniano incompresible con propiedades constantes:*

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} \quad (2 - 25)$$

donde es  $\epsilon_{ij}$  el tensor de razón de deformación.

Esta ecuación (2-25) muestra que el esfuerzo es linealmente proporcional a la deformación. En coordenadas cartesianas se tienen las 9 componentes del tensor de esfuerzo viscoso, 6 de las cuales son independientes debido a la simetría:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

Sustituyendo la ecuación del tensor de deformación (2-26) en las 3 componentes cartesianas de la ecuación de Cauchy. Tomando en cuenta la componente x:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad (2-29)$$

queda de la siguiente manera:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2-28)$$

Puesto que la presión consiste solo de un esfuerzo normal, únicamente se da un término a la ecuación (2-28). Pero, dado que el tensor de esfuerzo viscoso se compone tanto de esfuerzos normal como de corte, aporta 3 términos. A medida que las componentes de velocidad sean funciones suaves de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , el orden de diferenciación es irrelevante.

También se reconocen los últimos 3 términos como el laplaciano de la componente de velocidad  $u$  en coordenadas cartesianas. Por lo tanto, la componente  $x$  de la ecuación de cantidad de movimiento se escribe como:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u \quad (2-29a)$$

Las componentes  $y$  y  $z$  de la ecuación de cantidad de movimiento se escriben de manera similar, como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v \quad (2-29b)$$

y

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 w \quad (2-29c)$$

Para concluir, se fusionan las tres componentes en una sola ecuación vectorial; de allí nace la ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible con viscosidad constante:

*Ecuación de Navier-Stokes*

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2 - 30)$$

La ecuación de Navier-Stokes es la base de la mecánica de fluidos.

# Capítulo III

## Metodología

*En el Capítulo III se presenta la metodología empleada, se muestra paso a paso el proceso con el cual se llevaron a cabo las múltiples simulaciones para obtener los datos con los cuales se crearon las gráficas  $\Delta P/Q$ . También se describe la creación de los modelos en el programa CAD CREO Parametric 3.0, los ensambles en SolidWorks. Posteriormente el proceso de mallado, los problemas que se tuvieron para lograr la malla adecuada para llegar a la solución. Las simulaciones en STAR CCM+ y por último los cálculos de número de Reynolds, porosidad y permeabilidad.*

## METODOLOGÍA

### 3.1 Diagrama de Flujo

Con la ayuda de la mecánica del medio continuo y la termodinámica, se construyó un modelo conceptual para después pasar a un modelo matemático, en el cual se establecieron las relaciones constitutivas, es decir, las condiciones de frontera.

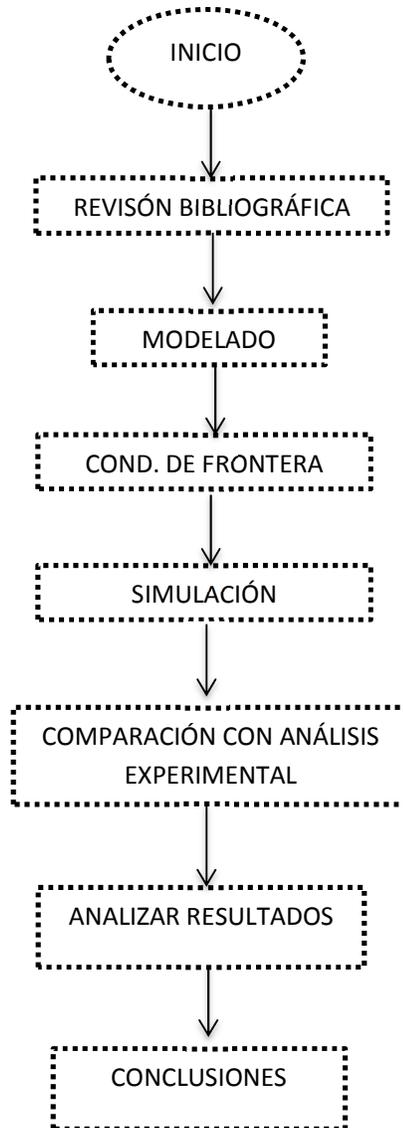


Fig. 3.1 Diagrama de flujo de la metodología.

### 3.2 Desarrollo del proyecto

A continuación se muestran los pasos para desarrollar el proyecto de investigación:

1. Revisión bibliográfica acerca de los temas a tratar.
2. Realizar el modelo matemático
3. Modelar el medio fractal
4. Crea la el mallado del modelado y evaluarlo
5. Establecer las condiciones de frontera requeridas
6. Llevar a cabo la simulación
7. Análisis de los resultados obtenidos a partir de la simulación.
8. Comparativa entre los resultados obtenidos con el estudio experimental vs. la simulación realizada

La presente investigación tiene como objetivo analizar el comportamiento hidrodinámico de un fluido viscoso, aceite Turbinas 15 (Anexo I) a través de un medio poroso por medio de la dinámica de fluidos computacionales.

Se utilizó un software de simulación de fluidos computacionales para obtener los parámetros hidrodinámicos del fluido, almacenando los valores en una base de datos para así formar las gráficas de caída de presión vs. Flujo de aceite, evaluar el comportamiento del fluido y comparar los resultados con las gráficas experimentales.

### 3.3 Modelado

Se crearon los modelos de las esponjas de Menger los cuales representaron el medio poroso, los cuales constaban de redes pre-fractales de la primera hasta la cuarta iteración. Posteriormente se hicieron los ensambles necesarios de hasta 6 cubos cada uno, lo cual dio un total de 24 ensambles.

### 3.4 Mallado

Se utilizó una malla estructurada, es decir, una malla hexaédrica con una densidad de 0.3 mm la cual fue creada en el programa de fluidos computacionales Star CCM+. La cantidad de nodos y caras se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Cantidad de elementos del modelo de la cuarta parte de la 4ta. Iteración.

<b>Elemento</b>	<b>Cantidad</b>
<b>Verts</b>	9,871,537
<b>Cells</b>	7,018,241
<b>Faces</b>	19,733,028

Se realizaron varias pruebas de mallado debido a la complejidad del modelo, las primeras mallas presentaban un modelo no estructurado y por ende un mayor número de elementos con oblicuidad. A su vez, la malla era tan pesada para el equipo de cómputo que no se podía mostrar visualmente por la cantidad de elementos. Se decidió partir el modelo a la cuarta parte para reducir el número de elemento y hacer el cálculo más propicio para la capacidad del equipo. Posteriormente se logró crear una malla estructurada con elementos hexaédricos.

También se realizó un análisis de independencia de malla donde se crearon mallas a distintas densidades (véase Fig.3.2.) en la cual se puede observar cómo se va haciendo más fina la red de mallado.

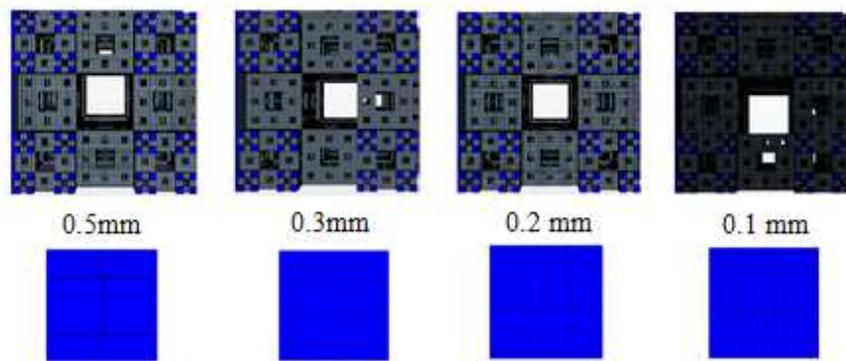


Fig. 3.2 Cuarta parte de la esponja de Menger con diferentes densidades de malla.

### 3.5 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera apropiadas fueron necesarias para obtener una solución CFD exacta, estas se aplicaron con cuidado en todas las fronteras del dominio computacional (Fig. 3.3.)

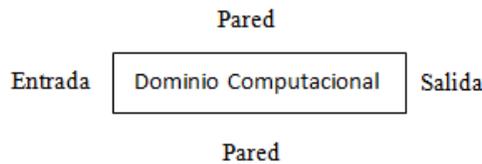


Fig. 3.3 Condiciones de frontera del dominio computacional.

Las condiciones de frontera impuestas por el modelo son:

- Perfil de velocidad uniforme en la entrada

$$u = \mathbf{u}; \quad v = 0; \quad w = 0$$

- Condición de no deslizamiento en las paredes:

$$u = v = w = 0$$

- Condición de simetría:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{yx} = 0 \quad \phi = u, v, w, p$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{xz} = 0 \quad \phi = u, v, w, p$$

La condición de frontera que se pudiera considerar más simple es la de una superficie sólida (pared), debido a que el fluido no puede pasar por una superficie sólida, la componente normal de la velocidad relativa con respecto a la superficie sólida se iguala a cero a lo largo de aquella cara en la cual se establece la condición de frontera (condición de no deslizamiento).

Por otro lado, existen varias formas de establecer las condiciones de frontera en aquellas regiones a través de las cuales entra el fluido al dominio computacional (flujo de entrada) o sale del dominio (flujo de salida). Se clasifican en general como condiciones que especifican la velocidad (entrada o salida de velocidad) o condiciones que especifican la presión (entrada o salida de presión) véase Fig 3.4.



Fig. 3.4 En una entrada o salida de presión se especifica la presión sobre la cara pero no puede especificarse la velocidad a través de la cara. Cuando la solución DFC converge la velocidad se ajusta a sí misma de tal manera que se cumplan las condiciones de frontera de presión prescritas [18].

Otra condición de frontera es la de simetría, se podría decir que fue una de las más importantes de este proyecto ya que fue utilizada en la cuarta iteración del pre-fractal para así poder evaluar el fenómeno debido a que computacionalmente el modelo completo era complicado de procesar. Esta condición se impone sobre una cara de tal modo que el flujo que cruza la cara es una imagen especular del flujo calculado (Fig.3.5.). Se esbozan los dominios imaginarios (líneas interrumpidas) por arriba y por abajo del dominio computacional.

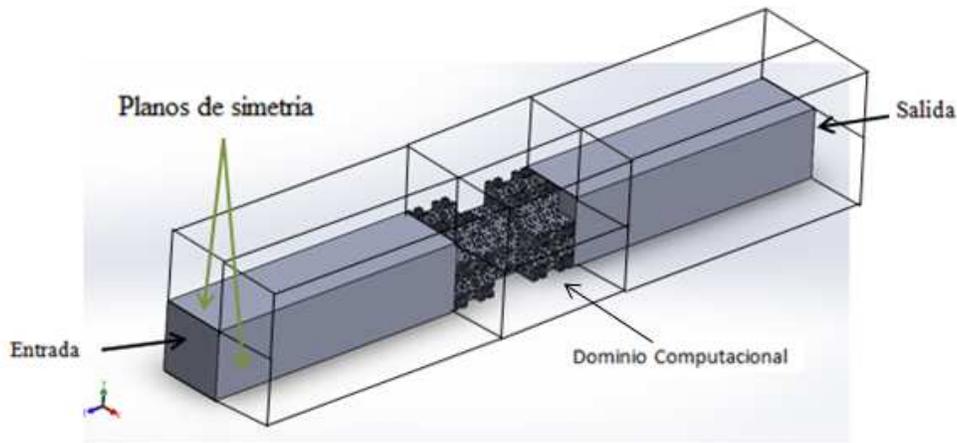


Fig. 3.5. Condición de frontera de simetría [18].

Un límite de plano de simetría representa un plano imaginario de simetría en la simulación. La solución que se obtiene con un límite de plano de simetría es idéntica a la solución que se obtendría al reflejar la malla alrededor del plano de simetría (en la mitad del dominio resultante).

#### Velocidad

El esfuerzo cortante en un límite de simetría es cero. El valor facial de la velocidad se calcula extrapolando la componente paralela de la velocidad en la celda adyacente usando gradientes de reconstrucción.

#### Presión

La presión de la superficie límite se extrapola de la celda adyacente usando gradientes de reconstrucción.

#### Temperatura

El flujo de calor en una cara de simetría es cero. El valor facial de la temperatura se extrapola de la celda adyacente usando gradientes de reconstrucción.

### 3.6 Ecuaciones Gobernantes

La descripción matemática de un fluido requiere:

$D$ , que es un dominio de  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^2$ )

$x \in D$ , es una partícula de un fluido

$\rho(x, t)$ , es la densidad del fluido en el punto  $x$  en el instante  $t$

$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ , nos da la velocidad que tendría una partícula en cada punto  $x$  del espacio y cada tiempo  $t$ ,

$p = p(x, t)$ , es la presión en el seno del fluido.

Para la velocidad de la partícula del fluido  $u(x(a, t), t)$ ,

Aceleración:

$$\frac{d}{dt}u(x(a, t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x u \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u$$

Por lo tanto,

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u \right) = F_{internas} + F_{externas}$$

Una vez dadas las ecuaciones de conservación de masa y la segunda ley de Newton se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes, que son las que gobiernan nuestro programa:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f^i_\varepsilon$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$\rho_t + u \cdot \nabla \rho = 0$$

Donde,

$\nu = \text{cte} \geq 0$  viscosidad

$f_\varepsilon = (f^1_\varepsilon, f^2_\varepsilon, f^3_\varepsilon)$  fuerza externa.

Para un fluido homogéneo  $\rho = 1$ , siendo viscoso y sin fuerzas externas se tiene:

Navier-Stokes  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = -\nabla_x p + \nu \Delta u$

Que expresada en coordenadas quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{1 \leq j \leq n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$$

Donde,

$\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemática,

$f = f_i(x, t)$  representa un campo de fuerzas externo.

### 3.7 Cálculo de parámetros

#### Número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho \cdot D_{eq} \cdot v}{\mu}$$

Partiendo de que  $D_{eq} = \frac{4A}{P}$ , sabiendo que  $A = (81mm)^2$  y que  $P = 81mm(4)$

Por lo tanto,

$$D_{eq} = \frac{4(6561mm^2)}{(324mm)} = 81mm = 0.081m$$

Sustituyendo el valor del  $D_{eq}$ , se tiene que:

$$Re = \frac{\left(877 \frac{kg}{m^3}\right) \cdot (0.081m) \cdot \left(0.02758726 \frac{m}{s}\right)}{(0.212 Pa \cdot s)} \frac{1 Pa}{1 \frac{kg}{ms^2}}$$

$$Re = 9.2415$$

Dado este resultado, se demuestra que el número de Reynolds calculado es el característico de un fluido de régimen laminar.

$$Re \lesssim 2300 \quad \text{Flujo Laminar}$$

### Permeabilidad

Con el fin de obtener las gráficas de permeabilidad del medio poroso, se hizo el cálculo de la permeabilidad con respecto de la longitud de muestra de la inversa de la esponja de Menger con la fórmula de coeficiente de permeabilidad, derivada de la Ley de Darcy [1].

$$K = \frac{Q \cdot \mu}{A \left(\frac{\Delta P}{L}\right)}$$

Este procedimiento se repitió para las 4 iteraciones de cada pre-fractal, tomando la velocidad más alta de cada simulación.

### Porosidad

Para el cálculo de la porosidad se tomó el volumen de la muestra de la cuarta parte de la iteración en la sección de propiedades en SolidWorks (véase Fig.3.6.) el cual muestra un volumen de  $40,000 \text{ mm}^3$  para la cuarta parte, para toda la esponja de Menger el volumen total sería de  $120,000 \text{ mm}^3$ .

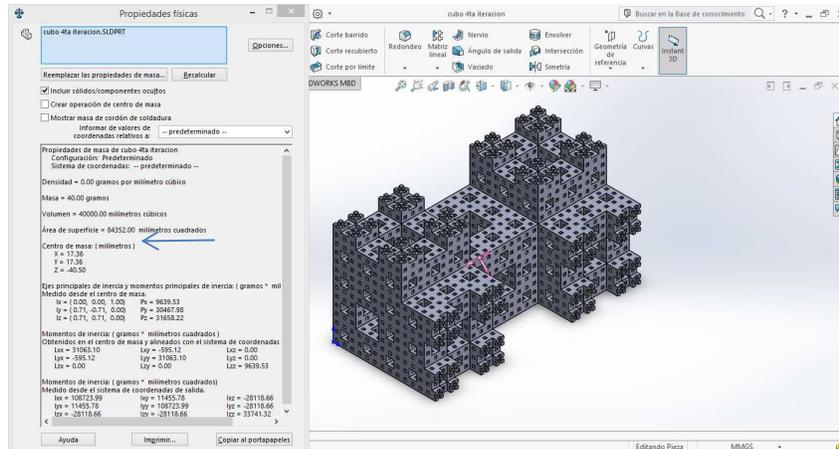


Fig. 3.6. Volúmen de la cuarta parte de la esponja de Menger (4ta. Iteración).

Partiendo de que el volúmen total de un cubo con  $L = 81 \text{ mm}$  es  $531,441 \text{ mm}^3$  y sabiendo que el proyecto fue realizado con base en la esponja de Menger, se puede calcular la porosidad con la fórmula:

$$\phi = \frac{\text{Volumen de espacios para almacenar fluidos}}{\text{Volumen total}} = \frac{120,000 \text{ mm}^3}{531,441 \text{ mm}^3 - 120,000 \text{ mm}^3}$$

$$\phi = 0.291653 \approx 0.3$$

Con esto se comprueba que la porosidad para cualquier longitud de la muestra es  $\phi \approx 0.3$

# Capítulo IV

## Simulaciones

*En el Capítulo IV se presenta paso a paso el proceso con el cual se llevaron a cabo las múltiples simulaciones para obtener los datos con los cuales se crearon las gráficas  $\Delta P/Q$ . También se describe la creación de los modelos en el programa CAD CREO Parametric 3.0, los ensambles en SolidWorks. Posteriormente el proceso de mallado, los problemas que se tuvieron para lograr la malla adecuada para llegar a la solución. Se establecen las propiedades del fluido en el programa CFD y se configuran las condiciones de frontera del modelo. Las simulaciones realizadas fueron ejecutadas en el programa STAR CCM+.*

## SIMULACIONES

A continuación se describen los pasos para desarrollar la solución del problema.

### 4.1. Construcción del Modelo

Como primer paso, se construyeron los modelos del medio poroso en CREO Parametric 3.0. El modelo a trabajar fue la esponja invertida de Menger, la cual por funcionalidad del programa CFD fue construida de manera normal (es decir, no invertida), representando así el fluido que atravesó el medio poroso. (Fig.4.1).

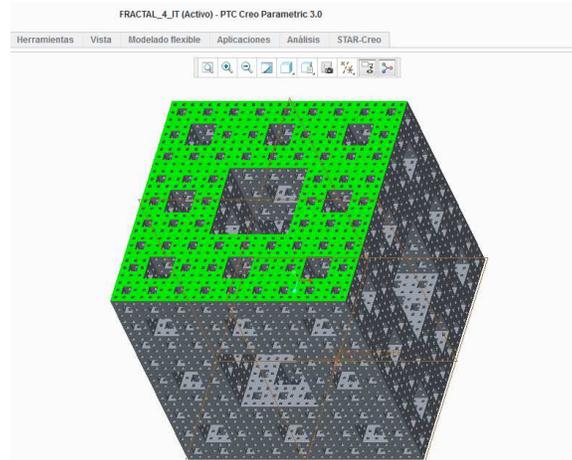


Fig. 4.1. Modelo CAD de la esponja de Menger con la 4ta. Iteración en CREO Parametric 3.0

Una vez construidos los modelos de las 4 iteraciones se realizaron los ensambles en SolidWorks (Fig.4.2).

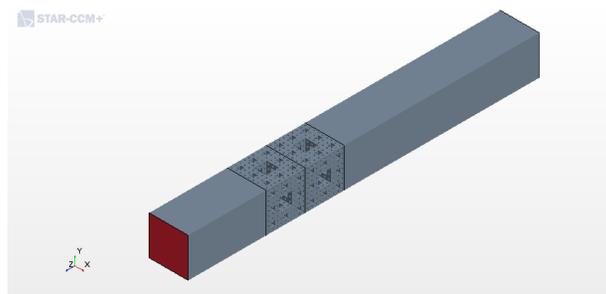


Fig. 4.2. Ensamble de dos pre-fractales de la 3ra. Iteración

Es importante destacar que los modelos utilizados fueron redes pre-fractales ya que solo se llegó a trabajar con modelos de hasta la cuarta iteración. Por lo tanto, se construyeron 6 ensambles por cada iteración, un total de 24 ensambles diferentes.

## 4.2. Configuración del modelo en el programa CFD

Para realizar los simulaciones del proyecto se utilizó Star CCM+, un programa de simulación de fluidos computacionales. Se configuraron las condiciones de fronteras establecidas en el trabajo experimental (Fig.4.3) [1], en el cual se especificaba el fluido a utilizar, aceite Turbinas 15 (Anexo I), el cual tiene una densidad  $\rho = 877 \text{ kg/m}^3$  y una viscosidad dinámica  $\mu = 0.212 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

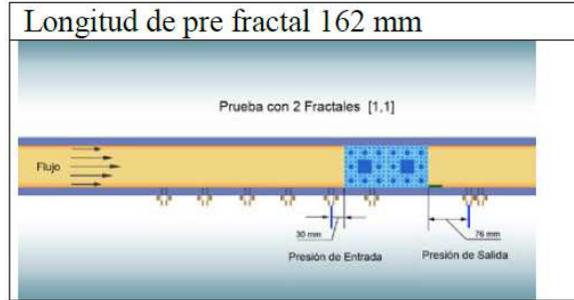


Fig. 4.3. Representación del trabajo experimental con 2 cubo de 4 iteraciones [1]

Dadas una vez las propiedades del fluido (Anexo I) y conociendo las velocidades de operación se establecieron las condiciones de frontera en el modelo del ensamble en el programa computacional, dándole el nombre a cada una de las paredes del medio a través del cual se hizo pasar el fluido (Fig.4.4).

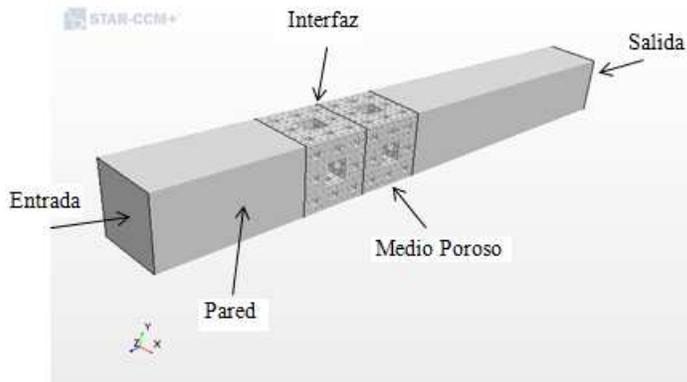


Fig. 4.4. Condiciones de frontera del modelo de 2 pre-fractales con 3 iteraciones.

## 4.3. Mallado del modelo

Una vez establecidas las condiciones de frontera del modelo el paso siguiente fue hacer el mallado. Se utilizó una malla estructurada con elementos hexaédricos (véase Fig.4.5.) que es la más adecuada al tipo de modelo y que permite obtener una buena calidad de malla (bajo

número de oblicuidad en los elementos) esto repercute en la mayor rapidez en la convergencia de la solución.

El tamaño de celdas fue de 0.3 mm en el elemento más pequeño en el caso de las primeras 3 iteraciones con el modelo completo, es importante mencionar que entre más fina sea la malla la solución converge más rápido. En este caso solo se llegó a mallar con esta densidad de malla debido a que computacionalmente el cálculo es muy pesado.

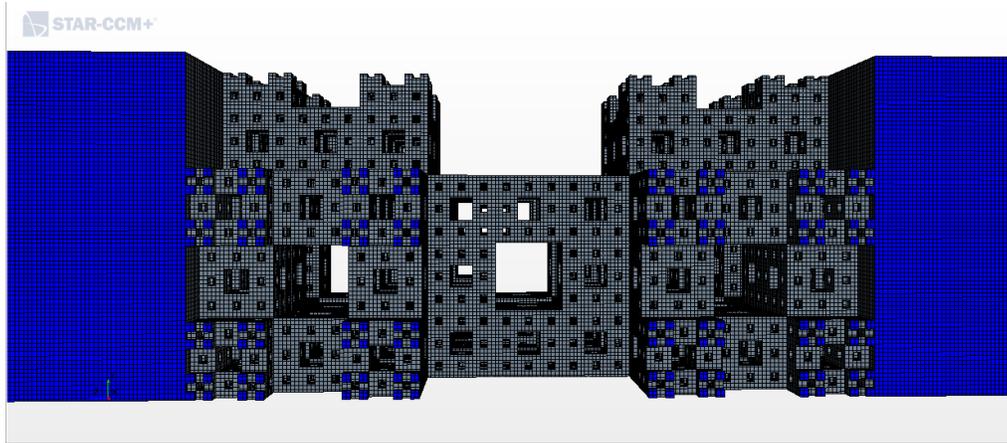


Fig. 4.5. Malla hexaédrica de 0.3 mm.

En el caso de la última iteración (cuarta) se tuvo que utilizar el método de simetría. La capacidad de memoria RAM del equipo de cómputo que se utilizó no fue suficiente para poder procesar el número de elementos con el modelo completo. El equipo utilizado contaba con 32 Gb de memoria RAM, pero aun así no fue suficiente. Por tal motivo se optó por éste método. Se partió el modelo a la cuarta parte (véase Fig. 4.6) para de esta manera analizar el fenómeno.

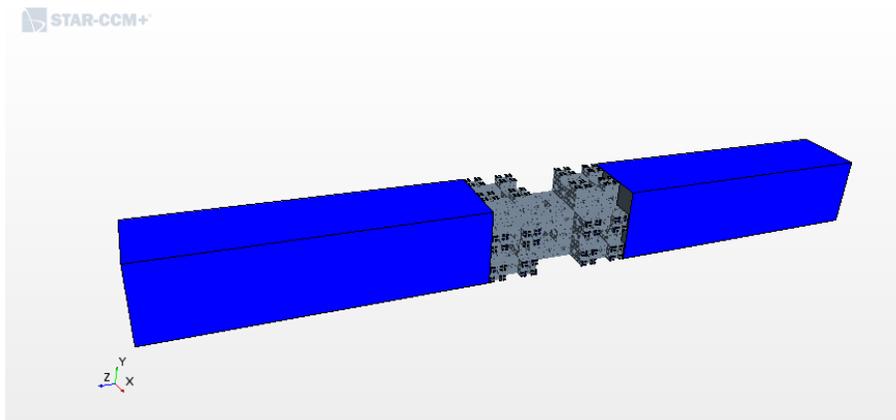


Fig. 4.6. Modelo a la cuarta parte de la 4ta. Iteración.

Con la cuarta parte del modelo fue posible hacer la malla aún más fina, primero se creó una malla de 0.5 mm como los modelos anteriores para evaluar el comportamiento del fluido y compararlo con los resultados experimentales pero las gráficas obtenidas no eran igual que las experimental (Anexo V). Posteriormente se malló el modelo con una malla de 0.3 mm y se pudo observar como la gráfica se fue acercando a la solución (Anexo V).

Se llevó a cabo un tercer intento de mallado con una densidad de malla de 0.2 mm, la cual aún soportaba el equipo de cómputo y la aproximación a la solución fue muy significativa, pero computacionalmente el cálculo se volvió muy pesado y muy lento. Fue por ello que se decidió trabajar con un tamaño de celda de 0.3mm.

#### 4.4. Simulación

Antes de iniciar con la simulación es preciso seleccionar los parámetros a considerar en la simulación. A continuación se describen los parámetros que se consideran en la simulación (Tabla 3.2): se presenta un fluido de régimen laminar, estacionario, se despreció la gravedad ya que es un sistema cerrado y solo se centra en la diferencia de presiones.

Tabla 3.2 Parámetros considerados en la simulación.

<b>Parámetros</b>	
Tiempo	Estacionario
Material	Líquido
Ecuación de estado	Densidad constante
Régimen de viscosidad	Laminar

Posteriormente se establecieron los monitores, los cuales nos grababan datos importantes del paso de fluido a través del medio poroso, como presión y flujo. El monitor más importante en nuestro trabajo fue la presión a la entrada del medio ya que con ella se crearon las gráficas de caída de presión vs. Flujo de aceite.

También es necesario crear planos de interés para poder analizar valores escalares de la simulación (véase Fig.4.7.), como fue el caso de la magnitud de velocidad. Ya reunidos éstos datos se inició con las simulaciones, y como se mencionó, se trabajó de 1 a 4 iteraciones en la esponja de Menger, de cada una de ellas se hicieron 6 ensambles respectivamente, lo cual nos dio un total de 24 ensambles.

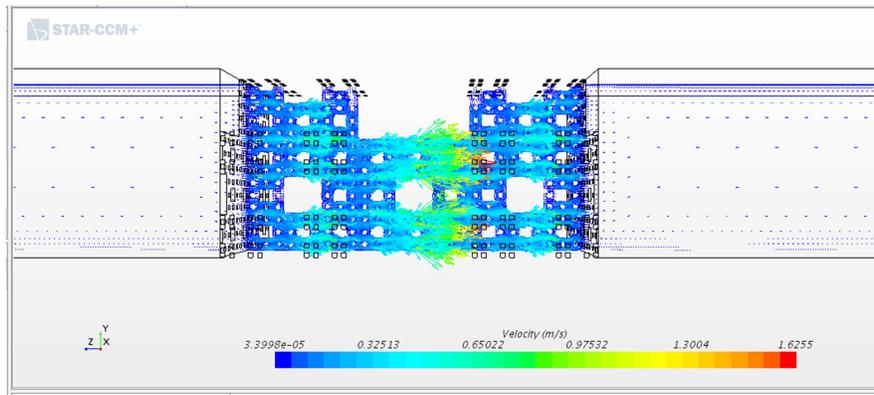


Fig. 4.7. Campo de velocidades del fluido a través del medio poroso.

Por cada ensamble se tomaron 10 puntos de los datos experimentales lo cual nos dio un total de 240 simulaciones, con las cuales se obtuvieron las gráficas necesarias. La solución de cada simulación tuvo un ciclo de 1000 iteraciones (véase Fig. 4.8.) para que la solución pudiera converger, es decir, llegar a la solución.

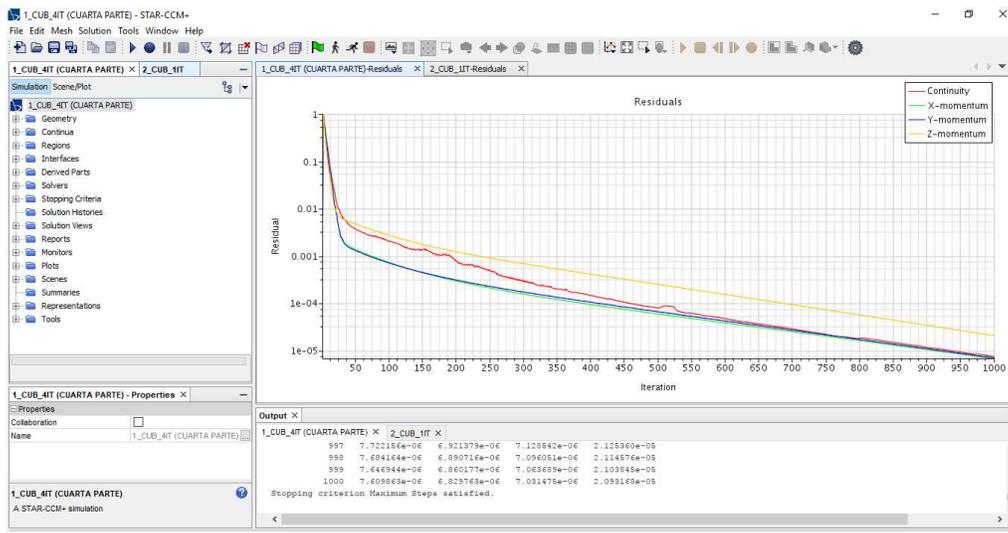


Fig. 4.8. Residuales de la simulación convergiendo a las 1000 iteraciones

# Capítulo V

## Análisis y Discusión de Resultados

*Se presentan los resultados obtenidos por las simulaciones en las diferentes iteraciones del medio poroso pre-fractal, la esponja de Menger a sus diferentes longitudes (de 1 cubo a 6 cubos, cada uno con  $L = 81$  mm). Se muestra la comparación de las gráficas  $\Delta P/Q$  de la simulación contra las obtenidas con el proyecto experimental y se analiza su comportamiento donde efectivamente las gráficas tienen un comportamiento lineal y a su vez se demuestra que la permeabilidad incrementa con el aumento de la longitud en la muestra del medio poroso.*

## ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La realización de este proyecto de investigación demuestra que los programas CFD son herramientas muy útiles para la simulación de flujo de fluidos a través de medios porosos, si bien se exhiben que este tipo de trabajos requieren de recursos computacionales con altas capacidades de memoria para su cálculo.

### **Mallado**

Llevar a cabo el mallado no fue fácil tratándose de una red porosa, la esponja de Menger. Aún así se logró crear el mallado de los modelos completos de la primera hasta la tercera iteración del pre-fractal, aun cuando el mallado llevó un tiempo considerable, ya que el número de elementos oscilaba hasta los 10,000,000 elementos.

Por otro lado, se presentaron problemas en el mallado, ya que mallar todo el modelo de la cuarta iteración no fue posible debido a la insuficiente memoria RAM del equipo de cómputo utilizado, pero con ello se comprobó que un software CFD es capaz de sintetizar el cálculo utilizando las condiciones de fronteras adecuadas, en este caso, la condición de frontera de simetría.

Con la condición de frontera de simetría fue posible simplificar el cálculo sin afectar los resultados obtenidos. Con este método se partió el modelo a la cuarta parte y con esto se logró realizar un mallado aun más fino que el que se hubiera podido lograr con el modelo completo. Esta condición figura como un límite de plano de simetría que representa un plano imaginario en la simulación. La solución que se obtuvo con el plano de simetría es idéntica a la solución que se obtendría al reflejar la malla alrededor del plano de simetría (en la mitad del dominio resultante).

Si bien, una malla aparentemente es un proceso sencillo ésta puede convertirse en todo un reto. El proceso de mallado mucho depende del número de elementos que el proceso conlleve, el tipo de geometría, pero sobre todo la capacidad del equipo con el que se trabaje. Con este proyecto se demostró que lograr mallar un medio poroso como la esponja de Menger requiere de altas capacidades computacionales.

A su vez se vio que una malla estructurada, es decir, con elementos hexaédricos brinda la posibilidad de tener el menor número de elementos con oblicuidad. Con una malla con estas características se acelera la convergencia. Es por ello la importancia del mallado ya que no se pueden llevar a cabo los cálculos de CFD hasta que no se cuente con una malla de alta calidad.

### **Simulaciones**

Se trabajó con un fluido en régimen laminar, el cual fue calculado con la fórmula del número de Reynolds dando un valor de  $Re = 9.243$  lo cual se comprueba que el aceite Turbinas 15 (Anexo I) es de régimen laminar.

Una vez concluidas todas las simulaciones numéricas se puede observar que las gráficas de la primera (Anexo II) y segunda iteración (Anexo III) están muy alejadas de la solución respecto a los datos experimentales. La tercera iteración muestra un pequeño acercamiento a los resultados esperados, como se puede observar en las gráficas (Anexo IV) pero no es suficiente.

Realmente, las primeras 3 iteraciones no muestran comportamientos hidrodinámicos de interés debido a que la red porosa no es lo suficientemente fina para ello. Por el contrario, en la modelo de la 4ta. Iteración se ve como el valor de la simulación es significativo, ya que se acerca mucho a los datos experimentales (Anexo V).

Las simulaciones demostraron que la velocidad de flujo del fluido viscoso es una función lineal del gradiente de presión  $\Delta P/L$  [1] en la esponja de Menger (Anexo II,II,IV,V).

### **Gráficas de flujo $Q$ vs. Caída de presión $\Delta P$**

Las variaciones existentes entre las gráficas experimentales vs. las de las simulaciones muestran que efectivamente, sólo a partir del modelo de la cuarta iteración se puede obtener información de interés (véase Fig.5.1.). Se podría decir que las 2 primeras iteraciones (Anexo II y III) el medio no ofrecen oposición al paso de fluido ya que el medio funge más como barrera que como medio poroso.

Por otro lado, las gráficas de flujo vs. caída de presión de la tercera iteración muestran que al aumentar la iteración en el medio poroso hace que la presión aumente, pero realmente el aumento no es lo suficientemente grande para mostrar comportamientos hidrodinámicos similares a los datos experimentales.

En la figura 5.1 se muestra un análisis del comportamiento de la gráfica  $Q$  vs.  $\Delta P$  variando la iteración de la primera hasta la cuarta en el pre-fractal, pero manteniendo una longitud constante de 6 pre-fractales. Por lo tanto, se puede ver gráficamente el porque experimentalmente no se trabajó con las primeras tres iteraciones.

Sin embargo, una vez aumentando la iteración del pre-fractal a 4 iteraciones se puede observar que los resultados obtenidos respecto a los datos experimentales son muy cercanos (Anexo V) y que conforme aumenta el número de pre-fractales en la simulación, es decir, la longitud de muestra los resultados se van acercando más a los datos que experimentalmente se obtuvieron.

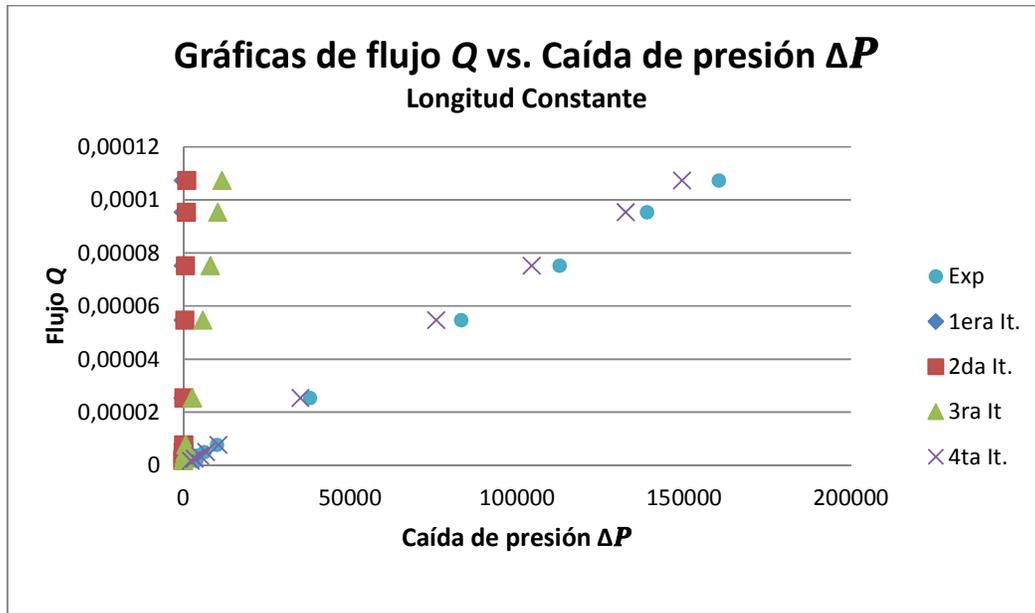


Fig. 5.1. Gráfica  $Q$  vs.  $\Delta P$  con longitud constante (6 pre-fractales) variando la iteración.

Con el fin de ver como se comportaba los resultados a diferentes longitudes se creó una gráfica donde se muestra la manera en que varía la gráfica  $Q$  vs.  $\Delta P$  en la cual se puede ver como va incrementando linealmente la gráfica conforme se aumenta el número de pre-fractales (Fig.5.2.) pero se mantiene la iteración ( para este caso, la cuarta iteración, que fue con la que se trabajó experimentalmente).

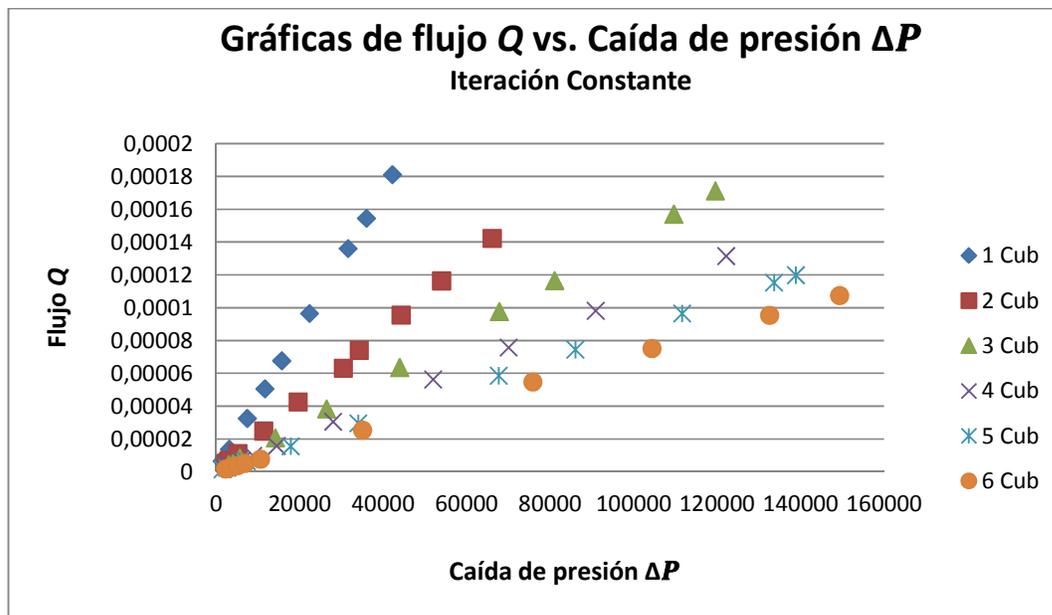


Fig. 5.2. Gráfica  $Q$  vs.  $\Delta P$  con iteración constante (4ta. Iteración) variando la longitud.

Posteriormente se realizaron las gráficas  $Q$  vs.  $\Delta P/L$  de la primera (Fig.5.3.), segunda (Fig.5.4.), tercera (Fig.5.5.) y cuarta (Fig.5.6.) iteración para ver el comportamiento de su pendiente y analizar si efectivamente la permeabilidad conforme el incremento de  $L$  tiende a cero, como lo plantea Darcy [20].

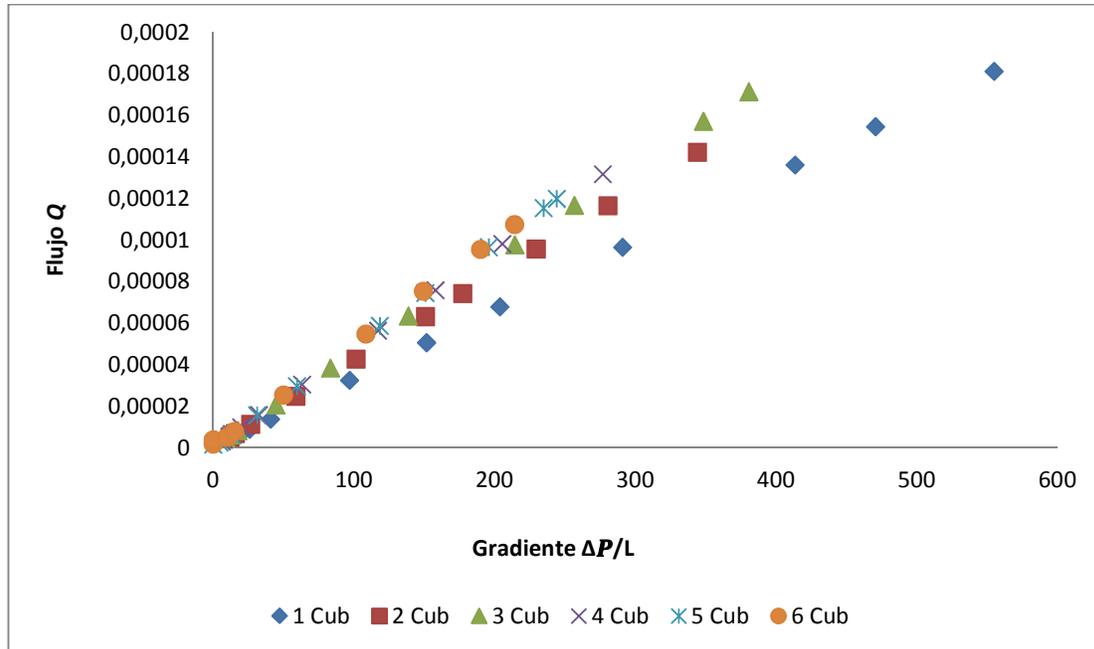


Fig. 5.3. Gráfica  $Q$  vs.  $\Delta P/L$  (Primera Iteración).

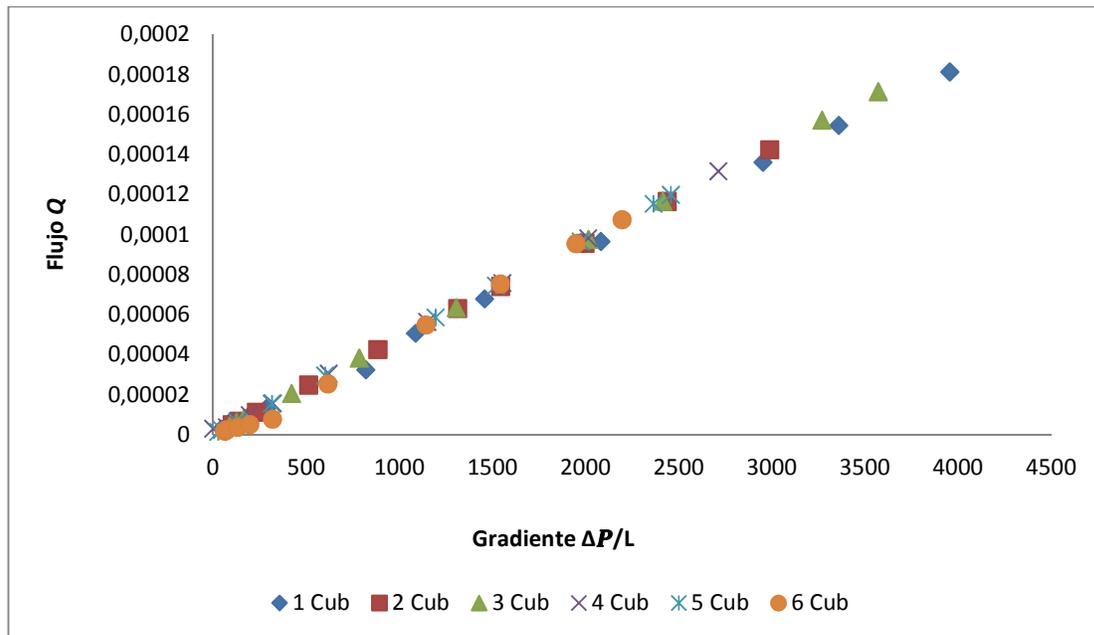


Fig. 5.4. Gráfica  $Q$  vs.  $\Delta P/L$  (Segunda Iteración).

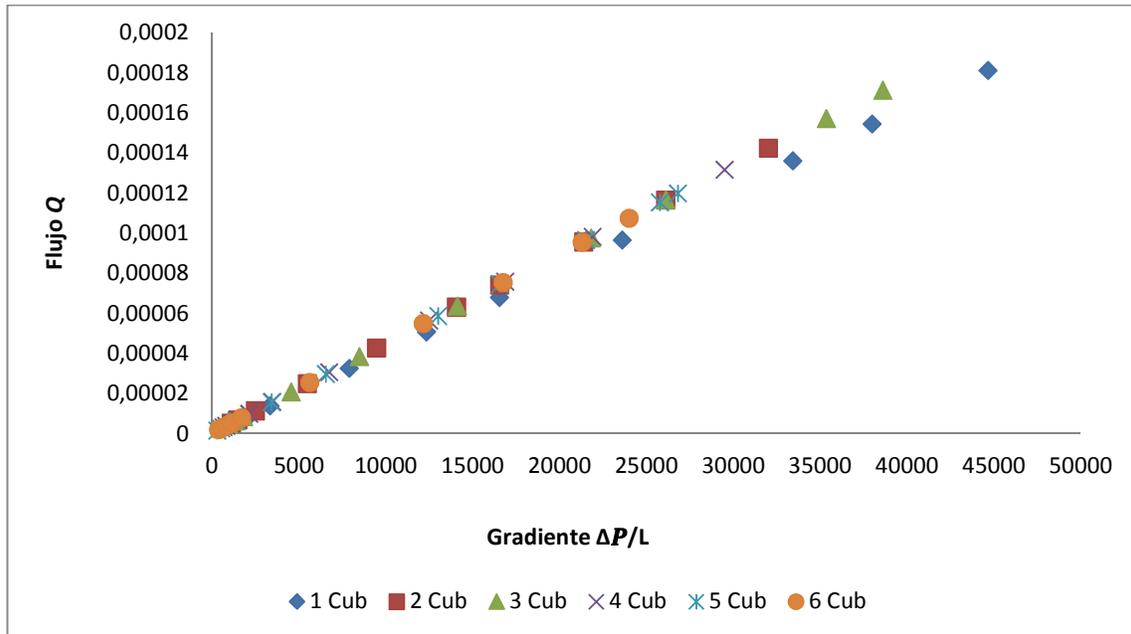


Fig. 5.5. Gráfica  $Q$  vs.  $\Delta P/L$  (Tercera Iteración).

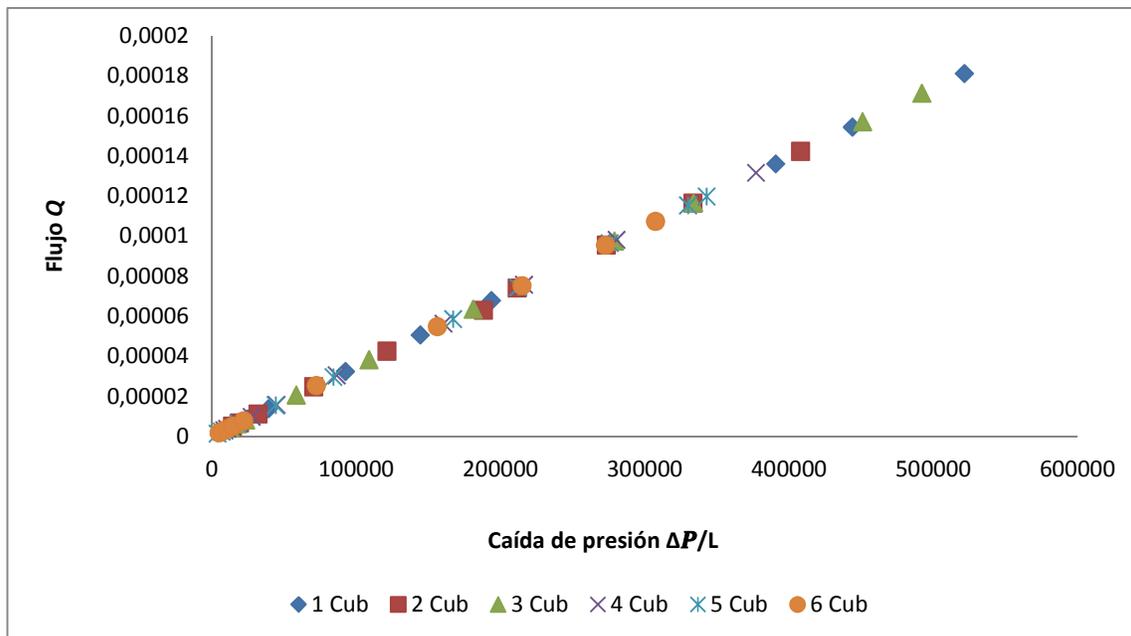


Fig. 5.6. Gráfica  $Q$  vs.  $\Delta P/L$  (Cuarta Iteración).

Una vez obtenidas las pendientes por cada iteración, se calcularon las permeabilidades por número de cubos par analizar su comportamiento de acuerdo al crecimiento de la longitud. Los resultados se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Cuadro de permeabilidades ( $\mu m^2$ ) por iteración y número de cubos.

No. De Cubos	Iteración			
	1	2	3	4
1	10,6092	1,4822	0,13151	0,011309
2	13,4630	1,5423	0,144112	0,011309
3	15,3906	1,5542	0,143789	0,011309
4	14,5915	1,57	0,144435	0,011309
5	15,8662	1,5762	0,144435	0,011309
6	16,2223	1,5578	0,144758	0,011309

Observando los resultados de la *Tabla 5.1* se puede ver que efectivamente la permeabilidad conforme el incremento de longitud en la dirección de flujo tiende a cero, lo cual se puede ver gráficamente en la Fig. 5.7.

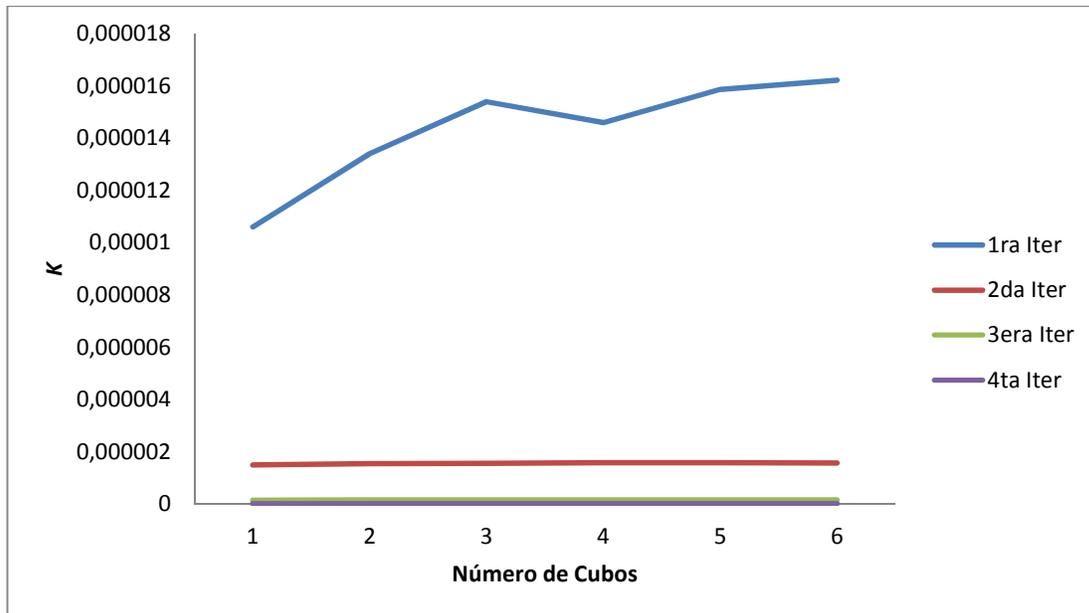


Fig. 5.7. Gráfica del comportamiento de  $K$  vs. Número de cubos en cada iteración.

Si bien se muestra que solo en la primera iteración la recta no es completamente constante, los valores son cercanos de cero.

En las gráfica (Fig.5.7.) se puede observar la pendiente del comportamiento de la solución por cada iteración, las cuales proyectan la permeabilidad del medio poroso contra el número de cubos. Con ellas se demuestra que, en efecto, como lo plantea Darcy  $K$  se mantiene constante ante el incremento de  $L$  [20] (Fig. 5.8.).

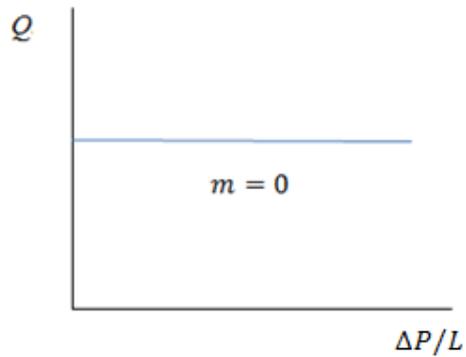


Fig. 5.8. Gráfica esperada por Darcy de  $\Delta P/L$  respecto a  $Q$ .

## CONCLUSIONES

- Se verificaron las propiedades hidrodinámicas en medios porosos con el modelado y simulación del flujo de fluidos a través de medios porosos fractales determinísticos y se realizó un análisis de comparación con los resultados de los estudios experimentales.
- Se encontró que un flujo estacionario laminar a través del inverso de la esponja de Menger obedece la Ley de Darcy, es decir, que aunque la velocidad de Darcy es una función lineal de la caída de presión, la permeabilidad absoluta aparente de la red de poros pre-fractal aumenta con el incremento de la longitud de la muestra en la dirección de flujo, siempre y cuando tengan la misma porosidad como lo plantearon (Balankin et al, 2016).
- Si bien las ecuaciones gobernantes se aplican pero no son iguales al trabajo experimental pero el modelo fractal si coincide.
- Se encontró que no existe dependencia de la permeabilidad respecto a la iteración, puesto que  $K$  se mantiene constante ante el incremento de  $L$ , contrario a lo que se encontró experimentalmente, que fractalmente  $K$  aumenta conforme el incremento  $L[1]$ .
- Por Darcy se hubiera esperado que  $K=0$  sin embargo las pendientes son cercanas de cero.
- Aplicando la condición de frontera de simetría se puede partir el modelo creando dominios imaginarios por arriba y por abajo del dominio computacional, de tal manera que el flujo que atravesase una cara sea una imagen especular del flujo calculado.
- Se logró crear el mallado de los modelos completos de la primera hasta la tercera iteración del pre-fractal, aun cuando el mallado llevó un tiempo considerable, ya que el número de elementos llegaba hasta los 10,000,000 elementos.
- En la cuarta iteración se utilizó la condición de frontera de simetría para reducir el número de elementos sin afectar los resultados obtenidos.
- Es preciso decir que es posible realizar cálculos este tipo modelos de medios porosos aplicando la condición de frontera de simetría. La cual demostró que se puede partir el modelo creando dominios imaginarios por arriba y por abajo del dominio computacional, de tal manera que el flujo que atravesase una cara sea una imagen especular del flujo calculado.

- Las simulaciones demostraron que la velocidad de flujo del fluido viscoso es una función lineal del gradiente de presión  $\Delta P/L$  [1] en la esponja de Menger
- Las variaciones existentes entre las gráficas experimentales vs. las de las simulaciones muestran que efectivamente, sólo a partir del modelo de la cuarta iteración se puede obtener información de interés.
- Aún cuando los valores no son idénticos debido a un porcentaje de error mínimo en las simulaciones para la cuarta iteración, los datos obtenidos numéricamente por medio del programa CFD Star CCM+ son muy cercanos a la realidad.
- Se obtuvo que la porosidad se mantiene constante ante el incremento de  $L$  y se demostró que al haber trabajado con muestras pre-fractales con la misma porosidad y no haber obtenido datos iguales a los esperados, difícilmente se podría trabajar con muestras pre-fractales con porosidad aleatoria.
- También es importante mencionar que es indispensable contar con equipos de cómputo que cuenten con capacidades altas de memoria RAM, ya que modelos como las redes porosas presentan un alto número de elementos, lo cual hace al cálculo numérico muy pesado.

## **TRABAJOS FUTUROS**

El estudio de flujo de fluidos a través de medios porosos siempre despertará el interés de investigadores por sus múltiples aplicaciones en la ciencia y en la industria. Como trabajos futuros se podrían plantear alguno como los siguientes:

Realizar la simulación de la cuarta iteración con el modelo completo y comprobar que los resultados obtenidos con la condición de frontera, en efecto, son verídicos.

Realizar simulaciones con densidades de mallas más finas y analizar si es posible un mayor acercamiento a los resultados obtenidos experimentalmente.

Realizar mallados con mallas poliédricas y analizar cuál es la malla más adecuada para este tipo de análisis de flujo de fluidos en medios porosos.

Realizar simulaciones experimentos con pre-fractales con un mayor número de iteraciones y analizar su comportamiento.

Utilizar un programa CFD diferente a STAR CCM+ y hacer un análisis comparativo de los resultados obtenidos en este proyecto, comprobado así cual es el más adecuado para el estudio de flujo de fluidos en medios porosos.

Llevar a cabo simulaciones con otro tipo de fluido y analizar sus propiedades hidrodinámicas.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Balankin, A., Valdivia, J.-C., Marquez, J., Susarrey, O., & Solorio-Avila, M. (2016). Anomalous diffusion of fluid momentum and Darcy-like law for laminar flow in media with fractal porosity. *ELSEVIER*.
- [2] De Guzmán, M., Martín, M., Morán, M., & Reyes, M. (1993). *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Barcelona: Labor.
- [3] Karim, M., Krabbenhoft, K., & Lyamin, A. (2013). PERMEABILITY DETERMINATION OF POROUS MEDIA USING LARGE-SCALE FINITE ELEMENTS AND ITERATIVE SOLVER. *Internacional Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.
- [4] Mandelbrot, B. (1993). *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*. Tusquets Editores, S.A.
- [5] Moukalled, F., Mangani, L., & Darwish, M. (2015). *The Finite Volumen Method in Computational Fluid Dynamics*. Beirut, Líbano: Springer.
- [6] Nélio Henderson, J. C. (2010). A three-parameter Kozeny–Carman generalized equation. *ELSEVIER*.
- [7] TALANQUER, V. (1996). *FRACTUS, FRACTA, FRACTAL: FRACTALES DE LABERINTOS Y ESPEJOS*. CIUDAD DE MÉXICO: FONDO DE CULTURA ECONÓMICA.
- [8] Turner, M. R. (1956). *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. J. Aeronautical Science .
- [9] Valdes Prada, F. J.-T.-R. (2009). Validity of the permeability Carman–Kozeny equation: A volume. *ELSEVIER*.
- [10] Xu, P., & Yu, B. (2008). Developing a new form of permeability and Kozeny–Carman constant for homogeneous porous media by means of fractal geometry. *ELSEVIER*.
- [11] Cengel, Y., & Cimbala, J. (2006). *MECÁNICA DE FLUIDOS, Fundamentos y Aplicaciones*. McGraw Hill.
- [12] LAMBE, T., & WHITMAN, R. (2004). *MECÁNICA DE SUELOS* . México: LIMUSA.
- [13] De Guzmán , M., & Y otros. (s.f.). *Estructuras Fractales y sus Aplicaciones*. Labor.
- [14] Pérez Ortiz, J. A. (2000). *MÚSICA FRACTAL: EL SONIDO DEL CAOS*. Alicante: Creative Commons.
- [15] Bear, J. (1972). *Dinamycs od Fluid in Porous Media*. Elsevier.

- [16] Wang, W., Kosakowski, G., & Kolditz, O. (2008). *A parallel finite element scheme for thermo-hydro mechanical (THM) coupled problems in porous media. ELSEVIER.*
- [17] Balankin, A., & Espinoza Elizarrazaz, B. (2012). Hydrodynamics of fractal continuum flow. *PHYSICAL REVIEW.*
- [18] Cengel, Y., & Cimbala, J. (2006). MECÁNICA DE FLUIDOS, Fundamentos y Aplicaciones. McGraw Hill (Pag.818-830).
- [19] Berrone, S., Pieraccini, S., & Scialò, S. (2017). Flow simulations in porous media with immersed intersecting fractures. *ELSEVIER.*
- [20] Mößner, M., & Radespiel, R. (2017). Flow simulations over porous media – Comparisons with experiments. *ELSEVIER.*
- [21] Sánchez San Román, F. (s.f.). Ley de Darcy. Conductividad Hidráulica. Salamanca, España: Departamento de Geología.

ANEXOS I



## Turbinas 9, 11, 15, 19, 600 y 900

Lubricante para turbinas de vapor, compresoras de aire, sistemas circulatorios, baleros y sistemas hidráulicos.

### Descripción

Lubricantes que se formulan con una mezcla de aceites básicos minerales de alta calidad y aditivos con la más avanzada tecnología que le incorporan las propiedades de antiherrumbre, antioxidante, demulsibilidad y antiespumantes.

### Ventajas

- Protección óptima de operación
- Amplio rango de operación
- Excelentes propiedades para un buen desempeño en cojinetes y engranajes trabajando a alta velocidad y temperatura
- Rápida expulsión del aire y excelente separación del agua
- Buena protección contra la herrumbre de superficies metálicas ferrosas
- Baja tendencia a la formación de carbón

### Aplicaciones

Para la lubricación de turbinas a vapor con sistema circulatorio en baño o por anillo, compresoras de aire, bombas de pozo profundo, motores eléctricos con chumaceras en baño de aceite lubricados por anillo, circuitos hidráulicos operando a alta y baja presión.

### Características típicas

Prueba	Método ASTM	Valor típico					
		0450	0451	0452	0453	0454	0455
Código de producto		9	11	15	19	600	900
Turbinas		32	46	68	100	150	220
Grado ISO							
Peso específico a 20/4°C	D 1298	0.870	0.874	0.878	0.883	0.885	0.890
Punto de inflamación, °C	D 92	206	210	220	230	240	245
Viscosidad a 40°C, cSt	D 445	32.0	46.0	68.0	100.0	150.0	220.0
Viscosidad a 100°C, cSt	D 445	5.3	6.7	8.5	10.9	14.4	18.4
Índice de viscosidad	D 2270	97	95	95	93	93	92
Punto mínimo de fluidez, °C	D 97	-15	-15	-12	-12	-9	-9
Número de neutralización, mg. KOH/g.	D 664	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
RBOT, minutos	D 2272	415	415	400	400	370	370
Oxidación hasta TAN de 2 hrs.	D 943	2200	2200	2200	2200	2200	2200
Emulsión, tiempo para 3 ml., minutos	D 1401	25	25	25	25	25	25

### Precaución

Evite el contacto prolongado con la piel. Se han efectuado amplios estudios del efecto de los hidrocarburos derivados del petróleo, los cuales constituyen la base de los aceites lubricantes de cualquier marca o tipo y se ha encontrado que pueden tener efectos perjudiciales al ser humano. Si accidentalmente cayera a los ojos aceite lubricante, lávese los ojos inmediatamente con agua abundante por espacio de 15 minutos y obtenga asistencia médica.

No utilice ni exponga los envases vacíos al calor, ya que los vapores que pueden emanarse son perjudiciales a la salud.

No contamine. No arroje el aceite usado al alcantarillado. No deje residuos de aceite en los envases, ya que estos residuos pueden contaminar el suelo y las aguas.

Mexicana de Lubricantes, S.A. de C.V. Av. 8 de Julio No. 2270, Z.I. C.P. 44940 Guadalajara, Jalisco  
 Teléfono: 01 (33) 3134-0500 Fax: 01 (33) 3134-0501 Dirección Internet: [www.mexicanadelubricantes.com.mx](http://www.mexicanadelubricantes.com.mx)

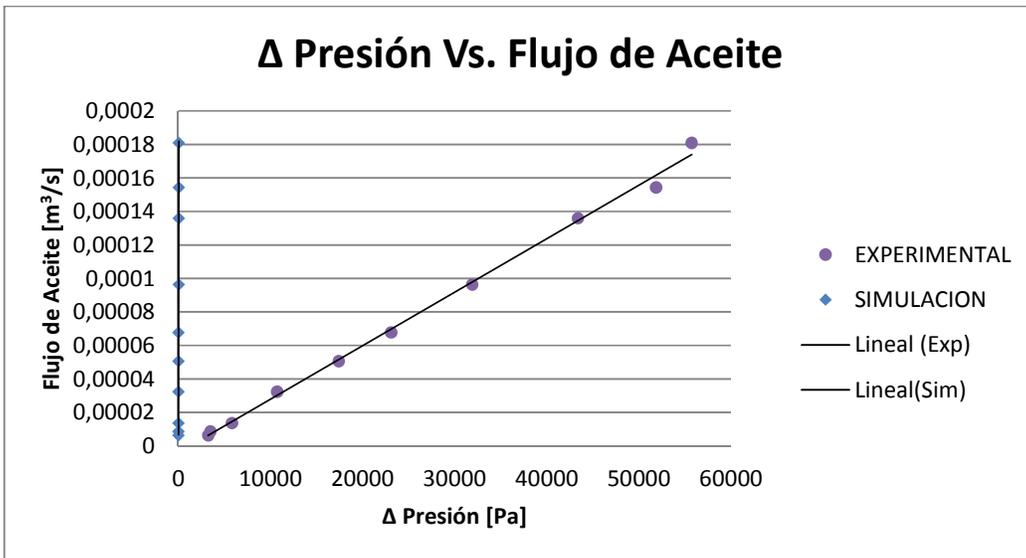
IT-01  
 Junio 03

Para mayor información de este producto, acuda al Departamento Técnico del Distribuidor de su localidad o al Departamento Técnico de Mexicana de Lubricantes, S.A. de C.V.

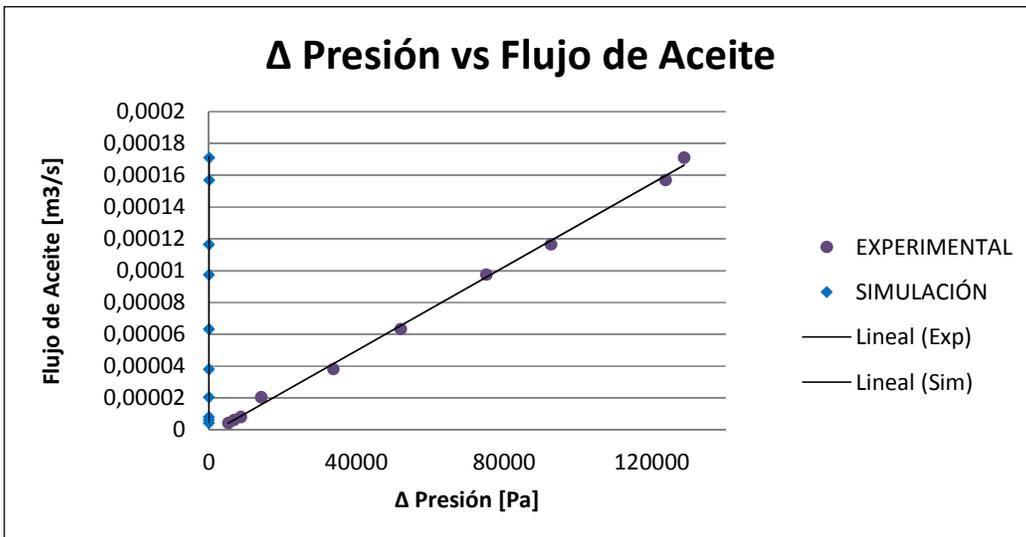
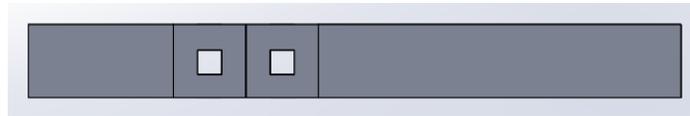
**ANEXO II**

**GRAFICAS DE CAUDAL VS. PRESION DIFERENCIAL (PRIMER ITERACION)**

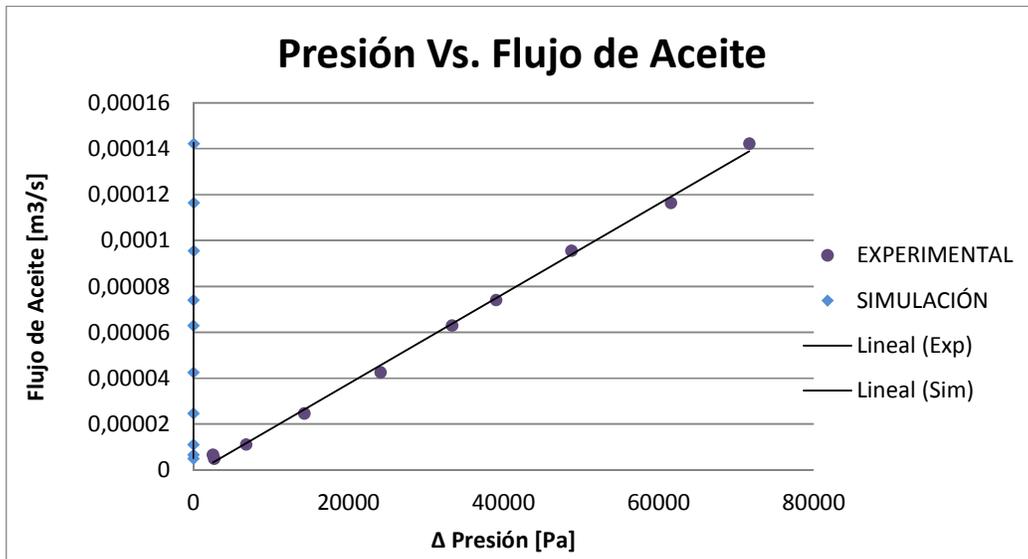
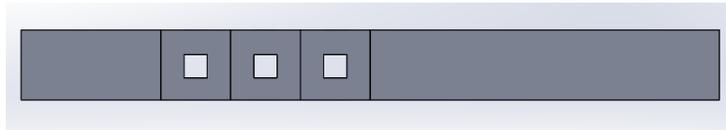
Prueba con 1 fractal: Longitud pre-fractal 81mm



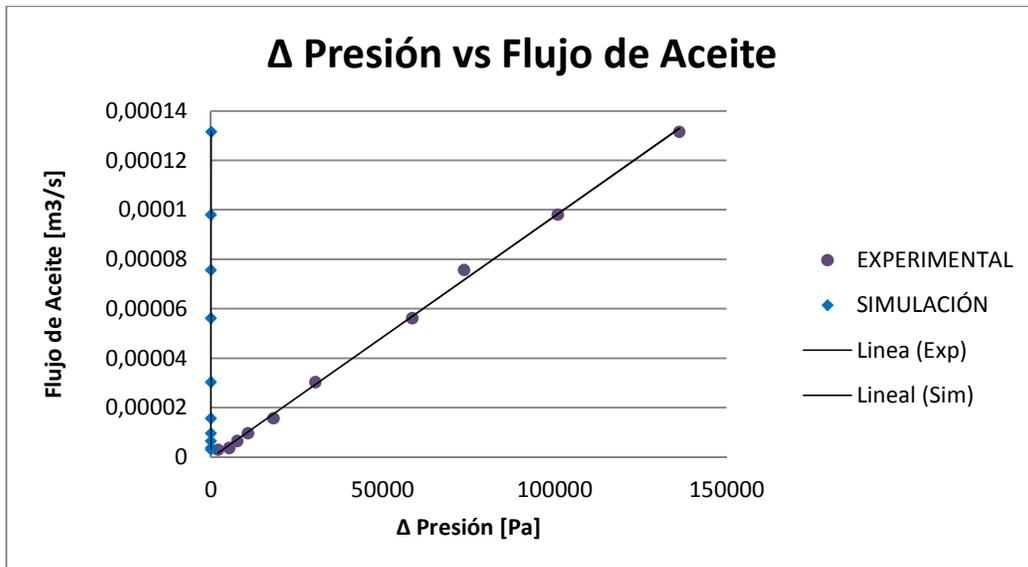
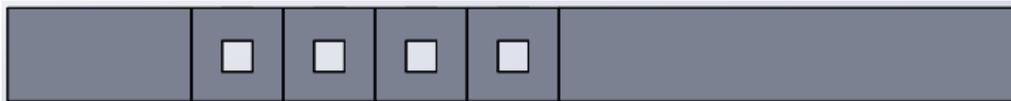
Prueba con 2 fractales: Longitud pre-fractal 162 mm



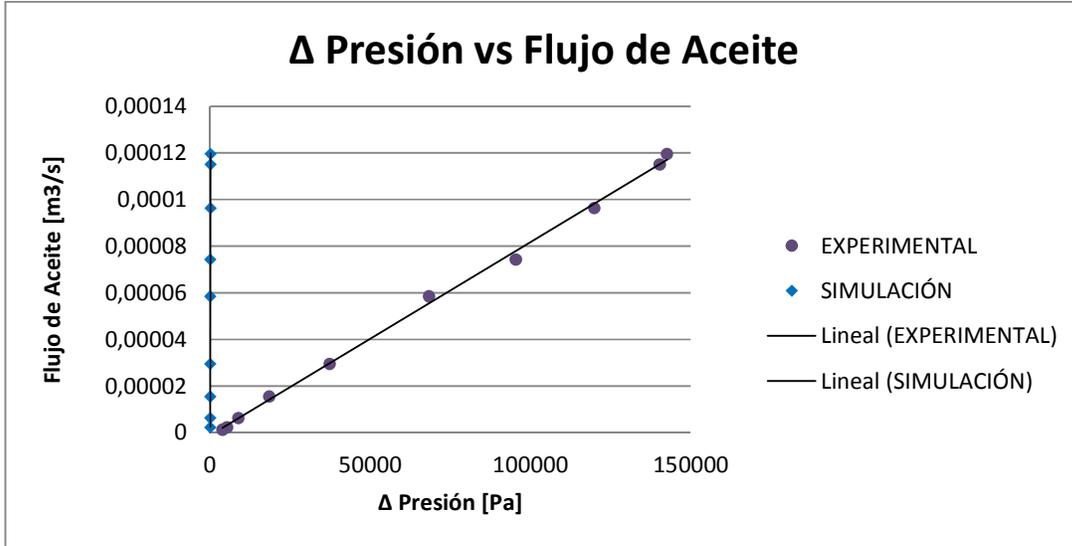
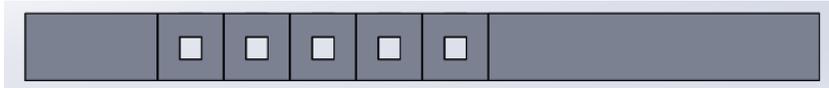
Prueba con 3 fractales: Longitud pre-fractal 243 mm



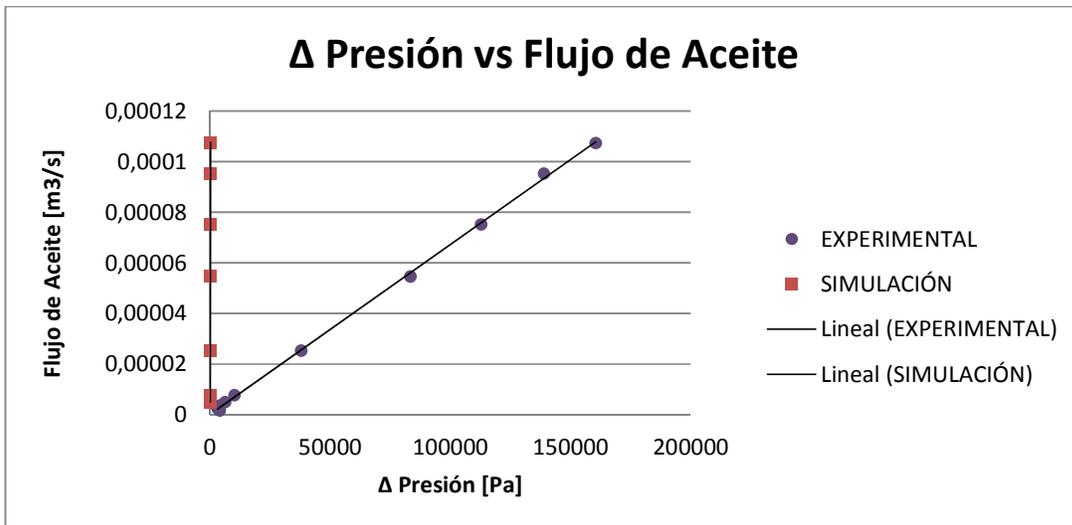
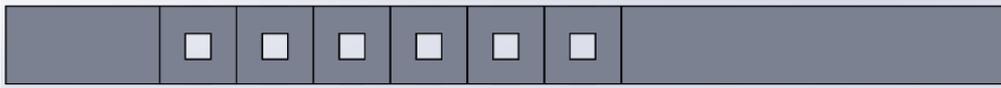
Prueba con 4 fractales: Longitud pre-fractal 324 mm



Prueba con 5 fractales: Longitud pre-fractal 405 mm.

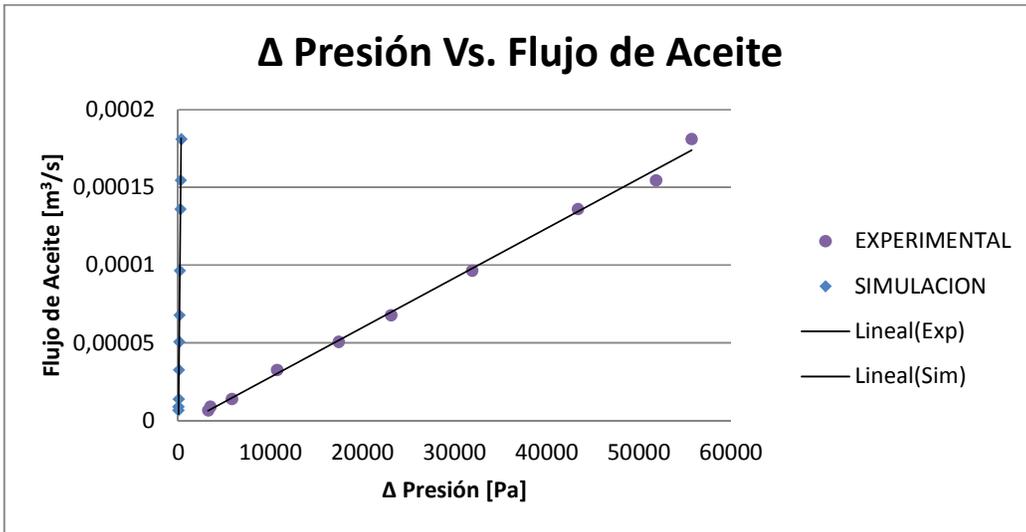


Prueba con 6 fractales: Longitud pre-fractal 486 mm

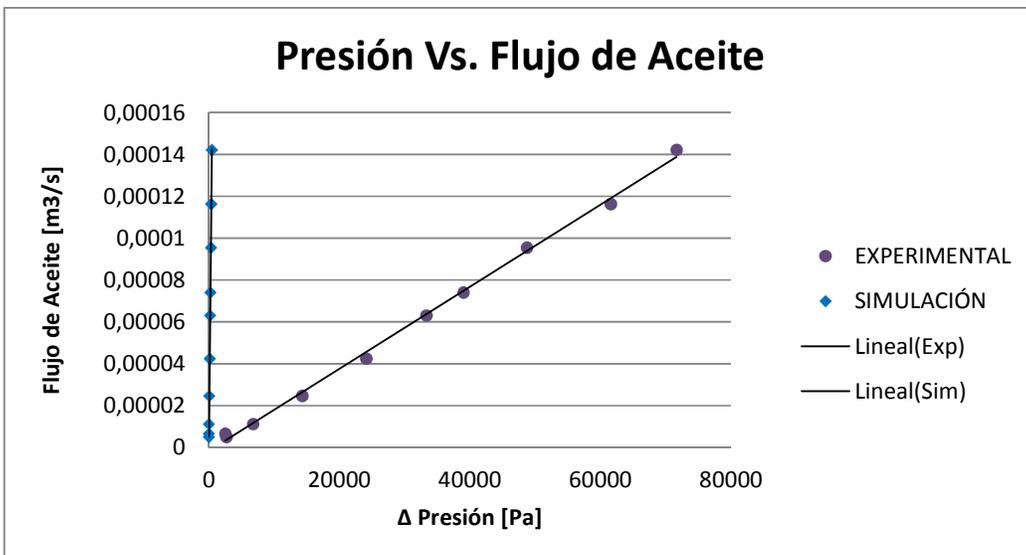


## GRAFICAS DE CAUDAL VS. PRESION DIFERENCIAL (SEGUNDA ITERACION)

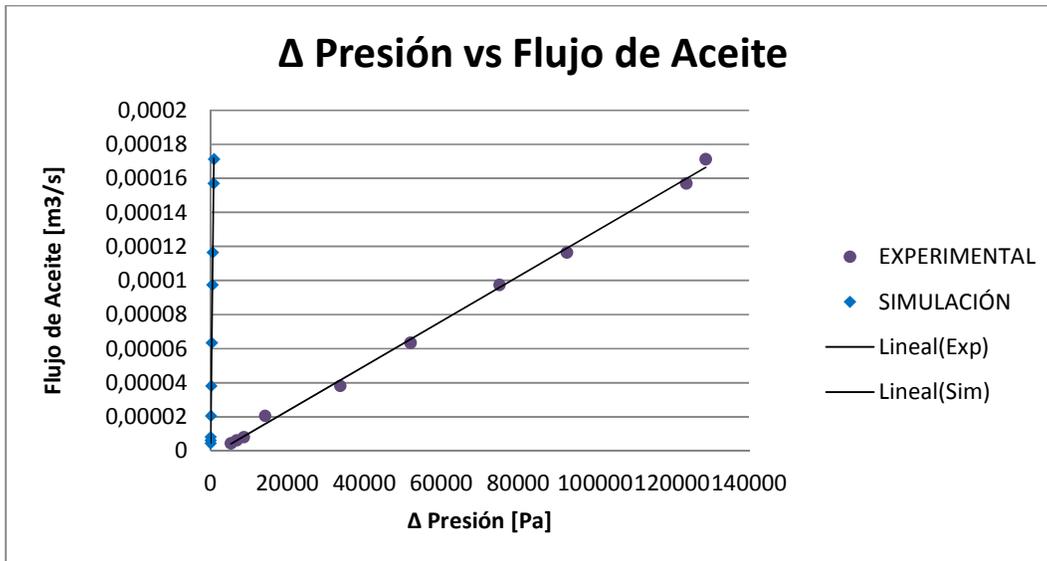
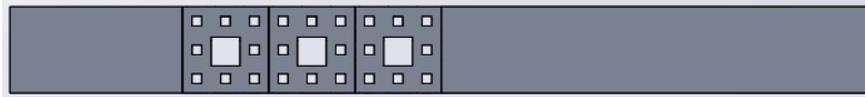
Prueba con 1 fractal: Longitud pre-fractal 81 mm



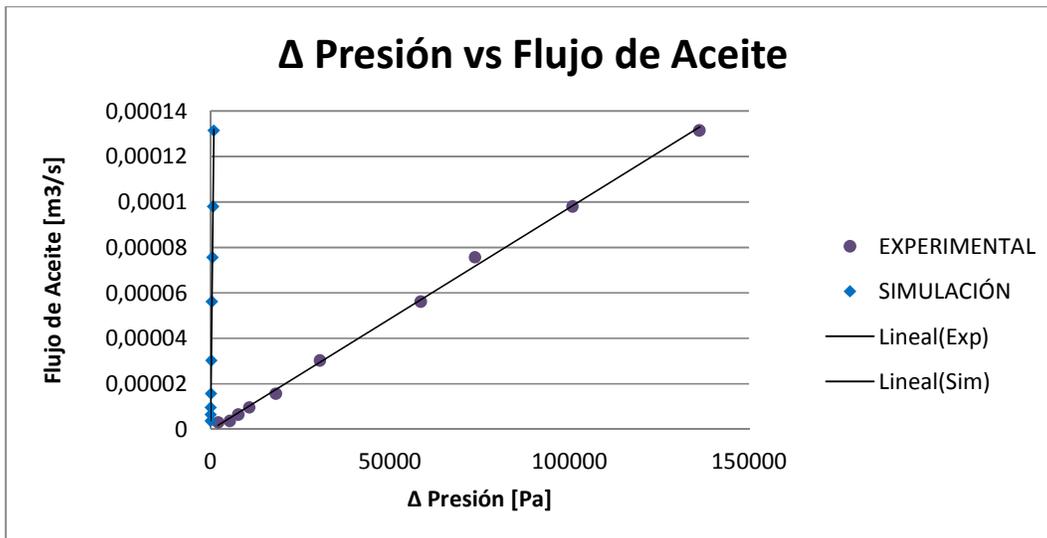
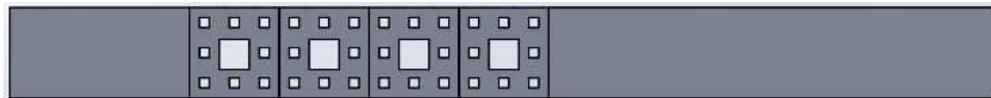
Prueba con 2 fractales: Longitud pre-fractal 162 mm



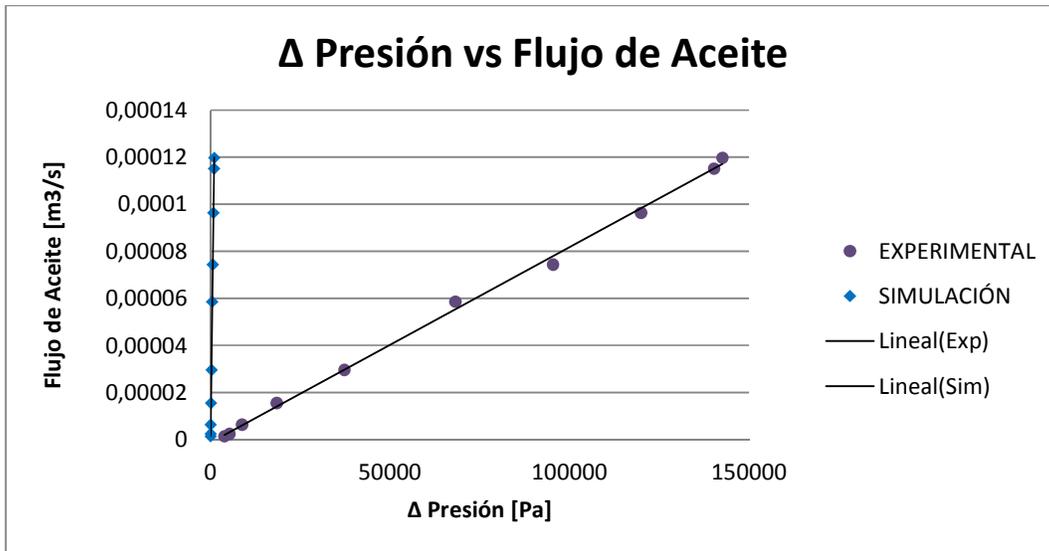
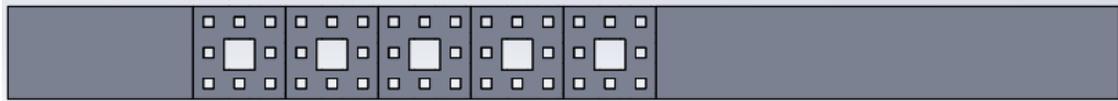
Prueba con 3 fractales: Longitud pre-fractal 243 mm



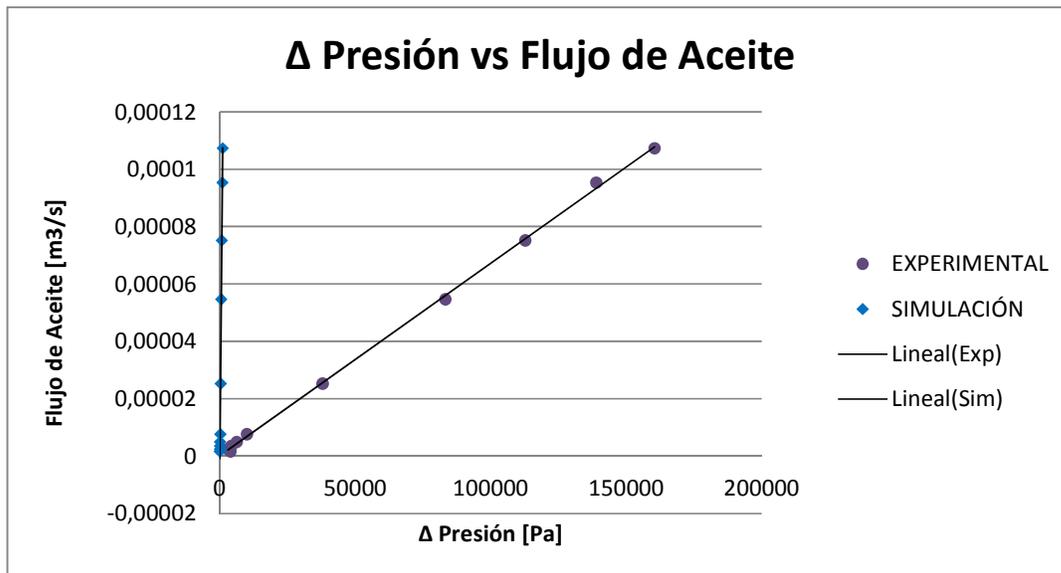
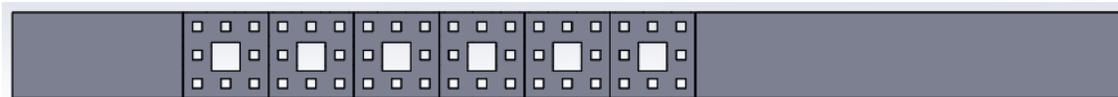
Prueba con 4 fractales: Longitud pre-fractal 324 mm



Prueba con 5 fractales: Longitud pre-fractal 405 mm



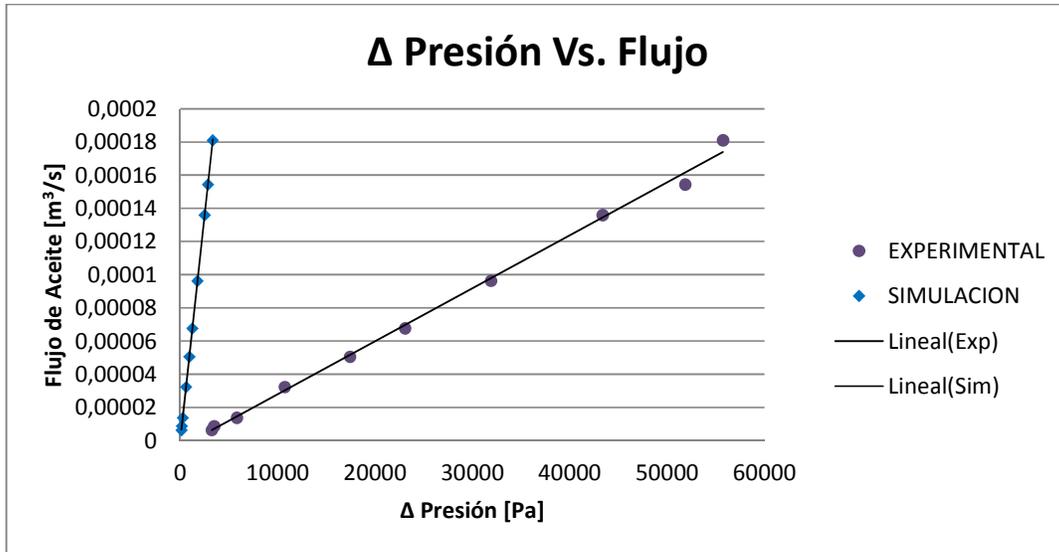
Prueba con 6 fractales: Longitud pre-fractal 486 mm



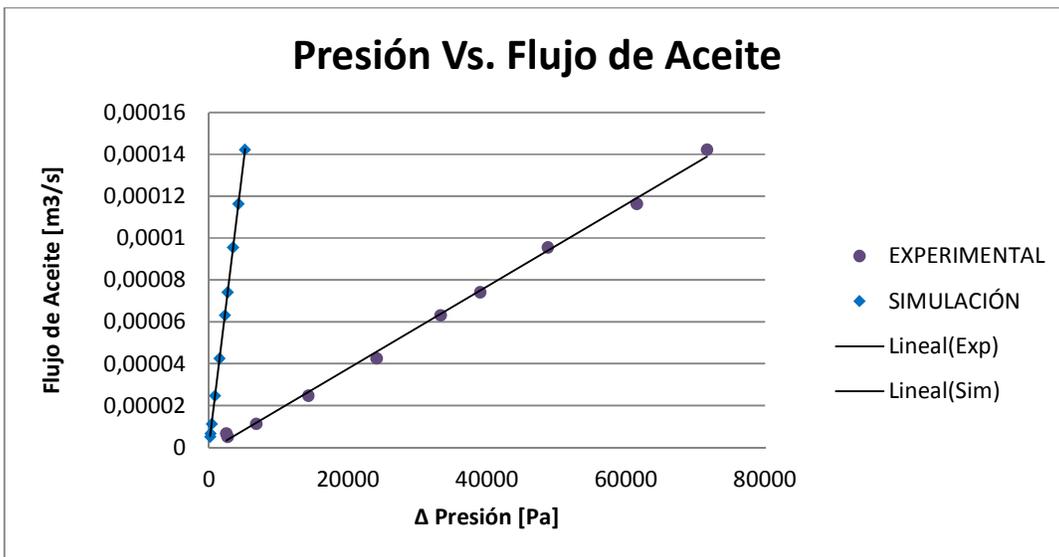
**ANEXO IV**

**GRAFICAS DE CAUDAL VS. PRESION DIFERENCIAL (TERCER ITERACION)**

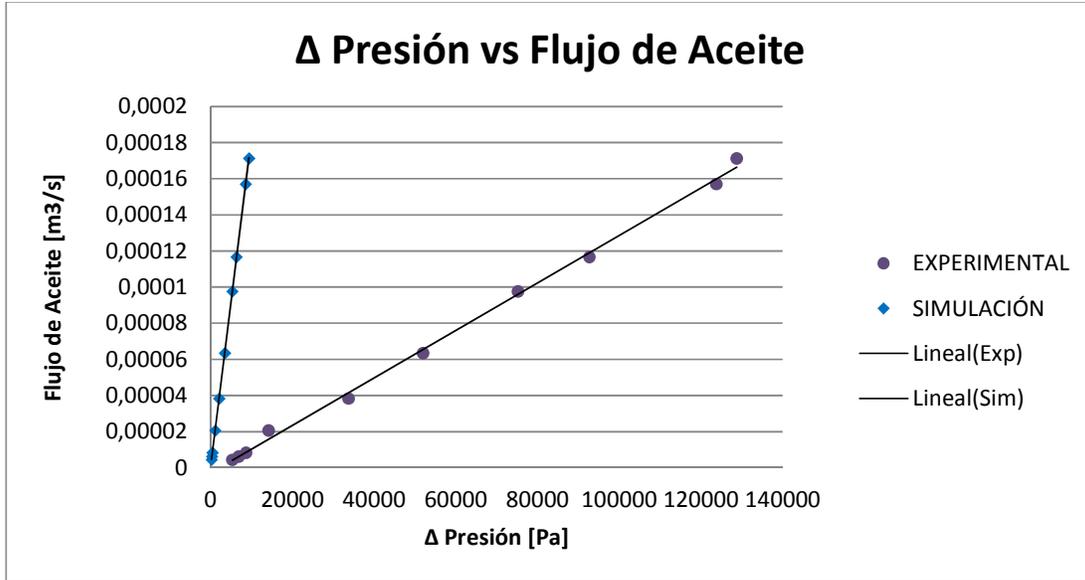
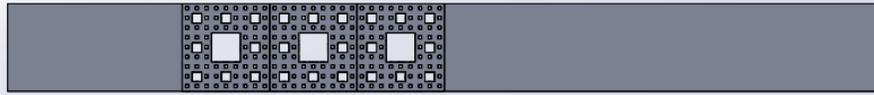
Prueba con 1 fractal: Longitud pre-fractal 81mm



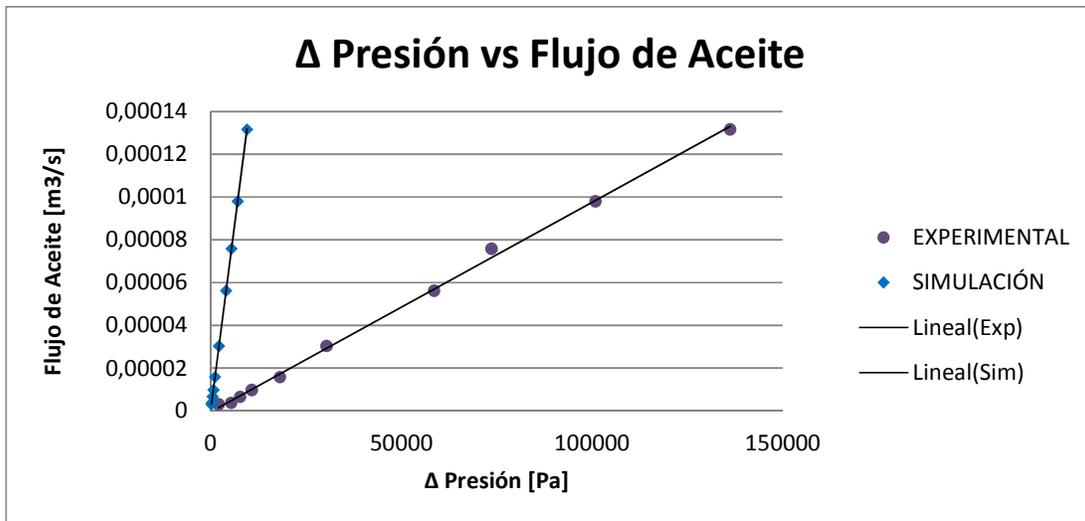
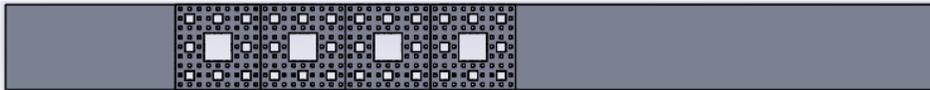
Prueba con 2 fractales: Longitud pre-fractal 162 mm



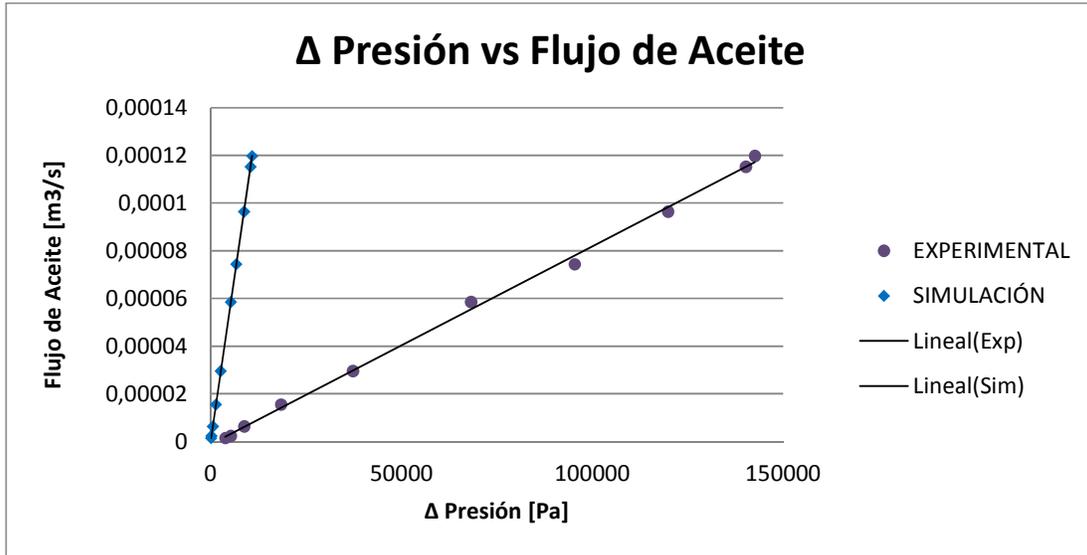
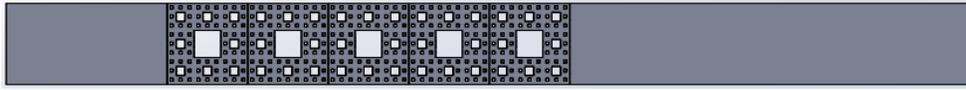
Prueba con 3 fractales: Longitud pre-fractal 243 mm



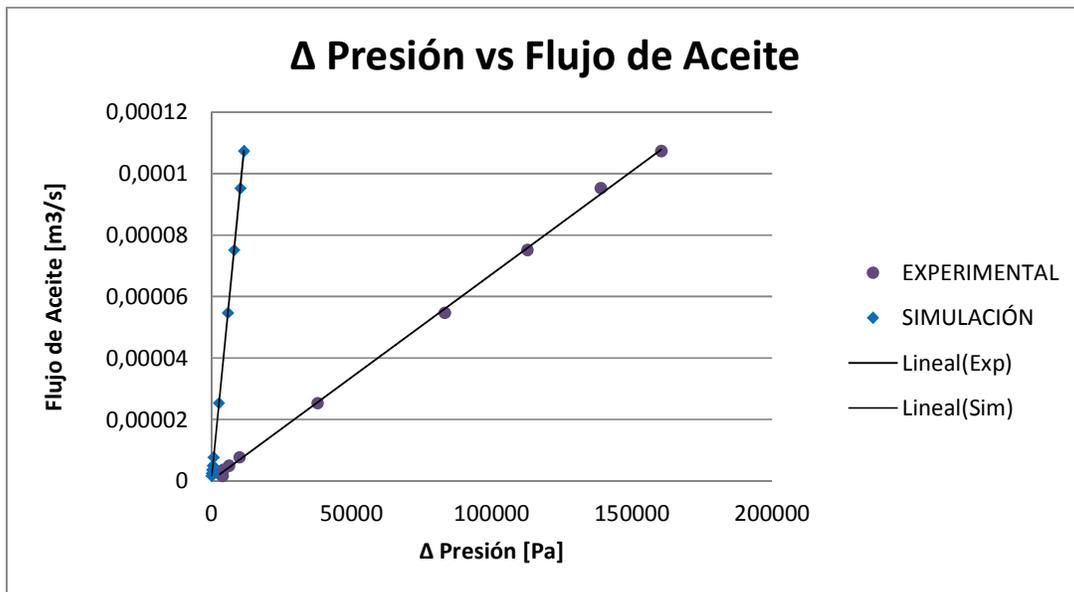
Prueba con 4 fractales: Longitud pre-fractal 324 mm



Prueba con 5 fractales: Longitud pre-fractal 405 mm



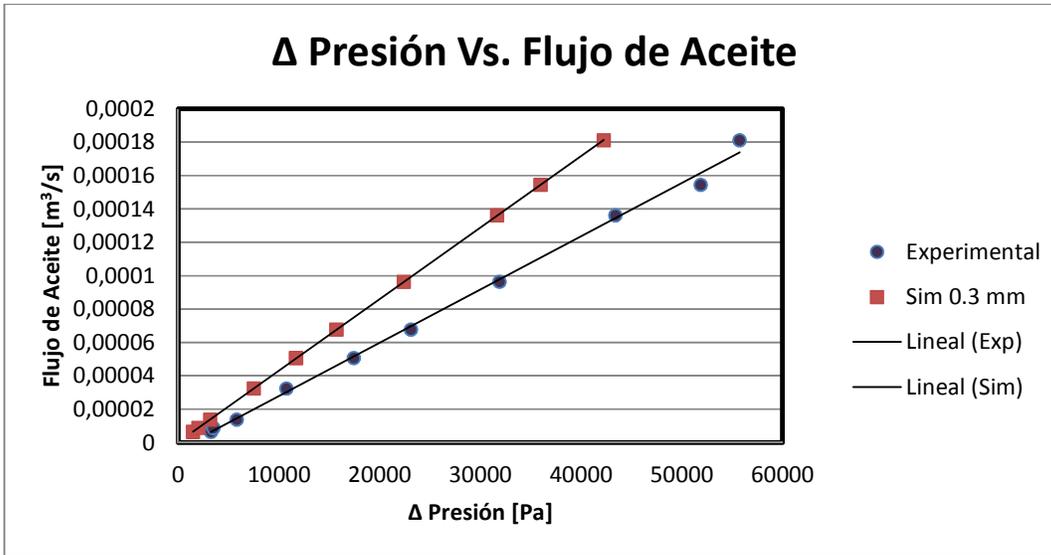
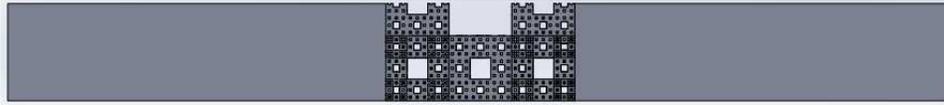
Prueba con 6 fractales: Longitud pre-fractal 486 mm



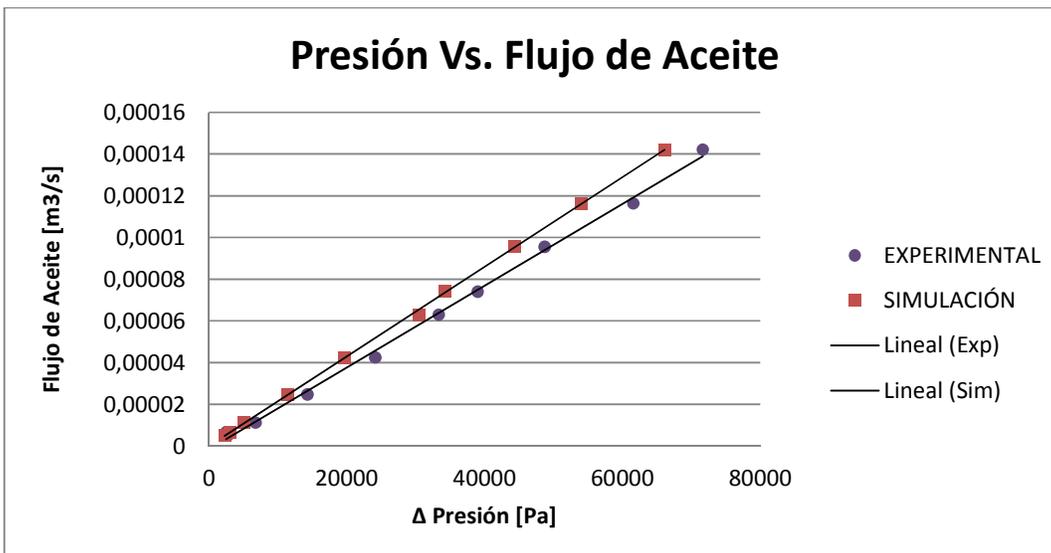
**ANEXO V**

**GRAFICAS DE CAUDAL VS. PRESION DIFERENCIAL (CUARTA ITERACION)**

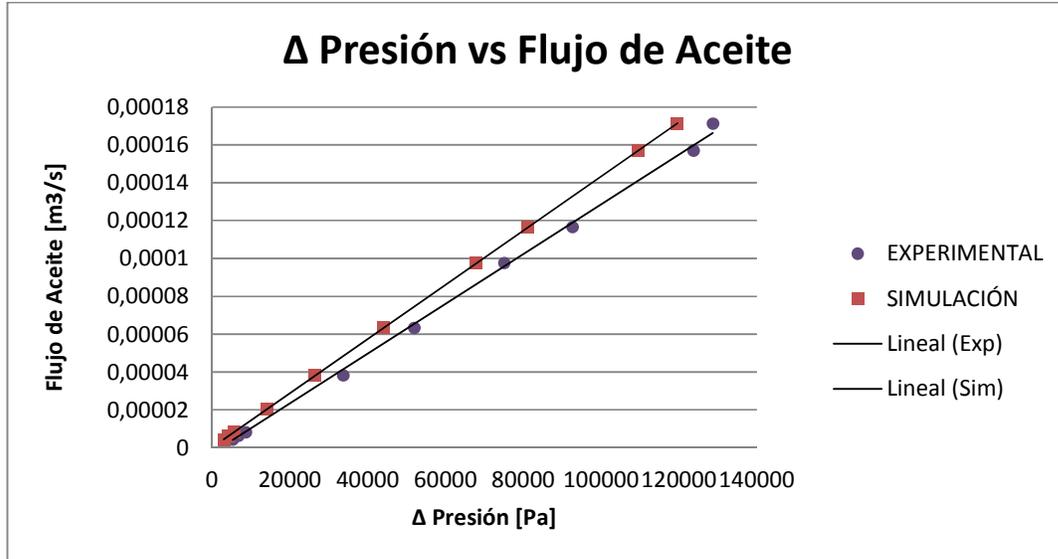
Prueba con 1 fractal: Longitud pre-fractal 81mm



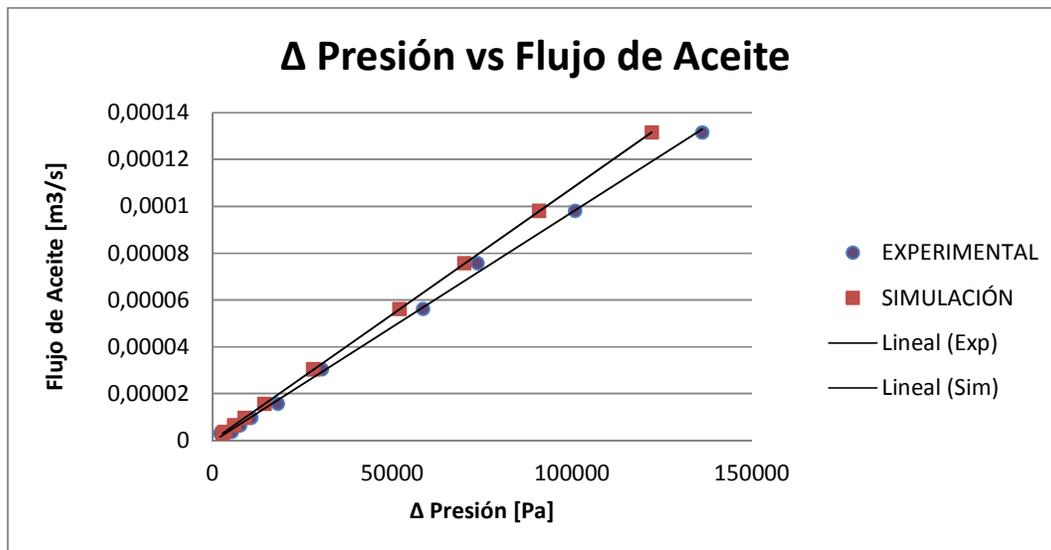
Prueba con 2 fractales: Longitud pre-fractal 162 mm



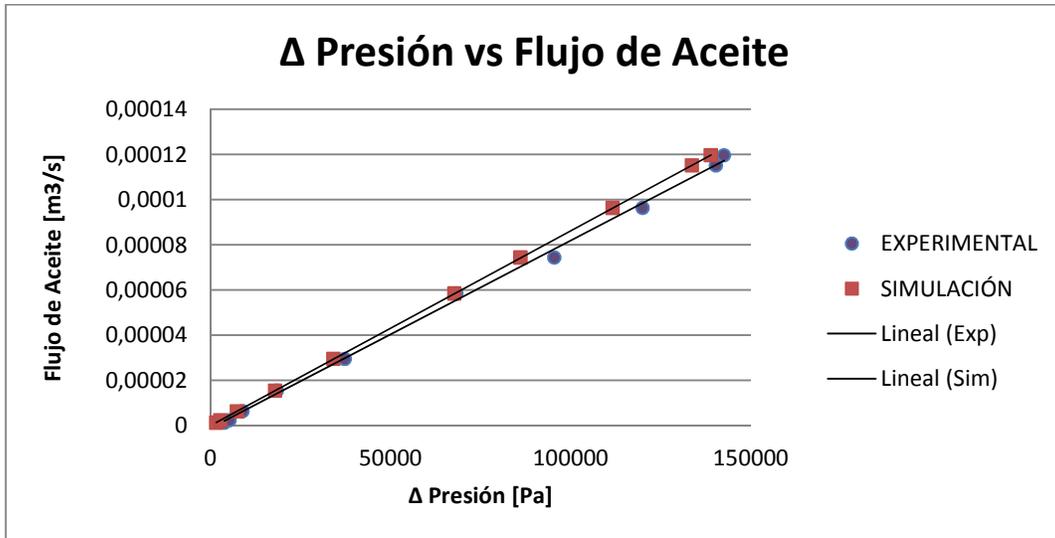
Prueba con 3 fractales: Longitud pre-fractal 243 mm



Prueba con 4 fractales: Longitud pre-fractal 324 mm



Prueba con 5 fractales: Longitud pre-fractal 405 mm



Prueba con 6 fractales: Longitud pre-fractal 486 mm

