



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

SEPI – ESIME ZACATENCO

**SIMULACIÓN NUMÉRICA PARA DETERMINAR LA
DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LAS GRIETAS EN LA
MAZA DE RUEDA PORTADORA DE LOS VAGONES DEL
STC METRO DE LA CIUDAD DE MÉXICO UTILIZANDO
EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO**

TESIS

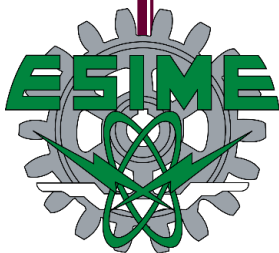
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA

Ing. Erik Brayan Piedra Martinez

DIRECTORA DE TESIS

Dra. Rita Aguilar Osorio



CIUDAD DE MÉXICO, 2017

RESUMEN

En esta tesis se presenta el análisis numérico de la propagación de las grietas en probetas fabricadas con el material A216, con el cual está fabricada la maza de rueda portadora de los vagones del sistema de transporte colectivo metro de la ciudad de México. Para el análisis numérico se desarrolló un algoritmo, en los lenguajes de programación TCL/TK y PYTHON, para determinar los desplazamientos y esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta de los modelos numéricos de las probetas, con la finalidad de obtener el factor de intensidad de esfuerzos (FIE), la dirección de propagación (DPG) y la tasa de propagación de las grietas, este algoritmo fue desarrollado utilizando el método de elemento finito y fue implementado en el programa computacional HYPERMESH 13.0. En el análisis numérico fueron utilizados los criterios de extrapolación de desplazamientos y del esfuerzo tangencial máximo para la determinación del factor de intensidad de esfuerzo y la dirección de propagación de las grietas, mientras que para determinar la tasa de propagación de las grietas se utilizó la ecuación empírica de P. Paris. El primer análisis numérico de la propagación de las grietas fue realizado en una probeta ESE (T) en la cual se determinó el FIE, la DPG y la tasa de propagación de las grietas, el segundo y tercer análisis fueron desarrollados, igualmente en probetas ESE (T), pero con barrenos, con la finalidad de ocasionar que la grieta en las probetas tuviera un cambio de dirección de propagación más significativo, en comparación con el primer análisis, y validar así el código desarrollado para la DPG. Los análisis numéricos, desarrollados con el algoritmo computacional, fueron comparados con pruebas experimentales en donde se obtuvieron diferencias del 6% en términos del FIE, del 14 % en el número de veces de aplicación de las cargas, y del 10% en las direcciones de propagación de las grietas en las 3 probetas analizadas. Finalmente, después de validar el código computacional utilizando pruebas experimentales, se analizó, el tamaño crítico de las grietas en la brida mayor de la maza de rueda portadora (MRP) del STC Metro de la ciudad de México utilizando los parámetros de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica y utilizando la magnitud de las cargas de frenado e impacto en la misma secuencia que son aplicadas en la MRP en condiciones normales de operación. Se determinó que el tamaño crítico de las grietas en la brida mayor de la MRP es de 16.6 mm, después de aplicar las cargas 323532 veces para la línea 1 del STC metro, mientras que el tamaño crítico de las grietas en la brida mayor de la MRP para las líneas 3 y B es alcanzado después de aplicar las cargas 333072 veces. Con estos valores se determinó que la vida remanente de las MRP de la línea 1 es de 106745 km(0.74 años), de la línea 3 de 109219 km(0.75 años) y de la línea B de 109728 km(0.76 años).

ABSTRACT

This work presents the numerical analysis of the crack propagation in samples manufactured with the material A216, with which the wheel hub of the wagons of the Mexico City subway is manufactured. For the numerical analysis a computational algorithm was developed, in the programming languages TCL / TK and PYTHON, using the finite element method, which was implemented in the computer program HYPERMESH 13.0, to determine the displacements and stresses near the crack tip of the numerical models, with the purpose of obtaining the stress intensity factor (SIF), the angles of crack propagation (ACP) and the propagation rate of the cracks. In the algorithm developed, the extrapolation of displacements and maximum tangential stress methods were used to determine the SIF and the APG, and the empirical equation of P. Paris were used to determine the rate propagation rate of the cracks. The first numerical analysis of the crack propagation was performed in an ESE (T) sample in which the SIF, the ACP and the propagation rate were determined, the second and third analyzes were developed, also in ESE (T) samples, but now with 1 and 2 holes, in order to cause that the crack in the samples had a more significant change of direction, compared with first analysis, and with this validate the code developed in terms of the ACP. The numerical analyzes, developed with the computational algorithm, were compared with experimental tests where differences of 6% were obtained in terms of the FIE, 14% in the number of application cycles of the loads, and 10% in the direction of propagation of the cracks in the 3 samples analyzed. Finally, after validating the computational code using experimental tests, it analyzed the critical size of the cracks in the wheel hub (WB) of the STC Metro in Mexico City, using the parameters of the Elastic Linear Fracture Mechanics and using the magnitude of the braking and impact loads in the same sequence that are applied in the MRP under normal operating conditions. It was determined that the critical size of the cracks in the hub flange is 16.6 mm, this critical size of the crack is reached after the application of 322621 load cycles when the hub operates in the line 1, while the critical size of the cracks in the hub flange of the MRP for lines 3 and B is reached after the application of 333072 load cycles. With these values it was determined that the remaining life of the MRP operating in the line 1 is 106745 km (0.74 years), in line 3 of 109219 km (0.75 years) and in line B of 109728 km (0.76 years).

ÍNDICE GENERAL

NOMENCLATURA	1
ÍNDICE DE TABLAS	4
ÍNDICE DE FIGURAS	7
Capítulo 1 . INTRODUCCIÓN	10
1.1 Desarrollo y evolución de los métodos numéricos	10
1.2 Aplicación de los métodos numéricos en problemas de ingeniería	13
1.3 Aplicación de los métodos numéricos en la mecánica de la fractura	18
1.4 ALCANCE	21
1.5 OBJETIVOS	22
1.5.1 OBJETIVO GENERAL	22
1.5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	22
1.6 ANTECEDENTES	23
1.7 APORTACIONES	24
1.8 METODOLOGÍA GENERAL	25
Capítulo 2 . ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO	27
2.1 Introducción	27
2.1.1 Métodos Analíticos	27
2.1.2 Métodos Experimentales	29
2.1.3 Métodos Numéricos	29
2.1.3.1 Método del elemento frontera	30
2.1.3.2 Método de elemento finito	32
2.2 Publicaciones relevantes analizadas con el estudio de componentes mecánicos agrietados.	35
2.2.1 Determinación del factor del factor de intensidad de esfuerzos y de la dirección de propagación de las grietas.	36

2.2.2 Análisis de la tasa de propagación de las grietas y la vida remanente.....	58
2.3 Observaciones del análisis bibliográfico	70
Capítulo 3 . FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS Y LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LAS GRIETAS	72
3.1 Introducción	72
3.2 Formulación matemática de las ecuaciones de los esfuerzos normales y cortantes en la probeta.....	73
3.2 Formulación matemática de las ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos en la probeta.	79
3.3 Formulación matemática de las ecuaciones para determinar el campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta en función de los desplazamientos.	81
3.4 Formulación matemática de las ecuaciones para determinar el ángulo de propagación de las grietas en función del factor de intensidad de esfuerzos.....	91
Capítulo 4 . ANÁLISIS NUMÉRICO PARA DETERMINAR EL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS, LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LAS GRIETAS Y EL NÚMERO DE CICLOS.....	96
4.1 Introducción	96
4.2 Metodología para el análisis numérico.....	96
4.3 Formulación del modelo numérico para el análisis de la propagación de las grietas.....	98
4.3.1 Principio de trabajos virtuales.	98
4.4 Modelado de la probeta ESE (T).	107
4.5 Selección del tipo de elemento de malla.....	108
4.5.1 Elemento isoparamétrico de puntos cuartos	110
4.6 Selección del tamaño de malla.....	112
4.7 Generación de mallas.....	113
4.8 Propiedades mecánicas del material de la probeta ESE (T).	115

4.9 Condiciones y datos para el análisis numérico.....	116
4.10 Desarrollo del programa computacional para el análisis numérico del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas.....	120
4.11 Análisis numérico para la obtención del factor de intensidad de esfuerzos	127
4.11.1 Factor de intensidad de esfuerzos equivalente para las cargas de modo mixto.....	130
4.12 Análisis numérico para la dirección de propagación de las grietas	132
4.13 Análisis numérico del número de ciclos.....	133
4.14 Cálculo del tamaño de la zona plástica.....	136
4.15 Analisis del tipo de fractura en función del tamaño de la zona plástica.....	136
4.16 Análisis numérico de la vida remanente y de la longitud critica de las grietas en la MRP del STC METRO.....	137
4.17 Análisis de la vida total de la MRP del STC Metro.....	139
Capítulo 5 . ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	141
5.1 Introducción.....	141
5.2 Número de elementos y nodos.....	141
5.3 Resultados del análisis numérico realizado en la probeta ESE (T)	142
5.3.1 Resultados del Factor de Intensidad de Esfuerzos	142
5.3.2 Dirección de propagación de las grietas.....	148
5.3.3 Número de ciclos	152
5.4 Resultados del análisis numérico realizado en la probeta tipo ESE (T) con un barreno	154
5.4.1 Factor de intensidad de esfuerzos	154
5.4.2 Dirección de propagación de la grieta	157
5.4.3 Número de ciclos	160

5.5 Resultados del análisis numérico realizado en la probeta tipo ESE (T) con dos barrenos.....	163
5.5.1 Factor de intensidad de esfuerzos	163
5.5.2 Dirección de propagación de la grieta	166
5.5.3 Número de ciclos	168
5.6 Resultados del tamaño de la zona plástica.....	170
5.7 Comparación numérica y experimental del factor de intensidad de esfuerzos, la dirección de propagación de las grietas y el número de ciclos.	173
5.7.1 Factor de intensidad de esfuerzos	173
5.7.2 Dirección de propagación de las grietas	179
5.7.3 Número de ciclos	182
5.8 Resultados de la estimación de la vida remanente y de la longitud crítica de las grietas en la MRP.....	186
5.9 Resultados de la estimación de la vida total de la MRP	187
5.10 Determinación del criterio de retiro de la pieza.....	188
CONCLUSIONES	189
TRABAJOS FUTUROS.....	192
BIBLIOGRAFÍA	193
ANEXOS	202
1.1 Código del programa desarrollado en TCL/TK que fue implementado en el programa de análisis por elemento finito HYPERMESH 13.0 para el análisis de la propagación de las grietas.....	202
1.2 Código del programa desarrollado en PYTHON para la presentación de los resultados en forma de gráficas.....	205
1.3 Resultados del análisis numérico de la vida remanente para la maza de rueda portadora de STC metro de la ciudad de México con base en las cargas de impacto y frenado de la línea 1.....	206

1.4 Resultados del análisis numérico de la vida remanente para la maza de rueda portadora de STC metro de la ciudad de México con base en las cargas de impacto y frenado de la línea 3 y B. 215

NOMENCLATURA

Símbolo	Definición
a	Longitud de grieta
B	Espesor de las probetas estandarizadas
BEM	Método del elemento frontera
Δa	Incremento de la longitud de la grieta
ΔK	Rango del factor de intensidad de esfuerzos
ΔK_{eff}	Rango del factor de intensidad de esfuerzos efectivo
DPG	Dirección de propagación de la grieta
E	Módulo de elasticidad
FIE	Factor de intensidad de esfuerzos
G	Módulo de esfuerzo cortante
K	Factor de intensidad de esfuerzos
K_{eq}	Factor de intensidad de esfuerzos equivalente
K_I	Factor de intensidad de esfuerzos en modo I de fractura
K_{II}	Factor de intensidad de esfuerzos en modo II de fractura
K_{III}	Factor de intensidad de esfuerzos en modo III de fractura
K_{IC}	Factor de intensidad de esfuerzo crítico, tenacidad a la fractura

Kg	Kilogramo
KN	Kilo Newton
L	Longitud de la arista del elemento Isoparamétrico singular
m	metro
MED	Método de extrapolación de desplazamientos
MEF	Método del elemento finito
mm	milímetro
MPa	Mega Pascales
MRP	Maza de rueda portadora
$N_i^{(e)}$	Función de forma del nodo i en el elemento e
Probeta ESET	Del ingles eccentrically loaded single edge tension specimen
r	Distancia medida desde la punta de la grieta
STC	Sistema de transporte colectivo metro
U_x, U_y	Desplazamientos en las direcciones x, y
ν	Relación de Poison
ρ	Densidad
ϵ_x, ϵ_y	Deformaciones en las direcciones x, y

σ_{rr}	Esfuerzo normal en la dirección radial
$\sigma_{\theta\theta}$	Esfuerzo normal en la dirección tangencial
$\tau_{r\theta}$	Esfuerzo cortante en el plano radial tangencial
σ_x	Esfuerzo normal en la dirección x
σ_y	Esfuerzo normal en la dirección y
σ_{yp}	Esfuerzo de Cedencia
σ_{YS}	Esfuerzo a la tensión
λ	Operador de Laplace
XFEM	Método del elemento finito extendido

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1 Mejora de la velocidad de procesamiento y de la capacidad de memoria de los sistemas computacionales [5].	11
Tabla 2.1 Parámetros para el análisis numérico realizado en ABAQUS	36
Tabla 2.2 Parámetros para la simulación numérica realizada en FORTRAN	38
Tabla 2.3 Parámetros para la simulación numérica realizada en FORTRAN	40
Tabla 2.4 Parámetros utilizados para el análisis numérico	42
Tabla 2.5 Parámetros utilizados para el análisis numérico en ABAQUS	43
Tabla 2.6 Propiedades mecánicas del material de la probeta compacta a tensión	45
Tabla 2.7 Parámetros para la simulación numérica	46
Tabla 2.8 Parámetros utilizados para el análisis numérico de la placa rectangular de acero	48
Tabla 2.9 Parámetros y condiciones utilizadas para el análisis numérico	49
Tabla 2.10 Parámetros utilizados para la simulación numérica en FORGE 2D	51
Tabla 2.11 Parámetros utilizados para el análisis numérico en BERSAFE	52
Tabla 2.12 Parámetros para la simulación numérica realizada en ABAQUS	54
Tabla 2.13 Parámetros para la simulación numérica	56
Tabla 2.14 Parámetros para la simulación numérica realizada en ABAQUS	58
Tabla 2.15 Parámetros utilizados para el análisis numérico	60
Tabla 2.16 Parámetros utilizados para el análisis numérico	61
Tabla 2.17 Parámetros utilizados para el análisis numérico en NASTRAN	63
Tabla 2.18 Parámetros para la simulación numérica del chasis realizada en ABAQUS	64
Tabla 2.19 Parámetros utilizados para la simulación numérica utilizando X-FEM	66
Tabla 2.20 Parámetros utilizados para la simulación numérica utilizando el método de elemento frontera	68
Tabla 2.21 Parámetros utilizados para la simulación numérica utilizando XFEM	69
Tabla 4.1 Ventajas y Desventajas de los diferentes tipos de elementos para la generación de las mallas	109
Tabla 4.2 Propiedades mecánicas del acero	115
Tabla 4.3 Constantes C y m utilizadas en la ecuación empírica de P. Paris	116
Tabla 4.4 Condiciones, cargas y restricciones utilizados en las simulaciones	119

Tabla 4.5 Criterios para la obtención del FIE equivalente K_{eq} debido a la aplicación de cargas de modo mixto.....	131
Tabla 4.6 Secuencia y número de veces de aplicación de las cargas de frenado e impacto por recorrido.....	137
Tabla 4.7 Longitud total del recorrido de las líneas 1,3 y B	138
Tabla 4.8 Resultados de la vida útil de la MRP obtenidas por Y. T. Tlapalama Fuertes...	140
Tabla 5.1 Refinamiento de las mallas del modelo de la probeta realizado en HYPERMESH 13.0	141
Tabla 5.2 Factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} obtenidos aplicando cargas de 3.82 kN	143
Tabla 5.3 Factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} obtenidos aplicando cargas de 7.85 kN.	145
Tabla 5.4 Ángulos de propagación de la grieta obtenidos aplicando las cargas de 3.82 kN y 7.85 kN	148
Tabla 5.5 Número de ciclos de aplicación de las cargas con magnitudes de 3.82 kN y 7.85 kN	152
Tabla 5.6 Factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} obtenidos en la probeta con un barreno aplicando una carga de 3.82 kN	154
Tabla 5.7 Ángulos de propagación de la grieta en la probeta con un barreno central, obtenidos aplicando una carga de 3.82 kN.....	157
Tabla 5.8 Número de ciclos de aplicación de las cargas en la probeta con un barreno central utilizando cargas de 3.82 kN	161
Tabla 5.9 Factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} obtenidos en la probeta con dos barrenos, aplicando una carga de 7.85 kN.....	163
Tabla 5.10 Ángulos de propagación de la grieta obtenidos en la probeta con dos barrenos aplicando una carga de 3.82 kN.....	166
Tabla 5.11 Número de ciclos de aplicación de las cargas con magnitudes de 7.85 kN	169
Tabla 5.12 Incremento del tamaño de la zona plástica aplicando las cargas de 7.85 kN y 3.82 kN	171
Tabla 5.13 Análisis comparativo del factor de intensidad de esfuerzos (K_I) obtenidos experimental y numéricamente, aplicando una carga de 3.82 kN.....	174

Tabla 5.14 Análisis comparativo del factor de intensidad de esfuerzos (K_I) obtenidos experimental y numéricamente, aplicando una carga de 7.85 kN	176
Tabla 5.15 Comparación del número de ciclos obtenidos experimental y numéricamente en la probeta sin barrenos utilizando una carga de 3.82 kN.....	182
Tabla 5.16 Comparación del número de ciclos obtenidos experimental y numéricamente en la probeta sin barrenos utilizando cargas de 7.85 kN.....	183
Tabla 5.17 Comparación del número de ciclos obtenidos experimental y numéricamente en la probeta con un barreno central utilizando una carga de 3.82 kN	184
Tabla 5.18 Comparación del número de ciclos obtenidos experimental y numéricamente en la probeta con dos barrenos centrales utilizando una carga de 7.85 kN.....	185
Tabla 5.19 Resultados del análisis numérico de la aplicación de las cargas de impacto y frenado en la probeta.	186
Tabla 5.20 Resultados del análisis de la vida total de la MRP.....	187

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Desarrollo en los métodos numéricos (gráfica superior) y los sistemas computacionales (gráfica inferior). [5, 6].....	12
Figura 1.2 Procedimiento para la aplicación de una simulación numérica para la solución de problemas de ingeniería.....	14
Figura 1.3 Ejemplo de una discretización del dominio de un problema	15
Figura 1.4 Requerimientos e interdependencias para la simulación numérica de problemas ingenieriles	17
Figura 1.5 Interdisciplinariedad de la simulación numérica de problemas de ingeniería	17
Figura 1.6 Metodología general utilizada para el análisis numérico	26
Figura 3.1 Elemento diferencial de la probeta ESET.	73
Figura 3.2 Elemento diferencial en donde se muestran los esfuerzos normales y cortantes.	74
Figura 3.3 Sistema coordenado con origen la punta de la grieta.	82
Figura 3.4 Sistema coordenado en coordenadas polares con origen en la punta de la grieta	90
Figura 3.5 Campo de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta.	92
Figura 3.6 Determinación del sentido positivo o negativo del ángulo de propagación utilizando el FIE para cargas del modo II.....	95
Figura 4.1 Metodología General para el análisis numérico.....	97
Figura 4.2 Dimensiones de la probeta para el análisis de la propagación de las grietas en la MRP.....	107
Figura 4.3 Modelo de la probeta ESE (T).	107
Figura 4.4 Elemento Isoparamétrico de puntos cuartos cuadrangular (a) y triangular (b) de dos dimensiones.....	111
Figura 4.5 Determinación del tamaño de malla para discretizar los alrededores de la punta de la grieta	112
Figura 4.6 Elemento QUAD8.....	113
Figura 4.7 Elemento TRIA6.....	114
Figura 4.8 Discretización de la probeta ESE(T) y refinamiento de las mallas en los alrededores de la punta de la grieta	114

Figura 4.9 Gráfica de la tasa de propagación de las grietas en el material A216 de la MRP obtenida por Pérez Cervantes	115
Figura 4.10 MRP de los vagones de los trenes del SRC Metro.....	118
Figura 4.11 Mordazas y equipo utilizado para la aplicación de las cargas en la probeta...	118
Figura 4.12 Restricciones y cargas utilizadas en el análisis numérico	120
Figura 4.13 Interfaz gráfica del algoritmo para el análisis numérico de la propagación de las grietas.	121
Figura 4.14 Probetas utilizadas para el análisis numerio y experimental de la dirección de propagación de las grietas y el número de ciclos	123
Figura 4.15 Diagrama de flujo del proceso utilizado para el análisis del FIE y la DPG	124
Figura 4.16 Interfaz gráfica para el análisis de resultados desarrollada en PYTHON.....	126
Figura 4.17 Nodos cercanos a la punta de la grieta para determinar el FIE utilizando el método de extrapolación de desplazamientos	128
Figura 4.18 Extrapolación lineal del FIE a la punta de la grieta	129
Figura 4.19 Nodos cercanos a la punta de la grieta para determinar el FIE utilizando el método de extrapolación de desplazamientos y elementos isoparamétricos de puntos cuartos	130
Figura 4.20 Criterios para determinar el K_{eq} debido a cargas de modo mixto	131
Figura 4.21 Curva de propagación de las grietas, propuesta por P. Paris	134
Figura 4.22 Sección del algoritmo computacional para aplicar dos cargas, la cual fue utilizada para determinar la vida remanente de la MRP del STC metro.	139
Figura 5.1 Factores de intensidad de esfuerzo obtenidos aplicando una carga de 3.82 kN	147
Figura 5.2 Factores de intensidad de esfuerzo aplicando una carga de 7.85 kN	147
Figura 5.3 Dirección de propagación de la grieta aplicando una carga de 3.82 kN	150
Figura 5.4 Dirección de propagación de la grieta aplicando una carga de 7.85 kN.....	151
Figura 5.5 Factores de intensidad de esfuerzo en la probeta con un barreno central de 10 mm de diámetro aplicando una carga de 7.85 kN	156
Figura 5.6 Dirección de propagación de la grieta en la probeta con un barreno central, aplicando una carga de 3.82 kN.....	160
Figura 5.7 Factores de intensidad de esfuerzo en la probeta con dos barrenos aplicando cargas de 7.85 kN	165
Figura 5.8 Dirección de propagación de la grieta aplicando una carga de 3.82 kN.....	168

Figura 5.9. Crecimiento del tamaño de la zona plástica aplicando las cargas de 7.85 kN y 3.82 kN 172

Figura 5.10 Factor de intensidad de esfuerzos (K_I) obtenido experimental y numéricamente, aplicando una carga de 3.82 kN..... 178

Figura 5.11 Factor de intensidad de esfuerzos (K_I) obtenido experimental y numéricamente, aplicando una carga de 7.85 kN..... 178

Figura 5.12 Dirección de propagación de la grieta, obtenida experimental y numéricamente en la probeta..... 179

Figura 5.13 Dirección de propagación de la grieta, obtenida experimental y numéricamente en la probeta con un barreno..... 180

Figura 5.14 Dirección de propagación de la grieta, obtenida experimental y numéricamente en la probeta ESE (T) con dos barrenos 180

Capítulo 1 . INTRODUCCIÓN

El análisis numérico es una rama de las matemáticas que utiliza algoritmos iterativos para obtener soluciones aproximadas de problemas o procesos del mundo real y están compuestos de un número de pasos finitos que se ejecutan de manera lógica para solucionar el modelo matemático del problema analizado.

La solución de problemas de ingeniería, en algunas ocasiones, no es posible aplicando métodos analíticos o exactos, debido a que los modelos matemáticos que los representan involucran operaciones algebraicas complejas como sistemas de ecuaciones no lineales o sistemas de ecuaciones diferenciales, haciéndolos difíciles de resolver. Sin embargo, con la utilización de los métodos numéricos, estos problemas pueden ser solucionados, con operaciones aritméticas y lógicas programadas en los sistemas computacionales.

Una de las áreas de la ingeniería beneficiada con la creación y desarrollo de los métodos numéricos, en últimas décadas, es la mecánica de la fractura [1, 2] que es una disciplina en constante crecimiento debido a que busca asegurar la integridad y confiabilidad de las máquinas y componentes mecánicos durante la operación de estos. En el análisis de la propagación de las grietas en materiales sólidos el método de elemento finito, MEF, es utilizado ampliamente. Esta técnica se utiliza para predecir el factor de intensidad de esfuerzos alrededor de la punta de las grietas, así como también para determinar la dirección de propagación de las grietas, números de ciclos y la longitud crítica de las grietas con la finalidad de obtener la vida remanente de un material agrietado. Las ventajas que ofrecen las computadoras modernas de alta resolución y los códigos de los métodos numéricos para resolver los problemas de la mecánica de la fractura son de gran utilidad en la investigación y en la solución de problemas prácticos de ingeniería, debido a que se obtienen resultados de forma más sencilla y rápida que un análisis experimental.

1.1 Desarrollo y evolución de los métodos numéricos

La posibilidad de obtener soluciones aproximadas mediante la aplicación de métodos numéricos a la formulación matemática que representa el comportamiento de un problema,

ya era conocida desde el siglo XIX, los matemáticos Gaus y Euler pueden ser mencionados como unos de sus pioneros [3, 4]. Sin embargo, estos métodos no pudieron ser aprovechados adecuadamente debido a la alta cantidad de operaciones aritméticas requeridas y la falta de computadoras. Fue con el desarrollo de los sistemas computacionales que estos enfoques numéricos ganaron importancia. Este desarrollo tecnológico de los sistemas computacionales fue muy rápido, y puede ser medible con base a la evolución de los últimos 60 años, en el número de operaciones de punto flotante y de la capacidad de memoria. En la Tabla 1.1 se muestra la evolución de los sistemas computacionales, en términos de la velocidad de procesamiento y en la capacidad de memoria, desde la primera computadora hasta nuestros días.

Tabla 1.1 Mejora de la velocidad de procesamiento y de la capacidad de memoria de los sistemas computacionales [5].

Año	Computadora	Operaciones de punto flotante por segundo (Flops)	Espacio de Memoria (Bytes)
1949	EDSAC 1	1×10^2	2×10^3
1964	CDC 6600	3×10^6	9×10^5
1976	CRAY 1	8×10^7	3×10^7
1985	CRAY 2	1×10^9	4×10^9
1997	Intel ASCI	1×10^{12}	3×10^{11}
2002	NEC Earth simulator	4×10^3	1×10^{13}
2005	IBM Blue Gene/L	3×10^{14}	5×10^{13}
2009	IBM Blue Gene/Q	3×10^{15}	5×10^{14}

Sin embargo, no solo la evolución en los sistemas computacionales ha tenido una influencia crucial en el desarrollo de los métodos numéricos, sino también el continuo desarrollo de nuevos algoritmos. Esto es más evidente cuando se compara el desarrollo en ambas áreas en los últimos años como se muestra en la Figura 1.1. Es importante mencionar que las capacidades de mejora con respecto a un mejor modelado numérico del problema o procesos a investigar también deben mencionarse en este contexto.

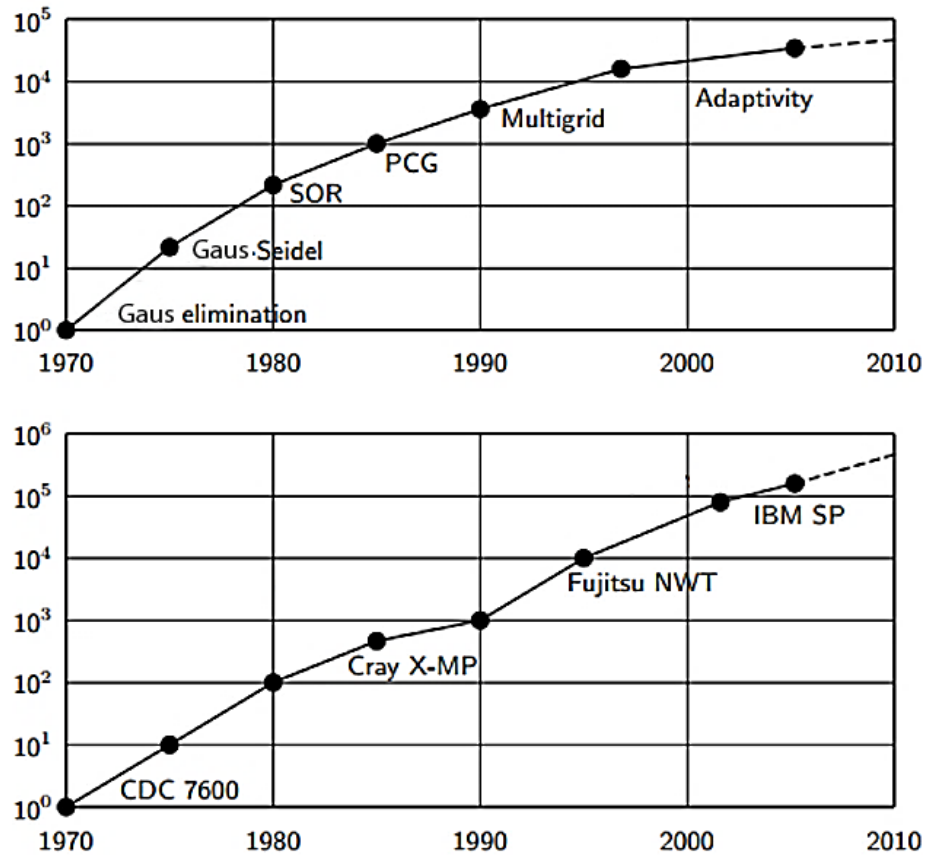


Figura 1.1 Desarrollo en los métodos numéricos (gráfica superior) y los sistemas computacionales (gráfica inferior). [5, 6]

Hoy en día, todavía no se vislumbra el final de estos desarrollos, debido a que día a día:

- Las computadoras son cada vez más rápidas (mayor número de procesadores, velocidades de reloj más altas) y la capacidad de memoria aumentará simultáneamente.
- Los algoritmos numéricos serán cada vez más eficientes (p. Ej., Mediante conceptos de adaptabilidad).
- Las posibilidades de un mejor modelado numérico y matemático de los problemas reales mejorarán aún más mediante la asignación de datos de medición más exactos y detallados.

Con base en los puntos anteriores, es fácilmente predecible que las capacidades de la simulación numérica continuaran mejorando en el futuro.

Acompañado de estos avances logrados, las aplicaciones de los métodos de simulación numérica en la industria aumentan rápidamente. Se puede esperar que esta tendencia sea aún

más pronunciada en el futuro. Sin embargo, con las mayores posibilidades también aumenta la demanda de simulaciones de problemas cada vez más complejos. Esto a su vez significa que la complejidad de los métodos numéricos y el software correspondiente aumentan aún más. Por lo tanto, como ya es el caso en los últimos años, este campo será un área de investigación y desarrollo muy demandada en el futuro previsible. Un aspecto importante en este contexto es que los desarrollos que se realizan con frecuencia en las universidades se ponen rápidamente a disposición para su uso eficiente en el campo industrial.

Con base en los desarrollos antes mencionados, se puede suponer que en el futuro habrá una demanda en continuo crecimiento de especialistas calificados, que puedan aplicar métodos numéricos de manera eficiente para problemas industriales complejos. Un aspecto importante aquí es que las posibilidades y también las limitaciones de los métodos numéricos y el correspondiente software de las computadoras para el área de aplicación respectiva sean evaluados adecuadamente.

1.2 Aplicación de los métodos numéricos en problemas de ingeniería

Con la finalidad de ejemplificar los aspectos importantes durante la utilización de técnicas de simulación numérica en la solución de problemas ingenieriles, en la Figura 1.2 se muestra el proceso general para la aplicación de una simulación numérica.

El primer paso consiste en el modelado matemático apropiado de los procesos a investigar o, en el caso de que se use un paquete de programas existente, en la elección del modelo que mejor se adapte al problema. Este aspecto debe considerarse crucial, ya que la simulación generalmente no obtendrá un resultado correcto si no se basa en un modelo adecuado.

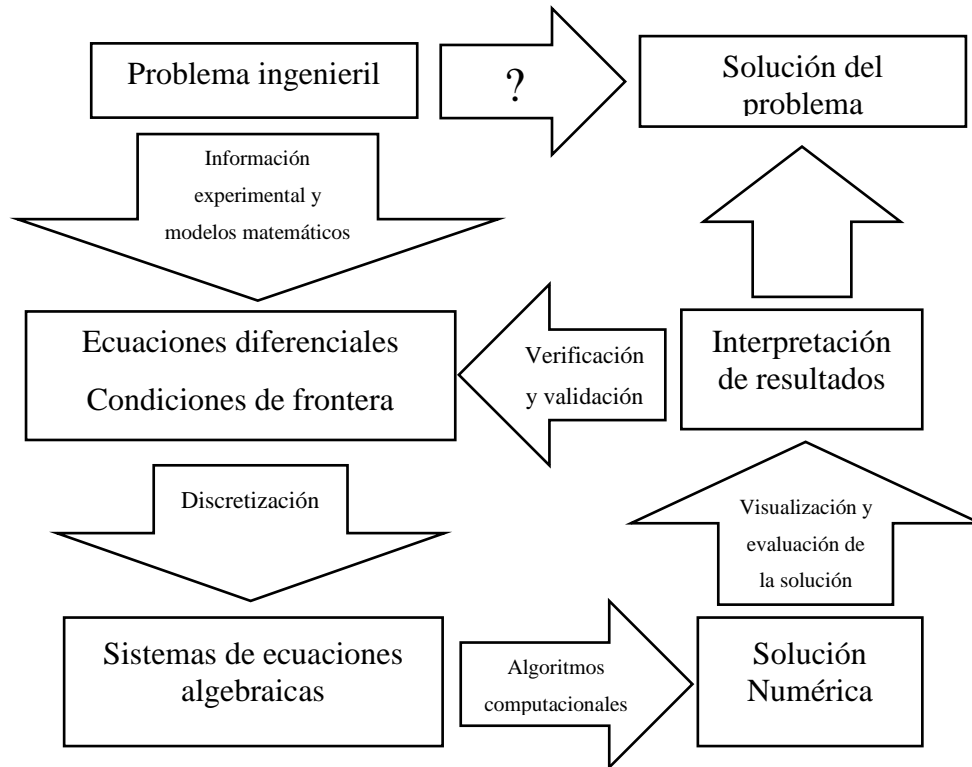


Figura 1.2 Procedimiento para la aplicación de una simulación numérica para la solución de problemas de ingeniería

El problema continuo que resulta del modelado (generalmente sistemas de ecuaciones diferenciales o integrales derivadas en el marco de la mecánica del continuo) debe entonces aproximarse adecuadamente mediante un problema discreto, es decir, las cantidades desconocidas a calcular deben ser representadas por un número finito de valores. Este proceso, el cual es llamado discretización principalmente involucra dos tareas importantes.

- La discretización del dominio del problema.
- La discretización de las ecuaciones.

La discretización del dominio del problema aproxima el dominio continuo (en espacio y tiempo) por un número finito de subdominios (ver Figura 1.3), en el cual se determinan los valores numéricos para las cantidades desconocidas. El conjunto de relaciones para el cálculo de estos valores se obtiene mediante la discretización de las ecuaciones, que aproxima los sistemas continuos por discretos. En contraste con una solución analítica, la solución numérica produce un conjunto de valores relacionados con el dominio del problema discretizado a partir del cual se puede construir la aproximación de la solución.

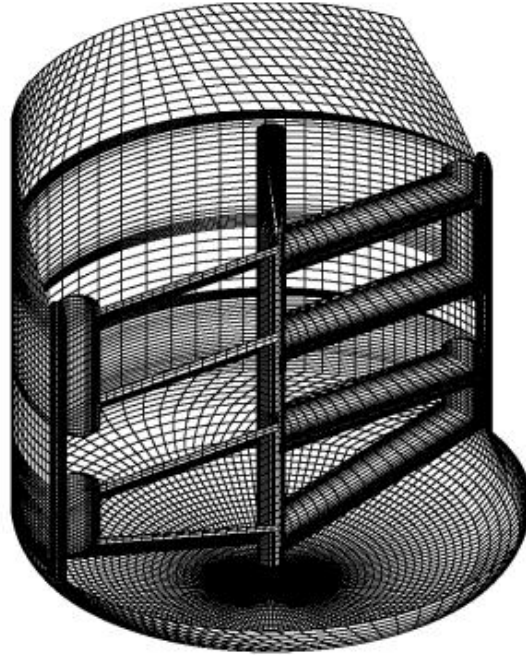


Figura 1.3 Ejemplo de una discretización del dominio de un problema

Existen principalmente tres diferentes enfoques [3, 7] para el procedimiento de discretización:

- Método de diferencias finitas (MDF)
- Método de elemento finito (MEF)
- Método de volumen finito (MVF)

En la práctica, actualmente se emplean principalmente el MEF y el MVF. Donde el MDF se usa predominantemente en el área de mecánica estructural, el MVF domina en el área mecánica de fluidos. EL FDM actualmente es el menos utilizado, pero lo sigue siendo en problemas en donde se necesita discretizar el tiempo. Debe observarse que existen otros métodos de discretización, por ejemplo, métodos espectrales o métodos sin malla, que se usan para fines especiales.

El siguiente paso en el proceso de simulación consiste en la solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas donde frecuentemente se enfrenta con ecuaciones con muchas incógnitas (mientras más incógnitas, más exacto será el resultado numérico). Aquí, los algoritmos y, por supuesto, las computadoras entran en juego.

El cálculo obtenido del análisis, en primera instancia, da como resultado una gran cantidad de números, que normalmente no se entienden intuitivamente. Por lo tanto, para la evaluación de los resultados calculados es importante una visualización e interpretación adecuada de los resultados. Para este propósito, están disponibles paquetes de software especiales, que al igual que los métodos numéricos, han alcanzado un estándar relativamente alto.

Después de que los resultados están disponibles en una forma interpretable, es esencial inspeccionar su calidad. Durante todos los pasos anteriores, los errores se introducen inevitablemente, y es necesario aclarar su cantidad (por ejemplo, experimentos de referencia para el error del modelo, cálculos sistemáticos de errores numéricos). Aquí, dos preguntas deben ser distinguidas:

- Validación: ¿Fueron las ecuaciones formuladas adecuadamente para el modelado matemático del problema?
- Verificación: ¿Las ecuaciones se resolvieron correctamente?

A menudo, después de la validación y verificación, es necesario adaptar el modelo o repetir el cálculo con una mejor precisión de discretización.

En resumen, se puede afirmar que, en relación con la aplicación de métodos numéricos para problemas de ingeniería, los siguientes puntos son de particular importancia:

- Modelado matemático de procesos mecánicos continuos.
- Desarrollo y análisis de algoritmos numéricos.
- Implementación de métodos numéricos en códigos informáticos.
- Adaptación y aplicación de métodos numéricos a problemas concretos.
- Validación, verificación, evaluación e interpretación de resultados numéricos.

Los requerimientos correspondientes y sus interdependencias son mostrados en la Figura 1.4

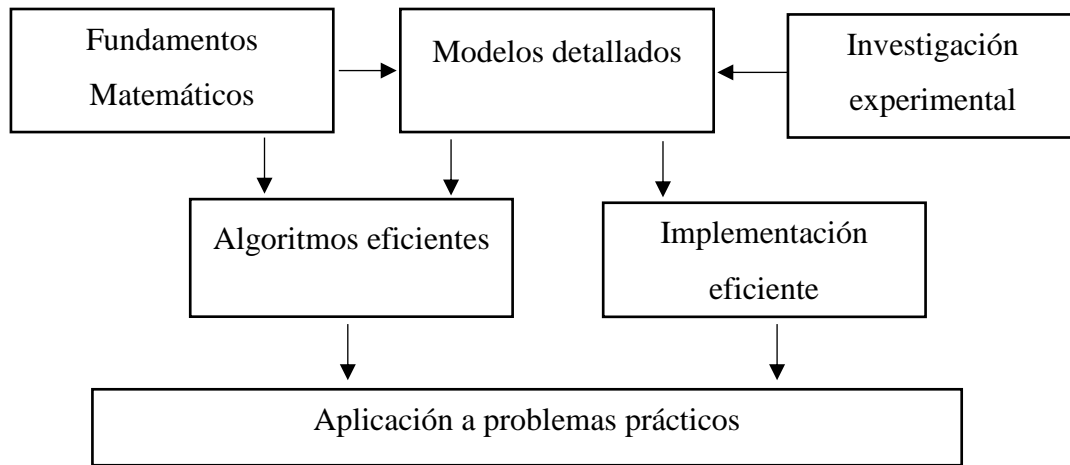


Figura 1.4 Requerimientos e interdependencias para la simulación numérica de problemas ingenieriles

Con respecto a las consideraciones anteriores, se puede decir que los ingenieros al realizar análisis numéricos se enfrentan a un campo fuertemente interdisciplinario, en el cual están involucrados aspectos de la ciencia de la ingeniería, las ciencias naturales, las matemáticas numéricas y la informática (ver figura 1.5). Un prerequisite importante para el uso exitoso y eficiente de los métodos de simulación numérica es, en particular, la interacción eficiente de las diferentes metodologías de las diferentes áreas involucradas.

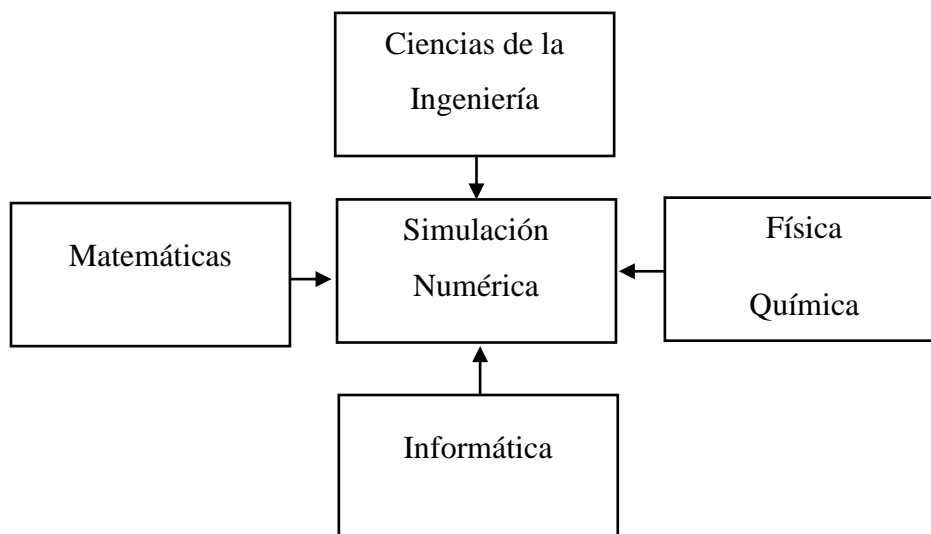


Figura 1.5 Interdisciplinariedad de la simulación numérica de problemas de ingeniería

1.3 Aplicación de los métodos numéricos en la mecánica de la fractura

Un método numérico es un algoritmo mediante el cual es posible formular y darle respuesta a un problema del mundo real a través de su transformación a un modelo matemático, para después mediante el uso de operaciones aritméticas y lógicas, obtener su solución aproximada con una cierta precisión, es decir, con un error lo suficientemente pequeño y próximo a cero.

Incorrectamente se piensa que el desarrollo tecnológico computarizado es quien ha creado los métodos numéricos, pero los orígenes de estos son muy antiguos, datan de miles de años atrás, cuando los babilonios construyeron tablas matemáticas y elaboraron efemérides astronómicas. Pero es importante mencionar que fue hasta el desarrollo y surgimiento de las computadoras en los años cuarenta que estos enfoques matemáticos hicieron una notable contribución a las ciencias, teniéndose con esto la capacidad de realizarse una gran cantidad de cálculos en un tiempo breve y de manera automática. Debido a estos enormes progresos en la tecnología informática, su uso en diversos campos de investigación gana cada vez más importancia, en particular, los aplicados a las disciplinas en donde el análisis numérico ofrece una manera rentable para la optimización de productos y procesos, encontrando así aplicaciones de los métodos numéricos en los ámbitos más diversos, desde sectores tecnológicos como la ingeniería estructural o la aerodinámica, hasta aplicaciones más sofisticadas como ingeniería de alimentos, ingeniería médica, diseño de fármacos, biología, entre otras.

Hoy en día, los países con un alto desarrollo tecnológico como lo son Estados Unidos, Alemania, Inglaterra, Japón, etc. invierten alrededor del 2.56 % de su PIB en ciencia y tecnología, permitiéndose con esto, tener los recursos económicos suficientes para la investigación en distintas áreas científicas y tecnológicas que son de su mayor importancia, una de las cuales es la industria del transporte, debido básicamente a la gran cantidad de personas que requieren trasladarse diariamente y que cada año va en aumento, teniendo la necesidad de implementar nuevos métodos y medios de transporte así como la optimización de los ya existentes.

La solución de este tipo de problemas se lleva a cabo mediante la creación de trabajos científicos que analizan y proponen alternativas para el diseño de sistemas y componentes, en donde el análisis numérico, es una herramienta que ayuda al proceso de diseño, realizando cálculos iterativos, reduciendo así el uso de métodos experimentales para su validación y optimizando los recursos materiales para su fabricación, siendo una de las principales áreas de investigación el estudio de la fractura total por fatiga de los componentes, debido a que resulta fundamental determinar criterios, sustentados científicamente, de cuándo una pieza debe retirarse de operación, antes que ésta falle de manera inesperada y por ende causar cuantiosos daños materiales, ambientales y, en algunas ocasiones, humanos. Ejemplos de esto, son los estudios que actualmente se hace en la industria automotriz, para la predicción de la vida útil de distintos componentes sometidos a cargas variables y cíclicas que en su mayoría tienen que cumplir con un periodo de operación de hasta 200,000 km, asimismo en el sector aeronáutico en donde el análisis de grietas y su propagación en los componentes del fuselaje y motor juega un papel muy importante para asegurar la integridad estructural de distintas aeronaves y asimismo de los pasajeros.

En México, el uso y desarrollo de métodos numéricos es un campo de investigación nuevo, el cual no se ha aplicado ampliamente, es importante señalar que a pesar de que existen trabajos científicos de la aplicación de distintos métodos en el país, su aplicación en la mecánica de la fractura por fatiga ha sido realizada de manera aislada y los métodos utilizados para este tipo de análisis son desarrollados en países con un alto avance tecnológico, quienes elaboran y comercializan software para la solución de problemas en torno al diseño y optimización de componentes mecánicos. Es evidente entonces la dependencia tecnológica y científica que se tiene hacia estos países, para la realización de este tipo de estudios.

En la industria mexicana en general y específicamente en la del transporte existe la necesidad de realizar estudios de esta índole, que por medio de un análisis numérico se ayudaría a dar una respuesta rápida a la solución de problemas como en la predicción del comportamiento de componentes bajo ciertas condiciones de operación. Un ejemplo de esto son los problemas en la industria del transporte en México, particularmente en el Sistema de Transporte Colectivo Metro (STCM) de la Ciudad de México, en donde gran parte de sus componentes mecánicos no cuentan con criterios sustentados científicamente para su retiro de operación,

el cual se determina con base a la experiencia. Por consiguiente, este criterio empírico no puede seguir siendo considerado para asignar el tiempo de retiro de las piezas, teniéndose entonces la posibilidad de aplicar un análisis numérico para obtener un criterio de vida útil para estos componentes.

1.4 ALCANCE

El alcance de esta tesis es realizar un análisis del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas en el material de la maza de la rueda portadora de los vagones del Sistema de Transporte Colectivo Metro de la Ciudad de México utilizando la mecánica de la fractura y métodos numéricos.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 OBJETIVO GENERAL

- Determinar el factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas en el material con el cual está fabricada la maza de la rueda portadora de los vagones que conforman el Sistema de Transporte Colectivo Metro aplicando el método de elemento finito

1.5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar un análisis bibliográfico de la propagación de las grietas en elementos mecánicos utilizando métodos numéricos.
- Seleccionar el método numérico más adecuado para el análisis de la dirección de propagación de grietas.
- Desarrollar una metodología para el análisis numérico de la dirección de propagación de grietas en componentes mecánicos.
- Desarrollar un algoritmo computacional para el análisis del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas, en función del número de veces de aplicación de las cargas.
- Determinar el factor de intensidad de esfuerzos durante la propagación de las grietas.
- Determinar el ángulo de propagación de las grietas.
- Determinar el tamaño de la zona plástica
- Comparar los resultados obtenidos numéricamente con los resultados obtenidos experimentalmente.
- Determinar la longitud crítica de las grietas en la MRP del STC Metro
- Determinar la vida remanente y total de la MRP del STC Metro

1.6 ANTECEDENTES

El primer antecedente de esta tesis es el trabajo presentado en el año 2012 por el M. en C. Felipe de Jesús Reséndiz Núñez [8] titulado “Análisis dinámico modal aplicando el método del elemento finito utilizando mallas híbridas para determinar el tamaño crítico de las grietas en la brida de maza de rueda portadora de los vagones del Metro” En este trabajo se presentó la obtención del factor de intensidad de esfuerzos para diferentes tamaños de grietas en la brida mayor de la MRP, aplicando el método de elemento finito, con la finalidad de determinar el tamaño crítico de las grietas.

El segundo antecedente del presente trabajo de investigación fue la tesis del M. en C. Tlapalama Fuertes Y. T. [9], la cual se titula “Análisis de la iniciación de grieta por fatiga de la maza de rueda portadora de los vagones del Sistema de Transporte Colectivo Metro, utilizando métodos numéricos y experimentales”. En esta tesis se presenta el análisis del inicio de las grietas en la maza de rueda portadora, aplicando métodos analíticos, experimentales y numéricos. En este trabajo se determinó que el inicio de las grietas en la brida mayor de la MRP ocurre después de que los vagones del STC metro de las líneas 1,3 y B recorren 949,513 km (de 6.08 a 6.59 años), 859,992 km (de 5.51 a 5.97 años) y 1, 195,952 km (de 7.66 a 8.30 años), respectivamente.

1.7 APORTACIONES

- Desarrollo de la formulación matemática del factor de intensidad de esfuerzos para la probeta, en función de los desplazamientos de los alrededores de la punta de la grieta.
- Desarrollo de una metodología para el análisis numérico del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas, en función de la longitud de las grietas y el número de ciclos de aplicación de las cargas.
- Desarrollo de un algoritmo computacional automatizado para el análisis de la propagación de las grietas de componentes mecánicos agrietados, desarrollado en los lenguajes de programación TCL/TK y PYTHON.
- Desarrollo de una interfaz gráfica para el análisis de resultados del factor de intensidad de esfuerzos, la dirección de propagación de las grietas y el número de ciclos de aplicación de las cargas.
- Determinación de la vida remanente y total de la Maza de Rueda Portadora de los vagones de los trenes del metro de la ciudad de México.

1.8 METODOLOGÍA GENERAL

La metodología general utilizada para la realización de esta investigación se compone de los siguientes pasos principales:

- 1) Análisis bibliográfico relacionado con los métodos para determinar el factor de intensidad de esfuerzos, la dirección de propagación de las grietas y la tasa de propagación de las grietas.
- 2) Selección del método para determinar el factor de intensidad de esfuerzos, la dirección y tasa de propagación de las grietas.
- 3) Formulación de los modelos matemáticos de siguientes:
 - Ecuaciones de equilibrio en función de los esfuerzos normales y cortantes.
 - Ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos.
 - Ecuaciones para determinar el campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta en función de los desplazamientos.
 - Ecuaciones para determinar el ángulo de propagación de las grietas en función del factor de intensidad de esfuerzos.
- 4) Determinación del modelo numérico a partir de las formulaciones matemáticas realizadas anteriormente.
- 5) Desarrollo del algoritmo computacional para el análisis de la propagación de las grietas.
- 6) Determinación numérica del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas en función de la longitud de la grieta y del número de aplicación de las cargas.
- 7) Validación experimental del algoritmo computacional.
- 8) Determinación de la longitud crítica de las grietas en función del número de ciclos de aplicación de las cargas de impacto y frenado en la maza de rueda portadora del STC metro.
- 9) Determinación de la vida remanente y total de la maza de rueda portadora.

En la Figura 1.6 se presenta la metodología general para el análisis de la dirección propagación de las grietas en el material A216, además de la obtención de la vida remanente y útil de la maza de rueda portadora de los vagones de los trenes del STC Metro.

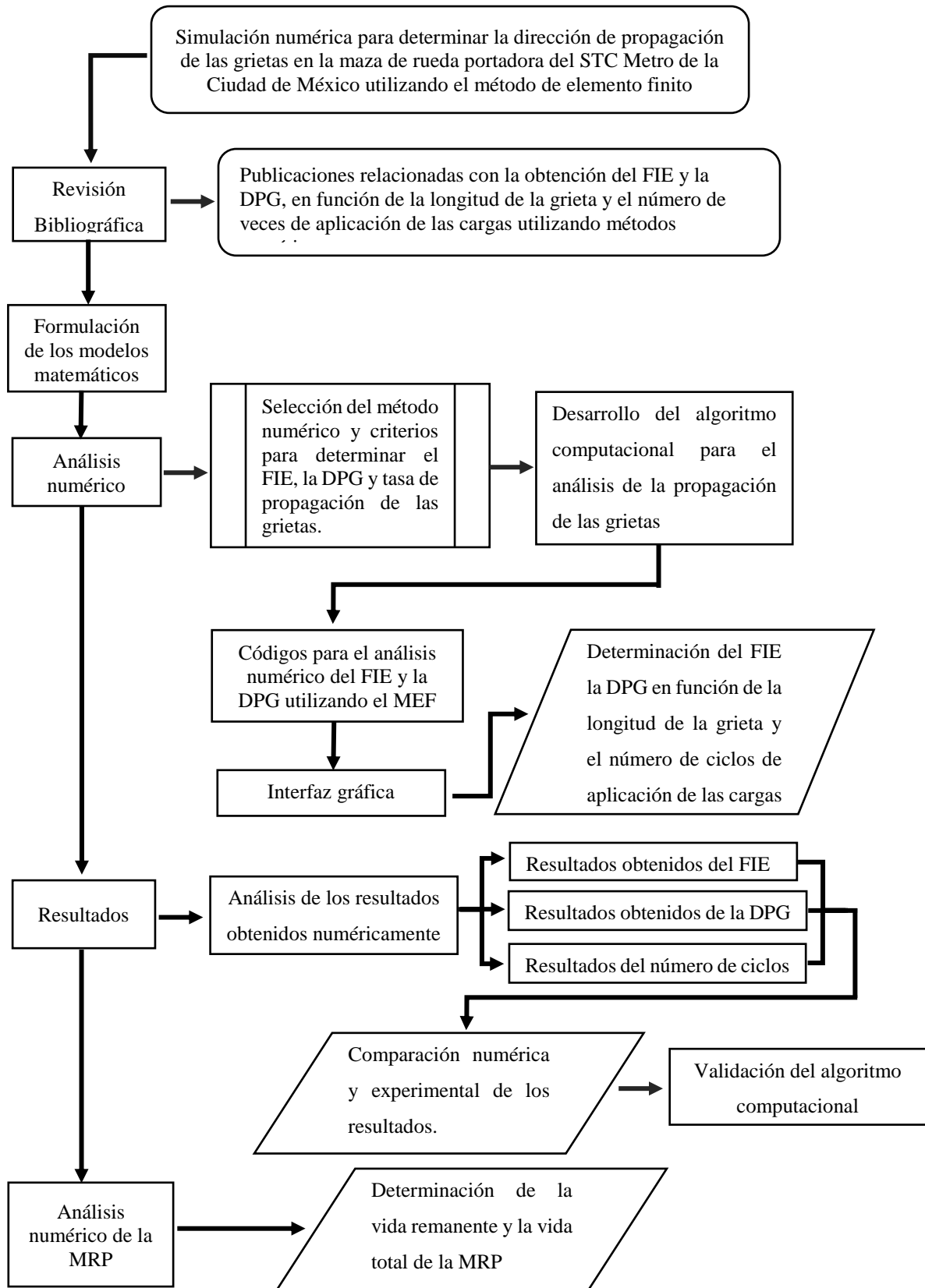


Figura 1.6 Metodología general utilizada para el análisis numérico

Capítulo 2 . ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta un análisis bibliográfico de los métodos numéricos y criterios utilizados para la obtención del factor de intensidad de esfuerzos, la dirección de propagación de las grietas y la determinación de la vida remanente en elementos mecánicos agrietados bajo la aplicación de cargas cíclicas.

El factor de intensidad de esfuerzos (FIE) es uno de los parámetros más importantes para aplicación de la mecánica de la fractura lineal elástica en el análisis de componentes agrietados. En el análisis de un componente agrietado se requiere obtener la concentración de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta, siendo el FIE el valor que representa la magnitud de estos esfuerzos. La obtención del FIE permitirá conocer la velocidad y dirección de propagación de las grietas presentes en un componente sometido a cargas de fatiga, con la finalidad de asignar un criterio de retiro del mismo.

Existen diferentes métodos para determinar el FIE y la dirección de propagación de las grietas (DPG), estos métodos se clasifican en:

- I. Métodos Analíticos
- II. Métodos Experimentales
- III. Métodos Numéricos

Los métodos analíticos y experimentales han sido utilizados ampliamente desde comienzos del siglo XX en el análisis de elementos agrietados. Sin embargo, los métodos numéricos han incrementado su importancia y aplicación en los últimos 50 años con el desarrollo de nuevos y mejores sistemas de cómputo.

2.1.1 Métodos Analíticos

El método analítico es un método de investigación que consiste en el análisis del componente mecánico, descomponiéndolo en elementos para observar las causas, la naturaleza y los efectos de los esfuerzos en la zona de nucleación de las grietas. El análisis

es basado en cálculos matemáticos en donde se consideran las variables significativas que intervienen en el problema y se apoya en herramientas como gráficos y manuales de distintas geometrías de piezas.

Existen diferentes métodos analíticos para determinar el FIE y DPG. Los más importantes para determinar el FIE son: el método analítico de Irwin [1, 10] el método de Wigglesworth [11] y el método de superposición [12]. Mientras que, para determinar el ángulo de propagación de las grietas, los principales son: el método analítico de Erdogan y Sih [13] y el método de Sih [14].

El método de Irwin para determinar el FIE se basa en la energía almacenada en un elemento agrietado, es decir a partir de la carga aplicada al elemento se calcula el incremento que tienen los esfuerzos en la punta de la grieta, este método se utiliza principalmente en el análisis de placas con un solo tipo de grieta. El método de Wigglesworth, se utiliza para determinar la concentración de esfuerzos en placas con grietas laterales, utilizando una serie de coeficientes de expansión de la distribución de los esfuerzos. Sin embargo, el método analítico más utilizado para determinar los esfuerzos en componentes agrietados es el de superposición. Este método utiliza el principio de superposición de la teoría de la elasticidad lineal, el cual consiste en dividir los diferentes tipos de cargas a las que está sometido un elemento mecánico en eventos individuales, calculando los esfuerzos en el componente debido a la aplicación de cada tipo de carga por separado, para después de ser sumados sean equivalentes al elemento sometido a las cargas originales. Para los casos más sencillos existen tablas, formulas y gráficos de componentes agrietados al descomponer el problema original como combinaciones de los casos más simples.

Los métodos analíticos más importantes para la determinación de la trayectoria de propagación son el método del esfuerzo tangencial máximo propuesto por Erdogan y Sih, y el método de la energía de deformación propuesto por Sih, el primer método establece que la grieta se propagara en la dirección en la cual el esfuerzo tangencial en los alrededores de la grieta sea máximo. En cambio, el método analítico desarrollado por Sih, basado en la energía de deformación en los alrededores de la punta de las grietas, determina que las grietas se propagaran en la dirección en la cual la energía de deformación sea mínima.

2.1.2 Métodos Experimentales

Los métodos experimentales son utilizados en los casos en donde la complejidad de la geometría del elemento mecánico y las cargas que se le aplican al elemento hacen que las soluciones analíticas para determinar el FIE y la DPG se vuelven muy grandes y costosas. Además, cuando se inicia una investigación utilizando métodos numéricos, lo recomendable es validar experimentalmente los resultados obtenidos numéricamente, con la finalidad de confiar en los resultados presentes y futuros.

Actualmente existen varios métodos experimentales para determinar los esfuerzos alrededor de la punta de una grieta y por consiguiente el FIE y la DPG, entre los principales se pueden mencionar el de extensimetría, fotoelasticidad, Moiré, complianza y el de holografía digital [7, 8, 11].

2.1.3 Métodos Numéricos

En las últimas décadas los métodos numéricos han tenido un gran avance debido a la evolución de las computadoras y al desarrollo de nuevos métodos de cálculo. La mecánica de la fractura es una de las áreas de estudio de la Mecánica que se ha visto beneficiada por este gran avance computacional, de modo que el modelado numérico se ha convertido en una herramienta indispensable para el análisis de cuerpos agrietados debido a la complejidad asociada con la obtención analítica o experimental de la distribución del campo de deformaciones y esfuerzos en los alrededores de la punta de las grietas. Sin embargo, es importante mencionar que a pesar de que los métodos numéricos hoy en día son imprescindibles para el análisis de cuerpos agrietados, estos no reemplazan los métodos experimentales, si no los complementan.

Los métodos numéricos ofrecen ventajas con respecto a los métodos experimentales, por ejemplo, el ahorro en el tiempo de preparación y realización de pruebas, las condiciones de operación, materiales y geometrías empleadas en los análisis pueden ser modificadas fácilmente. Además, no se requieren consumibles ni la renta o adquisición de equipos especializados.

Los métodos numéricos aplicados en el campo de la mecánica de la fractura permiten calcular la concentración de esfuerzos alrededor de la punta de las grietas y a partir de estos valores calcular el factor de intensidad de esfuerzos (FIE), la trayectoria de propagación (DPG), y finalmente la vida remanente (VR) del componente estudiado.

A continuación, se presenta una descripción de los dos métodos numéricos más utilizados para el análisis de elementos agrietados.

2.1.3.1 Método del elemento frontera

El método del elemento frontera [14,15] (BEM por sus siglas en inglés) o método de la integral de frontera es un método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales parciales basado en la formulación de las ecuaciones integrales del problema; a diferencia del MEF, en el BEM no es necesario discretizar el interior del dominio estudiado, pues sólo se requiere de la aproximación numérica en la superficie del componente mecánico. Este método resulta particularmente ventajoso sobre el MEF en la solución de problemas de mecánica de fractura debido a la facilidad para incorporar de manera directa la singularidad existente en la punta de la grieta y particularmente en el manejo de la propagación de la grieta, puesto que en el FEM cada vez que cambia la geometría de la grieta es necesario remallar todo el dominio, mientras que en el BEM solamente es necesario agregar nuevos elementos en los alrededores de la punta de la grieta.

Por otra parte, tomando en cuenta las dimensiones, el BEM reduce un grado la dimensión del problema. Por ejemplo, para problemas bidimensionales, el análisis genera una ecuación integral de frontera unidimensional y para problemas tridimensionales, resulta una integral de superficie en dos dimensiones.

Hasta comienzos de la década de 1980, el método del elemento frontera fue conocido como el método de las ecuaciones integrales, teniendo su origen en el trabajo de Green publicado en 1828 [15], en el cual se formula la representación integral de la solución de problemas de Dirichlet y Neumann en la ecuación de Laplace, introduciendo la llamada función de Green.

No obstante, el origen del método del elemento frontera podría ser atribuido a Fredholm, quien a comienzos del siglo XX utilizó ecuaciones integrales para encontrar valores en la

frontera de problemas de la teoría potencial [16]. Sin embargo, fue hasta los años sesenta con el desarrollo computacional que el BEM comenzó a tomar importancia en la solución de problemas en ingeniería. Unos de los primeros trabajos considerados como los inicios del método del elemento frontera como una técnica computacional fueron publicados en 1963 por Symm [17] y Jaswon [18], quienes utilizaron las ecuaciones de Fredholm para resolver problemas de la teoría del potencial en dos dimensiones.

Una de las primeras aplicaciones del BEM en el campo de la mecánica de la fractura, específicamente en el análisis de componentes agrietados fue realizada por Cruse en 1972 [19], quien analizó el FIE en placas de acero con grietas centradas, sometidas a cargas de tensión, obteniendo resultados con una precisión del 14% en relación con los resultados experimentales.

Una de las aplicaciones más significativas del BEM en el análisis de componentes agrietados fue desarrollada por Lachat [20] en 1975, quien desarrolló una nueva formulación de un elemento frontera isoparamétrico, obteniendo resultados similares a los experimentales y probaba que el BEM era un método eficiente para solucionar problemas con configuraciones sofisticadas.

A partir de la década de los ochentas el desarrollo del método tomo un creciente impulso en su aplicación en el campo de la mecánica de la fractura. Sobresalen algunas publicaciones como la de Tan y Fenne [21] que 1980 utilizaron el BEM en el análisis de cuerpos agrietados para calcular el FIE en los alrededores de la punta de las grietas presentes en secciones cilíndricas. Sladek y Balas [4] en 1989 estudiaron el efecto de las cargas estáticas, y dinámicas en la propagación de grietas. Posteriormente Tanaka [22] analizó el manejo de la singularidad que se presenta en las ecuaciones integrales de frontera y Beskos [23] que presentó una revisión de la utilización del método en problemas de propagación de grietas.

En 1988 Cruse publicó uno de los primeros libros relacionados con la solución de problemas de mecánica de la fractura aplicando el BEM

El método de elemento frontera es raramente usado en el análisis de grietas en comparación con otros métodos, debido al gran número de recursos computacionales y dificultades en la implementación en la frontera de los elementos.

2.1.3.2 Método de elemento finito

El método de elemento finito (MEF) [1,25] es un método numérico que es utilizado para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el dominio de un sistema físico continuo. El método consiste en modelar un dominio dividiéndolo mediante elementos finitos, los cuales se conectan unos con otros con un número finito de puntos llamados nodos. Los elementos finitos en general deben aproximarse a formas geométricas conocidas para garantizar la definición de sus funciones de forma y poder llegar a ecuaciones de comportamiento conocidas.

Los primeros trabajos para la creación y desarrollo del MEF comenzaron en 1909 cuando Raleigh y Ritz [24] implementaron un método para obtener soluciones aproximadas de problemas de la mecánica del medio continuo. Después en 1943 Courant [25] amplió el método propuesto por Ritz, agregando funciones lineales especiales definidas en regiones triangulares y aplicándolo en problemas de torsión. Posteriormente en 1960 Clough [26], retomando los trabajos de Ritz y Courant, desarrolló su propia metodología para el análisis numérico de en donde utilizo por primera vez el término elemento finito. Sin embargo, no fue sino hasta años posteriores, con el desarrollo y el avance computacional, que el MEF comenzó a tener una mayor aplicación e importancia en la solución de problemas ingenieriles, debido al incremento en la capacidad de resolver ecuaciones de mayor complejidad y con una mayor rapidez. Dentro de este periodo destacan las publicaciones de Melosh [27], Turner [28], Argyris [29], Oden [30] y el primer libro de divulgación académica publicado en 1967 por Zienckwicz y Cheung [31]

En el análisis de problemas de la mecánica de la fractura como lo son la determinación del FIE y el análisis de propagación de las grietas, el MEF ha sido uno de los métodos numéricos más empleados. Una de las primeras aplicaciones del MEF en la mecánica de la fractura fue en el trabajo realizado por Kaplan [32] en 1961 en el análisis de la propagación de grietas en estructuras fabricadas de concreto. Posteriormente en 1962 MacClintock y Walsh [33] analizaron la propagación de las grietas en rocas considerando la fricción entre las superficies de la grieta.

En 1963 Ngo y Scordelis [34] utilizaron un nuevo elemento finito triangular, conocido como elemento de interface, para discretizar la grieta y transmitir las cargas entre los elementos que están a su alrededor.

En los años 70's la aplicación del MEF en el campo de la mecánica de la fractura estaba limitado al uso de computadoras, las cuales en su mayoría solo se encontraban en instituciones privadas, debido a esta limitante algunos investigadores desarrollaron nuevas metodologías para la simplificación y discretización de elementos agrietados. En 1970 In Chan utilizó el método de elemento finito y propuso un refinamiento en la malla para caracterizar mejor la singularidad de la punta de la grieta y calcular con mayor precisión la concentración de esfuerzos. En el mismo año Byskov [35] propuso un nuevo tipo de elemento finito triangular, que contenía una grieta en su interior, destinada para representar de una mejor manera las discontinuidades en los elementos agrietados, en comparación con las metodologías desarrolladas hasta esa fecha.

En 1971 Tracey [36] utilizó elementos finitos triangulares y funciones de forma polinomiales para la representación de los desplazamientos en los alrededores de la punta de la grieta, obteniendo resultados similares a los de las pruebas experimentales, esta publicación fue considerada como uno de los trabajos más importantes en la determinación del FIE en los alrededores de la punta de la grieta hasta ese momento.

Más tarde en 1972 Shah and Kobayashi [37] propusieron una nueva metodología para el estudio de grietas, el cual combinaba los resultados analíticos y los resultados numéricos obtenidos utilizando el MEF, con la finalidad de obtener expresiones matemáticas para la determinación del FIE.

En 1973 Pian y Tong [38] utilizaron mallas híbridas para la discretización de componentes agrietados, de los resultados de la publicación se observó que la utilización de mallas híbridas para el análisis del FIE, incrementa la precisión de los resultados numéricos además de una reducción en el tiempo de procesamiento para la obtención de resultados.

Dos años más tarde, Hellen [39] desarrolló el método virtual de la extensión de la grieta para determinar el FIE y la DPG utilizando la teoría de la tasa de liberación de la energía propuesta años antes por Griffith e Irwin.

El siguiente paso en la evolución del estudio de componentes agrietados utilizando el MEF fue desarrollado por Hillerborg en 1976, quien propuso un nuevo tipo de elemento conocido como el elemento discreto agrietado, siendo una mejora del elemento finito propuesto años atrás por Ngo y Scordelis [34], este elemento finito simulaba la DPG, dividiendo los elementos finitos presentes en la discretización de un elemento agrietado reduciendo el tiempo de discretización en cada incremento de la extensión de la grietas.

Al igual que Hillerborg, Henskell y Shaw [40] a finales de 1976 desarrollaron un nuevo elemento finito para modelar de una forma más precisa la singularidad en la punta de las grietas, este elemento fue nombrado como el elemento singular o elemento de puntos cuartos, el cual presentó la ventaja de describir de una mejor manera los desplazamientos en los alrededores de la punta de la grieta debido a que uno de sus nodos medios fue trasladado un cuarto de distancia en dirección a la punta de la grieta. Posteriormente Barsoum [41] en 1977 utilizó la misma formulación del elemento singular para su uso en elementos cuadrangulares.

En los años posteriores destacan publicaciones como las de Rybicki Y Kanninen [42], Pian [43], Petroski y Anchenbach [44] y principalmente la de Ownes y Fawkes [45] en donde se presentan los principales métodos para el cálculo del FIE usando el MEF como lo son: la integral J, el método de la extensión virtual de la grieta y el de extrapolación de desplazamientos.

En años recientes las modificaciones desarrolladas al MEF para su utilización en el análisis de componentes agrietados han sido reflejadas en el desarrollo de nuevas metodologías de cálculo, una de ellas es el método de elemento finito extendido (XFEM por sus siglas en inglés), el cual fue desarrollado en 1999 por Belytschko [46], utilizando el método de la partición de la unidad presentado por Melek y Babuska en 1996, el cual establece que la suma de las funciones de forma de un elemento finito debe ser igual a 1 [47], este método permitió a Belytschko la adición de funciones discontinuas para encontrar una mejor aproximación numérica para la solución del FIE y la DPG. Una de las principales ventajas del XFEM es el modelado de las grietas como una entidad separada e independiente del resto de la malla. La interacción de las grietas y la malla se producen a través del enriquecimiento de los nodos que pertenecen a los elementos atravesados por la grieta.

2.2 Publicaciones relevantes analizadas con el estudio de componentes mecánicos agrietados.

En la revisión bibliográfica se encontraron diversas publicaciones [47-69] relacionadas con la aplicación de los métodos numéricos para la obtención del FIE, la DPG y la VR de componentes agrietados debido a la aplicación de cargas cíclicas.

En algunas publicaciones como la presentada por Erik Hojfeldt y Carl B. Ostervig [48], entre otros [49, 50, 51] se presentan distintas metodologías utilizadas en el análisis numérico para el análisis de la propagación de la grieta de distintos elementos mecánicos, en las cuales los principales aspectos estudiados en las publicaciones fueron: el FIE durante la propagación de la grieta, la dirección y velocidad de propagación de las grietas (DPG Y VPG) y la vida remanente.

El FIE en las publicaciones analizadas fue determinado aplicando el MEF y el BEM para lo cual se utilizaron diferentes tipos de elementos finitos para la discretización de los de los elementos estudiados, entre los cuales destacan: elementos finitos triangulares y cuadrangulares de primer y segundo orden utilizados en las publicaciones de Q. Han [52] entre otras [53-56], y elementos de cuarto de punto utilizados en las publicaciones de B. Liu [53] entre otras [51,58].

Independientemente del método numérico (MEF o BEM) utilizado en las publicaciones para el análisis de los componentes agrietados, se requirió la utilización de diversos criterios para calcular el FIE y la DPG, para el análisis del FIE se utilizaron los métodos de extrapolación de desplazamientos (MED), extrapolación de esfuerzos (MEE), cierre virtual de grietas (MCVG) y la integral J. Mientras que para el análisis de la DPG se utilizaron los métodos de esfuerzo tangencial máximo (ETM), energía de deformación mínima (EDM) y el de extensión virtual de la grieta (EVG). Finalmente, para la determinación de la VR de los componentes se utilizaron las ecuaciones empíricas de Paris, Forman y NASGROW.

A continuación, se muestran los análisis de las publicaciones más relevantes en las que se determina el FIE, la DPG y la vida remanente de distintos elementos mecánicos, utilizando los métodos anteriormente mencionados.

2.2.1 Determinación del factor de intensidad de esfuerzos y de la dirección de propagación de las grietas.

Erik Hojfeldt y Carl B. Ostervig [48], presentan el análisis numérico de la propagación de las grietas por fatiga en ejes mecánicos sometidos a cargas de flexión. Los FIE para los modos de carga I, II y III en la punta de la grieta son calculados a partir de los desplazamientos obtenidos mediante análisis numéricos aplicando el método de elemento finito. Los resultados obtenidos del análisis de la propagación de la grieta son comparados con pruebas experimentales realizadas en una maquina servo-hidráulica.

Para el análisis de la propagación de la grieta se utilizó el criterio de mínima densidad de energía de deformación desarrollado por Sih con la finalidad de determinar la DPG y el método de extrapolación de desplazamientos para calcular el FIE para los 3 modos de carga. En la Tabla 2.1 se presentan los parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.1 Parámetros para el análisis numérico realizado en ABAQUS

Componentes del modelo de elemento finito	Eje solido con dos diámetros diferentes a lo largo de su sección
Tipos de elementos para discretizar el modelo	Hexaédricos de 8 nodos
Tipos de elementos para discretizar la punta de la grieta	Hexaédricos de 20 nodos de tipo cuarto punto
Número de elementos en la punta de la grieta	6
Módulo de elasticidad	210 000 MPa
Coefficiente de Poison	0.3
Número de nodos y elementos	1160 y 1990

Del procedimiento utilizado en la publicación para analizar la propagación de las grietas se observa que el criterio de energía de deformación mínima es un método confiable para la evaluación de la dirección de propagación de la grietas, sin embargo, computacionalmente requiere de mucho tiempo de procesamiento debido a que necesitan de muchas iteraciones,

para evaluar cada dirección de propagación en cada incremento de la longitud de la grieta, puesto que se necesita evaluar la energía de deformación en todas las direcciones posibles alrededor de la punta de la grieta, para determinar la dirección que tiene la menor energía de deformación.

En el trabajo realizado por V.E Saouma [49], se presenta el análisis numérico utilizando el método de elemento finito para determinar la trayectoria de propagación de las grietas y la vida remanente de una placa fabricada de aluminio sometida a cargas de tensión. Para el análisis numérico se utilizó el programa computacional FORTRAN para el desarrollo de un algoritmo para analizar la propagación de las grietas en componentes mecánicos.

El procedimiento utilizado en el programa computacional para el análisis de la propagación de las grietas por fatiga y la predicción de la vida remanente consistió en la obtención del FIE en los alrededores de la punta de la grieta, a partir de los esfuerzos calculados en los puntos de integración de los elementos utilizados para discretizar la punta de la grieta, a partir de los esfuerzos el ángulo de propagación fue calculado. EL modelado numérico de la propagación de la grieta fue realizado utilizando incrementos de la extensión de la grieta propuestos, es decir la extensión de la grieta no era calculada automáticamente por el algoritmo. La falla total de la probeta fue considerada cuando el FIE efectivo debido a la aplicación de las cargas correspondientes con los modos I y II, alcanzaba el valor de la tenacidad a la fractura. En el artículo no se menciona si la tenacidad a la fractura del material fue obtenida a partir de la norma ASTM E654 o utilizando la norma ASTM E399.

A partir de las iteraciones obtenidas para modelar la propagación de la grieta cada una con su respectiva longitud y FIE efectivo, se gráfica una curva ΔK_{eff} vs la longitud de la grieta utilizando el método de mínimos cuadrados para interpolar todos los resultados obtenidos. La gráfica de interpolación obtenida anteriormente se utilizó para graficar la ecuación de Paris y obtener una gráfica del número de ciclos N, en términos de la longitud de la grieta.

El FIE para las cargas de modo I y II fueron calculados para cada incremento de la extensión de la grieta utilizando las ecuaciones propuestas por Irwin que representan el campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta en términos de los desplazamientos. El FIE efectivo debido a las cargas de modo I y II fue obtenido utilizando el criterio de Irwin y

siendo este, el valor que se comparó con la tenacidad a la fractura del material para determinar el inicio de la propagación inestable de la grieta.

El ángulo de propagación de la grieta fue calculado utilizando las ecuaciones del esfuerzo circunferencial máximo propuesto por Sih. Este criterio nos indica que la grieta se propagara desde su punta en la dirección Θ_c , la cual es perpendicular a la dirección del esfuerzo circunferencial máximo $\sigma_{\Theta_{\max}}$. El esfuerzo circunferencial en la dirección de propagación un esfuerzo principal. En la Tabla 2.2 se muestran las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.2 Parámetros para la simulación numérica realizada en FORTRAN

Software utilizado	FORTRAN
Componente evaluado	1 placa con un barreno
Dimensiones de la placa	Espesor: 0.25 in Diámetro del barreno: 0.75in Ancho de la probeta: 1.85 in Tamaño de la grieta inicial 4 mm
Tipo de elementos utilizados para discretizar la válvula	Elementos singulares cuadrangulares de esfuerzo plano
Elementos usados en la punta de la grieta	Elementos isoparamétricos de puntos cuartos
Propiedades mecánicas del material	Aluminio 2024T851 E=72 GPa Poisson = 0.3
Esfuerzo de tensión aplicado	39 MPa

Los resultados de la tasa de propagación de la grieta y de la ecuación de Paris obtenidos del análisis numérico de la placa fueron comparados con los resultados de análisis experimentales.

De lo resultados obtenidos se observa que la gráfica de longitud de la grieta vs número de ciclos obtenida del análisis numérico utilizando 9 incrementos de grieta tiene un

comportamiento similar a la gráfica de propagación de grieta obtenida experimentalmente, en contraste la gráfica obtenida numéricamente utilizando solo 5 incrementos de grieta tiene un gran margen de error con la experimental. Este resultado afirma el hecho de que al utilizar un incremento de longitud de grieta más pequeño en el análisis numérico se obtendrán resultados más precisos para la determinación de la vida remanente del componente, debido a que se calcularán en mayor cantidad de ocasiones los distintos cambios del ángulo de la propagación de la grieta y del FIE.

En este estudio se observa la utilización de elementos de dos dimensiones en lugar de 3 para discretizar la geometría y los alrededores de la punta de la grieta, a pesar de que la placa es un sólido sometido a cargas de tensión, esto fue debido a que la placa tiene un espesor pequeño en comparación con sus otras dimensiones (largo y ancho), asumiendo con esto que la placa se encuentra en un estado de esfuerzo plano, es decir no existe un esfuerzo en la dirección normal a la superficie de la placa, tomando esto en consideración el problema se simplifica de un estado de esfuerzos tridimensional a uno bidimensional.

También se observa que el mallado en la punta de la grieta fue refinado utilizando un tamaño de elemento de malla de 1/10 de la longitud inicial de la grieta. Sin embargo, no se observa la utilización de un patrón constante para discretizar los alrededores de la punta de la grieta como el observado en otras publicaciones utilizando círculos concéntricos, en consecuencia se debe utilizar un tamaño de malla aún más pequeño que 1/10 de la longitud total de la grieta para compensar la falta de un patrón de mallado constante, realizando esto se debe tomar en cuenta que el tiempo de procesamiento para la solución del modelo de elemento finitos aumentara debido a una mayor cantidad de grados de libertad y por lo tanto un mayor número de ecuaciones por resolver.

Finalmente se observa la utilización de la ecuación de París para determinar la velocidad de propagación de la grieta, la cual fue calculada numéricamente obteniendo el FIE a ciertas longitudes de grieta. Las constantes C y m de la ecuación de Paris fueron obtenidas del análisis experimental utilizando la norma ASTM E647. Los resultados obtenidos del análisis numérico de la propagación de la grieta fueron graficados en una curva de tasa de propagación vs FIE efectivo.

En la publicación A. Wawrznek y Anthony R. Ingraffea [50], se presenta una metodología utilizando el método de elemento finito para la discretización de los alrededores de la punta de la grieta para cada incremento de su longitud durante su propagación en componentes mecánicos. El algoritmo de discretización de componentes agrietados fue diseñado e implementado en el programa computacional FRANC2D. La metodología para la discretización de los alrededores de la punta de la grieta fue implementada en una placa agrietada sometida a cargas de tensión, el procedimiento de discretización y análisis de la propagación de la grieta consistió de discretizar el componente utilizando elementos cuadrangulares de dos dimensiones, discretizando los alrededores de la punta de la grieta con elementos triangulares, con un tamaño de elemento de al menos 1/10 de la longitud total de la grieta, después se aplicaron condiciones de frontera y cargas a la placa, se resolvió el sistema de ecuaciones del modelo de elemento finito con la finalidad de obtener los desplazamientos alrededor de la punta de la grieta, posteriormente se calcularon los factores de intensidad de esfuerzos para los modos de cargas I y II a partir de los desplazamientos obtenidos del paso anterior se obtuvo el ángulo de propagación de la grieta utilizando los FIE obtenidos anteriormente.

Los factores de intensidad de esfuerzos para las cargas de modo I y II fueron calculados para cada incremento de la extensión de la grieta utilizando el criterio de extrapolación de desplazamientos propuesto por Irwin y utilizando elementos finitos isoparamétricos de puntos cuartos para discretizar la región de la punta de la grieta. El ángulo de propagación de la grieta fue calculado utilizando las ecuaciones del esfuerzo circunferencial máximo propuesto por Sih. En la Tabla 2.3 se muestran las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.3 Parámetros para la simulación numérica realizada en FORTRAN

Software utilizado	FRAC2D
Componente evaluado	1 placa con un barreno
Dimensiones de la placa	Espesor: 2mm Diámetro del barreno: 0.64 cm

	Ancho de la placa: 6.35 cm Largo de la placa: 15.90 cm Tamaño de la grieta inicial 2 mm
Tipo de elementos utilizados para discretizar la placa	Elementos singulares cuadrangulares de esfuerzo plano
Elementos usados en la punta de la grieta	Elementos isoparamétricos de puntos cuartos.
Carga de tensión aplicada	4.45 kN

En el estudio se observa que la discretización de las regiones alrededor de la grieta es realizada con elementos triangulares tanto para la punta como para el resto de la grieta, debido a que es el elemento finito más simple y con menor número de nodos para representar superficies, por esta razón fue el elemento utilizado para “remallar” para cada incremento de la grieta las regiones en donde los elementos eran eliminados.

El método propuesto por el artículo para discretizar la región alrededor de la grieta para cada incremento de su longitud, depende de un algoritmo matemático, el cual como se describió anteriormente genera nuevos elementos en el lugar donde fueron previamente eliminados, es decir no se discretiza el componente completamente para cada incremento de la longitud de la grieta. Obteniéndose mejoras en la disminución del tiempo de discretización, al solo mallar una zona para cada propagación de la grieta. Sin embargo, la principal desventaja de este método es que la calidad de los elementos finitos que se generan no es buena, como se observa en las figuras de la publicación algunos elementos finitos están deformados excesivamente ocasionando que los desplazamientos y esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta no sean precisos.

En este estudio se observa la utilización de elementos de dos dimensiones para discretizar la geometría y los alrededores de la punta de la grieta, a pesar de que la placa es un sólido sometido a cargas de tensión, esto fue debido a que la placa tiene un espesor pequeño en comparación con sus otras dimensiones (largo y ancho), asumiendo con esto que la placa se encuentra en un estado de esfuerzo plano, es decir no existe un esfuerzo en la dirección

normal a la superficie de la placa, tomando lo anterior en consideración el problema se simplifica de un estado de esfuerzos tridimensional a uno bidimensional.

En la publicación de Dragi Stamenkovic [51] se presenta el análisis del FIE utilizando el método de elemento finito y el criterio de la integral J. El análisis fue realizado en dos placas de aluminio con grietas centradas sometidas a cargas axiales. En la Tabla 2.4 se muestran las condiciones y parámetros utilizados para la realización del análisis numérico de ambas placas.

Tabla 2.4 Parámetros utilizados para el análisis numérico

Software utilizado	ANSYS
Tipos de probetas evaluadas	2 probetas rectangulares con grieta centrales
Dimensiones de las probetas	Largo 127 mm Ancho 127 mm Espesor 1mm Tamaño de la grieta 4 mm
Tipo de elementos finitos	Elementos singulares cuadrangulares de esfuerzo plano
Elementos usados en la punta de la grieta	Elementos singulares cuadrangulares y triangulares
Propiedades mecánicas del material	E=74 GPa Poison = 0.3
Esfuerzo de tensión	90 MPa

De los resultados de la publicación se observa que el criterio de la integral J para la obtención del FIE no requiere el uso de elementos isoparamétricos de cuarto punto para la división de la región alrededor de la punta de la grieta, esto es debido a que la integral J evalúa las fuerzas y esfuerzos presentes en el contorno seleccionado el cual encierra la punta de la grieta, los elementos isoparamétricos de cuarto punto son solo útiles cuando los desplazamientos desean ser evaluados en una región lo más cercana a la punta de la grieta, como lo es en los métodos de extrapolación de desplazamientos y esfuerzos.

Con el uso del método de la integral J, no es necesario utilizar un tamaño de elemento pequeño para dividir la región alrededor de la punta de la grieta tal y como se observa en la publicación, en donde se utilizó un tamaño de malla de 0.5 mm, el cual es mayor en comparación con el tamaño de elemento necesario para utilizar algún otro criterio para el cálculo del FIE, como lo son el de extrapolación de desplazamientos, extensión de la grieta virtual etc. La utilización de un elemento de malla más grande para discretizar un componente se refleja en un menor número de nodos y grados de libertad en el modelo lo que significa un menor tiempo de procesamiento computacional.

Finalmente observa que el tamaño del contorno seleccionado para el cálculo de la integral J no influye en el valor final del FIE que se obtiene del cálculo, es decir la integral J es independiente del tamaño del contorno seleccionado alrededor de la punta de la grieta.

En la publicación de Q. Han y colaboradores [52] se presenta el análisis de tres diferentes tamaños de grietas en placas de acero, que fueron comunes para las cargas de modo 1. Los factores de intensidad de esfuerzos FIE para cada una de las diferentes placas agrietadas fueron calculados por los métodos de: extrapolación de desplazamientos, extrapolación de esfuerzos, desplazamientos nodales y el método de la integral J, los cuales estuvieron basados en los resultados obtenidos por análisis de elementos finitos, usando diferentes tipos de elementos y densidades de malla. Los autores realizan un estudio de la precisión que ofrece cada método mediante su comparación con soluciones analíticas.

Para la realización del estudio comparativo los autores utilizaron el programa computacional ABAQUS®, con el propósito de crear modelos discretizados de las placas, para obtener el campo de desplazamientos y esfuerzos en la punta de la grieta; se utilizaron elementos de tipo triangulares y cuadrangulares de primer y segundo orden, así como de cuarto punto. Las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico son mostrados en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5 Parámetros utilizados para el análisis numérico en ABAQUS

Dimensiones de la placa	Ancho de placa = 400mm Largo de placa = 1200mm Longitud de la grieta = 20mm
--------------------------------	---

Carga aplicada	Presión de 100 MPa
Propiedades mecánicas del material	E=210 GPa Poisson = 0.3
Tamaño de elementos utilizados	0.5 mm, 1 mm y 2 mm
Tipo de mallas en la punta de la grieta	Elementos finitos Triangulares y Cuadrangulares de primer orden, utilizando patrones de mallas irregulares y de círculos concéntricos en la punta de la grieta

De los resultados obtenidos se observa que los métodos de extrapolación de desplazamientos y esfuerzos obtienen los mismos resultados del FIE, el uso de cualquiera de los dos métodos es indistinto, las diferencias obtenidas entre el análisis numérico y analítico son menores al 10 %, ambos métodos no mostraron un efecto obvio por el uso de elementos triangulares o cuadrangulares en el cálculo del FIE. Sin embargo, la precisión del FIE es altamente afectada cuando tamaños de elemento mayores a 1/10 de la longitud total de la grieta son utilizados para discretizar los alrededores de la punta de la grieta

En el método de desplazamientos nodales la densidad de malla tiene poco efecto en la precisión del valor calculado del FIE. Sin embargo, de acuerdo con los resultados de la publicación el uso de elementos triangulares para discretizar la punta de la grieta genera resultados más precisos, con diferencias entre los análisis numérico y experimental menores al 2 %.

Los valores del FIE obtenidos mediante el método de la integral J correlacionan con los resultados analíticos para todos los 3 tipos de placas, sin importar el tipo de elemento y el tamaño de malla usado. Las diferencias entre los resultados numéricos y analíticos son menores al 1 %.

B. Liu y sus colaboradores [53] presentan el análisis numérico de una probeta compacta a tensión de acero, utilizando el método de elemento finito y el criterio de extrapolación de desplazamientos para calcular el desplazamiento de la apertura de la grieta (DAG) y el FIE con la finalidad de encontrar una relación entre estos dos criterios.

Para el análisis del DPG y del FIE fueron analizadas 5 grietas con longitud y localización distinta, el análisis fue desarrollado utilizando el programa computacional ANSYS, discretizando la probeta con elementos cuadrangulares y refinando el tamaño de elemento en los alrededores de la punta de la grieta. Los factores de intensidad de esfuerzo efectivo para los 3 modos de carga fueron calculados para cada una de las grietas.

Las propiedades mecánicas y las condiciones de frontera son mostradas en la Tabla 2.6.

Tabla 2.6 Propiedades mecánicas del material de la probeta compacta a tensión

Módulo de Elasticidad	218 GPa
Poison	0.33
Densidad	7.78 g/cm ³
Esfuerzo de Cedencia	514 MPa

De los resultados obtenidos de la investigación se observa que el FIE para cargas de modo I (KI) incrementa a medida que la grieta está más cercana al borde en donde la carga es aplicada, con un valor máximo de 800 MPa \sqrt{m} y uno mínimo de 550 MPa \sqrt{m} . También se observa que la magnitud del FIE para cargas de modo 2 (KII) tiene variaciones aproximadamente del 80% con respecto de la posición en la cual se encuentre grietas en la probeta. Alcanzando un valor máximo de 90 MPa \sqrt{m} cuando la grieta se encuentra a 10 mm de distancia de la carga aplicada, esto es debido a que la flexión en ese punto es máxima y por lo tanto se incrementa el deslizamiento entre las caras de la grieta.

El FIE efectivo (Keff) obtenido por el criterio de Irwin para cada una de las grietas varía en la misma forma que (KI) lo hace, es decir el valor de Keff está mayormente influenciado por el cambio en la magnitud de KI. Esto se comprueba al comparar los valores de KI con los de KII en los que se observa que la magnitud del KI es aproximadamente 8 veces mayor para cualquier posición de la grieta en la probeta, es decir el efecto de la carga en la probeta no ocasiona un deslizamiento entre las caras de la superficie suficiente para que el valor de KII sea mayor. Finalmente se observa que el DAG incrementa o disminuye su valor en la misma proporción que lo hace la longitud de la grieta, incrementando al estar la grieta más cercana

al borde de aplicación de la carga y tiene un valor mínimo cuando la grieta se encuentra en medio de la probeta.

A. Wawrztnek y Anthony R. Ingraffea [54], presentan el análisis numérico de la propagación de grietas por fatiga utilizando el método de elemento finito y el programa computacional FRANC2D. El análisis numérico de la propagación de la grieta fue implementado utilizando un algoritmo para la discretización automática de placas grietadas sometida a cargas, durante cada incremento de la longitud de las grietas. La metodología propuesta fue implementada en el análisis de dos placas con barrenos sometidos a cargas de tensión y cortantes para calcular los factores de intensidad de esfuerzo y la DPG. Los resultados del análisis numérico fueron comparados con los obtenidos en otras publicaciones. En la Tabla 2.7 se muestran las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.7 Parámetros para la simulación numérica

Software utilizado	FRAC2D
Componentes evaluados	2 placa con barrenos
Dimensiones de las placas	<p>Espesor: 2mm</p> <p>Diámetro del barreno: 0.5cm</p> <p>Ancho de la placa: 8 cm</p> <p>Largo de la placa: 20 cm</p> <p>Tamaño inicial de la grieta: 1.5 cm</p>
Tipo de elementos utilizados para discretizar la placa	Elementos singulares cuadrangulares de esfuerzo plano
Elementos finitos usados en la punta de la grieta	Elementos isoparamétricos de puntos cuartos
Propiedades mecánicas del material	<p>Acero</p> <p>$E=210$ GPa</p> <p>Poison = 0.33</p>
Carga de tensión aplicada	1 kN

El procedimiento para el análisis de la propagación de grietas consistió en primera lugar de la discretización automática de la placa y de los alrededores de la punta de la grieta, en

segundo lugar, del cálculo de los factores de intensidad de esfuerzos para cargas de modo mixto y finalmente la obtención de la trayectoria de propagación y las nuevas coordenadas de la punta de la grieta para cada incremento propuesto de su longitud.

Se observa la utilización de elementos puntos cuartos para la obtención del FIE para cada incremento de la extensión de la grieta, además de la utilización del método de rigideces para la obtención de los desplazamientos en el modelo de elemento finito.

Del análisis comparativo de los criterios de: correlación de desplazamientos, Integral J y el método del cierre de grieta para el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo se observa que los 3 métodos obtienen resultados similares, no obstante, el método de extrapolación de desplazamientos requiere la utilización de un tamaño de malla más pequeño para discretizar la punta de la grieta lo que se reflejara en un mayor tiempo de procesamiento debido al aumento del número de nodos.

De los resultados de la DPG obtenidos utilizando los criterios de esfuerzo principal máximo, tasa de liberación de energía y densidad de energía de deformación mínima se observa que los 3 métodos obtienen al igual que los utilizados para el cálculo del FIE, resultados similares, sin embargo, el método de esfuerzo principal máximo requiere un menor tiempo de procesamiento debido a que solo se debe obtener el máximo local de la función que representa los esfuerzos alrededor de la punta de la grieta para obtener el ángulo de propagación.

Finalmente se observa que el tiempo de análisis de la propagación de la grieta es reducido considerablemente debido a la automatización del proceso de discretización para cada incremento de la longitud de la grieta, optimizando de esta manera el análisis de la propagación de la grieta.

Mladem Berkovic [55] presenta el análisis del cálculo del FIE utilizando el método de elemento finito para una placa rectangular de acero con una grieta central, para el cálculo del FIE se utilizan los criterios de la tasa de liberación de energía, extrapolación de desplazamientos, extrapolación de esfuerzos y la integral J. Los resultados obtenidos en la publicación fueron comparados con otros estudios similares de diversas publicaciones.

En la siguiente tabla se muestran las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.8 Parámetros utilizados para el análisis numérico de la placa rectangular de acero

Software utilizado	SMS
Dimensiones de la probeta	Largo 16 cm Ancho 8 cm Grieta inicial $a_0 = 2$ mm Espesor = 8 mm
Tipo de elementos utilizados	Elementos singulares cuadrangulares 2D
Tamaño de malla en la punta de la grieta	$a_0/10$
Elementos usados en la punta de la grieta	Elementos singulares triangulares 2D
Propiedades mecánicas del material	$E=210$ GPa Poison = 0.3
Carga aplicada	Tensión – 1 kN

Los 4 criterios analizados en la publicación presentan variaciones de alrededor del 5% comparados con los valores de los estudios analíticos de diversas publicaciones utilizadas como referencia en el análisis. Siendo el criterio de la integral J el método más aproximado con variaciones menores al 2% respecto a las soluciones analíticas y el menos preciso el método de extrapolación de esfuerzos, esto es debido a que los esfuerzos obtenidos numéricamente en el método de elemento finito son derivados de las deformaciones y estas a su vez de los desplazamientos, debido a este proceso, en cada operación aritmética se van perdiendo cifras significativas, las cuales se ven reflejadas en un valor del esfuerzo impreciso. En el análisis numérico se observa la utilización de solo la cuarta parte de la placa para la obtención del FIE, esto es válido puesto que la concentración de esfuerzos en ambos lados de la misma es simétrica debido a las cargas axiales aplicadas en ambos lados, este procedimiento facilita el análisis de esfuerzos y desplazamientos en la punta de la grieta puesto que se tienen menor número de elementos y por consiguiente la cantidad de ecuaciones diferenciales a resolver disminuye.

En la publicación se observa que no se utilizaron elementos isoparamétrico de puntos cuartos para la división de la región de la punta de la grieta, esto fue compensado con un tamaño de elemento más pequeño, siendo un veinteavo de la longitud total de la grieta el seleccionado para discretizar esta región.

El análisis muestra que el método de la integral J puede ser utilizado para calcular el FIE por medio de la relación que esta tiene en su componente elástica con la tasa de liberación de la energía G. La principal ventaja que la integral J tiene con respecto a los otros 3 métodos es que esta no depende de la utilización de un tamaño de elemento pequeño para dividir la región alrededor de la punta de la grieta, además de que el valor del FIE obtenido por este método será el mismo sin importar las dimensiones del contorno seleccionado para la obtención de la energía de disipación de la grieta.

En la publicación de L. Malíková y V. Veselý [56], se presenta el análisis de la DPG utilizando el método de elemento finitos para condiciones de carga mixta. El análisis de propagación es estudiado mediante la aplicación de los criterios de esfuerzo tangencial máximo, densidad de energía de deformación mínima y el criterio del vector de desplazamiento de la punta de la grieta. El análisis numérico fue realizado en una probeta mediana a flexión con una grieta excéntrica sometida a cargas cortantes, utilizando los parámetros mostrados en la Tabla 2.9.

Tabla 2.9 Parámetros y condiciones utilizadas para el análisis numérico

Dimensiones de la probeta	<p>Espesor: 2mm</p> <p>Diámetro del barreno: 0.64 cm</p> <p>Ancho de la placa (W): 40 mm</p> <p>Largo de la placa (L): 200 mm</p>
Elementos finitos utilizados para discretizar la probeta	Elementos cuadrangulares de 8 nodos (PLANE82)
Elementos finitos utilizados para discretizar la punta de la grieta	Elementos triangulares de puntos cuartos (PLANE82)
Propiedades mecánicas del material	<p>$E = 40 \text{ GPa}$</p> <p>$\nu = 0.2$</p>
Magnitud de la carga aplicada	4 kN

De la discretización y el tipo de mallado en la punta de la grieta se observa la utilización de una malla concéntrica compuesta de dos niveles y utilizando elementos finitos triangulares y cuadrangulares. Para la discretización del resto de la probeta se aprecia el uso de elementos cuadrangulares, además se observa que el tamaño de malla reduce su tamaño a medida que se acerca a la punta de la grieta, teniéndose el tamaño de elemento más fino en la punta de la grieta.

Los factores de intensidad de esfuerzos para las cargas de modo I y II fueron calculados para cada incremento de la extensión de la grieta utilizando el criterio de extrapolación de desplazamientos propuesto por Irwin y utilizando elementos finitos isoparamétricos de puntos cuartos para discretizar la región de la punta de la grieta. Se observa que entre más cerca de la punta de la grieta se obtengan los desplazamientos sin llegar a la punta, se obtendrán resultados más precisos en los cálculos del FIE.

De los resultados se observa que al proponer un incremento de la extensión de la grieta más pequeño se obtienen resultados más precisos en el cálculo de la DPG. Esto debido a que se realizan más cálculos del ángulo para una misma trayectoria comparando un incremento de grieta pequeño con uno más grande.

Se observa la utilización de elementos de dos dimensiones para discretizar la geometría y los alrededores de la punta de la grieta debido a que las placas estudiadas tienen un espesor pequeño en comparación con las medidas de su largo y ancho, asumiendo con esto que la placa se encuentra en un estado de esfuerzo plano y simplificando el problema de un estado de esfuerzos de tres dimensiones a uno de dos.

Finalmente se observa que el criterio de esfuerzo tangencial máximo fue el método que obtuvo resultados más precisos para las diferentes combinaciones de excentricidad y longitud inicial de grieta en comparación con los otros dos métodos.

En el trabajo realizado por P.O. Bouchard y colaboradores [57], se presenta el análisis numérico utilizando el método de elemento finito de dos placas agrietadas de acero para determinar la DPG debido a la aplicación de cargas de tensión, utilizando los criterios de esfuerzo tangencial máximo, energía de deformación y el de la tasa de liberación de energía. La DPG para cada incremento de su longitud es modelada utilizando los métodos de

remallado y de relajación nodal implementados en el programa computacional FORGE2. En la Tabla 2.10 se presentan los parámetros y condiciones utilizadas para el análisis numérico.

Tabla 2.10 Parámetros utilizados para la simulación numérica en FORGE 2D

Software utilizado		FORGE 2D
Componente evaluado		2 placa agrietadas, una de ellas con dos barrenos
Dimensiones de las placas	Placa 1	Espesor: no se menciona Ancho de la placa: 10 mm Largo de la placa: 20 mm Tamaño de la grieta inicial 2.5 mm
	Placa 2	Espesor: no se menciona Diámetro del barreno: 6mm Ancho de la placa: 10 mm Largo de la placa: 20 mm Tamaño de las grietas inicial: 1 mm
Tipo de elementos utilizados para discretizar la placa		Elementos singulares triangulares
Elementos usados en la punta de la grieta		Elementos isoparamétricos de puntos cuartos.
Propiedades mecánicas de las placas		E=98000 MPa Poison = 0.3

De los procedimientos realizados por los autores se observa la utilización de un algoritmo de remallado para cada incremento de la propagación de la grieta, cada aumento de su longitud es realizado de manera automática.

Los análisis numéricos para determinar la DPG en las placas muestran que el criterio de la densidad de energía de deformación mínima es el menos preciso en comparación con los otros dos métodos analizados. Los criterios del esfuerzo tangencial máximo y el de la tasa de liberación de la energía obtienen resultados similares además de que el tiempo de procesamiento para cada uno de ellos es equivalente.

Se observa que el criterio del esfuerzo tangencial máximo es la técnica de más fácil implementación utilizando el método de elemento finito, puesto que solo depende del cálculo matemático del máximo local de la función que representa los esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta, reflejándose en un menor tiempo de procesamiento computacional. Sin embargo, este criterio es dependiente del tamaño de malla utilizado para discretizar los alrededores de la punta de la grieta requiriéndose un tamaño de elemento muy pequeño para obtener resultados precisos.

Finalmente se observa que el criterio de la tasa de liberación de energía requiere la utilización de un mallado de tipo concéntrico para discretizar la punta de la grieta, Sin embargo, el tamaño de elementos utilizados puede ser más grande en comparación con los otros dos métodos.

Gorazd Fajdida y Bostjan Zafosnik [58] presentan el análisis de la trayectoria de propagación de grietas en una probeta compacta a tensión sometida a las cargas de modo I y II, para la realización de este estudio los autores utilizaron los criterios de la tasa de liberación de energía máxima, la densidad de energía de deformación mínima y el esfuerzo tangencial máximo para determinar la dirección en la cual la grieta se propagará. Los factores de intensidad de esfuerzo fueron determinados con el método de la tasa de liberación de energía usando la integral J y el método de apertura de la grieta. En la Tabla 2.11 se muestran las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.11 Parámetros utilizados para el análisis numérico en BERSAFE

Software utilizado	BERSAFE
Dimensiones de la probeta	Largo 100 mm Ancho 80 mm Grieta inicial $a_0 = 55$ mm
Tipo de elementos utilizados	Elementos triangulares 2D
Tamaño de malla en la punta de la grieta	$a_0/20$
Elementos utilizados en la punta de la grieta	Elementos triangulares 2D de cuarto punto
Propiedades mecánicas del material	$E=72$ GPa Poisson = 0.33

De los resultados de la publicación se observa que la dirección en la cual se propagara la grieta para los modos I y II utilizando el criterio de máxima tasa de liberación de energía puede ser precedido con exactitud cuándo $K_I > K_{II}$, esto es debido a que si la magnitud del FIE para las cargas del modo 2 es mayor que el de las cargas del modo I, el ángulo de propagación puede ser mayor de 45° , limitando el uso del criterio, debido a que la función se indetermina.

De la misma forma el análisis muestra que el método de la extensión virtual de grieta tiene la restricción de que el máximo ángulo en la cual se puede predecir la extensión de la grieta es hasta 45° , debido a esto será imposible determinar el ángulo de propagación de una grieta cuando esté sometida a solo cargas de modo II debido a que los ángulos de propagación alcanzan valores de hasta 72° .

La obtención del FIE utilizando el método de la tasa de liberación de energía, debe ser calculado teniendo presente que cuando esfuerzos cortantes prevalecen en la punta de la grieta el FIE que se obtenga no será preciso y otro método tendrá que ser utilizado para su cálculo.

En el caso del método de la energía de deformación mínima, los resultados muestran que cuando este criterio es usado para determinar la extensión de la grieta. El segundo mínimo local de la curva de la energía de distorsión debe ser tomado como el mínimo global.

Finalmente se observa que el criterio de esfuerzo máximo tangencial es el método más preciso y eficaz para determinar la propagación de la grieta, debido a que no es dependiente del tipo de cargas aplicado y no tiene restricciones en cuanto al ángulo máximo en el cual puede determinar la propagación de la grieta.

En el trabajo realizado por J.M Alegre y I.I Cuesta [59] , se presenta el análisis del FIE para cargas de modo mixto utilizando el método de elemento finito. Las ecuaciones de que representan el campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta y las del esfuerzo circunferencial máximo fueron utilizadas para determinar el FIE y la DPG para cada incremento de su longitud. El análisis numérico fue comparado con pruebas experimentales realizadas en una válvula de acero sometida a cargas axiales de tensión. En la Tabla 2.12 se muestran las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.12 Parámetros para la simulación numérica realizada en ABAQUS

Software utilizado	ANSYS
Tipos de probetas evaluadas	1 válvula seccionada
Dimensiones de la válvula	No especifica Tamaño de la grieta inicial 4 mm
Tipo de elementos utilizados para discretizar la válvula	Elementos singulares cuadrangulares de esfuerzo plano (PLANE82 en ANSYS)
Elementos usados en la punta de la grieta	Elementos singulares de cuarto punto.
Propiedades mecánicas del material	E=195 GPa Poison = 0.3 Esfuerzo de cedencia= 1050 MPa
Esfuerzo de tensión	90 MPa

Para evaluación del FIE efectivo para los modos de carga I y II se utilizó el criterio de Tanaka. La determinación de la velocidad de propagación de las grietas en la válvula se realizó utilizando la ecuación de Paris-Erdogan y los valores de las constantes C y la m de la ecuación fueron obtenidas de pruebas experimentales realizadas siguiendo los lineamientos de la norma ASTM E647.

Los ángulos de propagación de la grieta fueron determinados utilizando el criterio del esfuerzo circunferencial máximo propuesto por Sih y Erdogan, estas ecuaciones toman en consideración que el crecimiento de la grieta será en la dirección perpendicular al plano en el cual el esfuerzo circunferencial sea mayor.

La metodología propuesta para el análisis del FIE y el ángulo de propagación de la grieta utilizando el método de elemento finito se observa que el FIE debe ser calculado para cada incremento de la longitud de la grieta para las de modo I y II. Posteriormente se calcula el FIE efectivo el cual es comparado con la tenacidad a la fractura del material para determinar el inicio de la propagación de grieta inestable. El ángulo de propagación fue calculado a partir del FIE utilizando las ecuaciones del esfuerzo circunferencial máximo

Las nuevas coordenadas de la punta de la grieta fueron calculadas en coordenadas rectangulares utilizando el ángulo de propagación de la grieta obtenido y el incremento propuesto para la longitud de la grieta.

Los pasos de la metodología propuesta en la publicación fueron realizados de manera manual, es decir los autores realizaron 'n' número de iteraciones hasta alcanzar el valor de la tenacidad a la fractura del material, teniendo que actualizar el modelo geométrico de la probeta con cada nuevo incremento de grieta, para después mallarla y solucionar el modelo de elemento finito. Este procedimiento puede ser optimizado si se desarrolla un algoritmo para la automatización de los procesos descritos entre los pasos 5 y 10 de la metodología anteriormente descrita.

De las condiciones utilizadas en la simulación para discretizar la región alrededor de la punta de la grieta se observa una malla compuesta de elementos triangulares y cuadrangulares organizados en 3 círculos concéntricos. La discretización de la punta de la grieta se realizó con 16 elementos, este número de elementos fue seleccionado a partir de estudios de convergencia de malla, resultando ser la cantidad de elementos suficientes para obtener resultados de desplazamientos y esfuerzos cercanos al valor analítico previamente calculado para el FIE. El tamaño de elemento utilizado para discretizar la punta de la grieta fue de un décimo de la longitud inicial de la grieta, criterio similar al utilizado en otras publicaciones, el cual no tiene una base analítica.

De los procedimientos realizados por los autores se observa que el incremento propuesto para cada aumento en la longitud de la grieta fue de 0.1 mm y que este criterio no tiene un sustento analítico, pero se sabe que al utilizar un incremento de longitud de grieta más pequeño posible se obtendrán resultados más precisos para la predicción del ángulo de propagación, debido a que se calcularán en mayor cantidad de ocasiones los distintos cambios de ángulo de la grieta.

También se observa que el patrón de mallado en la punta de la grieta se mantiene constante conforme la grieta va creciendo es decir el tipo y organización de los elementos utilizados para discretizar la punta no cambia, mientras que los demás elementos alrededor de este patrón, y que discretizar el resto de la placa analizada, van cambiando su patrón de mallado, esto es debido a que el mallado en la punta de la grieta debe ser consistente para cada

incremento en la longitud de la grieta, mediante este procedimiento se disminuyen los errores de cálculo originados por la inconsistencia de las mallas para distintas longitudes de grieta.

Finalmente se observa que el ángulo con el cual se modela la longitud de grieta inicial no influye en la trayectoria final de propagación, esto se debe a que la dirección de crecimiento de la grieta se reorientara y propagara perpendicularmente a la dirección del esfuerzo principal máximo que es de 45° .

En la publicación realizada por B. Zafosnik y colaboradores [60], se presenta el análisis numérico utilizando el método de elemento finito para la obtención del FIE aplicando cargas de modo mixto y del ángulo de propagación de una grieta en una probeta compacta a tensión fabricada de una aleación de aluminio. Para el análisis del FIE se utilizaron los criterios de la tasa de liberación de energía, extrapolación de desplazamientos y esfuerzos. Para el cálculo del ángulo de propagación de la grieta se utilizaron los métodos de esfuerzo tangencial máximo y el de energía de deformación máxima. Los análisis numéricos de la propagación de la grieta son comparados con pruebas experimentales sometidas a cargas tensión con diferentes ángulos de aplicación desde 0° hasta 90° , siendo 0° el ángulo de aplicación de las cargas correspondiente al FIE para cargas del modo I y 90° propio del FIE para cargas de modo II. En la Tabla 2.13 se muestran los parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.13 Parámetros para la simulación numérica

Tipos de probetas evaluadas	Probeta compacta a tensión
Dimensiones de las probetas con grieta centrales	Largo 90 mm Ancho 52.5 mm Espesor 10 mm Tamaño inicial de la grieta 34 mm
Tipo de elementos utilizados para discretizar las probetas	Elementos singulares cuadrangulares
Elementos usados en la punta de la grieta	Elementos singulares triangulares
Propiedades mecánicas del material	$E=72.4$ GPa

	Poison = 0.33 Esfuerzo de cedencia= 164.7 MPa $KIc=1297 \text{ Nmm}^{3/2}$
Carga de tensión	15 kN

El tipo de mallas utilizadas para discretizar la región alrededor de la punta de la grieta fue realizado con 6 elementos triangulares de segundo orden y el resto de la probeta con elementos triangulares de primer orden. Del estudio comparativo de los métodos para determinar el FIE se observa que los tres obtienen resultados similares para los FIE de los modos de carga I Y II, con diferencias cercanas al 5 %.

Se observa que cuando cargas axiales, es decir perpendiculares a la grieta, son aplicadas a la probeta el FIE para cargas de modo I es máximo y el FIE para cargas de modo II es cero, pero conforme el ángulo de aplicación de las cargas va aumentando hasta llegar a un máximo de 90° el FIE para cargas de modo I va disminuye hasta un valor de cero y el FIE para cargas del modo II aumenta hasta alcanzar un valor máximo.

Del análisis comparativo de los métodos para determinar el ángulo de propagación se observa que ambos criterios, el del esfuerzo tangencial máximo y el de energía de deformación, presentan buena correlación con las pruebas experimentales hasta valores menores de 45°, puesto que para valores mayores de este ángulo, los valores del ángulo obtenidos por medio del análisis numérico no correlacionan con los experimentales, esto es debido a que las ecuaciones de esfuerzo tangencial y energía de deformación son válidas solo para el caso en el que $KI > KII$ y en la probeta compacta a tensión analizada en el artículo al aplicársele cargas con ángulos mayores de 68 grados el valor de KII sobrepasa el de KI , siendo este momento en el que los ángulos de propagación por medio de la ecuación ya no pueden ser calculados.

También se observa que el método de esfuerzo tangencial máximo para determinar el ángulo de propagación es dependiente del tamaño de elemento, entre más pequeño sea el tamaño de elemento para dividir la punta de la grieta se obtendrán resultados más cercanos a los experimentales

Finalmente se observa que la utilización de elementos triangulares o cuadrangulares para dividir la punta de la grieta no tiene ningún efecto o variación en los resultados al utilizar los criterios de esfuerzo tangencial máximo y el de energía de deformación máxima.

2.2.2 Análisis de la tasa de propagación de las grietas y la vida remanente

En el trabajo presentado por H.A Richard y colaboradores [61], se presenta el análisis de propagación de grieta por fatiga de la llanta de seguridad del tren de alta velocidad de Wilhelm-Conrad-Rontgen de Alemania, a consecuencia de que este componente fue identificado como el causante del accidente catastrófico que el tren tuvo en el año de 1998.

Para el análisis del rin como causa probable del accidente, los investigadores desarrollaron un modelo de elemento finito para evaluar la concentración de esfuerzos en la llanta durante un ciclo de carga completo, es decir, cuando la rueda da un giro de 360°. En la Tabla 2.14 se muestran las condiciones con las que se realizó el análisis numérico.

Tabla 2.14 Parámetros para la simulación numérica realizada en ABAQUS

Componentes del modelo de elemento finito	Eje solido Llanta Bloques de caucho alrededor de la llanta
Tipos de elementos para discretizar el modelo	Hexaédricos de 8 nodos
Módulo de elasticidad	210 000 MPa
Coefficiente de Poison	0.3
Número de nodos	1 300 000
Número de elementos	150 000
Propiedades mecánicas del Hule	MOONEY-RIVLIN con las constantes $C_{10}=2.90$ MPa, $C_{01}=0.726$ MPa

Las simulaciones en el modelo del rin se realizaron bajo las siguientes cargas aplicadas, las cuales representan las condiciones de operación del tren:

- Cuando el tren viaja en línea recta.
- Cuando el tren viaja en una trayectoria curva.

- Cuando hay un cambio de vía.

Cada simulación se realizó con un análisis dinámico, encontrándose un mínimo esfuerzo circunferencial de 6 MPa y un máximo de 220 MPa localizado en una de las superficies internas del rin, la amplitud de esfuerzo calculada fue de 107 MPa y un esfuerzo medio de 113 MPa con una tasa de esfuerzos de 0.03.

Los autores utilizaron los datos obtenidos de la simulación dinámica para analizar la propagación de grieta con el uso del programa computacional ADAPCRACK 3D®, que está compuesto de dos módulos, el primero se encarga de discretizar y analizar un modelo pre agrietado para obtener los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos por cada incremento de grieta, el segundo módulo procesa los datos obtenidos del análisis elemento finito para calcular el FIE en la punta de la grieta.

Para la simulación numérica de la propagación de las grietas se utilizaron las curvas $da/dN=f(\Delta K)$, que fueron obtenidas bajo la norma ASTM E 647 usando probetas compactas a tensión elaboradas con el material de la rueda. Los autores obtuvieron un valor del FIE limite (K_{th}) de $8.2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ y valor límite de tenacidad a la fractura para propagación estable (K_c) de $86.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

De los resultados obtenidos se observa que el tamaño de la zona de crecimiento estable de grieta es muy grande en comparación con el espesor total de la llanta, esto es debido a que la tenacidad a la fractura del material es muy alta $86.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ en comparación con otros aceros. Los autores no mencionan el método numérico o algoritmo utilizado por el programa computacional para obtener la propagación de la grieta o para el cálculo del FIE en cada incremento de la grieta.

Daniel Peixoto y Paulo de Castro [62] presentan el análisis de la propagación de las grietas en la llanta de un tren de alta velocidad de España, debido al contacto mecánico que la rueda tiene contra la vía.

La grieta analizada no se encuentra en la superficie, ya que de acuerdo a los autores la zona de contacto entre la llanta y la vía presenta una alta plastificación y la grieta tendera a crecer en la periferia de la zona plástica. El criterio del esfuerzo tangencial máximo fue usado para simular analítica y numéricamente la DPG. El software de elemento finito ABAQUS fue

utilizado para la realización del análisis numérico, las condiciones y parámetros utilizados en la simulación se presentan en la Tabla 2.15.

Tabla 2.15 Parámetros utilizados para el análisis numérico

Tipo de elementos utilizados	Elementos 2D de esfuerzo plano de 8 nodos
Elementos usados en la punta de la grieta	Elementos Isoparamétricos singulares
Propiedades mecánicas del material	E=210 GPa Poison = 0.3
Coefficiente de fricción entre la llanta y el riel	$\mu = 0.1$
Número de nodos	841009
Número de elementos	278474
Carga aplicada	11.5 kN

Los autores presentaron el análisis numérico del efecto que tiene el uso de un tamaño de elemento más pequeño en la zona de propagación de las grietas, para esto, realizaron el análisis de concentración de esfuerzos en un componente sin grietas. Los autores observaron la concentración de esfuerzos en la llanta, especialmente en la zona de transición de las mallas entre los elementos más pequeños y grandes.

Los resultados del análisis de concentración de esfuerzos mostraron que el máximo esfuerzo de Tresca (905 MPa) se encuentra dentro de la llanta, a una profundidad de 4 mm tomando como referencia superficial la zona de contacto entre la llanta y el riel.

Los autores crearon una grieta inicial de 10 mm, en el lugar en donde con el análisis lineal de concentración de esfuerzos, se encontró el máximo esfuerzo.

Para el análisis de propagación de grieta los autores analizaron cada incremento de grieta por medio de simulaciones independientes con incrementos en su longitud de 1 mm, en cada incremento, el FIE y el máximo esfuerzo tangencial fueron calculados con el fin de saber si la concentración de esfuerzos alcanza el valor de la tenacidad a la fractura y encontrar el nuevo ángulo de propagación para cada incremento de grieta.

De los resultados se observa que la propagación de grieta con cada incremento es en ángulos de +/- 60°, la longitud crítica de la grieta obtenida por los autores es de 20 mm y un máximo Factor de concentración de esfuerzos equivalente de $93 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$

Lubos Nahlik y colaboradores [63] presentan una metodología para la determinación de la vida remanente por fatiga de los ejes motrices en los trenes fabricados por la compañía alemana BONATRANS. La metodología propuesta por los autores incluye: la obtención de las propiedades mecánicas del material con el que están fabricados los ejes, la estimación de la zona de inicio de grieta, el análisis de la forma de la punta de la grieta durante su propagación, la medición experimental de la propagación de la grieta bajo la norma ASTM647 y finalmente la estimación de la vida remanente del eje.

Para el análisis numérico del inicio de grieta, los autores utilizaron el método de elemento finito y el programa computacional ANSYS®, para localizar el área del eje motriz con la máxima concentración de esfuerzos debido a las cargas de flexión y ensamble, las primeras ocasionadas por el peso del vagón y las segundas por el esfuerzo generado en el eje debido a la unión con la llanta. La Tabla 2.16 muestra los parámetros considerados en el análisis numérico del eje motriz.

Tabla 2.16 Parámetros utilizados para el análisis numérico

Tipo de elementos utilizados para discretizar la geometría	Tetraedros de 20 nodos
Propiedades mecánicas del material	E=205 GPa Poison = 0.3

La máxima concentración de esfuerzos se localizó en un cambio de sección que se localizaba entre la rueda y el rodamiento interno del eje. En el área de máxima concentración de esfuerzos los autores modelaron una grieta con una profundidad de 1 mm para realizar el análisis de propagación de grieta radial.

Para este estudio fue necesario realizar pruebas experimentales de campo para obtener el espectro de cargas dinámicas a las cuales están sometidas los ejes cuando el tren hace un recorrido completo de vía. Las amplitudes de la carga obtenidos de la prueba fueron

organizadas y simplificadas usando el método de conteo de Rainflow, obteniéndose una gráfica dividida en 36 niveles de carga dinámica. Se encontró un coeficiente de carga dinámica (CCD) de 2.9, que representa la proporción que la carga dinámica es mayor que la estática (la carga debida al peso del tren cuando no está en movimiento).

Para el cálculo del FIE debido a la acción de las cargas de pandeo y ensamble, los autores utilizaron el CCD anteriormente descrito, para calcular el FIE en la punta de la grieta.

Se utilizaron los criterios de propagación de grieta de Paris-Erdogan y NASGRO para el cálculo del incremento en la extensión de la grieta debido a la aplicación del espectro de cargas; Estos criterios fueron programados en MATLAB, sin embargo, en la publicación no se presentan las ecuaciones o código utilizado para su análisis.

Se encontró que la longitud de grieta crítica fue de 55 mm, la cual fue menor que la calculada con el FIE estático. También se muestra que la cantidad de ciclos para alcanzar la falla total del componente es de 3989 y de 5572 para una grieta inicial de 1mm de profundidad, el primer valor de vida fue utilizando el criterio de París y el segundo usando el de NASGRO, entendiéndose que 1 ciclo de operación representa un recorrido que hace el tren de inicio a fin de vía, con este análisis los autores observaron que el criterio de Paris – Erdogan provee resultados más conservativos que los obtenidos por la estimación de NASGRO.

Se estudió el efecto del FIE límite (K_{th}) y de las sobrecargas durante la operación del eje motriz usando el modelo de Willenborg, con estos análisis los autores encontraron que el parámetro K_{th} es un parámetro crucial para la determinación de la vida remanente del material, puesto que representa el inicio de la propagación estable de la grieta; los autores observaron que efecto de las sobrecargas en el material tiene mayores afectaciones cuando la longitud de grieta inicial representa un 30 % o más de la longitud de grieta crítica del componente.

Finalmente, de los resultados obtenidos se observa que la vida remanente en el material dependerá directamente del tamaño de la grieta inicial o de la longitud de grieta máxima que se encuentre en el eje, en el momento en el que se realiza las inspecciones periódicas del componente, por tanto, es posible asignar un tiempo de retiro del componente basándose en la longitud de grieta más grande que tenga el eje.

Marija Blazic y colaboradores [64] presentan el análisis numérico y experimental de la propagación de grietas por fatiga para un espécimen con dos barrenos sometido a cargas de tensión cíclicas bajo los modos de carga I y II. En el análisis numérico la trayectoria de la propagación de la grieta fue modelada matemáticamente aplicando el método de elemento finito y los resultados del análisis fueron comparados con los obtenidos experimentalmente, mediante el uso de una maquina servo-hidráulica.

Para determinar la trayectoria de propagación de la grieta se utilizó el método de esfuerzo tangencial máximo y para el cálculo del FIE en el artículo no se menciona el método utilizado. En la siguiente tabla se muestran las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.17 Parámetros utilizados para el análisis numérico en NASTRAN

Dimensiones de la probeta	Largo 80 mm Ancho 80 mm Barrenos 7.5 mm de radio
Tipo de elementos utilizados	Elementos cuadrangulares 2D
Elementos usados en la punta de la grieta	Elementos cuadrangulares 2D
Propiedades mecánicas del material	E=210 GPa Poison = 0.3
Carga de tensión	60000 N
Longitud de la grieta inicial	6 mm

Se determinó la velocidad de propagación de las grietas en el componente obteniendo la curva de propagación de forma experimental mediante la norma ASTM E647, en esta prueba las probetas fueron sometidas a una amplitud de esfuerzo de 225 MPa, con un valor máximo de 250 MPa y uno menor de 25 MPa. Se utilizó el criterio de París para determinar la vida remanente del componente en donde los valores de las constantes C y n de la ecuación fueron 0.00000058 y 2.57 respectivamente. Los ciclos necesarios para la falla total de la probeta fueron de 32200.

De los resultados obtenidos del estudio comparativo de las trayectorias de propagación de las grietas de los análisis numérico y experimental, se observa que existe una diferencia de alrededor del 10 % entre ambas trayectorias, esto fue debido a que en el análisis numérico solo se seleccionaron 4 incrementos de grieta que fueron de 4, 2.5, 2 y 1.4 mm, contrastando con en el método experimental en el cual se midió la trayectoria de propagación en 8 ocasiones durante la prueba. Siendo necesario por tal motivo que en el análisis numérico se realizara incrementos de grieta más pequeños y en mayor cantidad para obtener mejores resultados de correlación.

Además, se observa que los 4 incrementos de la longitud de la grieta propuestos en el análisis numérico para determinar la trayectoria de propagación no fueron seleccionados con base en ningún criterio teórico o empírico.

Finalmente se observa que el uso del FIE equivalente el cual relaciona los todos los modos de carga independientes, facilita y simplifica el análisis de propagación de grietas sometidas a cargas de modo mixto, debido a que si no se tuviera este factor equivalente se deberían realizar análisis de propagación de la grieta independientes, siendo cada uno acorde a los modos de carga a los que esté sometida la probeta.

Hyun-Kyu Jun y colaboradores [65], presentan el análisis numérico de la propagación de las grietas por fatiga en el chasis de un vagón de un tren sometido a cargas inducidas por la aceleración, frenado, el peso propio del tren y el de los pasajeros. En la Tabla 2.18 se muestran las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico.

Tabla 2.18 Parámetros para la simulación numérica del chasis realizada en ABAQUS

Software utilizado	ABAQUS
Componente evaluado	Chasis del vagón
Tipo de elementos utilizados para discretizar el vagón	Elementos finitos cuadrangulares de 8 nodos - tamaño 30 mm
Tipo de elementos utilizados para discretizar el chasis	Elementos finitos cuadrangulares de 8 nodos – tamaño 5 mm

Propiedades mecánicas del acero del chasis	Acero SMA490B E=206 MPa Poison = 0.3 Esfuerzo de cedencia = 365 MPa Límite de fatiga = 160 MPa
---	--

Del análisis de aplicación de las cargas de aceleración, frenado y peso de los pasajeros, se observa que la máxima concentración de esfuerzos se localiza en la parte central del chasis obteniéndose un esfuerzo principal máximo de 3.7 MPa, esta área correspondía con el lugar de nucleación de las grietas en el chasis.

La velocidad de propagación de la grieta fue modelada numéricamente utilizando el método de elemento finito, se modeló una probeta con una grieta central utilizando las propiedades mecánicas del material con el que está fabricado el chasis, la probeta fue sometida a las cargas a las cuales está sujeto el chasis en la zona de nucleación de las grietas bajo condiciones de operación rutinarias. Las cargas fueron obtenidas por medio de galgas extensiométricas adheridas al chasis, registrando los valores de deformación durante un recorrido rutinario del tren. El FIE fue calculado para cada incremento de la longitud de la grieta, hasta alcanzar la tenacidad a la fractura del material.

La curva de la tasa de propagación de la grieta fue obtenida por métodos experimentales utilizando la norma ASTM E647 y fue utilizada para determinar el número de ciclos necesarios para que la grieta se propague hasta alcanzar una longitud crítica. El criterio utilizado para la determinar la tasa de propagación de la grieta fue la ecuación empírica de Paris.

De los resultados obtenidos se observa que los factores de seguridad obtenidos del análisis estático en términos de esfuerzos para el chasis fueron de aproximadamente 4, es decir los valores mayores del esfuerzo debido a la aplicación de las cargas de aceleración y frenado se encuentran por debajo del esfuerzo a la cedencia del material, por lo tanto las grietas consideradas en el análisis de la vida remanente del chasis serían ocasionadas por una sobrecarga y no por condiciones normales de operación.

Del análisis de la vida remanente se aprecia que el valor de la tenacidad a la fractura del material $79.2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ no es alcanzado debido a la aplicación de las cargas de aceleración y frenado, a pesar de haberse modelado una grieta de 300 mm de longitud la cual obtuvo un valor del FIE de $21. \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, es decir para iniciar la propagación inestable de la grieta se requiere una longitud mayor a 300mm.

Finalmente se observa que la vida remanente del chasis obtenida del análisis numérico utilizando una grieta inicial de 30 mm de longitud fue de 125000 ciclos lo que corresponde con 6.9 años de servicio.

En el trabajo realizado por Haydar Dirik y Tuncay Yalcinkaya [66], presentan el análisis numérico, utilizando el método de elemento extendido para determinar la tasa de propagación debido a la aplicación de cargas de amplitud variable en una placa con una grieta en el centro fabricada de aluminio. El algoritmo para el análisis numérico fue desarrollado en el paquete computacional de ABAQUS y los resultados obtenidos fueron comparados con pruebas experimentales y con los obtenidos por el software para el análisis de propagación de grieta NASGRO. En la Tabla 2.19 se presentan las condiciones y parámetros utilizados para el análisis numérico

Tabla 2.19 Parámetros utilizados para la simulación numérica utilizando X-FEM

Componentes evaluados	Placa con una grieta en el centro
Dimensiones	Espesor=4.1mm Ancho=305mm Largo=915mm Tamaño de la grieta inicial :12.7 mm
Propiedades mecánicas de las placas	E=69.6 MPa $\sigma_y= 520 \text{ MPa}$ Constantes de la ecuación de NASGRO C=9.86x10 ⁻¹² n=2.9, p=0.5, q=1

Para el análisis de la propagación de la grieta se utilizó la ecuación empírica de NASGRO y la ecuación de Willenborg para analizar el efecto de las sobrecargas en la propagación de la

grieta debido a la aplicación de cargas de amplitud variable. Los incrementos de la longitud de la grieta fueron lineales y propuestos por los autores, estos no fueron calculados basándose en ninguna ecuación analítica o empírica.

La aplicación del ciclo de sobrecarga fue realizada cada 29, 50 y 300 ciclos de carga de amplitud constante, las magnitudes de las sobrecargas fueron de 30 y 45% mayores que la carga máxima de amplitud constante.

Del procedimiento para determinar la tasa de propagación de la grieta y la vida remanente se observa la utilización del programa computacional FORTRAN para la elaboración de un algoritmo que analizo y proceso la información obtenida de cada solución de la propagación de la grieta realizada en el programa ABAQUS con la finalidad de calcular los FIE, el tamaño de la zona plástica y utilizando la ecuación de Willenborg calcular el retardo de la propagación de la grieta. Este procedimiento fue repetido hasta que el FIE alcanzo el valor de la tenacidad a la fractura del material K_{Ic} .

De los resultados obtenidos del análisis comparativo entre el procedimiento numérico propuesto en ABAQUS, la prueba experimental y los resultados obtenidos del software computacional NASGRO se observó una buena correlación entre los 3 métodos cuando no se aplican sobrecargas en la placa, Sin embargo, al aplicarse sobrecargas se observa que los resultados experimentales obtienen una vida remanente mayor a los resultados obtenidos por los análisis numéricos. Esto puede ser debido a que en el análisis numérico no se considera el efecto que tiene el orden de aplicación de las cargas en la propagación de la grieta, es decir el efecto en la concentración de esfuerzos en la punta de la grieta debido a la aplicación de las cargas de una magnitud menor a una mayor o viceversa. A pesar de esto los resultados obtenidos numéricamente tienen una variación contra la prueba experimental del 15 %.

Khalid Nasri y Nohammed Zenasni [67], presentan el análisis numérico utilizando el método de elemento frontera para determinar la tasa de propagación de las grietas en una placa con una grieta inclinada en el centro, sometida a cargas de tensión con diferentes ángulos de aplicación. Los factores de intensidad de esfuerzos para los modos de carga I, II fueron obtenidos utilizando el campo de desplazamientos en los alrededores de la punta de la grieta y los ángulos de propagación de la grieta utilizando el criterio de la energía de

deformación máxima propuesto por Shi. En la Tabla 2.20 se presentan las condiciones y parámetros utilizados para el análisis de la propagación de las grietas en la placa.

Tabla 2.20 Parámetros utilizados para la simulación numérica utilizando el método de elemento frontera

Componentes evaluados	Placa con una grieta inclinada en el centro
Dimensiones	Espesor, Ancho y Largo de la placa: 150 mm Tamaño de la grieta inicial :7 mm
Ángulos de aplicación de las cargas	$\Theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$
Elementos usados en la punta de la grieta	Tetraedros de segundo orden de puntos cuartos
Propiedades mecánicas de las placas	$G=2744 \text{ kg/mm}^2$ $\nu=0.321$ $KIc=116 \text{ kg/mm}^2$ $A=1.039 \times 10^{-10}$ $m=2.7438$ $K_{th}=0;$ $m=15.333 \text{ kg/mm}^2$ $R=0.048$ $W=150 \text{ mm}.$

El procedimiento utilizado para determinar la dirección y la tasa de propagación de las grietas consistió en primer lugar en la discretización de la geometría de la placa utilizando elementos triangulares y posteriormente el ensamble de las ecuaciones de frontera y su solución. En segundo lugar, del cálculo de los factores de intensidad de esfuerzos, el ángulo de propagación de las grietas y el número de ciclos. Finalmente se propone un incremento de la longitud de la grieta y se discretizar nuevamente la placa. Este procedimiento es repetido hasta que el FIE alcanza el valor de la tenacidad a la fractura del material KIc .

De los resultados obtenidos se observa que a medida que el ángulo de aplicación de las cargas aumenta, es decir de 0° hasta un valor máximo de 90° , aumenta la tasa de propagación de las grietas, es decir, se requieren menor cantidad de ciclos para alcanzar la falla total de la placa,

puesto que a medida que se incrementa el ángulo de aplicación de las cargas, aumenta el deslizamiento de las superficies de las grietas, generando mayor concentración de esfuerzos en la punta de la grieta. También se observa que la DPG es normal a la dirección de aplicación de las cargas, sin importar la posición o el ángulo de inclinación inicial de la grieta. Finalmente se aprecia la utilización de la ecuación de Paris para determinar la tasa de propagación de las grietas, utilizando el factor de intensidad efectivo, es decir el FIE resultante debido a la aplicación de las cargas de los modos I y II.

Gao Yi y colaboradores [68], presentan el análisis numérico utilizando el método de elemento extendido X-FEM para determinar el FIE en una placa con un concentrador de esfuerzos triangular, sometida a cargas de tensión y flexión con diferentes ángulos de aplicación de las cargas. Los FIE para los modos de carga I, II fueron obtenidos utilizando el método energético de la integral J. Los resultados obtenidos del análisis numérico utilizando X-FEM fueron comparados con otros métodos numéricos (MEF, BEM) utilizados para el análisis de componentes agrietados. En la Tabla 2.21 se presentan las condiciones y parámetros utilizados para el análisis del FIE.

Tabla 2.21 Parámetros utilizados para la simulación numérica utilizando XFEM

Componentes evaluados	Placa rectangular con un concentrador de esfuerzos triangular
Dimensiones	Ancho:5 cm Largo de la placa: 10 cm Longitud del concentrador de esfuerzos :2 cm
Elementos usados en la punta de la grieta	Cuadrangulares de segundo orden
Propiedades mecánicas de la placa	E=1000 v=0.3

De los procedimientos realizados para la obtención del FIE para las cargas de modo I y II se observa que el modelado de la grieta por medio de XFEM es independiente del mallado del componente debido a que el modelado matemático de la fisura es basado en funciones

especiales que son agregadas a los elementos finitos por los cuales pasara la grieta, explotando la propiedad de la partición de la unidad de las funciones de forma.

De los resultados obtenidos del análisis del FIE utilizando X-FEM se observa que los FIE para los modos de carga I y II correlacionan con los resultados obtenidos con el MEF Y BEM, con la ventaja de que en el análisis por medio de X-FEM no se necesitaron elementos especiales como lo son los de puntos cuartos para el análisis del FIE.

2.3 Observaciones del análisis bibliográfico

Del análisis bibliográfico [47-67] que se presenta en este capítulo, se observa que existen muchas publicaciones relacionadas con la utilización de los métodos numéricos (MEF, BEM) en el análisis de diversos elementos mecánicos, como los son probetas estandarizadas, elementos de maquinaria y placas de distintas dimensiones, en su mayoría con grietas centrales. En las cuales los resultados obtenidos se comparan para su validación con resultados analíticos y experimentales. Sin embargo, también se encontraron publicaciones en las que no se muestran comparaciones de los resultados del análisis numérico.

Se observó que en las publicaciones no se muestra una metodología detallada para el análisis de la propagación de grietas y la determinación de la vida remanente de los distintos elementos analizados, solo se muestran diagramas de flujo de forma general, en los cuales no se especifica los comandos utilizadas en los distintos programas computacionales que fueron utilizados, por ejemplo: ABAQUS, ANSYS, FRANC2D/3D, FORTRAN.

También se observó que el método de extrapolación de desplazamientos es el método que más utilizado en las publicaciones para la obtención del FIE durante la propagación de la grieta. Sin embargo, el método energético de la integral J es el método con el cual se obtienen los resultados más precisos

Aunado a esto, se observó que el criterio de esfuerzo tangencial máximo propuesto por Erdogan y Sihm para la determinación de la DPG es el modelo más utilizado en las publicaciones analizadas, debido a que se obtienen resultados precisos y el tiempo de cómputo necesario para calcular el ángulo de propagación es menor en comparación con

otros criterios como lo son el de: densidad de energía de deformación mínima y máxima y el de la tasa de liberación de energía.

La ecuación empírica de Paris fue el modelo más utilizado para la determinación de la tasa de propagación de las grietas. Sin embargo, las ecuaciones que consideran la tasa de esfuerzos y el cierre de grieta, son los modelos que se utilizan en los análisis en donde se requiere mayor precisión de los resultados como por ejemplo en las publicaciones de Nahlik [63] y Richard [61], en donde se analiza la vida remanente de elementos mecánicos férreos.

Por otro lado, se observó que el MEF es el método numérico más utilizado para el análisis de la propagación de las grietas, debido a que permite modelar grietas a través de todo el dominio estudiado y no solo en la frontera como en el BEM.

Capítulo 3 . FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS Y LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LAS GRIETAS

3.1 Introducción

De la revisión bibliográfica se observa que en diversos textos científicos existen numerosas formulaciones matemáticas para describir el comportamiento de la propagación de las grietas en distintos componentes mecánicos. Sin embargo, estas formulaciones solamente consideran condiciones ideales y por lo cual no se pueden aplicar a problemas prácticos de ingeniería, incluyendo las condiciones de operación, las propiedades del material y la geometría. Es por esta razón, que la formulación matemática para cada sistema o componente mecánico es única y debe de ser desarrollada para cada componente en específico.

En el análisis de la propagación de las grietas se requiere obtener el factor de intensidad de esfuerzos (FIE) alrededor de la punta de la grieta. La obtención del FIE permitirá estimar la velocidad y dirección de propagación de las grietas presentes en un componente sometido a cargas de fatiga.

Para el desarrollo de la formulación matemática, de esta investigación, del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas en función del número de ciclos de aplicación de las cargas, en las probetas compactas a tensión (ESET) fabricadas con el material A216 WCB grado 600. de la maza de rueda portadora de los vagones del STC Metro de la ciudad de México, se desarrolló una metodología la cual se describe a continuación.

3.2 Formulación matemática de las ecuaciones de los esfuerzos normales y cortantes en la probeta.

El primer paso para realizar la formulación matemática, fue obtener las ecuaciones de equilibrio en función de los esfuerzos normales y cortantes en la probeta, fabricada con el material A216 WCB grado 600, la cual tiene las siguientes dimensiones: 85mm x 23mm x 5mm y una muesca central de 6 mm de profundidad, con un radio de curvatura en la punta de 0.25mm. Esta probeta fue diseñada por R. Corona Cid [69] y se muestra en la Figura 3.1.

Las ecuaciones de los esfuerzos normales y cortantes fueron desarrolladas en su forma rectangular, es decir en términos de las coordenadas (x, y), para hacer congruente al sistema de ecuaciones con la geometría de la pieza.

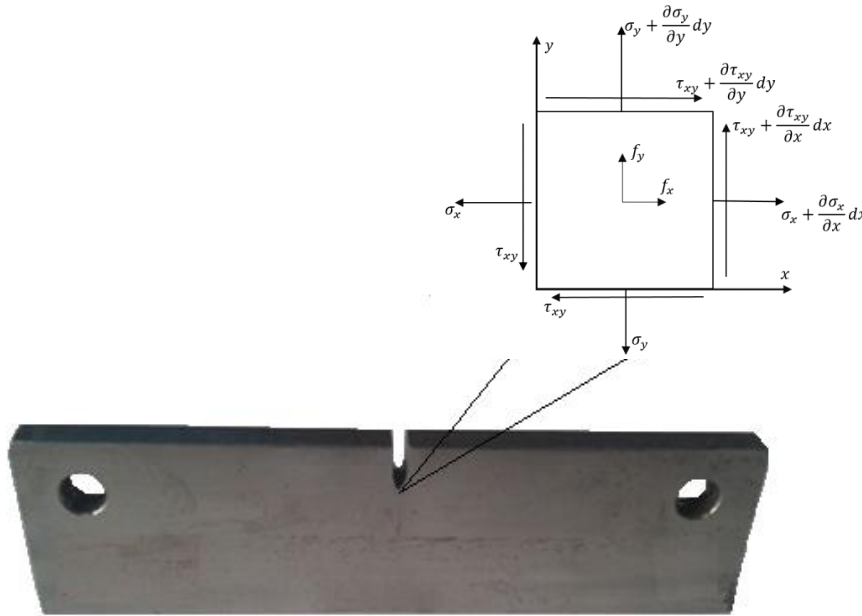


Figura 3.1 Elemento diferencial de la probeta ESET.

Para esta formulación se consideró un elemento diferencial de espesor unitario de medidas dx , dy como el que se muestra en la Figura 3.2. Las ecuaciones de los esfuerzos normales y cortantes del elemento diferencial son obtenidas a partir de un sumatoria de fuerzas en cada uno de sus ejes.

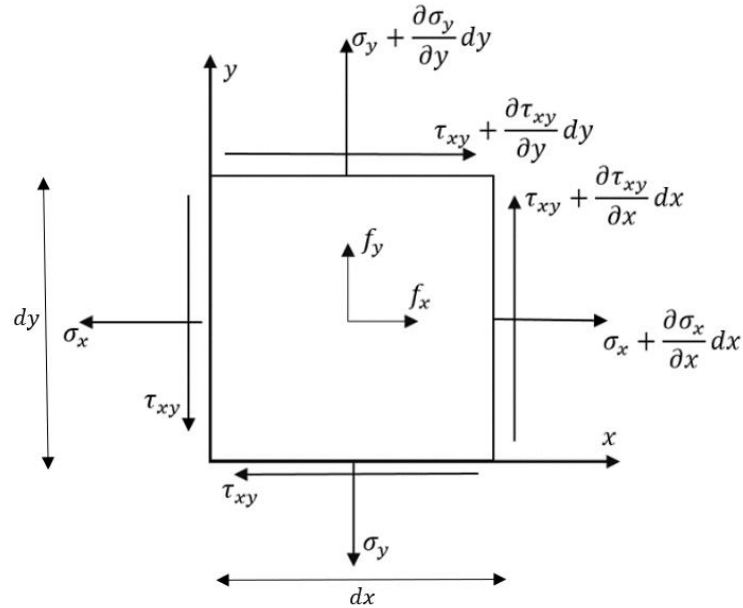


Figura 3.2 Elemento diferencial en donde se muestran los esfuerzos normales y cortantes.

Para el análisis de fuerzas que actúan en elemento diferencial de espesor unitario de la Figura 3.2 se tomó en consideración la ecuación de los esfuerzos [70, 71]

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \therefore F = \sigma A \tag{1}$$

Donde σ es el esfuerzo, F es la fuerza y A el área o el plano en donde es aplicado el esfuerzo.

Con base en la ecuación (1) y realizando una sumatoria de fuerzas en la dirección X, se obtiene:

$$\sum F_x = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) (dy \times 1) - \sigma_x (dy \times 1) + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) (dx \times 1) - \tau_{yx} (dx \times 1) = 0 \tag{2}$$

Multiplicando términos de la ecuación (2), se obtiene:

$$\sum F_x = \sigma_x dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy - \sigma_x dy + \tau_{yx} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy - \tau_{yx} dx - \tau_{zx} dx dy = 0 \tag{3}$$

Reduciendo los términos semejantes se obtiene:

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy = 0 \quad (4)$$

Dividiendo entre $dx dy$ la ecuación (4) y considerando el término de las fuerzas en el cuerpo que actúan en la dirección X (f_x), se obtiene:

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5), representa la primera ecuación de equilibrio.

Realizando una sumatoria de fuerzas en dirección Y, del plano de la Figura 3.2, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum F_y = & \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) (dx \times 1) - \sigma_y (dx \times 1) - \tau_{yx} (dy \times 1) \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) (dy \times 1) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Multiplicando términos en la ecuación (6), resulta:

$$\sum F_y = \sigma_y dx + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy - \sigma_y dx - \tau_{yx} dy + \tau_{yx} dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx dy = 0 \quad (7)$$

Reduciendo los términos semejantes se obtiene:

$$\sum F_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx dy = 0 \quad (8)$$

Dividiendo entre $dx dy$ la ecuación (8) y considerando el término de las fuerzas del cuerpo que actúan en la dirección Y (f_y), se obtiene:

$$\sum F_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (9)$$

La ecuación (9) representa la segunda ecuación de equilibrio en función de los esfuerzos normales y cortantes.

Finalmente, el sistema de ecuaciones en función de los esfuerzos queda indicado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Con la finalidad definir el campo de esfuerzos en la probeta, el sistema de ecuaciones (10) debe de ser satisfecho, Sin embargo, se observa que solo hay dos ecuaciones para determinar tres incógnitas ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$). Para completar el sistema de ecuaciones que definen el campo de esfuerzos en la probeta se utilizaran las relaciones de deformación [7, 77, 78], las cuales se presentan a continuación:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (11)$$

Donde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \tau_{xy}$ son las deformaciones y $\partial u; \partial v$ son los desplazamientos.

Considerando el estado de esfuerzos para el plano x-y, y diferenciando dos veces las ecuaciones de deformación: ε_x respecto a y, ε_y respecto a x, τ_{xy} con respecto a x y y, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (12)$$

Del sistema de ecuaciones (12), se puede escribir el término γ_{xy} en términos de las deformaciones $\varepsilon_x, \varepsilon_y$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (13)$$

Para expresar la ecuación (13) en términos de los esfuerzos se utiliza la ley generalizada de Hooke [72, 73].

Las expresiones de la ley generalizada de Hooke son:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (14)$$

Donde ϵ es la deformación, E el módulo de elasticidad, σ el esfuerzo en las direcciones x, y ν la relación de poisson, y G el módulo de esfuerzo cortante.

Sustituyendo (14) en (13) se obtiene:

$$\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \right] \quad (15)$$

Sustituyendo la expresión matemática que relaciona el módulo de esfuerzo cortante con el módulo de rigidez $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ en la ecuación (15) se obtiene:

$$2(1 + \nu) \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \right] \quad (16)$$

Multiplicando y reduciendo términos de la ecuación (16) se obtiene:

$$(1 + \nu) 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(\sigma_x - \nu \sigma_y)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\sigma_y - \nu \sigma_x)] \quad (17)$$

Del sistema de ecuaciones (10), se deriva la primera ecuación respecto a x y la segunda ecuación con respecto a y , se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{f_x}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{f_y}{\partial y}\end{aligned}\quad (18)$$

Sumando las ecuaciones (18) se obtiene:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial f_y}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \quad (19)$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (19) en (17), resulta:

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) (1 + \nu) \\ = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(\sigma_x - \nu \sigma_y)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\sigma_y - \nu \sigma_x)]\end{aligned}\quad (20)$$

Multiplicando y reduciendo términos de la ecuación (20) se obtiene la ecuación de compatibilidad:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \quad (21)$$

Con la ecuación de compatibilidad (21) y las ecuaciones de equilibrio (10), el sistema de ecuaciones queda completo:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (\text{b}) \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \quad (\text{c})$$

3.2 Formulación matemática de las ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos en la probeta.

Para expresar las ecuaciones de equilibrio (22) en términos de los desplazamientos se utilizan las ecuaciones constitutivas de Lamé [77, 79, 81], las cuales son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 2G\varepsilon_x + \lambda e \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 2G\varepsilon_y + \lambda e \\ \tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (23)$$

Donde G es el módulo de rigidez cortante, λ es el operador de Lamé [78, 79] que está relacionado con el módulo de rigidez E , con la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (24)$$

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas de Lamé (23) en la ecuación (22a) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} (2G\varepsilon_x + \lambda e) + \frac{\partial}{\partial y} (2G\gamma_{xy}) + f_x = 0 \quad (25)$$

Sustituyendo las relaciones de deformación (11) en (25) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda e \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + f_x = 0 \quad (26)$$

Derivando los términos:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + G \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + f_x = 0 \quad (27)$$

Agrupando términos:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right) + f_x = 0 \quad (28)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right) + f_x = 0 \quad (29)$$

Sustituyendo el operador Laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$ [1, 74] en la ecuación (28), se obtiene:

$$G \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + f_x = 0 \quad (30)$$

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas de Lamé (23) en la ecuación (22b), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y} (2G \varepsilon_y + \lambda e) + \frac{\partial}{\partial x} (2G \gamma_{xy}) + f_y = 0 \quad (31)$$

Sustituyendo las relaciones de deformación (11) en la ecuación (31) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(2G \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + f_y = 0 \quad (32)$$

Derivando los términos:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial y} + 2G \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + G \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f_y = 0 \quad (33)$$

Agrupando términos:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial y} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right) + f_y = 0 \quad (34)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} \right) + f_y = 0 \quad (35)$$

Sustituyendo el operador Laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$ en la ecuación (35), se obtiene:

$$G \nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + f_y = 0 \quad (36)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones en función de los desplazamientos y las deformaciones queda conformado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} G \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + f_x &= 0 \\ G \nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

En donde u y v representan los desplazamientos en las direcciones x , y para cualquier punto en la probeta.

A continuación, se desarrollarán las ecuaciones que relacionan los desplazamientos u y v de las ecuaciones (37) con la concentración de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta.

3.3 Formulación matemática de las ecuaciones para determinar el campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta en función de los desplazamientos.

Con la finalidad de determinar el FIE, se desarrolló la formulación matemática de las ecuaciones que relacionan el campo de desplazamientos (37) y la concentración de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta.

La formulación matemática de estas ecuaciones está basada en la formulación matemática del FIE, la cual tiene sus bases en la teoría de la elasticidad e incorpora fundamentos energéticos, para representar la concentración de esfuerzos en la región cercana a la punta de la grieta. En las publicaciones de F. J. Reséndiz [8] y F. J. Reséndiz y R. Aguilar [75], se muestra con detalle la formulación matemática del FIE, para el caso de una placa con una grieta central, en la que se aplican cargas uniaxiales. En el desarrollo de esta formulación se comenzará a partir de la función compleja que representa la solución al problema de la singularidad en la punta de la grieta, la cual es:

$$Z(z) = \frac{g(z)}{\sqrt{z}} \quad (38)$$

La expresión (38) considera una distribución de esfuerzos $g(z)$ en los alrededores de la punta de la grieta que es inversamente proporcional a la singularidad que presenta en la punta de la grieta \sqrt{z} .

Posteriormente, se toma en consideración un sistema coordenado con origen en la punta de la grieta, como el mostrado en la Figura 3.3.

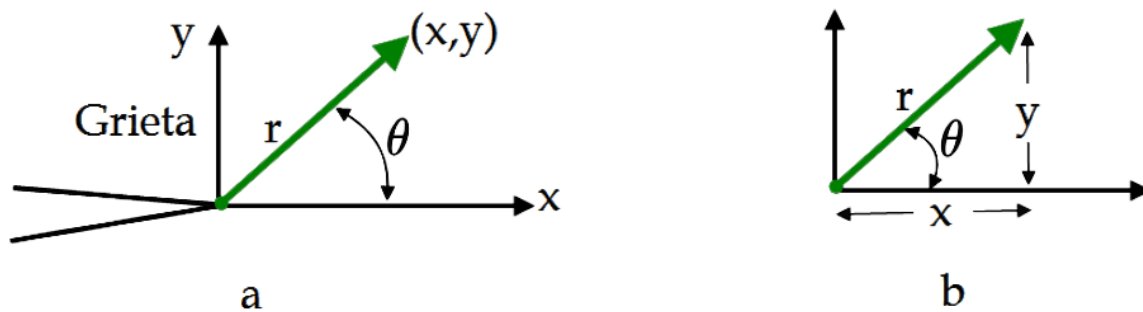


Figura 3.3 Sistema coordenado con origen la punta de la grieta.

En donde las condiciones de frontera que deben ser cumplidas son:

1. Las superficies de la grieta son libres de esfuerzo $\sigma_y \rightarrow 0$, debido a que en la apertura de la grieta no hay material, y por lo tanto no existe un esfuerzo.
2. El esfuerzo normal a las superficies de la grieta tiende a infinito $\sigma_y \rightarrow \infty$, cuando z tiende a cero, es decir en la región cercana a la punta de la grieta.

Para satisfacer la primera condición de frontera, se debe cumplir que el operador z , de la ecuación (38), sea siempre un número real y positivo, es decir que siempre tenga un valor real en el eje X, por lo que se pueden determinar los esfuerzos utilizando las funciones de variable compleja de Westergard [14, 1, 76], las cuales son las siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}(z) - y \operatorname{Im} \bar{Z}(z) \quad (\mathbf{a}) \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}(z) + y \operatorname{Im} \bar{Z}(z) \quad (\mathbf{b}) \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} \bar{Z}(z) \quad (\mathbf{c})\end{aligned}\tag{39}$$

Sustituyendo la ecuación (38) en (39) y tomando en consideración que a lo largo del plano de apertura de la grieta ($y=0$), los esfuerzos σ_x y σ_y solo están compuestos por su parte real y por lo tanto la parte imaginaria de z se anula, se obtiene:

$$\sigma_x = \sigma_y = \operatorname{Re} Z(z) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\tag{40}$$

Con la finalidad de obtener un valor cercano a la punta de la grieta para la ecuación (40), se utiliza una serie de Taylor [70] para la función $g(x)$ alrededor del origen, esta función es la siguiente:

$$g(z) = g(0) + z \frac{dg(z)}{dz} + \frac{1}{2!} z^2 \frac{d^2 g(z)}{dz^2} + \dots\tag{41}$$

Para una región cercana a la punta de la grieta, se tiene que $g(x) \approx g(0) = \text{parte real}$, La parte real está relacionada con el factor de intensidad de esfuerzos (KI), por lo tanto, se obtiene que:

$$g(0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\tag{42}$$

Y entonces:

$$Z(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} \quad (43)$$

La ecuación (43) se puede describir de la siguiente manera:

$$Z(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} z^{-1/2} \quad (44)$$

Para obtener las ecuaciones que describan el campo de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta se debe sustituir la ecuación (44) y su primera derivada con respecto de z en las ecuaciones de Westergard (39). La primera derivada de la ecuación (44), se plantea de la siguiente forma:

$$Z'(z) = \frac{dZ(z)}{dz} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} z^{-3/2} \quad (45)$$

Expresando z en coordenadas polares, $z = r e^{i\theta}$, la función $Z(z)$ y su derivada $Z'(z)$ que son necesarias para representar el campo de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta, son las siguientes:

$$Z(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \quad (46)$$

$$Z'(z) = \frac{d}{dz} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} = \frac{1}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} z^{-\frac{3}{2}} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} e^{-i\frac{3\theta}{2}} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (47)$$

Las partes real e imaginaria de las funciones Z y Z' (46) y (47) son las siguientes:

$$\operatorname{Re} Z(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (48)$$

$$\operatorname{Im} Z(z) = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (49)$$

$$Re Z'(z) = - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (50)$$

$$Im Z'(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \sen \frac{3\theta}{2} \quad (51)$$

Sustituyendo las ecuaciones (48) y (49), en la ecuación (39a), se obtiene:

$$\sigma_x = Re \bar{Z}(z) - y Im \bar{Z}(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - y \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \sen \frac{3\theta}{2} \quad (52)$$

De la misma forma sustituyendo las ecuaciones (48) y (49), en la ecuación (39b), se obtiene:

$$\sigma_y = Re \bar{Z}(z) + y Im \bar{Z}(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + y \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \sen \frac{3\theta}{2} \quad (53)$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (48), en la ecuación (39c) se obtiene:

$$\tau_{xy} = -y Re \bar{Z}(z) = y \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (54)$$

En las ecuaciones (52)(53) y (54) se tiene el operador y , el cual es obtenido con base en la Figura 3.3b, en la cual se puede observar que la componente vertical del vector r , puede ser expresada como:

$$y = r \sen \theta \quad (55)$$

Sustituyendo la identidad trigonométrica $\sen \theta = 2 \sen \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ en la ecuación (55) resulta:

$$y = 2r \sen \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (56)$$

La ecuación (56) es sustituida en las ecuaciones (52), (53) y (54).

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - \left(2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \quad (57)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \left(2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \quad (58)$$

$$\tau_{xy} = \left(2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (59)$$

Multiplicando términos de las ecuaciones (57), (58) y (59) resulta:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \quad (60)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \quad (61)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (62)$$

Agrupando términos semejantes de las ecuaciones (60), (61) y (62), se obtiene:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (63)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (64)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (65)$$

Las ecuaciones (63), (64) y (65) están en función del factor de intensidad de esfuerzo K_I , de la magnitud del vector r y su dirección θ . Estas ecuaciones representan el campo de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta en un componente mecánico que se encuentra sometido a cargas, lo que resulta en un modo I de desplazamiento de las grietas. Ecuaciones similares para representar el campo de esfuerzos en los modos de carga II se muestran en continuación, el desarrollo matemático de estas ecuaciones fue realizado de manera similar como lo fue para las ecuaciones del modo de carga I.

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (66)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (67)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (68)$$

Para un componente, en donde las grietas están sometidas a un modo de carga mixto, es decir, cuando más de un modo de carga genera desplazamientos en la grieta, y de acuerdo al principio lineal de superposición, el cual estipula que las contribuciones individuales de cada modo de carga deben ser sumadas, para obtener el campo total de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta [1].

Con base en el teorema de superposición, fueron sumadas las ecuaciones (63) y (66), posteriormente las ecuaciones (64) y (67), y finalmente las ecuaciones (65) y (68) para

obtener el campo total de esfuerzos debido a la aplicación de los modos de carga I y II, obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (69)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (70)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (71)$$

Para un estado de esfuerzos biaxial, las deformaciones unitarias están relacionadas con las ecuaciones de la ley generalizada de Hooke. [71]

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (72)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

De la misma manera, las deformaciones unitarias y los desplazamientos se relacionan con las siguientes expresiones:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (73)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Sustituyendo las ecuaciones (72) y (73) en las ecuaciones (69) y (70), se obtienen las ecuaciones que relacionan los desplazamientos y el FIE en los alrededores de la punta de la grieta.

$$u = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} + \left[k - 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left[k + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\} \quad (74)$$

$$v = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \left[k - 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] - K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left[k - 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\} \quad (75)$$

Donde K_I y K_{II} , son los FIE para los modos I y II de desplazamiento de las grietas. El modo I, es el modo de apertura, donde las caras de la grieta se mueven perpendicularmente entre sí, el modo II, es el modo de deslizamiento, en el cual las caras de la grieta se mueven en paralelo con el plano de la grieta.

La variable G , representa el módulo de rigidez cortante, u y v los desplazamientos en las direcciones x y y respecto a un sistema coordenado en la punta de la grieta, el valor de la variable k para condiciones de esfuerzo plano es $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, la variable θ representa el ángulo formado entre la localización en donde se desea conocer el desplazamiento y el sistema coordenado en la punta de la grieta, finalmente la variable r representa la distancia de este punto a la punta de la grieta Figura 3.4

Con base en las ecuaciones (74) y (75) se observa que el desplazamiento o posición de un punto en los alrededores de la punta de la grieta puede ser obtenido con base en el ángulo θ , la distancia r y el FIE para los modos de carga I y II del punto con respecto a un sistema coordenado con origen en la punta de la grieta.

Con la finalidad de facilitar el análisis del FIE en los alrededores de la punta de la grieta, las ecuaciones (74) y (75) pueden ser evaluadas tomando en consideración un ángulo $\theta = 180^\circ$, es decir un punto que se encuentre colineal con el plano de apertura de la grieta, Figura 3.4

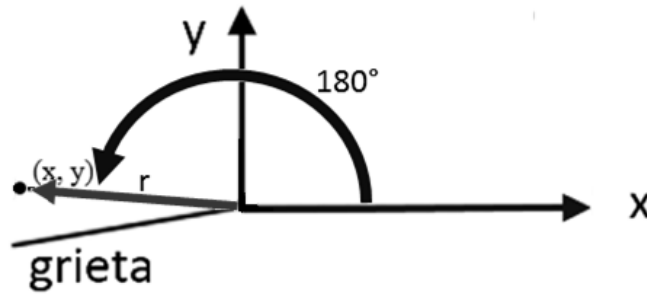


Figura 3.4 Sistema coordenado en coordenadas polares con origen en la punta de la grieta

Sustituyendo un valor del ángulo θ de 180° en las ecuaciones (74) y (75), se obtiene:

$$u = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \{K_{II}[(k + 1)]\} \quad (76)$$

$$v = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \{K_I[(k + 1)]\} \quad (77)$$

Las ecuaciones obtenidas, están solo en función de la distancia r y de los FIE para los modos de carga I y II. A partir de las ecuaciones (76) y (77) se puede conocer los FIE para los modos de carga I y II, despejando K_{II} Y K_I , lo que resulta en las siguientes ecuaciones:

$$K_I = \frac{2G}{(1 + k)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (v) \quad (78)$$

$$K_{II} = \frac{2G}{(1 + k)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u) \quad (79)$$

Sustituyendo las expresión que relaciona el esfuerzo cortante y el módulo de elasticidad

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ y la expresión de k para condiciones de esfuerzo plano $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ en las ecuaciones (78) y (79) se obtienen las siguientes expresiones:

$$K_I = \frac{E}{4(1 + \nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (v) \quad (80)$$

$$K_{II} = \frac{E}{4(1 + \nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u) \quad (81)$$

Utilizando las ecuaciones (80) y (81) se puede obtener el FIE para los modos de carga I y II para cualquier localización en los alrededores de la punta de la grieta. Las ecuaciones están en función del módulo de elasticidad E, de los desplazamientos U_x , y U_y del punto en donde se desee conocer el FIE en los alrededores de la punta de la grieta, y de r, que es la distancia de este punto al origen del sistema coordinado localizado en la punta de la grieta, el cual está orientado, con el eje x en dirección al plano de la grieta y el eje y, perpendicular a este plano, como se observa en la Figura 3.3 a.

3.4 Formulación matemática de las ecuaciones para determinar el ángulo de propagación de las grietas en función del factor de intensidad de esfuerzos.

Para la determinación del ángulo de propagación de las grietas se desarrolló la formulación matemática del criterio del esfuerzo tangencial máximo, ETM el cual está formulado con base en las ecuaciones que relacionan la concentración de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta con el ángulo de propagación de la grieta, las cuales fueron desarrolladas en la sección 3.3 de este trabajo.

El criterio del esfuerzo tangencial máximo ETM [58,69,71] establece que las grietas se propagaran en una dirección θ_c , la cual es perpendicular a la dirección del esfuerzo tangencial máximo $\sigma_{\theta\theta}$, en donde el esfuerzo tangencial en la dirección de propagación es un esfuerzo principal, Figura 3.5.

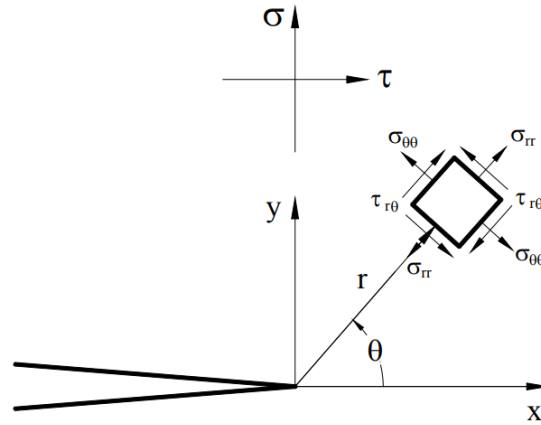


Figura 3.5 Campo de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta.

Para un problema bidimensional, en coordenadas cartesianas, las concentraciones de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta en función del ángulo de propagación son expresadas por las ecuaciones (69), (70) y (71). Estas ecuaciones estas formuladas en coordenadas cartesianas, sin embargo, el criterio del esfuerzo tangencial máximo esta formulado en coordenadas polares con base a los esfuerzos $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta}$ y σ_{rr} , como se observa en la Figura 3.5, debido a esto fue necesario realizar una transformación de esfuerzos de las ecuaciones en coordenadas cartesianas a un sistema en coordenadas polares, utilizando las ecuaciones (82) que relacionan los esfuerzos en coordenadas polares con los esfuerzos en coordenadas cartesianas [70, 71].

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= \sin \theta \cos \theta (\sigma_y - \sigma_x) + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (82)$$

Sustituyendo las ecuaciones (69), (70) y (71) en las ecuaciones (82) se obtiene:

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[5 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (84)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (85)$$

El criterio del ETM indica que el ángulo de propagación de la grieta corresponde a la dirección en donde el esfuerzo tangencial $\sigma_{\theta\theta}$ sea máximo y el esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}$ sea igual a cero, esto se representa por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \text{ Donde } \tau_{r\theta} = 0 \quad (86)$$

Con la finalidad de encontrar un valor máximo de la ecuación (83), esta se deriva con respecto a θ , para encontrar los puntos críticos de la función, es decir en donde se tiene un valor máximo o un mínimo, después se obtiene la segunda derivada, para verificar cuál de los puntos críticos, calculados por la primer derivada, es un máximo de la función original $\sigma_{\theta\theta}$, en donde un valor negativo de la segunda derivada de la función evaluada en sus puntos críticos representa un valor máximo del esfuerzo tangencial $\sigma_{\theta\theta}$, como se representa en la siguiente ecuación.

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (87)$$

Con base en la ecuación (87), la ecuación (84) se iguala a cero y se deriva en términos de θ .

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right) = 0 \quad (88)$$

Derivando en términos de θ , se obtiene:

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [K_I \text{sen}(\theta) + K_{II} (3 \cos(\theta) - 1)] \quad (89)$$

La ecuación (89) permite conocer el ángulo de propagación con base en el sistema coordinado localizado en la punta de la grieta, Figura 3.5.

Las dos soluciones para la ecuación (89) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \theta = \pm \pi \\
 2. \quad & K_I \sin(\theta) + K_{II} (3 \cos(\theta) - 1) = 0
 \end{aligned} \tag{90}$$

Las soluciones 1 y 2 son los puntos críticos de la ecuación (89), en donde la solución 1 no tiene un significado físico debido a que la grieta no puede propagarse en una dirección $\pm \pi$ radianes, es decir esta solución es un mínimo de la ecuación debido a que representa el valor del esfuerzo tangencial por detrás del frente de la punta de la grieta, en donde el valor del esfuerzo es cero. Por otro lado, y debido a que la solución número uno fue un mínimo, la solución número dos, por lo tanto, representa un máximo y puede ser escrita de forma explícita de la siguiente forma:

$$\theta_c = -\arccos \left[\frac{3K_I^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right] \tag{91}$$

De la ecuación anterior se puede observar que aplicando solo cargas de modo I ($K_I \neq 0$, $K_{II} = 0$), el ángulo de propagación será igual a cero, mientras que para cargas del modo II ($K_I = 0$, $K_{II} \neq 0$), el ángulo de propagación será igual a -70.6° .

Para la utilización de este criterio el valor de K_I siempre es positivo, debido a que la carga aplicada normal a las superficies de la grieta es de tensión o cero. Sin embargo, el valor de K_{II} , que representa el deslizamiento de las superficies de la grieta, puede tener un valor negativo o positivo de acuerdo con el sistema coordenado definido en la punta de la grieta, como se observa en la Figura 3.6.

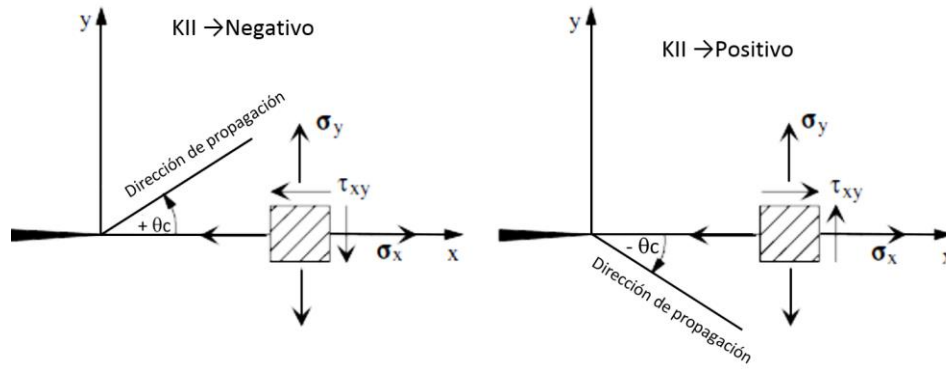


Figura 3.6 Determinación del sentido positivo o negativo del ángulo de propagación utilizando el FIE para cargas del modo II

Capítulo 4 . ANÁLISIS NUMÉRICO PARA DETERMINAR EL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS, LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LAS GRIETAS Y EL NUMÉRO DE CICLOS.

4.1 Introducción

En este capítulo se presenta el análisis numérico utilizando el método de elemento finito, para determinar el factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas en las probetas fabricadas con el material A216 WCB grado 600 de la maza de rueda portadora de los vagones de los trenes del STC Metro de la ciudad de México.

Para el análisis numérico se creó un modelo virtual de la probeta en el programa de diseño computacional, NX 9.0 posteriormente para la solución de las ecuaciones del modelo numérico presentado en el capítulo 3, se desarrolló un algoritmo en los lenguajes de programación TCL/TK y Python, con el cual se analizó el factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas en función del número de ciclos de aplicación de las cargas. El algoritmo numérico fue implementado en el programa computacional HYPERMESH, en donde se utilizó el módulo de OPTISTRUCT para determinar los desplazamientos y los esfuerzos en el modelo numérico de la probeta. La metodología que se utilizó para realizar el análisis numérico se dividió en cuatro pasos principales, la formulación del modelo numérico, el pre-proceso, el proceso y postproceso de la información.

4.2 Metodología para el análisis numérico.

La metodología utilizada para el análisis numérico del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas utilizando el MEF se compone de los siguientes pasos principales:

- 1) Formulación del modelo numérico.
- 2) Preproceso
- 3) Proceso
- 4) Postproceso

En la Figura 4.1 se presenta el diagrama de flujo de la metodología general para la realización del análisis numérico, el cual está compuesto de tres pasos principales: el pre-proceso, proceso y postproceso de la información.

El pre-proceso es la etapa del análisis numérico en donde se establecen las restricciones, cargas, propiedades mecánicas y se selecciona el tipo de elemento para discretizar el componente.

Posteriormente, el proceso es la etapa en donde se selecciona el tipo de análisis numérico para resolver las ecuaciones del modelo matemático que representan el comportamiento del componente. Finalmente, el postproceso es la etapa en donde se analizan los resultados obtenidos de la solución obtenida del modelo numérico.

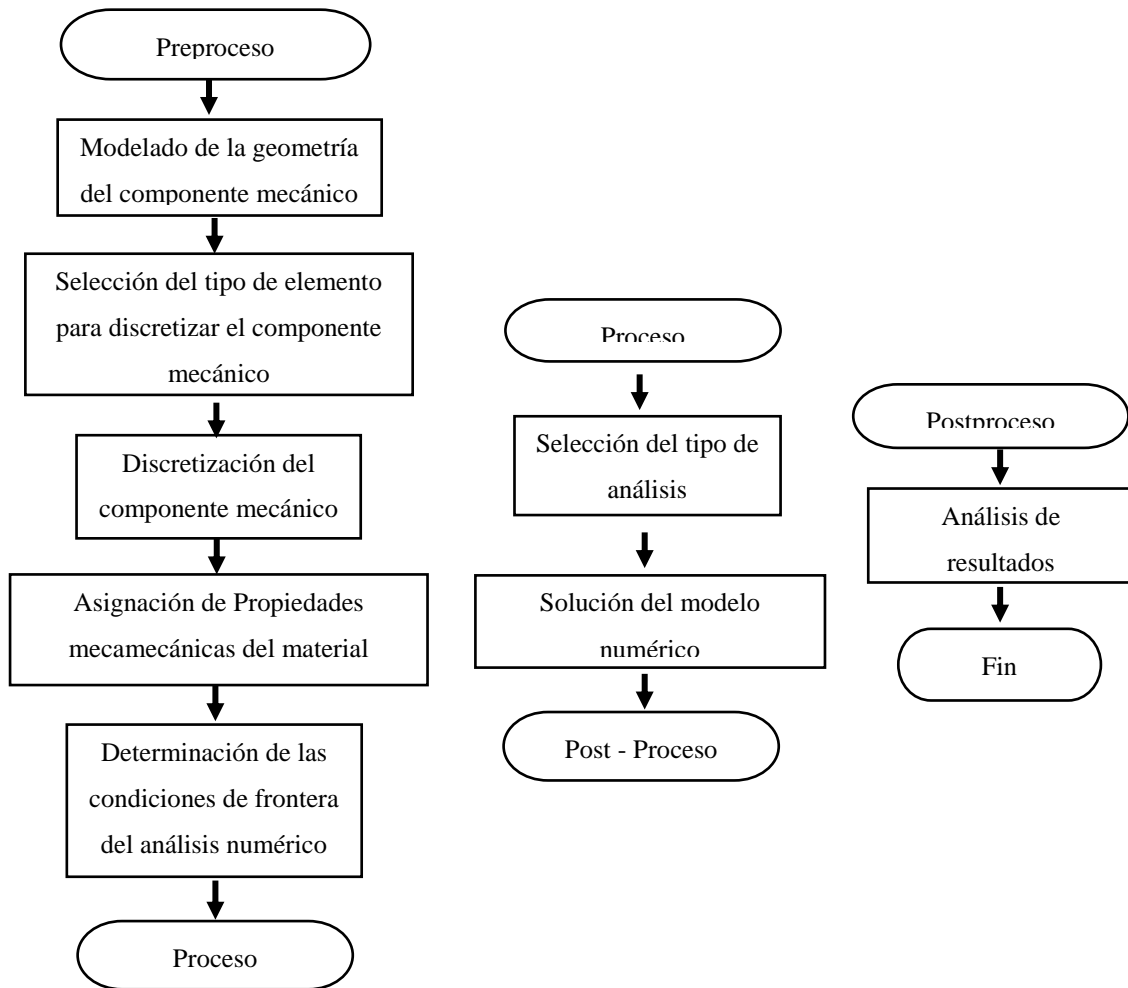


Figura 4.1 Metodología General para el análisis numérico

4.3 Formulación del modelo numérico para el análisis de la propagación de las grietas.

Para el análisis numérico de la probeta se estableció un modelo numérico, el cual fue desarrollado con base en la metodología que se utilizó para la formulación matemática del problema, propuesta en el Capítulo 3 de este trabajo.

El modelo numérico se desarrolló utilizando el método de elemento finito, para obtener una solución aproximada para los desplazamientos y esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta, con la finalidad de determinar el factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas.

4.3.1 Principio de trabajos virtuales.

Con la finalidad de determinar el campo de desplazamientos y esfuerzos en los alrededores de la punta de las grietas en el material A216 con el cual está fabricada la probeta se estableció un modelo numérico para obtener una solución aproximada de las ecuaciones del problema analizado.

Para el análisis del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación, con base en la formulación matemática desarrollada en el Capítulo 3, se deben determinar los desplazamientos nodales en los alrededores de la punta de la grieta debido a la aplicación de las cargas.

A partir de las ecuaciones de equilibrio de la probeta, obtenidas en la formulación matemática (22) se deben de determinar los desplazamientos u, v del sistema.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y &= 0\end{aligned}\tag{92}$$

Se debe notar que los esfuerzos están relacionados con deformaciones unitarias que, a su vez, están relacionadas con los desplazamientos. Esto conduce a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. La solución de este conjunto de ecuaciones se le llama generalmente una solución exacta o formulación fuerte. Estas soluciones exactas existen para geometrías y condiciones de carga simples, las cuales pueden

encontrarse en los textos sobre teoría de la elasticidad [70, 72, 77]. Sin embargo, para problemas con geometría, condiciones de frontera y de carga complejas, como el análisis de desplazamientos y esfuerzos de la probeta analizada, la obtención de las soluciones es una tarea complicada. Para la solución de estas ecuaciones se utilizan criterios de solución aproximada que usualmente emplean métodos de energía potencial o con variación, que imponen condiciones menos estrictas sobre las funciones que gobiernan un sistema.

La formulación con variación más utilizada para obtener una solución aproximada de las ecuaciones del sistema (92) es la basada en el método de residuos ponderados de Galerkin [7, 70, 78]

Los métodos de residuos ponderados son utilizados para hacer que el residuo obtenido debido a la evaluación de una función utilizando un valor aproximado a la solución exacta, \tilde{u} , sea lo más cercano a cero.

$$Lu - P = 0$$

$$L\tilde{u} - P = \text{residuo} \quad (93)$$

Con la finalidad de hacer igual a cero el residuo relativo de una función, se utiliza una función pesada W_i .

$$\int_V W_i(L\tilde{u} - P) = 0 \quad (94)$$

En el método de Galerkin, las funciones pesadas W_i se eligen a partir de las funciones base utilizadas para construir la función de aproximación \tilde{u} . Donde \tilde{u} fue previamente obtenido utilizando la siguiente expresión:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n Q_i G_i \quad (95)$$

Donde $G_i, i = 1, 2, \dots, n$, son funciones base o polinomios, construidos como una combinación lineal de funciones. La variable Q_i que representa los coeficientes de las funciones G_i , los cuales, aplicando el método de Galerkin, son sustituidos por un desplazamiento arbitrario representado por la letra ϕ , que debe de satisfacer en todo momento las condiciones de frontera u, por lo tanto, la ecuación (95) puede describirse, obteniéndose la expresión siguiente:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i G_i \quad (96)$$

Aplicando el método de Galerkin en las ecuaciones (92) que representan las expresiones de equilibrio en términos de esfuerzos de la probeta, es posible obtener una solución aproximada del sistema. Con base en el método de Galerkin, las ecuaciones de equilibrio representarán las funciones de aproximación del sistema, y los desplazamientos ϕ representarán las funciones de peso W_i utilizadas para hacer igual a cero el residuo.

Utilizando el método de Galerkin en las ecuaciones de equilibrio de la probeta se obtiene:

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x \right) \phi_x + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y \right) \phi_y \right] dV = 0 \quad (97)$$

Donde el vector $\phi = [\phi_x, \phi_y]^T$ representa el vector de desplazamientos arbitrarios que es consistente con las condiciones de frontera.

Para resolver la ecuación (97) se utiliza el teorema de divergencia para problemas multidimensionales [7, 79], el cual establece la relación entre la integral de volumen y la integral de superficie del campo, sobre la frontera que encierra el volumen V .

$$\int_V \frac{\partial \alpha}{\partial x} \theta dV = - \int_V \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} dV + \int_S n_x \alpha \theta ds \quad (98)$$

Donde α y θ son funciones de la posición (x, y). Para el caso de las ecuaciones de equilibrio, el termino α será los esfuerzos y el termino θ los desplazamientos. Utilizando el teorema de divergencia (98) para integrar por partes cada término del esfuerzo de la ecuación (97) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& - \int_V \sigma_x \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dV + \int_S n_x \sigma_x \phi_x ds - \int_V \tau_{xy} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} dV + \int_S n_x \tau_{xy} \phi_x ds \\
& + \int_V f_x \phi_x dV - \int_V \sigma_y \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dV + \int_S n_y \sigma_y \phi_y ds \\
& - \int_V \tau_{xy} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} dV + \int_S n_x \tau_{xy} \phi_x ds + \int_V f_y \phi_y dV = 0
\end{aligned} \tag{99}$$

Agrupando términos, utilizando una notación tensorial se obtiene:

$$\begin{aligned}
& - \int_V \sigma^T \epsilon(\phi) dV + \int_V \phi^T f dV \\
& + \int_S [(n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) \phi_x \\
& + (n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{yz}) \phi_y + (n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z) \phi_z] ds \\
& = 0
\end{aligned} \tag{100}$$

Donde σ^T representa el vector de esfuerzos

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \tag{101}$$

El término $\epsilon(\phi)$ representa el vector de deformaciones en función de los desplazamientos arbitrarios ϕ ,

$$\epsilon(\phi) = \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \frac{\partial \phi_z}{\partial z}, \frac{\partial \phi_y}{\partial z} + \frac{\partial \phi_z}{\partial y}, \frac{\partial \phi_x}{\partial z} + \frac{\partial \phi_z}{\partial x}, \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right]^T \tag{102}$$

f representa las fuerzas actuando en el cuerpo, y los términos n_x, n_y, n_z son las componentes del vector normal a la superficie en donde actúan los esfuerzos [7].

Considerando que las componentes del vector de las cargas aplicadas en la superficie del sistema están definidas por las siguientes ecuaciones [7, 3]:

$$\begin{aligned} n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} &= T_x \\ n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{yz} &= T_y \\ n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z &= T_z \end{aligned} \quad (103)$$

Y las cargas puntuales definidas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) dS &= P_x \\ (n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{yz}) dS &= P_y \\ (n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z) dS &= P_z \end{aligned} \quad (104)$$

Sustituyendo las ecuaciones (103) y (104) en la ecuación (100), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\phi}) t dA - \int_A \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} dV - \int_L \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T} dS - \sum \phi_i^T \mathbf{P}_i = 0 \quad (105)$$

La ecuación resultante es conocida como la ecuación del principio del trabajo virtual, la cual representa la energía potencial de un sistema en términos de un desplazamiento virtual $\boldsymbol{\phi}$, el cual es consistente con las condiciones de frontera del sistema.

Rescribiendo la ecuación (105) y agrupando sus términos, se obtiene la siguiente expresión, la cual representa la relación entre el trabajo interno y el en el cuerpo.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\phi}) t dA - \left(\int_A \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} t dA + \int_L \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T} t dl + \sum \phi_i^T \mathbf{P}_i \right) \quad (106)$$

El primer termino $U_e = \frac{1}{2} \int_e \sigma^T \epsilon(\phi) t dA$, representa la energía de deformación unitaria del componente a través del espesor t , el segundo elemento $\int_A u^T f t dA$ indica las cargas actuando directamente sobre los nodos (gravedad, inercia), el tercer elemento $\int_L u^T T t dl$ representa el vector de las cargas que actúan en la superficie del componente, y finalmente el elemento $\sum u_i^T P_i$ indica el punto de aplicación i de una carga puntual P_i , donde P_i tiene componentes $[P_x, P_y]^T$. La sumatoria de cargas sobre el punto i da la energía potencial debida a todas las cargas puntuales [7].

Si consideramos que la probeta analizada será discretizada en un número finitos de elementos por lo tanto la energía potencial total será considera como la sumatoria de la energía de cada uno de los elementos, con base en esto, la ecuación (105) puede describirse de la siguiente forma [3, 25, 31] :

$$\Pi = \sum_e \int_e \epsilon^T D \epsilon(\phi) t dA - \left(\sum_e \int \phi^T f t dA + \int_e \phi^T T t dl + \sum \phi_i^T P_i \right) = 0 \quad (107)$$

Donde el término D es una matriz simétrica que representa las propiedades mecánicas del material, relacionando el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν .

Los pasos de interpolación de la ecuación (106) están en función de los desplazamientos virtuales, los cuales están representados por las siguientes ecuaciones:

$$\phi = N\psi \quad (108)$$

$$\epsilon(\phi) = B\psi \quad (109)$$

Donde el término ψ representa los desplazamientos nodales arbitrarios del elemento e , y es expresado por el siguiente vector:

$$\psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_n]^T \quad (110)$$

La matriz N representa las funciones de forma del tipo de elemento utilizado para discretizar la probeta y finalmente la matriz B representa la deformación unitaria de cada elemento, en donde para funciones de forma lineales, la matriz B será una constante.

Sabiendo que la deformación unitaria es igual a $\epsilon = Bq$ y sustituyendo esta igualdad en el primer término de la ecuación de la energía potencial (106), este término puede expresarse como:

$$\Pi = \sum_e \int_e \epsilon^T D \epsilon(\phi) t dA = \int_e q^T B^T D B \psi t dA \quad (111)$$

Observando que todos los términos de B Y D son constantes, y denotando t_e y A_e como el espesor y el área de cada elemento, se obtiene que:

$$\Pi = \sum_e \int_e \epsilon^T D \epsilon(\phi) t dA = q^T B^T D B t_e \int_e \psi dA \quad (112)$$

$$= q^T B^T D B t_e A_e \psi \quad (113)$$

$$= q^T k^e \psi \quad (114)$$

Donde k^e es la matriz de rigidez del elemento dada por:

$$k^e = B^T D B t_e A_e \quad (115)$$

Debido a que la matriz de propiedades mecánicas D es simétrica, por consiguiente, la matriz de rigidez del elemento k^e también lo será.

La rigidez del elemento k^e es utilizada para ensamblar una matriz de rigidez global K , que es ensamblada a partir de la sumatoria de las matrices de rigidez de cada elemento, expresándose de la siguiente forma:

$$\Pi = \sum_e \int_e \epsilon^T D \epsilon(\phi) t dA = \sum_e q^T k^e \psi = \sum_e q k^e \psi^T \quad (116)$$

$$= Q K \psi^T \quad (117)$$

Donde la matriz de rigidez global K es también simétrica. De la misma manera los términos del trabajo virtual externo de la ecuación (106) pueden ser expresados en términos de los desplazamientos nodales ψ . Así entonces se obtiene:

$$\int_e \phi^T f t dA = \psi^T f^e \quad (118)$$

Similarmente, el manejo de la carga de tracción y de la carga puntual están dados por:

$$\int_e \phi^T T t dl = \psi^T T^e \quad (119)$$

$$\sum \phi_i^T P_i = \psi^T P \quad (120)$$

Sustituyendo las ecuaciones(118)(119) y (120) en la ecuación (107) se obtiene la siguiente expresión:

$$\Pi = \sum_e q^T k^e \psi - \sum_e \psi^T f^e - \sum_e \psi^T T^e - \sum_i \psi_i^T P = 0 \quad (121)$$

Donde los términos $(\sum_e \psi^T f^e - \sum_e \psi^T T^e - \sum_i \psi_i^T P)$ representan el vector de fuerzas externas y el término $\sum_e q^T k^e \psi$ representa la energía interna que es expresada utilizando la matriz de rigidez del sistema multiplicada por el vector de desplazamientos q^T , con base en esto, la ecuación (121) puede escribirse de la siguiente forma:

$$KU = F \quad (122)$$

Donde la matriz de rigidez global K es ensamblada a partir de las matrices k^e de cada uno de los elementos, esto es realizado utilizando la información sobre la conectividad entre ellos. De la misma manera el vector de fuerza F se ensambla a partir de las matrices de fuerzas f^e y T^e de cada elemento y el vector U está conformado por todos los desplazamientos nodales de los elementos. A partir de la ecuación (122) se obtienen de los desplazamientos nodales, con la siguiente expresión [3, 25, 31]:

$$U = FK^{-1} \quad (123)$$

Con base en los desplazamientos nodales en las direcciones x, y encontrados con la ecuación (123) se obtendrán los factores de intensidad de esfuerzos utilizando las ecuaciones (80) y (81), presentadas en el Capítulo 3, sección 3.3.

Los esfuerzos para cada elemento pueden ser calculados utilizando las relaciones esfuerzo-deformación unitaria y las relaciones deformación unitaria-desplazamiento. Los esfuerzos y deformaciones unitarias para condiciones de esfuerzo plano están relacionados por la siguiente ecuación [3]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (124)$$

Donde E representa el módulo de elasticidad y ν la relación de Poisson, la matriz de dimensiones (3x3) de la ecuación anterior relaciona tres esfuerzos con tres deformaciones unitarias. Reescribiendo la ecuación (124) se obtiene:

$$\sigma = D\epsilon \quad (125)$$

La ecuación anterior puede ser escrita en términos de los desplazamientos nodales siguiendo las siguientes consideraciones:

$$\{\epsilon\} = [B] \{q\} \quad (126)$$

Donde $[B]$ es una matriz de deformación unitaria-desplazamientos con respecto a x , y es decir $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, $\{q\}$ es un vector que contiene los desplazamientos nodales. Para el caso bidimensional se tiene:

$$\{q\}[N] = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (127)$$

Donde N es la matriz que contiene las funciones de forma de cada elemento, u, v representan los desplazamientos de cada elemento en su interior. Sustituyendo la ecuación (126) en (125), se obtiene:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\} \quad (128)$$

La ecuación anterior representa las componentes de los esfuerzos en función de los desplazamientos nodales.

4.4 Modelado de la probeta ESE (T).

La probeta compacta a tensión (ESET) fue fabricada con base en la norma ASTM 647-15 [80]. El proceso de fabricación de las probetas es presentado en las tesis de maestría de V.A Pérez Cervantes [81] y R. Corona Cid. [69], en las cuales se realiza el análisis experimental y analítico de la vida remanente de la maza de rueda portadora del STC metro. Las dimensiones establecidas para las probetas tipo ESET son mostradas en la Figura 4.2.

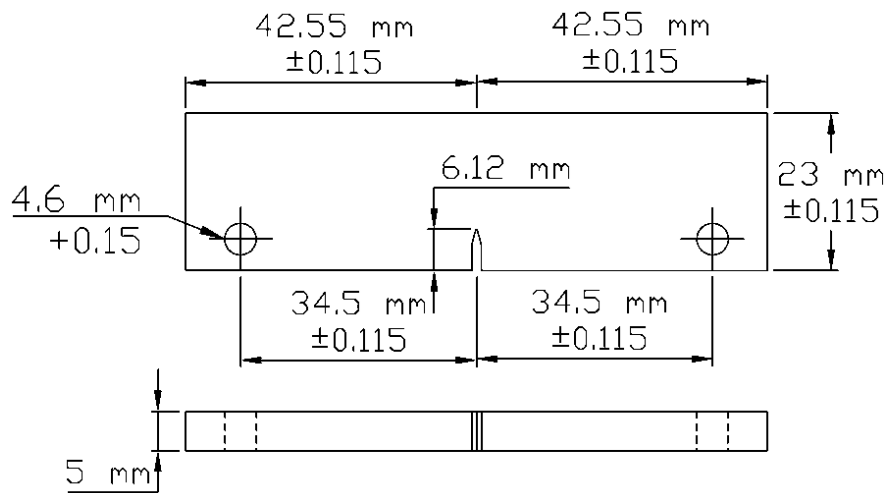


Figura 4.2 Dimensiones de la probeta para el análisis de la propagación de las grietas en la MRP.

Para la simulación numérica de la dirección de propagación de las grietas se realizó un modelo virtual utilizando el programa computacional UNIGRAPHICS NX 9.0 como se observa en la Figura 4.3.

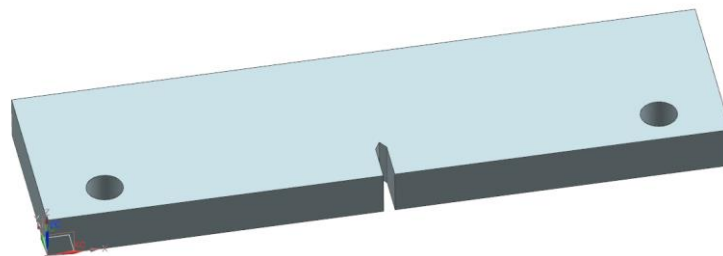


Figura 4.3 Modelo de la probeta ESE (T).

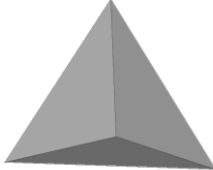
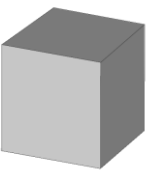
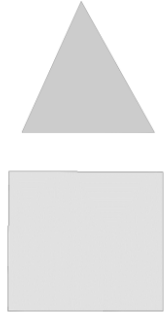
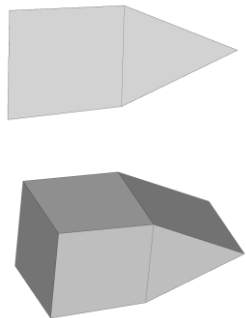
4.5 Selección del tipo de elemento de malla

En esta sección se presentan las ventajas y desventajas de los distintos tipos de elementos para la generación de las mallas, con la finalidad de discretizar la probeta para encontrar los desplazamientos en los alrededores de la punta de la grieta utilizando el MEF.

Existen distintos tipos de elementos que pueden ser utilizados para discretizar la probeta en un número finito de elementos. Generalmente los elementos de 3 dimensiones como los tetraédricos y hexaédricos son los más utilizados en análisis estructurales estáticos y dinámicos. Sin embargo, cuando la geometría del componente evaluado es de un espesor constante, los elementos de dos dimensiones, o comúnmente conocidos en inglés como “SHELL” son idóneos para el análisis de desplazamientos y esfuerzos, debido a que se simplifica el problema de 3 dimensiones a uno de solo dos, optimizando el tiempo de procesamiento.

Para optimizar el tiempo de procesamiento sin reducir la precisión de los resultados, se pueden utilizar dos o más tipos de elementos en una malla, formando una malla híbrida, estas mallas tienen grandes ventajas en comparación con las de un solo tipo de elemento, puesto que se puede seleccionar el elemento que puede dividir una determinada región del componente de acuerdo con la relevancia del análisis. En la Tabla 4.1 se presenta un análisis de las ventajas y desventajas de cada tipo de elemento.

Tabla 4.1 Ventajas y Desventajas de los diferentes tipos de elementos para la generación de las mallas

Tipo de elementos	Ventajas	Desventajas	Figura
Tetraédrico	Es utilizado en la discretización de componentes tridimensionales en donde se tienen grandes cambios de espesor y de sección, debido a que se adaptan mejor al contorno de la geometría de los componentes.	Aumentan el tiempo de procesamiento de la simulación. Es indispensable la utilización de elementos tetraédricos de segundo orden para obtener resultados precisos, sin embargo, se incrementa el tiempo de procesamiento.	
Hexaédrico	Al igual que el elemento tetraédrico es utilizado para la discretización de componentes tridimensionales, sin embargo, utilizando este elemento se obtienen resultados más precisos.	Aumentan el tiempo de procesamiento de la simulación. Difícilmente se adaptan en zonas de radios pequeños para realizar el modelado de los componentes.	
Membrana (SHELL)	Reducen el tiempo de procesamiento de la simulación. Existen formulaciones matemáticas del elemento para representar condiciones de esfuerzo plano y deformación plana en componentes	No son recomendables en geometrías en donde se tienen grandes cambios de espesor.	
Híbridos.	Reducen el tiempo de procesamiento sin reducir la precisión de los resultados. Se puede seleccionar el elemento con el que se va a realizar la discretización para una región determinada con base a la relevancia del análisis.	No son recomendables en geometrías en donde se tienen grandes cambios de espesor.	

De la Tabla 4.1 se observa que los elementos tetraédricos y hexaédricos son los elementos ideales para la realización de mallas en geometrías con diferentes espesores y radios. Sin embargo, utilizar este tipo de elementos para discretizar los componentes aumenta el tiempo de procesamiento del análisis numérico, Por otro lado, se tienen elementos de dos dimensiones “Shell” los cuales reducen el tiempo de procesamiento y son idóneos para el modelado de componentes que tienen un espesor constante.

Las probetas ESE (T) son de espesor constante, es por eso que los elementos de dos dimensiones fueron seleccionados para la discretización de la probeta, además de que el planteamiento del problema de un sistema de tres dimensiones se simplifica a uno de solo dos dimensiones.

Por estas razones, para la realización de las mallas de la probeta se utilizaron elementos híbridos de dos dimensiones, compuestos de elementos cuadrangulares y triangulares de 8 y 6 nodos respectivamente, con los que se pueden obtener las ventajas de optimizar el tiempo de procesamiento sin reducir precisión de los resultados.

A continuación, se presenta la formulación matemática de los elementos cuadrangulares y triangulares de dos dimensiones.

4.5.1 Elemento isoparamétrico de puntos cuartos

El elemento isoparamétrico de puntos cuartos EIPC, fue desarrollado simultáneamente por Henshell and Shaw [40] y por Barsoum [41] en la década de los setentas para elementos cuadrangulares, y poco más tarde por Hibbitt [82] quien desarrollo la misma formulación pero en elementos triangulares. Este elemento fue formulado para permitir representar la geometría en los alrededores de la grieta con la finalidad de obtener un campo de desplazamientos lo más cercano a la singularidad presente en la punta de la grieta y calcular el factor de intensidad de esfuerzos con una mejor precisión utilizando el MEF.

La característica principal del EIPC es el posicionamiento de los nodos intermedios de las aristas adyacentes al nodo que representa la punta de la grieta. Los nodos intermedios son relocalizados a un cuarto de la longitud de la arista de cada elemento (Figura 4.4). Esta modificación en la posición de los nodos intermedios permite la representación del campo de

desplazamientos necesario en el análisis numérico para la obtención del FIE en los alrededores de la punta de la grieta. Sin embargo, a pesar del cambio de posición de los nodos intermedios, las funciones de forma del elemento isoparamétrico cuadrático de 8 nodos permanecen sin cambio.

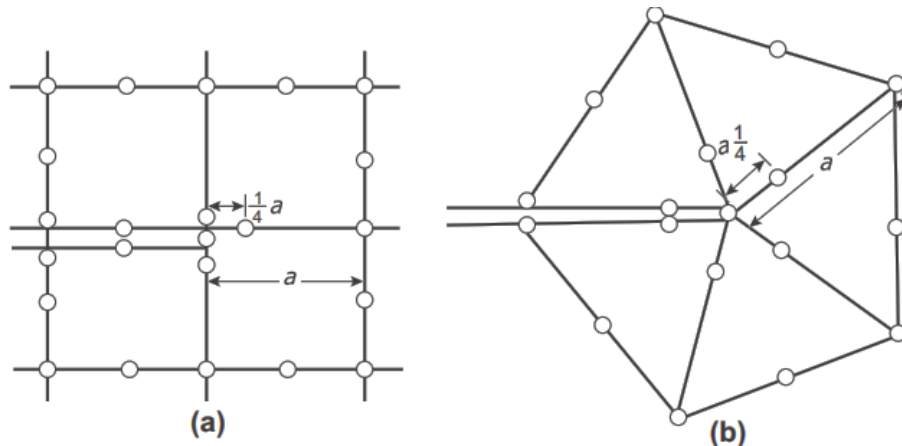


Figura 4.4 Elemento Isoparamétrico de puntos cuartos cuadrangular (a) y triangular (b) de dos dimensiones

Los elementos de puntos cuartos poseen otras características como la compatibilidad para lograr una correcta conectividad con elemento isoparamétricos, además estos elementos forman parte de las librerías de elementos de programas computacionales de análisis numérico como los son: ABAQUS, ANSYS, NASTRAN entre otros. Por lo cual su aplicación es viable.

Además, en distintas publicaciones [60,93] se muestra la comparación entre la aplicación del elemento isoparamétrico convencional y el de puntos cuartos para determinar el FIE en distintas configuraciones de placas agrietadas, los resultados de los análisis muestran que utilizando elementos isoparamétricos de puntos cuartos se obtienen variaciones menores al 2% respecto a la solución analítica exacta. Además, utilizando elementos de puntos cuartos, se necesitaron una menor cantidad de elementos para discretizar los alrededores de la punta de la grieta y la geometría de las placas lo que se reflejó en un menor tiempo de procesamiento.

4.6 Selección del tamaño de malla.

Para seleccionar el tamaño de malla para discretizar los alrededores de la punta de la grieta y obtener resultados precisos, se realizó un estudio de convergencia de malla, en el cual se analizó la variación del FIE con base al tamaño de los elementos finitos utilizados para discretizar los alrededores de la punta de la grieta.

El tamaño de los elementos que fue seleccionado para discretizar los alrededores de la punta de la grieta fue disminuyendo desde 1 mm hasta 0.03mm. La longitud de la grieta que fue utilizada para determinar el FIE en la probeta fue de 8 mm y se le aplicó una carga axial a la probeta de 2 kN. El FIE en las cercanías de la punta de la grieta fue obtenido aplicando la metodología de la sección 4.11

El valor del FIE utilizado para comparar los resultados obtenidos de los análisis numéricos fue determinado con base a las expresiones matemáticas mostradas en la norma ASTM 647-15 para la obtención del FIE en una probeta ESE (T). El valor obtenido del FIE utilizando la norma fue de $4.13 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. En la Figura 4.5 se muestra una gráfica con los resultados del FIE obtenidos numéricamente con base al tamaño de los elementos utilizados para discretizar los alrededores de la punta de la grieta.

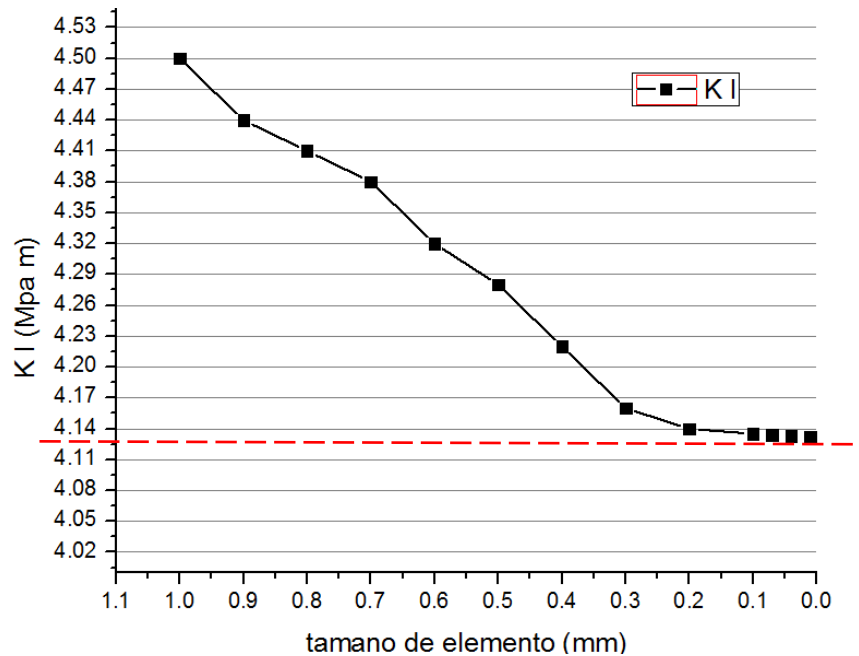


Figura 4.5 Determinación del tamaño de malla para discretizar los alrededores de la punta de la grieta

Con base a la Figura 4.5 se observa que los valores del FIE obtenidos numéricamente para las cargas del modo I utilizando un tamaño de malla 1 mm tienen una variación del 10 % con respecto al valor obtenido por la norma ASTM 647-15 que fue de $4.13 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Sin embargo, al reducir el tamaño de elemento hasta 0.1 mm las variaciones son menores al 3%. Este porcentaje de error es reducido hasta un valor de 1% utilizando un tamaño de menor a 0.1 mm. Sin embargo, la utilización de un tamaño de elemento menor a 0.1 mm, incremento el tiempo de procesamiento hasta en un 60% para la obtención de resultados.

Con base en lo anterior, se seleccionó un tamaño de elemento de 0.1 mm para discretizar los alrededores de la punta de la grieta, debido a que a partir de este tamaño de elemento se obtienen resultados precisos con variaciones menores al 3% con respecto al valor analítico, sin incrementar el tiempo de procesamiento para la obtención de resultados

4.7 Generación de mallas.

El programa utilizado para la generación de las mallas fue HYPERMESH, en donde se utilizó el módulo de OPTISTRUCT para la solución del modelo numérico, el cual utiliza los elementos Quad8 para la discretización de geometrías de dos dimensiones. El elemento SHELL tipo Quad8 tiene 6 grados de libertad por nodo, los cuales corresponden con las tres direcciones de desplazamientos y las tres direcciones de rotación.



Figura 4.6 Elemento QUAD8

El elemento Tria6, al igual que el elemento Quad8 es un elemento que tiene 6 grados de libertad por nodo, sin embargo, solo tiene un total de 6 nodos.

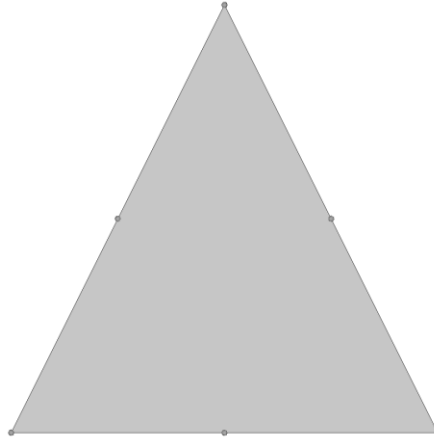


Figura 4.7 Elemento TRIA6

Para el mallado de la probeta se utilizaron elementos triangulares isoparamétricos de puntos cuartos en los alrededores de la punta de la grieta, mientras que para la discretización del resto de la probeta se utilizó una malla híbrida, conformada por elementos cuadrangulares y triangulares. Como se observa en la Figura 4.8

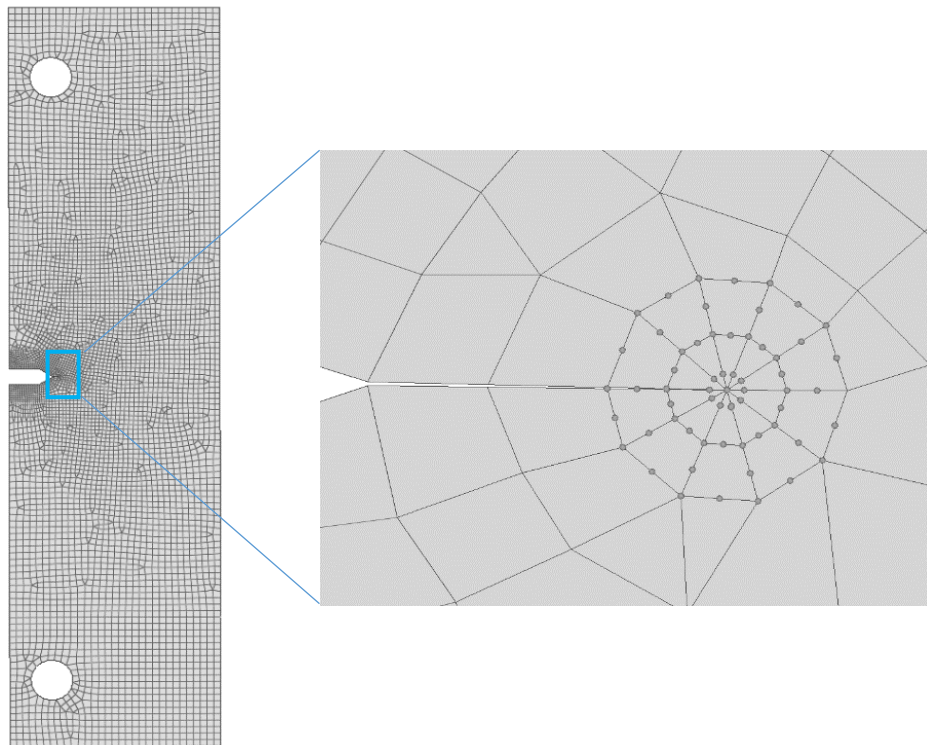


Figura 4.8 Discretización de la probeta ESE(T) y refinamiento de las mallas en los alrededores de la punta de la grieta

4.8 Propiedades mecánicas del material de la probeta ESE (T).

Las propiedades mecánicas utilizadas para el análisis numérico fueron obtenidas de las tesis de maestría de Tlapalama Fuertes Y. T. [9] y Corona Cid R. [69], quienes obtuvieron las propiedades mecánicas del material con el cual está fabricada la MRP, las cuales se muestran en la Tabla 4.2 .

Tabla 4.2 Propiedades mecánicas del acero

Módulo de elasticidad, E (GPa)	Relación de Poisson ν	Límite de Fluencia	Densidad	Tenacidad a la fractura
210 GPa	0.33	249 MPa	7850 kg/m ³	93 MPa√m

La tasa de propagación de las grietas en el material A216 fue obtenida de la tesis de maestría de Pérez Cervantes V. A [83], quien caracterizó el comportamiento mecánico del material de la MRP durante la propagación de las grietas, obteniendo la curva mostrada en la Figura 4.9.

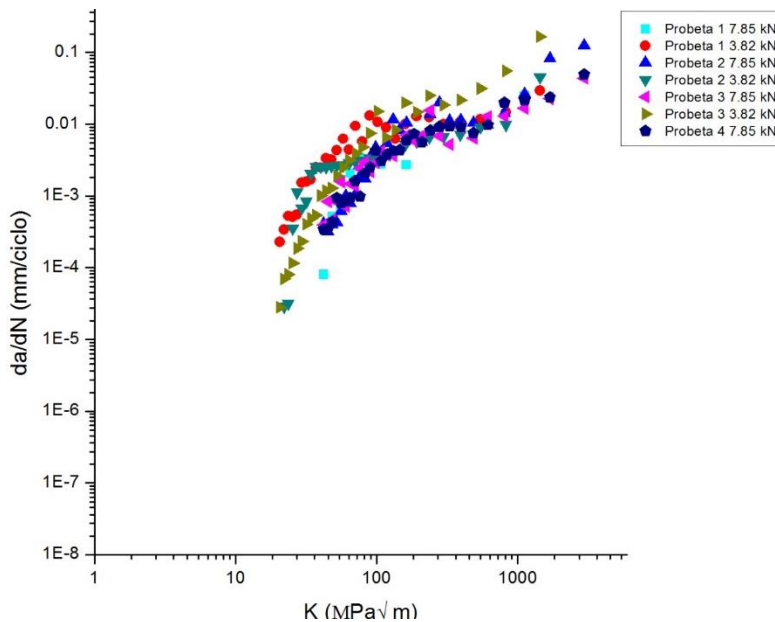


Figura 4.9 Gráfica de la tasa de propagación de las grietas en el material A216 de la MRP obtenida por Pérez Cervantes

El valor de las constantes C y m de la ecuación empírica de P. Paris [1, 84], determinadas por Pérez Cervantes V.C son mostradas en la siguiente tabla:

Tabla 4.3 Constantes C y m utilizadas en la ecuación empírica de P. Paris

Constante C	1.1xe-7
Constante m	2.3

Estas constantes fueron utilizadas para determinar numéricamente el número de veces de aplicación de las cargas en la probeta, con la finalidad de comparar este valor con el número de veces de aplicación de las cargas obtenidas experimentalmente.

4.9 Condiciones y datos para el análisis numérico.

Con la finalidad de resolver las distintas simulaciones para obtener el FIE y la DPG en función de la longitud de la grieta y el número de ciclos mediante el uso del algoritmo computacional que fue desarrollado, se establecieron las condiciones y datos con las que se van a realizar estas simulaciones. Estas condiciones, cargas y restricciones, se asignan en el algoritmo para integrarlas en un sistema de ecuaciones específico para obtener las reacciones nodales de acuerdo con las fuerzas que actúan en el sistema. Para la validación del algoritmo computacional con pruebas experimentales se utilizaron dos magnitudes de cargas diferentes, y posteriormente para el análisis de la vida remanente y de la longitud crítica de las grietas en la brida mayor de la MRP se utilizaron, las cargas de impacto debido al cambio de vía y las cargas de frenado de los vagones determinadas en la tesis de maestría de Corona Cid R. [69]

Como se mostró en el Capítulo 3, el sistema de ecuaciones (22) representa la reacción de la probeta por la aplicación de las cargas. Estas ecuaciones son solucionadas, por el programa de elementos finitos en el cual fue implementado el algoritmo computacional, utilizando el método de rigidez (123) para encontrar los desplazamientos nodales. Las ecuaciones constituyen los desplazamientos nodales de cada una de las cargas simuladas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y &= 0\end{aligned}\quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

$$U = FK^{-1}\quad (123)$$

La solución de las reacciones nodales es sustituida en las ecuaciones (80) y (81) para obtener el FIE y posteriormente el ángulo de propagación de las grietas. (91)

$$K_I = \frac{E}{4(1 + \nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (\nu)\quad (80)$$

$$K_{II} = \frac{E}{4(1 + \nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u)\quad (81)$$

$$\theta_c = -\arccos\left[\frac{3K_I^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2}\right]\quad (91)$$

Para cada una de las cargas utilizadas se conforma un sistema de ecuaciones distinto, teniendo como resultado el FIE y la DPG.

Se utilizaron dos cargas con magnitudes de 3.82 kN y 7.85 kN para la validación del algoritmo computacional con pruebas experimentales. Posteriormente para el análisis de la vida remanente y de la longitud crítica de las grietas en la brida mayor de la MRP, se utilizaron dos cargas con magnitudes de 4.07 kN y 1.37 kN, que corresponden a la magnitud de las cargas a las cuales está sometida la brida mayor de la MRP en la zona de nucleación de las grietas (ver Figura 4.10) ocasionadas por un impacto por el cambio de vía y por el frenado de los vagones. Estas cargas fueron determinadas en la tesis de maestría de Corona Cid R. [69].

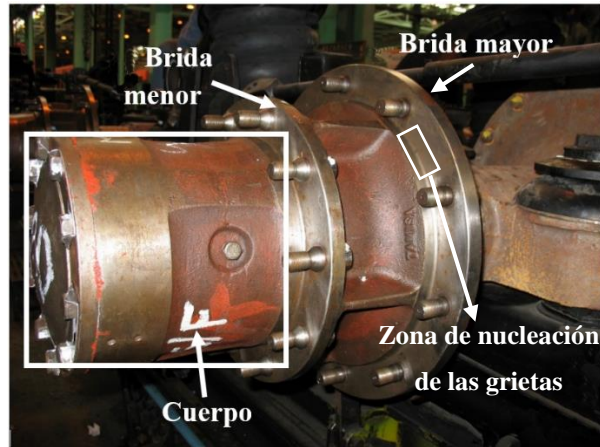


Figura 4.10 MRP de los vagones de los trenes del SRC Metro

Las restricciones que fueron utilizadas en el modelo numérico de la probeta, para la validación de la simulación numérica y para el análisis de la vida remanente y longitud crítica de la MRP, fueron establecidas con base en las condiciones experimentales con las cuales fue analizada la probeta. Para el análisis experimental de la propagación de las grietas se utilizó una maquina servo-hidráulica INSTRON modelo 8802, en la cual se utilizaron dos cabezales redondos para sujetar la probeta, utilizando dos mordazas metálicas las cuales fueron fabricadas utilizando un acero 4140, con base a la norma ASTM A647-15, el proceso de fabricación se muestra en la tesis de maestría de Corona Cid R. [69].

En la Figura 4.11 se muestran las mordazas y la Maquina Instron que fueron utilizadas para el análisis de la propagación de las grietas.

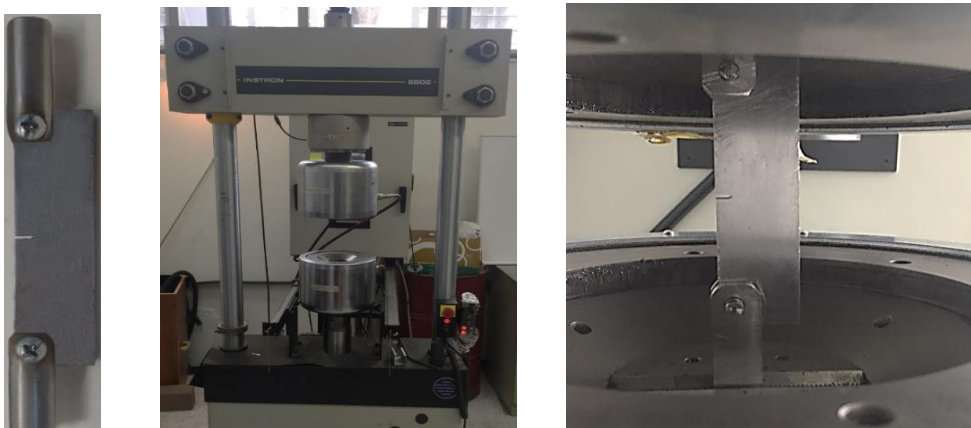


Figura 4.11 Mordazas y equipo utilizado para la aplicación de las cargas en la probeta

En la maquina servo-hidráulica las cargas fueron aplicadas a la probeta con el cabezal inferior del equipo, mientras que el cabezal superior estaba fijo a la estructura de la máquina. Tomando en consideración lo anterior, las cargas fueron distribuidas en los nodos del barreno inferior de la probeta, mientras que las restricciones del análisis numérico fueron establecidas en los 6 grados de libertad (x, y, z) de los nodos del barreno superior (ver Figura 4.12).

En la Tabla 4.4 se muestra el tipo de cargas y restricciones que fueron utilizadas para realizar cada una de las simulaciones.

Tabla 4.4 Condiciones, cargas y restricciones utilizados en las simulaciones

	Tenacidad a la fractura	Módulo de elasticidad		Relación de Poison	
Propiedades Mecánicas	93 MPa√m	210 GPa		0.3	
		Cargas	Magnitud	Dirección	Lugar de aplicación en la probeta
Tipo de Cargas	Validación del algoritmo computacional con pruebas experimentales	Carga 1	7850 N	Axial al eje Y de la probeta	Barreno inferior
		Carga 2	3820 N	Axial al eje Y de la probeta	Barreno inferior
	Análisis de la longitud crítica de la grieta y la vida remanente	Impacto	4070 N	Axial al eje Y de la probeta	Barreno inferior
		Frenado	1370 N	Axial al eje Y de la probeta	Barreno inferior
Restricciones		Nodos del barreno restringidos en sus 6 grados de libertad (x, y, z, rx, ry, rz)			Barreno superior de la probeta

En la Figura 4.12 se observan las cargas que fueron establecidas en los nodos del barreno inferior, y las restricciones representadas por triángulos las cuales fueron establecidas en el barreno superior de la probeta.

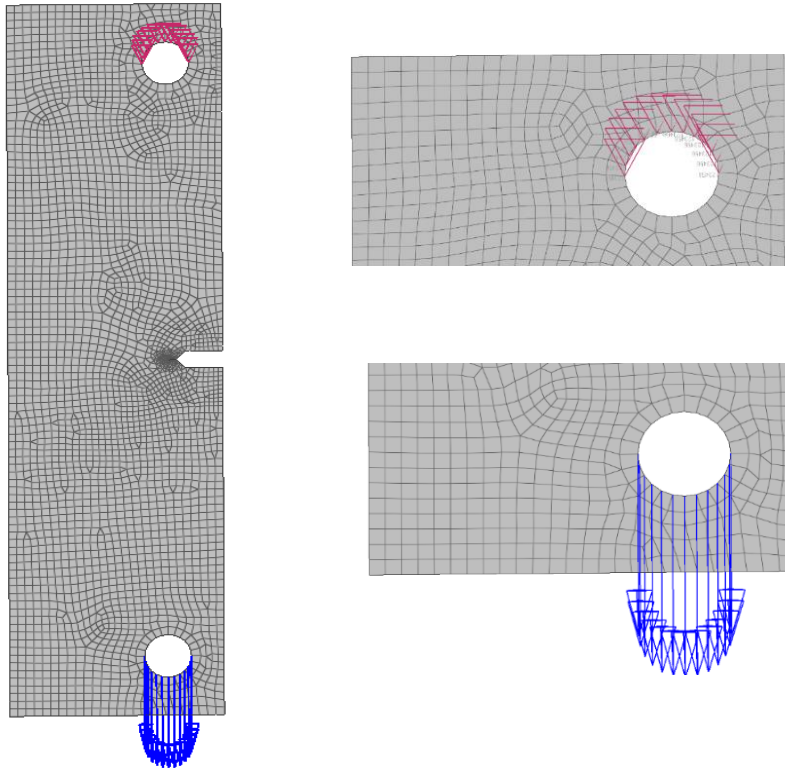


Figura 4.12 Restricciones y cargas utilizadas en el análisis numérico

4.10 Desarrollo del programa computacional para el análisis numérico del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas.

El algoritmo para el análisis numérico del FIE, la DPG en función del número de ciclos fue desarrollado en los lenguajes de programación TCL/TK y Python 2.7.14, y fue implementado en el programa computacional HYPERMESH, en donde se utilizó el módulo de OPTISTRUCT para la solución del modelo numérico de la propagación de grietas en la probeta.

Para el manejo e interacción con el algoritmo se desarrolló una interfaz gráfica, la cual consiste en un menú como el que se muestra en la Figura 4.13, en el que el usuario introduce las variables y datos necesarios para la simulación de la propagación de las grietas en la probeta.

INGRESE LA SIGUIENTE INFORMACION

Modulo de Elasticidad (Mpa):	210000	
Poisson :	0.3	
Densidad (Kg/m3):	7.8e-9	
Espesor (mm) :	5	

Tenacidad a la fractura K _{ic} :	93	
Constante de Paris C :	0.000000101	
Constante de Paris m :	2.3	

Numero de incrementos:	10	
Longitud de preagrietamiento (mm) :	1.42	

<input type="checkbox"/> Aplicar una carga		
Carga (Newtons):	3820	
<input checked="" type="checkbox"/> Aplicar dos cargas		
Carga 1 (Newtons) (# ciclos):	7850	1
Carga 2 (Newtons) (# ciclos):	3820	56

Barrenos	no	▼
Directory:	C:/Users/Erik P7/Desktop	
		...

Figura 4.13 Interfaz gráfica del algoritmo para el análisis numérico de la propagación de las grietas.

Las variables que se necesitan introducir en el algoritmo para el análisis de la propagación de las grietas en la probeta son las siguientes:

- Módulo de elasticidad.
- Coeficiente de Poison.
- Densidad.
- Espesor de la probeta.
- Tenacidad a la fractura
- Constantes de Paris C y m.
- Longitud de pre agrietamiento

Posteriormente se solicita en el menú, como primera opción, introducir la magnitud de la carga y el número de incrementos que se requieren en la longitud de la grieta, es importante

mencionar que los incrementos predefinidos en el algoritmo para cada ciclo de aplicación de las cargas utilizando esta opción, son de 0.2 mm.

La segunda opción, para la aplicación de las cargas en la probeta, consiste en introducir la magnitud y el número de ciclos de dos cargas distintas. La secuencia de aplicación de las cargas utilizando esta opción es realizada, considerando que la magnitud de la Carga 1 es la que se aplicara primero en la probeta, “n” número de ciclos, seguida de la Carga 2 y su correspondiente número de ciclos. Utilizando esta opción los incrementos de la longitud de la grieta, no son constantes como en la primera opción, ahora serán calculados utilizando la ecuación empírica de P. Paris.

Se debe notar que, utilizando la segunda opción, de dos cargas, el tiempo de procesamiento para obtener los resultados de la propagación de la grieta se incrementa en un 2400 % en comparación con la primera opción, en donde los incrementos de la longitud de la grieta son definidos como constantes, es decir utilizando la segunda opción se necesitan alrededor de 4 horas en lugar de 10 minutos para obtener resultados de la simulación numérica.

Posterior a introducir las cargas que serán aplicadas en la probeta, se debe de seleccionar si se desean agregar barrenos a la probeta, las opciones disponibles en el algoritmo fueron agregar uno o dos barrenos, esto se hizo con la finalidad de validar el algoritmo computacional en términos de la dirección de propagación de las grietas, debido a que en una probeta sin barrenos la dirección de propagación regularmente tiende a ser perpendicular a la dirección de aplicación de las cargas, y por lo tanto no hay cambios significativos en la dirección de propagación y por lo tanto no se podría corroborar con facilidad que el código desarrollado puede predecir los cambios de ángulo durante la propagación de la grieta.

Las dos probetas con barrenos que fueron agregadas en el algoritmo computacional fueron una probeta con un barreno de 10 mm, localizado a 9 mm por encima de la muesca y centrado en la probeta, la segunda probeta como ya se mencionó, tiene dos barrenos de diámetros diferentes, el primero de 3 mm de diámetro y el segundo de 8 mm de diámetro, localizados a 4 y 6 mm por encima de la muesca de la probeta, y a 7 y 15 mm del borde en donde se encuentra localizada la muesca en la probeta.

Las probetas utilizadas en el análisis numérico de la propagación de las grietas son mostradas en la Figura 4.14, en donde también se muestran las probetas utilizadas experimentalmente para validar el algoritmo computacional en términos del factor de intensidad de esfuerzos, la dirección de propagación de las grietas en función del número de veces de aplicación de las cargas.

Finalmente se debe seleccionar la ruta del sistema computacional en donde se desean guardar los resultados del análisis numérico y después de seleccionar la ruta, se seleccionará el botón de aceptar para comenzar con la simulación numérica con base en los parámetros y condiciones que fueron previamente seleccionados.

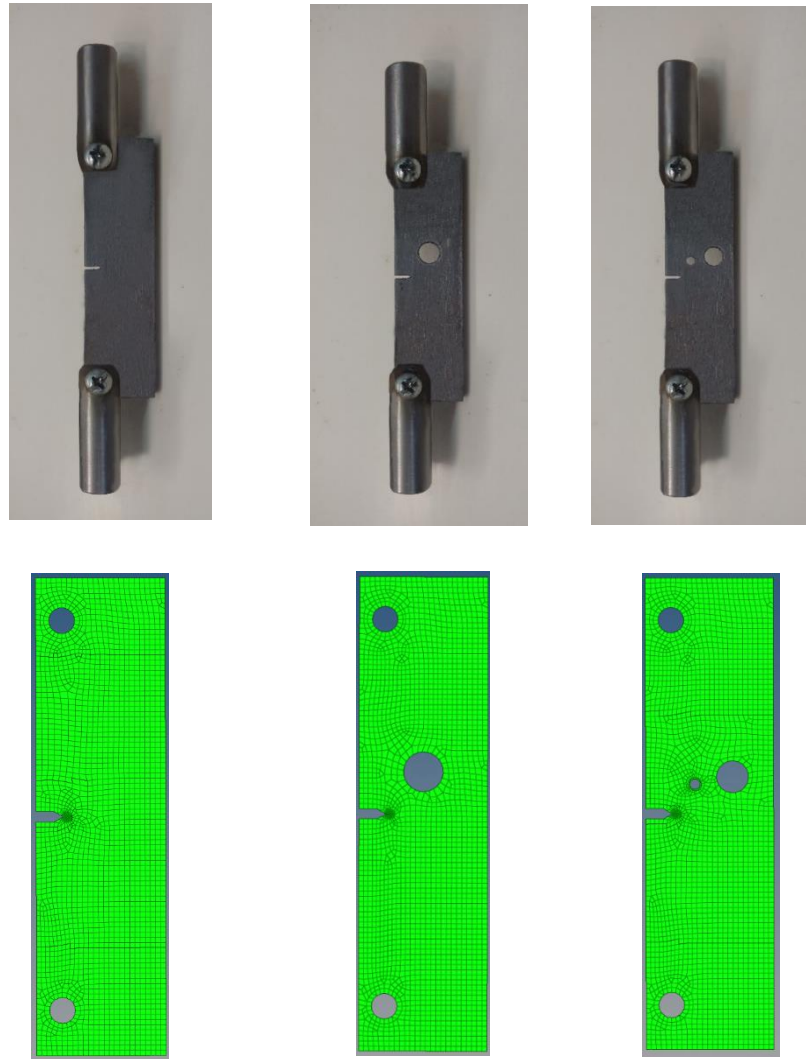


Figura 4.14 Probetas utilizadas para el análisis numérico y experimental de la dirección de propagación de las grietas y el número de ciclos

A continuación, se presenta en la Figura 4.15 el diagrama de flujo con la secuencia con la que fue desarrollado el algoritmo para el análisis del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de la grieta.

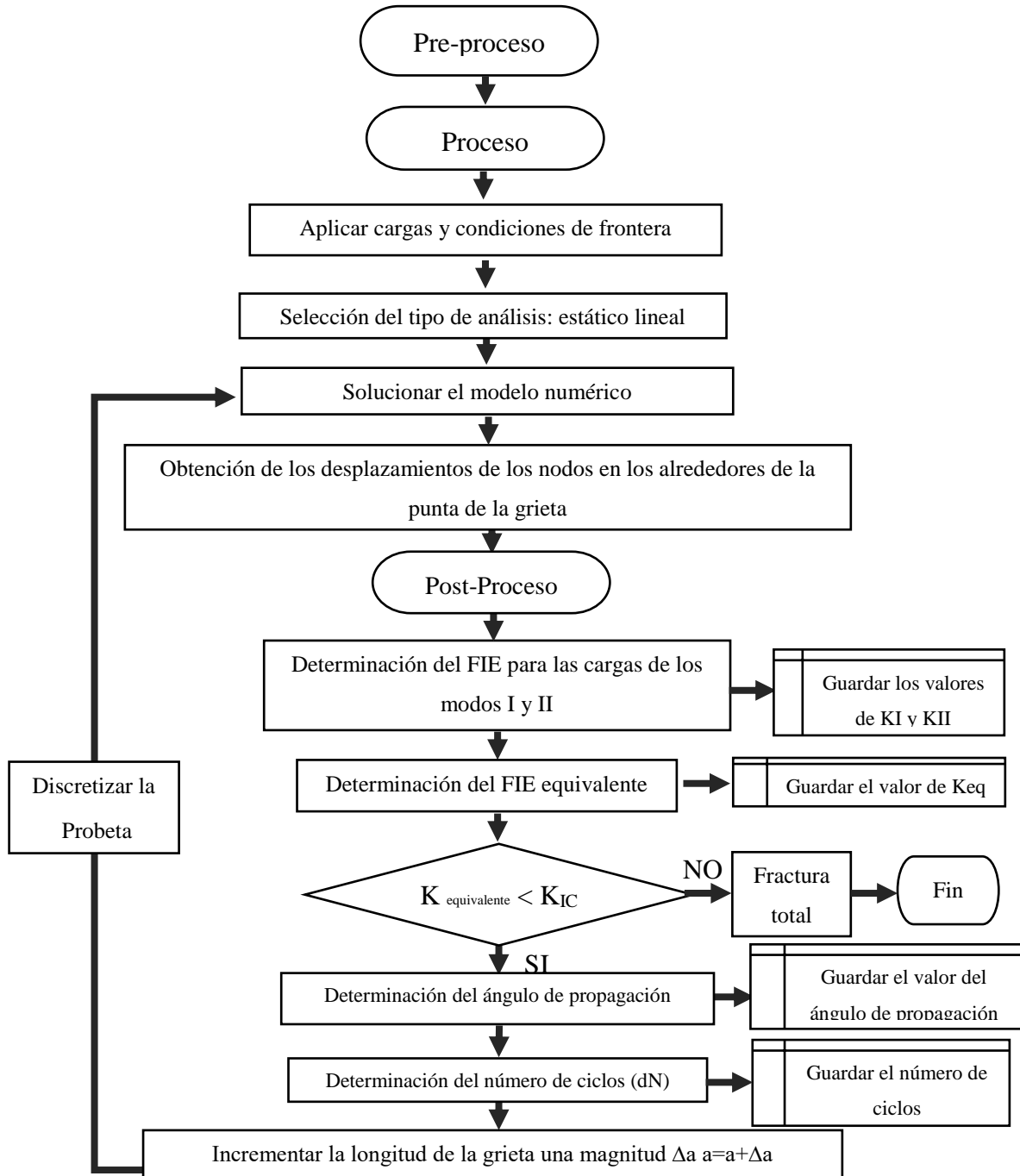


Figura 4.15 Diagrama de flujo del proceso utilizado para el análisis del FIE y la DPG

Como se puede observar de la Figura 4.15 el análisis de la propagación de las grietas comienza con el pre-proceso de la información, en esta etapa se modela la geometría de la probeta, se seleccionó el tipo de elemento para generar las mallas y se asignan propiedades mecánicas, este proceso fue descrito de las secciones 4.4 a la 4.9 de este capítulo.

Posteriormente, terminado el pre proceso, se comienza con la etapa del análisis numérico, llamada proceso en donde se definieron las cargas y condiciones de frontera de la probeta, así como también el tipo de análisis numérico que se resolvería con ayuda del software en donde fue implementado el algoritmo computacional, para este trabajo fue el programa de análisis por elemento finito, HYPERMESH 13.0.

Una vez solucionado el modelo numérico de la probeta, se obtienen los desplazamientos de todos los nodos que conforman la malla de la probeta.

Al finalizar la etapa de proceso, se comienza con el postproceso, en esta etapa se analizan los resultados obtenidos del análisis numérico, en este trabajo se utilizaron los desplazamientos nodales de los alrededores de la punta de la grieta, que son utilizados para calcular el factor de intensidad de esfuerzos en sus modos I y II utilizando el método de extrapolación de desplazamientos. Posteriormente se calculó el FIE equivalente utilizando el criterio de Tanaka y después se verifica que el FIE equivalente sea menor que la tenacidad a la fractura introducida en el menú presentado en la Figura 4.13.

Si el FIE equivalente es menor que la tenacidad a la fractura se calcula el ángulo de propagación de la grieta, utilizando el método del esfuerzo tangencial máximo el cual está basado en los FIE para los modos de carga I y II, los cuales fueron calculados previamente.

Después de obtener el FIE y la DPG, se calcula el número de ciclos o el incremento de la longitud de la grieta, con base en la ecuación de Paris. El número de ciclos es calculado cuando se selecciona en el menú la opción de solo una carga, debido a que los incrementos de la longitud de la grieta, para esta opción, fueron programados como incrementos de longitud constantes (0.2 mm), en cambio cuando se seleccionan dos cargas y el número de ciclos de aplicación de cada una de ellas, los incrementos de la longitud de la grieta dejan de ser constantes, para ser calculados utilizando la ecuación de Paris.

El análisis de propagación de las grietas es realizado hasta que el factor de intensidad equivalente es igual o mayor al valor de la tenacidad a la fractura del material A216.

Para la visualización de los resultados del análisis numérico de la propagación de las grietas, se desarrolló un algoritmo en el lenguaje de programación PYTHON 2.7.11, en el cual se presentan de manera gráfica los resultados obtenidos del análisis numérico. A continuación, se muestran las gráficas que son obtenidas para el análisis de resultados de la propagación de las grietas y son mostradas en la Figura 4.16.

- Gráfica del FIE (K_I) vs longitud de la grieta (mm)
- Gráfica del FIE (K_{II}) vs longitud de la grieta (mm)
- Gráfica del ángulo de propagación (θ) vs longitud de la grieta (mm)
- Gráfica del FIE (K_{eq}) vs longitud de la grieta (mm)
- Gráfica del número de ciclos vs Longitud de la grieta (mm)

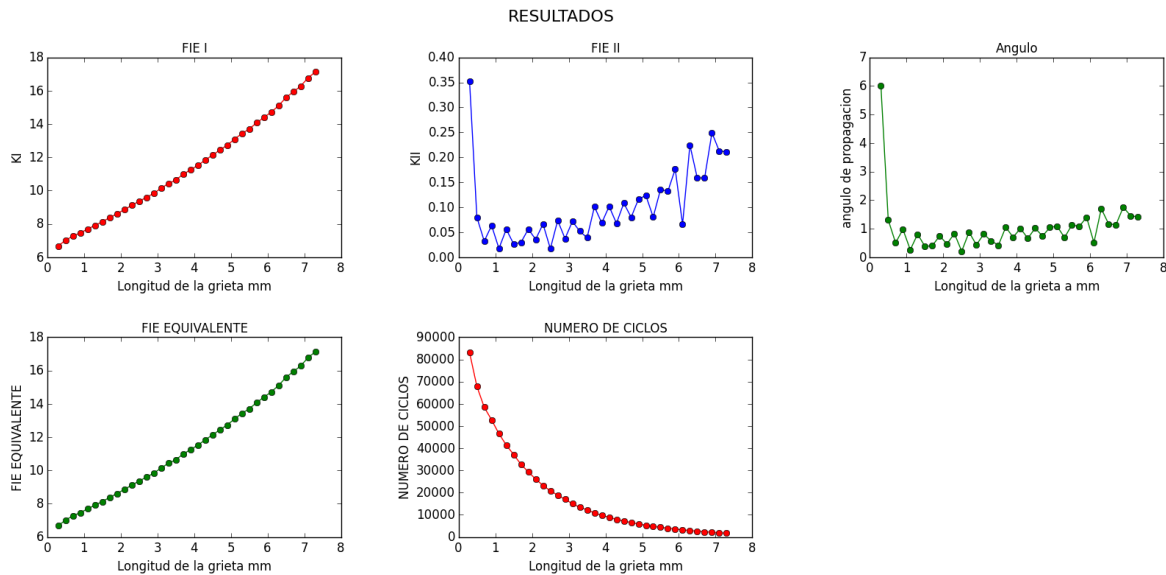


Figura 4.16 Interfaz gráfica para el análisis de resultados desarrollada en PYTHON.

Además de la interfaz gráfica en la cual se muestran los resultados durante el análisis numérico de la propagación de las grietas, se programó un archivo con extensión .TXT en el cual se guardan los valores del FIE para los modos de carga I y II, del FIE equivalente, el ángulo de propagación de la grieta y el número de ciclos, con la finalidad de obtener los valores exactos de los resultados del análisis de la propagación de la grieta.

4.11 Análisis numérico para la obtención del factor de intensidad de esfuerzos

El factor de intensidad de esfuerzos fue obtenido utilizando la metodología presentada en el capítulo 3 de este trabajo, durante la propagación de las grietas en las tres diferentes probetas que fueron analizadas en la validación experimental del algoritmo desarrollado, además para el análisis de la vida remanente y de la longitud crítica de la grieta en la brida mayor de la MRP.

El factor de intensidad de esfuerzos es el parámetro que expresa la intensidad del campo de esfuerzos alrededor de la punta de una grieta, los cuales provocan el desplazamiento relativo de las superficies de fractura de un cuerpo agrietado. Existen 3 modos de carga que al aplicarse a un material agrietado desplazan las superficies de fractura, estos se representan por K_I , K_{II} Y K_{III} .

La importancia del factor de intensidad de esfuerzos es que, al determinarse K , se establece completamente el estado de esfuerzos alrededor de la grieta. Una grieta se propagará cuando el factor de intensidad de esfuerzos alcance un valor crítico, denominado factor de intensidad de esfuerzos crítico K_{IC} , el cual es conocido también como tenacidad a la fractura crítica. Este valor se obtiene experimentalmente utilizando ensayos de fractura para una condición en la cual el esfuerzo es crítico y se considera una propiedad del material. La norma ASTM E399 establece las especificaciones técnicas y el procedimiento para estas pruebas.

El material con el cual está fabricada la maza de rueda portadora de los vagones del STC metro tiene una tenacidad a la fractura crítica de $93 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$, el procedimiento experimental y las probetas utilizadas para determinar la tenacidad a la fractura fueron desarrolladas en la tesis de Corona Cid R. [69].

El criterio de propagación de una grieta en función del factor de intensidad de esfuerzos está de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si el factor de intensidad de esfuerzos es menor que la tenacidad a la fractura crítica del material no hay propagación de grietas.

$$K_I < K_{IC}$$

- Si el factor de intensidad de esfuerzos es mayor que la tenacidad a la fractura crítica del material, entonces se tendrá una propagación inestable de la grieta.

$$K_I > K_{IC}$$

Para este trabajo, solo el factor de intensidad de esfuerzos para los modos de carga I y II fueron considerados, para expresar la concentración de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta y determinar la dirección de propagación de las grietas en función del número de ciclos.

El factor de intensidad de esfuerzos fue obtenido utilizando el criterio de extrapolación de desplazamientos, el cual está basado en las ecuaciones formuladas en el Capítulo 3, sección 3.3. Este criterio está en función de los desplazamientos de los nodos U_x y U_y de un nodo localizado en los alrededores de la punta de la grieta, los desplazamientos son obtenidos a partir de la solución de las ecuaciones (22) utilizando el MEF, posteriormente los desplazamientos son sustituidos en las ecuaciones (80) y (81), con las cuales es posible calcular los valores del FIE (K_I , K_{II}) para cualquier localización en los alrededores de la punta de la grieta.

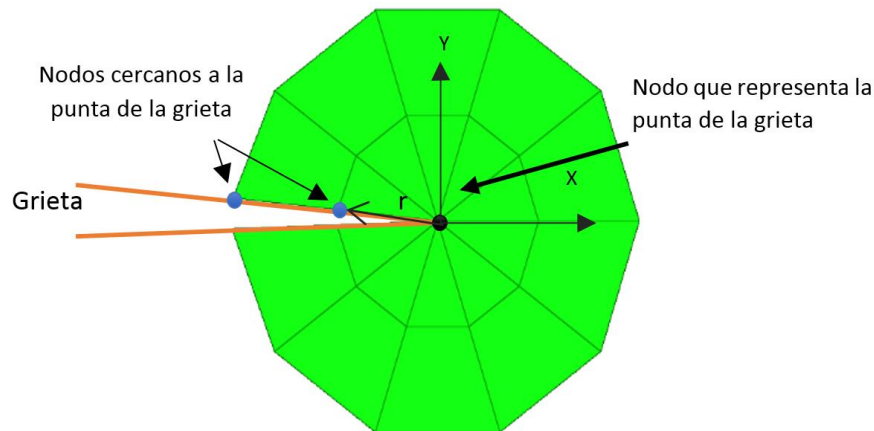


Figura 4.17 Nodos cercanos a la punta de la grieta para determinar el FIE utilizando el método de extrapolación de desplazamientos

Los valores del FIE obtenidos en los nodos, a una distancia r de la punta de la grieta (Figura 4.17) son extrapolados linealmente desde la posición r , de cada nodo, hasta un valor de r

cercano a 0, es decir en la punta de la grieta, en donde los valores del FIE para los modos de carga I y II, calculados a una distancia $r = 0$, representan las magnitudes del FIE en sus dos modos presentes en la los alrededores de la punta de la grieta, Figura 4.18.

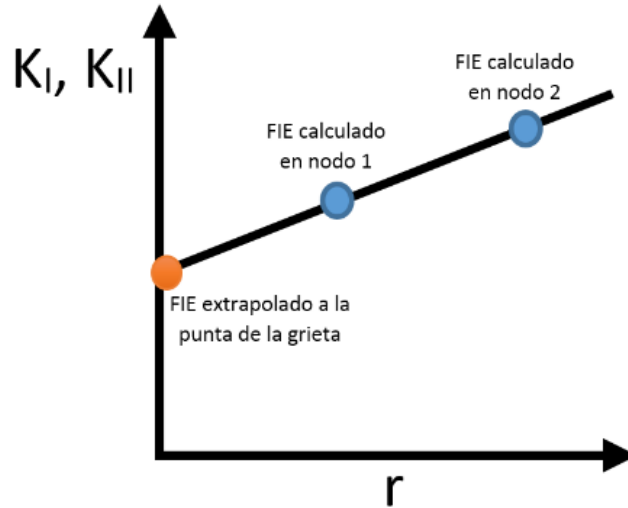


Figura 4.18 Extrapolación lineal del FIE a la punta de la grieta

Utilizando elementos de puntos cuartos [42,76,97], para discretizar los alrededores de la punta de la grieta, las ecuaciones para encontrar el FIE en los alrededores de la punta de la grieta, en condiciones de esfuerzo plano son las siguientes:

Esfuerzo Plano

$$K_I = \frac{E}{4(1+\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (4U_{Ya} - U_{Yb}) \tag{129}$$

$$K_{II} = \frac{E}{4(1 + \nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (4U_{Xa} - U_{Xb})$$

Donde U_{xa} , U_{ya} son los desplazamientos del nodo localizado en la punta de la grieta, mientras que U_{xb} , U_{yb} es el nodo que es relocalizado a un cuarto de la longitud de la arista de cada elemento. Los nodos A y B son mostrados en la siguiente Figura 4.19

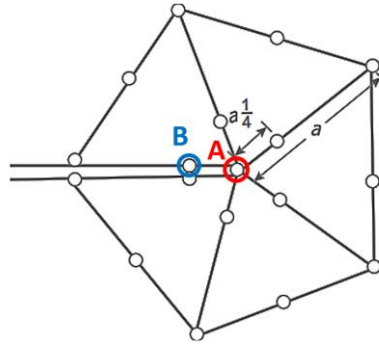


Figura 4.19 Nodos cercanos a la punta de la grieta para determinar el FIE utilizando el método de extrapolación de desplazamientos y elementos isoparamétricos de puntos cuartos

4.11.1 Factor de intensidad de esfuerzos equivalente para las cargas de modo mixto.

Cuando la concentración de esfuerzos en la punta de la grieta, es originada debido a la aplicación de más de un tipo de carga, esto ocasiona que las superficies de la grieta tengan movimientos de apertura, deslizamiento y torsión, por lo tanto los tres factores de intensidad de esfuerzo (K_I, K_{II}, K_{III}) estarán presentes durante la propagación de las grietas [84] y deben ser considerados para determinar una concentración de intensidad de esfuerzos resultante o equivalente en la punta de la grieta. En este trabajo el FIE equivalente (K_{eq}) será utilizado en la ecuación de P. Paris para determinar el número de ciclos de aplicación de cargas necesarios para propagar la grieta en la probeta ESE (T) una distancia Δa , y solo el modo I y el modo II fueron considerados para la determinación del K_{eq} , debido a que la dirección de propagación de las grietas normal a la superficie de deformación de las probetas no fue considerada.

Para la determinación del FIE equivalente debido a las cargas de los modos I y II, se han propuesto diferentes criterios empíricos. Estos criterios fueron obtenidos de forma experimental, en los cuales se considera que el valor del FIE para cargas de modo I es siempre de signo positivo y que las grietas no se propagan debido a una carga de compresión. Los criterios más importantes para la obtención del FIE equivalente debido a la aplicación de cargas de modo I y II son mostrados en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5 Criterios para la obtención del FIE equivalente K_{eq} debido a la aplicación de cargas de modo mixto

Autor del criterio	Ecuación
Irwin [85]	$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$
Tanaka [22]	$K_{eq} = (K_I^4 + 8K_{II}^4)^{0.25}$
Richard [86]	$K_{eq} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(\alpha K_{II})^2}$ $\alpha = 1.155$
Pook [86]	$K_{eq} = \frac{0.83K_I + \sqrt{0.4489K_I^2 + 3K_{II}^2}}{1.5}$

De los cuatros criterios mostrados en la Tabla 4.5 se observa que cuando $K_{II} = 0$, el FIE equivalente es igual al FIE para cargas de modo I, $K_{eq} = K_I$. En la siguiente gráfica se muestra un análisis comparativo de los cuatro criterios para la obtención del K_{eq} para cargas de modo mixto I y II. Para la elaboración de la gráfica de la Figura 4.20 se tomó un valor fijo de $K_I = 3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, y valores de K_{II} desde 0.3 hasta $6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

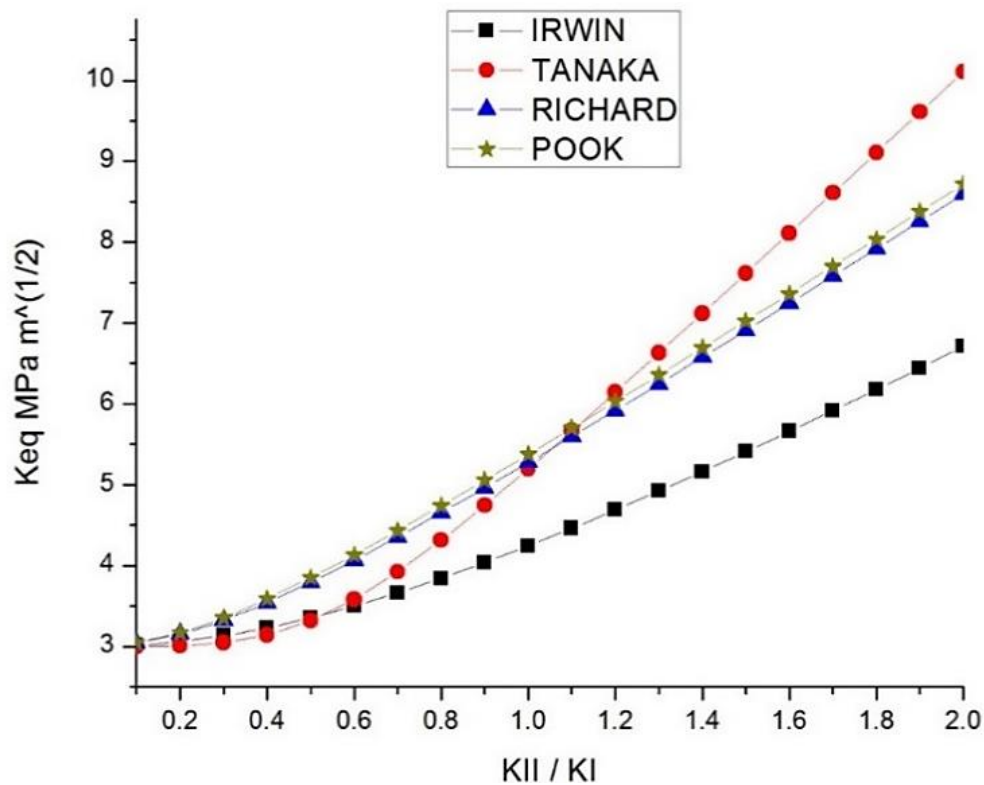


Figura 4.20 Criterios para determinar el K_{eq} debido a cargas de modo mixto

Con base en la Figura 4.20 se observa que los criterios de Richard y Pook obtienen valores similares del FIE equivalente K_{eq} , por otro lado, el criterio de Tanaka obtiene valores más conservadores cuando la razón de K_{II}/K_I es menor a 0.5, mientras que, para valores mayores de 1, $K_{II}/K_I > 1$, los valores de K_{eq} son mayores en comparación con los otros modelos. También se observa que el criterio de Irwin es el que obtiene los valores más conservadores del FIE para valores mayores a 0.6, $K_{II}/K_I > 0.6$, en comparación con los otros tres criterios.

se observa que la diferencia del valor del FIE equivalente obtenido de los cuatro criterios aumenta en el momento en que el FIE para cargas de modo II es mayor que el FIE para cargas de modo I, es decir cuando $K_{II}/K_I > 1$, estas diferencias son mayores al 25%.

Finalmente se observa que los 4 criterios obtienen resultados similares del FIE equivalente, cuando K_{II} es mucho menor a la magnitud de K_I , es decir cuando $K_{II}/K_I < 0.1$.

Con base en las observaciones anteriormente descritas podría utilizarse cualquiera de los 4 criterios para la determinación del FIE equivalente K_{eq} , para cargas de modo mixto en dos dimensiones, debido a que el FIE para cargas del modo II que se obtendrá en el análisis de la dirección de propagación de la grieta en la probeta será siempre menor que el FIE para cargas del modo I, puesto que las cargas que serán aplicadas en la probeta serán perpendiculares a la dirección de propagación de la grieta. Y por lo tanto se espera que K_{II} sea hasta 10 veces menor que K_I , es decir $K_{II}/K_I < 0.1$, Sin embargo, a diferencia de los otros criterios, el criterio de Tanaka ha sido empleado con gran éxito para el análisis de componentes mecánicos con configuraciones geométricas complejas como se muestra en las publicaciones [64, 87], y es por esta razón que es el criterio seleccionado para la obtención del FIE equivalente debido a cargas de modo mixto I y II.

4.12 Análisis numérico para la dirección de propagación de las grietas

La dirección de propagación de las grietas fue obtenida utilizando el criterio del esfuerzo tangencial máximo presentado en el capítulo 3 de este trabajo, el cual relaciona los factores de intensidad de esfuerzo en los alrededores de la punta de la grieta, con la dirección de propagación de las grietas. El análisis numérico fue analizado numéricamente en las tres probetas mostradas en la Figura 4.14. Los barrenos que se encuentran en dos de las probetas

fueron realizados con la finalidad de generar una concentración de esfuerzos asimétrica en los alrededores de la punta de la grieta y obtener un cambio en la dirección de propagación de la grieta distinta a la obtenida en la probeta sin barrenos, en la cual la dirección de propagación permanece perpendicular a la dirección de las cargas aplicadas, esto se realizó con la finalidad de validar el algoritmo computacional que fue desarrollado.

4.13 Análisis numérico del número de ciclos

Con la finalidad de determinar el número de ciclos de aplicación de las cargas en la probeta, se utilizó la ecuación empírica propuesta por Paul Paris [1, 73]. Esta ecuación fue obtenida utilizando conceptos de la mecánica de la fractura lineal elástica y datos experimentales de crecimiento de grietas por fatiga, para relacionar el factor de intensidad de esfuerzos en la punta de la grieta, con el número de veces de aplicación de las cargas necesarios para propagar las grietas una longitud Δa [1, 88]. Esta ecuación es conocida universalmente como la ley de Paris y es expresada por la siguiente ecuación:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^m \quad (130)$$

Donde $\frac{da}{dN}$, es la razón de incremento de la longitud de la grieta con respecto al número de ciclos de aplicación de cargas de fatiga, ΔK_{eq} es el FIE equivalente debido a las cargas de modo mixto, en este trabajo el FIE equivalente fue obtenido de los modos de carga I, II y fue presentado en la sección 4.11.1

Las letras C y m de la ecuación (130) son constantes que dependen del material. Para el material A216 WCB grado 600 fueron determinadas en la tesis de maestría de Pérez Cervantes V. A [81]. Estas constantes dependen de valores propios del material, como es la microestructura, y de las condiciones ambientales, como la temperatura. Es importante mencionar que la constante C depende de la tasa de esfuerzos R, definida como:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{K_{min}}{K_{max}} \quad (131)$$

En donde $\frac{K_{min}}{K_{max}}$ es la relación entre el factor de intensidad de esfuerzos mínimo y máximo debido a la aplicación de un esfuerzo σ_{min} y un esfuerzo máximo σ_{max} .

Las pruebas experimentales de la tasa de propagación de las grietas en la probeta que fueron realizadas por Pérez Cervantes fueron utilizando una tasa de esfuerzos de $R = -1$, es decir utilizando ciclos completamente reversibles, en donde σ_{min} es de la misma magnitud que σ_{max} pero de signo opuesto. Para el caso de este trabajo las posibles dependencias de C y m con la tasa de esfuerzos y con la frecuencia de carga no fueron consideradas en el análisis numérico.

La ecuación de la tasa de propagación de las grietas es representada en una gráfica en coordenadas logarítmicas, dando lugar a una recta de pendiente m que interseca al eje de las abscisas en una coordenada C , como se presenta a continuación:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^m \rightarrow \log \frac{da}{dN} = \log C + m \log \Delta K_{eq} \quad (132)$$

En la Figura 4.21 se presenta la curva característica de propagación de las grietas en un material dúctil, Para el caso de esta investigación, esta curva fue obtenida para el material A216 de la MRP del STC metro y es presentada en la sección 4.8 de este trabajo.

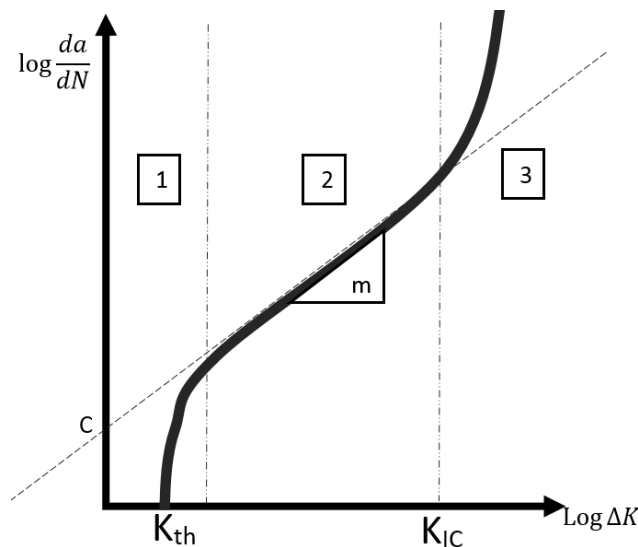


Figura 4.21 Curva de propagación de las grietas, propuesta por P. Paris

Con base en la figura anterior se observa que la grieta comienza a crecer a un determinado valor del factor intensidad de esfuerzos, llamado FIE límite, K_{th} , seguida de una etapa de propagación estable de la grieta definida por las constantes C y m y delimitada por el factor de intensidad de esfuerzos crítico K_{IC} . El final de la propagación culmina con una propagación inestable de la grieta ocasionando fractura total del material

La simplicidad de la expresión de Paris permite obtener una estimación del número de ciclos de aplicación de cargas por fatiga de un componente agrietado. La vida en fatiga o número de ciclos hasta la fractura total es obtenida integrando la ecuación de Paris desde una longitud de grieta inicial a_i hasta una longitud crítica a_f . Integrando la ecuación (130) se obtiene la expresión siguiente:

$$\int_0^{N_f} dN = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K_{eq})^m} \quad (133)$$

La ecuación anterior fue utilizada en la simulación numérica el número de veces de aplicación de las cargas necesarias para propagar las grietas en las probetas una distancia Δa .

4.14 Cálculo del tamaño de la zona plástica

En los alrededores de la punta de la grieta la concentración de esfuerzos aumenta en comparación con los esfuerzos en el resto del material, a esta área de alta concentración de esfuerzos se le denomina zona plástica [1, 89, 2] debido a que en esta zona se producen deformaciones plásticas.

La determinación del tamaño de la zona plástica es muy importante debido a que se define si el análisis de la propagación de las grietas debe ser analizado de forma lineal-elástica o elasto-plástica

El tamaño de la zona plástica corresponde a un círculo de radio r_p . El valor de r_p en deformación plana se obtiene con la siguiente expresión:

$$r_p = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2 \quad (134)$$

Donde K es el factor de intensidad de esfuerzos y σ_{YS} es el esfuerzo de fluencia del material.

4.15 Analisis del tipo de fractura en función del tamaño de la zona plástica.

El tamaño de la zona plástica puede ser utilizado para definir si el análisis de la propagación de las grietas debe ser analizado de forma lineal-elástica o elasto-plástica. La mecánica de la fractura lineal elástica está restringida en su aplicación al análisis de la propagación de las grietas lineal-elástico, por lo que fue el criterio principal para definir si la mecánica de la fractura lineal elástica era aplicable al análisis de la dirección de propagación de las grietas en las probetas. Un criterio empírico para definir si un cuerpo está en condiciones lineal-elásticas, se establece como una relación entre el tamaño de la longitud de la grieta (a) y el tamaño de la zona plástica (r_p).

$$25 a \geq r_p \quad (135)$$

Otro criterio para determinar el tipo de análisis está en función del tamaño de la zona plástica y de la mitad de la altura total de la probeta utilizada (H), la cual es 42.55 mm.

$$H \geq 4r_p \quad (136)$$

4.16 Análisis numérico de la vida remanente y de la longitud crítica de las grietas en la MRP del STC METRO.

Posteriormente, al finalizar la validación experimental del algoritmo computacional utilizando las probetas con y sin barrenos mostrados en la sección 4.10, se realizó el análisis numérico de la vida remanente y de la longitud crítica de las grietas en la brida mayor de la MRP. Para realizar este análisis numérico se aplicaron las cargas de impacto y las cargas de frenado de forma secuencial en la probeta ESET (T) sin barrenos, esta secuencia de aplicación de las cargas fue determinada con base a la investigación realizada por Tlapalama Fuertes Y. T. [9], quien estableció que, durante un recorrido de los trenes de terminal a terminal, en las líneas 1,3 y B del STC Metro, la MRP está sometida a una carga de impacto al inicio y final de los recorridos de cada línea y a 56 o 71 ciclos de frenado

Por otro lado, la magnitud de las cargas de impacto y frenado que ocasionan que una grieta se propague en la brida mayor de la MRP, fueron determinadas en la tesis de maestría de R. Corona Cid [69], quien determinó que la carga de impacto debido al cambio de vía tiene una magnitud de 4.07 kN y la carga de frenado una magnitud de 1.37 kN. La secuencia y magnitud de las cargas de impacto y frenado para las líneas 1, 3 y B son mostradas en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6 Secuencia y número de veces de aplicación de las cargas de frenado e impacto por recorrido

Línea	Número de cargas de impacto al inicio del recorrido (4.07 kN)	Número de cargas de frenado durante el recorrido de la línea. (1.37 kN)	Número de cargas de impacto al final del recorrido. (4.07 kN)
1	1	56	1
3	1	71	1
B	1	71	1

Como se puede observar en la Tabla 4.6 la MRP está sometida a una carga de impacto al inicio del recorrido de la línea, posteriormente, dependiendo de la línea que el tren recorra, la MRP estará sometida a 56 o 71 cargas de frenado por recorrido y que son inducidas debido al frenado de los trenes al llegar a cada estación. Finalmente, al concluir su recorrido el tren

está sometido nuevamente a una carga de impacto, la cual es inducida por el cambio de vía que tienen los vagones del tren para iniciar el recorrido de regreso.

Esta secuencia y magnitud de las cargas de impacto y frenado fueron consideradas en el análisis numérico para el análisis de la vida remanente y longitud de grieta crítica en la brida mayor de la MRP

Con la finalidad de obtener la vida remanente en kilómetros para las MRP que operan en las líneas 1, 3 y B del STC Metro, se consideraron las longitudes en kilómetros de cada línea, las cuales se muestran en la Tabla 4.7

Tabla 4.7 Longitud total del recorrido de las líneas 1,3 y B

Línea	Longitud total del recorrido (km)
1	18.83
3	23.61
B	23.72

El análisis numérico de la longitud crítica de la grieta fue analizado en el algoritmo computacional, seleccionando la opción de aplicar dos cargas, como se observa en la Figura 4.22, en el cual se seleccionan la magnitud de cada una de ellas y el número de veces que se aplicaran en la probeta, la carga 1 será la que se aplicara primero, seguido de la carga 2, esta secuencia fue repetida hasta que el factor de intensidad de esfuerzos fue igual a la magnitud de la tenacidad a la fractura del material A216 ($93 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$), para determinar la longitud crítica de la grieta en la brida mayor de la MRP.

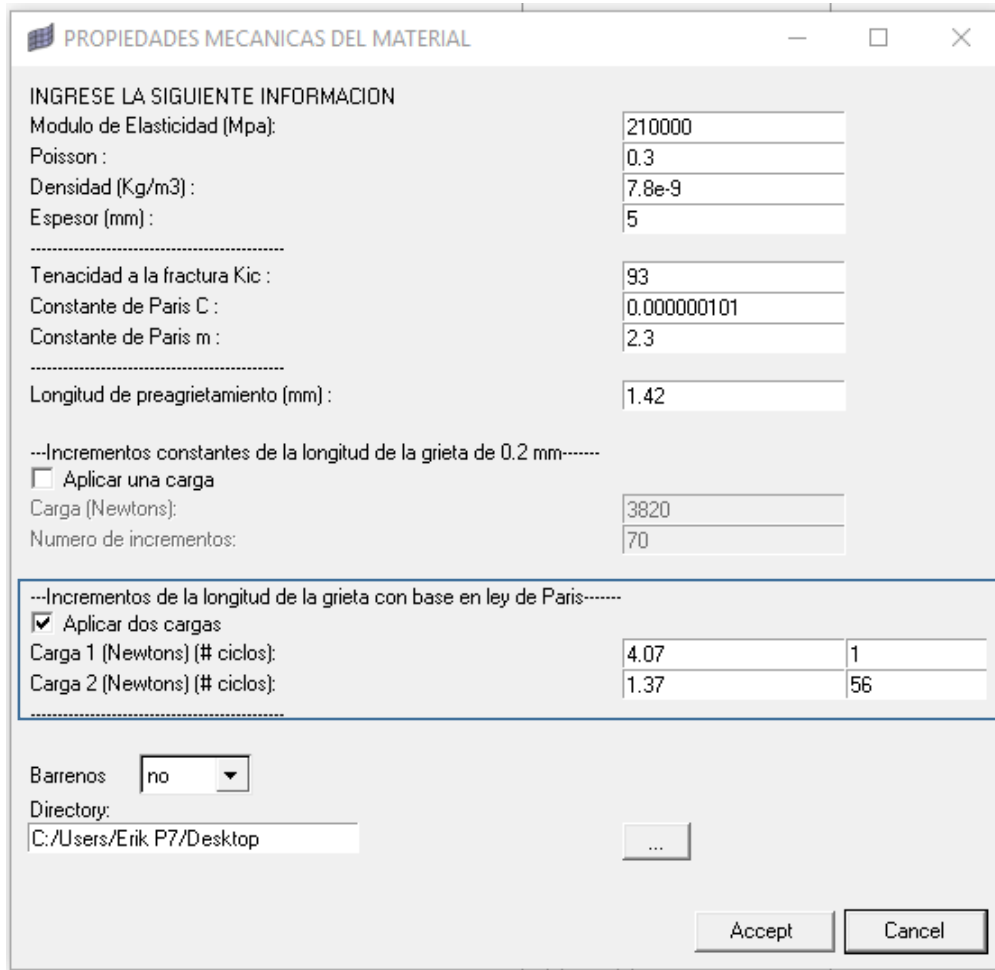


Figura 4.22 Sección del algoritmo computacional para aplicar dos cargas, la cual fue utilizada para determinar la vida remanente de la MRP del STC metro.

4.17 Análisis de la vida total de la MRP del STC Metro.

Después de calcular la vida remanente de la MRP para las líneas 1, 3 y B, con base en el procedimiento descrito anteriormente, se determinó la vida total del componente, utilizando la vida útil de la MRP obtenida de la investigación realizada por Tlapalama Fuertes Y. T [9], en donde se presenta el número de kilómetros que la MRP puede recorrer en las líneas 1,3 y B, antes de que aparezca la primera grieta significativa.

En la Tabla 4.8 , se presenta la vida útil de las MRP de las líneas 1, 3 y B, obtenidos por Tlapalama Fuertes Y.T.

Tabla 4.8 Resultados de la vida útil de la MRP obtenidas por Y. T. Tlapalama Fuertes

Línea	Vida útil (km)
1	949,513
3	859,992
B	1,195,952

Con el número de kilómetros mostrados en la Tabla 4.8 y el número de kilómetros de vida remanente, obtenidos con el procedimiento descrito en la sección 4.16, se determinó la vida total de la MRP utilizando la siguiente ecuación.

$$VT_{MRP} = VU_{MRP} + VR_{MRP} \quad (137)$$

Donde VT_{MRP} es la vida total de la MRP, VU_{MRP} es la vida útil de la MRP y VR_{MRP} es la vida remanente de la MRP.

Capítulo 5 . ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del análisis numérico de la propagación de las grietas en las probetas fabricadas del material A216 WCB grado 600 con el cual está fabricada la maza de rueda portadora del STC Metro de la ciudad de México. Los resultados del análisis numérico fueron obtenidos utilizando el algoritmo computacional que fue desarrollado en los lenguajes de programación TCL/TK y PYTHON, con el cual se analizó el factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas en función de su longitud y del número de veces de aplicación de las cargas.

A continuación, se realiza el análisis de los datos y gráficos obtenidos de los resultados de las simulaciones numéricas y su comparación con pruebas experimentales, que fueron realizados con la finalidad de validar el algoritmo computacional. Posteriormente se analizan los resultados obtenidos del tamaño crítico de las grietas en la brida mayor de la MRP del STC Metro, además de la vida remanente y total del componente.

5.2 Número de elementos y nodos

En la Tabla 5.1 se muestran los resultados obtenidos del refinamiento y tipo de mallas que fueron utilizadas para la creación del modelo numérico de la probeta, durante el análisis de propagación de las grietas, el cual fue realizado con el algoritmo computacional implementado en el programa computacional HYPERMESH 13.0.

Tabla 5.1 Refinamiento de las mallas del modelo de la probeta realizado en HYPERMESH 13.0

Número de nodos y elementos	
Algoritmo de Mallado	Automático de avance Frontal
Nodos	4463
Elementos	6910
Tipo de elementos utilizados	Segundo orden

Refinamiento de la malla

Tamaño de elemento mínimo	0.1
Tamaño de elemento máximo	1.5
Máxima desviación	1.1
Tipo de mallas	Mixto

Como se observa en la Tabla 5.1 el número de elementos promedio que se utilizaron para la discretización de la probeta, en el análisis de la propagación de las grietas, fue de 6910 con un número de nodos de 4463, utilizando elementos cuadrangulares y triangulares de segundo orden. El tamaño de elemento utilizado para discretizar los alrededores de la punta de la grieta fue de 0.1 mm, mientras que para discretizar el resto de la probeta se utilizó un tamaño de elemento de 1.5 mm.

5.3 Resultados del análisis numérico realizado en la probeta ESE (T)

Los resultados del análisis numérico obtenidos para la probeta fueron el FIE para los modos de carga I y II, el FIE equivalente y la DPG en función de la longitud de la grieta y del número de ciclos de aplicación de las cargas. Las cargas utilizadas para el análisis numérico de la propagación de las grietas fueron de una magnitud de 3.82 kN y 7.85 kN, que corresponden a las cargas que inicialmente fueron calculadas, debidas al frenado de los vagones del STC Metro y al impacto de la rueda de seguridad durante un cambio de vía al finalizar cada recorrido. Estas cargas posteriormente fueron corroboradas y corregidas en la tesis de maestría de Corona Cid R. [69] quien determino que las magnitudes correctas de las cargas debido al impacto y al frenado son de 4.07 kN y 1.37 kN. Sin embargo, la validación experimental y numérica del algoritmo computacional se realizó con las cargas que inicialmente fueron calculadas, es decir las de 7.85 kN y 3.82kN.

5.3.1 Resultados del Factor de Intensidad de Esfuerzos

El factor de intensidad de esfuerzos para los modos de carga I y II fueron calculados a partir del método de extrapolación de desplazamientos, mientras que el factor de intensidad de esfuerzos equivalente fue obtenido utilizando el criterio de Tanaka, ambos presentados en el capítulo 4 de esta tesis. En la Tabla 5.2 se muestra los resultados del factor de intensidad de

esfuerzos en función de la longitud de la grieta utilizando cargas de 3.82 kN, mientras que en la Tabla 5.3 se muestra los resultados del factor de intensidad de esfuerzos utilizando solo cargas de 7.85 kN, los factores de intensidad de esfuerzo fueron obtenidos para incrementos de grieta de 0.2 mm, a partir de una longitud de grieta inicial de 7.54 mm, la cual considera la longitud de la muesca de la probeta de 6.12 mm, y la longitud de pre agrietamiento de 1.42 mm.

Tabla 5.2 Factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} obtenidos aplicando cargas de 3.82 kN

Longitud de la grieta mm	K_I MPa \sqrt{m}	K_{II} MPa \sqrt{m}	K_{eq} MPa \sqrt{m}
7.54	18.28	0.02	18.28
7.74	18.89	0.03	18.89
7.94	19.40	0.02	19.40
8.14	19.97	0.01	19.97
8.34	20.50	0.02	20.50
8.54	21.04	0.04	21.04
8.74	21.68	0.02	21.68
8.94	22.22	0.03	22.22
9.14	22.88	0.00	22.88
9.34	23.58	0.04	23.58
9.54	24.25	0.06	24.25
9.74	24.95	0.04	24.95
9.94	25.66	0.00	25.66
10.14	26.41	0.00	26.41
10.34	27.29	0.02	27.29
10.54	28.03	0.00	28.03
10.74	28.97	0.01	28.97
10.94	29.76	0.02	29.76
11.14	30.70	0.03	30.70
11.34	31.84	0.02	31.84
11.54	32.73	0.04	32.73
11.74	33.83	0.01	33.83
11.94	34.87	0.00	34.87
12.14	36.04	0.03	36.04
12.34	37.31	0.04	37.31
12.54	38.61	0.00	38.61
12.74	39.95	0.00	39.95
12.94	41.37	0.09	41.37
13.14	42.81	0.15	42.81
13.34	44.36	0.09	44.36
13.54	46.11	0.03	46.11
13.74	47.66	0.03	47.66
13.94	49.67	0.12	49.67
14.14	51.62	0.01	51.62
14.34	53.67	0.15	53.67
14.54	55.96	0.02	55.96
14.74	58.29	0.06	58.29

14.94	60.64	0.06	60.64
15.14	63.36	0.12	63.36
15.34	65.93	0.08	65.93
15.54	69.20	0.01	69.20
15.74	72.21	0.13	72.21
15.94	75.65	0.04	75.65
16.14	79.53	0.03	79.53
16.34	83.46	0.02	83.46
16.54	87.79	0.29	87.79
16.74	92.20	0.08	92.20
16.94	97.83	0.22	97.83
17.14	103.05	0.09	103.05
17.34	108.70	0.14	108.70
17.54	115.53	0.39	115.53
17.74	122.65	0.10	122.65
17.94	130.52	0.18	130.52
18.14	138.87	0.22	138.87
18.34	148.66	0.36	148.66
18.54	159.64	0.56	159.64
18.74	172.05	0.21	172.05
18.94	185.93	0.82	185.93
19.14	200.94	0.47	200.94
19.34	218.56	1.19	218.56
19.54	238.48	0.94	238.48
19.74	262.35	1.72	262.35
19.94	289.51	2.04	289.51
20.14	319.91	3.29	319.91
20.34	357.60	3.50	357.60
20.54	402.93	5.12	402.93
20.74	457.54	8.89	457.54
20.94	521.03	10.37	521.03
21.14	605.72	18.81	605.72
21.34	708.60	29.13	708.61
21.54	832.85	41.96	832.86
21.74	992.59	70.97	992.64
21.94	1153.96	115.99	1154.19
22.14	1315.44	165.95	1317.12
22.34	1480.67	221.00	1483.53
22.54	1640.27	231.00	1640.11
22.74	1795.12	240.20	1799.20
22.94	1971.77	250.92	1973.14

Tabla 5.3 Factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} obtenidos aplicando cargas de 7.85 kN.

Longitud de la grieta mm	K_I MPa√m	K_{II} MPa√m	K_{eq} MPa√m
7.54	37.75	0.10	37.75
7.74	38.91	0.06	38.91
7.94	39.93	0.02	39.93
8.14	41.14	0.01	41.14
8.34	42.24	0.04	42.24
8.54	43.32	0.01	43.32
8.74	44.68	0.10	44.68
8.94	45.78	0.05	45.78
9.14	47.13	0.03	47.13
9.34	48.69	0.05	48.69
9.54	49.92	0.04	49.92
9.74	51.42	0.03	51.42
9.94	52.95	0.02	52.95
10.14	54.44	0.03	54.44
10.34	56.25	0.04	56.25
10.54	57.78	0.02	57.78
10.74	59.73	0.03	59.73
10.94	61.35	0.04	61.35
11.14	63.29	0.05	63.29
11.34	65.51	0.01	65.51
11.54	67.55	0.14	67.55
11.74	69.67	0.08	69.67
11.94	71.90	0.01	71.90
12.14	74.39	0.04	74.39
12.34	76.95	0.13	76.95
12.54	79.60	0.02	79.60
12.74	82.34	0.01	82.34
12.94	85.44	0.16	85.44
13.14	88.38	0.08	88.38
13.34	90.80	0.07	90.80
13.54	91.17	0.11	91.17
13.74	92.16	0.07	92.16
13.94	97.44	0.13	97.44
14.14	106.69	0.03	106.69
14.34	110.70	0.04	110.70
14.54	114.93	0.00	114.93
14.74	120.17	0.51	120.17
14.94	124.90	0.01	124.90
15.14	130.76	0.01	130.76
15.34	136.34	0.23	136.34
15.54	142.48	0.15	142.48
15.74	148.93	0.03	148.93

15.94	155.66	0.60	155.66
16.14	163.99	0.26	163.99
16.34	172.22	0.90	172.22
16.54	180.54	0.04	180.54
16.74	190.79	0.29	190.79
16.94	200.59	0.11	200.59
17.14	211.82	0.71	211.82
17.34	224.27	0.82	224.27
17.54	237.85	0.73	237.85
17.74	252.98	0.19	252.98
17.94	269.03	1.94	269.03
18.14	287.04	0.61	287.04
18.34	306.69	1.52	306.69
18.54	328.44	2.23	328.44
18.74	353.57	0.68	353.57
18.94	379.70	3.31	379.70
19.14	413.32	2.79	413.32
19.34	447.09	4.57	447.09
19.54	488.15	5.03	488.15
19.74	534.02	6.34	534.02
19.94	584.41	9.33	584.41
20.14	645.79	8.22	645.79
20.34	718.84	16.36	718.85
20.54	800.68	21.52	800.68
20.74	893.84	27.10	893.84
20.94	1005.33	44.24	1005.34
21.14	1125.95	52.98	1125.95
21.34	1214.59	53.83	1214.59
21.54	1316.48	51.98	1316.48
21.74	1418.37	52.18	1418.37
21.94	1520.25	52.32	1520.25
22.14	1622.14	51.53	1622.14
22.34	1724.03	50.73	1724.03
22.54	1825.91	51.13	1825.91
22.74	1927.80	52.83	1927.80
22.94	2029.69	52.83	2029.69

En las figuras 5.1 y 5.2 se muestran las gráficas de los resultados obtenidos de los factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} en función de la longitud de la grieta, elaboradas a partir de las Tablas 5.2 y 5.3 mostradas anteriormente.

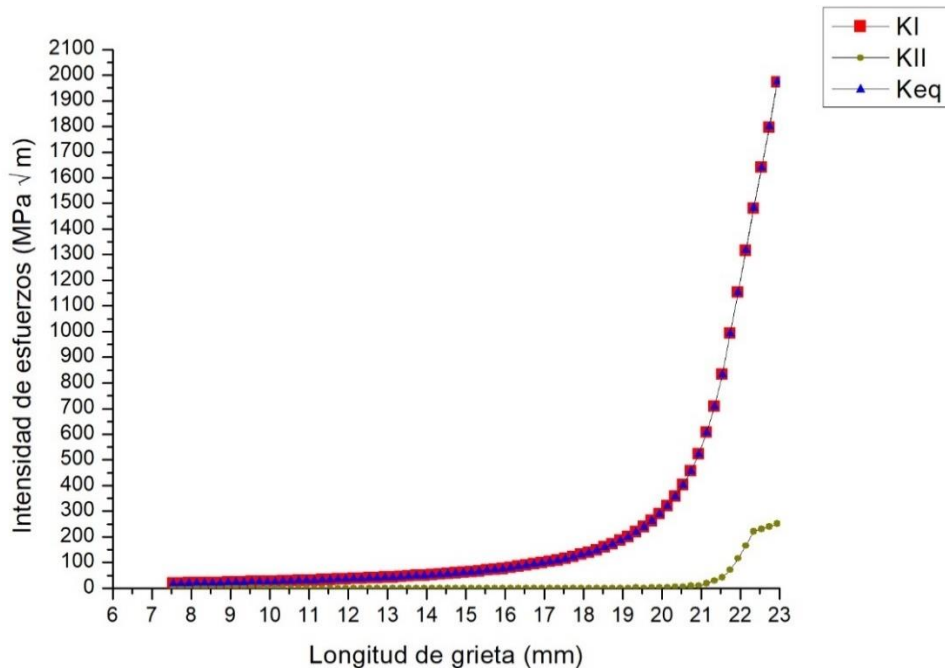


Figura 5.1 Factores de intensidad de esfuerzo obtenidos aplicando una carga de 3.82 kN

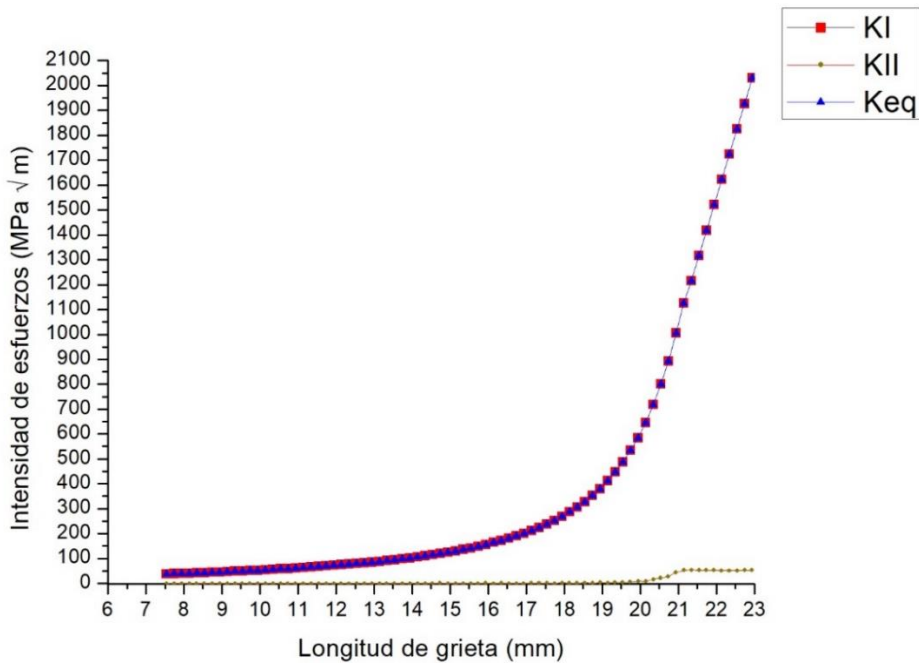


Figura 5.2 Factores de intensidad de esfuerzo aplicando una carga de 7.85 kN

Como se observa en las Figuras 5.1 y 5.2 el factor de intensidad de esfuerzos para las cargas del modo I, aumenta su magnitud a medida que la longitud de la grieta crece, comenzando con un incremento del factor de intensidad de esfuerzos lineal, el cual cambia a un

comportamiento no lineal después de alcanzar una longitud de la grieta de 17 mm y 15 mm respectivamente. También se observa que el factor de intensidad de esfuerzos equivalente es de igual magnitud que el factor para cargas del modo I, esto es debido a que el factor de intensidad de esfuerzos para cargas del modo II en la mayor parte de la propagación de la grieta, aplicando ambas cargas, tiene una magnitud menor a $1 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$, tendencia que cambia poco antes de producirse la fractura total de la probeta aumentando hasta un valor de $52 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$.

5.3.2 Dirección de propagación de las grietas.

La dirección de propagación de las grietas fue obtenida utilizando el criterio del esfuerzo tangencial máximo, el cual fue presentado en el capítulo 4. La Tabla 5.4 muestra los resultados de la dirección de propagación en función de la longitud de las grietas en la probeta ESET utilizando dos magnitudes de carga de 3.82 kN y 7.85 kN.

Tabla 5.4 Ángulos de propagación de la grieta obtenidos aplicando las cargas de 3.82 kN y 7.85 kN

Longitud de la grieta (mm)	Ángulo de propagación aplicando una carga de 3.82 kN (grados)	Ángulo de propagación aplicando una carga de 7.85 kN (grados)
7.54	0.136512°	0.304185°
7.74	-0.18957°	-0.18025°
7.94	0.131815°	0.063324°
8.14	-0.0454°	0.028909°
8.34	0.096473°	0.100914°
8.54	0.21226°	0.039697°
8.74	0.085522°	0.261136°
8.94	-0.13845°	-0.11068°
9.14	0.012261°	0.058943°
9.34	-0.18145°	-0.10995°
9.54	0.305258°	0.100509°
9.74	-0.17358°	-0.06772°
9.94	0.011425°	-0.03262°
10.14	-0.00027°	0.064882°
10.34	0.077145°	0.091311°
10.54	0.00977°	0.041474°
10.74	-0.05614°	-0.04704°
10.94	-0.07186°	-0.08403°
11.14	0.094093°	0.092985°

11.34	-0.08481°	-0.01364°
11.54	0.132097°	0.228292°
11.74	-0.04245°	-0.12613°
11.94	0.013889°	0.012692°
12.14	0.094787°	0.061243°
12.34	0.116073°	0.177505°
12.54	0.002055°	-0.05551°
12.74	0.004307°	0.03567°
12.94	-0.25385°	-0.0514°
13.14	0.394161°	0.135357°
13.34	-0.22835°	0.101548°
13.54	0.07721°	0.138083°
13.74	-0.06869°	-0.07721°
13.94	0.26842°	0.145445°
14.14	0.017401°	-0.04382°
14.34	-0.32934°	7.01E-05°
14.54	-0.04896°	0.044844°
14.74	0.127155°	0.430358°
14.94	-0.10758°	0.035226°
15.14	0.220815°	0.006406°
15.34	0.143415°	0.189672°
15.54	-0.0151°	-0.1209°
15.74	0.199343°	0.024139°
15.94	0.054345°	0.434184°
16.14	-0.04478°	-0.1133°
16.34	0.023437°	0.539199°
16.54	0.376704°	-0.03271°
16.74	0.097231°	0.473483°
16.94	0.263313°	-0.19089°
17.14	0.100183°	0.322194°
17.34	-0.14692°	0.436751°
17.54	0.387243°	0.348671°
17.74	0.092897°	-0.09562°
17.94	0.155983°	0.835171°
18.14	0.179754°	0.244174°
18.34	0.27638°	0.636603°
18.54	0.403962°	0.693404°
18.74	0.142746°	0.221468°
18.94	0.504075°	-1.005582°
19.14	-0.269117°	0.773259°
19.34	0.524726°	1.146524°
19.54	0.451308°	1.179958°
19.74	0.752127°	1.235468°
19.94	0.807542°	1.955293°
20.14	1.179017°	1.459661°
20.34	-1.120856°	1.179017°

20.54	1.454185°	1.120856°
20.74	1.225415°	1.458585°
20.94	1.277569°	-1.178117°
21.14	1.179017°	1.160856°
21.34	-1.120856°	1.454185°
21.54	1.454185°	1.159017°
21.74	2.225415°	1.190856°
21.94	2.277569°	1.454185°
22.14	-1.179017°	-1.271417°
22.34	1.120856°	1.120856°
22.54	1.454185°	1.464288°
22.74	2.225415°	1.753259°
22.94	2.277569°	1.146524°

En las figuras 5.3 y 5.4 se muestra la dirección de propagación de las grietas final, que fue obtenida del análisis numérico aplicando las cargas de 3.82 kN y 7.85 kN.

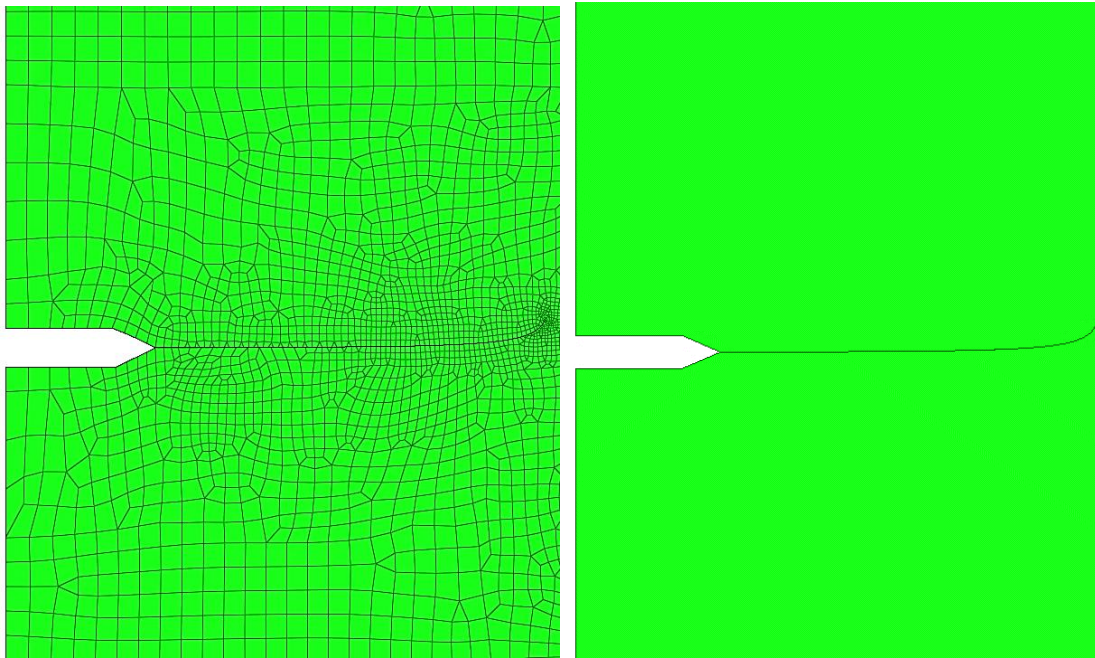


Figura 5.3 Dirección de propagación de la grieta aplicando una carga de 3.82 kN

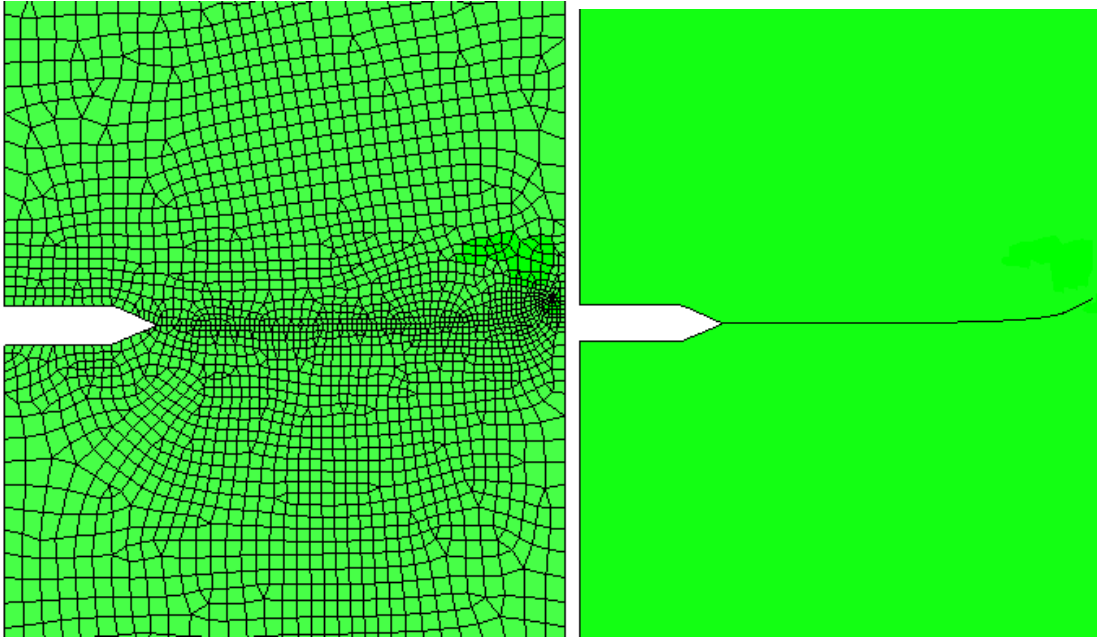


Figura 5.4 Dirección de propagación de la grieta aplicando una carga de 7.85 kN

Como se observa en las Figuras 5.3 y 5.4 la dirección de propagación de la grieta de ambas simulaciones es lineal, es decir no hay un cambio en la dirección de propagación de la grieta, obteniéndose valores menores a $\pm 0.4^\circ$, los cuales se observan en la Tabla 5.4. Sin embargo, a partir de que la grieta alcanza los 19 mm de longitud, la dirección de propagación cambia, aumentando la magnitud del ángulo de propagación, a valores mayores de 1° , ocasionando que la grieta tenga un ángulo de propagación, al final de la probeta de $+20^\circ$. Este cambio en la dirección de propagación es originado debido a errores de cálculo del algoritmo computacional que fue desarrollado, ocasionados a que la forma geométrica de los elementos finitos utilizados para discretizar los alrededores de la punta de la grieta y la probeta, se ve afectada debido a que el algoritmo utilizado para discretizar la probeta automáticamente, no tiene un suficiente espacio para generar elementos de buena calidad en la pequeña área restante al final de la propagación delimitada por la punta de la grieta y el borde final de la probeta. Lo que ocasiona que los desplazamientos nodales obtenidos de los alrededores de la punta de la grieta no sean precisos.

5.3.3 Número de ciclos

El número de ciclos de aplicación de las cargas fue obtenido con base en la ecuación empírica de P. Paris (130), en la cual se utilizaron el valor de las constantes C y m, mostradas en la Tabla 4.3. Los resultados obtenidos del análisis numérico de la longitud de la grieta en función del número de ciclos aplicando las cargas de 3.82 kN y 7.85 kN son presentados en la Tabla 5.5. En donde se muestra la cantidad de ciclos necesarios para propagar la grieta con incrementos de 0.2 mm en su longitud.

Tabla 5.5 Número de ciclos de aplicación de las cargas con magnitudes de 3.82 kN y 7.85 kN

Longitud de la grieta (mm)	Número de ciclos 3.82 kN	Número de ciclos 7.85kN
7.54	Longitud de la grieta inicial	
7.74	2478	467
7.94	4776	904
8.14	6938	1314
8.34	8960	1698
8.54	10864	2059
8.74	12657	2400
8.94	14331	2717
9.14	15913	3017
9.34	17392	3298
9.54	18772	3558
9.74	20066	3804
9.94	21278	4034
10.14	22414	4248
10.34	23477	4450
10.54	24463	4637
10.74	25391	4812
10.94	26250	4975
11.14	27058	5128
11.34	27810	5270
11.54	28502	5402
11.74	29151	5524
11.94	29753	5639
12.14	30314	5745
12.34	30834	5843
12.54	31315	5934
12.74	31759	6018
12.94	32169	6096
13.14	32548	6167
13.34	32898	6233
13.54	33220	6294
13.74	33515	6350
13.94	33789	6401
14.14	34038	6448
14.34	34265	6491

14.54	34473	6530
14.74	34662	6566
14.94	34834	6599
15.14	34992	6629
15.34	35134	6656
15.54	35263	6680
15.74	35379	6702
15.94	35485	6722
16.14	35579	6740
16.34	35663	6756
16.54	35739	6770
16.74	35806	6783
16.94	35865	6794
17.14	35918	6804
17.34	35964	6813
17.54	36005	6821
17.74	36041	6828
17.94	36072	6833
18.14	36099	6839
18.34	36122	6843
18.54	36142	6847
18.74	36159	6850
18.94	36174	6853
19.14	36185	6855
19.34	36195	6857
19.54	36204	6858
19.74	36210	6860
19.94	36216	6861
20.14	36220	6862
20.34	36223	6862
20.54	36226	6863
20.74	36228	6863
20.94	36230	6864
21.14	36231	6864
21.34	36232	6864
21.54	36232	6864
21.74	36233	6864
21.94	36233	6864
22.14	36233	6865
CICLOS TOTALES	36233	6865

En la Tabla 5.5 se observa que el número de ciclos necesarios para fracturar totalmente la probeta, a partir de una longitud de grieta inicial de 7.54 mm fue de 36233 aplicando una carga de 3.52 kN, mientras que un total de 6865 ciclos utilizando una carga de 7.85 kN. También se observa que a medida que la grieta incrementa su longitud se necesita una menor cantidad de ciclos de carga para propagar la grieta una distancia de 0.2 mm. Esto es debido a que el factor de intensidad de esfuerzos se incrementa conforme la grieta aumenta su

longitud ocasionando que se necesiten una menor cantidad de ciclos de aplicación de cargas para cada incremento de la longitud de la grieta.

5.4 Resultados del análisis numérico realizado en la probeta tipo ESE (T) con un barreno

Los resultados del análisis numérico, obtenidos para la probeta con un barreno central de 10 mm de diámetro fueron el FIE para los modos de carga I y II, el FIE equivalente y la DPG en función de la longitud de la grieta, además de obtenerse el número de ciclos de aplicación de las cargas necesarios para fracturar la probeta totalmente utilizando cargas con una magnitud de 3.82 kN.

5.4.1 Factor de intensidad de esfuerzos

El factor de intensidad de esfuerzos para los modos de carga I y II fueron calculados a partir del método de extrapolación de desplazamientos, mientras que el factor de intensidad de esfuerzos equivalente fue obtenido utilizando el criterio de Tanaka. En la Tabla 5.6 se muestra los resultados del factor de intensidad de esfuerzos en función de la longitud de la grieta, comenzando con una longitud de la grieta inicial de 6.62 mm, es decir considerando un pre agrietamiento de la probeta de solo 0.5 mm.

Tabla 5.6 Factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} obtenidos en la probeta con un barreno aplicando una carga de 3.82 kN

Longitud de la grieta mm	FIE (K_I) MPa \sqrt{m}	FIE (K_{II}) MPa \sqrt{m}	FIE (K_{eq}) MPa \sqrt{m}
6.62	19.44	1.11	19.44
6.82	20.24	0.17	20.24
7.02	20.87	0.12	20.87
7.22	21.50	0.08	21.50
7.42	22.12	0.11	22.12
7.62	22.69	0.08	22.69
7.82	23.36	0.09	23.36
8.02	24.00	0.08	24.00
8.22	24.61	0.11	24.61
8.42	25.33	0.09	25.33
8.62	26.07	0.08	26.07
8.82	26.75	0.08	26.75
9.02	27.49	0.13	27.49

9.22	28.21	0.14	28.21
9.42	28.86	0.15	28.86
9.62	29.72	0.08	29.72
9.82	30.45	0.10	30.45
10.02	31.25	0.18	31.25
10.22	32.02	0.14	32.02
10.42	32.86	0.11	32.86
10.62	33.64	0.10	33.64
10.82	34.55	0.13	34.55
11.02	35.38	0.15	35.38
11.22	36.23	0.17	36.23
11.42	37.07	0.08	37.07
11.62	38.06	0.13	38.06
11.82	38.93	0.08	38.93
12.02	39.84	0.11	39.84
12.22	40.87	0.03	40.87
12.42	41.79	0.07	41.79
12.62	42.78	0.06	42.78
12.82	43.82	-0.01	43.82
13.02	44.80	0.02	44.80
13.22	45.81	-0.06	45.81
13.42	46.98	-0.09	46.98
13.62	47.98	-0.20	47.98
13.82	49.28	-0.15	49.28
14.02	50.62	-0.26	50.62
14.22	52.02	-0.24	52.02
14.42	53.43	-0.42	53.43
14.62	54.91	-0.44	54.91
14.82	56.62	-0.53	56.62
15.02	58.55	-0.43	58.55
15.22	65.38	-0.57	60.38
15.42	72.61	-0.65	72.61
15.62	79.11	-0.61	79.11
15.82	86.84	-0.62	86.84
16.02	92.80	-0.64	92.80
16.22	98.84	-0.63	98.84
16.42	105.48	-0.65	105.48
16.62	112.22	-0.42	112.22
16.82	119.24	-0.59	119.24
17.02	126.86	-0.34	126.86
17.22	133.54	-0.35	133.54
17.42	142.94	-0.23	142.94
17.62	145.70	-0.28	145.70
17.82	152.04	-0.27	152.04
18.02	169.12	-0.03	169.12
18.22	176.79	-0.03	176.79
18.42	185.27	0.13	185.27
18.62	194.41	0.14	194.41
18.82	205.12	0.06	205.12
19.02	230.79	0.27	230.79
19.22	253.32	0.55	253.32
19.42	278.67	0.73	278.67
19.62	308.20	0.56	308.20
19.82	314.13	1.06	314.13

20.02	318.23	1.13	318.23
20.22	325.77	2.00	325.77
20.42	335.45	2.35	335.45
20.62	344.81	3.38	344.81
20.82	387.69	4.83	387.69
21.02	439.00	7.39	439.00
21.22	501.42	10.85	501.42
21.42	579.28	15.21	579.28
21.62	674.97	23.54	674.97
21.82	794.49	38.68	794.50
22.02	950.14	51.53	950.14
22.22	1124.03	50.73	1124.03
22.44	1225.91	51.13	1225.91
22.64	1627.80	52.83	1627.80
22.94	1954.69	52.83	1954.69

En la Figura 5.5 se muestra la gráfica de los resultados obtenidos de los factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} en función de la longitud de la grieta, la cual fue elaborada a partir de los datos mostrados en la Tabla 5.6.

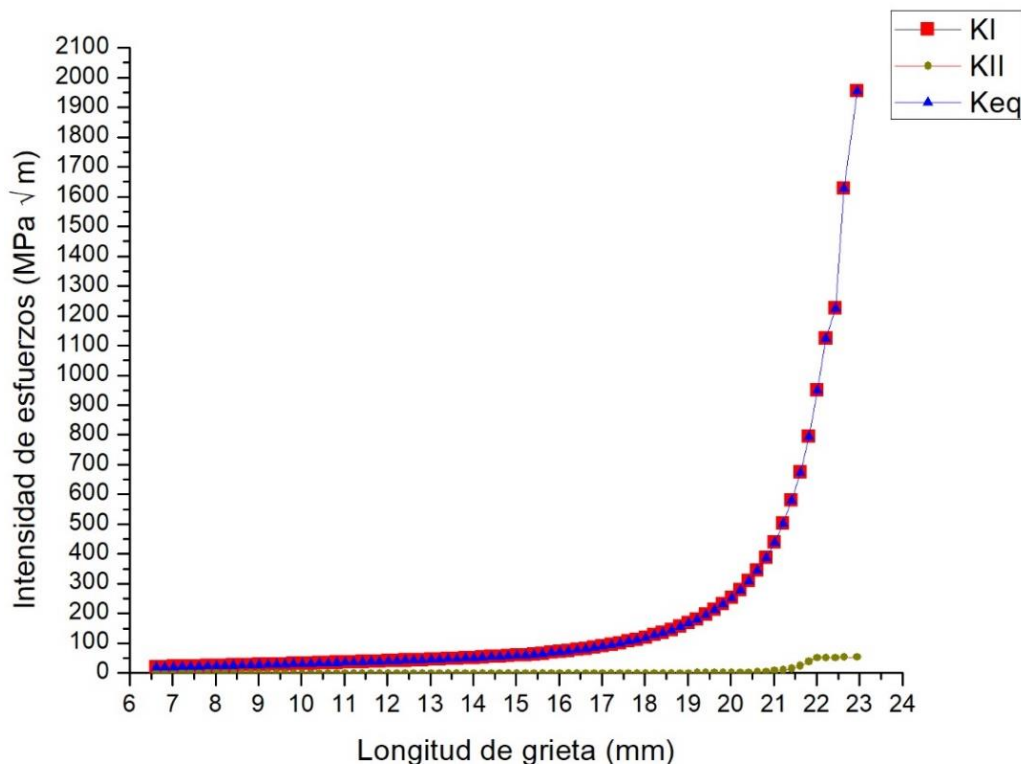


Figura 5.5 Factores de intensidad de esfuerzo en la probeta con un barrenado central de 10 mm de diámetro aplicando una carga de 7.85 kN

Como se observa en la Figura 5.5 el factor de intensidad de esfuerzos para las cargas del modo I, aumenta su magnitud a medida que la longitud de la grieta crece, comenzando con un incremento del factor de intensidad de esfuerzos lineal, el cual cambia a un comportamiento no lineal después de alcanzar una longitud de la grieta de 16 mm. También se observa que el factor de intensidad de esfuerzos equivalente es de igual magnitud que el factor para cargas del modo I, esto es debido a que el factor de intensidad de esfuerzos para cargas del modo II en la mayor parte de la propagación de la grieta tiene una magnitud menor a $1 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$, magnitud que aumenta antes de producirse la fractura total de la probeta.

Se debe notar que a pesar de que el comportamiento del factor de intensidad de esfuerzos para las cargas del modo I, II y equivalente de la probeta con un barreno es similar al de la probeta sin barreno, se tiene un aumento de las magnitudes de los factores de intensidad de esfuerzos de alrededor del 8%, como se observa en la Tabla 5.6, este incremento es originado por el barreno central de la probeta, lo que se verá reflejado en una menor cantidad de número de ciclos de aplicación de las cargas para fracturar la probeta totalmente .

5.4.2 Dirección de propagación de la grieta

La dirección de propagación de la grieta en la probeta con un barreno central de 10 mm es mostrada en la Tabla 5.7, en donde se muestran los ángulos de propagación que se obtienen a medida que la grieta incrementa su longitud, iniciando con una longitud de grieta de 6.62 mm.

Tabla 5.7 Ángulos de propagación de la grieta en la probeta con un barreno central, obtenidos aplicando una carga de 3.82 kN.

Longitud de la grieta (mm)	Ángulo de propagación de la grieta (grados)
6.62	6.50
6.82	0.95
7.02	0.64
7.22	0.41
7.42	0.59
7.62	0.42
7.82	0.44
8.02	0.40

8.22	0.52
8.42	0.42
8.62	0.36
8.82	0.35
9.02	0.53
9.22	0.55
9.42	0.58
9.62	0.31
9.82	0.37
10.02	0.65
10.22	0.49
10.42	0.38
10.62	0.34
10.82	0.43
11.02	0.50
11.22	0.52
11.42	0.25
11.62	0.39
11.82	0.25
12.02	0.31
12.22	0.09
12.42	0.18
12.62	0.17
12.82	-0.02
13.02	0.06
13.22	-0.14
13.42	-0.22
13.62	-0.47
13.82	-0.36
14.02	-0.58
14.22	-0.52
14.42	-0.89
14.62	-0.92
14.82	-1.08
15.02	-0.85
15.22	-1.08
15.42	-1.19
15.62	-1.07
15.82	-1.04
16.02	-1.03
16.22	-0.97
16.42	-0.96
16.62	-0.59
16.82	-0.79
17.02	-0.43
17.22	-0.42
17.42	-0.26
17.62	-0.30
17.82	-0.27
18.02	-0.03
18.22	-0.02

18.42	0.11
18.62	0.11
18.82	0.05
19.02	0.19
19.22	0.35
19.42	0.43
19.62	0.31
19.82	0.53
20.02	0.51
20.22	0.82
20.42	0.87
20.62	1.12
20.82	1.43
21.02	1.93
21.22	2.48
21.42	3.00
21.62	3.99
21.82	5.55

Como se observa en la Tabla 5.7, los ángulos de propagación de la grieta desde la longitud inicial de 6.62 mm hasta una longitud de 12.62 mm son de signo positivo, es decir la grieta se propaga en dirección al barreno, conforme la propagación de la grieta se aleja del barreno, se obtienen ángulos de propagación negativos, es decir la dirección de propagación de la grieta cambia, para ser perpendicular a la dirección de aplicación de las cargas en la probeta. El ángulo total de propagación de la grieta fue 14 grados el cual después de que la grieta alcanzara una distancia de 16 mm se decremento a 2.5 grados. En la Figura 5.6 se muestra la dirección de propagación final de la grieta obtenida del análisis numérico en la probeta con un barreno central.

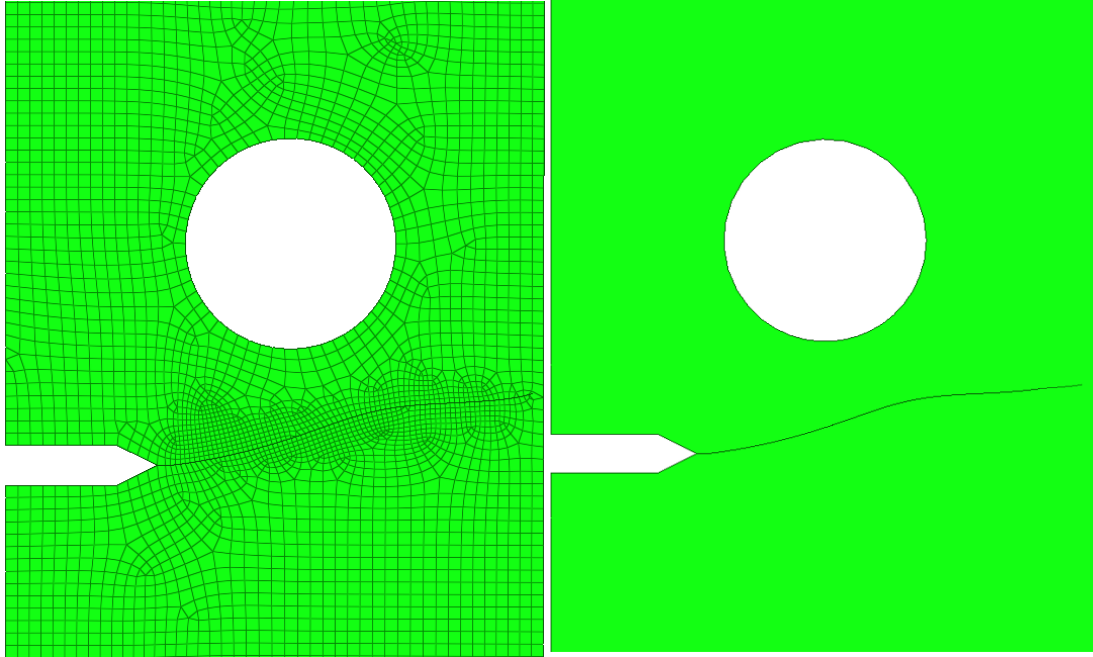


Figura 5.6 Dirección de propagación de la grieta en la probeta con un barreno central, aplicando una carga de 3.82 kN

Como se observa en la Figura 5.6, la trayectoria de propagación de la grieta es afectada por el barreno central de la probeta. Esto es debido a que conforme la punta de la grieta pasa por debajo del barreno, se incrementa el deslizamiento de sus superficies, es decir aumenta el factor de intensidad de esfuerzos del modo II, y conforme la grieta se aleja del barreno se disminuye este deslizamiento, ocasionando que la grieta cambie de dirección nuevamente, esto se observa en los resultados obtenidos del factor de intensidad de esfuerzos mostrados en la Tabla 5.6.

5.4.3 Número de ciclos

El número de ciclos de aplicación de cargas fue obtenido con base en la ecuación empírica de P. Paris (130), en la cual se utilizaron el valor de las constantes C y m , mostradas en la Tabla 4.3 para obtener la tasa de propagación de las grietas. Los resultados obtenidos del análisis numérico de la longitud de la grieta en función del número de ciclos de aplicación de las cargas con una magnitud de 3.82 kN son presentados en la Tabla 5.8. En donde se

muestra la cantidad de ciclos necesarios para propagar la grieta de una longitud inicial de 6.62 mm hasta alcanzar la fractura total de la probeta.

Tabla 5.8 Número de ciclos de aplicación de las cargas en la probeta con un barreno central utilizando cargas de 3.82 kN

Longitud de la grieta	Número de ciclos
6.62	
6.82	2150
7.02	4111
7.22	5938
7.42	7645
7.62	9244
7.82	10751
8.02	12161
8.22	13486
8.42	14737
8.62	15907
8.82	17002
9.02	18034
9.22	19004
9.42	19917
9.62	20784
9.82	21594
10.02	22361
10.22	23083
10.42	23766
10.62	24409
10.82	25018
11.02	25592
11.22	26134
11.42	26648
11.62	27136
11.82	27595
12.02	28030
12.22	28443
12.42	28833
12.62	29203
12.82	29553
13.02	29885
13.22	30200
13.42	30500
13.62	30782
13.82	31052
14.02	31305
14.22	31543
14.42	31767
14.62	31977
15.02	32161
15.22	32332
15.42	32490

15.62	32636
15.82	32770
16.02	32891
16.22	33001
16.42	33101
16.62	33190
16.82	33271
17.02	33343
17.22	33406
17.42	33463
17.62	33513
17.82	33556
18.02	33595
18.22	33628
18.42	33657
18.62	33682
18.82	33703
19.02	33721
19.22	33736
19.42	33749
19.62	33760
20.02	33767
20.22	33773
20.62	33777
20.82	33780
21.02	33782
21.22	33784
21.42	33785
21.62	33786
CICLOS TOTALES	33786

En la Tabla 5.8 se observa que el número de ciclos necesarios para fracturar totalmente la probeta fue de 33786, medidos a partir de una longitud de grieta inicial de 6.62 mm y aplicando una carga de 3.82 kN. Como se puede observar el número de ciclos totales obtenidos para esta probeta fue menor un 10% en comparación con los 36233 ciclos obtenidos para fracturar totalmente la probeta sin barreno, esto es debido a que el barreno en la probeta ocasiona una mayor concentración de esfuerzos en los alrededores de la punta de la grieta.

5.5 Resultados del análisis numérico realizado en la probeta tipo ESE (T) con dos barrenos

Los resultados del análisis numérico obtenidos para la probeta con dos barrenos, uno de 3 mm de diámetro y otro de 8 mm diámetro, fueron el FIE para los modos de carga I y II, el FIE equivalente y la DPG en función de la longitud de la grieta, además de obtenerse el número de ciclos de aplicación de las cargas necesarios para fracturar la probeta totalmente utilizando cargas con una magnitud de 7.85 kN.

5.5.1 Factor de intensidad de esfuerzos

Al igual que las dos probetas anteriores el factor de intensidad de esfuerzos para los modos de carga I y II fueron calculados a partir del método de extrapolación de desplazamientos, mientras que el factor de intensidad de esfuerzos equivalente fue obtenido utilizando el criterio de Tanaka. En la Tabla 5.9 se muestra los resultados del factor de intensidad de esfuerzos en función de la longitud de la grieta, comenzando con una longitud de grieta inicial de 6.62 mm, es decir considerando un pre agrietamiento de la probeta de 0.5 mm.

Tabla 5.9 Factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} obtenidos en la probeta con dos barrenos, aplicando una carga de 7.85 kN

Longitud de la grieta mm	FIE (K_I) MPa \sqrt{m}	FIE (K_{II}) MPa \sqrt{m}	FIE (K_{eq}) MPa \sqrt{m}
6.62	38.9375	0.3921	38.9375
6.82	39.6810	0.1284	39.6810
7.02	40.5444	0.0697	40.5444
7.22	41.2345	0.0530	41.2345
7.42	41.9321	0.2320	41.9321
7.62	42.8276	0.1507	42.8276
7.82	43.7021	0.2678	43.7021
8.02	44.7465	0.3448	44.7465
8.22	45.9223	0.4107	45.9223
8.42	47.3142	0.4059	47.3142
8.62	48.9384	0.3071	48.9384
8.82	50.6076	0.2882	50.6076
9.02	52.5467	0.2426	52.5467

9.22	54.6111	0.0990	54.6111
9.42	56.7987	0.0674	56.7987
9.62	59.1880	0.0615	59.1880
9.82	61.6560	0.1100	61.6560
10.02	64.3008	0.2835	64.3008
10.22	67.0165	0.2391	67.0165
10.42	69.8985	0.3757	69.8985
10.62	72.9886	0.3968	72.9886
10.82	76.0956	0.4963	76.0956
11.02	79.4821	0.5497	79.4821
11.22	82.8359	0.6645	82.8359
11.42	88.2754	0.6884	88.2754
11.62	92.1350	0.7173	92.1350
11.82	96.4199	0.9347	96.4199
12.02	99.4095	1.1484	99.4095
12.22	102.9420	1.0130	102.9420
12.42	107.7333	1.0008	107.7333
12.62	112.8433	1.4930	112.8433
12.82	117.8021	1.5762	117.8022
13.02	123.9237	1.7221	123.9237
13.22	129.8961	1.7351	129.8961
13.42	136.3303	2.3651	136.3303
13.62	143.4561	2.5401	143.4561
13.82	151.1365	2.8874	151.1366
14.02	159.5404	3.3190	159.5404
14.22	168.6467	3.7530	168.6468
14.42	178.5409	4.3259	178.5410
14.62	190.2411	5.3152	190.2413
14.82	204.2213	6.1541	204.2217
15.02	220.0249	7.1279	220.0254
15.22	239.6812	8.9638	239.6821
15.42	266.8640	10.9021	266.8655
15.62	305.5704	15.0785	305.5740
15.82	331.4247	12.26706	331.9641
16.02	431.9617	14.46406	431.9641
16.22	650.596	268.79	720.434

En la Figura 5.7 se muestra la gráfica de los resultados obtenidos de los factores de intensidad de esfuerzos K_I , K_{II} y K_{eq} en función de la longitud de la grieta, la cual fue elaborada a partir de los datos mostrados en la Tabla 5.9.

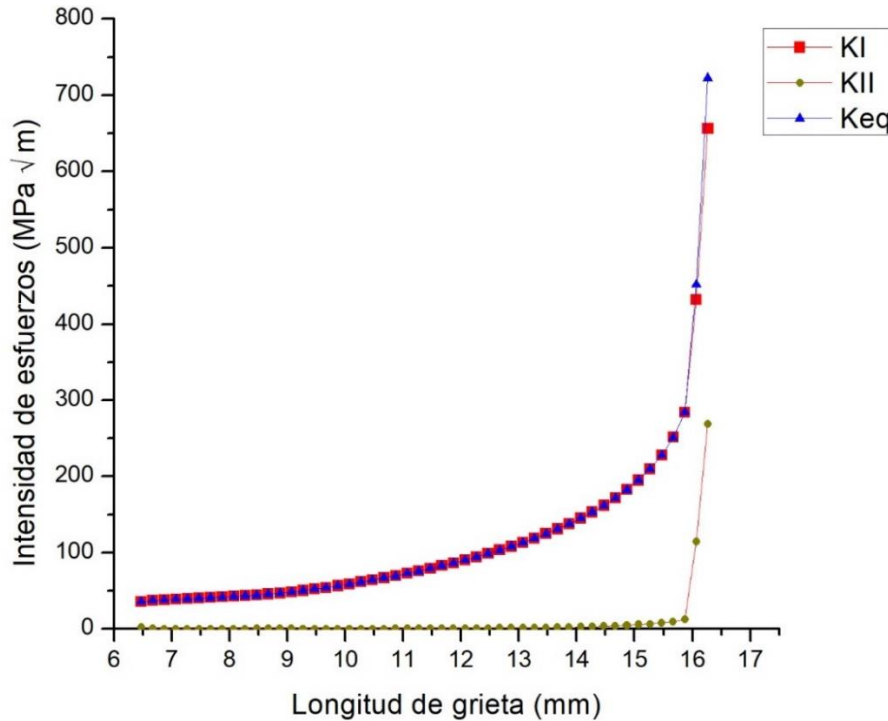


Figura 5.7 Factores de intensidad de esfuerzo en la probeta con dos barrenos aplicando cargas de 7.85 kN

Como se observa en la Figura 5.7 el factor de intensidad de esfuerzos para las cargas del modo I, aumenta su magnitud a medida que la longitud de la grieta crece, comenzando con un incremento del factor de intensidad de esfuerzos lineal, el cual cambia a un comportamiento no lineal después de alcanzar una longitud de la grieta de 13 mm. De la misma manera que en la probeta con un barreno se observa que el factor de intensidad de esfuerzos equivalente es de igual magnitud que el factor para cargas del modo I, debido a que el factor de intensidad de esfuerzos para cargas del modo II en la mayor parte de la propagación de la grieta tiene una magnitud menor a 1 MPa \sqrt{m} , el cual incrementa su magnitud posterior a los 12 mm de longitud de la grieta, obteniendo un valor máximo, cuando la grieta se intercepta con el barreno, de 268 MPa \sqrt{m} , como se observa al final de la tabla 5.8.

Comparando los resultados del factor de intensidad de esfuerzos obtenidos en la probeta con dos barrenos, con los resultados que se obtuvieron en la probeta sin barreno, los cuales se muestran en la tabla 5.3, se observa un incremento de las magnitudes de los factores de intensidad de esfuerzos del 6%, el cual es originado por los dos barrenos.

5.5.2 Dirección de propagación de la grieta

Las direcciones de propagación de la grieta en la probeta con dos barrenos de 3 mm y 8 mm de diámetro son mostradas en la Tabla 5.10, en donde se muestran los ángulos de propagación que se obtienen para cada incremento de la longitud de la grieta

Tabla 5.10 Ángulos de propagación de la grieta obtenidos en la probeta con dos barrenos aplicando una carga de 3.82 kN

Longitud de la grieta	Ángulo de propagación
6.62	2.37
6.82	7.24
7.02	4.59
7.22	4.02
7.42	-2.76
7.62	2.11
7.82	-1.99
8.02	0.56
8.22	-1.46
8.42	-0.12
8.62	-1.76
8.82	-0.53
9.02	-1.53
9.22	-0.24
9.42	-1.37
9.62	0.53
9.82	-1.14
10.02	0.66
10.22	-0.17
10.42	0.48
10.62	0.19
10.82	0.59
11.02	0.60
11.22	0.63
11.42	0.86

11.62	0.78
11.82	0.94
12.02	0.67
12.22	1.44
12.42	0.66
12.62	1.72
12.82	0.44
13.02	2.34
13.22	2.36
13.42	2.33
13.62	1.24
13.82	1.92
14.02	1.72
14.22	1.93
14.42	2.29
14.62	1.91
14.82	3.16
15.02	2.87
15.22	2.73
15.42	3.57
15.62	3.14
15.82	4.49
16.02	3.70
16.22	4.01

Como se observa en la Tabla 5.10 los ángulos de propagación de la grieta calculados para cada incremento de su longitud son menores a 5° , con lo que se concluye que los cambios de dirección de la grieta son graduales mientras esta se propaga en la probeta. En la Figura 5.8 se muestra la dirección de propagación final obtenida del análisis numérico

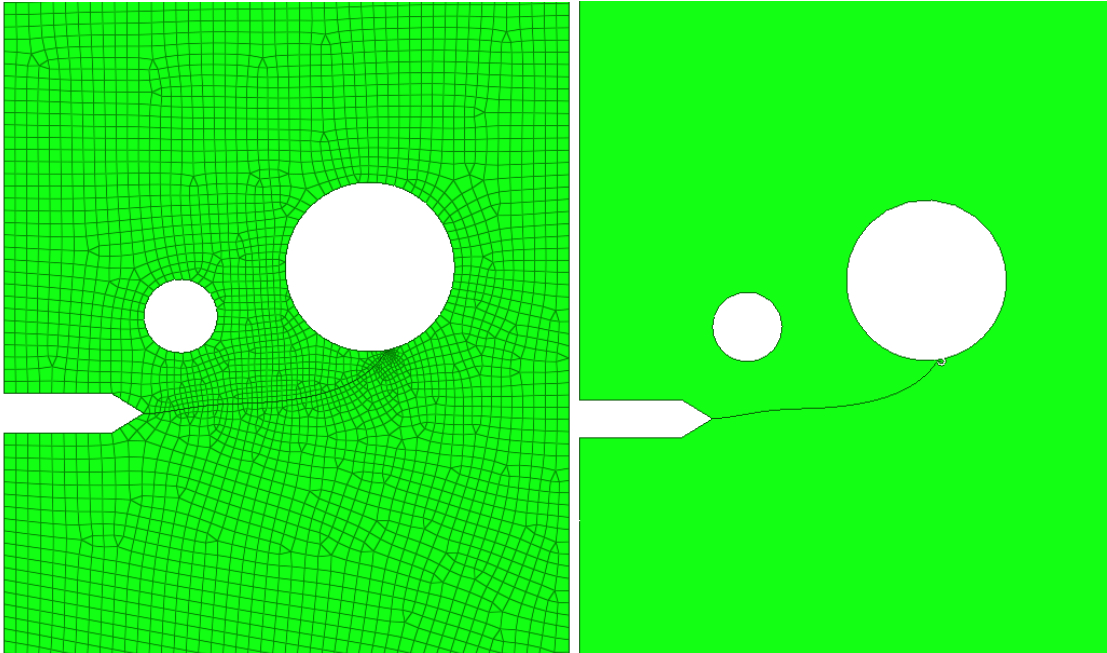


Figura 5.8 Dirección de propagación de la grieta aplicando una carga de 3.82 kN

Como se observa en la Figura 5.8, la trayectoria de propagación de la grieta es afectada inicialmente por el barrenado de 3 mm de diámetro, posteriormente la grieta se propaga perpendicular a la dirección de aplicación de las cargas en la probeta conforme esta se aleja del primer barrenado, y finalmente a medida que la grieta alcanza una longitud de 13 mm y se acerca al segundo barrenado, los ángulos de propagación obtenidos aumentan su magnitud con un valor promedio de $+2^\circ$, hasta que la grieta intercepta con el barrenado de 8 mm. El ángulo total de propagación de la grieta inicial fue 2° grados el cual después de que la grieta alcanzara una longitud de 13 mm incremento a 35° como se observa en la Figura 5.8

5.5.3 Número de ciclos

El número de ciclos de aplicación de cargas fue obtenido con base en la ecuación empírica de P. Paris (130), en la cual al igual que en las probetas anteriores, se utilizaron el valor de las constantes C y m, mostradas en la Tabla 4.3. Los resultados obtenidos del análisis numérico de la longitud de la grieta en función del número de ciclos de aplicación de las cargas con una magnitud de 7.85 kN son presentados en la Tabla 5.11. En donde se muestra

el número de ciclos necesarios para propagar la grieta a partir de una longitud inicial de 6.62 mm hasta alcanzar la fractura total de la probeta.

Tabla 5.11 Número de ciclos de aplicación de las cargas con magnitudes de 7.85 kN

Longitud de la grieta	Número de ciclos
6.62	
6.82	852
7.02	1249
7.22	1631
7.42	1998
7.62	2347
7.82	2681
8.02	2998
8.22	3295
8.42	3574
8.62	3831
8.82	4069
9.02	4288
9.22	4488
9.42	4670
9.62	4836
9.82	4988
10.02	5125
10.22	5250
10.42	5363
10.62	5466
10.82	5559
11.02	5644
11.22	5720
11.42	5790
11.62	5853
11.82	5910
12.02	5962
12.22	6008
12.42	6050
12.62	6088
12.82	6122

13.02	6152
13.22	6180
13.42	6204
13.62	6226
13.82	6245
14.02	6262
14.22	6277
14.42	6290
14.62	6301
14.82	6311
15.02	6319
15.22	6326
15.42	6331
15.62	6335
15.82	6338
16.02	6341
16.22	6341
CICLOS TOTALES	6341

En la Tabla 5.11 se observa que el número de ciclos totales necesarios para propagar la grieta desde su longitud inicial hasta su intersección con el barreno de 8 mm de diámetro fue de 6341 ciclos aplicando cargas de 7.85 kN.

5.6 Resultados del tamaño de la zona plástica

Con base en la ecuación (134) se obtuvo el tamaño de la zona plástica durante el análisis de la propagación de las grietas, estos valores fueron sustituidos en la expresión (135) para determinar si el análisis de la propagación de las grietas aplicando las cargas 7.85 kN y 3.82 kN fue lineal-elástico o elasto-plástico.

En la Tabla 5.12 se muestran los resultados obtenidos del incremento en el tamaño de la zona plástica y en la Figura 5.9 se muestran las gráficas de los resultados obtenidos de la Tabla 5.18, además de la gráfica del criterio utilizado (135) para determinar si el análisis de la propagación de las grietas es lineal-elástico o elasto-plástico.

Tabla 5.12 Incremento del tamaño de la zona plástica aplicando las cargas de 7.85 kN y 3.82 kN

Longitud de la grieta (metros)	Radio de la zona plástica (metros)	Radio de la zona plástica (metros)	25a (Máximo tamaño de la zona plástica)
	Aplicando una carga de 7.85 kN	Aplicando una carga de 3.82 kN	metros
0.00754	3.63E-04	8.51E-05	0.01785
0.00794	4.06E-04	9.58E-05	0.01885
0.00834	4.54E-04	1.07E-04	0.01985
0.00874	5.08E-04	1.20E-04	0.02085
0.00914	5.66E-04	1.33E-04	0.02185
0.00954	6.35E-04	1.50E-04	0.02285
0.00994	7.14E-04	1.68E-04	0.02385
0.01034	8.06E-04	1.90E-04	0.02485
0.01074	9.09E-04	2.14E-04	0.02585
0.01114	0.00102	2.40E-04	0.02685
0.01154	0.00116	2.73E-04	0.02785
0.01194	0.00132	3.10E-04	0.02885
0.01234	0.00151	3.55E-04	0.02985
0.01274	0.00173	4.06E-04	0.03085
0.01314	0.00199	4.67E-04	0.03185
0.01354	0.00212	5.42E-04	0.03285
0.01394	0.00242	6.28E-04	0.03385
0.01434	0.00312	7.34E-04	0.03485
0.01474	0.00368	8.65E-04	0.03585
0.01514	0.00435	0.00102	0.03685
0.01554	0.00517	0.00122	0.03785
0.01594	0.00617	0.00146	0.03885
0.01634	0.00755	0.00177	0.03985
0.01674	0.00927	0.00216	0.04085
0.01714	0.01143	0.0027	0.04185

0.01754	0.01441	0.0034	0.04285
0.01794	0.01843	0.00434	0.04385
0.01834	0.02395	0.00563	0.04485
0.01874	0.03183	0.00754	0.04585
0.01914	0.0435	0.01028	0.04685
0.01954	0.06068	0.01448	0.04785
0.01994	0.08697	0.02134	0.04885
0.02034	0.13159	0.03256	0.04985
0.02074	0.20345	0.05331	0.05085
0.02114	0.32284	0.09343	0.05185

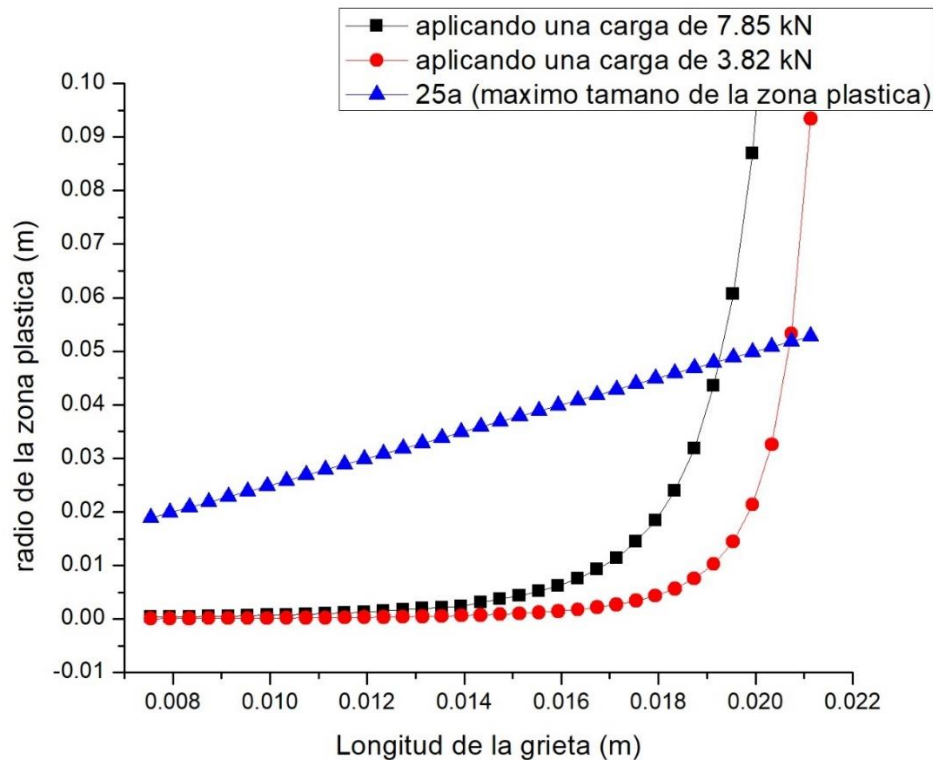


Figura 5.9. Crecimiento del tamaño de la zona plástica aplicando las cargas de 7.85 kN y 3.82 kN

Como se observa en la Figura 5.9 el tamaño de la zona plástica durante la propagación de las grietas se mantiene por debajo del tamaño máximo permitido para establecer que el análisis de la propagación de las grietas es lineal-elástico. El tamaño de la zona plástica es mayor al tamaño máximo permitido cuando la grieta alcanza una longitud de 19.1 mm aplicando una

carga de 7.82 kN y de 20.5 mm aplicando una carga de 3.82 kN, es en este momento cuando el análisis de la propagación de las grietas cambia de ser lineal-elástico a elasto-plástico.

El algoritmo de propagación de las grietas fue desarrollado para el análisis de la propagación de las grietas utilizando los conceptos de la Mecánica de la Fractura lineal elástica, por lo tanto, no puede analizar con precisión el comportamiento de la fractura elasto-plástica. Esto es corroborado con las gráficas presentadas en las Figuras 5.9 y 5.10 en donde se observa que la precisión de los resultados del FIE del análisis numérico obtiene diferencias de hasta el 40% en comparación con las pruebas experimentales a partir de una longitud de la grieta de 19 mm, es decir cuando el análisis de la propagación de las grietas se convierte a elasto-plástico y el tamaño de la zona plástica es mayor que el criterio mostrado en la ecuación (135).

5.7 Comparación numérica y experimental del factor de intensidad de esfuerzos, la dirección de propagación de las grietas y el número de ciclos.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de la comparación de los análisis numéricos y experimentales, los cuales fueron realizados con la finalidad de validar el algoritmo computacional en términos del FIE, la DPG en función de la longitud de la grieta y del número de ciclos de aplicación de las cargas.

5.7.1 Factor de intensidad de esfuerzos

El FIE para el modo de carga I obtenido del análisis numérico fue comparado con el factor de intensidad de esfuerzos obtenido experimentalmente. El FIE para el modo de carga II no fue comparado con el experimental debido a que, durante la mayor parte de la propagación de las grietas en el análisis numérico de las 3 diferentes probetas analizadas, se obtuvieron valores menores a $1 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$.

En las Tablas 5.12 y 5.13 se muestran los valores del FIE obtenidos experimental y numéricamente aplicando las cargas de 3.82 kN y 7.85 kN. Posteriormente en las Figuras 5.9 y 5.10 se muestran la comparación gráfica de los resultados obtenidos experimental y numéricamente.

Tabla 5.13 Análisis comparativo del factor de intensidad de esfuerzos (K_I) obtenidos experimental y numéricamente, aplicando una carga de 3.82 kN.

Longitud de la grieta mm	FIE (K_I) MPa√m Experimental	FIE (K_I) MPa√m Numérico	% Error
7.54	19.60	18.28	6.72
7.74	20.15	18.89	6.23
7.94	20.72	19.40	6.35
8.14	21.30	19.97	6.25
8.34	21.91	20.50	6.41
8.54	22.53	21.04	6.62
8.74	23.18	21.68	6.44
8.94	23.84	22.22	6.80
9.14	24.53	22.88	6.74
9.34	25.25	23.58	6.60
9.54	25.99	24.25	6.71
9.74	26.76	24.95	6.75
9.94	27.55	25.66	6.85
10.14	28.38	26.41	6.94
10.34	29.23	27.29	6.65
10.54	30.12	28.03	6.95
10.74	31.05	28.97	6.71
10.94	32.01	29.76	7.05
11.14	33.02	30.70	7.01
11.34	34.06	31.84	6.53
11.54	35.15	32.73	6.89
11.74	36.29	33.83	6.78
11.94	37.48	34.87	6.97
12.14	38.72	36.04	6.93
12.34	40.02	37.31	6.77
12.54	41.38	38.61	6.72
12.74	42.81	39.95	6.68
12.94	44.31	41.37	6.64
13.14	45.89	42.81	6.70
13.34	47.55	44.36	6.71
13.54	49.30	46.11	6.45
13.74	51.14	47.66	6.79
13.94	53.08	49.67	6.43
14.14	55.14	51.62	6.38
14.34	57.32	53.67	6.36
14.54	59.63	55.96	6.14

14.74	62.08	58.29	6.10
14.94	64.69	60.64	6.26
15.14	67.47	63.36	6.09
15.34	70.43	65.93	6.40
15.54	73.60	69.20	5.98
15.74	77.00	72.21	6.22
15.94	80.64	75.65	6.18
16.14	84.56	79.53	5.95
16.34	88.78	83.46	5.99
16.54	91.34	87.79	5.94
16.74	92.28	92.50	5.88
16.94	98.64	97.83	5.60
17.14	109.47	103.05	5.86
17.34	115.83	108.70	6.16
17.54	122.80	115.53	5.92
17.74	130.45	122.65	5.98
17.94	138.89	130.52	6.03
18.14	148.22	138.87	6.31
18.34	158.59	148.66	6.26
18.54	170.16	159.64	6.18
18.74	183.12	172.05	6.05
18.94	197.74	185.93	5.97
19.14	214.30	200.94	6.23
19.34	233.19	218.56	6.27
19.54	254.89	238.48	6.44
19.74	280.01	262.35	6.31
20.14	343.97	319.91	7.00
20.34	385.27	357.60	7.18
20.54	435.20	402.93	7.41
20.74	496.49	457.54	7.85
20.94	573.09	521.03	9.08
21.14	670.93	605.72	9.72
21.34	799.22	708.60	11.34
21.54	973.04	832.85	14.41
21.74	1218.64	992.59	18.55
21.94	1585.55	1153.96	27.22
22.14	2177.81	1315.44	39.60

Tabla 5.14 Análisis comparativo del factor de intensidad de esfuerzos (K_I) obtenidos experimental y numéricamente, aplicando una carga de 7.85 kN

Longitud de la grieta mm	FIE (K_I) MPa \sqrt{m} Experimental	FIE (K_I) MPa \sqrt{m} Numérico	% Error
7.54	40.27	37.75	6.26
7.74	41.40	38.91	6.01
7.94	42.57	39.93	6.20
8.14	43.77	41.14	6.02
8.34	45.02	42.24	6.16
8.54	46.30	43.32	6.43
8.74	47.62	44.68	6.19
8.94	49.00	45.78	6.56
9.14	50.42	47.13	6.52
9.34	51.88	48.69	6.17
9.54	53.40	49.92	6.52
9.74	54.98	51.42	6.48
9.94	56.62	52.95	6.47
10.14	58.31	54.44	6.65
10.34	60.07	56.25	6.36
10.54	61.90	57.78	6.66
10.74	63.81	59.73	6.39
10.94	65.79	61.35	6.74
11.14	67.85	63.29	6.71
11.34	70.00	65.51	6.41
11.54	72.24	67.55	6.49
11.74	74.57	69.67	6.57
11.94	77.02	71.90	6.65
12.14	79.57	74.39	6.51
12.34	82.24	76.95	6.44
12.54	85.04	79.60	6.40
12.74	87.98	82.34	6.41
12.94	91.06	85.44	6.17
13.14	92.30	88.38	6.28
13.34	93.71	91.80	6.04
13.54	101.30	95.17	6.05
13.74	105.09	98.76	6.02
13.94	109.08	102.44	6.09
14.14	113.31	106.69	5.85

14.34	117.79	110.70	6.01
14.54	122.53	114.93	6.21
14.74	127.57	120.17	5.80
14.94	132.93	124.90	6.04
15.14	138.64	130.76	5.68
15.34	144.74	136.34	5.80
15.54	151.25	142.48	5.80
15.74	158.23	148.93	5.88
15.94	165.71	155.66	6.06
16.14	173.77	163.99	5.62
16.34	182.44	172.22	5.60
16.54	191.81	180.54	5.88
16.74	201.96	190.79	5.53
16.94	212.97	200.59	5.81
17.14	224.95	211.82	5.84
17.34	238.03	224.27	5.78
17.54	252.35	237.85	5.75
17.74	268.08	252.98	5.63
17.94	285.42	269.03	5.74
18.14	304.59	287.04	5.76
18.34	325.90	306.69	5.89
18.54	349.67	328.44	6.07
18.74	376.31	353.57	6.04
18.94	406.34	379.70	6.56
19.14	440.38	413.32	6.14
19.34	479.20	447.09	6.70
19.54	523.80	488.15	6.81
19.74	575.42	534.02	7.20
19.94	635.72	584.41	8.07
20.14	706.85	645.79	8.64
20.34	791.72	718.84	9.20
20.54	894.32	800.68	10.47
20.74	1020.27	893.84	12.39
20.94	1177.69	1005.33	14.64
21.14	1378.74	1125.95	18.33
21.34	1642.37	1214.59	26.05
21.54	1999.56	1316.48	34.16
21.74	2504.28	1598.37	40.36

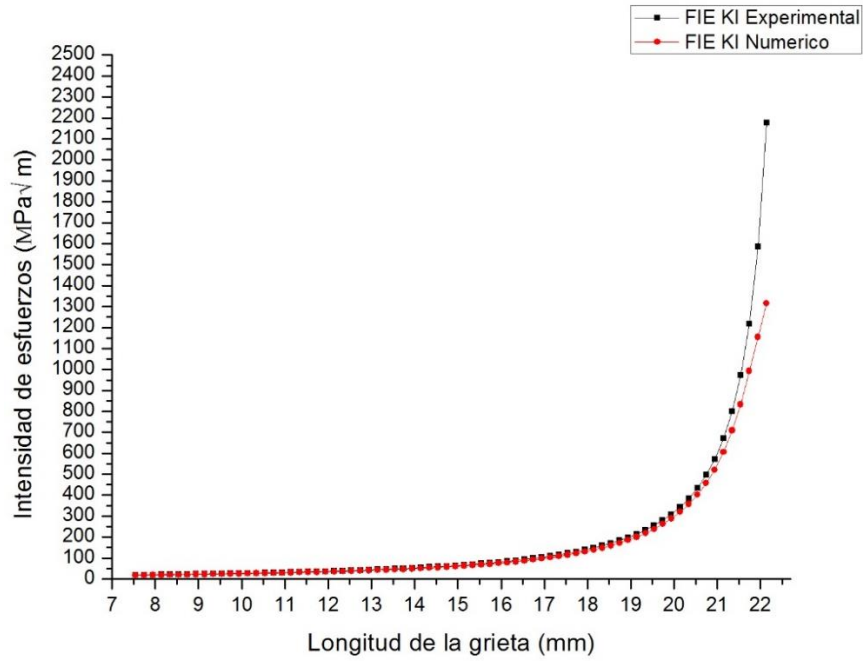


Figura 5.10 Factor de intensidad de esfuerzos (K_I) obtenido experimental y numéricamente, aplicando una carga de 3.82 kN

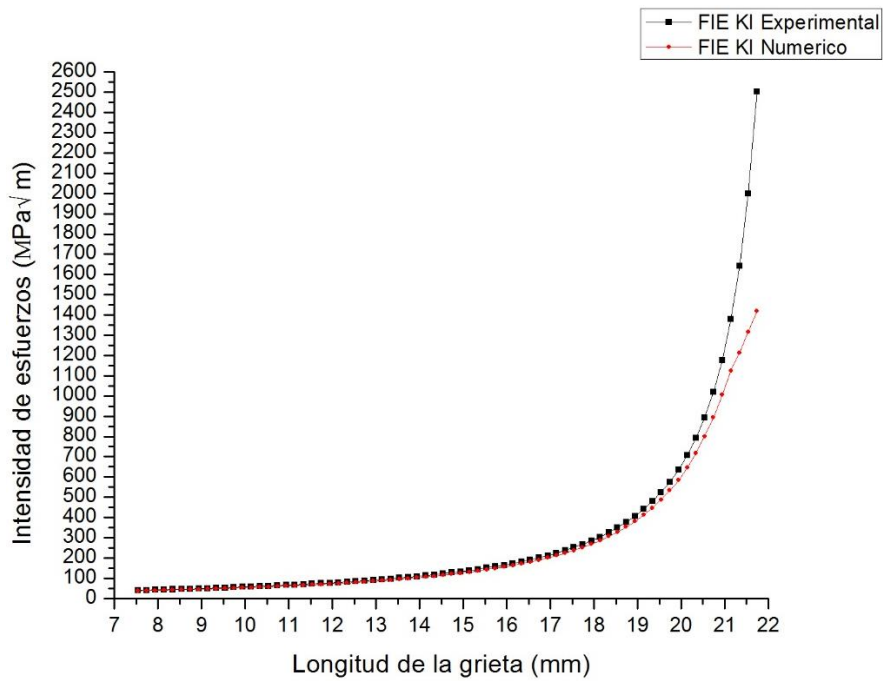


Figura 5.11 Factor de intensidad de esfuerzos (K_I) obtenido experimental y numéricamente, aplicando una carga de 7.85 kN

Como se observa en la Tabla 5.13 y Tabla 5.14 el porcentaje de diferencia entre el valor del FIE obtenido numérica y experimentalmente es de alrededor del 6 %. Sin embargo al alcanzar una longitud de la grieta de 19.5 mm se obtienen diferencias de hasta el 40 %, debido principalmente, a que como se mencionó anteriormente, la forma geométrica de los elementos finitos utilizados para discretizar los alrededores de la punta de la grieta y la probeta, se ve afectada al final de la propagación de la grieta, lo que origina que los desplazamientos nodales no sean precisos y por lo tanto el factor de intensidad de esfuerzos obtenido numéricamente sea impreciso. En la Figura 5.10 y 5.11 se observa gráficamente la diferencia entre el análisis experimental y numérico del factor de intensidad de esfuerzos al final de la propagación de la grieta en la probeta.

5.7.2 Dirección de propagación de las grietas

La dirección de propagación de las grietas obtenida utilizando el algoritmo computacional, fue comparada con la dirección de propagación que se obtuvo de las pruebas experimentales. En las Figuras 5.12, 5.13 y 5.14 se muestran las direcciones de propagación de las grietas obtenidas de las pruebas experimentales y la dirección de propagación obtenida del análisis numérico en los tres tipos de probetas que fueron analizadas.

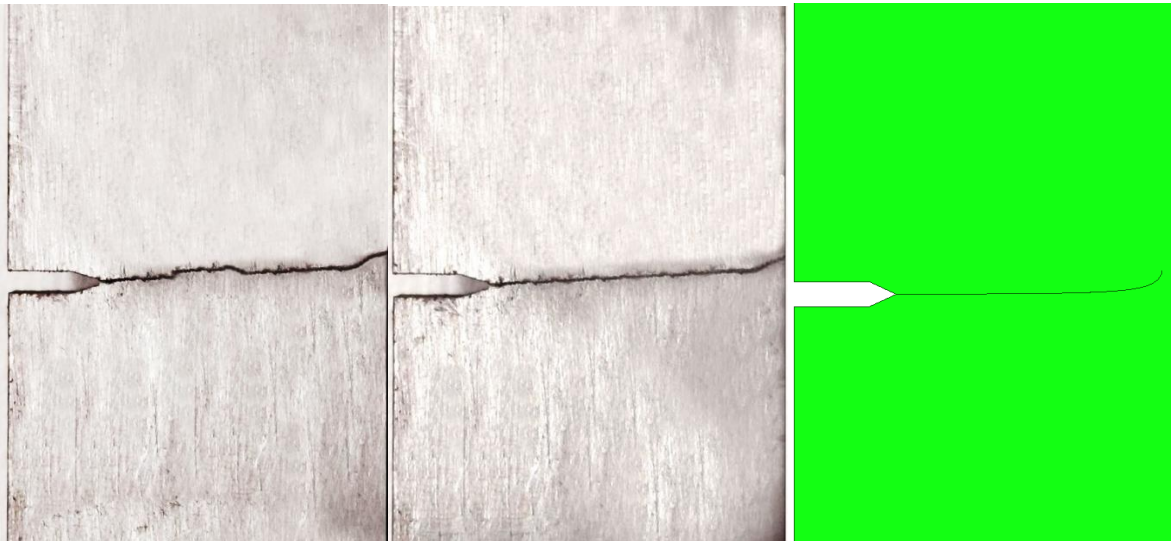


Figura 5.12 Dirección de propagación de la grieta, obtenida experimental y numéricamente en la probeta

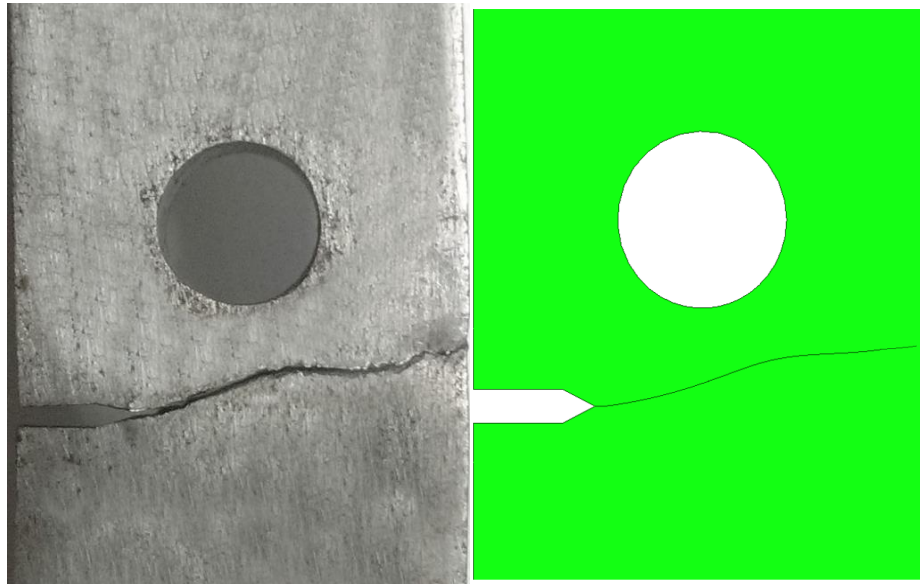


Figura 5.13 Dirección de propagación de la grieta, obtenida experimental y numéricamente en la probeta con un barreno.

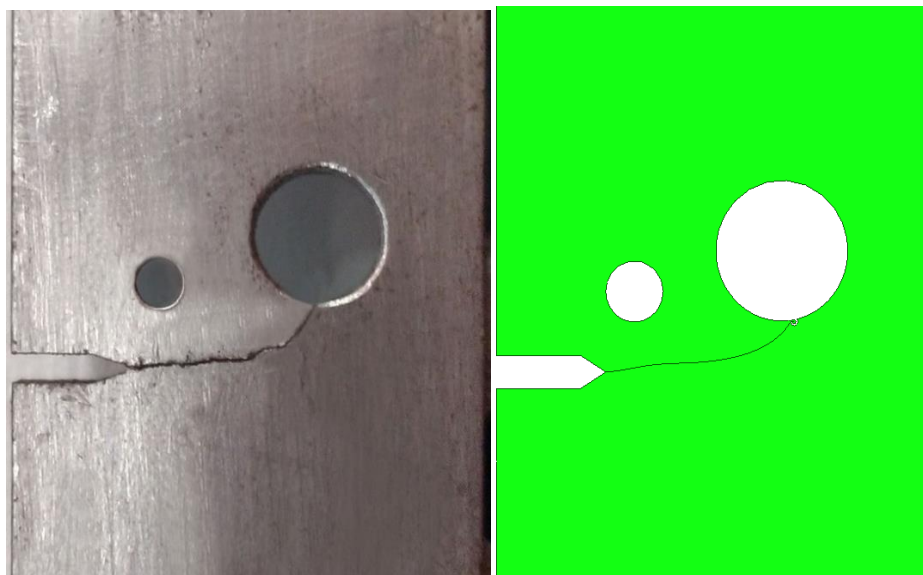


Figura 5.14 Dirección de propagación de la grieta, obtenida experimental y numéricamente en la probeta ESE (T) con dos barrenos

Como se puede observar en la Figura 5.12 la dirección de propagación de las grietas obtenida numéricamente es similar a la que se obtuvo de las pruebas experimentales, en la cual no se obtuvieron cambios significativos en la dirección de propagación, es decir se mantuvo perpendicular a la dirección de aplicación de las cargas en la probeta. Sin embargo, como se

puede observar de las imágenes obtenidas de las pruebas experimentales, los pequeños cambios de dirección que se observan son debido a las imperfecciones, porosidades y fronteras de grano que no fueron simuladas y representadas en el análisis numérico.

La dirección de propagación de la grieta en la probeta con un barreno, la cual se observa en la Figura 5.13 obtenida experimentalmente, difiere ligeramente de la obtenida numéricamente, debido a que el ángulo de propagación obtenido posteriormente de que la grieta pasa por debajo del barreno en el análisis numérico, mantiene una tendencia de propagación hacia arriba, a diferencia de la obtenida experimentalmente, en donde se tuvo un cambio más drástico de dirección de propagación pero hacia abajo, es decir la trayectoria de propagación de la grieta vuelve a ser perpendicular a la dirección de aplicación de las cargas.

Finalmente, en la Figura 5.14 se observa la dirección de propagación de la grieta obtenida experimentalmente y la obtenida del análisis numérico, para la probeta con dos barrenos. Como se observa, la dirección de propagación de la grieta obtenida numéricamente es similar a la experimental, Sin embargo, cuando la grieta, en la prueba experimental, se acerca al segundo barreno se observa que tiene un cambio en la dirección de propagación hacia arriba, probablemente debido a su intersección con una frontera de grano, lo que ocasiona que la grieta posteriormente tenga un cambio de dirección más drástico, para interceptar con el barreno. Este cambio de dirección, obtenido experimentalmente, no pudo ser representado en el análisis numérico con buena precisión, debido a como ya se comentó anteriormente, en la simulación no se consideraron las imperfecciones que el material pueda tener. A pesar de esto, la grieta en el análisis numérico también intercepta con el barreno, de igual manera que la obtenida experimentalmente.

Como se observó del análisis comparativo de la dirección de propagación de las grietas en las 3 probetas, las mayores diferencias entre el análisis numérico y experimental fueron ocasionadas debido a que en las simulaciones no se consideraron las imperfecciones, porosidades y límites de grano que afectan la dirección de propagación de las grietas. Sin embargo, en general, se obtuvo una buena correlación de la trayectoria de propagación de las grietas obtenida con las probetas de las pruebas experimentales.

5.7.3 Número de ciclos

El número de ciclos de aplicación de las cargas que fue obtenido utilizando el algoritmo computacional, fue comparado con el número de ciclos promedio que se obtuvo de las pruebas experimentales para las probetas ESE (T) sin barrenos. En las Tablas 5.15 y 5.16 se muestran el número de ciclos totales obtenidos de las pruebas experimentales y del análisis numérico en las probetas sin barrenos aplicando las cargas de 3.82 kN y 7.85 kN

Tabla 5.15 Comparación del número de ciclos obtenidos experimental y numéricamente en la probeta sin barrenos utilizando una carga de 3.82 kN

Longitud de la grieta mm	Análisis Experimental			Análisis Numérico
	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3	
7.62				
8.12	15427	7900	11516	5856
8.62	16895	17424	18666	10863
9.12	17850	25324	24859	15121
9.62	18829	25886	29168	18771
10.12	19739	26333	31859	21846
10.62	20066	27071	34011	24463
11.12	20384	27667	35245	26654
11.62	20680	27911	36277	28502
12.12	20879	28107	37202	30033
12.62	21080	28412	37695	31314
13.12	21228	29128	38115	32358
13.62	21384	29361	38505	33220
14.12	21499	29693	38767	33913
14.62	21579	29845	38967	34473
15.12	21692	30067	39126	34913
15.62	21745	30237	39254	35263
16.12	21832	30454	39358	35531
16.62	21870	30540	39425	35738
17.12	21917	30628	39458	35891
17.62	21972	30727	39535	36005
18.12	22052	30805	39595	36085
18.62	22102	30916	39620	36142
19.12	22141	30998	39654	36179
19.62	22181	31064	39674	36203
20.12	22231	31112	39690	36218
20.62	22278	31159	39701	36226
21.12	22321	31206	39703	36230
21.62	22355	31240	39705	36232
22.12	22372	31296	39706	36233
Número de ciclos totales Promedio	31124			36233

Como se observa de la Tabla 5.15 el número de ciclos totales promedio de las probetas analizadas experimentalmente fue de 31124, mientras que el número de ciclos determinados

del análisis numérico fue de 36233 ciclos, obteniéndose una diferencia entre el análisis experimental y numérico del 14 %.

Tabla 5.16 Comparación del número de ciclos obtenidos experimental y numéricamente en la probeta sin barrenos utilizando cargas de 7.85 kN

Longitud de la grieta mm	Análisis Experimental				Análisis Numérico
	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3	Probeta 4	
7.62					
8.12	1220	458	1270	1464	1409
8.62	2127	2016	1867	2895	2011
9.12	3175	3254	2929	4036	2767
9.62	3834	4425	3532	4566	3558
10.12	4748	5237	3850	5188	4141
10.62	4991	5735	4552	5779	4636
11.12	5235	6366	4889	6311	5051
11.62	5354	6857	5252	6619	5402
12.12	5529	7120	5459	7125	5692
12.62	5705	7407	5459	7366	5934
13.12	5843	7549	5855	7566	6132
13.62	6019	7655	6026	7683	6294
14.12	6204	7780	6145	7846	6424
14.62	6334	7872	6280	7978	6530
15.12	6463	7915	6417	8096	6614
15.62	6599	7975	6529	8210	6680
16.12	6832	8023	6600	8293	6731
16.62	7007	8105	6685	8361	6770
17.12	7095	8193	6757	8450	6799
17.62	7138	8229	6789	8511	6821
18.12	7160	8254	6862	8565	6836
18.62	7171	8299	6958	8618	6847
19.12	7177	8343	7014	8672	6854
19.62	7179	8391	7097	8738	6858

20.12	7181	8442	7139	8769	6861
20.62	7181	8477	7180	8804	6863
21.12	7182	8506	7184	8842	6865
Número de ciclos totales Promedio	7924				6865

En la Tabla 5.16 se observa el número de ciclos totales promedio de las probetas analizadas experimentalmente utilizando cargas de 7.85 kN, el cual fue de 7924, mientras que el número de ciclos determinados del análisis numérico fue de 6865 ciclos, obteniéndose una diferencia en el número de ciclos totales entre el análisis experimental y numérico del 12 %.

El número de ciclos de aplicación de las cargas que fue obtenido utilizando el algoritmo computacional, fue comparado con el número de ciclos que se obtuvo de la prueba experimental para la probeta con un barreno. En la Tabla 5.17 se muestran el número de ciclos totales obtenidos de las pruebas experimentales y del análisis numérico.

Tabla 5.17 Comparación del número de ciclos obtenidos experimental y numéricamente en la probeta con un barreno central utilizando una carga de 3.82 kN

Longitud de la grieta mm	Análisis Experimental	Análisis Numérico
6.62		
7.12	2512	2712
7.62	4783	5025
8.12	6812	9244
8.62	12834	12824
9.12	18287	15907
9.62	21463	18519
10.12	23802	20784
10.62	26718	22722
11.12	28515	24409
11.62	29992	25863
12.12	31337	27136
12.62	32637	28237
13.12	33649	29203
13.62	34387	30043
14.12	34739	30783
14.62	35410	31424
15.12	35747	31977
15.62	35967	32444
16.12	36257	32834
16.62	36398	33144
17.12	36637	33388
17.62	36733	33572
18.12	36751	33710
18.62	36764	33736

19.12	36771	33749
19.62	36791	33760
20.12	36842	33767
20.62	36861	33778
21.12	36870	33786
Número de ciclos totales	36870	33786

En la Tabla 5.17 se observa el número de ciclos totales obtenidos experimentalmente, utilizando cargas de 3.82 kN, el cual fue de 36870, mientras que el número de ciclos determinados del análisis numérico fue de 33786 ciclos, obteniéndose una diferencia en el número de ciclos totales entre el análisis experimental y numérico del 7 %.

Finalmente, el número de ciclos de aplicación de las cargas que fue obtenido utilizando el algoritmo computacional, fue comparado con el número de ciclos que se obtuvieron de la prueba experimental para la probeta con dos barrenos. En la Tabla 5.18 se muestra el número de ciclos totales obtenidos de las pruebas experimentales y del análisis numérico

Tabla 5.18 Comparación del número de ciclos obtenidos experimental y numéricamente en la probeta con dos barrenos centrales utilizando una carga de 7.85 kN

Longitud de la grieta mm	Análisis Experimental	Análisis Numérico
6.62		
7.12	1312	1051
7.62	2201	1998
8.12	2921	2839
8.62	3525	3573
9.12	4025	4178
9.62	4401	4670
10.12	4748	5056
10.62	4991	5363
11.12	5235	5601
11.62	5354	5790
12.12	5529	5936
12.62	5705	6050
13.12	5843	6137
13.62	6019	6204
14.12	6204	6253
14.62	6334	6290
15.12	6463	6315
15.62	6599	6331
16.12	6832	6339
16.62	6981	6341

Número de ciclos totales	6981	6341
---------------------------------	-------------	-------------

Como se observa en la Tabla 5.18 el número de ciclos totales que se obtuvo experimentalmente fue de 6981, mientras que el número de ciclos obtenidos del análisis numérico fue de 6341 ciclos, obteniéndose con esto una diferencia en el número de ciclos totales entre el análisis experimental y numérico del 11 %.

5.8 Resultados de la estimación de la vida remanente y de la longitud crítica de las grietas en la MRP

En la Tabla 5.19 se muestran los resultados obtenidos del análisis numérico de la vida remanente de la MRP y de la longitud crítica de las grietas en la brida mayor de la MRP, aplicando las cargas de frenado e impacto secuencialmente en el modelo numérico de la probeta. Los resultados del análisis numérico de la tasa de crecimiento de las grietas por cada aplicación de las cargas de impacto y frenado se muestran en detalle en las tablas que se encuentra en el anexo 1.3.

Tabla 5.19 Resultados del análisis numérico de la aplicación de las cargas de impacto y frenado en la probeta.

Línea	Número de cargas de frenado por recorrido	Número de cargas de impacto	Longitud crítica de la grieta	Número de veces de aplicación de las cargas	Kilómetros	Años
1	56	1	16.6 mm	323532	106745	0.74
3	71	1	16.6 mm	333072	109219	0.75
B	71	1	16.6 mm	333072	109728	0.76

En la Tabla 5.19 se observa que para la línea 1 del metro se aplicaron las cargas de impacto y frenado un total de 323532 veces para alcanzar una longitud crítica de la grieta crítica de 16.6 mm, es decir cuando el FIE igualo al valor de la tenacidad a la fractura del material (93 MPa \sqrt{m}). Por otro lado, para las líneas 3 y B se necesitaron un total de 333072 veces de aplicación de las cargas, para alcanzar la longitud crítica de la grieta de 16.6 mm. También

se observa que la vida remanente de la MRP en las líneas 1, 3 y B expresada en kilómetros es de aproximadamente 106745 km, 109219 km y 109728 km, respectivamente.

Con base en los resultados obtenidos de la simulación numérica, que son mostrados en el anexo 1.3 se observa que las cargas de frenado, por cada recorrido de la línea, son las cargas que incrementan la longitud de la grieta en mayor magnitud en comparación con la carga de impacto, Sin embargo, la carga de impacto al ser de mayor magnitud, que la producida por el frenado, afecta en mayor proporción la vida remanente del componente, debido a que aplicando esta carga se alcanza la tenacidad a la fractura del material del material A216 con una longitud de grieta de crítica de 16.6 mm.

5.9 Resultados de la estimación de la vida total de la MRP

Con base en la ecuación (138) que se presenta en el Capítulo 4, sección 4.17 y a los resultados obtenidos de la vida útil y la vida remanente de la MRP en las líneas 1,3 y B, se presenta en la Tabla 5.20 los resultados obtenidos para la vida total de la MRP.

Tabla 5.20 Resultados del análisis de la vida total de la MRP.

Línea	Vida Útil (km)	Vida Remanente (km)	Vida Total (km)	Vida Total (años)
1	949513	106745	1056258	7.33
3	859992	109219	969211	6.7
B	1195952	109728	1305680	9.06

De la Tabla 5.20 se puede observar que las MRP de los vagones de los trenes que circulan en la línea 1 tienen una vida total de 1056258 km, mientras que las MRP que circulan en las líneas 3 y B es de aproximadamente 969211 km y 1305680 km respectivamente.

5.10 Determinación del criterio de retiro de la pieza.

Con base a los resultados obtenidos se determinó que el tamaño de grieta mínimo a detectar en donde se considere un crecimiento de grieta estable no debe ser mayor a 16.6 mm, después de esta longitud de la grieta, su crecimiento será rápido e inestable. Esta longitud de la grieta es alcanzada después de que los vagones de los trenes del STC metro recorren un promedio de 106745 km, en la línea 1 109219 km, en la línea 3 y 109728 km en la línea B.

Así mismo se determinó que la vida total de la MRP en años, con base a que el tren recorre mensualmente un promedio de 12000 km, es de 7.33 años para la línea 1, 6.7 años para la línea 3 y 9.06 años para la línea B.

CONCLUSIONES

Las conclusiones de esta investigación son las siguientes:

- En esta investigación se desarrolló una metodología y algoritmo numérico para el análisis del factor de intensidad de esfuerzos y de la dirección de propagación de las grietas, en función de la longitud de las grietas y del número de veces de aplicación de las cargas.
- Con el tamaño de la zona plástica estimado durante el análisis de la propagación de la grieta, considerando el criterio de $r_p = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2$, se determinó que el análisis de la fractura sería lineal elástico, por lo cual para este análisis se utilizó el factor de intensidad de esfuerzos.
- Con la finalidad de validar los resultados obtenidos del programa computacional desarrollado para la predicción de la dirección de propagación de las grietas, estos se compararon con pruebas experimentales. La dirección de propagación de las grietas obtenida numéricamente en las probetas tuvo porcentajes de diferencia promedio de hasta el 10% en comparación con el análisis experimental. Esto fue debido a que en el análisis numérico se consideró un material homogéneo, isotrópico y continuo, es decir no fueron consideradas las imperfecciones, porosidades y fronteras de los granos las cuales afectan la dirección de propagación de las grietas.
- De la comparación de los resultados obtenidos experimental y numéricamente se observó una diferencia promedio del 6% en el factor de intensidad de esfuerzos y una diferencia de hasta el 14 % en el número de veces de aplicación de las cargas, debido principalmente a los errores propios de los métodos numéricos.

- Considerando el criterio de fractura que cuando $FIE \geq K_{IC}$, y los resultados obtenidos numéricamente aplicando las cargas de operación de impacto y frenado de la MRP de los vagones de los trenes del STC Metro que circulan por la línea 1, se observó que hasta el número de ciclos de 323532 el comportamiento de la grieta es estable, debido a que el FIE en este número de ciclos fue de $92.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, el cual se aproxima al valor de la tenacidad a la fractura del material de $93 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, a partir de este valor la fractura será inestable. También se obtuvo el valor de la longitud crítica de la grieta de 16.6 mm, siendo la vida remanente de esta línea de 106745 km (0.74 años).
- Considerando el criterio de fractura que cuando $FIE \geq K_{IC}$, y los resultados obtenidos numéricamente aplicando las cargas de operación de impacto y frenado de la MRP de los vagones de los trenes del STC Metro que circulan por la línea 3, se observó que hasta el número de ciclos de 333072 el comportamiento de la grieta es estable, debido a que el FIE en este número de ciclos fue de $92.72 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, el cual se aproxima al valor de la tenacidad a la fractura de $93 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, a partir de este valor la fractura será inestable. Se obtuvo un valor de la longitud crítica de la grieta de 16.6 mm, siendo la vida remanente de esta línea de 109219 km (0.75 años).
- Considerando el criterio de fractura que cuando $FIE \geq K_{IC}$ y de los resultados obtenidos numéricamente aplicando las cargas de operación de impacto y frenado de la MRP de los vagones de los trenes del STC Metro que circulan por la línea 3, se observó que hasta el número de ciclos de 333072 el comportamiento de la grieta es estable, debido a que el FIE en este número de ciclos fue de $92.72 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, el cual se aproxima al valor de la tenacidad a la fractura de $93 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, a partir de este valor la fractura será inestable. Se obtuvo un valor de la longitud crítica de la grieta de 16.6 mm, siendo la vida remanente de esta línea de 109728 km (0.76 años).

- Con base en las condiciones de operación y cargas consideradas en este trabajo se recomienda que el STC Metro retire de servicio las MRP de los vagones de los trenes cuando se detecte una grieta de longitud igual o mayor a 16.6 mm, después de que los vagones de los trenes recorren una distancia de 106745 km (0.74 años), 106745 km (0.74 años) y 109728 km (0.76 años), en las líneas 1, 3 y B respectivamente.
- Sumando la vida útil de la MRP obtenida por Tlapalama Fuertes Y.T y la vida remanente obtenida del análisis numérico en este trabajo, se determinó que la vida total de las MRP que circulan en la línea 1 es de 1056278 km (7.33 años), de la línea 3 de 969211 km (6.7 años) y de la línea B de 1305680 km (9.06 años).

TRABAJOS FUTUROS

Los trabajos futuros sugeridos en esta investigación son:

- Optimizar el algoritmo computacional, reduciendo el número de funciones y códigos, para reducir el tiempo de procesamiento para la obtención de resultados
- Implementar numéricamente el análisis del factor de intensidad de esfuerzos y la dirección de propagación de las grietas en tres dimensiones.
- Validar el algoritmo desarrollado con algún otro componente fracturado, para corroborar que puede ser utilizado para el análisis de la propagación de las grietas en cualquier componente mecánico.
- Confirmar la relación de Poisson del material A216 WCB grado 600 con el cual este fabricado la maza de rueda portadora.
- Incorporar al modelo numérico de la probeta, los efectos de las porosidades, intersticios y los granos, para el análisis de la propagación de las grietas.
- Considerar en el análisis numérico los efectos de la tasa de esfuerzos y de las cargas a compresión.
- Implementar otros modelos matemáticos para el análisis del crecimiento de las grietas, como lo son NASGROW y FORMAN

BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics and Fundamentals and Applications*, CRC press 2 ed., 1995.
- [2] R. P. Wei, *Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry*, Cambridge University Press, 2010.
- [3] K. J. Bathe., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- [4] J. Balas y J. Sladek, «Stress Analysis by Boundary Element Methods,» *Elsevier*, 1989.
- [5] I. I. o. C. S. Symposium, *Computer Science - Theory and Applications*, Weil, 2017.
- [6] E. K. A. A. V. Blum, *Computer Science the hardware, software and heart of it*, Springer.
- [7] T. R. Chandrupatla y A. D. Belegundu, *Introduction to Finite Elements in Engineering*, 2012.
- [8] F. J. Resendiz Nuñez, *Análisis dinámico modal aplicando el método del elemento finito utilizando mallas híbridas para determinar el tamaño crítico de las grietas en la brida de la maza de rueda portadora de los vagones del metro.*, Tesis de Maestría, 2012.
- [9] Y. T. Tlapalama Fuertes, «Análisis de la iniciación de grietas por fatiga en la maza de rueda portadora de los vagones del sistema de transporte colectivo metro utilizando métodos numéricos y experimentales,» Mexico, 2014.
- [10] A. F. Liu, *Mechanics and mechanisms of fracture: An introduction*, ASM International, 2005.
- [11] L. Wigglesworth, «Stress distribution in a notched plate,» 1957.

- [12] S. K. Maiti, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, Cambridge University Press, 2015.
- [13] F. Erdogan y C. Sih, «On extension in Plates Under Plane Loading,» *Journal of basic Engineering, Transactions of ASME*, vol. 85, pp. 519-27, 1963.
- [14] G. Sih, «Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems,» *In Mechanics of fracture*, vol. 1, 1973.
- [15] G. Green, «an Essay on the application on mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism,» 1828.
- [16] I. Fredholm, «Sur une Clasee d'Equations Fonctionelles,» *Acta Mathematica*, vol. 27, pp. 365-390, 1903.
- [17] G. Symm, «Integral Equation Methods in Potential Theory II,» *Proceedings fo the Royal Society*, vol. 275, pp. 33-46, 1963.
- [18] M. Jaswon, «Integral Equation Methods in Potencial Theory I,» *Proceedings of the Royal Society*, vol. 275, pp. 22-32, 1963.
- [19] T. Cruse, «Surface Cracks: Physical Problems and Computational Solutions,» *American Society of Mechanical Engineers*, pp. 153-170, 1972.
- [20] J. Lachat, «Further Development of the Boundary Integral Techniques for Elastoplastics.,» vol. Phd. Thesis, 1975.
- [21] C. Tan y R. Fender, «Stress Intensity Factors for Semi-Elliptical Surface,» 1980.
- [22] M. Tanaka, «Regularization tecniques applied to boundary element methods,» *Applied Mechanics*, pp. 457-499, 1994.
- [23] D. Beskos, «Boundary element methods in dynamic analysis,» *Applied Mechanics*, pp. 149-196, 1997.

- [24] W. Ritz, Über eine Neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Matematischen Physik., *J. Reine Angew. Math*, 1909.
- [25] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1943.
- [26] R. Clough, The finite element method in plate stress analysis, *Proc. American Society of Civil Engineers*, 1960.
- [27] R. J. Melosh, «Structural analysis of solids,» *J. ASCE Struct.*, 1963.
- [28] M. Turner, «Further developments and applications of the stiffness method,» *Matrix Methods of Structural Analysis*, pp. 203-266, 1964.
- [29] J. Argyris, «Triangular elements with linearly varying strain for the Matrix Displacement Method,» *J. Royal Aero. Soc.*, p. 711–713, 1965.
- [30] J. Oden, Some aspects of recent contributions to the mathematical theory of finite elements, *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design.*, 1972.
- [31] Y. Zienkiewicz y O. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, Mc Graw-Hill, 1967.
- [32] M. Kaplan, « Crack propagation and the fracture of concrete,» *J. ACI*, vol. 60, 1961.
- [33] F. MacClintock y J. Walsh, «Friction on Griffith cracks in rocks under pressure,» *4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.* 2, 1962.
- [34] D. Ngo., « Finite element analysis of reinforced concrete beams,» *Journal of the American Concrete Institute*, 1967.
- [35] E. Byskov, «The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements,» *Int. J. of fracture mechanics*, vol. 6, 1970.

- [36] D. Tracey, «Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors,» *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 3, 1971.
- [37] K. A. Shah R.C., « Stress intensity factors for an elliptical,» *International Journal of Fracture*, 1972.
- [38] P. Tong y T. Pian, «A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity,» *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 297-308, 1973.
- [39] T. K. Hellen, «On the method of virtual crack extension,» *International Journal of Numerical Methods*, vol. 9, 1975.
- [40] R. D. Henshell y K. Shaw, «Crack tip elements are unnecessary,» *Int. J. Num. Engrg*, vol. 9, 1976.
- [41] R. Barsoum, «On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics,» *Int. J. Num. Meth. Engrg*, vol. 10, 1977.
- [42] K. M. Rybicki E.F., « A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral,» *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 9, 1977.
- [43] T. Pian, « A Historical Note About ‘Hybrid Elements’,» *Int J for Num. Meth. In Engrg.*, vol. 12, 1978.
- [44] J. A. H.J Petroski, «Computation of the weight function from a stress intensity factor,» 1978.
- [45] J. Owens y A. Fawkes, *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*, Pineridge Press, 1983.
- [46] T. Belytschko y B. T., «Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.,» *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, 1999.

- [47] J. Melenk y I. Babuska, «The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, 1996.
- [48] E. Hojfeldt y C. Ostervig, «Fatigue crack propagation in shafts with shoulder fillets.,» *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 25, pp. 421-427, 1986.
- [49] V. Saouma y I. Zatz, «An automated finite element procedure for fatigue crack propagation analyses,» *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 20, n° 2, pp. 321-333, 1984.
- [50] P. Wawzynek y A. Ingraffea, «An interactive approach to local remeshing around a propagating crack,» *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 5, pp. 84-96, 1989.
- [51] D. Stanenkovic, «Determination of Fracture Mechanics Parameters using FEM and J-Integral Approach,» *Conference on Applied and Theoretical Mechanics*, 2006.
- [52] Q. Han, Y. Wang, Y. Yin y D. Wang, «Determination of stress intensity factor for mode I fatigue crack based on finite element analysis,» *Engineering Fracture Mechanics*, 2016.
- [53] B. Liu, J. Cai y W. YD, «Finite Element Analysis on the Stress Intensity Factor in SENT Specimen of Clam Steel,» *4th International Conference on Machinery, Materials and Computing Technology (ICMMCT 2016)*, 2016.
- [54] A. Wawrzetnek y A. Ingraffea, «Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems,» *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, n° 2, pp. 321-334, 1996.
- [55] M. Berkovic, «Determination of stress intensity factors using finite element method,» *Introduction to Fracture Mechanics and Fracture-Safe Design*, pp. 107-124, 1980.
- [56] L. Malíková y V. Veselý, «Crack propagation direction in a mixed mode I geometry estimated via multi-parameter fracture criteria,» *International Journal of Fatigue*, 2016.

- [57] P. Bouchard, F. Bay y C. Y., «Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria,» *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2003.
- [58] G. Fajdiga y B. Zafošnik, «Determining a kink angle of a crack in mixed Determining a kink angle of a crack in mixed rate, SED and MTS criteria,» *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology*, vol. 2, 2015.
- [59] J. Alegre y I. Cuesta, «Some aspects about the crack growth FEM simulations under mixed-mode loading,» *International Journal of Fatigue*, nº 32, pp. 1090-1095, 2010.
- [60] Zafošnik, R. Z. B, M. Ulbin y J. Flašker, «Evaluation of stress intensity factors using finite elements,» 2000.
- [61] H. Richard, M. S. Fulland y G. Kullmer, «Fracture in a rubber-sprung railway wheel,» *Engineering Failure Analysis*, nº 12, p. 986–999, 2005.
- [62] D. P. M. d. C. Peixoto, «Modelling of the fracture of a railway wheel,» *Procedia Structural Integrity*, nº 2, pp. 1904-1911, 2016.
- [63] L. Náhlík, P. Pokorný, M. Ševčík¹, R. Fajkoš y P. Matušek, «Fatigue lifetime estimation of railway axles,» *Engineering failure analysis*, 2016.
- [64] M. Blažić, S. Maksimović, Z. Petrović, I. Vasović y D. Turnić, «Determination of Fatigue Crack Growth Trajectory and Residual Life under Mixed Modes,» *Journal of Mechanical Engineering*, nº 60, pp. 250-254, 2014.
- [65] H.-K. Jun, J.-C. Kim, S.-J. Kwon, D.-H. Lee y J.-W. Seo, «Fatigue crack analysis in a bolster of a metro train,» *Engineering Failure Analysis*, 2017.
- [66] H. Dirik y T. Yalcinkaya, «Fatigue Crack Growth Under Variable Amplitude Loading Through XFEM,» *Procedia Estructural Integrity*, nº 2, pp. 3073-3080, 2016.
- [67] K. Nasri y M. Zenasni, «Fatigue crack growth simulation in coated materials using XFEM,» *Comptes Rendus Mecanique*, nº 345, pp. 271-280, 2017.

- [68] G. Yi, T. Yu, T. Q. Bui, C. Maa y S. Hirose, «SIFs evaluation of sharp V-notched fracture by XFEM and strain energy approach,» *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017.
- [69] R. Corona Cid, «"DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS CRÍTICO DURANTE LA PROPAGACIÓN DE LAS GRIETAS PARA OBTENER UN CRITERIO DE RETIRO DE LA PIEZA DE MAZA DE RUEDA PORTADORA DE LOS VAGONES DEL STC METRO DE LA CIUDAD DE MÉXICO" Tesis en proceso,» Mexico, 2017.
- [70] J. Barber, *Elasticity*, Springer Netherlands, 2004.
- [71] S. Timoshenko, *Theory of elasticity*, Tokio, Japon: Mc-Graw-Hill, 1951.
- [72] E. Sechler, *Elasticity in Engineering*, Dover Publications, 1952, pp. 150-210.
- [73] N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Pearson Prentice Hall, 2007.
- [74] E. Gdoutos, «Fracture Mechanics an Introduction,» Springe, 2005, pp. 195-238.
- [75] F. Resendiz y R. Aguilar, «Formulacion matematica del factor de intensidad de esfuerzo para las cardas de modo I,» *Congreso Nacional de ingenieria electromecanica y de sistemas CNIES.*, 2010.
- [76] N. Perez, *Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [77] P. Gould, *Introduction to linear elasticity*, Springer-Verlag New York, 2013.
- [78] C. J. Fletcher, «Computational Galerkin Methods,» Springer, 1984, pp. 86-154.
- [79] J. Whiteley, *Finite Element Methods*, Springer, 2017.
- [80] ASTM, *Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates*, 2015.
- [81] P. V.A., «Tesis en proceso,» 2017.

- [82] H. Hibbitt., «Some properties of singular isoparametric elements,» *International Journal Numerical Methods*, pp. 180-184, 1977.
- [83] V. A. Perez Cervantes, Analisis de la propagacion de las grietas por fatiga en la maza de la rueda portadora del STC Metro aplicando la regla de Miner y la ley de Paris., Mexico, 2017.
- [84] N. Perez, Fracture Mechanics, Springer.
- [85] G. R. Irwin, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, pp. 361-364, 1957.
- [86] H. Richard, B. Schramm y S. N.-H, «Cracks on Mixed Mode loading – Theories, experiments, simulations,» *International Journal of Fatigue*, 2013.
- [87] K. Tanaka, «Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis,» *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 493-507, 1974.
- [88] R. W. Hertzberg, Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials, 4 ed., John Wiley and Sons INC., 1996.
- [89] M. Jansen y J. Zuidema, Fracture Mechanics, Spon Press, 2004.
- [90] J. Rice, Mathematical Analysis in the Mechanics, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [91] M. Kuna, Finite Elements in Fracture Mechanics, Springer, 2010.
- [92] R. Razvan, «Some remarks on the history of fracture mechanics,» *PROCEEDINGS OF THE 3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED MATHEMATICS, SIMULATION, MODELLING* , 2009.
- [93] R. Taylor y O. Zienkiewicz, El método de los Elementos Finitos, Mc Graw-Hill, 1994.
- [94] G. Guinea, J. Planas y M. Elices, «KI evaluation by the displacement extrapolation technique,» *Engineering fracture mechanics*, vol. 66, pp. 243-255, 2000.

- [95] S. Biner, «Fatigue crack growth studies under mixed-mode loading,» *International Journal of Fatigue*, 2001.
- [96] E. Denner y W. Venturini, «Multiple random crack propagation using a boundary element formulation,» *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 1077-1090, 2011.
- [97] X. Yan, «A boundary element modeling of fatigue crack growth in a plane elastic plate,» *Elsevier Mechanics Research Communications*, nº 33, 2005.
- [98] P. Silvester, «Construction of triangular finite element universal matrices,» *International Journal for numerical Methods in Engineering*, 1978.
- [99] R. S. Barsoum, «Triangular quarter point elements as elastic and perfectly elastic crack tip element,» *International Journal Numerical methods*, pp. 85-98, 1976.
- [100] L. Banks-Sills y Y. Bortman, «Quarter Point quadrilateral element in linear elastic fracture mechanics,» *International Journal of Fracture*, vol. 25, pp. 169-180, 1984.
- [101] R. Reed y S. J. H., the economic effects of fracture in the united states, NBS Publications.

ANEXOS

1.1 Código del programa desarrollado en TCL/TK que fue implementado en el programa de análisis por elemento finito HYPERMESH 13.0 para el análisis de la propagación de las grietas.

A continuación, se muestran secciones del código desarrollado para el análisis de la propagación de las grietas, el código total está conformado por más de 2000 líneas de comandos.

```
#####MALLADO DE LA PROBETA#####
*createlist nodes 1 $::var_home::NID_INI_1 $::var_home::NID2 $::var_home::NID_PUNTA
$::var_home::NID3 $::var_home::NID_INI_2
*linecreatefromnodes 1 0 150 5 179
*createmark lines 1 -1
set LINEID_MUESCA [hm_getmark lines 1];
*createmark surfaces 1 $::var_home::SUFID_INICIAL
*createmark lines 2 $LINEID_MUESCA
*createvector 1 0 0 1
*surfacemarksplitwithlines 1 2 1 9 0
*normalsoff
*createmark surfaces 1 -1
set SUFID_MUESCA [hm_getmark surfaces 1];

if {$::var_home::drop_text == "no" || $::var_home::drop_text == "value"} {
###set SUFID_INICIAL $SUFID_CIRCULAR
    if {$SUFID_MUESCA == 4} {
        set SUFID_MUESCA 4;
    } elseif {$SUFID_MUESCA != 4} {
        set SUFID_MUESCA [expr $SUFID_MUESCA-1];
    }
} elseif {$::var_home::drop_text == "1 barreno"} {
###set SUFID_INICIAL $SUFID_CIRCULAR
    if {$SUFID_MUESCA == 4} {
        set SUFID_MUESCA 1;
    } elseif {$SUFID_MUESCA != 4} {
        set SUFID_MUESCA [expr $SUFID_MUESCA-1];
    }
} elseif {$::var_home::drop_text == "2 barrenos"} {
###set SUFID_INICIAL $SUFID_CIRCULAR
    if {$SUFID_MUESCA == 4} {
        set SUFID_MUESCA 4;
    } elseif {$SUFID_MUESCA != 4} {
        set SUFID_MUESCA [expr $SUFID_MUESCA-1];
    }
}
#####
set SUFID_INICIAL $SUFID_CIRCULAR
# if {$SUFID_MUESCA == 4} {
# set SUFID_MUESCA 4;
```

```

# } elseif {$SUFID_MUESCA != 4} {
# set SUFID_MUESCA [expr $SUFID_MUESCA-1];
# }
*createmark surfaces 1 $SUFID_MUESCA
*deletemark surfaces 1
#####MALLADO DE LA PUNTA DE LA GRIETA#####
*createlist nodes 1 $::var_home::NID_PUNTA;
*createvector 1 0 0 1;
*createcirclefromcenterradius 1 1 0.2 360 0;
*createmark lines 1 -1;
set LINES_ID_INICIAL [hm_getmark lines 1];
set EDGES_ID_INICIAL [hm_getmark egdes 1];

if {$::var_home::drop_text == "no" || $::var_home::drop_text == "value"} {
    if {$::var_home::SUFID_INICIAL == 1} {
        set ::var_home::SUFID_INICIAL 1;
    } elseif {$::var_home::SUFID_INICIAL != 1} {
        set::var_home::SUFID_INICIAL[expr
$::var_home::SUFID_INICIAL+1];
    }
} elseif {$::var_home::drop_text == "1 barreno"} {
    if {$::var_home::SUFID_INICIAL == 1} {
        set ::var_home::SUFID_INICIAL 4;
    } elseif {$::var_home::SUFID_INICIAL != 1} {
        set::var_home::SUFID_INICIAL[expr$::var_home::SUFID_INICIAL+1];
    }
} elseif {$::var_home::drop_text == "2 barrenos"} {
    if {$::var_home::SUFID_INICIAL == 1} {
        set ::var_home::SUFID_INICIAL 1;
    } elseif {$::var_home::SUFID_INICIAL != 1} {
        set::var_home::SUFID_INICIAL[expr
$::var_home::SUFID_INICIAL+1];
    }
}

# if {$::var_home::SUFID_INICIAL == 1} {
# set ::var_home::SUFID_INICIAL 1;
# } elseif {$::var_home::SUFID_INICIAL != 1} {
# set ::var_home::SUFID_INICIAL [expr $::var_home::SUFID_INICIAL+1];
# }
*createmark surfaces 1 $::var_home::SUFID_INICIAL;
*createmark lines 2 $LINES_ID_INICIAL;
*createvector 1 0 0 1;
*surfacemarksplitwithlines 1 2 1 9 0;
#*normalsoff0.3
*createmark surfaces 1 -1;
set SUFID_CIRCULAR [hm_getmark surfaces 1];
*createmark lines 1 -1;
# set LINES_ID_CORTE [hm_getmark lines 1];
# *createmark edges 1 -1;
# set EDGES_CORTE [hm_getmark edges 1];
*createlist nodes 1 $::var_home::NID_PUNTA;
*createvector 1 0 0 1;
*createcirclefromcenterradius 1 1 0.1 360 0;
*createmark lines 1 -1;
set LINES_ID_INICIAL_2 [hm_getmark lines 1];
set EDGES_ID_INICIAL_2 [hm_getmark egdes 1];

```

```
###*edgesuppress(27)
###*edgesuppress(38)
*createmark surfaces 1 $SUFID_CIRCULAR;
*createmark lines 2 $LINES_ID_INICIAL_2 ;
*createvector 1 0 0 1;
*surfacemarksplitwithlines 1 2 1 9 0;
#*normalsoff0.3
*createmark surfaces 1 -1;
set SUFID_CIRCULAR_2 [hm_getmark surfaces 1];
*createmark lines 1 -1;
# set LINES_ID_CORTE [hm_getmark lines 1];
# *createmark edges 1 -1;
# set EDGES_CORTE [hm_getmark edges 1];
set r1 0.0001;
set r2 0.0002;
set FACTORI_nodos_cerca [expr (((::$var_home::E)*(sqrt(2*3.14159/$r1)))/(8*(1-
(::$var_home::v*::$var_home::v))) ) * ($cerca_desp2y)];
set FACTORII_nodos_cerca [expr (((::$var_home::E)*(sqrt(2*3.14159/$r1)))/(8*(1-
(::$var_home::v*::$var_home::v))) ) * ($cerca_desp2x)];
set FACTORI_nodos_lejos [expr (((::$var_home::E)*(sqrt(2*3.14159/$r2)))/(8*(1-
(::$var_home::v*::$var_home::v))) ) * ($lejos_desp2y)];
set FACTORII_nodos_lejos [expr (((::$var_home::E)*(sqrt(2*3.14159/$r2)))/(8*(1-
(::$var_home::v*::$var_home::v))) ) * ($lejos_desp2x)];
setFIE_EQUIVALENTE[exprpow(pow($FACTORI_nodos_cerca,4)+(8*pow($FACTORII_nodos_cerca,4),
0.25)]
set angulo_propagacion [expr (acos(((3*pow($FACTORII_nodos_cerca,2))+
($FACTORI_nodos_cerca*sqrt(pow($FACTORI_nodos_cerca,2)+(8*pow($FACTORII_nodos_cerca,2)))) /
(pow($FACTORI_nodos_cerca,2)+(9*pow($FACTORII_nodos_cerca,2)))))*-1.0*(180/3.14159265359)];
# #####el angulo de propagacion sera opuesto al signo del FACTOR DE INTENSIDAD DE
ESFUERZOS II#### (Shen and Lee 1982)
# #####ANGULO NEGATIVO#####
if { $FACTORII_nodos_cerca > 0 } {
#es positivo el FACTOR II
set angulo_propagacion [expr $angulo_propagacion*(-1.0)];
}
# #####ANGULO POSITIVO#####
if { $FACTORII_nodos_cerca<0 } {
# ## es NEGATIVO el FACTOR II####
set angulo_propagacion [expr $angulo_propagacion*1.0];
}
}
```

1.2 Código del programa desarrollado en PYTHON para la presentación de los resultados en forma de gráficas

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time
plt.ion() # Interactive on
plt.figure()
thismanager = plt.get_current_fig_manager()
thismanager.window.setGeometry(1000,30,900,1000)
for i in range(1,150):
    data = np.genfromtxt('FACTOR.txt',delimiter=',')
    longitud_grieta = data[:,0]
    K1= data[:,1]
    K2= data[:,2]
    angulo_propagacion= data[:,3]
    plt.subplot(221)
    plt.plot(longitud_grieta,K1,'r-')
#   plt.plot(steps,K2,'b-')
    plt.legend(['KI'])
    plt.xlabel(['Longitud de la grieta a'])
    plt.ylabel(['KI'])
    plt.subplot(222)
#   plt.plot(steps,K1,'r-')
    plt.plot(longitud_grieta ,K2,'b-')
    plt.legend(['KII'])
    plt.xlabel(['Longitud de la grieta a mm'])
    plt.ylabel(['KII'])
    plt.subplot(223)
#   plt.plot(steps,K1,'r-')
    plt.plot(longitud_grieta ,angulo_propagacion,'g-')
    plt.legend(['angulo de propagacion (grados)'])
    plt.xlabel(['Longitud de la grieta a mm'])
    plt.ylabel(['angulo_de_propagacion'])
    plt.draw()
    plt.pause(3)
    plt.clf()
del longitud_grieta,K1,K2
```

1.3 Resultados del análisis numérico de la vida remanente para la maza de rueda portadora de STC metro de la ciudad de México con base en las cargas de impacto y frenado de la línea 1.

A continuación, se muestran algunos resultados del FIE para cada incremento de la longitud debido a la secuencia y magnitud de las cargas de impacto y frenado a las cuales está sometido la MRP en la línea 1.

Tipo de Carga	Magnitud de la carga kN	Longitud de la grieta (mm)	Factor de intensidad de esfuerzos	Incremento de la longitud de la grieta
Carga de Impacto	4.07	7.54	19.1367983	
56 cargas de frenado	1.37	7.54008977	6.37051114	57
Carga de Impacto	4.07	7.54048982	19.1396539	58
56 cargas de frenado	1.37	7.54057973	6.38613017	114
Carga de Impacto	4.07	7.54098204	19.1300215	115
56 cargas de frenado	1.37	7.54107163	6.37969208	171
Carga de Impacto	4.07	7.541473	19.1264052	172
56 cargas de frenado	1.37	7.54156255	6.37795629	228
Carga de Impacto	4.07	7.54196368	19.1227889	229
56 cargas de frenado	1.37	7.54205319	6.37686992	285
Carga de Impacto	4.07	7.54245415	19.1191726	
56 cargas de frenado	1.37	7.54254363	6.37773902	342
Carga de Impacto	4.07	7.54294472	19.1256737	
56 cargas de frenado	1.37	7.54303427	6.38525358	399
Carga de Impacto	4.07	7.54343644	19.15239	
56 cargas de frenado	1.37	7.54352628	6.38691718	456
Carga de Impacto	4.07	7.5439287	19.1538361	
56 cargas de frenado	1.37	7.54401854	6.38778461	513
Carga de Impacto	4.07	7.54442109	19.2168097	
56 cargas de frenado	1.37	7.54451162	6.40861655	570
Carga de Impacto	4.07	7.54491719	19.2182548	
56 cargas de frenado	1.37	7.54500774	6.4091227	627
Carga de Impacto	4.07	7.54541338	19.2197009	
56 cargas de frenado	1.37	7.54550394	6.40955657	684
Carga de Impacto	4.07	7.54590965	19.2211481	
56 cargas de frenado	1.37	7.54600023	6.41006268	741
Carga de Impacto	4.07	7.54640601	19.1523989	
56 cargas de frenado	1.37	7.54649584	6.38699058	798
Carga de Impacto	4.07	7.54689827	19.1538451	
56 cargas de frenado	1.37	7.54698812	6.38735211	855
Carga de Impacto	4.07	7.5473906	19.1545681	
56 cargas de frenado	1.37	7.54748046	6.38778595	912
Carga de Impacto	4.07	7.547883	19.1784494	
56 cargas de frenado	1.37	7.54797312	6.39437373	969
Carga de Impacto	4.07	7.54837662	19.1944008	
56 cargas de frenado	1.37	7.54846691	6.40102514	1026
Carga de Impacto	4.07	7.54887137	19.1922327	
56 cargas de frenado	1.37	7.54896164	6.41042016	1083
Carga de Impacto	4.07	7.54936747	19.258712	
56 cargas de frenado	1.37	7.54945845	6.41085403	1140
Carga de Impacto	4.07	7.54986435	19.2037487	
56 cargas de frenado	1.37	7.54995474	6.4043454	1197
Carga de Impacto	4.07	7.55035969	19.2059179	
56 cargas de frenado	1.37	7.5504501	6.40514012	1254
Carga de Impacto	4.07	7.55085516	19.1849476	
56 cargas de frenado	1.37	7.55094535	6.39776526	1311

Carga de Impacto	4.07	7.55134934	19.1856695	
56 cargas de frenado	1.37	7.55143953	6.403122	1368
Carga de Impacto	4.07	7.55184431	19.1915138	
56 cargas de frenado	1.37	7.55193456	6.4035578	1425
Carga de Impacto	4.07	7.5523394	19.2153738	
56 cargas de frenado	1.37	7.55242991	6.41758012	1482
Carga de Impacto	4.07	7.55283679	19.2283575	
56 cargas de frenado	1.37	7.55292744	6.4125216	1539
Carga de Impacto	4.07	7.55333358	19.2355956	
56 cargas de frenado	1.37	7.55342432	6.41151132	1596
Carga de Impacto	4.07	7.55383031	19.2290919	
56 cargas de frenado	1.37	7.55392097	6.40941536	1653
Carga de Impacto	4.07	7.55432666	19.2225802	
56 cargas de frenado	1.37	7.55441725	6.41490763	1710
Carga de Impacto	4.07	7.55482374	19.2297034	
56 cargas de frenado	1.37	7.55491441	6.40860423	1767
Carga de Impacto	4.07	7.55531998	19.2289788	
56 cargas de frenado	1.37	7.55541064	6.41033995	1824
Carga de Impacto	4.07	7.55581646	19.2231959	
56 cargas de frenado	1.37	7.55590706	6.41019343	1881
Carga de Impacto	4.07	7.55631286	19.2456015	
56 cargas de frenado	1.37	7.5564037	6.41359112	1938
Carga de Impacto	4.07	7.55681	19.2296712	
56 cargas de frenado	1.37	7.55690066	6.41257634	1995
Carga de Impacto	4.07	7.55730681	19.2361688	
56 cargas de frenado	1.37	7.55739755	6.41228774	2052
Carga de Impacto	4.07	7.55780366	19.2390704	
56 cargas de frenado	1.37	7.55789443	6.41952075	2109
Carga de Impacto	4.07	7.55830159	19.2434117	
56 cargas de frenado	1.37	7.55839241	6.4193745	2166
Carga de Impacto	4.07	7.55879954	19.2448558	
56 cargas de frenado	1.37	7.55889038	6.4206047	2223
Carga de Impacto	4.07	7.5592977	19.2441506	
56 cargas de frenado	1.37	7.55938852	6.41778481	2280
Carga de Impacto	4.07	7.55979543	19.2629508	
56 cargas de frenado	1.37	7.55988646	6.42205174	2337
Carga de Impacto	4.07	7.56029399	19.2463263	
56 cargas de frenado	1.37	7.56038484	6.41887099	2394
Carga de Impacto	4.07	7.5607919	19.2485023	
56 cargas de frenado	1.37	7.56088278	6.41793076	2451
Carga de Impacto	4.07	7.5612897	19.2564477	
56 cargas de frenado	1.37	7.56138066	6.42053286	2508
Carga de Impacto	4.07	7.56178797	19.2542604	
56 cargas de frenado	1.37	7.56187891	6.41995264	2565
Carga de Impacto	4.07	7.56228613	19.2513795	
56 cargas de frenado	1.37	7.56237703	6.42248458	2622
Carga de Impacto	4.07	7.56278463	19.264383	
56 cargas de frenado	1.37	7.56287567	6.42118106	2679
Carga de Impacto	4.07	7.56328307	19.241929	
56 cargas de frenado	1.37	7.56337388	6.41770694	2736
Carga de Impacto	4.07	7.56378077	19.2651043	
56 cargas de frenado	1.37	7.56387183	6.42190785	2793
Carga de Impacto	4.07	7.56427933	19.2463254	
56 cargas de frenado	1.37	7.56437018	6.41807439	2850
Carga de Impacto	4.07	7.56477713	19.244168	
56 cargas de frenado	1.37	7.56486796	6.42082304	2907
Carga de Impacto	4.07	7.56527531	19.2528416	
56 cargas de frenado	1.37	7.56536623	6.42270262	2964
Carga de Impacto	4.07	7.56577385	19.2521162	
56 cargas de frenado	1.37	7.56586477	6.42414855	3021
Carga de Impacto	4.07	7.5662726	19.2716419	
56 cargas de frenado	1.37	7.56636373	6.42378691	3078
Carga de Impacto	4.07	7.56677151	19.2673074	
56 cargas de frenado	1.37	7.56686259	6.42624599	3135
Carga de Impacto	4.07	7.56727073	19.2665858	

56 cargas de frenado	1.37	8.4747178	7.28895961	93252
Carga de Impacto	4.07	8.4752631	21.8568054	
56 cargas de frenado	1.37	8.47538482	7.29091235	93309
Carga de Impacto	4.07	8.47593047	21.8416661	
56 cargas de frenado	1.37	8.47605199	7.28375561	93366
Carga de Impacto	4.07	8.47659641	21.8604195	
56 cargas de frenado	1.37	8.47671817	7.28469556	93423
Carga de Impacto	4.07	8.47726275	21.8618657	
56 cargas de frenado	1.37	8.47738453	7.28534632	93480
Carga de Impacto	4.07	8.47792922	21.8452815	
56 cargas de frenado	1.37	8.47805079	7.29351527	93537
Carga de Impacto	4.07	8.47859688	21.8402311	
56 cargas de frenado	1.37	8.47871839	7.28665045	93594
Carga de Impacto	4.07	8.4792633	21.817756	
56 cargas de frenado	1.37	8.47938452	7.29323048	93651
Carga de Impacto	4.07	8.47993057	21.8539535	
56 cargas de frenado	1.37	8.48005225	7.27912629	93708
Carga de Impacto	4.07	8.48059587	21.8561239	
56 cargas de frenado	1.37	8.48071758	7.28650716	93765
Carga de Impacto	4.07	8.48126246	21.8308164	
56 cargas de frenado	1.37	8.48138385	7.29865782	93822
Carga de Impacto	4.07	8.48193083	21.8944273	
56 cargas de frenado	1.37	8.48205304	7.30876988	93879
Carga de Impacto	4.07	8.48260176	21.8958733	
56 cargas de frenado	1.37	8.48272398	7.30934833	93936
Carga de Impacto	4.07	8.4832728	21.8525113	
56 cargas de frenado	1.37	8.48339447	7.30082702	93993
Carga de Impacto	4.07	8.48394182	21.8394971	
56 cargas de frenado	1.37	8.48406332	7.29120585	94050
Carga de Impacto	4.07	8.48460901	21.8582934	
56 cargas de frenado	1.37	8.48473075	7.29192891	94107
Carga de Impacto	4.07	8.48527657	21.8481776	
56 cargas de frenado	1.37	8.48539818	7.31158988	94164
Carga de Impacto	4.07	8.48594739	21.8632965	
56 cargas de frenado	1.37	8.48606919	7.29965954	94221
Carga de Impacto	4.07	8.48661634	21.8640423	
56 cargas de frenado	1.37	8.48673816	7.31254226	94278
Carga de Impacto	4.07	8.48728753	21.8677315	
56 cargas de frenado	1.37	8.48740939	7.31312076	94335
Carga de Impacto	4.07	8.48795887	21.860431	
56 cargas de frenado	1.37	8.48808063	7.29330351	94392
Carga de Impacto	4.07	8.48862669	21.838059	
56 cargas de frenado	1.37	8.48874817	7.29424262	94449
Carga de Impacto	4.07	8.48929439	21.8402281	
56 cargas de frenado	1.37	8.4894159	7.29922705	94506
Carga de Impacto	4.07	8.48996297	21.865489	
56 cargas de frenado	1.37	8.4900848	7.29987781	94563
Carga de Impacto	4.07	8.49063199	21.8676582	
56 cargas de frenado	1.37	8.49075385	7.30458131	94620
Carga de Impacto	4.07	8.49130185	21.8843236	
56 cargas de frenado	1.37	8.49142392	7.30523199	94677
Carga de Impacto	4.07	8.49197203	21.885041	
56 cargas de frenado	1.37	8.49209412	7.30566525	94734
Carga de Impacto	4.07	8.4926423	21.879259	
56 cargas de frenado	1.37	8.49276431	7.30407501	94791
Carga de Impacto	4.07	8.49331222	21.8785393	
56 cargas de frenado	1.37	8.49343422	7.30393097	94848
Carga de Impacto	4.07	8.49398211	21.8814328	
56 cargas de frenado	1.37	8.49410415	7.30479881	94905
Carga de Impacto	4.07	8.49465218	21.8792826	
56 cargas de frenado	1.37	8.49477419	7.2995211	94962
Carga de Impacto	4.07	8.49532132	21.8821737	
56 cargas de frenado	1.37	8.49544337	7.30819661	95019
Carga de Impacto	4.07	8.49599199	21.8944455	
56 cargas de frenado	1.37	8.49611419	7.30855802	95076
Carga de Impacto	4.07	8.49666288	21.8901189	

56 cargas de frenado	1.37	8.49678503	7.30928151	95133
Carga de Impacto	4.07	8.49733384	21.8901202	
56 cargas de frenado	1.37	8.49745599	7.30689674	95190
Carga de Impacto	4.07	8.49800438	21.9096296	
56 cargas de frenado	1.37	8.49812678	7.30725823	95247
Carga de Impacto	4.07	8.49867524	21.9125182	
56 cargas de frenado	1.37	8.49879768	7.30544904	95304
Carga de Impacto	4.07	8.49934583	21.9139686	
56 cargas de frenado	1.37	8.49946828	7.31643775	95361
Carga de Impacto	4.07	8.50001833	21.9240424	
56 cargas de frenado	1.37	8.50014091	7.3173054	95418
Carga de Impacto	4.07	8.50069111	21.9276601	
56 cargas de frenado	1.37	8.50081374	7.31781162	95475
Carga de Impacto	4.07	8.50136402	21.9298305	
56 cargas de frenado	1.37	8.50148668	7.31752058	95532
Carga de Impacto	4.07	8.50203692	21.9305559	
56 cargas de frenado	1.37	8.50215959	7.31383283	95589
Carga de Impacto	4.07	8.50270918	21.9052211	
56 cargas de frenado	1.37	8.50283153	7.31672738	95646
Carga de Impacto	4.07	8.50338162	21.9341653	
56 cargas de frenado	1.37	8.50350434	7.31730587	95703
Carga de Impacto	4.07	8.50405453	21.9363346	
56 cargas de frenado	1.37	8.50417728	7.31802889	95760
Carga de Impacto	4.07	8.5047276	21.9356163	
56 cargas de frenado	1.37	8.50485033	7.31788436	95817
Carga de Impacto	4.07	8.50540063	21.9363393	
56 cargas de frenado	1.37	8.50552337	7.31846278	95874
Carga de Impacto	4.07	8.50607377	21.9385086	
56 cargas de frenado	1.37	8.50619654	7.32005327	95931
Carga de Impacto	4.07	8.50674721	21.9406777	
56 cargas de frenado	1.37	8.50687001	7.31925761	95988
Carga de Impacto	4.07	8.50742054	21.9421239	
56 cargas de frenado	1.37	8.50754336	7.31983602	96045
Carga de Impacto	4.07	8.50809399	21.9471853	
56 cargas de frenado	1.37	8.50821688	7.3212822	96102
Carga de Impacto	4.07	8.50876776	21.9500788	
56 cargas de frenado	1.37	8.50889068	7.32128212	96159
Carga de Impacto	4.07	8.50944156	21.9522503	
56 cargas de frenado	1.37	8.50956451	7.32258372	96216
Carga de Impacto	4.07	8.51011562	21.9594749	
56 cargas de frenado	1.37	8.51023866	7.32345209	96273
Carga de Impacto	4.07	8.51078992	21.9609234	
56 cargas de frenado	1.37	8.51091298	7.32439212	96330
Carga de Impacto	4.07	8.5114644	21.9594809	
56 cargas de frenado	1.37	8.51158745	7.32338024	96387
Carga de Impacto	4.07	8.51213869	21.9609259	
56 cargas de frenado	1.37	8.51226175	7.32374169	96444
Carga de Impacto	4.07	8.51281306	21.9638181	
56 cargas de frenado	1.37	8.51293616	7.32439241	96501
Carga de Impacto	4.07	8.51348758	21.9667104	
56 cargas de frenado	1.37	8.51361072	7.32540483	96558
Carga de Impacto	4.07	8.51416231	21.9667116	
56 cargas de frenado	1.37	8.51428545	7.32605559	96615
Carga de Impacto	4.07	8.51483716	21.9247732	
56 cargas de frenado	1.37	8.51495975	7.33508967	96672
Carga de Impacto	4.07	8.51551303	21.9262205	
56 cargas de frenado	1.37	8.51563564	7.33212554	96729
Carga de Impacto	4.07	8.5161884	21.9189936	
56 cargas de frenado	1.37	8.51631093	7.33284861	96786
Carga de Impacto	4.07	8.51686381	21.9515427	
56 cargas de frenado	1.37	8.51698675	7.33335472	96843
Carga de Impacto	4.07	8.51753973	21.9226078	
56 cargas de frenado	1.37	8.51766229	7.33249164	96900
Carga de Impacto	4.07	8.51821512	21.9551763	
56 cargas de frenado	1.37	8.51833811	7.32793401	96957

56 cargas de frenado	1.37	11.4399226	11.2926016	254733
Carga de Impacto	4.07	11.4414151	33.7239901	
56 cargas de frenado	1.37	11.4417452	11.2973015	254790
Carga de Impacto	4.07	11.4432392	33.7637648	
56 cargas de frenado	1.37	11.4435701	11.2957123	254847
Carga de Impacto	4.07	11.4450636	33.7637377	
56 cargas de frenado	1.37	11.4453946	11.3085095	254904
Carga de Impacto	4.07	11.446892	33.7666357	
56 cargas de frenado	1.37	11.447223	11.3174031	254961
Carga de Impacto	4.07	11.4487231	33.7890354	
56 cargas de frenado	1.37	11.4490547	11.3123423	255018
Carga de Impacto	4.07	11.4505532	33.7760528	
56 cargas de frenado	1.37	11.4508845	11.3176179	255075
Carga de Impacto	4.07	11.4523847	33.7854508	
56 cargas de frenado	1.37	11.4527161	11.3119047	255132
Carga de Impacto	4.07	11.4542145	33.7890526	
56 cargas de frenado	1.37	11.4545461	11.3173264	255189
Carga de Impacto	4.07	11.4560462	33.7991624	
56 cargas de frenado	1.37	11.4563779	11.3222439	255246
Carga de Impacto	4.07	11.4578795	33.8244504	
56 cargas de frenado	1.37	11.4582118	11.3235469	255303
Carga de Impacto	4.07	11.4597138	33.830977	
56 cargas de frenado	1.37	11.4600463	11.3341757	255360
Carga de Impacto	4.07	11.4615515	33.8396829	
56 cargas de frenado	1.37	11.4618842	11.3276702	255417
Carga de Impacto	4.07	11.4633874	33.8627821	
56 cargas de frenado	1.37	11.4637206	11.3275256	255474
Carga de Impacto	4.07	11.4652238	33.8526535	
56 cargas de frenado	1.37	11.4655568	11.3371466	255531
Carga de Impacto	4.07	11.4670629	33.8591807	
56 cargas de frenado	1.37	11.467396	11.3451031	255588
Carga de Impacto	4.07	11.4689046	33.8671595	
56 cargas de frenado	1.37	11.4692379	11.349876	255645
Carga de Impacto	4.07	11.4707479	33.9061783	
56 cargas de frenado	1.37	11.4710821	11.356166	255702
Carga de Impacto	4.07	11.4725941	33.9394328	
56 cargas de frenado	1.37	11.472929	11.3566043	255759
Carga de Impacto	4.07	11.4744411	33.96325	
56 cargas de frenado	1.37	11.4747766	11.350588	255816
Carga de Impacto	4.07	11.4762868	33.9105618	
56 cargas de frenado	1.37	11.4766211	11.3523948	255873
Carga de Impacto	4.07	11.4781319	33.9322495	
56 cargas de frenado	1.37	11.4784667	11.3534797	255930
Carga de Impacto	4.07	11.4799778	33.9503088	
56 cargas de frenado	1.37	11.480313	11.3602004	255987
Carga de Impacto	4.07	11.4818262	33.9604064	
56 cargas de frenado	1.37	11.4821616	11.3550717	256044
Carga de Impacto	4.07	11.4836732	33.9734315	
56 cargas de frenado	1.37	11.4840089	11.3604228	256101
Carga de Impacto	4.07	11.4855222	33.9965478	
56 cargas de frenado	1.37	11.4858584	11.3573834	256158
Carga de Impacto	4.07	11.4873707	33.9517196	
56 cargas de frenado	1.37	11.4877059	11.3646212	256215
Carga de Impacto	4.07	11.4892205	33.9944287	
56 cargas de frenado	1.37	11.4895566	11.3878334	256272
Carga de Impacto	4.07	11.4910783	34.0204301	
56 cargas de frenado	1.37	11.4914151	11.395715	256329
Carga de Impacto	4.07	11.4929392	34.0254664	
56 cargas de frenado	1.37	11.4932761	11.3708408	256386
Carga de Impacto	4.07	11.4947925	34.0312513	
56 cargas de frenado	1.37	11.4951295	11.3776404	256443
Carga de Impacto	4.07	11.4966481	34.0175326	
56 cargas de frenado	1.37	11.4969848	11.3763375	256500
Carga de Impacto	4.07	11.4985029	34.0753734	
56 cargas de frenado	1.37	11.498841	11.3864587	256557
Carga de Impacto	4.07	11.5003622	34.0760754	

56 cargas de frenado	1.37	11.5007003	11.3927527	256614
Carga de Impacto	4.07	11.5022234	34.0862426	
56 cargas de frenado	1.37	11.5025617	11.4008474	256671
Carga de Impacto	4.07	11.5040874	34.0985326	
56 cargas de frenado	1.37	11.5044259	11.4022921	256728
Carga de Impacto	4.07	11.5059521	34.0782659	
56 cargas de frenado	1.37	11.5062901	11.4081501	256785
Carga de Impacto	4.07	11.5078181	34.0855065	
56 cargas de frenado	1.37	11.5081563	11.4113305	256842
Carga de Impacto	4.07	11.5096852	34.0985328	
56 cargas de frenado	1.37	11.5100238	11.4077847	256899
Carga de Impacto	4.07	11.5115516	34.1245825	
56 cargas de frenado	1.37	11.5118907	11.4161746	256956
Carga de Impacto	4.07	11.5134211	34.131728	
56 cargas de frenado	1.37	11.5137604	11.4192803	257013
Carga de Impacto	4.07	11.5152918	34.1303127	
56 cargas de frenado	1.37	11.5156311	11.4263663	257070
Carga de Impacto	4.07	11.5171646	34.1158457	
56 cargas de frenado	1.37	11.5175036	11.4213064	257127
Carga de Impacto	4.07	11.5190356	34.1396796	
56 cargas de frenado	1.37	11.519375	11.4270926	257184
Carga de Impacto	4.07	11.5209088	34.2012418	
56 cargas de frenado	1.37	11.5212497	11.4326625	257241
Carga de Impacto	4.07	11.5227852	34.2026443	
56 cargas de frenado	1.37	11.5231261	11.4406893	257298
Carga de Impacto	4.07	11.5246641	34.2055272	
56 cargas de frenado	1.37	11.5250051	11.4500878	257355
Carga de Impacto	4.07	11.526546	34.2199829	
56 cargas de frenado	1.37	11.5268873	11.4482094	257412
Carga de Impacto	4.07	11.5284276	34.2019198	
56 cargas de frenado	1.37	11.5287685	11.4412684	257469
Carga de Impacto	4.07	11.5303067	34.212713	
56 cargas de frenado	1.37	11.5306478	11.4453109	257526
Carga de Impacto	4.07	11.5321872	34.2452686	
56 cargas de frenado	1.37	11.5325291	11.4508812	257583
Carga de Impacto	4.07	11.5340703	34.2467445	
56 cargas de frenado	1.37	11.5344122	11.4492162	257640
Carga de Impacto	4.07	11.5359528	34.2496245	
56 cargas de frenado	1.37	11.5362948	11.4555804	257697
Carga de Impacto	4.07	11.5378374	34.2474222	
56 cargas de frenado	1.37	11.5381793	11.4584731	257754
Carga de Impacto	4.07	11.5397228	34.2784983	
56 cargas de frenado	1.37	11.5400655	11.4646234	257811
Carga de Impacto	4.07	11.5416109	34.2872283	
56 cargas de frenado	1.37	11.5419537	11.4696105	257868
Carga de Impacto	4.07	11.5435007	34.2879468	
56 cargas de frenado	1.37	11.5438436	11.4558012	257925
Carga de Impacto	4.07	11.5453862	34.3234457	
56 cargas de frenado	1.37	11.5457299	11.4725726	257982
Carga de Impacto	4.07	11.5472778	34.3335443	
56 cargas de frenado	1.37	11.5476217	11.4849386	258039
Carga de Impacto	4.07	11.5491734	34.3357427	
56 cargas de frenado	1.37	11.5495174	11.4973733	258096
Carga de Impacto	4.07	11.5510729	34.3400681	
56 cargas de frenado	1.37	11.551417	11.4968682	258153
Carga de Impacto	4.07	11.5529724	34.3574405	
56 cargas de frenado	1.37	11.5533169	11.5029378	258210
Carga de Impacto	4.07	11.5548742	34.3993087	
56 cargas de frenado	1.37	11.5552196	11.5029422	258267
Carga de Impacto	4.07	11.5567769	34.3747147	
56 cargas de frenado	1.37	11.5571218	11.5054672	258324
Carga de Impacto	4.07	11.5586799	34.3870144	
56 cargas de frenado	1.37	11.5590251	11.5097464	258381
Carga de Impacto	4.07	11.5605845	34.3711227	
56 cargas de frenado	1.37	11.5609293	11.5096	258438
Carga de Impacto	4.07	15.4670538	70.7077369	

56 cargas de frenado	1.37	15.4688655	23.7261568	318516
Carga de Impacto	4.07	15.477098	70.8594688	
56 cargas de frenado	1.37	15.4789187	23.8040049	318573
Carga de Impacto	4.07	15.4872135	71.1666253	
56 cargas de frenado	1.37	15.4890524	23.8677539	318630
Carga de Impacto	4.07	15.4973983	71.174007	
56 cargas de frenado	1.37	15.4992377	23.9065243	318687
Carga de Impacto	4.07	15.5076148	71.1928203	
56 cargas de frenado	1.37	15.5094553	23.927719	318744
Carga de Impacto	4.07	15.5178496	71.4424174	
56 cargas de frenado	1.37	15.5197049	23.9936271	318801
Carga de Impacto	4.07	15.5281524	71.6435644	
56 cargas de frenado	1.37	15.5300198	24.0715928	318858
Carga de Impacto	4.07	15.5385306	71.6764702	
56 cargas de frenado	1.37	15.5403999	24.0978991	318915
Carga de Impacto	4.07	15.5489321	71.8485983	
56 cargas de frenado	1.37	15.5508118	24.1709384	318972
Carga de Impacto	4.07	15.5594036	72.0205236	
56 cargas de frenado	1.37	15.5612937	24.1920916	319029
Carga de Impacto	4.07	15.5699028	72.371015	
56 cargas de frenado	1.37	15.571814	24.2577758	319086
Carga de Impacto	4.07	15.580477	72.4764977	
56 cargas de frenado	1.37	15.5823947	24.3390296	319143
Carga de Impacto	4.07	15.5911245	72.5833484	
56 cargas de frenado	1.37	15.5930487	24.4021793	319200
Carga de Impacto	4.07	15.6018307	72.753972	
56 cargas de frenado	1.37	15.6037653	24.4466305	319257
Carga de Impacto	4.07	15.6125842	72.8708796	
56 cargas de frenado	1.37	15.5823947	24.3390296	319314
Carga de Impacto	4.07	15.5911245	72.5833484	
56 cargas de frenado	1.37	15.5930487	24.4021793	319371
Carga de Impacto	4.07	15.6018307	72.753972	
56 cargas de frenado	1.37	15.6037653	24.4466305	319428
Carga de Impacto	4.07	15.6125842	72.8708796	
56 cargas de frenado	1.37	15.614526	24.4760235	319485
Carga de Impacto	4.07	15.6233693	73.1578178	
56 cargas de frenado	1.37	15.6253286	24.5773899	319542
Carga de Impacto	4.07	15.6342564	73.2344604	
56 cargas de frenado	1.37	15.6362205	24.6120473	319599
Carga de Impacto	4.07	15.6451772	73.4232039	
56 cargas de frenado	1.37	15.647153	24.6672511	319656
Carga de Impacto	4.07	15.656156	73.6267864	
56 cargas de frenado	1.37	15.6581444	24.7216012	319713
Carga de Impacto	4.07	15.6671931	73.8951484	
56 cargas de frenado	1.37	15.6691982	24.8216496	319770
Carga de Impacto	4.07	15.6783313	74.0649666	
56 cargas de frenado	1.37	15.6803471	24.8751996	319827
Carga de Impacto	4.07	15.6895256	74.2371424	
56 cargas de frenado	1.37	15.6915521	24.8999107	319884
Carga de Impacto	4.07	15.7007516	74.3107706	
56 cargas de frenado	1.37	15.7027827	24.9988704	319941
Carga de Impacto	4.07	15.7120666	74.5889665	
56 cargas de frenado	1.37	15.7141152	25.0542476	319998
Carga de Impacto	4.07	15.7234464	74.8122268	
56 cargas de frenado	1.37	15.7255092	25.1195986	320055
Carga de Impacto	4.07	15.7348965	74.9898697	
56 cargas de frenado	1.37	15.7369706	25.1770625	320112
Carga de Impacto	4.07	15.7464073	75.2142724	
56 cargas de frenado	1.37	15.7484957	25.2999305	320169
Carga de Impacto	4.07	15.7580386	75.4718066	
56 cargas de frenado	1.37	15.7601435	25.364314	320226
Carga de Impacto	4.07	15.7697424	75.663575	
56 cargas de frenado	1.37	15.7718596	25.4108737	320283
Carga de Impacto	4.07	15.7814991	75.9089137	
56 cargas de frenado	1.37	15.7836322	25.4567759	320340
Carga de Impacto	4.07	15.7933118	76.0684147	

56 cargas de frenado	1.37	15.7954551	25.5576429	320397
Carga de Impacto	4.07	15.8052231	76.2338448	
56 cargas de frenado	1.37	15.8073772	25.6265743	320454
Carga de Impacto	4.07	15.8172059	76.4654077	
56 cargas de frenado	1.37	15.8193751	25.6728577	320511
Carga de Impacto	4.07	15.8292447	76.6454566	
56 cargas de frenado	1.37	15.8314256	25.779931	320568
Carga de Impacto	4.07	15.8413902	76.9163169	
56 cargas de frenado	1.37	15.8435889	25.8738802	320625
Carga de Impacto	4.07	15.8536371	77.2046912	
56 cargas de frenado	1.37	15.8558548	25.9367879	320682
Carga de Impacto	4.07	15.8659594	77.4024946	
56 cargas de frenado	1.37	15.8681902	25.994307	320739
Carga de Impacto	4.07	15.8783463	77.5514256	
56 cargas de frenado	1.37	15.880587	26.0347204	320796
Carga de Impacto	4.07	15.8907795	77.8052754	
56 cargas de frenado	1.37	15.8930371	26.1147491	320853
Carga de Impacto	4.07	15.9033018	78.1024667	
56 cargas de frenado	1.37	15.9055792	26.189247	320910
Carga de Impacto	4.07	15.9159114	78.1932591	
56 cargas de frenado	1.37	15.918195	26.2799805	320967
Carga de Impacto	4.07	15.9286097	78.620054	
56 cargas de frenado	1.37	15.930922	26.3664883	321024
Carga de Impacto	4.07	15.9414157	78.7641934	
56 cargas de frenado	1.37	15.9437378	26.4397215	321081
Carga de Impacto	4.07	15.9542987	78.914051	
56 cargas de frenado	1.37	15.9566309	26.5210502	321138
Carga de Impacto	4.07	15.9672667	79.252712	
56 cargas de frenado	1.37	15.969622	26.6099966	321195
Carga de Impacto	4.07	15.98034	79.568688	
56 cargas de frenado	1.37	15.982717	26.699039	321252
Carga de Impacto	4.07	15.9935176	79.7725828	
56 cargas de frenado	1.37	15.9959087	26.7663434	321309
Carga de Impacto	4.07	16.006772	79.9653179	
56 cargas de frenado	1.37	16.0091764	26.8341791	321366
Carga de Impacto	4.07	16.0201032	80.3284837	
56 cargas de frenado	1.37	16.0225327	26.9548303	321423
Carga de Impacto	4.07	16.0335728	80.4350471	
56 cargas de frenado	1.37	16.0360097	27.0526128	321480
Carga de Impacto	4.07	16.0471422	80.8404948	
56 cargas de frenado	1.37	16.0496075	27.1116718	321537
Carga de Impacto	4.07	16.0607959	80.9535822	
56 cargas de frenado	1.37	16.0632691	27.1678323	321594
Carga de Impacto	4.07	16.0745109	81.3348491	
56 cargas de frenado	1.37	16.077011	27.3243402	321651
Carga de Impacto	4.07	16.0884023	81.5729439	
56 cargas de frenado	1.37	16.0909193	27.4080086	321708
Carga de Impacto	4.07	16.102391	81.8741562	
56 cargas de frenado	1.37	16.1049294	27.5353373	321765
Carga de Impacto	4.07	16.116524	82.1884799	
56 cargas de frenado	1.37	16.1190849	27.5923098	321822
Carga de Impacto	4.07	16.1307348	82.4923073	
56 cargas de frenado	1.37	16.1333175	27.7041145	321879
Carga de Impacto	4.07	16.1450762	82.6986983	
56 cargas de frenado	1.37	16.1476738	27.7951461	321936
Carga de Impacto	4.07	16.1595216	82.919114	
56 cargas de frenado	1.37	16.1621351	27.895071	321993
Carga de Impacto	4.07	16.1740811	83.2658259	
56 cargas de frenado	1.37	16.1767199	28.021863	322050
Carga de Impacto	4.07	16.1887911	83.4596787	
56 cargas de frenado	1.37	16.191444	28.1172809	322107
Carga de Impacto	4.07	16.20361	83.8622562	
56 cargas de frenado	1.37	16.2062924	28.1924311	322164
Carga de Impacto	4.07	16.2185334	84.1736888	
56 cargas de frenado	1.37	16.2212387	28.3058591	322221
Carga de Impacto	4.07	16.2335932	84.2974199	

56 cargas de frenado	1.37	16.2363077	28.3418981	322278
Carga de Impacto	4.07	16.2486985	84.7681138	
56 cargas de frenado	1.37	16.251448	28.4761828	322335
Carga de Impacto	4.07	16.2639741	85.0695233	
56 cargas de frenado	1.37	16.2667462	28.6020832	322392
Carga de Impacto	4.07	16.2794001	85.4893753	
56 cargas de frenado	1.37	16.2822037	28.7057323	322449
Carga de Impacto	4.07	16.2949633	85.6884783	
56 cargas de frenado	1.37	16.2977819	28.7654633	322506
Carga de Impacto	4.07	16.3106027	85.9866482	
56 cargas de frenado	1.37	16.313444	28.9020126	322563
Carga de Impacto	4.07	16.3264051	86.3321656	
56 cargas de frenado	1.37	16.3292727	29.0290097	322620
Carga de Impacto	4.07	16.3423653	86.5693977	
56 cargas de frenado	1.37	16.345251	29.1485093	322677
carga de impacto	4.07	16.3584678	87.0677617	
56 cargas de frenado	1.37	16.3613919	29.242502	322734
carga de impacto	4.07	16.374707	87.3901589	
56 cargas de frenado	1.37	16.3776561	29.4109123	322791
carga de impacto	4.07	16.3911481	87.7014552	
56 cargas de frenado	1.37	16.3941214	29.4817243	322848
carga de impacto	4.07	16.4076883	88.1039783	
56 cargas de frenado	1.37	16.4106931	29.5942726	322905
carga de impacto	4.07	16.4243794	88.588704	
56 cargas de frenado	1.37	16.4274224	29.7722446	322962
carga de impacto	4.07	16.4412987	88.9762039	
56 cargas de frenado	1.37	16.4443724	29.8874665	323019
carga de impacto	4.07	16.4583726	89.4755153	
56 cargas de frenado	1.37	16.461486	30.0789439	323076
carga de impacto	4.07	16.4756934	89.8620902	
56 cargas de frenado	1.37	16.4788379	30.2028545	323133
carga de impacto	4.07	16.4931802	90.2971094	
56 cargas de frenado	1.37	16.4963598	30.3199709	323190
carga de impacto	4.07	16.5108303	90.7247904	
56 cargas de frenado	1.37	16.5140447	30.5245329	323247
carga de impacto	4.07	16.5287408	91.0909357	
56 cargas de frenado	1.37	16.531985	30.5691308	323304
carga de impacto	4.07	16.5467306	91.4871041	
56 cargas de frenado	1.37	16.5500074	30.715922	323361
carga de impacto	4.07	16.5649163	91.8777698	
56 cargas de frenado	1.37	16.5682253	30.8923463	323418
carga de impacto	4.07	16.5833319	92.3106078	
56 cargas de frenado	1.37	16.5866769	31.0543781	323475
carga de impacto	4.07	16.6019664	92.8034697	323476

1.4 Resultados del análisis numérico de la vida remanente para la maza de rueda portadora de STC metro de la ciudad de México con base en las cargas de impacto y frenado de la línea 3 y B.

A continuación, se muestran algunos resultados del FIE para cada incremento de la longitud debido a la secuencia y magnitud de las cargas de impacto y frenado a las cuales está sometido la MRP en las líneas 3 y B.

Tipo de Carga	Magnitud de la carga kN	Longitud de la grieta (mm)	Factor de intensidad de esfuerzos	Incremento de la longitud de la grieta
Carga de Impacto	4.07	7.54	19.13161182	1
71 cargas de frenado	1.37	7.540089609	6.391983751	72
Carga de Impacto	4.07	7.540600751	19.1394384	73
71 cargas de frenado	1.37	7.540690444	6.389523726	144
Carga de Impacto	4.07	7.541201134	19.15680356	145
71 cargas de frenado	1.37	7.541291014	6.397843702	216
Carga de Impacto	4.07	7.541803235	19.15464363	217
71 cargas de frenado	1.37	7.541893092	6.402255484	288
Carga de Impacto	4.07	7.542406125	19.15102932	289
71 cargas de frenado	1.37	7.542495943	6.395745645	360
Carga de Impacto	4.07	7.543007777	19.1546395	361
71 cargas de frenado	1.37	7.543097634	6.397771143	432
Carga de Impacto	4.07	7.543609842	19.15318009	433
71 cargas de frenado	1.37	7.543699683	6.398421343	504
Carga de Impacto	4.07	7.54421201	19.15319337	505
71 cargas de frenado	1.37	7.544301851	6.403120806	576
Carga de Impacto	4.07	7.544815044	19.15246929	577
71 cargas de frenado	1.37	7.544904877	6.401169754	648
Carga de Impacto	4.07	7.545417711	19.1546344	649
71 cargas de frenado	1.37	7.545507568	6.407242943	720
Carga de Impacto	4.07	7.546021521	19.14089616	721
71 cargas de frenado	1.37	7.546111229	6.410059552	792
Carga de Impacto	4.07	7.546625702	19.19726407	793
71 cargas de frenado	1.37	7.54671602	6.407963053	864
Carga de Impacto	4.07	7.547230106	19.18281151	865
71 cargas de frenado	1.37	7.547320267	6.39906983	936
Carga de Impacto	4.07	7.547832713	19.18425764	937
71 cargas de frenado	1.37	7.54792289	6.399648246	1008
Carga de Impacto	4.07	7.548435443	19.20235964	1009
71 cargas de frenado	1.37	7.548525816	6.40521901	1080
Carga de Impacto	4.07	7.549039395	19.18934017	1081
71 cargas de frenado	1.37	7.549129627	6.401097044	1152
Carga de Impacto	4.07	7.549642447	19.19729386	1153
71 cargas de frenado	1.37	7.549732765	6.409919355	1224
Carga de Impacto	4.07	7.550247212	19.19801692	1225
71 cargas de frenado	1.37	7.550337537	6.410497807	1296
Carga de Impacto	4.07	7.550852091	19.20090918	1297
71 cargas de frenado	1.37	7.550942448	6.411510098	1368
Carga de Impacto	4.07	7.551457189	19.19439415	1369
71 cargas de frenado	1.37	7.551547475	6.410497373	1440
Carga de Impacto	4.07	7.552062029	19.19584135	1441
71 cargas de frenado	1.37	7.552152331	6.411075826	1512
Carga de Impacto	4.07	7.552666992	19.19728748	1513
71 cargas de frenado	1.37	7.552757309	6.411581972	1584
Carga de Impacto	4.07	7.553272063	19.19945774	1585
71 cargas de frenado	1.37	7.553362404	6.404497751	1656

Carga de Impacto	4.07	7.553875851	19.2059863	1657
71 cargas de frenado	1.37	7.553966263	6.404931557	1728
Carga de Impacto	4.07	7.55447979	19.20815345	1729
71 cargas de frenado	1.37	7.554570225	6.405726756	1800
Carga de Impacto	4.07	7.555083899	19.22029799	1801
71 cargas de frenado	1.37	7.555174466	6.414098065	1872
Carga de Impacto	4.07	7.555689684	19.21234021	1873
71 cargas de frenado	1.37	7.555780165	6.41453183	1944
Carga de Impacto	4.07	7.556295464	19.22897355	1945
71 cargas de frenado	1.37	7.556386125	6.414097787	2016
Carga de Impacto	4.07	7.556901343	19.24344296	2017
71 cargas de frenado	1.37	7.556992161	6.410699366	2088
Carga de Impacto	4.07	7.557506752	19.23910745	2089
71 cargas de frenado	1.37	7.557597523	6.411856619	2160
Carga de Impacto	4.07	7.558112328	19.24199435	2161
71 cargas de frenado	1.37	7.55820313	6.414531722	2232
Carga de Impacto	4.07	7.558718429	19.23693486	2233
71 cargas de frenado	1.37	7.558809176	6.414532014	2304
Carga de Impacto	4.07	7.559324475	19.23693064	2305
71 cargas de frenado	1.37	7.559415222	6.411494365	2376
Carga de Impacto	4.07	7.55992996	19.24921217	2377
71 cargas de frenado	1.37	7.560020841	6.41908692	2448
Carga de Impacto	4.07	7.560536982	19.25065713	2449
71 cargas de frenado	1.37	7.560627878	6.416701277	2520
Carga de Impacto	4.07	7.561143578	19.24343049	2521
71 cargas de frenado	1.37	7.561234395	6.418218382	2592
Carga de Impacto	4.07	7.561750376	19.25355299	2593
71 cargas de frenado	1.37	7.561841303	6.415109299	2664
Carga de Impacto	4.07	7.562356709	19.2477758	2665
71 cargas de frenado	1.37	7.562447574	6.416844134	2736
Carga de Impacto	4.07	7.5629633	19.25282693	2737
71 cargas de frenado	1.37	7.56305422	6.419736945	2808
Carga de Impacto	4.07	7.563570481	19.25501001	2809
71 cargas de frenado	1.37	7.563661424	6.418653113	2880
Carga de Impacto	4.07	7.564177485	19.2499409	2881
71 cargas de frenado	1.37	7.564268374	6.418145898	2952
Carga de Impacto	4.07	7.56478434	19.26439795	2953
71 cargas de frenado	1.37	7.564875386	6.421689331	3024
Carga de Impacto	4.07	7.565392008	19.25572148	3025
71 cargas de frenado	1.37	7.56548296	6.420459753	3096
Carga de Impacto	4.07	7.565999354	19.25861152	3097
71 cargas de frenado	1.37	7.566090337	6.424074906	3168
Carga de Impacto	4.07	7.566607401	19.270907	3169
71 cargas de frenado	1.37	7.566698517	6.426678511	3240
Carga de Impacto	4.07	7.567216063	19.27307771	3241
71 cargas de frenado	1.37	7.567307203	6.424580376	3312
Carga de Impacto	4.07	7.56782436	19.25428333	3313
71 cargas de frenado	1.37	7.567915296	6.426390049	3384
Carga de Impacto	4.07	7.568432788	19.26368293	3385
71 cargas de frenado	1.37	7.568523826	6.424508214	3456
Carga de Impacto	4.07	7.56904097	19.27814183	3457
71 cargas de frenado	1.37	7.569132165	6.420026204	3528
Carga de Impacto	4.07	7.56964848	19.27451207	3529
71 cargas de frenado	1.37	7.569739635	6.427545765	3600
Carga de Impacto	4.07	7.570257342	19.27813504	3601
71 cargas de frenado	1.37	7.570348537	6.422701882	3672
Carga de Impacto	4.07	7.570865346	19.28174589	3673
71 cargas de frenado	1.37	7.570956581	6.426390001	3744
Carga de Impacto	4.07	7.571474073	19.28103974	3745
71 cargas de frenado	1.37	7.5715653	6.427692294	3816
Carga de Impacto	4.07	7.572083033	19.29332692	3817
71 cargas de frenado	1.37	7.572174394	6.434418135	3888
Carga de Impacto	4.07	7.572693374	19.28756303	3889
71 cargas de frenado	1.37	7.572784672	6.433694874	3960
Carga de Impacto	4.07	7.573303518	19.27165319	3961

Carga de Impacto	4.07	10.62	29.68978	220001
71 cargas de frenado	1.37	10.62025	9.964299	220072
Carga de Impacto	4.07	10.62137	29.74903	220073
71 cargas de frenado	1.37	10.62161	9.969354	220144
Carga de Impacto	4.07	10.62273	29.79463	220145
71 cargas de frenado	1.37	10.62298	9.971102	220216
Carga de Impacto	4.07	10.6241	29.80763	220217
71 cargas de frenado	1.37	10.62435	9.976526	220288
Carga de Impacto	4.07	10.62547	29.80185	220289
71 cargas de frenado	1.37	10.62572	9.976236	220360
Carga de Impacto	4.07	10.62684	29.83799	220361
71 cargas de frenado	1.37	10.62709	9.980571	220432
Carga de Impacto	4.07	10.62822	29.83002	220433
71 cargas de frenado	1.37	10.62847	9.978478	220504
Carga de Impacto	4.07	10.62959	29.85393	220505
71 cargas de frenado	1.37	10.62984	9.984988	220576
Carga de Impacto	4.07	10.63096	29.89218	220577
71 cargas de frenado	1.37	10.63121	9.989687	220648
Carga de Impacto	4.07	10.63234	29.82812	220649
71 cargas de frenado	1.37	10.63259	9.977202	220720
Carga de Impacto	4.07	10.63371	29.83602	220721
71 cargas de frenado	1.37	10.63396	9.982403	220792
Carga de Impacto	4.07	10.63508	29.84902	220793
71 cargas de frenado	1.37	10.63533	9.987101	220864
Carga de Impacto	4.07	10.63646	29.89238	220865
71 cargas de frenado	1.37	10.63671	9.99215	220936
Carga de Impacto	4.07	10.63783	29.86134	220937
71 cargas de frenado	1.37	10.63808	9.992447	221008
Carga de Impacto	4.07	10.63921	29.867	221009
71 cargas de frenado	1.37	10.63946	9.990783	221080
Carga de Impacto	4.07	10.64059	29.85992	221081
71 cargas de frenado	1.37	10.64084	9.996204	221152
Carga de Impacto	4.07	10.64196	29.89234	221153
71 cargas de frenado	1.37	10.64221	9.994755	221224
Carga de Impacto	4.07	10.64334	29.87788	221225
71 cargas de frenado	1.37	10.64359	9.996278	221296
Carga de Impacto	4.07	10.64472	29.90766	221297
71 cargas de frenado	1.37	10.64497	10.00743	221368
Carga de Impacto	4.07	10.6461	29.91693	221369
71 cargas de frenado	1.37	10.64635	10.002	221440
Carga de Impacto	4.07	10.64748	29.94581	221441
71 cargas de frenado	1.37	10.64773	10.02129	221512
Carga de Impacto	4.07	10.64886	29.95231	221513
71 cargas de frenado	1.37	10.64911	10.00148	221584
Carga de Impacto	4.07	10.65024	29.96241	221585
71 cargas de frenado	1.37	10.65049	10.01284	221656
Carga de Impacto	4.07	10.65163	29.95373	221657
71 cargas de frenado	1.37	10.65188	10.01638	221728
Carga de Impacto	4.07	10.65301	29.89885	221729
71 cargas de frenado	1.37	10.65326	10.01016	221800
Carga de Impacto	4.07	10.65439	29.92696	221801
71 cargas de frenado	1.37	10.65464	10.01748	221872
Carga de Impacto	4.07	10.65578	29.91467	221873
71 cargas de frenado	1.37	10.65603	10.02853	221944
Carga de Impacto	4.07	10.65716	30.02526	221945

Carga de Impacto	4.07	16.12	82.16189	333040
71 cargas de frenado	1.37	16.12256	27.67333	332970
Carga de Impacto	4.07	16.13743	82.81254	333041
71 cargas de frenado	1.37	16.14004	27.84005	333042
Carga de Impacto	4.07	16.15511	83.13775	332972
71 cargas de frenado	1.37	16.15774	27.94274	333043
Carga de Impacto	4.07	16.17295	83.58884	333044
71 cargas de frenado	1.37	16.17561	28.04411	332974
Carga de Impacto	4.07	16.19094	83.85154	333045
71 cargas de frenado	1.37	16.19362	28.19656	333046
Carga de Impacto	4.07	16.20915	84.27011	332976
71 cargas de frenado	1.37	16.21186	28.31766	333047
Carga de Impacto	4.07	16.22754	84.60683	333048
71 cargas de frenado	1.37	16.23028	28.45381	332978
Carga de Impacto	4.07	16.24613	85.01177	333049
71 cargas de frenado	1.37	16.2489	28.58347	333050
Carga de Impacto	4.07	16.26492	85.37045	332980
71 cargas de frenado	1.37	16.26771	28.71186	333051
Carga de Impacto	4.07	16.2839	85.78027	333052
71 cargas de frenado	1.37	16.28672	28.84033	332982
Carga de Impacto	4.07	16.30308	86.2042	333053
71 cargas de frenado	1.37	16.30593	28.97889	333054
Carga de Impacto	4.07	16.32247	86.58777	332984
71 cargas de frenado	1.37	16.32535	29.10007	333055
Carga de Impacto	4.07	16.34205	86.92189	333056
71 cargas de frenado	1.37	16.34496	29.25848	332986
Carga de Impacto	4.07	16.36186	87.47498	333057
71 cargas de frenado	1.37	16.36482	29.40958	333058
Carga de Impacto	4.07	16.38192	87.87041	332988
71 cargas de frenado	1.37	16.38491	29.55042	333059
Carga de Impacto	4.07	16.4022	88.38935	333060
71 cargas de frenado	1.37	16.40523	29.70358	332990
Carga de Impacto	4.07	16.42273	88.75521	333061
71 cargas de frenado	1.37	16.42579	29.85025	333062
Carga de Impacto	4.07	16.44348	89.25412	332992
71 cargas de frenado	1.37	16.44658	30.00437	333063
Carga de Impacto	4.07	16.46449	89.67111	333064
71 cargas de frenado	1.37	16.46762	30.1325	332994
Carga de Impacto	4.07	16.48571	90.06334	333065
71 cargas de frenado	1.37	16.48887	30.3031	333066
Carga de Impacto	4.07	16.50719	90.65792	332996
71 cargas de frenado	1.37	16.5104	30.47115	333067
Carga de Impacto	4.07	16.52896	91.12987	333068
71 cargas de frenado	1.37	16.5322	30.65812	332998
Carga de Impacto	4.07	16.55103	91.75237	333069
71 cargas de frenado	1.37	16.55432	30.84626	333070
Carga de Impacto	4.07	16.57341	92.19193	333000
71 cargas de frenado	1.37	16.57675	31.01179	333071
Carga de Impacto	4.07	16.59607	92.72286	333072