



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

---

---

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍAS DE SISTEMAS  
UNIDAD ZACATENCO

**“LA PERCOLACIÓN DE ISING SOBRE UN MODELO DEL VOTO  
MAYORITARIO CON TRES ESTADOS”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN  
INGENIERÍA DE SISTEMAS

**P R E S E N T A**

**ATALO TOBÓN CORTÉS**

**DIRECTORES:**

**DR. MIGUEL A. MARTÍNEZ CRUZ  
DR. ALEXANDER BALANKIN**



CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE 2018

## RESUMEN

Nuestra vida está gobernada por redes de todo tipo: la red telefónica, eléctrica, de internet, social, etc. La misma humanidad es parte de una red a través de la cual, sus ideas, afectos y enfermedades son transmitidos. Muchos sistemas sociales son complejos ya que su forma no es regular ni definida, ni tampoco son completamente aleatorios, si no que caen en algún punto intermedio. Sin embargo; varias propiedades de las redes reales (muchas veces complejas) han sido descritas y existen varios modelos que generan redes con características similares.

Todo sistema complejo es no lineal y por lo tanto no pueden ser analizados con conjunto de ecuaciones matemáticas para predecir o explicar dichos sistemas. La simulación basada en agentes, puede explicar fenómenos sociales complejos de manera directa a partir de las acciones e interacciones entre los agentes que constituyen el sistema que se quiere explicar.

En este trabajo se introduce un modelo del voto mayoritario con tres estados en el que cada agente adopta la opinión de la mayoría de sus vecinos que se encuentran activos, siempre y cuando ésta exista, pero el agente se convierte en indeciso si sus vecinos activos se encuentran en un empate o todos los vecinos están indecisos. Las simulaciones numéricas se realizaron sobre redes cuadradas de diferentes tamaños lineales con condiciones periódicas de frontera. Partiendo de una distribución aleatoria de agentes activos, el modelo conduce a un estado estable de no consenso en el que coexisten las tres opiniones. Se encontró que la magnetización del estado de no consenso y la concentración de votantes indecisos en sí mismos se rigen por una composición inicial del sistema y son independientes del tamaño de la red. Además, se encontró que una configuración del estado estable de no consenso experimenta una transición de percolación de segundo orden a una concentración crítica de votantes que mantienen la misma opinión. Las simulaciones sugieren que esta transición pertenece a la misma clase de universalidad de percolación de Ising, ya que

los exponentes críticos encontrados de nuestro modelo son idénticos a todos esos modelos que se encuentran en esta clase de universalidad. Por otro lado, estos hallazgos pusieron de relieve el efecto de la regla de actualización para el vínculo entre agentes vecinos sobre el comportamiento crítico de los modelos que obedecen la regla de la votación mayoritaria siempre que exista una mayoría estricta.

## ABSTRACT

Networks of all sort govern our life: the telephone, electrical, internet, social, etc. The humanity is part of a network, in which ideas, affections and diseases are transmitted. Many social systems are complex and their form neither regular nor definite, nor are they completely random, but they fall somewhere in between. However, several properties of real networks (often complex) have been described and exist now some models that generate networks with similar characteristics.

Complex system are non-linear and therefore these can not be analyzed with a set of mathematical equations to predict or explain these systems. The agent-based simulation can explain complex social phenomena directly from the actions and interactions between the agents that constitute the system than we want to explain.

In this paper, a majority vote model is proposed with three states in which each agent adopts the opinion of the majority of their neighbors who are active, as long as it exists, but the agent does not decide if their active neighbors are in a tie or all the neighbors are undecided. The numerical simulations were carried out in square networks of different linear sizes with periodic boundary conditions. Starting from a random distribution of active agents, the model leads to a stable state of non-consensus in which the three opinions coexist. It was discovered that the magnetization of the non-consensual state and the concentration of undecided voters are governed by an initial composition of the system and are independent of the size of the network. In addition, it was found that a steady-state configuration of non-consensus undergoes a transition from second-order percolation to a critical concentration of voters who have the same opinion. The simulations suggest that this transition belongs to the same type of Ising percolation universality. These findings highlighted the effect of the updating rule for the link between neighboring agents on the critical behavior of the models that obey the majority vote rule, as long as there is a strict majority.

## DEDICATORIA

*A mi madre*

*A mi abuelo que ve mira desde el cielo*

*A mi hijo y a mi esposa*

# ÍNDICE

<b>RESUMEN</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>vi</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
Objetivo general .....	7
Objetivos particulares.....	7
<b>JUSTIFICACIÓN</b> .....	<b>8</b>
<b>1. Marco teórico</b> .....	<b>9</b>
1.1. Sistemas complejos .....	9
1.2. Redes y complejidad.....	11
1.2.1. Antecedentes .....	12
1.2.2. Conceptos y definiciones.....	14
1.2.3. Redes complejas.....	18
1.2.4. Redes de mundo pequeño .....	18
1.2.5. Redes aleatorias .....	19
1.2.6. El modelo de Watts-Strogats.....	20
1.2.7. Redes libres de escala .....	21
1.3. Percolación .....	22
1.3.1. Introducción.....	22
1.3.2. Conceptos de la teoría de percolación .....	22
1.3.3. Tipos de percolación .....	27
1.3.4. Percolación de sitio-enlace.....	29
1.4. Simulación Montecarlo.....	30
1.5. Transición de fase.....	33
1.6. Algunos modelos importantes.....	34
1.6.1. Modelo del votante y la regla de la mayoría .....	34
1.6.2. Modelo de Ising .....	36
1.6.3. Modelo de Galam .....	37
1.6.4. Modelo de Barabási-Albert.....	39
1.6.5. Modelo de Shelling.....	41
<b>2. Marco metodológico</b> .....	<b>43</b>
2.1. La Teoría General de Sistemas .....	43

2.1.1.	Características de los sistemas .....	44
2.1.2.	Clasificación de los sistemas.....	45
2.1.3.	Disciplinas relacionadas con las metodologías .....	47
2.1.4.	Los sistemas suaves y duros .....	48
2.2.	Proceso general de la simulación .....	48
2.3.	Marco metodológico del presente trabajo .....	49
2.4.	El software Net-Logo .....	51
<b>3.</b>	<b>Desarrollo .....</b>	<b>53</b>
3.1.	Modelación basada en agentes .....	53
3.1.1.	Conceptos básicos .....	54
3.2.	Definición del modelo.....	55
3.2.1.	Agentes y espacio .....	57
3.2.2.	Variables de estado.....	58
3.2.3.	Condiciones iniciales .....	58
3.2.4.	Tiempo .....	59
3.2.5.	Reglas de transición .....	60
3.2.6.	Desarrollo del modelo propuesto.....	61
<b>4.</b>	<b>Análisis, Resultados y discusión .....</b>	<b>65</b>
4.1.	Las simulaciones del modelo .....	65
4.2.	Los clusters en el modelo .....	69
4.3.	Los exponentes críticos .....	71
4.4.	Discusión .....	73
	<b>Conclusiones.....</b>	<b>74</b>
	<b>Trabajos a futuro .....</b>	<b>75</b>
	<b>Referencias .....</b>	<b>77</b>
	<b>Anexos .....</b>	<b>84</b>
	<b>Glosario de términos .....</b>	<b>91</b>

---

---

## INTRODUCCIÓN

### **La ciencia de las redes complejas**

El mundo en el que vivimos hoy en día es un mundo dominado por redes de todo tipo, no sólo en el sentido tecnológico sino social e inclusive biológico. Las redes biológicas son representaciones abstractas de sistemas biológicos, los cuáles capturan muchas de sus características esenciales. Dentro de la red, las moléculas son representadas por nodos y sus interacciones son representadas por enlaces (o arcos) (Alon, 2003). Sería virtualmente imposible concebir nuestra vida actual sin una red eléctrica, telefónica, de transporte, de internet, social, etc. La humanidad misma es parte de una red con sus contactos personales, dónde sus ideas, afectos y enfermedades son transmitidos. También podemos encontrar redes en la naturaleza como las redes neuronales y las reacciones químicas entre proteínas.

Recientemente varias propiedades de las redes reales se han descrito y se han propuesto muchos modelos que pueden generar redes con las mismas características. Una característica muy importante de este tipo de redes es que su estructura no está dada de forma regular y definida, ni tampoco es completamente aleatoria, sino que es *compleja* y que cae en algún punto entre las anteriores. Esto quiere decir que las propiedades de las redes complejas no pueden ser reducidas a un conjunto de componentes individuales. Como resultado de la ciencia de las redes complejas ha surgido en la intersección de diversas disciplinas como la física, las ciencias de la computación, sociología, etc.

### **Las gráficas como modelos de redes**

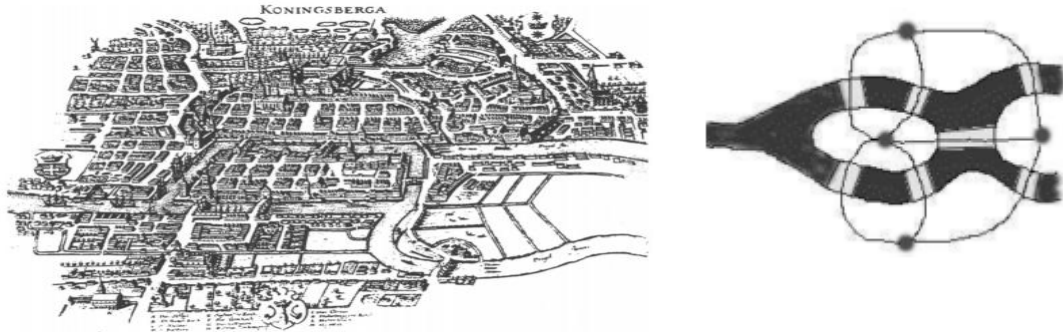
El estudio de las redes tiene su base matemática en la teoría de gráficas, disciplina que tuvo sus orígenes en 1736 cuando Leonhard Euler publicó "*Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*" donde presentó una solución general al problema de los puentes de Königsberg, preguntándose si era posible establecer un



---

---

recorrido que cruzara por todos los puentes que cruzaba por el río Pregel (pasando por cada puente sólo una vez). Euler, estableció los fundamentos para la teoría de gráficas.



**Figura 0.11.** Del lado izquierdo la ciudad de Königsberg en el siglo XVII, del lado derecho su representación en una gráfica donde cada nodo representa una sección de la ciudad y cada arista un puente.

En 1951 comenzó toda una rama en la teoría de gráficas, cuando Solomonoff y Rapoport (Solomonoff & Rapoport, 1951) propusieron lo que sería el primer estudio sistemático de lo que se denomina *gráfica aleatoria*, o sencillamente un conjunto de vértices conectados entre sí de manera aleatoria por aristas. Una década después Paul Erdős y Alfred Renyi (Erdős & Renyi, 1960) retomaron éstas ideas y establecieron las bases de la teoría moderna de gráficas aleatorias. Erdős y Renyi muestran que muchas de las propiedades de las gráficas aleatorias no aparecen de forma gradual sino inmediata, cuando se alcanza cierto número de conexiones en la gráfica. Al combinar la teoría de gráficas con la teoría de probabilidades, las gráficas aleatorias dieron un giro totalmente nuevo al estudio de las redes.

### **Distancia, acoplamiento y conectividad**

Cuando Erdős y Renyi propusieron los modelos de redes aleatorias no tenían la idea de que éstas sirvieran como representaciones de las redes reales. Por ejemplo,

---

<sup>1</sup> Figura tomada de (Hopkins & Wilson, May 2004).

---

---

las relaciones sociales o redes tecnológicas no se generan completamente de manera aleatoria, por lo que se supone que existe algo más de por medio.

A finales de los 60s el sociólogo Stanley Milgram decidió poner en práctica la idea de que vivimos en un mundo pequeño, de tal forma que el mundo visto como una red de contactos sociales es relativamente pequeño y que era posible conectar cualesquiera dos personas en una cadena corta de conocidos entre sí. Para probar esto, Milgram junto con Jeffrey Travers (Travers & Milgram, 1969) realizaron una serie de experimentos, escogiendo a un individuo que sería el objetivo y un grupo pequeño inicial de personas. A cada una de estas personas se le asignaba un paquete que debían tratar de hacerlo llegar al individuo objetivo, pasándolo solo a una persona conocida y dándole instrucciones de hacer lo mismo hasta que eventualmente, el paquete llegara a su destino final. En total reclutaron 298 personas como el grupo inicial, de los cuales 64 paquetes llegaron a su destino final. El número de intermediarios entre cada cadena variaba de 1 a 11, dando una media de 5.2, esto quería decir que entre la persona inicial y la final, el paquete cambió de manos 6 veces, de ahí la frase popular de “seis grados de separación” (Milgram, 1967).

Aunque los resultados de Milgram han sido fuertemente cuestionados debido a que sólo eligió a personas de dos ciudades cercanas entre sí, sus ideas han sido una inspiración para el surgimiento de nuevos modelos de redes. Por una parte vislumbró que sin importar el tamaño de una red social, en promedio es posible conectar a dos personas con un número relativamente pequeño de saltos. Por otra parte, Milgram notó que si la persona A tenía dos conocidos A y B, entonces era posible que B y C también se conocieran entre sí, esta propiedad es conocida como *acoplamiento o transitividad*.

Fue hasta 1998 que Duncan Watts y Steven Strogatz (Watts & Strogatz, 1998), retomando las ideas de Milgram, propusieron un nuevo modelo de gráfica que definieron como *red de mundo pequeño*, ya que presentaba un bajo promedio de distancia entre sus nodos y al mismo tiempo, algo que no se da en las redes aleatorias: un alto

---

---

grado de transitividad, éste modelo, parte de una red regular y se va introduciendo cierta aleatoriedad al ir reconectando con cierta probabilidad algunas aristas.

En 2002, del modelo propuesto por Watts y Strogatz, el físico Albert-László Barabási, con su estudiante Reka Albert, realizaron estudios sobre la conectividad en el internet utilizando programas a los que llamaron “robots”, los cuales se dedicaban a recolectar ligas entre páginas web. Descubrieron para su sorpresa que la red no tenía una distribución homogénea en el número de conexiones, sino que unos cuantos nodos presentaban un número de conexiones mocho mayor al promedio. A éstos nodos de alta conectividad se le llamó “hubs” y se ha observado que otras redes como las de transporte, contactos sexuales, neuronales, entre otras; presentan nodos equivalentes a ellos. A tales redes se les dio el nombre de *redes libres de escala*<sup>2</sup> y establecieron un algoritmo para establecerlas (Albert & Barabási, 2002).

Con los modelos propuestos por Watts-Strogatz y Barabási, comenzó el estudio de las redes complejas, el cual se ha enfocado en generar redes que presenten tres características principales: distancia, acoplamiento y distribución de la conectividad entre los nodos de las redes.

### **Los modelos basados en agentes**

En 1940 John von Neuman, en su intento por desarrollar una máquina teórica capaz de auto reproducirse, definió un *autómata celular*. Esta máquina consiste en una malla de celdas con estados que cambian a lo largo del tiempo en base a una serie de reglas predefinidas. Lo importante de este modelo es que el estado de cada celda depende del estado de sus vecinos en la malla, introduciendo un enfoque más espacial al sistema, descubriéndose comportamientos complejos generados por reglas

---

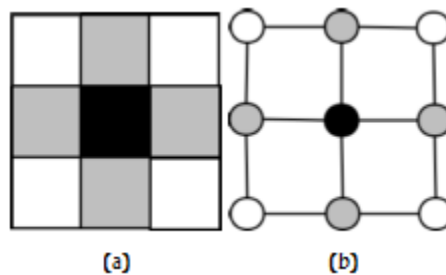
<sup>2</sup> Ver p. 18

---

---

sencillas. Los autómatas celulares han encontrado diversas aplicaciones como en el estudio del esparcimiento de epidemias, el comportamiento social, etc.

Desde el punto de vista topológico, es posible utilizar gráficas que representan a un autómata celular, simplemente sustituyendo cada celda por un nodo y agregando una conexión entre cada pareja de nodos que sean vecinos en la maya del autómata celular (ver Figura 0.2).



**Figura 0.2<sup>3</sup>.** (a) autómata celular de dos dimensiones de 3x3. (b) representación en forma gráfica del autómata, donde cada nodo representa una celda y la conexión indica que cada par de nodos son vecinos.

Sin embargo, el tipo de red resultante en dicha transformación es de clase regular; ya que la mayoría de los nodos están conectados de igual forma con el mismo número de vecinos y no representa lo que sería una red social real en cuanto a la conectividad entre los contactos de los individuos.

Aun así, el autómata celular representó el surgimiento de lo que hoy se conoce como un “modelo basado en agentes”, los cuáles consisten en modelar fenómenos como sistemas dinámicos (sistemas cuyo estado evoluciona con el tiempo) de individuos que interactúan entre sí. Estos modelos, son parte del área de estudio de las ciencias computacionales, los cuáles consisten en la construcción de modelos matemáticos y soluciones numéricas para resolver problemas en diversas disciplinas por medio de simulaciones en una computadora.

---

<sup>3</sup> Elaboración propia.



---

---

## Objetivo general

Analizar la percolación de Ising sobre un modelo del voto mayoritario con tres estados para determinar sus principales características y compararlas con las de otros trabajos relacionados.

## Objetivos particulares

- Construcción de una red cuadrada de diferentes tamaños con dinámica del voto mayoritario con tres estados diferentes para la realización de las simulaciones.
- Caracterizar la transición de la percolación.
- Determinar la concentración crítica  $f_c(L)$ .
- Determinar los exponentes críticos para la transición de la percolación en el estado estable de no consenso.

---

---

## JUSTIFICACIÓN

El modelo de Ising ha sido investigado intensamente y muchos sistemas físicos pueden ser descritos por este simple pero no trivial modelo (Deng & Blöte, 2003). Sin embargo, el modelo se ha utilizado en su forma original o ciertas variantes del modelo pero siempre con sólo dos opciones, a saber spins que toman valores  $\pm 1$ .

Al tratar de simular sistemas sociales es preferible la existencia de modelos con más de dos opciones, además de que la mayoría de los sistemas sociales son de no consenso, pues es muy común ver la existencia de ideas contrarias conviviendo en “armonía”. Sin embargo se han llevado numerosas simulaciones que siempre llegan a un consenso lo cual rara vez sucede en sistemas sociales.

De ahí la importancia de introducir modelos con más de dos opciones y que al mismo tiempo se clasifiquen como modelos de no consenso para llevar a cabo la simulación de sistemas de tipo social pues pocos autores en la actualidad han manejado modelos de este tipo.

---

---

# 1. MARCO TEÓRICO

## 1.1. Sistemas complejos

Un *sistema* es un conjunto de elementos que se encuentran interrelacionados entre sí y que el comportamiento de cada uno de sus componentes puede afectar el comportamiento del todo. Muchos problemas son el resultado de un proceso dentro de un entorno natural o social y por esto, nos será muy difícil solucionarlo si no se toman en cuenta todos los aspectos que lo integran, es decir; tenemos que tratarlo desde un enfoque totalizador (sistémico).

Los sistemas pueden ser *cerrados* o *abiertos*. Los primeros son sistemas físicos que no interactúan con otros agentes físicos situados fuera de él y por tanto no está conectado casualmente ni relacionando con nada externo a él. El único sistema cerrado que se puede considerar como tal es el universo, sin embargo; en la práctica se pueden estudiar muchos sistemas que tienen poca interacción con el exterior, para lo cual se consideran como sistemas cerrados, un ejemplo sería un termo. Por otro lado, los abiertos son aquellos que tienen interacción con el medio en el que se desarrollan. Así por ejemplo, los sistemas sociales son sistemas abiertos.

La palabra *complejidad* viene del latín “complectere”, cuya raíz “plectere” significa tejer o trenzar, que junto con el prefijo “com” añade el sentido de dualidad. Dos elementos opuestos que se enlazan íntimamente, pero sin anular su individualidad.

Un *sistema lineal* es cuando al descomponerlo en sus partes y estudiar cada una de ellas por separado, se obtiene la misma información que al estudiar el sistema en su conjunto. En un sistema no-lineal, esto no es posible. Al tratar de encontrar un camino de regreso dio lugar al estudio de los sistemas complejos. Por ejemplo, el sistema solar es un sistema lineal, y por tanto su comportamiento (como un todo) se puede predecir a partir de las ecuaciones newtonianas que rigen el movimiento de los



---

---

planetas. Sin embargo los sistemas sociales suelen ser no-lineales, es decir; sus propiedades son algo más que la simple suma de las propiedades de los individuos que la integran. Así que, no podremos analizar un fenómeno social como un todo estudiando solo a los individuos que lo constituyen.

La dinámica de los sistemas complejos da lugar a patrones globales que surgen a través de interacciones locales de tal manera que, donde antes había espacio desordenado o completamente homogéneo, ahora surgen orden y estructuras que emergen de manera espontánea debido a que el sistema se encuentra fuera de equilibrio. Éstos sistemas son capaces de generar orden espacial en donde no lo había anteriormente, la homogeneidad del sistema se pierde para dar lugar a estructuras discernibles. Éste proceso se denomina *ruptura de simetría*.

Indirectamente se produce un comportamiento global difícil de predecir. Éstas son las llamadas *propiedades emergentes* del sistema. "La *emergencia* ocurre cuando las interacciones de los objetos en determinado nivel dan lugar a diferentes tipos de objetos en otro nivel" (García-Valdecasas Medina, 2011). Un sistema es *emergente* cuando no se pueden utilizar las categorías propias de las unidades que lo integran para describirlo, sino nuevas categorías.

Un *sistema complejo* es aquel que está formado por un conjunto grande de elementos que interactúan entre sí de manera no lineal, y que pueden modificar sus estados internos como resultado de sus interacciones. Este proceso puede generar comportamientos colectivos, que no están definidos en los componentes individuales y que no pueden ser reducidos y explicados tomando aisladamente a cada uno de los elementos. Así pues, los sistemas complejos son necesariamente no lineales.

Que los sistemas sociales sean a menudo emergentes significa que las acciones de los individuos generan frecuentemente resultados sociales imprevistos. Todo sistema emergente es complejo, y por tanto, no lineal. Muchos sistemas sociales son complejos y emergentes y éstos, han sido difíciles de entender porque no han podido

---

---

ser analizados con las herramientas matemáticas tradicionales; es decir, no se encuentran un conjunto de ecuaciones matemáticas que puedan ser utilizadas para predecir o explicar dichos sistemas. La simulación basada en agentes, puede explicar fenómenos sociales emergentes de manera directa a partir de las acciones e interacciones entre los agentes que constituyen el sistema que se quiere explicar.

Algunas características de los sistemas complejos son las siguientes:

- Son sistemas no-lineales que por lo regular presentan interacción de fuerzas antagónicas o en conflicto.
- Obedecen a dinámicas locales con restricciones globales que restringen lo que es viable en el universo de lo imaginable.
- Implican ruptura de simetría (bifurcaciones).
- Presentan patrones emergentes (frecuentemente fractales).

## **1.2. Redes y complejidad**

La *teoría de redes* se encarga del estudio de los sistemas que interactúan entre sí y se pueden representar en forma de gráficas. La modelación de redes ha permitido la solución de problemas reales de sistemas financieros, de información, tecnológicos, biológicos, etc.

La ciencia de la complejidad emerge como un acercamiento a la investigación de los sistemas. En sí misma no es una teoría sino una colección de ellas. La complejidad y las redes tienen como objetivo el estudio de la dinámica colectiva, son un área de investigación interdisciplinaria que busca mejorar nuestro entendimiento de los sistemas complejos.

Las ciencias de la complejidad están en un rápido crecimiento gracias al reto de entender muchos problemas en economía, medicina, epidemiología, transporte, neurociencia, genómica, reconocimiento de patrones, detección de comunidades,

---

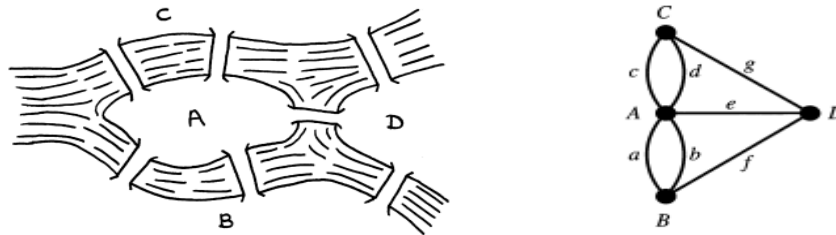
---

crimen, ecología, cambio climático, redes sociales, publicidad y demás temas de interés. A pesar de la gran diferencia en la naturaleza, en los casos anteriores, se han encontrado muchas características en común (Scheffer, 2009).

Más adelante se hará una breve descripción de redes complejas como son: redes aleatorias, redes de mundo pequeño, redes libres de escala y redes multicapa.

### 1.2.1. Antecedentes

En 1736 el matemático Leonard Euler se planteó el problema de los puentes de Königsberg (Kaliningrado), ciudad conformada por riberas y dos islas del río Pregel, Prusia (Rusia). Ambas islas estaban comunicadas entre sí y ambas con riberas por medio de puentes (ver Figura 1.1).



**Figura 1.1.** A) Río Pregel con los puentes de Königsberg, 1736. b) Modelo de Euler<sup>4</sup>.

El problema consistía en encontrar un camino que iniciara y terminara en el mismo punto después de atravesar los siete puentes de la ciudad sin pasar dos veces por ninguno de ellos. Euler realizó un modelo del problema, representando a las islas por un punto y, a cada puente por una línea continua. Esta fue la primera vez que se utilizó una red para la solución de un problema real.

---

<sup>4</sup> Figura tomada de (Hopkins & Wilson, May 2004).

---

---

En 1847, el físico prusiano Gustav Kirchhoff estudió las gráficas conexas con el objetivo de desarrollar un análisis de las redes eléctricas mediante el estudio de la intensidad y la diferencia de potencial de un circuito eléctrico.

En 1929, el escritor Frigyes Karinthy publicó *Everything is Different*. Entre las piezas se encontraba un cuento titulado Chains en el que Karinthy se planteó en un contexto ficticio; preguntas relacionadas con la teoría de redes. En Chains, Karinthy argumenta que el mundo es cada vez más pequeño y propone para demostrar su tesis un argumento social, afirmando que la gente está cada vez más conectada entre sí a través de sus conocidos y que la densa red de amistad que rodea a cada persona lleva a un mundo interconectado en el que todos, en la tierra, tiene como máximo cinco conocidos de distancia de cualquier otra persona; surgiendo así la *Teoría de los Seis Grados de Separación*, que afirma que cualquier persona del planeta está conectada con otra a través de una cadena de conocidos con no más de seis eslabones o puntos de unión.

En 1950, Erdős y Rényi comenzaron sus trabajos en redes aleatorias, dando lugar al interés por parte de la comunidad sociológica en las aplicaciones de la teoría de redes. Al mismo tiempo el politólogo Ithiel de Sola Pool y el matemático Manfred Kochen abordaron por primera vez muchas preguntas en el campo de las redes de mundo pequeño, este trabajo dio lugar al famoso experimento de mundo pequeño llevado a cabo en 1969 por Stanley Milgram.

En 1951, Anatol Raport y Ray Solomonoff presentan el primer trabajo de lo que hoy se conoce como red aleatoria. Los autores discuten tres sistemas naturales en los que podrían aparecer este tipo de redes: redes neuronales, redes sociales de contactos físicos que son responsables de la propagación de enfermedades epidémicas y un problema de red arraigado en la genética.

---

---

En 1967, el sociólogo Stanley Milgram desarrolló un experimento, el Fenómeno del mundo pequeño, con el cual logró probar de manera social la popular teoría de los seis grados de separación.

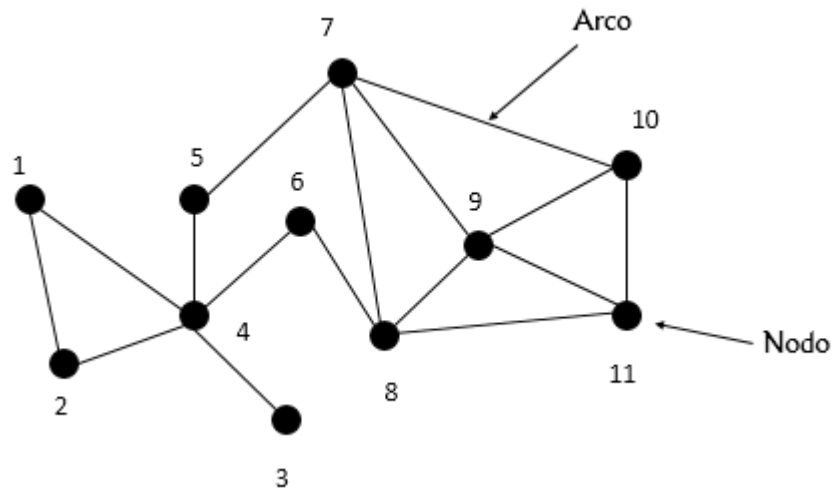
En 1998, el físico y sociólogo Duncan Watts y el matemático Steven Strogatz publicaron *Collective dynamics of small-world networks* en el que explican un algoritmo de construcción de redes aleatorias el cual establece una red inicial unidimensional con  $n$  nodos en forma de anillo, de tal forma que cada uno de los nodos de una a  $2k$  nodos, la probabilidad de conectar un nodo con otro cualquiera es  $p$ .

Albert-Lászlo Barabási y Réka Albert han realizado trabajos importantes en el área de redes en su artículo *Emergence of scaling in random networks* (Albert-Lászlo & Réka, 1999), donde hablan de las redes libres de escala, redes que presentan nodos altamente enlazados, es decir; que poseen un gran número de enlaces con otros nodos.

### 1.2.2. Conceptos y definiciones

A continuación se menciona una serie de definiciones que nos permitirá familiarizarnos con la notación de teoría de redes.

Una *red* se define como el conjunto de puntos unidos par a par a través de líneas. De manera formal, una red  $G$  es una pareja ordenada de conjuntos disjuntos  $(V, A)$  tal que  $A$  es un subconjunto de  $V^2$ , pares ordenados de  $V$ . En una red,  $V = V(G)$  es el conjunto de nodos de  $G$  y  $A = A(G)$  es el conjunto de arcos. Un *arco*  $(x, y)$  surge de la unión de los nodos  $x$  y  $y$ , además; si  $(x, y) \in A(G)$ , entonces  $x$  y  $y$  son *adyacentes* o *vecinos* en  $G$ . Al conjunto de nodos adyacentes a un nodo  $x$ , es llamado *vecindad* de  $x$ .



**Figura 1.2<sup>5</sup>.** Red con 11 nodos y 15 arcos. La vecindad del nodo 9 está conformada por {7,8,10,11}.

En una red de  $N$  nodos, el número de arcos puede variar entre  $C=0$  y  $C_{max}$ , donde

$$C_{max} = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \quad (1.1)$$

Una red de orden  $N$  y tamaño  $\binom{N}{2}$ , es llamada *red completa*, red en la que existe por lo menos un arco entre cada par de nodos. A la red con  $N=1$  y  $C=0$ , es llamada *red vacía* o *trivial*. Cuando no puede haber un único arco entre el mismo par de nodos, nos referimos al conjunto de arcos como un arco múltiple. A los arcos que conectan a un nodo en sí mismo se les denomina *rizos*. Así, se puede definir una *red simple*, como la red que no presenta arcos múltiples ni rizos y una *red regular* es aquella en la que todos los nodos tienen el mismo número de arcos.

<sup>5</sup> Elaboración propia.

---

---

Una *red dirigida* es aquella en la que sus arcos o enlaces tienen dirección, es decir; cada uno de los arcos se une a un par ordenado de nodos. De acuerdo a lo anterior, el arco dirigido  $v_i v_j$  es distinto al arco  $v_j v_i$ . Por otro lado, en una red no dirigida, ninguno de los arcos tiene dirección.

Una propiedad fundamental de los nodos es el *grado*, éste representa el número de enlaces que tiene cada nodo hacia otros nodos. El grado puede representar el número de operaciones que realizan los bancos con el resto de los formadores en el mercado de deuda mexicano. Denotamos con  $k_i$  el grado del nodo  $i$  –ésimo en la red. Por ejemplo, para la red no dirigida de la Figura 1.2 tenemos que  $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 1, k_4 = 5, k_5 = 2$ , etc.

En una red no dirigida el número total de arcos  $C$ , se puede expresar como la suma de los grados del nodo.

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \quad (1.2)$$

Aquí, el factor  $\frac{1}{2}$  corrige el hecho de que en la ecuación (1.2), cada arco se cuenta dos veces. Por ejemplo, el arco entre los nodos 5 y 7 de la Figura 1.2 se contará una vez en el grado del nodo 5 y una vez en el grado del nodo 7.

El grado medio de un nodo, que no es más que el promedio simple del grado de todos los nodos, se calcula mediante la siguiente ecuación para una red no dirigida:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N} \quad N > 0 \quad (1.3)$$

En las redes dirigidas se distingue entre el *grado interno*  $k_i^{int}$ , que representa el número de arcos dirigidos al nodo  $i$ , y el *grado externo*,  $k_i^{ext}$ , que representa el número

---

---

de enlaces que se dirigen desde el nodo  $i$  hacia otros nodos, por último, el *grado total* de un nodo,  $k_i$ , dado por:

$$k_i = k_i^{int} + k_i^{ext} \quad (1.4)$$

El número total de arcos en una red dirigida es:

$$L = \sum_{i=1}^N k_i^{int} = \sum_{i=1}^N k_i^{ext} \quad (1.5)$$

Por lo tanto el grado medio de una red dirigida es:

$$\langle k^{int} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{int} = \langle k^{int} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{ext} = \frac{L}{N} \quad (1.26)$$

La *distribución del grado*  $p_k$ , proporciona la probabilidad de que un nodo seleccionado al azar en la red tenga grado  $k$ . Al ser  $p_k$  una probabilidad, debe cumplir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

Para una red con  $N$  nodos la distribución de grado está dado por:

$$p_k = \frac{N_k}{N}$$

donde  $N_k$  es el número de nodos de grado  $k$ . Por lo tanto, el número de nodos con grado  $k$  puede obtenerse a partir de la distribución de grado como  $N_k = N p_k$ .

A continuación se mencionarán tres tipos de redes complejas como son: redes aleatorias, redes de mundo pequeño y redes libres de escala.



---

---

### 1.2.3. Redes complejas

Las redes complejas pueden clasificarse en dos principales grupos, según sus propiedades de conectividad. Las redes exponenciales, en las cuales la distribución de conectividad de los nodos (la probabilidad  $p(k)$  de que un nodo esté conectado a otros  $k$  nodos se ajusta a una exponencial y la segunda identificada por las redes libres de escala (scale-free lattice) que exhiben una distribución de conectividad de ley de potencia (Montesinos-López & Hernández-Suárez, 2007).

### 1.2.4. Redes de mundo pequeño

Las redes desordenadas, tales como las redes de mundo pequeño son de interés reciente debido a su potencial como modelos para la interacción de redes en sistemas complejos. Específicamente, ninguna red aleatoria ni red regular parecen ser adecuadas para el estudio de sistemas complejos del mundo real tales como redes de reacción química, redes neuronales, redes de comida, redes sociales, redes de colaboración científica y redes computacionales.

Las redes de mundo pequeño emergen como el resultado del reemplazo aleatorio de una fracción  $p$  de enlaces de una red  $d$ -dimensional con nuevos enlaces aleatorios, interpolan entre dos casos límite de una red regular  $p = 0$  y un grafo aleatorio  $p = 1$ . Una red de mundo pequeño se caracteriza por las siguientes propiedades: 1) la vecindad local es preservada (para redes regulares); y 2) el diámetro de la red, cuantificado por el promedio de la distancia más pequeña entre dos nodos, incrementa de manera logarítmica con el número de nodos  $N$  (para redes regulares). La última propiedad les da el nombre de *mundo pequeño* a estas redes, porque es posible conectar dos nodos cualesquiera de la red por medio de pocos enlaces, y la conectividad local podría sugerir que la red es de dimensión finita (Amaral, Scala, & Stanley, 2000).

Dentro de las redes de mundo pequeño, las más representativas son las siguientes: a) red regular, en el cual cada vértice se comunica con sus  $k/2$  vértices

---

---

vecinos; b) red aleatoria, en la que cada vértice se conecta con todos los demás; c) el modelo de Watts-Strogats, esto es; una red intermedia entre la regular y la aleatoria en la cual cada vértice se conecta con sus  $k/2$  vértices vecinos, localizados a su lado (unos pocos se comunican con vértices lejanos).



**Figura 1.3**<sup>6</sup>. El fenómeno del mundo pequeño, nos permite deducir que dos personas cualesquiera en cualquier parte del mundo se pueden enlazar a través de una cadena con pocos conocidos en promedio. La llamada propiedad el mundo pequeño, significa que la distancia entre dos nodos de una red es inesperadamente pequeña y equivalente a  $\frac{\ln N}{\ln k}$

### 1.2.5. Redes aleatorias

La construcción de una red aleatoria se logra mediante la colocación de arcos al azar entre los nodos, así; una *red aleatoria* consiste de  $N$  nodos enlazados par a par con probabilidad  $p$ . Los modelos de red aleatoria más usados son:

- Modelo  $G(N, p)$

En este modelo cada par de los  $N$  nodos está enlazados con probabilidad  $p$ ; estemodelo fue introducido por Gilbert (Gilbert, 1959).

- Modelo  $G(N, L)$

---

<sup>6</sup> Elaboración propia.

---

---

Este modelo está formado por  $N$  nodos, enlazados con  $L$  arcos colocados al azar. Este modelo de red aleatoria fue descrito por Erdős y Rényi en 1959.

Nótese que el modelo  $G(N, p)$  fija la probabilidad  $p$  de que dos nodos estén conectados y el modelo  $G(N, L)$ , fija el número total de arcos en la red.

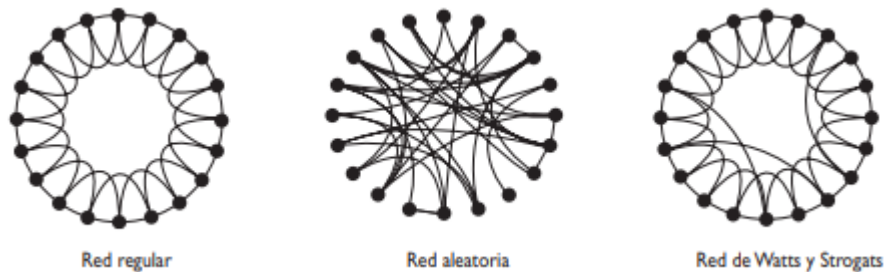


Figura 1.4<sup>7</sup>. Redes de mundo pequeño.

### 1.2.6. El modelo de Watts-Strogats

El modelo de Watts y Strogats es uno de los más usados para modelar la transmisión de enfermedades infecciosas porque supone un patrón de contactos más real, puesto que en el mundo real cada individuo tiene contactos con un subconjunto de éstos. Por consiguiente, es razonable asumir que cada individuo se comunica con sus  $k$  vecinos inmediatos y que de los  $N$  individuos, sólo algunos de ellos, además de comunicarse con sus  $k$  vecinos inmediatos, se comunican con algunos sujetos lejanos (contactos a distancia). Esto significa que el patrón de contactos entre individuos se lleva a cabo bajo una red del mundo pequeño, donde cada individuo se representa por un nodo o vértice y los contactos entre individuos se representan por ligas y la transmisión de la enfermedad puede tener lugar sólo a través de estos nexos (Montesinos-López & Hernández-Suárez, 2007).

---

<sup>7</sup> Figura tomada de (Montesinos-López & Hernández-Suárez, 2007).

---

---

### 1.2.7. Redes libres de escala

Una característica importante y común entre el modelo de grafo aleatorio de Erdős-Rényi y el modelo de mundo pequeño de Watts-Strogatz es que la distribución de la conectividad de una red alcanza un valor promedio y decae exponencialmente. Estas redes son llamadas “*redes exponenciales*” o “*redes homogéneas*”, porque cada nodo tiene aproximadamente el mismo número de conexiones.

Otro descubrimiento reciente e importante en el campo de las redes complejas es la observación de que muchas redes complejas de gran escala son libres de escala, es decir, sus distribuciones de conectividad están en forma de leyes de potencia que es independiente de la escala de la red (Wang & Chen, 2003) . A diferencia de una red exponencial, una *red libre de escala* es no homogénea en su naturaleza: la mayoría de nodos tienen muy pocas conexiones y muy pocos nodos tienen muchas conexiones. La World Wide Web (WWW), es un ejemplo de una red libre de escala.

Las redes libres de escala tienen una distribución de grado  $P(k)$ , que para valores grandes se puede aproximar por:

$$P(k) \cong Ck^{-\psi} \quad \text{con } \psi \in (2,3]$$

Por otro lado, las redes libres de escala presentan dos características principales:

**Crecimiento.** La gran variedad de redes libres de escala están en constante crecimiento, es decir, el número de nodos  $N$  aumenta de acuerdo a la dinámica del tiempo.

**Preferencia de enlace.** Los nuevos enlaces no están asociados al azar, sino que siguen el llamado apego preferencial, es decir; los nodos más antiguos están más propensos a adquirir nodos nuevos.

---

---

## **1.3. Percolación**

### **1.3.1. Introducción**

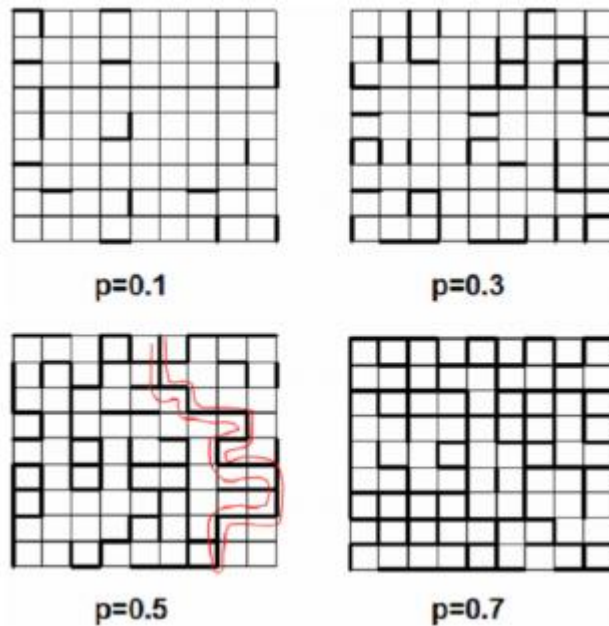
La teoría de percolación se remonta a la segunda guerra mundial cuando Flory y Stockmayer Flor y Stockmayer la usaron para describir como pequeñas moléculas derivaban en la formación de macromoléculas más y más grandes dependiendo de la formación de enlaces químicos entre las moléculas originales. Este proceso de polimeración podía alcanzar la gelatinización, debido a formación de una red de enlaces químicos expandiéndose por el sistema entero. De este modo, las pequeñas moléculas corresponden a nuestros nodos (cuadritos), las macromoléculas a nuestros clusters, y la red a nuestro cluster de percolación (Stauffer & Aharony, 2010).

En general, el comienzo de la teoría de percolación está asociada a la publicación en 1957 de Broadbent y Hammersley los cuáles introdujeron el nombre y lo abordaron desde el punto matemático usando conceptos de la geometría y la probabilidad, en donde visualizaron a la simulación por computadoras como una herramienta útil para su aplicación.

### **1.3.2. Conceptos de la teoría de percolación**

La percolación (en inglés, infiltración), se presenta de manera habitual en la vida cotidiana, como por ejemplo: el agua en forma de vapor “percola” a través del café molido de la cafetera.

Otros ejemplos son: la extracción de petróleo del subsuelo, haciéndolo percolar a través del medio rocoso/poroso. La percolación de infecciones o epidemias a través de una población: si la probabilidad de contagio es alta, la infección se “abre paso” o percola en una población dada.



**Figura 1.5<sup>8</sup>.** Percolación de enlace sobre una red cuadrada (líneas delgadas) para diferentes valores de la probabilidad  $p$ . Las líneas sombreadas son ocupadas con una probabilidad  $p$ . La curva roja muestra la ruta de percolación más corta en  $p = p_c = 0.05$ .

La *permeabilidad* es la capacidad de un medio poroso para que un fluido lo atravesase sin alterar su estructura interna. La *percolación* es la propagación de un fluido dentro de un medio aleatorio o desordenado dependiendo de las conexiones que existan entre sus partículas. En un *proceso de difusión* la circulación de las partículas se realiza al azar (p. ej. El movimiento de una molécula dentro de un gas) con el medio jugando un papel completamente pasivo. En cambio, en un *proceso de percolación* el movimiento del fluido está gobernado por el medio (López Acosta, 2010, pág. 19).

<sup>8</sup>Figura tomada de (Suki, Bates, & frey, April 2011).

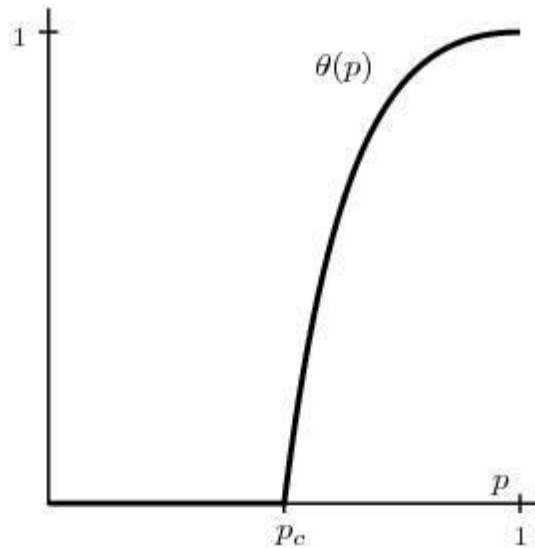
---

---

*La teoría de percolación* es una teoría multidisciplinaria que nos ayuda a estudiar sistemas desordenados donde los elementos del sistema se encuentran aleatoriamente distribuidos, por ejemplo; un bosque que está conformado de árboles y claros (pequeños arbustos) localizados al azar.

Para el estudio de la propagación del fuego en un bosque por simulación, primero se elabora una red donde cada sitio es ocupado por un árbol o se encuentre vacío, donde la probabilidad de que el sitio se encuentre ocupado por un árbol es  $p$ , mientras que la probabilidad de que el sitio se encuentre vacío es  $1 - p$ . Durante el proceso de la simulación, los árboles sólo se quemarán si el árbol del sitio vecino está ardiendo, cada que se da un barrido a través de toda la red constituye una unidad de tiempo llamado paso Montecarlo **MCS** (Monte Carlo step). Para  $p$  cercanos a cero, los árboles se quemarán sólo debido a que no tendrán árboles vecinos, pero si incrementa la probabilidad poco a poco encontraremos que se llega a una probabilidad crítica  $p_c$  (umbral de percolación) donde el fuego se expandirá de manera descontrolada, esto debido a que se formará un agregado percolante que crea conexiones entre todos los lados de la red.

Para una red de tamaño infinito, existe un valor crítico de  $p$  que llamaremos umbral de percolación,  $p_c$  de forma que si  $p > p_c$  existe al menos un camino de nodos interconectados que se extiende por toda la red. Por el contrario, si  $p < p_c$  tendremos agrupaciones de nodos interconectados, pero que no se extienden por toda la red.



**Figura 1.6.** Para  $p < p_c$  el sistema no percola, mientras que para  $p > p_c$  el sistema percola. En particular, para  $p = p_c$  se puede demostrar que la agrupación percolante es un fractal.

Un fractal es un objeto geométrico cuya “masa”, en nuestro caso el número de nodos, crece al aumentar el tamaño lineal del sistema como una ley de potencias

$$M \sim L^{D_f}$$

donde  $D_f$  es la dimensión fractal.

Un *fractal* es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch (o dimensión fractal)  $D_f$ , es estrictamente mayor que la dimensión topológica (Kenkel & Walker, 1996). Topológicamente una línea es unidimensional. Sin embargo la dimensión  $D$  de un trazo fractal en el plano es una función continua con  $1 \leq D_f \leq 2$ . Una serie diferenciable tiene una dimensión fractal  $D_f = 1$  (igual que la dimensión topológica), mientras que un trazo browniano ocupa completamente el espacio topológico bidimensional, tiene una dimensión fractal  $D_f = 2$ . La dimensión del fractal  $1 \leq D_f \leq 2$  cuantifica el grado en que un trazo “llena” el plano. En el mismo sentido, una superficie plana curvada es topológicamente bidimensional, mientras que una superficie fractal tiene una dimensión  $2 \leq D_f \leq 3$ .



---

---

Existen dos tipos de objetos fractales: los matemáticos y los naturales (helecho “cuerno de chivo”, el brócoli, la coliflor, etc.) para los cuales la dimensión no es entera por lo tanto la pendiente de la línea de la ley de potencia no es entera, esto permite medir la dimensión fractal. La grafica de la ley de potencia se construye mediante la relación gráfica del  $\log(P)$ , el  $\log(A)$ , ó el  $\log(V)$  o cualquier otra propiedad del objeto vs la longitud característica ( $L$ ). De aquí que la dimensión fractal se puede definir en términos lineales, planares o volumétricos obteniéndose las dimensiones fractales de perímetro, área y volumen (ver Fig. 1.7). En general, los métodos para determinar la dimensión fractal son empíricos, no matemáticos, y dependen de la disciplina de trabajo, los objetivos buscados y el tipo de datos analizados (Kenkel & Walker, 1996).

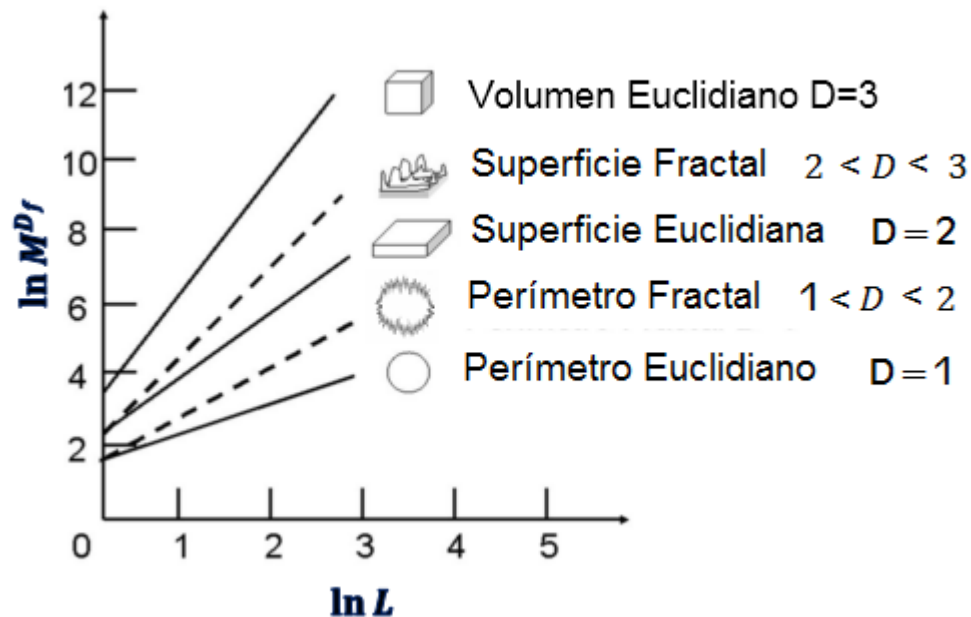


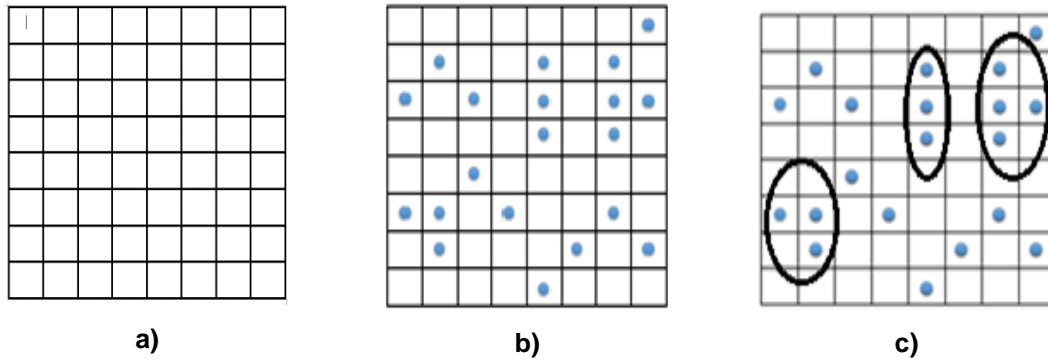
Figura 1.7<sup>9</sup>. Gráfica de la Ley de potencia.

### 1.3.3. Tipos de percolación

Existen dos tipos de percolación, por sitios y por enlaces. La *percolación por sitios* se utiliza comúnmente para la descripción de materiales porosos mientras que la percolación de enlaces es aplicable en procesos de transmisión de fuerzas. Para describir los dos tipos de percolación, consideremos algunos modelos específicos. Consideremos un grafo lineal (ver Figura 1.8), en el cual los vértices son los puntos de este modelo y un par dado de vértices que forman un enlace del grafo están vinculados con probabilidad  $p$  independientemente de los demás pares; los pares que no forman un enlace no están vinculados. Éste es un ejemplo de percolación de enlace. Para que exista una región de percolación no trivial es que el grafo debe ser infinito. Aunque los modelos finitos de este tipo no pueden mostrar una percolación de transición, son de gran interés para la ingeniería de teléfonos. Aquí, las redes son enormes y todavía

<sup>9</sup> Adaptación de: (Peleg, 1993).





**Figura 1.911.** Grupos de agentes. a) Maya cuadrada de 8x8. b) Sitios vacíos y ocupados. c) Agregados formados por dos o más agentes.

### 1.3.4. Percolación de sitio-enlace.

Existe un modelo que combina ambos tipos de percolación conocido como percolación de sitio-enlace (ver Figura 1.10c) donde cada sitio tiene una probabilidad  $p_s$  de estar ocupado en el cual existe una probabilidad  $p_b$  de que dos lugares vecinos estén enlazados.

En este sistema, la probabilidad de ocupación de un sitio  $p_s$ , y la probabilidad de enlace entre dos sitios ocupados  $p_b$ , oscilan entre 0 y 1; así, cuando  $p_s = 1$ , todos los sitios se encuentran ocupados y se obtiene un modelo de percolación de enlace. Por otro lado, si  $p_b = 1$ , todos los sitios vecinos estarán enlazados, por lo que para obtener un agregado infinito de sitios enlazados, bastará con que la probabilidad de ocupación del sistema sea lo suficiente para que exista un agregado infinito de sitios vecinos ocupados (sistema de percolación de sitio).

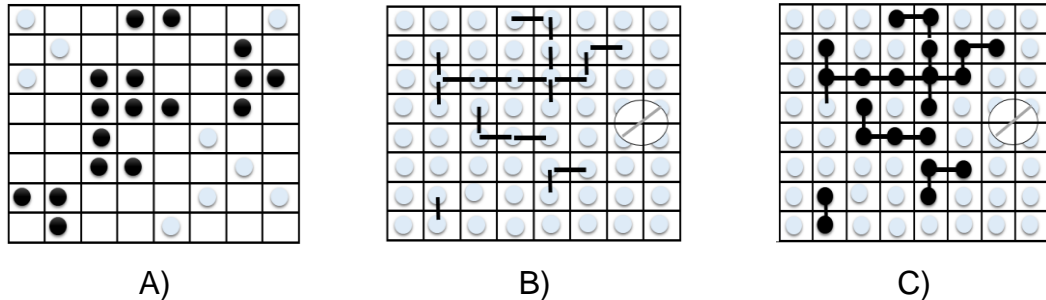
Para valores intermedios de  $p_b$  y  $p_s$ , se obtendrá un sistema en que no todas las posiciones estarán ocupadas y además entre dos posiciones ocupadas vecinas no

<sup>11</sup> Adaptado de: (Stauffer & Aharony, 2010, pág. 2)

---

---

siempre existirá un enlace. Esta situación es la que corresponde a un sistema de percolación sitio-enlace.



**Figura 1.10.**<sup>12</sup> A) Muestra una percolación de sitio, donde los agregados son mostrados en color oscuro intenso. B) Muestra una percolación de enlace. C) Muestra una percolación de sitio-enlace, donde los agregados son mostrados en color oscuro intenso. Las líneas en círculo muestran conexiones no permitidas.

## 1.4. Simulación Montecarlo

Formalmente la probabilidad surge a mediados del siglo XVII cuando el jugador profesional conocido como caballero de Meré le escribe al matemático Blas Pascal, preguntándole una forma de dividir las apuestas de acuerdo a la probabilidad de ganar de cada jugador, para no repartir la apuesta en partes iguales, ya que lo consideraba injusto. Pascal contacto a varios matemáticos, entre ellos a Fermat, y es cuando nace de manera formal, la teoría de probabilidad. En 1657, Christian Huygens, publica un tratado: “sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados”.

En 1777 Mozart, quien además de músico era matemático, utiliza por primera vez la técnica que, más adelante se llamaría Simulación Montecarlo, para componer una obra, un vals de 16 compases titulada: Juego de dados musical.

La técnica de simulación Montecarlo fue retomada hasta la segunda guerra mundial, cuando John Von Newman y Stanislaw Ulam la utilizaron al enfrentarse a un

---

<sup>12</sup> Elaboración propia.

---

---

problema, parte del proyecto Manhattan para el desarrollo de la bomba atómica. Como las ecuaciones analíticas para modelar el proceso eran muy complicadas decidieron utilizar la técnica utilizada por Mozart y le dieron el nombre clave de “Montecarlo”, en referencia al casino de Montecarlo que en esa época era la capital mundial de los juegos de azar.

Desde entonces ha sido usada para resolver muchos problemas de ciencia e ingeniería. Se utiliza como herramienta alternativa para resolver casi cualquier problema que involucre a la probabilidad.

La *simulación* se define como la técnica para resolver problemas que consiste en realizar experimentos en un modelo del sistema. La *simulación* se define como el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y efectuar experimentos con él, con el propósito de entender el comportamiento del sistema. Cuando el sistema es de naturaleza probabilística, la técnica se denomina *simulación Montecarlo*.

La simulación Montecarlo utiliza números aleatorios en lugar de métodos totalmente al azar, como lanzar monedas, lanzar dados, sacar un número en una urna, etc., para obtener resultados de un fenómeno aleatorio dentro del sistema bajo estudio.

Un *número aleatorio* es el resultado de una función que representa el azar. Por un generador de *números aleatorios* se quiere hacer referencia a un mecanismo que produce una secuencia de variables aleatorias  $u_0, u_1, u_2, \dots$ , con las siguientes propiedades:

- a) Cada  $u_i$  está uniformemente distribuidas en (0,1), es decir;

$$u_i \sim Unif(0,1) \quad \forall i$$

- b) Las  $u_i$  son mutuamente independientes, es decir;

$$Cov(u_i, u_j) = 0, \quad \forall i \neq j$$

Se dice que un ordenador produce números que son *casi aleatorios* o *seudoaleatorios*, porque los obtiene a partir de fórmulas recurrentes del tipo

---

---

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \text{ mod } m,$$

$$u_n = x_n/n,$$

Es decir; toda la cadena de números aleatorios se genera a partir de un *número semilla*  $x_0$ , facilitado por el usuario. En el momento en que se repita la semilla, se reproduce toda la secuencia de números.

Un buen generador produce valores que no deben presentar ningún patrón evidente y debe cumplir con varias pruebas (Ríos Insua, Insúa Ríos, Martín Jiménez, & Jiménez Martín, 2009, págs. 14-18) que garanticen su aleatoriedad.

Así por ejemplo, Visual Basic aplica el generador congruencial

$$x_{n+1} = (1140671485x_n + 12820163) \text{ mod } 2^{24},$$

$$u_n = x_n/2^{24}$$

Excel 2007 emplea el generador de Wichman y Hill (Ríos Insua, Insúa Ríos, Martín Jiménez, & Jiménez Martín, 2009, pág. 30):

$$x_{n+1} = 171x_n \text{ mod } 30269,$$

$$y_{n+1} = 172x_n \text{ mod } 30307,$$

$$z_{n+1} = 170x_n \text{ mod } 30323$$

Con salida

$$u_n = (x_n/30269 + y_n/30307 + z_n/30323) \text{ mod } 1.$$

El procedimiento general de la simulación, indica como segunda fase transformar las observaciones básicas (números aleatorios en entradas al modelo de simulación según la distribución deseada. Una secuencia  $u_1, u_2, \dots$ , de números aleatorios que facilitan los ordenadores no se pueden utilizar directamente en la mayoría de las aplicaciones, porque muchos modelos estadísticos utilizan como entradas

---

---

distribuciones de probabilidad diferentes en general a la uniforme. El método de inversión ofrece un camino para generar variables aleatorias no uniformes.

Sea  $X$  la variable aleatoria involucrada y sea la función de distribución acumulada:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

La generación de cada observación requiere los siguientes dos pasos:

1. Genere un número aleatorio uniforme ( $r$ ) entre 0 y 1.
2. Establezca  $F(x) = r$  y despeje  $x$ , que es entonces la observación aleatoria deseada que sigue la distribución de probabilidad dada.

Para ciertas distribuciones continuas, se puede usar el método de transformación inversa en la computadora si primero se despeja  $x$  analíticamente de la ecuación  $F(x) = r$ . Para funciones no invertibles, éste método no funciona; sin embargo programas como Excel proveen observaciones aleatorias de varias distribuciones de probabilidad.

## 1.5. Transición de fase

Una transición de fase es un cambio abrupto en las propiedades de un sistema. Las propiedades que se modifican en una transición de fase se les denominan *parámetros de orden*. Estos parámetros son los que caracterizan la diferencia entre las dos fases o estados del sistema. Algunos ejemplos de transiciones de fase son: las transiciones líquido-gas, sólido-gas y sólido-líquido de un fluido, pero hay una gran variedad de éstas aunque no muy familiares, como son las ferromagnéticas, ferro eléctricas, fluido-superfluido y conductor-superconductor, entre otras.

La primera clasificación de las transiciones de fase fue propuesta por P. Ehrenfest en 1933, la cual está basada en los potenciales termodinámicos. De acuerdo con esta clasificación, son *transiciones de fase de primer orden* aquellas que están acompañadas por discontinuidades de cantidades termodinámicas correspondientes a derivadas de primer orden de algún potencial termodinámico. Por otro lado, son transiciones de fase de



---

---

segundo orden aquellas para las cuales, los potenciales termodinámicos así como sus derivadas de primer orden son continuas, mientras que alguna de sus derivadas de segundo orden es discontinua en el punto de transición. Al hablar de fase de transición de orden superior al segundo, sería igual al orden de la derivada que es discontinua, sin embargo; es común aplicar el calificativo de *segundo orden* a todas las transiciones que no son de primer orden (Gelover- Santiago, 2005, p. 8).

Cabe resaltar que la clasificación de Ehrenfest de las transiciones de fase tiene el gran mérito de revelar las similitudes existentes entre fenómenos muy diferentes, ésta no es correcta ya que han surgido otras clasificaciones más apropiadas a otros fenómenos.

## **1.6. Algunos modelos importantes**

Para el estudio de sistemas sociales que se enfocan al estudio de opinión se utiliza una gran variedad de modelos sistémicos, en esta sección se introduce una descripción breve de algunos modelos importantes para tal efecto.

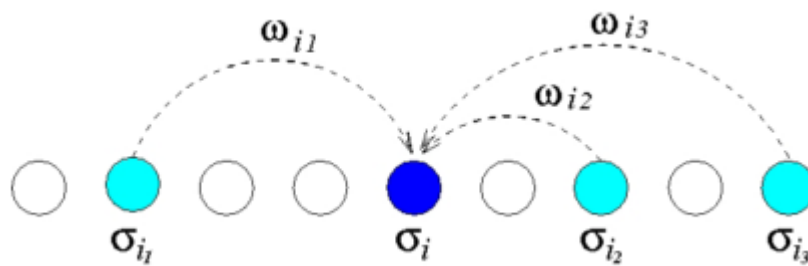
### **1.6.1. Modelo del votante y la regla de la mayoría**

El modelo del votante o neuronal VM (voter model) es un sistema simple de interacción de muchos cuerpos creado por McCulloch y Pitts, para el estudio de respuestas neuronales (Pimentel Cabrera, 2008, pág. 39).

Supongamos que queremos analizar un tema en el cual se tienen dos opiniones: o se está a favor o se está en contra en que no existen los indecisos que opinen “no se”. Por ejemplo, el tema del aborto, la reforma energética, realización de determinada obra, etc.

El modelo consiste de un conjunto de  $N$  votantes con intención de voto etiquetado por las variables  $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_N(t)\}$ . En el tiempo  $t$  cada una de estas variables

pueden tomar sólo uno de dos estados posibles:  $\sigma_i(t) = +1$  (si el votante está a favor) o  $\sigma_i(t) = -1$  (si en contra). Cada votante del modelo está influenciado por un número  $k_i$  variable de amigos que también pertenecen a la red. A este conjunto se denominará influencias (o los inputs) de  $\sigma_i$ , con etiquetas  $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{k_i}}\}$ . Al número  $k_i$  de amigos de cada votante es una variable aleatoria cuya función de probabilidad es  $P_k(k)$ , es decir; si escogemos a un votante al azar, la probabilidad de que tenga  $k_i$  influencias es  $P_k(k_i)$  (Figura 1.11).



**Figura 1.11.** Interacción entre elementos de la red. El número de conexiones se define de acuerdo a la FDP  $P_k(k)$ , y el peso sináptico se define de acuerdo a la FDP  $P_w(x)$ .

El estado de  $\sigma_i$  estará determinado por la función

$$f_i(t) = \text{Signo} \left\{ \sum_{j=1}^{k_i} \omega_{ij} \sigma_{ij}(t) \right\}$$

donde  $\omega_{ij}$  es una variable aleatoria tomada de una distribución  $P_\omega(w)$ . Estas variables  $\omega_{ij}$ , llamadas pesos sinápticos, denotan el hecho de que no todos los “amigos” de  $\sigma_i$  tienen la misma influencia sobre su opinión. La función  $f_i(t)$  puede tomar los valores  $+1$  o  $-1$  de acuerdo a las tendencias que establezcan las influencias del elemento  $\sigma_i$ . Cuando todos los pesos sinápticos  $\omega_{ij}$  son igual de importantes ( $\omega_{ij} = 1 \forall i, j$ ), la función  $f$  se conoce como *regla de la mayoría* MR (majority rule). Cuando los  $\omega_{ij}$  son distintos para los diferentes individuos decimos que  $f_i(t)$  es una *regla de la mayoría ponderada*.

---

---

### 1.6.2. Modelo de Ising

El modelo de Ising, uno de los modelos más estudiados e importantes de la física estadística fue inicialmente propuesto por Wilhem Lenz en 1920, en 1920; el cual lo había concebido para su entonces alumno de doctorado Ernst Ising (Brush, 1967). Lenz le solicitó a Ising que demostrara que el sistema muestra una transición de fase en 1d y después de cuatro años, Ising demostró que en 1d el sistema no presenta transición de fase a  $T > 0$  y por pura transitividad concluyó que el sistema no presentaba transición de fase en 2d ni en 3d; pero en 1944, L. Onsager mostró que el modelo de Ising en 2d, en ausencia de campo magnético presenta una transición de fase de segundo orden a una temperatura finita  $T_c$  dada por:

$$K_b T_c / J = 2.26918$$

Donde  $K_b$  es la constante de Boltzmann y  $J$  es la constante de interacción entre dos espines (Gelover-Santiago, 2005, pág. 18).

El modelo de Ising es un modelo que representa a una red compuesta de microsistemas (spins) los cuales tienen un número finito de valores de magnetización y simétricos respecto a cero, la interacción de cada spin con sus alrededores es uno a uno y a su vez, ésta se da solamente entre vecinos cercanos de acuerdo a la siguiente regla: *“el microsistema analizado (spin) toma el valor de magnetización que minimice la energía en un sistema que se componga del micro estado y sus vecinos cercanos”*.

Existen diversas formas de plantear el modelo de Ising dependiendo de la dimensión en la cual se plantea, de la cantidad de valores de los spins permitidos y de otras propiedades, esto hace que la forma del hamiltoniano cambie dependiendo de los supuestos. El modelo más sencillo en 2d es aquel donde el spin sólo toma dos valores  $s = \pm 1$ . El hamiltoniano que describe al sistema es:

---



---


$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i \quad (1.7)$$

Donde el primer término es la interacción uno a uno entre los spins y el segundo es el término paramagnético con H, el campo externo aplicado. J es conocida como la constante de interacción y depende del material. El símbolo  $\langle ij \rangle$  indica que la suma se realiza únicamente sobre los pares de spins que son vecinos cercanos.

Claramente si  $J > 0$ , y debido a la regla mencionada anteriormente, el estado que minimiza la energía es aquel que favorece la uniformidad en el valor de la magnetización de cada spin, es decir; favorece el ferromagnetismo. De igual modo, si  $J < 0$  favorece a los valores contrarios de magnetización en cada spin, es decir; favorece el antiferromagnetismo. Que los spins alcancen la mínima energía, representa el hecho de que los spins se encuentren todos en la misma dirección si  $J > 0$  y favorece el que los spins estén desalineados entre sí en caso de que  $J < 0$ .

El modelo de Ising tiene solución exacta para las dimensiones  $d = 1$ . Para  $d = 2$  y  $d = \infty$ , también tiene solución exacta si  $H = 0$ . Sin embargo, si  $d = 2$  y  $H \neq 0$  ó si  $d = 3$  y  $H$  cualquiera que sea su valor, se han desarrollado poderosas aproximaciones numéricas que se aproximan con bastante precisión.

### 1.6.3. Modelo de Galam

A partir del modelo AB (Axelrod and Bennett), Galam introduce un nuevo modelo que comienza con un grupo de N actores y dos coaliciones que compiten entre sí, A y B (Galam S. , Fragmentation versus stability in bimodal coalitions, 1996). Define las propensiones bilaterales  $J_{i,j} \equiv J'_{i,j}$  entre los países  $i$  y  $l$ , las cuales se calculan considerando factores históricos, económicos y culturales. Cuando existe cooperación entre dos países  $J'_{i,j} > 0$ , si hay conflicto  $J'_{i,j} < 0$ , y en caso de indiferencia  $J'_{i,j} = 0$ .

---

---

Estas propensiones solo dependen del par  $(i, j)$ , y en este caso; la factorización sobre  $i$  y  $j$  no es posible. El modelo trabaja con enlaces asignados que compiten entre sí. Estos enlaces son locales y se mantienen constantes entre los agentes, por lo que prevalece el carácter simétrico que se requiere entre actores, es decir  $J'_{i,j} = J'_{j,i}$ .

El modelo de Galam se refiere a las propensiones  $J'_{i,j}$  como locales ya que no toman en cuenta ninguna organización global o red. Para tomar en cuenta el macro-nivel de alineaciones se considera el caso de dos coaliciones en competencia A y B.

Se supone que cada actor tiene una propensión natural hacia una de las dos coaliciones establecidas. Una variable  $\varepsilon_i$  es asociada a cada  $i$ , donde  $\varepsilon_i = 1$  si el actor en cuestión es proclive a y  $\varepsilon_i = -1$  si es proclive a la coalición B y  $\varepsilon_i = 0$  en caso de no tener ninguna tendencia hacia cualquiera de las agrupaciones. Las propensiones naturales se pueden establecer a través de los intereses culturales, políticos e históricos de cada uno de los agentes. Dentro del marco global de las dos grandes agrupaciones, el beneficio  $C_{i,j}$  obtenido por cada actor de los intercambios que hace con los demás es siempre positivo ya que al compartir recursos, información, armas, etc., es siempre rentable. Sin embargo la propensión de un par de actores  $(i, j)$  a cooperar, al conflicto o a la ignorancia es  $J_{i,j} = \varepsilon_i \varepsilon_j C_{i,j}$ , la cual puede ser positiva, negativa o cero.

Al tomar en cuenta los intercambios locales y globales el resultado que se obtiene es la propensión total,

$$J_{i,j} = J'_{i,j} + \varepsilon_i \varepsilon_j C_{i,j}$$

entre dos actores  $i, j$  con  $C_{i,j} > 0$ . Se supone que todos los agentes están conectados entre sí y por lo tanto la red tiene todas las conexiones posibles.

La pertenencia actual de un actor  $i$  a cualquiera de las dos coaliciones está determinada por las variables de espín  $\eta_i = 1$  si pertenece a la agrupación A,  $\eta_i = -1$  si pertenece a B. Gracias a la simetría del sistema, todos los elementos de la coalición

---

---

A se pueden cambiar a la B al hacer un traspaso simultáneo de los elementos de B hacia A.

Para tomar en cuenta las presiones económicas o militares que se ejercen en las alineaciones de ciertos actores, se introduce la variable  $\beta_i = \pm 1$ . En el caso de favorecer a la coalición A,  $\beta_i = 1$  y para B,  $\beta_i = -1$ , en caso de no haber ninguna presión  $\beta_i = 0$ . La magnitud con la que se ejerce esta presión está considerada a través de un campo positivo  $\beta_i$ , el cual toma en cuenta el tamaño y la importancia del  $i$ -ésimo agente. Los conjuntos  $\{\varepsilon_i\}$  y  $\{\beta_i\}$  son independientes.

Las decisiones que los actores tomen para la cooperación o el conflicto entre ellos van a estar determinadas por las cantidades descritas. La energía asociada es

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i>j}^N J_{i,j} \eta_i \eta_j - \sum_i^N \beta_i b_i \eta_i \quad (2.1)$$

el cual es básicamente el Hamiltoniano del modelo de Ising en su estado base para vidrios de espines con un campo magnético externo  $h_i = \beta_i b_i$ , (ver ecc. ( 1.7).

En el modelo de Galam se consideran varios escenarios que dependen de los valores que tomen las variables establecidas anteriormente, considerando a cada uno de los actores de la red como países.

#### 1.6.4. Modelo de Barabási-Albert

Este modelo pertenece el tipo de modelos que generan redes complejas conocidas como “redes libres de escala” para tal efecto, en 1998; Albert-László Barabási y Réka Albert establecieron un modelo basado en el principio de “conexión preferencial” en el cuál se puede percibir la existencia de ciertos vértices con alta conectividad dentro del grafo; contrario a las redes aleatorias o al modelo de Watts-

---

---

Strogatz que poseen la misma probabilidad de recibir conexiones (Koiti Tsukamoto, 2015). La construcción del modelo de Barabási-Albert consta de los siguientes pasos.

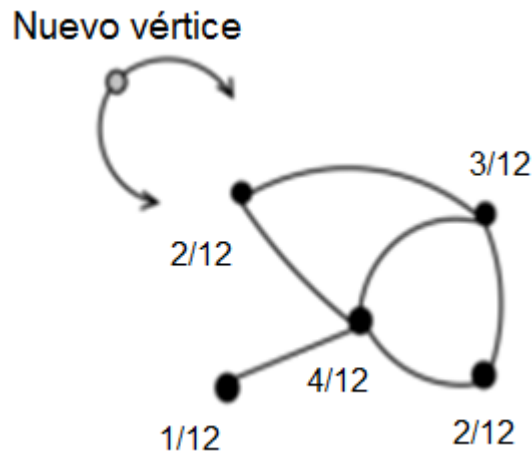
En el tiempo  $t = 0$  se inicia la gráfica con  $m_0$  vértices, de preferencia elegir un número pequeño.

En  $t = 1$  se agrega un nuevo vértice con  $m \leq m_0$  aristas, las cuales se conectarán cada una con probabilidad

$$p = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

donde  $k_i$  es el grado del vértice  $i$ .

Se repite el paso anterior  $N - m_0$  veces, donde  $N$  es el número de nodos que se desea que tenga la red.

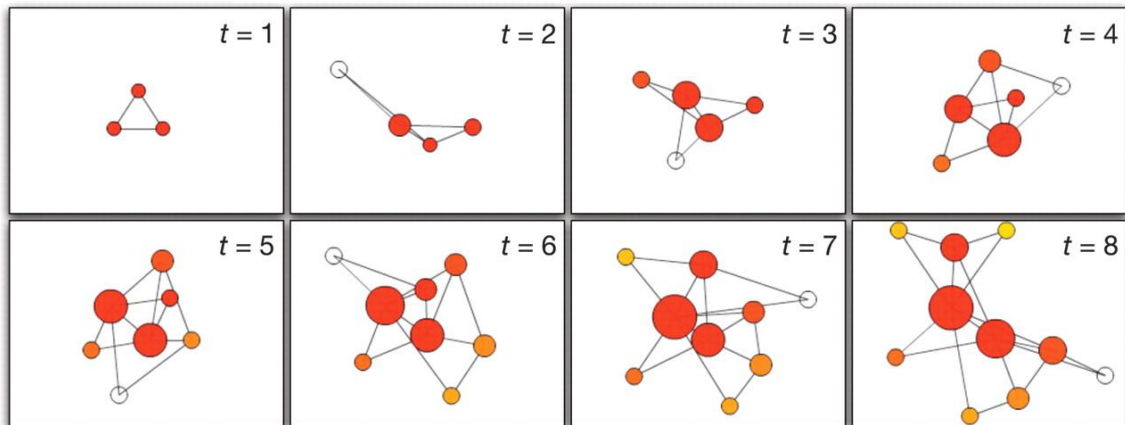


**Figura 1.12.** Conectividad preferencial. Cada vértice nuevo que se agrega a la red, sus aristas se conectan con cada nodo con una probabilidad proporcional al número de conexiones de ese nodo.

---

---

### Scale-Free Model



**Figura 1.13**<sup>13</sup>. Construcción de un modelo Barabási-Albert. Los nuevos vértices prefieren ligarse con los más conectados. Debido a las propiedades de crecimiento y del enlace preferencial se puede percibir el surgimiento de hubs.

La conexión preferencial significa que mientras mayor sea el grado de un nodo, la probabilidad de que un nodo nuevo se conecte con él será también mayor. Ésta propiedad también es muy conocida en economía, donde su equivalente sería la famosa frase conocida como: “los ricos se hacen más ricos”.

### 1.6.5. Modelo de Shelling

En el modelo original de Schelling, agentes con dos posibles colores son puestos en los sitios de un ajedrez. Cada color corresponde a miembros de uno de dos grupos homogéneos los cuales difieren por ejemplo de su raza, si riqueza, etc. Una fracción de los sitios son espacios en blanco, los agentes de ambos colores pueden moverse a estas vacantes. La vecindad de un agente está compuesta por sus ocho vecinos más cercanos (vecindad de Moore). Si menos de 1/3 de los vecinos del agente pertenecen a su grupo, él está descontento (en términos económicos su utilidad es 0); en otro caso

---

<sup>13</sup> Imagen tomada de <http://science.sciencemag.org/content/sci/325/5939/412/F1.large.jpg>



---

---

es está satisfecho (su utilidad es 1). Partiendo de configuraciones iniciales aleatorias de Schelling, desplazar agentes descontentos hacia los sitios vacantes de satisfacción cercanos, es posible. Él observó que el sistema siempre alcanza un estado de segregación, donde grupos grandes de agentes con el mismo color fueron formados. El punto crucial es que la segregación aparece como un fenómeno emergente, en el sentido de que el efecto colectivo es mucho más fuerte de lo que habría ingenuamente esperado, como agentes individuales son felices al vivir en una vecindad mixta. Este fenómeno provee robustez: Un resultado similar, con algunas advertencias, es encontrado en variantes del modelo, incluso cuando la función de utilidad es no monótona con la fracción de vecinos similares (Gauvin, 2009).

---

---

## 2. MARCO METODOLÓGICO

### 2.1. La Teoría General de Sistemas

Un sistema es un conjunto de elementos que interactúan entre sí y el comportamiento de cada uno de ellos puede afectar el todo. Éste, posee propiedades que muchas veces no son explícitas en los componentes sino que se manifiestan al interactuar sus elementos entre ellos y su entorno.

La teoría general de sistemas fue formulada por el biólogo Ludwing von Bertalanffy en la tercera década del siglo XX, pero difundida hasta después de la Segunda Guerra Mundial; época en la que avanzó enormemente la Investigación de Operaciones y la Cibernética. Ésta teoría, más allá de ocuparse de sistemas particulares; se ocupó de las propiedades generales de los sistemas en un nivel abstracto sin importar su forma física o dominio de aplicación. Se fundamenta en que todo tipo de sistemas sin importar su naturaleza interna poseen características en común.

Ésta teoría ha permitido la expansión de las fronteras de la ciencia pues la investigación realizada en un campo específico del conocimiento puede ser aplicada en otro completamente distinto. Teorías termodinámicas sobre los gases pueden ser utilizados para interpretar fenómenos económicos, o las interacciones propias de la biología celular pueden seguir las mismas leyes que el flujo de información en una empresa. Los isomorfismos son prioridad de la Teoría General de Sistemas, pues modelos similares obedecerán leyes similares.

Los objetivos formales de la Teoría General de Sistemas son desarrollar una metodología para la descripción del funcionamiento y comportamiento de los sistemas, elaborar modelos generales de ellos y formular teorías sobre sistemas generalizados (Skyttner, 2001, pág. 37).

---

---

### 2.1.1. Características de los sistemas

De acuerdo a la Teoría General de Sistemas, los principios fundamentales de los sistemas son los siguientes:

a) *Interrelación e independencia de los objetos y sus atributos.* Un conjunto de elementos sin relación y sin interdependencia jamás construirán un sistema.

b) *Holismo.* Debe ser posible definir las propiedades holísticas del sistema no detectadas por el análisis. Son propiedades emergentes producto de la sinergia entre los elementos.

c) *Teleología.* La interacción sistémica tienen como resultado una meta, estado final a alcanzar o el acercamiento a un punto de equilibrio.

d) *Proceso de transformación.* Todos los sistemas, en la búsqueda de sus metas; transforman insumos en productos. En sistemas cerrados los insumos iniciales son los únicos de los que dispone el sistema; en sistemas abiertos los insumos adicionales provienen del ambiente (Figura 2.1).

e) *Entropía.* Todos los sistemas naturales que tienden al desorden, aumentan su entropía. Los sistemas vivos pueden revertir este proceso importando energía del ambiente para crear lo que se conoce como neguentropía.

f) *Regulación.* La regulación de los objetos que constituyen el sistema debe ser regulado de alguna manera, para que la meta sea alcanzada. Esto implica que las desviaciones sean detectadas y corregidas. Por ello la retroalimentación es un requisito necesario para un control efectivo.

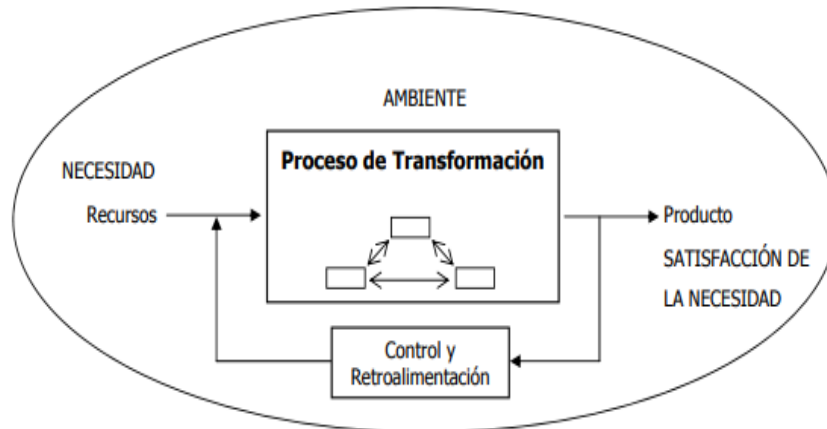
g) *Jerarquía.* Los sistemas son totalidades complejas compuestas de subsistemas más pequeños.

h) *Especialización.* En sistemas complejos las unidades especializadas desarrollan funciones específicas. Esta característica es también llamada diferenciación o división del trabajo.

---

---

i) *Equifinalidad y multifinalidad.* Los sistemas abiertos pueden converger a la misma meta a partir de distintos estados iniciales o divergir a distintos estados finales partiendo del mismo inicio.



**Figura 2.1.** Sistema abierto.

Tres condiciones son esenciales para distinguir un sistema. La organización, un agregado de elementos no es un sistema. La identidad continua, algo que no es capaz de preservar su estructura ante un cambio no se reconoce como un sistema. La búsqueda de objetivos, es decir, la función del sistema.

### 2.1.2. Clasificación de los sistemas

Existen diversas clasificaciones para el estudio de los sistemas basadas en la complejidad (Boulder) o en la organización (Jordan), entre otras. Para Checkland, estas presentan ciertas inconsistencias (Checkland, 1997, pág. 130) y crea una categorización a partir de su origen (Figura 2.2) y es la siguiente:

c) *Sistemas naturales.* Su origen coincide con el del universo y son resultado de las fuerzas y procesos que lo caracterizan. Por ejemplo los átomos, las galaxias y los organismos vivos.

---

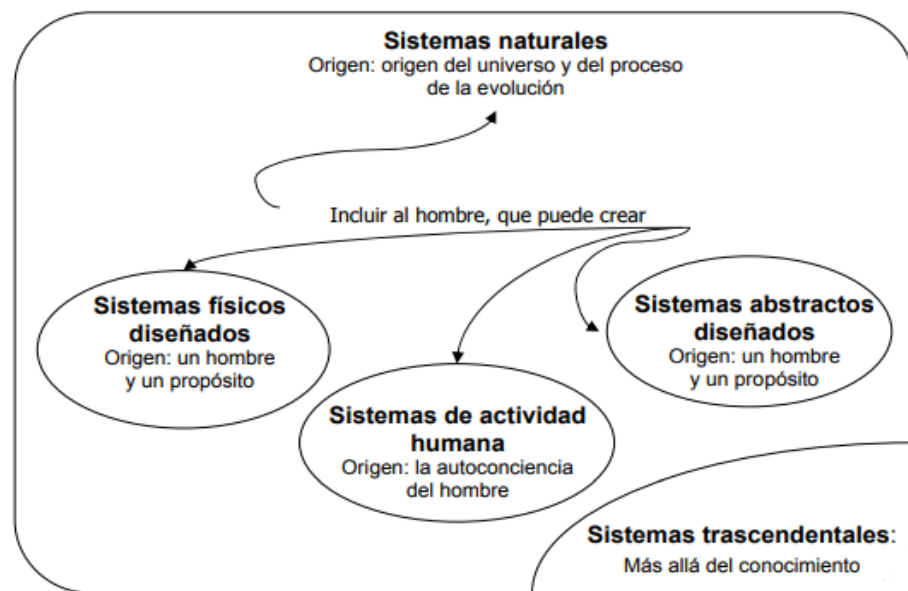
---

d) *Sistemas físicos diseñados*. Son resultado del diseño consiente con un propósito humano. En esta categoría entran las herramientas, las máquinas y el arte plástico.

e) *Sistemas abstractos diseñados*. Son el producto ordenado de la mente humana. Como las matemáticas, la filosofía y la poesía.

f) *Sistemas de la actividad humana*. Son menos tangibles que los sistemas naturales y los diseñados, son actividades humanas ordenadas conscientemente que tienen como resultado algún propósito. Pueden ir desde los hábitos alimenticios de un grupo humano, pasando por la organización de una empresa, hasta la política mundial.

g) *Sistemas trascendentales*. Son los sistemas que están más allá del conocimiento.



**Figura 2.2.** Clasificación de los sistemas según Checkland

Los sistemas que son resultado de la actividad humana son los más complicados para llevar a cabo su análisis ya que, a diferencia de los sistemas naturales, el punto de vista del observador influye en el diagnóstico. De aquí que los métodos de la ciencia tradicional sean adecuados para el estudio de los sistemas naturales y el enfoque sistémico a los de la actividad humana. Sobre los sistemas diseñados, tanto los físicos

---

---

como los abstractos, destaca que existen debido a que cubren una necesidad en los sistemas de la actividad humana (Checkland, 1997, pág. 136).

### **2.1.3. Disciplinas relacionadas con las metodologías**

A la par y bajo el desarrollo de la Teoría General de Sistemas han surgido ciertas disciplinas que aportan conceptos, metodologías y métodos para comprender y utilizar ciertos sistemas específicos (Johansen Bertoglio, 2002, pág. 28), como lo son las siguientes disciplinas.

La *cibernética* que estudia los mecanismos de comunicación y el control de las máquinas y los seres vivos. Esta se basa en los principios de retroalimentación y de homeostasis.

La *teoría de la información* que considera a la información como una medida de la organización en un sistema. Llega a esta conclusión a través del isomorfismo matemático con la entropía.

La *teoría de juegos* que analiza matemáticamente la competencia entre dos sistemas antagónicos para maximizar las ganancias o las pérdidas.

La *teoría de decisiones* que busca la selección racional de las alternativas dentro de las organizaciones y estudia la conducta de las decisiones a tomar en el proceso.

La *topología* que es una rama de las matemáticas asociada a la geometría. Ha probado ser de gran utilidad en el estudio de la estructura organizacional y de las conexiones entre las partes de los sistemas.

El *análisis factorial* que permite el aislamiento de los factores causantes de los problemas, que involucran variables múltiple. Su principal campo de acción ha sido en las ciencias sociales.

---

---

La *investigación de operaciones* que tiene como objetivo ayudar en la administración de determinar la política y las acciones a tomar de una manera científica, involucrando conceptos como el azar y el riesgo.

La *ingeniería de sistemas* que planea, evalúa y construye científicamente sistemas hombre-máquina donde existe heterogeneidad de componentes. Su campo de aplicación principal es en los sistemas industriales, de alta complejidad con la división del trabajo y gran especialización. El objetivo de esta disciplina es el aumento de la productividad.

#### **2.1.4. Los sistemas suaves y duros**

La metodología típica para la solución de un problema mediante la Ingeniería de Sistemas ha tenido gran éxito para la solución de problemas estructurados (o sistemas duros)<sup>14</sup>, es decir; aquellos en los que el objetivo es definible. Es esencial conocer y formular el fin que queremos alcanzar al inicio del estudio. Una vez definido el objetivo se puede seleccionar un medio para alcanzarlo con eficiencia económica.

Cuando los problemas no son estructurados, cuando no se tiene siquiera claro la naturaleza del problema pero si se tiene un sentido de desajuste, se debe recurrir a las metodologías de los sistemas suaves. Estos sistemas tienen condiciones que se deben aliviar más que los problemas que se deben resolver (Checkland, 1997, pág. 178).

### **2.2. Proceso general de la simulación**

Una vez construido el modelo correspondiente, la mayoría de los experimentos de simulación se adaptan al esquema de Schmeiser (1990):

---

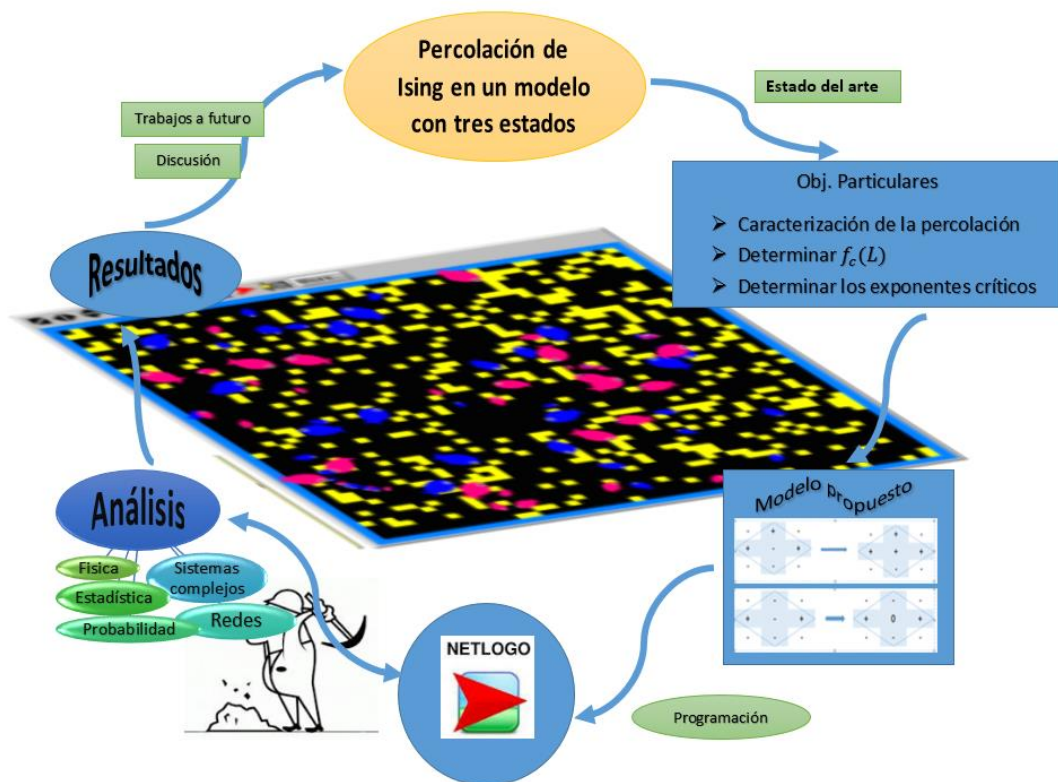
<sup>14</sup> Ver Skyttner (2001:251)

- 
- 
1. Obtener observaciones básicas de una fuente de números aleatorios.
  2. Transformar tales observadores básicos en entradas al modelo, según las especificaciones del mismo.
  3. Pasar las entradas a través del modelo para obtener salidas.
  4. Calcular estadísticos a partir de las salidas, para estimar medidas de comportamiento del sistema y, eventualmente emplearlos en la toma de decisiones.

### **2.3. Marco metodológico del presente trabajo**

Nuestro sistema puede ser considerado como un sistema duro ya que el objetivo de este trabajo es definible. En la Figura 2.3, se muestra un esquema general de la metodología seguida en este trabajo. Éste se realizó utilizando como guía la metodología sugerida por Skyttner (1991:251), la cual es muy utilizada para la solución de problemas en la Ingeniería de Sistemas.





**Figura 2.3**<sup>15</sup>. Esquema general del marco metodológico seguido en este trabajo.

Una vez que se propuso el modelo de tres estados se definió el objetivo principal del trabajo, posteriormente se definieron los objetivos particulares llevando a cabo la revisión del estado del arte para explorar trabajos parecidos o relacionadas al nuestro. Para lograr los objetivos particulares del presente trabajo se tuvieron que llevar a cabo simulaciones de nuestro modelo propuesto, las cuales se realizaron a través del software conocido como Net-Logo el cual es de acceso libre. Una vez que se obtuvieron las simulaciones se llevó a cabo un análisis de los resultados.

Lo anterior se realizó de manera cíclica hasta que se alcanzó el objetivo principal de nuestro trabajo. Una vez alcanzado, se llevó una discusión de los resultados obtenidos y se definieron los posibles trabajos a futuro; llegando así al final del trabajo.

<sup>15</sup> Elaboración propia.

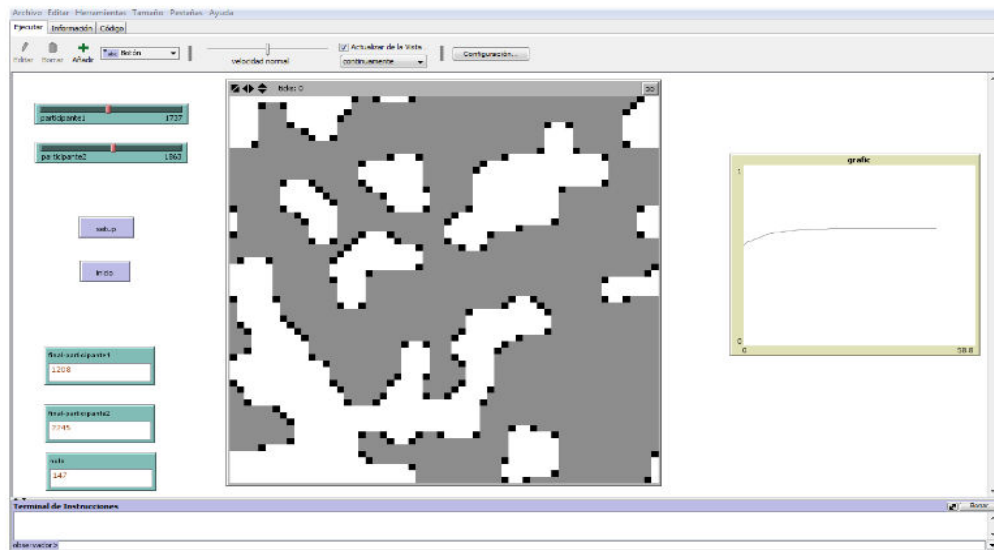
---

---

## 2.4. El software Net-Logo

Los modelos basados en agentes se pueden desarrollar utilizando lenguajes de programación orientados hacia objetos como Java, C++ o Visual Basic; o empleando entornos de programación que permiten crear, ejecutar y visualizar resultados sin salir del sistema, como Net-Logo, Swarm, Mason o Repast.

En este trabajo se utilizó como software para la realización de las correspondientes simulaciones el programa denominado Net-Logo, el cuál es una plataforma de programación de uso libre (gratuito) y de gran uso para la simulación de modelos en campos muy diversos como lo es en las ciencias sociales, biología, medicina, física, química, matemáticas, economía, etc. Fue creado por el matemático y computólogo Uri Wilensky en 1999 y está en continuo desarrollo por el Center for Connected Learning and Computer Based Modeling de Boston, EUA.



**Figura 2.4**<sup>16</sup>. Captura de pantalla de la simulación en Net-LOGO.

La Figura 2.4 muestra el ambiente de Net-Logo para la simulación de un modelo de agentes sobre una red cuadrada con tres estados posibles representados por colores distintos, que corresponden a los spins con tres opciones distintas.

---

<sup>16</sup> Elaboración propia.

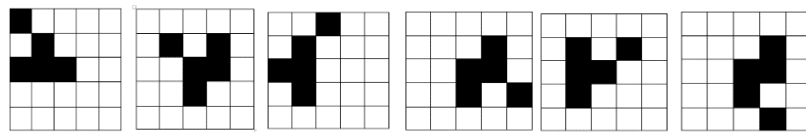
---

---

## 3. DESARROLLO

### 3.1. Modelación basada en agentes

En la década de 1940 John Von Neuman, creó un sistema que se auto replicaba, lo que hoy se conoce como el primer modelo basado en agentes llamado *autómata celular*; el cual consiste de una malla regular de celdas, cada una con un número finito de estados donde el tiempo es discreto y el estado de cada celda en el tiempo  $t$  depende del estado de sus vecinos en el tiempo  $t-1$ .



---

**Figura 3.1<sup>17</sup>.** Ejemplo de un autómata celular de dos dimensiones, donde cada celda puede estar en uno de dos estados. Se muestra la evolución del autómata durante 5 épocas.

En 1960 el matemático John Conway desarrolló el conocido “juego de la vida”, el cual utiliza un autómata celular de dos dimensiones que a pesar de poseer reglas simples puede evolucionar en comportamientos complejos.

En 1986 el computólogo Craig Reynolds desarrolló el primer modelo basado en agentes que se utilizó para describir el comportamiento social colectivo, con reglas simples logro simular de manera realista el movimiento de bancos de peces o parvadas de pájaros.

---

<sup>17</sup> Elaboración propia.

---

---

La simulación es más apropiada que las matemáticas tradicionales para formular teorías sociológicas (Taber y Timpone), ya que muchos fenómenos sociales son emergentes (y por tanto complejos), entre otras razones.

Cuando tenemos un fenómeno social emergente, significa que las acciones de individuos generan frecuentemente resultados sociales imprevistos.

Los *modelos* son representaciones simplificadas de los objetos específicos de estudio. La *simulación* es una forma especial de construir modelos. Estos modelos se construyen mediante ordenador que pretenden representar algún problema específico.

La *simulación basada en agentes* se define como un método informático que permite construir modelos constituidos por agentes que interaccionan entre sí dentro de un entorno para llevar a cabo experimentos virtuales (N. Gilbert).

### 3.1.1. Conceptos básicos

En los modelos basados en agentes pueden identificarse los siguientes componentes básicos:

- **Agentes.** Los agentes (nodos) son los actores principales del modelo y estos pueden representar seres vivos, sociedades, estaciones de transporte, computadoras, genes, etc., dependiendo del caso que se pretende modelar.
- **Variables de estado.** Cada agente puede contener estados en forma de atributos o datos. Estos estados pueden ser representados por variables discretas o continuas.
- **Entorno.** El entorno es el medio real en el que los actores operan, el cual puede ser discreto o continuo. Generalmente el entorno es determinado por los contactos e interacciones entre los agentes.
- **Condiciones iniciales.** Se refiere a las condiciones iniciales que prevalecen en el entorno donde los agentes iniciarán a interactuar.

---

---

- **Tiempo.** Los agentes interactúan y evolucionan en distintos estados a medida que avanza el tiempo. El tiempo también puede ser representado de manera discreta o continua.

- **Reglas de transición.** Son las reglas que determinan el comportamiento de los agentes que van desde simples reglas lógicas hasta algoritmos con miles de instrucciones.

## 3.2. Definición del modelo

### Introducción

La formación de la opinión mediante el contraste y síntesis de diferentes puntos de vista ha sido ampliamente estudiada utilizando modelos basados en ideas de la física estadística (ver, para su revisión, Refs. (Galam S. , Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-Political Phenomena, 2012) (Galam S. , Application of statistical physics to politics, 1999) (Galam S. , 2008) (Castellano, Fortunato, & Loreto, 2009) (Staufer, 2013) y referencias al respecto). Varios modelos de formación de opinión han sido inspirados en sistemas de spin con interacciones de corto alcance. A pesar de que estos modelos ignoran muchos aspectos importantes de los sistemas sociales complejos, se ha reconocido que reglas simples de la toma de decisiones permiten revelar algunas características esenciales de la dinámica de opinión. Entre las reglas más populares de toma de decisiones se encuentran la regla de la mayoría (MR) y la regla del voto mayoritario (MV), que explican la tendencia del votante al asumir una opinión de la mayoría de sus vecinos (Galam S. , Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-Political Phenomena, 2012).

Específicamente, en el modelo de dos estados MV sobre una red cuadrada (De Olivera, Isotropic majority-vote model on a square lattice, 1992), cada votante asume la opinión de la mayoría de sus vecinos con una probabilidad  $1 - q$  y la opinión contraria con probabilidad  $q$ , mientras que el votante cambia sus opiniones iniciales

---



---

con probabilidad 1/2, siempre que haya empate en su vecindad. El parámetro de control  $q$ , juega un rol de temperatura en sistemas de equilibrio. En redes regulares, el modelo de dos estados MV, muestra una fase de transición de segundo orden desde un estado ordenado a un estado desordenado en un valor crítico  $q_c$ . Se ha reconocido que el modelo de dos estados MV pertenece a la clase de universalidad de Ising (De olivera, 1992) (De olivera, Mendes, & Santos, 1993) (Santos, Lima, & Malars, 2011) (Lima F. , 2012) (Lima F. , 2013) (Acuna-Lara, Sastre, & Vargas-Arriola, 2014). En el caso limitante de  $q = 0$ ,<sup>18</sup> después de la actualización  $t + 1$ , el votante localizado en el nodo  $i$ , adopta el estado con el Spin

$$s_i(t + 1) = \Theta \left[ \sum_j^k s_j^i(t) \right], \quad (3.1a)$$

donde  $s_j^i(t)$  denota el spin del votante localizado en el nodo  $j$  y la suma es sobre los  $k$  vecinos del votante localizado en el nodo  $i$ , mientras que

$$\Theta(x) = \text{sign}(x), \quad (3.1b)$$

siempre que  $x \neq 0$ , mientras que

$$\Theta(x = 0) \text{ toma los valores } 1 \text{ y } -1 \text{ con igual probabilidad.} \quad (3.2a)$$

De hecho, para modelar sistemas con una coexistencia estable de opiniones minoritarias y mayoritarias, Shao et al.2009, ha modificado el modelo de dos estados MV, de tal modo que el votante mantenga su opinión inicial si sus vecinos están en un empate. Por consiguiente, el modelo obedece la ecuación (3.1) con

$$\Theta(x = 0) = \text{sign}[S_i(t)]. \quad (3.2b)$$

---

<sup>18</sup> En el caso el modelo MV coincide con el modelo de Ising con temperatura cero, cinética de Glauber y su destino final es un consenso o un empate (Castellano, Fortunato, & Loreto, 2009).

---

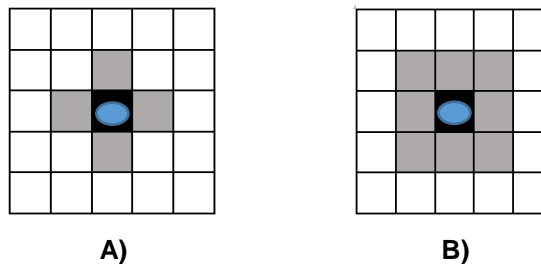
---

En consecuencia, los votantes mantienen la misma opinión formando clusters los cuales no pueden ser invadidos por la opinión contraria. En simulaciones numéricas se encontró que el modelo de dos estados de no consenso (NCO) definido por las ecuaciones. (3.1 y (3.2b), exhiben una percolación de transición. Un cluster compuesto de votantes que poseen la misma opinión surge cuando la concentración inicial de estos votantes se encuentra arriba de un cierto valor crítico  $f_c$ . Esto ha sido argumentado ya que el modelo NCO sobre una red cuadrada pertenece a la misma clase de universalidad que la invasión de percolación (Gastner, Markou, Pruessner, & Draief, 2014).

### 3.2.1. Agentes y espacio

Los agentes del modelo se definen como los nodos de la red, donde los nodos representan votantes que poseerán tres estados diferentes  $\pm i$  y 0, representado por los votantes indecisos.

Las simulaciones se realizaron sobre redes regulares cuadradas  $L \times L = N$  de diferentes tamaños ( $L=20, 40, 60, 80, 100, 150, 500, 1000$ ), donde  $L$  es el lado de la red (número de nodos) y por lo tanto  $N$  es el número total de nodos. Los nodos se conectan cada uno con sus vecinos más cercanos, emulando autómatas celulares con vecindades de Neuman ( $k = 4$  vecinos).



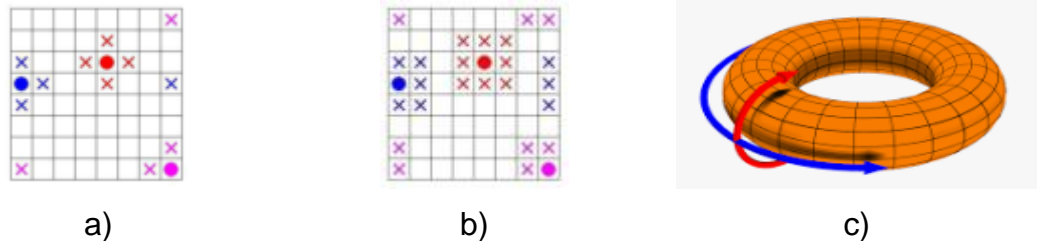


---

---

**Figura 3.2<sup>19</sup>.** Vecindades de autómatas celulares sobre una maya regular cuadrada en 2D. A) Vecindad de Von Neuman. B) Vecindad de Moore.

Cada una de las mallas siguió condiciones de frontera no toroidal. Así por ejemplo, un nodo que se encuentre en la frontera de la red su vecindad terminará en la misma frontera y no continuara al otro lado de la maya, contrario a lo que ocurre a una frontera toroidal (Figura 3.3).



**Figura 3.3<sup>20</sup>.** a) y b) muestran vecinos con vecindad de Neuman y Moore respectivamente, en celdas con condiciones de frontera toroidal. c) muestra una gráfica en tres dimensiones de la forma que toma la malla.

### 3.2.2. Variables de estado

Las opiniones de los votantes (nodos) están representadas por variables tipo spin  $s_i$ , donde el índice  $i = 1, 2, \dots, N$ , denota la posición del nodo. Los votantes activos tienen spins  $s_i = \pm 1$ , mientras que los votantes indecisos tienen spin igual a cero ( $s_i = 0$ ).

### 3.2.3. Condiciones iniciales

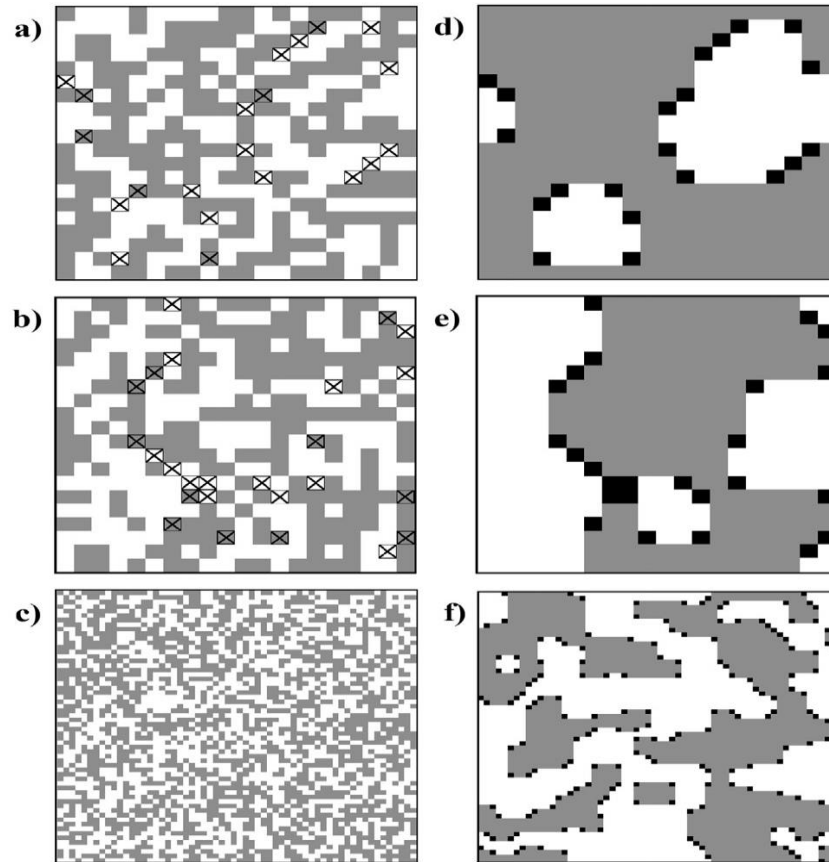
El spin positivo es inicialmente asignado a cierto número de nodos  $fN$  elegidos de manera aleatoria ( $0 < f < 1$ ), mientras que el resto de los nodos se asume que tienen spin  $s_i = -1$ , (ver Figura 3.4. a-c). Así, la "magnetización" inicial del sistema es

---

<sup>19</sup> Elaboración propia.

<sup>20</sup> a) y b) elaboración propia. c) Foto tomada de [https://es.wikipedia.org/wiki/Toroidal\\_y\\_poloidal](https://es.wikipedia.org/wiki/Toroidal_y_poloidal)

igual a  $m_o = |2f - 1|$ , mientras que la concentración inicial de los votantes indecisos es cero.



**Figura 3.421.** Distribución de los votantes en: (a-c) inicial ( $f = 0.05$ ) y (d-f) estados estables en redes cuadradas de tamaño  $L = 20$  (a, b, d, e) y  $L = 60$  (c, f). Los nodos blancos y grises están ocupados por votantes activos con  $s_i = 1$  y  $-1$ , respectivamente. Mientras que los nodos negros están asociados a los votantes indecisos ( $s_i = 0$ ). En los paneles (a, b) los votantes inicialmente activos que se convierten en indecisos dentro del estado final están marcados con una X.

### 3.2.4. Tiempo

El tiempo avanza de forma discreta y síncrona en etapas, donde en cada etapa  $T = t_0, t_1, t_2, \dots$  todos los nodos son actualizados de forma síncrona a sus nuevos

<sup>21</sup> Elaboración propia.

estados. Todas las simulaciones fueron evolucionando hasta alcanzar un estado estable de no consenso.

### 3.2.5. Reglas de transición

En este trabajo, se propone un modelo de tres estados MV, en el cual el votante se convierte en indeciso si sus vecinos activos están en un empate, o todos los vecinos son indecisos. En otro caso el votante adopta la opinión de la mayoría de los votantes activos en su vecindad. Por lo tanto, nuestro modelo de tres estados MV también obedece la ecuación. (3.1a) pero con

$$\theta(x = 0) = 0 \quad (3.2c)$$

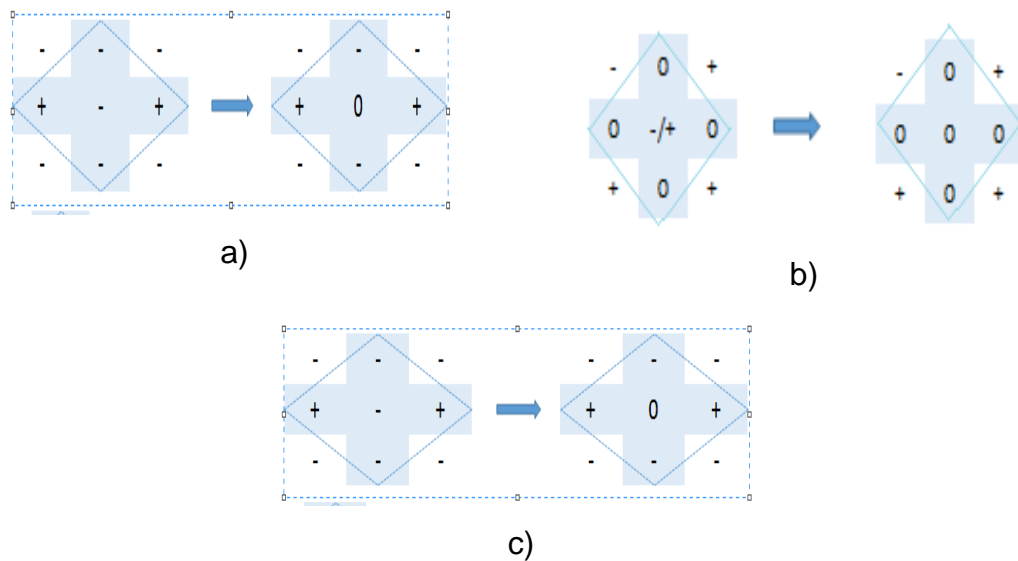


Figura 3.5<sup>22</sup>. Reglas de transición del modelo.

<sup>22</sup> Elaboración propia.

---

---

En la Figura 3.5 se muestran de manera gráfica las reglas de actualización en caso de empate [incisos a) y b)] y en caso contrario [inciso c)].

### 3.2.6. Desarrollo del modelo propuesto

Una vez que la distribución inicial de los votantes fue definida, la evolución de los mismos, está gobernada por la regla de actualización definida por las ecuaciones (3.1a) y (3.2a). Las actualizaciones se repiten hasta que es alcanzado un estado estable de no consenso y ya no se producen más cambios. Con el fin de estudiar el escalado de tamaño finito, se realizaron simulaciones numéricas sobre redes de diferente tamaño ( $L=20, 40, 60, 80, 100, 150, 500, 1000$ ) con condiciones periódicas de frontera. Es fácil entender que la probabilidad de que los votantes activos con spin  $s$  se conviertan en mayoría en el estado estable  $P_s(f)$ , es una función monótona creciente de  $f$  con simetría alrededor de  $(P_s, f) = (0.5, 0.5)$ , ya que los dos estados que compiten ( $s = \pm 1$ ) son simétricos en una red de cualquier tamaño  $L$ . Nótese que, generalmente  $P_1(f, L) + P_{-1}(f, L) = 1 - P_0(f, L)$ , donde  $P_0(f, L)$  es la probabilidad de que el estado estable tenga una magnetización igual a cero. Aunque la mayoría en el estado inicial tiende a dominar, en redes finitas la minoría inicial puede convertirse en una mayoría en el estado estable. Sin embargo, a medida que el tamaño de la red incrementa,  $P_1(f, L)$  se aproxima a una función escalonada. Así, en el límite de  $L \rightarrow \infty$ , la mayoría inicial siempre se convierte en la mayoría en el estado estable. En consecuencia, estudiamos las distribuciones estadísticas de las concentraciones de los votantes activos ( $P_{\pm 1}$ ) y de los votantes indecisos ( $P_0$ ) en el estado estable, mientras que  $P_1 + P_{-1} + P_0 = 1$  en cada simulación. Entonces, se calcularon las concentraciones medias de los votantes indecisos  $\langle P_0(f) \rangle$  y el promedio de “magnetización” del estado estable  $M(f) = \langle m(f) \rangle = \langle P_1 - P_{-1} \rangle$  sobre redes de diferente tamaño. También se calcularon las desviaciones estándar  $\sigma[P_0(f), L]$  y  $\sigma[m(f), L]$  obtenidas en  $10^3$  simulaciones con cada  $f$  en redes de cada tamaño  $L$ .

---



---

En el estado estable de no consenso, los votantes activos forman clusters en el que comparten la misma opinión, mientras que los votantes indecisos aparecen en la frontera entre clusters de votantes en competencia (ver Figura 3.4). Se encontró que cuando la concentración inicial de votantes activos que poseen el mismo spin ( $f$  ó  $1 - f$ ) excede cierto valor crítico el cluster de mayor tamaño en el estado estable puede envolver alrededor a la red bajo condiciones periódicas de frontera en la dirección vertical y/o horizontal (Yang, 2012). Con el objeto de caracterizar la transición de la percolación, estudiamos las siguientes propiedades:

- I. El tamaño del cluster más grande  $S_1(f, L)$  para diferentes concentraciones iniciales de votantes activos en redes de diferentes tamaños.
- II. La probabilidad de envoltura  $W(f, L)$ , definida como la probabilidad de que el cluster de mayor tamaño se envuelva en la dirección horizontal y/o vertical alrededor a la red con condiciones periódicas de frontera.
- III. La fuerza de percolación  $R_s(f, L)$  definida como la relación entre el número de sitios en el cluster de envoltura y el número total de sitios en la red.
- IV. La función de distribución acumulativa de los tamaños del cluster  $F(S' > S, f, L)$ , y la densidad numérica del cluster  $n_s(f, L)$  definida como el número de clusters de tamaño  $S$  por sitio de la red. Note que la probabilidad de que un sitio pertenezca a un cluster finito es igual a  $\sum_S S n_s(f, L)$  y que  $R_s(f, L) + \sum_S S n_s(f, L) = p_s(f, L)$  para cualquier concentración de votantes con spin  $s$  en el estado estable ( $p_s$ ).
- V. El tamaño promedio de los clusters finitos  $S_m(f, L) = (\sum_S S^2 n_s / \sum_S S n_s)$ , donde las sumas excluyen eventuales clusters de envoltura y el tamaño del segundo cluster más grande  $S_2(f, L)$ .
- VI. La dimensión fractal del cluster de envoltura (percolación) ( $D_f$ ) definida via la relación de escala

$$S_w \propto R_g^{D_f} \tag{3.3}$$

donde  $R_g$  es el radio de giro.

---

Además, estas propiedades fueron usadas para determinar la concentración crítica  $f_c(L)$  y los exponentes críticos para la transición de la percolación en el estado estable de no consenso. Hay muchas formas para determinar el umbral de percolación  $f_{th} = f_c(L \rightarrow \infty)$  y los exponentes críticos [ver Refs. (Hsu, 1999) (Ziff & Newman, 2002) (Fortunato, 2002) (Martins & Plascak, 2003) (Feng, Deng, & Blöte, 2008)]. En este trabajo, se empleó el método de escala de tamaño finito sobre redes con condiciones periódicas de frontera. Específicamente, el valor crítico  $f_c(L)$ , es definido como la concentración inicial de votantes con spin  $s = 1$  en el cual el tamaño medio de los clusters finitos  $S_m(f, L)$  y el tamaño del segundo cluster de mayor tamaño  $S_2(f, L)$  alcanzan sus valores máximos. En consecuencia, el umbral de percolación  $f_{th}$  y los exponentes críticos  $\nu$  y  $\gamma$  son calculados usando las siguientes relaciones de escala.

$$f_c(L) = f_{th} - AL^{-\frac{1}{\nu}}. \quad (3.4a)$$

$$S_2(f_c, L) \propto S_m(f_c, L) \propto L^{\gamma/\nu}. \quad (3.4b)$$

donde  $A$  es la constante de ajuste. Una vez encontrados  $f_{th}$  y  $\nu$ , verificamos que las probabilidades de envoltura para redes de diferente tamaño obedecen el comportamiento de escala  $W \propto (f - f_{th})L^{1/\nu}$ . Además, los exponentes críticos  $\tau$  y  $\beta$  fueron calculadas usando las relaciones de escala

$$n_s(f_{th}, L) \propto S^{-\tau} \quad (3.5)$$

Y

$$R(f_{th}, L) \propto L^{-\beta/\nu} \quad (3.6)$$

respectivamente. Con el objeto de asegurar la consistencia entre los valores numéricos de los exponentes críticos, verificamos que las siguientes relaciones (ver Ref. (Stauffer & Aharony, 1994) se mantienen:

---

---

$$2\beta + \gamma = 2\nu, \quad D_f = 2 - \beta/\nu, \quad \tau = 1 + 2/D_f. \quad (3.7)$$

mientras que la dimensión fractal de la envoltura del cluster es determinada usando la relación de escala (3.3).

---

---

## 4. ANÁLISIS, RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1. Las simulaciones del modelo

Las simulaciones fueron realizadas en el programa Net-Logo (ver código en Anexo B) y los resultados fueron los siguientes.

La distribución estadística de  $m(0.5, L) = P_1 - P_{-1}$  y  $P_0(0.5, L)$  obtenida en  $10^3$  simulaciones sobre redes de diferente tamaño son mostradas en la Figura 4.1. Se puede observar que el sistema de magnetización

$$M(f = 0.5, L) = 0 \quad (4.1)$$

y la concentración media de los votantes indecisos

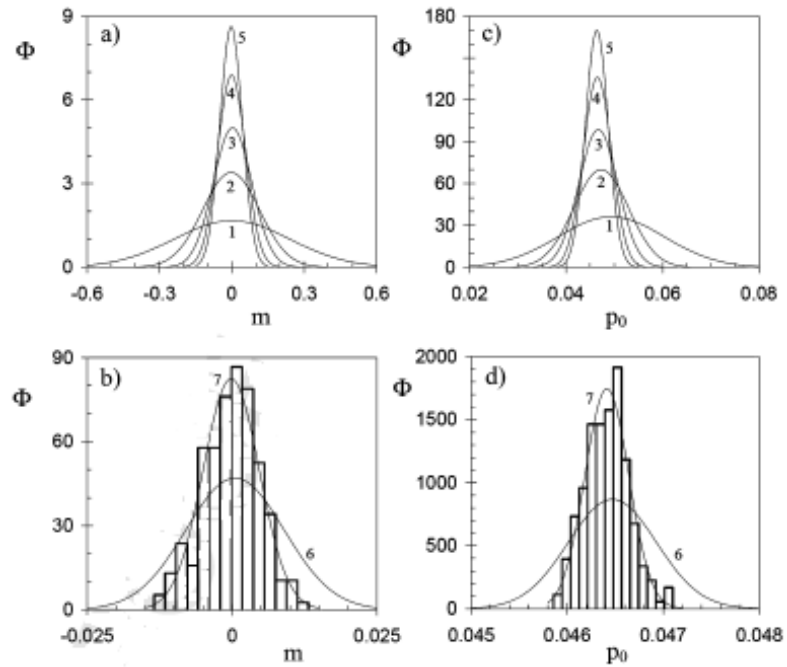
$$\langle P_0(f = 0.5, L) \rangle = 0.046 \pm 0.001 \quad (4.2)$$

ambos son independientes del tamaño de la red, mientras que las desviaciones estándar de las distribuciones estadísticas decrecen con el tamaño de la red tanto como

$$\sigma[p_0(0.5, L)] = 0.22L^{-1} \text{ y } \sigma[m(0.5, L)] = 4.75L^{-1} \quad (4.3)$$

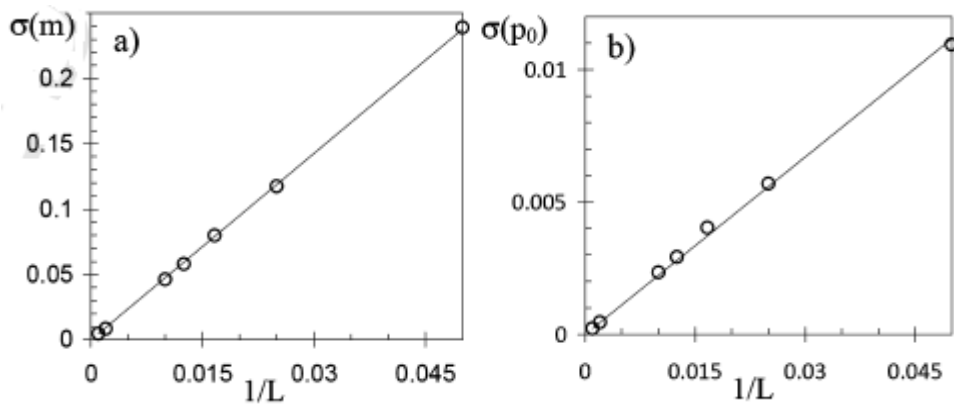
respectivamente (ver Figura 4.2). Por lo tanto, se espera que en el límite termodinámico  $P_0(0.5, L \rightarrow \infty) = 1$ , mientras que  $P_1(0.5, L \rightarrow \infty) = P_{-1}(0.5, L \rightarrow \infty) = 0$ .





**Figura 4.123.** Distribuciones estadísticas de (a, b)  $m(0.5, L) = p_1 - p_{-1}$  y (c, d)  $p_0(0.5, L)$  obtenido en  $10^3$  simulaciones en redes de tamaño  $L=20$  (1), 40 (2), 60 (3), 80 (4), 100 (5), 500 (6), y 1000 (7). Las curvas representan los mejores ajustes de los datos por la distribución normal, intervalos de datos de simulaciones numéricas en redes de tamaño  $L=1000$ .

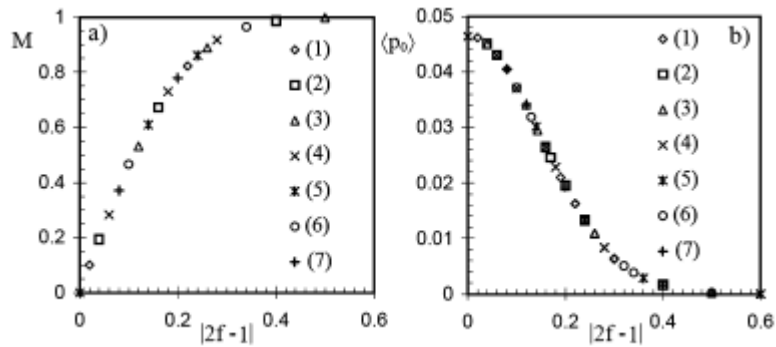
<sup>23</sup> Elaboración propia.



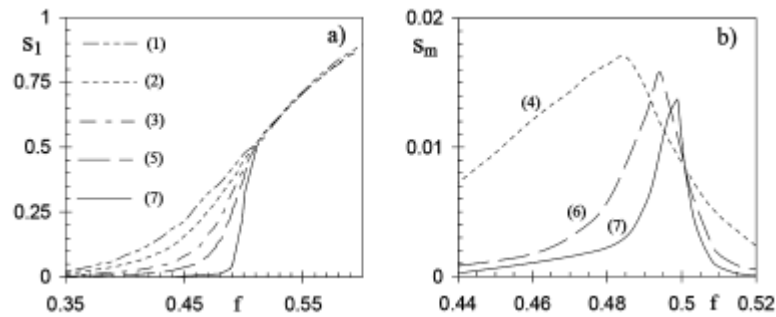
**Figura 4.2<sup>24</sup>.** Gráficas Log-Log de la desviación estándar: (a)  $\sigma[m(0.5, L)]$  y (b)  $\sigma[p_0(0.5, L)]$  versus el tamaño de la red  $L$ . Los círculos muestran simulaciones numéricas, curvas de datos ajustadas con la ecuación (4.3).

Como el sistema de magnetización inicial ( $m_0$ ) incrementa, la magnetización en el estado estable  $M(f)$  también incrementa (ver Figura 4.3a), mientras que la concentración de votantes indecisos  $\langle P_0(f) \rangle$  decrece monóticamente (ver Figura 4.3b). Note que, la magnetización del sistema y la concentración de votantes indecisos son ambos, independientes del tamaño de la red. Además, encontramos que la desviación estándar de  $m(f, L)$  y  $p_0(f, L)$  decrece con el tamaño del sistema como  $\sigma(m) \propto L^{-1}$  y  $\sigma(p_0) \propto L^{-1}$ , respectivamente. Por consiguiente,  $m(f, L \rightarrow \infty) = M(f)$  y  $p_0(f, L \rightarrow 0) = \langle p_0(f) \rangle$ . Esto es consistente con la observación de que en el límite  $L \rightarrow \infty$  la mayoría inicial siempre domina.

<sup>24</sup> Elaboración propia.



**Figura 4.3<sup>25</sup>.** (a) Magnetización del sistema  $M$  y (b) concentración de votantes indecisos ( $p_0$ ) en el estado estable versus la magnetización inicial  $|2f - 1|$  en redes de tamaño  $L=20$  (1), 40 (2), 60 (3), 80 (4), 100 (5), 500 (6) y 1000 (7).



**Figura 4.4<sup>26</sup>.** (a) Tamaños normalizados del cluster de mayor tamaño  $s_1 = S_1/N$  y (b) media normalizada del tamaño de los clusters finitos  $s_m = S_m/N$  formados por votantes con spin  $s = 1$  en el estado estable versus la concentración inicial  $f$  en redes de tamaño  $L=20$  (1), 40 (2), 60 (3), 80 (4), 150 (5), 500 (6) y 1000 (7). Para mayor claridad, no todas las curvas son mostradas.

La geometría de los estados estables de no consenso posee una fuerte dependencia de la composición del estado inicial del sistema, así como del tamaño de la red. La Figura 4.4, muestra las gráficas del tamaño del cluster más grande y el

<sup>25</sup> Elaboración propia.

<sup>26</sup> Elaboración propia.

---

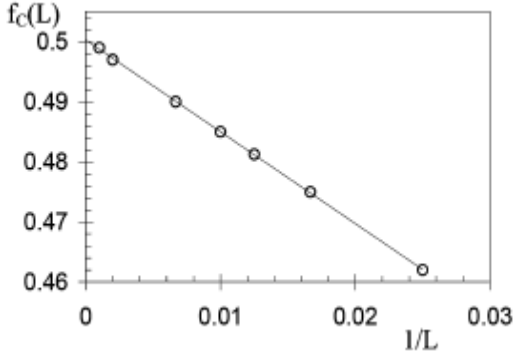
---

tamaño medio de los clusters finitos formados por votantes con spin  $s = 1$  en el estado estable versus la concentración inicial  $f$  en redes de diferentes tamaños. Se puede observar que el tamaño medio de los clusters finitos  $S_m(f, L)$  muestra un fuerte incremento en  $f_c(L)$ , característica de una fase de transición de segundo orden. Con la misma concentración, el tamaño del cluster de mayor tamaño  $S_1(f, L)$  muestra un fuerte incremento desde un valor muy pequeño a una fracción finita del sistema entero, característica de la percolación.

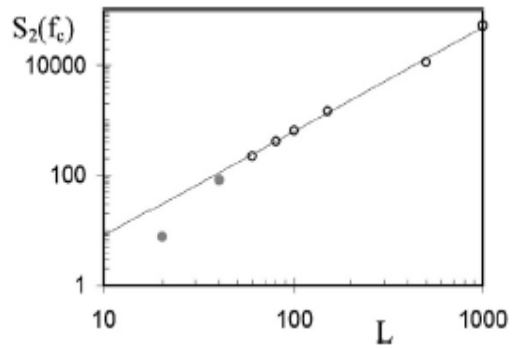
## 4.2. Los clusters en el modelo

En las simulaciones numéricas sobre redes finitas se encontró que la minoría inicial puede formar clusters de envoltura en el estado estable, probando que  $f_c(L) < 0.05$  (ver Figura 4.4). Sin embargo, aunque los clusters de ambas opiniones pueden envolver la red cuadrada con condiciones periódicas de frontera al mismo tiempo (ver Figura 3.4b, e), los clusters de envoltura de la mayoría inicial aparecen con mayor frecuencia con respecto a los clusters de envoltura de la minoría inicial. Esta diferencia entre probabilidades de envoltura incrementa a medida que incrementa el tamaño de la red. De acuerdo con esto, en el límite de  $L \rightarrow \infty$ , la concentración crítica se aproxima al valor umbral  $f_{th} > 0.5$ . Específicamente, se encontró que  $f_c(L)$  esta mejor ajustado por la ecuación (3.4a) con  $\nu = 1$  y  $f_{th} = 0.5003 \pm 0.0001$  (ver Figura 4.5).

Además, se encontró que el tamaño medio de los clusters finitos en el punto crítico  $S_2(f_c, L)$  obedece la relación de escala (3.4a) con  $\gamma = 1.89 \pm 0.06$  (ver Figura 4.6). La Figura 4.7 muestra la densidad del número de cluster versus el tamaño del cluster en la criticidad. Usando la relación de escala (3.5), encontramos que  $\tau = 2.03 \pm 0.03$ . Por otra parte, usando las relaciones de escala (3.3) y (3.6), se encontró que los clusters de envoltura formados en la criticidad tienen la dimensión fractal  $D = 1.94 \pm 0.04$ , mientras que  $\beta = 0.06 \pm 0.04$  (ver Tabla 1).



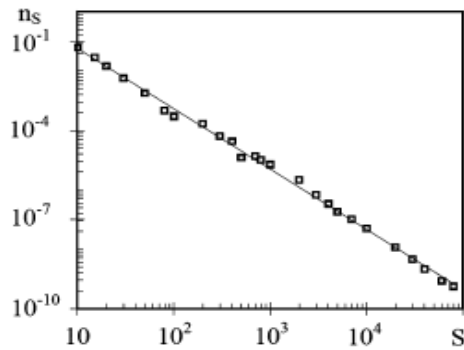
**Figura 4.5<sup>27</sup>.** Concentración crítica  $f_c(L)$  versus  $L^{-1}$ . Línea recta  $f_c = 5.003 - 1.5279L^{-1}$ .



**Figura 4.6<sup>28</sup>.** Gráfica Log-Log del segundo cluster de mayor tamaño  $S_2(f_c)$  versus el tamaño de la red  $L$ . La línea recta de datos está ajustada por la Ecc. (7b) con  $\gamma = 1.89$  y  $\nu = 1$  (los círculos grises están excluidos del ajuste).

<sup>27</sup> Elaboración propia.

<sup>28</sup> Elaboración propia.



**Figura 4.7<sup>29</sup>.** Gráfica Log-Log de la densidad del número de cluster en criticidad  $n_s(f_{th}, L)$  versus el tamaño del cluster  $s$  en redes de tamaño  $L=1000$ . La línea recta de datos está ajustada por la Ecu. (9) con  $\tau = 2.033$ .

### 4.3. Los exponentes críticos

Con el objetivo de verificar la consistencia entre los valores numéricos de los exponentes críticos, se verificaron las relaciones de escala (3.7) y se concluyó que se mantienen. Obsérvese, que los valores de los exponentes críticos encontrados por simulaciones numéricas son parecidos a los hallados en la percolación de Ising [ver Refs. (Stauffer & Aharony, 2010) (Stella & Vanderzande, 1989) (Higuchi, Takei, & Zhang, 2012) (Jo, Yi, Baek, & Kim, 2012)]. Por lo tanto, el modelo de tres estados MV parece pertenecer a la misma clase universal de la percolación de Ising.

<sup>29</sup> Elaboración propia.

**Tabla 1<sup>30</sup>.** Exponentes críticos y clases de universalidad de los modelos modificados MV en una red rada con diferentes reglas de actualización para un empate en la vecindad de los votantes.

Propiedades	Modelo modificado MV		
	Tres estados MV (1, 0,-1) [9]	Dos estados NCO (1,-1) [22]	Tres estados MV (1, 0,1-) Este trabajo
Ecuaciones reguladoras	(1) con (2a)	(1) con (2b)	(1) con (2c)
Estado estable	Consenso o empate	No consenso estable	No consenso estable
$\nu$	0.97 <sup>a</sup>	1.33 [22]	1.00±0.04
$\gamma$	01.72 <sup>a</sup>	-	1.89±0.06
$\beta$	0.12 <sup>a</sup>	-	0.06±0.04
$\tau$	-	1.955 [22]	2.03±0.03
	-	2.055 [31]	
$D_f$	-	1.84±0.01 [22]	1.94±0.04
		1.891 [31]	
Clase de universalidad y exponentes críticos dependientes	Modelo de Ising [4]	Invasión de la percolación [31]	Percolación de Ising [31]
	$\nu = 1,$ $\gamma = 7/4,$ $\beta = 1/8$	$\nu = 4/3,$ $\gamma = 187/91,$ $D = 91/48$	$\nu = 1, \gamma = 91/48$ $\tau = 379/187,$ $D = 187/96$

<sup>a</sup> Orden-desorden de la fase de transición en  $q_c = 0.106$  [9].

<sup>30</sup> Elaboración propia.

---

---

## 4.4. Discusión

Se encontró que el modelo de tres estados MV definido por las ecuaciones. (3.1a) y (3.2a) permite estados de no consenso, en el que los votos activos ( $S = \pm 1$ ) y los votos indecisos ( $S = 0$ ) coexistan, inclusive cuando inicialmente todos los votantes son activos. Además, se encontró que la fracción de votantes indecisos en el estado estable es independiente del tamaño de la red, pero decrece cuando la magnetización inicial del sistema incrementa (ver Figura 4.3b). También encontramos que los votantes que mantienen la misma opinión demuestran una percolación de transición en el estado estable de no consenso (ver Figura 4.4), siempre que la magnetización del estado estable sea una función monótona de la magnetización inicial del sistema (ver Figura 4.3a). Aunque la mayoría inicial siempre tiende a ser la mayoría en el estado estable, encontramos que la minoría inicial puede formar clusters envueltos percolantes en el estado estable en redes cuadradas finitas. Sin embargo, en el límite  $L \rightarrow \infty$ , la concentración límite es mayor que 0.5 pero menor que el límite de percolación para un sitio aleatorio percolante en una red cuadrada [ $f_p = 0.59274598$  (Lee, 2008)]. En este sentido, el comportamiento de los tres estados en el modelo MV con la regla de actualización definida por las ecuaciones (3.1a) y (3.2a), asemeja al comportamiento del modelo de dos estados NCO con la regla de actualización definida por las ecuaciones (3.1a) y (3.2a). Sin embargo, los resultados de las simulaciones numéricas sugieren que los modelos obedecen las ecuaciones (3.2a) y (3.2a) que pertenecen a diferentes clases de universalidad. Específicamente, el modelo NCO (Shao, Havlin, & Stanley, 2009) pertenece a la misma clase de universalidad que la percolación de invasión (Gastner, Markou, Pruessner, & Draief, 2014), puesto que el modelo de tres estados MV propuesto en este trabajo pertenece a la clase de universalidad de la percolación de Ising. Así, la regla de actualización para el empate en la vecindad del votante determina la clase de universalidad del modelo modificado MV.



---

---

El modelo de Ising ha sido investigado extensivamente y esto sirve como un campo de pruebas sobre teorías de transiciones de fase. Muchos sistemas físicos pueden ser descritos por medio de este simple pero no trivial modelo. Es sabido que sistemas magnéticos, aleaciones, sistemas gas-líquido y mezclas líquidas pertenecen a la clase de universalidad de Ising (Deng & Blöte, 2003). Esto implica que los exponentes críticos, así como otras cantidades universales son idénticas para todos esos modelos. Existe una gran evidencia de la universalidad se sostiene para los modelos como el de Ising en dos dimensiones, no así para el caso de tres dimensiones (Blöte, Luijten, & Heringa, 1995).

Los valores de los exponentes críticos para diferentes modificaciones del modelo MV están resumidos en la Tabla 1.

## CONCLUSIONES

En conclusión, se construyó la red cuadrada con dinámica de opinión del votante con tres estados y se realizaron las simulaciones sobre redes regulares cuadradas  $L \times L = N$  de diferentes tamaños ( $L=20, 40, 60, 80, 100, 150, 500, 1000$ ), donde  $L$  es el lado de la red (número de nodos) y por lo tanto  $N$  es el número total de nodos

Se propuso un modelo del votante de no consenso con tres estados NCOMV, el cual permite la coexistencia estable de las dos opiniones junto con los votantes indecisos.

Se encontró que el sistema de magnetización y concentración de los votantes indecisos en el estado estable de no consenso dependen en gran medida de la proporción de votantes activos en el estado inicial, pero ambos son independientes del tamaño de la red, por otro lado, las simulaciones sugieren que la composición en el estado final es independiente de la presencia y concentración de los agentes indecisos en el estado inicial.

---

---

Cuando se alcanza el estado estable de no consenso, los votantes que mantienen la misma opinión sufren una fase de transición a partir de clusters pequeños a clusters de gran envergadura cuando la concentración inicial de estos últimos aumenta. Los valores de los exponentes críticos obtenidos en las simulaciones sugieren que la percolación de transición pertenece a la misma clase de percolación de Ising. El análisis comparativo de diferentes modificaciones del modelo original MV sugiere que la clase de universalidad de los modelos que obedecen la regla MV (Galam S. , 2012) depende de la regla de actualización en el caso de un empate en la vecindad del votante.

Se encontró que la concentración crítica  $f_c(L)$  la cual es una función del tamaño de la red es:

$$f_c(L) = 5.003 - 1.5279L^{-1}$$

Recordando que el umbral de percolación encontrado fue el siguiente:

$$f_{th} = f_c(L \rightarrow \infty) = 0.5003 \pm 0.0001$$

De igual forma, los valores encontrados de los exponentes críticos fueron los siguientes:

$$\nu = 1.0 \pm 0.04, \gamma = 1.89 \pm 0.06, \beta = 0.06 \pm 0.04, \tau = 2.03 \pm 0.03.$$

## TRABAJOS A FUTURO

Una vez que se concluyó el objetivo de este trabajo se abrieron algunos trabajos de investigación. Uno de ellos, sería el de estudiar el modelo de tres estados MV sobre redes complejas; particularmente en esas en las cuáles el modelo NCO muestra una fase de transición discontinua. Por otro lado, sería interesante analizar como la regla de actualización en el caso de un empate dentro de un grupo de discusión afecta el comportamiento de los sistemas regidos por la regla de la mayoría.

---

---

Las simulaciones en este trabajo se realizaron sobre redes cuadradas de diferentes tamaños a partir a partir de la elección aleatoria uniforme de un porcentaje de agentes (o spins) que poseían un estado  $\mp 1$ , por lo que sería interesante elegir un porcentaje de agentes de manera aleatoria pero no uniforme, por ejemplo normal o de alguna distribución de colas pesadas para analizar su efecto en el comportamiento de las redes.

---

---

## REFERENCIAS

- Acuna-Lara, A., & Sastre, F. (2012). Critical phenomena of the majority voter model in a three-dimensional cubic lattice. *Phys. Rev. E* 86, 041123.
- Acuna-Lara, A., Sastre, F., & Vargas-Arriola, J. (2014). Critical phenomena in the majority voter model on two-dimensional regular lattices. *Phys. Rev. E* 89, 052109.
- Albert, R., & Barabási, A.-L. (January de 2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, 74.
- Albert-Lászlo, B., & Réka, A. (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286, 509-512.
- Alon, U. (2003). Biological Networks: The Tinkerer as a Engineer. *Science* 301.
- Amaral, L., Scala, A., & Stanley, H. (2000). Classes of small-world networks.
- Anastasios A. Tsonis, P. A. (1987). Fractals: A New look at biological shape and patterning. *Perspectives in Biology and Medicine, Volume 30, Number 3, Spring 1987*.
- Balankin, A., Martínez-Cruz, M., & Martínez, A. (2011). Effect of initial concentration and spatial heterogeneity of active agent distribution on opinion dynamics. *Physica A* 390, 3876–3887.
- Balankin, A., Martínez-Cruz, M., Martínez, F., Martínez-González, C., Morales Ruiz, L., & Patiño-Ortiz, J. (2015). Effect of heterogeneity in initial geographic distribution on opinions' competitiveness. *Entropy* 17, 3160–3171.
- Ben-Avraham, D. (2011). Exact solution of the nonconsensus opinion model on the line. *Phys. Rev. E* 83, 050101(R).

- 
- 
- Brush, S. G. (1967). History of the Lenz-Ising model. *Reviews of Modern Physics*.
- Castellano, C., Fortunato, S., & Loreto, V. (2009). Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys* 81, 591-646.
- Checkland, P. (1997). *Pensamiento de Sistemas. Prácticas de sistemas*. México: Limusa.
- Crokidakis, N., & De Oliveira, P. (2012). Impact of site dilution and agent diffusion on the critical behavior of the majority-vote model. *Phys. Rev. E* 85, 041147.
- De oliveira, M. (1992). Isotropic mayority-vote model on a squere lattice. *J. Stat. Phys.* 66, 273-281.
- De oliveira, M., Mendes, J., & Santos, M. (1993). Non-equilibrium spin models with Ising Universal behaviour. *J. Phys. A. Math. Gen.* 26, 2317-2324.
- Deng, Y., & Blöte, H. W. (2003). Simultaneous analysis of several models en the three-dimensional Ising university class. *Physical review*.
- Erdős, P., & Renyi, A. (1960). On the evolution of random graphs. *Publications of the Mathematical Institute of Hungarian Academy of Sciences*.
- Essam, J. W. (1980). Percolation theory. *Rep. Prog. Phys.* 43 833.
- Feng, X., Deng, Y., & Blöte, H. (2008). Percolation transitions in two dimensions. *Phys. Rev. E* 78, 031136.
- Fortunato, S. (2002). Site percolation and phase transitions in two dimensions. *Phys. Rev. E* 66, 054107.
- Galam, S. (1996). Fragmentation versus stability in bimodal coalitions. *Physica A*, 174-188.
- Galam, S. (1999). Aplication of statistical physics to politics. *Physica A* 274, 132-139.

- 
- 
- Galam, S. (2008). Sociophysics: a review of Galam models. *Int. J. Mod Phys. C* 19, 409-440.
- Galam, S. (2012). Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-Political Phenomena. *Springer. New York*.
- García-Valdecasas Medina, J. I. (2011). La simulación basada en agentes: una nueva forma de explorar los fenómenos sociales. *Reis* 136.
- Gastner, M., Markou, N., Pruessner, G., & Draief, M. (2014). Opinion formation models on a gradient. *PLoS ONE* 9, e114088.
- Gauvin, L. V. (2009). Phase diagram of a Shelling segregation model. *The European Physical Journal B*.
- Gelover-Santiago, A. L. (2005). *Simulación del modelo de Ising con el método de Monte Carlo*. Facultad de ciencias, UNAM.
- Gilbert, E. (1959). Random graphs, Annals of mathematical Statistics. *Institute of Mathematical Statistics*, 1141-1144.
- Higuchi, Y., Takei, M., & Zhang, Y. (2012). Scaling relations for two-dimensional Ising per-colation. *J. Stat. Phys.* 148, 777–799.
- Hopkins, B., & Wilson, R. (May 2004). The truth about Königsberg. *The college mathematics Journal*.
- Hsu, H. (1999). Percolation thresholds, critical exponents, and scaling functions on planar random lattices and their duals. *Phys. Rev. E* 60, 6361.
- Jo, W., Yi, S., Baek, S., & Kim, B. (2012). Cluster-size heterogeneity in the two-dimensional Ising model. *Phys. Rev. E* 86, 032103.
- Johansen Bertoglio, O. (2002). *Introducción a la Teoría General de Sistemas*. México: Limusa.
- Kenkel, N., & Walker, D. (1996). Fractals in the biological sciences. *COENOSES*.

- 
- 
- Koiti Tsukamoto, S. (2015). Algoritmo multinível de detecção de comunidades em redes complexas. *Universidade de Sao Paulo* .
- Lee, M. (2008). Pseudo-random-number generators and the square site percolation threshold. *Phys. Rev. E* 78, 031131.
- Li, Q., Braunstein, L., S. Havlin, S., & Stanley, H. (2011). Strategy of competition between two groups based on an inflexible contrarian opinion model. *Phys. Rev. E* 84, 066101.
- Li, Q., Braunstein, L., Wang, H., Shao, J., Stanley, H., & Havlin, S. (2013). Non-consensus opinion models on complex networks. *J. Stat. Phys.* 151, 92–112.
- Lima, F. (2012). Three-state majority-vote model on square lattice. *Physica A* 391, 1753-1758.
- Lima, F. (2013). Majority-vote model with heterogeneous agents on square lattice. *Int. J. Mod. Phys. C* 24, 1350083.
- López Acosta, N. P. (2010). Incertidumbre en el análisis de flujo de agua en suelos. *Tesis doctoral. F.I- UNAM*.
- López Agüí, J. C. (2008). *Guía básica para la simulación Montecarlo*. AENOR ediciones.
- Martinez, M., Balankin, A., Chávez, M., Trejo, A., & Reyes, I. (2015). The core vote effect on the annulled vote: an agent-based model. *Adapt. Behav.* 23, 216–226.
- Martins, P., & Plascak, J. (2003). Percolation on two-and three-dimensional lattices. *Phys. Rev. E* 67, 046119.
- McCulloch, W. S., & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of mathematical biophysics*, 115-133.

- 
- 
- Milgram, S. (May de 1967). The small-world pproblem. *Psychology Today*, 1.
- Montesinos-López, O. A., & Hernández-Suárez, C. M. (2007). Modelos matemáticos para enfermedades infecciosas. *Salud pública de México*, vol 49, no. 3.
- Peleg, M. (1993). Fractals and food. *Critical Reviews in Food and Nutrition*, 149-165.
- Pimentel Cabrera, J. A. (2008). *Redes complejas aplicadas al estudio de transiciones de fase en modelos de votantes*. México: Tesis de Maestría. UNAM.
- Qu, B., Li, Q., Havlin, S., Stanley, H., & Wang, H. (2014). Nonconsensus opinion model on directed networks. *Phys. Rev. E* 90, 052811.
- Ríos Insua, D., Insúa Ríos, S., Martín Jiménez, J., & Jiménez Martín, A. (2009). *Simulación. Métodos y aplicaciones*. 2 da ed. Alfaomega.
- Ruán Ortega, R. (2015). Dinamización de un sistema sectorial-regional de innovación bajo el enfoque de sistemas complejos: una aplicación a la industria automotriz en Puebla. *Tesis doctoral*. UNAM.
- Santos, J., Lima, F., & Malars, K. (2011). Majority-vote model on square lattice. *Physica A* 390, 359-364.
- Sastre, F., & Henkel, M. (2016). Antiferromagnetic majority voter model on square and honeycomb lattices. *Physica A* 444, 897-904.
- Sattari, A., Paczuski, M., & Grassberger, P. (2012). Comment on “Dynamic opinion model and invasion percolation”. *Phys. Rev. Lett.* 109, 079801.
- Scheffer, M. B. (2009). Early-warning signals for critical transitions. *Nature*.
- Shao, J., Havlin, S., & Stanley, H. (2009). Dynamic opinion model and invasion percolation. *Phys. Rev. Lett.* 103, 018701.



- 
- 
- Shao, J., Havlin, S., & Stanley, H. (2012). Shao, Havlin, and Stanley reply to comments on “Dynamic Opinion Model and Invasion Percolation”. *Phys. Rev. Lett.* 109, 079802.
- Skyttner, L. (2001). *General Systems Theory. Ideas and application*. Singapur: World Scientific.
- Solomonoff, R., & Rapoport, A. (1951). Connectivity of random nets. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 13.
- Souza, S., & Goncalves, S. (2012). Dynamical model for competing opinions. *Phys. Rev. E* 85, 056103.
- Stauffer, D. (2013). A biased review of sociophysics. *Stat. Phys.* 151, 9-20.
- Stauffer, D., & Aharony, A. (1994). *Introduction to percolation theory, Second Edition*. Taylor & Francis.
- Stauffer, D., & Aharony, A. (2010). *Introduction to Percolation Theory. 2nd edn., Taylor and Francis, London*.
- Stella, A., & Vanderzande, C. (1989). Scaling and fractal dimension of Ising clusters at the d-2 critical point. *Phys. Rev. Lett.* 62, 1067–1070.
- Stone, T., & McKay, S. (2015). Majority-vote model on a dynamic small-world network. *Physica A* 419, 437–443.
- Suki, B., Bates, J. H., & frey, U. (April 2011). Complexity and emergent phenomena. *Comprehensive physiology*.
- Tian, Z., Dong, G., Dub, R., & Ma, J. (2016). Non-consensus opinion model with a neutral view on complex networks. *Physica A* 450, 601–608.
- Travers, J., & Milgram, S. (1969). An experimental study of the small world problem. *Sociometry*, 32.

- 
- 
- Trejo Martínez, A. (2012). *Efecto de la concentración inicial y de la heterogenidad espacial de la distribución de distintos agentes activos en la dinámica de opinión*. Tesis doctoral. ESIME-Z del IPN.
- Vieira, A., & Crokidakis, N. (2016). Phase transitions in the majority-vote model with two types of noises. *Physica A* 450, 30–36.
- Vilela, A., Moreira, F., & De Souza, A. (2012). Majority-vote model with a bi-modal distribution of noises. *Physica A* 391, 6456–6462.
- Wang, X., & Chen, G. (2003). Complex Networks: Scale-Free and Beyond. *IEEE Circuits and Systems Magazine (Volume: 3, Issue 1)*.
- Watts, D. J., & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of small-world networks. *Nature*.
- Wen, L., Liang, X., Zhong, J., & Long, B. (2012). Oscillation of the NCO model. *Physica A* 391, 3300–3307.
- Yang, H. (2012). Alternative criterion for two-dimensional wrapping percolation. *Phys. Rev. E* 85, 042106.
- Ziff, R., & Newman, M. (2002). Convergence of threshold estimates for two-dimensional percolation. *Phys. Rev. E* 66, 016129.

## Anexo A

Physics Letters A 381 (2017) 440–445



Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



## Ising percolation in a three-state majority vote model

Alexander S. Balankin<sup>a,\*</sup>, M.A. Martínez-Cruz<sup>a</sup>, Felipe Gayosso Martínez<sup>a</sup>, Baltasar Mena<sup>b</sup>, Atalo Tobon<sup>a</sup>, Julián Patiño-Ortiz<sup>a</sup>, Miguel Patiño-Ortiz<sup>a</sup>, Didier Samayoa<sup>a</sup><sup>a</sup> Grupo Mecánica Fractal, ESIME, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 07738, México<sup>b</sup> Laboratorio de Ingeniería y Procesos Costeros, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Sisel, Yucatán, 97355, México

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 25 October 2016

Received in revised form 1 December 2016

Accepted 1 December 2016

Communicated by C.R. Doering

## Keywords:

Majority vote model

Non-consensus state

Percolation

Critical exponents

Universality classes

## ABSTRACT

In this Letter, we introduce a three-state majority vote model in which each voter adopts a state of a majority of its active neighbors, if exist, but the voter becomes uncommitted if its active neighbors are in a tie, or all neighbors are the uncommitted. Numerical simulations were performed on square lattices of different linear size with periodic boundary conditions. Starting from a random distribution of active voters, the model leads to a stable non-consensus state in which three opinions coexist. We found that the “magnetization” of the non-consensus state and the concentration of uncommitted voters in it are governed by an initial composition of system and are independent of the lattice size. Furthermore, we found that a configuration of the stable non-consensus state undergoes a second order percolation transition at a critical concentration of voters holding the same opinion. Numerical simulations suggest that this transition belongs to the same universality class as the Ising percolation. These findings highlight the effect of an updating rule for a tie between voter neighbors on the critical behavior of models obeying the majority vote rule whenever a strict majority exists.

© 2016 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

Opinion formation through contrast and synthesis of different viewpoints has been extensively studied using models based on ideas from statistical physics (see, for review, Refs. [1–5] and references therein). Various models of opinion formation have been inspired by spin systems with short range interactions. Although these models ignore many important aspects of complex social systems, it has been recognized that simple decision-making rules allow to reveal some essential features of the opinion dynamics. Among of the most popular decision-making rules are the majority and majority-vote (MV) rules accounting for a voter’s tendency to assume an opinion of a majority of its neighbors [1–21]. Specifically, in the two-state MV model on a lattice [6] each voter assumes the opinion of the majority of its neighbors with a probability  $1 - q$  and the opposite opinion with probability  $q$ , whereas the voter changes its initial opinions with probability  $1/2$ , whenever there is a tie in its neighborhood. The control parameter  $q$  plays a role of temperature in equilibrium systems. On regular lattices, the two-state MV model displays a second-order phase transition from an ordered to a disordered state at a critical value  $q_c$ . It has

been recognized that the two-state MV model belongs to the Ising model universality class [6–11]. In the limiting case of  $q = 0$ ,<sup>1</sup> after the update  $t + 1$ , the voter located on node  $i$  adopts the state with the spin

$$s_i(t + 1) = \Theta \left[ \sum_j^k s_j^i(t) \right], \quad (1a)$$

where  $s_j^i(t)$  denotes the spin of the voter located on node  $j$  and the summation is over  $k$  neighbors of the voter located at node  $i$ , while

$$\Theta(x) = \text{sign}(x), \quad (1b)$$

whenever  $x \neq 0$ , whereas

$$\Theta(x = 0) \text{ takes the values } 1 \text{ and } -1 \text{ with equal probabilities.} \quad (2a)$$

Recently, Lima [9] has introduced a three-state MV model in which the third opinion is neutral ( $s = 0$ ), while the competing opinions have opposite spins ( $s = \pm 1$ ). In this three-state MV model,

\* Corresponding author at: SEPL-ESIME-Zacatenco, U.P. Adolfo López Mateos, Av. Politécnico Nacional s/n, México D.F. 07738, México.  
E-mail address: abalankin@ipn.mx (A.S. Balankin).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2016.12.001>  
0975-9601/© 2016 Elsevier B.V. All rights reserved.

<sup>1</sup> In this case the MV model coincides with the Ising model with the zero-temperature Glauber kinetics and its ultimate fate is either a consensus or tie [4].

## Anexo B. Código del programa utilizado para realizar las simulaciones en NetLogo para una red cuadrada 60x60

```
globals [ i j N z r di dj a npixel sum-inf1 sum-inf2 npersona xi yj
amarillo azul n2 azul1 ciclos cazul camarilla mvm]
patches-own [partido influencia votoduro]

to setup
  __clear-all-and-reset-ticks
  ask patches [set partido 0 set influencia 0]
  set npixel[]

  set r 60 ;DIMENSION DE UN LADO DE LA RED
  set participante2 3600 - participante1

  set i 0
  set j 0

  repeat r
  [
    repeat r
    [
      set npixel sentence npixel patch i j

      set j j + 1
    ]
    set i i + 1
    set j 1
  ]

  set N r * r

  repeat participante1
  [
    set z random N

    ask item z npixel [set pcolor white set partido 1 set influencia 1
set votoduro 1]
    set npixel replace-item z npixel item (N - 1 ) npixel

    set N N - 1
  ]

  repeat participante2
  [
    set z random N

    ask item z npixel [set pcolor gray set partido 2 set influencia 1
set votoduro 1]
    set npixel replace-item z npixel item (N - 1 ) npixel
```

```

    set N N - 1
  ]
end

to inicio
set ciclos 0
set azul []
set camarilla []

if participante1 + participante2 > r * r
  [stop]
; if participante1 < participante2
  ; [stop]

repeat 50
[
  set mvm random 2
  set azul1 count patches with [partido = 1]

  repeat r * r
  [

set di random r
set dj random r

ask patch di dj

[
  ; if votoduro = 0
  ; [
  if partido = 1

    [ ask patch di dj [set sum-inf1 sum ([influencia] of neighbors4 with
[partido = 1]) ] ;+ [influencia] of patch di dj]
      ask patch di dj [ set sum-inf2 sum ([influencia] of neighbors4
with [partido = 2])]
    ]

    if partido = 2

      [ ask patch di dj [set sum-inf2 sum ([influencia] of neighbors4 with
[partido = 2])]; + [influencia] of patch di dj]
        ask patch di dj [ set sum-inf1 sum ([influencia] of neighbors4 with
[partido = 1])]
      ]

    if partido = 0

      [ ask patch di dj [set sum-inf1 sum ([influencia] of neighbors4 with
[partido = 1])]
        ask patch di dj [ set sum-inf2 sum ([influencia] of neighbors4 with
[partido = 2])]
      ]

    if sum-inf2 = sum-inf1

```

```

[
  ask patch di dj [set pcolor black set partido 0 set influencia 0]
  ;if mvm = 0 [set sum-inf1 sum-inf2 + 1]
  ;if mvm = 1 [set sum-inf1 sum-inf2 - 1]
]

  if sum-inf1 > sum-inf2 [ask patch di dj [set pcolor white set partido
1 set influencia 1]]

  if sum-inf2 > sum-inf1 [ask patch di dj [set pcolor gray set partido
2 set influencia 1]]

;]
]

]

set final-participante1 count patches with [partido = 1]
set final-participante2 count patches with [partido = 2]

set a ((count patches with [partido = 1]) + (count patches with
[partido = 2]))
if a = 0 [stop]
set-current-plot "grafic"
set-current-plot-pen "party 1"
plot count ( patches with [partido = 1]) / a
set-plot-pen-color white
set-current-plot-pen "party 2"
plot count (patches with [partido = 2])/ a
set-plot-pen-color gray

set ciclos ciclos + 1
set azul sentence azul count patches with [partido = 1]
set camarilla sentence camarilla count patches with [partido = 2]

]

set nulo count patches with [pcolor = black]

stop

end

```

## GLOSARIO DE TÉRMINOS

<b>Ecc:</b>	Ecuación
<b>MCS</b>	Paso Monte Carlo (Monte Carlo step).
<b>MR:</b>	Regla de la mayoría (majority rule).
<b>NCO:</b>	No consenso.
<b>VM:</b>	Modelo del votante o neuronal.