



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DOCTORADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS  
ROBÓTICOS Y MECATRÓNICOS

ESTUDIO Y CONTROL DE SISTEMAS SUBACTUADOS  
PENDULARES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTORADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS  
ROBÓTICOS Y MECATRÓNICOS

P R E S E N T A:

**M. en C. Mayra Antonio Cruz**

DIRECTORES DE TESIS:

DR. RAMÓN SILVA ORTIGOZA

DR. VICTOR MANUEL HERNÁNDEZ GUZMÁN

CIUDAD DE MÉXICO

AGOSTO 2018.





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS Y DESIGNACIÓN DE DIRECTORES DE TESIS

México, D.F. a 29 de enero del 2016

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CIDETEC en su sesión ordinaria No. 1 celebrada el día 11 del mes de enero conoció la solicitud presentada por el (la) alumno (a):

Antonio	Cruz	Mayra
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre (s)
		Con registro:
		B 1 5 0 3 6 6

Aspirante al grado de:

Doctor en Ingeniería de Sistemas Robóticos y Mecatrónicos

1.- Se designa al aspirante el tema de tesis titulado:

Estudio y Control de Sistemas Subactuados Pendulares

De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos:

- a) Identificar las problemáticas-soluciones de control más importantes de los sistemas subactuados de interés.
- b) Diseñar, construir y validar cuatro prototipos de sistemas subactuados (lazo abierto).
- c) Desarrollar, simular e implementar experimentalmente las problemáticas-soluciones identificadas (lazo cerrado).
- d) Desarrollar un control diferente a los existentes en la literatura para al menos un sistema subactuado de interés.
- e) Validar en un prototipo el control mencionado en d).
- f) Adquirir y procesar los resultados obtenidos tanto en simulación como en experimentación.
- g) Elaborar el reporte técnico que derivará en la tesis doctoral.

2.- Se designan como Directores de Tesis a los Profesores:

Dr. Ramón Silva Ortigoza y Dr. Victor Manuel Hernández Guzmán

3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesis será elaborado por la alumna en:

CIDETEC

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- La interesada deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

\_\_\_\_\_  
Dr. Ramón Silva Ortigoza

Directores de Tesis



\_\_\_\_\_  
Dr. Victor Manuel Hernández Guzmán

Aspirante

\_\_\_\_\_  
Mayra Antonio Cruz

S.E.P.  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO EN COMPUTO

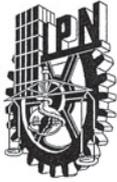
Presidente del Colegio

\_\_\_\_\_  
Dr. Oscar Camacho Nieto

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO  
\* 05 ABR 2016 \*

**RECIBIDO**  
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14-BIS

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 6 del mes de Junio de 2018 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del CIDETEC para examinar la tesis titulada:

Estudio y Control de Sistemas Subactuados Pendulares

Presentada por el alumno:

ANTONIO  
Apellido paterno

CRUZ  
Apellido materno

MAYRA  
Nombre(s)

Con registro: 

B	1	5	0	3	6	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

Doctorado en Ingeniería de Sistemas Robóticos y Mecatrónicos

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISIÓN REVISORA**

Directores de tesis

DR. RAMÓN SILVA ORTIGOZA  
Primer Vocal

DR. VÍCTOR MANUEL HERNÁNDEZ GUZMÁN  
Segundo Vocal

DR. CARLOS FERNANDO AGUILAR IBÁÑEZ  
Presidente

DR. JUAN CARLOS HERRERA LOZADA  
Secretario

DR. OSCAR OCTAVIO GUTIÉRREZ FRÍAS  
Tercer Vocal

DR. JOSÉ DE JESÚS RUBIO ÁVILA  
Suplente

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

DR. ITZAMÁ LÓPEZ YÁÑEZ



S.E.P.  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO EN COMPUTO





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México el día 29 del mes de Junio del año 2018, la que suscribe Mayra Antonio Cruz alumna del Programa de Doctorado en Ingeniería de Sistemas Robóticos y Mecatrónicos con número de registro B150366, adscrita al Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, manifiesta que es la autora intelectual del presente trabajo de Tesis, bajo la dirección del Dr. Ramón Silva Ortigoza y del Dr. Victor Manuel Hernández Guzmán, y cede los derechos del trabajo titulado *Estudio y Control de Sistemas Subactuados Pendulares* al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso de la autora y/o directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección electrónica *mayra.antonio.cruz@gmail.com*. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

Mayra Antonio Cruz  
Nombre y Firma



# Resumen

En este trabajo se presenta el *estudio* y *control* de cuatro sistemas mecánicos subactuados de tipo péndulo invertido, a saber: Péndulo de Furuta (PF), Péndulo con Rueda Inercial (PRI), Péndulo Invertido Sobre Carro (PISC) y pendubot. El *estudio* de los sistemas comprende lo siguiente:

- Modelos dinámicos no lineales de los cuatro sistemas (PF, PRI, PISC y pendubot), cada uno derivado de aplicar la formulación de Euler-Lagrange.
- Modelos lineales aproximados alrededor del punto de operación inestable de los cuatro sistemas.
- Modelos basados en planitud diferencial desarrollados para los sistemas PF, PISC y pendubot, los cuales son equivalentes a los modelos lineales aproximados.
- Diseño asistido por computadora y construcción, vía máquinas-herramientas, de los sistemas.

Mientras que el *control* se refiere a:

- Simulación e implementación experimental de un controlador que, por medio de una apropiada conmutación de controles, resuelve las tareas de *swing-up* y estabilización en los sistemas PF, PRI, PISC y pendubot. Para tal fin, se emplean controles previamente reportados en la literatura. En todos los sistemas se usa el control por realimentación del vector de estado para ejecutar la tarea de estabilización; mientras que para la tarea de *swing-up* se utilizan diferentes controles en cada sistema, a saber, un control basado en energía que explota las propiedades pasivas del sistema para el PF y PISC, un control que emplea el enfoque de energía para el PRI y un control basado en linealización parcial colocada para el pendubot.
- Propuesta de un esquema de control lineal para la estabilización del sistema PF. Este esquema de control es derivado del modelo de planitud diferencial del PF y permite eliminar el ciclo límite causado por la no linealidad de zona muerta, la cual a su vez es inducida por fricción estática en el actuador del sistema. En el diseño de este esquema de control se hace uso del enfoque de respuesta en el tiempo, es decir, se emplea la herramienta de control clásico conocida como el *lugar de las raíces*; mientras que el análisis de la no linealidad de zona muerta se lleva a cabo a través del *método de la función descriptiva*. Desde que este último es un método intrínsecamente basado en respuesta en frecuencia, y no en la respuesta en el tiempo, el procedimiento propuesto para llevar a cabo la eliminación del ciclo límite es intuitivo y recae en la experiencia del diseñador.
- Propuesta de otro esquema de control lineal para la estabilización del PF, PISC y pendubot. Tal esquema de control también es desarrollado a partir del modelo lineal de planitud diferencial y también permite eliminar el ciclo límite causado por la no linealidad de zona muerta, inducida por fricción estática en el actuador de cada uno de los tres sistemas (FP, PISC y pendubot). En este caso el diseño

del esquema de control propuesto se realiza vía el enfoque de respuesta en frecuencia, usando la herramienta de control clásico *diagramas de Bode*. Nuevamente, el análisis de la zona muerta se realiza con el *método de la función descriptiva*. Como resultado de emplear el enfoque de respuesta en frecuencia y el *método de la función descriptiva*, se encuentran fórmulas específicas que permiten diseñar de manera más fácil el esquema de control propuesto.

- La implementación de los dos esquemas de control propuestos se lleva a cabo a través del control por realimentación del vector de estado. Esto al utilizar expresiones matemáticas que relacionan ambos enfoques, es decir, el enfoque clásico (esquemas de control propuestos) y el enfoque moderno (control por realimentación del vector de estado).

### **Palabras Clave:**

Sistemas mecánicos subactuados, péndulos invertidos, ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, linealización aproximada, planitud diferencial, diseño asistido por computadora, construcción de prototipos, control basado en energía, linealización parcial colocada, realimentación del estado, ciclo límite, zona muerta, fricción estática, función descriptiva, enfoque de respuesta en frecuencia, enfoque de respuesta en el tiempo.

# Abstract

In this work the *study* and *control* of four underactuated mechanical systems of the inverted pendulum type are presented, namely: Furuta pendulum (FP), Inertia Wheel Pendulum (IWP), Cart-Pole System (CPS), and pendubot. The *study* of the systems comprises the following:

- Dynamic and non linear models of the four systems (FP, IWP, CPS, and pendubot), each one derived from the Euler-Lagrange formulation.
- Approximate linear models around the unstable operation point of the four systems.
- Models based on differential flatness developed for the systems FP, CPS, and pendubot, which are equivalent to the approximate linear models.
- Computer aided design and construction, via machine-tools, of the systems.

Whereas the *control* refers to:

- Simulation and experimental implementation of a controller that, through an appropriated switching of controls, solves the swing-up and stabilization tasks of the systems FP, IWP, CPS, and pendubot. To this end, controls previously reported in literature are employed. In all the systems the state feedback control is used to execute the stabilization task; while for the swing-up task different controls are used in each system, namely, a control based on energy that exploits the passive properties of the system for the FP and CPS, a control that uses the energy approach for the IWP, and a control based on the collocated partial feedback linearization for the pendubot.
- Proposal of a linear control scheme for the stabilization of the FP. This control scheme is derived from the differential flatness model of the FP and allows eliminating the limit cycle caused by the dead-zone nonlinearity, which is in turn induced by static friction in the actuator of the system. In the design of this control scheme the time response approach is used, that is, the classic control tool known as *root locus* is employed; whereas the analysis of the dead-zone nonlinearity is performed through the *describing function method*. Since this latter is a method intrinsically based on frequency response, and not in time response, the procedure proposed to commissioning elimination of the limit cycle is intuitive and relays on the designer experience.
- Proposal of another linear control scheme for the stabilization of the FP, CPS, and pendubot. Such a control scheme is also developed departing from the differential flatness model and it also allows eliminating the limit cycle caused by the dead-zone nonlinearity, induced by static friction in the actuator of each one of the three systems (FP, CPS, and pendubot). In this case the design of the proposed control scheme is performed via the frequency response approach, using the tool of classic control *Bode diagrams*. The analysis of the dead-zone is again carried out with the *describing function method*. As a result of using the frequency response approach and the *describing function method*, precise formulas are found which allows designing easily the proposed control scheme.

- The implementation of the two proposed control schemes is carried out through the state feedback control when using mathematical expressions that relate both approaches, that is, the classical approach (proposed control schemes) and the modern approach (state feedback control).

**Keywords:**

Underactuated mechanical systems, inverted pendulums, Euler-Lagrange equations of motion, approximate linearization, differential flatness, computer aided design, prototypes construction, control based on energy, partial feedback linearization, state feedback control, limit cycle, static friction, describing function method, frequency response approach, time response approach.

# Dedicatoria

A mis padres, Aquilino y Juana, por haberme inculcado la importancia de la superación académica, por enseñarme con el ejemplo que los sacrificios son para conseguir un bien mejor y que los obstáculos se superan trabajando fuerte y con dedicación. Además, por haberme formado para ser una persona independiente, con criterio propio y para defender mis ideales.

A mi hermano, Omar, por haberme enseñado a perseguir mis metas y por brindarme la fortaleza emocional para concluir este trabajo doctoral.

A mis hermanos, Román, Lisbeth y Arianna, por compartirme sus experiencias de vida, las cuales me ayudaron a tomar las decisiones que me han llevado a este punto de mi vida.



# Agradecimientos

Agradezco al CONACYT y a la BEIFI por el apoyo económico otorgado durante el desarrollo del presente trabajo doctoral.

También, doy gracias al CIDETEC-IPN por proporcionarme la infraestructura adecuada para lograr los objetivos general y específicos del presente trabajo.

Asimismo, expreso gratitud a mis asesores, Ramón y Victor, por haberme proporcionado una formación académica-profesional de alto nivel y por haberme guiado oportuna y acertadamente durante el desarrollo de la tesis. Asimismo, por compartirme sus experiencias profesionales con la finalidad de apoyarme en la toma de decisiones.

Al CNAD, en particular al M. en C. Juan Carlos Rivera Díaz, por el apoyo brindado en la construcción de prototipos.

A todos mis compañeros de área, Celso, Rafael, Eduardo, Víctor, Norberto, Juan Antonio, Yolanda y Salvador, por las colaboraciones de trabajo realizadas.

En particular, agradezco a Carlos Merlo, por el apoyo moral, la solidaridad y la compañía brindados desde el inicio hasta el final de mi trabajo de tesis doctoral. Asimismo, por las colaboraciones de trabajo realizadas.

Finalmente, doy gracias infinitas a Camelia, Lino, Ringo, Paul, Emma y Sebastián por el amor, compañía y apoyo incondicionales dados a lo largo de este proceso.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes de los sistemas pendulares . . . . .	2
1.2. Sistemas subactuados pendulares . . . . .	2
1.3. Estado del arte científico . . . . .	4
1.3.1. Péndulo de Furuta (PF) . . . . .	5
1.3.2. Péndulo con Rueda Inercial (PRI) . . . . .	8
1.3.3. Péndulo Invertido Sobre Carro (PISC) . . . . .	11
1.3.4. Pendubot . . . . .	16
1.4. Estado del arte tecnológico . . . . .	18
1.5. Discusión del estado del arte científico y tecnológico . . . . .	19
1.6. Objetivos del trabajo . . . . .	19
1.6.1. Objetivo general . . . . .	19
1.6.2. Objetivos particulares . . . . .	19
1.7. Organización del trabajo . . . . .	20
<b>2. Péndulo de Furuta (PF)</b>	<b>23</b>
2.1. Modelos matemáticos . . . . .	23
2.1.1. Modelo dinámico con ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	23
2.1.2. Modelo lineal aproximado . . . . .	28
2.1.3. Modelo lineal basado en planitud diferencial . . . . .	31
2.2. Construcción del sistema . . . . .	32
2.2.1. Actuador y sensores . . . . .	33
2.2.2. Etapa de potencia . . . . .	34
2.2.3. Estructura mecánica . . . . .	36
2.2.4. Adquisición y procesamiento de datos . . . . .	41
2.2.5. Parámetros del prototipo . . . . .	42
2.3. Controlador para <i>swing-up</i> más estabilización . . . . .	44
2.3.1. Control no lineal para levantar el péndulo ( <i>swing-up</i> ) . . . . .	44
2.3.2. Control lineal para estabilizar el péndulo . . . . .	45
2.3.3. Simulación numérica . . . . .	47
2.3.4. Implementación experimental . . . . .	49
2.3.5. Discusión de resultados . . . . .	50
2.4. Esquemas de control para eliminar el ciclo límite . . . . .	51
2.4.1. Usando planitud diferencial y respuesta en el tiempo: Lugar de las raíces . . . . .	51
2.4.2. Usando planitud diferencial y respuesta en la frecuencia: Diagramas de Bode . . . . .	64

<b>3. Péndulo con Rueda Inercial (PRI)</b>	<b>77</b>
3.1. Modelos matemáticos . . . . .	77
3.1.1. Modelo dinámico con ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	77
3.1.2. Modelo lineal aproximado . . . . .	80
3.2. Construcción del sistema . . . . .	83
3.2.1. Actuador y sensores . . . . .	84
3.2.2. Estructura mecánica . . . . .	84
3.2.3. Parámetros del prototipo . . . . .	89
3.3. Controlador para <i>swing-up</i> más estabilización . . . . .	91
3.3.1. Control no lineal para levantar el péndulo ( <i>swing-up</i> ) . . . . .	91
3.3.2. Control lineal para estabilizar el péndulo . . . . .	92
3.3.3. Simulación numérica . . . . .	93
3.3.4. Implementación experimental . . . . .	94
3.3.5. Discusión de resultados . . . . .	95
<b>4. Péndulo Invertido Sobre Carro (PISC)</b>	<b>97</b>
4.1. Modelos matemáticos . . . . .	97
4.1.1. Modelo dinámico con ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	97
4.1.2. Modelo lineal aproximado . . . . .	101
4.1.3. Modelo lineal basado en planitud diferencial . . . . .	104
4.2. Construcción del prototipo . . . . .	105
4.2.1. Actuador y sensores . . . . .	105
4.2.2. Etapa de potencia . . . . .	106
4.2.3. Estructura mecánica . . . . .	107
4.2.4. Adquisición y procesamiento de datos . . . . .	112
4.2.5. Parámetros del prototipo . . . . .	113
4.3. Controlador para <i>swing-up</i> más estabilización . . . . .	114
4.3.1. Control no lineal para levantar el péndulo ( <i>swing-up</i> ) . . . . .	114
4.3.2. Control lineal para estabilizar el péndulo . . . . .	114
4.3.3. Simulación numérica . . . . .	115
4.3.4. Implementación experimental . . . . .	116
4.3.5. Discusión de resultados . . . . .	119
4.4. Esquema de control para eliminar el ciclo límite . . . . .	119
4.4.1. Análisis de existencia de ciclo límite . . . . .	120
4.4.2. Sintonización del control . . . . .	121
4.4.3. Procedimiento para la eliminación del ciclo límite . . . . .	122
4.4.4. Resultados experimentales . . . . .	124
<b>5. Pendubot</b>	<b>133</b>
5.1. Modelos matemáticos . . . . .	133
5.1.1. Modelo dinámico con ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	133
5.1.2. Modelo lineal aproximado . . . . .	137
5.1.3. Modelo lineal basado en planitud diferencial . . . . .	141
5.2. Construcción del sistema . . . . .	142
5.2.1. Actuador, sensores y anillo deslizante . . . . .	143
5.2.2. Etapa de potencia . . . . .	143
5.2.3. Estructura mecánica . . . . .	144

5.2.4.	Adquisición y procesamiento de datos . . . . .	150
5.2.5.	Parámetros del prototipo . . . . .	150
5.3.	Controlador para <i>swing-up</i> más estabilización . . . . .	154
5.3.1.	Control para levantar el péndulo ( <i>swing-up</i> ) . . . . .	154
5.3.2.	Control lineal para estabilizar el péndulo . . . . .	155
5.3.3.	Simulación numérica . . . . .	155
5.3.4.	Implementación experimental . . . . .	156
5.3.5.	Discusión de resultados . . . . .	159
5.4.	Esquema de control para eliminar ciclo límite . . . . .	159
5.4.1.	Análisis de existencia de ciclo límite . . . . .	161
5.4.2.	Sintonización del control . . . . .	161
5.4.3.	Procedimiento para la eliminación del ciclo límite . . . . .	163
5.4.4.	Resultados experimentales . . . . .	164
<b>6.</b>	<b>Conclusión y trabajo futuro</b>	<b>171</b>
6.1.	Consecución de los objetivos . . . . .	171
6.2.	Dificultades enfrentadas . . . . .	174
6.3.	Trabajo futuro . . . . .	175
	<b>Referencias</b>	<b>177</b>
<b>A.</b>	<b>Productos de investigación científica y tecnológica obtenidos</b>	<b>195</b>
A.1.	Productos de investigación científica . . . . .	195
A.1.1.	Artículos en revistas del <i>Journal Citation Reports</i> (JCR) . . . . .	195
A.1.2.	Artículos en revistas de divulgación y difusión científica y tecnológica	196
A.1.3.	Artículos <i>in Extenso</i> (Conferencias internacionales) indexados en Web of Science, Scopus e IEEE Xplore . . . . .	197
A.1.4.	Conferencias magistrales por invitación . . . . .	198
A.1.5.	Estancia de investigación . . . . .	198
A.1.6.	Participación en proyectos de investigación de la SIP-IPN . . . . .	198
A.2.	Productos de investigación tecnológica . . . . .	199
A.2.1.	Patentes . . . . .	199
A.2.2.	Derechos de autor . . . . .	199
<b>B.</b>	<b>Hojas de datos de los dispositivos electromecánicos y electrónicos de los prototipos construidos</b>	<b>201</b>
B.1.	Actuadores y sensores . . . . .	202
B.1.1.	14204 Brush DC motor con encoder de Pittman . . . . .	202
B.1.2.	2642V0033 DC-micromotor con encoder de Faulhaber . . . . .	204
B.1.3.	Miniencoder ITD01A4Y1 de Baumer . . . . .	205
B.1.4.	Miniencoder ITD01B14 de Baumer . . . . .	206
B.2.	Anillo deslizante . . . . .	207
B.3.	Etapas de potencia . . . . .	209
B.3.1.	Fuente HF100W-SF-24 . . . . .	209
B.3.2.	Arrancador de servomotores AZ12A8DDC . . . . .	210
B.3.3.	Tarjeta de montaje MC1XAZ01 . . . . .	212
B.4.	Tarjeta DS1104 . . . . .	214
B.5.	CLP1104 . . . . .	217



# Índice de figuras

1.1	(a) PF. (b) PRI. . . . .	3
1.2	(a) PISC. (b) Pendubot. . . . .	4
2.1	Diagrama del PF. . . . .	24
2.2	Diagrama de cuerpo libre del PF. . . . .	25
2.3	Subsistemas del prototipo de PF. . . . .	33
2.4	Dispositivos que integran el <i>Subsistema A</i> : Actuador y sensores. . . . .	34
2.5	Diagrama del brazo-péndulo y tarjeta DS1104. . . . .	35
2.6	Conexión de encoders y DS1104. . . . .	35
2.7	Dispositivos que integran el <i>Subsistema B</i> : Etapa de potencia. . . . .	36
2.8	Conexiones del arrancador de servomotor a través de la tarjeta de montaje MC1XAZ01. . . . .	36
2.9	Vista explosionada del brazo. . . . .	37
2.10	Vista explosionada del péndulo. . . . .	37
2.11	Vista explosionada de la base de la estructura. . . . .	38
2.12	CAD de la estructura mecánica y el <i>Subsistema A</i> . . . . .	39
2.13	Brazo construido y encoder del péndulo. . . . .	40
2.14	Péndulo construido. . . . .	40
2.15	Base de la estructura construida. . . . .	41
2.16	<i>Subsistemas A, B y C</i> reales del prototipo de PF. . . . .	41
2.17	Prototipo final del PF. . . . .	42
2.18	Posición del péndulo y del brazo cuando son afectados sólo por la gravedad. . . . .	44
2.19	Diagrama de bloques del controlador híbrido (2.52). . . . .	47
2.20	Diagrama de bloques en Matlab-Simulink para la simulación del PF en lazo cerrado. . . . .	48
2.21	Resultados de simulación del PF en lazo cerrado con el controlador híbrido (2.52). . . . .	48
2.22	Diagrama de bloques de Matlab-Simulink para la experimentación del PF en lazo cerrado. . . . .	50
2.23	Resultados experimentales del PF en lazo cerrado con el controlador híbrido (2.52). . . . .	50
2.24	Esquema de control propuesto para (2.58). . . . .	52
2.25	Lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto (2.64). . . . .	55
2.26	Lugar de las raíces del sistema de control de la Figura 2.24. . . . .	55
2.27	Resultados experimentales del PF al usar el control lineal (2.44) con las ganancias (2.66). . . . .	56
2.28	No linealidad de zona muerta. . . . .	57

2.29	Sistema en lazo cerrado que incluye la no linealidad de zona muerta. . . . .	57
2.30	Representación equivalente del diagrama de bloques de la Figura 2.29. . . . .	58
2.31	Diagrama polar de $G(j\omega)$ y $-1/N(A)$ . . . . .	58
2.32	Lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto (2.64) cuando para el control lineal (2.62) se usan las ganancias b) de la Tabla 2.5. . . . .	61
2.33	Lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto (2.64) al utilizar las ganancias c) de la Tabla 2.5 en el control lineal (2.62). . . . .	61
2.34	Diagramas de Bode de $G(s)$ en (2.69) cuando se usan los valores numéricos de la Tabla 2.5. Línea continua a). Línea discontinua b).Línea discontinua de puntos c). . . . .	62
2.35	Diagrama polar de $G(s)$ , es decir, (2.69), cuando se usan los valores numéricos de la Tabla 2.5. Línea continua a). Línea discontinua b).Línea discontinua de puntos c). . . . .	62
2.36	Respuesta de simulación de $y_F$ de la Figura 2.29 cuando se usan los valores numéricos de la Tabla 2.5. . . . .	63
2.37	Resultados experimentales del control lineal (2.44) al usar las ganancias b) de la Tabla 2.7. . . . .	64
2.38	Resultados experimentales del control lineal (2.44) al usar las ganancias c) de la Tabla 2.7. . . . .	65
2.39	PF en lazo cerrado considerando la no linealidad de zona muerta. . . . .	65
2.40	Obtención experimental de $\delta$ . . . . .	68
2.41	Diagramas de Bode de $G_1(s)$ . . . . .	70
2.42	Diagramas de Bode de $G(s)$ . . . . .	70
2.43	Diagrama polar de $G(j\omega)$ . . . . .	71
2.44	Resultados experimentales cuando se considera (2.87). . . . .	72
2.45	Resultados experimentales considerando $ G(j\omega_{\sigma_1})  = 11$ y $\omega_{\sigma_1} = 6$ rad/s. . . . .	73
2.46	Resultados experimentales considerando $ G(j\omega_{\sigma_1})  = 17$ y $\omega_{\sigma_1} = 8$ rad/s. . . . .	73
2.47	Evolución de la amplitud del ciclo límite durante el procedimiento experimental. . . . .	74
3.1	Diagrama esquemático del PRI. . . . .	78
3.2	Diagrama de cuerpo libre del PRI. . . . .	79
3.3	Subsistemas del prototipo reconfigurable de PF y PRI. . . . .	83
3.4	Motor de CD Faulhaber 2642W024CR. . . . .	84
3.5	Péndulo dibujado en SolidWorks. . . . .	85
3.6	Rueda dibujada en SolidWorks. . . . .	85
3.7	Brida y pernos dibujados en SolidWorks. . . . .	86
3.8	<i>Subsistemas A y C</i> en SolidWorks del prototipo de PRI. . . . .	86
3.9	Péndulo del PRI manufacturado. . . . .	87
3.10	Rueda manufacturada del PRI. . . . .	88
3.11	Brida y pernos manufacturados del PRI. . . . .	88
3.12	<i>Subsistemas A, B y C</i> reales del prototipo del PRI. . . . .	88
3.13	Prototipo final del PRI. . . . .	89
3.14	Arreglo para cálculo de $l_{c1}$ . . . . .	90
3.15	Diagrama de bloques del controlador híbrido (3.37). . . . .	93

3.16	Diagrama de bloques en Matlab-Simulink de la simulación en lazo cerrado del PRI. . . . .	94
3.17	Resultados de simulación del PRI con el controlador híbrido (3.37). . . . .	94
3.18	Diagrama de bloques de Matlab-Simulink para experimentación del PRI. . . . .	96
3.19	Resultados de experimentación del PRI con el controlador híbrido (3.37). . . . .	96
4.1	Diagrama del PISC. . . . .	98
4.2	Diagrama de cuerpo libre del péndulo . . . . .	99
4.3	Subsistemas del prototipo de PISC. . . . .	106
4.4	Encoder miniatura ITD01B14. . . . .	106
4.5	CAD del sistema de carro en SolidWorks. . . . .	107
4.6	CAD del péndulo vía SolidWorks. . . . .	108
4.7	CAD de la base de la estructura vía SolidWorks. . . . .	109
4.8	CAD de los <i>Subsistemas A y C</i> del prototipo de PISC. . . . .	109
4.9	Sistema de carro construido. . . . .	111
4.10	Péndulo construido. . . . .	111
4.11	Base de la estructura construida. . . . .	112
4.12	<i>Subsistemas A, B y C</i> reales del prototipo de PISC. . . . .	112
4.13	Prototipo final de PISC. . . . .	113
4.14	Diagrama de bloques del controlador híbrido (4.34). . . . .	115
4.15	Diagrama de bloques en Matlab-Simulink de la simulación en lazo cerrado del PISC. . . . .	116
4.16	Resultados de simulación del PISC con el controlador híbrido (4.34). . . . .	117
4.17	Diagrama de bloques de Matlab-Simulink para experimentación con el PISC. . . . .	117
4.18	Resultados de experimentación del PISC con el controlador híbrido (4.34). . . . .	118
4.19	Sistema en lazo cerrado considerando no linealidad de zona muerta. . . . .	119
4.20	Representación equivalente del diagrama de bloques de la Figura 4.19. . . . .	121
4.21	Gráfica polar de $G(j\omega)$ y $-1/N(A)$ . . . . .	121
4.22	Diagramas de Bode de $G_1(s)$ . . . . .	124
4.23	Diagramas de Bode de $G(s)$ . . . . .	125
4.24	Diagramas polares de $G(j\omega)$ . . . . .	126
4.25	Resultados experimentales al usar (4.55). . . . .	127
4.26	Resultados experimentales cuando $ G(j\omega_\sigma)  = 38$ y $\omega_\sigma = 6$ rad/s. . . . .	128
4.27	Resultados experimentales cuando $ G(j\omega_\sigma)  = 40$ and $\omega_\sigma = 6$ rad/s. . . . .	128
4.28	Resultados experimentales considerando $ G(j\omega_\sigma)  = 34$ y $\omega_\sigma = 8$ rad/s. . . . .	129
4.29	Resultados experimentales cuando $ G(j\omega_\sigma)  = 36$ y $\omega_\sigma = 8$ rad/s. . . . .	130
5.1	Representación gráfica del pendubot. . . . .	134
5.2	Diagrama de cuerpo libre del pendubot. . . . .	135
5.3	Subsistemas del prototipo de pendubot. . . . .	143
5.4	Anillo deslizante SNH012-06S. . . . .	144
5.5	Vista explosionada de los eslabones A y B dibujados en SolidWorks. . . . .	145
5.6	Vista explosionada de la base del motor dibujada en SolidWorks. . . . .	146
5.7	Vista explosionada de la base de la estructura dibujada en SolidWorks. . . . .	146
5.8	Ensamble en SolidWorks de los <i>Subsistemas A y C</i> . . . . .	147
5.9	Eslabones A y B manufacturados. . . . .	148
5.10	Base del motor manufacturada. . . . .	149

5.11	Base de la estructura manufacturada. . . . .	149
5.12	Ensamble de los <i>Subsistemas A, B y C</i> reales. . . . .	150
5.13	Prototipo final del pendubot. . . . .	151
5.14	Posición de los eslabones del pendubot cuando son afectados sólo por la gravedad. . . . .	154
5.15	Diagrama de bloques del controlador híbrido (5.49). . . . .	155
5.16	Diagrama de bloques en Matlab-Simulink de la simulación del pendubot en lazo cerrado. . . . .	157
5.17	Resultados de simulación en lazo cerrado del controlador híbrido (5.49). . . . .	157
5.18	Diagrama de bloques de Matlab-Simulink para experimentación del pendubot en lazo cerrado. . . . .	158
5.19	Resultados experimentales del pendubot en lazo cerrado con el controlador híbrido (5.49). . . . .	159
5.20	Sistema de lazo cerrado del pendubot donde se considera la no linealidad de zona muerta. . . . .	160
5.21	Representación equivalente del diagrama de bloques de la Figura 5.20. . . . .	161
5.22	Gráfica polar de $G(j\omega)$ y $-1/N(A)$ . . . . .	162
5.23	Obtención experimental de $\delta$ del pendubot. . . . .	164
5.24	Diagramas de Bode de $G_1(s)$ . . . . .	164
5.25	Diagramas de Bode de $G(s)$ . . . . .	165
5.26	Diagrama polar de $G(j\omega)$ . . . . .	166
5.27	Resultados experimentales considerando las ganancias (5.69). . . . .	166
5.28	Resultados experimentales considerando $ G(j\omega_\sigma)  = 12$ y $\omega_\sigma = 12$ rad/s. . . . .	167
5.29	Resultados experimentales considerando $ G(j\omega_\sigma)  = 25$ y $\omega_\sigma = 14$ rad/s. . . . .	167
5.30	Evolución de la amplitud de ciclo límite durante el procedimiento experimental. . . . .	168

# Índice de tablas

1.1	Contribuciones en modelado y construcción del PF. . . . .	5
1.2	Aportaciones en diseño de controles para <i>swing-up</i> del PF. . . . .	5
1.3	Trabajos sobre diseño de controles para la estabilización del PF 1/2. . . . .	5
1.4	Trabajos sobre diseño de controles para la estabilización del PF 2/2. . . . .	6
1.5	Diseño de controles para <i>swing-up</i> más estabilización del PF. . . . .	7
1.6	Desarrollo de controles para seguimiento de trayectoria del PF 1/2. . . . .	7
1.7	Desarrollo de controles para seguimiento de trayectoria del PF 2/2. . . . .	8
1.8	Diseño de controles para generación de oscilaciones del PF. . . . .	8
1.9	Aportes en el área de caos del PF. . . . .	8
1.10	Aportes acerca del modelado y construcción del PRI. . . . .	9
1.11	Diseño de controles para <i>swing-up</i> del PRI. . . . .	9
1.12	Diseño de controles para la estabilización del PRI 1/2. . . . .	9
1.13	Diseño de controles para la estabilización del PRI 2/2. . . . .	10
1.14	Trabajos sobre controles para <i>swing-up</i> más estabilización del PRI. . . . .	10
1.15	Controles para seguimiento de trayectoria del PRI. . . . .	11
1.16	Controles para generación de oscilaciones del PRI. . . . .	11
1.17	Contribuciones sobre modelado del PISC 1/2. . . . .	11
1.18	Contribuciones sobre modelado del PISC 2/2. . . . .	12
1.19	Diseño de controles para el <i>swing-up</i> del PISC. . . . .	12
1.20	Diseño de controles para la estabilización del PISC 1/3. . . . .	12
1.21	Diseño de controles para la estabilización del PISC 2/3. . . . .	13
1.22	Diseño de controles para la estabilización del PISC 3/3. . . . .	14
1.23	Controles diseñados para <i>swing-up</i> más estabilización del PISC 1/2. . . . .	14
1.24	Controles diseñados para <i>swing-up</i> más estabilización del PISC 2/2. . . . .	15
1.25	Controles propuestos para el seguimiento de trayectoria del PISC. . . . .	15
1.26	Diseño de controladores para <i>swing-up</i> del pendubot. . . . .	16
1.27	Propuesta de controles para estabilización del pendubot. . . . .	16
1.28	Diseño de controles para <i>swing-up</i> más estabilización del pendubot. . . . .	17
1.29	Tabajos de diseño de controles para seguimiento de trayectoria del pendubot. . . . .	17
1.30	Controles diseñados para generación de oscilaciones del pendubot. . . . .	17
1.31	Patentes asociadas a péndulos invertidos giratorios. . . . .	18
2.1	Características del motor de CD 14204S006. . . . .	34
2.2	Materiales mecánicos . . . . .	39
2.3	Parámetros del prototipo de PF construido. . . . .	43
2.4	Parámetros numéricos del prototipo de PF de la FI de la UAQ. . . . .	54
2.5	Ganancias del controlador lineal (2.62). . . . .	60

2.6	Polos de lazo abierto y de lazo cerrado asignados. . . . .	60
2.7	Ganancias del control por realimentación del vector de estado (2.44) . . .	60
2.8	Ganancias de los controles (2.72) y (2.44) calculadas para el PF. . . . .	75
3.1	Características del motor de CD 2642W024CR. . . . .	84
3.2	Materiales mecánicos . . . . .	87
3.3	Parámetros del prototipo de PRI. . . . .	91
4.1	Materiales mecánicos . . . . .	110
4.2	Parámetros del prototipo de PISC construido. . . . .	114
4.3	Ganancias calculadas de los controles (4.41) y (4.33). . . . .	131
5.1	Materiales mecánicos para el pendubot . . . . .	147
5.2	Parámetros del prototipo de pendubot construido. . . . .	152
5.3	Ganancias calculadas para los controles (2.72) y (5.48). . . . .	169

# Capítulo 1

## Introducción

En el estudio de los sistemas mecánicos se ha manifestado que la dinámica que los caracteriza puede interpretarse como un conjunto de movimientos independientes y sincronizados de cada una de sus partes. Tales movimientos pueden producirse por la acción de un actuador, llamada actuación directa, o bien por medio de otros elementos a los cuales se encuentran interconectados, conocida como actuación indirecta. En mecánica a estos movimientos se les conoce como Grados De Libertad (GDL). Por tanto, de acuerdo al número de GDL y a los actuadores que poseen los sistemas mecánicos, éstos se pueden clasificar en: completamente actuados y subactuados. Los primeros poseen igual número de GDL que de actuadores, mientras que los segundos tienen mayor número de GDL que de actuadores.

En las últimas décadas ha surgido un fuerte interés por parte de investigadores del área de ingeniería de control en los sistemas mecánicos subactuados. El interés que se tiene en este tipo de sistemas radica en las ventajas que pueden ofrecer en lo relativo a menor peso, costo y al ahorro de energía; ya que se pretende que los sistemas subactuados realicen las mismas tareas que los sistemas completamente actuados, pero haciendo frente a las dificultades de control que conlleva un sistema con menor número de actuadores. De manera que, el control de los sistemas mecánicos subactuados es actualmente un campo activo de investigación debido a su amplia gama de aplicaciones en áreas como robótica, aeroespacial y vehículos marinos [1]. Muchos sistemas de control que podemos observar en la vida real, tales como: robots móviles, robots caminantes, robots de articulaciones flexibles, robots sobre plataformas móviles, robots nadadores, cohetes espaciales, satélites, aviones de despegue/aterrizaje vertical, helicópteros, proyectiles, vehículos submarinos, barcos, buques de superficie, etc., son ejemplos de sistemas mecánicos subactuados [2].

De acuerdo a [3], algunos de los sistemas mecánicos subactuados más conocidos en el área de ingeniería de control son: el Acrobot, Pendubot, Péndulo Invertido Sobre Carro (PISC), Sistema de Grúa, Péndulo de Furuta (PF), Péndulo con Rueda Inercial (PRI), Sistema Bola-Viga, Sistema de Levitación Magnética, Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional, Avión de Despegue/Aterrizaje Vertical y Buque de Superficie. Siendo los sistemas subactuados de interés en el presente trabajo aquellos de tipo pendular. Por lo tanto, a continuación se presentan los antecedentes de los sistemas pendulares.

## 1.1. Antecedentes de los sistemas pendulares

El péndulo toma su nombre del latín *pendere* que en español significa *colgar de*. Este mecanismo ha sido ampliamente estudiado desde los tiempos de Galileo [4] y algunas de sus aplicaciones se han realizado como sigue. En 1841 Forbes propuso por primera vez la utilización de un péndulo invertido como sismógrafo. El dispositivo consistía de una varilla de metal dispuesta verticalmente y unida a una masa que podía fijarse a lo largo de su longitud. Dicha varilla se apoyaba sobre un alambre cilíndrico de acero, cuya rigidez podía modificarse manualmente. Así, el periodo libre del péndulo podía variarse a través de la posición de la masa y de la rigidez del apoyo, obteniendo diferentes ampliaciones de la respuesta del mismo ante la acción de un terremoto. El efecto de este fenómeno natural se registraba por medio de un lápiz sujeto al extremo libre del péndulo invertido de tal forma que las oscilaciones quedaran impresas sobre un papel previamente dispuesto. La estabilidad del péndulo en la posición invertida se basaba en la rigidez del apoyo. Posteriormente, en 1851 Foucault suspendió una bola de hierro en la cúpula del panteón de París mediante un cable. Bajo el punto de suspensión se encontraba una superficie cubierta con arena, sobre la cual una aguja colocada en la parte inferior de la bola marcaba la trayectoria del péndulo. Al paso de algunas horas el trazo de la aguja se engrosó, comprobando que el plano de oscilación del péndulo rotaba en sentido horario, unos once grados por hora, logrando demostrar la rotación de la Tierra. Tiempo más tarde, con el fin de poder estudiar el contenido de las frecuencias de onda de un terremoto, en 1860 Cavalleri dispuso seis péndulos de diferentes frecuencias naturales; de tal forma que el péndulo cuya frecuencia natural se aproximara más al valor de frecuencia dominante de un terremoto entrara en resonancia. Más tarde, en 1908 Stephenson consiguió estabilizar un péndulo rígido en su posición invertida por medio de una vibración en el punto de sujeción, donde las amplitudes de tales vibraciones deberían ser pequeñas comparadas con la longitud del péndulo y considerando que la masa se encontraba concentrada en el extremo del péndulo. Estudios posteriores mostraron una posible estabilización del sistema con menores frecuencias de estabilización y mayores amplitudes, de manera que las regiones de estabilización se obtenían en función de los parámetros del sistema físico y de la vibración de excitación. Así, esto último fue explicado a detalle en 1951 por Kapitza, conociéndose desde entonces a este dispositivo como el *péndulo de Kapitza*.

Una vez introducidos los antecedentes de los sistemas pendulares, en seguida se dan las generalidades de los sistemas subactuados pendulares.

## 1.2. Sistemas subactuados pendulares

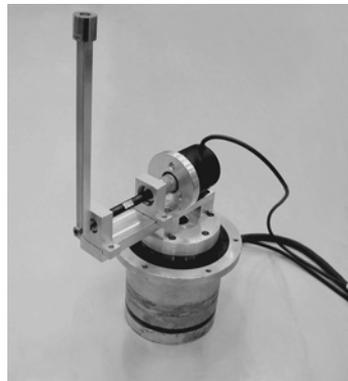
La importancia de los sistemas subactuados pendulares en ingeniería es derivada de los diferentes problemas que pueden estudiarse con estos sistemas, por ejemplo [4]:

- ◇ Modelado
- ◇ Identificación de parámetros
- ◇ Control de posición y velocidad
- ◇ Oscilación del péndulo desde la posición colgante hasta alcanzar la posición invertida (*swing-up*)

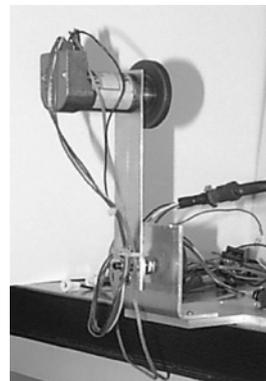
- ◇ Estabilización del péndulo en la posición invertida (estabilización del péndulo)
- ◇ Control híbrido (*swing-up* más estabilización del péndulo)
- ◇ Seguimiento de trayectorias
- ◇ Generación de oscilaciones
- ◇ Análisis del ciclo límite

Es por este hecho que mencionados sistemas resultan de interés en el presente trabajo, en particular, PF, el PISC, el PRI y el pendubot. En esa dirección se presenta una descripción de dichos sistemas.

- El PF, mostrado en la Figura 1.1(a), está formado esencialmente por tres elementos, a saber, dos eslabones –brazo y péndulo– y un motor. Uno de los extremos del brazo está unido a la flecha del motor, el cual le imprime movimiento angular sobre el plano horizontal. En el extremo libre del brazo está conectado el péndulo, a través de una articulación que puede girar libremente y permite la rotación de este último en el plano vertical.
- Respecto al PRI (ver Figura 1.1(b)), este mecanismo está compuesto de un eslabón rígido (péndulo), una rueda y un motor. Uno de los extremos del eslabón se encuentra fijo (pivote) sobre el plano vertical y el otro extremo está unido a la rueda. A su vez, la rueda se encuentra unida al motor, el cual le imprime movimiento angular, provocando que el eslabón se balancee sobre el pivote.



(a)



(b)

Figura 1.1: (a) PF. (b) PRI.

- El PISC, el cual puede verse en la Figura 1.2(a), consiste en un eslabón rígido (péndulo) que está unido de uno de sus extremos a un carro. Este último se mueve por medio de un actuador, generalmente un motor, sobre un riel horizontal limitado y el péndulo se mueve angularmente sobre el plano vertical.
- Por último, en la Figura 1.2(b) se muestra el pendubot, el cual es un mecanismo de dos eslabones rígidos interconectados por uniones rotacionales y un motor conectado al hombro.

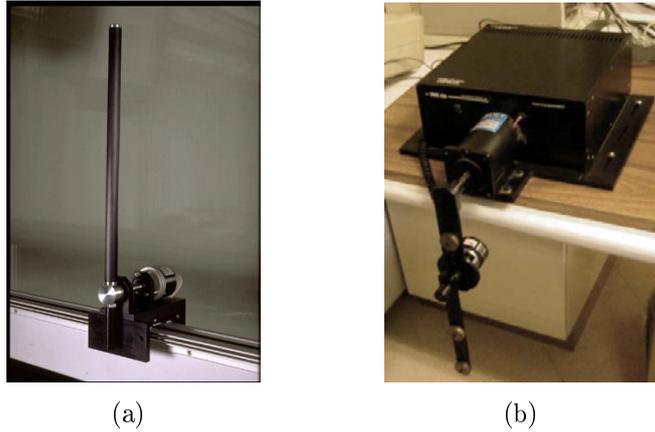


Figura 1.2: (a) PISC. (b) Pendubot.

La característica que comparten los mecanismos antes descritos de sólo poseer un actuador y tener la capacidad de realizar diferentes movimientos, es precisamente la que los define como sistemas mecánicos subactuados. Por otro lado, al realizar las descripciones anteriores, es fácil darse cuenta que, en general, el PF, el PRI, el PISC y el pendubot están integrados de tres subsistemas, a saber: *estructura mecánica*, que depende de la configuración del sistema subactuado, *actuador*, el cual permiten el movimiento de una estructura mecánica, y *etapa de potencia*, que es la responsable del accionamiento del actuador. Esta idea puede extenderse a todos los sistemas subactuados y más aún a todos los sistemas robóticos y mecatrónicos.

Habiendo realizado la descripción de los sistemas mecánicos subactuados de interés, es fácil darse cuenta que, en general, estos sistemas están integrados de tres subsistemas, a saber, *estructura mecánica*, que depende de la configuración del sistema subactuado, *actuadores*, los cuales permiten el movimiento de la estructura mecánica, y *etapa de potencia*, que es la responsable del accionamiento de los actuadores. Esta idea puede extenderse a todos los sistemas subactuados y más aún a todos los sistemas robóticos y mecatrónicos [5].

### 1.3. Estado del arte científico

Debido a que los sistemas mecánicos subactuados poseen menor número de actuadores que de GDL, las técnicas de control desarrolladas para sistemas completamente actuados no pueden ser directamente aplicadas para su control. En ese sentido, para el control de los sistemas mecánicos subactuados, se han desarrollado diversos controladores basados en diferentes enfoques, tales como *linealización parcial*, *energía*, *modos deslizantes* y *lógica difusa*, por mencionar algunos. Siendo las problemáticas que más han llamado la atención de la comunidad de ingeniería de control las siguientes: *swing-up*, *estabilización*, *control híbrido*, *seguimiento de trayectorias* y *generación de oscilaciones*. En ese sentido y de acuerdo a las problemáticas de control resueltas, a continuación se presenta el estado del arte científico de los sistemas mecánicos subactuados de interés en este trabajo, es decir, el PF, el PRI, el PISC y el pendubot. Asimismo, desde que se ha señalado que los sistemas subactuados están integrados de tres subsistemas (estructura mecánica, actuadores y etapa de potencia), se incluyen aquellos trabajos en los cuales

se ha realizado un esfuerzo importante al considerar la dinámica de los actuadores en el diseño de controladores.

### 1.3.1. Péndulo de Furuta (PF)

En las Tablas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8 se presentan los aportes científicos relativos al PF, clasificados de acuerdo a las problemáticas de control resueltas.

Tabla 1.1: Contribuciones en modelado y construcción del PF.

Autores	Descripción
Fantoni y Lozano [6, 7]	Modelado mediante formulación de Euler-Lagrange.
Awtar <i>et al.</i> [8]	Construcción de prototipo reconfigurable de PF y pendubot.
Guo <i>et al.</i> [9]	Modelado de PF vía árbol difuso de optimización de parámetros basado en modelo difuso adaptivo.
Jadlovská y Sarnovský [10]	Procedimiento para modelado matemático de péndulos invertidos con un número arbitrario de péndulos.
Hernández-Guzmán <i>et al.</i> [11]	Modelado con método de Euler-Lagrange, construcción e identificación de parámetros de un prototipo.

Tabla 1.2: Aportaciones en diseño de controles para *swing-up* del PF.

Autores	Métodos
Fantoni y Lozano [6, 7]	Enfoque de energía.
Gordillo <i>et al.</i> [12]	Gradiente de velocidad de Fradkov.
Jung y Wen [13]	Control predictivo de aprendizaje iterativo.
Lee [14]	Función de Lyapunov con parámetros de ponderación ajustables.

Tabla 1.3: Trabajos sobre diseño de controles para la estabilización del PF 1/2.

Autores	Métodos
Yavin [15]	Transformación de la segunda ecuación de movimiento del sistema.
Suzuki <i>et al.</i> [16]	Sector deslizante variante en el tiempo, obtenido con una función de Riccati (no por modos deslizantes).
Aguilar-Ibáñez <i>et al.</i> [17, 18]	Linealización parcial y método directo de Lyapunov.
Son <i>et al.</i> [19]	Realimentación de salida dinámica de primer orden.

Tabla 1.4: Trabajos sobre diseño de controles para la estabilización del PF 2/2.

Autores	Métodos
Oh <i>et al.</i> [20]	Controlador en cascada difuso optimizado mediante algoritmos genéticos de competencia justa jerárquica.
Pujol y Acho [21]	$H_\infty$ y desigualdad de matriz lineal.
Chang [22]	Método de moldeo de energía.
Sandoval <i>et al.</i> [23]	Pasividad, interconexión e inyección de amortiguamiento, método directo de Lyapunov y teorema de Barbashin-Krasovskii.
Hirata <i>et al.</i> [24]	Control adaptivo robusto y control autosintonizado.
Tu y Ho [25]	Visión, $H_2/H_\infty$ y desigualdad de matriz lineal.
Hassanzadeh y Mobayen [26]	Algoritmos genéticos, optimización de enjambre de partículas y optimización de colonia de hormigas.
Muske <i>et al.</i> [27]	Control óptimo en cascada por modos deslizantes utilizando la estructura de control predictivo de modelo no lineal.
Yang y Yang [28]	Esquema de estructura variable adaptivo.
Rubio <i>et al.</i> [29]	Método de estructura al infinito y el método de asignación de polos.
Türker <i>et al.</i> [30]	Método directo de Lyapunov con cambio de coordenadas.
Kim y Oh [31]	Aprendizaje emocional del cerebro.
Hernández-Guzmán <i>et al.</i> [11]	Realimentación del vector de estado implementado en un microcontrolador.
Chen y Huang [32]	Formas en cascada de Olfati y control adaptivo.
Hamza <i>et al.</i> [33]	PD difuso tipo 2 en cascada, algoritmos genéticos y optimización de enjambre de partículas.
Ryalat y Laila [34]	Método que simplifica ecuaciones diferenciales parciales derivadas del enfoque interconexión y asignación de amortiguamiento.
Mandić <i>et al.</i> [35]	Control PD de orden fraccional y enfoque de descomposición D.
Salgado <i>et al.</i> [36]	Algoritmo de super torsión de tiempo discreto.
Hamza <i>et al.</i> [37]	Algoritmo de búsqueda Cuckoo para el diseño optimizado del control PID difuso de tipo 2 de intervalo en cascada.
Ortega-Montiel <i>et al.</i> [38]	Modelo lineal invariante en el tiempo con retardos de cuarto orden y controlador proporcional retardado.

Tabla 1.5: Diseño de controles para *swing-up* más estabilización del PF.

Autores	Métodos
Suzuki <i>et al.</i> [39]	Control óptimo no lineal dependiente del estado.
Jung <i>et al.</i> [40, 41]	Algoritmos genéticos de competencia justa jerárquica.
La Hera <i>et al.</i> [42]	Restricciones holonómicas virtuales.
Ordaz-Oliver <i>et al.</i> [43, 44]	Estructura de optimización general, energía y teoría de programación dinámica.
Park y Chwa [45]	Modos deslizantes acoplados.
Mary y Marimuthu [46]	PD, control por paso de pulsos, control de balance difuso y enfoque de energía.
Oh <i>et al.</i> [47]	Controlador difuso en casada optimizado con evolución diferencial.
Seman <i>et al.</i> [48]	Controladores basados en: 1) Energía y control predictivo, y 2) Exponenciación de la posición del péndulo y control predictivo.
Escobar-Dávila <i>et al.</i> [49]	Enfoque de energía, redes neuronales artificiales y realimentación del vector de estado.
Aracil <i>et al.</i> [50]	Método de gradiente-velocidad y <i>forwarding</i> .
Aranda-Escolástico <i>et al.</i> [51]	Control disparado por eventos periódicos.
Shah y Rehman [52]	Transformación de estados y entrada del sistema, <i>manifold</i> deslizante no lineal y control por modos deslizantes.

Tabla 1.6: Desarrollo de controles para seguimiento de trayectoria del PF 1/2.

Autores	Basado en:
Lhee <i>et al.</i> [53]	Control difuso de modos deslizantes con autosintonización de parámetros de zona muerta.
Ramos-Velasco <i>et al.</i> [54]	Formas normales no lineales, regulación de salida y modos deslizantes.
Chen <i>et al.</i> [55]	Linealización de entrada-estado y colocación de polos.
Castillo-Toledo <i>et al.</i> [56]	Regulador estable estructuralmente.
Aguilar-Ibáñez y Sira-Ramírez [57]	Tres controladores basados en: 1) Enfoque de colocación de polos, 2) Enfoque jerárquico de alta ganancia y 3) GPI.
Cheng <i>et al.</i> [58]	Teorema de estabilidad de Lyapunov.
Ramírez-Neria <i>et al.</i> [59]	Rechazo activo de perturbaciones.
Aguilar-Avelar y Moreno-Valenzuela [60]	Linealización por realimentación y compensación de energía.

Tabla 1.7: Desarrollo de controles para seguimiento de trayectoria del PF 2/2.

Autores	Basado en:
Aguilar-Avelar y Moreno-Valenzuela [61]	Linealización de entrada-salida.
Moreno-Valenzuela <i>et al.</i> [62]	Redes neuronales adaptivas.
Puga-Guzmán <i>et al.</i> [63]	Linealización por realimentación y redes neuronales adaptivas

Tabla 1.8: Diseño de controles para generación de oscilaciones del PF.

Autores	Métodos
Shiriaev <i>et al.</i> [64]	Restricciones holonómicas virtuales.
Freidovich <i>et al.</i> [65]	Disipatividad vía la transformación de energía de fase.
Aguilar <i>et al.</i> [66]	Control de estructura variable.

También, se han realizado estudios del comportamiento del PF en el área del caos. Estos estudios se muestran en la Tabla 1.9.

Tabla 1.9: Aportes en el área de caos del PF.

Autores	Estudian
Pagano <i>et al.</i> [67]	Las bifurcaciones Pitchfork y Hopf en el PF mediante la teoría de formas normales.
Barreiro <i>et al.</i> [68]	El dominio de atracción del PF obtenido vía las teorías: De Lyapunov y Bifurcación.
Muñoz-Almaraz [69]	La dinámica y el comportamiento de bifurcación del PF.
Verduzco [70]	Control de las bifurcaciones estacionarias: Saddle-node, transcríticas y Pitchfork.

Por último, se han reportado otros trabajos del PF relacionados a: Formas normales [2], *deadbeat* control [71], sintonización de controles [72, 73], teoría de transformaciones de similaridad [74], dinámica en lazo cerrado no lineal *weakly* [75], observador de velocidades angulares [76], prototipado y aplicaciones de controles [77–80], retrasos por realimentación [81], control en la red [82].

### 1.3.2. Péndulo con Rueda Inercial (PRI)

En las siguientes Tablas 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15 y 1.16, se resumen las contribuciones científicas del sistema PRI, las cuales son presentadas de acuerdo a las problemáticas de control estudiadas.

Tabla 1.10: Aportes acerca del modelado y construcción del PRI.

Autores	Métodos
Fantoni y Lozano [7]	Modelado vía formulación de Euler-Lagrange.
Alonso <i>et al.</i> [83]	Modelado e identificación de parámetros, considerando fricción y efectos de la zona muerta.
Block <i>et al.</i> [4]	Modelado con método de Euler-Lagrange e identificación de parámetros.
Borda [84]	Modelado de un sistema con restricciones de segundo orden discreto.
Hernández-Guzmán <i>et al.</i> [11]	Modelado con método de Euler-Lagrange, construcción e identificación de parámetros de un prototipo.

Tabla 1.11: Diseño de controles para *swing-up* del PRI.

Autores	Métodos
Fantoni y Lozano [7, 85]	Energía y propiedades pasivas del sistema.
Srinivas y Behera [86]	1) Considerando oscilaciones del péndulo como perturbaciones. 2) Control basado en pasividad por interconexión e inyección de amortiguamiento.

Tabla 1.12: Diseño de controles para la estabilización del PRI 1/2.

Autores	Métodos
Kaiser <i>et al.</i> [87, 88]	Control de superficie dinámica y método de Lyapunov.
Ye <i>et al.</i> [89, 90]	1) Transformación a cadenas de integradores y la técnica de control por saturación, 2) función de saturación y <i>backstepping</i> .
Aguilar Ibañez <i>et al.</i> [91]	Funciones de saturación anidadas.
Grillo <i>et al.</i> [92, 93]	Restricciones de Lyapunov y restricciones de segundo orden.
Lopez-Martinez <i>et al.</i> [94]	Superficie deslizante no lineal tomando en cuenta incertidumbres en los parámetros.
Martinez-Soto <i>et al.</i> [95]	PID con optimización de enjambre y algoritmos genéticos.
She <i>et al.</i> [96]	Transformación de coordenadas, tomando la parte no lineal del nuevo sistema como perturbaciones artificiales.
Montoya-Giraldo <i>et al.</i> [97]	Regulación de energía y linealización extendida de variables de estado.

Tabla 1.13: Diseño de controles para la estabilización del PRI 2/2.

Autores	Métodos
Khalid y Memon [98]	Control por modos deslizantes basado en observador de alta ganancia extendido.
Zhang <i>et al.</i> [99]	Transformación de coordenadas y estrategia de tiempo inverso.
Ferré Puiggalí y Mestdag [100]	Problema inverso del cálculo de variaciones.
Aguilar-Avelar <i>et al.</i> [101]	Linealización por realimentación con compensación de fricción.
He <i>et al.</i> [102]	Realimentación híbrida, compuesta por realimentación parcial y realimentación parcial de salida virtual, con formas canónicas estrictas y no afines.
Cazarez-Castro <i>et al.</i> [103]	Controlador difuso tipo Mamdani y síntesis difusa de Lyapunov.

Tabla 1.14: Trabajos sobre controles para *swing-up* más estabilización del PRI.

Autores	Métodos
Spong <i>et al.</i> [104]	Linealización parcial y pasividad con: 1) Realimentación lineal. 2) Colocación de polos.
Ortega <i>et al.</i> [105]	Control basado en pasividad-interconexión e inyección de amortiguamiento.
Hernández [106]	Modos deslizantes y GPI.
Carrillo-Serrano y Hernández-Guzmán [107]	Energía y realimentación del vector de estado, considerando la dinámica del motor.
Andrievsky [108]	Gradiente-velocidad vía energía y control de estructura variable con modos deslizantes forzados.
Ye <i>et al.</i> [109]	<i>Backstepping</i> para sistemas en cascada no lineales que tienen estructura <i>feed-forward</i> .
Hernández-Guzmán <i>et al.</i> [11]	Energía y realimentación del vector de estado, considerando la dinámica del motor.
Ryalat y Laila [34]	Simplificación de ecuaciones diferenciales parciales derivadas del enfoque interconexión y asignación de amortiguamiento.

Tabla 1.15: Controles para seguimiento de trayectoria del PRI.

Autores	Métodos
Estrada <i>et al.</i> [110]	Control por modos deslizantes de orden superior casi continuo.
Iriarte <i>et al.</i> [111]	Control por modos deslizantes de segundo orden.
Puga-Guzmán <i>et al.</i> [112]	Técnica de linealización por realimentación de salida y una red neuronal actualizada en tiempo real.
Moreno-Valenzuela <i>et al.</i> [113]	Redes neuronales adaptivas.

Tabla 1.16: Controles para generación de oscilaciones del PRI.

Autores	Métodos
Freidovich <i>et al.</i> [114]	Planeación de movimiento vía restricciones holonómicas virtuales.
Aguilar <i>et al.</i> [115]	Linealización exacta por realimentación con controlador de doble retardo.

Asimismo, otros trabajos concernientes al caos, planeación de movimientos, cancelación de perturbaciones multi-armónicas y lagrangianos controlados en el PRI pueden encontrarse en [79, 116–118].

### 1.3.3. Péndulo Invertido Sobre Carro (PISC)

De acuerdo a las problemáticas resueltas, en las Tablas 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24 y 1.25 se describen brevemente las contribuciones más relevantes realizadas al estado del arte científico del PISC.

Tabla 1.17: Contribuciones sobre modelado del PISC 1/2.

Autores	Métodos
Fantoni y Lozano [6, 7]	Formulación de Euler-Lagrange.
Cendra y Grillo [119]	Forma Lagrangiana y Hamiltoniana de una clase de sistemas no holonómicos generalizados que obedecen el principio de D’Alambert y muestran que estas formas se pueden describir en términos de un <i>bracket</i> .
Yu <i>et al.</i> [120]	Estrategia de movimiento de seis pasos.
Roubal <i>et al.</i> [121]	Linealización con enfoque educativo.
Wang <i>et al.</i> [122]	Transformación del sistema de 2-GDL a uno de 1-GDL, utilizando una cámara de dispositivo con carga acoplada como sensor.

Tabla 1.18: Contribuciones sobre modelado del PISC 2/2.

Autores	Métodos
Kai [123]	Mecánica discreta.
Jadlovská y Sarnovský [10]	Procedimiento para el modelado matemático de péndulos invertidos con un número arbitrario de péndulos.

Tabla 1.19: Diseño de controles para el *swing-up* del PISC.

Autores	Métodos
Fantoni y Lozano [7]	Enfoque de energía.
Ishitobi <i>et al.</i> [124]	Enfoque de energía, considerando fricción viscosa.
Holzhüter [125]	Control óptimo y resolución de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange en el tiempo.
Mai y Hillermeier [126]	Esquema de estimación vía aproximación del error de mínimos cuadrados de una señal de medición de ruido.
Raiko y Tornio [127]	Redes neuronales, aprendizaje bayesiano variacional y enfoque estocástico.
Soria-López <i>et al.</i> [128]	Funciones de saturación.

Tabla 1.20: Diseño de controles para la estabilización del PISC 1/3.

Autores	Métodos
TrouDET y Merrill [129]	Esquema de entrenamiento vía retropropagación para maximizar el aprendizaje de mapeos continuos en presencia de ruido.
Han y McMurray [130]	Lógica difusa múltiple-variable de dos capas: i) Lógica difusa para toma de decisiones, ii) Inferencia difusa y parámetros del sistema.
Styer y Vemur [131]	Algoritmo crítico adaptivo y algoritmo de quimiotaxis.
Lee <i>et al.</i> [132]	Lógica difusa y factores escalantes.
Li y Shieh [133]	Conmutación de dos tipos de controladores por modos deslizantes difusos.
Kokame <i>et al.</i> [134]	Realimentación por diferencia de estado.
Chan <i>et al.</i> [135]	Algoritmos genéticos para la optimización de sistemas difusos fusionados.
Hwang <i>et al.</i> [136]	Compensador de articulación de modelo cerebral difuso y modos deslizantes.
Mazenc y Vivalda [137]	Realimentación de salida dinámica.
Kwon [138]	Técnica de tabla de búsqueda.

Tabla 1.21: Diseño de controles para la estabilización del PISC 2/3.

Autores	Métodos
Blanchini y Pellegrino [139]	Control óptimo, asignación de polinomio característico y realimentación de salida.
Deutscher y Schmid [140]	Enfoque del espacio de estado embebido.
Ding <i>et al.</i> [141]	Modelo computacional de aprendizaje de motor cooperativo para control cerebral.
Kwon [142]	Comparativa de desempeño al emplear, por un lado, elementos de búsqueda adaptivo; por otro lado, la red neuronal integrada por elementos de búsqueda adaptivo y articulación de modelo cerebral.
Ahuja <i>et al.</i> [143]	Obtención de ecuaciones de evolución reducidas vía plantillas y linealización de las ecuaciones obtenidas.
Yorgancioğlu y Kömürçügil [144]	Superficie deslizante en movimiento de tipo difusa de una sola entrada.
Riachy <i>et al.</i> [145]	Modos deslizantes de segundo orden casi homogéneo.
Celani <i>et al.</i> [146]	Paradigma de reducción en presencia de ceros inestables en la planta controlada.
Chen <i>et al.</i> [147]	Lógica difusa de una entrada.
Banavar y Dey [148]	Enfoque hamiltoniano por puerto distribuido.
Sarras <i>et al.</i> [149]	Metodología de invarianza e inmersión, considerando ecuaciones diferenciales parciales como ecuaciones algebraicas parametrizadas.
Chang [22]	El método de moldeo de energía.
Bouarar <i>et al.</i> [150]	1) Basado en dinámica en lazo cerrado clásica. 2) Basado en dinámica en lazo cerrado de redundancia. Ambas dinámicas obtenidas a partir de desigualdad de matriz lineal y $H_\infty$ .
Lopez-Martinez <i>et al.</i> [94]	Superficie deslizante no lineal tomando en cuenta incertidumbres en los parámetros.
Ye <i>et al.</i> [109]	<i>Backstepping</i> para sistemas no lineales en cascada cuyo sistema manejado tiene estructura <i>feed-forward</i> e incluye términos de orden elevado.
Grillo <i>et al.</i> [92]	Imposición de restricciones de Lyapunov como actuadores.
Hwang <i>et al.</i> [151]	Método de resonancia adaptivo y algoritmo de aprendizaje Q.
Das y Paul [152]	Controlador periódico y colocación de polos.
Lin y Chen [153]	Redes neuronales de inferencia difusas con aprendizaje evolutivo de reforzamiento.

Tabla 1.22: Diseño de controles para la estabilización del PISC 3/3.

Autores	Métodos
Aguilar Ibáñez <i>et al.</i> [154, 155]	1) Enfoque de función de saturación y 2) PD con torsión ( <i>twisting</i> ).
Kai <i>et al.</i> [156]	Teoría de regulador óptimo de tiempo discreto y su transformación a tiempo continuo.
Yue <i>et al.</i> [157]	Interface cerebral en tiempo real, encefalograma y motores sensoriales.
Liu <i>et al.</i> [158]	Función híbrida y restricciones de desigualdad de matriz lineal.
Kar <i>et al.</i> [159]	Modelo difuso Takagi-Sugeno e inversión de red.
Qian <i>et al.</i> [160]	Enfoque de energía.
Delibaşı <i>et al.</i> [161]	Enfoque Pólya, desigualdad de matriz lineal y $L_2$ .
Nejadfard <i>et al.</i> [162]	Modelo neurodifuso lineal y control óptimo.
El-Bardini y El-Nagar [163]	PID difuso de tipo 2 logrado con el método de reducción de tipo simplificado.
Fu y Wang [164]	Red neuronal artificial llamada operación combinatorial universal nivel cero en lógica universal.
Lee <i>et al.</i> [165]	Estructura de escala multi-tiempo con observadores de alta ganancia extendidos.
Fang <i>et al.</i> [166]	Estrategia de realidad virtual aplicada a la programación dinámica heurística.
G. Zhao <i>et al.</i> [167]	Control por modos deslizantes terminal desacoplado, basado en una transformación de modelo por producto de tensores.
Wang <i>et al.</i> [168]	Algoritmo de exploración de hiperparámetros por políticas basado en EM. Integrado por dos algoritmos de aprendizaje reforzado: Gradiente de políticas con exploración de parámetros y regresión de pesos ponderados por recompensa basada en EM.
Ferré Puiggalí y Mestdag [100]	Problema inverso del cálculo de variaciones.
Haghighi y Mobayen [169]	Control por modos deslizantes terminal desacoplado de super torsión.

Tabla 1.23: Controles diseñados para *swing-up* más estabilización del PISC 1/2.

Autores	Métodos
Zhao y Spong [170]	Enfoque de energía.
Chatterjee <i>et al.</i> [171]	Métodos de energía generalizados y LQR.
Kouda <i>et al.</i> [172]	Red neuronal Qubit.
Gros <i>et al.</i> [173]	<i>Neighboring extremals</i> .

Tabla 1.24: Controles diseñados para *swing-up* más estabilización del PISC 2/2.

Autores	Métodos
Muškinja y Tovornik [174]	Control adaptivo y óptimo.
Park <i>et al.</i> [175]	Algoritmo difuso adaptivo.
Sakurama <i>et al.</i> [176]	Método de energía y lagrangianos controlados.
Santiesteban <i>et al.</i> [177]	Control por modos deslizantes de segundo orden, utilizando control casi homogéneo y oscilador Van der Pol.
Gordillo y Aracil [178]	Moldeo de energía y <i>forwarding</i> .
Siuka y Schöberl [179]	Métodos de energía.
Park y Chwa [45]	Control por modos deslizantes acoplado.
Pérez Polo <i>et al.</i> [180]	Oscilaciones caóticas y colocación de polos más técnica de integrador.
Yih [181]	Control por modos deslizantes.
Adhikary y Mahanta [182]	<i>Backstepping</i> y control por modos deslizantes.
Kai y Bito [183]	Función de Lyapunov discreta, regulador óptimo en tiempo discreto y transformación de entrada de tiempo continuo.
Shah y Rehman [52]	Transformación de estados y entrada del sistema, <i>manifold</i> deslizante no lineal y control por modos deslizantes.

Tabla 1.25: Controles propuestos para el seguimiento de trayectoria del PISC.

Autores	Métodos
Mazenc y Bowong [184]	<i>Forwarding</i> .
El-Hawwary <i>et al.</i> [185]	Linealización por realimentación, un término de amortiguamiento y control difuso adaptivo.
Tsai <i>et al.</i> [186]	Enfoque de desigualdad de matriz lineal y función de Lyapunov difusa.
Lin [187]	Red de aprendizaje, red crítica adaptiva y desigualdad de matriz lineal.
Consolini y Tosques [188]	Soluciones periódicas T.
Yu <i>et al.</i> [120]	Linealización parcial.
Koofigar <i>et al.</i> [189]	Controlador no lineal adaptivo robusto.
Bououden <i>et al.</i> [190]	Sistema difuso, control adaptivo, observador y enfoque de síntesis de Lyapunov.
Lan y Wang [191]	Descomposición estructural del sistema lineal con saturación de entrada.
Wang <i>et al.</i> [168]	Observador continuo por trozos y función de Lyapunov.
Zhang <i>et al.</i> [192]	Dinámica Zhang y dinámica de gradiente.

Más problemáticas asociadas al PISC, entre ellas compensación robusta, formas normales en cascada, retrasos en control vía redes, control de muestreo Lebesgue y cuantización

dinámica, entre otras, se pueden encontrar en [193–209].

### 1.3.4. Pendubot

En esta sección, en las Tablas 1.26, 1.27, 1.28, 1.29 y 1.30, se muestran los trabajos del área científica relacionados con el control del sistema subactuado conocido como el pendubot. Estos han sido clasificados de acuerdo a las problemáticas de control que abordan.

Tabla 1.26: Diseño de controladores para *swing-up* del pendubot.

Autores	Métodos
Fantoni <i>et al.</i> [7, 210]	Enfoque de energía y propiedades pasivas del sistema.
Kolesnichenko y Shiriaev [211]	Una clase de transformaciones de realimentación no triviales.
Sanchez y Flores [212]	PI más PD difuso que incluye un sistema difuso de conmutación dinámico.
Xin <i>et al.</i> [213]	Enfoque de energía.
Gregory <i>et al.</i> [214]	Problema de control óptimo y resolución numérica de una reformulación de cálculo variacional sin restricciones del problema.
Xia <i>et al.</i> [215, 216]	Energía con compensación de redes neuronales: 1) Difusas y 2) De funciones mediante radicales, respectivamente.

Tabla 1.27: Propuesta de controles para estabilización del pendubot.

Autores	Métodos
Singh y Khali [217]	Integradores condicionales y técnica de rediseño de Lyapunov.
Tarn <i>et al.</i> [218]	Matriz de desacoplamiento del sistema y existencia de un conjunto invariante controlado, atractivo globalmente y de orden cero.
Yubai <i>et al.</i> [219]	Formación de lazo $H_\infty$ y un algoritmo de optimización de pesos.
Chang [22]	Método de moldeo de energía.
Wang y Guo [220]	Conjunto que involucra funciones de valor absoluto.
Yang y Yang [28]	Esquema de estructura variable adaptivo.
Xin y Liu [221]	Diseño de una salida simple con parámetros ajustables.
Meda-Campaña [222]	Modelo difuso Takagi-Sugeno y condiciones de controlabilidad difusa.
Loukianov <i>et al.</i> [223]	Regulador de modos deslizantes por realimentación del estado.

Tabla 1.28: Diseño de controles para *swing-up* más estabilización del pendubot.

Autores	Métodos
Zhang y Tarn [224]	Linealización parcial no lineal y un controlador híbrido.
Constantin <i>et al.</i> [225]	Redes neuronales artificiales.
Albahkali <i>et al.</i> [226]	Seguimiento de un punto a otro mediante principios de trabajo-energía, impulso y momento, y un control lineal.
Ordaz-Oliver <i>et al.</i> [43, 44]	Optimización general, energía y programación dinámica.
Aoustin <i>et al.</i> [227]	Enfoques de energía e intuitivo y saturación.
Ordaz <i>et al.</i> [228]	1) Dinámica lagrangiana, análisis de energía y teoría de estabilidad. 2) Regulador cuadrático lineal.
Mathis <i>et al.</i> [229]	Actuación impulsiva.
Gulan <i>et al.</i> [230]	Enfoque de energía y control óptimo con acción integral.
Eom y Chwa [231]	Observador no lineal en presencia de fricción dinámica.

Tabla 1.29: Tabajos de diseño de controles para seguimiento de trayectoria del pendubot.

Autores	Métodos
Begovich <i>et al.</i> [232]	Teoría de regulador lineal y metodología difusa Takagi–Sugeno.
Utkin <i>et al.</i> [233]	Técnica de sistemas de estructura variable y formulación del problema de servomecanismos por modos deslizantes.
Cai y Su [234]	Teoría de control óptimo lineal y regulador lineal con la metodología difusa Takagi–Sugeno.

Tabla 1.30: Controles diseñados para generación de oscilaciones del pendubot.

Autores	Métodos
Verduzco [235]	Dos pasos: 1) Transformación del sistema en la forma normal de bifurcación Hopf. 2) Transformación de la bifurcación $k$ -cero en bifurcación doble-cero.
Freidovich <i>et al.</i> [236]	Planeación de movimientos a través de restricciones holonómicas virtuales.

Finalmente, más referencias donde se estudian problemáticas relativas al pendubot, tales como caos, control acrobático, generación de ciclos límite, rediseño paramétrico en tiempo mínimo, control inteligente, control de bifurcaciones, control de movimiento de lanzamiento, incertidumbres coincidentes y no coincidentes, entre otras, son [70, 209, 237–245].

## 1.4. Estado del arte tecnológico

Es importante mencionar que así como se han llevado a cabo avances en el campo científico asociados a los sistemas subactuados pendulares bajo estudio, también se han realizado desarrollos tecnológicos relacionados con dichos sistemas, los cuales se ven principalmente reflejados en el registro de patentes. En esa dirección, en la Tabla 1.31 se presentan las patentes vigentes que están directamente relacionadas con los sistemas subactuados de interés en este trabajo.

Tabla 1.31: Patentes asociadas a péndulos invertidos giratorios.

Inventores	País	Descripción
Sun <i>et al.</i> [246]	China	PF experimental para la enseñanza e investigación científica.
Jia <i>et al.</i> [247]	China	Estabilización del péndulo y diseño de un controlador PID basado en algoritmos genéticos.
Dai <i>et al.</i> [248, 249]	China	PF anti-par usado para la investigación de robots.
Ding <i>et al.</i> [250]	China	PF con grado de libertad en dos dimensiones.
Li <i>et al.</i> [251]	China	Dispositivo de control para el PF.
Lu <i>et al.</i> [252]	China	Péndulo invertido rotatorio basado en un microcontrolador con comunicación serial y medición de la posición angular con potenciómetro.
Meng <i>et al.</i> [253]	China	Péndulo invertido basado en un modelo de rotación.
Lu <i>et al.</i> [254]	China	Sistema experimento de control del péndulo tipo invertido giratorio.
Man [255]	China	Corresponde a un nuevo tipo de péndulo invertido.
Li <i>et al.</i> [256]	China	Controlador utilizado para un péndulo invertido anular.
Huang <i>et al.</i> [257]	China	Dispositivo experimento del péndulo invertido giratorio para estudiantes.
Wu <i>et al.</i> [258]	China	Método para modelar un sistema de monitoreo en tiempo real de péndulo invertido giratorio.
Wu <i>et al.</i> [259]	China	Dispositivo de péndulo invertido giratorio de grado de libertad planar bidimensional.
Liu <i>et al.</i> [260]	China	Dispositivo y control de péndulo invertido giratorio.
Sun <i>et al.</i> [261]	China	Péndulo invertido tipo giratorio con contrapeso.
Fei [262]	China	Péndulo invertido giratorio.
Zhang <i>et al.</i> [263]	China	Dispositivo de péndulo invertido giratorio basado en ARM.
Ruan <i>et al.</i> [264, 265]	China	Sistema de péndulo invertido basado en efecto electromagnético.
Zhao y Zhou [266]	China	Péndulo invertido de motor lineal.

## 1.5. Discusión del estado del arte científico y tecnológico

Habiendo revisado las contribuciones científicas, reportadas en revistas del Journal Citation Reports (JCR); así como las aportaciones tecnológicas, se encontró lo siguiente:

- Las problemáticas de control más estudiadas para los sistemas subactuados PF, PRI, PISC y pendubot (*swing-up*, estabilización, *swing-up* más estabilización, seguimiento de trayectorias y generación de oscilaciones) han sido solucionadas a través del diseño de controles; donde se han utilizando diferentes enfoques: Energía, linealización parcial, interconexión e inyección de amortiguamiento, modos deslizantes, backstepping, lógica difusa, redes neuronales, aprendizaje reforzado, etc. Sin embargo, no todos los controles hasta ahora diseñados han sido validados experimentalmente. Para el PF únicamente en 19 trabajos de 61 se ha hecho; mientras que para el PISC se tienen 20 de 78 trabajos, para el PRI 14 de 31 trabajos y 16 de 30 trabajos para el pendubot. En consecuencia, la validación experimental de controles para los sistemas de interés es un tema activo de investigación; puesto que, mencionada validación permitiría vislumbrar posibles aplicaciones.
- La problemática de control relativa al análisis de ciclos límite ha sido únicamente estudiada en [240] para el pendubot, enfocándose en la generación de ciclos límite neutralmente estables y atractivos en la posición invertida. Es decir, al mejor conocimiento de la autora de este trabajo, ningún control ha sido diseñado para eliminar los ciclos límite debidos a la fricción estática del actuador de los sistemas subactuados bajo estudio. Esto, aún cuando se sabe que la eliminación del ciclo límite significaría una mejora en el desempeño de los sistemas bajo estudio.

## 1.6. Objetivos del trabajo

De lo antes mencionado, se desprenden el objetivo general y los objetivos particulares de este trabajo, los cuales son presentados a continuación.

### 1.6.1. Objetivo general

*Estudiar y controlar sistemas mecánicos subactuados, particularmente el péndulo de Furuta, péndulo con rueda inercial, péndulo invertido sobre carro y pendubot; incluyendo la propuesta de esquemas de control para la eliminación de ciclos límite debidos a la fricción estática en el actuador de tales sistemas subactuados.*

### 1.6.2. Objetivos particulares

Con la intención de lograr el objetivo general, se cumplieron los siguientes objetivos particulares:

1. Modelado dinámico de los cuatro sistemas subactuados de interés aplicando la formulación de Euler-Lagrange.

2. Empleando la técnica de linealización aproximada, obtención de un modelo lineal para cada uno de los cuatro sistemas bajo estudio; el cual es válido alrededor del punto de operación inestable de los sistemas.
3. Desarrollo de un modelo de planitud diferencial equivalente al modelo lineal aproximado, referido en el objetivo particular anterior, para los sistemas PF, PISC y pendubot.
4. Construcción de los prototipos de los sistemas subactuados correspondientes. Para cada sistema, se seleccionaron y adquirieron el actuador y los sensores (parte electromecánica), así como la etapa de potencia (parte electrónica). También, se realizó el Diseño Asistido por Computadora (CAD en inglés) de los prototipos y se adquirieron los materiales mecánicos para la manufactura de partes (parte mecánica). Por último, se llevó a cabo la integración de las partes electromecánica, electrónica y mecánica.
5. Para los sistemas PF, PRI, PISC y pendubot, simulación e implementación experimental de dos controles retomados de la literatura, uno para la tarea de *swing-up* y otro para la estabilización, integrados por medio de una adecuada conmutación; derivando así un controlador híbrido. La simulación se llevó a cabo en Matlab-Simulink, mientras que la experimentación se logró vía Matlab-Simulink, Control-Desk y la tarjeta de prototipado rápido DS1104 de dSPACE.
6. Propuesta, simulación y validación experimental de esquemas de control que ejecutan la tarea de estabilización en los sistemas PF, PISC y pendubot, de manera que se elimina el ciclo límite inducido por la no linealidad de zona muerta en los actuadores de tales sistemas [267, 268].

## 1.7. Organización del trabajo

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se presentan tres modelos del sistema PF, a saber, modelo no lineal obtenido con las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, modelo lineal derivado a través de linealización aproximada y un modelo basado en planitud diferencial, el cual es equivalente al modelo lineal aproximado. Asimismo, se incluye el CAD y construcción de un prototipo de tal sistema; así como la simulación e implementación experimental de dos controles. Uno no lineal basado en energía y en las propiedades pasivas del sistema, el cual realiza la tarea de *swing-up*; y otro lineal obtenido al aplicar realimentación del vector de estado, el cual realiza la tarea de estabilización. Además, usando el modelo lineal de planitud diferencial trasladado al dominio de la frecuencia, se propone, simula y valida experimentalmente un esquema de control que estabiliza el PF; de tal manera que se logra eliminar el ciclo límite inducido por la no linealidad de zona muerta en el actuador del sistema. Por otro lado, en el Capítulo 3 se presentan dos modelos para el sistema PRI, uno no lineal obtenido vía las ecuaciones de Euler-Lagrange y otro derivado de aplicar linealización aproximada al modelo no lineal. También, se describe el CAD y la construcción de un prototipo del sistema PRI. Adicionalmente, se simula e implementa experimentalmente un control no lineal, derivado del enfoque de energía, que resuelva el problema de *swing-up* y un control lineal por realimentación del vector de estado que resuelve el problema

de estabilización. En el Capítulo 4, con ecuaciones de Euler-Lagrange se describe un modelo no lineal, por medio de linealización aproximada se obtiene un modelo lineal y a través de planitud diferencial se desarrolla un modelo lineal equivalente al modelo lineal aproximado para el sistema PISC. Asimismo, para este sistema se incluye el CAD y construcción de un prototipo y se simulan e implementan experimentalmente dos controles; uno que permite resolver la tarea de *swing-up* y otro la tarea de estabilización. El primero está basado en el enfoque de energía y las propiedades pasivas del sistema y el segundo en realimentación del vector de estado. Adicionalmente, a partir del modelo lineal basado en planitud diferencial desarrollado, se propone, simula y valida experimentalmente un esquema de control para la estabilización del péndulo, el cual elimina el ciclo límite debido a la no linealidad de zona muerta presente en el actuador del sistema. En el Capítulo 5 se presenta el modelo no lineal derivado de la formulación de Euler-Lagrange, el modelo lineal aproximado del modelo no lineal y un modelo de planitud diferencial equivalente al modelo lineal aproximado para el sistema pendubot. También, se describe el CAD y construcción de un prototipo del sistema pendubot. Además, se describe la simulación y validación experimental de dos controles para este sistema, a saber: un control de seguimiento de trayectoria basado en linealización parcial que indirectamente resuelve la tarea de *swing-up* y un control lineal por realimentación del vector de estado para la estabilización del péndulo. Más aún, se propone, simula e implementa experimentalmente un esquema de control que permite eliminar el ciclo límite del sistema causado por la no linealidad de zona muerta del actuador. Finalmente, en el Capítulo 6 se dan las conclusiones del trabajo de tesis, las dificultades enfrentadas y el trabajo futuro. Mientras que los Apéndices A y B se incluyen los productos de investigación logrados durante el desarrollo del trabajo de tesis y las hojas de datos de los dispositivos electromecánicos y electrónicos empleados para la construcción de los prototipos, respectivamente.



# Capítulo 2

## Péndulo de Furuta (PF)

En este capítulo se presentan tres modelos matemáticos del PF, a saber, el modelo dinámico vía ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, modelo por linealización aproximada y un modelo basado en planitud diferencial. También, se introduce el diseño asistido por computadora (CAD) y la construcción de un prototipo de este sistema. El modelo dinámico es empleado para replicar el control no lineal, basado en el enfoque de energía y propiedades pasivas, reportado en [6, 7] que levanta el péndulo a la posición invertida (*swing-up*). Mientras que el modelo lineal aproximado es empleado para obtener un control lineal por realimentación del vector de estado que estabiliza al péndulo en la posición invertida. Además, se proponen, simulan y validan dos esquemas de control, los cuales, a través de relaciones matemáticas obtenidas, permiten seleccionar las ganancias del control lineal por realimentación del vector de estado. Tales esquemas de control explotan las propiedades de planitud diferencial del sistema, lo cual permite trasladar el diseño del control lineal por realimentación del vector de estado a un escenario donde se pueden aplicar herramientas de control clásico como el *lugar de las raíces* y *diagramas de Bode*. Los esquemas de control propuestos son rediseñados para mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado de manera que se logra eliminar el ciclo límite inducido por la no linealidad de zona muerta en el actuador del sistema. Siendo esto la contribución principal del presente trabajo.

### 2.1. Modelos matemáticos

Desde que el objetivo del presente trabajo es presentar un control no lineal para levantar el péndulo a la posición invertida, así como un control lineal para estabilizar mencionado péndulo y, además, proponer un esquema de control útil en la sintonización de ganancias del control lineal y eliminación del ciclo límite. En este apartado se presentan el modelo dinámico obtenido por medio de la formulación de Euler-Lagrange, el modelo lineal aproximado del modelo dinámico y el modelo basado en planitud diferencial del PF.

#### 2.1.1. Modelo dinámico con ecuaciones de Euler-Lagrange

En la obtención del modelo dinámico del PF se ha reportado en [6, 7], donde en general se siguen los siguientes tres pasos:

1. Obtener la cinemática del sistema (ubicación del centro de masa del péndulo).

2. Determinar la energía cinética y potencial del sistema.
3. Aplicar de la formulación de Euler-Lagrange.

Estos son descritos en los siguientes apartados.

### Cinemática del sistema

En la Figura 2.1 se muestra un diagrama del PF, donde  $\theta_0$  es la posición angular del brazo medida con respecto a una posición arbitraria,  $\theta_1$  es la posición angular del péndulo medida con respecto a la posición invertida,  $\tau_F$  es el par aplicado al brazo y generado por el motor,  $I_0$  es la inercia del brazo (cuando gira alrededor de uno de sus extremos) más la inercia del motor,  $L_0$  es la longitud del brazo,  $m_1$ ,  $l_1$  y  $J_1$  son la masa, la ubicación del centro de masa y la inercia del péndulo, respectivamente. Mientras que  $g$  es la aceleración de gravedad.

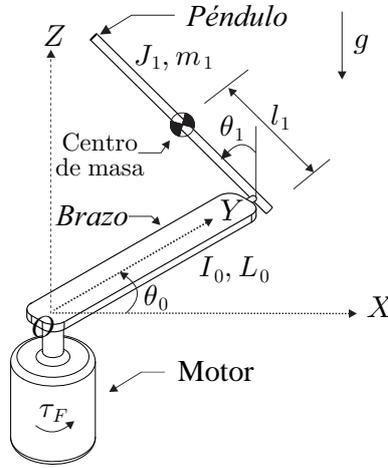


Figura 2.1: Diagrama del PF.

De la Figura 2.1, es claro que el PF posee movimiento tanto en el plano horizontal como en el vertical, es decir, requiere un marco de referencia  $(X, Y, Z)$ . Por lo tanto, la ubicación del centro de masa del péndulo  $\mathbf{x}_F$  es un vector de tres componentes, esto es:

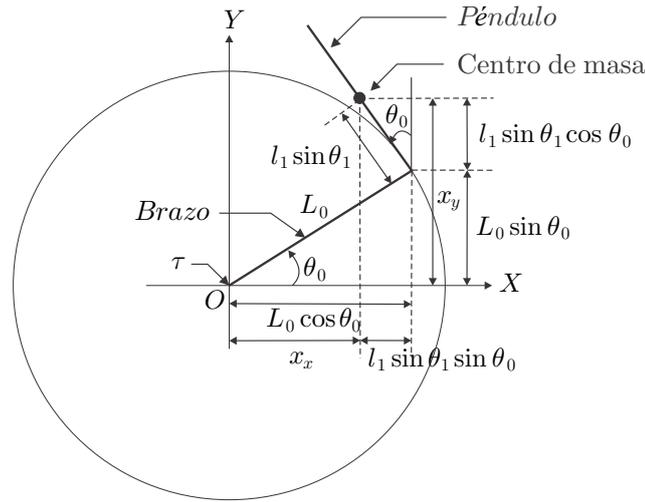
$$\mathbf{x}_F = [x_x, x_y, x_z]^T,$$

donde  $x_x$ ,  $x_y$  y  $x_z$  corresponden a las proyecciones del vector  $\mathbf{x}_F$  en los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente. Así, de la Figura 2.2 y mediante el uso de relaciones trigonométricas, se encuentra:

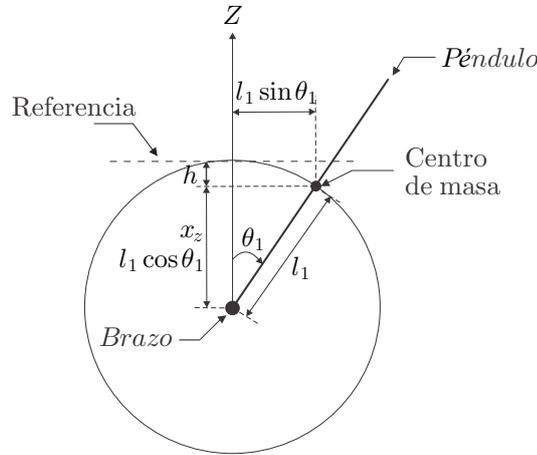
$$\mathbf{x}_F = \begin{bmatrix} x_x \\ x_y \\ x_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \cos \theta_0 - l_1 \sin \theta_1 \sin \theta_0 \\ L_0 \sin \theta_0 + l_1 \sin \theta_1 \cos \theta_0 \\ l_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Al derivar (2.1) una vez con respecto al tiempo se llega al siguiente vector de velocidad:

$$\mathbf{v}_F = \begin{bmatrix} \dot{x}_x \\ \dot{x}_y \\ \dot{x}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_0 L_0 \sin \theta_0 - l_1 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_0 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_0 \cos \theta_1) \\ \dot{\theta}_0 L_0 \cos \theta_0 + l_1 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_0 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_0 \sin \theta_0 \sin \theta_1) \\ -\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$



(a) Proyección del PF el plano horizontal



(b) Proyección del PF en el plano vertical

Figura 2.2: Diagrama de cuerpo libre del PF.

### Energía del sistema

A continuación se explica la obtención de la energía cinética y potencial del PF, las cuales se requieren para aplicar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

**Energía cinética.** La energía cinética  $K_F$  del PF es la suma de la energía cinética del brazo  $K_{\theta_0}$  y la energía cinética del péndulo  $K_{\theta_1}$ , es decir:

$$K_F = K_{\theta_0} + K_{\theta_1}. \quad (2.3)$$

Dado que el brazo gira alrededor de un punto fijo  $O$  (ver Figura 2.1), entonces posee energía cinética traslacional y rotacional. Así,  $K_{\theta_0}$  puede definirse como:

$$K_{\theta_0} = \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} I_{C_{m_0}} \dot{\theta}_0^2, \quad (2.4)$$

siendo  $m_0$  la masa del brazo,  $\mathbf{v}_0$  el vector de velocidad traslacional del brazo e  $I_{C_{m_0}}$  la inercia del brazo cuando gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masa.

Tomando en cuenta que  $\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 = \dot{\theta}_0^2 x_{C_{m_0}}^2$ , siendo  $x_{C_{m_0}}$  la distancia entre  $O$  y el centro de masa del brazo, (2.4) se puede escribir como sigue:

$$K_{\theta_0} = \frac{1}{2} (m_0 x_{C_{m_0}}^2 + I_{C_{m_0}}) \dot{\theta}_0^2.$$

De acuerdo al Teorema de los ejes paralelos [269],  $I_0 = m_0 x_{C_{m_0}}^2 + I_{C_{m_0}}$ ; por lo tanto,

$$K_{\theta_0} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2. \quad (2.5)$$

Respecto a la energía cinética del péndulo, dado que este último posee movimiento plano general; en consecuencia, el péndulo posee velocidad angular y su centro de masa tiene velocidad traslacional. Por consiguiente, la energía cinética del péndulo está determinada por:

$$K_{\theta_1} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_F^T \mathbf{v}_F. \quad (2.6)$$

Después de reemplazar (2.2) en (2.6), y de reducir la expresión resultante, se encuentra lo siguiente:

$$K_{\theta_1} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[ (\dot{\theta}_0 L_0)^2 + (l_1 \dot{\theta}_0 \sin \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + 2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \right]. \quad (2.7)$$

Finalmente, la energía cinética del péndulo está dada por:

$$K_F = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[ (\dot{\theta}_0 L_0)^2 + (l_1 \dot{\theta}_0 \sin \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + 2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \right]. \quad (2.8)$$

**Energía potencial.** La energía potencial de un sistema está definida como la suma de la energía potencial de cada uno de los cuerpos rígidos que componen a tal sistema. Entonces, la energía potencial  $V_F$  del PF es la suma de la energía potencial del brazo más la energía potencial del péndulo. Desde que el brazo se mueve únicamente en el plano horizontal su energía potencial es constante y puede considerarse igual a cero,  $V_F$  se reduce a la energía potencial del péndulo. Así, de la Figura 2.2(b) y empleando relaciones trigonométricas, se obtiene lo siguiente:

$$V_F = -hm_1g = m_1gl_1 (\cos \theta_1 - 1). \quad (2.9)$$

### Ecuaciones de movimiento

Empleando la formulación de Euler-Lagrange y considerando que el PF es un sistema de 2 GDL, se tienen las siguientes dos expresiones:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L_F}{\partial \theta_0} = \tau_F, \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L_F}{\partial \theta_1} = 0, \quad (2.11)$$

donde  $L_F$  es el Lagrangiano del sistema, definido como:

$$\begin{aligned} L_F &= K_F - V_F, \\ &= \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 \left[ \left( \dot{\theta}_0 L_0 \right)^2 + \left( l_1 \dot{\theta}_0 \text{sen} \theta_1 \right)^2 + \left( l_1 \dot{\theta}_1 \right)^2 + 2\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \right] - \\ &\quad - m_1 g l_1 (\cos \theta_1 - 1). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Después de realizar las derivadas parciales correspondientes se encuentra:

$$\frac{\partial L_F}{\partial \theta_0} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}_0} = \alpha \dot{\theta}_0 + \gamma \dot{\theta}_1, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial L_F}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2}\beta \dot{\theta}_0^2 - \sigma \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \text{sen} \theta_1, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + \gamma \dot{\theta}_0 + J_1 \dot{\theta}_1, \quad (2.16)$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha &= I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \text{sen}^2 \theta_1, & \beta &= m_1 l_1^2 \text{sen}(2\theta_1), \\ \gamma &= m_1 L_0 l_1 \cos \theta_1, & \sigma &= m_1 L_0 l_1 \text{sen} \theta_1. \end{aligned}$$

Tras derivar con respecto al tiempo (2.14) y (2.16) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}_0} \right) &= \alpha \ddot{\theta}_0 + \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \gamma \ddot{\theta}_1 - \sigma \dot{\theta}_1^2, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_F}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \gamma \ddot{\theta}_0 - \sigma \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + (m_1 l_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo dinámico del PF queda definido como:

$$\alpha \ddot{\theta}_0 + \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \gamma \ddot{\theta}_1 - \sigma \dot{\theta}_1^2 = \tau_F, \quad (2.17)$$

$$\gamma \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0^2 - m_1 g l_1 \text{sen} \theta_1 = 0, \quad (2.18)$$

cuya representación matricial es:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_F) \ddot{\mathbf{q}}_F + \mathbf{C}(\mathbf{q}_F, \dot{\mathbf{q}}_F) \dot{\mathbf{q}}_F + \mathbf{g}(\mathbf{q}_F) = \mathbf{F}, \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_F &= \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(\mathbf{q}_F) &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & m_1 l_1^2 + J_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}_F, \dot{\mathbf{q}}_F) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_1 & \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0 - \sigma \dot{\theta}_1 \\ -\frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_F) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g l_1 \text{sen} \theta_1 \end{bmatrix}, & \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \tau_F \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.1.2. Modelo lineal aproximado

Desde que se desea estabilizar el péndulo en la posición invertida con un control lineal por realimentación del vector de estado, es importante obtener el modelo lineal aproximado del modelo no lineal del PF, (2.17)–(2.18), alrededor de tal posición. Para este fin se procede de la siguiente manera:

- a) Realizar la representación en variables de estado del modelo dinámico.
- b) Obtener los puntos de operación del sistema.

#### Representación en variables de estado

La forma general en variables de estado de un sistema no lineal, está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

siendo  $x$ ,  $u$  y  $y$  el vector de estado, la entrada y la salida, respectivamente, del sistema. En particular para el PF

$$x = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad u = \tau_F. \quad (2.21)$$

Entonces, para llevar (2.17)–(2.18) a la forma (2.20) es necesario despejar  $\ddot{\mathbf{q}}$  de (4.14) para encontrar las expresiones asociadas a  $\ddot{\theta}_0$  y  $\ddot{\theta}_1$ . Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{q}_F) \ddot{\mathbf{q}}_F &= \mathbf{F} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_F, \dot{\mathbf{q}}_F) \dot{\mathbf{q}}_F - \mathbf{g}(\mathbf{q}_F), \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}_F)^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{q}_F) \ddot{\mathbf{q}}_F &= \mathbf{D}(\mathbf{q}_F)^{-1} [\mathbf{F} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_F, \dot{\mathbf{q}}_F) \dot{\mathbf{q}}_F - \mathbf{g}(\mathbf{q}_F)], \\ \ddot{\mathbf{q}}_F &= \mathbf{D}(\mathbf{q}_F)^{-1} [\mathbf{F} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_F, \dot{\mathbf{q}}_F) \dot{\mathbf{q}}_F - \mathbf{g}(\mathbf{q}_F)], \end{aligned}$$

con

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_F)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2 + J_1}{\alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} & -\frac{\gamma}{\alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} \\ -\frac{\gamma}{\alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} & \frac{\alpha}{\alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} \end{bmatrix}.$$

Nótese que  $\mathbf{D}(\mathbf{q}_F)$  es invertible porque  $\det \mathbf{D}(\mathbf{q}_F) = \alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2 \neq 0$ . Así, después de realizar el álgebra matricial correspondiente se encuentra:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(m_1 l_1^2 + J_1)(\tau_F - \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \sigma \dot{\theta}_1^2) - \gamma(\frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0^2 + m_1 g l_1 \text{sen} \theta_1)}{\alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} \\ \frac{\alpha(\frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0^2 + m_1 g l_1 \text{sen} \theta_1) - \gamma(\tau_F - \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \sigma \dot{\theta}_1^2)}{\alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} \end{bmatrix}.$$

Así, el modelo (4.14) en la forma general de variables de estado queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \frac{(m_1 l_1^2 + J_1)(\tau_F - \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \sigma \dot{\theta}_1^2) - \gamma(\frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0^2 + m_1 g l_1 \text{sen} \theta_1)}{\alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} \\ \dot{\theta}_1 \\ \frac{\alpha(\frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0^2 + m_1 g l_1 \text{sen} \theta_1) - \gamma(\tau_F - \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \sigma \dot{\theta}_1^2)}{\alpha(m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

con

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \frac{(m_1 l_1^2 + J_1)(\tau_F - \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \sigma \dot{\theta}_1^2) - \gamma \left(\frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0^2 + m_1 g l_1 \sin \theta_1\right)}{\alpha (m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} \\ \dot{\theta}_1 \\ \frac{\alpha \left(\frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0^2 + m_1 g l_1 \sin \theta_1\right) - \gamma (\tau_F - \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \sigma \dot{\theta}_1^2)}{\alpha (m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} = f(x, u). \quad (2.23)$$

### Puntos de operación del sistema

Los puntos de operación del sistema PF se obtienen al resolver

$$\dot{x} \equiv 0 \equiv f(\bar{x}, \bar{u}), \quad (2.24)$$

donde

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_0 & \bar{\theta}_0 & \bar{\theta}_1 & \bar{\theta}_1 \end{bmatrix}^T$$

son aquellos valores del vector de estado  $x$  cuando el sistema puede permanecer sin movimiento, bajo el efecto de una adecuada entrada del sistema constante  $\bar{u} = \bar{\tau}_F$  y

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_2(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_3(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_4(\bar{x}, \bar{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_0 \\ \frac{(m_1 l_1^2 + J_1) \left( \bar{\tau}_F - \beta_e \bar{\theta}_0 \bar{\theta}_1 + \sigma_e \bar{\theta}_1^2 \right) - \gamma_e \left( \frac{1}{2} \beta_e \bar{\theta}_0^2 + m_1 g l_1 \sin \bar{\theta}_1 \right)}{\alpha_1 (m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma_e^2} \\ \bar{\theta}_1 \\ \frac{\alpha_1 \left( \frac{1}{2} \beta_e \bar{\theta}_0^2 + m_1 g l_1 \sin \bar{\theta}_1 \right) - \gamma_e \left( \bar{\tau}_F - \beta_e \bar{\theta}_0 \bar{\theta}_1 + \sigma_e \bar{\theta}_1^2 \right)}{\alpha_1 (m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma_e^2} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_e &= I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \bar{\theta}_1, & \beta_e &= m_1 l_1^2 \sin(2\bar{\theta}_1), \\ \gamma_e &= m_1 L_0 l_1 \cos \bar{\theta}_1, & \sigma_e &= m_1 L_0 l_1 \sin \bar{\theta}_1. \end{aligned}$$

De (2.24) es claro que

$$\bar{\theta}_0 = 0, \quad \bar{\theta}_1 = 0.$$

Mientras que, del denominador de  $f_2(\bar{x}, \bar{u})$  y  $f_4(\bar{x}, \bar{u})$ , es decir:

$$\alpha_e (m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma_e^2 = (I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \bar{\theta}_1) (m_1 l_1^2 + J_1) - (m_1 L_0 l_1 \cos \bar{\theta}_1)^2,$$

se sabe que

$$(I_0 + m_1 L_0^2) \neq 0 \quad \wedge \quad (m_1 l_1^2 + J_1) \neq 0,$$

por lo que se puede afirmar que

$$\alpha (m_1 l_1^2 + J_1) - \gamma^2 \neq 0, \infty.$$

Dado que  $\bar{\theta}_0 = 0$  y  $\bar{\theta}_1 = 0$ ,  $f_2(\bar{x}, \bar{u}) = 0$  y  $f_4(\bar{x}, \bar{u}) = 0$  se reducen a resolver las respectivas siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (m_1 l_1^2 + J_1) \bar{\tau}_F - \gamma_e m_1 g l_1 \sin \bar{\theta}_1 &= 0, \\ \alpha_e m_1 g l_1 \sin \bar{\theta}_1 - \gamma_e \bar{\tau}_F &= 0. \end{aligned}$$

De esta última ecuación es fácil detectar que se debe satisfacer

$$\text{sen}\bar{\theta}_1 = 0 \implies \bar{\theta}_1 = \pm n\pi, \text{ para } n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad \bar{\tau}_F = 0.$$

Nótese que no existe alguna condición que deba cumplir  $\bar{\theta}_0$ , lo cual significa que esta constante puede elegirse de manera totalmente arbitraria. Por lo tanto, los puntos de operación del PF son:

$$\bar{\theta}_0 = \text{Arbitrario}, \quad \dot{\bar{\theta}}_0 = 0, \quad \bar{\theta}_1 = \pm n\pi, \quad \dot{\bar{\theta}}_1 = 0, \quad \bar{\tau}_F = 0.$$

Debido a que uno de los objetivos que se persigue en este trabajo es estabilizar el péndulo en la posición invertida ( $n = 0$ ) se selecciona el siguiente punto de operación:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_0 \\ \dot{\bar{\theta}}_0 \\ \bar{\theta}_1 \\ \dot{\bar{\theta}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\tau}_F = 0. \quad (2.25)$$

### Linealización aproximada

El modelo no lineal (2.22) puede ser aproximado por el siguiente modelo lineal:

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad (2.26)$$

$$y_\delta = Cx_\delta, \quad (2.27)$$

siendo

$$x_\delta = \begin{bmatrix} x_{\delta 1} \\ x_{\delta 2} \\ x_{\delta 3} \\ x_{\delta 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 - \bar{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_0 - \dot{\bar{\theta}}_0 \\ \theta_1 - \bar{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 - \dot{\bar{\theta}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad u_\delta = \tau_F - \bar{\tau}_F = \tau_F, \quad (2.28)$$

mientras que las matrices constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  se determinan como sigue [270]:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial \theta_0} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial \dot{\theta}_0} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial \theta_0} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial \dot{\theta}_0} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial \theta_0} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial \dot{\theta}_0} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial \theta_0} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial \dot{\theta}_0} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial \dot{\theta}_1} \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})},$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial \theta_0} & \frac{\partial h(x)}{\partial \dot{\theta}_0} & \frac{\partial h(x)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial \dot{\theta}_1} \end{bmatrix} \Bigg|_{\bar{x}}.$$

Después de realizar las operaciones correspondientes, se encuentra que  $A$ ,  $B$  y  $C$  quedan dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-gm_1^2 l_1^2 L_0}{I_0(J_1+m_1 l_1^2)+J_1 m_1 L_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(I_0+m_1 L_0^2)m_1 l_1 g}{I_0(J_1+m_1 l_1^2)+J_1 m_1 L_0^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J_1+m_1 l_1^2}{I_0(J_1+m_1 l_1^2)+J_1 m_1 L_0^2} \\ 0 \\ \frac{-m_1 l_1 L_0}{I_0(J_1+m_1 l_1^2)+J_1 m_1 L_0^2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Finalmente, el modelo lineal (2.26)–(2.27) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{\delta 1} \\ \dot{x}_{\delta 2} \\ \dot{x}_{\delta 3} \\ \dot{x}_{\delta 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\delta 2} \\ \frac{(m_1 l_1^2 + J_1)}{I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1} u_{\delta} - \frac{g L_0 l_1^2 m_1^2}{I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1} x_{\delta 3} \\ x_{\delta 4} \\ \frac{g l_1 m_1 (m_1 L_0^2 + I_0)}{I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1} x_{\delta 3} - \frac{m_1 L_0 l_1}{I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1} u_{\delta} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

### 2.1.3. Modelo lineal basado en planitud diferencial

Se recuerda que el modelo basado en planitud diferencial del PF es empleado para proponer un esquema de control que proporciona información importante para sintonizar las ganancias del control lineal por realimentación del vector de estado; así como eliminar el ciclo límite del sistema.

La matriz de controlabilidad  $C_0$  del sistema lineal (2.26)–(2.27) está dada como:

$$C_0 = [ B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B ],$$

donde

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2 + J_1}{I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1} \\ 0 \\ \frac{-m_1 l_1 L_0}{I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_1^3 l_1^3 L_0^2 g}{[I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1]^2} \\ 0 \\ \frac{-(I_0 + m_1 L_0^2) m_1^2 l_1^2 L_0 g}{[I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1]^2} \end{bmatrix},$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} \frac{m_1^3 l_1^3 L_0^2 g}{[I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1]^2} \\ 0 \\ \frac{-(I_0 + m_1 L_0^2) m_1^2 l_1^2 L_0 g}{[I_0(m_1 l_1^2 + J_1) + J_1 L_0^2 m_1]^2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Después de realizar los cálculos correspondientes y reducir términos, se encuentra lo siguiente:

$$\det(C_0) = \frac{m_1^4 l_1^4 L_0^2 g^2}{[I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2]^4} \neq 0$$

y, por lo tanto, (2.26)–(2.27) es controlable. De acuerdo a [271], Ch. 2, esto implica que (2.26)–(2.27) es también diferencialmente plano y que su salida plana  $y_F$  está definida como:

$$y_F = \lambda [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 ] C_0^{-1} x_{\delta}, \quad (2.30)$$

donde  $\lambda$  es una constante arbitraria diferente de cero y  $C_0^{-1}$  está dada por:

$$C_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & c_4 \\ c_3 & 0 & c_4 & 0 \end{bmatrix},$$

siendo

$$\begin{aligned} c_1 &= I_0 + m_1 L_0^2, & c_2 &= m_1 l_1 L_0, \\ c_3 &= -\frac{J_1 m_1 L_0^2 + I_0 (m_1 l_1^2 + J_1)}{g l_1 m_1}, & c_4 &= -\frac{(m_1 l_1^2 + J_1) [J_1 m_1 L_0^2 + I_0 (m_1 l_1^2 + J_1)]}{g L_0 l_1^2 m_1^2}. \end{aligned}$$

Después de llevar a cabo los cálculos indicados en (2.30) y, por conveniencia, escoger:

$$\lambda = \frac{g l_1 m_1}{J_1 m_1 L_0^2 + I_0 (m_1 l_1^2 + J_1)},$$

se encuentra que la salida plana del sistema está dada por:

$$y_F = x_{\delta_1} + h x_{\delta_3}, \quad (2.31)$$

donde

$$h = \frac{J_1 + m_1 l_1^2}{L_0 l_1 m_1}.$$

Derivando  $y_F$  cuatro veces con respecto al tiempo y usando el modelo lineal (2.29), se encuentra lo siguiente:

$$\dot{y}_F = \dot{x}_{\delta_1} + h \dot{x}_{\delta_3} = x_{\delta_2} + h x_{\delta_4}, \quad (2.32)$$

$$\ddot{y}_F = \dot{x}_{\delta_2} + h \dot{x}_{\delta_4} = (a + bh) x_{\delta_3} \quad (2.33)$$

$$y_F^{(3)} = (a + bh) \dot{x}_{\delta_3} = (a + bh) x_{\delta_4}, \quad (2.34)$$

$$y_F^{(4)} = (a + bh) \dot{x}_{\delta_4} = b \ddot{y}_F + d(a + bh) \tau_F, \quad (2.35)$$

con:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-g m_1^2 l_1^2 L_0}{I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2}, & b &= \frac{(I_0 + m_1 L_0^2) m_1 l_1 g}{I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2}, \\ d &= \frac{-m_1 l_1 L_0}{I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2}. \end{aligned}$$

## 2.2. Construcción del sistema

En esta sección se describen los subsistemas que integran al prototipo de PF construido, las conexiones eléctricas entre estos subsistemas, así como el procedimiento seguido en la construcción del prototipo. Es importante mencionar que este prototipo fue construido de forma que también se puede configurar un prototipo de PRI; sin embargo, la descripción de este último se da en el Capítulo 3.

Como se muestra en la Figura 2.3, en general, el prototipo de PF construido está compuesto de los siguientes cuatro subsistemas:

- A) *Actuador y sensores.* Este subsistema está integrado por un motor de CD Pittman 14204S006, el cual incluye un encoder, y un encoder ITD01A4Y1 de Baumer. El motor de CD proporciona movimiento al sistema; mientras que los encoders miden la posición angular del brazo y péndulo, respectivamente. Ambos encoders son de tipo incremental.

- B) *Etapa de potencia.* Este subsistema suministra energía a los motores de CD y está integrado por una fuente de alimentación conmutada y un arrancador de servomotores que posee un lazo interno de corriente.
- C) *Estructura mecánica.* Este subsistema corresponde a los elementos mecánicos que son, directa e indirectamente, movidos por el motor de CD (es decir, el brazo y péndulo). También incluye la base de la estructura conformado por aquellos elementos mecánicos que sostienen al brazo, péndulo, *Subsistema A* y *Subsistema B*.
- D) *Adquisición y procesamiento de datos.* Se refiere a una tarjeta DS1104 de dSPACE, la cual por medio de Matlab-Simulink y ControlDesk permite la implementación en tiempo real de controladores para el prototipo. También, facilita la adquisición y procesamiento de las variables del sistema.

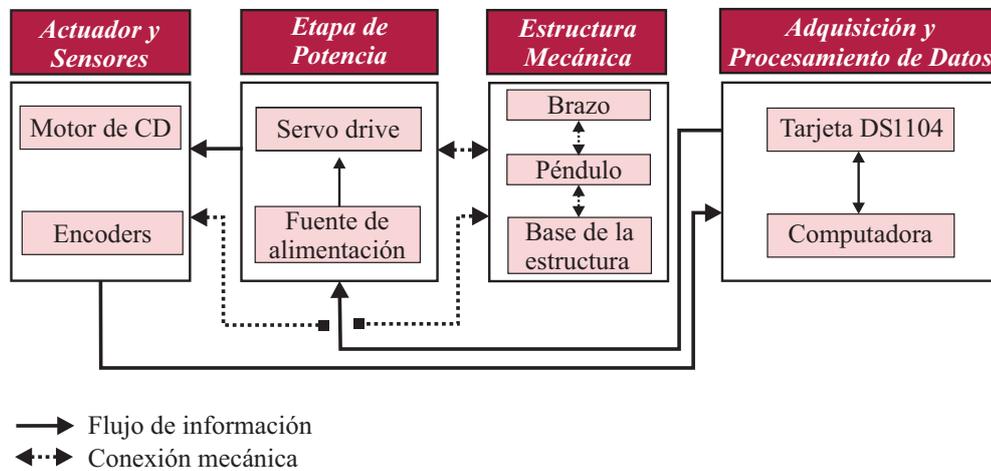


Figura 2.3: Subsistemas del prototipo de PF.

### 2.2.1. Actuador y sensores

Como actuador del sistema PF se utiliza el motor de CD Pittman 14204S006, el cual se muestra en la Figura 2.4(a) y sus características se presentan en la Tabla 2.1. Este motor de CD fue seleccionado después de realizar simulaciones numéricas en lazo abierto (ver [272, 273]), las cuales mostraron que se requiere un par de 0.17 [Nm] para llevar el péndulo de la posición colgante a la invertida. Las conexiones de tal motor con la etapa de potencia se representan en la Figura 2.8.

Respecto a los sensores, para medir la posición angular del brazo  $\theta_0$  y del péndulo  $\theta_1$  se usan dos encoders incrementales: Un encoder de 500 PPR incluido en el motor de CD 14204S006 y un encoder miniatura ITD01A4Y1 fabricado por Baumer con una resolución de 1024 PPR, respectivamente. Este último encoder se presenta en la Figura 2.4(b), el cual posee dos características importantes: i) Su peso ligero (40 g) y ii) no tiene flecha. La primera es aprovechada para disminuir el peso que debe cargar el brazo; en consecuencia, conseguir un prototipo compacto. Mientras que la segunda es aprovechada para facilitar el cambio de configuración de PF a PRI y viceversa, como se verá en el Capítulo 3.

La interacción de los encoders del brazo y péndulo con la tarjeta DS1104 (*Subsistema D*) se muestra en la Figura 2.5. Mientras que las conexiones entre los encoders y la tarjeta son realizadas a través de los canales independientes CP19 y CP20 que la tarjeta posee para lectura de encoders incrementales. Tales conexiones se muestran en la Figura 2.6, donde se observa que los encoders están aislados de la etapa de potencia; ya que, obtienen la alimentación de la tarjeta DS1104.



(a) Motor de CD  
14204S006 Pittman



(b) Miniencoder  
ITD01A4Y1 Baumer

Figura 2.4: Dispositivos que integran el *Subsistema A*: Actuador y sensores.

Tabla 2.1: Características del motor de CD 14204S006.

Voltaje de alimentación	24 V
Par continuo (Max.)	0.18 Nm
Constante de par	$6.12 \times 10^{-2}$ Nm/A
Corriente máxima	23.8 A
Corriente a par continuo	3.67 A
Sin caja de engranes	
Encoder incremental	500 PPR

### 2.2.2. Etapa de potencia

La etapa de potencia está integrada por una fuente de alimentación conmutada HF100W-SF-24 y un arrancador de servomotores AZ12A8DDC, fabricado por Advanced Motion Controls. Estos dispositivos acondicionan la señal de control enviada por el *Subsistema D* para manejar el motor de CD, logrando a su vez mover la estructura mecánica. Para esto, se utiliza el lazo interno de corriente del arrancador de servomotores, el cual asegura que la corriente de armadura del motor alcance una corriente deseada,  $i_m^*$ , indirectamente impuesta por el control. Como parte del prototipo, el arrancador de servomotores tiene las siguientes funciones: *i*) Aislar el *Subsistema D* de los motores de CD. *ii*) Amplificar la corriente conmutada  $i_c$  (asociada a  $i_m^*$ ) de baja potencia proveída

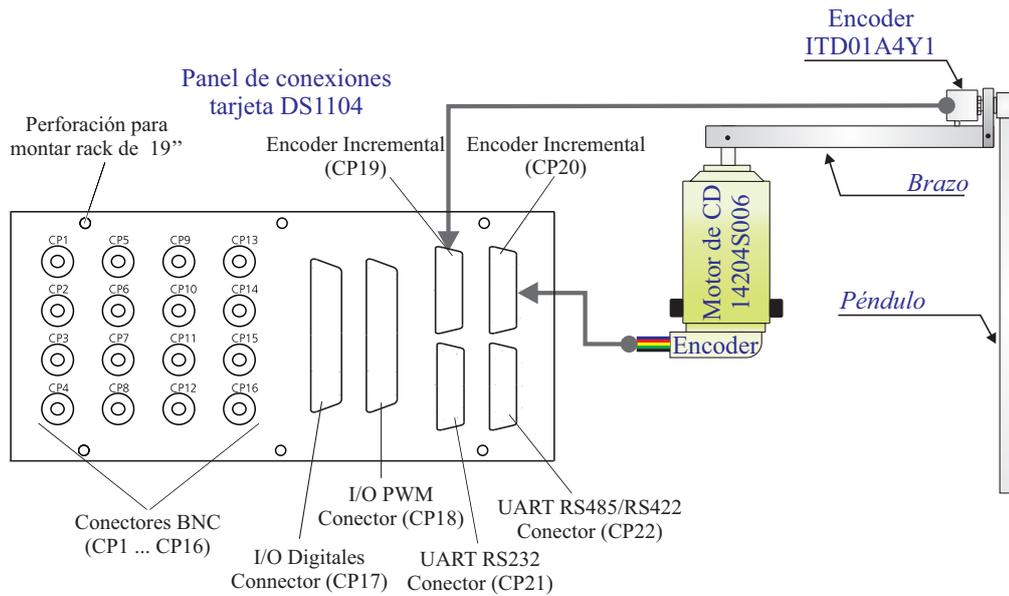


Figura 2.5: Diagrama del brazo-péndulo y tarjeta DS1104.

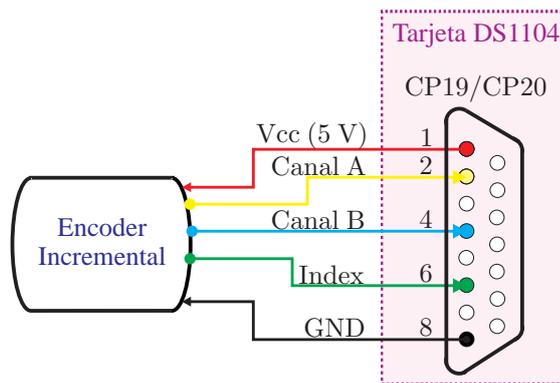


Figura 2.6: Conexión de encoders y DS1104.

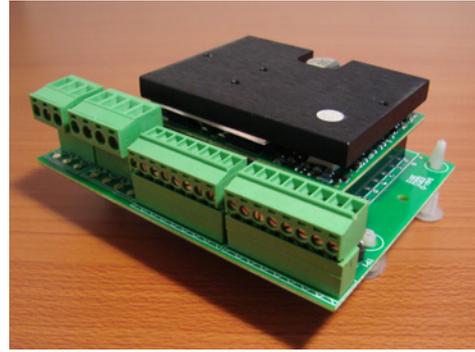
por el *Subsistema D*, vía la implementación de (2.55) a través de un PWM, de manera que se pueda manejar el motor de CD. Mencionado arrancador de servomotores se conecta a una bornera MC1XAZ01 que permite realizar conexiones sencillas y rápidas.

Se decidió utilizar una fuente conmutada debido a que proporciona las siguientes ventajas: Menor tamaño y peso del núcleo del transformador o transformadores que la integran, mayor eficiencia y, por lo tanto, menor calentamiento. Así, algunas características importantes de la fuente de alimentación son: Potencia nominal de 100 W, tensión de entrada  $120 V_{CA}$  y tensión de salida  $24 V_{CD}/4.5 A$ .

En las Figuras 2.7(a) y 2.7(b) se muestran la fuente de alimentación conmutada y el arrancador de servomotores empleados, respectivamente. Mientras que en la Figura 2.8 se representan las conexiones del arrancador de servomotores con la fuente de alimentación, el motor de CD y la tarjeta DS1104. En esta figura  $d$  denota la dirección de  $i_c$ . Nótese que GND de la fuente de alimentación y el motor de CD es diferente de GND de la tarjeta DS1104. Para mayor información técnica del arrancador de servomotores veáse el Apéndice B.



(a) Fuente de alimentación conmutada HF100W-SF-24



(b) Arrancador de servomotores AZ12A8DDC

Figura 2.7: Dispositivos que integran el *Subsistema B*: Etapa de potencia.

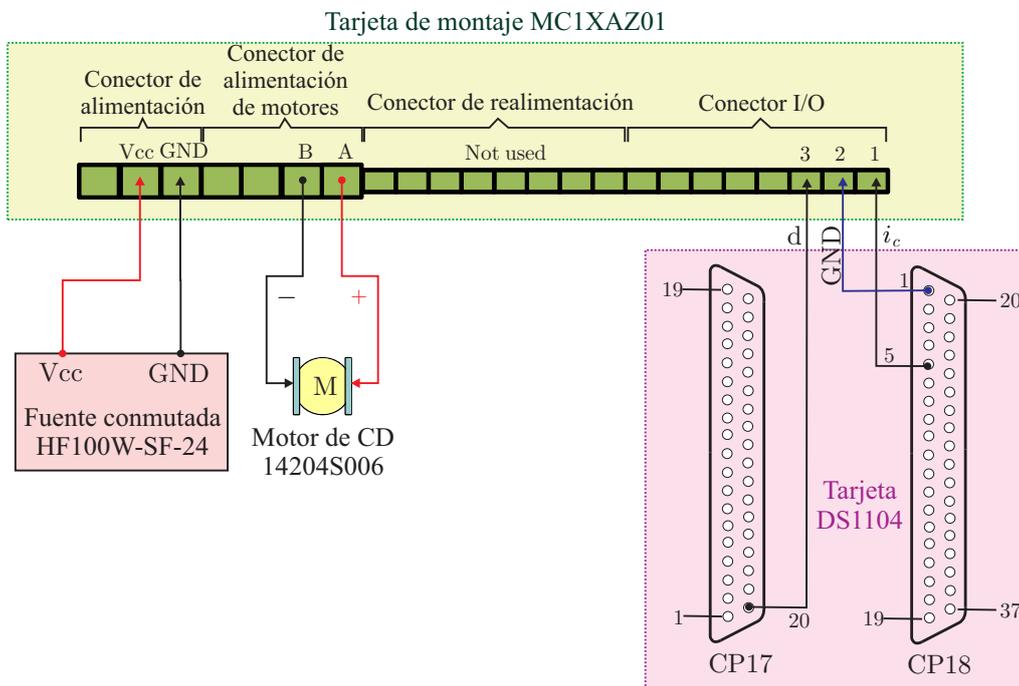


Figura 2.8: Conexiones del arrancador de servomotor a través de la tarjeta de montaje MC1XAZ01.

### 2.2.3. Estructura mecánica

Una vez seleccionados el actuador, los sensores de posición angular y la etapa de potencia, se presenta el CAD de la estructura mecánica del prototipo. Subsecuentemente, se trata la manufactura de cada parte diseñada.

#### Diseño asistido por computadora

El brazo, péndulo y base de la estructura fueron dibujados y ensamblados, virtualmente, con SolidWorks. Este software incluye funciones que facilitan el modelado de partes mecánicas, crear ensamblajes y generar planos fácil y rápidamente. También, permite especificar las propiedades del material usado en cada parte mecánica.

**Brazo.** En el diseño del brazo se tomaron en cuenta las conexiones con la flecha del motor de CD, péndulo y encoder del péndulo. Los elementos mecánicos que componen al brazo se muestran en la Figura 2.9.

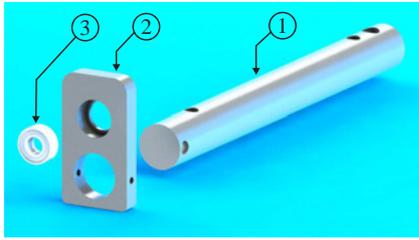


Figura 2.9: Vista explosionada del brazo.

La descripción de los elementos mostrados en la Figura 2.9 es la siguiente:

- ① **Barra del brazo.** Fue diseñada considerando aluminio como material. Con el propósito de ensamblar el brazo sobre la flecha del motor de CD, en uno de los extremos del brazo se realizó una perforación y dos barrenos M3. También, para colocar y a la vez esconder el cable del encoder del péndulo, en ambos extremos de la barra del brazo se realizaron dos perforaciones y un desbaste longitudinal entre estas perforaciones.
- ② **Sujetador de encoder.** Este elemento fue diseñado en aluminio y tiene cuatro cortes. Dos de ellos sirven para unir este elemento a la barra del brazo. Los otros dos cortes fueron hechos para colocar a presión el rodamiento de bolas SKF 628/6-2z.
- ③ **Rodamiento de bolas.** Este corresponde a un modelo SKF 628/6-2z, obtenido de una librería de SolidWorks. Se monta sobre ② para conectar el péndulo con el encoder ITD01A4Y1, permitiendo el libre movimiento del péndulo.

**Péndulo.** Esta parte fue diseñada tomando en cuenta su conexión con el encoder ITD01A4Y1, el cual no tiene flecha. En la Figura 2.10 se presenta una vista explosionada de los elementos que componen al péndulo.



Figura 2.10: Vista explosionada del péndulo.

La descripción de cada elemento mostrado en la Figura está como sigue:

- ④ **Tubo del péndulo.** Este elemento es un tubo de aluminio.
- ⑤ **Placa del péndulo.** Para este elemento se seleccionó aluminio y se consideró una perforación en el centro de la placa.

- ⑥ **Flecha del péndulo.** Este consiste de una flecha de aluminio, la cual tiene tres diámetros diferentes. Un diámetro es usado para montar la flecha en la perforación asociada con la placa del péndulo, es decir, ⑤. Mientras que un segundo diámetro es empleado para ensamblar la flecha al rodamiento de bolas 628/6-2z, es decir, ③. El tercer diámetro tiene que ser ensamblado en la cavidad que posee el encoder ITD01A4Y1.

**Base de la estructura.** En el diseño de esta parte se consideraron los elementos mostrados en la Figura 2.11, los cuales se describen a continuación.

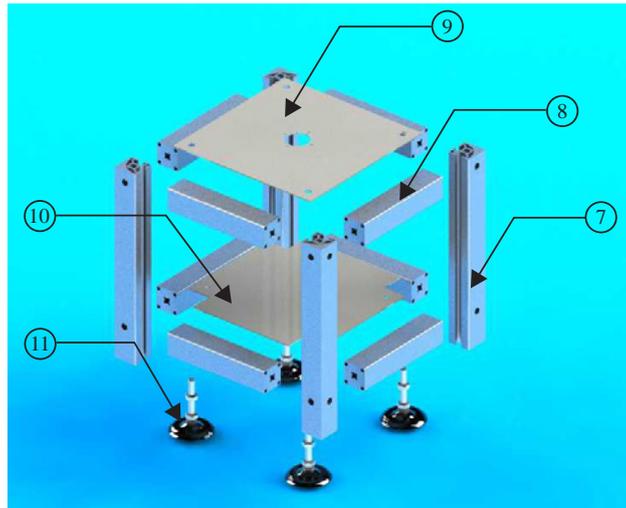


Figura 2.11: Vista explosionada de la base de la estructura.

- ⑦ **Perfiles verticales.** Son cuatro perfiles estructurales de 250 mm, conseguidos por medio de un corte a la medida de un perfil tubular fabricado por Bosh Rexroth en el modelo 30x30 2SA.
- ⑧ **Perfiles horizontales.** Son ocho perfiles estructurales del mismo modelo que los verticales pero con una longitud de 140 mm. Estos perfiles mantienen separados a los perfiles verticales y proveen estabilidad estructural al prototipo.
- ⑨ **Lámina superior.** Lámina de acero inoxidable con un largo y ancho de 200 mm. Tiene cuatro perforaciones de 8 mm, las cuales sirven para fijarla a unos perfiles verticales. También, tiene un corte circular de 30 mm de diámetro y cuatro perforaciones de 4 mm para sujetar el motor de CD 14204S006.
- ⑩ **Lámina inferior.** Es una lámina de acero inoxidable con longitud y ancho de 200 mm. Posee cortes lineales en las esquinas y dos perforaciones M3 que sirven para sujetarla a dos perfiles horizontales. Además, se usa para sujetar los dispositivos electrónicos de la etapa de potencia.
- ⑪ **Patas niveladoras.** Son utilizadas para nivelar la estructura mecánica sobre una superficie, lo cual permite evitar movimientos indeseados del prototipo.

Finalmente, el ensamble virtual del brazo, péndulo, base de la estructura y *Subsistema A* se presenta en la Figura 2.12.

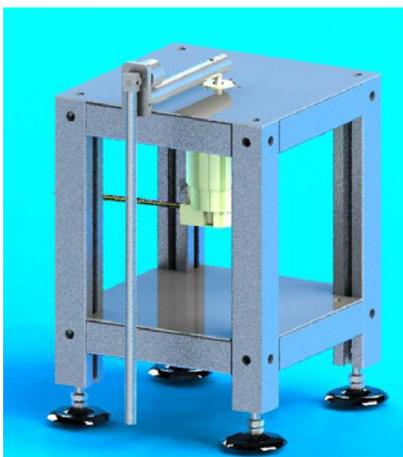


Figura 2.12: CAD de la estructura mecánica y el *Subsistema A*.

### Manufactura de partes

En este apartado se introduce el proceso de manufactura de los elementos mecánicos diseñados en 2.2.3. Para tal fin, se usaron los materiales enumerados en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2: Materiales mecánicos

No. de elemento	Material
①	T-6061 redondo, $D = 15.9$ mm
②	T-6061 placa de 6.4 mm
④	T-6061 tubo, $OD = 9.5$ mm
⑤	T-6061 placa de 6.4 mm
⑥	AISI C-1018 redondo $D = 12.7$ mm
⑦-⑧	Perfil estructural Bosch Rexroth $30 \times 30$ 2SA
⑨-⑩	Lámina de acero inoxidable #16

**Brazo.** En la construcción del brazo, desde que el rodamiento de bolas, es decir ③, es un modelo comercial, solo se manufacturaron la barra del brazo y el sujetador del encoder del péndulo.

- ① **Barra del brazo.** Fue manufacturada de una barra redonda de aluminio T-6061. Las perforaciones y los barrenos M3 de este elemento fueron llevados a cabo con una fresadora y brocas de 5 y 2.5 mm, respectivamente. Las cuerdas de los barrenos fueron realizadas con un machuelo M3.
- ② **Sujetador del encoder.** Se usó la placa de aluminio T-6061. Los bordes de la placa fueron alineados y desbastados, hasta conseguir las longitudes especificadas en los planos, mediante el uso de una fresadora y una fresa. Después, con diferentes fresas, se realizaron los cortes circulares. Mientras que el barreno y su cuerda fueron hechos con una broca de 2.5 mm y un machuelo M3, respectivamente.

Cuando se conectaron la barra del brazo, el sujetador de encoder y el rodamiento de bolas se obtuvo el brazo del PF mostrado en la Figura 2.13.

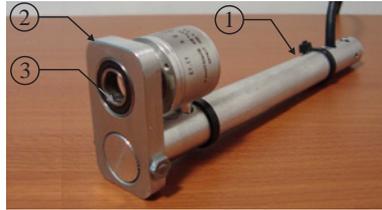


Figura 2.13: Brazo construido y encoder del péndulo.

**Pendulum.** Los tres elementos que componen al péndulo fueron manufacturados como sigue:

- ④ **Tubo del péndulo.** Este elemento corresponde al tubo de aluminio T-6061.
- ⑤ **Placa del péndulo.** Fue manufacturada de la placa de aluminio T-6061. Ayudados de una fresadora, brocas y fresas, este elemento fue alineado, perforado y desbastado hasta conseguir las dimensiones especificadas en el plano.
- ⑥ **Flecha del péndulo.** Fue obtenido de la barra redonda AISI C-1018. Para conseguir los tres diferentes diámetros especificados en el CAD de este elemento, se hizo un desbaste con una torno y un buril.

Al ensamblar los tres elementos ④-⑥, se logró el péndulo construido que se puede ver en la Figura 2.14.



Figura 2.14: Péndulo construido.

**Base de la estructura.** Para la construcción de la base de la estructura, desde que las patas niveladoras, es decir ⑪, fueron adquiridas en un modelo comercial, solo se manufacturaron los siguientes elementos:

- ⑦ **Perfiles verticales.** Fueron hechos del perfil estructural Bosch Rexroth  $30 \times 30$  2SA, a través de un simple corte a la medida, esto es, 250 mm de largo.
- ⑧ **Perfiles horizontales.** Fueron hechos del perfil estructural Bosch Rexroth  $30 \times 30$  2SA con una longitud de 140 mm.
- ⑨-⑩ **Lámina superior y Lámina inferior.** Fueron generadas de la lámina de acero inoxidable #16, a través de perforaciones y cortes lineales y circulares.

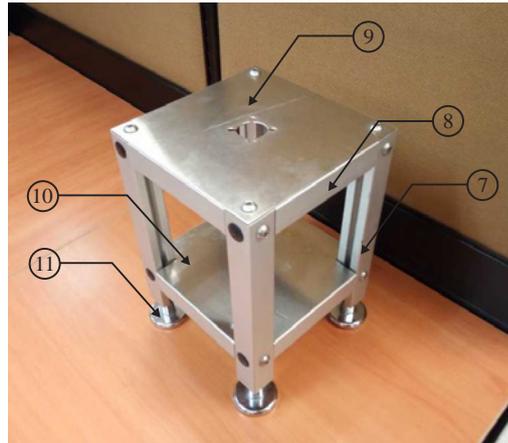


Figura 2.15: Base de la estructura construida.

Después de ensamblar los elementos ⑦-⑪, se consiguió la base de la estructura mostrada en la Figura 2.15.

De esta manera, la integración del *Subsistema C* (estructura mecánica) con el *Subsistema A* (actuador y sensores) y el *Subsistema B* (etapa de potencia) se presenta en la Figura 2.16.

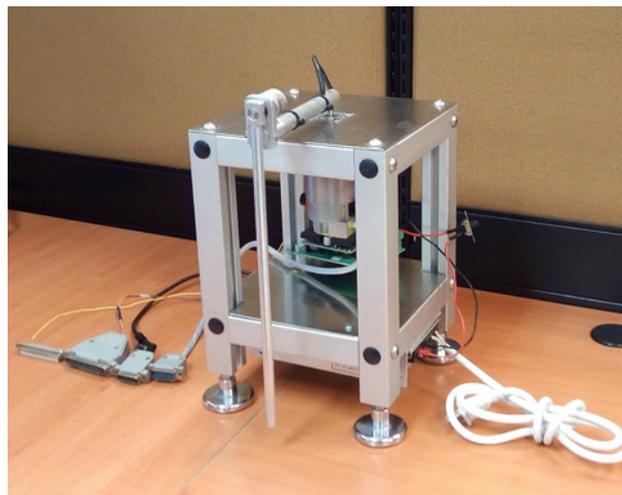


Figura 2.16: *Subsistemas A, B y C* reales del prototipo de PF.

#### 2.2.4. Adquisición y procesamiento de datos

El subsistema adquisición y procesamiento de datos del prototipo reconfigurable está integrado por Matlab-Simulink, ControlDesk y una tarjeta DS1104 de dSPACE. ControlDesk, permite la interacción entre Matlab-Simulink y la tarjeta DS1104. Así, el *Subsistema D* permite implementar controladores para el prototipo; así como adquirir y procesar los datos de los encoders. Es importante señalar que otras tarjetas compatibles con Matlab-Simulink pueden emplearse en lugar de la tarjeta DS1104, tales como las tarjetas de desarrollo de Arduino, Sensoray, Raspberry Pi, etc. Actualmente, tales tarjetas de desarrollo son de bajo costo y son parte del equipo básico en laboratorios de

mecatrónica y sistemas de control. La hoja de datos técnicos de la tarjeta DS1104 puede encontrarse en el Apéndice B.

Habiendo llevado a cabo las conexiones electrónicas y el ensamble mecánico entre los *Subsistemas A* (actuador y sensores), *B* (etapa de potencia), *C* (estructura mecánica) y *D* (adquisición y procesamiento de datos), se obtuvo el prototipo final del PF presentado en la Figura 2.17.

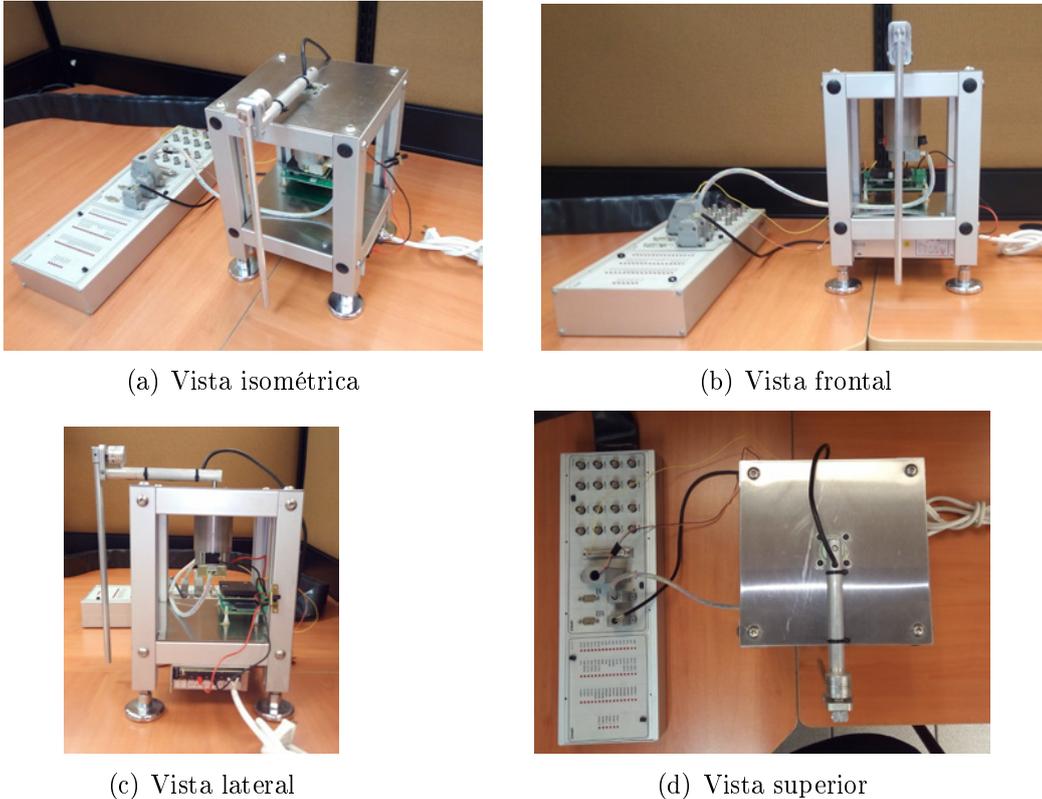


Figura 2.17: Prototipo final del PF.

### 2.2.5. Parámetros del prototipo

Desde que en la simulación e implementación experimental de los controles se requiere conocer todos o algunos de los parámetros de la planta, la identificación de los parámetros del PF construido se realiza en esta sección. Esto es logrado mediante el uso de dispositivos básicos de medición y formulas matemáticas, de manera que la identificación de parámetros aquí presentada es fácil si se compara con [274] y [275].

La longitud del brazo  $L_0 = 141.4 \times 10^{-3}$  m y la longitud del péndulo  $L_1 = 295 \times 10^{-3}$  m fueron obtenidos con un vernier. Dividiendo  $L_1$  entre 2, se encontró  $l_1 = 147.5 \times 10^{-3}$  m. Además, mediante el uso de una báscula se obtuvieron las masa del brazo  $m_0 = 0.065$  kg y la masa del péndulo  $m_1 = 0.038$  kg. Con estos valores, se calculó la inercia del brazo más la de la flecha del motor de CD  $I_0$  y la inercia del péndulo  $J_1$ . Por otro lado,  $I_0$  se encontró como sigue:

$$I_0 = I_a + I_m,$$

donde  $I_a$  e  $I_m$  denotan la inercia del brazo más la inercia de la flecha del motor de CD, respectivamente. De acuerdo a [269], desde que el brazo es considerada como una barra uniforme cuyo eje de rotación pasa por uno de sus extremos, la inercia del brazo está determinada por:

$$I_a = \frac{1}{3}m_0L_0^2 = 0.4332 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Mientras  $I_m = 2.6 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  fue tomado de la hoja de datos del motor de CD (ver Apéndice B). En consecuencia,

$$I_0 = 0.4592 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Por otro lado, considerando que el péndulo es una barra uniforme que gira alrededor de su centro de masa,  $J_1$  se encuentra como:

$$J_1 = \frac{1}{12}m_1L_1^2 = 0.2755 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Así, los parámetros del prototipo de PF se presentan en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3: Parámetros del prototipo de PF construido.

$L_0 = 141.4 \times 10^{-3} \text{ m}$
$I_0 = 0.4592 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$m_1 = 0.038 \text{ kg}$
$l_1 = 147.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
$J_1 = 0.2755 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

La verificación de los parámetros del prototipo se llevó a cabo como en [4], Cap. 2. Primeramente, se efectuó un experimento con el brazo fijo y maniobrando el péndulo como un péndulo simple. Los resultados de este experimento se muestran en la Figura 2.18(a). De este experimento se obtuvo la frecuencia natural del péndulo  $\omega_{n_p}$  como sigue:

$$\omega_{n_p} = \frac{2\pi r}{t_2 - t_1} = \frac{2\pi (5)}{48.61 \text{ s} - 44.12 \text{ s}} = 6.9813 \text{ rad/s},$$

donde  $r$  es el número de oscilaciones en el intervalo comprendido entre  $t_1$  y  $t_2$ . Por otro lado, se obtuvo la frecuencia natural teórica del péndulo  $\omega_{tn_p}$  como se explica enseguida. Después de despreciar la dinámica del brazo y considerando  $\sin(\theta_1) \approx \theta_1$  para valores pequeños de  $\theta_1$ , la segunda ecuación de movimiento del PF (2.11) se reduce a:

$$\ddot{\theta}_1 - \frac{m_1gl_1}{(m_1l_1^2 + J_1)}\theta_1 = 0, \quad (2.36)$$

donde  $\theta_1 = \pi + \theta_d$ , con  $\theta_d$  siendo la posición del péndulo medida con respecto a su posición colgante. Esta es la posición con respecto a la cual se midieron las oscilaciones en la Figura 2.18(a). Esto implica un cambio de signo en el segundo término de (2.36). Así, se determina  $\omega_{tn_p}$  como:

$$\omega_{tn_p} = \sqrt{\frac{m_1gl_1}{(m_1l_1^2 + J_1)}}. \quad (2.37)$$

Cuando se usan los valores de la Tabla 2.3 en (2.37), se encuentra  $\omega_{tn_p} = 7.0629$  rad/s. Subsecuentemente, un experimento similar al previo fue realizado para el brazo. Para este fin, el brazo fue configurado para moverse en el plano vertical, no se le aplicó par y se desmontó el péndulo del mecanismo. Los resultados del experimento se muestran en la Figura 2.18(b), de la cual se obtuvo la frecuencia natural del brazo como  $\omega_{n_a} = 9.3333$  rad/s. Procediendo de manera similar como en el caso del péndulo, se encontró que la frecuencia natural teórica del brazo está dada por:

$$\omega_{tn_a} = \sqrt{\frac{m_0 g L_0}{2I_0}}, \quad (2.38)$$

donde  $m_0 = 0.065$  kg es la masa del brazo. Después de reemplazar los valores numéricos de la Tabla 2.3 en (2.38), se encuentra lo siguiente:

$$\omega_{tn_a} = 9.9083 \text{ rad/s}. \quad (2.39)$$

Nótese que  $\omega_{n_p} \approx \omega_{tn_p}$  y  $\omega_{n_a} \approx \omega_{tn_a}$ . Esto corrobora la adecuada medición de  $L_0$ ,  $l_1$ ,  $m_0$  y  $m_1$ , y el adecuado cálculo de  $I_0$  y  $J_1$ .

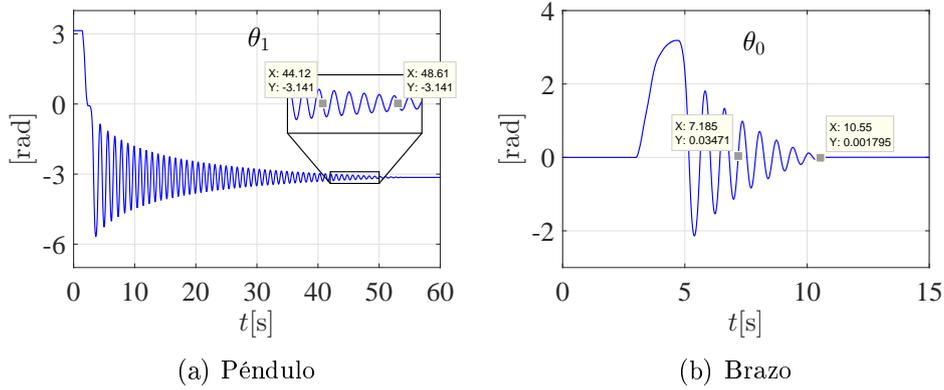


Figura 2.18: Posición del péndulo y del brazo cuando son afectados sólo por la gravedad.

## 2.3. Controlador para *swing-up* más estabilización

Con la intención de resolver los problemas de *swing-up* y estabilización del PF, esta sección presenta: i) Un control no lineal,  $\tau_{sw}$ , basado en energía, el cual fue reportado en [6, 7] y cuya validación experimental no ha sido reportada hasta ahora. Este control permite llevar el péndulo desde la posición colgante ( $\theta_1 = \pm\pi$ ) hasta la posición invertida ( $\theta_1 \approx 0$ ). ii) Un control por realimentación del vector de estado  $\tau_s$ , el cual es utilizado para estabilizar el péndulo en la posición invertida.

### 2.3.1. Control no lineal para levantar el péndulo (*swing-up*)

Para levantar el péndulo desde la posición colgante hasta la posición invertida, se utiliza el control no lineal reportado en [6, 7]. Tal control está basado en el enfoque de

energía y fue obtenido a través del modelo no lineal (2.17)–(2.18). El control en cuestión está determinado por:

$$\tau_{sw} = \frac{-k_\omega F(q_F, \dot{q}_F) - \det[\mathbf{D}(\mathbf{q}_F)] (k_\delta \dot{\theta}_0 + k_\theta \theta_0)}{\det[\mathbf{D}(\mathbf{q}_F)] k_E E(q_F, \dot{q}_F) + k_\omega (J_1 + m_1 l_1^2)}, \quad (2.40)$$

donde  $\mathbf{D}(\mathbf{q}_F)$  y  $\mathbf{q}_F$  fueron establecidas previamente como:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_F) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & m_1 l_1^2 + J_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_F = [\theta_0, \theta_1]^T,$$

mientras que  $F(q_F, \dot{q}_F)$  y  $E(q_F, \dot{q}_F)$  están, respetivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} F(q_F, \dot{q}_F) &= -(J_1 + m_1 l_1^2) m_1 l_1^2 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} m_1^2 l_1^3 L_0 \cos \theta_1 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0^2 + \\ &\quad + (J_1 + m_1 l_1^2) m_1 l_1 L_0 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - m_1^2 l_1^2 L_0 g \cos \theta_1 \sin \theta_1, \\ E(q_F, \dot{q}_F) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_F^T \mathbf{D}(\mathbf{q}_F) \dot{\mathbf{q}}_F + m_1 g l_1 (\cos \theta_1 - 1), \end{aligned}$$

por último  $k_\omega$ ,  $k_\delta$ ,  $k_\theta$  y  $k_E$  son constantes estrictamente positivas. Es de importancia mencionar que (2.40) tiene que satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{k_\omega}{k_E} > 2m_1 g l_1 (I_0 + m_1 l_1^2 + m_1 L_0^2). \quad (2.41)$$

### 2.3.2. Control lineal para estabilizar el péndulo

Para la estabilización del péndulo alrededor de la posición invertida, se presenta el control por realimentación del vector de estado  $\tau_s$  obtenido mediante el uso del modelo lineal (2.26)–(2.27).

Recuérdese que, a partir de la siguiente desigualdad:

$$\det C_0 = \frac{m_1^4 g^2 l_1^4 L_0^2}{(J_1 m_1 L_0^2 + I_0 m_1 l_1^2 + I_0 J_1)^4} \neq 0$$

se ha establecido que la aproximación lineal (2.26)–(2.27) del modelo no lineal (2.17)–(2.18) es controlable. En consecuencia, para conseguir estabilizar el péndulo en la posición invertida, es decir:

$$(\theta_0, \dot{\theta}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1) \rightarrow (\bar{\theta}_0, \bar{\dot{\theta}}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\dot{\theta}}_1) = (0, 0, 0, 0), \quad (2.42)$$

se puede emplear el siguiente control por realimentación del vector de estado:

$$\tau_\delta = -K_c x_\delta, \quad (2.43)$$

donde

$$K_c = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4],$$

con  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  siendo las ganancias del control. Retomando (2.25), (2.43) puede escribirse como sigue:

$$\tau_s = -k_1 \theta_0 - k_2 \dot{\theta}_0 - k_3 \theta_1 - k_4 \dot{\theta}_1. \quad (2.44)$$

Así, el sistema (2.26)–(2.27) en lazo cerrado con (2.43) está dado por:

$$\dot{x}_\delta = (A - BK_c) x_\delta, \quad (2.45)$$

cuyo polinomio característico resulta en lo siguiente:

$$\begin{aligned} p(s) &= \det [sI - (A - BK_c)] \\ &= s^4 + \frac{(l_1^2 m_1 + J_1) k_2 - k_4 L_0 l_1 m_1}{I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2} s^3 \\ &\quad + \frac{(l_1^2 m_1 + J_1) k_1 - k_3 L_0 l_1 m_1 - (I_0 + L_0^2 m_1) g l_1 m_1}{I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2} s^2 \\ &\quad - \frac{g l_1 m_1 k_2}{I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2} s - \frac{g l_1 m_1 k_1}{I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Con la intención de asegurar que (2.46) sea estable, es igualado con una dinámica que de antemano se sabe que es estable. Tal dinámica se refiere al siguiente polinomio característico deseado:

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^2 \\ &= s^4 + 4\zeta\omega_n s^3 + (4\zeta^2\omega_n^2 + 2\omega_n^2) s^2 + 4\zeta\omega_n^3 s + \omega_n^4, \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural, los cuales tiene que satisfacer

$$\zeta > 0, \quad \omega_n > 0.$$

Después de igualar (2.46) con (2.47) y resolver para  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$ , se encuentra:

$$k_1 = -\frac{\omega_n^4 [I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2]}{g l_1 m_1}, \quad (2.48)$$

$$k_2 = -\frac{4\zeta\omega_n^3 [I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2]}{g l_1 m_1}, \quad (2.49)$$

$$k_3 = \frac{-(4\zeta^2\omega_n^2 + 2\omega_n^2) [I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2] + (l_1^2 m_1 + J_1) k_1 - (I_0 + L_0^2 m_1) g l_1 m_1}{L_0 l_1 m_1} \quad (2.50)$$

$$k_4 = \frac{-4\zeta\omega_n [I_0 (J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2] + (l_1^2 m_1 + J_1) k_2}{L_0 l_1 m_1}. \quad (2.51)$$

Si bien lo anterior sirve como directriz para encontrar las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  de tal manera que el sistema en lazo cerrado sea estable, esto no asegura éxito en la implementación del control. De forma que la búsqueda del buen desempeño del control implica elegir ciertos valores para  $\zeta$  y  $\omega_n$  y probarlos –vía simulación o experimentación– hasta que el control logre su objetivo. En otras palabras, se tiene que emplear el método de prueba y error. Esto conlleva invertir tiempo hombre considerable en la sintonización de ganancias, a menos que se tenga amplio conocimiento y experiencia en sistemas de control. El problema se complica aún más cuando se busca que el control tenga un mejor desempeño (una mejor sintonización de ganancias); además, porque para comparar el desempeño de controles es necesario utilizar métodos especializados [276]. En esa dirección, se realizó una aplicación basada en cómputo paralelo para sintonizar las ganancias –de forma fácil y rápida– del control lineal que estabiliza el péndulo de Furuta en la posición invertida [277]. En tal aplicación se hace uso de las expresiones (2.48)–(2.51).

### 2.3.3. Simulación numérica

La simulación de los controles (2.40) y (2.44), los cuales resuelven el *swing-up* y estabilización del péndulo, respectivamente, se realiza al integrarlos en un controlador híbrido que obedece la siguiente condición de conmutación:

$$\tau_F = \begin{cases} \tau_{sw} & \text{para } \sqrt{2\theta_1^2 + 0.2\dot{\theta}_1^2} > 0.4, \\ \tau_s & \text{para } 0 \leq \sqrt{2\theta_1^2 + 0.2\dot{\theta}_1^2} \leq 0.4, \end{cases} \quad (2.52)$$

En la Figura 2.19 se muestra un diagrama de bloques del controlador (2.52).

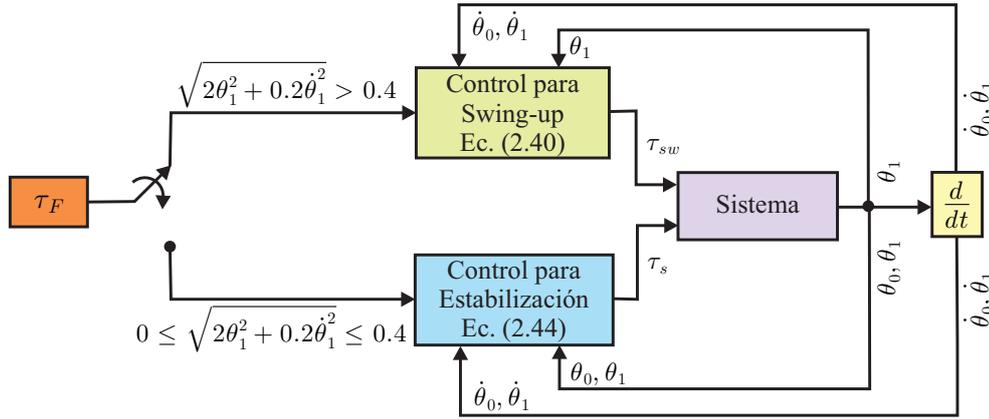


Figura 2.19: Diagrama de bloques del controlador híbrido (2.52).

La simulación numérica del sistema en lazo cerrado con el controlador (2.52), es decir, (2.40) más (2.44), se llevó a cabo a través del diagrama de bloques mostrado en la Figura 2.20. Tal diagrama fue realizado en Matlab-Simulink, el cual consiste de tres bloques, a saber: *Controlador*, *Sistema* y *Salidas*. La descripción de estos bloques se da a continuación.

- *Controlador*. Este bloque corresponde a un Matlab Function [278], donde se programa el controlador híbrido (2.52). Las ganancias asociadas con el control  $\tau_{sw}$  fueron seleccionados como:

$$k_\omega = 0.75, \quad k_\delta = 5, \quad k_\theta = 35, \quad k_E = 2900. \quad (2.53)$$

Mientras que las ganancias relativas al control  $\tau_s$ , i.e.,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  fueron calculadas al escoger  $\zeta = 2$  y  $\omega_n = 9$  en (2.47), obteniendo lo siguiente:

$$k_1 = -0.0854, \quad k_2 = -0.0759, \quad k_3 = -1.5197, \quad k_4 = -0.1706.$$

- *Sistema*. En este bloque es un Matlab Function, en el cual se programa el modelo dinámico del PF, (4.14). Donde se usaron los parámetros de la Tabla 2.3 del PF construido.
- *Salidas*. Se refiere a los bloques que en el ambiente de Matlab-Simulink son llamados *to workspace*, en los cuales se almacenan arreglos de datos asociados con la evolución dinámica de las variables del sistema  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_0$ ,  $\dot{\theta}_1$  y del control  $\tau$ .

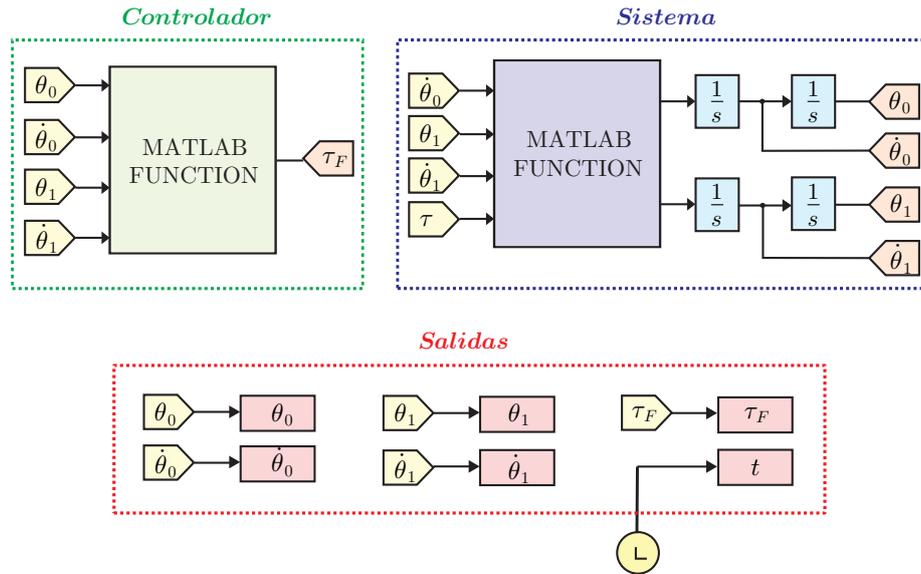


Figura 2.20: Diagrama de bloques en Matlab-Simulink para la simulación del PF en lazo cerrado.

En la simulación, el tiempo de muestreo y el solucionador empleados fueron 1 ms y ode1(Euler), respectivamente. La Figura 2.21 muestra los resultados de la simulación. En esa figura, se puede ver que el objetivo de control es logrado exitosamente; pues el péndulo es llevado desde la posición colgante ( $\theta_1 = \pi$ ) hasta la posición invertida ( $\theta_1 = 0$ ) y es estabilizado en esta última.

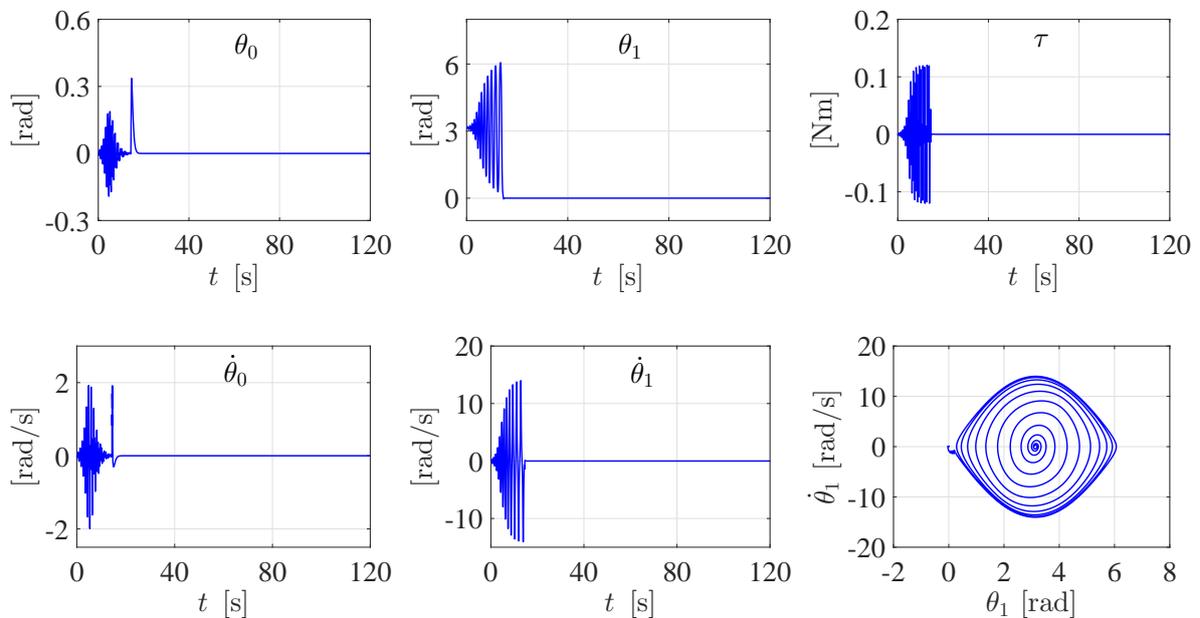


Figura 2.21: Resultados de simulación del PF en lazo cerrado con el controlador híbrido (2.52).

### 2.3.4. Implementación experimental

Con la intención de implementar experimentalmente el controlador (2.52), (2.40) más (2.44), la Figura 2.22 muestra la interacción entre el programa realizado en Matlab-Simulink y el prototipo construido de PF. Para la experimentación, se usaron el mismo tiempo de muestro y solucionador de la simulación. Las diferencias entre la Figura 2.22 y la Figura 2.20 se explican a continuación.

- *Sistema.* En experimentación este bloque es reemplazado por el prototipo construido. Así, el encoder ITD01A4Y1 de Baumer junto con un canal para encoder de la tarjeta DS1104 permiten sensar  $\theta_1$  y calcular  $\dot{\theta}_1$ . Mientras que  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$  son obtenidas a través del encoder integrado al motor de CD 14204S006 Pittman y otro canal para encoder de la tarjeta DS1104. La corriente conmutada  $i_c$  se implementa vía un PWM de la tarjeta DS1104 con una frecuencia de conmutación de 15 kHz, mientras la dirección de la flecha del motor de CD es indicada por medio de un bit de salida de la tarjeta DS1104.
- *Acondicionador de la entrada.* Este bloque no aparece en la Figura 2.20 porque ahí  $\tau_F$  es directamente aplicado al sistema (4.14). Sin embargo, en experimentación la aplicación de  $\tau_F$  al prototipo requiere un acondicionamiento. Por lo tanto, este bloque tiene dos funciones:
  - i) Transformar el par dado por (2.52) en una corriente continua a través de la siguiente relación:

$$\tau_F = k_i i_m^*, \quad (2.54)$$

donde  $k_i$  e  $i_m^*$  son la constante de par y la corriente deseada de armadura del motor de CD, respectivamente. De (2.54) es claro que

$$i_m^* = \frac{\tau_F}{k_i}. \quad (2.55)$$

Nótese que  $i_m^*$  puede tomar valores en el intervalo  $[-i_{max}, +i_{max}]$ , con  $i_{max}$  siendo la corriente máxima del motor de CD. Para propósitos de implementación de  $i_m^*$  vía un PWM, es decir, obtener la corriente conmutada  $i_c$ , la correspondiente corriente promedio  $i_{av}$  es obtenida usando

$$i_{av} = \left| \frac{i_m^*}{i_{max}} \right|, \quad (2.56)$$

donde esta corriente puede tomar valores en el intervalo  $[0, 1]$  y está asociada con el ciclo de trabajo del PWM.

- ii) Determinar la dirección de  $i_m^*$  y en consecuencia la dirección de la flecha del motor de CD, indicada en la Figura 2.22 como d. Para este fin, se considera la siguiente condición:

$$d = \begin{cases} 1 & \text{para } i_m^* \geq 0, \\ 0 & \text{para } i_m^* < 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

Los resultados de la implementación experimental del control se muestra en la Figura 2.23. Estos resultados muestran que el objetivo de control se logra exitosamente.

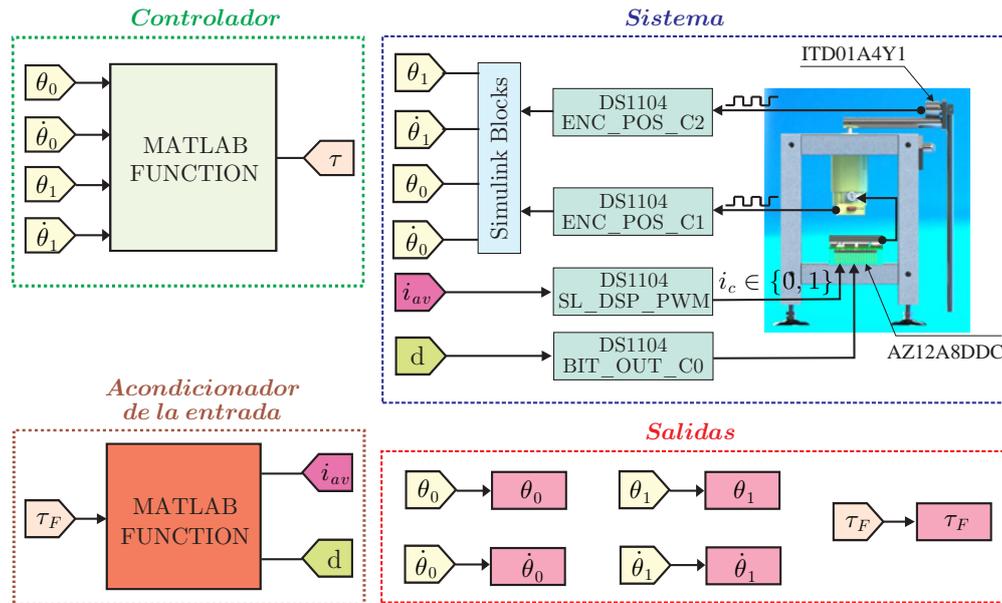


Figura 2.22: Diagrama de bloques de Matlab-Simulink para la experimentación del PF en lazo cerrado.

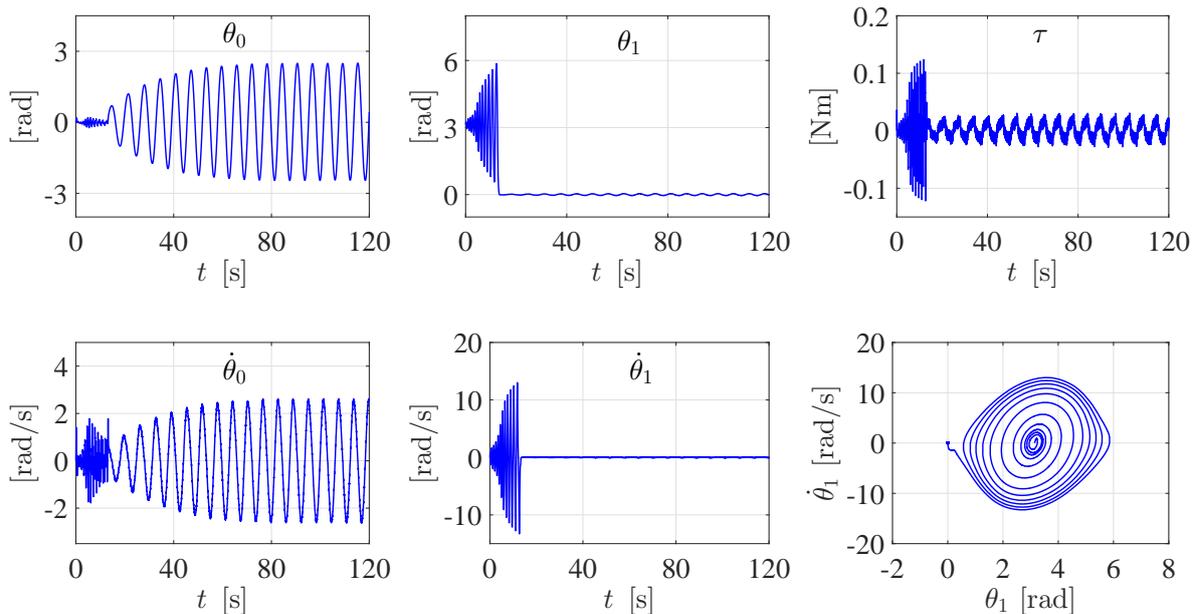


Figura 2.23: Resultados experimentales del PF en lazo cerrado con el controlador híbrido (2.52).

### 2.3.5. Discusión de resultados

Dado que se encontraron diferencias entre los resultados de simulación y experimentación, este apartado da algunos argumentos que explican estas diferencias.

Los resultados obtenidos de la simulación y experimentación muestran que los controles (2.40) y (2.44) tienen buen desempeño, porque el objetivo de control fue logrado, es decir, llevar el péndulo desde la posición colgante hasta la posición invertida. Una vez

en esta última posición, el péndulo fue estabilizado. Sin embargo, se encontraron diferencias notables entre la simulación y la experimentación cuando se estabiliza el brazo y el péndulo. En experimentación estas barras presentan oscilaciones. Esto es principalmente debido a lo siguiente: 1) En el modelo simulado del PF las fuerzas de fricción no son consideradas, y 2) En experimentación los controles son aplicados al motor de CD como una relación de corriente a través de la etapa de potencia, cuyos dispositivos electrónicos no son ideales. Otros factores que afectan el comportamiento del sistema, causando diferencias entre la simulación y la experimentación, son: El tiempo de muestreo, la resolución de los encoders, la frecuencia de conmutación del PWM, tiempo de respuesta de los dispositivos electrónicos, conexiones de hardware y el cable del encoder del péndulo, el cual está colocado de tal forma que ofrece una resistencia al movimiento del brazo.

## 2.4. Esquemas de control para eliminar el ciclo límite

En la Sección 2.3.2 se ha presentado un control lineal por realimentación del vector de estado, cuyas ganancias se escogieron con una sola directriz, la de satisfacer un polinomio característico deseado; es decir, colocar los polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo del plano complejo, pero sin conocer donde se ubican los polos de lazo cerrado. Por lo tanto, tratar de mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado podría resultar en una tarea difícil. Por otro lado, los resultados experimentales de la Figura 2.23, asociados a la implementación del control lineal (2.44), han mostrado que existen oscilaciones en el sistema; es decir, existe un fenómeno conocido como ciclo límite causado por la zona muerta inducida por fricción estática en la flecha del motor. Con la intención de proporcionar un material útil para la selección de ganancias del control lineal por realimentación del vector de estado y para mejorar su desempeño mediante la eliminación del ciclo límite, en los siguientes apartados se introducen dos esquemas de control que hacen uso del modelo de planitud diferencial del PF, el cual se ha presentado en la Sección 2.1.3. El diseño de un esquema de control está basado en el lugar de las raíces y el otro diseño en diagramas de Bode. Siendo estos esquemas de control las contribuciones principales del presente trabajo, reportadas en [268] y [267].

### 2.4.1. Usando planitud diferencial y respuesta en el tiempo: Lugar de las raíces

En este apartado se introduce un esquema de control basado en planitud diferencial y el lugar de las raíces, el cual proporciona información importante sobre como sintonizar las ganancias del control lineal (2.44) para mejorar su desempeño en una dirección en particular; en este caso la eliminación del ciclo límite inducido por fricción estática.

#### Propuesta del esquema de control

Al aplicar la transformada de Laplace al modelo de planitud diferencial (2.35), es decir:

$$y_F^{(4)} = (a + bh)\dot{x}_{\delta 4} = b\ddot{y}_F + d(a + bh)\tau_F,$$

se encuentra la siguiente función de transferencia equivalente a (2.26)–(2.27):

$$\frac{Y_F(s)}{\tau_F(s)} = \frac{d(a + bh)}{s^2(s^2 - b)}, \quad (2.58)$$

donde  $Y_F(s)$  y  $\tau_F(s)$  denotan la transformada de Laplace de la salida plana y el par aplicado, respectivamente. Los polos de esta función de transferencia son reales, dos de ellos localizados en  $s = 0$ , uno en  $s = -\sqrt{b} < 0$  y el otro en  $s = \sqrt{b} > 0$ . Se recuerda que  $a$ ,  $b$  y  $d$  fueron definidas previamente como:

$$a = \frac{-gm_1^2 l_1^2 L_0}{I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2}, \quad b = \frac{(I_0 + m_1 L_0^2)m_1 l_1 g}{I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2},$$

$$d = \frac{-m_1 l_1 L_0}{I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2},$$

siendo  $b$  un número real positivo.

Debido a que  $d(a + bh) = -\frac{m_1 l_1 g}{I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2} < 0$ , se propone el esquema de control multi-lazo mostrado en la Figura 2.24 para controlar (2.58). Esto genera la siguiente función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{Y_F(s)}{Y_d(s)} = \frac{\rho d(a + bh)}{p(s)}, \quad (2.59)$$

donde  $Y_d(s) = 0$  es la salida plana deseada,  $p(s)$  es el polinomio definido como:

$$p(s) = s^4 - d(a + bh)k_v s^3 - [b + \rho d(a + bh)]s^2 - k_d \rho d(a + bh)s - k_p \rho d(a + bh), \quad (2.60)$$

y  $\rho$ ,  $k_v$ ,  $k_d$  y  $k_p$  son las ganancias del controlador. La función de transferencia de los dos lazos internos es:

$$\frac{\ddot{Y}_F(s)}{\ddot{Y}_d(s)} = \frac{\rho d(a + bh)}{s^2 - d(a + bh)k_v s - [b + \rho d(a + bh)]}. \quad (2.61)$$

De (2.61) es claro que una  $d(a + bh)$  negativa hace posible que todos los coeficientes de  $p(s)$  sean positivos. Esta es una condición necesaria (pero no suficiente) para que todas las raíces de  $p(s)$  tengan parte real negativa.

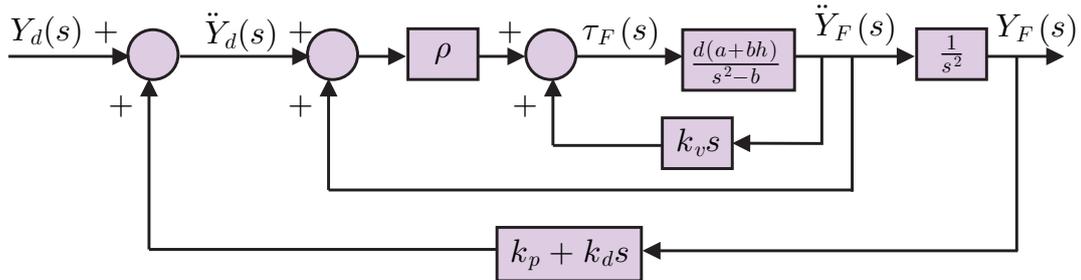


Figura 2.24: Esquema de control propuesto para (2.58).

De acuerdo a la Figura 2.24, y mediante el uso de las expresiones (2.32)–(2.35), se encuentra el siguiente controlador:

$$\begin{aligned}
 \tau_F &= k_v y_F^{(3)} + \rho(\ddot{y}_d + \ddot{y}_F), \\
 &= k_v y_F^{(3)} + \rho(k_p y_F + k_d \dot{y}_F + \ddot{y}_F), \\
 &= \rho k_p x_{\delta 1} + \rho k_d x_{\delta 2} + [\rho(a + bh) + \rho k_p h] x_{\delta 3} + [k_v(a + bh) + \rho k_d h] x_{\delta 4}.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Cuando se compara (2.44) y la última expresión en (2.62), se concluye:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -\rho k_p, \\
 k_2 &= -\rho k_d, \\
 k_3 &= -[\rho(a + bh) + \rho k_p h], \\
 k_4 &= -[k_v(a + bh) + \rho k_d h].
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Así, el vector de ganancias  $K_c = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$  puede ser seleccionado a través de las ganancias del controlador (2.62). El procedimiento para determinar estas últimas ganancias se describe enseguida.

### Procedimiento para sintonizar el esquema de control

Usando los parámetros numéricos de un PF construido en la Facultad de Ingeniería (FI) de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), los cuales son presentados en la Tabla 2.4, se encuentra lo siguiente:

$$d(a + bh) = -1.2186 \times 10^5, \quad b = 93.9951.$$

Teniendo en cuenta estos valores numéricos,  $\rho$  y  $k_v$ , son escogidos de tal manera que todos los coeficientes del polinomio característico en (2.61) sean positivos. Además, como se verá enseguida, es importante que los polos de la función de transferencia (2.61) tengan parte real negativa significativa. Entonces,  $k_v = 2.3755 \times 10^{-4}$  y  $\rho = 00.41$  fueron seleccionados porque esto asigna los polos de (2.61) en  $s_{1,2} = -14.4734 \pm 14.0048j$ . Nótese que aparte de los dos polos en  $s = 0$ , la función de transferencia de la planta (2.59) tiene polos reales en  $s = \pm\sqrt{b} = \pm 9.6951$ . Así, colocar los polos de (2.61) en  $s_{1,2} = -14.4734 \pm 14.0048j$  asegura la estabilidad de esta función y, dada la proximidad de estos polos con aquel en  $s = -\sqrt{b} = -9.6951$ , asegura una respuesta un poco más rápida que la del sistema en lazo abierto. Este es un criterio útil cuando el tiempo de respuesta deseado no está especificado pero una respuesta excesivamente rápida es indeseada para evitar una gran amplificación de ruido. También, nótese que colocando los polos en  $s_{1,2} = -14.4734 \pm 14.0048j$ , se introduce un coeficiente de amortiguamiento de  $\zeta = 0.786$ , el cual es destinado a evitar grandes oscilaciones. Por otra parte, al considerar

$$\frac{\pm 180^\circ(2q + 1)}{n - m}, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $n = 4$  y  $m = 1$ , se encuentra que el lugar de las raíces del diagrama de bloques mostrado en la Figura 2.24 tiene tres asíntotas: En los ángulos  $\pm 60^\circ$  y  $\pm 180^\circ$  con respecto al eje real positivo. Así, se propone  $z = k_p/k_d = 1$  para formar el lugar de las raíces como

se indica en la Figura 2.26. Se resalta que el cero de lazo abierto en  $s = -z$  no es un cero de lazo cerrado como se corrobora por (2.59). Se recuerda que las curvas en la Figura 2.26 son parametrizadas por  $k_d$ , la cual crece de 0 a  $+\infty$ . Por lo tanto,  $k_d$  es escogida tal que los cuatro polos del lazo cerrado están en el semiplano izquierdo del plano complejo. Nótese que es importante para esto que  $s_1$  y  $s_2$  tengan parte real significativa, como se predijo anteriormente. Se encuentra que un buen valor es  $k_d = 2.88$ . Una vez que esta variable es conocida,  $k_p = k_d z = 2.88$  es calculada. Esta selección de ganancias asigna los polos de (2.59) en:

$$-12.1989 \pm 11.8679j, \quad -2.7284, \quad -1.8206.$$

El lugar exacto del lugar de las raíces para este caso es representado en la Figura 2.25, el cual es obtenido usando la siguiente función de transferencia (ver (2.61) y Figura 2.24):

$$\frac{-\rho d(a + bh)}{s^2 - d(a + bh)k_v s - [b + \rho d(a + bh)]} \frac{k_p + k_d s}{s^2}, \quad (2.64)$$

con los valores numéricos en la Tabla 2.4 y las siguientes ganancias del controlador:

$$\begin{aligned} \rho &= 0.0041, & k_v &= 2.3755 \times 10^{-4}, \\ k_d &= 2.88, & k_p &= 2.88. \end{aligned} \quad (2.65)$$

El signo “-” en (2.64) es introducido porque se usa realimentación positiva en el lazo externo de la Figura 2.24.

Tabla 2.4: Parámetros numéricos del prototipo de PF de la FI de la UAQ.

$L_0 = 155 \times 10^{-3} \text{ m}$
$I_0 = 238.49 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$m_1 = 22.18 \times 10^{-3} \text{ kg}$
$l_1 = 129 \times 10^{-3} \text{ m}$
$J_1 = 184.50 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Finalmente, usando la relación (2.63) y los valores numéricos de la Tabla 2.4, se encuentra que el vector de ganancias  $K_c$  del control por realimentación del vector de estado está dado por:

$$K_c = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] = [-0.0118 \quad -0.0118 \quad -0.2742 \quad -0.0298]. \quad (2.66)$$

Lo que se ha presentado hasta aquí muestra como usar el método de el lugar de las raíces para sintonizar el controlador moderno en (2.43).

Desde este punto, cualquier técnica de control clásico puede ser usada para resolver este problema. Como ejemplo de aplicación, el resto de esta sección se enfocará en el uso del método del lugar de las raíces para sintonizar el controlador (2.44) de tal manera que el desempeño sea mejorado cuando un problema de control aparece: Oscilación debido al ciclo límite.

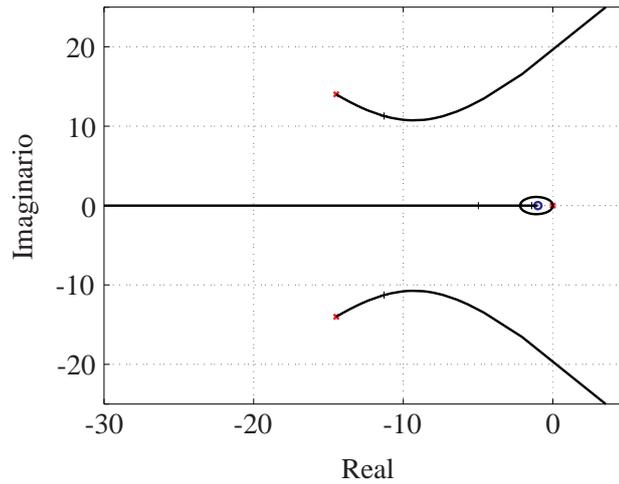


Figura 2.25: Lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto (2.64).

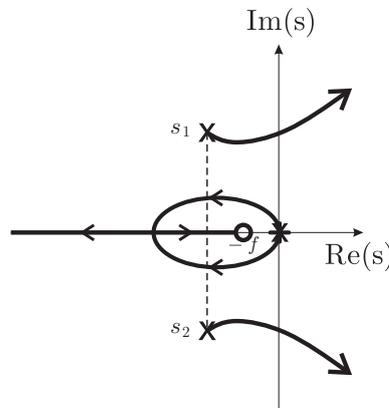


Figura 2.26: Lugar de las raíces del sistema de control de la Figura 2.24.

Con la intención de observar el comportamiento real del prototipo de PF bajo la influencia del controlador propuesto y las ganancias propuestas, se ejecutó un experimento en el que se usó el control (2.40) para llevar el péndulo de la posición colgante a la posición invertida. Para esto se usaron las siguientes ganancias:

$$k_E = 480, \quad k_\omega = 1, \quad k_\delta = 3, \quad k_\theta = 17. \quad (2.67)$$

Los resultados experimentales se muestran en la Figura 2.27, donde  $i_c$  es la corriente eléctrica a través del motor y  $u_f$  es el voltaje aplicado en las terminales del motor. El controlador (2.40) con (2.67) es empleado de  $t = 0$  s a  $t = 8.8$  s, mientras que el controlador (2.44) con (2.66) es empleado para  $t > 8.8$  s. Se puede ver que el péndulo llega a la posición  $\theta_1 = 2\pi$  rad. Desde que  $2\pi$  rad representa la misma posición cuando  $\theta_1 = 0$  rad, esto significa que el péndulo alcanza su posición deseada y permanece ahí. También, se puede observar que el brazo no detiene su movimiento sino que describe una oscilación pico a pico de 0.6 rad alrededor de una posición constante cerca de  $-0.8$  rad. En la Figura 2.27(c) se muestra únicamente la parte del tiempo cuando el controlador de estabilización (2.44) con (2.66) es ejecutado. Nótese en esa figura que  $y_F$  y  $x_{\delta 1}$  permanecen cerca una de la otra durante la oscilación debido a que  $hx_{\delta 3}$  está cerca de cero

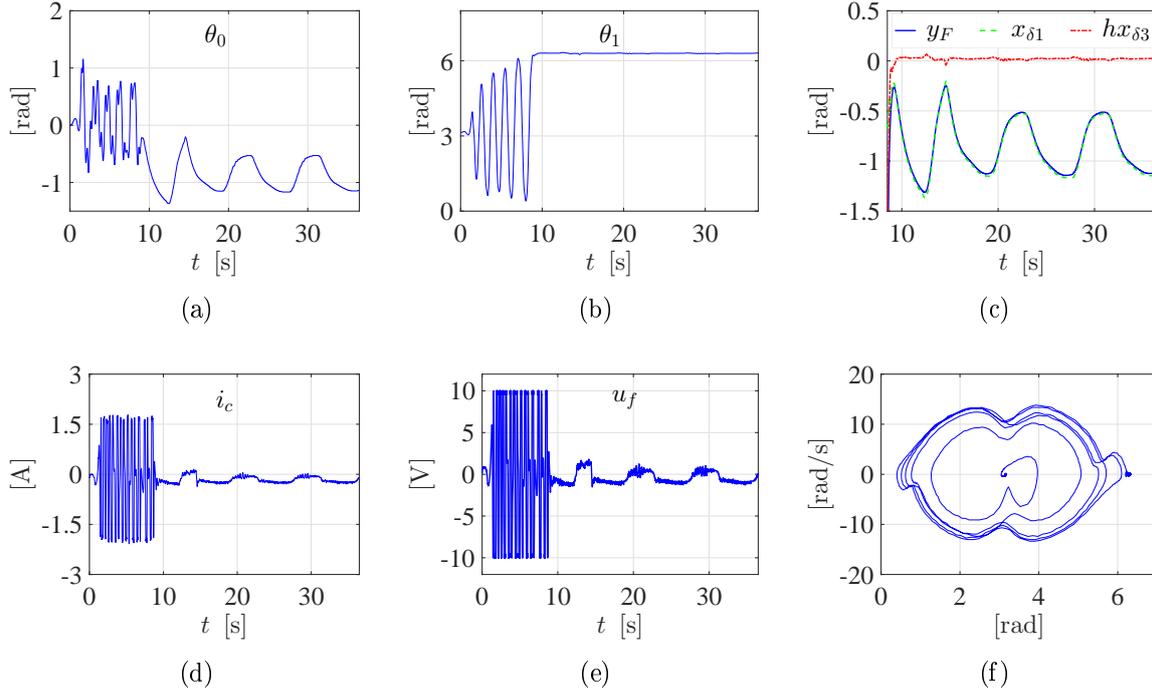


Figura 2.27: Resultados experimentales del PF al usar el control lineal (2.44) con las ganancias (2.66).

(ver (2.31)). Esas oscilaciones representan lo que se conoce como ciclo límite y es debido a la zona muerta introducida por la fricción estática en el eje del motor. Además, la fricción estática también es responsable del gran valor constante de posición de  $-0.8$  rad alrededor del cual el brazo realiza las oscilaciones. Para explicar por que la posición del péndulo no presenta oscilaciones, considere (2.32)–(2.35) donde:

$$y_F = x_{\delta 1} + hx_{\delta 3}, \quad \ddot{y}_F = (a + bh)x_{\delta 3},$$

y asumiendo que la salida plana de las oscilaciones es sinusoidal, por ejemplo  $y_F = Y_0 \text{sen}(\omega t)$  donde  $Y_0$  es una constante positiva que representa la amplitud de oscilación. No es difícil encontrar que bajo estas condiciones:

$$\begin{aligned} x_{\delta 1} &= Y_0 \left( 1 + \frac{h\omega^2}{a + bh} \right) \text{sen}(\omega t), \\ x_{\delta 3} &= -Y_0 \frac{\omega^2}{a + bh} \text{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Esto significa que  $x_{\delta 3}$  es muy pequeña si la frecuencia de oscilación es pequeña y  $y_F \approx x_{\delta 1}$ . Nótese que, en la Figura 2.27(c), la frecuencia de las oscilaciones es, aproximadamente,  $\omega = \frac{2\pi}{8.5} = 0.7392$  rad/s la cual permanece en  $\frac{\omega^2}{a+bh} = 0.0086$ . Esto explica porque las oscilaciones no son observadas en la posición del péndulo y porque  $x_{\delta 1}$  permanece cerca de  $y_F$ .

Desde que existe un ciclo límite al ejecutar el controlador (2.44), los siguientes apartados son orientados al rediseño de tal controlador para eliminar mencionado ciclo límite.

**Rediseño del esquema de control considerando zona muerta**

La zona muerta aparece en la entrada del sistema cuando el sistema no responde para valores pequeños en la variable de entrada, sino que el sistema comienza a responder una vez que la variable excede el umbral. En los sistemas mecánicos este fenómeno es debido a la fricción estática. La función característica de la no linealidad de la zona muerta se muestra en la Figura 2.28. La salida no lineal  $c = 0$  cuando la entrada no lineal  $e$  es “suficientemente pequeña”, esto es,  $|e| \leq \delta$  para alguna  $\delta < 0$ . Para valores grandes de  $e$ , la no linealidad de la salida representa una versión desplazada y amplificada de la no linealidad de la entrada  $|c| = k|e - \delta|$ ,  $k > 0$ .

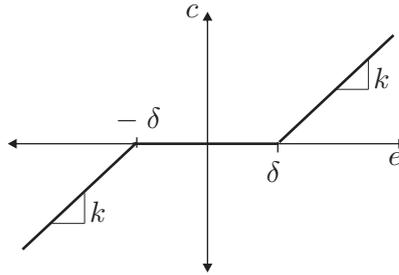


Figura 2.28: No linealidad de zona muerta.

**Método de la función descriptiva.** La Figura 2.29 presenta el diagrama de bloques de la Figura 2.24 cuando se considera la no linealidad de la zona muerta. Los ciclos límite son estudiados usando el método de la *función descriptiva*. Para esto se sugiere, en [279], Cap. 5, representar el sistema en la forma estándar mostrada en la Figura 2.30, la cual es ejecutada mediante algebra de bloques para la Figura 2.29. La no linealidad de entrada es  $e = \tau(s)$  y sistema lineal invariante en el tiempo  $G(s)$  está dado por:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s), \tag{2.69}$$

donde  $G_1(s) = \frac{-d(a+bh)}{s^2(s^2-b)}$  es la planta,  $G_2(s) = k_v s^3 + \rho s^2 + \rho k_d s + \rho k_p$  es el controlador y  $-d(a+bh) > 0$ . De acuerdo al método de la función descriptiva, la magnitud de (2.69) debe comportarse como un filtro pasa bajas [279], Cap. 5. Esto es verificado ya que  $G(s)$  tiene cuatro polos y solo tres ceros.

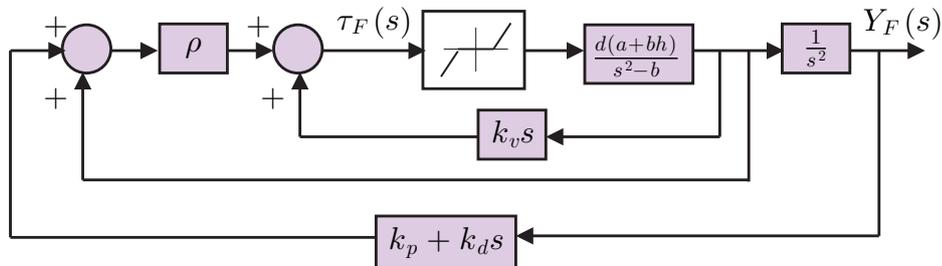


Figura 2.29: Sistema en lazo cerrado que incluye la no linealidad de zona muerta.

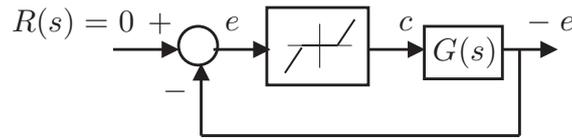


Figura 2.30: Representación equivalente del diagrama de bloques de la Figura 2.29.

La función descriptiva es una aproximación de la respuesta en frecuencia de una no linealidad, la cual, en el caso de la zona muerta, está dada como [279], Cap. 5:

$$N(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left( \frac{\delta}{A} \right) - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{A} \right)^2} \right], \quad (2.70)$$

donde  $b_1$  es la amplitud de salida de la no linealidad cuando la entrada  $e$  de la no linealidad se asume es una función sinusoidal del tiempo con amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ . Nótese que la “función de transferencia”  $N(A)$  es real, positiva, independiente de la frecuencia pero dependiente de la amplitud de entrada  $A$ . Además, el valor máximo es  $N(A) = k > 0$  el cual se alcanza conforme  $A \rightarrow \infty$ . El valor mínimo tiende a cero y es alcanzado conforme  $A \rightarrow \delta$ . De acuerdo al método de la función descriptiva, existe ciclo límite si:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}. \quad (2.71)$$

Ya que  $N(A)$  es real y positiva,  $-1/N(A)$  es real y negativa. En consecuencia, existe ciclo límite si el diagrama polar de  $G(j\omega)$  cruza el eje real negativo en el intervalo abierto  $(-\infty, -1/k)$ . La frecuencia y amplitud de oscilación son encontradas como el valor de  $\omega$ , en  $G(j\omega)$ , y  $A$ , en  $-1/N(A)$ , en el punto donde sus diagramas se cruzan. Una representación gráfica de esta idea se puede ver en la Figura 2.31.

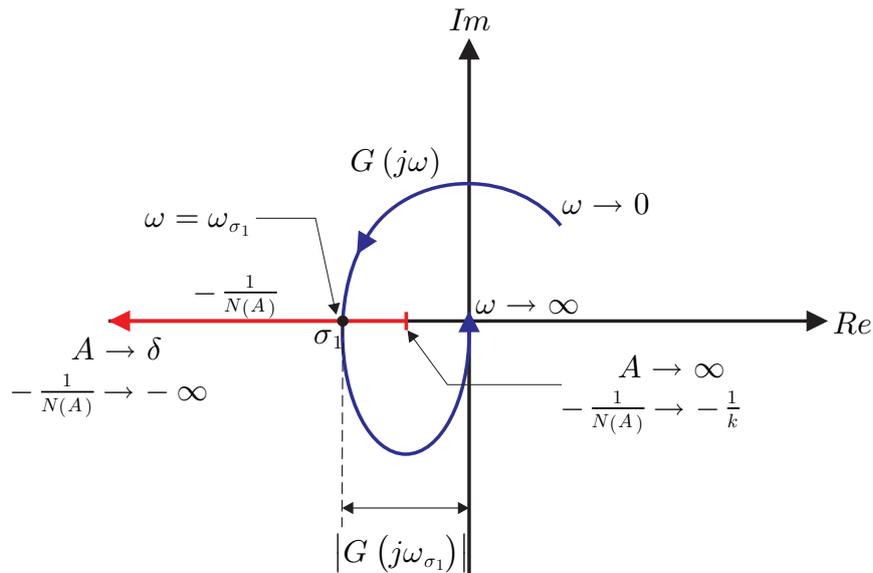


Figura 2.31: Diagrama polar de  $G(j\omega)$  y  $-1/N(A)$ .

**Sintonización del control para eliminar el ciclo límite.** En los experimentos mostrados en la Figura 2.27 se observó que la oscilación que aparece es lenta y tiene amplitud grande. Esto sugiere que la oscilación puede ser reducida o eliminada si la rigidez del sistema en lazo cerrado aumenta. Ya que la rigidez está relacionada a la respuesta rápida, esto sugiere que la frecuencia de oscilación debe ser aumentada. Por otra parte, ya que el sistema no responde si  $|e| \leq \delta$  y el umbral de la zona muerta  $\delta > 0$  es incierto, debido a que también lo es la fricción estática, la pregunta es si las oscilaciones pueden desaparecer si la amplitud de oscilación se hace lo suficientemente pequeña. Así, en lo siguiente se formula un procedimiento destinado a aumentar la frecuencia y a decrecer la amplitud de las oscilaciones debidas a ciclo límite.

De acuerdo a la sección previa, a fin de obtener un ciclo límite con amplitudes más pequeñas, el diagrama polar de la función de transferencia de lazo abierto equivalente  $G(s)$  debe cruzar el eje real negativo en el punto  $\sigma_1$  ubicado más a la izquierda. Por otra parte, con el fin de incrementar la frecuencia de oscilación, la fase de  $G(j\omega)$  debe alcanzar  $-180^\circ$  a una frecuencia más grande  $\omega = \omega_{\sigma_1}$ .

El punto  $\sigma_1$  puede ser ubicado más a la izquierda del eje real negativo mediante el incremento de la magnitud de  $G(s)$ . De acuerdo a (2.69) esto requiere incrementar las ganancias del controlador  $k_v$  y  $\rho$ . Por otra parte, de acuerdo a la Figura 2.34,  $G(j\omega)$  alcanza una fase de  $-180^\circ$  a frecuencias mayores si el adelanto de fase introducido por el controlador es forzado a aparecer en frecuencias mayores. Ya que los términos cuadráticos y cúbicos en  $G(s)$  introducen el adelanto de fase a frecuencias mayores, este adelanto de fase puede ser forzado a aparecer a frecuencias mayores mediante el cálculo de coeficientes del término de primer orden y el término constante mayores que los coeficientes de los términos cuadráticos y cúbicos, es decir mediante el incremento de  $k_d$  y  $k_p$ .

Con base en las ideas anteriores, se calcularon los tres conjuntos de ganancias mostrados en la Tabla 2.5. En esta tabla, el conjunto de ganancias a) del controlador corresponde a las ganancias de (2.65). El resto de las ganancias del controlador han sido obtenidas como se explica a continuación. Debido al incremento de la rigidez del sistema, los polos en lazo cerrado son movidos más hacia la izquierda del eje imaginario. Esto sugiere mover el cero de lazo cerrado en  $s = -z$  hacia la izquierda (ver Figura 2.26). Sin embargo, esto puede crear dos ramas del lugar de las raíces empezando en el origen pero perteneciendo a la parte derecha del semiplano. Esto es porque el cero en  $s = -z$  puede atraer el polo complejo conjugado de lazo abierto en  $s_1, s_2$ , si este se mueve hacia la izquierda. Por lo tanto, inestabilidad o polos de lazo cerrado mal amortiguados puede resultar si se aumenta  $z > 0$ . Por tanto, se propone mantener  $z = 1$  y solo mover hacia la izquierda los tres polos de lazo cerrado más rápidos.

Primero, se proponen valores grandes para  $k_v$  y  $\rho$  con la intención de obtener mayores valores tanto en la parte real como en la imaginaria de los polos de lazo abierto  $s_1$  y  $s_2$  de la Figura 2.26 (ver también  $s_{1,2}$  en la Tabla 2.6). Esto hace más rápida y bien amortiguada la respuesta del péndulo<sup>1</sup> y permite seleccionar valores más grandes para  $k_d$  y  $k_p$ . Esto es porque, aunque las ramas del lugar de las raíces comienzan en  $s_1$  y  $s_2$  y se mueven hacia el semiplano derecho conforme  $k_d$  aumenta, es posible seleccionar valores más grandes para  $k_d$  antes de que esas ramas estén muy cerca al semiplano derecho si  $s_1$  y  $s_2$  se mueven hacia la izquierda. Nótese que  $k_p$  es mayor si  $k_d$  es mayor por que

<sup>1</sup>Nótese, en la Figura 2.24, que  $k_v$  and  $\rho$  son las ganancias de realimentación de las señales  $\ddot{y}_F$  y  $y_F^{(3)}$  que, de acuerdo a (2.32)–(2.35), representan la realimentación de la posición y velocidad del péndulo,  $x_{\delta 3} = \theta_1 - \bar{\theta}_1$  y  $x_{\delta 4} = \dot{\theta}_1$ .

$k_p = k_d z$ ,  $z = 1$ . A fin de aclarar ideas, en las Figuras 2.32 y 2.33 se presenta el lugar de las raíces obtenido usando la función de transferencia en (2.64) y las ganancias del controlador de la Tabla 2.5 (también ver Figura 2.25). Se resalta que todos los polos de (2.61) mostrados en la Tabla 2.6 introducen coeficientes de amortiguamiento entre 0.7 y 0.8, por lo tanto, solo se esperan oscilaciones pequeñas. También nótese que, en las Figuras 2.32 y 2.33, colocar los polos de (2.61) más a la izquierda resulta en que los polos de (2.59) estén ubicados más a la izquierda, como se esperaba.

Tabla 2.5: Ganancias del controlador lineal (2.62).

a)	$k_v = 2.3755 \times 10^{-4}$ , $\rho = 0.0041$ , $k_d = 2.88$ , $k_p = 2.88$	b)	$k_v = 2.8506 \times 10^{-4}$ , $\rho = 1.4 \times 0.0041$ , $k_d = 4.59$ , $k_p = 4.59$	c)	$k_v = 3.3257 \times 10^{-4}$ , $\rho = 1.8 \times 0.0041$ , $k_d = 5.62$ , $k_p = 5.62$
----	--	----	---	----	---

Tabla 2.6: Polos de lazo abierto y de lazo cerrado asignados.

Ganancias del controlador	Polos de (2.61)	Polos de (2.59)
a)	$s_{1,2} = -14.4734 \pm 14.0048j$	$-12.1989 \pm 11.8679j$ , $-2.7284$ , $-1.8206$
b)	$s_{1,2} = -17.3681 \pm 17.4300j$	$-13.535 \pm 14.37j$ , $-6.3736$ , $-1.2926$
c)	$s_{1,2} = -20.2628 \pm 19.8676j$	$-15.5358 \pm 16.1280j$ , $-8.2292$ , $-1.2247$

Usando las ganancias para el controlador de la Tabla 2.5 y (2.63), las ganancias del controlador de la Tabla 2.7 fueron calculadas. Nótese que en la Tabla 2.6, los tres polos más rápidos de lazo cerrado se mueven a la izquierda cuando se va de a) hacia c) en la Tabla 2.6 o equivalentemente, en la Tabla 2.7.

Tabla 2.7: Ganancias del control por realimentación del vector de estado (2.44)

a)	$k_1 = -0.0118$ $k_2 = -0.0118$ $k_3 = -0.2742$ $k_4 = -0.0298$	b)	$k_1 = -0.0263$ $k_2 = -0.0263$ $k_3 = -0.3962$ $k_4 = -0.0509$	c)	$k_1 = -0.0415$ $k_2 = -0.0415$ $k_3 = -0.5189$ $k_4 = -0.0728$
----	--	----	--	----	--

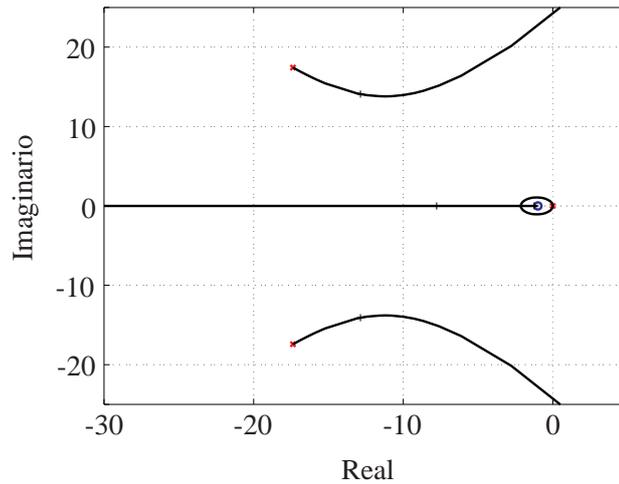


Figura 2.32: Lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto (2.64) cuando para el control lineal (2.62) se usan las ganancias b) de la Tabla 2.5.

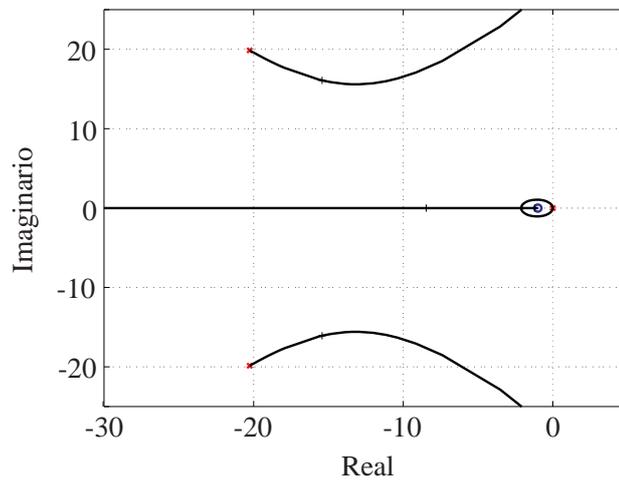


Figura 2.33: Lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto (2.64) al utilizar las ganancias c) de la Tabla 2.5 en el control lineal (2.62).

En la Figura 2.34 se presentan los diagramas de Bode de la función de transferencia (2.69), cuando se hace uso de los valores numéricos de las Tablas 2.4 y 2.5. Como se puede ver en la Figura 2.34, todas las fases cruzan la línea de  $-180^\circ$ . Esto indican que existe ciclo límite en todos los casos presentados en la Tabla 2.5. Además, esto sucede cuando la magnitud  $G(s)$  es mayor a 0 dB. Se recuerda que el intervalo abierto  $(\infty, -1/k)$  corresponde al intervalo abierto  $(0, \infty)$  dB (porque se asume que  $k = 1$ ) cuando la fase es  $-180^\circ$ . También, se remarca que la línea de fase a  $-180^\circ$  se cruza a una frecuencia mayor conforme se consideran las ganancias del controlador de a) a c) en la Tabla 2.5. Más aún, de acuerdo a la Figura 2.35 el eje real negativo es cruzado por el diagrama polar  $G(j\omega)$  en algún punto, el cual se mueve hacia la izquierda cuando va de a) hacia c) en la Tabla 2.5. Así, se concluye que la amplitud de las oscilaciones disminuye y la frecuencia de estas aumenta cuando se va de a) hacia c) en la Tabla 2.5 o, equivalentemente, en la Tabla 2.7.

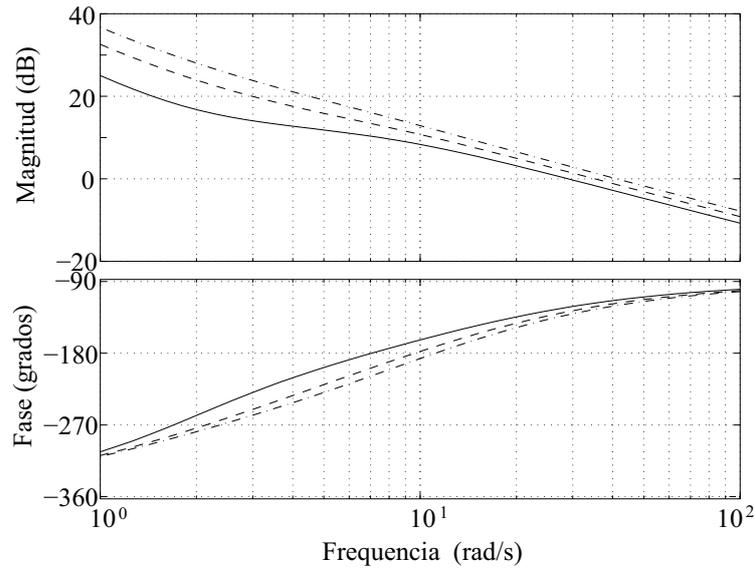


Figura 2.34: Diagramas de Bode de  $G(s)$  en (2.69) cuando se usan los valores numéricos de la Tabla 2.5. Línea continua a). Línea discontinua b).Línea discontinua de puntos c).

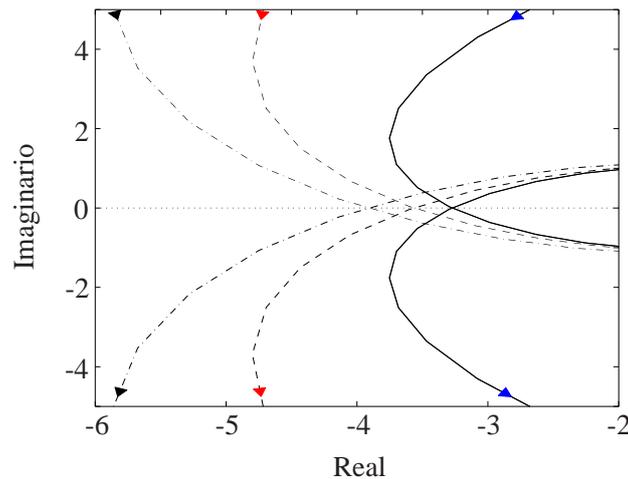


Figura 2.35: Diagrama polar de  $G(s)$ , es decir, (2.69), cuando se usan los valores numéricos de la Tabla 2.5. Línea continua a). Línea discontinua b).Línea discontinua de puntos c).

En la Figura 2.36 se presenta la simulación de la salida plana  $y_F(t)$ , de la Figura 2.29, cuando se usan los valores numéricos de la Tabla 2.5, también  $k = 1$  y el valor arbitrario  $\delta = 0.0115$ . Todas las condiciones iniciales fueron puestas en cero a excepción de  $y_F(0) = 1$ . Esos resultados verifican todo lo que estaba predicho. Es importante remarcar que la teoría discutida arriba sobre los ciclos límite tuvo el propósito de explicar la amplitud y la frecuencia de oscilación a la entrada de la no linealidad  $e = \tau_F(s)$ . Sin embargo, en la Figura 2.36 se presenta la oscilación de  $y_F$ , la cual relaciona a  $e = \tau_F(s)$  por medio de  $e = -(k_v s^3 + \rho s^2 + \rho k_d s + \rho k_p)Y(s)$ . Por lo tanto, es claro que, debido a la relación lineal entre  $e$  y  $y_F(t)$ , esos resultados también son válidos para  $y_F(t)$ .

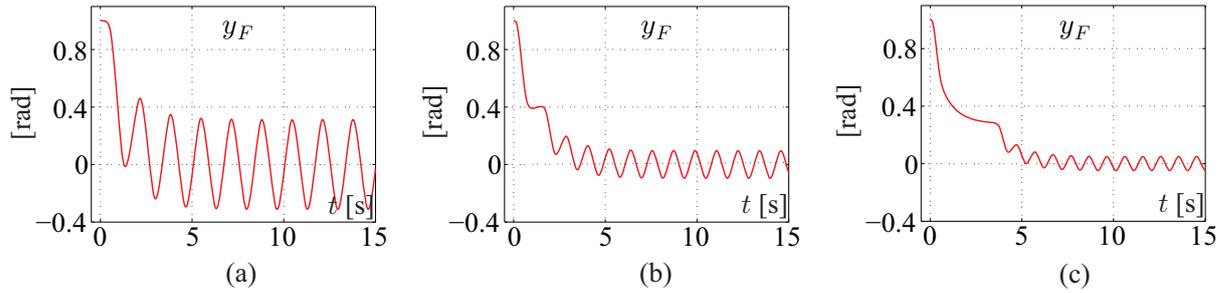


Figura 2.36: Respuesta de simulación de  $y_F$  de la Figura 2.29 cuando se usan los valores numéricos de la Tabla 2.5.

### Resultados experimentales

En las Figuras 2.37 y 2.38 se muestran los resultados experimentales obtenidos cuando se usan las ganancias del controlador b) y c), respectivamente, de la Tabla 2.7. En las Figuras 2.37(c) y 2.38(c) se presenta únicamente la parte de tiempo cuando se activa el controlador (2.44).

Estos resultados muestran que la posición de péndulo es estabilizada satisfactoriamente en  $\theta_1 = 2\pi$ . Por otra parte, cuando se usan las ganancias b) de la Tabla 2.7, se observa lo siguiente. Aunque la posición del brazo permanece oscilando, la amplitud es más pequeña y la frecuencia  $\omega = 2\pi/5 = 1.2566\text{rad/s}$  es mayor que los valores de la Figura 2.27. También, las oscilaciones de la posición del brazo se efectúan alrededor del valor constante  $-0.35$  rad, el cual es más pequeño que en el caso de las ganancias del controlador a). Los valores de arriba producen  $\frac{\omega^2}{a+bh} = 0.0250$  los cuales aclaran, nuevamente, porque las oscilaciones no aparecen en la posición del péndulo. Por otra parte, cuando las ganancias c) son usadas, en la Figura 2.38, el ciclo límite desaparece. Como se puede observar en las Figuras 2.38(a), 2.38(b), 2.38(c), la amplitud de oscilación tanto de la salida plana como de la posición del brazo  $\theta_0$  es más pequeña mientras la frecuencia de oscilación ha incrementado a alrededor de  $\omega = 2\pi/2.3 = 2.7318$  rad/s. Además, ambas variables alcanzan valores constantes, es decir, la oscilación desaparece, para  $t \geq 7$  s en las Figuras 2.38(b) y 2.38(c). La posición del péndulo alcanza los valores deseados constantes. También, se observa un error constante de estado estacionario en la posición del brazo en aproximadamente 0.2 rad, es decir, incluso más pequeño que el error de  $-0.35$  rad para las ganancias del controlador b) en la Tabla 2.7. Es importante remarcar que el pequeño umbral  $\delta$  de la no linealidad de la zona muerta es incierto y cambia durante la operación normal. Esto es porque la fricción estática también tiene esas propiedades. Ya que ningún movimiento es producido cuando los torques generados son menores que  $\delta$  (o la aplicación del voltaje es suficientemente pequeño), se podría preguntar si los ciclos límite pueden ser evadidos forzándolos a aparecer solo en amplitudes muy pequeñas. Por lo tanto, esto podría explicar porque el ciclo límite han desaparecido.

Aunque el ciclo límite ha desaparecido cuando se usa el conjunto de ganancias c), se resalta que la evasión del ciclo límite no se logra en todas las ocasiones en que se repite el experimento con tales ganancias del controlador. Algunas veces se observan oscilaciones muy pequeñas y muy lentas en ambos  $x_{\delta 1}$  y  $y$ , mientras que  $x_{\delta 3}$  permanece sin oscilaciones. Así, la evasión del ciclo límite aparece como en evento aleatorio, quizás porque el pequeño umbral  $\delta$  es incierto y cambia durante la operación normal.

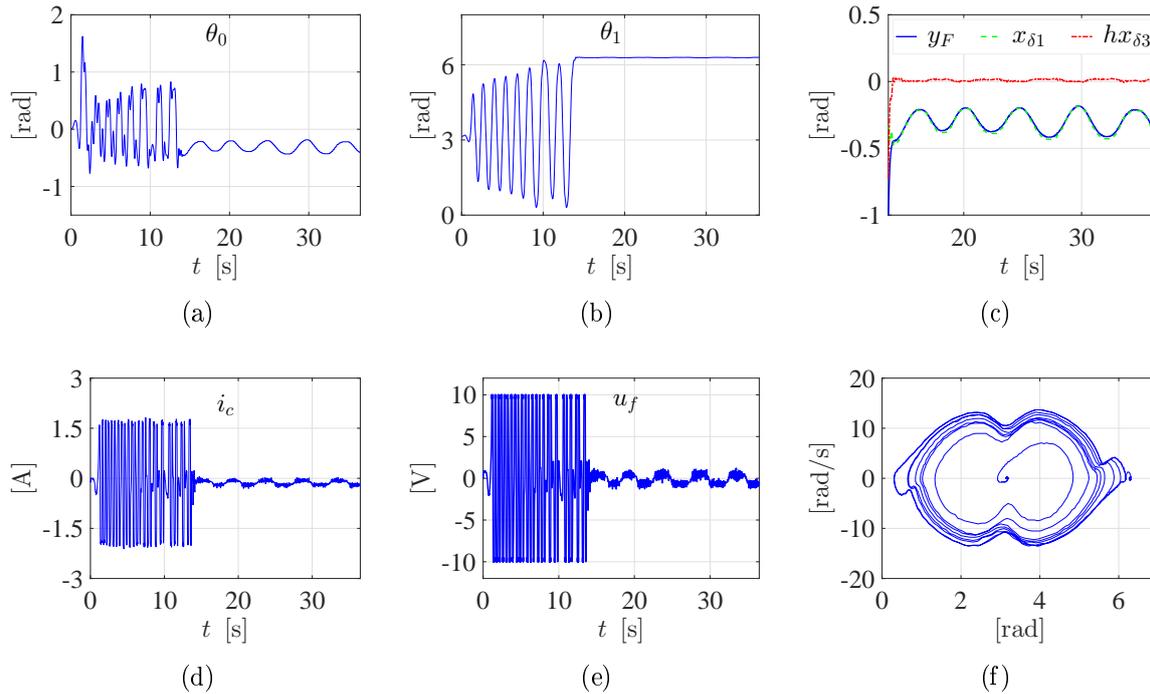


Figura 2.37: Resultados experimentales del control lineal (2.44) al usar las ganancias b) de la Tabla 2.7.

### 2.4.2. Usando planitud diferencial y respuesta en la frecuencia: Diagramas de Bode

En este apartado se propone un esquema de control para la eliminación del ciclo límite cuando se ejecuta la tarea de estabilización en el sistema PF. El diseño del control en esta sección propuesto está basado en la respuesta en frecuencia; de tal manera que se obtienen fórmulas precisas que facilitan la sintonización de sus ganancias.

#### Propuesta del control

El diagrama de bloques de la Figura 2.39 es una versión ligeramente modificada del esquema de control presentado en la Figura 2.29, donde se considera la no linealidad de zona muerta en el actuador del sistema. Se recuerda que  $y_F$  es la salida plana del sistema, definida en (2.31),  $d$ ,  $a$  y  $b$  son constantes definidas previamente y  $\rho$ ,  $k_v$ ,  $k_d$ ,  $k_p$  son las ganancias de control.

De la Figura 2.39 es claro que el control  $\tau_F(s)$  está dado por:

$$\tau_F(s) = k_v Y_F(s) s^3 + \rho Y_F(s) s^2 + k_d Y_F(s) s + k_p Y_F(s). \quad (2.72)$$

Cuando se reemplaza en (2.72) la parametrización diferencial del PF (2.31)–(2.35), es

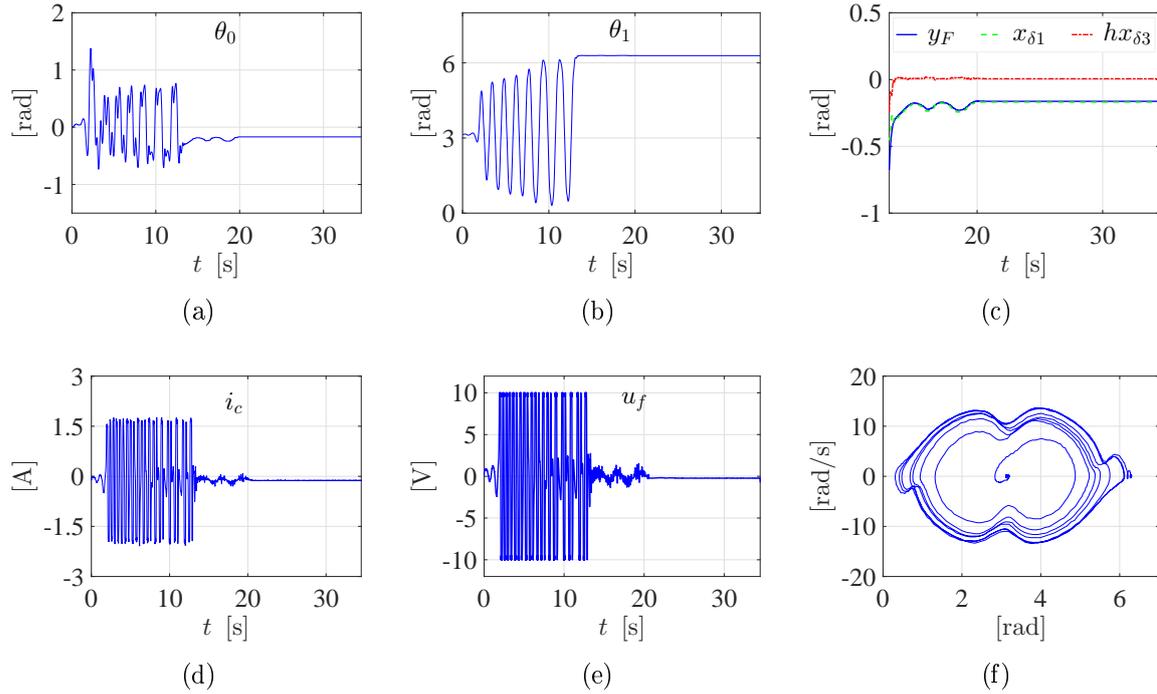


Figura 2.38: Resultados experimentales del control lineal (2.44) al usar las ganancias  $c$  de la Tabla 2.7.

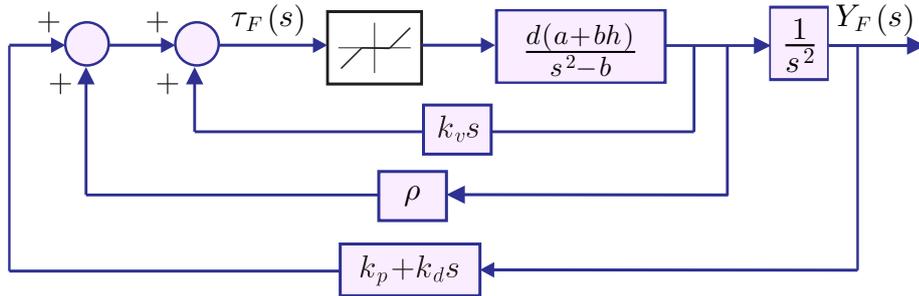


Figura 2.39: PF en lazo cerrado considerando la no linealidad de zona muerta.

decir:

$$\begin{aligned}
 y_F &= x_{\delta 1} + hx_{\delta 3}, \\
 \dot{y}_F &= x_{\delta 2} + hx_{\delta 4}, \\
 \ddot{y}_F &= (a + bh)x_{\delta 3}, \\
 y_F^{(3)} &= (a + bh)x_{\delta 4}, \\
 y_F^{(4)} &= b\ddot{y}_F + d(a + bh)\tau_F,
 \end{aligned}$$

se encuentra que el control (2.72) es equivalente al control lineal por realimentación del vector de estado (2.44), es decir:

$$\tau_s = -k_1\theta_0 - k_2\dot{\theta}_0 - k_3\theta_1 - k_4\dot{\theta}_1, \quad (2.73)$$

si se usan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} -k_p &= k_1, \\ -k_d &= k_2, \\ -[\rho(a + bh) + k_p h] &= k_3, \\ -[k_v(a + bh) + k_d h] &= k_4, \end{aligned} \quad (2.74)$$

### Método de la función descriptiva.

Para el análisis de la existencia de ciclo límite, nuevamente se emplea el método de la *función descriptiva*. Así, se representa la Figura 2.39 en la forma estándar de la Figura 2.30; resultando que el sistema lineal invariante en el tiempo  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ , compuesto por la planta  $G_1(s) = \frac{-d(a + bh)}{s^2(s^2 - b)}$  y el controlador  $G_2(s) = k_v s^3 + \rho s^2 + k_d s + k_p$ , se comporta como filtro pasa bajas toda vez que posee tres ceros y cuatro polos. Desde aquí, y al emplear la función descriptiva de la zona muerta dada en (2.70), es fácil darse cuenta que existe ciclo límite si el diagrama polar de  $G(j\omega)$  cruza el eje real negativo en el intervalo abierto  $(-\infty, -1/k)$  (tal como se representa en la Figura 2.31).

### Procedimiento para seleccionar las ganancias de control

La sección de las ganancias  $\rho$ ,  $k_v$ ,  $k_d$  y  $k_p$  puede llevarse a cabo como se explica a continuación.

Recordando la Figura 2.39 y omitiendo la no linealidad de la zona muerta, la función de transferencia de los dos lazos internos queda determinada por:

$$\frac{d(a + bh)}{s^2 - d(a + bh)k_v s - [b + \rho d(a + bh)]}. \quad (2.75)$$

Nótese que, desde que  $d(a + bh) < 0$ , para asegurar que todos los coeficientes del polinomio característico en (2.75) sean positivos se requiere escoger valores positivos para  $k_v$  y  $\rho$  y, además,  $\rho$  debe ser lo suficientemente grande de tal manera que  $b < |\rho d(a + bh)|$ . Con  $k_v$  y  $\rho$  escogidas,  $k_d$  y  $k_p$  pueden escogerse considerando lo siguiente:

- a) Nótese que  $-d(a + bh) > 0$ ; por lo tanto, la fase de la planta  $G_1(j\omega) = \frac{d(a + bh)}{s^2(s^2 - b)}$  es  $-360^\circ$  para toda  $\omega \geq 0$ . Esto puede verificarse reemplazando  $s$  por  $j\omega$  en  $G_1(s)$ .
- b) Reemplazando  $s$  por  $j\omega$  en  $G_2(s) = k_v s^3 + \rho s^2 + k_d s + k_p$  se encuentra:

$$\begin{aligned} G_2(j\omega) &= k_v (j\omega)^3 + \rho (j\omega)^2 + k_d (j\omega) + k_p, \\ &= j(k_d \omega - k_v \omega^3) + (k_p - \rho \omega^2), \end{aligned}$$

cuya magnitud está dada como,

$$|G_2(j\omega)| = \sqrt{(k_d \omega - k_v \omega^3)^2 + (k_p - \rho \omega^2)^2}. \quad (2.76)$$

Resolviendo (2.76) para  $k_p$  se obtiene:

$$k_p = \pm \sqrt{|G_2(j\omega)|^2 - (k_d \omega - k_v \omega^3)^2} + \rho \omega^2. \quad (2.77)$$

- c) Para forzar que el diagrama polar de  $G(j\omega)$  intersecte el eje real negativo, i.e., hacer que la fase de  $G(j\omega)$  sea igual a  $-180^\circ$  para alguna  $\omega > 0$ , la fase de  $G_2(j\omega)$  debe ser  $+180^\circ$  para la misma  $\omega$  (ver a) arriba), esto es:

$$\angle G_2(j\omega) = \arctan\left(\frac{k_d\omega - k_v\omega^3}{k_p - \rho\omega^2}\right) = +180. \quad (2.78)$$

Esto se satisface si,

$$k_p - \rho\omega^2 < 0, \quad (2.79)$$

$$k_d\omega - k_v\omega^3 = 0. \quad (2.80)$$

Por lo tanto, el signo en (2.77) tiene que escogerse tal que se cumpla (2.79).

- d) De (2.80) se obtiene la siguiente relación para encontrar  $k_d$ :

$$k_d = k_v\omega^2. \quad (2.81)$$

Note que para encontrar  $k_p$  y  $k_d$ , es necesario proponer la frecuencia  $\omega = \omega_{\sigma_1}$  a la cual se desea que el diagrama polar de  $G(j\omega)$  intersecte el eje real negativo. También, la magnitud  $|G_2(j\omega_{\sigma_1})|$  que debe introducir el control tiene que conocerse. Para este fin, se tiene que proponer una magnitud deseada para  $G(j\omega)$  cuando  $\omega = \omega_{\sigma_1}$ . Desde que:

$$|G(j\omega_{\sigma_1})| = |G_1(j\omega_{\sigma_1})| \cdot |G_2(j\omega_{\sigma_1})|,$$

entonces

$$|G_2(j\omega_{\sigma_1})| = \frac{|G(j\omega_{\sigma_1})|}{|G_1(j\omega_{\sigma_1})|}, \quad (2.82)$$

donde  $|G_1(j\omega_{\sigma_1})|$  se puede obtener de los diagramas de Bode de  $G_1(j\omega)$ . Así, los diagramas de Bode son una herramienta adecuada para diseñar las ganancias del control  $k_v$ ,  $\rho$ ,  $k_d$  y  $k_p$ .

### Procedimiento experimental para eliminar el ciclo límite

El procedimiento descrito en el apartado anterior, para seleccionar las ganancias del control (2.72), se extiende con la intención de eliminar el ciclo límite que aparece en el PF cuando se considera la no linealidad de zona muerta. Tal extensión se ejemplifica a través de pruebas experimentales iterativas. Además, se dan ventajas de este procedimiento con respecto al presentado en la Sección 2.4.1.

**Conjetura.** De acuerdo con la función característica de la no linealidad de zona muerta (ver Figura 2.28), si  $|e| \leq \delta$  entonces un valor cero aparece en la entrada de la planta  $c = 0$ , i.e., el par aplicado por el motor al mecanismo es zero y este debe permanecer sin movimiento en el punto de operación. Desde que el umbral  $\delta$  es incierto debido a que la fricción estática es incierta, es natural presentarse si es posible hacer que  $A < \delta$  en experimentos a pesar de que (2.70) solamente es válida para  $A \geq \delta$ . En tal caso, el mecanismo puede permanecer sin movimiento en el punto de operación si  $A$  se escoge lo suficientemente pequeña, i.e., el ciclo límite desaparece bajo estas condiciones.

La conjetura anterior se verifica a través de pruebas experimentales en el siguiente apartado.

**Resultados experimentales.** Para realizar las pruebas experimentales asociadas a la conjetura antes establecida, el valor numérico de  $\delta$  se obtuvo experimentalmente. Para este fin, los experimentos consistieron en aplicar una rampa de par al motor del prototipo, la cual fue puesta primeramente como  $\tau_F = mt$  y después como  $\tau_F = -mt$  con  $m = 0.002$ . El experimento fue repetido varias veces obteniendo los resultados mostrados en la Figura 2.40, donde queda de manifiesto que el valor de  $\delta$  cambia de un experimento a otro. Entonces, se puede concluir que  $\delta$  es incierto. Sin embargo, los experimentos realizados proporcionan un valor aproximado de  $\delta$ . Más adelante se indica que este valor aproximado es de ayuda en la eliminación del ciclo límite. Así, de los resultados experimentales en la Figura 2.40 se escogió el  $\delta$  mayor, es decir,  $\delta = 8.157 \times 10^{-3}$ . Con

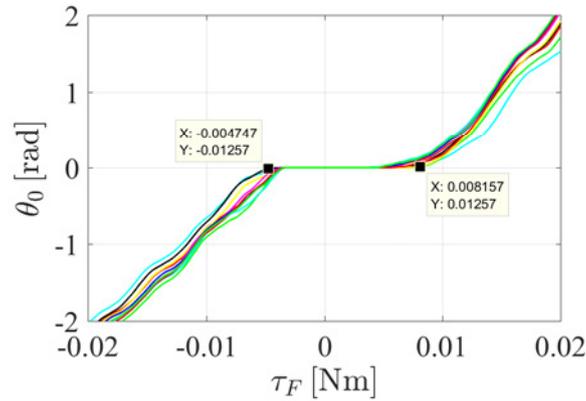


Figura 2.40: Obtención experimental de  $\delta$ .

los parámetros del prototipo de PF mostrados en la Tabla 2.3, se encontró lo siguiente:

$$d(a + bh) = -7.6842 \times 10^4, \quad b = 93.6678, \quad (2.83)$$

De acuerdo a la conjetura, el ciclo límite puede ser evitado si la amplitud de oscilación  $A$  se escoge lo suficientemente pequeña. Por otro lado, con el propósito de reducir la amplitud del ciclo límite, el diagrama polar de  $G(j\omega)$  debe cruzar el eje real negativo en un punto  $\sigma_1$  localizado más a la izquierda del punto  $-1/k = -1$ ; esto desde que se considera que  $k = 1$  en un motor de CD convencional. Esto sugiere que  $|G(j\omega_{\sigma_1})| \gg 1$  y esto debe ocurrir a una frecuencia de oscilación  $\omega = \omega_{\sigma_1}$ .

Con base en las ideas antes mencionadas, las ganancias  $k_v$ ,  $\rho$ ,  $k_d$  y  $k_p$  del control (2.72) se calculan usando las fórmulas introducidas en la Sección 4.4.2, procediendo como sigue:

1. Graficar los diagramas de Bode de la planta  $G_1(s)$ .
2. Proponer algún valor para  $\omega_{\sigma_1}$  y  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$ . Un valor adecuado para  $\omega_{\sigma_1} = 2\pi f_{\sigma_1}$  puede escogerse seleccionando alguna frecuencia razonable en Hertz  $f_{\sigma_1}$  para la oscilación de la salida plana. Usando este valor de  $\omega_{\sigma_1}$  y los diagramas de Bode graficados en el paso anterior, medir  $|G_1(j\omega_{\sigma_1})|$ . Luego, proponer alguna amplitud de oscilación deseada  $A_d$  para la salida plana y usando  $A_d = |G_1(j\omega_{\sigma_1})| A$  calcular la amplitud de oscilación del ciclo límite en la señal de par tal que  $A > \delta$ . Si esta condición no se satisface, proponer otro  $A_d$  mayor y calcular nuevamente. Finalmente, usando (2.70) y (2.71) calcular  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$ .

3. Nótese que (2.79) implica que el signo de la raíz cuadrada en (2.77) debería ser negativo. Sin embargo, de la Figura 2.29 se concluye que es necesaria alguna  $k_p > 0$  para asegurar estabilidad de lazo cerrado en el PF. De (2.77) y (2.79) es claro que, con la intención de evitar valores negativos para  $k_p$ , se requieren valores más grandes de ya sea  $\rho$  ó  $\omega_{\sigma_1}$ . Del polinomio característico de segundo grado en (2.75), se concluye que una  $\rho$  más grande es posible si la parte imaginaria de las raíces de este polinomio característico es más grande. Más aún, una parte real más grande también se requiere para evitar respuestas mal amortiguadas. Así, calcular  $k_v$  y  $\rho$  proponiendo, para la función de transferencia en (2.75), polos con parte real imaginaria y parte real negativa más grandes. Si se prefiere incrementar  $\omega_{\sigma_1}$ , proponer un valor más grande y regresar al paso 2.
4. Calcular  $k_d$  usando (2.81). Nótese que esto, (2.80) y (2.77) aseguran que  $k_p$  sea siempre real. Así, si se puso cuidado en el paso previo para seleccionar  $k_v$  y  $\rho$ ,  $k_p$  será positiva y, por lo tanto, se asegurará la estabilidad en lazo cerrado. Si este no es el caso, regresar al paso 3.
5. Si un ciclo límite aparece, i.e., si  $y_F$  no es constante, mantener  $\omega_{\sigma_1}$ , incrementar  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$  y regresar al paso 3 hasta que ya sea el ciclo límite desaparezca o se observe vibración considerable en el prototipo.
6. Si el ciclo límite no desaparece y se observa vibración considerable en el prototipo, entonces incrementar  $\omega_{\sigma_1}$  y escoger  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$  con el mismo valor como en el primer experimento realizado con  $\omega_{\sigma_1}$  previa y regresar al paso 3.
7. Si el ciclo límite desaparece, es decir, si  $y_F$  es constante, se ha logrado un diseño exitoso y termina el procedimiento.

En el paso 2 de arriba, se describe un método para seleccionar una adecuada  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$ , el cual requiere del conocimiento del parámetro  $\delta$  de la no linealidad de la zona muerta. Sin embargo, si el parámetro  $\delta$  no se conoce, el paso 2 puede ser completado usando cualquier delta pequeño  $\delta$  o sólo saltando esta parte del paso 2 a directamente proponer algún  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$ .

Los diagramas de Bode de la planta  $G_1(j\omega)$ , es decir, PF, asociados con el paso 1 son presentados en la Figura 2.41. Siguiendo el paso 2, el procedimiento fue inicialmente aplicado al PF usando  $\omega_{\sigma_1} = 4$  rad/s, lo cual de la Figura 2.41 conlleva a  $|G_1(j\omega_{\sigma_1})|_{\text{dB}} = 32.8$  dB, i.e.,

$$|G_1(j\omega_{\sigma_1})| = 10^{|G_1(j\omega_{\sigma_1})|_{\text{dB}}/20} = 44.1570. \quad (2.84)$$

También,  $|G(j\omega_{\sigma_1})| = 4$  fue inicialmente usado.

En el paso 3,  $k_v$  y  $\rho$  fueron calculados para el PF usando el polinomio característico de (2.75), obteniendo lo siguiente:

$$k_v = 0.00035, \quad \rho = 0.0073,$$

Estos valores numéricoa fueron usados para encontrar:

$$|G_2(j\omega_{\sigma_1})| = \frac{4}{44.1570} = 0.0906. \quad (2.85)$$

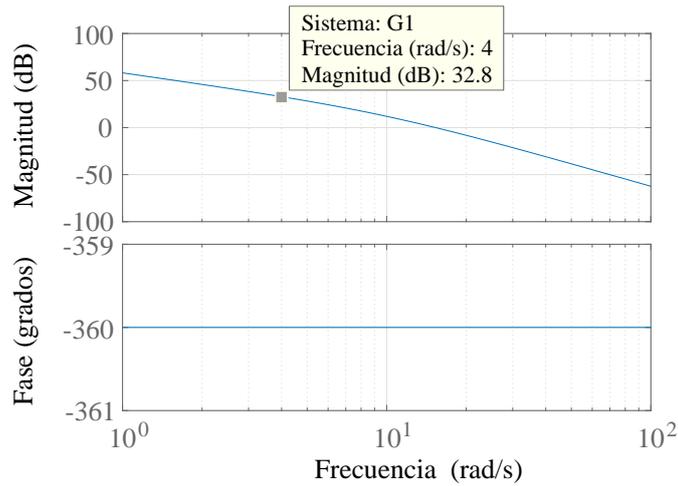


Figura 2.41: Diagramas de Bode de  $G_1(s)$ .

Con el valor numérico en (2.85), se calcularon (2.77) y (2.81) encontrando las constantes:

$$k_p = 0.0259, \quad k_d = 0.0056. \quad (2.86)$$

Como se hizo notar en el paso 3, se usó el signo “-” en (2.77) ya que esto hace  $k_p - \rho\omega_{\sigma_1}^2 = -0.0906 < 0$ . Por lo tanto, al usar las relaciones en (2.74) se encontraron las siguientes ganancias para el controlador lineal por realimentación del vector de estado (2.44):

$$\begin{aligned} k_1 &= -0.0238, & k_2 &= -0.0056, \\ k_3 &= -0.5381, & k_4 &= -0.0321. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Los diagramas de Bode del sistema compensado  $G(s)$  se muestran en la Figura 2.42. Ahí, se corrobora que el sistema en lazo abierto tiene la fase y la magnitud deseadas, es decir,  $-180^\circ$ , y que  $|G(j\omega_{\sigma_1})|_{\text{dB}} = 12$ , i.e.,  $|G(j\omega_{\sigma_1})| \approx 4$ . Esto puede verse claramente en el diagrama polar de  $G(j\omega)$  presentada en la Figura 2.43.

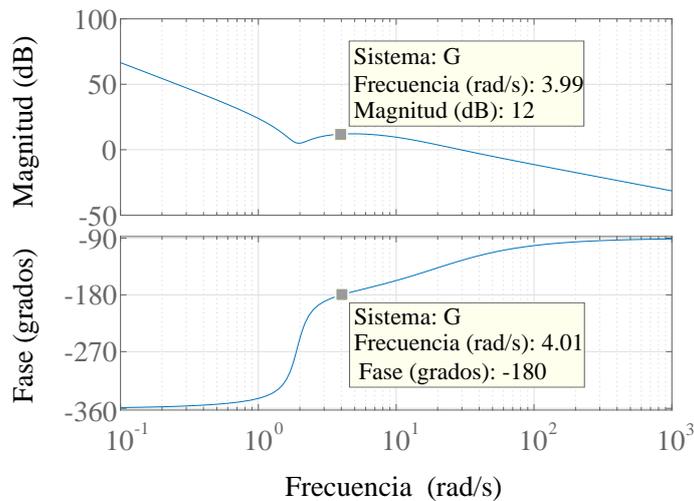
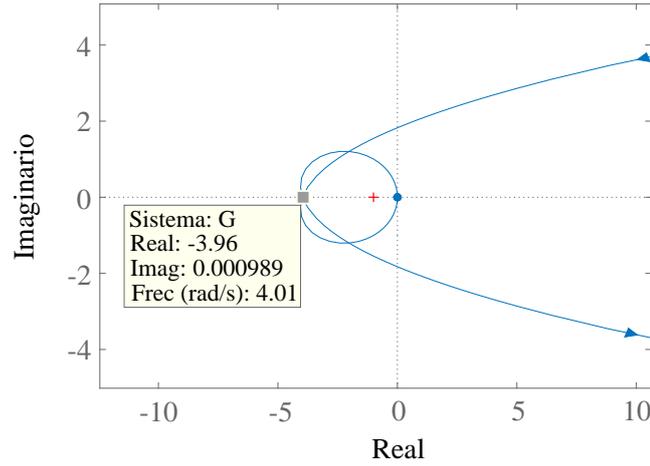


Figura 2.42: Diagramas de Bode de  $G(s)$ .

Figura 2.43: Diagrama polar de  $G(j\omega)$ .

Por otro lado, el control lineal por realimentación del vector de estado (2.44) con las ganancias en (2.87) se implementó experimentalmente para estabilizar el prototipo de PF. Desde que (2.44) sólo estabiliza el prototipo en  $x_\delta = \mathbf{0}$  cuando se opera cerca de (2.25), el controlador (2.40) con las ganancias (2.53) se usó para realizar la tarea de *swing-up* desde la posición inicial  $\theta_1 = \pi$ . Por lo tanto, la condición de conmutación que obedecen los controladores (2.44), con (2.87), y (2.40) se determinó como:

$$\tau_F = \begin{cases} 0.18/5 \text{ Nm} & \text{para } t < 0.1 \text{ s,} \\ (2.44) & \text{para } \sqrt{x_{\delta 3}^2 + x_{\delta 4}^2} \leq 0.3, \\ (2.40) & \text{para } \sqrt{x_{\delta 3}^2 + x_{\delta 4}^2} > 0.3. \end{cases} \quad (2.88)$$

donde  $x_{\delta 3}$  y  $x_{\delta 4}$  permanecen como en (2.28).

Es importante resaltar que uno de los efectos de la fricción sobre el PF durante la etapa de *swing-up* es que el péndulo puede alcanzar la configuración invertida cuando la posición del brazo está lejos de cero. Por lo tanto, si esta variable fuera usada en la condición de conmutación, tal condición podría nunca satisfacerse. De hecho, este es el comportamiento que se ha observado en experimentos y esto ha motivado la formulación de las condición de conmutación antes mencionada. Esta difiere de la presentada en (2.52) en lo siguiente: *a)* Se emplea un par constante programado para sacar del reposo al sistema en lugar de darle un golpe. *b)* El intervalo en el que opera el controlador (2.44) es menor que en (2.52). Esto para conseguir que (2.44) atrape al péndulo en la posición invertida de manera más suave.

Los resultados de la implementación experimental de (2.88) se muestran en la Figura 2.44. En esta figura, se muestra sólo la parte de tiempo donde se ejecuta el control lineal. En la Figura 2.44 se observa que el ciclo límite aparece en el sistema bajo estudio, con la amplitud  $A_{eF} = 0.0526$  Nm y frecuencia de oscilación  $\omega_{\sigma_1 eF} = 1.6377$  rad/s del ciclo límite obtenidas de la señal de par. Recuérdese que el modelo lineal aproximado en (2.26) es también válido para  $\bar{\theta}_1 = \pm 2\pi$ .

Todas las ganancias que fueron calculadas y probadas experimentalmente se muestran en la Tabla 2.8. Esta tabla también incluye la amplitud y frecuencia de oscilación del ciclo límite medido en cada experimento. La amplitud y frecuencia de oscilación del ciclo límite se denotan como  $A_{eF}$  y  $\omega_{\sigma_1 eF}$ , respectivamente. El experimento donde el ciclo límite fue completamente eliminado se localiza en  $|G(j\omega_{\sigma_1})| = 17$  y  $\omega_{\sigma_1} = 8$  rad/s

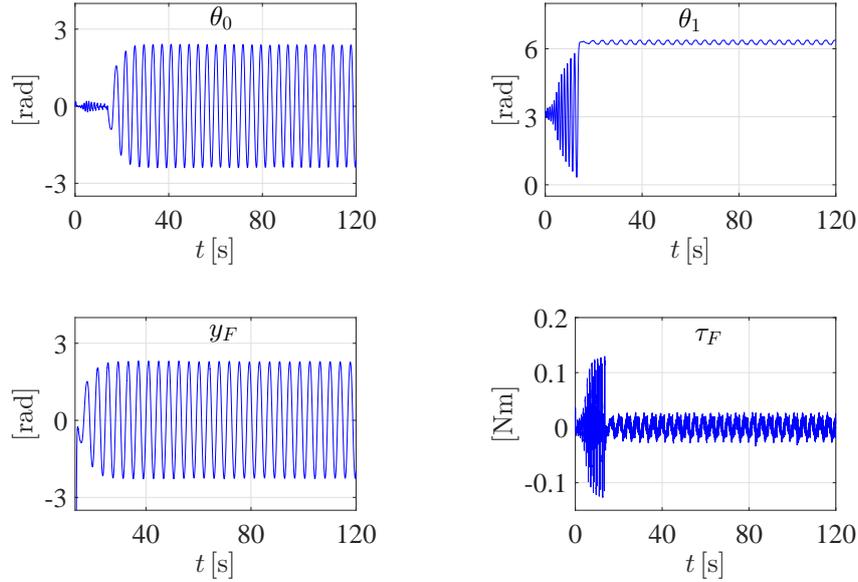


Figura 2.44: Resultados experimentales cuando se considera (2.87).

en la Tabla 2.8. Para dar una mejor idea de la evolución de los experimentos del PF del presentado en la Figura 2.44, la Figura 2.45 muestra los resultados cuando se considera  $|G(j\omega_{\sigma_1})| = 11$  y  $\omega_{\sigma_1} = 6$  rad/s, en los cuales la amplitud y frecuencia de oscilación del ciclo límite son  $A_{eF} = 0.0221$  Nm y  $\omega_{\sigma_1 eF} = 0.8304$  rad/s, respectivamente. Nótese que en ambos sistemas la amplitud del ciclo límite en la Figura 2.45 es menor que la amplitud del ciclo límite en la Figura 2.44 y se satisface  $|G(j\omega_{\sigma_1})| \gg 1$ , lo cual es consistente con la conjetura. Mientras que los resultados donde el ciclo límite es completamente eliminado se presentan en la Figura 2.46. Es importante decir que el ciclo límite es parcialmente eliminado cuando se usa el conjunto de ganancias asociado a  $|G(j\omega_{\sigma_1})| = 13$  y  $\omega_{\sigma_1} = 8$  rad/s, es decir, ocasionalmente aparecen algunas oscilaciones. Esto explica porque se reporta  $A_{eF} \leq \delta$  en la Tabla 2.8 cuando  $|G(j\omega_{\sigma_1})| = 13$  y  $\omega_{\sigma_1} = 8$  rad/s. Las ganancias asociadas con los resultados experimentales de las Figuras 2.44, 2.45 y 2.46 (cuando el ciclo límite se elimina completamente) se han resaltado en la Tabla 2.8. Además, la Figura 2.47 muestra como la amplitud del ciclo límite cambia hasta desaparecer durante el procedimiento experimental conforme  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$  y  $\omega_{\sigma_1}$  son más grandes. En tal Figura es claro que  $A_{eF} < \delta = 0.00817$ . También, en la Figura 2.47 se puede observar que la amplitud  $A_{eF}$  del ciclo límite es menor para una  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$  dada si  $\omega_{\sigma_1}$  se escoge más grande. De acuerdo a la conjetura en la Sección 2.4.2, esto es útil para eliminar el ciclo límite porque un valor muy grande de  $|G(j\omega_{\sigma_1})|$  podría resultar en vibración excesiva, debido al ruido, en lugar de eliminar el ciclo límite.

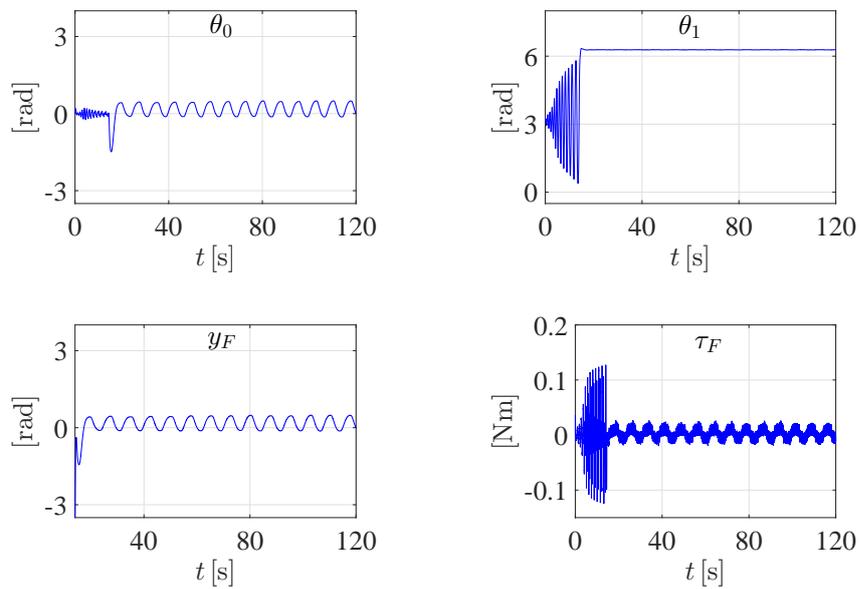


Figura 2.45: Resultados experimentales considerando  $|G(j\omega_{\sigma_1})| = 11$  y  $\omega_{\sigma_1} = 6$  rad/s.

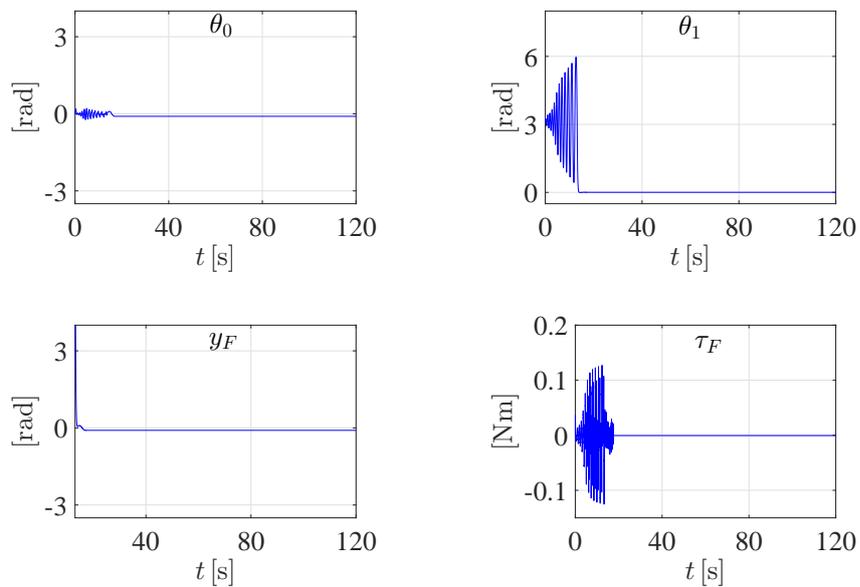


Figura 2.46: Resultados experimentales considerando  $|G(j\omega_{\sigma_1})| = 17$  y  $\omega_{\sigma_1} = 8$  rad/s.

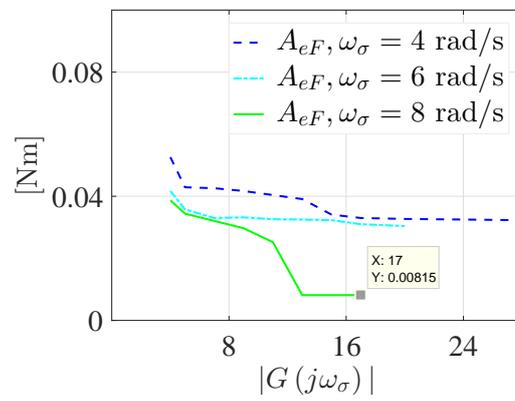


Figura 2.47: Evolución de la amplitud del ciclo límite durante el procedimiento experimental.

Tabla 2.8: Ganancias de los controles (2.72) y (2.44) calculadas para el PF.

$ G(j\omega_{\sigma_1}) $	$\omega_{\sigma_1}$		
	$4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
4	$k_v = 0.00035, \rho = 0.0073,$ $k_d = 0.0056, k_p = 0.0259.$	$k_v = 0.00035, \rho = 0.0073,$ $k_d = 0.0126, k_p = 0.0126.$	$k_v = 0.0004375, \rho = 0.0091,$ $k_d = 0.0280, k_p = 0.0671.$
	$k_1 = -0.0238, k_2 = -0.0056,$ $k_3 = -0.5381, k_4 = -0.0321.$	$k_1 = -0.0126, k_2 = -0.0126,$ $k_3 = -0.5226, k_4 = -0.0418.$	$k_1 = -0.0671, k_2 = -0.0280,$ $k_3 = -0.7247, k_4 = -0.0693.$
	$A_{eF} = 0.0526 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.6377 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0417 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.6405 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0387 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.6323 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
5	$k_v = 0.0004375, \rho = 0.0091,$ $k_d = 0.0070, k_p = 0.0297.$	$k_v = 0.0004375, \rho = 0.0091,$ $k_d = 0.0158, k_p = 0.0157.$	$k_v = 0.000525, \rho = 0.0109,$ $k_d = 0.0336, k_p = 0.0548.$
	$k_1 = -0.0297, k_2 = -0.0070,$ $k_3 = -0.6727, k_4 = -0.0401.$	$k_1 = -0.0157, k_2 = -0.0158,$ $k_3 = -0.6532, k_4 = -0.0523.$	$k_1 = -0.0548, k_2 = -0.0336,$ $k_3 = -0.8338, k_4 = -0.0832.$
	$A_{eF} = 0.0429 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.5982 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0358 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.6467 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0344 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.9973 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
9	$k_v = 0.0006125, \rho = 0.0127,$ $k_d = 0.0098, k_p = 0.0416.$	$k_v = 0.0006125, \rho = 0.0127,$ $k_d = 0.0221, k_p = 0.0220.$	$k_v = 0.0007, \rho = 0.0146,$ $k_d = 0.0448, k_p = 0.0301.$
	$k_1 = -0.0535, k_2 = -0.0126,$ $k_3 = -1.2108, k_4 = -0.0722.$	$k_1 = -0.0283, k_2 = -0.0283,$ $k_3 = -1.1758, k_4 = -0.0941.$	$k_1 = -0.0054, k_2 = -0.0560,$ $k_3 = -1.2701, k_4 = -0.1386.$
	$A_{eF} = 0.0417 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.5676 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0332 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.7847 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0297 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.4090 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
11	$k_v = 0.0009625, \rho = 0.0200,$ $k_d = 0.0154, k_p = 0.0654.$	$k_v = 0.0009625, \rho = 0.0200,$ $k_d = 0.0347, k_p = -0.0347.$	$k_v = 0.0011, \rho = 0.0237,$ $k_d = 0.0728, k_p = 0.0642.$
	$k_1 = -0.0654, k_2 = -0.0154,$ $k_3 = -1.4799, k_4 = -0.0882.$	$k_1 = -0.0346, k_2 = -0.0283,$ $k_3 = -1.4371, k_4 = -0.1150.$	$k_1 = -0.0642, k_2 = -0.0728,$ $k_3 = -1.7307, k_4 = -0.1802.$
	$A_{eF} = 0.0404 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.5506 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0326 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.8208 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0252 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.8394 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
13	$k_v = 0.0011, \rho = 0.0237,$ $k_d = 0.0182, k_p = 0.0773.$	$k_v = 0.0011, \rho = 0.0237,$ $k_d = 0.0409, k_p = 0.0409.$	$k_v = 0.0013, \rho = 0.0273,$ $k_d = 0.0840, k_p = 0.0335.$
	$k_1 = -0.0773, k_2 = -0.0182,$ $k_3 = -1.7490, k_4 = -0.1042.$	$k_1 = -0.0409, k_2 = -0.0409,$ $k_3 = -1.6984, k_4 = -0.1359.$	$k_1 = -0.0335, k_2 = -0.0840,$ $k_3 = -1.9406, k_4 = -0.2079.$
	$A_{eF} = 0.0391 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.5594 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0325 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.7507 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} \leq \delta \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
17	$k_v = 0.0015, \rho = 0.0309,$ $k_d = 0.0238, k_p = 0.1011.$	$k_v = 0.0015, \rho = 0.0309,$ $k_d = 0.0535, k_p = 0.0535.$	$k_v = 0.0017, \rho = 0.0364,$ $k_d = 0.1120, k_p = 0.0886.$
	$k_1 = -0.1011, k_2 = -0.0238,$ $k_3 = -2.2871, k_4 = -0.1363.$	$k_1 = -0.0535, k_2 = -0.0535,$ $k_3 = -2.2209, k_4 = -0.1777.$	$k_1 = -0.0886, k_2 = -0.1120,$ $k_3 = -2.6485, k_4 = -0.2772.$
	$A_{eF} = 0.0330 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.4857 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0310 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.7819 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} \leq \delta \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
20	$k_v = 0.0017, \rho = 0.0364,$ $k_d = 0.0280, k_p = 0.1189.$	$k_v = 0.0017, \rho = 0.0364,$ $k_d = 0.0630, k_p = 0.0629.$	
	$k_1 = -0.1189, k_2 = -0.0280,$ $k_3 = -2.6907, k_4 = -0.1604.$	$k_1 = -0.0629, k_2 = -0.0630,$ $k_3 = -2.6129, k_4 = -0.2090.$	
	$A_{eF} = 0.0327 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.5396 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eF} = 0.0304 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 0.8004 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	
28	$k_v = 0.0024, \rho = 0.0510,$ $k_d = 0.0392, k_p = 0.1665.$		
	$k_1 = -0.1665, k_2 = -0.0392,$ $k_3 = -3.6891, k_4 = -0.2926.$		
	$A_{eF} = 0.0323 \text{ Nm}, \omega_{\sigma_1 e} = 1.5323 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$		



# Capítulo 3

## Péndulo con Rueda Inercial (PRI)

En este capítulo se aborda el modelo no lineal del PRI (péndulo con rueda inercial) y el correspondiente modelo lineal aproximado alrededor del punto de un punto de operación del sistema. Asimismo, se incluye el diseño asistido por computadora y construcción de un prototipo reconfigurable del PRI. Por último, se presentan dos controles para el PRI, uno que realiza la tarea de *swing-up* y el otro que estabiliza el péndulo en la posición invertida. Nuevamente se emplea un control no lineal basado en energía para realizar el *swing-up* y un control lineal por realimentación del vector de estado para la estabilización.

### 3.1. Modelos matemáticos

La obtención del modelo dinámico del PRI, vía ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, y del correspondiente modelo lineal aproximado se realiza en esta sección.

#### 3.1.1. Modelo dinámico con ecuaciones de Euler-Lagrange

En las secciones anteriores se mencionó que, en general, se siguen tres pasos para obtener el modelo dinámico de un sistema: 1) Cinemática (ubicación del eslabón final del sistema), 2) energía del sistema y 3) ecuaciones de movimiento. En el caso del PRI se conservan dichos pasos, los cuales se explican en los siguientes apartados.

##### Cinemática del sistema

En la Fig. 3.1 se muestra un diagrama del PRI, donde  $q_1$  y  $q_2$  son las posiciones angulares del péndulo y de la rueda, respectivamente,  $\tau_R$  es el par generado por el motor y aplicado a la rueda,  $m_p$  es la masa del péndulo,  $m_r$  corresponde a la masa de la rueda,  $l_{c1}$  denota la distancia al centro de masa del péndulo,  $l_p$  la longitud del péndulo,  $I_p$  es la inercia del péndulo cuando gira alrededor de su centro de masa,  $I_r$  es la inercia de la rueda más la inercia del rotor del motor. Del diagrama de cuerpo libre del PRI (ver Figura 3.2) es sencillo obtener la ubicación al centro de masa del péndulo,  $\mathbf{s}_p$ , y de la rueda,  $\mathbf{s}_r$ , como sigue:

$$\mathbf{s}_p = \begin{bmatrix} l_{c1} \text{sen} q_1 \\ l_{c1} \text{cos} q_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_r = \begin{bmatrix} l_1 \text{sen} q_1 \\ l_1 \text{cos} q_1 \end{bmatrix}.$$

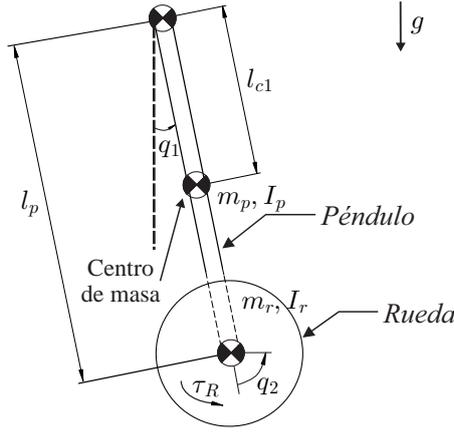


Figura 3.1: Diagrama esquemático del PRI.

Al derivar  $\mathbf{s}_p$  y  $\mathbf{s}_r$  una vez con respecto al tiempo se encuentran los vectores de velocidad de traslación  $\mathbf{v}_p$  y  $\mathbf{v}_r$  del centro de masa del péndulo y la rueda, respectivamente; los cuales quedan determinados como:

$$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \dot{q}_1 \\ -l_{c1} \text{sen} q_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 \\ -l_1 \text{sen} q_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix},$$

y cuyas magnitudes al cuadrado están dadas por:

$$\begin{aligned} v_p^2 &= (l_{c1} \cos q_1 \dot{q}_1)^2 + (-l_{c1} \text{sen} q_1 \dot{q}_1)^2 \\ &= l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 (\cos^2 q_1 + \text{sen}^2 q_1) \\ &= l_{c1}^2 \dot{q}_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_r^2 &= (l_1 \cos q_1 \dot{q}_1)^2 + (-l_1 \text{sen} q_1 \dot{q}_1)^2 \\ &= l_1^2 \dot{q}_1^2 (\cos^2 q_1 + \text{sen}^2 q_1) \\ &= l_1^2 \dot{q}_1^2. \end{aligned}$$

### Energía del sistema

La energía cinética y la energía potencial del PRI se presentan en este apartado.

**Energía cinética.** Debido a que el péndulo y la rueda tienen movimiento rotacional con respecto a un eje fijo, sus energías cinéticas están dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} K_{q_1} &= \frac{1}{2} m_p l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{q}_1^2, \\ K_{q_2} &= \frac{1}{2} m_r l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_r (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética del PRI ( $K_R = K_{q_1} + K_{q_2}$ ) queda determinada como:

$$\begin{aligned} K_R &= \frac{1}{2} m_p l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_r l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_r (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_p l_{c1}^2 + I_p + m_r l_1^2 + I_r) \dot{q}_1^2 + I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} I_r \dot{q}_2^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

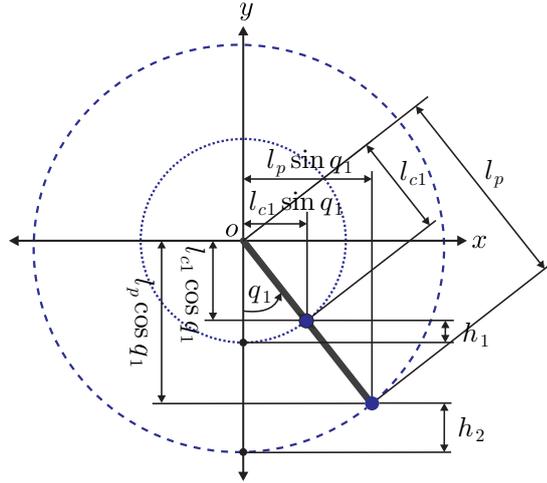


Figura 3.2: Diagrama de cuerpo libre del PRI.

**Energía potencial.** La energía potencial del PRI,  $P_R$ , está definida como:

$$P_R = P_{q_1} + P_{q_2},$$

donde  $P_{q_1}$  es la energía potencial del péndulo y  $P_{q_2}$  es la energía potencia de la rueda, dadas por:

$$P_{q_1} = m_p g h_1, \quad (3.2)$$

$$P_{q_2} = m_r g h_2, \quad (3.3)$$

siendo  $h_1$  y  $h_2$  la altura del centro de masa del péndulo y la rueda, respectivamente. Ambas alturas medidas con respecto al punto donde el péndulo está en reposo y, además,  $K_{q_1} = 0$  y  $K_{q_2} = 0$ . De la Figura 3.2 se encuentra que:

$$h_1 = l_{c1} (1 - \cos q_1),$$

$$h_2 = l_1 (1 - \cos q_1).$$

Entonces, (3.2) y (3.3) se pueden escribir como sigue:

$$P_{q_1} = m_p g l_{c1} (1 - \cos q_1), \quad (3.4)$$

$$P_{q_2} = m_r g l_1 (1 - \cos q_1), \quad (3.5)$$

obteniéndose

$$P_R = (1 - \cos q_1) (m_p g l_{c1} + m_r g l_1). \quad (3.6)$$

### Ecuaciones de movimiento

De acuerdo con el formulismo de Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento del PRI están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_R}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L_R}{\partial q_1} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_R}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L_R}{\partial q_2} = \tau_R, \quad (3.8)$$

con

$$\begin{aligned} L_R &= K_R - P_R \\ &= \frac{1}{2} (m_p l_{c1}^2 + I_p + m_r l_1^2 + I_r) \dot{q}_1^2 + I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} I_r \dot{q}_2^2 - (1 - \cos q_1) (m_p g l_{c1} + m_r g l_1). \end{aligned}$$

De manera que al realizar las derivadas correspondientes en (3.7)–(3.8) se obtiene:

$$(m_p l_{c1}^2 + I_p + m_r l_p^2) \ddot{q}_1 + I_r (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \bar{m} g \text{sen}(q_1) = 0, \quad (3.9)$$

$$I_r (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = \tau_R, \quad (3.10)$$

con  $\bar{m} = m_p l_{c1} + m_r l_p$  y siendo su representación matricial la siguiente:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_R) \ddot{\mathbf{q}}_R + \mathbf{g}(\mathbf{q}_R) = \mathbf{F}_R, \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_R &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(\mathbf{q}_R) &= \begin{bmatrix} m_p l_{c1}^2 + I_p + m_r l_p^2 + I_r & I_r \\ & I_r \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_R) &= \begin{bmatrix} \bar{m} g \text{sen}(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{F}_R &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_R \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.1.2. Modelo lineal aproximado

En este apartado se presenta el procedimiento para obtener el modelo lineal aproximado asociado con el modelo no lineal (3.9)–(3.10). Tal procedimiento se refiere a la representación en variables de estado de (3.9)–(3.10), seguido de la obtención de los puntos de operación del sistema y, por último, la aplicación del método de linealización aproximada alrededor de un punto de operación de interés.

#### Representación en variables de estado

Hay que recordar la forma general de la representación en variables de estado de un sistema no lineal, (2.20), reescrita en seguida para facilitar su referencia:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

donde  $x$ ,  $u$  y  $y$  han sido definidas previamente como el vector de estado, entrada y salida, respectivamente, del sistema.

En el caso del PRI, desde que el modelo no lineal (3.9)–(3.10) no depende de la posición de la rueda  $q_2$ , el vector de estado  $x$  queda definido como:

$$x = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T, \quad (3.12)$$

mientras que  $u = \tau_R$ . Es fácil darse cuenta que al derivar (3.12) una vez con respecto al tiempo, con la finalidad de escribir el modelo (3.9)–(3.10) en variables de estado, se requiere conocer  $\ddot{\mathbf{q}}_R = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2]^T$ . En esa dirección, se resuelve (3.11) para  $\ddot{\mathbf{q}}_R$  del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{q}_R) \ddot{\mathbf{q}}_R &= \mathbf{F}_R - \mathbf{g}(\mathbf{q}_R), \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}_R)^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{q}_R) \ddot{\mathbf{q}}_R &= \mathbf{D}(\mathbf{q}_R)^{-1} [\mathbf{F}_R - \mathbf{g}(\mathbf{q}_R)], \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_R)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p} & -\frac{1}{m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p} \\ -\frac{1}{m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p} & \frac{1}{I_r (m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p)} \end{bmatrix}.$$

Así,  $\ddot{\mathbf{q}}_R$  puede escribirse como:

$$\ddot{\mathbf{q}}_R = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\tau_R - \bar{m}g \text{sen} q_1}{m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p} \\ \frac{I_r \bar{m}g \text{sen} q_1 + \tau_R (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r)}{I_r (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p)} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Se hace notar que lo anterior es posible ya que  $\det \mathbf{D}(\mathbf{q}_R) = I_r (m_p l_c^2 + I_p + m_r l_p^2 + I_r) - I_r^2 \neq 0$ . Por lo tanto, usando (3.12) y (3.13), el modelo no lineal del PRI representado en variables de estado queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{-\tau_R - \bar{m}g \text{sen} q_1} \\ \frac{m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p}{I_r \bar{m}g \text{sen} q_1 + \tau_R (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r)} \\ \frac{I_r (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p)}{I_r (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \end{bmatrix} = f(x, u). \quad (3.14)$$

### Puntos de operación del sistema

Para obtener los puntos de operación del sistema PRI es necesario resolver

$$\dot{x} \equiv 0 \equiv f(\bar{x}, \bar{u}),$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \bar{\dot{q}}_1 \\ \bar{\dot{q}}_1 \\ \bar{\dot{q}}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\bar{\dot{q}}_1}{-\bar{\tau}_R - \bar{m}g \text{sen} \bar{q}_1} \\ \frac{m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p}{I_r \bar{m}g \text{sen} \bar{q}_1 + \bar{\tau}_R (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r)} \\ \frac{I_r (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p)}{I_r (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p)} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

donde

$$\bar{x} = [\bar{q}_1 \quad \bar{\dot{q}}_1 \quad \bar{\dot{q}}_2]^T$$

son aquellos valores del vector de estado  $x$  cuando el sistema puede permanecer sin movimiento, bajo el efecto de una adecuada entrada constante del sistema  $\bar{u} = \bar{\tau}_R$ . Entonces, de la primera fila de (3.15) es claro que:

$$\bar{\dot{q}}_1 = 0,$$

mientras que la segunda fila de (3.15) se puede escribir como:

$$-\bar{\tau}_R - \bar{m}g \text{sen} \bar{q}_1 = 0 \quad (3.16)$$

dado que

$$m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p \neq 0, \infty.$$

Por lo tanto, para satisfacer la igualdad en (3.16)

$$\bar{\tau}_R = 0 \quad \wedge \quad \text{sen} \bar{q}_1 = 0 \quad \implies \quad \bar{q}_1 = \pm n\pi, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Nótese que estos valores también cumplen con la igualdad en la tercera fila de (3.15) y que además no existe restricción alguna para  $\bar{q}_2$ . Así, los puntos de operación del sistema PRI se resumen a continuación:

$$\bar{q}_1 = \pm n\pi, \quad \bar{q}_1 = 0, \quad \bar{q}_2 = \text{arbitrario}, \quad \bar{\tau}_R = 0.$$

Por último, debido a que uno de los objetivos de control que se persigue es estabilizar el péndulo en la posición invertida (cuando  $n = 1, 3, 5, \dots$ ) a través de un control por realimentación del vector de estado, se elige el siguiente punto de operación:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{\dot{q}}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\tau}_F = 0. \quad (3.17)$$

### Linealización aproximada

El modelo no lineal del PRI (3.9)–(3.10) puede aproximarse alrededor del punto de operación (3.17) vía el modelo lineal:

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad (3.18)$$

$$y_\delta = Cx_\delta, \quad (3.19)$$

donde

$$x_\delta = \begin{bmatrix} x_{\delta 1} \\ x_{\delta 2} \\ x_{\delta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - \bar{q}_1 \\ \dot{q}_1 - \bar{\dot{q}}_1 \\ \dot{q}_2 - \bar{\dot{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - \pi \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad u_\delta = \tau_R - \bar{\tau}_R = \tau_R;$$

mientras que las matrices constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  están definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial \dot{q}_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})},$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial q_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial \dot{q}_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\bar{x}}.$$

Tras realizar las derivadas parciales y evaluarlas con respecto a los valores en equilibrio se encuentra:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\bar{m}g}{m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{m}g}{m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p}{m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p + I_r} \\ \frac{I_r (m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p)}{I_r (m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p)} \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0].$$

## 3.2. Construcción del sistema

El prototipo de PRI fue construido a partir del prototipo de PF presentado en la Sección 2.2, de modo que se logra un prototipo reconfigurable de PF y PRI. Esto permite aprovechar varios dispositivos electrónicos y elementos mecánicos empleados en el prototipo de PF. La interacción entre los subsistemas del prototipo reconfigurable de PF y PRI se muestra en la Figura 3.3.

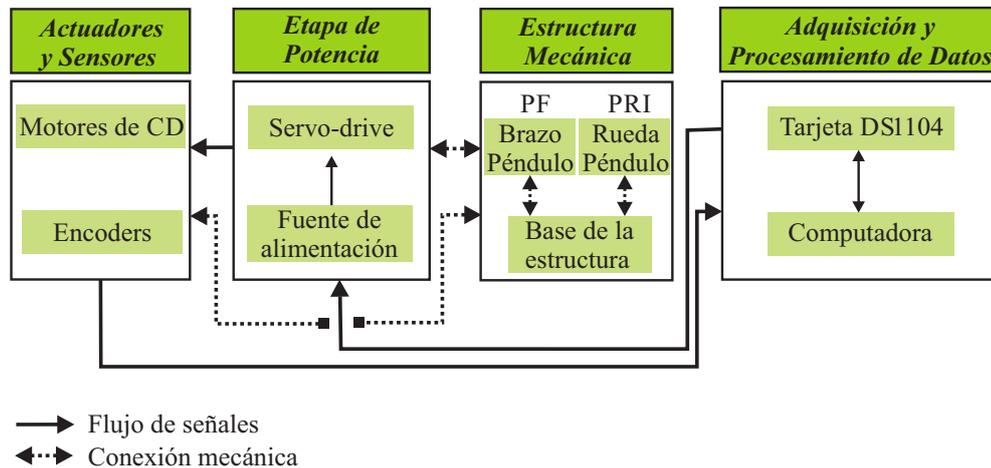


Figura 3.3: Subsistemas del prototipo reconfigurable de PF y PRI.

A continuación, se describen los dispositivos y elementos mecánicos de los subsistemas del prototipo en la configuración de PRI.

- A) *Actuador y sensores*: Está integrado por un motor de CD Faulhaber 2642W024CR que acciona el movimiento del PRI y un encoder Faulhaber HEDM 5500 de 500 PPR, el cual es utilizado para estimar la posición angular de la rueda; mientras que el encoder ITD01A4Y1 de Baumer, utilizado para medir la posición angular del péndulo del PF, también es empleado para medir la posición angular del péndulo del PRI.
- B) *Etapa de potencia*: Subsistema reutilizado del prototipo de PF, por lo que corresponde a los mismos dispositivos de potencia descritos en la Sección 2.2.
- C) *Estructura mecánica*: Son los elementos mecánicos necesarios para configurar el prototipo de PF en PRI, es decir, péndulo, rueda, brida y pernos.
- D) *Adquisición y procesamiento de datos*: Subsistema aprovechado del prototipo de PF, de manera que se refiere al hardware y software descrito en la Sección 2.2.

Desde que los *Subsistemas B* y *D* han sido retomados del prototipo de PF, en las siguientes secciones se abordarán únicamente los *Subsistemas A* y *C* para el PRI.

### 3.2.1. Actuador y sensores

El actuador del sistema PRI corresponde al motor de CD Faulhaber 2642W024CR que se muestra en la Figura 3.4. Algunas características de este motor se muestran en la Tabla 3.1. Para seleccionar este modelo, se realizaron simulaciones numéricas en lazo abierto; mediante las cuales se encontró que el par requerido para llevar el péndulo de la posición colgante a la invertida es de 0.028 [Nm]. Referente a los sensores, para medir la posición angular de la rueda,  $q_2$ , se usa el encoder Faulhaber HEDM 5500, el cual es de 500 PPR y está unido al motor de CD 2642W024CR; mientras que para medir la posición angular del péndulo,  $q_1$ , se utiliza el mismo encoder empleado para medir  $\theta_1$  (posición angular del péndulo del PF), es decir, el encoder miniatura ITD01A4Y1. Las hojas de datos, o especificaciones técnicas, del motor y los encoders mencionados se pueden consultar en el Apéndice B.



Figura 3.4: Motor de CD Faulhaber 2642W024CR.

Tabla 3.1: Características del motor de CD 2642W024CR.

Voltaje de alimentación	24 V
Constante de par	$34.6 \times 10^{-3}$ Nm/A
Constante de corriente	0.029 A/mNm
Sin caja de engranes	
Encoder incremental	500 PPR

### 3.2.2. Estructura mecánica

Para obtener el PRI, se partió de la estructura del PF. Tanto el CAD como la manufactura de los elementos mecánicos del PRI se presenta a continuación.

#### Diseño asistido por computadora

El CAD de los elementos mecánicos del PRI se realizó vía SolidWorks. La descripción de tales elementos es como sigue.

**Péndulo.** La principal característica de diseño del péndulo fue la forma de poder montarlo en el encoder ITD01A4Y1 y el motor de CD Faulhaber 2642W024CR, de manera que se pudiera medir su posición angular. En ese sentido, el péndulo fue conformado por los elementos mecánicos presentados en la Figura 3.5, cuya descripción es la siguiente:

- ① **Flecha del péndulo.** Flecha con las mismas características que la flecha del péndulo del PF. Así, el ensamble/desensamble de los péndulos para conseguir el PF o el PRI depende únicamente del ajuste de un perno del encoder miniatura ITD01A4Y1.
- ② **Barra del péndulo.** Placa de aluminio de 125 mm de largo, 32 mm de ancho y 6.4 mm de espesor. En un extremo posee una perforación de 8 mm de diámetro en la que se monta ①; mientras que en el extremo contrario tiene una perforación de 6 mm y tres barrenos M3 a través de los cuales se fija el motor de CD 2642W024CR.

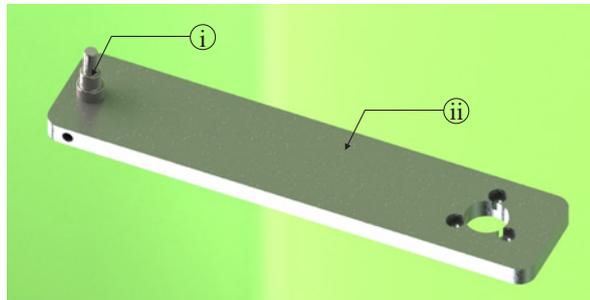


Figura 3.5: Péndulo dibujado en SolidWorks.

**Rueda.** El diseño de la rueda es simple, ya que consta de una placa circular de aluminio con un diámetro de 60 mm y 6.4 mm de espesor. Asimismo, posee un segundo diámetro de 10 mm de diámetro y 6 mm de espesor con tres barrenos M3, a través de los cuales esta rueda puede sujetarse al motor de CD 2642W024CR. En la Figura 3.6 se presenta mencionada rueda.



Figura 3.6: Rueda dibujada en SolidWorks.

**Brida y pernos.** Estos elementos fueron contemplados para fijar el brazo del PF; permitiendo obtener la configuración de PRI. En la Figura 3.7 se muestran la brida y los pernos. Su descripción es la siguiente:

- ⓓ **Brida.** Placa de aluminio de 25.5 mm de largo, 44.5 mm de ancho y 6.4 mm de espesor. Tiene dos canales de 10 mm de ancho cada uno, los cuales sirven para sujetar la brida a la base de la estructura del prototipo vía los pernos.
- ⓔ **Pernos.** Pernos de aluminio con cabeza avellanada, diámetro de rosca de 10 mm y con un paso de 1 mm.

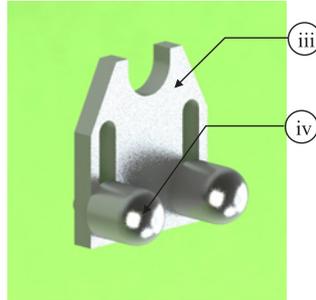


Figura 3.7: Breda y pernos dibujados en SolidWorks.

Después de ensamblar el motor de CD Faulhaber 2642W024CR, péndulo, rueda y brida y pernos en la base de la estructura del prototipo de PF, se consiguió el CAD del prototipo de PRI que se presenta en la Figura 3.8.

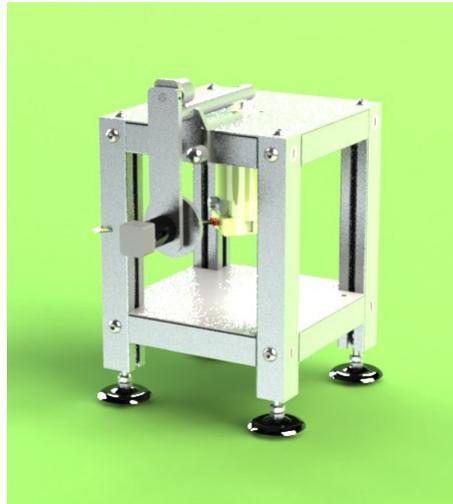


Figura 3.8: *Subsistemas A y C* en SolidWorks del prototipo de PRI.

### Manufactura de partes

En la manufactura de los elementos mecánicos del prototipo de PRI se emplearon los materiales de la Tabla 3.2.

**Péndulo.** La manufactura de los elementos mecánicos que integran el péndulo del PRI se realizó de la siguiente manera:

- ⓓ **Flecha del péndulo.** Fue obtenido de la barra redonda AISI C-1018 realizando desbastes con torno y buril.

Tabla 3.2: Materiales mecánicos

No. de elemento	Material
⓪	AISI C-1018 redondo $D = 12.7$ mm
Ⓛ	T-6061 placa de 6.4 mm
Rueda	T-6061 redondo, $D = 70$ mm
Ⓜ	T-6061 placa de 6.4 mm
Ⓨ	T-6061 redondo, $D = 12.7$ mm

- Ⓛ **Barra del péndulo.** Placa de aluminio T-6061. Las perforaciones indicadas en el CAD de este elemento fueron logradas mediante un centro de máquinado de control numérico y las herramientas de corte *end mill* de 5 mm y broca de 2.5 mm. Las roscas de los barrenos M3 fueron hechas con machuelos M3.

Al ensamblar la flecha del péndulo y la barra del péndulo se obtuvo el péndulo del PRI mostrado en la Figura 3.9.

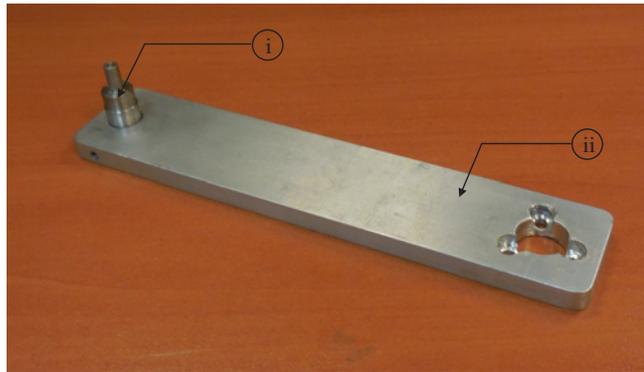


Figura 3.9: Péndulo del PRI manufacturado.

**Rueda.** Este elemento fue manufacturado con un torno de control numérico a partir del redondo de aluminio T-6061 de 70 mm de diámetro. Las perforaciones de este elemento fueron realizadas en un centro de maquinado de control numérico con un *end mill* de 5 mm; mientras que los barrenos M3 fueron logrados con una broca de 2.5 mm y machuelo M3. La rueda manufacturada se muestra en la Figura 3.10.

**Brida y pernos.** Manufacturados como a continuación se describe.

- Ⓜ **Brida.** Realizada de la placa de aluminio T-6061, obteniendo las dimensiones especificadas en el CAD mediante desbastes laterales con una fresadora y *end mill* de 10 mm.
- Ⓨ **Pernos.** Estos fueron manufacturados con un torno de control numérico, usando el redondo de aluminio T-6061 de 12.7 mm de diámetro. Con la intención de darle buena presentación a los pernos, se les hizo un rimado en la cabeza avellanada.



Figura 3.10: Rueda manufacturada del PRI.

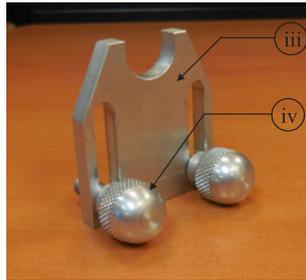


Figura 3.11: Brida y pernos manufacturados del PRI.

La brida y los pernos manufacturados se muestran en la Figura 3.11.

Después de conectar el *Subsistema A* (actuadores y sensores), *Subsistema B* (etapa de potencia) y *Subsistema C* (péndulo, rueda, brida y pernos, y la base de la estructura presentada en la Sección 2.2), se obtuvo el prototipo en la configuración de PRI que se muestra en la Figura 3.12.

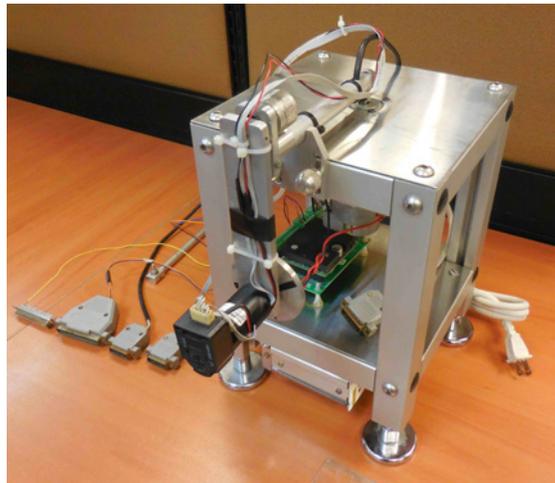
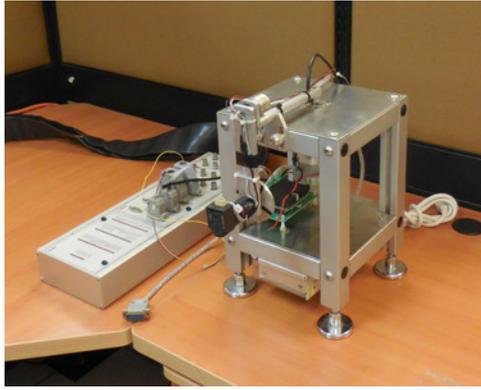
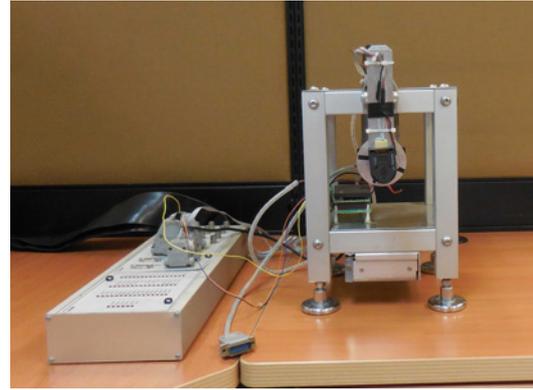


Figura 3.12: *Subsistemas A, B y C* reales del prototipo del PRI.

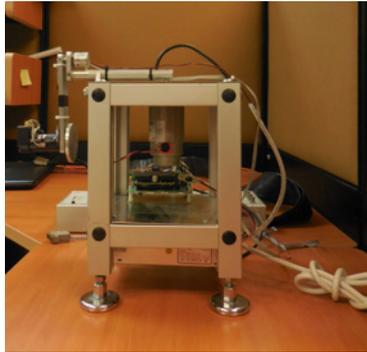
Una vez realizadas las conexiones electrónicas y el ensamble mecánico entre los *Subsistemas A* (actuador y sensores), *B* (etapa de potencia), *C* (estructura mecánica) y *D* (adquisición y procesamiento de datos), se obtuvo el prototipo final del PRI presentado en la Figura 3.13.



(a) Vista isométrica



(b) Vista frontal



(c) Vista lateral



(d) Vista superior

Figura 3.13: Prototipo final del PRI.

### 3.2.3. Parámetros del prototipo

En esta sección se obtienen y calculan los parámetros del prototipo de PRI utilizando dispositivos básicos de medición y fórmulas de Física.

La masa del péndulo se considerará como la masa de (ii) más la masa del chasis del motor de CD, asumiendo que esta es aproximadamente el 40 % de la masa total del motor de CD. Tanto la masa de la placa del péndulo,  $m_{placa} = 0.080$  kg, como la masa del motor,  $m_{mot} = 0.135$  kg, fueron obtenidas con una báscula. Estos valores permitieron calcular la masa del péndulo:

$$m_p = m_{placa} + 0.40m_{mot} = 0.080 + (0.4)(0.135) = 0.134 \text{ kg.}$$

Para calcular  $m_r$  se considera la masa de la rueda más la masa del rotor del motor de CD. Este último se asume es el 60 % de la masa total del motor de CD,  $m_{mot}$ . Al emplear una báscula se encontró la masa de la rueda  $m_w = 0.035$  kg, entonces se tiene:

$$m_r = m_w + 0.60m_{mot} = 0.035 + 0.6(0.135) = 0.1160 \text{ kg.}$$

Por otro lado, la longitud del péndulo  $l_p = 0.125$  m y el diámetro de la rueda  $\phi_r = 0.60$  m fueron corroborados con ayuda de un vernier. Por lo tanto, se calculó el centro de masa del péndulo  $l_{c1}$  utilizando el principio de la balanza, esto es, la suma de pares en el punto de apoyo debe ser igual a cero. Así, al aplicar un peso equivalente al de la placa del péndulo en el extremo y a la distancia  $l_{c1}$  del punto de apoyo; entonces, el arreglo de

la Figura 3.14 debe quedar balanceado. Si se sabe que  $l_p = 0.125$  m, entonces,  $l_{c1}$  está dado por:

$$l_{c1} = \frac{m_{placa} \frac{l_1}{2} + 0.40 m_{mot} l_1}{m_p} = \frac{(0.080) \frac{0.125}{2} + (0.40) (0.135) (0.125)}{0.134} = 0.0877 \text{ m.}$$

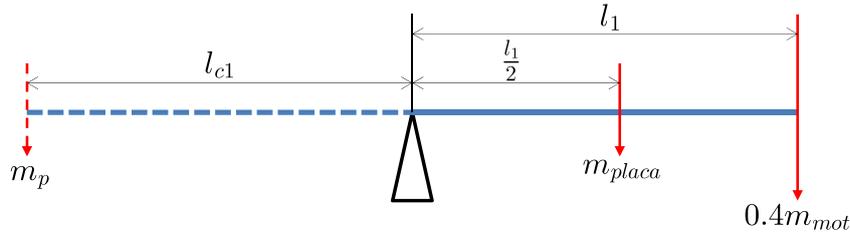


Figura 3.14: Arreglo para cálculo de  $l_{c1}$ .

Con los parámetros anteriores se procede al cálculo de la inercia del péndulo  $I_p$  y de la rueda  $I_r$ . Para calcular  $I_p$  se procede del siguiente modo: Considere la inercia de la placa del péndulo de ancho  $w = 0.32$  m y largo  $l_p = 0.125$  m, con eje de rotación perpendicular al plano de los lados  $w$  y  $l_p$  que pasa por su centro de masa, la cual está dada como [269]:

$$I_* = \frac{1}{12} m_{placa} (w^2 + l_p^2) = \frac{1}{12} (0.080) (0.032^2 + 0.125^2) = 110.99 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Ahora bien, el momento de inercia  $I_p$  está definido alrededor de un eje ubicado a una distancia  $l_{c1} - \frac{l_p}{2}$  del centro de la cara de lados  $w$  y  $l_p$ . De acuerdo al teorema del eje paralelo [269]:

$$\begin{aligned} I_p &= I_* + m_{placa} \left( l_{c1} - \frac{l_p}{2} \right)^2 \\ &= 1.1099 \times 10^{-4} + (0.080) \left( 0.0877 - \frac{0.125}{2} \right)^2 \\ &= 1.6174 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Respecto a  $I_r$ , se requiere calcular la inercia de la rueda más la inercia del rotor del motor de CD. La inercia de la rueda, considerando su eje de rotación en el centro y perpendicular a la rueda, está dada por:

$$I_w = \frac{1}{2} m_w r_w^2 \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{2} m_w r_w^2 = \frac{1}{2} (0.035) (0.030^2) \quad (3.22)$$

$$= 15.75 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad (3.23)$$

donde  $r_w$  es el radio de la rueda. Mientras que la inercia del motor fue tomada de la hoja de datos, siendo esta  $J_m = 1.1 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ . Así, se encuentra:

$$\begin{aligned} I_r &= I_w + J_m \\ &= 15.75 \times 10^{-6} + 1.1 \times 10^{-6} \\ &= 16.85 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

El resumen de los parámetros del prototipo de PRI obtenidos se presenta en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Parámetros del prototipo de PRI.

$I_r = 16.85 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
$m_r = 0.1160 \text{kg}$
$m_p = 0.134 \text{kg}$
$I_p = 161.74 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
$l_p = 0.150 \text{m}$
$l_{c1} = 0.0877 \text{m}$

### 3.3. Controlador para *swing-up* más estabilización

En esta sección se presentan el control no lineal que resuelve el problema de *swing-up* y el control lineal que estabiliza el PRI. Asimismo, se muestran los resultados tanto de simulación como de experimentación correspondientes.

#### 3.3.1. Control no lineal para levantar el péndulo (*swing-up*)

Con la intención de levantar el péndulo del PRI desde la posición colgante y llevarlo alrededor de la posición invertida, se emplea el control no lineal reportado en [11]. Tal control fue deducido a partir del modelo no lineal (3.9)–(3.10) del sistema bajo estudio y está dado por:

$$\tau_{R_{sw}} = k_{R_d} (V - V_0) \text{sat}(\dot{q}_1), \quad (3.25)$$

donde  $k_{R_d}$  es una constante positiva y arbitraria,  $V = K_R + P_R$  es la energía total del PRI,  $V_0 = 2\bar{m}g$  es la energía del péndulo cuando se encuentra en la posición invertida (es decir,  $q_1 = \pm\pi$ ) y

$$\text{sat}(\dot{q}_1) = \begin{cases} d & \text{para } \dot{q}_1 > d, \\ -d & \text{para } \dot{q}_1 < -d, \\ \dot{q}_1 & \text{para } |\dot{q}_1| \leq d, \end{cases}$$

con

$$d = \frac{i_{\text{máx}} k_m}{k_{R_d} V_0},$$

siendo  $i_{\text{máx}}$  un parámetro establecido para la corriente máxima y  $k_m$  la constante de par del motor.

### 3.3.2. Control lineal para estabilizar el péndulo

En la Sección 3.1.2 se presentó el modelo lineal aproximado del PRI, cuya matriz de controlabilidad queda definida como:

$$C_{0R} = [ B \quad AB \quad A^2B ], \quad (3.26)$$

siendo

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\bar{m}g}{(m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p)^2} \\ \frac{\bar{m}g}{(m_r l_p^2 + m_p l_c^2 + I_p)^2} \end{bmatrix}.$$

Desde que

$$\frac{\bar{m}g}{I_r (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p)^3} \neq 0, \quad (3.27)$$

entonces el modelo lineal del PRI (3.18)–(3.19) es controlable; de modo que el control por realimentación del vector de estado:

$$u_\delta = -K_c x_\delta, \quad (3.28)$$

donde  $K_c = (k_{1R}, k_{2R}, k_{3R})$  es el vector de ganancias, puede usarse para lograr la estabilización del péndulo en la posición invertida, es decir:

$$(\bar{q}_1, \bar{\dot{q}}_1, \bar{\dot{q}}_2) \rightarrow (\pi, 0, 0). \quad (3.29)$$

Si se usa (3.17) en (3.28) resulta:

$$u_\delta = \tau_{R_e} = -k_{1R} (q_1 - \bar{q}_1) - k_{2R} (\dot{q}_1) - k_{3R} \dot{q}_2, \quad (3.30)$$

El sistema (3.18)–(3.19) en lazo cerrado con (3.30) queda dado por

$$\dot{x}_\delta = (A - BK_c) x_\delta, \quad (3.31)$$

cuyo polinomio característico resulta ser:

$$p_R(s) = s^3 + \frac{[k_3 (I_p + I_r + l_c^2 m_p + l_p^2 m_r) - I_r k_2]}{I_r m_p l_c^2 + I_r m_r l_p^2 + I_p I_r} s^2 + \frac{k_1 - g\bar{m}}{m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p} s - \bar{m}g k_3. \quad (3.32)$$

Para garantizar que el sistema en lazo cerrado sea estable, (3.32) se iguala con la siguiente dinámica que, a priori, se sabe que es estable:

$$\begin{aligned} p_{R_d}(s) &= (s + \rho) (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \\ &= s^3 + (2\zeta\omega_n + \rho) s^2 + (2\zeta\omega_n \rho + \omega_n^2) + \omega_n^2 \rho, \end{aligned} \quad (3.33)$$

con  $\rho > 0$ ,  $\zeta > 0$  y  $\omega_n > 0$ . Tras resolver para  $k_{1R}$ ,  $k_{2R}$  y  $k_{3R}$  se obtiene:

$$k_{1R} = (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p) (2\zeta\omega_n \rho + \omega_n^2) + g\bar{m}, \quad (3.34)$$

$$k_{2R} = \frac{k_3 (I_p + I_r + l_c^2 m_p + l_p^2 m_r)}{I_r} - (m_p l_c^2 + m_r l_p^2 + I_p) (2\zeta\omega_n + \rho), \quad (3.35)$$

$$k_{3R} = -\frac{\omega_n^2 \rho}{\bar{m}g}. \quad (3.36)$$

### 3.3.3. Simulación numérica

En la simulación numérica los controles (3.25) y (3.28) fueron integrados por medio de la siguiente condición de conmutación:

$$\tau_R = \begin{cases} \tau_{R_{sw}} & \text{para } \sqrt{(q_1 - \bar{q}_1)^2 + \dot{q}_1^2} > 0.5, \\ \tau_{R_e} & \text{para } 0 \leq \sqrt{(q_1 - \bar{q}_1)^2 + \dot{q}_1^2} \leq 0.5, \end{cases} \quad (3.37)$$

dando lugar a un controlador híbrido, cuyo diagrama de bloques se presenta en la Figura 3.15.

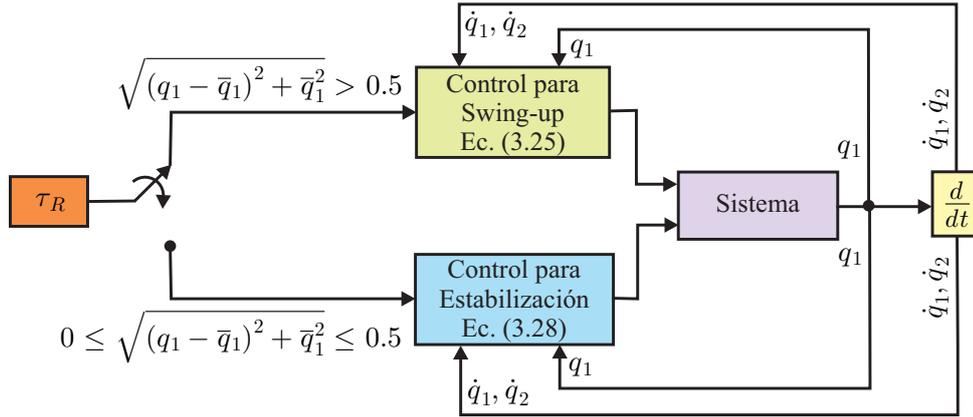


Figura 3.15: Diagrama de bloques del controlador híbrido (3.37).

El modelo no lineal del PRI (3.9)–(3.10) en lazo cerrado con el controlador híbrido (3.37) fue simulado en Matlab-Simulink, es decir, se programó el diagrama de bloques mostrado en la Figura 3.16. Donde se pueden ver principalmente tres bloques, a saber, *Controlador*, *Sistema* y *Salidas*. La descripción de estos bloques se da a continuación.

- *Controlador*. Es un bloque llamado Matlab Function [278], donde se programó el controlador híbrido (3.37); usando  $k_{R_d} = 0.1$  para el control (3.25) y  $k_{1_R} = -7.54$ ,  $k_{2_R} = -0.169$  y  $k_{3_R} = -0.00002$  para el control (3.30). Estas últimas fueron calculadas al escoger  $\rho = 2$ ,  $\zeta = 4$  y  $\omega_n = 8$  en (3.33).
- *Sistema*. También es un bloque Matlab Function, en el cual se programó el modelo no lineal del PRI, es decir, (3.9)–(3.10). Para esto, se usaron los parámetros de la Tabla 3.3 asociados con el prototipo del PRI construido.
- *Salidas*. Son bloques llamados *to workspace* que consisten en arreglos de datos donde se almacena la evolución dinámica de las variables de interés del sistema  $q_1$ ,  $\dot{q}_1$ ,  $q_2$ ,  $\dot{q}_2$ , así como del control  $\tau_R$ . Se recuerda que  $q_2$  es una variable que no se requiere para la simulación del sistema de control; sin embargo, se obtuvo con fines informativos.

En la ejecución del programa de la Figura 3.16 se utilizó un tiempo de muestreo de 1 ms y el solucionador ode1(Euler); obteniendo los resultados de la Figura 3.17. En esa figura se observa que se logra exitosamente el objetivo de control, es decir, el péndulo es llevado de la posición colgante ( $q_1 = 0$ ) hasta la posición invertida ( $q_1 = \pi$ ) y ahí es estabilizado.

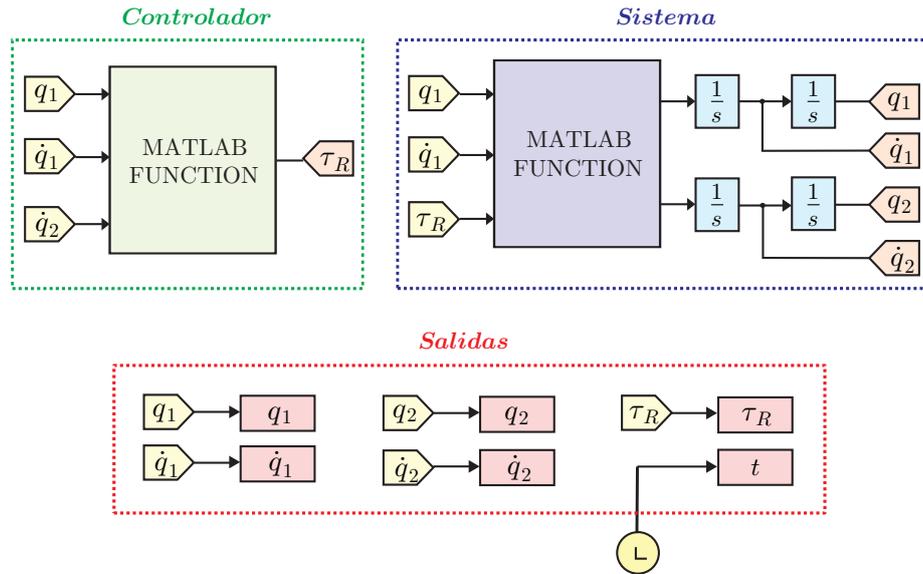


Figura 3.16: Diagrama de bloques en Matlab-Simulink de la simulación en lazo cerrado del PRI.

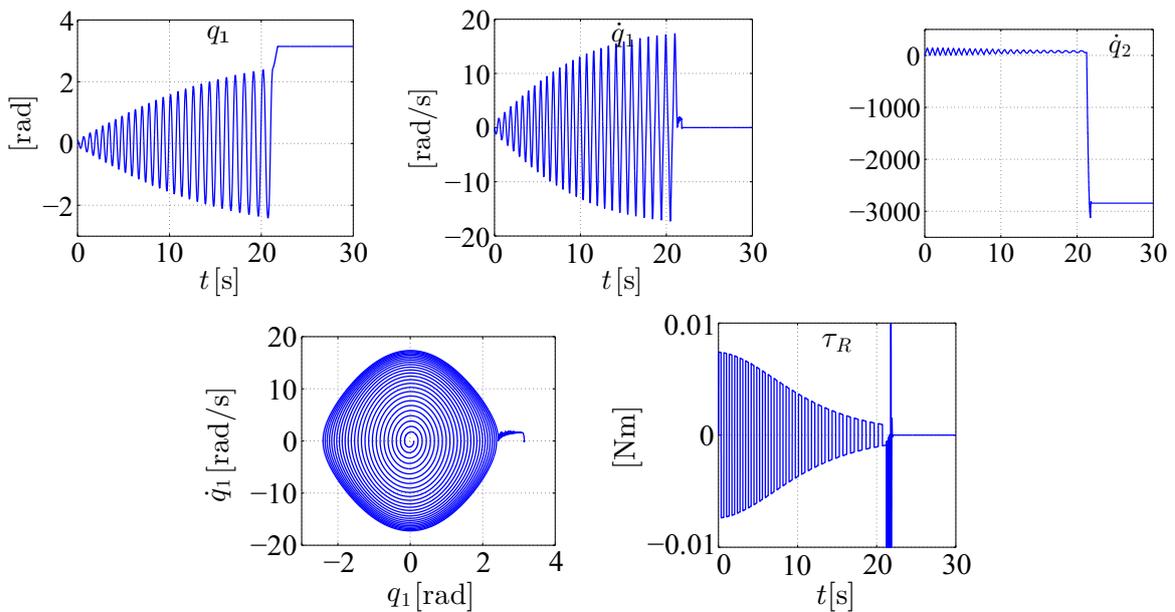


Figura 3.17: Resultados de simulación del PRI con el controlador híbrido (3.37).

### 3.3.4. Implementación experimental

En la implementación experimental, a diferencia de la simulación, se emplea el prototipo construido del PRI en lugar del modelo no lineal. En ese sentido, la experimentación del controlador híbrido (3.37) se llevó a cabo a través de la interacción entre un diagrama de bloques programado en Matlab-Simulink y el prototipo del PRI construido. El diagrama de bloques mencionado se muestra en la Figura 3.18 y corresponde a una modificación del diagrama de bloques usado en simulación (ver Figura 3.16). Las diferencias entre los diagramas de las Figuras 3.16 y 3.18 se explican a continuación.

- *Sistema.* Es el prototipo construido, del cual los encoders ITD01A4Y1 de Baumer

y HEDM 5500 de Faulhaber miden  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente, por medio de los canales de lectura de encoders de la tarjeta DS1104. A partir de estas mediciones, y usando un bloque de derivada de Simulink, se calculan las velocidades  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$ . Desde que el arrancador de servomotores empleado en la etapa de potencia del prototipo construido del PRI tiene un modo de operación por corriente, la corriente conmutada  $i_c$  de entrada al arrancador de servomecanismos se implementa por medio de un canal de PWM de la tarjeta DS1104 con una frecuencia de conmutación de 15 kHz; mientras que el sentido de  $i_c$  (dirección de giro de la flecha del motor de CD) se indica por medio de un bit de salida de la tarjeta DS1104.

- *Acondicionador de la entrada.* Este bloque no se requiere en la simulación ya que ahí  $\tau_R$  puede aplicarse directamente al sistema. Pero debido a que  $\tau_R$  es un parámetro de índole mecánico, en experimentación no puede implementarse directamente, sino que debe hacerse a través de una señal eléctrica. Para ello se requiere un acondicionamiento similar al presentado para el PF en la Sección 2.3.4, es decir:

i) Convertir el par dado por (3.37) en una corriente promedio  $i_{av}$  que puede tomar valores en el intervalo  $[0, 1]$ ; es decir, una corriente asociada con el ciclo útil de trabajo del PWM que debe recibir el arrancador de servomotores. Para esto se emplea la relación dinámica:

$$\tau_R = k_i i_m^*.$$

Se recuerda que  $k_i$  e  $i_m^*$  son la constante de par y la corriente deseada de armadura del motor de CD, respectivamente. Por lo tanto,  $i_m^* = \frac{\tau_R}{k_i}$  puede tomar valores en el intervalo  $[-i_{max}, +i_{max}]$  e  $i_{max}$  es la corriente máxima. Así, la corriente promedio  $i_{av}$  se calcula a través de  $i_{av} = \left| \frac{i_m^*}{i_{max}} \right|$ .

ii) Determinar la dirección de  $i_m^*$  (esto implica, determinar la dirección de la flecha del motor de CD) denotada como  $d$ , considerando la condición (2.57), escrita nuevamente en seguida para facilitar la referencia.

$$d = \begin{cases} 1 & \text{para } i_m^* \geq 0, \\ 0 & \text{para } i_m^* < 0. \end{cases}$$

Después de ejecutar el diagrama de bloques de la Figura 3.18 (con las mismas ganancias, periodo de muestreo y solucionador como en la simulación numérica) se obtuvieron los resultados de la implementación experimental que se presentan en la Figura 3.19. Estos resultados muestran como el péndulo alcanza la posición invertida y se estabiliza en esta posición, de modo que se logra exitosamente el objetivo de control. Es importante mencionar que los resultados mostrados en la Figura 3.19 fueron los mejores resultados obtenidos, en lo que se refiere a la etapa de estabilización. Es decir, en otros experimentos el tiempo en que el péndulo se mantenía estabilizado en la posición invertida fue menor.

### 3.3.5. Discusión de resultados

Al comparar los resultados de simulación y de experimentación obtenidos del PRI en lazo cerrado con el controlador híbrido (3.37) se puede ver que son similares. Una diferencia importante de mencionar es que, al realizar la simulación en condiciones ideales, la etapa de estabilización siempre se lograba exitosamente; sin embargo, en la experimentación la etapa de estabilización no siempre fue exitosa. Esto se puede atribuir a que el

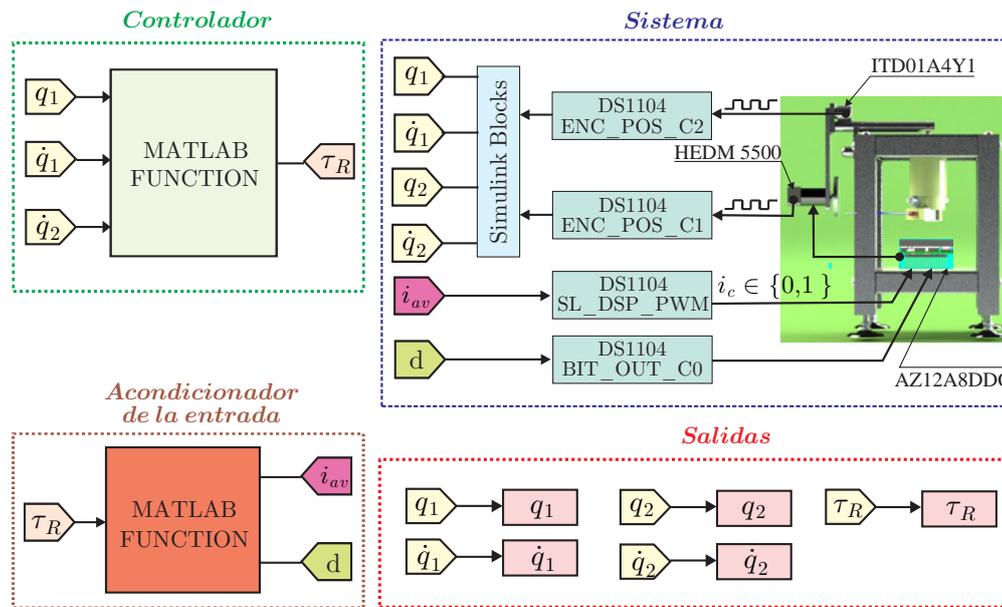


Figura 3.18: Diagrama de bloques de Matlab-Simulink para experimentación del PRI.

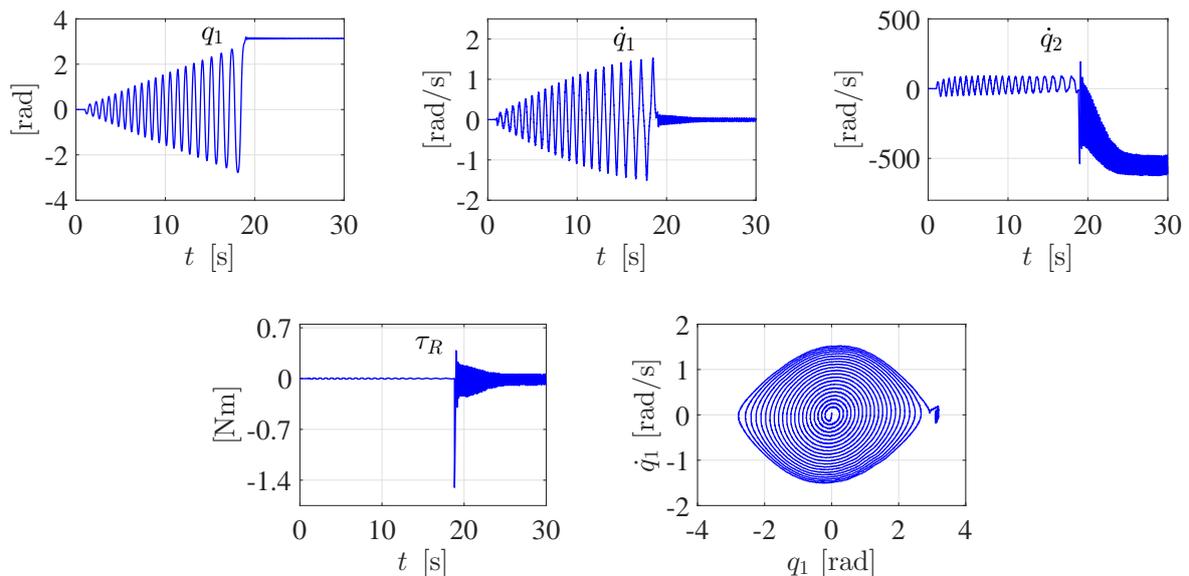


Figura 3.19: Resultados de experimentación del PRI con el controlador híbrido (3.37).

control por realimentación de estado, responsable de ejecutar la tarea de estabilización, no es un control robusto; por lo tanto, es fácilmente afectado por la fricción, que existe en el prototipo construido del PRI, imperfecciones en el maquinado y ensamble de las partes del prototipo, errores de cálculo de los parámetros y los componentes electrónicos utilizados en el prototipo que no son ideales.

# Capítulo 4

## Péndulo Invertido Sobre Carro (PISC)

El modelo dinámico no lineal del PISC (péndulo invertido sobre carro) derivado al aplicar la formulación de Euler-Lagrange se presenta en este capítulo. Asimismo, se introduce el modelo lineal aproximado del correspondiente modelo dinámico no lineal y un modelo de planitud diferencial equivalente a la aproximación lineal del sistema. También, se incluye la construcción de un prototipo del sistema, el cual será utilizado para la implementación de dos controles. En esa dirección, se introduce un control no lineal, basado en el enfoque de energía y previamente reportado en la literatura, el cual permitirá llevar a cabo la tarea de *swing-up*. Asimismo, se describe un control lineal por realimentación del vector de estado que permite estabilizar el péndulo en la posición invertida. Más aún, se propone un esquema de control y un procedimiento de diseño que logra mejora el desempeño del sistema de control al permitir la eliminación de un ciclo límite que aparece cuando se estabiliza el péndulo del PISC. Finalmente, se da la conclusión del capítulo.

### 4.1. Modelos matemáticos

En esta sección se presenta el desarrollo matemático relativo al modelo dinámico no lineal del PISC vía las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. En seguida se realiza el desarrollo asociado con el modelo lineal aproximado alrededor de un punto de operación del sistema y, por último, se presenta el modelo lineal basado en planitud diferencial que es equivalente al modelo lineal aproximado del PISC.

#### 4.1.1. Modelo dinámico con ecuaciones de Euler-Lagrange

El modelo dinámico y no lineal del PISC ha sido reportado en [7]. En este apartado se describen los pasos generales seguidos para lograr mencionado modelo dinámico, a saber:

1. Obtención de la cinemática del sistema.
2. Cálculo de la energía del sistema.
3. Aplicación de la formulación de Euler-Lagrange.

### Cinemática del sistema

En la Figura 4.1 se muestra el PISC, en la cual se ha usado la siguiente nomenclatura:  $M$  y  $\xi$  son la masa y el desplazamiento lineal del carro, respectivamente; mientras que  $m$ ,  $2l$ ,  $J$  y  $\phi$  son la masa, longitud, inercia y desplazamiento angular del péndulo, respectivamente. Por último,  $f$  es la fuerza aplicada al carro y  $g$  es la fuerza de gravedad.

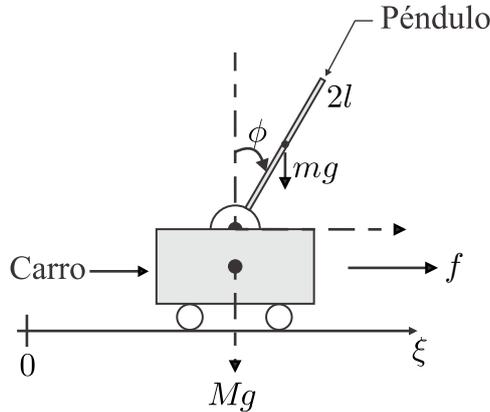


Figura 4.1: Diagrama del PISC.

### Energía del sistema

La energía del PISC está conformada por la energía cinética,  $K_I$ , y la energía potencial,  $V_I$ . Ambas se explican a continuación.

**Energía cinética.** La energía cinética del PISC es la suma de la energía cinética del carro,  $K_\xi$ , más la energía cinética del péndulo,  $K_\phi$ . Esto es:

$$K_I = K_\xi + K_\phi. \quad (4.1)$$

Debido a que el carro tiene únicamente movimiento traslacional en el eje horizontal, su energía cinética está dada por:

$$K_\xi = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2.$$

Mientras que el péndulo tiene movimiento tanto traslacional como rotacional, entonces su energía cinética está determinada por:

$$K_\phi = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2,$$

con

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

siendo

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y},$$

donde  $r_x$  y  $r_y$  son las componentes en el eje horizontal y vertical, respectivamente, del vector de posición  $\mathbf{r}$  al centro de masa del péndulo. De acuerdo a la Figura 4.2, dicho vector de posición está dado por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi + l \sin \phi \\ l \cos \phi \end{bmatrix},$$

lo cual implica que:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} + (l \cos \phi) \dot{\phi} \\ -(l \sin \phi) \dot{\phi} \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,  $v^2$  es dada como sigue:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left[ \dot{\xi} + (l \cos \phi) \dot{\phi} \right]^2 + \left[ -(l \sin \phi) \dot{\phi} \right]^2 \\ &= \dot{\xi}^2 + (2l \cos \phi) \dot{\xi} \dot{\phi} + (\cos^2 \phi) l^2 \dot{\phi}^2 + (\sin^2 \phi) l^2 \dot{\phi}^2 \\ &= \dot{\xi}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + (2l \cos \phi) \dot{\xi} \dot{\phi}. \end{aligned}$$

Entonces,  $K_\phi$  resulta en la siguiente expresión:

$$K_\phi = \frac{1}{2} m \left[ \dot{\xi}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + (2l \cos \phi) \dot{\xi} \dot{\phi} \right] + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2.$$

Finalmente, la energía cinética del sistema PISC queda determinada como sigue:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \left[ \dot{\xi}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + (2l \cos \phi) \dot{\xi} \dot{\phi} \right] + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{\xi}^2 + ml \cos \phi \dot{\xi} \dot{\phi} + \frac{1}{2} (ml^2 + J) \dot{\phi}^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

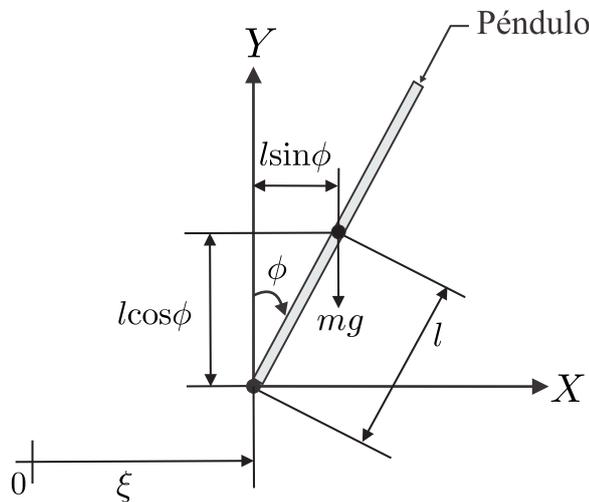


Figura 4.2: Diagrama de cuerpo libre del péndulo

**Energía potencial.** Debido a que el carro se mueve únicamente en el eje horizontal, su energía potencial puede considerarse igual a cero; por lo tanto, la energía potencial del PISC,  $V_I$ , es equivalente a la energía potencial del péndulo,  $V_\phi$ . Esto es (ver Figura 4.2):

$$V_I = V_\phi = mgl \cos \phi. \quad (4.3)$$

**Ecuaciones de movimiento**

A partir de las expresiones (4.2) y (4.3) se construye el lagrangiano  $L_I = K_I - V_I$  como sigue:

$$L_I = \frac{1}{2} (M + m) \dot{\xi}^2 + ml \cos \phi \dot{\xi} \dot{\phi} + \frac{1}{2} (ml^2 + J) \dot{\phi}^2 - mgl \cos \phi.$$

Con el lagrangiano conocido, se procede a la aplicación del formulismo de Euler-Lagrange para determinar las ecuaciones que definen la dinámica del PISC, esto es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_I}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L_I}{\partial \xi} = f, \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_I}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L_I}{\partial \phi} = 0. \quad (4.5)$$

Habiendo realizado las derivadas parciales, se encontraron los siguientes resultados:

$$\frac{\partial L_I}{\partial \xi} = 0, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_I}{\partial \dot{\xi}} &= M \dot{\xi} + m \dot{\xi} + (ml \cos \phi) \dot{\phi} \\ &= (M + m) \dot{\xi} + (ml \cos \phi) \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial \phi} = -(ml \sin \phi) \dot{\xi} \dot{\phi} + mgl \sin \phi, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_I}{\partial \dot{\phi}} &= (ml \cos \phi) \dot{\xi} + ml^2 \dot{\phi} + J \dot{\phi} \\ &= (ml \cos \phi) \dot{\xi} + (ml^2 + J) \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Mientras que al derivar con respecto al tiempo a (4.7) y (4.9) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_I}{\partial \dot{\xi}} \right) = (M + m) \ddot{\xi} + (ml \cos \phi) \ddot{\phi} - (ml \sin \phi) \dot{\phi}^2, \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_I}{\partial \dot{\phi}} \right) = (ml \cos \phi) \ddot{\xi} - (ml \sin \phi) \dot{\xi} \dot{\phi} + (ml^2 + J) \ddot{\phi}. \quad (4.11)$$

Así, al emplear (4.6), (4.8), (4.10) y (4.11) se llega al siguiente modelo dinámico del PISC:

$$(M + m) \ddot{\xi} + (ml \cos \phi) \ddot{\phi} - (ml \sin \phi) \dot{\phi}^2 = f, \quad (4.12)$$

$$(ml \cos \phi) \ddot{\xi} + (ml^2 + J) \ddot{\phi} - mgl \sin \phi = 0, \quad (4.13)$$

el cual tiene la siguiente representación matricial:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_I) \ddot{\mathbf{q}}_I + \mathbf{C}(\mathbf{q}_I, \dot{\mathbf{q}}_I) \dot{\mathbf{q}}_I + \mathbf{g}(\mathbf{q}_I) = \mathbf{F}_I, \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_I &= \begin{bmatrix} \xi \\ \phi \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(\mathbf{q}_I) &= \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \phi \\ ml \cos \phi & ml^2 + J \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}_I, \dot{\mathbf{q}}_I) &= \begin{bmatrix} 0 & -(ml \sin \phi) \dot{\phi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_I) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \phi \end{bmatrix}, & \mathbf{F}_I &= \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 4.1.2. Modelo lineal aproximado

El modelo lineal aproximado del PISC es útil para proponer el control lineal que estabilizará el péndulo en la posición invertida. En esa dirección, a continuación se obtiene la representación en variables de estado del modelo no lineal (4.12)–(4.13) y los puntos de operación del sistema. Esto permitirá la aplicación del método de linealización aproximada.

#### Representación en variables de estado

Recuérdese la forma general de representación en variables de estado de un sistema no lineal, (2.20), la cual se reescribe en seguida para facilitar la referencia:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x). \end{aligned}$$

Considérense ahora las siguientes variables para el PISC:

$$x = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad u = f, \quad (4.15)$$

y se escoge  $y = h(x) = \phi$ . Para completar la representación en variables de estado del modelo (4.12)–(4.13), de (4.14) se despeja  $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{I}} = [\ddot{\xi} \quad \ddot{\phi}]^T$  como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{q}_{\mathbf{I}}) \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{I}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\mathbf{I}}, \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{I}}) \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{I}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_{\mathbf{I}}) &= \mathbf{F}_{\mathbf{I}}, \\ \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{I}} &= \mathbf{D}(\mathbf{q}_{\mathbf{I}})^{-1} [\mathbf{F}_{\mathbf{I}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\mathbf{I}}, \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{I}}) \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{I}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}_{\mathbf{I}})], \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_{\mathbf{I}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{ml^2 + J}{(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} & \frac{-lm \cos \phi}{(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} \\ \frac{-lm \cos \phi}{(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} & \frac{M + m}{(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} \end{bmatrix},$$

siendo  $\mathbf{D}(\mathbf{q}_{\mathbf{I}})$  invertible porque su determinante es diferente de cero. Tras efectuar el álgebra matricial se encuentra:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(ml^2 + J)(f + lm\dot{\phi}^2 \sin \phi) - (lm \cos \phi)(glmsen\phi)}{(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} \\ \frac{-lm \cos \phi (f + lm\dot{\phi}^2 \sin \phi) + (M + m)glmsen\phi}{(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} \end{bmatrix}.$$

Entonces, se puede escribir la representación en variables de estado del PISC como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \frac{(ml^2 + J)(f + lm\dot{\phi}^2 \sin \phi) - (lm \cos \phi)(glmsen\phi)}{(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} \\ \dot{\phi} \\ \frac{-lm \cos \phi (f + lm\dot{\phi}^2 \sin \phi) + (M + m)glmsen\phi}{(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

siendo

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \frac{(ml^2 + J) \left( f + lm\dot{\phi}^2 \text{sen}\phi \right) - (lm \cos \phi) (glmsen\phi)}{(M + m) (ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} \\ \dot{\phi} \\ \frac{-lm \cos \phi \left( f + lm\dot{\phi}^2 \text{sen}\phi \right) + (M + m) glmsen\phi}{(M + m) (ml^2 + J) - (ml \cos \phi)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} = f(x, u).$$

### Puntos de operación del sistema

En aras de determinar los puntos de operación del PISC, se resuelve lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\xi}} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\bar{\phi}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0} \equiv \begin{bmatrix} \frac{(ml^2 + J) \left( \bar{f} + lm\bar{\phi}^2 \text{sen}\bar{\phi} \right) - (lm \cos \bar{\phi}) (glmsen\bar{\phi})}{(M + m) (ml^2 + J) - (ml \cos \bar{\phi})^2} \\ \bar{\xi} \\ \frac{-lm \cos \bar{\phi} \left( \bar{f} + lm\bar{\phi}^2 \text{sen}\bar{\phi} \right) + (M + m) glmsen\bar{\phi}}{(M + m) (ml^2 + J) - (ml \cos \bar{\phi})^2} \\ \bar{\phi} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi} & \dot{\bar{\xi}} & \bar{\phi} & \dot{\bar{\phi}} \end{bmatrix}^T = \bar{x}$$

son valores del vector de estado  $x$  cuando el sistema puede permanecer sin movimiento, bajo el efecto de una adecuada entrada constante  $\bar{u} = \bar{f}$ , y

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\xi}} \\ \frac{(ml^2 + J) \left( \bar{f} + lm\bar{\phi}^2 \text{sen}\bar{\phi} \right) - (lm \cos \bar{\phi}) (glmsen\bar{\phi})}{(M + m) (ml^2 + J) - (ml \cos \bar{\phi})^2} \\ \dot{\bar{\phi}} \\ \frac{-lm \cos \bar{\phi} \left( \bar{f} + lm\bar{\phi}^2 \text{sen}\bar{\phi} \right) + (M + m) glmsen\bar{\phi}}{(M + m) (ml^2 + J) - (ml \cos \bar{\phi})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_2(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_3(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_4(\bar{x}, \bar{u}) \end{bmatrix} = f(\bar{x}, \bar{u}).$$

De la primera y tercera fila de (4.17) es claro que

$$\dot{\bar{\xi}} = 0, \quad \dot{\bar{\phi}} = 0;$$

mientras que de la cuarta fila de (4.17) se tiene:

$$\frac{-lm \cos \bar{\phi} \left( \bar{f} + lm\bar{\phi}^2 \text{sen}\bar{\phi} \right) + (M + m) glmsen\bar{\phi}}{(M + m) (ml^2 + J) - (ml \cos \bar{\phi})^2} = 0.$$

Al evaluar la expresión anterior con  $\bar{\phi} = 0$  y puesto que:

$$(M + m)(ml^2 + J) - (ml \cos \bar{\phi})^2 \neq 0, \infty,$$

tal expresión se reduce a:

$$-lm \cos \bar{\phi} \bar{f} + (M + m) gl m \sin \bar{\phi} = 0.$$

Así, para cumplir la igualdad a cero se debe satisfacer

$$\bar{f} = 0 \quad \wedge \quad \sin \bar{\phi} = 0 \implies \phi = \pm n\pi, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Nótese que estos valores,  $\bar{f} = 0$  y  $\phi = \pm n\pi$ , también cumplen la igualdad a cero de la segunda fila de (4.17) y que, además, no existe una restricción para  $\bar{\xi}$ . Quedando los puntos de operación del PISC definidos como:

$$\bar{\xi} = \text{Arbitrario}, \quad \dot{\bar{\xi}} = 0, \quad \bar{\phi} = \pm n\pi, \quad \dot{\bar{\phi}} = 0, \quad \bar{f} = 0,$$

de los cuales se escoge el siguiente punto de operación del control lineal:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \dot{\bar{\xi}} \\ \bar{\phi} \\ \dot{\bar{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f} = 0.$$

Es importante señalar que se escogió tal punto de operación puesto que se desea estabilizar el péndulo en la posición invertida.

### Linealización aproximada

El modelo no lineal del PISC (4.12)–(4.13) puede ser aproximado por el modelo lineal (2.26)–(2.27), el cual se reescribe a continuación para facilitar la referencia,

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, \\ y_\delta &= Cx_\delta, \end{aligned}$$

donde, en el caso del PISC, se define lo siguiente:

$$x_\delta = \begin{bmatrix} x_{\delta 1} \\ x_{\delta 2} \\ x_{\delta 3} \\ x_{\delta 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi - \bar{\xi} \\ \dot{\xi} - \dot{\bar{\xi}} \\ \phi - \bar{\phi} \\ \dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad u_\delta = f - \bar{f} = f; \quad (4.18)$$

mientras que las matrices constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  quedan definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial \dot{\xi}} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial \phi} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial \dot{\xi}} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial \phi} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial \dot{\xi}} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial \phi} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial \xi} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial \dot{\xi}} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial \phi} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})},$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial \xi} & \frac{\partial h(x)}{\partial \dot{\xi}} & \frac{\partial h(x)}{\partial \phi} & \frac{\partial h(x)}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} \Bigg|_{\bar{x}}.$$

Después de realizar las operaciones correspondientes, se encuentra que  $A$ ,  $B$  y  $C$  quedan dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(ml)^2 g}{(M+m)(ml^2+J)-(ml)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(M+m)mlg}{(M+m)(ml^2+J)-(ml)^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml^2+J}{(M+m)(ml^2+J)-(ml)^2} \\ 0 \\ \frac{-ml}{(M+m)(ml^2+J)-(ml)^2} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$C = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ]. \quad (4.20)$$

### 4.1.3. Modelo lineal basado en planitud diferencial

En esta sección se obtiene el modelo lineal basado en planitud diferencial del PISC, el cual se utilizará más adelante para proponer un esquema de control que permite eliminar el ciclo límite debido a la no linealidad de zona muerta presente en el prototipo del PISC.

La matriz de controlabilidad  $C_0$  del modelo lineal aproximado del PISC está dada por:

$$C_0 = [ B \ AB \ A^2B \ A^3B ], \quad (4.21)$$

donde

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{(ml^2+J)}{Mml^2+J(M+m)} \\ 0 \\ ml \\ -\frac{Mml^2+J(M+m)}{0} \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{gm^3l^3}{(Mml^2+J(M+m))^2} \\ 0 \\ -\frac{gm^2l^2(M+m)}{(Mml^2+J(M+m))^2} \end{bmatrix},$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} \frac{gm^3l^3}{(Mml^2+J(M+m))^2} \\ 0 \\ \frac{gm^2l^2(M+m)}{(Mml^2+J(M+m))^2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante

$$\det C_0 = \frac{g^2 m^4 l^4}{(Mml^2 + JM + Jm)^4} \neq 0. \quad (4.22)$$

Por lo tanto, el modelo lineal aproximado del PISC es controlable y, en consecuencia, diferencialmente plano [271], Ch. 2. Siendo su salida plana  $F_C$ , dada por:

$$F_C = \lambda_C [ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ] C_0^{-1} x_\delta, \quad (4.23)$$

donde  $\lambda_C$  es una constante diferente de cero arbitraria, escogida convenientemente como  $\lambda_C = -\frac{g}{lM}$ , y  $x_\delta$  es como se definió en (4.18). Después de realizar los cálculos correspon-

dientes, se obtiene  $F_C$  y sus primeras cuatro derivadas:

$$F_C = x_{\delta 1} + lx_{\delta 3}, \quad (4.24)$$

$$\dot{F}_C = x_{\delta 2} + lx_{\delta 4}, \quad (4.25)$$

$$\ddot{F}_C = gx_{\delta 3}, \quad (4.26)$$

$$F_C^{(3)} = gx_{\delta 4}, \quad (4.27)$$

$$F_C^{(4)} = \frac{(M+m)g}{lM} \ddot{F} - \frac{g}{lM} u_\delta, \quad (4.28)$$

con  $u_\delta$  definida como en (4.18). Esta última expresión representa el modelo lineal por planitud diferencial que describe la dinámica lineal aproximada del PISC y desde que  $\bar{f} = 0$ , entonces, (4.28) se puede escribir como:

$$f = (M+m) \ddot{F}_C - \frac{lM}{g} F_C^{(4)}. \quad (4.29)$$

## 4.2. Construcción del prototipo

Los subsistemas que integran al prototipo de PISC construido se describen en esta sección. En general, el prototipo de PISC construido está compuesto de cuatro subsistemas, como se muestra en la Figura 4.3, a saber:

- A) *Actuador y sensores*: Este subsistema está integrado por un motor de CD Pittman 14204S006 y dos encoders incrementales. Uno de los encoders está incluido en el motor de CD Pittman, mientras que el otro encoder es del modelo ITD01B14 de Baumer. El motor de CD permite poner en movimiento al sistema y los encoders permiten estimar la posición lineal del carro y la posición angular del péndulo, respectivamente.
- B) *Etapa de potencia*: Corresponde a los dispositivos electrónicos de potencia que proporcionan energía al motor de CD. Estos dispositivos de potencia son una fuente de alimentación conmutada y un arrancador de servomotores, el cual posee un lazo interno de corriente.
- C) *Estructura mecánica*: Este subsistema está compuesto por los elementos mecánicos del prototipo, es decir, carro, péndulo y base de la estructura.
- D) *Adquisición y procesamiento de datos*: Es una tarjeta DS1104 de dSPACE que por medio de Matlab-Simulink y ControlDesk permite la implementación en tiempo real de controladores para el prototipo; así como la adquisición y procesamiento de las variables del sistema.

### 4.2.1. Actuador y sensores

Como actuador del prototipo de PISC se utiliza el motor de CD Pittman 14204S006, el cual también fue utilizado como actuador del prototipo de PF. De modo que las características y conexiones con la etapa de potencia de este motor se han dado en la Sección 2.2.1. Relativo a los sensores, con los cuales se mide la posición angular de la

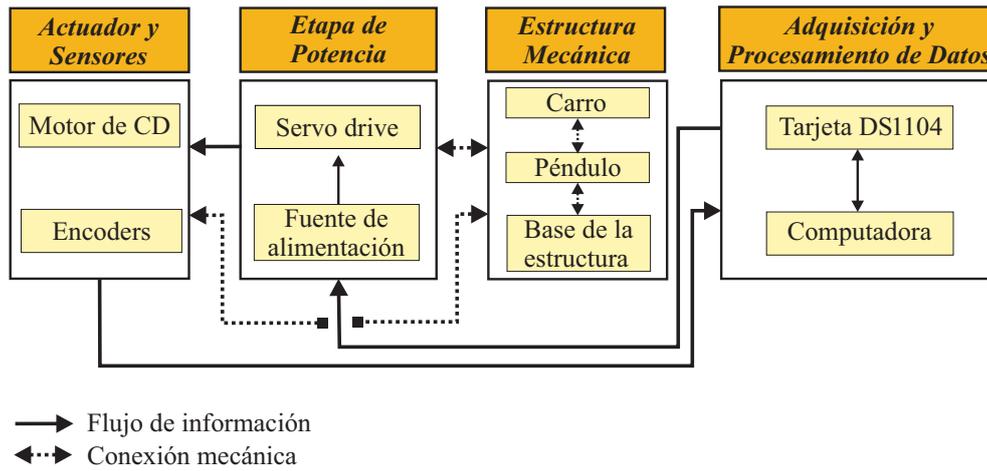


Figura 4.3: Subsistemas del prototipo de PISC.

flecha del motor para estimar la posición lineal del carro, se emplea el encoder incremental de 500 PPR incluido en el motor de CD Pittman. Mientras que la medición de la posición angular del péndulo se realiza vía un encoder miniatura ITD01B14, mostrado en la Figura 4.4. La diferencia entre este encoder y el utilizado en el PF, es que este posee flecha. Así, para conectar los encoders aquí mencionados veáse la Fig. 2.6 en la Sección 2.2.1. Asimismo, para consultar las hojas de datos del motor de CD y de los encoders veáse el Apéndice B.



Figura 4.4: Encoder miniatura ITD01B14.

#### 4.2.2. Etapa de potencia

La etapa de potencia de este prototipo posee los mismos dispositivos de potencia usados para el prototipo de PF, es decir, una fuente de alimentación conmutada HF100W-SF-24 y un arrancador de servomotores AZ12A8DDC, fabricado por Advanced Motion Controls. En el prototipo de PISC, estos dispositivos realizan las mismas funciones que en el prototipo de PF; por lo que se invita al lector a leer la Sección 2.2.2 y el Apéndice B para conocer las hojas de datos de la fuente de alimentación y del arrancador de servomotores.

### 4.2.3. Estructura mecánica

En este apartado se describe el CAD y manufactura de los elementos mecánicos que conforman la estructura mecánica del PISC.

#### Diseño asistido por computadora

Los elementos mecánicos del prototipo de PISC fueron dibujados y ensamblados, virtualmente, con SolidWorks. Esto debido a que tal software facilita las actividades de modelado de elementos mecánicos, creación de ensambles, generación de planos y, además, permite especificar las propiedades del material para cada elemento mecánico.

**Sistema de carro.** El sistema de carro está compuesto por los elementos que se muestran en la Figura 4.5, los cuales se describen en seguida.

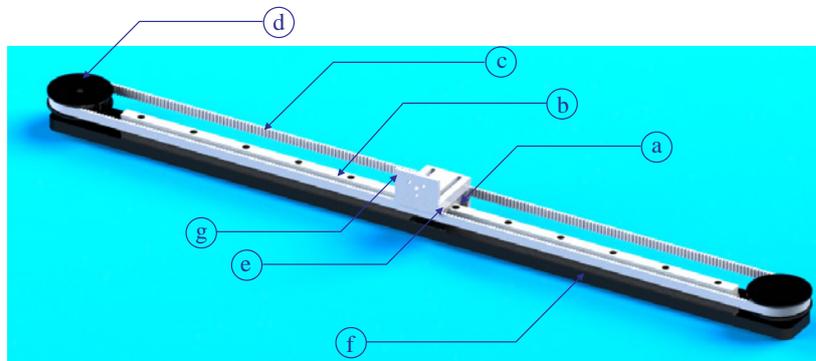


Figura 4.5: CAD del sistema de carro en SolidWorks.

- Ⓐ **Carro.** Corresponde al modelo comercial 521-H-15-A0 fabricado por Thomson en acero al carbon. Este carro cuenta con rodamientos de bola y piezas de lubricación en las partes laterales, permitiendo su desplazamiento sobre la guía lineal descrita en Ⓑ.
- Ⓑ **Guía lineal.** Es una guía lineal 511-H-15A de Thomson de 700 mm de longitud y cuenta con 12 barrenados equidistantes a 60 mm, los cuales son útiles para fijar la guía a una superficie.
- Ⓒ **Banda dentada.** Para transmitir el movimiento del motor de CD al carro 521-H-15-A0, se empleó una banda dentada abierta de paso milimétrico acoplada a las poleas en Ⓓ. La banda dentada es fabricada por Gates, tiene una longitud de 150 mm con 9 mm de ancho y un paso de 5 mm.
- Ⓓ **Poleas.** Son dos poleas de aluminio del modelo P385M de 9 mm de ancho. Una de ellas no tiene rodamiento y se ensambla directamente en la flecha del motor de CD Pittman, el cual se ubica en un extremo de la guía lineal; mientras que la otra polea, la cual posee un rodamiento de bolas, se monta en un eje fijo colocado en el extremo contrario de la guía lineal. Cabe mencionar que el rodamiento de bolas en esta última polea le permite girar libremente siguiendo el movimiento transmitido por la polea conectada a la flecha del motor.

- ⓔ **Ángulo del carro.** Es un ángulo de aluminio de  $90^\circ$ , en el cual se sujetan los extremos de la banda dentada por medio de trinquetes. Este elemento posee dos canales que permiten su acoplamiento sobre el carro, de manera que a través del ángulo del carro se completa el sistema de transmisión de movimiento del motor de CD al carro.
- ⓕ **Base del sistema de carro.** Corresponde a una placa de aluminio, con 850 mm de largo, 50 mm de ancho y 12.7 mm de espesor. Esta placa tiene 12 perforaciones equidistantes a 60 mm, utilizadas para ensamblar la guía lineal. En un extremo de la base del sistema de carro se ensambla el motor de CD; para ello se consideró una perforación de 6 mm por la que pasa la flecha del motor de CD y cuatro perforaciones en las que se colocan tornillos con tuercas para fijar el motor de CD. En el extremo contrario, la base del sistema de carro cuenta con una caja circular de 20 mm de diámetro y 5 mm de profundidad, así como cuatro barrenos M4. En conjunto, la caja y los barrenos M4, sirven para fijar el eje que sostiene a la polea con rodamiento.
- ⓖ **Base del encoder.** Es un ángulo de aluminio de  $90^\circ$  que sostiene al encoder ITD01B14 y está fijo sobre el carro. Para sostener al encoder tiene tres barrenos M3 y para fijar la base del encoder al carro tiene dos canales de 5 mm de ancho.

**Péndulo.** El péndulo está integrado por dos elementos mecánicos, los cuales se observan en la Figura 4.6 y se describen a continuación.

- ⓗ **Placa de aluminio.** Placa de aluminio de 190 mm de largo por 35 mm de ancho. Posee chaffanes de 17.5 mm de radio en las cuatro esquinas y un corte longitudinal de 120 mm de largo por 10 mm de ancho; así como tres perforaciones M3 dispuestas circularmente en la parte superior. Estas últimas son para sujetar este elemento al sujetador descrito abajo.
- Ⓢ **Sujetador.** Pieza circular de latón con un espesor de 10 mm y dos diámetros diferentes; uno de 12 mm y otro de 8 mm, ambos con 5 mm de espesor. Este sujetador sirve para montar el péndulo en la flecha del encoder ITD01B14.

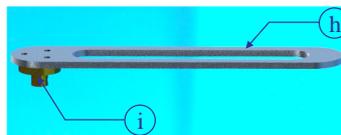


Figura 4.6: CAD del péndulo vía SolidWorks.

**Base de la estructura.** Los elementos que integran a la base de la estructura se muestran en la Figura 4.7. La descripción de tales elementos se da en seguida.

- Ⓣ **Perfiles estructurales.** Dos perfiles de aluminio Bosch Rexroth que sirven para elevar el sistema del carro y el péndulo. Las dimensiones de estos perfiles son: Largo de 498 mm, ancho de 50 mm y espesor de 21 mm.
- Ⓚ **Base del prototipo.** Placa de aluminio T6-6063, con 1000 mm de largo, 100 mm de ancho y 12.7 mm de espesor.

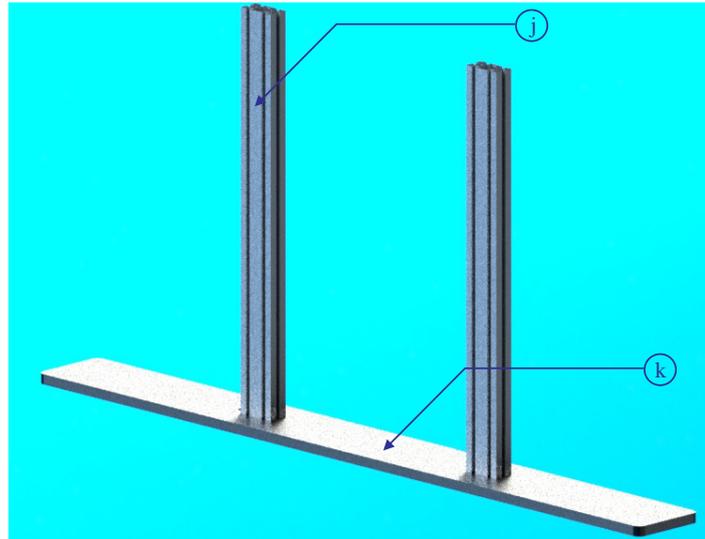


Figura 4.7: CAD de la base de la estructura vía SolidWorks.

Por último, al ensamblar las partes: sistema del carro, péndulo y base de la estructura (*Subsistema C*) junto con el *Subsistema A* se logró el CAD del prototipo del PISC como se muestra en la Figura 4.8.



Figura 4.8: CAD de los *Subsistemas A* y *C* del prototipo de PISC.

Cabe mencionar que originalmente el péndulo del PISC se construyó como una varilla de acero de 400 mm de largo. Esta es la razón de haber usado unos perfiles estructurales de 498 mm de largo. Sin embargo, al implementar el control lineal por realimentación del vector de estado para estabilizar el péndulo en la posición invertida, la varilla sufría deflexión y, en consecuencia, presentaba movimiento en el espacio (no sólo en un plano). Derivado de esto, se optó por utilizar el eslabón B del péndubot (ver Capítulo 5).

### Manufactura de partes

En este apartado se describe el proceso de manufactura de los elementos mecánicos diseñados en 4.2.3. En esta labor se utilizaron los materiales de la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Materiales mecánicos

No. de elemento	Material
Ⓔ, Ⓒ	2 ángulos de aluminio T6-6063 de 50x50x5 mm
Ⓕ	T6-6063 placa de 12.7 mm
Ⓗ	Varilla de acero de 5 mm de diámetro
Ⓘ	Redondo de latón con $D = 12.7$ mm
Ⓙ	Perfil estructural Bosch Rexroth
Ⓚ	T6-6063 placa de 12.7 mm

**Sistema de carro.** Para construir el sistema de carro únicamente se manufacturaron los elementos Ⓔ, Ⓕ y Ⓒ, debido a que los elementos Ⓐ–Ⓓ fueron adquiridos en modelos comerciales.

- Ⓔ **Ángulo del carro.** Manufacturado del ángulo de aluminio T6-6063 de 50x50x5 mm. Los canales para sujetarlo al carro fueron realizados usando una fresadora y *end mills* de 5 mm.
- Ⓕ **Base del sistema de carro.** Manufacturada de la placa de aluminio T6-6063 de 12.7 mm. Las dimensiones especificadas en el plano, las 12 perforaciones equidistantes a 60 mm, la perforación de 6 mm, la caja circular de 20 mm de diámetro y 5 mm de profundidad, así como los cuatro barrenos M4 fueron conseguidos a través de una máquina de control numérico y las siguientes herramientas de corte: *End mills* y brocas de diferentes diámetros, desde 2.5 mm hasta 10 mm. Las roscas de los barrenos M4 fueron hechas manualmente con un machuelo M4.
- Ⓒ **Base del encoder.** Obtenido del ángulo de aluminio de 90°. Los barrenos M3 fueron conseguidos al usar una fresadora convencional y brocas de 2.5 mm; mientras que la rosca de los barrenos se hizo manualmente con machuelos M3. Por último, los canales también fueron realizados con una fresadora convencional pero usando *end mills* de 5 mm.

Al ensamblar el carro, guía lineal, banda dentada, poleas, ángulo del carro, base del sistema del carro y base del encoder, se obtiene el sistema del carro mostrado en la Figura 4.9.

**Péndulo.** En el caso del péndulo, los dos elementos que lo componen fueron manufacturados como a continuación se indica.

- Ⓗ **Varilla.** Conseguida de la varilla de acero de 5 mm de diámetro a través de un simple corte a la medida.

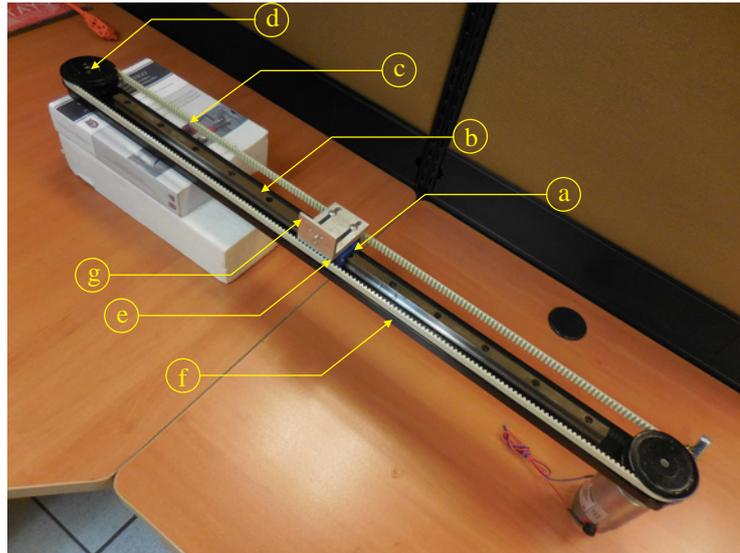


Figura 4.9: Sistema de carro construido.

- ① **Sujetador.** Manufacturada con el redondo de latón de 12.7 mm de diámetro. Para conseguir los diámetros indicados en el plano se emplearon un torno de control numérico y buriles.

Habiendo ensamblado la varilla y el sujetador se obtuvo el péndulo de la Figura 4.10.

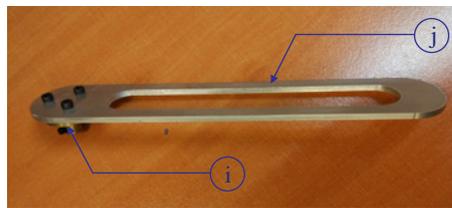


Figura 4.10: Péndulo construido.

**Base de la estructura.** Todos los elementos de la base de la estructura recibieron un tratamiento de manufactura, el cual se describe en seguida.

- ① **Perfiles estructurales.** Estos perfiles fueron obtenidos del perfil estructural de Bosch Rexroth a través de un corte a la medida.
- ② **Base del prototipo.** El tratamiento consistió en alinear las caras y bordes de la placa de aluminio T6-6063 con un centro de maquinado de control numérico y un *end mill*.

Al ensamblar los perfiles estructurales y la base del prototipo se obtuvo la base de la estructura mostrada en la Figura 4.11.

La integración de los *Subsistemas A* y *C* se presenta en la Figura 4.12.

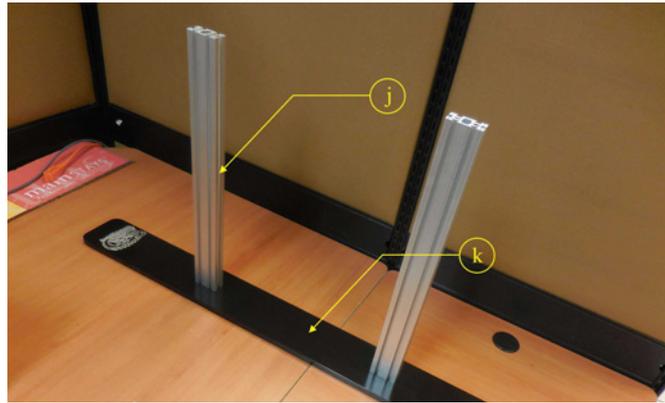


Figura 4.11: Base de la estructura construida.

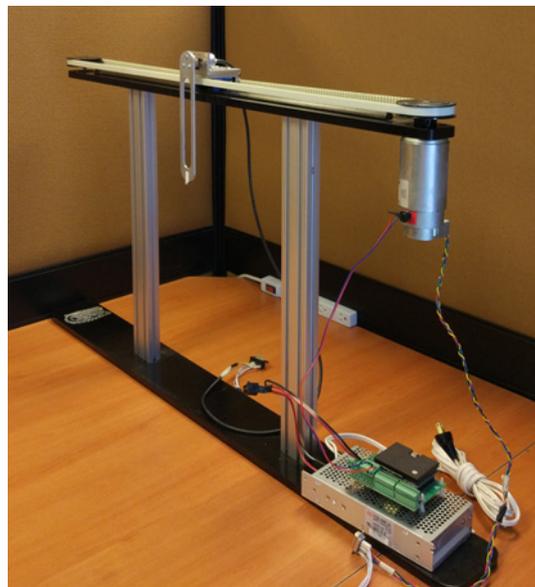
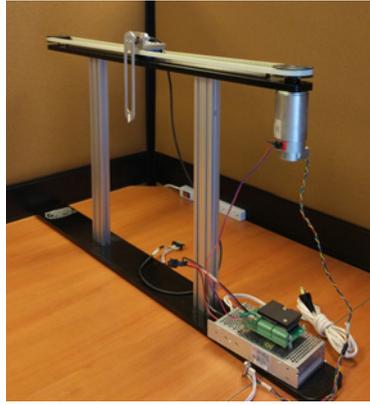


Figura 4.12: *Subsistemas A, B y C* reales del prototipo de PISC.

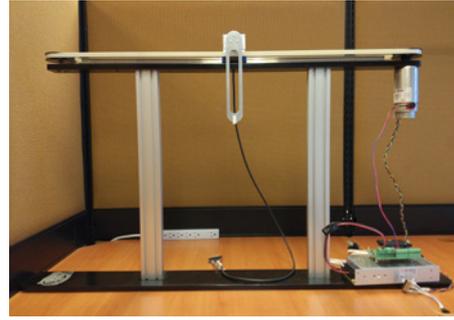
#### 4.2.4. Adquisición y procesamiento de datos

El subsistema de adquisición y procesamiento de datos del PISC está conformado de igual manera que el subsistema de adquisición y procesamiento de datos del PF, es decir, por Matlab-Simulink, ControlDesk y una tarjeta DS1104 de dSPACE. A través de los cuales se pueden implementar controladores para el prototipo; así como adquirir y procesar los datos de los encoders.

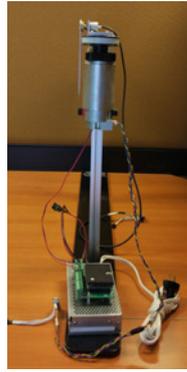
Una vez realizados los ensambles mecánicos y las conexiones electrónicas de los *Subsistemas A, B, C* y *D* se obtuvo el prototipo del PISC mostrado en la Figura 4.13.



(a) Vista isométrica



(b) Vista frontal



(c) Vista lateral



(d) Vista superior

Figura 4.13: Prototipo final de PISC.

#### 4.2.5. Parámetros del prototipo

Se recuerda que los parámetros del prototipo de PISC son necesarios para la simulación e implementación experimental de los controles. La identificación de los parámetros del PISC construido se realiza en esta sección mediante el uso de dispositivos básicos de medición y formulas matemáticas.

La masa del carro y del péndulo fueron obtenidas con ayuda de una báscula, obteniendo  $M = 0.385$  kg y  $m = 0.72$  kg; mientras que la longitud del péndulo se midió con una regla dando como resultado  $2l = 40$  mm, de manera que la longitud al centro de masa del péndulo es  $l = 20$  mm. Con estos valores y considerando que el péndulo es una barra uniforme que gira alrededor de su centro de masa, se calculó la inercia del péndulo  $J$  como sigue:

$$J = \frac{1}{12}m(2l)^2 = 0.96 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Entonces, los parámetros del prototipo de PISC se presentan en la Tabla 4.2.

Toda vez que el péndulo usado en el PISC es el eslabón B del pendubot (ver Capítulo 5), la verificación de los parámetros del péndulo se ha desarrollado en la Sección 5.2.5.

Tabla 4.2: Parámetros del prototipo de PISC construido.

$M = 0.385 \text{ kg}$
$m = 0.034 \text{ kg}$
$l = 0.20 \text{ m}$
$J = 0.1207 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

### 4.3. Controlador para *swing-up* más estabilización

Los controles no lineal y lineal que resuelven los problemas de *swing-up* y estabilización, respectivamente, se presentan en este apartado.

#### 4.3.1. Control no lineal para levantar el péndulo (*swing-up*)

El control no lineal empleado para llevar a cabo la tarea de *swing-up* fue obtenido al explotar las propiedades pasivas del sistema, fue reportado en [6, 7] y está definido como:

$$f_{sw} = \frac{k_\phi m \sin \phi \left( g \cos \phi - l \dot{\phi}^2 \right) - (M + m \sin^2 \phi) \left( k_\xi + k_\xi \dot{\xi} \right)}{k_\phi + (M + m \sin^2 \phi) k_x E}, \quad (4.30)$$

donde  $E = K_I + V_I$  es la energía total del sistema y  $k_\phi$ ,  $k_\xi$ ,  $k_\xi$ ,  $k_x$  son constantes estrictamente positivas, de las cuales  $k_\phi$  y  $k_x$  deben cumplir lo siguiente:

$$\frac{k_\phi}{k_x} > 2mgl(M + m). \quad (4.31)$$

#### 4.3.2. Control lineal para estabilizar el péndulo

Como se ha realizado en los sistemas anteriores, PF y PRI, el control lineal obtenido usando la realimentación del vector de estado se emplea también para estabilizar el péndulo del PISC en la posición invertida, es decir:

$$u_\delta = -K_c x_\delta, \quad (4.32)$$

donde  $K_c = (k_1, k_2, k_3, k_4)$  es el vector de ganancias y  $u_\delta, x_\delta$  son como en (4.18); por lo tanto (4.32) puede escribirse como:

$$f = -k_1 \xi - k_2 \dot{\xi} - k_3 \phi - k_4 \dot{\phi} = f_e. \quad (4.33)$$

Recuérdese que, para poder emplear el control por realimentación de estado (4.32), el modelo lineal aproximado del PISC (2.26)–(2.27) con (4.18) y (4.19)–(4.20) debe ser controlable, lo cual ha sido verificado en la Sección 4.1.3.

En los Capítulos 2 y 3 se ha mostrado como realizar el diseño del vector de ganancias del control por realimentación del vector de estado para el PF y PRI, respectivamente, por medio de la igualación a una dinámica deseada conseguida si se escoge  $\zeta > 0$  y  $\omega_n > 0$ . Otra herramienta útil para diseñar mencionado vector de ganancias es el método de Ackerman, el cual está implementado como una función en Matlab. Así, en la Sección 4.3.3 se diseña  $K_c$  usando el método de Ackerman con Matlab.

### 4.3.3. Simulación numérica

El modelo dinámico del PISC fue simulado en lazo cerrado con los controles no lineal (4.30) y lineal (4.33), para realizar las tareas de *swing-up* y estabilización de manera conjunta, mediante la implementación de la siguiente condición de conmutación:

$$f = \begin{cases} f_{sw} & \text{para } \sqrt{\phi^2 + \dot{\phi}^2} > 0.3, \\ f_e & \text{para } 0 \leq \sqrt{\phi^2 + \dot{\phi}^2} \leq 0.3, \end{cases} \quad (4.34)$$

cuya representación a bloques se muestra en la Figura 4.14.

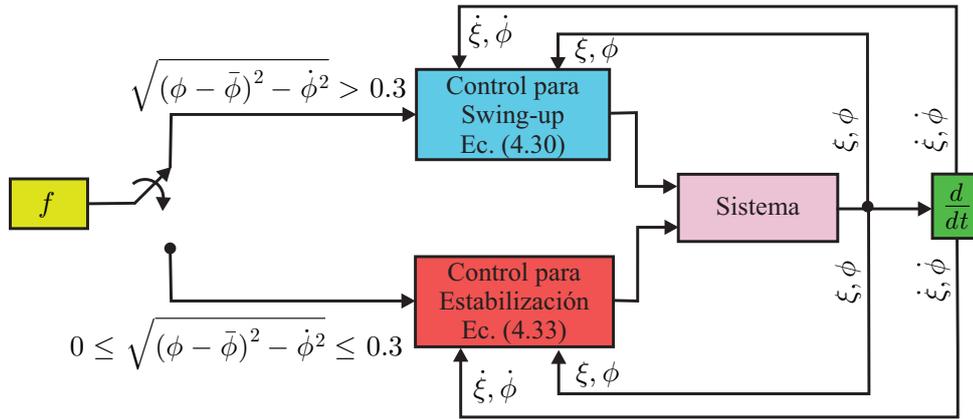


Figura 4.14: Diagrama de bloques del controlador híbrido (4.34).

Entonces, la simulación del PISC con el controlador (4.34) se llevó a cabo en Matlab-Simulink. El diagrama de bloques desarrollado se puede ver en la Figura 4.15, el cual consiste de tres bloques principales, *Controlador*, *Sistema* y *Salidas*, cuya descripción es la siguiente:

- *Controlador*. Aquí se programó el controlador híbrido (4.34) vía un bloque Matlab Function [278]. Las ganancias de los controles (4.30) y (4.33) se escogieron como:

$$k_\phi = 10, \quad k_\xi = 10, \quad k_{\dot{\xi}} = 25, \quad k_x = 75, \quad (4.35)$$

y

$$k_1 = -0.1707, \quad k_2 = -11.1600, \quad k_3 = -44.0640, \quad k_4 = -4.1571, \quad (4.36)$$

respectivamente. Estas últimas fueron calculadas usando la instrucción `acker()` de Matlab y escogiendo el polinomio característico deseado como

$$p_c(s) = s^4 + 45s^3 + 900s^2 + 4000s + 5500, \quad (4.37)$$

el cual tiene sus raíces ubicadas en

$$-19.7826 + 16.8966i, \quad -19.7826 - 16.8966i, \quad (4.38)$$

$$-2.7174 + 0.8613i, \quad -2.7174 - 0.8613i. \quad (4.39)$$

- *Sistema*. Corresponde al modelo no lineal del PISC (4.12)–(4.13) programado también en un bloque Matlab Function y utilizando los parámetros del prototipo de PISC construido (ver Tabla 4.2).
- *Salidas*. Son bloques *to workspace* que almacenan los datos asociados con la evolución dinámica de las variables de interés del sistema,  $\xi$ ,  $\dot{\xi}$ ,  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$ , y del controlador  $f$ . Así, estos datos pueden graficarse.

El diagrama de bloques de Simulink de la Figura 4.15, se ejecutó con un tiempo de muestreo de 1 ms y el solucionador ode1(Euler); obteniendo los resultados exitosos mostrados en la Figura 4.16. Obsérvese que se logra el objetivo de control; esto es, llevar el péndulo desde la posición colgante hasta la posición invertida para después estabilizarlo en esta última.

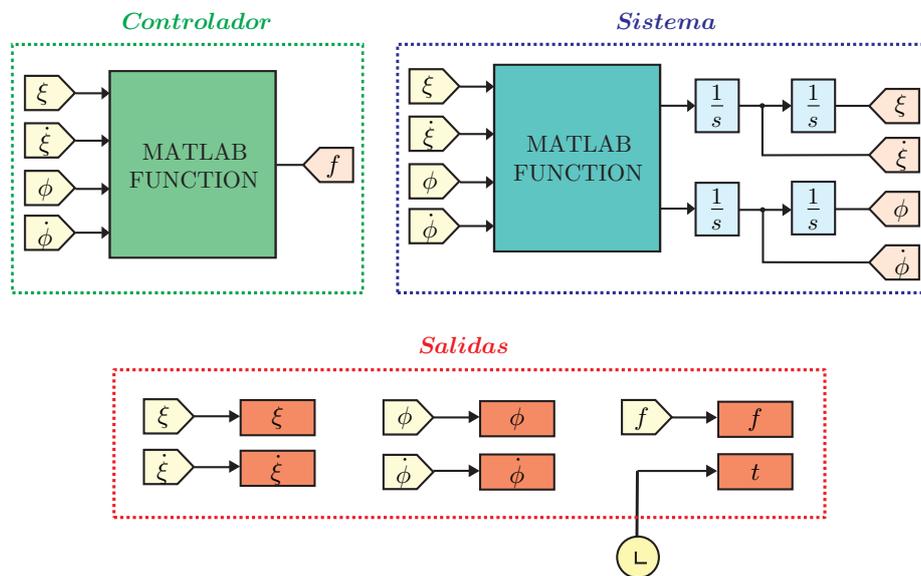


Figura 4.15: Diagrama de bloques en Matlab-Simulink de la simulación en lazo cerrado del PISC.

#### 4.3.4. Implementación experimental

La implementación experimental del controlador híbrido (4.34), para el sistema PISC, fue realizada modificando el diagrama de bloques de Simulink de la Figura 4.15 (usado en simulación). Específicamente, el bloque *Sistema* de tal diagrama fue reemplazado por el prototipo de PISC construido y bloques de adquisición de datos; asimismo, al diagrama de bloques de simulación se le agregó el bloque *Acondicionador del controlador*, como se muestra en la Figura 4.17.

La descripción de la interacción del prototipo construido de PISC con el diagrama de bloques de Simulink modificado, se da en seguida.

- *Sistema*. Corresponde al prototipo construido del cual se obtiene la información arrojada por los encoders ITD01B14 de Baumer y el encoder integrado en el motor de CD y, por medio de los canales de lectura de encoders de la tarjeta DS1104 y bloques de ganancias, se calculan  $\xi$  y  $\phi$ , respectivamente. A partir de estas

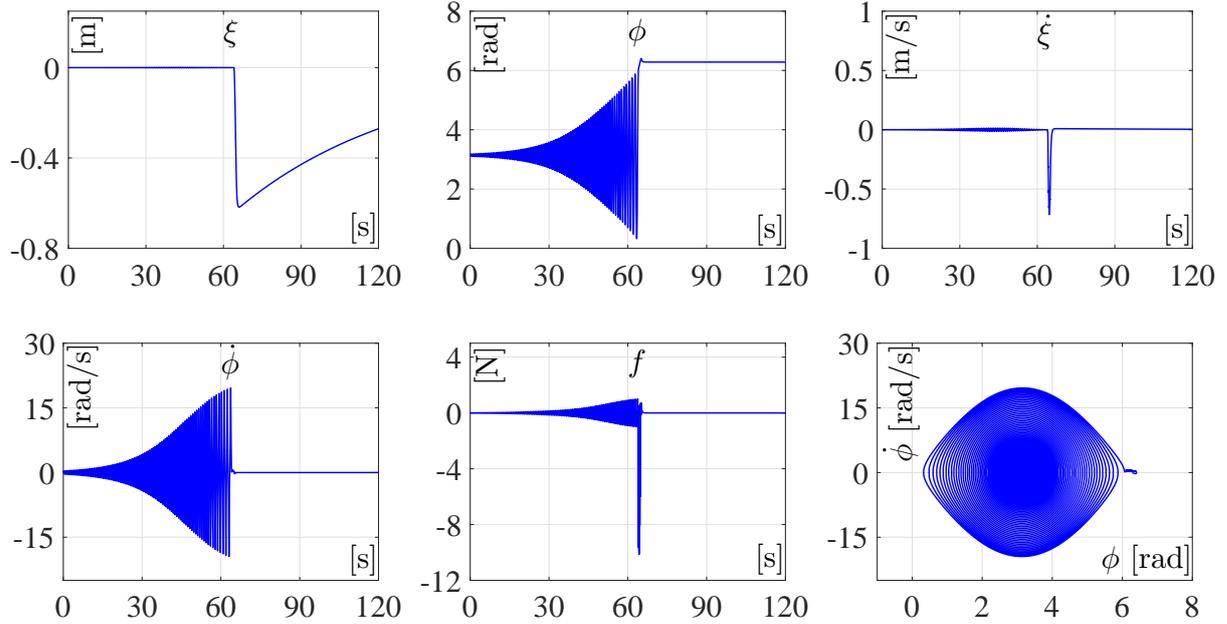


Figura 4.16: Resultados de simulación del PISC con el controlador híbrido (4.34).

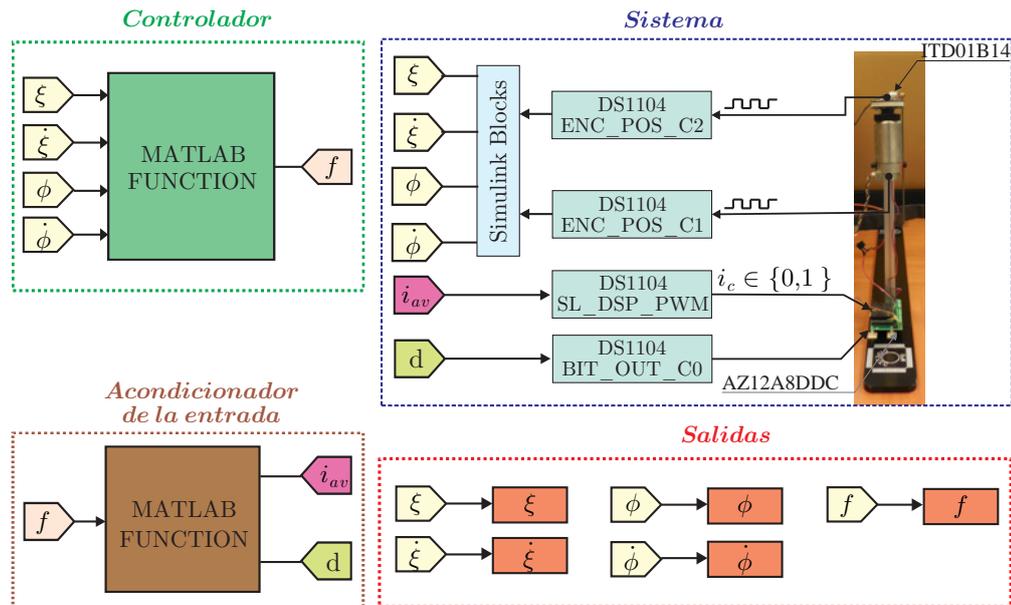


Figura 4.17: Diagrama de bloques de Matlab-Simulink para experimentación con el PISC.

mediciones, y usando un bloque de derivada de Simulink, se calculan las velocidades  $\dot{\xi}$  y  $\dot{\phi}$ . Además, al prototipo se le envía la corriente  $i_c$  en forma de PWM, por medio de un canal de PWM de la tarjeta DS1104, a una frecuencia de conmutación de 15 kHz para accionar al arrancador de servomotores. El sentido del flujo de la corriente  $i_c$  o bien el sentido de giro de la flecha del motor se indica a través de un bit de salida de la tarjeta DS1104 que se conecta al arrancador de servomotores.

- *Acondicionador de la entrada.* Este bloque no se requiere en la simulación debido a que ahí  $f$  puede aplicarse directamente al sistema. Pero debido a que  $f$

es un parámetro de índole mecánico, en experimentación no puede implementarse directamente, sino que debe hacerse a través de una señal eléctrica. Para ello se requiere un acondicionamiento parecido al presentado para el PF y PRI. Este acondicionamiento se refiere a:

i) Convertir la fuerza en una corriente  $i_{av}$  que toma valores en el intervalo  $[0, 1]$  asociado con el ciclo útil de trabajo de la corriente  $i_c$  en forma de PWM mencionada en el bloque anterior *Sistema*. Para ello, la fuerza es transformada en par usando la relación  $\tau_f = fr$  con  $r$  siendo la distancia a la que se aplica la fuerza medida desde el pivote de rotación. Con el par equivalente a  $f$  se obtiene la corriente correspondiente a  $f$  usando  $i_m^* = \frac{\tau_f}{k_i}$ . Recuérdese que  $i_m^*$  y  $k_i$  son la corriente deseada de armadura del motor de CD y la constante de par, respectivamente. Por lo tanto,  $i_m^*$  puede tomar valores en el intervalo  $[-i_{max}, +i_{max}]$ ; siendo  $i_{max}$  la corriente máxima. Así, la corriente promedio  $i_{av}$  se calcula a través de  $i_{av} = \left| \frac{i_m^*}{i_{max}} \right|$ .

ii) Determinar la dirección de  $i_m^*$  denotada como  $d$ , considerando la condición (2.57), escrita nuevamente para facilitar la referencia.

$$d = \begin{cases} 1 & \text{para } i_m^* \geq 0, \\ 0 & \text{para } i_m^* < 0. \end{cases}$$

El diagrama de bloques de la Figura 4.17 se ejecutó con igual tiempo de muestreo y solucionador como en el caso del diagrama de bloques de la Figura 4.15. Los resultados experimentales obtenidos se presentan en la Figura 4.18, donde es claro que se logra el objetivo de control (realizar el *swing-up* y estabilización del péndulo).

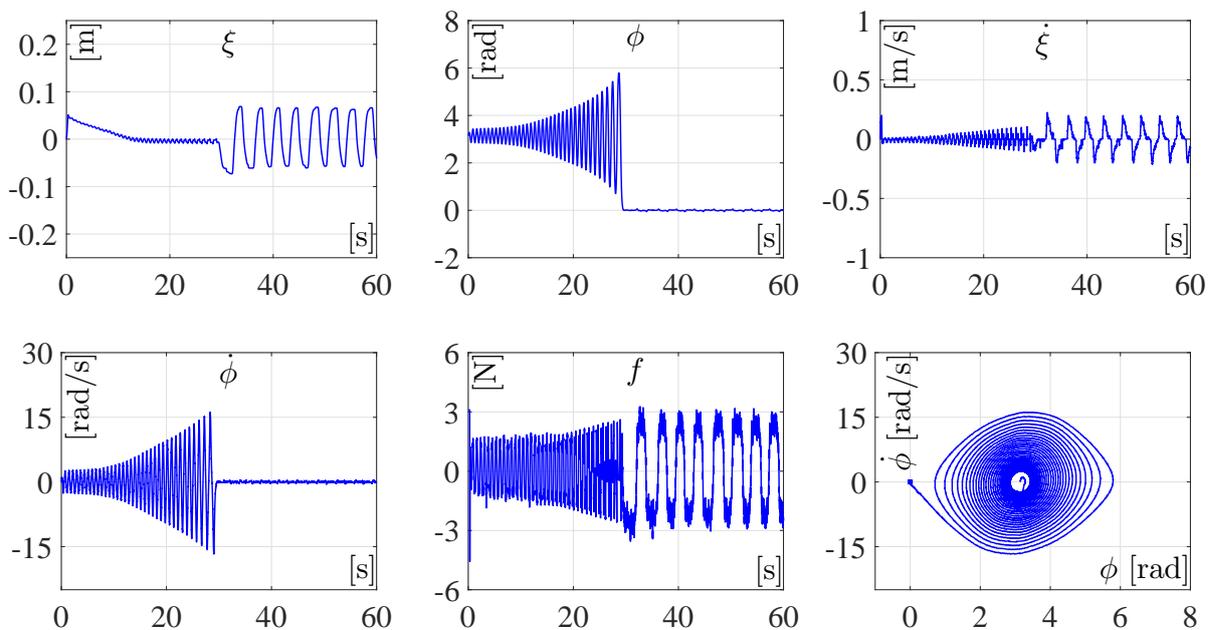


Figura 4.18: Resultados de experimentación del PISC con el controlador híbrido (4.34).

### 4.3.5. Discusión de resultados

Al comparar los resultados de simulación y de experimentación obtenidos del sistema PISC en lazo cerrado con (4.34), se pueden observar diferencias tanto en la etapa de *swing-up* como en la etapa de estabilización. Estas diferencias son principalmente a causa de las fuerzas de fricción, las cuales no fueron consideradas en la simulación. Se resalta que, en la etapa de estabilización, aparecen oscilaciones (ciclo límite). Así, en la siguiente sección, se desarrolla un esquema de control lineal que permite mejorar el desempeño del sistema. Esto a través de la eliminación del ciclo límite cuando se estabiliza el PISC.

## 4.4. Esquema de control para eliminar el ciclo límite

Esta sección propone un esquema de control para la estabilización del péndulo del PISC. Tal esquema es obtenido considerando el modelo de planitud diferencial (4.29). Además, se presenta un análisis de la existencia de ciclos límite en el sistema y se describe un procedimiento para sintonizar el esquema de control.

Después de aplicar la transformada de Laplace al modelo por planitud diferencial (4.29), se encuentra la siguiente función de transferencia:

$$\frac{F_C(s)}{f(s)} = \frac{-\frac{g}{lM}}{s^2(s^2 - \frac{(M+m)g}{lM})}, \quad (4.40)$$

donde  $F_C(s)$  y  $f(s)$  representan las transformadas de Laplace de la salida plana y de la fuerza aplicada, respectivamente. Nótese que  $\frac{(M+m)g}{lM} > 0$  es un número real y que la forma de esta función de transferencia es similar a la del PF obtenida en la Sección 2.1.3. Por lo tanto, en la Figura 4.19 se presenta el esquema de control propuesto en la Sección 2.4.2 pero ahora para controlar la planta (4.40). De este diagrama de bloques se obtiene el siguiente control:

$$f(s) = k_v F_C(s) s^3 + \alpha F_C(s) s^2 + k_d F_C(s) s + k_p F_C(s), \quad (4.41)$$

donde  $k_v$ ,  $\alpha$ ,  $k_d$ ,  $k_p$  son las ganancias de control. Se usa realimentación positiva en la Figura 4.19 debido a que  $-\frac{(M+m)g}{lM} < 0$ .

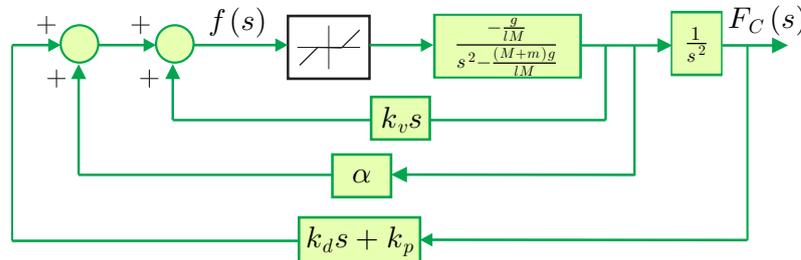


Figura 4.19: Sistema en lazo cerrado considerando no linealidad de zona muerta.

Finalmente, considérese el control por realimentación del vector de estado (4.33), esto es:

$$f_e = -k_1 \xi - k_2 \dot{\xi} - k_3 \phi - k_4 \dot{\phi}.$$

Usando (4.24)–(4.28), se encuentra la siguiente equivalencia entre (4.41) y (4.33):

$$\begin{aligned} k_1 &= -k_p, \\ k_2 &= -k_d, \\ k_3 &= -(\alpha g + lk_p), \\ k_4 &= -(k_v g + lk_d). \end{aligned} \quad (4.42)$$

#### 4.4.1. Análisis de existencia de ciclo límite

Recuérdese que en la Sección 2.4.1 se presentó la función característica y los parámetros de la no linealidad de zona muerta. Esta admite la descripción aproximada de respuesta en frecuencia (2.70) conocida como la función descriptiva de la no linealidad [279], Ch. 5, si  $A \geq \delta$ . A continuación, se escribe (2.70) para facilitar la referencia,

$$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\delta}{A}\right) - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{A}\right)^2} \right].$$

Se asume que la entrada de la no linealidad  $e$ , ver Figura 4.20, es una función de tiempo senoidal con amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ . Esta “función de transferencia”,  $N(A)$ , es real, positiva e independiente de la frecuencia pero dependiente de la amplitud de entrada  $A$ . Su valor máximo es  $N(A) = k > 0$ , el cual se alcanza conforme  $A \rightarrow \infty$ , y su valor mínimo tiende a cero si  $A \rightarrow \delta$ .

Desde que la aproximación de la no linealidad de zona muerta está basada en la función descriptiva, este es el método que se usa para analizar la existencia de ciclo límite en el sistema PISC.

El *método de la función descriptiva* [279], Ch. 5, sugiere representar el sistema en la forma estándar mostrada en la Figura 4.20, el cual se lleva a cabo aplicando álgebra de bloques sobre la Figura 4.19. En este caso, la entrada de la no linealidad es  $e = f(s)$  mientras que el sistema lineal invariante en el tiempo  $G(s)$  es:

$$G(s) = G_1(s) G_2(s), \quad (4.43)$$

donde

$$G_1(s) = \frac{\frac{g}{lM}}{s^2(s^2 - \frac{(M+m)g}{lM})}, \quad (4.44)$$

$$G_2(s) = k_v s^3 + \alpha s^2 + k_d s + k_p, \quad (4.45)$$

son la planta y el control, respectivamente, y  $\frac{g}{lM} > 0$ . Nótese que  $G(s)$  tiene cuatro polos y sólo tres ceros, i.e. la magnitud de (4.43) se comporta como un filtro pasa bajas, lo cual es también necesario para aplicar el método de la función descriptiva.

Entonces, existe ciclo límite si ocurre (2.71), es decir [279], Ch. 5:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}.$$

Esto es, existe ciclo límite si la gráfica polar de  $G(j\omega)$  cruza el eje real negativo en el intervalo abierto  $(-\infty, -1/k)$ . Esto último es cierto desde que  $-1/N(A)$  es real y

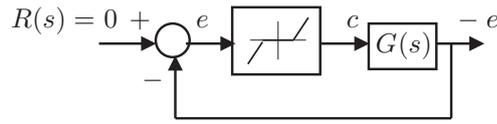


Figura 4.20: Representación equivalente del diagrama de bloques de la Figura 4.19.

negativo. La frecuencia de oscilación,  $\omega_\sigma$ , y la amplitud de la oscilación,  $A$ , se encuentran como los valores de  $\omega$ , en  $G(j\omega)$ , y  $A$ , en  $-1/N(A)$ , en el punto  $\sigma$  donde sus gráficas se cruzan [279], Ch. 5. Una representación gráfica de esta idea se presenta en la Figura 4.21.

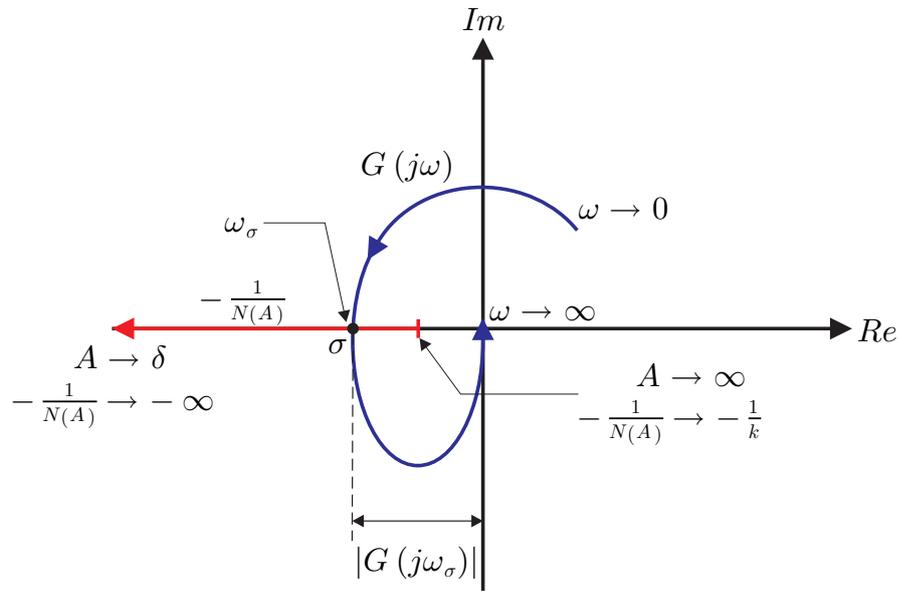


Figura 4.21: Gráfica polar de  $G(j\omega)$  y  $-1/N(A)$ .

#### 4.4.2. Sintonización del control

La sintonización de las ganancias  $k_v$ ,  $\alpha$ ,  $k_d$  y  $k_p$  se logra siguiendo lo que se describe a continuación.

De la Figura 4.19, cuando se omite la zona muerta, se obtiene la siguiente función de transferencia de los dos lazos internos:

$$\frac{-\frac{g}{lM}}{s^2 + \frac{g}{lM}k_v s + \left[\frac{g}{lM}\alpha - \frac{(M+m)g}{lM}\right]} \quad (4.46)$$

Entonces, para asegurar que todos los coeficientes del polinomio característico de esta función de transferencia sean positivos, se encuentran las siguientes condiciones que deben ser satisfechas por  $k_v$  y  $\alpha$ :

$$k_v > 0 \quad \wedge \quad \frac{g}{lM}\alpha > \left| \frac{(M+m)g}{lM} \right| \quad (4.47)$$

Ahora bien, para calcular  $k_d$ , nótese que  $\frac{g}{lM} > 0$  en (4.44) y que, cuando se reemplaza  $s$  por  $j\omega$  también en (4.44), cada uno de los factores  $\frac{1}{-\omega^2} < 0$  y  $\frac{1}{-\omega^2 - \frac{1}{lM}(M+m)g} < 0$  introduce una fase de  $-180^\circ$ . Por lo tanto, la fase de  $G_1(j\omega)$  es  $-360^\circ$  para toda  $\omega \geq 0$ . Con la intención de forzar que la gráfica polar de  $G(j\omega)$  cruce el eje real negativo, i.e., hacer que la fase de  $G(j\omega)$  sea igual a  $-180^\circ$ , en alguna  $\omega > 0$ ; la fase de  $G_2(j\omega)$  debe ser:

$$\angle G_2(j\omega) = \arctan\left(\frac{k_d\omega - k_v\omega^3}{k_p - \alpha\omega^2}\right) = +180^\circ. \quad (4.48)$$

Esto implica que las siguientes condiciones se deben satisfacer,

$$k_d\omega - k_v\omega^3 = 0, \quad (4.49)$$

$$k_p - \alpha\omega^2 < 0. \quad (4.50)$$

De (4.49) se obtiene la siguiente relación para encontrar  $k_d$ :

$$k_d = k_v\omega^2. \quad (4.51)$$

Por último, para calcular  $k_p$ , se reemplaza  $s$  por  $j\omega$  en el control (4.45) para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} G_2(j\omega) &= k_v(j\omega)^3 + \alpha(j\omega)^2 + k_d(j\omega) + k_p, \\ &= j(k_d\omega - k_v\omega^3) + (k_p - \alpha\omega^2), \end{aligned}$$

cuya magnitud está determinada por,

$$|G_2(j\omega)| = \sqrt{(k_d\omega - k_v\omega^3)^2 + (k_p - \alpha\omega^2)^2}. \quad (4.52)$$

Por lo tanto, cuando se resuelve (4.52) para  $k_p$ , se obtiene la siguiente fórmula:

$$k_p = \pm \sqrt{|G_2(j\omega)|^2 - (k_d\omega - k_v\omega^3)^2} + \alpha\omega^2. \quad (4.53)$$

Así, el signo en esta última expresión tiene que escogerse de tal manera que se cumpla (4.50).

Finalmente, para proponer la frecuencia  $\omega = \omega_\sigma$  a la cual se desea que la gráfica polar de  $G(j\omega)$  cruce el eje real negativo, es necesario calcular  $k_p$  y  $k_d$ . Asimismo, se debe conocer la magnitud  $|G_2(j\omega_\sigma)|$  que debe ser introducida por el control, para lo cual se tiene que proponer una magnitud deseada para  $G(j\omega)$  cuando  $\omega = \omega_\sigma$ . Entonces, de lo siguiente:

$$|G(j\omega_\sigma)| = |G_1(j\omega_\sigma)| \cdot |G_2(j\omega_\sigma)|,$$

se puede calcular la magnitud  $|G_2(j\omega_\sigma)|$  como sigue:

$$|G_2(j\omega_\sigma)| = \frac{|G(j\omega_\sigma)|}{|G_1(j\omega_\sigma)|}. \quad (4.54)$$

Desde que de los diagramas de Bode de  $G_1(j\omega)$  se puede obtener  $|G_1(j\omega_\sigma)|$ , los diagramas de Bode son una herramienta adecuada para diseñar las ganancias de control  $k_v$ ,  $\alpha$ ,  $k_d$  y  $k_p$ .

Hasta aquí, se han descrito el procedimiento y fórmulas para sintonizar las ganancias de control, pero hace falta el procedimiento para sintonizar las ganancias con la intención de eliminar el ciclo límite debido a la no linealidad de zona muerta. Esto se explica en el siguiente apartado.

### 4.4.3. Procedimiento para la eliminación del ciclo límite

Para eliminar el ciclo límite generado por la no linealidad de zona muerta inducida por fricción estática en el actuador del sistema PISC, se extiende el procedimiento descrito en el apartado anterior para sintonizar las ganancias del esquema de control propuesto. Para ello, se recuerda la siguiente conjetura:

**Conjetura.** De acuerdo a la función característica de la no linealidad de zona muerta, si  $|e| \leq \delta$  entonces un valor cero aparece en la entrada de la planta  $c = 0$ , i.e., la fuerza aplicada por el motor al sistema PISC es cero y el prototipo puede permanecer en el punto de operación. Desde que el umbral  $\delta$  es incierto debido a que la fricción es incierta, es natural presentarse si es posible hacer  $A < \delta$  en experimentos, a pesar que (2.70) es válida sólo para  $A \geq \delta$ . Recuérdese que  $A \geq |e|$  porque  $A$  es la amplitud de  $e$ . Entonces, el prototipo puede permanecer en el punto de operación si se escoge  $A$  lo suficientemente pequeña, i.e., el ciclo límite puede desaparecer bajo estas condiciones.

Por otro lado, de acuerdo a la Figura 4.24, con el propósito de reducir la amplitud del ciclo límite, la gráfica polar de  $G(j\omega)$  debe cruzar el eje real negativo en un punto  $\sigma$  localizado más a la izquierda del punto  $-1/k = -1$ . Este último es calculado considerando  $k = 1$ , el cual es un valor usualmente empleado para un motor de CD convencional. Esto sugiere que  $|G(j\omega_\sigma)| \gg 1$ , lo cual debe ocurrir a una frecuencia de oscilación  $\omega = \omega_\sigma$ . Así, se propone el siguiente procedimiento para eliminar el ciclo límite inducido por la no linealidad de zona muerta cuando el PISC es estabilizado en la posición invertida:

1. Grafique los diagramas de Bode de la planta  $G_1(s)$ , ver (4.44).
2. Proponga algún valor para  $\omega_\sigma$  y  $|G(j\omega_\sigma)|$ . Un valor adecuado para  $\omega_\sigma = 2\pi f_\sigma$  se puede escoger seleccionando alguna frecuencia razonable de oscilación de la salida plana en Hertz  $f_\sigma$ . Usando el valor de  $\omega_\sigma$  y los diagramas de Bode graficados en 1, mézase  $|G_1(j\omega_\sigma)|$  y calcúlese  $|G_2(j\omega_\sigma)|$  usando (4.54).
3. Calcule  $k_v$  y  $\alpha$  de acuerdo a (4.47) y proponiendo, para la función de transferencia en (4.46), polos localizados lejos del origen. Esto último se sugiere porque el signo de la raíz cuadrada en (4.53) debe ser negativo, lo cual se deduce de (4.50). Sin embargo, de la Figura 4.19 se concluye que alguna  $k_p > 0$  es necesaria para asegurar estabilidad de lazo cerrado. Para evitar un valor negativo de  $k_p$ , es claro de (4.53) y (4.50) que se requieren valores grandes de, ya sea,  $\beta$  o  $\omega_\sigma$ . Por un lado, del polinomio característico de segundo grado en (4.46), se concluye que  $\alpha$  más grande es posible si las raíces de este polinomio característico están más alejadas del origen. Por otro lado, si se prefiere incrementar  $\omega_\sigma$ , propóngase un valor más grande y regrésese al paso 2.
4. Calcule  $k_d$  y  $k_p$  usando (4.51) y (4.53), respectivamente. Nótese que esto y (4.49) aseguran que  $k_p$  siempre es real. Así, si se fue cuidadoso en el paso anterior para seleccionar  $k_v$  y  $\alpha$ ,  $k_p$  será positiva y, por lo tanto, se asegurará estabilidad de lazo cerrado. Si este no es el caso, regrésese al paso 3.
5. Corrobórese que el sistema compensado  $G(j\omega)$  tenga la fase y magnitud deseadas a la frecuencia especificada  $\omega_\sigma$ . Para esto, úsese diagramas de Bode o diagramas polares.

6. Con  $k_v$ ,  $\alpha$ ,  $k_d$ ,  $k_p$  y usando las relaciones (4.42), calcúlense las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  y ejecute experimentalmente el control por realimentación del vector de estado (4.33).
7. Si aparece un ciclo límite, mantenga  $\omega_\sigma$ , incremente  $|G(j\omega_\sigma)|$  y regrese al paso 3 hasta que el ciclo límite desaparezca o bien se observe considerable vibración en el prototipo.
8. Si el ciclo límite no desaparece, pero si aparece considerable vibración en el prototipo, entonces increméntese  $\omega_\sigma$  y escoja  $|G(j\omega_\sigma)|$  igual que en el primer experimento realizado con la anterior  $\omega_\sigma$  y vuelva al paso 3.
9. Si el ciclo límite desaparece, se ha logrado un diseño exitoso y termina el procedimiento.

#### 4.4.4. Resultados experimentales

Tomando en cuenta la Sección 4.4.2 y la conjetura de la Sección 4.4.3, el procedimiento de sintonización presentado también en esta última sección fue aplicado experimentalmente como sigue.

1. Los diagramas de Bode de la planta  $G_1(j\omega)$  fueron graficados como se muestra en la Figura 4.22.

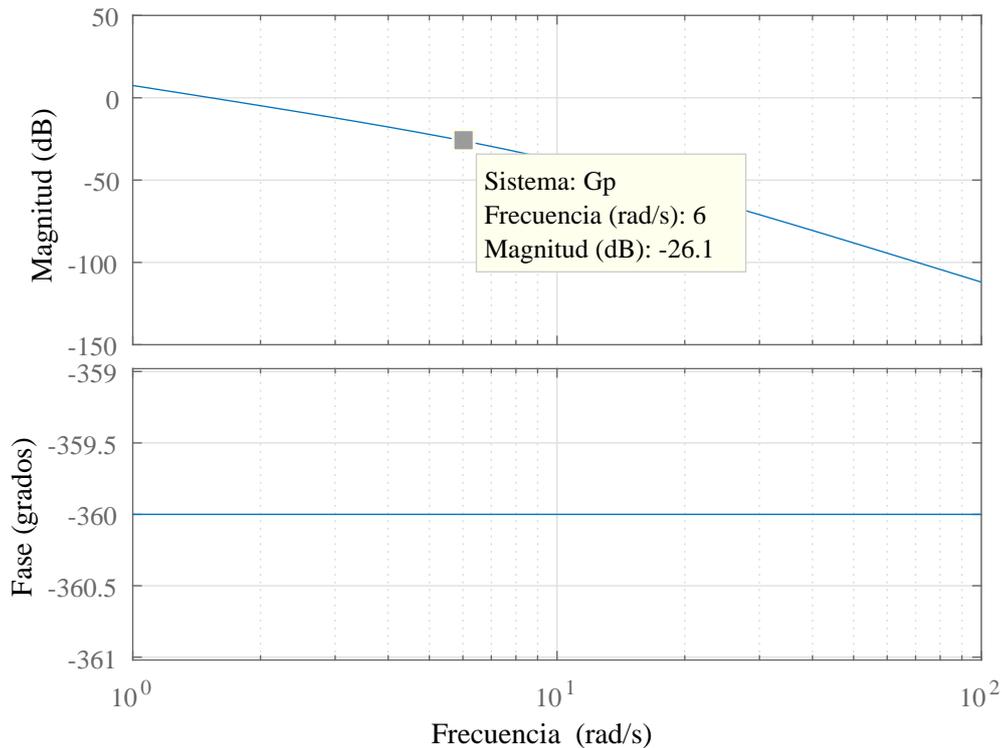


Figura 4.22: Diagramas de Bode de  $G_1(s)$ .

2. La frecuencia  $\omega_\sigma = 6$  rad/s y la magnitud  $|G(j\omega_\sigma)| = 22$  se escogieron inicialmente. De la Figura 4.22, se obtuvo la siguiente magnitud en dB:

$$|G_1(j\omega_\sigma)|_{\text{dB}} = -26.1 \text{ dB.}$$

Esta magnitud en dB fue convertida a:

$$|G_1(j\omega_\sigma)| = 10^{|G_1(j\omega_\sigma)|_{\text{dB}}/20} = 0.0495$$

para aplicar (4.54), de la cual se encontró lo siguiente:

$$|G_2(j\omega_\sigma)| = \frac{4}{44.1570} = 444.0406.$$

Estos valores numéricos serán usados después para calcular  $k_p$ .

- Asimismo, para hacer positivos todos los coeficientes del polinomio característico de (4.46), se seleccionaron  $k_v = 0.94$  y  $\beta = 12.5$ . También, estos valores satisfacen (4.47) y asignan polos reales de (4.46) en  $-225.8894$  y  $-13.6275$ .
- Con los valores numéricos en los pasos 2 y 3, se calculó (4.53) y (4.51) como:

$$k_d = 33.84, \quad k_p = 5.9594.$$

Para (4.53), se escogió signo “-” porque esto hace que  $k_p - \beta\omega_\sigma^2 = -444.0406 < 0$ .

- Los diagrama de Bode del sistema compensado  $G(s)$  se muestran en la Figura 4.23, donde se corrobora que el sistema en lazo abierto tiene la fase deseada,  $-180^\circ$ , a la frecuencia y magnitud deseadas,  $\omega_\sigma = 6$  rad/s y  $|G(j\omega_\sigma)| = 22 \approx 26.9$  dB, respectivamente. La gráfica polar correspondiente de  $G(j\omega)$  se muestra en la Figura 4.24.

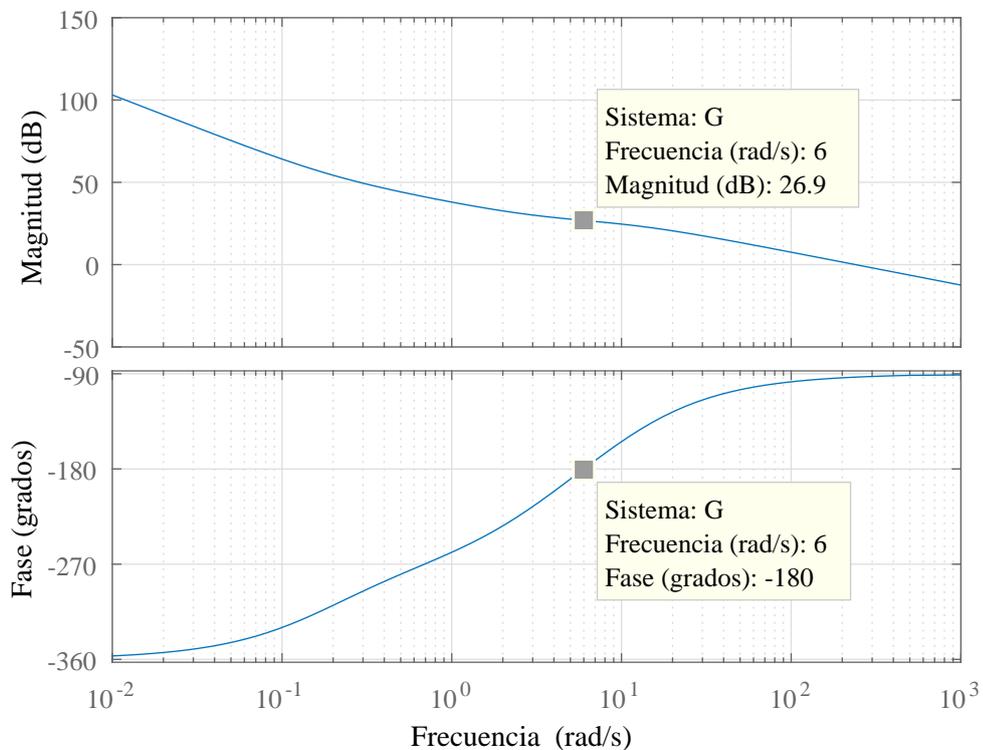
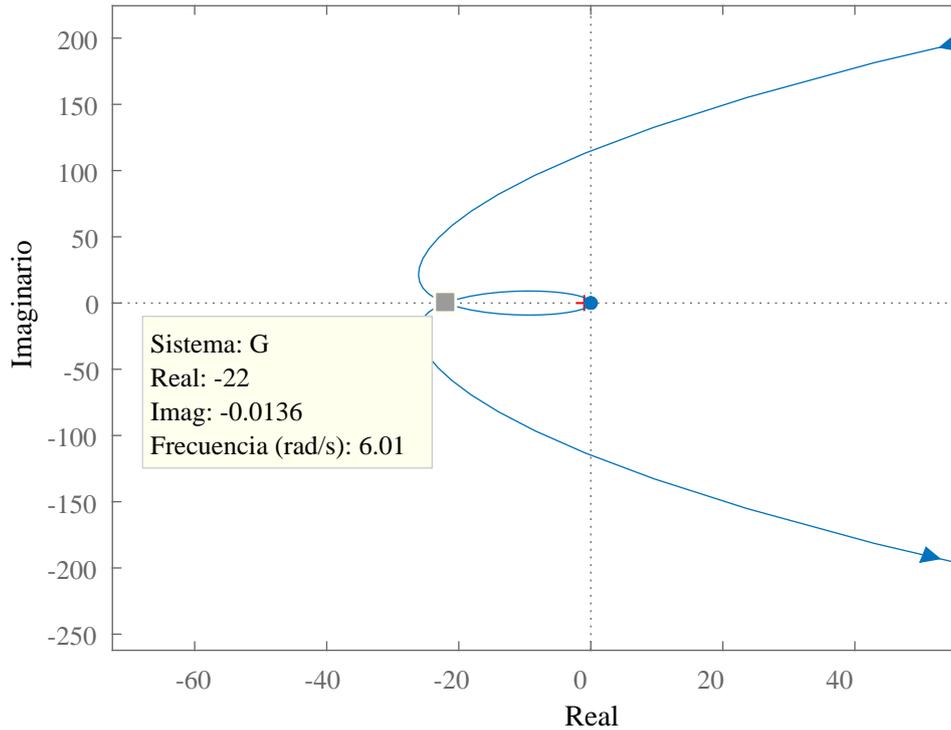


Figura 4.23: Diagramas de Bode de  $G(s)$ .

Figura 4.24: Diagramas polares de  $G(j\omega)$ .

6. Una vez que  $k_v$ ,  $\alpha$ ,  $k_d$  y  $k_p$  son conocidas, las relaciones (4.42) se usaron para encontrar los siguientes valores numéricos para las ganancias del control lineal por realimentación del estado (4.33):

$$\begin{aligned} k_1 &= -5.9594, & k_2 &= -33.84, \\ k_3 &= -123.2209, & k_4 &= -12.6054. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Usando estas ganancias  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , se implementó experimentalmente el control por realimentación del estado (4.33) para estabilizar el PISC construido. Desde que (4.33) sólo estabiliza el prototipo en  $x_\delta = \mathbf{0}$  cuando opera cerca del punto de operación, el péndulo fue acercado manualmente a tal punto de operación; de manera que se empleó la siguiente condición de conmutación:

$$f = \begin{cases} (4.33) & \text{para } \sqrt{(\phi - \bar{\phi})^2 + \dot{\phi}^2} \leq 0.3, \\ 0 & \text{para } \sqrt{(\phi - \bar{\phi})^2 + \dot{\phi}^2} > 0.3. \end{cases} \quad (4.56)$$

Los resultados experimentales obtenidos usando (4.56) con (4.55) se muestran en la Figura 4.25, donde se observa un ciclo límite. Desde que hay ruido en la señal de control  $f$ , la amplitud y frecuencia de oscilación del ciclo límite son difíciles de medir ahí. Pero como  $e = f(s)$  está linealmente relacionada a  $F_C(s)$  a través de (4.41), el análisis de la Sección 4.4.1 sobre el ciclo límite es también válido para  $F_C$ . Por lo tanto, para observar el comportamiento del ciclo límite, se midieron la amplitud y frecuencia de  $F_C$ . La amplitud medida del ciclo límite se denota como  $A_F$  y fue calculada sumando los valores absolutos máximo y mínimo de

$F_C$ , mientras que la frecuencia medida del ciclo límite se denota como  $\omega_{\sigma F}$  y fue calculada usando lo siguiente:

$$\omega_{\sigma F} = \frac{2\pi n}{t_f - t_i},$$

donde  $n$  es el número de oscilaciones ocurridas en el intervalo de tiempo entre  $t_i$  y  $t_f$ . Así, se obtuvieron  $A_F = 0.4323$  m y  $\omega_{\sigma F} = 0.2922$  rad/s.

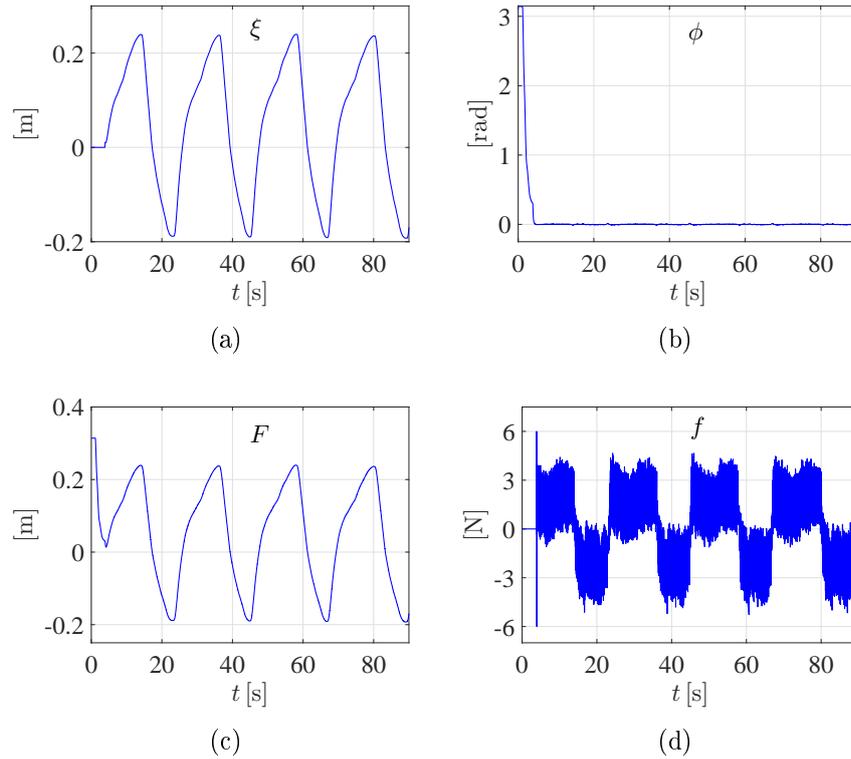


Figura 4.25: Resultados experimentales al usar (4.55).

- Como apareció un ciclo límite en el paso previo, se incrementó  $|G(j\omega_\sigma)|$  en cuatro unidades y se regresó al paso 3. Cuando se llegó a  $|G(j\omega_\sigma)| = 38$ , el ciclo límite fue parcialmente eliminado como se puede ver en la Figura 4.26. Obsérvese en esta figura que cuando hay ciclo límite  $A_F = 0.1371$  m. Aunque podría pensarse que en el siguiente incremento de  $|G(j\omega_\sigma)|$  desaparecería el ciclo límite, cuando se incrementó  $|G(j\omega_\sigma)|$  tal que  $|G(j\omega_\sigma)| = 40$ , se observó considerable vibración en el prototipo en lugar de la eliminación del ciclo límite. Ver los resultados experimentales en la Figura 4.27, donde se midieron  $A_F = 0.2901$  m y  $\omega_{\sigma F} = 0.2365$  rad/s. Es importante resaltar que aunque el ciclo límite no se haya eliminado hasta aquí, fue por lo menos reducido pues  $A_F = 0.2901$  m  $<$   $A_F = 0.4323$  m. Esto está de acuerdo con la Sección 4.4.3. También, nótese que conforme  $|G(j\omega_\sigma)|$  fue incrementada el ruido en la señal de control  $f$  también se incrementó (ver Figuras 4.25(d), 4.26(d) y 4.27(d)). Los valores numéricos de las ganancias asociadas a los controles (4.41) y (4.33) y la amplitud  $A_F$  y frecuencia  $\omega_{\sigma F}$  del ciclo límite obtenido de los experimentos hasta aquí realizados se presentan en la primera columna de la Tabla 4.3.

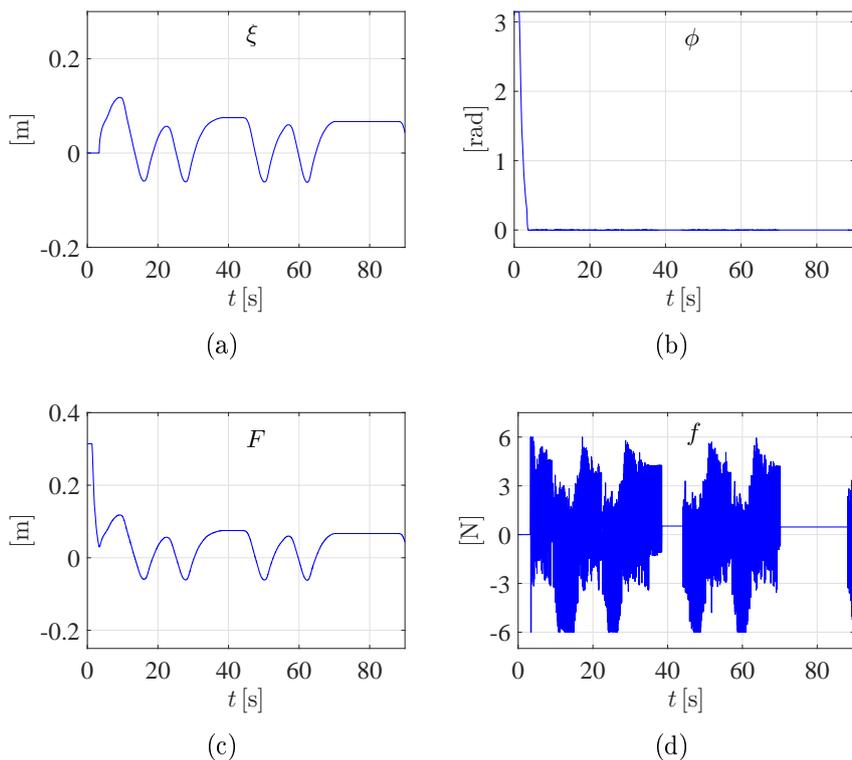


Figura 4.26: Resultados experimentales cuando  $|G(j\omega_\sigma)| = 38$  y  $\omega_\sigma = 6$  rad/s.

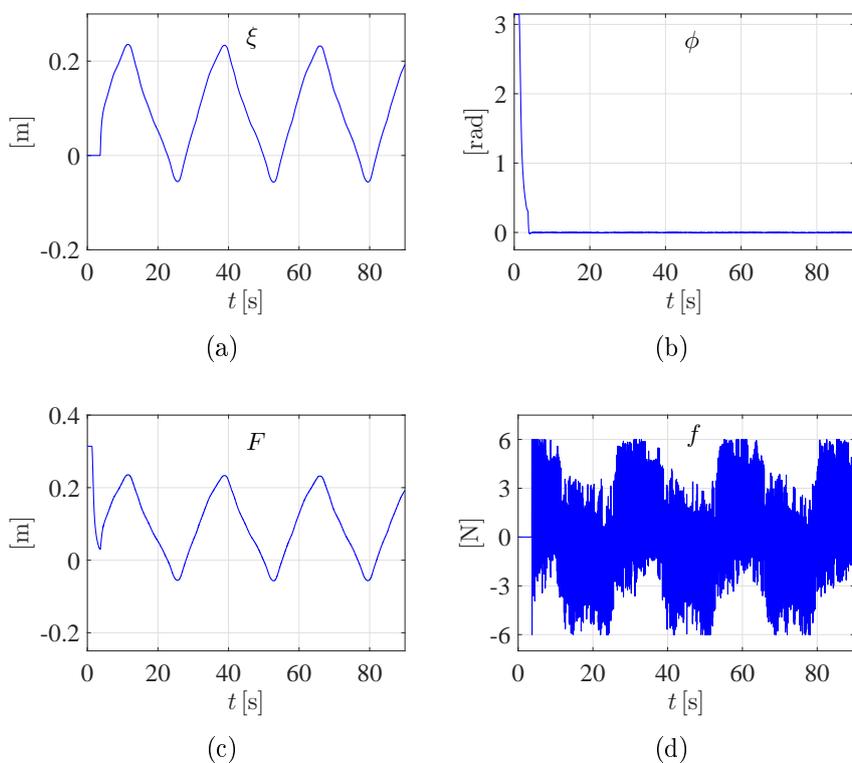


Figura 4.27: Resultados experimentales cuando  $|G(j\omega_\sigma)| = 40$  and  $\omega_\sigma = 6$  rad/s.

8. Desde que en el paso previo el ciclo límite no fue eliminado y se observó considerable vibración en el prototipo (ver ruido en en la Figura 4.27(d)),  $\omega_\sigma$  se incrementó a 8 rad/s,  $|G(j\omega_\sigma)| = 22$  se estableció y se regresó al paso 3. Los valores numéricos correspondientes de las ganancias de los controles (4.41) y (4.33) y la amplitud  $A_F$  y la frecuencia  $\omega_{\sigma F}$  del ciclo límite, se reportan en la segunda columna de la Tabla 4.3. Como un ejemplo de la reducción del ciclo límite, con respecto a los resultados experimentales de la Figura 4.27, se presentan resultados experimentales en la Figura 4.28 considerando  $|G(j\omega_\sigma)| = 34$ . Ahí, es de resaltar que el ciclo límite fue parcialmente eliminado y que pequeñas oscilaciones aparecieron con una  $A_F = 0.0786$  m, la cual es menor que la amplitud del ciclo límite asociado a las Figuras 4.26 y 4.27.

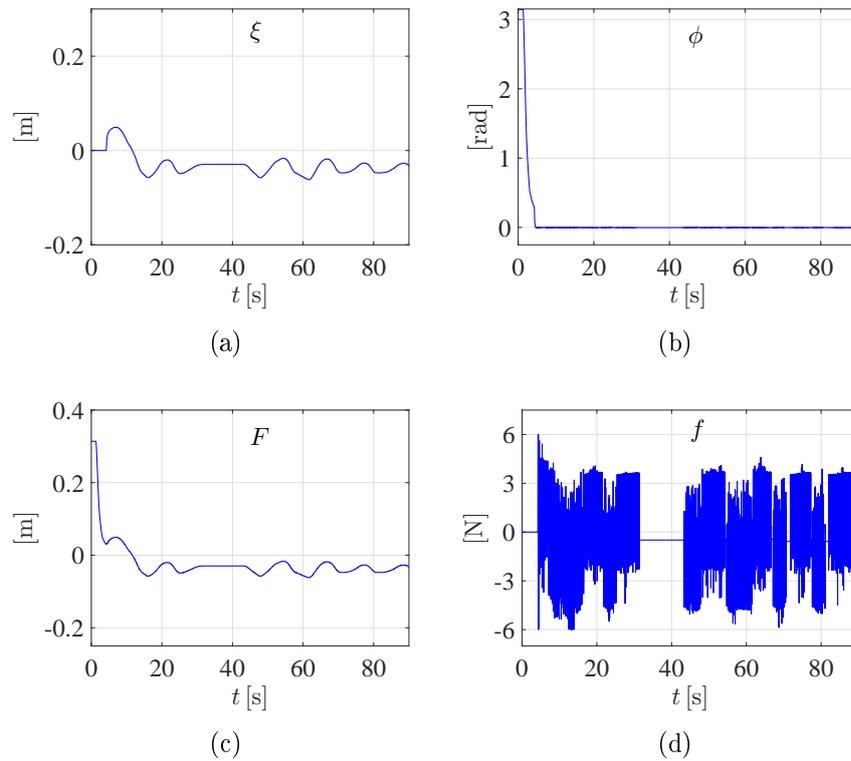


Figura 4.28: Resultados experimentales considerando  $|G(j\omega_\sigma)| = 34$  y  $\omega_\sigma = 8$  rad/s.

9. Finalmente, el ciclo límite desapareció cuando  $|G(j\omega_\sigma)| = 36$  y  $\omega_\sigma = 8$  rad/s. Los resultados experimentales se muestran en la Figura 4.29.

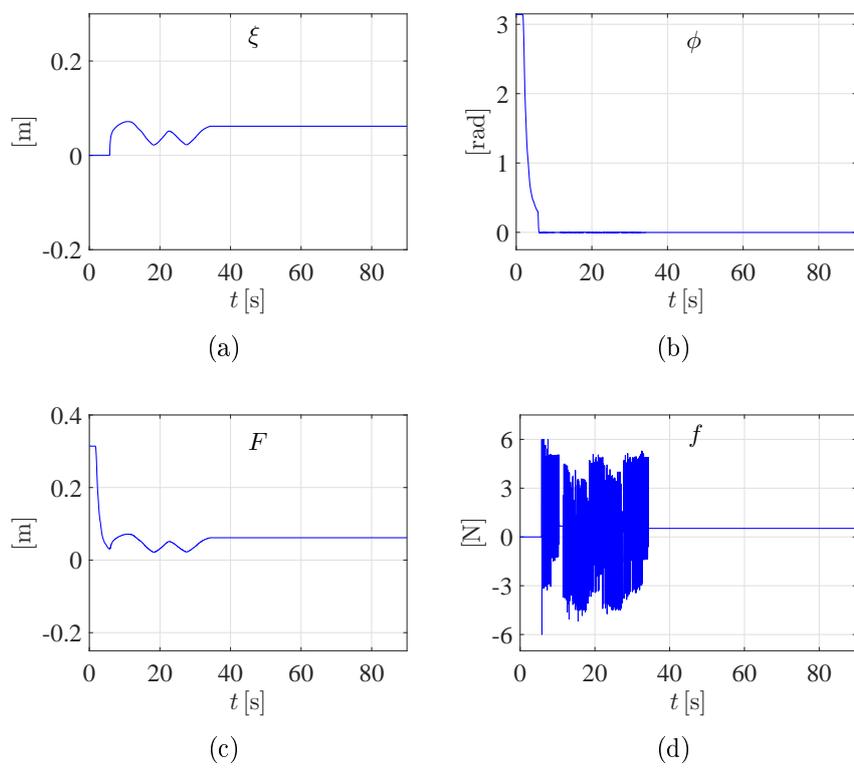


Figura 4.29: Resultados experimentales cuando  $|G(j\omega_\sigma)| = 36$  y  $\omega_\sigma = 8$  rad/s.

Tabla 4.3: Ganancias calculadas de los controles (4.41) y (4.33).

$ G(j\omega_\sigma) $ \ $\omega_\sigma$	6 rad/s	8 rad/s
22	$k_v = 0.94, \beta = 12.5,$ $k_d = 33.84, k_p = 5.9594.$	$k_v = 0.98, \beta = 15,$ $k_d = 62.72, k_p = 10.6580.$
	$k_1 = -5.9594, k_2 = -33.84,$ $k_3 = -123.2209, k_4 = -12.6054.$	$k_1 = -10.6580, k_2 = -62.72,$ $k_3 = -148.2158, k_4 = -15.8858.$
	$A_F = 0.4323 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.2922 \text{ rad/s}$	$A_F = 0.1547 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.4044 \text{ rad/s}$
26	$k_v = 1.12, \beta = 14.75,$ $k_d = 40.32, k_p = 6.2247.$	$k_v = 1.16, \beta = 17.75,$ $k_d = 74.24, k_p = 14.0504.$
	$k_1 = -6.2247, k_2 = -40.32,$ $k_3 = -145.32, k_4 = -15.0192.$	$k_1 = -14.0504, k_2 = -74.24,$ $k_3 = -175.5325, k_4 = -18.8036.$
	$A_F = 0.4062 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.2380 \text{ rad/s}$	$A_F = 0.1119 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.4284 \text{ rad/s}$
30	$k_v = 1.30, \beta = 17,$ $k_d = 46.8, k_p = 6.4901.$	$k_v = 1.34, \beta = 20.25,$ $k_d = 85.76, k_p = 1.4428.$
	$k_1 = -6.4901, k_2 = -46.8,$ $k_3 = -167.4190, k_4 = -17.4330.$	$k_1 = -1.4428, k_2 = -85.76,$ $k_3 = -198.7968, k_4 = -21.7214.$
	$A_F = 0.2669 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.3081 \text{ rad/s}$	$A_F = 0.1534 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.1478 \text{ rad/s}$
34	$k_v = 1.48, \beta = 19.25,$ $k_d = 53.28, k_p = 6.7554.$	$k_v = 1.52, \beta = 23,$ $k_d = 97.28, k_p = 4.8351.$
	$k_1 = -6.7554, k_2 = -53.28,$ $k_3 = -189.5180, k_4 = -19.8468.$	$k_1 = -4.8351, k_2 = -97.28,$ $k_3 = -226.1135, k_4 = -24.6392.$
	$A_F = 0.1644 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.4764 \text{ rad/s}$	$A_F = \begin{cases} \text{Ciclo limite eliminado} \\ 0.0786 \text{ m} \end{cases}, \omega_{\sigma F} = \text{No medible}$
36	$k_v = 1.57, \beta = 20.25,$ $k_d = 56.52, k_p = 2.3881.$	$k_v = 1.61, \beta = 24.5,$ $k_d = 103.04, k_p = 14.5313.$
	$k_1 = -2.3881, k_2 = -56.52,$ $k_3 = -198.8913, k_4 = -21.0537.$	$k_1 = -14.5313, k_2 = -103.04,$ $k_3 = -241.7981, k_4 = -26.0981.$
	$A_F = 0.3459 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.1812 \text{ rad/s}$	<b>CICLO LÍMITE ELIMINADO</b>
38	$k_v = 1.66, \beta = 21.5,$ $k_d = 59.76, k_p = 7.0208.$	
	$k_1 = -7.0208, k_2 = -59.76,$ $k_3 = -211.6171, k_4 = -22.2606.$	
	$A_F = \begin{cases} \text{Ciclo limite eliminado} \\ 0.1371 \text{ m} \end{cases}, \omega_{\sigma F} = \text{No medible}$	
40	$k_v = 1.75, \beta = 22.5,$ $k_d = 63, k_p = 2.6535.$	
	$k_1 = -2.6535, k_2 = -63,$ $k_3 = -220.9903, k_4 = -23.4675.$	
	$A_F = 0.2901 \text{ m}, \omega_{\sigma F} = 0.2365 \text{ rad/s}$	



# Capítulo 5

## Pendubot

En este capítulo se presenta el modelo no lineal del pendubot, deducido a partir de la formulación de Euler-Lagrange. También, se incluye el modelo lineal aproximado alrededor del punto de operación correspondiente a la posición invertida del sistema. Asimismo, se desarrolla un modelo de planitud diferencial equivalente al modelo lineal aproximado alrededor del punto de operación de interés. Con la intención de implementar estrategias de control, se describe el CAD del pendubot que es empleado para, subsecuentemente, construir un prototipo de tal sistema. Además, dos controles son implementados en el prototipo; uno que lleva a cabo el *swing-up* y otro la estabilización. Cabe mencionar que el primer control es derivado de la estrategia de linealización parcial colocada; mientras que el segundo es obtenido usando el modelo lineal y la estrategia de realimentación del vector de estado. Desde que al estabilizar el pendubot con esta última estrategia se observó la aparición de ciclos límite, se propone, simula y valida experimentalmente un control lineal derivado del modelo de planitud diferencial y cuyo diseño para la eliminación del ciclo límite es logrado por medio del método de la función descriptiva y el enfoque de respuesta en frecuencia.

### 5.1. Modelos matemáticos

En este apartado se obtienen el modelo dinámico y no lineal del pendubot, así como su correspondiente modelo lineal aproximado alrededor de la posición invertida del sistema.

#### 5.1.1. Modelo dinámico con ecuaciones de Euler-Lagrange

El modelo dinámico y no lineal del pendubot es obtenido tras realizar los siguientes tres pasos: 1) Obtención de la cinemática del sistema, 2) determinación de la energía cinética y potencial total del sistema y 3) aplicación de la formulación de Euler-Lagrange. Estos pasos son desarrollados a continuación.

##### Cinemática del sistema

En la Figura 5.1 se muestra una representación gráfica del pendubot, donde  $m_a$ ,  $l_a$ ,  $l_{a1}$ ,  $I_a$  y  $q_a$  denotan la masa, longitud, distancia al centro de masa, inercia alrededor del centro de masa y posición angular del eslabón A, respectivamente; mientras que  $m_b$ ,  $l_b$ ,  $l_{b1}$ ,  $I_b$  y  $q_b$  indican masa, longitud, distancia al centro de masa, inercia alrededor del

centro de masa y posición angular del eslabón B, respectivamente. Por último,  $\tau_P$  es el par aplicado al eslabón A y  $g$  es la gravedad.

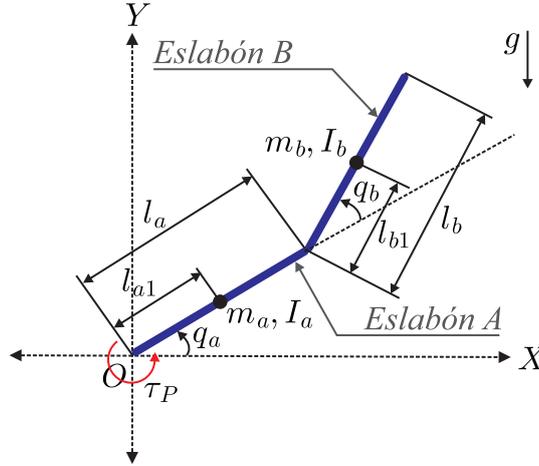


Figura 5.1: Representación gráfica del pendubot.

Para calcular la energía cinética del pendubot, requerida para aplicar el formulismo de Euler-Lagrange, resulta necesario determinar las velocidades de traslación de los eslabones A y B, es decir, la cinemática que los describe. En esa dirección, a partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 5.2, se obtienen los vectores de posición  $\mathbf{x}_a$  y  $\mathbf{x}_b$  de los eslabones A y B, respectivamente, como sigue:

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} l_{a1} \cos q_a \\ l_{a1} \sin q_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} l_a \cos q_a + l_{b1} \cos (q_a + q_b) \\ l_a \sin q_a + l_{b1} \sin (q_a + q_b) \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Al derivar con respecto al tiempo (5.1) se encuentran las siguientes velocidades de traslación de los eslabones A y B, respectivamente:

$$\mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} -l_{a1} \sin q_a \dot{q}_a \\ l_{a1} \cos q_a \dot{q}_a \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} -[l_a \sin q_a + l_{b1} \sin (q_a + q_b)] \dot{q}_a - l_{b1} \sin (q_a + q_b) \dot{q}_b \\ [l_a \cos q_a + l_{b1} \cos (q_a + q_b)] \dot{q}_a + l_{b1} \cos (q_a + q_b) \dot{q}_b \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

### Energía del sistema

Una vez determinadas las velocidades de traslación de los eslabones A y B del pendubot, se procede a la obtención de las energías cinética y potencial del sistema.

**Energía cinética.** La suma de la energía cinética  $K_a$  del eslabón A más la energía cinética  $K_b$  del eslabón B da como resultado la energía cinética total del pendubot  $K_P$ , es decir:

$$K_P = K_a + K_b. \quad (5.4)$$

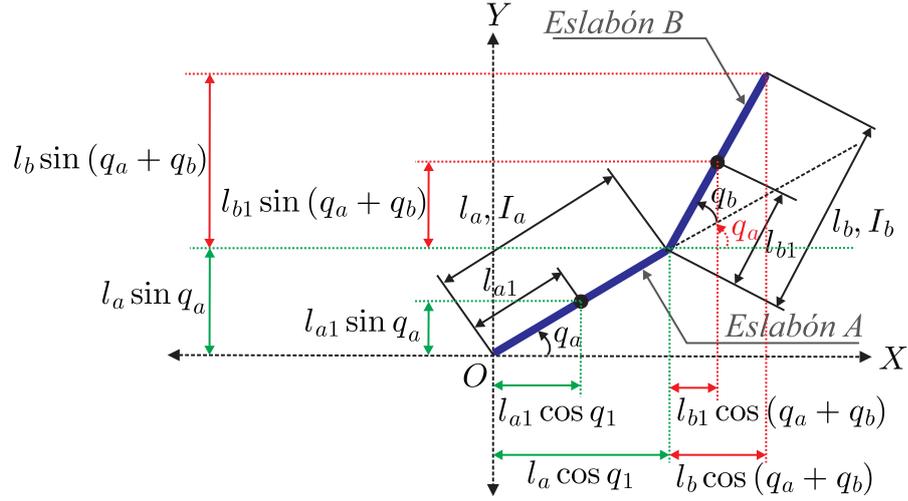


Figura 5.2: Diagrama de cuerpo libre del pendubot.

Desde que el eslabón A gira alrededor de un punto fijo,  $K_a$  está determinada como sigue:

$$\begin{aligned}
 K_a &= \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^T + \frac{1}{2} I_a \dot{q}_a^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) + \frac{1}{2} I_a \dot{q}_a^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_a l_{a1}^2 \dot{q}_a^2 + \frac{1}{2} I_a \dot{q}_a^2 \\
 &= \frac{1}{2} (m_a l_{a1}^2 + I_a) \dot{q}_a^2,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

mientras que la energía cinética del eslabón B está dada por:

$$\begin{aligned}
 K_b &= \frac{1}{2} m_b \mathbf{v}_b \mathbf{v}_b^T + \frac{1}{2} I_b (\dot{q}_a + \dot{q}_b)^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2} I_b (\dot{q}_a^2 + 2\dot{q}_a \dot{q}_b + \dot{q}_b^2) \\
 &= \frac{1}{2} m_b [(l_a^2 + 2l_a l_{b1} \cos q_b + l_{b1}^2) \dot{q}_a^2 + 2l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) \dot{q}_a \dot{q}_b + l_{b1}^2 \dot{q}_b^2] \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_b (\dot{q}_a^2 + 2\dot{q}_a \dot{q}_b + \dot{q}_b^2) \\
 &= \frac{1}{2} (m_b l_a^2 + 2m_b l_a l_{b1} \cos q_b + m_b l_{b1}^2 + I_b) \dot{q}_a^2 + [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \dot{q}_a \dot{q}_b \\
 &\quad + \frac{1}{2} (m_b l_{b1}^2 + I_b) \dot{q}_b^2,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

debido a que gira alrededor de un punto con movimiento angular. Así, (5.4) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 K_P &= \frac{1}{2} (m_a l_a^2 + I_a + m_b l_a^2 + 2m_b l_a l_{b1} \cos q_b + m_b l_{b1}^2 + I_b) \dot{q}_a^2 \\
 &\quad + [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \dot{q}_a \dot{q}_b + \frac{1}{2} (m_b l_{b1}^2 + I_b) \dot{q}_b^2,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

**Energía potencial.** La energía potencial del pendubot corresponde a:

$$P_P = P_a + P_b, \quad (5.8)$$

donde  $P_a$  y  $P_b$  denotan la energía potencial del eslabón A y del eslabón B, respectivamente. Siendo estas dadas por:

$$\begin{aligned} P_a &= m_a g y_a \\ &= m_a g l_{a1} \text{sen} q_a, \\ P_b &= m_b g y_b \\ &= m_b g [l_a \text{sen} q_a + l_{b1} \text{sen} (q_a + q_b)], \end{aligned}$$

de forma que (5.8) resulta ser:

$$P_P = (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \text{sen} q_a + m_b l_{b1} g \text{sen} (q_a + q_b). \quad (5.9)$$

### Ecuaciones de movimiento

Debido a que el pendubot es un sistema con 2 GDL, las ecuaciones de movimiento de Euer-Lagrange para este sistema quedan definidas como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_P}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L_P}{\partial q_a} = \tau_P, \quad (5.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_P}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial L_P}{\partial q_b} = 0, \quad (5.11)$$

siendo  $L_P$  el lagrangiano del sistema, dado por:

$$L_P = K_P - P_P \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + 2m_b l_a l_{b1} \cos q_b + m_b l_{b1}^2 + I_b) \dot{q}_a^2 \\ &\quad + [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \dot{q}_a \dot{q}_b + \frac{1}{2} (m_b l_{b1}^2 + I_b) \dot{q}_b^2 \\ &\quad - (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \text{sen} q_a - m_b l_{b1} g \text{sen} (q_a + q_b). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Tras llevar a cabo las derivadas indicadas en (5.10)–(5.11) se encuentra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_P}{\partial \dot{q}_a} &= (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + 2m_b l_a l_{b1} \cos q_b + m_b l_{b1}^2 + I_b) \dot{q}_a \\ &\quad + [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \dot{q}_b, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L_P}{\partial \dot{q}_a} &= (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + 2m_b l_a l_{b1} \cos q_b + m_b l_{b1}^2 + I_b) \ddot{q}_a \\ &\quad + [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \ddot{q}_b - 2m_b l_a l_{b1} \text{sen} q_b \dot{q}_a \dot{q}_b - m_b l_{b1} l_a \text{sen} q_b \dot{q}_b^2, \\ \frac{\partial L_P}{\partial q_a} &= -(m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos q_a - m_b l_{b1} g \cos (q_a + q_b), \\ \frac{\partial L_P}{\partial \dot{q}_b} &= [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \dot{q}_a + (m_b l_{b1}^2 + I_b) \dot{q}_b, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L_P}{\partial \dot{q}_b} &= [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \ddot{q}_a + (m_b l_{b1}^2 + I_b) \ddot{q}_b - m_b l_{b1} l_a \text{sen} q_b \dot{q}_a \dot{q}_b, \\ \frac{\partial L_P}{\partial q_b} &= -m_b l_{b1} g \cos (q_a + q_b) - m_b l_a l_{b1} \text{sen} q_b \dot{q}_a^2 - m_b l_{b1} l_a \text{sen} q_b \dot{q}_a \dot{q}_b. \end{aligned}$$

Entonces, se encuentran las siguientes ecuaciones de movimiento del pendubot:

$$\begin{aligned} \tau_P &= (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + 2m_b l_a l_{b1} \cos q_b + m_b l_{b1}^2 + I_b) \ddot{q}_a \\ &+ [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \ddot{q}_b - 2m_b l_a l_{b1} \sin q_b \dot{q}_a \dot{q}_b - m_b l_{b1} l_a \sin q_b \dot{q}_b^2 \\ &+ (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos q_a + m_b l_{b1} g \cos (q_a + q_b), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} 0 &= [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \ddot{q}_a + (m_b l_{b1}^2 + I_b) \ddot{q}_b + m_b l_a l_{b1} \sin q_b \dot{q}_a^2 \\ &+ m_b l_{b1} g \cos (q_a + q_b), \end{aligned} \quad (5.15)$$

las cuales pueden ser representadas de forma matricial como sigue:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_P) \ddot{\mathbf{q}}_P + \mathbf{C}(\mathbf{q}_P, \dot{\mathbf{q}}_P) \dot{\mathbf{q}}_P + \mathbf{g}(\mathbf{q}_P) = \mathbf{F}_P, \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_P &= \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}_P) &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{21} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}_P, \dot{\mathbf{q}}_P) &= \begin{bmatrix} -m_b l_a l_{b1} \sin q_b \dot{q}_b & -m_b l_a l_{b1} \sin q_b \dot{q}_a - m_b l_{b1} l_a \sin q_b \dot{q}_b \\ m_b l_a l_{b1} \sin q_b \dot{q}_a & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_P) &= \begin{bmatrix} (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos q_a + m_b l_{b1} g \cos (q_a + q_b) \\ m_b l_{b1} g \cos (q_a + q_b) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_P &= \begin{bmatrix} \tau_P \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} D_{11} &= m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + 2m_b l_a l_{b1} \cos q_b + m_b l_{b1}^2 + I_b, \\ D_{12} &= D_{21} = m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b, \\ D_{22} &= m_b l_{b1}^2 + I_b. \end{aligned}$$

### 5.1.2. Modelo lineal aproximado

En este apartado, a partir del modelo dinámico y no lineal (5.14)–(5.15), se obtiene el modelo lineal aproximado alrededor de la posición invertida del pendubot. Para lo cual, se sigue: 1) Representar el modelo no lineal (5.14)–(5.15) en variables de estado, 2) encontrar los puntos de operación del sistema y 3) aplicar el método de linealización aproximada, como a continuación se desarrolla.

#### Representación en variables de estado

La representación en variables de estado, (2.20), es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (5.17)$$

queda redefinida para el modelo del pendubot, (5.14)–(5.15), de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \ddot{q}_a \\ \dot{q}_b \\ \ddot{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

donde

$$\begin{bmatrix} q_a \\ \dot{q}_a \\ q_b \\ \dot{q}_b \end{bmatrix} = x, \quad \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} = f(x, u), \quad (5.19)$$

con

$$\begin{aligned} f_1(x, u) &= \dot{q}_a, \\ f_2(x, u) &= \frac{1}{\det \mathbf{D}(\mathbf{q}_p)} \left\{ (m_b l_{b1}^2 + I_b) \tau_P + (m_b l_{b1}^2 + I_b) m_b l_a l_{b1} \sin q_b (\dot{q}_a + \dot{q}_b)^2 \right. \\ &\quad \left. - (m_b l_{b1}^2 + I_b) (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos q_a + (m_b l_{b1} l_a)^2 \cos q_b \sin q_b \dot{q}_a^2 \right. \\ &\quad \left. + (m_b l_{b1} l_a) (m_b l_{b1}) g \cos q_b \cos (q_a + q_b) \right\}, \\ f_3(x, u) &= \dot{q}_b, \\ f_4(x, u) &= \frac{1}{\det \mathbf{D}(\mathbf{q}_p)} \left\{ (m_b l_{b1}^2 + I_b + m_b l_{b1} l_a \cos q_b) [(m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos q_a - \tau_P] \right. \\ &\quad \left. - (m_a l_{a1} + m_b l_a) m_b l_a l_{b1} \sin q_b (\dot{q}_a + \dot{q}_b)^2 \right. \\ &\quad \left. - (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + m_b l_a l_{b1} \cos q_b) (m_b l_a l_{b1} \sin q_b) \dot{q}_a^2 \right. \\ &\quad \left. - (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + m_b l_a l_{b1} \cos q_b) m_b l_{b1} g \cos (q_a + q_b) \right\}, \end{aligned}$$

siendo  $\tau_P = u$  y  $\det \mathbf{D}(\mathbf{q}_p) = (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2) (m_b + l_{b1}^2 + I_b) - (m_b l_{b1} l_a)^2 \cos^2 q_b \neq 0$ .

Para obtener  $\ddot{q}_a$  y  $\ddot{q}_b$  se procedió como en las Secciones 2.1.2, 3.1.2 y 4.1.2.

### Puntos de operación del sistema

Para determinar los puntos de operación del pendubot se resuelve:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \ddot{q}_a \\ \dot{q}_b \\ \ddot{q}_b \end{bmatrix} \equiv 0 \equiv \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_2(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_3(\bar{x}, \bar{u}) \\ f_4(\bar{x}, \bar{u}) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

donde

$$\begin{aligned}
f_1(\bar{x}, \bar{u}) &= \bar{q}_a, \\
f_2(\bar{x}, \bar{u}) &= \frac{1}{\det \mathbf{D}(\bar{\mathbf{q}}_p)} \left\{ (m_b l_{b1}^2 + I_b) \bar{\tau}_P + (m_b l_{b1}^2 + I_b) m_b l_a l_{b1} \sin \bar{q}_b (\bar{q}_a + \bar{q}_b)^2 \right. \\
&\quad \left. - (m_b l_{b1}^2 + I_b) (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos \bar{q}_a + (m_b l_{b1} l_a)^2 \cos \bar{q}_b \sin \bar{q}_b \bar{q}_a^2 \right. \\
&\quad \left. + (m_b l_{b1} l_a) (m_b l_{b1}) g \cos \bar{q}_b \cos (\bar{q}_a + \bar{q}_b) \right\}, \\
f_3(\bar{x}, \bar{u}) &= \bar{q}_b, \\
f_4(\bar{x}, \bar{u}) &= \frac{1}{\det \mathbf{D}(\bar{\mathbf{q}}_p)} \left\{ (m_b l_{b1}^2 + I_b + m_b l_{b1} l_a \cos \bar{q}_b) [(m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos \bar{q}_a - \bar{\tau}_P] \right. \\
&\quad \left. - (m_a l_{a1} + m_b l_a) m_b l_a l_{b1} \sin \bar{q}_b (\bar{q}_a + \bar{q}_b)^2 \right. \\
&\quad \left. - (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + m_b l_a l_{b1} \cos \bar{q}_b) (m_b l_a l_{b1} \sin \bar{q}_b) \bar{q}_a^2 \right. \\
&\quad \left. - (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + m_b l_a l_{b1} \cos \bar{q}_b) m_b l_{b1} g \cos (\bar{q}_a + \bar{q}_b) \right\},
\end{aligned}$$

con

$$[\bar{q}_a \quad \bar{q}_a \quad \bar{q}_b \quad \bar{q}_b]^T = \bar{x} \quad (5.21)$$

son aquellos valores constantes del vector de estado  $x$  en los cuales el sistema puede permanecer sin movimiento, bajo el efecto de la entrada constante  $\bar{u} = \bar{\tau}_P$ .

De la primera y tercera fila de (5.20) se sabe que  $\bar{q}_a = 0$  y  $\bar{q}_b = 0$ ; mientras que de la segunda fila se tiene:

$$\bar{\tau}_P = \frac{(m_b l_{b1}^2 + I_b) (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos \bar{q}_a - (m_b l_{b1} l_a) (m_b l_{b1}) g \cos \bar{q}_b \cos (\bar{q}_a + \bar{q}_b)}{(m_b l_{b1} + I_b)}. \quad (5.22)$$

Al reemplazar la expresión anterior en la cuarta fila de (5.20) se llega a:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{(m_b l_{b1} l_a) (m_b l_{b1}) g \cos (\bar{q}_a + \bar{q}_b)}{(m_b l_{b1} + I_b)} \\
&\quad - (m_a l_{b1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + m_b l_a l_{b1} \cos \bar{q}_b) m_b l_{b1} g \cos (\bar{q}_a + \bar{q}_b).
\end{aligned} \quad (5.23)$$

Para satisfacer la igualdad en (5.23), es suficiente con que se cumpla:

$$\cos (\bar{q}_a + \bar{q}_b) = 0; \quad (5.24)$$

esto implica que

$$\bar{q}_a + \bar{q}_b = \pm \frac{\pi}{2} n, \quad \text{con } n = 1, 3, 5, \dots \quad (5.25)$$

de donde

$$\bar{q}_b = \pm \frac{\pi}{2} n - \bar{q}_a, \quad \text{con } \bar{q}_a \in \left[ -\frac{\pi}{2} n, +\frac{\pi}{2} n \right]. \quad (5.26)$$

Además, (5.24) reduce a (5.22) a lo siguiente:

$$\bar{\tau}_P = (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos \bar{q}_a. \quad (5.27)$$

En resumen, los puntos de operación quedan determinados por:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{q}_a \\ \bar{q}_a \\ \bar{q}_b \\ \bar{q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-\frac{\pi}{2} n, +\frac{\pi}{2} n] \\ 0 \\ \pm \frac{\pi}{2} n - \bar{q}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\tau}_P = (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos \bar{q}_a, \quad \text{con } n = 1, 3, 5, \dots$$

de los cuales se escoge el punto de operación para el control lineal, que se presentará en la Sección 5.3.2, cuando  $n = 1$ , es decir:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{+\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\tau}_P = 0. \quad (5.28)$$

### Linealización aproximada

El modelo no lineal del pendubot, (5.14)–(5.15), puede ser aproximado alrededor del punto de operación (5.28) por el modelo lineal (2.26)–(2.27), reescrito a continuación para facilitar la referencia.

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, \\ y_\delta &= Cx_\delta, \end{aligned}$$

donde, en el caso del pendubot, se redefine lo siguiente:

$$x_\delta = \begin{bmatrix} x_{\delta 1} \\ x_{\delta 2} \\ x_{\delta 3} \\ x_{\delta 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_a - \bar{q}_a \\ \dot{q}_a - \bar{\dot{q}}_a \\ q_b - \bar{q}_b \\ \dot{q}_b - \bar{\dot{q}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_a - \frac{\pi}{2} \\ \dot{q}_a \\ q_b \\ \dot{q}_b \end{bmatrix}, \quad u_\delta = \tau_P - \bar{\tau}_P = \tau_P; \quad (5.29)$$

mientras que las matrices constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  quedan redefinidas como:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial q_a} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial \dot{q}_a} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial q_b} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial \dot{q}_b} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial q_a} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial \dot{q}_a} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial q_b} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial \dot{q}_b} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial q_a} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial \dot{q}_a} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial q_b} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial \dot{q}_b} \\ \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial q_a} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial \dot{q}_a} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial q_b} & \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial \dot{q}_b} \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})}, \\ C &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial q_a} & \frac{\partial h(x)}{\partial \dot{q}_a} & \frac{\partial h(x)}{\partial q_b} & \frac{\partial h(x)}{\partial \dot{q}_b} \end{bmatrix} \Bigg|_{\bar{x}}. \end{aligned}$$

Después de realizar las derivadas correspondientes y de reducir términos, se encuentra que  $A$ ,  $B$  y  $C$  quedan dadas por:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & 0 & A_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \\ 0 \\ B_{41} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

con

$$\begin{aligned}
A_{21} &= \frac{(m_b l_{b1}^2 + I_b)(m_a l_{a1} + m_b l_a)g - (m_b l_{b1} l_a) m_b l_{b1} g}{(m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2)(m_b l_{b1}^2 + I_b) - (m_b l_{b1} l_a)^2}, \\
A_{23} &= \frac{- (m_b l_{b1} l_a) m_b l_{b1} g}{(m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2)(m_b l_{b1}^2 + I_b) - (m_b l_{b1} l_a)^2}, \\
A_{41} &= \frac{(m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + m_b l_a l_{b1}) m_b l_{b1} g - (m_b l_{b1}^2 + I_b + m_b l_{b1} l_a)(m_a l_{a1} + m_b l_a)g}{(m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2)(m_b l_{b1}^2 + I_b) - (m_b l_{b1} l_a)^2}, \\
A_{43} &= \frac{(m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + m_b l_a l_{b1}) m_b l_{b1} g}{(m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2)(m_b l_{b1}^2 + I_b) - (m_b l_{b1} l_a)^2}, \\
B_{21} &= \frac{m_b l_{b1}^2 + I_b}{(m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2)(m_b l_{b1}^2 + I_b) - (m_b l_{b1} l_a)^2}, \\
B_{41} &= \frac{- (m_b l_{b1}^2 + I_b + m_b l_{b1} l_a)}{(m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2)(m_b l_{b1}^2 + I_b) - (m_b l_{b1} l_a)^2}.
\end{aligned}$$

### 5.1.3. Modelo lineal basado en planitud diferencial

Desde que el determinante de la matriz de controlabilidad del modelo lineal aproximado del pendubot,  $\mathcal{C}$ , se obtiene usando (5.30) como sigue:

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{C} &= \det [ B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B ], \\
&= \det \begin{bmatrix} 0 & B_{21} & 0 & A_{21}B_{21} + A_{23}B_{41} \\ B_{21} & 0 & A_{21}B_{21} + A_{23}B_{41} & 0 \\ 0 & B_{41} & 0 & A_{41}B_{21} + A_{43}B_{41} \\ b_{41} & 0 & A_{41}B_{21} + A_{43}B_{41} & 0 \end{bmatrix}, \\
&= \frac{\alpha_5^2 \alpha_3^2 g^2}{(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)^4},
\end{aligned}$$

el cual es diferente de cero, por lo tanto (2.26)–(2.27) con (5.29) y (5.30) es controlable y, en consecuencia, diferencialmente plano [271]. Así, la salida plana del pendubot está dada por:

$$F_P = \lambda [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 ] \mathcal{C}^{-1} x_\delta, \quad (5.31)$$

donde  $\lambda$  es una constante arbitraria diferente de cero, convenientemente escogida como:

$$\lambda = (c_2 B_{21} - c_1 B_{41}) (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2),$$

con

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\alpha_2^2 \alpha_4 g + \alpha_3^2 \alpha_5 g^2}{(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)^2}, \\
c_2 &= \frac{\alpha_2 \alpha_4 (\alpha_2 - \alpha_3) g - \alpha_3 \alpha_5 (\alpha_1 + \alpha_3) g}{(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)^2}.
\end{aligned}$$

Después de realizar los cálculos correspondientes, se determinan  $F_P$  y sus primeras cuatro derivadas con respecto al tiempo como sigue:

$$F_P = x_{\delta 1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} x_{\delta 3}, \quad (5.32)$$

$$\dot{F}_P = x_{\delta 2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} x_{\delta 4}, \quad (5.33)$$

$$\ddot{F}_P = \frac{\alpha_5 g}{\alpha_2 + \alpha_3} (x_{\delta 1} + x_{\delta 3}), \quad (5.34)$$

$$F_P^{(3)} = \frac{\alpha_5 g}{\alpha_2 + \alpha_3} (x_{\delta 2} + x_{\delta 4}), \quad (5.35)$$

$$F_P^{(4)} = \left( \frac{\alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \right) g \ddot{F} - \frac{\alpha_4 \alpha_5}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3^2} g^2 F - \frac{\alpha_3 \alpha_5}{(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)} \tau_P. \quad (5.36)$$

La expresión (5.36) representa el modelo de planitud diferencial que describe la dinámica del modelo lineal aproximado del pendubot.

## 5.2. Construcción del sistema

En esta sección se aborda la construcción de un prototipo del pendubot, el cual está conformado de los siguientes cuatro subsistemas:

- A) *Actuador, sensores y anillo deslizante:* Este subsistema está integrado por un motor de CD, dos encoders incrementales y un anillo deslizante de orificio pasante. El motor de CD corresponde al modelo 14204S006 de Pittman, un encoder está contenido en el chasis de este motor y el otro es un encoder miniatura ITD01B14 de Baumer; por último, el anillo deslizante es del modelo SNH012-06S de Senring Electronics Co., Limited.
- B) *Etapa de potencia:* Está compuesto por una fuente de alimentación conmutada y un arrancador de servomotores, los cuales en conjunto proporcionan energía al motor de CD.
- C) *Estructura mecánica:* Corresponde a las partes mecánicas del prototipo, a saber, eslabones A y B, base del motor y base de la estructura. La base del motor sostiene al motor de CD, mientras que la base de la estructura sostiene a los eslabones A y B, base del motor y *Subsistemas A y B*.
- D) *Adquisición y procesamiento de datos:* Se refiere a Matlab-Simulink, ControlDesk y una tarjeta DS1104 de dSPACE, los cuales permiten la implementación de controles en el prototipo y la visualización de la evolución dinámica del sistema en tiempo real.

La interacción entre estos subsistemas se representa en la Figura 5.3; mientras que su descripción se da en los apartados siguientes.

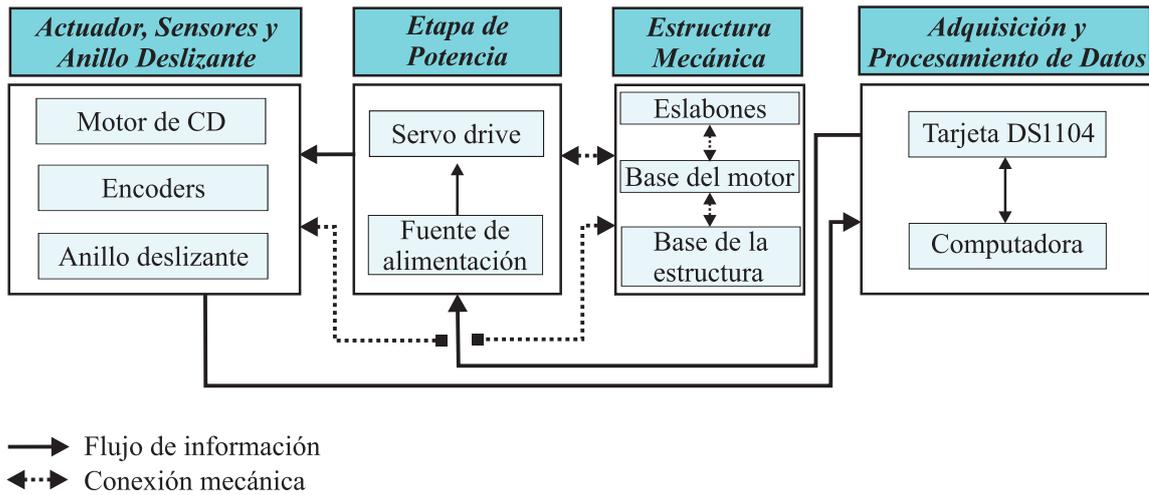


Figura 5.3: Subsistemas del prototipo de pendubot.

### 5.2.1. Actuador, sensores y anillo deslizante

Como actuador del prototipo de pendubot se emplea un motor de CD 14204S006 fabricado por Pittman. Este modelo de motor de CD ha sido empleado de manera satisfactoria en los prototipos de los Capítulos 2, 3 y 4. A manera de recordatorio, se mencionan algunas de las características del motor de CD 14204S006 como sigue: Voltaje de alimentación de 24 V, par continuo de 0.18 Nm, corriente a par continuo de 3.67 A y posee un encoder incremental con una resolución de 500 PPR. Este último permite sensar la posición angular del eslabón A del pendubot; mientras que el encoder miniatura ITD01B14 de Baumer, con una resolución de 1024 PPR, se usa para sensar la posición angular del eslabón B del pendubot. Cabe recordar que, el encoder miniatura ITD01B14 también se ha usado en el prototipo del PISC descrito en el Capítulo 4 y que tiene las mismas características eléctricas que el encoder miniatura ITD01A4Y1 empleado en el prototipo reconfigurable de PF y PRI introducidos en los Capítulos 2 y 3, respectivamente. Estas características eléctricas pueden consultarse en el Apéndice B.

Debido a que el encoder ITD01B14 debe ser colocado en el pivote del eslabón B, es decir, en un extremo del eslabón A (ver Figura 5.1), un problema que se presenta cuando se llevan los eslabones A y B a la posición invertida es el enrollamiento del cable del encoder en el pivote del eslabón A. Así, para evitar tal problema se considera un anillo deslizante de orificio pasante, del modelo SNH012-06S, manufacturado por Senring Electronics Co., Limited, el cual se muestra en la Figura 5.4. Algunas de las características de este anillo deslizante son: Orificio pasante de 12.7 mm, diámetro exterior de 56 mm, 6 líneas, cada una soporta una corriente de 10 A.

### 5.2.2. Etapa de potencia

Los dispositivos electrónicos que componen la etapa de potencia son: Una fuente de alimentación conmutada del modelo HF100W-SF-24 y un arrancador de servomotores del modelo AZ12A8DDC, el cual es fabricado por Advanced Motion Controls y tiene un modo de operación por corriente. Ambos dispositivos se emplearon exitosamente en los prototipos descritos en los Capítulos 2, 3 y 4, donde se ha mencionado que la función de estos dispositivos es acondicionar la señal de control proporcionada por el *Subsistema D*



Figura 5.4: Anillo deslizante SNH012-06S.

(como una relación de corriente), permitiendo manejar el motor de CD y en consecuencia mover la estructura mecánica. Este acondicionamiento implica garantizar que la corriente de armadura del motor alcance la corriente deseada impuesta por el control, esto a través de un lazo de corriente interno que posee el arrancador de servomotores, aislar el *Subsistema D* del motor de CD y amplificar la corriente proveída por el *Subsistema D*. Para mayor información sobre la fuente de alimentación y el arrancador de servomotores veáse el Apéndice B.

### 5.2.3. Estructura mecánica

Habiendo determinado el actuador, los sensores de posición angular, el anillo deslizante y la etapa de potencia, se realizó el CAD de la estructura mecánica del prototipo y, subsecuentemente, se manufacturaron los elementos mecánicos dibujados. La descripción del CAD y del proceso de manufactura llevados a cabo se da en los siguientes apartados.

#### Diseño asistido por computadora

Las partes mecánicas del prototipo del pendubot (eslabones A y B, base del motor y base de la estructura) se dibujaron y ensamblaron virtualmente con SolidWorks. También con este software, se generaron los planos y se especificaron los materiales de cada elemento mecánico. Los detalles del CAD de cada parte mecánica se presentan a continuación.

**Eslabones.** Los eslabones A y B del pendubot fueron dibujados tras considerar que deben ser ensamblados en la flecha del motor de CD y en la flecha del encoder miniatura, respectivamente. Así, los elementos mecánicos que componen a los eslabones se presentan en la Figura 5.5, cuya descripción es la siguiente:

- (i) **Cople del eslabón A.** Eje de latón con dos diámetros exteriores, el diámetro mayor de 29 mm con espesor de 3 mm y el diámetro menor de 12.7 mm con espesor de 56.6 mm. Este elemento posee una perforación interna, y concéntrica al diámetro exterior de 12.7 mm, de 6.4 mm con una profundidad de 21.9 mm. Además, en la cara frontal, asociada al diámetro externo de 29 mm tiene tres barrenos M3 que son utilizados para atornillar la placa del eslabón A.
- (ii) **Placa del eslabón A.** Placa de aluminio de 190 mm de largo por 35 mm de ancho. Posee chaflanes de 17.5 mm de radio en las cuatro esquinas y un corte lon-

gitudinal de 120 mm de largo por 10 mm de ancho; así como tres perforaciones M3 dispuestas circularmente en la parte superior. Cuenta con otras tres perforaciones M3 dispuestas circularmente en la parte inferior. Las perforaciones de la parte superior son para sujetar este elemento al cople del eslabón A, mientras que las perforaciones inferiores son para atornillar el encoder miniatura. En el centro de la circunferencia que describen las perforaciones de la parte inferior de este elemento, se contempló un corte circular de 12 mm de diámetro a través del cual pasa la flecha del encoder miniatura.

- ⓫ **Cople del eslabón B.** Eje de latón con dos diámetros exteriores, el diámetro mayor de 29 mm con espesor de 3 mm y el diámetro menor de 8 mm con espesor de 12.7 mm, y una perforación interna de 4 mm con una profundidad de 8 mm.
- ⓬ **Placa del eslabón B.** Placa de aluminio similar la placa del eslabón A. Difiere únicamente en que no posee las perforaciones M3 en la parte inferior ni el corte circular de 12 mm. En este caso, las perforaciones M3 en la parte superior son para atornillar este elemento al cople del eslabón B.

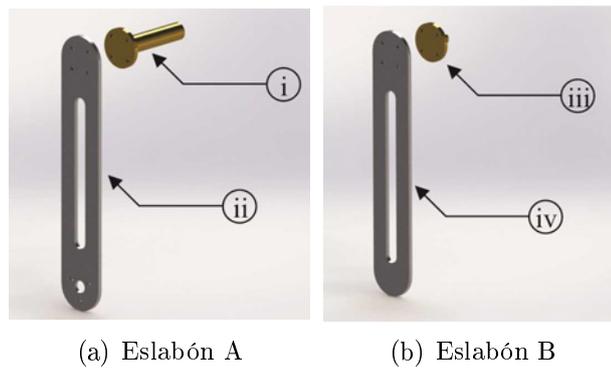


Figura 5.5: Vista explosionada de los eslabones A y B dibujados en SolidWorks.

**Base del motor.** Esta parte mecánica fue desarrollada para sostener de forma horizontal al motor de CD 14204S006, los elementos que la integran se muestran en la Figura 5.6; mientras que su descripción es la siguiente:

- Ⓜ **Ángulo.** Ángulo de aluminio de 101.6 mm por 101.6 mm por 6.4 mm con chaflanes de 35 mm de radio. Tiene una perforación en el centro de 19 mm de diámetro y cuatro barrenos M4 para atornillar el motor de CD 14204S006.
- Ⓠ **Brida inferior.** Placa de aluminio de 101.6 mm de largo por 47.6 mm de alto por 12.7 mm de espesor, con un arco de 27 mm. Este elemento sostiene la parte trasera del motor de CD 14204S006.
- Ⓡ **Brida superior.** Placa de aluminio con las mismas dimensiones que la brida inferior, la cual sirve para evitar que el motor de CD 14204S006 se mueva bruscamente.

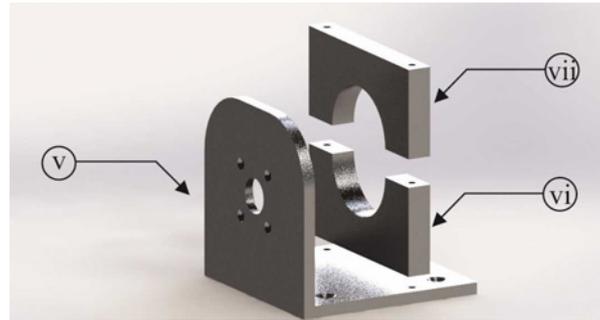


Figura 5.6: Vista explosionada de la base del motor dibujada en SolidWorks.

**Base de la estructura.** Para esta parte mecánica se dibujaron los elementos presentados en la Figura 5.7, los cuales se detallan a continuación.

- ⓧ **Solera superior.** Solera de aluminio de 300 mm de largo por 200 mm de ancho y 25.4 mm de espesor con chaflanes de 25 mm de radio, así como cuatro barrenos M6 en las esquinas que sirven para atornillar los perfiles verticales (enseguida mencionados). Además, tiene cuatro barrenos M5 para sujetar la base del motor.
- ⓧ **Perfiles verticales.** Son perfiles estructurales de 200 mm, fabricados por Bosch Rexroth en la serie 30 × 30R.
- ⓧ **Solera inferior.** Largo, ancho y barrenos M6 idénticos a la solera superior, pero con un espesor de 25.4 mm. En este elemento no se consideran los barrenos M5.



Figura 5.7: Vista explosionada de la base de la estructura dibujada en SolidWorks.

El ensamble virtual de los eslabones A y B, la base del motor, la base de la estructura y el *Subsistema A* se presenta en la Figura 5.8.



Figura 5.8: Ensamble en SolidWorks de los *Subsistemas A y C*.

### Manufactura de partes

En seguida se introduce el proceso de manufactura de los elementos mecánicos descritos en 5.2.3, donde se emplearon los materiales enumerados en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Materiales mecánicos para el pendubot

No. de elemento	Material
⓪, ⓲	Barras redondas de latón con diámetro de 38 mm
Ⓛ, Ⓧ	Placa de aluminio T-6061 de 6.4 mm
Ⓨ	Ángulo de aluminio T-6061 de 101.6 mm × 101.6 mm × 6.4 mm
Ⓧ, Ⓧ	Placas de aluminio T-6061 de 12.7 mm
Ⓧ, Ⓧ	Solera de aluminio T-6061 de 25.4 mm y 38 mm, respectivamente
Ⓧ	Perfiles estructurales de aluminio Bosh Rexroth 30 × 30R

**Eslabones.** Todos los elementos mecánicos que integran a los eslabones A y B fueron manufacturados como a continuación se menciona, resultando la Figura 5.9.

- ⓪ **Cople del eslabón A.** Fue obtenido de una barra de latón de 38 mm de diámetro. Los diámetros externos de 29 mm y 12.7 mm fueron logrados con un torno de control numérico y buriles; mientras que el diámetro interno de 6.4 mm y los barrenos M3 fueron realizados con una fresadora de control numérico y fresas de 5 mm y 2.5 mm. La rosca de los barrenos M3 fue realizada manualmente con un machuelo M3.
- Ⓛ **Placa del eslabón A.** Lograda a partir de las placas de aluminio de 6.4 mm de espesor, una fresadora de control numérico y fresas de diferentes tamaños. Esto después de desbastar, hasta obtener el largo, ancho y espesor especificados en el CAD; así como haber logrado los chafanes. Las perforaciones M3 ubicadas en la

parte superior e inferior de este elemento, también se realizaron con una fresadora de control numérico y fresas de 2.5 mm. Por último, el corte circular en el centro de la circunferencia que describen las tres perforaciones inferiores de la placa del eslabón A fue realizado con una fresa de 10 mm.

- ⓫ **Cople del eslabón B.** Fue manufacturado de manera similar que el cople del eslabón A, respetando las dimensiones especificadas en el CAD del pendubot y a partir de una barra redonda de latón.
- ⓬ **Placa del eslabón B.** Manufacturada similarmente a la placa del eslabón A.

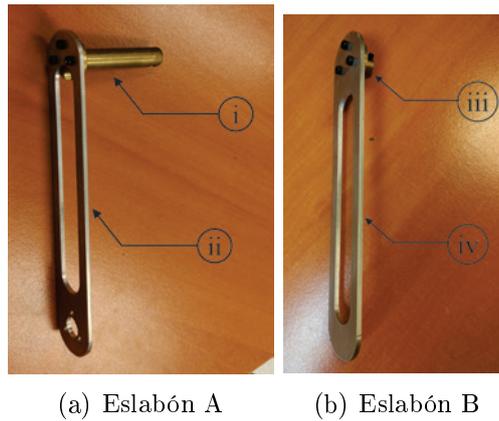


Figura 5.9: Eslabones A y B manufacturados.

**Base del motor.** La manufactura de los elementos mecánicos de la base del motor fue llevada a cabo de la siguiente manera:

- ⓪ **Ángulo.** Este elemento se obtuvo a través de un corte a la medida de 101.6 mm del ángulo de aluminio T-6061. Los chaflanes y la perforación de 19 mm de diámetro fueron realizados con una fresadora de control numérico y fresas de 10 mm; mientras que los cuatro barrenos M4 se hicieron con la fresadora de control numérico y una fresa de 3 mm.
- ⓶ **Brida inferior.** Lograda con una placa de aluminio T-6061 de 12.7 mm de espesor. Las dimensiones a lo largo y ancho, así como el arco de 27 mm fueron conseguidos con una fresadora de control numérico y con una fresa de 10 mm.
- ⓷ **Brida superior.** Para este elemento se siguió un proceso similar al seguido en el caso de la brida inferior.

Dando como resultado la base del motor mostrada en la Figura 5.10.

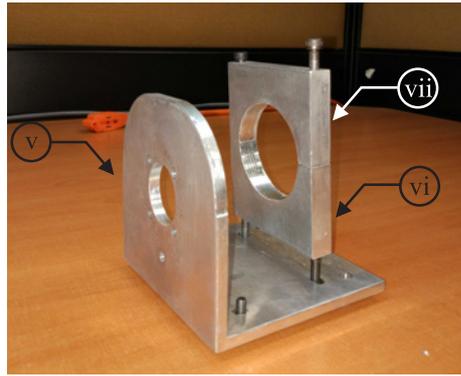


Figura 5.10: Base del motor manufacturada.

**Base de la estructura.** Los elementos mecánicos que componen a la base de la estructura se manufacturaron como sigue:

- ⓧ **Solera superior.** Obtenido de la solera de aluminio T-6061. Las dimensiones deseadas de largo y ancho, los chaflanes y las perforaciones M6 fueron realizadas con una fresadora de control numérico y dos fresas: una de 10 mm y otra de 6 mm. La primera fue usada para lograr el largo y ancho deseados, así como los chaflanes; mientras que la segunda fue empleada para realizar los barrenos M6.
- ⓧ **Perfiles verticales.** Son perfiles estructurales Bosch Rexroth en la serie  $30 \times 30R$ , cuya longitud especificada en el CAD fue conseguida por medio de un corte a la medida.
- ⓧ **Solera inferior.** Conseguida similarmente a la solera superior

Así, al ensamblar la solera superior, los perfiles verticales y la solera inferior se consiguió la base de la estructura presentada en la Figura 5.11.



Figura 5.11: Base de la estructura manufacturada.

Por último, en la Figura 5.12 se muestra el ensamble de los eslabones A y B manufacturados, la base del motor construida, la base de la estructura fabricada y los *Subsistemas A y B*.

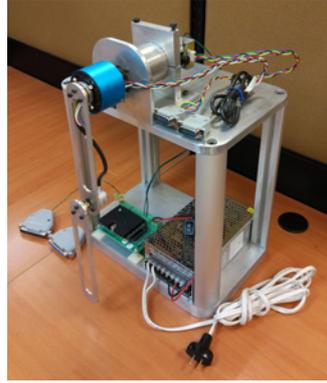


Figura 5.12: Ensamble de los *Subsistemas A, B y C* reales.

#### 5.2.4. Adquisición y procesamiento de datos

Matlab-Simulink, ControlDesk y una tarjeta DS1104 de dSPACE conforman el subsistema adquisición y procesamiento de datos del prototipo de pendubot. Desde que ControlDesk permite la interacción entre Matlab-Simulink y la tarjeta DS1104, con el *Subsistema D* se pueden implementar controladores para el prototipo mediante diagramas de bloques programados en Matlab-Simulink; así como adquirir y procesar los datos asociados a la evolución dinámica de las variables de interés del sistema, estimadas y calculadas usando la información proporcionada por los encoders incrementales.

Finalmente, al integrar los *Subsistemas A* (actuador, sensores y anillo deslizante), *B* (etapa de potencia), *C* (estructura mecánica) y *D* (adquisición y procesamiento de datos), se logró obtener el prototipo final del pendubot que se presenta en la Figura 5.13.

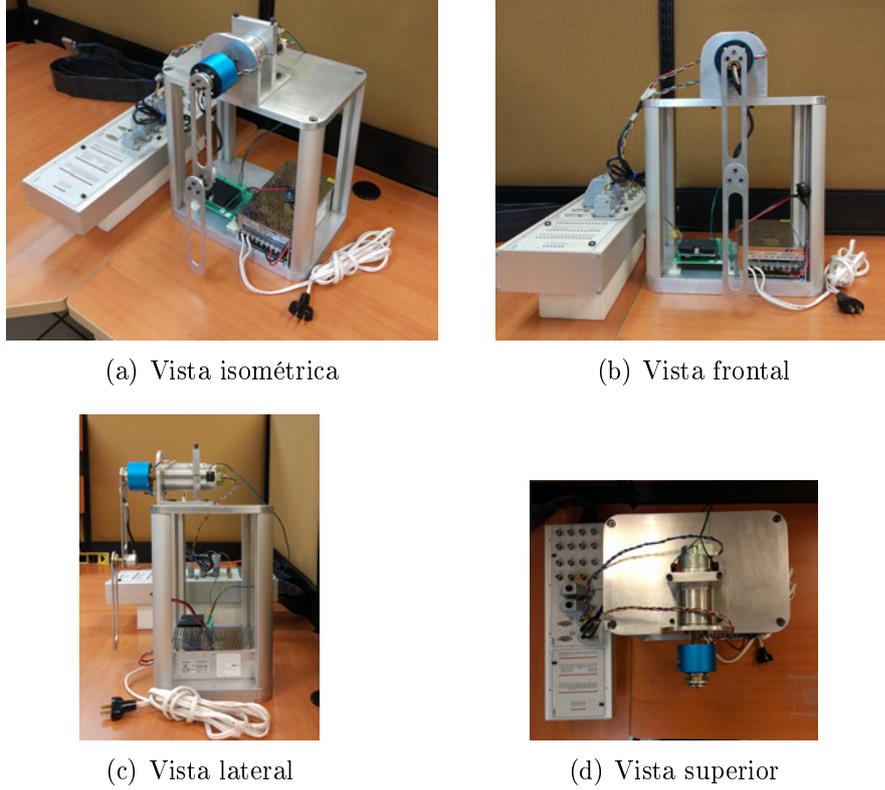
#### 5.2.5. Parámetros del prototipo

En esta sección se miden y calculan los parámetros del prototipo construido del pendubot; pues son requeridos para llevar a cabo la simulación e implementación experimental de los controles para *swing-up*, estabilización y eliminación del ciclo límite aplicados al sistema. La obtención de los valores numéricos de los parámetros físicos del pendubot se realizó mediante el uso de dispositivos básicos de medición y fórmulas matemáticas.

Las longitudes de los eslabones A y B del pendubot fueron obtenidas con un vernier, siendo  $l_a = l_b = 0.2$  m; por lo que las distancias a sus respectivos centros de masa se calcularon como  $l_a/2 = l_{a1} = 0.1$  m y  $l_b/2 = l_{b1} = 0.1$  m. Las masas de los eslabones fueron encontradas usando una báscula, resultando  $m_a = 0.033$  kg y  $m_b = 0.034$  kg. Adicionalmente a esto, con ayuda de la báscula se obtuvieron las masas de los coples de los eslabones A y B, denotadas como  $m_{copA} = 0.0850$  kg y  $m_{copB} = 0.0280$  kg, respectivamente. Asimismo, se pesó el encoder miniatura, obteniendo su masa como  $m_{enc} = 0.040$  kg.

Con los valores numéricos anteriores, se calcularon las inercias totales de los eslabones A y B como a continuación se explica. Por un lado, para el eslabón A se consideró:

- La inercia de la flecha tomada de la hojas de datos del motor, es decir,  $I_m = 2.6 \times 10^{-5}$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup>.



(a) Vista isométrica

(b) Vista frontal

(c) Vista lateral

(d) Vista superior

Figura 5.13: Prototipo final del pendubot.

- La inercia del cople del eslabón A, calculada con la fórmula [269]:

$$I_{copA} = \frac{1}{2}m_{copA} (r_{1A}^2 + r_{2A}^2) = 6.4758 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

donde  $r_{1A} = 0.0032$  m y  $r_{2A} = 0.0155$  m corresponden a los diámetros interno y externo del cople.

- La mitad de la inercia del encoder, calculada como [269]:

$$I_{enc} = \frac{1}{2}m_{enc}r_{enc}^2 = 2.8800 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad (5.37)$$

con  $r_{enc} = 0.012$  m.

- La propia inercia del eslabón A, calculada usando [269].

$$I_e = \frac{1}{3}m_a l_a^2 = 4.4000 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Por lo tanto, la inercia total calculada para el eslabón A es:

$$I_a = I_m + I_{copA} + I_{enc} + I_e = 0.4724 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (5.38)$$

Por otro lado, para el eslabón B se tomó en cuenta:

- La inercia del cople del eslabón B, calculada con la fórmula [269]:

$$I_{copB} = \frac{1}{2}m_{copB}r_B^2 = 4.7600 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

donde  $r_B = 0.01$  m corresponde al diámetro del cople.

- La mitad de la inercia del encoder dada en (5.37):
- La propia inercia del eslabón B, calculada usando [269].

$$I_f = \frac{1}{12}m_b l_b^2 = 1.1701 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

En consecuencia, la inercia total calculada para el eslabón B es:

$$I_b = I_{copB} + I_{enc} + I_f = 0.1207 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (5.39)$$

Los parámetros del prototipo de pendubot se presentan en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Parámetros del prototipo de pendubot construido.

$l_a = 200 \times 10^{-3} \text{ m}$
$l_b = 200 \times 10^{-3} \text{ m}$
$l_{a1} = 100 \times 10^{-3} \text{ m}$
$l_{a2} = 100 \times 10^{-3} \text{ m}$
$m_a = 0.033 \text{ kg}$
$m_b = 0.034 \text{ kg}$
$I_a = 0.4724 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$I_b = 0.1207 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

La verificación de la medición y cálculo de los parámetros del pendubot se llevó a cabo comparando la frecuencia natural teórica de los eslabones A y B con su respectiva frecuencia natural obtenida experimentalmente. Para determinar la frecuencia teórica de los eslabones A y B, se hizo uso del modelo dinámico (5.14)–(5.15) como a continuación se explica. De (5.14), es decir:

$$\begin{aligned} \tau_P = & (m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2 + 2m_b l_a l_{b1} \cos q_b + m_b l_{b1}^2 + I_b) \ddot{q}_a \\ & + [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \ddot{q}_b - 2m_b l_a l_{b1} \sin q_b \dot{q}_a \dot{q}_b - m_b l_{b1} l_a \sin q_b \dot{q}_b^2 \\ & + (m_a l_{a1} + m_b l_a) g \cos q_a + m_b l_{b1} g \cos (q_a + q_b), \end{aligned}$$

y despreciando términos asociados con el eslabón B se obtiene:

$$\tau_P = (m_a l_{ca}^2 + I_a) \ddot{q}_a + m_a l_{ca} g \cos q_a. \quad (5.40)$$

Recuérdese que (5.14) fue obtenida al considerar al eje horizontal como el eje de referencia de rotación de  $q_a$ ; entonces, con la intención de representar al eslabón A como un péndulo simple, se realiza un cambio de eje de referencia de  $q_a$  (del eje horizontal al vertical) y se considera  $\tau_P = 0$ . Por lo tanto, (5.40) puede escribirse como:

$$0 = (m_a l_{ca}^2 + I_a) \ddot{q}_a + m_a l_{ca} g \sin q_a. \quad (5.41)$$

Más aún, considerando  $\text{sen}q_a \approx q_a$  para valores pequeños de  $q_a$ , (5.41) se reduce a:

$$0 = (m_a l_{ca}^2 + I_a) \ddot{q}_a + m_a l_{ca} g q_a,$$

de donde es claro que la frecuencia natural del eslabón A, cuando no está conectado el eslabón B y no se aplica par, está dada por:

$$\omega_{n_A} = \sqrt{\frac{m_a l_{ca} g}{m_a l_{ca}^2 + I_a}}. \quad (5.42)$$

Al reemplazar los valores numéricos de la Tabla 5.2 en (5.42) se encuentra  $\omega_{n_A} = 6.3515$  rad/s. Por otro lado, de (5.15), reescrita enseguida para facilitar la referencia

$$0 = [m_b l_{b1} (l_a \cos q_b + l_{b1}) + I_b] \ddot{q}_a + (m_b l_{b1}^2 + I_b) \ddot{q}_b + m_b l_a l_{b1} \text{sen} q_b \dot{q}_a^2 + m_b l_{b1} g \cos(q_a + q_b),$$

se desprecian los términos asociados al eslabón A (es decir, se considera que el eslabón A permanece sin movimiento), se toma en cuenta que  $q_a$  se mide a partir del eje vertical y que  $\text{sen}q_b \approx q_b$  para valores pequeños de  $q_b$ ; de tal manera que (5.15) se reduce a lo siguiente:

$$0 = (m_b l_{cb}^2 + I_b) \ddot{q}_b + m_b l_{cb} g q_b. \quad (5.43)$$

En consecuencia, la frecuencia natural del eslabón B queda determinada por:

$$\omega_{n_B} = \sqrt{\frac{m_b l_{cb} g}{m_b l_{cb}^2 + I_b}}. \quad (5.44)$$

Cuando en (5.44) se reemplazan los valores numéricos de la Tabla 5.2, se encuentra  $\omega_{n_B} = 8.5088$  rad/s.

Ahora bien, para encontrar la frecuencia experimental de los eslabones A y B del pendubot, primero, se realizó un experimento con sólo el eslabón A del pendubot; es decir, se desmontó el eslabón B. El experimento consistió en manualmente llevar al eslabón A, desde la posición colgante, hasta la posición vertical invertida; una vez en esta última posición se dejó caer el eslabón A afectado únicamente por la gravedad (esto es, no se aplicó par externo). Los resultados obtenidos de este experimento se muestran en la Figura 5.14(a), de donde se obtuvo la frecuencia natural experimental del eslabón A con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \omega_{ne_A} &= \frac{2\pi n_A}{t_2 - t_1} \\ &= 6.7926 \text{ rad/s,} \end{aligned} \quad (5.45)$$

donde  $n_A$  es el número de oscilaciones del eslabón A en el intervalo comprendido entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ . En la obtención de la frecuencia natural experimental del eslabón B,  $\omega_{ne_B}$ , el experimento se realizó de la siguiente manera: Con el prototipo del pendubot completo, se inmovilizó el eslabón A en la posición colgante y manualmente se levantó el eslabón B, partiendo desde la posición colgante, hasta llegar a la posición vertical invertida; desde ahí, se dejó caer de tal manera que sólo la fuerza de gravedad lo afectaba. Así, se obtuvo el resultado experimental mostrado en la Figura 5.14(b), de la cual se encontró  $\omega_{ne_B} = 8.4908$  rad/s usando una expresión similar a (5.45).

Finalmente, desde que  $\omega_{n_A} = 6.3515 \text{ rad/s} \approx \omega_{n_{eA}} = 6.7926 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{n_B} = 8.5088 \text{ rad/s} \approx \omega_{n_{eB}} = 8.4908 \text{ rad/s}$ , se concluye que los parámetros del péndubot fueron medidos y calculados adecuadamente. Las pequeñas diferencias entre las frecuencias naturales teóricas y experimentales de los eslabones A y B se deben principalmente a que las fuerzas de fricción no se consideran en el modelo dinámico (5.14)–(5.15), las cuales están presentes en los prototipos construidos.

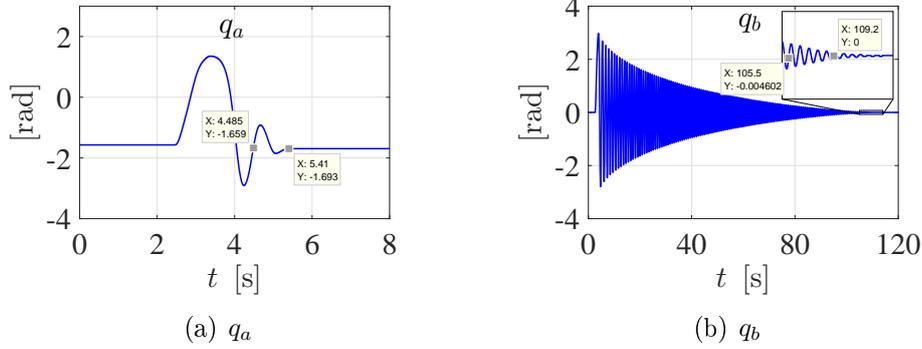


Figura 5.14: Posición de los eslabones del pendubot cuando son afectados sólo por la gravedad.

### 5.3. Controlador para *swing-up* más estabilización

En esta sección se presenta el control que permite resolver el problema de *swing-up*, así como el control lineal que llevará a cabo la estabilización. Asimismo, se muestran los correspondientes resultados tanto de simulación como de experimentación.

#### 5.3.1. Control para levantar el péndulo (*swing-up*)

Para llevar a cabo el *swing-up* del pendubot, se empleó el método de la linealización parcial colocada reportado en [280] para derivar en un control de seguimiento de trayectoria de la coordenada actuada (eslabón A), es decir, el *swing-up* es logrado al proponer una trayectoria adecuada para el eslabón A. Tal control está dado por [281]:

$$\tau_{P_{sw}} = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 \cos^2 q_b) u}{\alpha_2} - \frac{(\alpha_3^2 \cos q_b \sin q_b) \dot{q}_a^2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3 \sin q_b (q_a + q_b)^2 + \alpha_4 g \cos (q_a + q_b) - \alpha_3 \alpha_5 g \cos q_b \cos (q_a + q_b)}{\alpha_2}, \quad (5.46)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= m_a l_{a1}^2 + I_a + m_b l_a^2, & \alpha_2 &= m_b l_{b1}^2 + I_b, \\ \alpha_3 &= m_b l_{b1} l_a, & \alpha_4 &= m_a l_{a1} + m_b l_a, & \alpha_5 &= m_b l_{b1}, \end{aligned}$$

y  $u$  es un control auxiliar definido como:

$$u = \ddot{q}_a^* + k_{\dot{e}} (\dot{q}_a^* - \dot{q}_a) + k_e (q_a^* - q_a) \quad (5.47)$$

siendo  $q_a^*$  la trayectoria deseada para el eslabón A.

### 5.3.2. Control lineal para estabilizar el péndulo

En la Sección 5.1.3 se ha visto que el modelo lineal aproximado del pendubot es controlable, en consecuencia, se puede proponer un control lineal por relimentación del vector de estado para llevar a cabo la tarea de estabilización, dado por:

$$\begin{aligned} u_\delta &= -K_c x_\delta, \\ \tau_P &= -k_1(q_a - \bar{q}_a) - k_2 \dot{q}_a - k_3 q_b - k_4 \dot{q}_b = \tau_{P_e}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

con  $\bar{q}_a = +\frac{\pi}{2}$  definida en (5.28).

En este caso la selección de las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  se realiza vía la función  $\text{Acker}(\cdot)$  de Matlab.

### 5.3.3. Simulación numérica

La simulación de los controles (5.46) y (5.48), los cuales resuelven indirectamente la *swing-up* y directamente la estabilización del péndulo, respectivamente, se realiza al integrarlos en un controlador híbrido que obedece la siguiente condición de conmutación:

$$\begin{cases} \tau_{P_e} & \text{para } \sqrt{x_{\delta 3}^2 + 0.1x_{\delta 4}^2} \leq 0.5 \wedge |x_{\delta 1}| \leq 0.3, \\ \tau_{P_{sw}} & \text{para } \sqrt{x_{\delta 3}^2 + 0.1x_{\delta 4}^2} > 0.5 \wedge |x_{\delta 1}| > 0.3, \end{cases} \quad (5.49)$$

En la Figura 5.15 se muestra un diagrama de bloques del controlador (5.49).

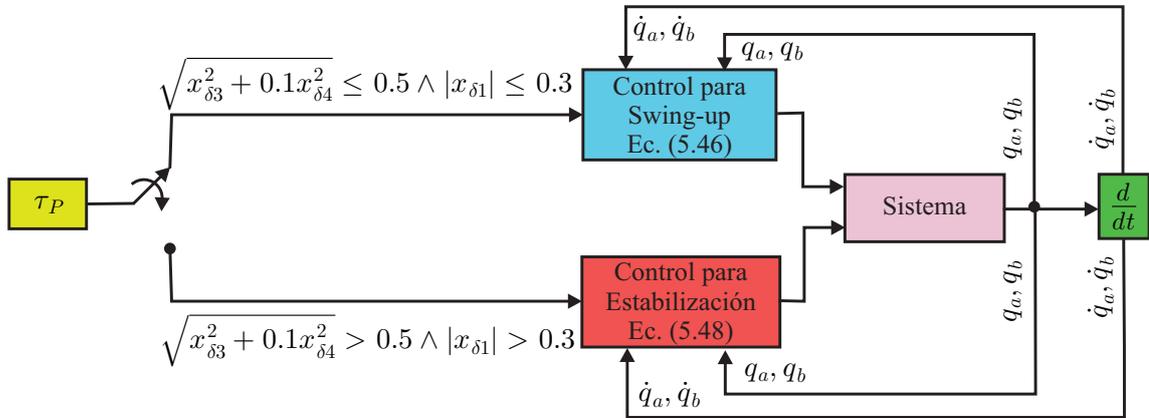


Figura 5.15: Diagrama de bloques del controlador híbrido (5.49).

La simulación numérica del sistema en lazo cerrado con el controlador (5.49) se llevó a cabo a través del diagrama de bloques mostrado en la Figura 5.16. Tal diagrama fue realizado en Matlab-Simulink, el cual consiste de tres bloques, a saber: *Controlador*, *Sistema* y *Salidas*. La descripción de estos bloques se da a continuación.

- *Controlador*. Este bloque corresponde al llamado, en el ambiente de Simulink, Matlab Function [278]. Aquí se programa el controlador híbrido (5.49). Las ganancias asociadas con el control  $\tau_{P_{sw}}$  fueron seleccionadas como:

$$k_e = 250, \quad k_e = 275,$$

la trayectoria deseada  $q_a^*$  se propuso de la siguiente manera:

$$q_a^* = \begin{cases} \bar{q}_{ai} + (\bar{q}_{af} - \bar{q}_{ai}) p_d & \text{para } t < 6 \text{ s,} \\ \frac{\pi}{2} + \text{sen}(1.5\pi t) & \text{para } t \geq 6 \text{ s,} \end{cases} \quad (5.50)$$

donde  $\bar{q}_{ai}$  y  $\bar{q}_{af}$  son valores constantes de inicio y fin, respectivamente, de la trayectoria y  $p_d$  es un polinomio de Bézier, dado por:

$$p_d = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq t_0, \\ \left( \frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^5 \left[ r_1 + r_2 \left( \frac{t-t_0}{T-t_0} \right) + r_3 \left( \frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^2 + r_4 \left( \frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^3 + r_5 \left( \frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^4 + r_6 \left( \frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^5 \right] & \text{para } t_0 < t < T, \\ 1 & \text{para } t \geq T, \end{cases} \quad (5.51)$$

siendo  $t_0$  y  $T$  los tiempos de inicio y fin de la interpolación del polinomio de Bézier. Así, se escogieron  $\bar{q}_{ai} = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{q}_{af} = \frac{\pi}{2}$ ,  $r_1 = 252$ ,  $r_2 = -1050$ ,  $r_3 = 1800$ ,  $r_4 = -1575$ ,  $r_5 = 700$  y  $r_6 = -126$ . Mientras que las ganancias relativas al control  $\tau_{P_e}$ , i.e.,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  fueron calculadas al escoger el siguiente polinomio característico deseado para el modelo lineal aproximado del pendubot, evaluado con la función `Acker()` de Matlab:

$$p_P = s^4 + 80s^3 + 2000s^2 + 9500s + 15000,$$

el cual tiene las siguientes raíces:

$$\begin{aligned} & -37.2093 + 13.8053i, & -37.2093 - 13.8053i \\ & -2.7907 + 1.3173i, & -2.7907 - 1.3173i. \end{aligned}$$

- *Sistema.* En este bloque es un Matlab Function, en el cual se programa el modelo dinámico del pendubot, (5.14)–(5.15). Donde se usaron los parámetros de la Tabla 5.2 del pendubot construido.
- *Salidas.* Se refiere a los bloques que en el ambiente de Matlab-Simulink son llamados *to workspace*, en los cuales se almacenan arreglos de datos asociados con la evolución dinámica de las variables del sistema  $q_a$ ,  $\dot{q}_a$ ,  $q_b$ ,  $\dot{q}_b$  y del control  $\tau_P$ .

En la simulación, el tiempo de muestreo y el solucionador empleados fueron 1 ms y `ode1(Euler)`, respectivamente. La Figura 2.21 muestra los resultados de la simulación. En esa figura, se puede ver que el objetivo de control no es logrado; pues el eslabón B no se estabiliza cuando está cerca de la posición invertida ( $q_a = +\frac{\pi}{2}$  rad y  $q_b = 0$  rad).

### 5.3.4. Implementación experimental

Para implementar experimentalmente el controlador (5.49), se tuvo que establecer una conexión entre un programa realizado en Matlab-Simulink y el prototipo construido de pendubot. Tal conexión se muestra en la Figura 5.18. En la experimentación, se usó mismo tiempo de muestro y solucionador que en la simulación. Las diferencias entre la Figura 5.16 y la Figura 5.18 se explican a continuación.

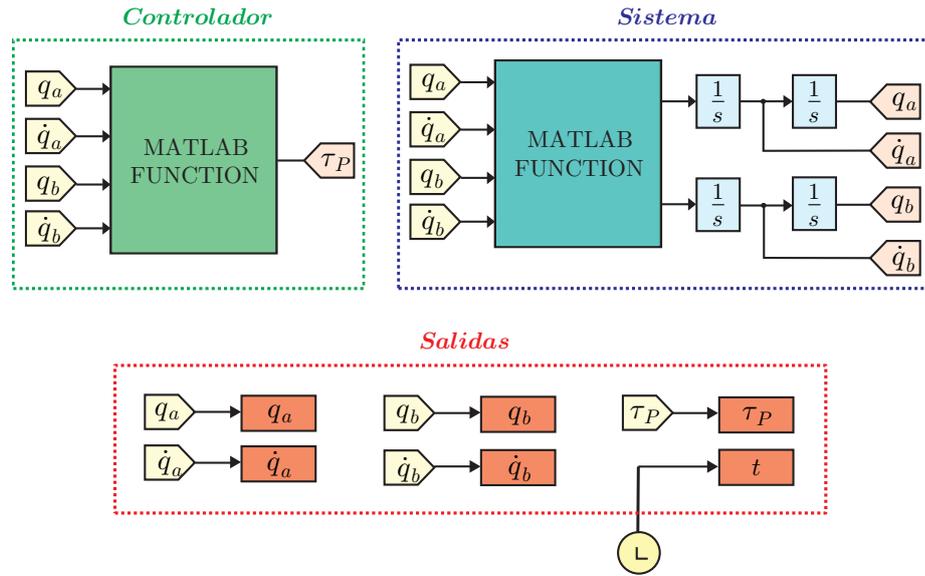


Figura 5.16: Diagrama de bloques en Matlab-Simulink de la simulación del pendubot en lazo cerrado.

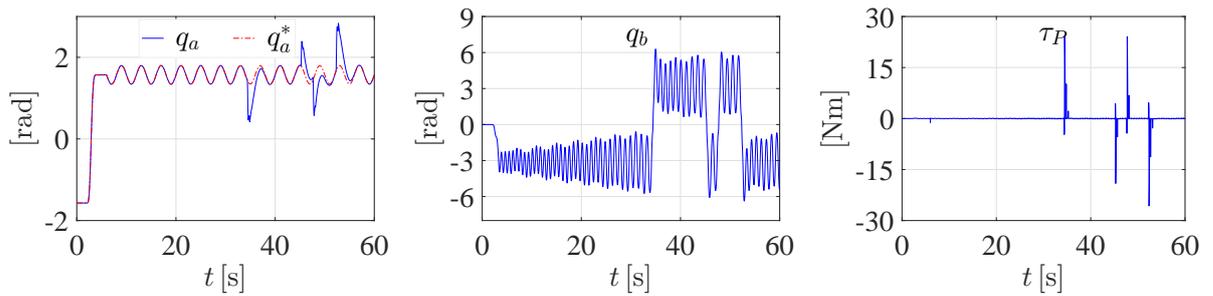


Figura 5.17: Resultados de simulación en lazo cerrado del controlador híbrido (5.49).

- *Sistema.* En experimentación este bloque es reemplazado por el prototipo construido. Entonces, el encoder ITD01B14 de Baumer, conectado a un canal para encoder de la tarjeta DS1104, permite sensar  $q_b$  y calcular  $\dot{q}_b$ . Mientras que  $q_a$  y  $\dot{q}_a$  se obtienen del encoder integrado al motor de CD 14204S006 Pittman, el cual se conecta a otro canal para encoder de la tarjeta DS1104. Por otro lado, la corriente conmutada  $i_c$  se implementa vía PWM, esto es, a través de un canal de PWM de la tarjeta DS1104, con una frecuencia de conmutación de 15 kHz. La dirección de la flecha del motor de CD es indicada por medio de un bit de salida de la tarjeta DS1104.
- *Acondicionador de la entrada.* Este bloque no aparece en la Figura 5.16 porque ahí  $\tau_P$  puede aplicarse directamente al sistema. Pero, en experimentación la aplicación de  $\tau_P$  al prototipo requiere el siguiente acondicionamiento:

i) Transformar el par dado por (5.49) en una corriente continua vía (2.54), i.e.:

$$\tau_P = k_i \dot{i}_m^*,$$

donde se recuerda que  $k_i$  e  $i_m^*$  son la constante de par y la corriente deseada de armadura del motor de CD, respectivamente. De (2.54) es claro que

$$i_m^* = \frac{\tau_P}{k_i}.$$

Se recuerda también que,  $i_m^*$  puede tomar valores en el intervalo  $[-i_{max}, +i_{max}]$ , con  $i_{max}$  siendo la corriente máxima del motor de CD. Para propósitos de implementación de  $i_m^*$  vía un PWM, es decir, obtener la corriente conmutada  $i_c$ , la correspondiente corriente promedio  $i_{av}$  se obtiene usando (2.56), es decir:

$$i_{av} = \left| \frac{i_m^*}{i_{max}} \right|,$$

la cual puede tomar valores en el intervalo  $[0, 1]$  y está asociada con el ciclo útil de trabajo del PWM.

ii) La dirección de  $i_m^*$  y, en consecuencia, la dirección de la flecha del motor de CD, se indica en la Figura 5.18 como  $d$  y se determina por medio de la condición dada por (2.57):

$$d = \begin{cases} 1 & \text{para } i_m^* \geq 0, \\ 0 & \text{para } i_m^* < 0. \end{cases}$$

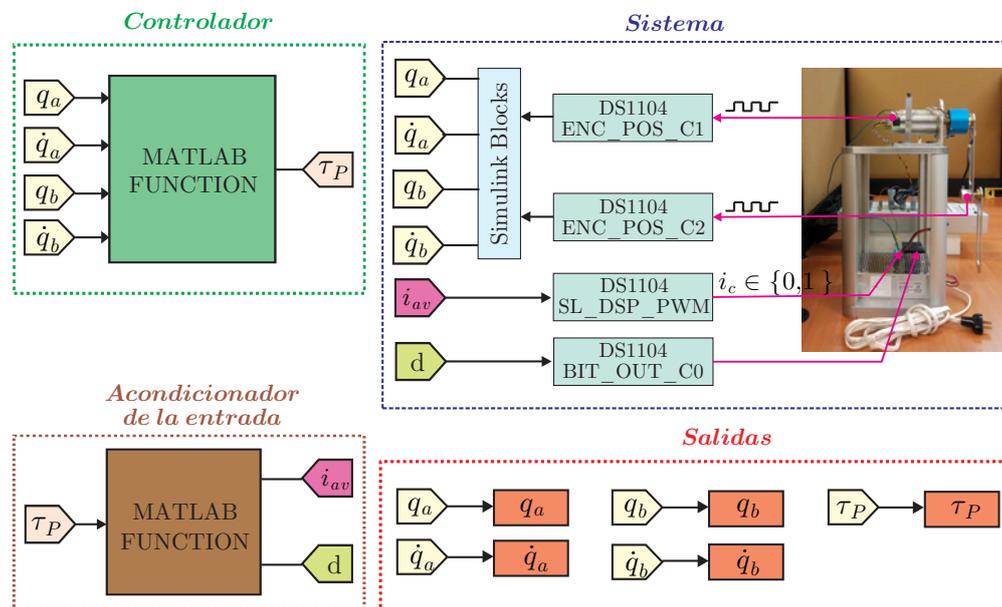


Figura 5.18: Diagrama de bloques de Matlab-Simulink para experimentación del pendubot en lazo cerrado.

Los resultados de la implementación experimental del controlador híbrido (5.49) se muestran en la Figura 5.19. Estos resultados muestran, a diferencia de los resultados de simulación, que el objetivo de control se logra exitosamente.

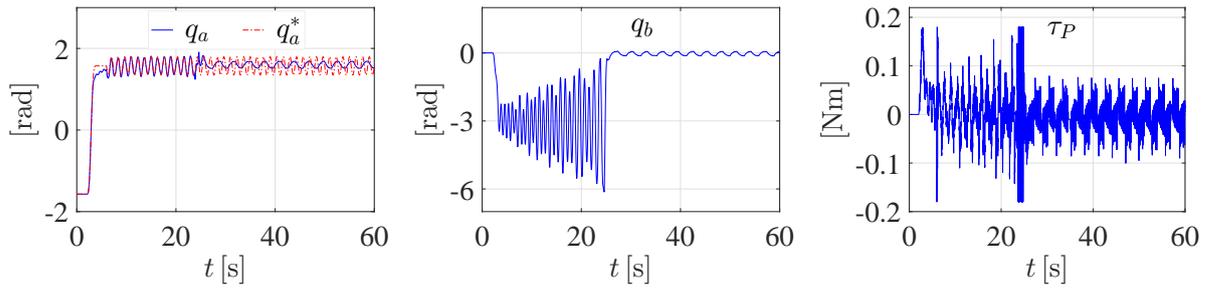


Figura 5.19: Resultados experimentales del pendubot en lazo cerrado con el controlador híbrido (5.49).

### 5.3.5. Discusión de resultados

En los resultados de simulación queda de manifiesto que el control (5.46) logra que se ejecute exitosamente el seguimiento de trayectoria de la coordenada actuada, es decir que  $q_a \rightarrow q_a^*$ , aún en presencia de perturbaciones (la conmutación al control lineal por realimentación del vector de estado (5.48), cuando  $q_a \approx \frac{\pi}{2}$  y  $q_b \approx 0$ , puede considerarse como una perturbación). Sin embargo, el seguimiento de la trayectoria deseada no logra llevar a  $q_b$  lo suficientemente cerca de la posición invertida. En consecuencia, y debido a que el control lineal (5.48) es útil únicamente cuando  $x_{\delta 1} = q_a - \bar{q}_a \rightarrow 0$  y  $x_{\delta 3} = q_b - \bar{q}_b \rightarrow 0$ , no se puede lograr la estabilización del pendubot en la posición invertida; pues, nótese en la Figura 5.17, que la conmutación de controles ocurre cuando la diferencia entre  $q_a$  y  $\bar{q}_a = \frac{\pi}{2}$  es casi la máxima posible de acuerdo a la senoide programada. Además, la diferencia entre  $q_b$  y  $\bar{q}_b = 0$  es también grande. A diferencia de la simulación, en la experimentación si se logra el objetivo de control (llevar el pendubot desde su posición colgante hasta la posición vertical invertida y estabilizarlo en esta última). Esto se debe a que, en el experimento, la conmutación del control (5.46) al control (5.48) ocurre cuando  $x_{\delta 1} = q_a - \bar{q}_a$  y  $x_{\delta 3} = q_b - \bar{q}_b$  son mucho menores con respecto a lo observado en la simulación. De hecho al conmutar controles  $x_{\delta 1} = q_a - \bar{q}_a$  es casi cero en la Figura 5.19. Adicionalmente, es bien sabido que en la implementación práctica, el control lineal (5.48) es efectivo aún con una diferencia un poco mayor a la teórica en los estados incrementales.

## 5.4. Esquema de control para eliminar ciclo límite

En este apartado se emplea el esquema de control propuesto en la Sección 2.4.2, y usado también para el PISC en la Sección 4.4, para la eliminación del ciclo límite en el sistema pendubot. Se recuerda que el diseño del control está basado en la respuesta en frecuencia; de tal manera que se obtienen fórmulas precisas que facilitan la sintonización de sus ganancias.

Aplicando la transformada de Laplace a (5.36) se encuentra que la siguiente función de transferencia es equivalente al modelo lineal aproximado del pendubot:

$$G_P(s) = \frac{F_P(s)}{\tau_P(s)} = \frac{-n_P}{s^4 - n_P s^2 + m_P}, \quad (5.52)$$

donde  $F_P(s)$  y  $\tau_P(s)$  son la transformada de Laplace de la salida plana y el par aplicado al pendubot, respectivamente, y que

$$n_P = \frac{\alpha_3 \alpha_5 g}{(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)},$$

$$m_P = \frac{\alpha_4 \alpha_5 g^2}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}.$$

Nótese que  $n_P > 0$  para cualesquiera parámetros del pendubot y que los cuatro polos de (5.52) son complejos conjugados, dos de ellos con parte real positiva y los otros dos con parte real negativa. Entonces, el mismo esquema de control usado para eliminar ciclos límite en el PF y PISC se emplea para controlar (5.52) como se representa en la Figura 5.20. También nótese que el controlador de la Figura 5.20 es realizable porque consiste en la realimentación de la salida de la planta y de sus tres primeras derivadas.

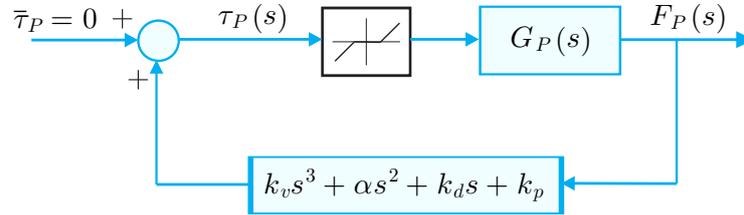


Figura 5.20: Sistema de lazo cerrado del pendubot donde se considera la no linealidad de zona muerta.

Cuando se reemplaza en (2.72), es decir:

$$\tau(s) = k_v F(s) s^3 + \alpha F(s) s^2 + k_d F(s) s + k_p F(s),$$

la parametrización diferencial del pendubot (5.32)–(5.36), se encuentra que el control (2.72) es equivalente al control lineal por realimentación del vector de estado (5.48), rescrito a continuación para facilitar la referencia.

$$\tau_P = -k_1 x_{\delta 1} - k_2 x_{\delta 2} - k_3 x_{\delta 3} - k_4 x_{\delta 4},$$

si se consideran las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\alpha \alpha_5 g}{\alpha_2 + \alpha_3} + k_p \right) &= k_1, \\ - \left( \frac{k_v \alpha_5 g}{\alpha_2 + \alpha_3} + k_d \right) &= k_2, \\ - \left( \frac{\alpha \alpha_5 g + \alpha_2 k_p}{\alpha_2 + \alpha_3} \right) &= k_3, \\ - \left( \frac{k_v \alpha_5 g + \alpha_2 k_d}{\alpha_2 + \alpha_3} \right) &= k_4. \end{aligned} \tag{5.53}$$

### 5.4.1. Análisis de existencia de ciclo límite

Nótese que para establecer la existencia de ciclos límite en el sistema péndubot, se puede proceder similarmente como se hizo para el PF y PISC en las Secciones 2.4.1 y 4.4.1, respectivamente. Para esto, se sugiere en [279], Ch. 5, representar el sistema en lazo cerrado en la forma estándar mostrada en la Figura 5.21, lo cual se logra al aplicar álgebra de bloques en la Figura 5.20; siendo la entrada a la no linealidad  $e = \tau_P(s)$ , mientras que el sistema lineal invariante en el tiempo  $G(s)$  es:

$$G(s) = G_1(s) G_2(s), \quad (5.54)$$

donde  $G_1(s) = \frac{-(-n_P)}{s^4 - n_P s^2 + m_P}$ , con  $-(-n_P) > 0$ , y  $G_2(s) = k_v s^3 + \alpha s^2 + k_d s + k_p$  es el controlador. Nótese que  $G(s)$  tiene cuatro polos y sólo tres ceros, es decir que la magnitud de (5.54) se comporta como un filtro pasa bajas, lo cual es requerido para aplicar el método de la función descriptiva.

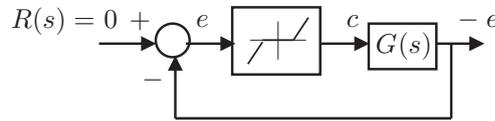


Figura 5.21: Representación equivalente del diagrama de bloques de la Figura 5.20.

La función descriptiva de la zona muerta,  $N(A)$ , ya se ha descrito anteriormente en la Sección 2.4.1. A partir de aquí, se puede realizar el mismo análisis sobre la existencia de ciclos límite que se llevó a cabo para el PF en la Sección 2.4.1, pero esta vez para el pendubot. Entonces se puede concluir que, para el pendubot, también existe ciclo límite si:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}.$$

Ya que  $N(A)$  es real y positiva,  $-1/N(A)$  es real y negativa. En consecuencia, existe ciclo límite si el diagrama polar de  $G(j\omega)$  intersecta el eje real negativo en el intervalo abierto  $(-\infty, -1/k)$ . La frecuencia y amplitud de oscilación son encontradas como el valor de  $\omega$ , en  $G(j\omega)$ , y  $A$ , en  $-1/N(A)$ , en el punto donde sus gráficas se cruzan (ver Figura 5.22).

### 5.4.2. Sintonización del control

Cuando se considera la Figura 5.20, despreciando la no linealidad de zona muerta, se obtiene la siguiente función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{-n_P}{s^4 + n_P k_v s^3 + a_1 s^2 + n_P k_d s + a_2}, \quad (5.55)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= n_P \alpha - \left( \frac{\alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \right) g, \\ a_2 &= m_P + n_P k_p, \end{aligned}$$

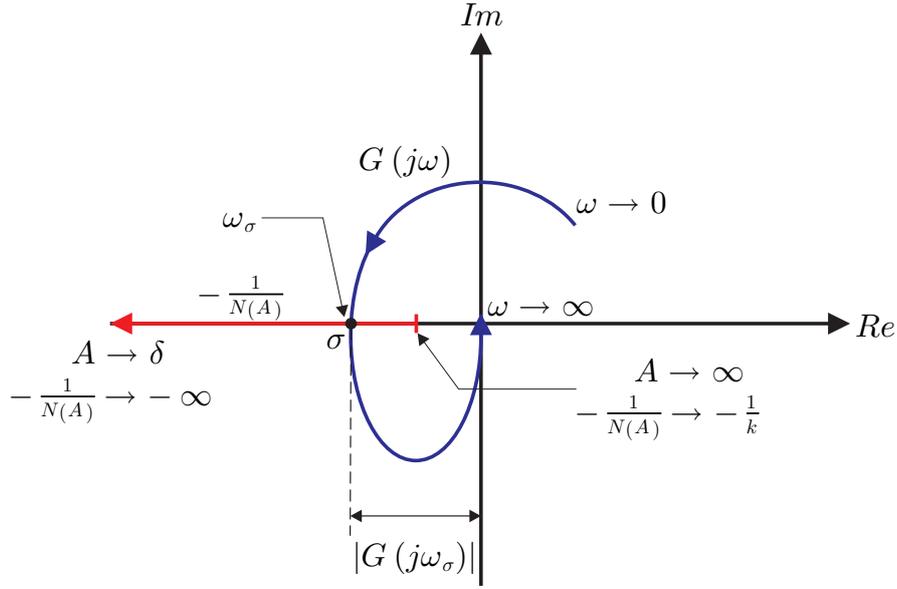


Figura 5.22: Gráfica polar de  $G(j\omega)$  y  $-1/N(A)$ .

de lo cual se obtiene que

$$k_v > 0, \quad (5.56)$$

$$\alpha > 0 \quad \wedge \quad n_P \alpha > \frac{\alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}, \quad (5.57)$$

$$k_d > 0,$$

$$k_p > 0$$

son necesarias para garantizar que todos los coeficientes del polinomio característico en (5.55) sean positivos. Por lo tanto, las condiciones (5.56) y (5.57) se usan para escoger  $k_v$  y  $\alpha$  en el caso del pendubot.

Con  $k_v$  y  $\alpha$  seleccionadas,  $k_d$  y  $k_p$  se pueden seleccionar considerando los incisos a), b), c) y d) de la Sección 4.4.2, es decir:

a) Note que  $-b_{41}(a_{23} + a_{43}h) > 0$  y  $-(-n_P) > 0$ , por lo tanto, la fase de  $G_1(j\omega) = \frac{b_{41}(a_{23} + a_{43}h)}{s^2 - a_{43}}$  es  $-360^\circ$  para toda  $\omega \geq 0$ . Esto puede verificarse reemplazando  $s$  por  $j\omega$  en  $G_1(s)$ .

b) Reemplazando  $s$  por  $j\omega$  en  $G_2(s) = k_v s^3 + \alpha s^2 + k_d s + k_p$  se encuentra:

$$\begin{aligned} G_2(j\omega) &= k_v (j\omega)^3 + \alpha (j\omega)^2 + k_d (j\omega) + k_p, \\ &= j(k_d \omega - k_v \omega^3) + (k_p - \alpha \omega^2), \end{aligned}$$

cuya magnitud está dada como,

$$|G_2(j\omega)| = \sqrt{(k_d \omega - k_v \omega^3)^2 + (k_p - \alpha \omega^2)^2}. \quad (5.58)$$

Resolviendo (5.58) para  $k_p$ , se obtiene:

$$k_p = \pm \sqrt{|G_2(j\omega)|^2 - (k_d \omega - k_v \omega^3)^2} + \alpha \omega^2. \quad (5.59)$$

- c) Para forzar que el diagrama polar de  $G(j\omega)$  intersecte el eje real negativo, i.e., hacer que la fase de  $G(j\omega)$  sea igual a  $-180^\circ$  para alguna  $\omega > 0$ , la fase de  $G_2(j\omega)$  debe ser  $+180^\circ$  para la misma  $\omega$  (ver a) arriba), esto es:

$$\angle G_2(j\omega) = \arctan\left(\frac{k_d\omega - k_v\omega^3}{k_p - \alpha\omega^2}\right) = +180. \quad (5.60)$$

Esto se satisface si,

$$k_p - \alpha\omega^2 < 0, \quad (5.61)$$

$$k_d\omega - k_v\omega^3 = 0. \quad (5.62)$$

Por lo tanto, el signo en (5.59) tiene que escogerse tal que se cumpla (5.61).

- d) De (5.62) se obtiene la siguiente relación para encontrar  $k_d$ :

$$k_d = k_v\omega^2. \quad (5.63)$$

Note que para encontrar  $k_p$  y  $k_d$ , es necesario proponer la frecuencia  $\omega = \omega_\sigma$  a la cual se desea que el diagrama polar de  $G(j\omega)$  intersecte el eje real negativo. También, la magnitud  $|G_2(j\omega_\sigma)|$  que debe introducir el control tiene que conocerse. Para este fin, se tiene que proponer una magnitud deseada para  $G(j\omega)$  cuando  $\omega = \omega_\sigma$ . Desde que:

$$|G(j\omega_\sigma)| = |G_1(j\omega_\sigma)| \cdot |G_2(j\omega_\sigma)|,$$

entonces

$$|G_2(j\omega_\sigma)| = \frac{|G(j\omega_\sigma)|}{|G_1(j\omega_\sigma)|}. \quad (5.64)$$

donde  $|G_1(j\omega_\sigma)|$  se puede obtener de los diagramas de Bode de  $G_1(j\omega)$ . Así, los diagramas de Bode son una herramienta adecuada para diseñar las ganancias del control  $k_v$ ,  $\alpha$ ,  $k_d$  y  $k_p$ .

### 5.4.3. Procedimiento para la eliminación del ciclo límite

El procedimiento experimental para la eliminación del ciclo límite se sustenta en la conjetura establecida en la Sección 4.4.3, reescrita a continuación:

**Conjetura.** De acuerdo a la función característica de la no linealidad de zona muerta, si  $|e| \leq \delta$  entonces un valor cero aparece en la entrada de la planta  $c = 0$ , i.e., la fuerza aplicada por el motor al sistema PISC es cero y el prototipo puede permanecer en el punto de operación. Desde que el umbral  $\delta$  es incierto debido a que la fricción es incierta, es natural presentarse si es posible hacer  $A < \delta$  en experimentos, a pesar que (2.70) es válida sólo para  $A \geq \delta$ . Recuérdese que  $A \geq |e|$  porque  $A$  es la amplitud de  $e$ . Entonces, el prototipo puede permanecer en el punto de operación si se escoge  $A$  lo suficientemente pequeña, i.e., el ciclo límite puede desaparecer bajo estas condiciones.

Para llevar a cabo el procedimiento experimental de eliminación del ciclo, resulta de utilidad pero no necesario determinar  $\delta$ . En ese sentido, para el pendubot  $\delta$  fue obtenido experimentalmente procediendo similarmente a lo realizado para el PF, es decir, los experimentos consistieron en aplicar varias ocasiones una rampa de par al motor del

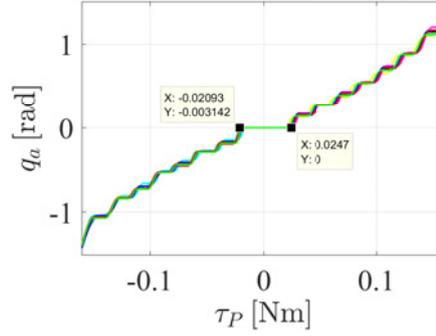


Figura 5.23: Obtención experimental de  $\delta$  del pendubot.

prototipo el cual fue primeramente  $\tau_P = mt$  y luego  $\tau_P = -mt$ , con  $m = 0.016$ . Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 5.23, de la cual se escogió el  $\delta$  más grande, siendo este  $\delta = 24.7 \times 10^{-3}$ .

Ahora bien, con los parámetros de la Tabla 5.2 se encontró lo siguiente:

$$-n_P = -3.7465 \times 10^4. \quad (5.65)$$

Desde este punto se puede aplicar el procedimiento explicado para el PF en la Sección 2.4.2, por lo tanto para el pendubot sólo se presenta la aplicación de tal procedimiento.

#### 5.4.4. Resultados experimentales

Los diagramas de Bode de la planta  $G_1(j\omega)$ , se muestran en la Figura 5.24. El procedimiento de la eliminación del ciclo límite fue iniciado usando  $\omega_\sigma = 10$  rad/s, lo cual de la Figura 5.24 conduce a  $|G_1(j\omega_\sigma)|_{\text{dB}} = -0.232$  dB, i.e.,

$$|G_1(j\omega_\sigma)| = 10^{|G_1(j\omega_\sigma)|_{\text{dB}}/20} = 0.9735. \quad (5.66)$$

También, inicialmente se empleó  $|G(j\omega_\sigma)| = 4$ .

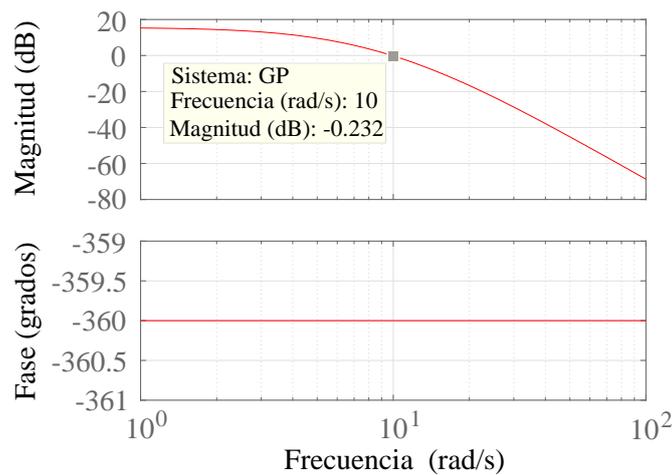


Figura 5.24: Diagramas de Bode de  $G_1(s)$ .

Luego  $k_v$  y  $\alpha$  se escogieron con base a (5.56) y (5.57) como sigue:

$$k_v = 0.00140, \quad \alpha = 0.0411.$$

Estos valores numéricos fueron empleados para encontrar:

$$|G_2(j\omega_\sigma)| = \frac{10}{0.9735} = 4.1088. \quad (5.67)$$

Con este valor numérico, se calcularon (5.59) y (5.63) encontrando las constantes:

$$k_p = 0.0259, \quad k_d = 0.0056, \quad (5.68)$$

El signo “-” fue considerado en (5.59), ya que esto logra que  $k_p - \alpha\omega_\sigma^2 = -4.1088 < 0$ . Por lo tanto, cuando se usan las relaciones en (5.53) se encuentran las siguientes ganancias para (5.48):

$$\begin{aligned} k_1 &= -1.2045, & k_2 &= -0.1810, \\ k_3 &= -1.2038, & k_4 &= -0.0974. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Los diagramas de Bode de sistema compensado  $G(s)$  se muestran en la Figura 5.25. Ahí se corrobora que el sistema en lazo abierto tiene la fase y magnitud deseadas, es decir,  $-180^\circ$ , y  $|G(j\omega_\sigma)|_{\text{dB}} = 12$ , i.e.,  $|G(j\omega_\sigma)| \approx 4$ . Esto se puede ver claramente en el diagrama polar de  $G(j\omega)$  presentada en la Figura 5.26.

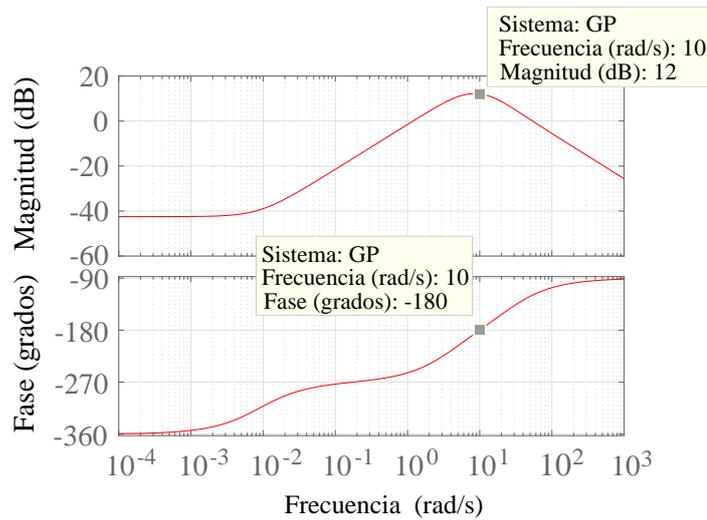


Figura 5.25: Diagramas de Bode de  $G(s)$ .

El control por realimentación del vector de estado, (5.48), fue probado experimentalmente para estabilizar el pendubot usando las ganancias en (5.69). La etapa de *swing-up* fue llevada a cabo manualmente siguiendo la condición de conmutación:

$$\tau_P = \begin{cases} \tau_{Pe} & \text{para } \sqrt{x_{\delta 3}^2 + 0.1x_{\delta 4}^2} \leq 0.5 \wedge |x_{\delta 1}| \leq 0.3, \\ 0 & \text{para } \sqrt{x_{\delta 3}^2 + 0.1x_{\delta 4}^2} > 0.5 \wedge |x_{\delta 1}| > 0.3, \end{cases} \quad (5.70)$$

Los resultados experimentales de (5.70) se muestran en la Figura 5.27. Sólo la parte de tiempo donde el control lineal es ejecutado. En la Figura 5.27 se observa que hay ciclo límite, con una amplitud  $A_{eP} = 0.0605$  Nm y una frecuencia de oscilación  $\omega_{\sigma eP} = 2.2737$  rad/s.

Todas las ganancias que se implementaron experimentalmente se incluyen en la Tabla 5.3. Esta tabla también incluye la amplitud y frecuencia de oscilación del ciclo límite medidas en cada experimento, las cuales son denotadas como  $A_{eP}$  y  $\omega_{\sigma eP}$ , respectivamente.

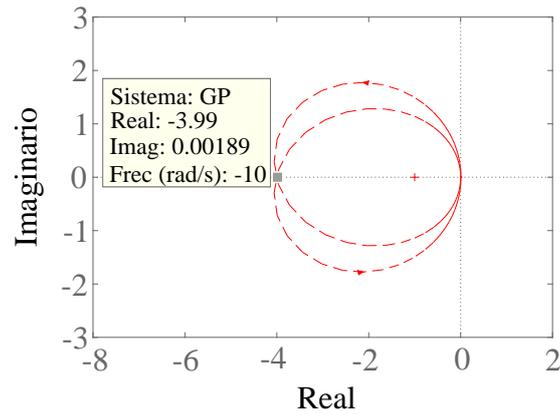
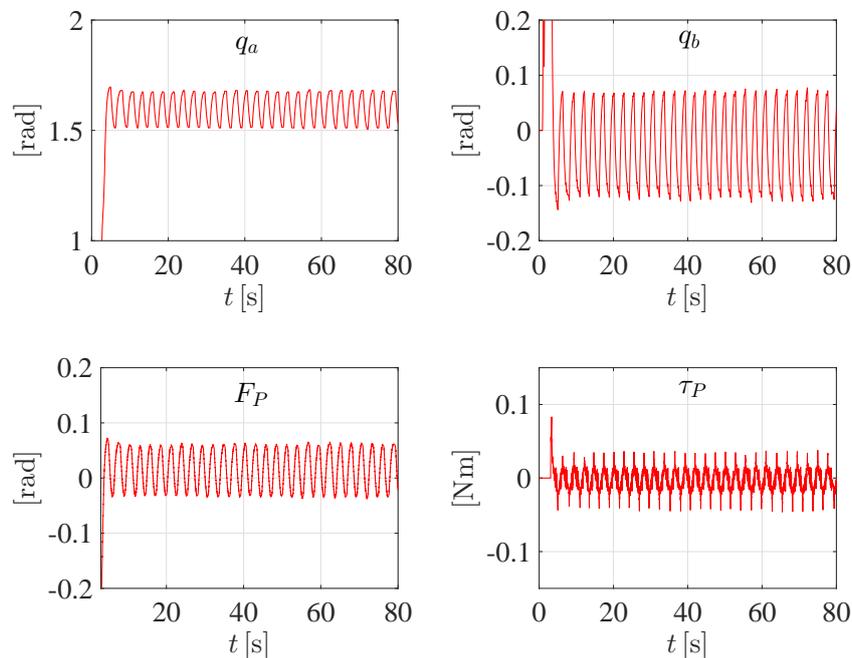
Figura 5.26: Diagrama polar de  $G(j\omega)$ .

Figura 5.27: Resultados experimentales considerando las ganancias (5.69).

El experimento donde se eliminó por completo el ciclo límite se localiza en  $|G(j\omega_\sigma)| = 25$  y  $\omega_\sigma = 14$  rad/s. Con la intención de dar una mejor idea de la evolución de los experimentos de los presentados en la Figura 5.27, en la Figura 5.28 se muestran resultados cuando se toma en cuenta  $|G(j\omega_\sigma)| = 12$  y  $\omega_\sigma = 12$  rad/s. En la Figura 5.28 la amplitud y frecuencia de oscilación del ciclo límite es  $A_{eP} = 0.0365$  Nm y  $\omega_{\sigma eP} = 1.9635$  rad/s, respectivamente. Nótese que la amplitud del ciclo límite es menor que en la Figura 5.27 y que  $|G(j\omega_\sigma)| \gg 1$  se satisface. Mientras que el resultado donde el ciclo límite es completamente eliminado se presenta en la Figura 5.29. Además, la Figura 5.30 muestra como la amplitud del ciclo límite disminuye hasta desaparecer durante el procedimiento experimental conforme  $|G(j\omega_\sigma)|$  y  $\omega_\sigma$  son más grandes. También, en la Figura 5.30 se puede ver que la amplitud  $A_{eP}$  es menor para una  $|G(j\omega_\sigma)|$  dada si se escoge una  $\omega_\sigma$  más grande. De acuerdo a la conjetura establecida, esto es útil para eliminar el ciclo límite porque un valor muy grande de  $|G(j\omega_\sigma)|$  puede resultar en vibración excesiva en lugar de eliminar el ciclo límite.

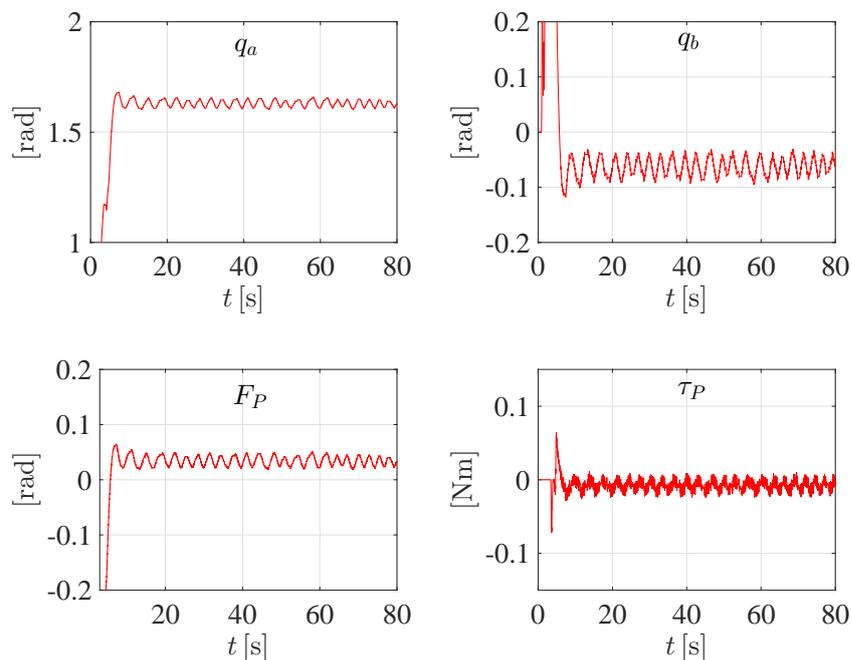


Figura 5.28: Resultados experimentales considerando  $|G(j\omega_\sigma)| = 12$  y  $\omega_\sigma = 12$  rad/s.

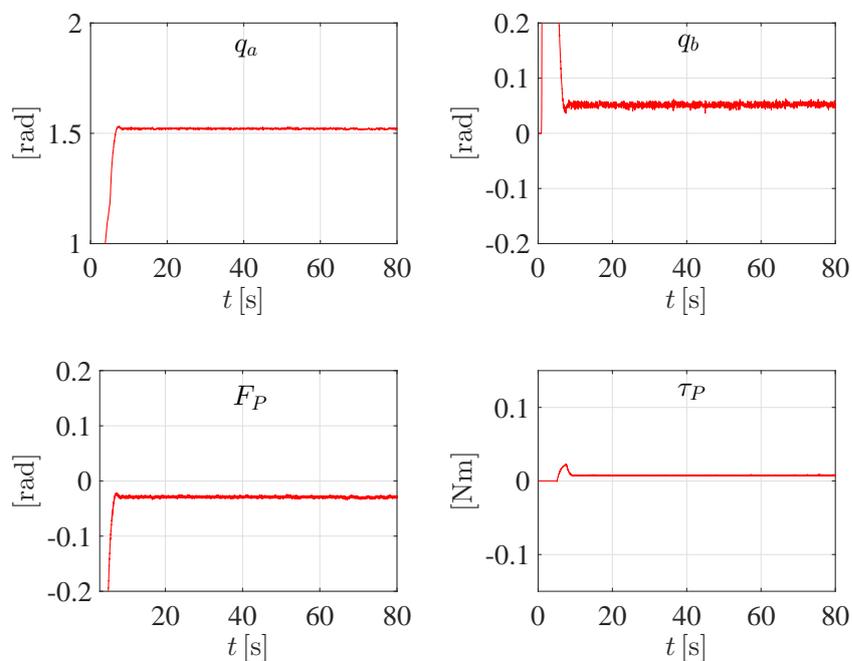


Figura 5.29: Resultados experimentales considerando  $|G(j\omega_\sigma)| = 25$  y  $\omega_\sigma = 14$  rad/s.

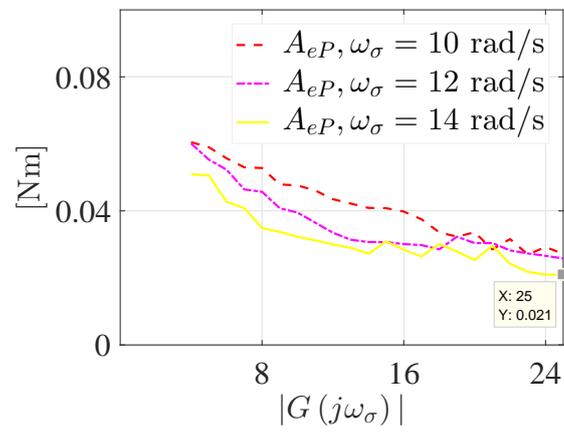


Figura 5.30: Evolución de la amplitud de ciclo límite durante el procedimiento experimental.

Tabla 5.3: Ganancias calculadas para los controles (2.72) y (5.48).

$ G(j\omega_\sigma) $	$\omega_\sigma$		
	$10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
4	$k_v = 0.0014, \alpha = 0.0411,$ $k_d = 0.1400, k_p = 0.0012.$	$k_v = 0.001, \alpha = 0.0434,$ $k_d = 0.1440, k_p = 0.0042.$	$k_v = 0.001, \alpha = 0.049,$ $k_d = 0.1960, k_p = 0.2594.$
	$k_1 = -1.2045, k_2 = -0.1810,$ $k_3 = -1.2038, k_4 = -0.0974.$	$k_1 = -1.2748, k_2 = -0.1733,$ $k_3 = -1.2723, k_4 = -0.0873.$	$k_1 = -1.6940, k_2 = -0.2253,$ $k_3 = -1.5392, k_4 = -0.1083.$
	$A_{eP} = 0.0605 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 2.2737 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0601 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 2.0039 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0509 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 3.1918 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
7	$k_v = 0.0019, \alpha = 0.072,$ $k_d = 0.1900, k_p = 0.0097.$	$k_v = 0.0015, \alpha = 0.076,$ $k_d = 0.2160, k_p = 0.0146.$	$k_v = 0.0014, \alpha = 0.084,$ $k_d = 0.2744, k_p = 0.1110.$
	$k_1 = -2.1176, k_2 = -0.2456,$ $k_3 = -2.1119, k_4 = -0.1322.$	$k_1 = -0.2599, k_2 = -0.2599,$ $k_3 = -2.2309, k_4 = -0.1310.$	$k_1 = -2.5702, k_2 = -0.3154,$ $k_3 = -2.5040, k_4 = -0.1516.$
	$A_{eP} = 0.0530 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.8125 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0464 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.5272 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0408 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 2.0790 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
10	$k_v = 0.0023, \alpha = 0.103,$ $k_d = 0.2300, k_p = 0.0281.$	$k_v = 0.0021, \alpha = 0.109,$ $k_d = 0.3024, k_p = 0.0825.$	$k_v = 0.0019, \alpha = 0.12,$ $k_d = 0.3724, k_p = 0.1585.$
	$k_1 = -3.0437, k_2 = -0.2973,$ $k_3 = -3.0269, k_4 = -0.1601.$	$k_1 = -3.2737, k_2 = -0.3639,$ $k_3 = -3.2245, k_4 = -0.1834.$	$k_1 = -3.6718, k_2 = -0.4280,$ $k_3 = -3.5772, k_4 = -0.2057.$
	$A_{eP} = 0.0476 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.4226 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0335 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.6698 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0323 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 2.6050 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
12	$k_v = 0.0026, \alpha = 0.124,$ $k_d = 0.2600, k_p = 0.0737.$	$k_v = 0.0026, \alpha = 0.131,$ $k_d = 0.3744, k_p = 0.1278.$	$k_v = 0.0022, \alpha = 0.144,$ $k_d = 0.4312, k_p = 0.1902.$
	$k_1 = -3.7041, k_2 = -0.3361,$ $k_3 = -3.6601, k_4 = -0.1809.$	$k_1 = -3.9631, k_2 = -0.4505,$ $k_3 = -3.8868, k_4 = -0.2270.$	$k_1 = -4.4061, k_2 = -4.4061,$ $k_3 = -4.2926, k_4 = -0.2382.$
	$A_{eP} = 0.0435 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.6046 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0302 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.9778 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0300 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.8990 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
15	$k_v = 0.0029, \alpha = 0.155,$ $k_d = 0.2900, k_p = 0.0922.$	$k_v = 0.003, \alpha = 0.164,$ $k_d = 0.1958, k_p = 0.4320.$	$k_v = 0.0026, \alpha = 0.18,$ $k_d = 0.5096, k_p = 0.2378.$
	$k_1 = -4.6301, k_2 = -0.3749,$ $k_3 = -4.5751, k_4 = 0.2018.$	$k_1 = -4.9972, k_2 = -0.5198,$ $k_3 = -4.8804, k_4 = -0.2620.$	$k_1 = -5.5077, k_2 = 0.5857,$ $k_3 = 5.3657, k_4 = 0.2815.$
	$A_{eP} = 0.0408 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.2036 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0307 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.2487 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0309 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 2.3015 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
18	$k_v = 0.0032, \alpha = 0.185,$ $k_d = 0.3200, k_p = 0.0106.$	$k_v = 0.0033, \alpha = 0.197,$ $k_d = 0.4752, k_p = 0.2637.$	$k_v = 0.0031, \alpha = 0.216,$ $k_d = 0.6076, k_p = 0.2854.$
	$k_1 = -5.4269, k_2 = -0.4137,$ $k_3 = -5.4205, k_4 = -0.2227.$	$k_1 = -6.0313, k_2 = -0.5718,$ $k_3 = -5.8739, k_4 = -0.2882.$	$k_1 = -6.6092, k_2 = -0.6984,$ $k_3 = -6.4389, k_4 = -0.3357.$
	$A_{eP} = 0.0336 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.8219 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0285 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.4550 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0301 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 3.5677 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
21	$k_v = 0.0035, \alpha = 0.216,$ $k_d = 0.3500, k_p = 0.0290.$	$k_v = 0.0036, \alpha = 0.229,$ $k_d = 0.5184, k_p = 0.1877.$	$k_v = 0.0035, \alpha = 0.252,$ $k_d = 0.6860, k_p = 0.3329.$
	$k_1 = -6.3529, k_2 = -0.4525,$ $k_3 = 6.3356, k_4 = 0.2436.$	$k_1 = -6.8921, k_2 = -0.6238,$ $k_3 = -6.7801, k_4 = -0.3144.$	$k_1 = -7.7107, k_2 = -0.7885,$ $k_3 = -7.5120, k_4 = -0.3790.$
	$A_{eP} = 0.0285 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.3451 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0304 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 2.2820 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0296 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.4981 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
25	$k_v = 0.0039, \alpha = 0.257,$ $k_d = 0.3900, k_p = 0.0203.$	$k_v = 0.004, \alpha = 0.272,$ $k_d = 0.5760, k_p = 0.1343.$	$k_v = 0.0039, \alpha = 0.299,$ $k_d = 0.7644, k_p = 0.2003.$
	$k_1 = -7.5445, k_2 = -0.5042,$ $k_3 = -7.5324, k_4 = -0.2714.$	$k_1 = -8.0976, k_2 = -0.6931,$ $k_3 = -8.0175, k_4 = -0.3493.$	$k_1 = -8.9542, k_2 = -0.8786,$ $k_3 = -8.8346, k_4 = -0.4223.$
	$A_{eP} = 0.0272 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.4470 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} = 0.0258 \text{ Nm}, \omega_{\sigma eP} = 1.7018 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$A_{eP} \leq \delta \text{ Nm}, \omega_{\sigma e} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



# Capítulo 6

## Conclusión y trabajo futuro

En este capítulo se dan las conclusiones relativas a cada uno de los objetivos particulares que permitieron lograr satisfactoriamente el objetivo general de este trabajo. En ese sentido, se describen las diferentes dificultades que se superaron para cumplir tales objetivos. Asimismo, se incluyen sugerencias de trabajo futuro para darle continuidad a este trabajo de tesis.

### 6.1. Consecución de los objetivos

En el desarrollo del presente trabajo se ha llevado a cabo el estudio de dos problemáticas y sus soluciones de control para los sistemas subactuados PF, PRI, PISC y pendubot. Además, se han propuesto esquemas de control para la eliminación del ciclo límite en tres de los sistemas mecánicos mencionados, a saber, PF, PISC y pendubot. Es decir, se cumplió satisfactoriamente el objetivo general del presente trabajo de tesis. En ese sentido, los siguientes objetivos particulares fueron logrados:

1. Modelado los cuatro sistemas mecánicos subactuados de interés. Los modelos obtenidos para cada uno de los sistemas fueron el modelo dinámico vía ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, el cual no toma en cuenta las fuerzas de fricción, y una aproximación lineal de este modelo a través de linealización aproximada. Adicionalmente, un modelo de planitud diferencial, equivalente al modelo lineal aproximado, fue obtenido para los sistemas PF, PISC y pendubot. Estos modelos de planitud diferencial fueron empleados para proponer los esquemas de control que eliminan el ciclo límite.
2. Construcción de los prototipos de los sistemas, cuya identificación de parámetros fue realizada por medio de dispositivos de medición básicos y fórmulas de Física. Las mediciones y cálculos realizados de los parámetros de tales prototipos fueron verificados al comparar la frecuencia natural teórica con la frecuencia natural experimental de cada uno de los eslabones de los prototipos, cuando estos son afectados únicamente por la gravedad. Desde que la frecuencia natural teórica es similar a la frecuencia natural experimental, se concluye que los parámetros de los prototipos fueron adecuadamente caracterizados.
3. Para cada uno de los sistemas subactuados PF, PRI, PISC y pendubot, se simuló e implementó experimentalmente un controlador híbrido compuesto por dos

controles. El primer control logró la tarea de *swing-up* y el segundo la tarea de estabilización. Para integrar estos dos controles y generar el controlador híbrido, se hizo uso de una condición de conmutación. Esta fue determinada al observar el comportamiento de los sistemas en lazo cerrado con su correspondiente controlador híbrido.

En el caso del PF y el PISC se empleó un control no lineal basado en el enfoque de energía y las propiedades pasivas del sistema, el cual no toma en cuenta las fuerzas de fricción, para llevar a cabo el *swing-up* [7]; mientras que para la estabilización se usó un control lineal por realimentación del vector de estado. En la simulación e implementación experimental del controlador híbrido para el PF, se obtuvieron resultados exitosos y repetitivos; de lo cual se concluye que aunque el control que efectúa la tarea de *swing-up* no considera los efectos de la fricción en el sistema este es útil para llevar a cabo tal tarea. Asimismo, se concluye que la condición de conmutación usada es adecuada para lograr el pertinente intercambio de ejecución de los controles. Del controlador híbrido para el PISC se obtuvieron resultados exitosos y repetitivos en simulación; sin embargo, en la implementación experimental el control para el *swing-up* no logró exitosamente que el péndulo alcanzara una posición cercana a la invertida y, en consecuencia, no se ejecutaba la etapa de estabilización. Para lograr que el péndulo del PISC alcanzara una posición cercana a la invertida con el control no lineal mencionado para ejecutar la etapa de *swing-up*, el control en comento se multiplicó por un factor de tres. Este problema es principalmente atribuido a las fuerzas de fricción no consideradas en el diseño del control para el *swing-up*. Cabe mencionar que entre el PF y el PISC hay una notable diferencia entre las fuerzas de fricción. En el PF las fuerzas de fricción más importantes están en la flecha del motor; mientras que en el PISC las fuerzas de fricción más importantes están en el sistema de carro; ya que, el carro se desliza sobre un riel por medio de una bola. Esta es la razón de porque el control no lineal escogido para ejecutar el *swing-up* lo logra adecuadamente para el PF, pero para el PISC debe ser multiplicado por un factor. Por lo tanto, se puede concluir que el control reportado en [7], para ejecutar la tarea de *swing-up* en el PF y el PISC, no es efectivo en presencia de fuerzas de fricción importantes.

Por otro lado, para el PRI el controlador híbrido implementado estuvo integrado por el control no lineal reportado en [11] y un control lineal por realimentación del vector de estado. Aunque, tanto en simulación como en experimentación se obtuvieron resultados exitosos, estos resultados no son siempre repetidos en experimentación. Esto es, la tarea de estabilización no siempre es ejecutada de manera exitosa por el control lineal por realimentación del vector de estado; ya que la rueda en la posición invertida del péndulo tiende a acelerarse conforme pasa el tiempo conllevando a que el péndulo oscile con mayor amplitud. Se recuerda que en los estados del sistema PRI no se considera la posición de la rueda, lo cual implica que el control por realimentación del vector de estado no puede efectuar control de posición de la rueda. Esto, además de que el control por realimentación del vector de estado no es robusto, explica porqué se acelera la rueda en la posición invertida. De los resultados experimentales obtenidos del PRI en lazo cerrado, se concluye que otros esquemas de control deberían ser implementados para ejecutar la tarea de estabilización; esto con la intención de mejorar el desempeño del sistema.

Finalmente, en el pendubot se logró un controlador híbrido conmutando entre un control de linealización parcial colocada, para el *swing-up*, y un control lineal por realimentación del vector de estado, para la estabilización. Cabe mencionar que el control por linealización parcial colocada ejecuta la tarea de seguimiento de trayectoria en el eslabón actuado del pendubot. Esto fue aprovechado para lograr el *swing-up* en el sistema, por medio de la propuesta de una adecuada trayectoria. En este caso, se optó por el control por linealización parcial colocada para llevar a cabo el *swing-up* debido a que el control no lineal basado en energía y las propiedades pasivas del sistema, reportado en [7] para el pendubot, no logró llevar el péndulo a una posición cercana a la invertida; por lo tanto, no se pudo lograr la estabilización. De nueva cuenta este problema es atribuido principalmente a las fuerzas de fricción no consideradas en el diseño de este último control. Así, se corrobora que el control para el *swing-up* reportado en [7] no es efectivo cuando existen importantes fuerzas de fricción.

4. Para los sistemas PF, PISC y pendubot, se propusieron e implementaron experimentalmente esquemas de control lineal para la eliminación de ciclos límite debidos a la zona muerta causada por fricción estática. El ciclo límite es un fenómeno que, de acuerdo a un análisis basado en la función descriptiva y a las pruebas experimentales, se presenta en los sistemas PF, PISC y pendubot cuando son estabilizados en la posición invertida. Dos esquemas de control diferentes fueron propuestos para el PF, uno basado en planitud diferencial y el enfoque de respuesta en el tiempo (lugar de las raíces) y otro basado en planitud diferencial y el enfoque de respuesta en la frecuencia (diagramas de Bode). Este último esquema de control fue también aplicado exitosamente en el PISC y pendubot. Desde que los esquemas de control propuestos para la eliminación del ciclo límite fueron implementados a través del control lineal por realimentación del vector de estado, se concluye que un simple control lineal es suficiente para lograr la eliminación de ciclos límite. Adicionalmente, derivado de que el esquema de control cuyo diseño es logrado vía la respuesta en el tiempo es intuitivo y recae en la habilidad del diseñador, se concluye que con el esquema de control diseñado con el enfoque de respuesta en frecuencia es más fácil lograr la eliminación del ciclo límite en los sistemas mencionados; pues, existen fórmulas precisas que facilitan la selección de ganancias del esquema de control.

Particularmente, de la implementación del control lineal por realimentación del vector de estado usando el esquema de control lineal diseñado con el enfoque de respuesta en frecuencia, se observó que al usar las ganancias que eliminan el ciclo límite en el primer experimento llevado a cabo en cada uno de los sistemas (PF, PISC y pendubot); entonces, el ciclo límite no desaparecía sino que se eliminaba después de realizar varios experimentos. Esto se debe principalmente a que  $\delta$  no tiene el mismo valor en todos los experimentos (ver Figuras 2.40 y 5.23), es decir es incierto debido a que la fricción es incierta. En ese sentido, para repetir el experimento donde se elimina el ciclo límite, se sugiere que el prototipo correspondiente sea puesto en marcha previamente a la ejecución del controlador. Para esto, se puede aplicar al prototipo una señal de entrada senoidal por algunos minutos.

## 6.2. Dificultades enfrentadas

El cumplimiento de los objetivos particulares no fue sencillo; ya que, en el desarrollo del trabajo se presentaron diversas dificultades que tuvieron que ser superadas. Algunas de estas dificultades se mencionan a continuación:

- La falta de máquinas-herramientas en CIDETEC fue un limitante importante para poder construir los prototipos; de modo que se tuvo que recurrir a una institución, el Centro Nacional de Actualización Docente (CNAD) con las máquinas-herramientas necesarias para tal fin. Desde que el CNAD es una institución educativa del nivel Medio Superior, su personal no dispone de tiempo dedicado a la fabricación de prototipos externos, sino que se enfoca principalmente en la impartición de clases y al desarrollo de proyectos internos. Así, la construcción de los prototipos solicitada por el CIDETEC al CNAD, la realizaban en los tiempos libres, lo que implicó demoras significativas en la construcción de los prototipos.
- Derivado de que el estudio de los sistemas subactuados no es una materia común que se imparta en el Instituto Politécnico Nacional, la comprensión de las estrategias de control fue inicialmente por cuenta propia. Posteriormente, se optó por realizar una estancia en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, donde se tomaron materias directamente vinculadas al objetivo general del trabajo de tesis.
- Desde que el control reportado en [7] para llevar a cabo el *swing-up* en los sistemas PF, PISC y pendubot presenta problemas, es decir no logra el objetivo, cuando existen fuerzas de fricción que no pueden ser despreciadas y, motivados por [23], inicialmente se desarrolló una modificación al control en [7] para el PF donde se compensaba la fricción por medio de un observador que empleaba el modelo de fricción de Dahl. Aunque en simulación se obtuvieron resultados satisfactorios, tal control propuesto no pudo llevarse a la experimentación debido a que el parámetro de rigidez asociado al modelo de Dahl no se pudo caracterizar para los sistemas en comento. Esto debido a que tal caracterización requiere de encoders de alta resolución, los cuales son costosos en exceso y no pudieron adquirirse.
- Desde que en la revisión del estado del arte también se encontró que: *a)* La mayoría de los diseños de controles se basa únicamente en el modelo matemático del subsistema estructura mecánica. *b)* Muy pocos diseños de controles han considerado el modelo matemático de los subsistemas estructura mecánica y actuador. *c)* No se han desarrollado esquemas de control donde se tome en cuenta la dinámica completa de los tres subsistemas que componen a un sistema subactuado (estructura mecánica, actuador y etapa de potencia); aún cuando, de acuerdo a [282], el considerar la dinámica asociada a la etapa de potencia en el diseño de controles en sistemas mecatrónicos conlleva a una mejora en su desempeño. Con la intención de determinar la pertinencia de diseñar controles, para los sistemas bajo estudio en el presente trabajo, que consideren las tres dinámicas que en general componen a mencionados sistemas; también se estudiaron y controlaron etapas de potencia del tipo “Convertidor electrónico de potencia–Inversor” [283, 284]. De los sistemas “Convertidor electrónico de potencia–Inversor” tratados, se vislumbró que el más apropiado para operar como la etapa de potencia de los sistemas PF, PRI, PISC

y pendubot sería aquel donde participara el convertidor de CD/CD Buck. Sin embargo, debido a su principio de operación no permite trabajar con corrientes cercanas a cero, lo cual es necesario en los sistemas pendulares bajo estudio cuando se encuentran alrededor de la posición vertical (esto es implicado de que en tal posición el par y la fuerza requeridos en los sistemas, según sea el caso, debe tender a cero). Entonces, se descartó la posibilidad de diseñar controles para los sistemas bajo estudio donde se consideraran las dinámicas del actuador y de la etapa de potencia; pero, se logró realizar en robots móviles de ruedas [285, 286].

- El presente trabajo de tesis se planteó en un principio para realizarlo en 4 años, pensando en que se extendería la duración del programa doctoral de 3 a 4 años con el beneficio de beca de CONACYT; sin embargo, esta extensión aún no ha sido alcanzada. Por lo tanto, el tiempo para lograr cada objetivo particular del trabajo se redujo significativamente. Esto implicó trabajar hasta 20 horas diarias, incluidos fines de semana. El resultado de este esfuerzo se ve reflejado en el alcance del presente trabajo, pues se implementaron dos estrategias de control para los cuatro prototipos comprometidos y se propusieron dos esquemas de control para la eliminación del ciclo límite aplicados uno de ellos a tres de los sistemas bajo estudio y el otro sólo a un sistema.

### 6.3. Trabajo futuro

Algunos trabajos que se podrían desprenderse de este tema de tesis son los siguientes:

- Implementar otras estrategias de control que logren la estabilización del PRI, para mejorar su desempeño con respecto del logrado con el control por realimentación del vector de estado.
- Análisis de existencia del ciclo límite en el PRI y, en caso de aplicar, propuesta de un control que pudiera eliminar el ciclo límite para este mismo sistema.
- Implementar estrategias de control por compensación de fricción. Esto con la intención de estudiar el comportamiento del ciclo límite en los sistemas de tipo péndulo invertido construidos.
- Realizar una comparación de desempeño entre esquemas de control basados en compensación de fricción y los esquemas propuestos en este trabajo para eliminar el ciclo límite.
- Reemplazar la tarjeta DS1104 por tarjetas de desarrollo económicas, lo cual no resulta trivial lograr en los sistemas estudiados y controlados en el presente trabajo.
- Caracterizar el parámetro de rigidez del modelo de Dahl para el sistema PF e implementar el control [7] compensando la fricción.
- Desde que el pendubot tiene puntos de operación donde no se requiere un par que tienda a cero (corriente que tienda a cero), diseñar esquemas de control para el pendubot que consideren la dinámica del actuador y la dinámica de la etapa de potencia construida con una conexión “Convertidor electrónico de potencia-Inversor”.



# Referencias

- [1] J. Á. Acosta, “Furuta’s pendulum: A conservative nonlinear model for theory validation and practise,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010, pp. 1–29, 2010. Article ID: 742894.
- [2] R. Olfati-Saber, “Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 2, pp. 305–308, 2002.
- [3] Y. Liu and H. Yu, “A survey of underactuated mechanical systems,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 7, no. 2, pp. 921–935, 2013.
- [4] D. J. Block, K. J. Åström, and M. W. Spong, *The Reaction Wheel Pendulum*, 1a Edición, M. W. Spong (Ed). Champaign, IL, USA: Morgan & Claypool, 2007.
- [5] R. S. Ortigoza, J. R. G. Sánchez, V. M. H. Guzmán, C. M. Sánchez, and M. M. Aranda, “Trajectory tracking control for a differential drive wheeled mobile robot considering the dynamics related to the actuators and power stage,” *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 2, pp. 657–664, 2016.
- [6] I. Fantoni and R. Lozano, “Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit,” *International Journal of Control*, vol. 75, no. 6, pp. 390–398, 2002.
- [7] I. Fantoni and R. Lozano, *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. London, U. K.: Springer-Verlag, 2002.
- [8] S. Awtar, N. King, T. Allen, I. Bang, M. Hagan, D. Skidmore, and K. Craig, “Inverted pendulum systems: Rotary and arm-driven - a mechatronic system design case study,” *Mechatronics*, vol. 12, pp. 357–370, 2002.
- [9] Z. Guo, J. Mao, Y. Yue, and Y. Li, “Fuzzy modeling and control,” en *Mechatronic Systems: Devices, Design, Control, Operation and Monitoring*, C. W. de Silva (Ed), Mechanical Engineering Series of Textbook and Reference Books. FL, USA: CRC Press, 2008.
- [10] S. Jadlovska and J. Sarnovský, “Modelling of classical and rotary inverted pendulum systems—a generalized approach,” *Journal of Electrical Engineering*, vol. 64, no. 1, pp. 12–19, 2013.
- [11] V. M. Hernández-Guzmán, R. Silva-Ortigoza y R. V. Carrillo-Serrano, *Control automático: Teoría de diseño, construcción de prototipos, modelado, identificación y pruebas experimentales*. Ciudad de México, MX: Colección CIDETEC–IPN, 2013.
- [12] F. Gordillo, J. A. Acosta, and J. Aracil, “A new swing-up law for the Furuta pendulum,” *International Journal of Control*, vol. 76, no. 8, pp. 836–844, 2003.
- [13] S. Y. Jung and J. T. Wen, “Nonlinear model predictive control for the swing-up of a rotary inverted pendulum,” *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, vol. 126, no. 3, pp. 666–673, 2004.
- [14] Y. S. Lee, “Swing-up control for a rotary inverted pendulum with restricted rotation range,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, vol. 14, no. 6, pp. 548–553, 2008.

- [15] Y. Yavin, "Control of a rotary inverted pendulum," *Applied Mathematics Letters*, vol. 12, pp. 131–134, 1999.
- [16] S. Suzuki, Y. Pan, K. Furuta, and S. Hatakeyama, "VS-control with time-varying sliding sector – design and application to pendulum –,” *Asian Journal of Control*, vol. 6, no. 3, pp. 307–316, 2004.
- [17] C. Aguilar Ibáñez and J. H. Sossa Azuela, "Stabilization of the furuta pendulum based on a Lyapunov function," *Nonlinear Dynamics*, vol. 49, pp. 1–8, 2007.
- [18] C. Aguilar-Ibañez, M. S. Suárez-Castañón, and O. O. Gutiérrez-Frias, "The direct Lyapunov method for the stabilisation of the Furuta pendulum," *International Journal of Control*, vol. 83, no. 11, pp. 2285–2293, 2010.
- [19] Y. I. Son, N. H. Jo, H. Shim, and G.-J. Jeong, "Low-pass filter property of an input-dimensional output feedback passification controller for rotary inverted pendulum," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, vol. E92A, vol. 8, pp. 2133–2136, 2009.
- [20] S.-K. Oh, S.-H. Jung, and W. Pedrycz, "Design of optimized fuzzy cascade controllers by means of hierarchical fair competition-based genetic algorithms," *Expert Systems with Applications*, vol. 36, pp. 11641–11651, 2009.
- [21] G. Pujol and L. Acho, "Stabilization of the furuta pendulum with backlash using  $H_\infty$ -LMI technique: Experimental validation," *Asian Journal of Control*, vol. 12, no. 4, pp. 460–467, 2010.
- [22] D. E. Chang, "Stabilizability of controlled lagrangian systems of two degrees of freedom and one degree of under-actuation by the energy-shaping method," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 8, pp. 1888–1893, 2010.
- [23] J. Sandoval, R. Kelly, and V. Santibáñez, "Interconnection and damping assignment passivity-based control of a class of underactuated mechanical systems with dynamic friction," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, pp. 738–751, 2011.
- [24] H. Hirata, T. Takabe, M. Anabuki, and S. Ouchi, "VSS robust adaptive control including a self-tuning controller for a rotary inverted pendulum," *Electronics and Communications in Japan*, vol. 94, no. 6, pp. 48–58, 2011.
- [25] Y.-W. Tu and M.-T. Ho, "Design and implementation of robust visual servoing control of an inverted pendulum with an FPGA-based image co-processor," *Mechatronics*, vol. 21, pp. 1170–1182, 2011.
- [26] I. Hassanzadeh and S. Mobayen, "Controller design for rotary inverted pendulum system using evolutionary algorithms," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2011, pp. 1–17, 2011. Article ID: 572424.
- [27] K. R. Muske, H. Ashrafiuon, S. Nersesov, and M. Nikkhah, "Optimal sliding mode cascade control for stabilization of underactuated nonlinear systems," *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, vol. 134, no. 2, 2012.
- [28] J. H. Yang and K. S. Yang, "An adaptive variable structure control scheme for underactuated mechanical manipulators," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, pp. 1–23, 2012. Article ID: 270649.
- [29] J. de J. Rubio, M. Figueroa, J. H. Pérez Cruz, and J. Yoe Rumbo, "Control para estabilizar y atenuar las perturbaciones en un péndulo invertido rotatorio," *Revista Mexicana de Física E*, vol. 58, pp. 107–112, 2012.

- [30] T. Türker, H. Görgün, and G. Cansever, “Lyapunov’s direct method for stabilization of the Furuta pendulum,” *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, vol. 120, no. 1, pp. 99–110, 2012.
- [31] J.-W. Kim and C.-Y. Oh, “Control of a rotary inverted pendulum system using brain emotional learning based intelligent controller,” *Journal of the Korean Society of Manufacturing Technology Engineers*, vol. 22, no. 5, pp. 837–844, 2013.
- [32] Y.-F. Chen and A.-C. Huang, “Adaptive control of rotary inverted pendulum system with time-varying uncertainties,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 76, pp. 95–102, 2014.
- [33] M. F. Hamza, H. J. Yap, and I. A. Choudhury, “Genetic algorithm and particle swarm optimization based cascade interval type 2 fuzzy PD controller for rotary inverted pendulum system,” *Mathematical Problems in Engineering* vol. 2015, pp. 1–15, 2015. Article ID: 695965.
- [34] M. Ryalat and D. S. Laila, “A simplified IDA-PBC design for underactuated mechanical systems with applications,” *European Journal of Control*, vol. 27, pp. 1–16, 2016.
- [35] P. D. Mandić, M. P. Lazarević, and T. B. Šekara, “D-decomposition technique for stabilization of Furuta pendulum: Fractional approach,” *Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Technical Sciences*, vol. 64, no. 1, pp. 189–196, 2016.
- [36] I. Salgado, S. Kamal, B. Bandyopadhyay, I. Chairez, and L. Fridman, “Control of discrete time systems based on recurrent super-twisting-like algorithm,” *ISA Transactions*, vol. 64, pp. 47–55, 2016.
- [37] M. F. Hamza, H. J. Yap, and I. A. Choudhury, “Cuckoo search algorithm based design of interval tipe-2 fuzzy PID controller for the Furuta pendulum,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence* vol. 62, pp. 134–151, 2017.
- [38] T. Ortega-Montiel, R. Villafuerte-Segura, C. Vázquez-Aguilera, and L. Freidovich, “Proportional retarded controller to stabilize underactuated systems with measurement delays: Furuta pendulum case study,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017, pp. 1–12, 2017. Article ID: 2505086.
- [39] S. Suzuki, K. Furuta, A. Sugiki, and S. Hatakeyama, “Nonlinear optimal internal forces control and application to swing-up and stabilization of pendulum,” *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, vol. 126, no. 3, pp. 568–573, 2004.
- [40] S.-H. Jung, J.-N. Choi, and S.-K. Oh, “Design of optimized fuzzy controller by means of HFC-based genetic algorithms for rotaru inverted pendulum system,” *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 18, no. 2, pp. 236–242, 2008.
- [41] S.-H. Jung, J.-N. Choi, S.-K. Oh, and H.-K. Kim, “Design of optimized fuzzy PD cascade controller based on parallel genetic algorithms,” *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 19, no. 3, pp. 329–336, 2009.
- [42] P. X. La Hera, L. B. Freidovich, A. S. Shiriaev, and U. Mettin, “New approach for swinging up the Furuta pendulum: Theory and experiments,” *Mechatronics*, vol. 19, pp. 1240–1250, 2009.
- [43] J. P. Ordaz-Oliver, O. J. Santos-Sánchez, and V. López-Morales, “On the sub-optimal feedback control law synthesis of underactuated systems,” *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 5, no., pp. 2791–2808, 2009.
- [44] J. P. Ordaz-Oliver, O. J. Santos-Sánchez, and V. López-Morales, “Toward a generalized sub-optimal control method of underactuated systems,” *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 33, pp. 338–351, 2012.

- [45] M.-S. Park and D. Chwa, "Swing-up and stabilization control of inverted-pendulum systems via coupled sliding-mode control method," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3541–3555, 2009.
- [46] P. M. Mary and N. S. Marimuthu, "Minimum time swing up and stabilization of rotary inverted pendulum using pulse step control," *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 3, pp. 1–15, 2009.
- [47] S.-K. Oh, W.-D. Kim, and W. Pedrycz, "Design of optimized cascade fuzzy controller based on differential evolution: Simulation studies and practical insights," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 5, pp. 520–532, 2012.
- [48] P. Seman, B. Rohal'-Ilkiv, M. Juhás, and M. Salaj, "Swinging up the Furuta pendulum and its stabilization via model predictive control," *Journal of Electrical Engineering*, vol. 64, no. 3, pp. 152–158, 2013.
- [49] L. F. Escobar-Dávila, O. D. Montoya-Giraldo, and D. Giraldo-Buitrago, "Control global del péndulo de Furuta empleando redes neuronales artificiales y realimentación de variables de estado," *Tecno Lógicas*, no. 30, pp. 71–94, 2013.
- [50] J. Aracil, J. Á. Acosta, and F. Gordillo, "A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the Furuta pendulum," *Control Engineering Practice*, vol. 21, pp. 989–993, 2013.
- [51] E. Aranda-Escolástico, M. Guinaldo, F. Gordillo, and S. Dormido, "A novel approach to periodic event-triggered control: Design and application to the inverted pendulum," *ISA Transactions*, vol. 65, pp. 327–338, 2016.
- [52] I. Shah and F. U. Rehman, "Smooth second order sliding mode control of a class of underactuated mechanical systems," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 7759–7771, 2018.
- [53] C.-G. Lhee, J.-S. Park, H.-S. Ahn, and D.-H. Kim, "Sliding mode-like fuzzy logic control with self-tuning the dead zone parameters," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 343–348, 2001.
- [54] L. E. Ramos-Velasco, J. J. Ruiz-León, and S. Čelikovský, "Rotary inverted pendulum: Trajectory tracking via nonlinear control techniques," *Kybernetika*, vol. 38, no. 2, pp. 217–232, 2002.
- [55] C.-K. Chen, C.-J. Lin, and L.-C. Yao, "Input-state linearization of a rotary inverted pendulum," *Asian Journal of Control*, vol. 6, no. 1, pp. 130–135, 2004.
- [56] B. Castillo-Toledo, G. Obregon-Pulido, and O. Espinosa-Guerra, "Structurally stable regulation for a class of nonlinear systems: Application to a rotary inverted pendulum," *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, vol. 128, no. 4, pp. 922–928, 2006.
- [57] C. Aguilar-Ibáñez and H. Sira-Ramírez, "A linear differential flatness approach to controlling the Furuta pendulum," *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 24, pp. 31–45, 2007.
- [58] C.-C. Cheng, K.-S. Yang, and J.-H. Yang, "Robust finite time controller design for second order nonlinear underactuated mechanical systems," *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 37, no. 3, pp. 549–557, 2013.
- [59] M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, and A. Luviano-Juárez, "Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the Furuta pendulum," *ISA Transactions*, vol. 53, pp. 920–928, 2014.
- [60] C. Aguilar-Avelar and J. Moreno-Valenzuela, "A composite controller for trajectory tracking applied to the Furuta pendulum," *ISA Transactions*, vol. 57, pp. 286–294, 2015.

- [61] C. Aguilar-Avelar and J. Moreno-Valenzuela, “New feedback linearization-based control for arm trajectory tracking of the Furuta pendulum,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 21, no. 2, pp. 638–648, 2016.
- [62] J. Moreno-Valenzuela, C. Aguilar-Avelar, S. A. Puga-Guzmán, and V. Santibáñez, “Adaptive neural network control for the trajectory tracking of the Furuta pendulum,” vol. 46, no. 12, pp. 3439–3452, 2016.
- [63] S. Puga-Guzmán, C. Aguilar-Avelar, J. Moreno-Valenzuela, and V. Santibáñez, “Tracking of periodic oscillations in an underactuated system via adaptive neural networks,” *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, vol. 37, no. 1, pp. 128–143, 2018.
- [64] A. S. Shiriaev, L. B. Freidovich, A. Robertsson, R. Johansson, and A. Sandberg, “Virtual-holonomic-constraints-based design of stable oscillations of Furuta pendulum: Theory and experiments,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, no. 4, pp. 827–832, 2007.
- [65] L. Freidovich, A. Shiriaev, F. Gordillo, F. Gómez-Estern, and J. Aracil, “Partial-energy-shaping control for orbital stabilization of high-frequency oscillations of the Furuta pendulum,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, no. 4, pp. 853–858, 2009.
- [66] L. T. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman, and R. Iriarte, “Generating self-excited oscillations for underactuated mechanical systems via two-relay controller,” *International Journal of Control*, vol. 82, no. 9, pp. 1678–1691, 2009.
- [67] D. Pagano, L. Pizarro, and J. Aracil, “Local bifurcation analysis in the Furuta pendulum via normal forms,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, no. 5, pp. 981–995, 2000.
- [68] A. Barreiro, J. Aracil, and D. Pagano, “Detection of attraction domains of non-linear systems using bifurcation analysis and Lyapunov functions,” *International Journal of Control*, vol. 75, no. 5, pp. 314–327, 2002.
- [69] F. J. Muñoz-Almaraz, E. Freire, and J. Galán-Vioque, “Bifurcation behavior of the Furuta pendulum,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 17, no. 8, pp. 2571–2578, 2007.
- [70] F. Verduzco, M. E. Frias-Armenta, and H. Leyva, “Stationary bifurcations control with applications,” *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 109, pp. 1077–1106, 2010.
- [71] “Control of inverted pendulum using continuous time deadbeat control,” *Journal of the Korean Institute of Illuminating and Electrical Installation Engineers*, vol. 18, no. 6, pp. 108–113, 2004.
- [72] J. Sjöberg, P.-O. Gutman, M. Agarwal, and M. Bax, “Nonlinear controller tuning based on a sequence of identifications of linearized time-varying models,” *Control Engineering Practice*, vol. 17, pp. 311–321, 2009.
- [73] M. R. Rani, H. Selamat, H. Zamzuri, and Z. Ibrahim, “Multi-objective optimization for pid controller tuning using the global ranking genetic algorithm,” *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 8, no. 1(A), pp. 269–284, 2012.
- [74] L. K. Soon and K. K. Wan, “Adaptive state feedback control for nonlinear rotary inverted pendulum system using similarity transformation method: Implementation of real-time experiment,” *The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers: P*, vol. 58, no. 2, pp. 130–135, 2009.
- [75] H. Ashrafiuon and A. M. Whitman, “Closed-loop dynamic analysis of a rotary inverted pendulum for control design,” *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, vol. 134, no. 2, pp. 1–9, 2012.
- [76] Ø. N. Stammaesa, O. M. Aamo, and G.-O. Kaasa, “A constructive speed observer design for general Euler-Lagrange systems,” *Automatica*, vol. 47, pp. 2233–2238, 2011.

- [77] N. Semenič, A. Sarjaš, R. Svečko2, and A. Chowdhury, “Design and implementation of rapid control prototyping system with matlab/simulink,” *Informacije Midem-Journal of Microelectronics Electronic Components and Materials*, vol. 41, no. 2, pp. 122–131, 2011.
- [78] M. Demirtas, Y. Altun, and A. Istanbulu, “Virtual laboratory for sliding mode and PID control of rotary inverted pendulum,” *Computer Applications in Engineering Education*, vol. 21, no. 3, pp. 400–409, 2013.
- [79] W. M. Ng, D. E. Chang, and S.-H. Song, “Four representative applications of the energy shaping method for controlled lagrangian systems,” *Journal of Electrical Engineering & Technology*, vol. 8, no. 6, pp. 1579–1589, 2013.
- [80] A. T. Azar and F. E. Serrano, “Adaptive sliding mode control of the Furuta pendulum,” en *Advances and Applications in Sliding Mode Control Systems*, A. T. Azar y Q. Zhu (Eds), Studies in Computational Intelligence. Berlin, Alemania: Springer-Verlag, 2015, vol. 576, pp. 1–42.
- [81] V. Casanova, J. Salt, R. Piza, and A. Cuenca, “Controlling the double rotary inverted pendulum with multiple feedback delays,” *International Journal of Computers, Communications & Control*, vol. 7, no. 1, pp. 20–38, 2012.
- [82] V. Casanova, J. Alcaína, J. Salt, R. Pizá, and A. Cuenca, “Control of the rotary inverted pendulum through threshold-based communication,” *ISA Transactions*, vol. 62, pp. 357–366, 2016.
- [83] D. M. Alonso, F. I. Robbio, E. E. Paolini, and J. L. Moiola, “Modelling an inertia wheel pendulum benchmark,” *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 11, no. 3, pp. 255–272, 2005.
- [84] N. Borda, J. Fernandez, and S. Grillo, “Discrete second order constrained lagrangian systems: First results,” *Journal of Geometric Mechanics*, vol. 5, no. 4, pp. 381–397, 2013.
- [85] I. Fantoni and R. Lozano, “Control of nonlinear mechanical systems,” *European Journal of Control*, vol. 7, pp. 328–348, 2001.
- [86] K. N. Srinivas and L. Behera, “Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum,” *International Journal of Systems Science*, vol. 39, no. 12, pp. 1165–1177, 2008.
- [87] N. Qaiser, N. Iqbal, A. Hussain, and N. Qaiser, “Exponential stabilization of the inertia wheel pendulum using dynamic surface control,” *Journal of Circuits Systems and Computers*, vol. 16, no. 1, pp. 81–92, 2007.
- [88] N. Qaiser, N. Iqbal, A. Hussain, and N. Qaiser, “Exponential stabilization of a class of underactuated mechanical systems using dynamic surface control,” *International Journal of Control Automation and Systems*, vol. 5, no. 5, pp. 547–558, 2007.
- [89] H. Ye, H. Wang, and H. Wang, “Stabilization of a PVTOL aircraft and an inertia wheel pendulum using saturation technique,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 15, no. 6, pp. 1143–1150, 2007.
- [90] H. Ye, G. P. Liu, C. Yang, and W. Gui, “Stabilisation designs for the inertia wheel pendulum using saturation techniques,” *International Journal of Systems Science*, vol. 39, no. 12, pp. 1203–1214, 2008.
- [91] C. Aguilar Ibañez, O. O. Gutiérrez Frias, and M. S. Suárez Castañón, “Controlling the strongly damping inertia wheel pendulum via nested saturation functions,” *Computación y Sistemas*, vol. 12, no. 4, pp. 436–449, 2009.
- [92] S. Grillo, J. Marsden, and S. Nair, “Lyapunov constraints and global asymptotic stabilization,” *Journal of Geometric Mechanics*, vol. 3, no. 2, pp. 145–196, 2011.

- [93] S. Grillo, F. Maciel, and D. Perez, "Closed-loop and constrained mechanical systems," *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 7, no. 5, pp. 857–886, 2010.
- [94] M. Lopez-Martinez, J. A. Acosta, and J. M. Cano, "Non-linear sliding mode surfaces for a class of underactuated mechanical systems," *IET Control Theory and Applications*, vol. 4, no. 10, pp. 2195–2204, 2010.
- [95] R. Martinez-Soto, A. Rodriguez, O. Castillo, and L. T. Aguilar, "Gain optimization for inertia wheel pendulum stabilization using particle swarm optimization and genetic algorithms," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 8, no.6, pp. 4421–4430, 2012.
- [96] J. She, A. Zhang, X. Lai, and M. Wu, "Global stabilization of 2-DOF underactuated mechanical systems—an equivalent-input-disturbance approach," *Nonlinear Dynamics*, vol. 69, pp. 495–509, 2012.
- [97] O. D. Montoya-Giraldo, L. F. Grisales-Noreña, V. D. Correa-Ramírez, and D. Giraldo-Buitrago, "Control global del péndulo con rueda de reacción mediante regulación de energía y linealización extendida de las variables de estado," *Tecno Lógicas*, vol. 17, no. 32, pp. 33–46, 2014.
- [98] N. Khalid and A. Y. Memon, "Output feedback control of a class of under-actuated nonlinear systems using extended high gain observer," *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 41, no. 9, pp. 3531–3542, 2016.
- [99] A. Zhang, C. Yang, S. Gong, and J. Qiu, "Nonlinear stabilizing control of underactuated inertia wheel pendulum based on coordinate transformation and time-reverse strategy," *Nonlinear Dynamics*, vol. 84, no. 4, pp. 2467–2476, 2016.
- [100] M. Ferré Puiggali and T. Mestdag, "The inverse problem of the calculus of variations and the stabilization of the controlled lagrangian systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 54, no. 6, pp. 3297–3318, 2016.
- [101] C. Aguilar-Avelar, R. Rodríguez-Calderón, S. Puga-Guzmán, and J. Moreno-Valenzuela, "Effects of nonlinear friction compensation in the inertia wheel pendulum," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 31, no. 9 pp. 4425–4433, 2017.
- [102] G. He, R. Chen, and Y. Zhang, "Globally stabilizing a class of underactuated mechanical systems on the basis of finite-time stabilizing observer," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 86, no. 3–4, pp. 353–366, 2017.
- [103] N. R. Cazarez-Castro, L. T. Aguilar, S. L. Cardenas-Maciel, C. A. Goribar-Jiménez, and M. Odreman-Vera, "Design of a fuzzy controller via fuzzy Lyapunov synthesis for the stabilization of an inertia wheel pendulum," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 14, no. 2, pp. 133–140, 2017.
- [104] M. W. Spong, P. Corke, and R. Lozano, "Nonlinear control of the reaction wheel pendulum," *Automatica*, vol. 37, pp. 845–851, 2001.
- [105] R. Ortega, M. W. Spong, F. Gomez-Estern, and G. Blankenstein, "Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 8, pp. 1218–1233, 2002.
- [106] V. M. Hernández, "A combined sliding mode-generalized pi control scheme for swinging up and balancing the inertia wheel pendulum," *Asian Journal of Control*, vol. 5, no. 4, pp. 620–625, 2003.
- [107] R. V. Carrillo-Serrano and V. M. Hernández-Guzmán, "Control of the inertia wheel pendulum taking into account the actuator dynamics," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 6, no. 12, pp. 5553–5563, 2010.

- [108] B. R. Andrievsky, "Global stabilization of the unstable reaction-wheel pendulum," *Automation and Remote Control*, vol. 72, no. 9, pp. 1981–1993, 2011.
- [109] H. Ye, W. Gui, and Z.-P. Jiang, "Backstepping design for cascade systems with relaxed assumption on Lyapunov functions," *IET Control Theory and Applications*, vol. 5, no. 5, pp. 700–712, 2011.
- [110] A. Estrada, L. T. Aguilar, R. Iriarte, and L. Fridman, "Two relay controller for real time trajectory generation and its application to inverted orbital stabilization of inertia wheel pendulum via quasi-continuous hoshm," *Asian Journal of Control*, vol. 14, no. 1, pp. 58–66, 2012.
- [111] R. Iriarte, L. T. Aguilar, and L. Fridman, "Second order sliding mode tracking controller for inertia wheel pendulum," *Nonlinear Dynamics*, vol. 350, pp. 92–106, 2013.
- [112] S. A. Puga-Guzmán, J. Moreno-Valenzuela, and V. Santibáñez, "Neural controller for the trajectory tracking control of an inertia wheel pendulum," *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 32, no. 4, pp. 204–211, 2016.
- [113] J. Moreno-Valenzuela, C. Aguilar-Avelar, S. Puga-Guzmán, and V. Santibáñez, "Two adaptive control strategies for trajectory tracking of the inertia wheel pendulum: Neural networks vis á vis model regressor," *Intelligent Automation and Soft Computing*, vol. 23, no. 1, pp. 63–73, 2017.
- [114] L. B. Freidovich, P. La Hera, U. Mettin, A. Robertsson, A. S. Shiriaev, and R. Johansson, "Shaping stable periodic motions of inertia wheel pendulum: Theory and experiment," *Asian Journal of Control*, vol. 11, no. 5, pp. 548–556, 2009.
- [115] L. T. Aguilar, I. M. Boiko, L. M. Fridman, and L. B. Freidovich, "Generating oscillations in inertia wheel pendulum via two-relay controller," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, pp. 318–330, 2012.
- [116] D. M. Alonso, E. E. Paolini, and J. L. Moiola, "Global bifurcation analysis of a controlled underactuated mechanical system," *Nonlinear Dynamics*, vol. 40, no. 3, pp. 205–225, 2005.
- [117] G. He and Z. Geng, "Optimal motion planning for differentially flat underactuated mechanical systems," *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, vol. 22, no. 3, pp. 347–354, 2009.
- [118] A. A. Bobtsov and A. A. Pyrkin, "Cancellation of unknown multiharmonic disturbance for nonlinear plant with input delay," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 26, pp. 302–315, 2012.
- [119] H. Cendra and S. Grillo, "Generalized nonholonomic mechanics, servomechanisms and related brackets," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 47, pp. 1–29, 2006.
- [120] H. Yu, Y. Liu, and T. Yang, "Closed-loop tracking control of a pendulum-driven cart-pole underactuated system," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I-Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 222, no. 12, pp. 109–125, 2008.
- [121] J. Roubal, P. Hušek, and J. Štecha, "Linearization: Students forget the operating point," *IEEE Transactions on Education*, vol. 53, no. 3, pp. 413–418, 2010.
- [122] H. Wang, C. Vasseur, V. Koncar, A. Chamroo, and N. Christov, "Modelling and trajectory tracking control of a 2-DOF vision based inverted pendulum," *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, vol. 12, no. 3, pp. 59–66, 2010.
- [123] T. Kai, "Control of the cart-pendulum system based on discrete mechanics—Part I: Theoretical analysis and stabilization control," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, vol. E95A, no. 2, pp. 525–533, 2012.
- [124] M. Ishitobi, Y. Ohta, Y. Nishioka, and H. Kinoshita, "Swing-up of a cart-pendulum system with friction by energy control," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I-Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 218, no. 15, pp. 411–415, 2004.

- [125] T. Holzhüter, “Optimal regulator for the inverted pendulum via Euler-Lagrange backward integration,” *Automatica*, vol. 40, pp. 1613–1620, 2004.
- [126] P. Mai and C. Hillermeier, “Least squares based derivative estimation: Theory and tuning rules for the practical application,” *AT-Automatisierungstechnik*, vol. 56, no. 10, pp. 530–538, 2008.
- [127] T. Raiko and M. Tornio, “Variational bayesian learning of nonlinear hidden state-space models for model predictive control,” *Neurocomputing*, vol. 72, pp. 3704–3712, 2009.
- [128] A. Soria-López, J. C. Martínez-García, and C. F. Aguilar-Ibañez, “Experimental evaluation of regulated non-linear under-actuated mechanical systems via saturation-functions-based bounded control: The cart-pendulum system case,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 7, no. 12, pp. 1642–1650, 2013.
- [129] T. Troudet and W. Merrill, “Neuromorphic learning of continuous-valued mappings from noise-corrupted data,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 2, no. 2, pp. 294–301, 1991.
- [130] J.-Y. Han and V. McMurray, “Two-layer multiple-variable fuzzy logic controller,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 23, no. 1, pp. 277–285, 1993.
- [131] D. L. Styer and V. Vemuri, “A comparison of adaptive critic and chemotaxis methods in adaptive control,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 21, no. 1-2, pp. 109–118, 1995.
- [132] T.-T. Lee, K.-Y. Tu, and W.-J. Wang, “Design of a fuzzy logic controller as a suction controller,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 91, pp. 305–317, 1997.
- [133] T.-H S Li and M.-Y. Shieh, “Switching-type fuzzy sliding mode control of a cart-pole system,” *Mechatronics*, vol. 10, pp. 91–109, 2000.
- [134] H. Kokame, K. Hirata, K. Konishi, and T. Mori, “Difference feedback can stabilize uncertain steady states,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, pp. 1908–1913, 2001.
- [135] P. T. Chan, A. B. Rad, and K. M. Tsang, “Optimization of fused fuzzy systems via genetic algorithms,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 49, no. 3, pp. 685–692, 2002.
- [136] K. S. Hwang, Y. P. Hsu, and C. S. Lin, “A fuzzy CMAC compensator for sliding mode control,” *Intelligent Automation and Soft Computing*, vol. 8, no. 3, pp. 273–284, 2002.
- [137] F. Mazenc and J. C. Vivalda, “Global asymptotic output feedback stabilization of feedforward systems,” *European Journal of Control*, vol. 8, pp. 519–530, 2002.
- [138] S. Kwon, “The simetry of cart-pole system and a table look-up control technique,” *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 14, no. 3, pp. 290–297, 2004.
- [139] F. Blanchini and F. A. Pellegrino, “Relatively optimal control with characteristic polynomial assignment and output feedback,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 2, pp. 183–191, 2006.
- [140] J. Deutscher and C. Schmid, “A state space embedding approach to approximate feedback linearization of single input nonlinear control systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 16, pp. 421–440, 2006.
- [141] M. Ding, N. Yu, and X. Ruan, “Cooperative motor learning model for cerebellar control of balance and locomotion,” *Advances in Neural Networks-ISNN 2006, PT 1*, vol. 3971, pp. 27–33, 2006.
- [142] S. Kwon, “A reinforcement learning with CMAC,” *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, vol. 6, no. 4, pp. 271–276, 2006.
- [143] S. Ahuja, I. G. Kevrekidis, and C. W. Rowley, “Template-based stabilization of relative equilibria in systems with continuous symmetry,” *Journal of Nonlinear Science*, vol. 17, pp. 109–143, 2007.

- [144] F. Yorgancıoğlu and H. Kömürçügil, "Single-input fuzzy-like moving sliding surface approach to the sliding mode control," *Electrical Engineering*, vol. 90, pp. 199–207, 2008.
- [145] S. Riachy, Y. Orlov, T. Floquet, R. Santiesteban, and J.-P. Richard, "Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems I: Local stabilization with application to an inverted pendulum," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, no. 4–5, pp. 529–543, 2008.
- [146] F. Celani, A. Isidori, and L. Marconi, "A reduction paradigm for output regulation," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, pp. 756–781, 2008.
- [147] S.-Y. Chen, F.-M. Yu, and H.-Y. Chung, "Decoupled fuzzy controller design with single-input fuzzy logic," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 129, pp. 335–342, 2002.
- [148] R. Banavar and B. Dey, "Stabilizing a flexible beam on a cart: a distributed port-hamiltonian approach," *Journal of Nonlinear Science*, vol. 20, pp. 131–151, 2010.
- [149] I. Sarras, H. B. Siguerdidjane, and R. Ortega, "Stabilization of the experimental cart-pendulum system with proven domain of attraction," *European Journal of Control*, vol. 4, pp. 329–340, 2010.
- [150] T. Bouarar, K. Guelton, and N. Manamanni, "Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi-Sugeno descriptors," *ISA Transactions*, vol. 49, pp. 447–461, 2010.
- [151] K.-S. Hwang, H.-Y. Lin, Y.-P. Hsu, and H.-H. Yu, "Self-organizing state aggregation for architecture design of Q-learning," *Information Sciences*, vol. 181, pp. 2813–2822, 2011.
- [152] S. K. Das and K. K. Paul, "Robust compensation of a cart-inverted pendulum system using a periodic controller: Experimental results," *Automatica*, vol. 47, pp. 2543–2547, 2011.
- [153] C.-J. Lin and C.-H. Chen, "Nonlinear system control using self-evolving neural fuzzy inference networks with reinforcement evolutionary learning," *Applied Soft Computing*, vol. 11, pp. 5463–5476, 2011.
- [154] C. Aguilar-Ibañez, J. C. Martínez-García, A. Soria-López, and J. de J. Rubio, "On the stabilization of the inverted-cart pendulum using the saturation function approach," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2011, pp. 1–14, 2011. Article ID: 856015.
- [155] C. Aguilar-Ibañez, J. Mendoza-Mendoza, and J. Dávila, "Stabilization of the cart pole system: by sliding mode control," *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, pp. 2769–2777, 2014.
- [156] T. Kai, K. Bitō, and T. Shintani, "Control of the cart-pendulum system based on discrete mechanics—Part II: Transformation to continuous-time inputs and experimental verification," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, vol. E95A, no. 2, pp. 534–541, 2012.
- [157] J. Yue, Z. Zhou, J. Jiang, Y. Liu, and D. Hu, "Balancing a simulated inverted pendulum through motor imagery: An EEG-based real-time control paradigm," *Neuroscience Letters*, vol. 524, pp. 95–100, 2012.
- [158] K. Liu, Y. Yao, D. Sun, and V. Balakrishnan, "Improved state feedback controller synthesis for piecewise-linear systems," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 8, no. 9, pp. 1–13, 2012.
- [159] I. Kar, P. K. Patchaikani, and L. Behera, "On balancing a cart-pole system using T-S fuzzy model," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 207, pp. 94–110, 2012.
- [160] D. W. Qian, J. Q. Yi, and D. B. Zhao, "How to automatically set an initial angle for balance control of a cart-pole system: An education case," *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 50, no. 1, pp. 57–68, 2013.

- [161] A. Delibaşı, I. B. Kucukdemiral and G. Cansever, " $\mathcal{L}_2$  control of LPV systems with saturating actuators: Pólya approach," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 34, pp. 17–34, 2013.
- [162] A. Nejadfard, M. J. Yazdanpanah, and I. Hassanzadeh, "Friction compensation of double inverted pendulum on a cart using locally linear neuro-fuzzy model," *Neural Computing & Applications*, vol. 22, pp. 337–347, 2013.
- [163] M. El-Bardini and A. M. El-Nagar, "Interval type-2 fuzzy PID controller for uncertain nonlinear inverted pendulum system," *ISA Transactions*, vol. 53, pp. 732–743, 2014.
- [164] L. Fu and D. Wang, "Fusion control of flexible logic control and neural network," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, pp. 1–17, 2014. ID del Artículo: 913549.
- [165] J. Lee, R. Mukherjee, and H. K. Khalil, "Output feedback stabilization of inverted pendulum on a cart in the presence of uncertainties," *Automatica*, vol. 54, pp. 146–157, 2015.
- [166] X. Fang, D. Zheng, H. He, and Z. Ni, "Data-driven heuristic dynamic programming with virtual reality," *Neurocomputing*, vol. 166, pp. 244–255, 2015.
- [167] G. Zhao, H. Li, and Z. Song, "Tensor product model transformation based decoupled terminal sliding mode control.," *International Journal of Systems Science*, vol. 47, no. 8, pp. 1791–1803, 2016.
- [168] J. Wang, E. Uchibe, and K. Doya, "EM-based policy hyper parameter exploration: Application to standing and balancing of a two-wheeled smartphone robot," *Artificial Life and Robotics*, vol. 21, no. 1, pp. 125–131, 2016.
- [169] D. A. Haghghi and S. Mobayen, "Design of an adaptive super-twisting decoupled terminal sliding mode control scheme for a class of fourth-order systems," *ISA Transactions*, vol. 75, pp. 216–225, 2018.
- [170] J. Zhao and M. W. Spong, "Hybrid control for global stabilization of the cart-pendulum system," *Automatica*, vol. 37, pp. 1941–1951, 2001.
- [171] D. Chatterjee, A. Patra, and H. K. Joglekar, "Swing-up and stabilization of a cart-pendulum system under restricted cart track length," *Systems & Control Letters*, vol. 47, pp. 355–364, 2002.
- [172] N. Kouda, N. Matsui, H. Nishimura, and F. Peper, "An examination of qubit neural network in controlling an inverted pendulum," *Neural Processing Letters*, vol. 22, pp. 277–290, 2005.
- [173] S. Gros, B. Srinivasan, and D. Bonvin, "Robust predictive control based on neighboring extremals," *Journal of Process Control*, vol. 16, pp. 243–253, 2006.
- [174] N. Muškinja and B. Tovornik, "Swinging up and stabilization of a real inverted pendulum," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 2, pp. 631–639, 2006.
- [175] C.-W Park, J.-H Choi, and H.-G Sung, "Indirect adaptive regulator design based on TSK fuzzy models," *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 52–57, 2006.
- [176] K. Sakurama, S. Hara, and K. Nakano, "Swing-up and stabilization control of a cart-pendulum system via energy control and controlled lagrangian methods," *Electrical Engineering in Japan*, vol. 160, no. 4, pp. 617–623, 2007.
- [177] R. Santiesteban, T. Floquet, Y. Orlov, S. Riachy, and J.-P. Richard, "Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems II: Orbital stabilization of an inverted pendulum with application to swing up/balancing control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, no. 4–5, pp. 544–556, 2008.

- [178] F. Gordillo and J. Aracil, "A new controller for the inverted pendulum on a cart," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, pp. 607–1621, 2008.
- [179] A. Siuka and M. Schöberl, "Applications of energy based control methods for the inverted pendulum on a cart," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 57, pp. 1012–1017, 2009.
- [180] M. F. Pérez Polo, M. Pérez Molina, and J. Gil Chica, "Swing-up and positioning control of an inverted wheeled cart pendulum system with chaotic balancing motions," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 47, pp. 655–665, 2012.
- [181] C.-C. Yih, "Sliding mode control for swing-up and stabilization of the cart-pole underactuated system," *Asian Journal of Control*, vol. 15, no. 4, pp. 1201–1214, 2013.
- [182] N. Adhikary and C. Mahanta, "Integral backstepping sliding mode control for underactuated systems: Swing-up and stabilization of the cart-pendulum system," *ISA Transactions*, vol. 52, pp. 870–880, 2013.
- [183] T. Kai and K. Bito, "A new discrete mechanics approach to swing-up control of the cart-pendulum system," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, vol. 19, pp. 230–244, 2014.
- [184] F. Mazenc and S. Bowong, "Tracking trajectories of the cart-pendulum system," *Automatica*, vol. 39, pp. 677–684, 2003.
- [185] M. I. El-Hawwary, A. L. Elshafei, H. M. Emara, and H. A. Abdel Fattah, "Adaptive fuzzy control of the inverted pendulum problem," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 6, pp. 1135–1144, 2006.
- [186] Z. R. Tsai, J. D. Hwang, and Y. Z. Chang, "Fuzzy tracker with self-tuning PID and identifier design using conditional-LMI and improved random optimal algorithm," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, vol. E90A, no. 10, pp. 2280–2289, 2007.
- [187] C.-K. Lin, "Robust adaptive critic control of nonlinear systems using fuzzy basis function networks: An LMI approach," *Information Sciences*, vol. 177, pp. 4934–4946, 2007.
- [188] L. Consolini and M. Tosques, "On the existence of small periodic solutions for the 2-dimensional inverted pendulum on a cart," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 68, no. 2, pp. 486–502, 2007.
- [189] H. R. Koofgar, S. Hosseinnia, and F. Sheikholeslam, "Robust adaptive nonlinear control for uncertain control-affine systems and its applications," *Nonlinear Dynamics*, vol. 56, pp. 13–22, 2009.
- [190] S. Bououden, S. Filali, and K. Kemih, "Adaptive fuzzy tracking control for unknown nonlinear systems," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 6, no. 2, pp. 541–549, 2010.
- [191] W. Lan and D. Wang, "Structural design of composite nonlinear feedback control for linear systems with actuator constraint," *Asian Journal of Control*, vol. 12, no. 5, pp. 616–625, 2010.
- [192] Y. N. Zhang, X. T. Yu, Y. H. Yin, C. Peng, and Z. P. Fan, "Singularity-conquering ZG controllers of z2g1 type for tracking control of the IPC system," *International Journal of Control*, vol. 87, no. 9, pp. 1729–1746, 2014.
- [193] A. Kandel, L. H. Li, and Z. Q. Cao, "Fuzzy inference and its applicability to control-systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 48, no. 1, pp. 99–111, 1992.
- [194] N. Hovakimyan, B.-J. Yang, and A. J. Calise, "Adaptive output feedback control methodology applicable to non-minimum phase nonlinear systems," *Automatica*, vol. 42, pp. 513–522, 2006.

- [195] X. Jiang, and Q.-L. Han, "Network-induced delay-dependent  $H_\infty$  controller design for a class of networked control systems," *Asian Journal of Control*, vol. 8, no. 2, pp. 97–106, 2006.
- [196] J. Jiang, M. S. Kamel, and L. Chen, "Aggregation of multiple reinforcement learning algorithms," *International Journal on Artificial Intelligence Tools*, vol. 15, no. 5, pp. 855–861, 2006.
- [197] A. Shiriaev, A. Robertsson, J. Perram, and A. Sandberg, "Periodic motion planning for virtually constrained Euler-Lagrange systems," *Systems & Control Letters*, vol. 55, pp. 900–907, 2006.
- [198] S.-M. Cho, H.-C. Choi, and S.-K. Hong, "Control of an inverted pendulum system with CAN for communication medium," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, vol. 12, no. 4, pp. 346–352, 2006.
- [199] K. Graichen and M. Zeitz, "Feedforward control design for finite-time transition problems of nonlinear systems with input and output constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 5, pp. 1273–1278, 2008.
- [200] C.-H. Ahn, "Design of T-S fuzzy model based adaptive fuzzy observer and controller," *Journal of the Korean Institute of Illuminating and Electrical Installation Engineers*, vol. 23, no. 11, pp. 9–21, 2009.
- [201] L. B. Freidovich, A. S. Shiriaev, F. Gomez-Estern, F. Gordillo, and J. Aracil, "Modification via averaging of partial-energy-shaping control for creating oscillations: cart-pendulum example," *International Journal of Control*, vol. 82, no. 9, pp. 1582–1590, 2009.
- [202] I. A. Tall and W. Respondek, "Analytic normal forms and symmetries of strict feedforward control systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 20, pp. 1431–1454, 2010.
- [203] M. Bonfè, P. Castaldi, N. Mimmo, and S. Simani, "Active fault tolerant control of nonlinear systems: The cart-pole example," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 21, no. 3, pp. 441–455, 2011.
- [204] A. Ghosh, T. R. Krishnan, and B. Subudhi, "Robust proportional-integral-derivative compensation of an inverted cart-pendulum system: An experimental study," *IET Control Theory and Applications*, vol. 6, no. 8, pp. 1145–1152, 2012.
- [205] P. Manoonpong, C. Kolodziejski, F. Worgotter, and J. Morimoto, "Combining correlation-based and reward-based learning in neural control for policy improvement," *Advances In Complex Systems*, vol. 16, no. 3, 2013. ID del Artículo: 1350015.
- [206] H. Ohsaki, M. Iwase, and S. Hatakeyama, "Discretization and control of rotating pendulum under lebesgue sampling," *Electronics and Communications in Japan*, vol. 97, no. 11, pp. 177–184, 2014.
- [207] K. Liu and E. Fridman, "Discrete-time network-based control under scheduling and actuator constraints," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, pp. 1816–1830, 2015.
- [208] K. Liu, E. Fridman, and K. H. Johansson, "Dynamic quantization of uncertain linear networked control systems," *Automatica*, vol. 59, pp. 248–255, 2015.
- [209] K. Flaßkamp, A. R. Ansiri, and T. D. Murphey, "Hybrid control for tracking of invariant manifolds," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 25, pp. 298–311, 2017.
- [210] I. Fantoni, R. Lozano, and M. W. Spong, "Energy based control of the Pendubot," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 4, pp. 725–729, 2000.
- [211] O. Kolesnichenko and A.S. Shiriaev, "Partial stabilization of underactuated Euler-Lagrange systems via a class of feedback transformations," *Systems & Control Letters*, vol. 45, pp. 121–132, 2002.

- [212] E. Sanchez and V. Flores, "Real-time underactuated robot swing-up via fuzzy PI+PD control," *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. 17, no. 1, pp. 1–13, 2006.
- [213] X. Xin, S. Tanaka, J. She, and T. Yamasaki, "New analytical results of energy-based swing-up control for the pendubot," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 52, pp. 110–118, 2013.
- [214] J. Gregory, A. Olivares, and E. Staffetti, "Energy-optimal trajectory planning for the pendubot and the acrobot," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 34, pp. 275–295, 2013.
- [215] D. Xia, T. Chai, and L. Wang, "Fuzzy neural-network friction compensation-based singularity avoidance energy swing-up to nonequilibrium unstable position control of pendubot," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 2, pp. 690–705, 2014.
- [216] D. Xia, L. Wang, and T. Chai, "Neural-network-friction compensation-based energy swing-up control of pendubot," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 3, pp. 1411–1423, 2014.
- [217] A. Singh and H. K. Khalil, "Regulation of nonlinear systems using conditional integrators," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 15, pp. 339–362, 2005.
- [218] T.-J. Tarn, P. Sanpash, D. Cheng, and M. Zhang, "Output regulation for nonlinear systems: Some recent rheoretical and experimental results," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, no. 4, pp. 605–610, 2005.
- [219] K. Yubai, K. Okuhara, and J. Hirai, "Gain-scheduling control of a rotary inverted pendulum by weight optimization and  $H_\infty$  loop shaping procedure," *Electrical Engineering in Japan*, vol. 163, no. 2, pp. 30–40, 2008.
- [220] Z. Wang and Y. Guo, "Unified control for pendubot at four equilibrium points," *IET Control Theory and Applications*, vol. 5, n. 1, pp. 155–163, 2011.
- [221] X. Xin and Y. Liu, "Reduced-order stable controllers for two-link underactuated planar robots," *Automatica*, vol. 49, pp. 2176–2183, 2013.
- [222] J. A. Meda-Campaña, J. Rodríguez-Valdez, T. Hernández-Cortés, R. Tapia-Herrera, and V. Nosov, "Analysis of the fuzzy controllability property and stabilization for a class of T-S fuzzy models," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 2, pp. 291–301, 2015.
- [223] A. G. Loukianov, J. Rivera Domínguez, B. Castillo-Toledo, "Robust sliding mode regulation of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 89, pp. 241–246, 2018.
- [224] M. Zhang and T.-J. Tarn, "Hybrid control of the pendubot," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 7, no. 1, pp. 79–86, 2002.
- [225] J. Constantin, C. Nasr and Denis Hamad, "Control of a robot manipulator and pendubot system using artificial neural networks," *Robotica*, vol. 23, no. 6, pp. 781–784, 2005.
- [226] T. Albahkali, R. Mukherjee and T. Das, "Swing-up control of the pendubot: An impulse-momentum approach," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 25, no.4, pp. 975–982, 2009.
- [227] Y. Aoustin, A. Formal'skii, and Y. Martynenko, "Pendubot: Combining of energy and intuitive approaches to swing up, stabilization in erected pose," *Multibody System Dynamics*, vol. 25, pp. 65–80, 2011.
- [228] P. Ordaz, E. S. Espinoza, and F. Munoz, "Research on swing-up control based on energy for the pendubot system," *Journal of Dynamics Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, vol. 136, no. 4, pp. 1–12, 2014.

- [229] F. B. Mathis, R. Jafari, and R. Mukherjee, "Impulsive actuation in robot manipulators: Experimental verification of pendubot swing-up," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 19, no. 4, pp. 1469–1474, 2014.
- [230] M. Gulan, M. Salaj, and B. Rohal'-Ilkiv, "Achieving an equilibrium position of pendubot via swing-up and stabilizing model predictive control," *Journal of Electrical Engineering*, vol. 65, no. 6, pp. 356–363, 2014.
- [231] M. Eom and D. Chwa, "Robust swing-up and balancing control using a nonlinear disturbance observer for the pendubot system with dynamic friction," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, no. 2, pp. 331–343, 2015.
- [232] O. Begovich, E. N. Sanchez, and M. Maldonado, "Takagi–Sugeno fuzzy scheme for real-time trajectory tracking of an underactuated robot," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 1, pp. 14–20, 2002.
- [233] V. Utkin, B. Castillo-Toledo, A. Loukianov, and O. Espinosa-Guerra, "On robust VSS nonlinear servomechanism problem," en *Variable Structure Systems: Towards the 21<sup>st</sup> Century*, X. Yu y J.-X. Xu (Eds), Lecture Notes In Control And Information Sciences. Berlin, Alemania: Springer-Verlag, 2002, vol. 274, pp. 343–363.
- [234] Z. Cai and C. Y. Su, "An optimal real-time trajectory tracking control design for Pendubot via Takagi–Sugeno fuzzy model," *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 29, no. 2, pp. 247–265, 2005.
- [235] F. Verduzco, "Control of oscillations from the  $k$ -zero bifurcation," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 33, pp. 492–504, 2007.
- [236] L. Freidovich, A. Robertsson, A. Shiriaev, and R. Johansson, "Periodic motions of the pendubot via virtual holonomic constraints: Theory and experiments," *Automatica*, vol. 44, pp. 785–791, 2008.
- [237] H. G. Gonzalez-Hernandez, J. A. Gallegos, and J. A. Gallegos, "Experimental analysis of chaos in underactuated electromechanical systems," *Revista Mexicana de Física*, vol. 47, no. 5, pp. 397–403, 2001.
- [238] H. G. Gonzalez-Hernandez, J. Alvarez, and J. Alvarez-Gallegos, "Experimental analysis and control of a chaotic Pendubot," *International Journal of Robotics Research*, vol. 23, no. 9, pp. 891–901, 2004.
- [239] W. Li, K. Tanaka, and H. O. Wang, "Acrobatic control of a pendubot," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 12, no. 4, pp. 549–552, 2004.
- [240] F. Gognard and CC. de Wit, "Virtual constraints for the orbital stabilization of the pendubot," en *Nonlinear And Adaptive Control: Tools And Algorithms For The User*, A. Astolfi. Londres, Inglaterra: Imperial College Press, 2006, pp. 115–145.
- [241] C. A. Cruz-Villar, J. Alvarez-Gallegos, and M. G. Villareal-Cervantes, "Rediseño paramétrico del pendubot para posicionamiento vertical en tiempo mínimo," *Revista Iberoamericana de Automática Información Industrial*, vol. 5, no. 1, pp. 104–114, 2008.
- [242] O. Castillo and P. Melin, "Intelligent Control of the Pendubot with Interval Type-2 Fuzzy Logic," en *Type-2 Fuzzy Logic: Theory And Applications*, Studies in Fuzziness and Soft Computing. Berlin, Germany: Springer-Verlag, vol. 223, pp. 155–170, 2008.
- [243] C. A. Cruz-Villar, J. Alvarez-Gallegos, and M. G. Villareal-Cervantes, "Concurrent redesign of an underactuated robot manipulator," *Mechatronics*, vol. 19, pp. 178–183, 2009.
- [244] T. Shoji, S. Katsumata, S. Nakaura, and M. Sampei, "Throwing motion control of the springed pendubot," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 3, pp. 950–957, 2013.

- [245] M. M. Azimi and H. R. Koofgar, "Adaptive fuzzy backstepping controller design for uncertain underactuated robotic systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, pp. 1457–1468, 2015.
- [246] D. Sun, Y. Wang, and Z. Quing, "Rotary inverted pendulum includes pendulum bar, motor, driving component, supporting frame and its control system where pendulum bar is connected with motor shaft by means of driving component," CN1477606-A, Febrero, 25, 2004.
- [247] Y. Jia, D. Meng, and C. Guo, "Furuta pendulum stabilizing and controlling method, involves searching best parameter proportional-integral-differential controller, and controlling Furuta pendulum by utilizing best parameter of controller," CN101866144-A, Octubre, 20, 2010.
- [248] L. Dai, J. Gao, X. Hou, Y. Li, X. Ruan, Y. Wang, B. Zhao, X. Zhu, and G. Zuo, "Anti-torque rotary inverted pendulum system used for robot research, has sensors that are controlled by control unit, and is provided with damper between flywheel rotating inner ring and flywheel fixed outer ring," CN102237006-A, Noviembre, 9, 2011.
- [249] L. Dai, J. Gao, X. Hou, Y. Li, X. Ruan, Y. Wang, B. Zhao, X. Zhu, and G. Zuo, "Anti-torque rotary inverted pendulum system used for robot research, has sensors that are controlled by control unit, and is provided with damper between flywheel rotating inner ring and flywheel fixed outer ring," CN102237006-B, Abril, 10, 2013.
- [250] S. Ding, C. Liu, Y. Yang, Q. Wu, B. Zhang, J. Han, and Z. Yang, "Two-dimensional degree-of-freedom rotating inverted pendulum device, has bracked fixed with rotatable servomotor that is connected with cantilaver through connecting pallet, and coder fixed with swinging rod along axial direction," CN203644296-U, Junio, 11, 2014.
- [251] Y. Li, C. Liu, C. Pan, C. Xu, and Y. Xiao, "First-stage inverted pendulum control device, has X20CP1484-type central processing module connected with coder data collect module and servo motor module, and electric source module fixed with servo motor module," CN203658789-U, Junio, 18, 2014.
- [252] J. Lu, S. Yu, W. Xiong, and Y. Dong, "Rotary inverted pendulum control experiment system using in e.g. robot upright balance control, has potentometer angle measurement module connected to driving module which is connected to angle monitoring module," CN104035450-A, Septiembre, 10, 2014.
- [253] P. Meng, Z. Mao, S. Yu, R. Ge, and Y. Pan, "Rotate-model based design inverted pendulum has swinging rod that is mounted on rotating shaft of angle displacement sensor set at end of rotate arm of direct current motor mounted in inner bracket portion," CN203909627-U, Octubre, 29, 2014.
- [254] J. Lu, S. Yu, W. Xiong, and Y. Dong, "Rotable inverted type pendulum control experiment system has motor whose negative end is connected with power amplifying circuit connected with angle display unit through universal serial bus (USB) interface," CN203930517-U, Noviembre, 05, 2014.
- [255] Y. Man, "Inverted pendulum system, has driven belt pulley whose end is connected with motor, where motor is connected with motor driving control module, and motor driving control module and coder connected together," CN204010508-U, Diciembre, 10, 2014.
- [256] Z. Li, X. Li, and Y. Wang, "Controller used for annular inverted type swinging pendulum, has main chip, inverted pendulum unit, drive circuit and signal processing circuit that are connected sequently, and main chip that is connected to with motor control system," CN104267666-A, Enero, 07, 2015.
- [257] L. Huang, Y. Liu, Q. Wang, C. Zhou, H. Yu, Z. Zou, E. Jiang, and Z. Wang, "Rotary inverted pendulum experiment device for student, has motor bucket fixed with direct current speed reducing motor that is fixed with transverse arm by shaft join, and angle coder fixed with fixed arm with angle aluminum frame," CN204189370-U, Marzo, 04, 2015.

- [258] Q. Wu, Y. Yang, C. Liu, B. Hou, Q. Hu, S. Ding, B. Zhang, and Z. Yang, "Method for modeling rotary inverted pendulum real-time monitoring system," CN104766357-A, Julio, 08, 2015.
- [259] Q. Wu, S. Ding, Z. Yang, Y. Yang, B. Zhang, J. Han, and C. Liu, "Planar two-dimensional degree-of-freedom rotary inverted pendulum device," CN103810929-A, Mayo, 21, 2014.
- [260] Q. Liu, "Rotary inverted pendulum device," CN105630003-A, Junio, 1, 2016.
- [261] N. Sun, R. Gu, Y. Chen, D. Zhou, and X. Meng, "Rotary type inverted pendulum with counter-weight," CN105511501-A, Abril, 20, 2016.
- [262] J. Fei, "Rotary inverted pendulum," CN105388818-A, Marzo, 9, 2016.
- [263] K. Zhang, Z. He, and G. Li, "Automatic rotating inverted pendulum device based on ARM," CN203838951-U, Septiembre, 17, 2014.
- [264] X. Ruan, X. Zhu, K. Peng, G. Zuo, D. Gong, Y. Li, K. Wang, X. Hou, B. Zhao, J. Gao, R. Wei, R. Zhang, and Y. Zhang, "Inverted pendulum system based on electromagnetic effect," CN202383921-U, Agosto, 15, 2012.
- [265] X. Ruan, X. Zhu, K. Peng, G. Zuo, D. Gong, Y. Li, K. Wang, X. Hou, B. Zhao, J. Gao, R. Wei, R. Zhang, and Y. Zhang, "Inverted pendulum system based on electromagnetic effect," CN102522042-A, Junio, 27, 2012.
- [266] J. Zhao and H. Zhou, "Inverted pendulum of linear motor," CN201302780-Y, Septiembre, 2, 2009.
- [267] M. Antonio-Cruz, V. M. Hernández-Guzmán, and R. Silva-Ortigoza, "Limit cycle elimination in inverted pendulums: Furuta pendulum and pendubot," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 30317–30332, 2018.
- [268] V. M. Hernández-Guzmán, M. Antonio-Cruz, and R. Silva-Ortigoza, "Linear state feedback regulation of a Furuta pendulum: Design based on differential flatness and root locus," *IEEE Access*, vol. 4, pp. 8721–8736, 2016.
- [269] R. C. Hibbeler, *Engineering Mechanics: Dynamics*, 12 Ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson Education, 2010.
- [270] H. Sira-Ramírez, R. Márquez, F. Rivas-Echeverría, and O. Llanes-Santiago, *Control de Sistemas No Lineales: Linealización Aproximada, Extendida, Exacta*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [271] H. Sira-Ramírez and S. K. Agrawal, *Differentially flat systems*. Monticello, NY, USA: Marcel Dekker Inc., 2004.
- [272] M. Antonio-Cruz, R. Silva-Ortigoza, C. A. Merlo-Zapata, M. G. Villarreal-Cervantes, D. Muñoz-Carrillo, and V. M. Hernández-Guzmán, "Modeling and construction of a Furuta pendulum prototype," *2014 IEEE International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering*, Morelos, Mexico, Nov. 18–21, 2014, pp. 98–103.
- [273] M. Antonio-Cruz, R. Silva-Ortigoza, J. Sandoval-Gutiérrez, C. A. Merlo-Zapata, H. Taud, C. Márquez-Sánchez, and V. M. Hernández-Guzmán, "Modeling, simulation, and construction of a Furuta pendulum test-bed," *2015 IEEE 25th International Conference on Electronics, Communications and Computers*, Puebla, Mexico, Feb. 25–27, 2015, pp. 72–79.
- [274] D. I. Barbosa, J. S. Castillo, and L. F. Combita, "Rotary inverted pendulum with real time control," *2011 IEEE IX Latin American and IEEE Colombian Conference on Automatic Control and Industry Applications (LARC)*, Bogota, Oct. 1–4, 2011, pp. 1–6.
- [275] O. García-Alarcón, S. Puga-Guzmán, and J. Moreno-Valenzuela, "On parameter identification of the Furuta pendulum," *International Meeting of Electrical Engineering Research (ENIINVIE)*, Ensenada, B. C., Mexico, March 28–30, 2012, pp. 77–84.

- [276] J. Yao, Z. Jiao, and D. Ma, "RISE-Based precision motion control of dc motors with continuous friction compensation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 12, pp. 7067–7075, 2014.
- [277] M. Antonio-Cruz, R. Silva-Ortigoza, C. Márquez-Sánchez, V. M. Hernández-Guzmán, J. Sandoval-Gutiérrez, and J. C. Herrera-Lozada, "Parallel computing as a tool for tuning the gains of automatic control Laws," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15, no. 6, pp. 1189–1196, 2017.
- [278] S. T. Karris, *Introduction to Simulink with Engineering Applications*. USA: Orchard Publications, 2006.
- [279] J. J. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall International, 1989.
- [280] M. W. Spong, "Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems," *1994 IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems. Advanced Robotic Systems and the Real World. IROS 1994*, Munich, Germany, 12–16 Sep. 1994, pp. 314–321.
- [281] M. W. Spong and D. J. Block, "The pendubot: A mechatronic system for control research and education," *1995 34th Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, 13–15 Dec. 1995, pp. 555–556.
- [282] K. Erenturk, "Hybrid control of a mechatronic system: Fuzzy logic and grey system modeling approach," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 12, no. 6, pp. 703–710, 2007.
- [283] E. Hernández-Márquez, J. R. García-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, M. Antonio-Cruz, V. M. Hernández-Guzmán, H. Taud, and M. Marcelino-Aranda, "Bidirectional tracking robust controls for a dc/dc buck converter-dc motor system," *Complexity*, vol. 2018, 2018.
- [284] R. Silva-Ortigoza, J. N. Alba-Juárez, J. R. García-Sánchez, M. Antonio-Cruz, V. M. Hernández-Guzmán, and H. Taud, "Modeling and experimental validation of a bidirectional dc/dc buck power electronic converter-dc motor system," *IEEE Latin American Transactions*, vol. 15, no. 6, pp. 1043–1051, 2017.
- [285] J. R. García-Sánchez, S. Tavera-Mosqueda, R. Silva-Ortigoza, M. Antonio-Cruz, G. S. Ortigoza, and J. de J. Rubio, "Assessment of an average tracking controller that considers all the subsystems involved in a WMR: Implementation via PWM or Sigma-Delta modulation," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 3, pp. 1093–1102, 2016.
- [286] J. R. García-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, S. Tavera-Mosqueda, C. Márquez-Sánchez, V. M. Hernández-Guzmán, M. Antonio-Cruz, G. Silva-Ortigoza, and H. Taud, "Tracking control for mobile robots considering the dynamics of all their subsystems: Experimental implementation," *Complexity*, vol. 2017, pp. 1–18, 2017.

# Apéndice A

## Productos de investigación científica y tecnológica obtenidos

En este apéndice se desglosan los productos de investigación científica y tecnológica realizados durante el desarrollo del trabajo de tesis.

### A.1. Productos de investigación científica

En este apartado se presentan los productos de investigación científica logrados a lo largo del desarrollo de tesis.

#### A.1.1. Artículos en revistas del *Journal Citation Reports* (JCR)

- 1/10.- **M. Antonio-Cruz**, V. M. Hernández-Guzmán, and R. Silva-Ortigoza, “Limit cycle elimination in inverted pendulums: Furuta pendulum and pendubot,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 30317–30332, 2018.
- 2/10.- **M. Antonio-Cruz**, C. Márquez-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, J. Sandoval-Gutiérrez, and J. C. Herrera-Lozada, “Parallel computing as a tool for tuning the gains of automatic control laws,” *IEEE Latin American Transactions*, vol. 15, no. 6, pp. 1189–1196, 2017.
- 3/10.- V. M. Hernández-Guzmán, **M. Antonio-Cruz**, and R. Silva-Ortigoza, “Linear state feedback regulation of a Furuta Pendulum: design based on differential flatness and root locus,” *IEEE Access*, vol. 4, pp. 8721–8736, 2016.
- 4/10.- E. Hernández-Márquez, J. R. García-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, **M. Antonio-Cruz**, V. M. Hernández-Guzmán, H. Taud, and M. Marcelino-Aranda, “Bidirectional tracking robust controls for a dc/dc buck converter-dc motor system,” *Complexity*, vol. 2018, 2018.
- 5/10.- J. R. García-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, S. Tavera-Mosqueda, C. Márquez-Sánchez, V. M. Hernández-Guzmán, **M. Antonio-Cruz**, G. Silva-Ortigoza, and H. Taud, “Tracking control for mobile robots considering the dynamics of all its subsystems: experimental implementation,” *Complexity*, vol. 2017, 2017.

- 6/10.- R. Silva-Ortigoza, J. N. Alba-Juárez, J. R. García-Sánchez, **M. Antonio-Cruz**, V. M. Hernández-Guzmán, and H. Taud, “Modeling and experimental validation of a bidirectional dc/dc buck power electronic converter-dc motor system,” *IEEE Latin American Transactions*, vol. 15, no. 6, pp. 1043–1051, 2017.
- 7/10.- J. R. García-Sánchez, S. Tavera-Mosqueda, R. Silva-Ortigoza, **M. Antonio-Cruz**, G. S. Ortigoza, and J. de J. Rubio, “Assessment of an average tracking controller that considers all the subsystems involved in a wmr: implementation via pwm or sigma-delta modulation,” *IEEE Latin American Transactions*, vol. 14, no. 3, pp. 1093–1102, 2016.
- 8/10.- **M. Antonio-Cruz**, R. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, M. Marcelino-Aranda, and H. Taud, “Construction of an underactuated mechanical system for testing automatic control strategies,” 2018. Sometido a revisión en revista JCR.
- 9/10.- **M. Antonio-Cruz**, V. M. Hernández-Guzmán, and R. Silva-Ortigoza, “Frequency response-based regulation control for limit cycle elimination in the cart-pole system,” 2018. Sometido a revisión en revista JCR.
- 10/10.- C. Márquez Sánchez, R. Silva-Ortigoza, J. R. García-Sánchez, V. M. Hernández-Guzmán, **M. Antonio-Cruz**, M. Marcelino-Aranda, and G. Silva-Ortigoza, “An embedded hardware for implementation of a tracking control in WMRs,” 2016. Sometido a revisión en revista JCR.

### A.1.2. Artículos en revistas de divulgación y difusión científica y tecnológica

- 1/7.- J. R. García-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, C. Márquez-Sánchez, **M. Antonio-Cruz**, E. Hernández-Márquez y V. H. García-Rodríguez, “Control de seguimiento de dos niveles para el sistema convertidor de potencia de cd/cd buck-motor de cd”, *Boletín UPIITA*, no. 60, 2017.
- 2/7.- J. R. García-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, J. N. Alba-Juárez, S. Tavera-Mosqueda, C. Márquez-Sánchez y **M. Antonio-Cruz**, “Control por retroalimentación de la salida pasiva de la dinámica del regulación exacto para el sistema convertidor buck-boost doble”, *Boletín UPIITA*, no. 57, 2016.
- 3/7.- C. Márquez-Sánchez, C. A. Merlo-Zapata, R. Silva-Ortigoza, J. R. García-Sánchez y **M. Antonio-Cruz**, “Medición de distancias mediante un sensor ultrasónico y arduino”, *Boletín UPIITA*, no. 54, 2016.
- 4/7.- **M. Antonio-Cruz**, J. N. Alba-Juárez, C. A. Merlo-Zapata, C. Márquez-Sánchez, J. A. Rodríguez-Meza, R. Silva-Ortigoza y H. Taud, “Las matemáticas discretas en la ingeniería”, *Boletín UPIITA*, no. 52, 2016.
- 5/7.- C. Y. Sosa-Cervantes, C. Márquez-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, M. Marcelino-Aranda, **M. Antonio-Cruz**, J. R. García-Sánchez y J. A. Rodríguez-Meza, “Control de movimiento en robots móviles de ruedas tipo diferencial”, *Boletín UPIITA*, no. 52, 2016.

- 6/7.- J. R. García-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, C. Márquez-Sánchez, **M. Antonio-Cruz** y C. Y. Sosa-Cervantes, "Control de un convertidor cd/cd de topología buck", *Boletín UPIITA*, no. 51, 2015.
- 7/7.- C. Márquez-Sánchez, J. N. Alba-Juárez, R. Silva-Ortigoza, J. R. García-Sánchez, M. Marcelino-Aranda, C. Y. Sosa-Cervantes, **M. Antonio-Cruz** y C. A. Merlo-Zapata, "Control de velocidad de un motor de cd usando el protocolo de comunicación bluetooth a través de android y arduino", *Boletín UPIITA*, no. 51,

### A.1.3. Artículos *in Extenso* (Conferencias internacionales) indexados en Web of Science, Scopus e IEEE Xplore

- 1/8.- C. Márquez-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, C. N. Pérez-Catalán, **M. Antonio-Cruz**, J. R. García-Sánchez, V. M. Hernández-Guzmán, and M. Marcelino-Aranda, "Start up of a mobile robot experimental platform with embedded hardware and free software," *IEEE 2017 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE 2017)*, Nov. 2017.
- 2/8.- E. Hernández-Márquez, R. Silva-Ortigoza, J. R. García-Sánchez, **M. Antonio-Cruz**, H. Taud, F. Carrizosa-Corral, and M. Marcelino-Aranda, "Alternative mathematical models for the dc/dc buck-boost converter," *IEEE 2017 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE 2017)*, Nov. 2017.
- 3/8.- E. Hernández-Márquez, C. A. Avila-Rea, R. Silva-Ortigoza, J. R. García-Sánchez, **M. Antonio-Cruz**, H. Taud, and M. Marcelino-Aranda, "Modeling and simulation of a dc motor fed by a full-bridge buck inverter," *IEEE 2017 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE 2017)*, Nov. 2017.
- 4/8.- E. Hernández-Márquez, R. Silva-Ortigoza, C. A. Avila-Rea, J. R. García-Sánchez, **M. Antonio-Cruz**, H. Taud, and Sh. Dong, "Regulation of the dc/dc buck-boost converter-inverter-dc motor system: sensorless passivity based control," *IEEE 2017 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE 2017)*, Nov. 2017.
- 5/8.- J. A. Rodríguez-Meza, R. Silva-Ortigoza, J. Sandoval-Gutiérrez, H. Taud, J. N. Alba-Juárez, and **M. Antonio-Cruz**, "Switched implementation via modulators of a tracking average controller for a boost converter," *IEEE 2016 26th International Conference on Electronics, Communications and Computers (CONIELECOMP 2016)*, Feb. 2016.
- 6/8.- R. A. Orozco-Velazquez, R. Silva-Ortigoza, C. Márquez-Sánchez, J. R. García-Sánchez, H. Taud, C. Y. Sosa-Cervantes, **M. Antonio-Cruz**, M. Marcelino-Aranda, and F. Carrizosa-Corral, "Ackerman mobile robot with arm," *IEEE 2016 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE 2016)*, Nov. 2016.

- 7/8.- J. A. Rodríguez-Meza, R. Silva-Ortigoza, J. Sandoval-Gutiérrez, **M. Antonio-Cruz**, H. Taud, J. N. Alba-Juárez, C. Y. Sosa-Cervantes, and R. Macías-Igari, "Control based on differential fatness for a DC/DC Boost converter via a sigma-delta-modulator," *IEEE 2015 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE 2015)*, Nov. 2015.
- 8/8.- C. Márquez-Sánchez, R. Silva-Ortigoza, **M. Antonio-Cruz**, C. Y. Sosa-Cervantes, and V. M. Hernández-Guzmán, "A review of embedded systems used in autonomous WMR for the trajectory tracking task," *IEEE 2015 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE 2015)*, Nov. 2015.

#### A.1.4. Conferencias magistrales por invitación

- 1/2.- **M. Antonio-Cruz**, "Instrumentación y programación de controladores para sistemas subactuados", *Semana de Orientación Vocacional*, Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios No. 30, Veracruz, México, Mar. 2018.
- 2/2.- **M. Antonio-Cruz**, "Automatización de sistemas robóticos y mecatrónicos industriales", *Semana Multidisciplinaria 2017*, Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, Estado de México, México, Dic. 2017.

#### A.1.5. Estancia de investigación

Realizada del **1 de Agosto al 31 de Diciembre de 2016** en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México.

#### A.1.6. Participación en proyectos de investigación de la SIP-IPN

- 1/4.- Sistemas subactuados de tipo pendular: Parte I.

*Registro asignado por la SIP:* 20150439  
*Director del proyecto:* Dr. Ramón Silva Ortigoza  
*Periodo:* Enero 2015 - Diciembre 2015

- 2/4.- Control de sistemas mecatrónicos: Parte I.

*Registro asignado por la SIP:* 20160622  
*Director del proyecto:* Dr. Ramón Silva Ortigoza  
*Periodo:* Enero 2016 - Diciembre 2016

- 3/4.- Construcción y control de sistemas mecatrónicos.

*Registro asignado por la SIP:* 20170862  
*Director del proyecto:* Dr. Ramón Silva Ortigoza  
*Periodo:* Enero 2017 - Diciembre 2017

- 4/4.- Control automático en sistemas electrónicos de potencia y sistemas robóticos

*Registro asignado por la SIP: 20180497*  
*Director del proyecto: Dr. Ramón Silva Ortigoza*  
*Periodo: Enero 2018 - Diciembre 2018*

## A.2. Productos de investigación tecnológica

En esta sección se desglosan los productos de investigación tecnológica conseguidos durante el desarrollo del trabajo de tesis.

### A.2.1. Patentes

- 1/3.- **M. Antonio-Cruz**, R. Silva-Ortigoza y V. M. Hernández-Guzmán, “Sistema de péndulo de Furuta con controlador lineal y proceso para la eliminación del ciclo límite”, Unidad Politécnica para el Desarrollo y la Competitividad Empresarial, Mayo 2018. En proceso.
- 2/3.- **M. Antonio-Cruz**, R. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, A. G. Rojas López y C. A. Merlo-Zapata, “Sistema péndulo invertido sobre carro con controlador de regulación basado en respuesta en frecuencia y proceso para la eliminación del ciclo límite inducido por zona muerta”, Unidad Politécnica para el Desarrollo y la Competitividad Empresarial, Mayo 2018. En proceso.
- 2/3.- **M. Antonio-Cruz**, R. Silva-Ortigoza y V. M. Hernández-Guzmán, “Sistema pendubot con controlador lineal y proceso que elimina el ciclo límite inducido por zona muerta en el actuador”, Unidad Politécnica para el Desarrollo y la Competitividad Empresarial, Mayo 2018. En proceso.

### A.2.2. Derechos de autor

- 1/4.- C. Márquez Sánchez, R. Silva Ortigoza, V. M. Hernández Guzmán, J. R. García Sánchez, **M. Antonio Cruz** y C. N. Pérez Catalán, “Planificador manual de trayectorias”, *Programas de Computación*, No. de registro: 03-2017-121811014400-01, INDAUTOR, Dic. 2017.
- 2/4.- **M. Antonio Cruz**, C. Márquez Sánchez, J. Sandoval Gutiérrez, R. Silva Ortigoza y V. M. Hernández Guzmán, “Sintonizador de ganancias de controles automáticos”, *Programas de Computación*, INDAUTOR, Mayo 2018. En proceso.
- 3/4.- C. Márquez Sánchez, R. Silva Ortigoza, V. M. Hernández Guzmán, **M. Antonio Cruz**, J. R. García Sánchez y C. N. Pérez Catalán, “ROBY-RMR 1.0”, *Programas de Computación*, INDAUTOR, Mayo 2018. En proceso.
- 4/4.- C. A. Merlo Zapata, C. F. Aguilar Ibáñez, **M. Antonio Cruz**, O. O. Gutiérrez Frías, R. A. Garrido Moctezuma, M. S. Suárez Castañón, “Plataforma experimental que elimina movimientos indeseados en multicópteros no tripulados”, *Manual de Operación*, INDAUTOR, Mayo 2018. En proceso.



## Apéndice B

# Hojas de datos de los dispositivos electromecánicos y electrónicos de los prototipos construidos

En este apéndice se incluyen las hojas de datos de los dispositivos electrónicos y electromecánicos que integran los prototipos de los sistemas subactuados pendulares construidos.

## B.1. Actuadores y sensores

Aquí se presentan las hojas de datos de los actuadores y encoders usados en los prototipos constuidos.

### B.1.1. 14204 Brush DC motor con encoder de Pittman



#### 14204S006

Lo-Cog® DC Servo Motor

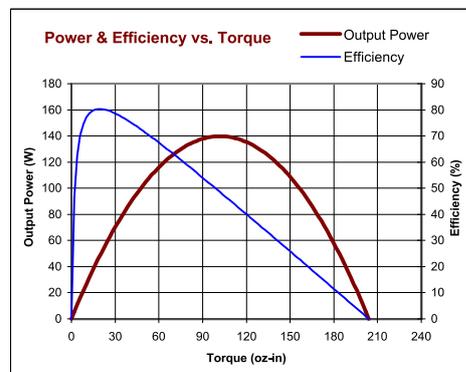
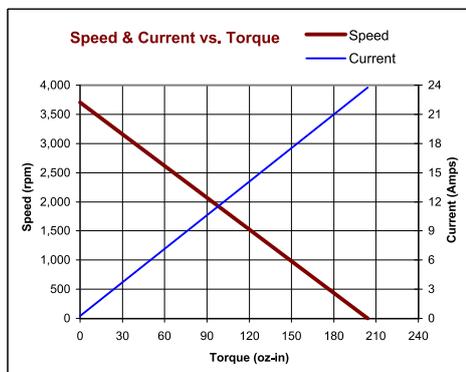


Assembly Data	Symbol	Units	Value	
Reference Voltage	E	V	24	
No-Load Speed	S <sub>NL</sub>	rpm (rad/s)	3,702	(388)
Continuous Torque (Max.) <sup>1</sup>	T <sub>C</sub>	oz-in (N-m)	26	(1.8E-01)
Peak Torque (Stall) <sup>2</sup>	T <sub>PK</sub>	oz-in (N-m)	204	(1.4E+00)
Weight	W <sub>M</sub>	oz (g)	38	(1083)
Motor Data				
Torque Constant	K <sub>T</sub>	oz-in/A (N-m/A)	8.67	(6.12E-02)
Back-EMF Constant	K <sub>E</sub>	V/krpm (V/rad/s)	6.41	(6.12E-02)
Resistance	R <sub>T</sub>	W	1.01	
Inductance	L	mH	1.6	
No-Load Current	I <sub>NL</sub>	A	0.26	
Peak Current (Stall) <sup>2</sup>	I <sub>P</sub>	A	23.8	
Motor Constant	K <sub>M</sub>	oz-in/ÖW (N-m/ÖW)	8.63	(6.09E-02)
Friction Torque	T <sub>F</sub>	oz-in (N-m)	1.6	(1.1E-02)
Rotor Inertia	J <sub>M</sub>	oz-in-s <sup>2</sup> (kg-m <sup>2</sup> )	3.7E-03	(2.6E-05)
Electrical Time Constant	t <sub>E</sub>	ms	1.58	
Mechanical Time Constant	t <sub>M</sub>	ms	7.0	
Viscous Damping	D	oz-in/krpm (N-m-s)	0.18	(1.2E-05)
Damping Constant	K <sub>D</sub>	oz-in/krpm (N-m-s)	55	(3.7E-03)
Maximum Winding Temperature	q <sub>MAX</sub>	°F (°C)	311	(155)
Thermal Impedance	R <sub>TH</sub>	°F/watt (°C/watt)	45.9	(7.70)
Thermal Time Constant	t <sub>TH</sub>	min	28.8	
Gearbox Data				
Encoder Data				
Channels			3	
Resolution		CPR	500	

- Included Features**

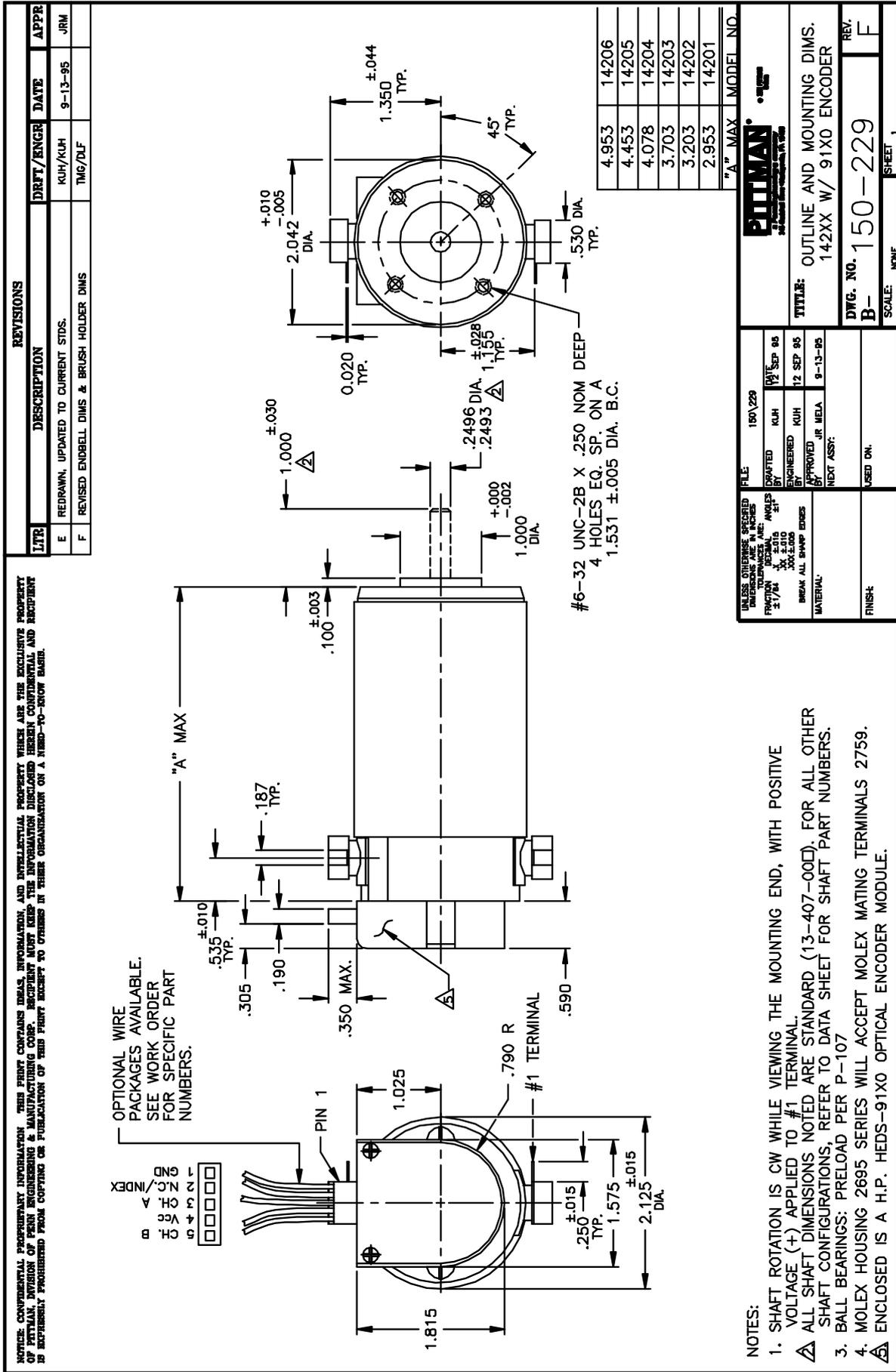
  - 2-Pole Stator
  - Ceramic Magnets
  - Heavy-Guage Steel Housing
  - 11-Slot Armature
  - Silicon Steel Laminations
  - Stainless Steel Shaft
  - Copper-Graphite Brushes
  - Diamond Turned Commutator
  - Motor Ball Bearings
- Customization Options**

  - Alternate Winding
  - Sleeve or Ball Bearings
  - Modified Output Shaft
  - Custom Cable Assembly
  - Special Brushes
  - EMI/RFI Suppression
  - Spur or Planetary Gearbox
  - Special Lubricant
  - Optional Encoder
  - Fail-Safe Brake



All values are nominal. Specifications subject to change without notice. Graphs are shown for reference only.

© 2001 Pittman.



B.1.2. 2642V0033 DC-micromotor con encoder de Faulhaber



DC-Micromotors

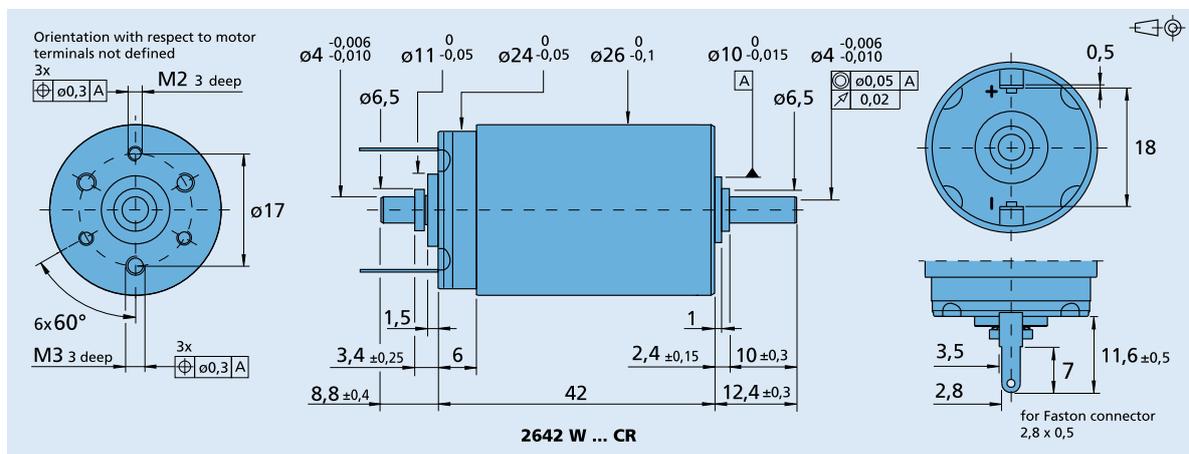
28 mNm

Graphite Commutation

For combination with  
 Gearheads:  
 26/1(S), 26A, 30/1(S), 32A  
 Encoders:  
 HEDL 5540, HEDM 5500, HEDS 5500, HEDS 5540,  
 IE2-1024, IE2-16, IE3-1024(L)

Series 2642 ... CR

	2642 W	012 CR	024 CR	048 CR	
1 Nominal voltage	$U_N$	12	24	48	V
2 Terminal resistance	R	1,45	5,78	23,8	$\Omega$
3 Output power	$P_{2\ max.}$	22,1	23,2	23	W
4 Efficiency, max.	$\zeta_{\ max.}$	78	79	79	%
5 No-load speed	$n_0$	6 400	6 400	6 400	rpm
6 No-load current (with shaft $\varnothing$ 4 mm)	$I_0$	0,118	0,058	0,029	A
7 Stall torque	$M_H$	132	139	137	mNm
8 Friction torque	$M_R$	2	2	2	mNm
9 Speed constant	$k_n$	565	276	137	rpm/V
10 Back-EMF constant	$k_E$	1,77	3,62	7,31	mV/rpm
11 Torque constant	$k_M$	16,9	34,6	69,8	mNm/A
12 Current constant	$k_I$	0,059	0,029	0,014	A/mNm
13 Slope of n-M curve	$S_n/SM$	48,5	46	46,7	rpm/mNm
14 Rotor inductance	L	130	550	2 200	$\mu$ H
15 Mechanical time constant	$\zeta_m$	5,4	5,4	5,4	ms
16 Rotor inertia	J	11	11	11	gcm <sup>2</sup>
17 Angular acceleration	$  \dots  _{\ max.}$	120	120	120	$\cdot 10^3$ rad/s <sup>2</sup>
18 Thermal resistance	$R_{th\ 1} / R_{th\ 2}$	2,1 / 11			K/W
19 Thermal time constant	$\zeta_{w1} / \zeta_{w2}$	10 / 510			s
20 Operating temperature range:					
- motor		-30 ... +125			$^{\circ}$ C
- rotor, max. permissible		+155			$^{\circ}$ C
21 Shaft bearings		ball bearings, preloaded			
22 Shaft load max.:					
- with shaft diameter		4			mm
- radial at 3 000 rpm (3 mm from bearing)		20			N
- axial at 3 000 rpm		2			N
- axial at standstill		20			N
23 Shaft play					
- radial	$\leq$	0,015			mm
- axial	$=$	0			mm
24 Housing material		steel, black coated			
25 Weight		114			g
26 Direction of rotation		clockwise, viewed from the front face			
<b>Recommended values - mathematically independent of each other</b>					
27 Speed up to	$n_{e\ max.}$	6 000	6 000	6 000	rpm
28 Torque up to	$M_{e\ max.}$	28	28	28	mNm



For notes on technical data and lifetime performance refer to "Technical Information".  
 Edition 2012 - 2013

© DR. FRITZ FAULHABER GMBH & CO. KG  
 Specifications subject to change without notice.

### B.1.3. Miniencoder ITD01A4Y1 de Baumer

#### Incremental encoders

Mini encoder with end shaft  $\varnothing 4$  mm

Resolution 30...1024 pulses

#### ITD 01 A 4 Y 1



ITD 01 A 4 Y 1 with end shaft

#### Features

- Mini encoder with end shaft  $\varnothing 4$  mm
- Resolution max. 1024 ppr
- Optical sensing
- Outer diameter  $\varnothing 24$  mm
- TTL or HTL output signals
- Cable output radial
- Clamping ring torsion-proof

#### Technical data - electrical ratings

Voltage supply	5 VDC $\pm 5\%$ 8...30 VDC
Reverse polarity protection	Yes
Consumption w/o load	m
Resolution (steps/turn)	...
Reference signal	Zero pulse, width 90°
Sensing method	Optical
Output frequency	
Output signals	A 90° B, 0
Output circuit	TTL Push-pull short-circuit proof

#### Technical data - mechanical design

Dimensions	mm
Shaft	$\varnothing 4$ mm end shaft
Motor shaft tolerance	0.1 mm axial 0.1 mm radial
Mounting variant	101
Protection	IP 54
Operating speed	r/min
Starting torque	mNm
Materials	housing: aluminium clamping ring: steel
Operating temperature	...
Relative humidity	90 % non-condensing
Resistance	vibration shock
Connection	Cable 1 m
Weight	50 g

## B.1.4. Miniencoder ITD01B14 de Baumer

### Incremental encoders

Mini encoder with shaft  $\varnothing 4$  mm

Resolution 30...1024 pulses

#### ITD 01 B14



ITD 01 B14 with synchro flange

#### Features

- Mini encoder with shaft  $\varnothing 4$  mm
- Resolution max. 1024 ppr
- Optical sensing
- Outer diameter  $\varnothing 24$  mm
- TTL or HTL output signals
- Cable output radial or axial

#### Optional

- Cable with connector

#### Technical data - electrical ratings

Voltage supply	5 VDC $\pm 5$ % 8...30 VDC
Reverse polarity protection	Yes
Consumption w/o load	$\leq 25$ mA
Resolution (steps/turn)	30...1024
Reference signal	Zero pulse, width $90^\circ$
Sensing method	Optical
Output frequency	$\leq 100$ kHz
Output signals	A $90^\circ$ B, N + inverted
Output circuit	TTL Push-pull short-circuit proof

#### Technical data - mechanical design

Housing	$\varnothing 24$ mm
Shaft	$\varnothing 4$ mm
Flange	Synchro flange
Protection DIN EN 60529	IP 54
Operating speed	$\leq 18000$ rpm
Starting torque	$\leq 0.006$ Nm
Admitted shaft load	$\leq 5$ N axial $\leq 8$ N radial
Materials	Housing: aluminium Shaft: stainless steel
Operating temperature	$-20...+85$ °C
Relative humidity	90 % non-condensing
Resistance	DIN EN 60068-2-6 Vibration 10 g, 55-2000 Hz DIN EN 60068-2-27 Shock 30 g, 11 ms
Weight approx.	50 g
Connection	Cable 1 m

## B.2. Anillo deslizante

En este apartado se presenta la hoja de datos del anillo deslizante usado únicamente en el prototipo de pendubot.



### SNH012 series(Through hole slip ring)

Through hole 12.7mm, OD: 56mm

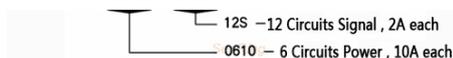
SNH012 series are standard through hole slip rings , through hole 12.7mm( suitable for <=12.7mm) , OD56mm, intergated structure with plastic & AL alloy,support signals(2A) , power 10A,circuitis no.\*10A, voltage250VAC/VDC

Contact materials:precious metal + gold plating which ensures low torque,stable rotation,long life, low electrical noise and good transmitting performance.Compared to peer products , with advantages of higher rotation accuracy , more reliable performance and longer life

Typical application:automation equipment,working turntable,camera platform,robotics

Standard Part No.Description:

**SNH012 - 0610 - 12S**



For example :

SNH012-0610-12S means : through hole slip ring , hole size 12.7mm,OD 56mm, total 18circuits , 6circuits,10A each+ 12circuits,2A each ( signal)

SNH012-0610means : through hole slip ring , hole size 12.7mm, OD 56mm, total 6circuits , 10A each

SNH012-12Smeans : through hole slip ring , hole size 12.7mm, OD 56mm, total 12circuits , 2A each ( signal)

\* Remark: 10A circuits could be connected in parallel to be used as circuits no.\*10A

\* such as two paralleling 10A circuits could be used as one 20A circuit



### Technical Data

Circuits No	2~48(Pls refer to below table)	Current	standard 5A per circuit,2A(signal)per circuit, optional 10A per circuit
Voltage	250 VDC/VAC	Max speed	1000RPM
Through hole size	12.7mm(or <=12.7mm)	OD	56mm
Housing material	AL alloy	Torque	0.1N.m;+0.03N.m/6 circuits
Working life	>80millions revolutions(depends on working speed,environment)	Contact material	Precious metal:gold-gold
Electrical Noise	<10mΩ @6VDC,50mA,5RPM	Contact Resistance	<20mΩ(AWG16#,300mm)
Dielectric Strength	800VDC@50Hz,10s	Lead wire Spec	UL Teflon@Awg22,Awg16
Insulation Resistance	1000MΩ@600VDC,10s	Lead wire length	300mm
Work Temperature	-40°C to 85°C	IP grade	IP51
Mechanical vibration	MIL-SID-810E	Work Humidity	10% to 85% RH
Material	RoHS compliant	CE certificate	YES

### Model no

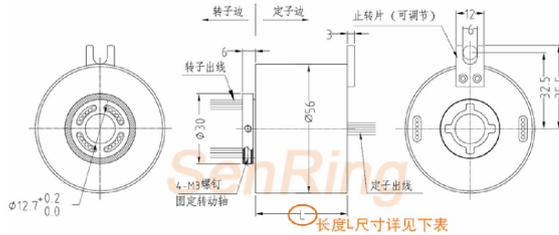
Model no	Power circuits No.(10A)	Signal circuits No.S(5A)	Total circuits No.	L--Length(mm)
Model no	2	---	2	27
SNH012-0210	---	2	2	27
SNH012-025	3	---	3	30
SNH012-0310	---	3	3	30
SNH012-035	4	---	4	32.5
SNH012-0410	---	4	4	32.5
SNH012-045	2	2	4	32.5
SNH012-0210-02S	6	---	6	38
SNH012-0610	---	6	6	38
SNH012-065	2	4	6	38
SNH012-0210-04S	8	---	8	43.5
SNH012-0810	---	8	8	43.5
SNH012-085	4	4	8	43.5
SNH012-0410-4S	10	---	10	49.5
SNH012-1010	6	4	10	49.5
SNH012-0610-4S	---	12	12	55
SNH012-1210	---	12	12	55
SNH012-12S	6	6	12	55
SNH012-0610-6S	18	---	18	71.5
SNH012-1810	---	18	18	71.5
SNH012-185	6	12	18	71.5
SNH012-0610-12S	10	8	18	71.5
SNH012-1010-08S	24	---	24	88.5
SNH012-2410	6	18	24	88.5
SNH012-0610-18S	12	12	24	88.5
SNH012-1210-12S	12	24	36	122
SNH012-1210-24S	---	36	36	122
SNH012-36S	---	48	48	156
SNH012-48S	---	---	---	---



# 深圳市森瑞普电子有限公司

Senring Electronics Co., Limited.

## Drawing



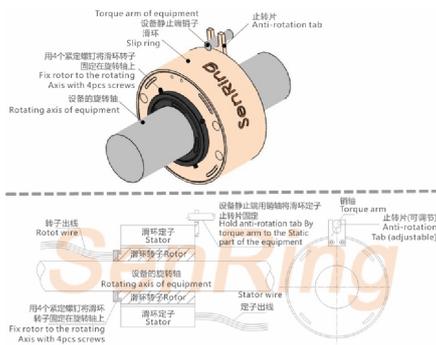
Ring no.#	Color	Ring no.#	Color	Ring no.#	Color
1	black	5	yellow	9	grey
2	brown	6	green	10	white
3	red	7	blue	11	pink
4	orange	8	purple	12	light blue

12 colors wires as a group, repeat from 13...24, each group wire marked with No. tube (1,2,3,4...)

## Options

- ▲ Mounting flange
- ▲ Direction of lead wire exits
- ▲ support 1~56 circuits
- ▲ connectors and heat shrink tube
- ▲ Lead wire length
- ▲ Shield wire
- ▲ 500 MHz transmitting speed
- ▲ Transmit combined high speed data ( Ethernet ,USB, Profibus )
- ▲ Combined with signal wires, coaxial wire and power wire
- ▲ Combined with thermocouple and signal
- ▲ Customize for high temperature, shockproof environment
- ▲ Combined with pneumatic, hydraulic
- ▲ Customize high temperature 250°C slip ring
- ▲ Customize high voltage, large current slip ring
- ▲ Military level
- ▲ IP65, IP68 Optional

## Installation



**Instructions :**  
 Since it is difficult to keep the rotor and stator concentric, suggest to fix the slip ring on the rotating shaft with four screws and insert the torque arm into the anti-rotation tab, do not force to fix anti-rotation tab which may cause damage and shorten working life

- Caution :**
- Do not let slip ring to carry loads as well as lead wires
  - Protect lead wire to avoid any damages of insulation when installation
  - As a precise component, slip ring should be operated in a dry, less dust environment. Pls take protect measurements if bad conditions

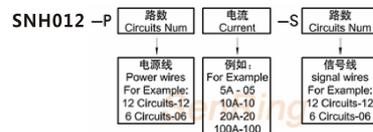
## Customization

Customize based on this model

As one of domestic forthgoers in developing and manufacturing of slip rings, Senring has rich experiences in customizing slip rings for many industries, we have more than 10000 solutions and data sheets

How to customize?

Customized model no. description:



**for example:**

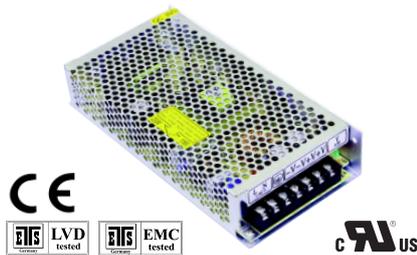
if to order SNH012, support 67circuits\*signals, model no. is SNH012-S67.  
 if to order SNH012, support 13circuits\*signals+2circuits\*10A,, model no. is SNH012-P0210-S13

## B.3. Etapa de potencia

Se introducen las hojas de datos del arrancador de servomotores, de su respectiva bornera y la fuente de alimentación.

### B.3.1. Fuente HF100W-SF-24

#### 100W Single Output Series - with approval



- AC input range selected by switch
- High reliability
- Approvals: UL, ETS/LVD/EMC/ CE
- Protections: over current/ over voltage/ short circuit
- 2 years warranty
- F610 199 x 98 x 39(mm)

AC input voltage range .....	85~132/ 170~264VAC selected by switch
Input frequency .....	47~63Hz
Inrush current .....	cold start, 20A/115V, 40A/230V
Input leakage current .....	< 0.7mA/ 230VAC
Line regulation (full load) .....	≤ ± 0.5%
Output voltage adjust range .....	± 10%
Output over current protection .....	110~130%
Output over voltage protection .....	115~150%
Withstand voltage .....	I/P -O/P: 3.0KVAC/1min I/P -F/G: 1.5KVAC/1min O/P-F/G: 0.5KVAC/1min
Rise, Hold up time .....	50ms, 20ms@full load (typical)
Operating temp. & humidity .....	-10°C~+50°C, 20%~93%RH (non condensing)
Storage temp. & humidity .....	-20°C~+85°C, 20%~95%RH (non condensing)
Safety standards .....	GB4943, UL60950, EN60950
EMC standards .....	GB9254, EN55022 classB, EN55024 EN61000-3-2,3, EN61000-4-2,3,4,5,6,8,11
Cooling method .....	convection

Model	DC Output		Load regul.	R&N	Efficiency
HF100W-SF-5	5V	20.0A	0.5%	100mV	77%
HF100W-SF-7.5	7.5V	13.5A	0.5%	100mV	78%
HF100W-SF-12	12V	8.5A	0.5%	100mV	82%
HF100W-SF-13.8	13.8V	7.5A	0.5%	100mV	82%
HF100W-SF-15	15V	6.7A	0.5%	100mV	82%
HF100W-SF-24	24V	4.5A	0.5%	100mV	83%
HF100W-SF-48	48V	2.2A	0.5%	150mV	84%

\* 3~48VDC output all available.

### B.3.2. Arrancador de servomotores AZ12A8DDC



Analog Servo Drive

AZ12A8DDC

Description	Power Range
<p>The AZ12A8DDC PWM servo drive is designed to drive brush-type DC motors at a high switching frequency. To increase system reliability and to reduce cabling costs, the drive is designed for direct integration into your PCB. The AZ12A8DDC is fully protected against over-voltage, over-current, over-heating and short-circuits. A single digital output indicates operating status. The drive interfaces with digital controllers that have digital PWM output. The PWM IN duty cycle determines the output current and DIR input determines the direction of rotation. This servo drive requires only a single unregulated isolated DC power supply, and is fully RoHS (Reduction of Hazardous Substances) compliant.</p> <p>See Part Numbering Information on last page of datasheet for additional ordering options.</p>	Peak Current
	Continuous Current
	Supply Voltage

Peak Current	12 A
Continuous Current	6 A
Supply Voltage	20 - 80 VDC



#### Features

Four Quadrant Regenerative Operation  
 Direct Board-to-Board Integration  
 Lightweight  
 High Switching Frequency  
 Wide Temperature Range  
 High Performance Thermal Dissipation

Differential Input Command  
 Digital Fault Output Monitor  
 Current Monitor Output  
 Single Supply Operation  
 Compact Size  
 High Power Density

#### HARDWARE PROTECTION

Over-Voltage  
 Over-Current  
 Over-Temperature  
 Short-circuit (phase-phase)  
 Short-circuit (phase-ground)

#### INPUTS/OUTPUTS

Digital Fault Output  
 Digital Inhibit Input  
 Analog Current Monitor  
 Analog Command Input  
 Analog Current Reference

#### MODES OF OPERATION

Current

#### MOTORS SUPPORTED

Single Phase (Brushed, Voice Coil, Inductive Load)

#### COMMAND SOURCE

PWM

#### COMPLIANCES & AGENCY APPROVALS

UL  
 cUL  
 CE Class A (LVD)  
 CE Class A (EMC)  
 RoHS



## SPECIFICATIONS

Power Specifications		
Description	Units	Value
DC Supply Voltage Range	VDC	20 - 80
DC Bus Under Voltage Limit	VDC	18
DC Bus Over Voltage Limit	VDC	88
Maximum Peak Output Current <sup>1</sup>	A	12
Maximum Continuous Output Current	A	6
Maximum Continuous Output Power	W	456
Maximum Power Dissipation at Continuous Current	W	24
Minimum Load Inductance (Line-To-Line) <sup>2</sup>	μH	100
Low Voltage Supply Outputs	-	+6 VDC (30 mA)
Switching Frequency	kHz	31
Control Specifications		
Description	Units	Value
Command Sources	-	PWM
PWM Input Frequency Range	kHz	10 - 25
Modes of Operation	-	Current
Motors Supported	-	Single Phase (Brushed, Voice Coil, Inductive Load)
Hardware Protection	-	Over Current, Over Temperature, Over Voltage, Short Circuit (Phase-Phase & Phase-Ground)
Mechanical Specifications		
Description	Units	Value
Agency Approvals	-	CE Class A (EMC), CE Class A (LVD), cUL, RoHS, UL
Size (H x W x D)	mm (in)	63.5 x 50.8 x 16.8 (2.5 x 2 x 0.7)
Weight	g (oz)	84.9 (3.0)
Heatsink (Base) Temperature Range <sup>3</sup>	°C (°F)	0 - 75 (32 - 167)
Storage Temperature Range	°C (°F)	-40 - 85 (-40 - 185)
Form Factor	-	PCB Mounted
P1 Connector	-	16-pin, 2.54 mm spaced header
P2 Connector	-	11-pin, 2.54 mm spaced header

### Notes

1. Maximum duration of peak current is ~2 seconds. Peak RMS value must not exceed continuous current rating of the drive.
2. Lower inductance is acceptable for bus voltages well below maximum. Use external inductance to meet requirements.
3. Additional cooling and/or heatsink may be required to achieve rated performance.

### B.3.3. Tarjeta de montaje MC1XAZ01



AZ Drive Family Mounting Card

**MC1XAZ01**

The MC1XAZ01 mounting card is designed to host an AZ or AZX series analog servo drive. This mounting card offers convenient quick-disconnect connectors (mating screw terminals included). Easily accessible test points are available for I/O and Feedback monitoring. The MC1XAZ01 can either be screw-mounted or attached to a standard DIN tray. The MC1XAZ01 is ideal for prototyping. The mounting card also features a keyed connector to prevent misaligned connections.

The MC1XAZ01 utilizes vertical-entry quick-disconnect screw terminals. For side-entry right angle connections use the MC1XAZ01-HR mounting card.

AZ (Standard Environment)		AZX (Extended Environment)
80 V Models	175 V Models	80 V Models
20A	25A	25A
12A	10A	15A
6A		8A

\*For 40A (80V) AZ series, use MC1XAZ01-HR



#### Features

- Mounts AZ & AZX Series Analog Servo Drives
- All Detachable Connections
- Lightweight
- Small Footprint

- Mating Connectors Included
- I/O, Feedback, and Ground Test Points
- Standard DIN Tray Dimensions
- Keyed Connector

#### DRIVES SUPPORTED

- AZ25A20     ▪  AZ25A20DDC
- AZBE25A20     ▪  AZBH25A20
- AZB25A20     ▪  AZBDC25A20
- AZ10A20     ▪  AZ10A20DDC
- AZB10A20     ▪  AZBDC10A20
- AZBE10A20     ▪  AZBH10A20
- AZ20A8     ▪  AZ20A8DDC
- AZB20A8     ▪  AZBDC20A8
- AZBE20A8     ▪  AZBH20A8
- AZ12A8     ▪  AZ12A8DDC
- AZB12A8     ▪  AZBDC12A8
- AZBE12A8     ▪  AZBH12A8
- AZ6A8     ▪  AZ6A8DDC
- AZB6A8     ▪  AZBDC6A8
- AZBE6A8     ▪  AZBH6A8
- AZXB25A8     ▪  AZXBDC25A8
- AZXB25A8     ▪  AZXBH25A8
- AZXB15A8     ▪  AZXBDC15A8
- AZXB15A8     ▪  AZXBH15A8
- AZXB8A8     ▪  AZXBDC8A8
- AZXB8A8     ▪  AZXBH8A8

#### TEST POINTS

- Inputs/Outputs
- Feedback
- Ground

#### FEEDBACK SUPPORTED

- Incremental Encoder
- Hall Sensors

#### COMPLIANCES & AGENCY APPROVALS

- CE Class A (EMC)
- CE Class A (LVD)
- RoHS
- UL & cUL (optional)



**PIN FUNCTIONS**

This connector mates directly to the drive. For pin functions refer to the drive datasheet.

This connector mates directly to the drive. For pin functions refer to the drive datasheet.

This connector mates directly to the drive. For pin functions refer to the drive datasheet.

1	+REF IN / PWM IN	Analog Input Drives: Differential Reference Input PWM Input drives: Pulse width modulated digital input command	I
2	SIGNAL GND	Signal Ground	GND
3	-REF IN / PWM IN	Analog Input Drives: Differential Reference Input PWM Input drives: Direction Input	I
4	CURRENT MONITOR	Current Monitor. Analog output signal proportional to the actual current output. Measure relative to signal ground. See drive datasheet for scaling factor.	O
5	INHIBIT IN	TTL level (+5 V) inhibit/enable input. Leave open to enable drive. Pull to ground to inhibit drive. Inhibit turns off all power devices.	I
6	CURRENT REF OUT	Measures the command current to the internal current-loop. Measure relative to signal ground. See drive datasheet for maximum output voltage.	O
7	FAULT OUT	TTL level (+5 V) output becomes high when power devices are disabled due to at least one of the following conditions: inhibit, invalid Hall state, output short circuit, over voltage, over temperature, power-up reset.	O
8	VELOCITY MONITOR	Velocity Monitor. Analog output proportional to motor speed. See drive datasheet for scaling factor.	O

\*Not all functions are used on every drive model. Consult the drive datasheet to see which features are included.

1	MOT ENC A	Single-ended Encoder Input A	I
2	MOT ENC B	Single-ended Encoder Input B	I
3	OFFSET	Connection to external resistance for command offset adjustments.	I
4	HALL 1	Single-ended Hall/Commutation Sensor Inputs (+5 V logic level)	I
5	HALL 2		I
6	HALL 3		I
7	SIGNAL GND	Signal Ground	GND
8	+V HALL OUT	Low Power Supply for Hall Sensors (+6 V @ 30 mA). Referenced to signal ground. Short circuit protected.	O

\*Not all functions are used on every drive model. Consult the drive datasheet to see which features are included.

1	MOTOR A	Motor Phase A.	O
2	MOTOR B	Motor Phase B.	O
3	MOTOR C	Motor Phase C.	O
4	CHASSIS	Chassis (PE Ground)	PE

1	POWER GND	Power Ground (Common with Signal Ground).	GND
2	HIGH VOLTAGE	DC Power Input.	I
3	CHASSIS	Chassis (PE Ground)	PE

## B.4. Tarjeta DS1104

Se presentan las hojas técnicas de la tarjeta DS1104, asociadas a los puertos de tal tarjeta utilizados para la implementación de controladores.

### Technical data

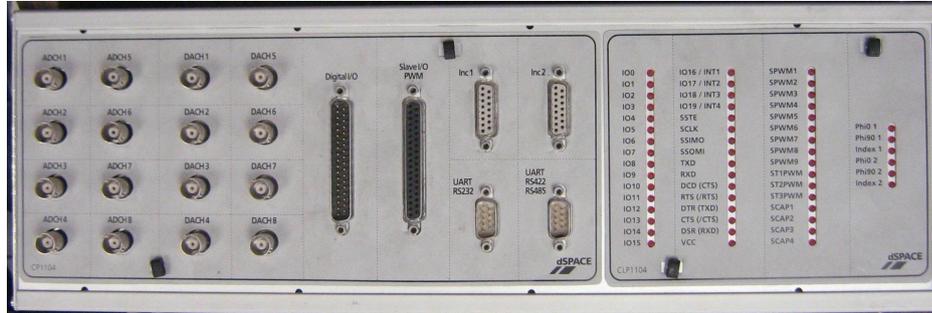
The following table shows the data sheet of the DS1104 R&D Controller Board.

Parameter	Characteristics
Processor	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ MPC8240 processor with PPC603e core and on-chip peripherals</li> <li>○ 64-bit floating-point processor</li> <li>○ 250 MHz CPU</li> <li>○ 2 x 16 KB cache; on-chip</li> <li>○ On-chip PCI bridge (33 MHz)</li> </ul>
Memory	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Global memory: 32 MB SDRAM</li> <li>○ Flash memory: 8 MB</li> </ul>
Timer	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 1 sample rate timer (decrementer): 32-bit down counter, reload by software, 40 ns resolution</li> <li>○ 4 general purpose timer: 32-bit down counter, reload by hardware, 80 ns resolution</li> <li>○ 1 time base counter: 64-bit up counter, 40 ns resolution, range 23400 years</li> </ul>
Interrupt controller	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 5 timer interrupts</li> <li>○ 2 incremental encoder index line interrupts</li> <li>○ 1 UART interrupt</li> <li>○ 1 slave DSP interrupt</li> <li>○ 1 slave DSP PWM interrupt</li> <li>○ 5 ADC end of conversion interrupts</li> <li>○ 1 host interrupt</li> <li>○ 4 user interrupts from the I/O connector</li> </ul>
ADC 1 x 16-bit ADC with mux	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 4 muxed channels equipped with one 16-bit sample &amp; hold ADC Note: 5 ADC channels (1 x 16-bit + 4 x 12-bit) can be sampled simultaneous</li> <li>○ 16-bit resolution</li> <li>○ <math>\pm 10</math> V input voltage range</li> <li>○ 2 <math>\mu</math>s conversion time</li> <li>○ <math>\pm 5</math> mV offset error</li> <li>○ <math>\pm 0.25</math> % gain error</li> <li>○ 4 ppm/K offset drift</li> <li>○ 25 ppm/K gain drift</li> <li>○ <math>&gt;80</math> dB signal-to-noise ratio (SNR)</li> </ul>

Parameter	Characteristics
ADC 4 x 12-bit ADC	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 4 channels each equipped with one 12-bit sample &amp; hold ADC</li> <li>Note: 5 ADC channels (1 x 16-bit + 4 x 12-bit) can be sampled simultaneous</li> <li>○ 12-bit resolution</li> <li>○ <math>\pm 10</math> V input voltage range</li> <li>○ 800 ns conversion time</li> <li>○ <math>\pm 5</math> mV offset error</li> <li>○ <math>\pm 0.5</math> % gain error</li> <li>○ 4 ppm/K offset drift</li> <li>○ 25 ppm/K gain drift</li> <li>○ <math>&gt;65</math> dB signal-to-noise ratio (SNR)</li> </ul>
DACs 8 x 16-bit DAC	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 16-bit resolution</li> <li>○ <math>\pm 10</math> V output voltage range</li> <li>○ <math>\pm 5</math> mA maximum output current</li> <li>○ Max. 10 <math>\mu</math>s settling time (full scale, accuracy 1/2 LSB)</li> <li>○ <math>\pm 1</math> mV offset error</li> <li>○ <math>\pm 0.1</math> % gain error</li> <li>○ 13 ppm/K offset drift</li> <li>○ 25 ppm/K gain drift</li> <li>○ <math>&gt;80</math> dB signal-to-noise ratio (SNR)</li> </ul>
Digital I/O	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 20-bit parallel I/O</li> <li>○ Single bit selectable for input or output</li> <li>○ <math>\pm 5</math> mA maximum output current</li> <li>○ TTL output/input levels</li> </ul>
Digital Incremental Encoder Interface (2 x 24 bit)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 2 channels</li> <li>○ Selectable single-ended (TTL) or differential (RS422) input</li> <li>○ Fourfold line subdivision</li> <li>○ Max. 1.65 MHz input frequency, i.e. fourfold pulse counts up to 6.6 MHz</li> <li>○ 24-bit loadable position counter</li> <li>○ Reset on index</li> <li>○ 5 V/0.5 A sensor supply voltage</li> </ul>
Serial interface	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 1 serial UART (universal asynchronous receiver and transmitter)</li> <li>○ Selectable transceiver mode: RS232/RS422/RS485</li> <li>○ Max. baudrate RS232: 115.2 kBaud</li> <li>○ Max. baudrate RS422/RS485: 1 MBaud</li> </ul>

Parameter	Characteristics
Slave DSP subsystem	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ Texas Instruments TMS320F240 DSP</li> <li>◦ 16-bit fixed-point processor</li> <li>◦ 20 MHz clock frequency</li> <li>◦ 64 K x 16 external program memory</li> <li>◦ 28 K x 16 external data memory</li> <li>◦ 4 K x 16 dual-port memory for communication</li> <li>◦ 16 K x 16 flash memory</li> <li>◦ 1 x 3-phase PWM output</li> <li>◦ 4 x 1-phase PWM output</li> <li>◦ 4 capture inputs</li> <li>◦ SPI (serial peripheral interface)</li> <li>◦ Max. 14-bit digital I/O</li> <li>◦ TTL output/input levels for all digital I/O pins</li> <li>◦ <math>\pm 13</math> mA maximum output current</li> </ul>
Host interface	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ 32-bit PCI host interface</li> <li>◦ 5 V PCIslot</li> <li>◦ 33 MHz <math>\pm 5</math> %</li> </ul>
Physical size	PCI185 x 106.68 mm(7.28 x 4.2 in)
Ambient temperature	0 ... 55 °C (32 ... 131 °F)
Cooling	Active cooling by fan
Power supply	<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ +5 V <math>\pm 5</math> %, 2.5 A</li> <li>◦ +12 V <math>\pm 5</math> %, 0.3 A</li> <li>◦ -12 V <math>\pm 5</math> %, 0.2 A</li> </ul>
Power consumption	18.5 W

## B.5. CLP1104



### CLP1104 Data Sheet

**Technical data**

The following table shows the data sheet of the CLP1104 Connector/LED Combi Panel.

Parameter	Characteristics
Power consumption	5 V; max. 100 mA (via DS1104 board)
Grounding	The enclosure and the front panel are not grounded.
Cable length	2 m (6.6 ft) standard
Physical size (with desktop enclosure) (length x depth x height)	433.5 x 142.5 x 70 mm (17.07 x 5.61 x 2.75 in)
Space needed for 19" rack mount	Height 3 U; width 16.8"
Weight	Approx. 2.5 kg (5.5 lbs); incl. enclosure and shielded ribbon cables

