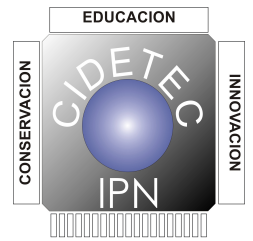




**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO EN CÓMPUTO**

---



**DESARROLLO DE UN ALGORITMO MEMÉTICO APLICADO  
A DISEÑO DE UNA PRÓTESIS DE RODILLA**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA DE SISTEMAS  
ROBÓTICOS Y MECATRÓNICOS

**PRESENTA:**

M. EN C. JOSÉ MARCO ANTONIO RUEDA MELÉNDEZ

**DIRECTORES DE TESIS:**

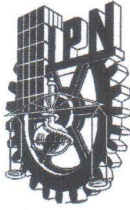
DR. EDGAR ALFREDO PORTILLA FLORES

DR. EDUARDO VEGA ALVARADO

Ciudad de México

Noviembre 2017





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 24 del mes de noviembre del 2017 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CIDETEC para examinar la tesis titulada:

Desarrollo de un algoritmo memético aplicado a diseño de una prótesis de rodilla

Presentada por el alumno:

Rueda  
Apellido paterno

Meléndez  
Apellido materno

José Marco Antonio  
Nombre(s)

Con registro: 

B	1	4	1	2	7	8
---	---	---	---	---	---	---

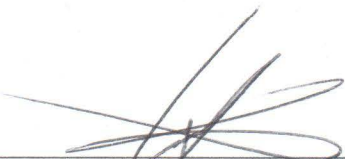
aspirante de:


Doctorado en Ingeniería de Sistemas Robóticos y Mecatrónicos.

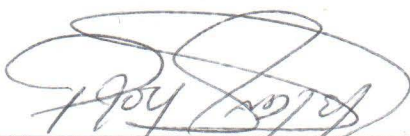
Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.


### LA COMISIÓN REVISORA


Directores de tesis

  
Dr. Edgar Alfredo Portilla Flores  
Primer Vocal

  
Dr. Eduardo Vega Alvarado  
Segundo vocal

  
Dra. Paola Andrea Niño Suárez  
Presidente

  
Dr. Juan Carlos Herrera Lozada  
Secretario

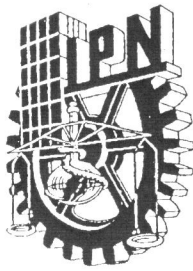
  
Dr. Gabriel Sepúlveda Cervantes  
Tercer Vocal

PRESIDENTE DE COLEGIO  
DE PROFESORES

  
Dr. Oscar Camacho Nieto



S.E.P.  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO EN COMPUTO

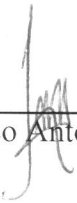


**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México el día 29 del mes de noviembre del año 2017, el que suscribe José Marco Antonio Rueda Meléndez alumno del Programa de Doctorado en Ingeniería de Sistemas Robóticos y Mecatrónicos con número de registro B141278, adscrito al Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Edgar Alfredo Portilla Flores y del Dr. Eduardo Vega Alvarado y cede los derechos del trabajo intitulado: Desarrollo de un algoritmo memético aplicado a diseño de una prótesis de rodilla, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [jrueda@ipn.mx](mailto:jrueda@ipn.mx). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

  
\_\_\_\_\_  
José Marco Antonio Rueda Meléndez

# Agradecimientos

Agradezco a Dios y a la vida por ser lo que soy, por estar donde estoy, por tener lo que tengo, y por la apertura de conciencia y consciencia que me ha conducido a la búsqueda de nuevos caminos.

A mi querida madre y a la memoria de mi padre que me dieron la vida, me inculcaron valores y me otorgaron su amor y ayuda cuando más lo necesité, y a mis hermanos Jorge, César y Edgar por lo que son y por lo que aún pueden lograr. A mi tía Pola por creer en mí.

A Mónica Rivera de la Rosa, mi esposa, quien me ha animado, apoyado y ayudado en todos mis proyectos académicos y personales, y que siempre ha estado a mi lado, tanto en las buenas como en las malas.

Mi total e infinito agradecimiento a mi Director de tesis, el Dr. Edgar Alfredo Portilla Flores, quien me enseñó todo en ésta área del conocimiento y dedicó su valioso tiempo para guiarme en los momentos difíciles. Además por la confianza, interés y seguridad por lo que estaba realizando, y su optimismo de que se llegaría a buen término. Gracias por toda su ayuda.

Agradezco también de forma especial a mi Co-director, el Dr. Eduardo Vega Alvarado, por su amistad, confianza, paciencia y por compartir su conocimiento. Nunca escatimó tiempo para revisar reiteradamente mi trabajo. También mi infinito agradecimiento.

A mis profesores del CIDETEC sin excepción alguna, quienes siempre aportaron sus conocimientos a mi formación, y al personal administrativo que me brindó su apoyo durante mi estancia.

A María Luisa por tu amistad, tu apoyo moral y sobre todo porque en el camino andamos y se hace camino al andar.

A Lilian con cariño y admiración, porque a veces siento como si se regresara la película y yo no soy el actor.

A todos mis compañeros del CIDETEC, que desde su área de interés académico, luchan día a día por ser mejores.

Al Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo del IPN (CIDETEC-IPN), por permitirme formar parte de sus egresados.

Mi infinita gratitud al Instituto Politécnico Nacional por haberme formado académicamente y profesionalmente, y por tener el privilegio de ser parte de ésta gran familia politécnica.

# Resumen

En esta tesis se presenta el desarrollo de un algoritmo memético (MemDEFP), aplicado a un problema de diseño del mundo real. Recientemente ha habido un gran desarrollo en el área de las metaheurísticas debido a su capacidad para resolver problemas complejos de optimización. Los algoritmos meméticos son metaheurísticas híbridas que contemplan la integración sinérgica de un buscador global y uno o más buscadores locales. Así, se tiene una línea de investigación con aplicaciones en disciplinas del conocimiento tan diversas como la mecatrónica, el descubrimiento de conocimiento (*machine learning*), la planificación, la bioinformática y la economía, entre otros.

El algoritmo memético aquí diseñado consta de un programa maestro basado en una metaheurística de población, combinada con un buscador local estocástico que explota el conocimiento disponible acerca del problema. La tarea del buscador global es explorar e identificar las regiones más promisorias dentro del espacio de búsqueda limitado por las restricciones de diseño, mientras que el buscador local realiza una explotación mejorada, es decir, profundiza el escrutinio en la vecindad de alguna solución candidata. La sinergia entre los buscadores global y local es fundamental para el desempeño del algoritmo memético, y cada uno de los buscadores cuenta con parámetros que deben ser sintonizados de acuerdo al problema.

Para probar el algoritmo MemDEFP se usó como caso de estudio el diseño de una prótesis de rodilla, cuyo objetivo es servir como solución a un problema de salud pública actual en México: la rehabilitación de pacientes después de serles amputado un miembro inferior. La solución propuesta utiliza un mecanismo de seis barras. La configuración es policéntrica, ya que cambia la localización del centro instantáneo de rotación a fin de mejorar la estabilidad y facilitar la flexión de la rodilla, proporcionando una marcha semejante a la natural. La síntesis del mecanismo es un problema complejo debido a la cantidad de variables de diseño y restricciones involucradas. Los resultados obtenidos muestran que el algoritmo MemEDFP mejora el desempeño del algoritmo base, Evolución Diferencial (DE), tanto en la precisión del valor en la función objetivo como en el número de evaluaciones requerido para su cálculo.





# Abstract

A memetic algorithm (MemDEFP) is developed in this thesis, for its application to a real-world design problem. Nowadays there is a great development in the metaheuristics area, motivated for the capability of these techniques for solving complex optimization problems. Memetic algorithms are hybrid metaheuristics which synergically integrate a global search algorithm and one or more local search methods. This leads to a new line of research, with applications in knowledge disciplines as diverse as mechatronics, knowledge discovery (*machine learning*), scheduling, bioinformatics and economics, among others.

The developed memetic algorithm consists of a master program based on a population metaheuristic, combined with a local stochastic search algorithm that exploits the available knowledge about the problem. The main activity of the global search algorithm is to explore and identify the most promising regions, within the search space limited by the design constraints. The local search algorithm executes an exhaustive explore, that is, a deeper search into the neighborhood of some candidate solution. The synergy between global and local search algorithms is fundamental for the performance of memetic algorithms, and depends strongly of the adequate tuning of the parameters of both algorithms.

A case study for the design of a knee prosthesis was chosen in order to verify the performance of the MemDEFP algorithm. The main objective of this prosthesis is to get a solution for a current public health problem in Mexico: the rehabilitation of patients with amputation of lower limbs. The proposed solution uses a six-bar mechanism with a polycentric configuration, changing the location of the instantaneous center of rotation in order to improve the stability and flexion movement in the knee, providing a natural walking. The synthesis of mechanisms is a complex problem due to the number of design variables and constraints involved. The results obtained show that the MemEDFP algorithm improves the performance of its base algorithm, Differential Evolution (DE), both in the accuracy of the objective function value and in the number of evaluations required for its calculation.



# Índice general

Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
Índice de algoritmos	XV
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. El enfoque heurístico . . . . .	2
1.3. Algoritmos meméticos . . . . .	3
1.4. Diseño de prótesis de rodilla . . . . .	4
1.5. Justificación . . . . .	5
1.6. Objetivo general . . . . .	6
1.7. Objetivos particulares . . . . .	6
1.8. Alcances y limitaciones . . . . .	6
1.8.1. Alcances . . . . .	6
1.8.2. Limitaciones . . . . .	6
1.9. Organización de la tesis . . . . .	7
<b>2. Marco teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Optimización . . . . .	9
2.1.1. Conceptos generales . . . . .	10
2.2. Definición matemática de optimización . . . . .	11
2.3. Técnicas de optimización . . . . .	11

2.3.1.	Algoritmos evolutivos . . . . .	13
2.3.2.	Algoritmos de inteligencia colectiva . . . . .	14
2.4.	Algoritmos meméticos . . . . .	14
2.4.1.	Algoritmo de búsqueda global: Evolución Diferencial (DE) . . . . .	15
2.4.2.	Algoritmo de búsqueda local: Polinización de Flores . . . . .	17
2.5.	Algoritmo memético . . . . .	19
2.5.1.	Historia de los algoritmos meméticos . . . . .	20
2.5.2.	Algoritmos meméticos conceptualizados como metaheurísticas híbridas . . . . .	21
2.5.3.	Componentes básicos de los algoritmos meméticos . . . . .	21
<b>3.</b>	<b>Prótesis de rodilla policéntrica</b>	<b>25</b>
3.1.	Anatomía de las extremidades inferiores . . . . .	25
3.2.	Articulación de la rodilla . . . . .	27
3.2.1.	Biomecánica de la rodilla . . . . .	28
3.2.2.	Marcha humana . . . . .	28
3.2.3.	Fases de la marcha humana . . . . .	29
3.3.	Prótesis de rodillas . . . . .	30
3.4.	Estado del arte en prótesis de rodilla . . . . .	32
3.5.	Diseño dimensional de la prótesis de rodilla policéntrica . . . . .	33
3.5.1.	Análisis cinemático del mecanismo de seis barras . . . . .	34
<b>4.</b>	<b>Desarrollo del algoritmo MemDEFP y su aplicación al caso de estudio</b>	<b>55</b>
4.1.	Diseño del algoritmo memético MemDEFP . . . . .	55
4.1.1.	Componente de búsqueda global . . . . .	56
4.1.2.	Componente de búsqueda local . . . . .	57
4.1.3.	Estrategia de selección de individuos de la población global para ingresar en el buscador local . . . . .	58
4.1.4.	Estrategia de integración de individuos de la población local con la población global	59
4.1.5.	Implementación del algoritmo memético MemDEFP . . . . .	61
4.2.	Aplicación del algoritmo MemDEFP al caso de estudio . . . . .	61
4.2.1.	Problema de optimización . . . . .	61

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XI
<b>5. Experimentos y resultados</b>	<b>65</b>
5.1. Implementación computacional . . . . .	65
5.1.1. Simulaciones con el algoritmo de evolución diferencial . . . . .	65
5.1.2. Simulaciones con el algoritmo MemDEFP . . . . .	66
<b>6. Conclusiones</b>	<b>71</b>
6.1. Trabajos futuros . . . . .	72
<b>A. Glosario de Optimización</b>	<b>75</b>
<b>B. Glosario de mecanismos</b>	<b>83</b>
<b>C. Glosario de términos médicos</b>	<b>89</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>



# Índice de Figuras

1.1. Anatomía de la rodilla humana . . . . .	5
2.1. Diagrama de flujo del algoritmo de Evolución Diferencial . . . . .	15
3.1. Anatomía del cuerpo humano por regiones . . . . .	26
3.2. Vista frontal de la articulación de la rodilla . . . . .	27
3.3. Vista frontal de la articulación de la rodilla sin la rótula . . . . .	28
3.4. Ciclo de la marcha humana . . . . .	29
3.5. Ciclo de la marcha humana (CM) . . . . .	30
3.6. Amputación transfemoral . . . . .	31
3.7. Rodilla simple . . . . .	31
3.8. Rodilla policéntrica . . . . .	32
3.9. Mecanismo de seis barras de tipo Watt I . . . . .	34
3.10. Mallas cerradas del mecanismo de seis barras tipo Watt 1 . . . . .	35
4.1. Diagrama de flujo del algoritmo memético MemDEFP . . . . .	56
4.2. Puntos de precisión obtenidos del análisis biomecánico de una rodilla de acuerdo a la antropometría mexicana . . . . .	62
C.1. Ejes del cuerpo humano . . . . .	91
C.2. Planos del cuerpo humano . . . . .	92





# Índice de Tablas

3.1. Algunas prótesis de marcas comerciales . . . . .	33
5.1. Comparación de las mejores resultados por mejor función objetivo, de los algoritmos DE y MemDEPF . . . . .	67
5.2. Comparación de estadísticas paramétricas de los algoritmos DE y memDEFP . . . . .	68
5.3. Comparación de los mejores vectores solución encontrados con los algoritmos DE y Mem-DEPF . . . . .	69



# Índice de Algoritmos

2.1. Algoritmo: Evolución Diferencial . . . . .	17
2.2. Algoritmo: polinización de flores . . . . .	19
2.3. Algoritmo Memético Principal . . . . .	22
2.4. Procedimiento Inicializar . . . . .	23
2.5. Procedimiento Cooperar . . . . .	23
2.6. Procedimiento Reiniciar . . . . .	24
4.1. Algoritmo: polinización de flores . . . . .	59
4.2. Algoritmo memético implementado . . . . .	64



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

En la ingeniería frecuentemente se tiene la necesidad de diseñar mecanismos, dispositivos y productos que realicen tareas específicas de manera eficiente. Dichos diseños generalmente están restringidos en recursos tales como el tiempo o los materiales, incluyendo también limitaciones por aspectos tales como la eficiencia o por las condiciones propias del sistema. De esta forma, la optimización adquiere un papel muy importante ya que consiste en la búsqueda de la mejor solución a un problema específico dado un conjunto específico de condiciones. Para llevar a cabo dicho proceso de manera sistemática y formal se debe contar con una medida cuantitativa que indique el desempeño. Por ello es muy importante seleccionar cuidadosamente las variables que intervienen, las cuales se denominan variables de diseño, debido a que sus valores alteran de manera significativa la medida de desempeño reflejada en la solución del problema, que se encuentra representada analíticamente como una función llamada función objetivo, función de mérito o función de costo.

Para poder aplicar la optimización el diseñador debe conocer los diferentes métodos disponibles y sus respectivas limitaciones. En la actualidad existe una amplia gama de opciones que se han implementado para resolver diversos tipos de problemas; muchos de ellos están orientados a problemas ideales sin restricciones, pero en las aplicaciones del mundo real existen limitaciones que imposibilitan su aplicación. Una gran dificultad en los problemas reales radica en que la función objetivo no tiene primera o segunda derivada, las cuales son necesarias en muchos métodos analíticos de optimización. Otro problema común es que la función objetivo no sea continua en el espacio entero de decisión, lo cual es una condición

imprescindible para dichos métodos analíticos. Otro impedimento adicional surge cuando no se puede alcanzar la función objetivo [1, 2] porque el método de solución requiere de una gran cantidad de recursos computacionales (de tiempo de ejecución o de espacio de almacenamiento).

Desde una perspectiva computacional [3, 4, 5, 6, 7] se puede medir la cantidad de tiempo de ejecución que requiere un algoritmo para completar su objetivo, en este caso encontrar el óptimo para un cierto problema de optimización. Analizando el crecimiento del consumo de recursos en términos del tamaño de la instancia del problema, es posible definir la clase de complejidad de dichos problemas. Los métodos tradicionales pueden abordar solamente los casos con soluciones en tiempos polinomiales, es decir, que pertenezcan a la clase  $TIME(n^K)$  conocidos también como problemas tratables. Por su parte, los problemas de ingeniería ya mencionados tienen como características comunes ser no lineales, altamente restringidos por las condiciones de diseño y generalmente se encuentran en instancias complejas del mundo real, en donde no se sabe de antemano a que resultado se llegará.

## 1.2. El enfoque heurístico

Los problemas de optimización pueden resolverse usando dos enfoques diferentes; el primero se basa en técnicas determinísticas o exactas tales como la programación matemática, que ha probado su utilidad tanto en optimización combinatoria como numérica. Sin embargo, estos métodos presentan una serie de debilidades entre las que destacan su dependencia al punto inicial de la búsqueda y su alta sensibilidad a la dimensionalidad del problema. El segundo enfoque es a través del uso de heurísticas. Etimológicamente *heurística* significa encontrar o descubrir por ensayo y error; el término aparece por primera vez en el artículo científico sobre el efecto fotoeléctrico [8] publicado por Albert Einstein en 1905 y por el cual obtuvo el premio Nobel. Posteriormente, en 1942, Alan Turing [9] hace referencia a los algoritmos heurísticos durante la segunda guerra mundial al descifrar los códigos de la máquina alemana Enigma. Turing nombró a su algoritmo *heuristic search*, y aunque no tenía la certeza de encontrar una solución correcta sabía que sólo empleando algoritmos heurísticos podría acelerar las búsquedas y así evitar la comprobación exhaustiva de todas las configuraciones posibles. En 1948, Turing [9] propone un nuevo concepto, la búsqueda genética o evolutiva, como un nuevo paradigma aplicando los principios de la evolución a través de la selección natural de Darwin para automatizar la solución de problemas.

En 1957, George Polya [10] las aplicó al estudio de métodos para desarrollar técnicas de solución de problemas, teniendo como características que no se puede afirmar con seguridad cuántos pasos habrá que realizar en la búsqueda ni garantizar la calidad de la solución obtenida, pero con la consideración de

reglas prácticas de acuerdo al tipo de problema se pueden generar soluciones útiles. En 1962, Bremermann [11] realizó experimentos de optimización a través de evolución y recombinación. En los 70's, Holland [12] presentó los algoritmos genéticos y Schwefel [13] inventó las estrategias evolutivas.

Actualmente, el término heurística se usa para referirse a cualquier técnica o método que deliberadamente ignoran cierta información para agilizar los cálculos en cierta dirección, que cuentan en la mayoría de los casos con componentes estocásticos que permite mejorar el desempeño del caso promedio en una tarea de resolución de problemas mediante métodos inspirados en fenómenos de la naturaleza, de donde se abstraen características y comportamientos que se usan para poder resolver problemas complejos en un tiempo razonable [9]. En los últimos años los científicos han desarrollado las llamadas metaheurísticas [14, 15, 16, 17], cuyo significado literal es “buscar más allá”, y son algoritmos de propósito general en donde la búsqueda puede hacerse en un nivel de abstracción más alto. El gran desarrollo de las metaheurísticas ha sido motivado por la necesidad de resolver los problemas de optimización cada vez más complejos que se encuentran en la actualidad [18], [19], [20], [21], [22]. Las metaheurísticas son en esencia procedimientos iterativos estocásticos, y se refieren a una estrategia maestra, generalmente una heurística, que guía y modifica a otras heurísticas para producir soluciones más allá de aquellas de las que normalmente se generan en una búsqueda de óptimos locales, es decir, combinan varias estrategias para solucionar un problema. Sin embargo, no existe un completo acuerdo entre los expertos sobre las definiciones de heurística y metaheurística, de tal forma que hasta la fecha se publican textos especializados en donde un mismo algoritmo está clasificado con ambos términos.

Dentro de los algoritmos evolutivos existen diversas variantes, pero todas tienen las siguientes características: se crea un conjunto de soluciones iniciales aleatorias que representa una población de individuos dentro de un ambiente con recursos limitados, y dichos individuos compiten por los recursos. Ello produce un proceso de selección natural (la supervivencia del más apto) generando un incremento de la adaptabilidad de la población. Existe una función de calidad para ser optimizada (maximizada o minimizada) que representa la medida de adaptabilidad de los individuos; así, los mejores individuos sobreviven, es decir, son escogidos para reproducir la nueva generación. Esto se realiza aplicando operaciones tales como la recombinación y la mutación.

### 1.3. Algoritmos meméticos

Con la intención de mejorar el desempeño de las metaheurísticas se han desarrollado combinaciones de estas con otras técnicas de optimización, en los denominados algoritmos híbridos. Dentro de esta

clasificación se encuentran los algoritmos meméticos, que fueron introducidos por Moscato en 1989 [23, 24] y que son el tema medular de la presente tesis.

Los algoritmos meméticos [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] son metaheurísticas híbridas basadas en población y complementadas con un conjunto de algoritmos de búsqueda local, trabajando de forma conjunta y sinérgica. El concepto de *meme* [32] se entiende como la unidad de transmisión cultural, en donde las ideas complejas se pueden descomponer en memes, los cuales se propagan y mutan dentro de una población, es decir, evolucionan y mejoran progresivamente. Así, las ideas fuertes tienden a resistir a través del tiempo propagándose, mientras las ideas débiles no son seleccionadas y tienden a desaparecer. En la metáfora, las ideas son los operadores de búsqueda, el más apto tiende a ser empleado mientras los menos aptos tienden a desaparecer.

Los algoritmos meméticos se plantearon como un nuevo paradigma en la optimización, el cual al inicio fue rechazado por los investigadores, hasta que en 1997 se demostró que el rendimiento promedio de cualquier par de algoritmos es muy similar al aplicarlos para solucionar un gran conjunto de problemas diversos, lo cual quedó establecido en el teorema conocido como *No Free Lunch Theorem* [33]. En [2, 26, 31, 34, 35, 36] se presentan algunos trabajos pioneros en optimización usando algoritmos meméticos.

## 1.4. Diseño de prótesis de rodilla

Una prótesis es un dispositivo cuya función es sustituir un miembro amputado y realizar, en la medida de lo posible, sus funciones. La prótesis para un amputado transfemoral sustituye la función compleja de la rodilla humana, proporcionando movilidad, estabilidad y una marcha semejante a la de un miembro natural.

En el presente trabajo se usa como caso de estudio el diseño de una prótesis de rodilla, por el interés de solucionar un problema de salud pública actual en México, aportando un beneficio social a la población. Según estadísticas [37], existe la necesidad de suministrar a un sector específico de la población mecanismos mecatrónicos que sustituyan sus miembros inferiores amputados debido a diferentes causas, tales como accidentes o a enfermedades degenerativas como la diabetes. La amputación más frecuente reportada en estadísticas es a nivel femoral [38], lo que conlleva a la demanda de mecanismos de prótesis de rodilla.

La eficiencia de una prótesis se refleja en su diseño dimensional. En el caso de la rodilla se requiere que ésta, al ser colocada en una persona amputada, asemeje la funcionalidad natural del cuerpo humano. El sistema de la rodilla humana tal como se observa en la Figura 1.1 es un componente complejo, debido



a que es la articulación más grande del cuerpo y cuyo sistema ósteo-artro-muscular realiza las funciones de dar soporte, estabilidad y locomoción en posición erecta. Adicionalmente, permite que la persona pueda extender o flexionar la pierna de forma cómoda y eficiente al sentarse, al mismo tiempo que cumpla la función de movilidad sin sobrepasar una amplitud limitada, para evitar lesiones.

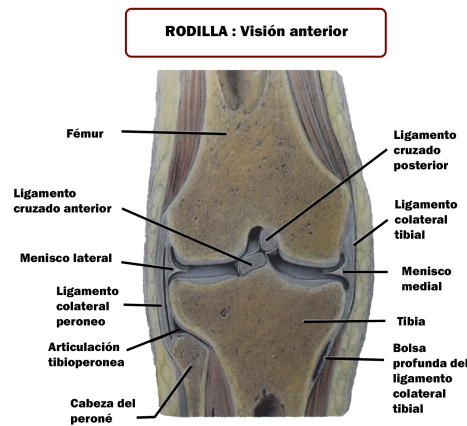


Figura 1.1: Anatomía de la rodilla humana

Para la solución del caso de estudio en la presente tesis se propone un mecanismo de seis barras, cuya trayectoria del eslabón acoplador debe pasar idealmente por los puntos que corresponden al análisis biomecánico de la rodilla durante el ciclo de marcha, de acuerdo a la antropometría del promedio de la población mexicana presentados en [39]. Este caso de estudio tiene la finalidad de comprobar que el uso del algoritmo memético puede ser una solución alterna competitiva con respecto a otras propuestas en la búsqueda de soluciones óptimas, cuyo objetivo específico sea la funcionalidad correcta de un dispositivo mecatrónico de un problema real de ingeniería [38].

## 1.5. Justificación

La aplicación de la optimización en la ingeniería tiene como finalidad resolver problemas reales que se presentan en las diferentes etapas del desarrollo de sistemas. En este tipo de problemas no se conoce de antemano su solución, y en ocasiones únicamente se dispone de los mejores resultados reportados hasta la fecha, dados a conocer en publicaciones. Las metaheurísticas son opciones para la solución de problemas complejos del mundo real, usadas ampliamente en casos en donde los algoritmos tradicionales no producen soluciones útiles o alcanzables con recursos limitados.

## 1.6. Objetivo general

Diseño de un algoritmo memético para resolver problemas complejos de optimización en ingeniería.

## 1.7. Objetivos particulares

- Aplicación del algoritmo memético propuesto al diseño dimensional de un mecanismo de seis barras para una prótesis de rodilla policéntrica como caso de estudio.
- Estudio y comprensión del modelo cinemático y dinámico del mecanismo de una rodilla.
- Análisis y determinación de la función de mérito y de sus restricciones para la evaluación del desempeño del sistema mecánico.
- Proponer soluciones algorítmicas al problema de optimización para el diseño de la rodilla policéntrica.
- Comparación de resultados entre los métodos implementados, utilizando métricas estadísticas paramétricas y no paramétricas.

## 1.8. Alcances y limitaciones

### 1.8.1. Alcances

El algoritmo memético desarrollado en esta tesis, MemDEFP, resolverá un problema real y complejo de ingeniería sobre el diseño dimensional de un mecanismo de seis barras. Dicho mecanismo dará la funcionalidad a una prótesis de rodilla policéntrica, cumpliendo las restricciones de diseño planteadas. El algoritmo obtendrá soluciones factibles como resultado de los experimentos realizados, buscando que sean competitivas y realizables.

### 1.8.2. Limitaciones

Se generará la solución del diseño dimensional de una prótesis de rodilla policéntrica utilizando el algoritmo memético desarrollado. El objetivo final contempla la fase del diseño en una herramienta computacional, y no se plantea la construcción física del prototipo de la prótesis de rodilla.

## 1.9. Organización de la tesis

Esta tesis doctoral está dividida en seis capítulos:

**Capítulo 1 Introducción.** En este capítulo se aborda de manera general la importancia de la optimización en el diseño en ingeniería, las ventajas y desventajas de algunos métodos analíticos de optimización, así como los nuevos enfoques utilizados para enfrentar a los problemas complejos que incluyen restricciones y funciones objetivo discontinuas.

**Capítulo 2 Marco teórico.** Se hace una revisión detallada a la solución de problemas de optimización usando metaheurísticas. Además, se presentan los algoritmos meméticos, explicando su filosofía y composición. Finalmente, se exponen las bases de los algoritmos de búsqueda global y de búsqueda local utilizados en esta tesis.

**Capítulo 3 Caso de estudio: prótesis de rodilla.** Se revisa el estado del arte y se explica a detalle el caso de estudio a resolver.

**Capítulo 4 Diseño del algoritmo memético y de la prótesis de rodilla.** Se describe el algoritmo memético MemDEFP y su aplicación al caso de estudio. Se describe, analiza y determina la función objetivo y las restricciones para la evaluación del desempeño del sistema mecánico propuesto.

**Capítulo 5 Resultados.** Se presentan los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo memético MemDEFP al caso de estudio del diseño de una prótesis de rodilla policéntrica y se comparan los resultados con los generados por el algoritmo de Evolución Diferencial. Se incluye el análisis estadístico tanto paramétrico como no paramétrico de los resultados obtenidos, .

**Capítulo 6 Conclusiones.** Se describen los objetivos alcanzados en la presente tesis y se proponen algunas extensiones para trabajos futuros.



## Capítulo 2

# Marco teórico

### 2.1. Optimización

La palabra **optimizar** significa encontrar los mejores resultados, mayor eficiencia, mejor eficacia en el desempeño o recursos al realizar alguna acción, trabajo u objetivo, a partir de un conjunto de alternativas posibles siempre y cuando satisfaga el o los objetivos propuestos para un determinado problema. La carencia de métodos universales de optimización ha conducido al desarrollo de diferentes procedimientos con aplicaciones limitadas para cada tipo de problema [14].

Para resolver un problema de optimización de manera general se requieren dos etapas principales:

1. Formular el modelo de optimización.
2. Resolver y validar el modelo.

El proceso de modelado es esencialmente cualitativo y requiere de habilidad y experiencia; en términos generales se pueden definir los siguientes pasos a seguir para la formulación del modelo:

- **Identificar las variables de diseño (decisión)**. Estas variables representan las alternativas de decisión, pertenecen a la propia naturaleza del problema y no pueden ser establecidas arbitrariamente.
- **Identificar las restricciones**. Las restricciones de un problema de optimización definen el conjunto de valores que pueden tomar las variables de diseño. Las restricciones pueden pertenecer a la naturaleza del problema, como lo son las restricciones físicas, o también pueden ser restricciones establecidas por el diseñador para cumplir ciertos criterios de fabricación.

- **Definición de los objetivos.** Los objetivos no pertenecen a la naturaleza del problema sino que son establecidos de acuerdo a la experiencia del diseñador, quien puede decidir si se requiere satisfacer un único objetivo o varios simultáneamente.

Finalmente, para obtener un modelo matemático del problema de optimización es necesario expresar las restricciones y el objetivo como funciones matemáticas.

La optimización se puede clasificar en dos grandes áreas:

- **Optimización numérica.** Su finalidad es encontrar un conjunto de valores para las variables de diseño del problema de manera que se maximice o minimice la función objetivo.
- **Optimización combinatoria.** Busca el ordenamiento de los elementos de un conjunto, de manera que se maximice o minimice el valor de la función objetivo.

El presente trabajo de tesis cae dentro de la categoría de la optimización numérica, por ser un problema de diseño dimensional. En muchos casos puede existir más de una solución aceptable para un cierto problema de optimización; si el problema corresponde a la vida real se debe escoger como mejor solución aquella que sea más estética y realizable.

### 2.1.1. Conceptos generales

En la literatura especializada [13, 40] se definen algunos conceptos importantes para la solución de problemas de optimización, entre los que destacan los siguientes:

- **Sistema.** Un ensamble de componentes interconectados en forma organizada y separados de su entorno por una frontera. Tiene un propósito observable, el cual es caracterizado en términos de cómo transforma una entrada desde un entorno hacia una salida al entorno.
- **Espacio de diseño.** Espacio cartesiano  $n$  dimensional en donde cada eje representa una variable de diseño  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ .
- **Función objetivo.** Es el propósito a resolver de un problema de optimización y se representa como una medida cuantitativa que indica el desempeño o bondad del sistema.
- **Variables de diseño o variables de decisión.** En un sistema de ingeniería o componente se define un conjunto  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  de cantidades que pueden variar su valor durante el proceso de diseño y se representan como un vector de dimensión  $n$ ,  $\vec{X} = x_1, x_2, \dots, x_n$  donde  $n$  es el número de parámetros de entrada que afectan el valor de la función objetivo.

- **Restricciones.** Definen las características y/o requisitos de cada uno de los componentes del sistema y que se interpretan como las limitaciones que deben cumplir cada una de las variables de diseño para considerar la solución como realizable (factible). Éstas pueden ser del tipo funcional, de comportamiento o geométricas.
- **Región factible o aceptable.** Es la región donde se encuentran todos los puntos que cumplen todas y cada una de las restricciones de un problema dado.
- **Restricciones activas.** Son las restricciones que satisfacen  $g_j(X) = 0$ .

## 2.2. Definición matemática de optimización

Un problema de optimización se describe matemáticamente de la siguiente forma:

Encontrar

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

el cual minimiza/maximiza a

$$f_p(\vec{X})$$

sujeta a

$$\begin{aligned} g_j(\vec{X}) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, m \\ h_k(\vec{X}) &= 0, & k &= 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

donde  $\vec{X}$  es un vector  $n$  dimensional llamado vector de diseño,  $f_p(\vec{X})$  son las funciones objetivo con  $p \geq 1$ , y  $g_j(\vec{X})$  y  $h_k(\vec{X})$  son las restricciones de desigualdad e igualdad respectivamente.

## 2.3. Técnicas de optimización

En el diseño en ingeniería se requiere frecuentemente optimizar dispositivos, componentes, sistemas, etc. para lo cual se aplican generalmente como primera opción los llamados métodos tradicionales o de programación matemática, debido a que tienden a converger hacia el punto óptimo global. Sin embargo,

en muchos casos no son eficientes debido a la complejidad propia de los problemas, ya sea por la gran cantidad de variables de diseño o porque las funciones objetivo y de restricciones no sean continuas. Entre las limitaciones de los métodos tradicionales destacan [15]:

- Los problemas reales se modelan frecuentemente con funciones que no son continuas o son continuas a tramos, y por lo tanto, no se pueden obtener la primera y la segunda derivada.
- El espacio de búsqueda es muy extenso.
- Los problemas son muy complicados, de tal forma que para intentar tener una solución, dichos métodos requieren que se realicen simplificaciones, a tal grado que la solución obtenida puede no representar utilidad alguna.
- La función objetivo varía con el tiempo.
- El costo computacional de los métodos tradicionales es muy elevado, es decir, el tiempo de ejecución del algoritmo (costo temporal) es muy alto y/o el consumo de memoria (costo espacial) también es muy alto.

Por lo anterior, surge el interés de utilizar a las metaheurísticas como una alternativa de solución, debido a que su tiempo de ejecución es polinomial. Las metaheurísticas no garantizan la mejor solución, pero las soluciones que producen generalmente se pueden considerar como buenas, encontrando en la mayoría de los casos soluciones a problemas complejos de ingeniería donde no se sabe de antemano cual es la solución que se está buscando. Adicionalmente, se evitan los laboriosos cálculos analíticos correspondientes a los métodos tradicionales.

En computación es muy importante encontrar algoritmos con buenos tiempos de ejecución y que a la vez proporcionen buenas soluciones, y en muchos casos las metaheurísticas satisfacen estos requerimientos. Dentro de ellas existe un grupo cuyo funcionamiento se basa en fenómenos inteligentes encontrados en la naturaleza y que se ha nombrado algoritmos bio-inspirados. Los métodos bio-inspirados replican la forma en que la naturaleza se organiza para asegurar su supervivencia, lo cual se puede considerar como un problema de optimización. Su funcionamiento general es [15]:

- Generación aleatoria de una población inicial de individuos, con la finalidad de que sea diversa y abarque toda la zona factible. Cada individuo debe satisfacer los rangos permitidos, determinados por las condiciones de diseño.



- Evaluación de la aptitud de cada individuo de la población, esto se lleva a cabo evaluando la función objetivo.
- Seleccionar a los individuos más idóneos para la reproducción (padres). Existen mecanismos en donde el hijo reemplaza a un individuo de la población a través de la comparación de las aptitudes.
- Obtención de nuevos individuos a través de operaciones de cruce y mutación. Ambos padres al crear un hijo le transfieren características propias, en analogía a la herencia. La mutación son cambios que ocurren por aleatoriedad y que permiten que exista diversidad.
- Evaluar la aptitud de los nuevos individuos. Se lleva a cabo evaluando la función objetivo y las funciones de restricción para saber si cumplen con las restricciones impuestas en el diseño.
- Repetir el procedimiento en cada generación hasta la que se cumpla una condición de terminación.

Los algoritmos bio-inspirados se clasifican en:

- **Algoritmos evolutivos (*Evolutionary Algorithms, EA*)**. Basan su funcionamiento en la teoría de la evolución de las especies, la supervivencia del más apto y la transmisión de características de padres a hijos [41, 42, 43].
- **Algoritmos de inteligencia colectiva (*Swarm Intelligence Algorithms, SIA*)**. Se basa en el comportamiento de los seres vivos y en cómo interactúan de manera local con su ambiente y de esa interacción permiten resolver problemas complejos de manera conjunta [44, 45, 46].

De acuerdo a la convención utilizada por Glover, los algoritmos bio-inspirados o inspirados en la naturaleza se acuñaron como metaheurísticas [17, 47], aunque antes se consideraban como tales aquellos que contenían componentes estocásticos. En [16] se menciona que las metaheurísticas tienen componentes de aleatoriedad y de búsqueda local, aunque por experiencia los algoritmos metaheurísticos se consideran más adecuados para la optimización global.

### 2.3.1. Algoritmos evolutivos

Los algoritmos evolutivos surgen dentro del campo de la Inteligencia Artificial (IA), utilizando mecanismos inspirados en la evolución biológica, tales como la reproducción, la mutación, la recombinación y la selección. Las soluciones candidatas al problema de optimización se representan como individuos en una población, y la función de aptitud determina el entorno en donde las soluciones sobreviven en

cada generación del proceso evolutivo. Los algoritmos evolutivos generan buenas soluciones y se pueden aplicar a diversas áreas tales como la ingeniería, el arte, la biología, la economía, la genética, la investigación de operaciones, la robótica, las ciencias sociales, la física, la química, entre otras. Sin embargo, una posible limitación de muchos algoritmos evolutivos es su simplificación extrema de los conceptos de la biología real.

### 2.3.2. Algoritmos de inteligencia colectiva

Existen diversos algoritmos dentro de la clasificación de inteligencia colectiva, entre los que destacan:

- **Optimización de enjambre de partículas (*Particle Swarm Optimization, PSO*)**. Basado en las ideas de comportamiento de las parvadas de pájaros o bancos de peces, estos algoritmos son adecuados principalmente para problemas de optimización numérica [45, 46].
- **Algoritmo colonia artificial de abejas (*Artificial Bee Colony, ABC*)**. Se basa en el comportamiento de forrajeo de las abejas melíferas. Se han aplicado a problemas de ingeniería con alta dimensionalidad [48, 49, 50].
- **Algoritmo de luciérnagas (*Firefly Algorithm, FA*)**. Está inspirado en el comportamiento de las luciérnagas, cuando se atraen mediante la emisión de luz intermitente. Se recomienda para la optimización multimodal [16].
- **Búsqueda Cucú (*Cuckoo Search, CS*)**. Se inspira en el parasitismo de crianza de las especies de pájaros cucú. Usa vuelos de Lévy, y está orientado a problemas de optimización global [51].

## 2.4. Algoritmos meméticos

Toda metaheurística consta de dos componentes principales:

- **Diversificación (exploración)**. Se generan soluciones diversas para explorar el espacio de búsqueda en una escala global.
- **Intensificación (explotación)**. Se concentra la búsqueda en una cierta región en donde se tiene el conocimiento de que existe una buena solución.

En el proceso de optimización se debe encontrar un buen equilibrio entre la intensificación y la diversificación, a través de estrategias de selección de soluciones para mejorar la convergencia del algoritmo. Este equilibrio coadyuva a dicha convergencia,

2.4.1. Algoritmo de búsqueda global: Evolución Diferencial (DE)

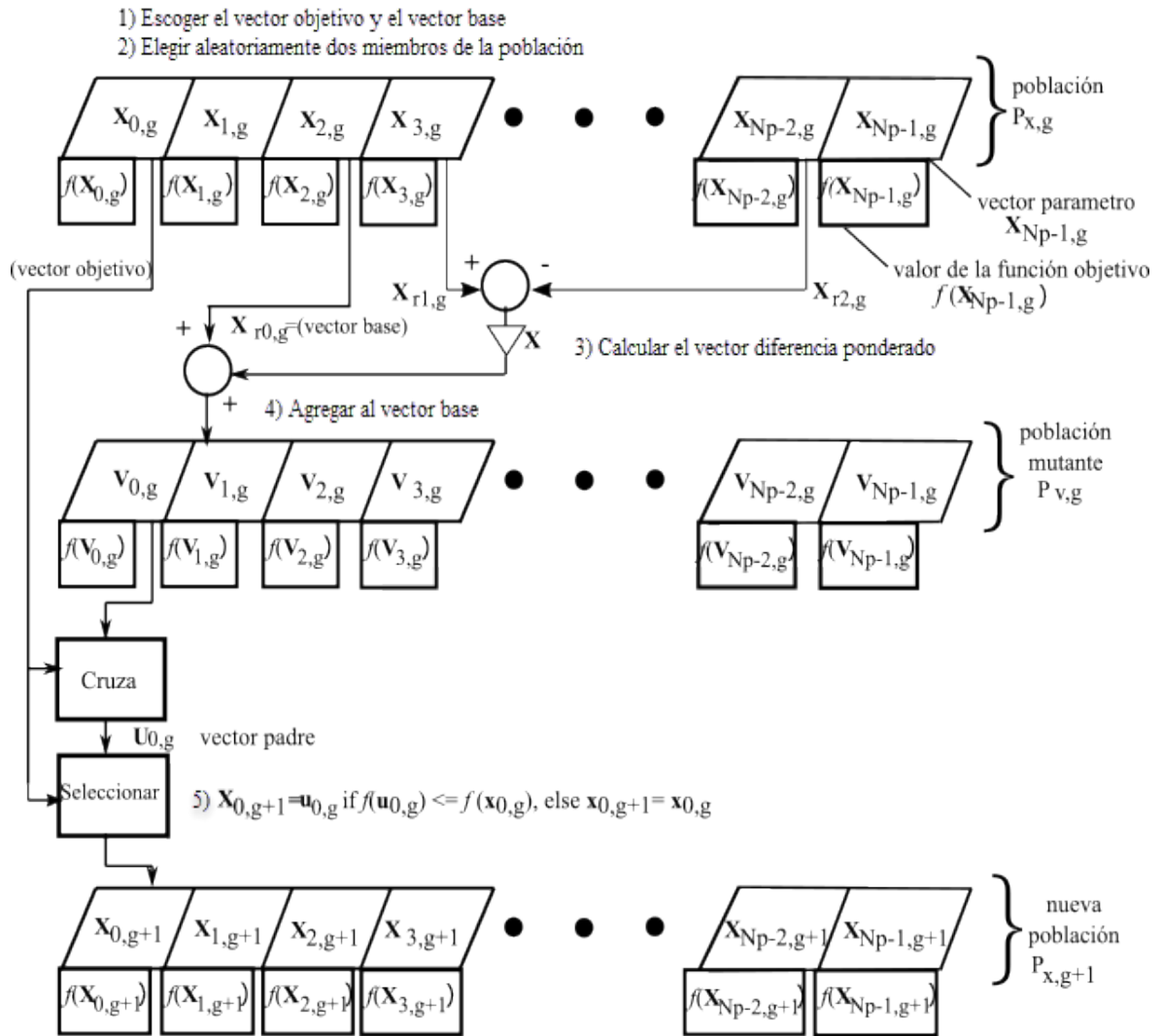


Figura 2.1: Diagrama de flujo del algoritmo de Evolución Diferencial

El algoritmo mostrado en la Figura ?? es poblacional y se considera como una mejora de los algoritmos genéticos [41, 42], y su objetivo es el de realizar la exploración (diversificación) en el algoritmo memético.

Se caracteriza por ser un algoritmo estocástico basado en población, el cual no requiere del cálculo de derivadas por lo que su aplicación está orientada a resolver problemas no lineales y multimodales

[52]. Además su información no esta codificada y sus operaciones las realiza sobre cada componente del espacio dimensional.

En 2.1 se muestra el pseudocódigo del algoritmo, el cual crea una población inicial de forma aleatoria, las cuales generan soluciones candidatas al evaluar su aptitud. En cada generación se reproducen nuevos individuos que resultan al aplicar los siguientes mecanismos:

- **Mutación.** Mecanismo a través del cual se determina cuáles son las variaciones genéticas(aleatorias) con respecto a sus progenitores.
- **Cruza.** Mecanismo a través del cual se determina qué partes de un nuevo individuo se heredan de dos individuos que se recombinan.
- **Selección.** Mecanismo a través del cual se determina qué individuos de la población sobreviven y cuáles no.

La aptitud de cada descendiente se evalúa para que compita con la aptitud del individuo progenitor, de tal forma que el más apto permanece en la próxima generación, siguiendo el principio de selección natural de las especies, donde el más apto sobrevive a través de las generaciones.

En la etapa de competencia donde se realiza la selección generacional se deben considerar las restricciones de diseño, las cuales inciden de manera muy importante en la etapa de supervivencia. De esta forma, el nuevo descendiente puede sustituir a su progenitor, si su aptitud también satisface la condición de estar en el espacio factible, lo cual se logra implementando las reglas de Deb [53] que se detallan a continuación:

- Entre dos soluciones factibles, se selecciona la que tenga el mejor valor de la función objetivo.
- Entre una solución factible y otra no factible, se selecciona la factible.
- Entre dos soluciones no factibles, se selecciona la que tenga la menor suma de violación de restricciones, la cual es un indicador del grado de penalización por no encontrarse en la zona factible.

---

**Algoritmo 2.1** Algoritmo: Evolución Diferencial

---

```
1: begin
2:   inicializar parámetros;
3:   crear población inicial aleatoriamente;
4:   evaluar la aptitud y factibilidad de la población inicial;

5:   repeat
6:     seleccionar un padre y dos individuos adicionales;
7:     realizar la cruce;
8:     generar hijo con mutación uniforme;
9:     evaluar la aptitud y factibilidad del hijo generado;
10:    if hijo mejor que el padre con base en las reglas de Deb then
11:      reemplazar padre por hijo en generación siguiente;
12:    end if
13:  until criterioTerminacion;

14:  seleccionar mejor individuo por FO;
15: end begin
```

---

### 2.4.2. Algoritmo de búsqueda local: Polinización de Flores

A continuación se describe el algoritmo de búsqueda local implementado el cual realiza la tarea de explotación (intensificación), y que se utiliza en el diseño del algoritmo memético. El algoritmo de polinización de flores es un algoritmo que funciona tanto como buscador local o global [54, 55], y que idealiza el proceso de la polinización natural de las flores. La polinización de flores está típicamente asociada con la transferencia de polen, la cual está relacionada con polinizadores tales como insectos, pájaros, murciélagos, y otros animales. De hecho algunas flores e insectos han co-evolucionado en una relación flor-polinizador muy especializada. Por ejemplo algunas flores pueden atraer a una especie de insectos para llevar a cabo una polinización exitosa. La polinización puede ser de dos formas: abiótica y biótica. Cerca del 90 por ciento de las flores pertenecen a la polinización biótica, esto es, el polen es transferido por polinizadores tales como insectos y animales. Cerca del 10 por ciento de la polinización se lleva a cabo de forma abiótica, la cual no requiere de ningún polinizador. El aire y el agua contribuyen a la polinización abiótica. Los polinizadores llamados vectores polinizadores pueden ser muy diversos. Algunos polinizadores han desarrollado la constancia hacia las flores, la cual significa que los polinizadores tienden a visitar únicamente a un cierto tipo de flor dejando a otras flores sin visitarlas. La constancia de las flores parece tener cierta ventaja porque maximizan la reproducción de las flores de la misma especie, y también puede asegurar que ese néctar está disponible para un cierto tipo de insecto, minimizando la exploración para dichos insectos. La polinización se puede llevar a cabo por auto-polinización o por polinización cruzada. La polinización cruzada o alógama significa que la poli-

nización puede ocurrir del polen de una flor de una planta diferente, mientras que la autopolinización es la fertilización de una flor con el polen de la misma flor o de diferentes flores de la misma planta. La polinización cruzada biótica puede ocurrir a distancia a través de abejas, pájaros, moscas etc., los cuales se pueden considerar polinizadores globales con un comportamiento de vuelo de Lévy que obedece a una distribución de Lévy. La constancia de la flor puede usarse para incrementar el paso usando la similaridad o diferencia de dos flores.

Las características antes mencionadas se pueden resumir en las siguientes 4 reglas:

1. La polinización cruzada y la polinización biótica se consideran como procesos de polinización global con polinizadores que llevan el polen realizando vuelos de Lévy.
2. La auto-polinización y la polinización abiótica se consideran como procesos de polinización local.
3. La constancia de la flor se puede considerar como la probabilidad de reproducción y es proporcional a la similitud que existe entre dos flores involucradas.
4. La polinización local y la polinización global están controladas por una variable aleatoria  $p \in [0, 1]$ . Debido a la proximidad física y a otros factores como el viento, la polinización local puede tener una fracción  $p$  significativa en todas las actividades de polinización.

En 2.2 se muestra el pseudocódigo del algoritmo polinización de flores.

**Algoritmo 2.2** Algoritmo: polinización de flores

---

```

1: begin
2:   inicializar parámetros;           ▷ paso inicial, longitud de paso, longitud mínima de paso,  $\lambda$  suficientemente grande
3:   crear poblacion inicial aleatoriamente;
4:   calcular FO y SVR;
5:   definir probabilidad de conmutación;                               ▷  $p \in [0, 1]$ 
6:   repeat                                                                ▷ inicio polinización de flores
7:     if rand < p then
8:       obtener vector que obedezca a la distribución de Lévy;
9:       obtener polinización global;
10:    else
11:      obtener  $\varepsilon$ ;                               ▷  $\varepsilon \in$  distribución uniforme en [0, 1]
12:      seleccionar aleatoriamente  $j$  y  $k$  de todas las soluciones;
13:      obtener polinización local;
14:    end if
15:    evaluar las nuevas soluciones;
16:    if Si las nuevas soluciones son mejores then                               ▷ aplicando reglas de Deb
17:      actualizar en la población;
18:    end if
19:    encontrar mejor solución actual;
20:  until criterioTerminacion                                           ▷ Fin polinización de flores;
21:  seleccionar mejor individuo por FO;
22: end begin

```

---

## 2.5. Algoritmo memético

El término **meme** fue acuñado por el etólogo Richard Dawkins [32] en 1976 y apareció por primera vez en su libro “El gen egoísta” y dice textualmente que necesitaba un nombre para el nuevo replicador que conlleva la idea de una unidad de transmisión cultural, o una unidad de imitación, para lo cual obtuvo la palabra “mimeme” la cual deriva de una apropiada raíz griega, pero deseaba que se pronunciara de forma semejante a la monosílaba gene (gen), de esta forma lo abrevió a meme para que se pronunciara “mi:m” y lo tomó para formular un nuevo modelo de evolución cultural, en analogía al gen. De esta forma es cualquier idea o hábito que es capaz de transmitirse a una persona y se realiza gracias a la imitación, enseñanza u otros medios de influencia informativa, y se perpetúan durante el proceso de la evolución.

Ejemplos de memes son el lenguaje, las ceremonias, las costumbres, el arte, la ingeniería, las tonadas de canciones, las ideas, las consignas, las modas, las formas de fabricar, y todo lo que evoluciona en el tiempo histórico y que se plantan en las mentes, convirtiéndolo en vehículo de propagación y que se apegan a la teoría darwiniana.

Los memes se replican y se desarrollan gracias a dos procesos: el de la evolución genética y parale-

lamente el de la evolución memética. La única intención del meme es replicarse y competir con otros memes para ver cual sobrevive.

Los memes siguen los tres fundamentos del Darwinismo Universal: la variación, la selección y la herencia. En relación al principio de variación es evidente que cuando se transmiten los memes su copia nunca es perfecta. En cuanto a la selección, los memes compiten entre sí, de tal forma algunos memes atraen a las personas, se recuerdan y se transmiten, otros nunca volverán a transmitirse. También se puede decir que los memes siguen el principio de la herencia pues existen algunos memes que son conocidos por mucha gente, es decir se han ido transmitiendo de generación en generación.

En resumen la teoría memética explica como las ideas y pensamientos compiten entre ellos para ver cual se replica más y para que esto suceda es necesario que dicho meme llame la atención y por lo tanto se seleccione en detrimento de otro meme menos competitivo.

### 2.5.1. Historia de los algoritmos meméticos

Los algoritmos meméticos tienen su origen en el artículo publicado por Moscato en 1989 y que el autor explica que tomó como referencia las ideas planteadas en el concepto de meme concebido por Dawkins como una forma alterna de resolver problemas de optimización y los define como una metaheurística basada en población compuesta de un buscador global evolutivo y de un conjunto algoritmos de búsqueda local los cuales se activan dentro de un ciclo de la generación del buscador global[1, 23, 25, 27, 29, 30, 31].

Un algoritmo memético en sí no es un algoritmo específico, sino un concepto que combina algoritmos de búsqueda global y de búsqueda local que trabajan de forma sinérgica con el fin de aumentar la eficiencia con respecto a otros algoritmos de optimización heurísticos o tradicionales.

Los algoritmos meméticos se plantearon como una nueva filosofía en la optimización, la cual al inicio fue rechazada por los investigadores, hasta que en 1997, Wolpert demostró que el rendimiento promedio de cualquier par de algoritmos a través de todos los problemas es idéntico y el cual quedó establecido en el teorema No Free Lunch Theorem [33].

Los algoritmos meméticos al ser un nuevo paradigma el cual contempla un buscador global y un buscador local que trabajan de forma conjunta ofrecen una nuevo enfoque en la solución de problemas de optimización y por lo tanto abre una nueva línea de investigación en la aplicación en diferentes disciplinas del conocimiento tales como diseño mecatrónico, descubrimiento de conocimiento, machine learning, planificación, bioinformática, economía por citar algunos.

En [25, 26, 27, 28, 35, 36] se presentan algunos trabajos usando algoritmos meméticos en optimiza-



ción.

### 2.5.2. Algoritmos meméticos conceptualizados como metaheurísticas híbridas

Los Algoritmos Meméticos al ser una combinación de métodos de optimización, donde el algoritmo maestro es una heurística poblacional generalmente inspirada en los principios de la evolución natural de Darwin y del concepto de meme de Dawkins y que actúan sinérgicamente e inteligentemente junto con los procedimientos determinísticos de búsqueda local capaces de realizar explotaciones en las vecindades de una solución candidata se les considera una metaheurística híbrida. El atractivo de este enfoque es buscar un equilibrio entre la exploración del algoritmo de búsqueda global y la explotación del algoritmo de búsqueda local para alcanzar un óptimo global de forma más eficiente y prometedora que otras heurísticas o algún método tradicional. En los algoritmos meméticos se pueden aplicar diferentes metodologías de búsqueda global [23, 25, 27, 29, 30, 31] basadas en poblaciones en combinación con técnicas de búsqueda local que actúan sobre un subconjunto de la población con etapas de cooperación y procedimientos de recombinación [1].

### 2.5.3. Componentes básicos de los algoritmos meméticos

En la literatura técnica que hace referencia a los algoritmos meméticos, en la cual se explican a grosso modo las tareas que debe realizar cada módulo. A continuación se presentan de manera muy general en que consiste cada módulo, en la inteligencia de que los algoritmos de los buscadores global y los buscadores locales pueden ser cualquiera que cumplan los requerimientos aquí establecidos. En el algoritmo 2.3 se muestra la función **algoritmo memético principal**, la cual es el esquema básico de un algoritmo memético genérico. Esta función principal invoca a varias funciones que realizan tareas específicas tales como: **Inicializar**, **Cooperar**, **Mejorar**, **Competir**, **Reiniciar**, etc.

Es importante señalar que los procedimientos **Cooperar**, **Mejorar** y **Competir** constituyen el núcleo de los algoritmos meméticos y se basan en dos operadores para seleccionar las soluciones a partir de poblaciones y su recombinación. Estas pueden ser modificadas y aplicadas en forma secuencial.

#### Explicación de cada una de las funciones

- El procedimiento de **Inicializar** es responsable de la creación del conjunto inicial de individuos que forman la población inicial y que representan un conjunto finito de soluciones candidatas, cuyo

**Algoritmo 2.3** Algoritmo Memético Principal

---

```

1: begin
2:   pob = Inicializar(par, P);
3:   repeat
4:     nuevaPob1= Cooperar(pob, par, P);
5:     nuevaPob2= Mejorar(nuevaPob1, par, P);
6:     pob = Competir(pob, nuevaPob2);
7:     if c then converge(pob) entonces pob := Reiniciar(pob, par);
8:   end if
9:   until CriterioTerminacion(par)
10:  return ObtenerEnesimosMejores(pob,I)
11: end begin

```

---

número es un parámetro que se debe seleccionar cuidadosamente. Cada uno de los individuos se crean de forma aleatoria siempre y cuando cumplan con las restricciones impuestas por problema en particular. Esta aleatoriedad tiene como objetivo que cada individuo o solución candidata tenga la oportunidad de explorar el espacio de búsqueda y que al mismo tiempo de este conjunto se puedan obtener soluciones de calidad al evaluar su aptitud, tal como se muestra en el algoritmo 2.4.

- La función del **criterio de terminación** tiene como objetivo terminar la ejecución del programa la cual se puede llevar a cabo usando los criterios siguientes:
  - al alcanzar un número máximo de iteraciones independientemente si se obtiene o no se obtiene el punto óptimo o
  - de acuerdo a un valor de precisión establecido entre las diferencias entre las soluciones candidatas o
  - de acuerdo a un valor de precisión establecido entre las diferencias entre los valores de aptitud.
- El procedimiento **Cooperar** como se muestra en el algoritmo 2.5, comprende el número de etapas, cada una correspondiendo a la aplicación iterada de un operador particular que toma las soluciones anteriores, generando nuevas soluciones.
- El procedimiento **Mejorar** incorpora la aplicación de un procedimiento de búsqueda local como el método de Nelder-Mead o el de Caminata Aleatoria, el cual juega un papel muy importante, ya que se encarga de realizar una explotación en la vecindad de un punto candidato a solución óptima. Existen varias formas decisiones de diseño involucradas en la aplicación de la búsqueda local.

El procedimiento **Competir** se utiliza para reconstruir la población actual a través de la población anterior usando mecanismos de selección entre la **pob** y la población nuevamente generada **pob2**.

- El procedimiento **Reiniciar** lleva a cabo la conformación de la población que se usará en la próxima generación mientras no se alcance a la condición de terminación y que puede ser los mejores de la población del algoritmo global en combinación con individuos del algoritmo local manteniendo el número de individuos de la población constante.

---

**Algoritmo 2.4** Procedimiento Inicializar
 

---

```

1: begin
2:   pob = 0;
3:   for j =1 a par.tamañoPob do
4:     i = solucionAleatoria(P);
5:     i = busquedaLocal(i, par, P);
6:     pop = pob U i;
7:   end for
8:   return pob;
9: end begin

```

---



---

**Algoritmo 2.5** Procedimiento Cooperar
 

---

```

1: begin
2:   ultimaPob = pob;
3:   for j =1 a par.numOp do
4:     nuevaPob := 0;
5:     for k =1 a par.numAplic do
6:       padres = Seleccionar(ultimaPob,par.aridad);
7:       nuevaPob = nuevaPob U aplicarOperador(par.op, padres, P);
8:     end for
9:     ultimaPob = nuevaPob;
10:  end for
11:  return nuevaPob;
12: end begin

```

---

Se debe decidir si la población (soluciones candidatas) se degrada o no usando alguna medida de la diversidad de la información, tal como la entropía de Shannon. La población se considera degenerada si invoca el procedimiento **Reiniciar**, el cual puede implementarse de diversas formas. Una forma típica es mantener una fracción de la población actual generando nuevas soluciones de forma aleatoria o a través de heurísticas para completar la población, tal como se muestra en el algoritmo 2.6.

La función **ObtenerEnesimosMejores** se encarga de retornar finalmente la solución de la metaheurística.

---

**Algoritmo 2.6** Procedimiento Reiniciar

---

```
1: begin
2:   nuevaPob := 0;
3:   for j =1 a par.preservados do
4:     i = obtenerEnesimosMejores(pob, j);
5:     nuevaPob := i;
6:   end for
7:   for j := par.preservados + 1 a par.tamañoPob do
8:     i = solucionAleatoria(P);
9:     i = busquedaLocal(i, par, P);
10:    nuevaPob = i;
11:   end for
12:   return nuevaPob;
13: end begin
```

---

## Capítulo 3

# Prótesis de rodilla policéntrica

Como se mencionó anteriormente, en esta tesis se presenta como caso de estudio la solución óptima del diseño de una prótesis de rodilla utilizando algoritmos meméticos, cuya motivación principal es la solución de un problema actual de salud pública tanto en México [37] como en otros países, tal como el caso de Colombia [56]. Existe la necesidad de suministrar a cierto sector de la población de mecanismos mecatrónicos que sustituyan las extremidades inferiores perdidas debido a accidentes o a patologías degenerativas que conllevan a su amputación. La amputación es la separación de un miembro, segmento o parte saliente de una extremidad del cuerpo de forma traumática o a través de cirugía, y que generalmente se practica como último recurso para evitar la propagación de una infección gangrenosa. De acuerdo a estadísticas, la amputación más común se lleva a cabo en las extremidades inferiores [37].

Para poder abordar el caso de estudio se debe realizar un análisis tanto de la anatomía y la fisiología de la rodilla como de los aspectos biomecánicos de la marcha, todo ello para poder efectuar el estudio de los modelos cinemático y dinámico del mecanismo de rodilla que suplirá a dicha extremidad.

### 3.1. Anatomía de las extremidades inferiores

La anatomía es la parte de la ciencia que estudia la estructura, forma y relaciones de las diferentes partes del cuerpo humano [57, 58, 59] y para su comprensión, se divide en las siguientes regiones: cabeza, tronco, extremidades superiores y extremidades inferiores, como se muestra en la figura 3.1.

El aparato locomotor o sistema ósteo-artro-muscular es un conjunto de órganos cuya función principal es permitir al cuerpo humano la realización de movimientos, y lo constituyen los huesos, los

ligamentos, las articulaciones y los músculos. Además proporciona otras funcionalidades al cuerpo tales como la rigidez, la resistencia y protección a los órganos internos del cuerpo humano. Las articulaciones

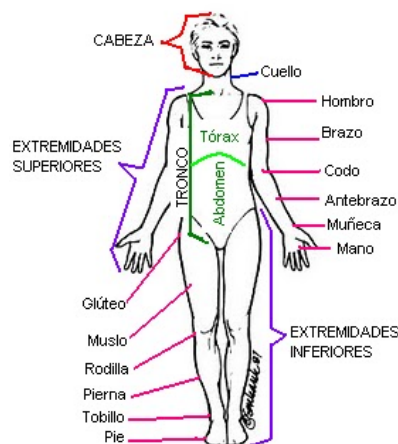


Figura 3.1: Anatomía del cuerpo humano por regiones

son los elementos más complejos del aparato locomotor debido a la combinación de partes duras y partes blandas que posibilitan la unión entre sí de dos o más huesos, lo cual permite el desplazamiento de los huesos sin demasiado desgaste por el rozamiento excesivo entre ellos. Las articulaciones poseen diversos componentes: ligamentos, cartílagos, cápsula articular y meniscos en el caso particular de las extremidades inferiores.

Los miembros inferiores están formados en sentido descendente por los muslos, piernas y pies, cuyo sistema ósteo-artro-muscular se debe conocer para poder comprender las implicaciones que se tienen cuando éstas son sometidas a un procedimiento quirúrgico con el fin amputar la extremidad por enfermedad o por avulsión. Los miembros inferiores o miembros pelvianos son cada una de las dos extremidades que se encuentran unidas al tronco a través de la pelvis mediante la articulación de la cadera y tienen como función principal el sustentar el peso del cuerpo en la posición erecta bípeda y realizar desplazamientos mediante la contracción de los músculos conocidos como marcha humana.

Los músculos de los miembros inferiores se dividen, según su localización, en cuatro regiones: músculos de la pelvis, músculos del muslo, músculos de la pierna y músculos del pie. Los miembros inferiores realizan movimientos diversos y complejos a través de sus músculos: flexión, extensión, aducción, abducción, rotación medial, rotación lateral, extensión de rodilla o de pierna, y flexión de la rodilla o de la pierna.

## 3.2. Articulación de la rodilla

La estructura de la articulación de la rodilla está formada por dos articulaciones diferentes, tal como se muestra en la Figura 3.2:

- **Articulación femorotibial:** articulaciones lateral y medial entre los cóndilos femorales y tibiales.
- **Articulación femorrotuliana o articulación femoropatelar:** articulación intermedia entre la rótula y el fémur.

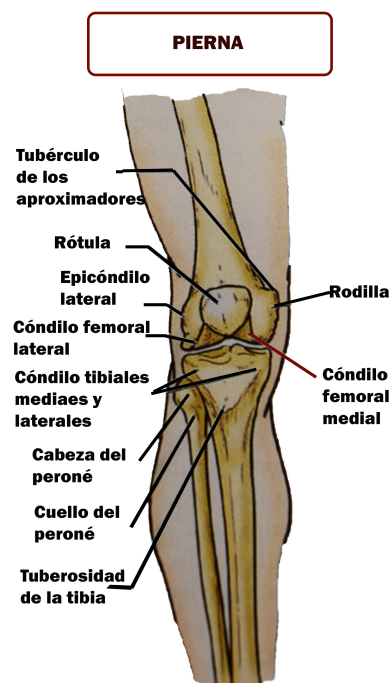


Figura 3.2: Vista frontal de la articulación de la rodilla

Funcionalmente la rodilla humana es una articulación que permite movimientos de flexión y extensión conocidos como movimiento de bisagra, combinando deslizamiento con rodamiento y rotación alrededor del eje vertical y movimientos de rotación interna y externa. Dentro de la articulación se encuentran dos ligamentos cruzados cuya función es dar estabilidad a la rodilla cuando tiene que soportar el peso del cuerpo, tal como se muestra en la figura 3.3. Por otro lado la estabilidad de la rodilla depende de la fuerza y acciones de los músculos circundantes, de sus tendones y de los ligamentos que unen el fémur con la tibia, siendo el músculo cuádriceps femoral el músculo que estabiliza la rodilla.

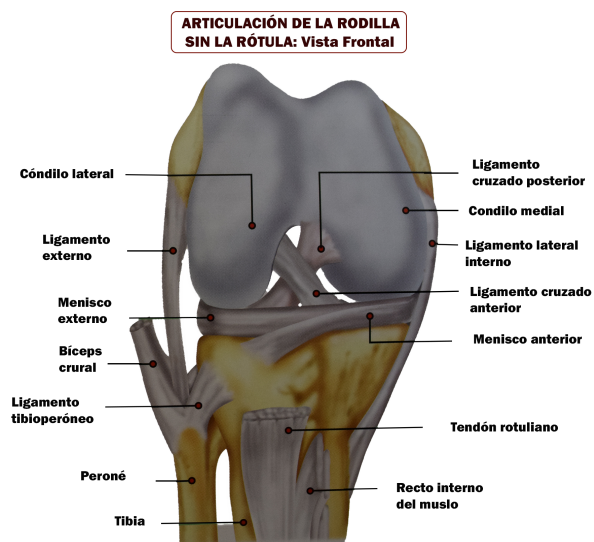


Figura 3.3: Vista frontal de la articulación de la rodilla sin la rótula

La rodilla es una articulación que está expuesta a un esfuerzo continuo durante la actividad cotidiana y además debe resistir el peso del cuerpo, por lo cual su diseño es muy importante desde el punto de vista mecánico. Desde el punto de vista anatómico, la rodilla humana realiza un movimiento complejo y cumple funciones que por un lado aportan estabilidad al cuerpo, resistencia para soportar el peso del cuerpo y además deben facilitar la movilidad para realizar la traslación.

### 3.2.1. Biomecánica de la rodilla

En su funcionamiento básico la rodilla tiene un grado de libertad de movimiento que se traduce en la flexión y la extensión, lo cual permite regular la distancia de separación del cuerpo con el piso, contando además con movimiento de rotación sobre el eje longitudinal de la pierna. Por otro lado, realiza dos funciones importantes [60]: proporcionar estabilidad cuando se encuentra en extensión plena ya que debe soportar el peso del cuerpo, y a la vez tener gran movilidad en la flexión para darle orientación al pie durante la marcha [61, 62, 63].

### 3.2.2. Marcha humana

La **marcha humana** se define como un proceso de locomoción aprendido, el cual consiste del desplazamiento del cuerpo humano en posición erecta a través de las dos extremidades inferiores con



movimientos alternantes y rítmicos de dichas extremidades y del tronco, que provocan un desplazamiento hacia delante del centro de gravedad con un mínimo gasto de energía y en donde existe contacto permanente del individuo con el suelo a través de al menos uno de sus pies. El desempeño de la marcha humana depende de la secuencia de movimientos simultáneos de los miembros inferiores que hacen avanzar el cuerpo a lo largo de una línea deseada, en la cual el cuerpo mantiene su postura erecta estable cargando correctamente el peso del cuerpo y así como la traslación de su centro de gravedad al mismo tiempo. (Ver Figura 3.4).

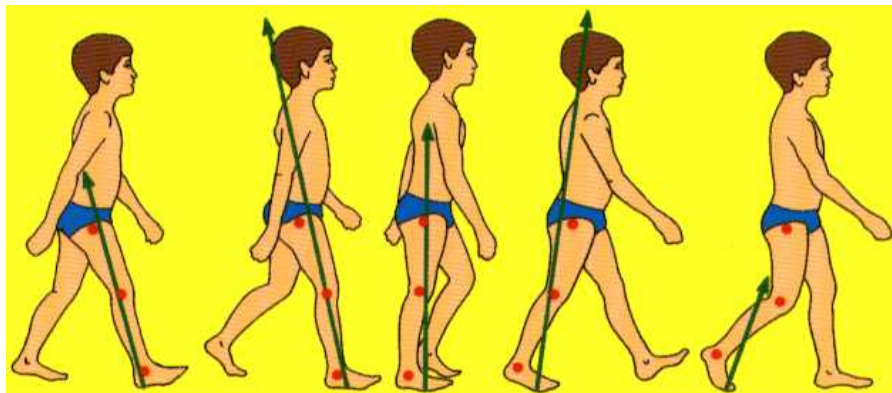


Figura 3.4: Ciclo de la marcha humana

### 3.2.3. Fases de la marcha humana

Para el análisis de la marcha humana se identifican dos fases, tiempos o momentos dentro de un ciclo completo de uno de los dos miembros inferiores, en donde el miembro inferior contralateral realiza lo mismo, pero desfasado en el tiempo medio ciclo, tal como se muestra en la figura 3.5.

- **fase de apoyo** - En esta fase el pie entra en contacto con el suelo y abarca el 60% del ciclo de la marcha bajo condiciones normales y es la suma de tiempo de los apoyos monopodal y bipodal.
  - **apoyo monopodal o apoyo sencillo** - Sucede cuando solamente un pie esta en contacto con el suelo y corresponde al tiempo de oscilación del miembro contra-lateral.
  - **apoyo bipodal o doble apoyo** - Sucede cuando ambos pies están en contacto con el suelo. En condiciones normales existen dos momentos de apoyo bipodal con una duración del 10% del ciclo de marcha cada uno. El primer momento sucede en el contacto inicial (CI), el segundo en el 50% del ciclo de marcha.

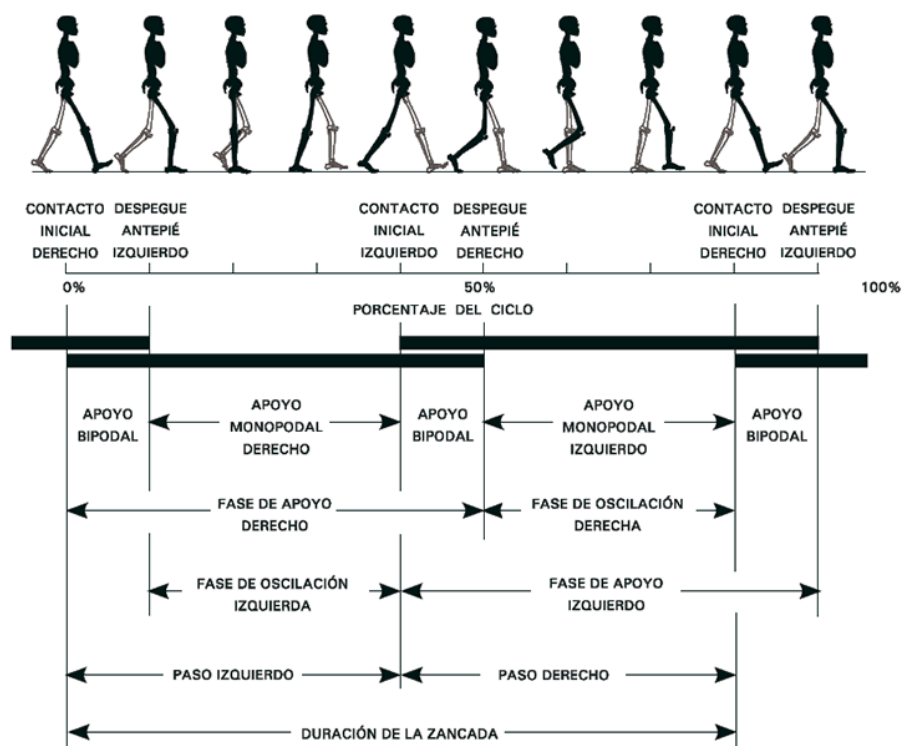


Figura 3.5: Ciclo de la marcha humana (CM)

- **fase de balanceo u oscilación** - El pie se encuentra en el aire y el miembro contralateral se encuentra en apoyo monopodal. Dura aproximadamente el 40 % del total del ciclo de marcha.

### 3.3. Prótesis de rodillas

Para reemplazar la parte amputada, una prótesis puede ser el recurso más adecuado para evitar el dolor asociado con la pérdida de una extremidad. En la Figura 3.6) se muestra una amputación transfemoral, y la prótesis correspondiente.

#### Clasificación de prótesis de rodillas

- **Rodilla simple.** Este tipo se muestra en la Figura 3.7. Se comporta como una bisagra con funciones solamente de flexión y extensión; sus características son: sencilla, de gran durabilidad, ligera, de bajo costo, y sin control de apoyo obligando a la persona mantenerse estable usando sus propios músculos. Usan fricción para evitar que la pierna se mueva muy rápido al balancearse.

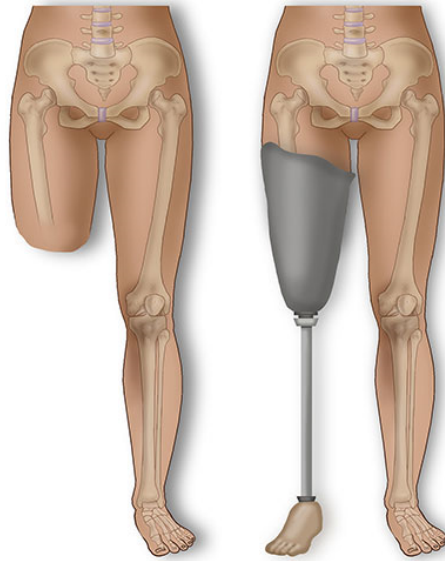


Figura 3.6: Amputación transfemoral



Figura 3.7: Rodilla simple

- **Rodillas policéntricas (ejes múltiples).** La Figura 3.8 muestra su diseño, el cual es más complejo pero brinda mayor libertad de movimiento. Sus características son: mayor peso que las simples, requieren de mantenimiento preventivo y correctivo, mayor estabilidad y se doblan durante la fase de balanceo, es decir cuando la pierna no está en contacto con el piso, pueden usarse para diferentes necesidades (muñón largo, amputación bilateral o desarticulación de rodilla), además tienen control simple de balanceo dando una velocidad adecuada para caminar.



Figura 3.8: Rodilla policéntrica

### 3.4. Estado del arte en prótesis de rodilla

Existen varios trabajos relacionados al diseño de prótesis de rodilla. En [64] se propone una prótesis externa del tipo policéntrica basada en un mecanismo de cuatro barras, en [65] se presenta el diseño de un mecanismo de rodilla de tipo policéntrico de cuatro barras con actuador mecánico, en [66] se presenta el diseño virtual de un mecanismo policéntrico, en [67] presenta una metodología para dimensionar un mecanismo policéntrico de rodilla de cuatro barras utilizando algoritmos genéticos y resaltan el hecho que la estabilidad del mecanismo depende del CIR durante la respuesta a la carga. En [68] se describe la optimización de la síntesis dimensional de un mecanismo para una prótesis del miembro inferior con algoritmos genéticos con un mecanismo de cuatro barras, con un conjunto de siete restricciones que describen la relación cinemática de los eslabones que lo componen, el diseño de la prótesis es policéntrica en donde se definen 9 puntos de precisión que describe una trayectoria suave y emplea una herramienta evolutiva basada en algoritmos genéticos. En [38] se realiza el diseño y construcción de una rodilla de tipo policéntrica que regula la flexión mediante pistón de fluido magnetoreológico que caracteriza valores de rapidez de deformación y variación de viscosidad al aumentar el campo magnético.

Por otra parte desde el punto de vista comercial existen una gran variedad fabricantes de prótesis de rodilla con diferentes características, en la tabla 3.1 se muestran algunas de ellas que se encuentran en el mercado:

---

Desarrollo de un algoritmo memético aplicado al diseño de una prótesis de rodilla

Nombre	Descripción
<b>Braun</b>	Cinemática natural con reversión y movimiento pivotante alrededor del cóndilo medial. Durante la flexión, la rodilla natural muestra una mayor reversión del fémur en el lado lateral, mientras que el fémur gira alrededor del centro medial, facilita el retroceso lateral y rotación medial.
<b>Baumer</b>	Componente femoral modular no bloqueado, para la aplicación en artroplastia primaria total de la rodilla.
<b>Stryker</b>	Artroplastia de rodilla sin cemento con supervivencia de hasta 18 años sin aflojamiento aséptico con tecnología de fijación biológica altamente porosa, ofrece un sistema de rodilla con implantes de triatlon Tritanium.
<b>Smith and Nephew</b>	Tiene superficies articulares anatómicas para reestablecer la anatomía original, permitiendo una posición anteroposterior (A/P) anatómica normal en todo el rango de movimiento, además proporciona gran resistencia y estabilidad.
<b>Groupe Lépine</b>	Con centro de rotación posterior y constante durante la totalidad de la flexión, la articulación se estabiliza y la acción del cuádriceps se ve reforzada en el momento de la extensión
<b>Corin</b>	Utiliza principios cinemáticos avanzados de la rodilla, mantiene la estabilidad de la rodilla en sintonía con tejidos blandos e incorpora instrumentos de vanguardia para optimizar la posición del implante.

Tabla 3.1: Algunas prótesis de marcas comerciales

### 3.5. Diseño dimensional de la prótesis de rodilla policéntrica

Las prótesis de rodilla con mecanismos de eje simple, es decir, las que cuentan con un solo centro instantáneo de rotación, tienen el inconveniente de que el paciente debe mantener la rodilla completamente recta cuando la prótesis está en contacto con el suelo, para mantener la estabilidad requiriendo un gran esfuerzo que repercute en un gasto de energía excesivo. En estudios realizados en [69, 70] se muestra que el eje de rotación cambia durante la marcha por lo cual se debe efectuar con mecanismos articulados.

Por lo anterior para el caso de estudio de la presente tesis se propuso una prótesis de rodilla policéntrica con un mecanismo de seis barras, como se ilustra en la Figura 3.9. El propósito es obtener las dimensiones óptimas de los eslabones que permitan el movimiento de la prótesis para que la marcha

sea lo más apegada a la natural. Existen diferentes propuestas en donde se usan mecanismos de cuatro barras por ser más simples, pero en [71] se plantea un mecanismo de seis barras argumentando que el acoplador de dicho mecanismo describe una trayectoria más cercana a la marcha humana.

### 3.5.1. Análisis cinemático del mecanismo de seis barras

El diseño de la prótesis de rodilla policéntrica que se propuso es un mecanismo de seis barras por lo que se realiza en primera instancia su análisis cinemático. Éste para su análisis, se considera como dos mecanismos unidos por eslabones ternarios, como se muestra en la Figura 3.9. El eslabón acoplador tiene la tarea de generar una trayectoria, que idealmente corresponde a los puntos de precisión definidos por el diseñador. En el diagrama 3.10 se identifican las 2 mallas cerradas, que permiten obtener los valores de las incógnitas que necesarias para el análisis y que dan por resultado las siguientes ecuaciones:

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4 \quad (3.1)$$

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_9 + \vec{r}_6 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{10} + \vec{r}_7 \quad (3.2)$$

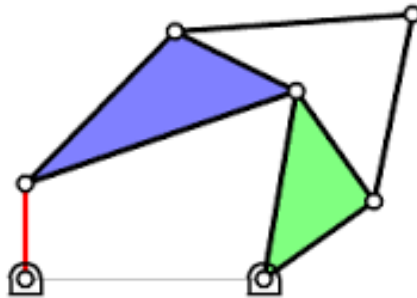


Figura 3.9: Mecanismo de seis barras de tipo Watt I

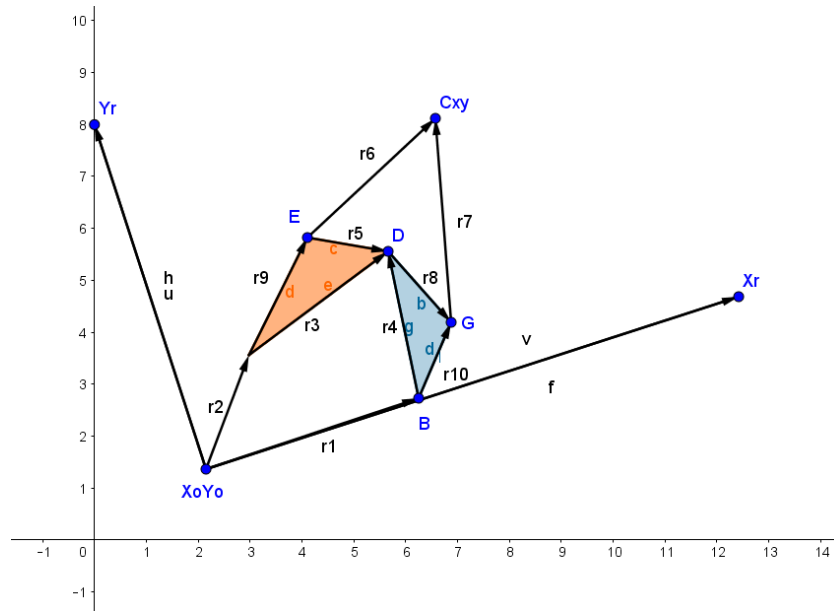


Figura 3.10: Mallas cerradas del mecanismo de seis barras tipo Watt 1

El análisis cinemático completo del mecanismo contempla el análisis de posiciones, el análisis de velocidades y el análisis de aceleraciones. Primeramente se trabaja la malla cerrada del mecanismo de cuatro barras formada por  $\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4$  para obtener los ángulos  $\theta_3$  y  $\theta_4$ . Posteriormente se analiza la malla cerrada formada por  $\vec{r}_2 + \vec{r}_9 + \vec{r}_6 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{10} + \vec{r}_7$ , para obtener el ángulo  $\theta_6$  y así obtener las coordenadas  $C(x, y)$  del acoplador tal como se puede ver en la figura 3.10. Éste primer análisis proporciona la información para realizar posteriormente el análisis de velocidades y de aceleraciones relativas, obteniéndose de esta manera el diseño completo del mecanismo. Dicho diseño ofrece la ventaja de que, gracias a su naturaleza policéntrica, facilita la emulación de una rodilla humana permitiendo una rotación estable en las diferentes fases de la marcha.

#### Análisis de posiciones en la primera malla cerrada del mecanismo de seis barras

Para realizar el análisis de posiciones se deben conocer todas las magnitudes de los vectores que representan cada uno de los eslabones unidos por juntas revolutas, además se debe conocer la posición angular del vector  $r_1$  (eslabón fijo o de tierra) y la posición angular del eslabón de entrada  $\theta_2$ . Los valores que son de interés por determinar son las posiciones angulares  $\theta_3$  y  $\theta_4$  de los eslabones  $r_3$  (acoplador) y del eslabón  $r_4$  (salida) respectivamente. De la Figura 3.10 se obtiene la ecuación 3.3, la cual representa cada uno de los vectores de posición; es importante señalar que los vectores deben formar una malla

cerrada, es decir, un polígono cerrado:

$$r_2 + r_3 = r_1 + r_4 \quad (3.3)$$

Al aplicar la notación polar a la ecuación 3.3 se tiene la siguiente expresión:

$$r_2 e^{j\theta_2} + r_3 e^{j\theta_3} = r_1 e^{j\theta_1} + r_4 e^{j\theta_4} \quad (3.4)$$

Al desarrollar la ecuación 3.4, usando la identidad de Euler resulta:

$$r_2(\cos \theta_2 + j \operatorname{sen} \theta_2) + r_3(\cos \theta_3 + j \operatorname{sen} \theta_3) = r_1(\cos \theta_1 + j \operatorname{sen} \theta_1) + r_4(\cos \theta_4 + j \operatorname{sen} \theta_4) \quad (3.5)$$

Separando las partes real e imaginaria de la ecuación 3.5, se obtiene un par de ecuaciones simultáneas con las incógnitas  $\theta_3$  y  $\theta_4$  respectivamente de la siguiente forma:

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 \quad (3.6)$$

$$jr_2 \operatorname{sen} \theta_2 + jr_3 \operatorname{sen} \theta_3 = jr_1 \operatorname{sen} \theta_1 + jr_4 \operatorname{sen} \theta_4 \quad (3.7)$$

#### Cálculo del ángulo $\theta_4$ del eslabón de salida $r_4$

Eliminando  $j$  de la ecuación 3.7 y despejando el término  $\theta_3$  en las expresiones 3.6 y 3.7, para obtener  $\theta_4$ :

$$r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2 \quad (3.8)$$

$$r_3 \operatorname{sen} \theta_3 = r_1 \operatorname{sen} \theta_1 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 - r_2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (3.9)$$



Elevando al cuadrado las ecuaciones 3.8 y 3.9 se obtiene:

$$\begin{aligned}
r_3^2 \cos^2 \theta_3 &= r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_1 r_4 \cos \theta_1 \cos \theta_4 - r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
&\quad + r_1 r_4 \cos \theta_1 \cos \theta_4 + r_4^2 \cos^2 \theta_4 - r_2 r_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4 \\
&\quad - r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_2 r_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 \\
&= r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_4^2 \cos^2 \theta_4 + 2r_1 r_4 \cos \theta_1 \cos \theta_4 - 2r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2r_2 r_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
r_3^2 \sin^2 \theta_3 &= r_1^2 \sin^2 \theta_1 + r_1 r_4 \sin \theta_1 \sin \theta_4 - r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\
&\quad + r_1 r_4 \sin \theta_1 \sin \theta_4 + r_4^2 \sin^2 \theta_4 - r_2 r_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 \\
&\quad - r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - r_2 r_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 \\
&= r_1^2 \sin^2 \theta_1 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 + r_4^2 \sin^2 \theta_4 + 2r_1 r_4 \sin \theta_1 \sin \theta_4 - 2r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2r_2 r_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Sumando 3.10 y 3.11, aplicando la identidad  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  y factorizando se tiene:

$$\begin{aligned}
r_3^2 &= r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2r_4 \cos \theta_4 (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) \\
&\quad + 2r_4 \sin \theta_4 (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2) - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Agrupando términos en 3.12 se tiene:

$$\begin{aligned}
2r_4(r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) \cos \theta_4 + 2r_4(r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2) \sin \theta_4 \\
+r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Se proponen las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  para simplificar la ecuación 3.13 obteniéndos:

$$A = 2r_4(r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) \tag{3.14}$$

$$B = 2r_4(r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2) \tag{3.15}$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 - \theta_2) \tag{3.16}$$

Sustituyendo las constantes en 3.13 resulta:

$$A \cos \theta_4 + B \operatorname{sen} \theta_4 + C = 0 \quad (3.17)$$

La ecuación 3.17 tiene una sola incógnita, la cual se puede resolver usando identidades trigonométricas de la siguiente forma:

$$A \left( \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_4}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_4}{2}} \right) + B \left( \frac{2 \tan \frac{\theta_4}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_4}{2}} \right) + C = 0 \quad (3.18)$$

Desarrollando se obtiene:

$$(C - A) \tan^2 \frac{\theta_4}{2} + 2B \tan \frac{\theta_4}{2} + (C + A) = 0 \quad (3.19)$$

La ecuación 3.19 se puede resolver usando el siguiente cambio de variable:

$$x = \tan \frac{\theta_4}{2} \quad (3.20)$$

La solución de la ecuación cuadrática 3.19 es:

$$\tan \frac{\theta_4}{2} = \frac{-(2B) \pm \sqrt{(2B)^2 - 4(C - A)(C + A)}}{2(C - A)} \quad (3.21)$$

Por lo tanto se obtiene el valor para  $\theta_4$ :

$$\theta_4 = 2 \arctan \left( \frac{-B \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C - A} \right) \quad (3.22)$$

### Cálculo del ángulo del eslabón de salida $\theta_3$

Para obtener el ángulo del eslabón acoplador del mecanismo de cuatro barras designado por  $\theta_3$ , se realiza el mismo procedimiento anteriormente expuesto. Se despeja el término que contiene  $\theta_4$  de las ecuaciones 3.6 y 3.7, para poder obtener  $\theta_3$  quedando:

$$r_4 \cos \theta_4 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_1 \cos \theta_1 \quad (3.23)$$

$$jr_4 \operatorname{sen} \theta_4 = jr_2 \operatorname{sen} \theta_2 + jr_3 \operatorname{sen} \theta_3 - jr_1 \operatorname{sen} \theta_1 \quad (3.24)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones 3.23 y 3.24, una vez eliminado  $j$  de la ecuación 3.24 se tiene:

$$\begin{aligned}
r_4^2 \cos^2 \theta_4 &= r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_2 r_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
&\quad + r_2 r_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + r_3^2 \cos^2 \theta_3 - r_1 r_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3 \\
&\quad - r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_1 r_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3 + r_1^2 \cos^2 \theta_1 \\
&= r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_3^2 \cos^2 \theta_3 + 2r_2 r_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - 2r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2r_1 r_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
r_4^2 \sin^2 \theta_4 &= r_2^2 \sin^2 \theta_2 + r_2 r_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\
&\quad + r_2 r_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + r_3^2 \sin^2 \theta_3 - r_1 r_3 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \\
&\quad - r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - r_1 r_3 \sin \theta_1 \sin \theta_3 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 \\
&= r_1^2 \sin^2 \theta_1 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 + r_3^2 \sin^2 \theta_3 + 2r_2 r_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - 2r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2r_1 r_3 \sin \theta_1 \sin \theta_3
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Sumando 3.25 y 3.26, luego aplicando la identidad trigonométrica  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  y posteriormente factorizando a  $\cos \theta_3$  y a  $\sin \theta_3$  se tiene:

$$\begin{aligned}
r_4^2 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_3 \cos \theta_3 (r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1) \\
&\quad + 2r_3 \sin \theta_3 (r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1) - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Agrupando términos en 3.27 se tiene:

$$\begin{aligned}
2r_3 (r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1) \cos \theta_3 + 2r_3 (r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1) \sin \theta_3 \\
+ r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Se proponen las constantes  $D$ ,  $E$  y  $F$  para simplificar la ecuación 3.28 obteniéndose:

$$D = 2r_3(r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1) \quad (3.29)$$

$$E = 2r_3(r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1) \quad (3.30)$$

$$F = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 - 2r_1r_2(\cos \theta_1 - \theta_2) \quad (3.31)$$

Sustituyendo las constantes en 3.28 resulta:

$$D \cos \theta_3 + E \sin \theta_3 + F = 0 \quad (3.32)$$

La ecuación 3.32 tiene una incógnita y se resuelve usando identidades trigonométricas como:

$$D \left( \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_3}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_3}{2}} \right) + E \left( \frac{2 \tan \frac{\theta_3}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_3}{2}} \right) + F = 0 \quad (3.33)$$

Desarrollando se obtiene:

$$(F - D) \tan^2 \frac{\theta_3}{2} + 2E \tan \frac{\theta_3}{2} + (F + D) = 0 \quad (3.34)$$

La ecuación 3.34 se puede resolver usando el siguiente cambio de variable:

$$x = \tan \frac{\theta_3}{2} \quad (3.35)$$

La solución de la ecuación cuadrática 3.34 es:

$$\tan \frac{\theta_3}{2} = \frac{-(2E) \pm \sqrt{(2E)^2 - 4(F - D)(F + D)}}{2(F - D)} \quad (3.36)$$

Por lo tanto se obtiene el valor para  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = 2 \arctan \left( \frac{-E \pm \sqrt{D^2 + E^2 - F^2}}{F - D} \right) \quad (3.37)$$

Es importante señalar que en las ecuaciones se debe elegir el signo apropiado del radical, debido a que está en función del tipo de configuración abierta o cerrada que se pueden obtener respectivamente.

### Análisis posiciones de la segunda malla cerrada del mecanismo de seis barras

De la Figura 3.10 se obtiene la ecuación 3.2, que representa a cada uno de los vectores de posición; en 3.10 se observa que los vectores forman una malla cerrada, esto es, un polígono cerrado de seis vectores.

$$r_2 + r_9 + r_6 = r_1 + r_{10} + r_7 \quad (3.38)$$

Al aplicar la notación polar a la ecuación 3.38 se tiene la siguiente expresión:

$$r_2 e^{j\theta_2} + r_9 e^{j\theta_9} + r_6 e^{j\theta_6} = r_1 e^{j\theta_1} + r_{10} e^{j\theta_{10}} + r_7 e^{j\theta_7} \quad (3.39)$$

Al desarrollar la ecuación 3.39, usando la identidad de Euler resulta:

$$\begin{aligned} r_2(\cos \theta_2 + j \operatorname{sen} \theta_2) + r_9(\cos \theta_9 + j \operatorname{sen} \theta_9) + r_6(\cos \theta_6 + j \operatorname{sen} \theta_6) = \\ r_1(\cos \theta_1 + j \operatorname{sen} \theta_1) + r_{10}(\cos \theta_{10} + j \operatorname{sen} \theta_{10}) + r_7(\cos \theta_7 + j \operatorname{sen} \theta_7) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Separando las partes real e imaginaria de la ecuación 3.40, se obtiene un par de ecuaciones simultáneas con las incógnitas  $\theta_6$  y  $\theta_7$  respectivamente de la siguiente forma:

$$r_7 \cos \theta_7 + r_1 \cos \theta_1 + r_{10} \cos \theta_{10} = r_2 \cos \theta_2 + r_9 \cos \theta_9 + r_6 \cos \theta_6 \quad (3.41)$$

$$jr_7 \operatorname{sen} \theta_7 + r_1 \operatorname{sen} \theta_1 + jr_{10} \operatorname{sen} \theta_{10} = jr_2 \operatorname{sen} \theta_2 + jr_9 \operatorname{sen} \theta_9 + jr_6 \operatorname{sen} \theta_6 \quad (3.42)$$

### Cálculo del ángulo $\theta_6$ del eslabón $r_6$

Se elimina  $j$  de la ecuación 3.42 y se despeja el término que contiene  $\theta_7$  en ambas ecuaciones 3.41 y 3.42, para poder obtener  $\theta_6$  quedando:

$$r_7 \cos \theta_7 = r_2 \cos \theta_2 + r_9 \cos \theta_9 + r_6 \cos \theta_6 - r_1 \cos \theta_1 - r_{10} \cos \theta_{10} \quad (3.43)$$

$$jr_7 \operatorname{sen} \theta_7 = jr_2 \operatorname{sen} \theta_2 + jr_9 \operatorname{sen} \theta_9 + jr_6 \operatorname{sen} \theta_6 - jr_1 \operatorname{sen} \theta_1 - jr_{10} \operatorname{sen} \theta_{10} \quad (3.44)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones 3.43 y 3.44 se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& r_7^2 \cos^2 \theta_7 = \\
& r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_2 r_9 \cos \theta_2 \cos \theta_9 + r_2 r_6 \cos \theta_2 \cos \theta_6 - r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_2 r_{10} \cos \theta_2 \cos \theta_{10} \\
& + r_2 r_9 \cos \theta_2 \cos \theta_9 + r_9^2 \cos^2 \theta_9 + r_6 r_9 \cos \theta_6 \cos \theta_9 - r_1 r_9 \cos \theta_1 \cos \theta_9 - r_9 r_{10} \cos \theta_9 \cos \theta_{10} \\
& + r_2 r_6 \cos \theta_2 \cos \theta_6 + r_6 r_9 \cos \theta_6 \cos \theta_9 + r_6^2 \cos^2 \theta_6 - r_1 r_6 \cos \theta_1 \cos \theta_6 - r_6 r_{10} \cos \theta_6 \cos \theta_{10} \\
& - r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_1 r_9 \cos \theta_1 \cos \theta_9 - r_1 r_6 \cos \theta_1 \cos \theta_6 + r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_1 r_{10} \cos \theta_1 \cos \theta_{10} \\
& - r_2 r_{10} \cos \theta_2 \cos \theta_{10} - r_9 r_{10} \cos \theta_9 \cos \theta_{10} - r_6 r_{10} \cos \theta_6 \cos \theta_{10} + r_1 r_{10} \cos \theta_1 \cos \theta_{10} + r_{10}^2 \cos^2 \theta_{10}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
& r_7^2 \sin^2 \theta_7 = \\
& r_2^2 \sin^2 \theta_2 + r_2 r_9 \sin \theta_2 \sin \theta_9 + r_2 r_6 \sin \theta_2 \sin \theta_6 - r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - r_2 r_{10} \sin \theta_2 \sin \theta_{10} \\
& + r_2 r_9 \sin \theta_2 \sin \theta_9 + r_9^2 \sin^2 \theta_9 + r_6 r_9 \sin \theta_6 \sin \theta_9 - r_1 r_9 \sin \theta_1 \sin \theta_9 - r_9 r_{10} \sin \theta_9 \sin \theta_{10} \\
& + r_2 r_6 \sin \theta_2 \sin \theta_6 + r_6 r_9 \sin \theta_6 \sin \theta_9 + r_6^2 \sin^2 \theta_6 - r_1 r_6 \sin \theta_1 \sin \theta_6 - r_6 r_{10} \sin \theta_6 \sin \theta_{10} \\
& - r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - r_1 r_9 \sin \theta_1 \sin \theta_9 - r_1 r_6 \sin \theta_1 \sin \theta_6 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 + r_1 r_{10} \sin \theta_1 \sin \theta_{10} \\
& - r_2 r_{10} \sin \theta_2 \sin \theta_{10} - r_9 r_{10} \sin \theta_9 \sin \theta_{10} - r_6 r_{10} \sin \theta_6 \sin \theta_{10} + r_1 r_{10} \sin \theta_1 \sin \theta_{10} + r_{10}^2 \sin^2 \theta_{10}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Sumando 3.45 y 3.46, luego aplicando la identidad trigonométrica  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  y posteriormente factorizando a  $\cos \theta_6$  y a  $\sin \theta_6$  se tiene:

$$\begin{aligned}
& r_7^2 = r_2^2 + r_9^2 + r_6^2 + r_1^2 + r_{10}^2 \\
& + 2r_2 r_9 (\cos \theta_2 \cos \theta_9 + \sin \theta_2 \sin \theta_9) \\
& + \cos \theta_6 (2r_2 r_6 \cos \theta_2 + 2r_6 r_9 \cos \theta_9 - 2r_1 r_6 \cos \theta_1 - 2r_6 r_{10} \cos \theta_{10}) \\
& + \sin \theta_6 (2r_2 r_6 \sin \theta_2 + 2r_6 r_9 \sin \theta_9 - 2r_1 r_6 \sin \theta_1 - 2r_6 r_{10} \sin \theta_{10}) \\
& + 2r_1 r_9 (\cos \theta_2 - \theta_9) - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 - \theta_2) - 2r_1 r_{10} (\cos \theta_1 - \theta_{10}) \\
& - 2r_1 r_9 (\cos \theta_1 - \theta_9) - 2r_9 r_{10} (\cos \theta_9 - \theta_{10}) + 2r_1 r_{10} (\cos \theta_1 - \theta_{10})
\end{aligned} \tag{3.47}$$

---

Desarrollo de un algoritmo memético aplicado al diseño de una prótesis de rodilla

Se proponen las constantes  $G$ ,  $H$  y  $I$  para simplificar la ecuación 3.47 obteniéndose:

$$G = 2r_6(r_2 \cos \theta_2 + r_9 \cos \theta_9 - r_1 \cos \theta_1 - r_{10} \cos \theta_{10}) \quad (3.48)$$

$$H = 2r_6(r_2 \sin \theta_2 + r_9 \sin \theta_9 - r_1 \sin \theta_1 - r_{10} \sin \theta_{10}) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} I = & r_1^2 + r_2^2 + r_6^2 - r_7^2 + r_9^2 + r_{10}^2 \\ & - 2r_1r_9(\cos \theta_2 - \theta_9) - 2r_1r_2(\cos \theta_1 - \theta_2) \\ & - 2r_1r_{10}(\cos \theta_1 - \theta_{10}) - 2r_1r_9(\cos \theta_1 - \theta_9) - 2r_9r_{10}(\cos \theta_9 - \theta_{10}) + 2r_1r_{10}(\cos \theta_1 - \theta_{10}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Sustituyendo las constantes en 3.47 resulta:

$$G \cos \theta_6 + H \sin \theta_6 + I = 0 \quad (3.51)$$

La ecuación 3.47 tiene una incógnita y se resuelve usando las siguientes identidades trigonométricas:

$$G \left( \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_6}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_6}{2}} \right) + H \left( \frac{2 \tan \frac{\theta_6}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_6}{2}} \right) + I = 0 \quad (3.52)$$

Desarrollando se obtiene:

$$(I - G) \tan^2 \frac{\theta_6}{2} + 2H \tan \frac{\theta_6}{2} + (I + G) = 0 \quad (3.53)$$

La ecuación 3.53 se puede resolver usando el siguiente cambio de variable:

$$x = \tan \frac{\theta_6}{2} \quad (3.54)$$

La solución de la ecuación cuadrática 3.53 es:

$$\tan \frac{\theta_6}{2} = \frac{-(2H) \pm \sqrt{(2H)^2 - 4(I - G)(I + G)}}{2(I - G)} \quad (3.55)$$

Por lo tanto se obtiene el valor para  $\theta_6$ :

$$\theta_6 = 2 \arctan \left( \frac{-H \pm \sqrt{G^2 + H^2 - I^2}}{I - G} \right) \quad (3.56)$$

### Cálculo del ángulo $\theta_7$ del eslabón $r_7$

Para calcular el ángulo del eslabón acoplador del mecanismo de cuatro barras designado por  $\theta_7$ , se sigue el mismo procedimiento de  $\theta_6$ . Despejando el término de  $\theta_6$  en las ecuaciones 3.41 y 3.42,

$$r_6 \cos \theta_6 = r_1 \cos \theta_1 + r_{10} \cos \theta_{10} + r_7 \cos \theta_7 - r_2 \cos \theta_2 - r_9 \cos \theta_9 \quad (3.57)$$

$$jr_6 \sin \theta_6 = jr_1 \sin \theta_1 + jr_{10} \sin \theta_{10} + jr_7 \sin \theta_7 - jr_2 \sin \theta_2 - jr_9 \sin \theta_9 \quad (3.58)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones 3.23 y 3.24, una vez eliminado  $j$  de la ecuación 3.24 se tiene:

$$\begin{aligned} r_6^2 \cos^2 \theta_6 = & \\ & r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_1 r_{10} \cos \theta_1 \cos \theta_{10} + r_1 r_7 \cos \theta_1 \cos \theta_7 - r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_1 r_9 \cos \theta_1 \cos \theta_9 \\ & + r_1 r_{10} \cos \theta_1 \cos \theta_{10} + r_{10}^2 \cos^2 \theta_{10} + r_7 r_{10} \cos \theta_7 \cos \theta_{10} - r_2 r_{10} \cos \theta_2 \cos \theta_{10} - r_9 r_{10} \cos \theta_9 \cos \theta_{10} \\ & + r_1 r_7 \cos \theta_1 \cos \theta_7 + r_7 r_{10} \cos \theta_7 \cos \theta_{10} + r_7^2 \cos^2 \theta_7 - r_2 r_7 \cos \theta_2 \cos \theta_7 - r_7 r_9 \cos \theta_7 \cos \theta_9 \\ & - r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_2 r_{10} \cos \theta_2 \cos \theta_{10} - r_2 r_7 \cos \theta_2 \cos \theta_7 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_2 r_9 \cos \theta_2 \cos \theta_9 \\ & - r_1 r_9 \cos \theta_1 \cos \theta_9 - r_9 r_{10} \cos \theta_9 \cos \theta_{10} - r_7 r_9 \cos \theta_7 \cos \theta_9 + r_2 r_9 \cos \theta_2 \cos \theta_9 + r_9^2 \cos^2 \theta_9 \\ & = r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_{10}^2 \cos^2 \theta_{10} + r_7^2 \cos^2 \theta_7 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_9^2 \cos^2 \theta_9 \\ & + 2r_1 r_{10} \cos \theta_1 \cos \theta_{10} + 2r_1 r_7 \cos \theta_1 \cos \theta_7 - 2r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2r_1 r_9 \cos \theta_1 \cos \theta_9 \\ & + 2r_7 r_{10} \cos \theta_7 \cos \theta_{10} - 2r_2 r_{10} \cos \theta_2 \cos \theta_{10} - 2r_9 r_{10} \cos \theta_9 \cos \theta_{10} - 2r_2 r_7 \cos \theta_2 \cos \theta_7 \\ & - 2r_7 r_9 \cos \theta_7 \cos \theta_9 + 2r_2 r_9 \cos \theta_2 \cos \theta_9 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para obtener  $\theta_7$ , se despeja  $\theta_6$  y se eleva al cuadrado:



$$\begin{aligned}
& r_6^2 \text{sen}^2 \theta_6 = \\
& r_1^2 \text{sen}^2 \theta_1 + r_1 r_{10} \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_{10} + r_1 r_7 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_7 - r_1 r_2 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 - r_1 r_9 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_9 \\
& + r_1 r_{10} \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_{10} + r_{10}^2 \text{sen}^2 \theta_{10} + r_7 r_{10} \text{sen} \theta_7 \text{sen} \theta_{10} - r_2 r_{10} \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_{10} - r_9 r_{10} \text{sen} \theta_9 \text{sen} \theta_{10} \\
& + r_1 r_7 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_7 + r_7 r_{10} \text{sen} \theta_7 \text{sen} \theta_{10} + r_7^2 \text{sen}^2 \theta_7 - r_2 r_7 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_7 - r_7 r_9 \text{sen} \theta_7 \text{sen} \theta_9 \\
& - r_1 r_2 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 - r_2 r_{10} \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_{10} - r_2 r_7 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_7 + r_2^2 \text{sen}^2 \theta_2 + r_2 r_9 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_9 \\
& - r_1 r_9 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_9 - r_9 r_{10} \text{sen} \theta_9 \text{sen} \theta_{10} - r_7 r_9 \text{sen} \theta_7 \text{sen} \theta_9 + r_2 r_9 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_9 + r_9^2 \text{sen}^2 \theta_9 \\
& = r_1^2 \text{sen}^2 \theta_1 + r_{10}^2 \text{sen}^2 \theta_{10} + r_7^2 \text{sen}^2 \theta_7 + r_2^2 \text{sen}^2 \theta_2 + r_9^2 \text{sen}^2 \theta_9 \\
& + 2r_1 r_{10} \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_{10} + 2r_1 r_7 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_7 - 2r_1 r_2 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 - 2r_1 r_9 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_9 \\
& + 2r_7 r_{10} \text{sen} \theta_7 \text{sen} \theta_{10} - 2r_2 r_{10} \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_{10} - 2r_9 r_{10} \text{sen} \theta_9 \text{sen} \theta_{10} - 2r_2 r_7 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_7 \\
& - 2r_7 r_9 \text{sen} \theta_7 \text{sen} \theta_9 + 2r_2 r_9 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_9
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Sumando 3.59 y 3.60, luego aplicando la identidad trigonométrica  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$  y posteriormente factorizando a  $\text{cos} \theta_7$  y a  $\text{sen} \theta_7$  se tiene:

$$\begin{aligned}
& r_6^2 = r_1^2 + r_{10}^2 + r_7^2 + r_2^2 + r_9^2 \\
& + \text{cos} \theta_7 (2r_1 r_7 \text{cos} \theta_1 + 2r_7 r_{10} \text{cos} \theta_{10} - 2r_2 r_7 \text{cos} \theta_2 - 2r_7 r_9 \text{cos} \theta_9) \\
& + \text{sen} \theta_7 (2r_1 r_7 \text{sen} \theta_1 + 2r_7 r_{10} \text{sen} \theta_{10} - 2r_2 r_7 \text{sen} \theta_2 - 2r_7 r_9 \text{sen} \theta_9) \\
& + 2r_1 r_{10} (\text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_{10} - \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_{10}) - 2r_1 r_2 (\text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2 - \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2) \\
& - 2r_1 r_9 (\text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_9 - \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_9) - 2r_2 r_{10} (\text{cos} \theta_2 \text{cos} \theta_{10} - \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_{10}) \\
& - 2r_9 r_{10} (\text{cos} \theta_9 \text{cos} \theta_{10} - \text{sen} \theta_9 \text{sen} \theta_{10}) + 2r_2 r_9 (\text{cos} \theta_2 \text{cos} \theta_9 - \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_9)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Agrupando términos en 3.61

$$\begin{aligned}
& (2r_1r_7 \cos \theta_1 + 2r_7r_{10} \cos \theta_{10} - 2r_2r_7 \cos \theta_2 - 2r_7r_9 \cos \theta_9) \cos \theta_7 \\
& + (2r_1r_7 \sin \theta_1 + 2r_7r_{10} \sin \theta_{10} - 2r_2r_7 \sin \theta_2 - 2r_7r_9 \sin \theta_9) \sin \theta_7 \\
& \quad + r_1^2 + r_{10}^2 + r_7^2 + r_2^2 + r_9^2 - r_6^2 \\
& \quad + 2r_1r_{10} \cos(\theta_1 - \theta_{10}) - 2r_2r_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 2r_1r_9 \cos(\theta_1 - \theta_9) \\
& \quad - 2r_2r_{10} \cos(\theta_2 - \theta_{10}) - 2r_9r_{10} \cos(\theta_9 - \theta_{10}) + 2r_2r_9 \cos(\theta_2 - \theta_9)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Se proponen las constantes  $J$ ,  $K$  y  $L$  para simplificar la ecuación 3.62 obteniéndose:

$$J = 2r_7(r_1 \cos \theta_1 + r_{10} \cos \theta_{10} - r_2 \cos \theta_2 - r_9 \cos \theta_9) \tag{3.63}$$

$$K = 2r_7(r_1 \sin \theta_1 + r_{10} \sin \theta_{10} - r_2 \sin \theta_2 - r_9 \sin \theta_9) \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
L = & r_1^2 + r_{10}^2 + r_7^2 + r_2^2 + r_9^2 - r_6^2 + 2r_1r_{10}(\cos \theta_1 - \theta_{10}) \\
& - 2r_1r_2(\cos \theta_1 - \theta_2) - 2r_1r_9(\cos \theta_1 - \theta_9) - 2r_2r_{10}(\cos \theta_2 - \theta_{10}) - 2r_9r_{10}(\cos \theta_9 - \theta_{10}) + 2r_2r_9(\cos \theta_2 - \theta_9)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Sustituyendo las constantes en 3.62 resulta:

$$J \cos \theta_7 + K \sin \theta_7 + L = 0 \tag{3.66}$$

La ecuación 3.66 tiene una incógnita y se resuelve usando las identidades trigonométricas:

$$J \left( \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_7}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_7}{2}} \right) + K \left( \frac{2 \tan \frac{\theta_7}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_7}{2}} \right) + L = 0 \tag{3.67}$$

Despejando se obtiene:

$$(L - J) \tan^2 \frac{\theta_7}{2} + 2K \tan \frac{\theta_7}{2} + (L + J) = 0 \tag{3.68}$$

La ecuación 3.68 se puede resolver usando el siguiente cambio de variable:

$$x = \tan \frac{\theta_7}{2} \quad (3.69)$$

La solución de la ecuación cuadrática 3.68 es:

$$\tan \frac{\theta_7}{2} = \frac{-(2H) \pm \sqrt{(2H)^2 - 4(I - G)(I + G)}}{2(I - G)} \quad (3.70)$$

Por lo tanto se obtiene el valor para  $\theta_7$ :

$$\theta_7 = 2 \arctan \left( \frac{-H \pm \sqrt{G^2 + H^2 - I^2}}{I - G} \right) \quad (3.71)$$

#### Cálculo de los puntos de precisión ( $C_x^i, C_y^i$ )

Para poder calcular los puntos de trayectoria del mecanismo de seis barras, es necesario obtener los valores de los ángulos  $\gamma_9$  y  $\gamma_{10}$ , lo cual se logra aplicando la ley de los cosenos:

$$\gamma_9 = \arccos \frac{r_3^2 + r_9^2 - r_5^2}{2r_3r_9} \quad (3.72)$$

$$\gamma_{10} = \arccos \frac{r_4^2 + r_{10}^2 - r_8^2}{2r_4r_{10}} \quad (3.73)$$

$$\theta_9 = \theta_3 + \gamma_9 \quad (3.74)$$

$$\theta_{10} = \theta_4 - \gamma_{10} \quad (3.75)$$

De esta forma se puede calcular el punto  $C(x_r, y_r)$ :

$$C_{xr} = r_2 \cos \theta_2 + r_9(\cos \theta_3 + \theta_9) + r_6 \cos \theta_6 \quad (3.76)$$

$$C_{yr} = r_2 \sen \theta_2 + r_9(\sen \theta_3 + \theta_9) + r_6 \sen \theta_6 \quad (3.77)$$

Transformando las coordenadas por traslación y rotación se obtiene  $C(x, y)$ :

$$C_x = C_{xr} \cos \theta_0 - C_{yr} \sin \theta_0 + x_0 \quad (3.78)$$

$$C_y = C_{xr} \sin \theta_0 + C_{yr} \cos \theta_0 + y_0 \quad (3.79)$$

Es importante señalar que en las ecuaciones se debe elegir el signo apropiado del radical, debido a que está en función del tipo de configuración abierta o cerrada que se pueden obtener respectivamente.

### Análisis de velocidades de la primera malla del mecanismo de seis barras

Para realizar el análisis de velocidades se debe derivar la ecuación 3.4 correspondiente a la primera malla cerrada, en los eslabones que presentan movimiento angular:

$$j\omega_2 r_2 e^{j\theta_2} + j\omega_3 r_3 e^{j\theta_3} = j\omega_4 r_4 e^{j\theta_4} \quad (3.80)$$

Reescribiendo la ecuación 3.80 se tiene:

$$V_{r_2} + V_{r_{2-4}} = V_{r_4} \quad (3.81)$$

La ecuación 3.81 permite obtener la velocidad lineal absoluta de cualquier punto del eslabón acoplador  $r_3$ , habiendo obtenido  $\omega_3$ . Dividiendo la ecuación 3.80 por  $j e^{j\omega_3}$  se tiene:

$$\omega_2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_3)} + \omega_3 r_3 = \omega_4 r_4 e^{j(\theta_4 - \theta_3)} \quad (3.82)$$

tomando únicamente los términos imaginarios, y sustituyendo la ecuación de Euler en 3.82 se tiene:

$$\omega_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) = \omega_4 r_4 \sin(\theta_4 - \theta_3) \quad (3.83)$$

donde se obtiene:

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad (3.84)$$

Para obtener  $\omega_3$ , se divide la ecuación 3.80 por  $j e^{j\theta_4}$ , obteniendo:

$$\omega_2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_4)} + \omega_3 r_3 e^{j(\theta_3 - \theta_4)} = \omega_4 r_4 \quad (3.85)$$

Analizando ahora la parte imaginaria se tiene:

$$\omega_2 r_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_4) = -\omega_3 r_3 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4) \quad (3.86)$$

Finalmente se obtiene:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 r_2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{r_3 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (3.87)$$

Es importante notar que  $\omega_3$  y  $\omega_4$  pueden tomar valores positivos o negativos. Con valores positivos los eslabones giran en sentido antihorario y con valores negativos giran con sentido horario respectivamente.

### Análisis de velocidades de la segunda malla del mecanismo

Para realizar el análisis de velocidades se debe derivar la ecuación 3.39, en los eslabones que presentan movimiento angular:

$$j\omega_2 r_2 e^{j\theta_2} + j\omega_9 r_9 e^{j\theta_9} + j\omega_6 r_6 e^{j\theta_6} = j\omega_{10} r_{10} e^{j\theta_{10}} + j\omega_7 r_7 e^{j\theta_7} \quad (3.88)$$

Reescribiendo la ecuación 3.88 se tiene:

$$V_{r_2} + V_{r_9} + V_{r_{6-7}} = V_{r_{10}} + V_{r_7} \quad (3.89)$$

La ecuación 3.81 permite obtener la velocidad lineal absoluta del cualquier punto del eslabón acoplador  $r_6$ , al obtenerse  $\omega_6$ . Dividiendo la ecuación 3.88 por  $j e^{j\omega_6}$  se tiene:

$$\omega_2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_6)} + \omega_9 r_9 e^{j(\theta_9 - \theta_6)} + \omega_6 r_6 = \omega_{10} r_{10} e^{j(\theta_{10} - \theta_6)} + \omega_7 r_7 e^{j(\theta_7 - \theta_6)} \quad (3.90)$$

Sustituyendo la ecuación de Euler en 3.82y eliminando la parte imaginaria, se tiene:

$$\omega_2 r_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_6) + \omega_9 r_9 \text{sen}(\theta_9 - \theta_6) = \omega_{10} r_{10} \text{sen}(\theta_{10} - \theta_6) + \omega_7 r_7 \text{sen}(\theta_7 - \theta_6) \quad (3.91)$$

donde se obtiene  $\omega_7$ :

$$\omega_7 = \frac{\omega_2 r_2 \sen(\theta_2 - \theta_6) + \omega_9 r_9 \sen(\theta_9 - \theta_6) - \omega_{10} r_2 \sen(\theta_{10} - \theta_6)}{r_7 \sen(\theta_7 - \theta_6)} \quad (3.92)$$

Para obtener  $\omega_6$ , se divide la ecuación 3.88 por  $j e^{j\theta_7}$ , obteniendo:

$$\omega_2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_7)} + \omega_9 r_9 e^{j(\theta_9 - \theta_7)} + \omega_6 r_6 e^{j(\theta_6 - \theta_7)} = \omega_{10} r_{10} e^{j(\theta_{10} - \theta_7)} + \omega_9 r_9 e^{j(\theta_9 - \theta_7)} + \omega_7 r_7 \quad (3.93)$$

Analizando ahora la parte imaginaria se tiene:

$$\omega_2 r_2 \sen(\theta_2 - \theta_7) + \omega_9 r_9 \sen(\theta_9 - \theta_7) + \omega_6 r_6 \sen(\theta_6 - \theta_7) = \omega_{10} r_{10} \sen(\theta_{10} - \theta_7) \quad (3.94)$$

Finalmente se obtiene:

$$\omega_6 = \frac{\omega_{10} r_{10} \sen(\theta_{10} - \theta_7) - \omega_9 r_9 \sen(\theta_9 - \theta_7) - \omega_2 r_2 \sen(\theta_2 - \theta_7)}{r_6 \sen(\theta_6 - \theta_7)} \quad (3.95)$$

Es importante notar que  $\omega_6$  y  $\omega_7$  pueden tomar valores positivos o negativos. Con valores positivos los eslabones giran en sentido antihorario y con valores negativos giran con sentido horario respectivamente.

### Análisis de aceleraciones de la primera malla del mecanismo de seis barras

Todos los eslabones tienen movimiento de rotación absoluto o relativo a excepción del eslabón de referencia  $r_1$  (bancada), por lo tanto cada uno presenta aceleración tangencial y aceleración normal. Los vectores de aceleración que contienen el término  $j$  son las aceleraciones tangenciales, es decir son perpendiculares a su vector de posición. Los vectores precedidos por un signo negativo son las aceleraciones normales y tienen la misma dirección pero sentido opuesto al vector de posición. Considerando todos los eslabones restringidos a moverse entre ellos de forma angular debido a las juntas revolutas que unen dichos eslabones, resulta la ecuación que describe las aceleraciones, al derivar la ecuación 3.80:

$$-\omega_2^2 r_2 e^{j\theta_2} + j\alpha_2 r_2 e^{j\theta_2} - \omega_3^2 r_3 e^{j\theta_3} + j\alpha_3 r_3 e^{j\theta_3} = \omega_4^2 r_4 e^{j\theta_4} + j\alpha_4 r_4 e^{j\theta_4} \quad (3.96)$$

Reescribiendo en términos de aceleraciones tangenciales y normales se tiene:

---

Desarrollo de un algoritmo memético aplicado al diseño de una prótesis de rodilla

$$A_{r_2}^N + A_{r_2}^T + A_{r_{2-4}}^N + A_{r_{2-4}}^T = A_{r_4}^N + A_{r_4}^T \quad (3.97)$$

En términos de aceleraciones absolutas:

$$A_{r_2} + A_{r_{2-4}} = A_{r_4} \quad (3.98)$$

Dividiendo la ecuación 3.96 por  $e^{j\theta_3}$  para que  $\alpha_3$  se elimine, resulta:

$$\begin{aligned} -\omega_2^2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_3)} + j\alpha_2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_3)} - \omega_3^2 r_3 + j\alpha_3 r_3 \\ = -\omega_4^2 r_4 e^{j(\theta_4 - \theta_3)} + j\alpha_4 r_4 e^{j(\theta_4 - \theta_3)} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Usando la identidad de Euler y analizando la parte real de la ecuación 3.99 se tiene:

$$\begin{aligned} -\omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) - \omega_3^2 r_3 \\ = -\omega_4^2 r_4 \cos(\theta_4 - \theta_3) - \alpha_4 r_4 \sin(\theta_4 - \theta_3) \end{aligned} \quad (3.100)$$

despejando  $\alpha_4$ :

$$\alpha_4 = \frac{\omega_3^2 r_3 + \omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) - \omega_4^2 r_4 \cos(\theta_4 - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad (3.101)$$

Para calcular  $\alpha_3$  realizamos el mismo procedimiento. Se divide la ecuación 3.96 por  $e^{j\theta_4}$ :

$$\begin{aligned} -\omega_2^2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_4)} + j\alpha_2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_4)} - \omega_3^2 r_3 e^{j(\theta_3 - \theta_4)} + j\alpha_3 r_3 e^{j(\theta_3 - \theta_4)} \\ = -\omega_4^2 r_4 + j\alpha_4 r_4 \end{aligned} \quad (3.102)$$

Aplicando Euler y analizando la parte real de la ecuación 3.102:

$$-\omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) - \omega_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) - \alpha_3 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4) = -\omega_4^2 r_4 \quad (3.103)$$

Finalmente se obtiene  $\alpha_3$ :

$$\alpha_3 = \frac{\omega_4^2 r_4 + \omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) - \omega_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (3.104)$$

### Análisis de aceleraciones de la segunda malla del mecanismo de seis barras

En la figura se observa que en la segunda malla los eslabones con movimiento angular debido a las juntas revolutas. La ecuación que describe las aceleraciones se obtiene al derivar la ecuación 3.88:

$$\begin{aligned} -\omega_2^2 r_2 e^{j\theta_2} + j\alpha_2 r_2 e^{j\theta_2} - \omega_9^2 r_9 e^{j\theta_9} + j\alpha_9 r_9 e^{j\theta_9} - \omega_6^2 r_6 e^{j\theta_6} + j\alpha_6 r_6 e^{j\theta_6} \\ = \omega_{10}^2 r_{10} e^{j\theta_{10}} + j\alpha_{10} r_{10} e^{j\theta_{10}} - \omega_7^2 r_7 e^{j\theta_7} + j\alpha_7 r_7 e^{j\theta_7} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Reescribiendo en términos de aceleraciones tangenciales y normales se tiene:

$$A_{r_2}^N + A_{r_2}^T + A_{r_9}^N + A_{r_9}^T + A_{r_{6-7}}^N + A_{r_{6-7}}^T = A_{r_{10}}^N + A_{r_{10}}^T + A_{r_7}^N + A_{r_7}^T \quad (3.106)$$

En términos de aceleraciones absolutas:

$$A_{r_2} + A_{r_9} + A_{r_{6-7}} = A_{r_{10}} + A_{r_7} \quad (3.107)$$

Dividiendo la ecuación 3.105 por  $e^{j\theta_6}$  para que  $\alpha_3$  se elimine, resulta:

$$\begin{aligned} -\omega_2^2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_6)} + j\alpha_2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_6)} - \omega_9^2 r_9 e^{j(\theta_9 - \theta_6)} + j\alpha_9 r_9 e^{j(\theta_9 - \theta_6)} - \omega_6^2 r_6 + j\alpha_6 r_6 \\ = -\omega_{10}^2 r_{10} e^{j(\theta_{10} - \theta_6)} + j\alpha_{10} r_{10} e^{j(\theta_{10} - \theta_6)} - \omega_7^2 r_7 e^{j(\theta_7 - \theta_6)} + j\alpha_7 r_7 e^{j(\theta_7 - \theta_6)} \end{aligned} \quad (3.108)$$

Usando la identidad de Euler y analizando la parte real de la ecuación 3.88 se tiene:



$$\begin{aligned}
& -\omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_6) - \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_6) - \omega_9^2 r_9 \cos(\theta_9 - \theta_6) - \alpha_9 r_9 \sin(\theta_9 - \theta_6) - \omega_6^2 r_6 \\
& = -\omega_{10}^2 r_{10} \cos(\theta_{10} - \theta_6) - \alpha_{10} r_{10} \sin(\theta_{10} - \theta_6) - \omega_7^2 r_7 \cos(\theta_7 - \theta_6) - \alpha_7 r_7 \sin(\theta_7 - \theta_6)
\end{aligned} \tag{3.109}$$

despejando  $\alpha_4$ :

$$\alpha_7 = \frac{\omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_6) + \omega_9^2 r_9 \cos(\theta_9 - \theta_6) + \omega_7^2 r_7 \cos(\theta_7 - \theta_6) + \alpha_{10} r_{10} \sin(\theta_{10} - \theta_6)}{r_7 \sin(\theta_7 - \theta_6)} \tag{3.110}$$

Para calcular  $\alpha_3$  realizamos el mismo procedimiento. Se divide la ecuación ?? por  $e^{j\theta_4}$ :

$$\begin{aligned}
& -\omega_2^2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_4)} + j\alpha_2 r_2 e^{j(\theta_2 - \theta_4)} - \omega_3^2 r_3 e^{j(\theta_3 - \theta_4)} + j\alpha_3 r_3 e^{j(\theta_3 - \theta_4)} \\
& = -\omega_4^2 r_4 + j\alpha_4 r_4
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Aplicando Euler y analizando la parte real de la ecuación ??:

$$-\omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) - \omega_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) - \alpha_3 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4) = -\omega_4^2 r_4 \tag{3.112}$$

Finalmente se obtiene  $\alpha_3$ :

$$\alpha_3 = \frac{\omega_4^2 r_4 + \omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + \alpha_2 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) - \omega_3^2 r_3 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \tag{3.113}$$



## Capítulo 4

# Desarrollo del algoritmo MemDEFP y su aplicación al caso de estudio

### 4.1. Diseño del algoritmo memético MemDEFP

En este trabajo de tesis se desarrolló e implementó el algoritmo memético denominado MemDEFP, debido a que utiliza como buscador global el algoritmo de Evolución Diferencial (DE), y su buscador local se implementó con el algoritmo de Polinización de Flores (FP). DE se escogió por ser un algoritmo ampliamente utilizado con muy buenos resultados en los problemas de optimización por lo cual resulta un reto igualarlo o inclusive superarlo; por su parte, FP es un algoritmo novedoso que ha mostrado resultados promisorios [54, 55]. Cabe señalar que en la bibliografía especializada no se hace mención explícita acerca de qué buscadores globales o locales se deben utilizar al formar un algoritmo memético, ni el modo en que ellos deban interactuar. Por ello, para este trabajo se determinó usar los algoritmos mencionados anteriormente de acuerdo a su rendimiento probado de forma individual.

La figura 4.1 muestra el diagrama de flujo del algoritmo memético MemDEFP, que consta de los siguientes módulos:

- **Generador de la población inicial.** Genera los primeros individuos de forma aleatoria.
- **Buscador global.** Algoritmo de Evolución Diferencial.
- **Buscador local.** Algoritmo de Polinización de Flores.

- **Módulo de selección de individuos.** Estrategias para seleccionar una parte de la población global que alimenta al buscador local.
- **Módulo de integración de individuos.** Realiza la unión de las poblaciones global y local, restituyendo el número de individuos iniciales para la siguiente generación.

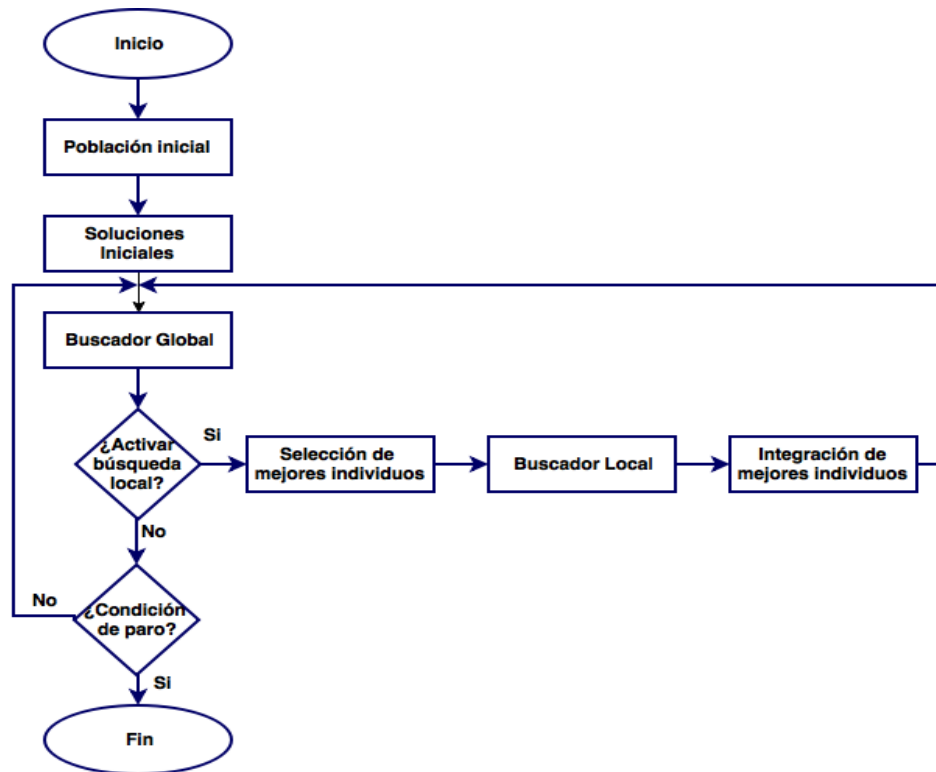


Figura 4.1: Diagrama de flujo del algoritmo memético MemDEFP

#### 4.1.1. Componente de búsqueda global

El programa MemDEFP utiliza como buscador global al algoritmo de Evolución Diferencial, el cual es una metaheurística poblacional. Para dicho algoritmo de búsqueda global se implementó el mecanismo de manejo de restricciones basado en Reglas de Deb descritas en la página 16. Se genera en todos los casos una población inicial de forma aleatoria, que representan un conjunto de soluciones candidatas que satisfacen las cotas de cada variable de diseño; para tal efecto se implementó la función *meterRango*.

De las soluciones candidatas obtenidas por el buscador global se selecciona un subconjunto que se usan como entrada al algoritmo de búsqueda local, el cual para el caso del algoritmo de Polinización

de Flores, se tiene la ventaja en comparación con otros buscadores locales de que, se puede ajustar la cantidad de individuos de la población local, lo cual da origen a un problema de sintonización.

- Cada individuo de la población se representa como un vector de dimensión  $d$ ,  $x_i = x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{d,i}$  donde  $d$  es el número de variables de diseño,  $x_i$  es un individuo de la población y  $x_{j,i}, j = 1, 2, \dots, d$  es un componente del vector.
- Para realizar la mutación, para cada vector  $x_i$ , en la generación  $t$ , se escogen tres vectores aleatoriamente  $x_p, x_q$  y  $x_r$  para generar el vector

$$v_i^{t+1} = x_p^t + F(x_q^t - x_r^t)$$

donde se recomienda por experiencia que  $F \in [0, 2]$ , el cual es un parámetro de sintonización denominado factor de mutación.

- Para realizar la cruce se actualiza cada componente del vector  $v_{j,i}$  ( $j$ -ésimo componente del vector  $v_i$ ) generando los índices de forma aleatoria  $J_r \in \{1, 2, \dots, d\}$  y un valor aleatorio  $r_i \in [0, 1]$  :

$$u_{j,i}^{t+1} = \begin{cases} v_{j,i}^{t+1} & \text{si } r_i \leq C_r \vee j = J_r \\ x_{j,i}^t & \text{si } r_i > C_r \wedge j \neq J_r \end{cases}$$

- Para realizar la selección

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} u_i^{t+1} & \text{si } f(u_i^{t+1}) \leq f(x_i^t) \\ x_i^t & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

#### 4.1.2. Componente de búsqueda local

Considerando el funcionamiento del algoritmo FP descrito en el Capítulo 2 se determinan las expresiones siguientes:

- Para realizar la polinización biótica y la cruzada:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + L(x_i^t - g_*)$$

- Para realizar la polinización abiótica y la autopolinización:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \varepsilon(x_j^t - x_k^t)$$

donde  $x_i^t$  es el vector solución y  $g_*$  es la mejor solución actual encontrada hasta el momento durante la iteración en curso. La variable aleatoria  $p$  realiza el cambio entre dos ecuaciones durante las iteraciones,  $\varepsilon$  es un número aleatorio extraído de una distribución uniforme y  $L$  es el tamaño de paso en la distribución de Lévy. Los vuelos de Lévy usan los pasos de Lévy como una caminata aleatoria de gran alcance debido a que ambas capacidades de búsqueda global y de búsqueda local pueden llevarse a cabo al mismo tiempo. En contraste con la caminata aleatoria, los vuelos de Lévy tienen saltos grandes ocasionales, lo que permite que el algoritmo salga de óptimos locales. Los pasos de Lévy están dados por:

$$L = \frac{1}{S^{1+\beta}}$$

dónde  $\beta$  es el exponente de Lévy. Se pueden generar los vuelos de Lévy de una forma simple usando dos distribuciones normales  $s$  y  $v$  por medio de la transformación

$$S = \frac{u}{|v|^{1+\beta}}$$

con  $u \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $v \sim N(0, 1)$  donde  $\sigma$  es una función de  $\beta$ .

En el algoritmo 2.2 se muestra el pseudocódigo de la polinización de flores. Para invocar al algoritmo FP la población local puede ajustarse desde uno al número de individuos de la población global; por lo tanto se considera como un factor de sintonización. Debido a esta versatilidad, en el número de la población local, se determinó utilizar el algoritmo de Polinización de Flores para el diseño de MemDEFP.

### 4.1.3. Estrategia de selección de individuos de la población global para ingresar en el buscador local

El algoritmos memético MemDEFP utiliza dos poblaciones, las cuales se denominan  $pobG$  con cardinalidad  $m$ , utilizada por el buscador global, y  $pobL$  con cardinalidad  $n$ , que corresponde al buscador local. La interacción sinérgica entre ambos buscadores requiere la definición explícita de como tomar los individuos del buscador global para alimentar al buscador local. Se debe cumplir que  $n \subseteq m$ . De esta forma se tienen los siguientes casos:

**Algoritmo 4.1** Algoritmo: polinización de flores

---

```

1: begin
2:   inicializar parámetros;
3:   crear de forma aleatoria  $n$  puntos para un espacio  $n$  dimensional;
4:   calcular la función objetivo de los  $n$  puntos;
5:   encontrar la mejor solución  $g_*$  de la población inicial;
6:   definir una probabilidad de conmutación  $p \in [0, 1]$ ;
7:   while  $t < generacionMax$  do
8:     for  $i = 1:n$  (para las  $n$  flores en la población) do
9:       if  $rand < p$  then
10:        obtener un vector  $L$  (d-dimensional) que obedezca a la distribución de Lévy;
11:        polinización global vía  $x_i^{t+1} = x_i^t + L(x_i^t - g_*)$ 
12:       else
13:        obtener  $\varepsilon \in [0, 1]$  de una distribución uniforme
14:        escoger de forma aleatoria  $j$  y  $k$  de todas las soluciones
15:        realizar polinización local vía  $x_i^{t+1} = x_i^t + \varepsilon(x_j^t - x_k^t)$ 
16:       end if
17:       evaluar las nuevas soluciones
18:       if Si las nuevas soluciones son mejores then
19:         actualizar en la población
20:       end if
21:     end for
22:     encontrar mejor solución actual  $g_*$ .
23:   end while
24:   return
25: end begin

```

---

- Se determina el número de individuos de la población local, para facilidad se utiliza un submúltiplo de la población global. Valores recomendados: 30 %, 40 %, 50 % y 60 %.
- Las políticas de selección recomendadas son:
  - escoger las mejores  $n$  individuos de la población global.
  - escoger al azar  $n$  individuos de la población global.
  - escoger los  $\frac{n}{2}$  mejores individuos y los  $\frac{n}{2}$  peores individuos de la población global.
  - escoger los  $\frac{n}{2}$  mejores individuos y al azar  $\frac{n}{2}$  individuos de la población global.

#### 4.1.4. Estrategia de integración de individuos de la población local con la población global

El módulo de integración realiza la unión de individuos de las poblaciones global y local. Para ello se requiere de una estrategia como las que se enumeran a continuación:

1. Se obtienen los  $n$  individuos del buscador local y se aplica la unión con los  $m$  individuos del buscador global, se ordenan, y se toman las primeras  $m$  mejores soluciones como entrada al buscador global.
2. Se obtienen los  $n$  individuos del buscador local y se aplica la unión con los  $m$  individuos del buscador global, y se toman  $m$  individuos al azar como entrada al buscador global.
3. Se generan las  $m$  soluciones candidatas del buscador global, se verifica que exista una diferencia  $\epsilon$  entre la mejor solución candidata y la peor solución candidata del buscador global, si es menor al valor  $\epsilon$  se invoca el buscador local. El buscador local toma las primeras  $n1$  puntos del conjunto  $n$  y las explota. El buscador local retorna  $n1$  soluciones al buscador global. Se concatenan ambas soluciones y se ordenan para tomar las mejores  $n$  soluciones candidatas como entrada al buscador global. Se recomienda un valor de  $\epsilon = 0.001$ .
4. Se obtiene la mejor solución de las  $n1$  soluciones del buscador local, se elimina la peor solución candidata del buscador global, luego se concatenan las  $(n - 1)$  soluciones del buscador global con la mejor del buscador local para formar las  $n$  soluciones candidatas como entrada al buscador global. La invocación del buscador local es después de  $t$  generaciones del buscador global.
5. Se generan las  $n$  soluciones candidatas del buscador global, se verifica que exista una diferencia  $\epsilon$  entre la mejor solución candidata y la peor solución candidata del buscador global, si es menor al valor  $\epsilon$  se invoca el buscador local. El buscador local toma las primeras  $n1$  puntos del conjunto  $n$  y las explota. El buscador local retorna  $n1$  soluciones al buscador global. Se concatenan ambas soluciones y se ordenan para tomar las mejores  $n$  soluciones candidatas como entrada al buscador global. Se recomienda un valor de  $\epsilon = 0.001$ .
6. Se generan las  $n$  soluciones candidatas del buscador global, se usan una variable aleatoria definida por el usuario que se compara con una variable aleatoria generada por el sistema. Si  $Var_{usuario} > Var_{sistema}$  se invoca al buscador local. El buscador local toma las primeras  $n1$  puntos del conjunto  $n$  y la usa como entrada al buscador local. El buscador local las explota y retorna  $n1$  soluciones al buscador global. Se concatenan y se ordenan para formar las  $n$  soluciones candidatas como entrada al buscador global.
7. Se obtienen las  $n1$  soluciones del buscador local y se concatenan con las  $n$  soluciones candidatas del buscador global, se concatenan obteniéndose  $(n1+n)$  soluciones, se escogen al azar  $n$  soluciones como entrada al buscador global.



### 4.1.5. Implementación del algoritmo memético MemDEFP

El pseudocódigo 4.2 muestra el algoritmo memético implementado usando el algoritmo global Evolución Diferencial con el buscador local Polinización de Flores. El algoritmo está construido de forma modular de tal forma que la sustitución del buscador local Polinización de Flores por otro, tal como el algoritmo Nelder-Mead se puede realizar sustituyendo el algoritmo de búsqueda local teniendo en cuenta el paso de parámetros de forma adecuada. De la misma forma se puede intercambiar el buscador global que en este caso fue el de Evolución Diferencial por otro algoritmo poblacional.

## 4.2. Aplicación del algoritmo MemDEFP al caso de estudio

La trayectoria de un mecanismo se especifica con una serie de puntos o posiciones de precisión, que son las ubicaciones sucesivas del eslabón de salida (acoplador o balancín) en el plano [86]. El número de puntos de precisión está limitado por el número de ecuaciones disponibles para su solución cuando se realiza de forma analítica. Para problemas de síntesis con más de cinco puntos de precisión se requiere la solución de un sistema de ecuaciones de mediana complejidad. Cabe señalar que analíticamente se puede encontrar una solución, cuya trayectoria sea cercana a dichos puntos especificados, pero en ningún momento garantiza el comportamiento del mecanismo para cumplir completamente con la trayectoria para cada uno de los puntos definidos por el diseñador. Por ejemplo, para la síntesis de un mecanismo de cuatro barras se requiere un conjunto de 7 restricciones que describen la relación cinemática y si se consideran cuatro puntos de precisión se requieren resolver 28 ecuaciones con 29 incógnitas, lo cual se considera un problema no lineal con múltiples soluciones posibles [68].

Para probar el algoritmo memético y el modelo anteriormente desarrollado se aplicaron los puntos de diseño que se muestran en la gráfica 4.2. Estos datos corresponden al análisis biomecánico de la rodilla durante el ciclo de marcha de acuerdo a la antropometría del promedio de la población mexicana presentados en [39].

### 4.2.1. Problema de optimización

#### VARIABLES DE DISEÑO

El mecanismo de seis barras propuesto como solución al diseño de prótesis de rodilla policéntrica tiene 22 variables de diseño. Por lo tanto, cada vector  $X_i$  representa a un individuo de la población de entrada al algoritmo. Los 10 primeros elementos corresponden a las dimensiones de cada uno de los

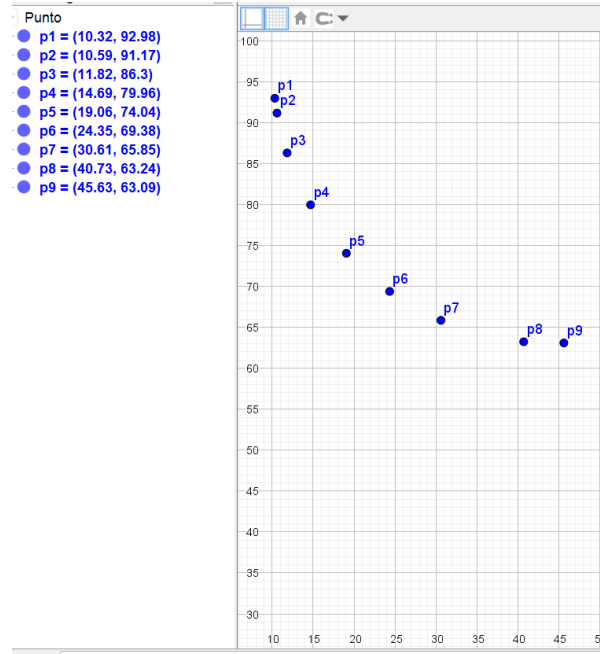


Figura 4.2: Puntos de precisión obtenidos del análisis biomecánico de una rodilla de acuerdo a la antropometría mexicana

eslabones.  $\theta_0$  es el ángulo del eslabón  $r_1$  con respecto al eje  $X$  del sistema de referencia; las coordenadas  $x_0$  y  $y_0$  son las distancias a los ejes  $X$  y  $Y$  del sistema de referencia respectivamente, y el conjunto de  $\theta_2^i$  son los diferentes valores del ángulo del eslabón de entrada  $r_2$  para cada uno de los puntos de precisión que se desean satisfacer, de tal manera que corresponda para que el punto  $C(x, y)$  del acoplador pase lo más cerca posible a cada uno de los puntos de precisión dados por el diseñador, minimizando la distancia entre ellos.

La función objetivo evalúa el error cuadrático de la posición, entre los puntos de precisión de la trayectoria del mecanismo calculado y los correspondientes a la trayectoria ideal; dicha función está dada por la ecuación 4.1 :

$$\min(f(\vec{X})) = \sum_{i=1}^9 (p_{pres}(i, 1) - C_x(i))^2 + (p_{pres}(i, 2) - C_y(i))^2 \quad (4.1)$$

donde  $\vec{X}$  tiene 22 variables de diseño y es de la forma:

$$\vec{X} = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, \theta_0, x_0, y_0, \theta_2^1, \theta_2^2, \theta_2^3, \theta_2^4, \theta_2^5, \theta_2^6, \theta_2^7, \theta_2^8, \theta_2^9] \quad (4.2)$$

### Rangos propuestos para las variables de diseño

Cada variable debe de permanecer dentro del rango asignado, el cual está contemplado en el algoritmo.

- eslabón  $r_j$  -  $[0 \text{ a } 60]$  mm, ,  $j = 1, 2, \dots, 10$ .
- ángulo  $\theta_0$  -  $[0 \text{ a } \pi]$  radianes.
- desplazamiento del sistema de referencia  $(x_0, y_0)$  -  $x_0 \in [-50 \text{ a } 50]$  mm,  $y_0 \in [-50 \text{ a } 50]$  mm.
- ángulo del eslabón motriz  $\theta_2^i$  -  $[0 \text{ a } \pi]$  radianes,  $i = 1, 2, \dots, 9$

### Restricciones de funcionamiento

- Se debe cumplir la condición de Grashof [77], la cual garantiza que al menos un eslabón puede realizar giros completos. Se proponen dos configuraciones:

$$r_1 + r_2 \leq r_3 + r_4 \quad \text{donde } r_2 < r_3 < r_4 < r_1 \quad (4.3)$$

$$r_2 + r_3 \leq r_1 + r_4 \quad \text{donde } r_2 < r_1 < r_4 < r_3 \quad (4.4)$$

- La secuencia de los ángulos  $\theta_2^i$  del eslabón de entrada  $\theta_2$  debe ir del mínimo al máximo o viceversa; en este trabajo se usó la forma ascendente.
- La suma de violaciones de restricciones (SVR) esta determinada por:
  - la condición de Grashof de la configuración 4.3 :

$$SVR_G = \begin{cases} 0 & r_1 + r_2 \leq r_3 + r_4 \wedge r_2 \leq r_3 \wedge r_3 \leq r_4 \wedge r_4 \leq r_1 \\ 1000 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- la secuencia del ángulo del eslabón motriz  $\theta_2^i$  dada por:

$$SVR_{sec} = \begin{cases} 0 & \theta_2^1 \leq \theta_2^2 \leq \theta_2^3 \leq \theta_2^4 \leq \theta_2^5 \leq \theta_2^6 \leq \theta_2^7 \leq \theta_2^8 \leq \theta_2^9 \\ 1000 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

**Algoritmo 4.2** Algoritmo memético implementado

---

```

1: begin
2:   inicializar parametros;
3:   crear poblacion inicial aleatoriamente;
4:   calcular  $FO$  y  $SVR$ ;
5:   for  $i = 1 : numCiclos$  do                                     ▷ número de iteraciones del algoritmo

6:     repeat                                                       ▷ Inicio Buscador Global (ED)
7:       seleccionar aleatoriamente  $x_p, x_q, x_r$  por cada  $x_i$ ;
8:       generar  $v_i^{t+1} = x_p^t + F(x_q^t - x_r^t)$ ;                               ▷ mutación
9:        $j_r \in \{1, 2, \dots, d\}$ ;                                       ▷ generar índices aleatorios
10:       $r_i \in [0, 1]$ ;                                                 ▷ generar números aleatorios
11:      for  $j = 1 : d$  do
12:        actualizar para cada  $v_{j,i}$  ( $j$ th componente de  $v_i$ );
13:      end for
14:      evaluar aptitud y factibilidad del hijo;
15:      if hijo mejor que el padre then                               ▷ aplicando reglas de Deb
16:        reemplazar padre por hijo en generación siguiente;
17:      end if
18:    until  $criterioTerminacionGlobal$ ;                               ▷ Fin Buscador Global

19:   seleccionar estrategia para el paso de mejores resultados para la búsqueda local;

20:   repeat                                                         ▷ Inicio Buscador Local (PF)
21:     for  $i = 1 : n$  do                                           ▷ ( $n$ : flores en la población)
22:       if  $rand < p$  then
23:         obtener vector  $L$  (d-dimensional) con distribución de Lévy;
24:         polinizar globalmente vía  $x_i^{t+1} = x_i^t + L(x_i^t - g_*)$ ;
25:       else
26:         obtener  $\varepsilon$  de una distribución uniforme en  $[0, 1]$ ;
27:         escoger aleatoriamente  $j$  y  $k$  de todas las soluciones;
28:         realizar polinización local vía  $x_i^{t+1} = x_i^t + \varepsilon(x_j^t - x_k^t)$ ;
29:       end if
30:       evaluar las nuevas soluciones;
31:       if nuevas soluciones son mejores then                       ▷ aplicando reglas de Deb
32:         actualizar población;
33:       end if
34:     end for
35:     encontrar mejor solución actual  $f_*$ .
36:   until  $criterioTerminacionLocal$                                    ▷ Fin Buscador Local;
37:   integrar poblacion global con poblacion local;                 ▷ Concatenar mejores poblaciones
38: end for
39: seleccionar mejor individuo por  $FO$ ;
40: end begin

```

---

## Capítulo 5

# Experimentos y resultados

El caso de estudio se resolvió tanto con el algoritmo memético MemDEFP como con el algoritmo de Evolución Diferencial, para efectos de comparar el rendimiento del algoritmo propuesto contra su método base. Cada uno de los algoritmos implementados se ejecutó treinta veces; se compararon y analizaron los resultados de ambos aplicando pruebas estadísticas.

### 5.1. Implementación computacional

- Se utilizó el lenguaje de programación Matlab v2012<sup>®</sup>, por sus capacidades para realizar cálculos numéricos.
- Interpretación de resultados a través de pruebas estadísticas paramétricas y no paramétricas.
- Implementación del algoritmo de búsqueda global: Evolución Diferencial (DE).
- Implementación del algoritmo de búsqueda local: algoritmo de Polinización de Flores (PF).
- Manejo de restricciones mediante las reglas de Deb.

#### 5.1.1. Simulaciones con el algoritmo de evolución diferencial

La prueba se realizó con los siguientes datos:

- En el algoritmo de evolución diferencial se implementaron las reglas de Deb; se consideró una población de 100 individuos y la condición de paro fue de 2,795,100 evaluaciones de la función

objetivo.

- Se tomaron de forma aleatoria el factor de mutación  $F = [0.8, 1.0]$  por generación y el factor de cruza:  $C_r = [0.6, 0.9]$  por ejecución.
- El mejor valor encontrado fue  $f(x^*) = 1.664380000000000e - 05$ .

Los resultados se muestran en la segunda columna de la Tabla 5.1:

### 5.1.2. Simulaciones con el algoritmo MemDEFP

La prueba se realizó con los siguientes datos:

- El mejor valor encontrado  $f(x^*) = 2.48E - 08$ .
- El buscador global es el algoritmo de Evolución Diferencial, incluyendo las reglas de Deb y considerando 100 individuos y 1300 generaciones. Se tomaron de forma aleatoria el factor de mutación  $F = [0.8, 1.0]$  por generación y el factor de cruza:  $C_r = [0.6, 0.9]$  por ejecución.
- Buscador local: Polinización de Flores se usó una población de 50 flores (individuos), con 20 iteraciones, con  $p = 0.3$ ,  $beta = 1.5$ ,  $L = 0.01 * paso$ .
- El programa mémetico se implementó con un máximo numero de ciclos de 10; el buscador global realizó 1300 iteraciones y el buscador local 6500 iteraciones.
- La relación de participación del buscador global esta dada por la ecuación 5.1 cuyo valor fue de 46.51163%.

$$FBG = \frac{100 * numEvBGFO}{numEvBGFO + numEvBLFO} \quad (5.1)$$

- El número de evaluaciones de la función objetivo fue de 2,795,100; tiempo de ejecución 6.44 minutos.

Los resultados se muestran en la tercera columna de la Tabla 5.1.

### Análisis de resultados

Se presentan los resultados de las estadísticas paramétricas del algoritmo base de Evolución diferencial y de MemDEFP en la tabla 5.2 . En cada una de las simulaciones se seleccionó al mejor resultado

Ejec	Alg. Evol. Dif.	Alg. Memético
1	0.000016643800000	0.000000024755900
2	0.000027302900000	0.000021616000000
3	0.001641001000000	0.000021672500000
4	0.001676069000000	0.000031907400000
5	0.001747849000000	0.000071532800000
6	0.005218774000000	0.000091217600000
7	0.005218787000000	0.000218241000000
8	0.005219771000000	0.000115376860000
9	0.007356271000000	0.001228938000000
10	0.112038877000000	0.001631082000000
11	0.605876813000000	0.001641476000000
12	0.605876819000000	0.005218776000000
13	0.605876823000000	0.005671070000000
14	0.605876823000000	0.006438605000000
15	0.605876824000000	0.006530328000000
16	0.605876834000000	0.605876876000000
17	0.605876839000000	0.605876959000000
18	0.605876841000000	0.605876993000000
19	0.605876842000000	0.605877201000000
20	0.605876842000000	0.605877757000000
21	0.605876854000000	0.605878094000000
22	0.605876859000000	0.605880741000000
23	0.605876875000000	0.605884962000000
24	0.605876876000000	0.605894531000000
25	0.605876899000000	0.605896578000000
26	0.605876915000000	0.605904936000000
27	0.605876941000000	0.605917145000000
28	0.605876957000000	0.605924739000000
29	0.605876959000000	0.605927682000000
30	0.605877008000000	0.605937725000000

Tabla 5.1: Comparación de las mejores resultados por mejor función objetivo, de los algoritmos DE y MemDEPF

para el estudio estadístico, en donde se obtuvieron la mejor y la peor soluciones globales, la solución promedio, la mediana, la varianza y la desviación estándar. También se incluyó el número de evaluaciones requerido para alcanzar el resultado, para efectos de la comparación de desempeño de los algoritmos. Los resultados indican que ambos algoritmos presentan un comportamiento estable, que se manifiesta en valores de varianza muy pequeños. Sin embargo, se observa que el rendimiento de MemDEPF es mejor que el correspondiente a DE, ya que la mejor solución obtenida por el primero mejora en más de un orden de magnitud la de evolución diferencial.

Parámetro	DE	MemDEPF
número de ejecuciones	30	30
número de evaluaciones	2795100	2795100
mejor	1.6643800000000000e-05	2.4755900000000000e-08
peor	0.6058770080000000	0.6059377250000000
promedio	0.408589959623333	0.303942903068530
mediana	0.6058768290000000	0.3062036020000000
varianza	0.078202004369907	0.091178457359027
desviación estándar	0.279646212865304	0.301957707898022

Tabla 5.2: Comparación de estadísticas paramétricas de los algoritmos DE y memDEPF

## Prueba de la suma de rangos de Wilcoxon

La comparación estadística no paramétrica de ambos algoritmos implementados se realizó bajo las condiciones siguientes:

- número de muestras: se tomaron 30 valores de cada algoritmo.
- intervalo de confianza:  $\alpha = 0.05$ .
- tipo de prueba: de una cola.
- Hipótesis nula  $H_0$ : No existe diferencia entre el algoritmo DE y el algoritmo memético.
- Hipótesis alterna  $H_1$ : El algoritmo memético logra un mejor desempeño.

Se obtuvieron los siguientes resultados:

- $ranksum = 964$



- $p = -1.96$
  
- $z = -2.2490$
  
- $-2.2490 < -1.96$ , la hipótesis  $H_1$  se cumple, por lo que se comprueba que el algoritmo memDEFP mejora el rendimiento.

variable	DE	MemDEFP
$r_1$	28.36861	45.52872
$r_2$	24.61939	22.06885
$r_3$	24.87635	33.77969
$r_4$	28.11167	33.81789
$r_5$	35.11566	2.640268
$r_6$	0.558402	0.068474
$r_7$	35.3216	2.587282
$r_8$	0.253144	1.699743
$r_9$	59.9892	35.35248
$r_{10}$	27.85852	34.77256
$\theta_0$	1.614378	1.602407
$x_0$	47.62838	48.20412
$y_0$	27.31582	49.89208
$\theta_2^1$	1.23527	0.617445
$\theta_2^2$	1.327698	1.002265
$\theta_2^3$	1.50658	1.340571
$\theta_2^4$	1.784634	1.687322
$\theta_2^5$	2.065345	2.005857
$\theta_2^6$	2.327603	2.290137
$\theta_2^7$	2.591066	2.568519
$\theta_2^8$	2.967704	2.960757
$\theta_2^9$	3.141586	3.14159
$f(x^*)$	1.66E-05	2.48E-08

Tabla 5.3: Comparación de los mejores vectores solución encontrados con los algoritmos DE y MemDEFP

### Limitaciones

De acuerdo al teorema *No Free Lunch*, el desempeño de un algoritmo depende fuertemente de la clase del problema, por lo que es siempre necesario, aplicar distintos métodos para poder determinar cual es el más adecuado para un problema específico. De manera particular, los valores de los parámetros dependen en buena medida del tipo de problema, y deben ser buscados durante el proceso de sintonización. También se debe observar que con valores ya sintonizados, existen ciertas ejecuciones que se alejan de los valores reportados, de esta forma aplicando pruebas estadísticas cualitativas se puede sugerir la aplicación de un algoritmo memético con una combinación específica de algoritmo global y de algoritmo local, para la resolución de problemas de optimización. En algunos casos distintas combinaciones no afecta significativamente los resultados. De esta forma, el mismo algoritmo que funciona bien para un problema no siempre se comporta bien en otros tipos de problemas, dando resultados que cambian drásticamente aunque existan ocasiones que den la solución correcta, lo cual conlleva a una búsqueda más detallada de los parámetros o incluso la implementación de otros algoritmos de búsqueda global.

La búsqueda de parámetros para lograr que dieran una solución cercana a los valores reportados fue realizada a través de varias pruebas. Por lo anterior, resulta de gran interés como trabajo futuro el establecer estrategias para realizar la sintonización de parámetros de manera sistemática; asimismo, realizar el control de dichos parámetros en tiempo de ejecución, mediante un esquema adaptativo.

## Capítulo 6

# Conclusiones

- Se diseñó e implementó el algoritmo memético MemDEFP usando los algoritmos de Evolución Diferencial y el de Polinización de Flores.
- El algoritmo memético MemDEFP se aplicó al caso de estudio “diseño de una prótesis de rodilla” para probar el funcionamiento y eficiencia de dicho algoritmo.
- Se propuso un mecanismo de seis barras con seguimiento de trayectoria que minimiza la función de error respecto a 9 puntos de precisión correspondientes a la biomecánica de la rodilla durante el ciclo de marcha, de acuerdo a la antropometría del promedio de la población mexicana.
- La combinación sinérgica de los algoritmos de Evolución Diferencial y Polinización de Flores es adecuada para el problema de optimización planteado como caso de estudio, dadas las características de exploración y explotación que presentan dichos algoritmos.
- El algoritmo MemDEFP aprovecha la flexibilidad de las poblaciones de ambos algoritmos, lo cual los hace ideales para ajustar las poblaciones en los bloques de selección e integración de individuos que forman parte de MemDEFP.
- Al realizar las simulaciones con MemDEFP al caso de estudio “diseño de una prótesis de rodilla”, se encontró que de acuerdo a las pruebas estadísticas paramétricas y no paramétricas realizadas, los resultados de MemDEFP superan al algoritmo de Evolución Diferencial que se usó como referencia, al compararlo bajo las mismas condiciones que se tienen en común.

- Los resultados obtenidos en las simulaciones con el algoritmo MemDEFP, arrojan una precisión menor o igual a 0.0001, lo cual resulta adecuado para las soluciones que se requieren para los problemas de ingeniería de la vida real debido a que precisión en la fabricación de este mecanismo es inferior a la se obtiene en los cálculos reportados.
- El algoritmo MemEDFP reportó un menor número de evaluaciones para encontrar una solución considerada como buena, lo cual supera a los obtenidos por el algoritmo de Evolución Diferencial, el cual se tomó como punto de referencia.
- De acuerdo a las simulaciones realizadas se observó que el algoritmo memético MemDEFP dio buenos resultados para este problema en particular, pero no se puede afirmar que exhiba un buen comportamiento en todos los problemas de optimización, lo cual esta establecido en el teorema del *No Free Lunch*.
- La sintonización de los parámetros del algoritmo de búsqueda global y el de búsqueda local son factores relevantes en el diseño del algoritmo memético MemDEFP, por lo que su correcta sintonización contribuye sensiblemente a su eficiencia.
- La estrategias de selección y de integración de individuos son también factores que afectan la eficiencia del algoritmo memético MemDEFP, lo cual hace que éstas sean consideradas como factores de sintonización.
- Con los resultados obtenidos con el algoritmo memético MemDEFP, se puede llevar a cabo la manufactura del mecanismo de rodilla policéntrica.

## 6.1. Trabajos futuros

- Dada la buena respuesta que se obtuvo al usar el algoritmo memético en la solución óptima de la prótesis de rodilla. se motiva a realizar otras aplicaciones de optimización en otras áreas del conocimiento.
- Es importante señalar que el concepto de algoritmo memético da la suficiente flexibilidad para que se usen diversos tipos de algoritmos de búsqueda global y local, para sacar el mayor provecho de ellos, y de esta forma aplicarlos a diferentes tipos de problemas de optimización.

- Se propone realizar aplicaciones que ayuden a la sintonización de los algoritmos metaheurísticos, cual redundaría en la reducción del tiempo en las simulaciones.
- Investigar otros modelos mecánicos de prótesis de rodilla que pudieran mejorar su uso en los pacientes amputados.



## Apéndice A

# Glosario de Optimización

**alelo** - Es una de las formas variantes de un gen en un locus o de un marcador particular en un cromosoma. Diferentes alelos de un gen producen variaciones en las características hereditarias.

**alfa** - Denotada por  $\alpha$  es la probabilidad de rechazar  $H_0$  equivocadamente.

**algoritmos bio-inspirados** - Heurísticas que basan su funcionamiento en fenómenos “inteligentes” encontrados en la naturaleza y se clasifican en algoritmos evolutivos y en algoritmos de inteligencia colectiva.

**algoritmos de inteligencia colectiva** - Son algoritmos que toman su comportamiento de seres vivos que interactúan de manera local con su ambiente, y de esa interacción surgen comportamientos sociales que permiten a esos seres, simples de manera individual, resolver problemas complejos de manera conjunta.

**algoritmos evolutivos** - Son algoritmos que basan su funcionamiento en la teoría de la evolución de las especies, la supervivencia del más apto y la transmisión de características de padres a hijos.

**análisis de varianza** - Técnica que se utiliza para decidir si las medias de dos o más poblaciones son iguales.

**beta** - Denotada por  $\beta$  es la probabilidad de aceptar  $H_0$  equivocadamente.

**búsqueda tabú** - Heurística que utiliza una “memoria” para almacenar movimientos (soluciones) previamente realizados (encontradas) y evitar realizarlos (recorrerlas) de nuevo.

**clase P** - Es la clase de problemas de decisión que pueden resolverse con máquinas de Turing en tiempo polinomial.

**clase NP** - Es la clase de lenguajes que pueden aceptar las máquinas de Turing no deterministas

en tiempo polinómico. Puesto que toda máquina de Turing determinista está contenida en la clase de las máquinas de Turing no deterministas, se puede afirmar de inmediato que  $P \subseteq NP$ , sin embargo, la cuestión de si  $P = NP$  aún no se ha resuelto y es un problema de investigación.

**complejidad computacional** - Se refiere a la cantidad de tiempo y espacio requeridos para ejecutar un algoritmo para una entrada determinada.

**computable en máquinas de Turing** - La posibilidad de diseñar una máquina de Turing que, dada cualquier entrada de la función, pueda calcular la salida correspondiente.

**convexo** - Un conjunto  $C \in E$  se dice que es convexo si para todo  $x_1, x_2 \in C$  y para todo número real  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , el punto  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$ .

**corrida** - Secuencia ininterrumpida de observaciones que poseen una característica importante.

**cruza** - Mecanismo a través del cual se determina qué partes de un nuevo individuo se heredan de dos individuos que se recombinan.

**dirección factible** - Dado  $x \in \Omega$  decimos que un vector  $d$  está en una dirección factible en  $x$  si existe un  $\bar{\alpha} > 0$  tal que  $x + \alpha d \in \Omega$  para toda  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ .

**distribución** - Se define como la relación entre dos variables en donde se representa el valor de la calificación y la frecuencia con que tal calificación ocurre, y se expresa en forma gráfica o tabular.

**error de tipo I** - Se refiere a rechazar la hipótesis  $H_0$  cuando de hecho es verdadera, es decir, la hipótesis nula es verdadera, pero el lector la rechazó.

**error de tipo II** - Se refiere a aceptar la hipótesis  $H_0$  cuando de hecho es falsa, es decir, la hipótesis nula es falsa pero el lector decidió no rechazarla.

**espacio euclidiano** - Es el espacio  $n$  dimensional, denotado por  $E^n$ .

**estimación** - Es el proceso de utilizar datos muestrales para estimar los valores de parámetros desconocidos de una población.

**estimación de intervalo** - Estimación de un único valor de un parámetro de la población.

**estimación de punto** - Estimación que incluye un intervalo de valores posibles en el que se considera que está comprendido un parámetro de la población.

**fenotipo** - Conjunto de todas las características externas de un individuo, que son directamente observables desde el exterior.

**función cóncava** - Una función  $g$  definida en un conjunto convexo  $\Omega$  se dice que es cóncava si la función  $f = -g$  es convexa. La función  $g$  es estrictamente cóncava si  $-g$  es estrictamente convexa.

**función objetivo** - Una función  $f$  es llamada función objetivo, función de costo (minimización), función de utilidad indirecta (minimización), función de utilidad (maximización), o en ciertos campos,



función de energía, o energía funcional función  $f : AR$  donde  $A$  es un conjunto de números reales. Buscar: un elemento  $x_0 \in A$  tal que  $f(x_0) < f(x)$  para todo  $x \in A$  (“minimización”) o tal que  $f(x_0) > f(x)$  para todo  $x \in A$  (“maximización”).

**función parcial** - Función que puede tener salidas indefinidas asociadas a algunas de sus entradas, o a todas.

**funciones recursivas parciales** - Colección de funciones parciales que se han identificado que son computables en máquinas de Turing.

**funciones separables** - Una función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es separable si puede expresarse como la suma de  $n$  funciones de una sola variable  $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$ , esto es  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$ .

**gen** - Es la secuencia por la que está compuesto el cromosoma. Se trata de la unidad de la herencia, se transmiten de padres a hijos a través de los gametos.

**genotipo** - Es la constitución genética de un individuo.

**heurísticas** - Son métodos que deliberadamente ignoran cierta información para agilizar los cálculos en cierta dirección y generalmente tienen componentes estocásticos. Se usan en la resolución de problemas y tiene como característica que no se puede afirmar con seguridad cuántos pasos habrá que realizar en la búsqueda y que tampoco se puede garantizar la calidad de la solución obtenida, pero pueden generar buenas soluciones sin tener que realizar búsquedas exhaustivas. También se dice que es un enfoque humano de resolver problemas por prueba y error la cual se basa en la experiencia diaria aprendida.

**hiperplano** - Un hiperplano en  $E^n$  es una variedad lineal  $(n - 1)$  dimensional.

**hipótesis alterna** - Denotada por  $H_1$ , es la declaración operacional de la hipótesis de investigación del experimentador.

**hipótesis de investigación** - Es la predicción derivada de la teoría sometida a prueba.

**hipótesis nula** - Denotada por  $H_0$ , es una hipótesis de “no efecto”, y se formula con el propósito expreso de ser rechazada, es decir constituye la aseveración o hipótesis que se acepta si se rechaza  $H_0$ .

**matriz hessiana** - Si  $f \in C^2$ , entonces se define la Hessiana de  $f$  como la matriz  $n \times n$  denotada por

$$H(x) = \left[ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

**mecanismo de reemplazo** - Tiene como objetivo escoger de un conjunto de soluciones actuales

y de las soluciones recién generadas aquellas que formarán parte de la población para la siguiente generación. Este proceso se puede basar en la calidad de cada solución, en la “edad” de las soluciones, o tomando en cuenta aspectos estocásticos.

**mecanismo de selección** - Tiene como objetivo escoger un subconjunto de soluciones de la población que tengan características sobresalientes, de manera que puedan generar nuevas soluciones aún mejores.

**metaheurísticas** - Significa literal “buscar más allá”, y son algoritmos de propósito general en donde la búsqueda puede hacerse en un nivel de abstracción a un resultado de otro procedimiento de búsqueda, es decir, son procedimientos iterativos y se refieren a una estrategia maestra que guía y modifica otras heurísticas para producir soluciones más allá de aquellas que normalmente se generan en una búsqueda de óptimos locales, es decir combinan varias estrategias para solucionar un problema. Se pueden clasificar en basadas en población y basadas en trayectoria. Tiene dos grandes componentes: la intensificación (explotación) y la diversificación (exploración).

**mutación** - Mecanismo a través del cual se determina cuáles son las variaciones genéticas (aleatorias) con respecto a sus progenitores.

**nivel de significación de una prueba** - Es la probabilidad de rechazar una hipótesis nula que sea verdadera y se designa por el símbolo  $\alpha$ .

**operadores de variación** - Son operadores que permiten generar nuevas soluciones a partir de las soluciones existentes (aquellas escogidas con los mecanismos de selección). Los operadores emulan comportamientos como la reproducción (cruza), variaciones aleatorias a nivel genético (mutaciones) o movimientos cooperativos (giros, nados o vuelos).

**optimización** - El concepto de optimización se describe matemáticamente de la siguiente forma: encontrar

$$f(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

el cual minimiza/maximiza  $f(X)$

sujeta a las restricciones  $g_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$   $l_j = 0, j = 1, 2, \dots, p$  donde  $X$  es un vector n-dimensional llamado vector de diseño,  $f(X)$  es la función objetivo,  $g_j$  y  $l_j$  son las restricciones de desigualdad e igualdad respectivamente.

**optimización dinámica** - Es aquella cuya meta es mantener la condición óptima a pesar de la variación de las condiciones del ambiente.

**optimización estática** - Es aquella cuando el óptimo es invariante en el tiempo o es estacionario. Es suficiente determinar el valor extremo.

**optimización combinatoria** - Es aquella cuyo objetivo es encontrar el ordenamiento de un conjunto de elementos de manera que se maximice o minimice el valor de la función objetivo. Ejemplos típicos de este grupo de problemas son el problema del agente viajero y el problema de la mochila.

**optimización numérica** - Es aquella cuyo objetivo es buscar un conjunto de valores para las variables del problema de manera que al sustituirse en la función objetivo se maximiza o minimiza el valor de la función. Se utiliza por ejemplo en el diseño de componentes para maximizar la durabilidad de dichos componentes al mínimo costo.

**optimizar** - Significa encontrar los mejores resultados, mayor eficiencia, mejor eficacia en el desempeño o recursos al realizar alguna acción, trabajo u objetivo, a partir de un conjunto de alternativas posibles siempre y cuando satisfaga el o los objetivos propuestos para un determinado problema.

**parámetro** - Es una característica cuantitativa de una población (Ejemplos: media, mediana, desviación estándar, etc.).

**parámetros preasignados** - Son valores de diseño que permanecen fijos durante todo el proceso de diseño. Por ejemplo la forma del perfil del diente del engrane o el ángulo de presión no pueden ser modificados durante el diseño dicho engrane.

**población** - Conjunto de individuos para los cuales se evalúa la función objetivo.

**potencia de una prueba** - Es la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando de hecho es falsa, es decir  $Potencia = 1 - P[error_{Tipo I}] = 1 - \beta$ .

**probabilidad de un evento** - Es el número de eventos favorables, dividido entre el número total de eventos posibles.

**programación separable** - Trata con problemas no lineales en los cuales la función objetivo y las restricciones son separables.

**prueba de significación** - Prueba que tiene como objetivo evaluar proposiciones o afirmaciones acerca de los valores de los parámetros de población.

**pruebas no paramétricas** - Rama de la estadística que estudia las pruebas y modelos estadísticos cuya distribución no puede ser definida y se utilizan cuando los datos no se ajustan a una distribución conocida.

**pruebas paramétricas** - Rama de la estadística inferencial cuyos procedimientos estadísticos y de

decisión están basados en distribuciones conocidas.

**prueba de rangos con signos de Wilcoxon** - Prueba estadística no paramétrica que se usa para muestras dependientes.

**prueba de suma de rangos de Wilcoxon** - Prueba estadística no paramétrica que se usa para muestras independientes.

**punto libre** - Son los puntos que que no caen en ninguna superficie de restricción.

**punto límite** - Es un punto de diseño que cae en una o más superficies de restricción.

**punto mínimo local o punto mínimo relativo** - Se dice que un punto  $x^* \in \Omega$  es un punto mínimo relativo o un punto mínimo local de  $f$  sobre  $\Omega$  si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \geq f(x^*)$  para toda  $x \in \Omega$  dentro de una distancia  $\varepsilon$  de  $x^*$  (esto es,  $x \in \Omega$  y  $|x - x^*| < \varepsilon$ ). Si  $f(x) > f(x^*)$  para toda  $x \in \Omega, x \neq x^*$ , dentro de una distancia  $\varepsilon$  de  $x^*$ , entonces se dice que  $x^*$  es un punto mínimo relativo estricto de  $f$  sobre  $\Omega$ .

**punto mínimo global o mínimo absoluto** - Se dice que un punto  $x^* \in \Omega$  es un punto mínimo global de  $f$  sobre  $\Omega$  si  $f(x) \geq f(x^*)$  para toda  $x \in \Omega$ . Si  $f(x) > f(x^*)$  para toda  $x \in \Omega, x \neq x^*$ , entonces se dice que  $x^*$  es un punto mínimo estrictamente global de  $f$  sobre  $\Omega$ .

**recocido simulado** - Heurística que basa su funcionamiento en el proceso físico del tratamiento térmico de materiales, donde el material es calentado inicialmente a altas temperaturas y después, mediante una variación de temperatura muy puntual, es enfriado.

**región factible o aceptable** - Es la región que se encuentra debajo de la hipersuperficie de la ecuación  $g_j(X) = 0$ , es decir, los puntos que caen en la región que satisfacen  $g_j(X) < 0$ .

**región no factible o inaceptable** - Es la región que se encuentra encima de la hipersuperficie de la ecuación  $g_j(X) = 0$ , es decir, los puntos que caen en la región que satisfacen  $g_j(X) > 0$ .

**región de aceptación** - La región que contiene los valores en que no se rechaza la hipótesis.

**región de rechazo** - Es la región que contiene los valores para los que se rechaza la hipótesis, también se conoce como región crítica.

**reglas de Deb** - Mecanismo que compara dos individuos:

1. Cuando una solución es factible y la otra no es factible, se selecciona la solución factible. item  
Cuando ambas soluciones son factibles, se selecciona la que tenga mejor solución.
2. Cuando ambas soluciones son no factibles, se selecciona la que tenga la menor suma de violaciones de restricciones.

**restricciones activas** - Son las restricciones que satisfacen  $g_j(X) = 0$ .

**restricciones de un problema de optimización** - Definen las características y/o requisitos de la vida real de cada uno de los componentes del sistema y que se interpretan como las limitaciones que las variables deben satisfacer para que la solución se considere factible, éstas pueden ser del tipo funcional o de comportamiento, o pueden ser de carácter geométrico que limitan el diseño físico.

**segmento de línea** - Un segmento de línea que conecta dos vectores  $x$  y  $y$  denotados por  $[x, y]$  y consiste de todos los vectores de la forma  $\alpha x + (1 - \alpha)y$  y con  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**selección** - Mecanismo a través del cual se determina qué individuos de la población sobreviven y cuáles no.

**stochastic ranking** - Mecanismo que compara dos individuos, si  $x_1$  es mejor que  $x_2$  si:

1. Ambas soluciones son factible y  $f(x_1) < f(x_2)$ ; o
2. Un número generado aleatoriamente  $r \in U[0, 1]$  es menor que un probabilidad definida por el usuario  $P_f$ , y  $f(x_1) < f(x_2)$ .
3. Ninguna de las condiciones antes mencionadas se satisfacen, y  $x_1$  tiene una suma de violación de restricciones menor que  $x_2$ .

Se recomiendan que  $P_f \in (0.4, 0.5)$ .

**superficie de restricciones** - Es el conjunto de valores de  $X$  que satisfacen la ecuación  $g_j(X) = 0$  la cual forma una hipersuperficie en el espacio de diseño de dimensión  $n - 1$ , donde es el número de variables de diseño.

**superficie de restricciones compuesta** - Es la colección de todas las superficies de restricción  $g_j(X) = 0, j = 1, 2, \dots, m$  la cual separa la región factible.

**teorema del límite central** -

1. Si la población muestreada está distribuida de manera normal, la distribución de los valores medios de la muestra estará normalmente distribuidos respecto a todos los tamaños muestrales.
2. Si la población no es normal, la distribución de los valores medios de la muestra será aproximadamente normal respecto a un tamaño muestral grande.

enditem

**tractable** - Cuando la función de complejidad de un problema depende polinomialmente del tamaño del problema, se dice que el problema es tractable.

**variables de diseño o variables de decisión** - En un sistema de ingeniería o componente se definen un conjunto  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  de cantidades que pueden variar su valor durante el proceso de diseño y se representan como un vector de dimensión  $n$   $X = x_1, x_2, \dots, x_n$  donde  $n$  es el número de parámetros de entrada que afectan el valor de la función objetivo.

**vector gradiente** - Si  $f \in C^1$  es una función valuada en los reales sobre  $E^n, f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , se define el gradiente de  $f$  como el vector

$$\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]$$

## Apéndice B

# Glosario de mecanismos

**acoplador, biela o eslabón flotante** - Eslabón que conecta en sus extremos con otros eslabones que presentan movimientos, su función es la de transmitir el movimiento entre eslabones. Cada una de las partículas que la conforman tienen trayectorias diferentes y se conocen como curvas de acoplamiento.

**análisis cinemático** - Es el proceso en el cual se investiga un mecanismo particular basado en la geometría y otras características tales como la velocidad angular de la entrada, aceleración angular, etc.

**análisis de posición de mecanismos** - Consiste en la determinación de la ubicación de cada uno de los elementos del mecanismo en cualquier instante dado, dada la posición de uno de sus eslabones.

**ángulo de transmisión  $\mu$**  - Es el ángulo agudo entre la dirección del vector de diferencia de velocidad del eslabón flotante y la dirección de la velocidad absoluta del eslabón de salida, ambos tomados en el punto de conexión. Es el valor absoluto del ángulo entre el eslabón de salida y el acoplador.

**ángulo de desviación** - Es el ángulo más pequeño entre la dirección de la fuerza estática transmitida a través del eslabón flotante y la velocidad absoluta del eslabón de salida en el punto de conexión.

**ángulo de presión  $\varphi$**  - Se usa en el sistema de levas y seguidor, es equivalente al ángulo de desviación.

**síntesis cinemática** - Es el proceso de diseñar un mecanismo para desempeñar una tarea deseada.

**cadena cinemática** - Ensamble de eslabones y juntas interconectadas de modo que produzcan un movimiento de salida controlado, en respuesta a un movimiento de entrada suministrado. Conjunto de eslabones unidos por juntas formando una malla cerrada donde todos los eslabones tienen movimiento arbitrario.

**cadena de Watt** - Eslabonamiento de seis barras con siete juntas de revoluto de sólo un grado de

libertad, en donde los eslabones ternarios son adyacentes.

**cadena de Stephenson** - Eslabonamiento de seis barras con siete juntas de revoluta de sólo un grado de libertad, en donde los eslabones ternarios están separados por eslabones binarios.

**centro instantáneo** - Es un punto en el que no se tiene velocidad relativa entre dos eslabones de un mecanismo en ese instante.

**cierre de forma** - Cierre debido a la geometría tal que no permiten que los eslabones se separen por ejemplo: pernos, ejes o flechas, correderas, etc.

**cierre de fuerza** - Cierre que mantiene la unión entre los eslabones mediante la aplicación de una fuerza externa debida a un resorte o a un muelle.

**cierre de junta** - Medio físico que mantiene unidos a los eslabones presentes en una junta. Pueden ser de forma o de fuerza.

**cinemática** - Estudio del movimiento sin considerar las fuerzas. Su objetivo en el diseño de mecanismos es diseñar (crear) los movimientos deseados de las partes mecánicas y luego calcular matemáticamente las posiciones, velocidades y aceleraciones que los movimientos crearán en las partes. Trata del estudio del movimiento relativo.

**cinética** - Estudio de las fuerzas sobre sistemas en movimiento.

**condición acodada** - Ocurre cuando el eslabón de entrada y el eslabón acoplador están alineados.

**configuración cinemática** - Se refiere al tipo de mecanismo que se forma al seleccionar el elemento fijo mediante un procedimiento conocido como inversión cinemática.

**corredera** - Eslabón que realiza un movimiento alternativo lineal o curvo sobre una guía.

**curvas de acoplamiento** - Son las diferentes trayectorias de los diferentes puntos de un acoplador.

**díada** - Es una cadena cinemática abierta de dos eslabones binarios y una junta.

**dinámica** - Combinación de la cinemática y la cinética.

**diseño de ingeniería** - Es el proceso de de aplicar las diversas técnicas y principios científicos con el propósito de definir un dispositivo, un proceso o un sistema con suficientes detalles que permitan su realización.

**ecuación de Freudenstein** - Representa la relación entre el ángulo del eslabón de salida y el ángulo del eslabón de entrada en un mecanismo de cuatro barras.

**ecuación de Gruebler** - Ecuación que sirve para calcular los grados de libertad (movilidad) de cualquier mecanismo y considera el número de eslabones, las juntas y las interacciones entre ellos.

La ecuación esta dada por:

$$M = 3L - 2J - 3G \text{ donde:}$$



- **M** - Es la movilidad o grados de libertad
- **L** - Es el número de eslabones
- **J** - Es el número de juntas
- **G** - Es el número de eslabones conectados a tierra

**eslabón** - Es un cuerpo rígido que posee por lo menos dos nodos que son puntos de unión con otros eslabones y pueden ser de cualquier forma.

**eslabonamientos** - Bloques de construcción básicos de todos los mecanismos y consisten de un conjunto de eslabones considerados rígidos y conectados por juntas para formar cadenas abierta o cerradas.

**eslabonamiento deltoide** - Eslabonamiento de cuatro barras que tiene dos eslabones cortos de igual longitud adyacentes conectados a dos eslabones más largos de igual longitud adyacentes. Si un eslabón largo esta fijo a tierra es posible un eslabonamiento manivela-oscilador. Si un eslabón corto esta fijo a tierra es posible un eslabonamiento manivela doble, donde el otro eslabón corto efectúa dos revoluciones por cada una del eslabón más largo. Se presenta el problema de la condición de punto de cambio.

**eslabón fijo o de tierra** - Es el eslabón que se encuentra unido firmemente al marco de referencia.

**eslabonamiento en paralelogramo** - Mecanismo de cuatro barras, donde la longitud del eslabón de entrada es igual al eslabón de salida y las longitudes de los eslabones acoplador y tierra son también iguales. Los eslabonamiento de entrada y salida pueden girar  $360^\circ$  o cambiar una configuración cruzada llamada eslabonamiento de antiparalelogramo.

**fuerza de potencia** - Son generalmente del tipo de movimiento rotatorio puro tales como los motores eléctricos, manivela manual, etc. o del tipo traslacional puro como los cilindros neumáticos o hidráulicos.

**grado de libertad** - Es el número de entradas independientes requeridas para determinar la posición de todos los eslabones del mecanismo respecto a tierra. Es el número de entradas que se necesita proporcionar para crear una salida predecible. El número de coordenadas independientes requerido para definir su posición.

**generador de función** - Se define como la correlación de un movimiento de entrada con un movimiento de salida en un mecanismo. En esta tarea es de interés el movimiento relativo(o fuerzas)

entre eslabones conectados a tierra. Movimiento coordinado entre la entrada y la salida, donde tanto la entrada como la salida se mueven (rotación o traslación) con respecto a un eje fijo.

**generador de movimiento** - Se define como el control de una línea en el plano de modo que asuma un conjunto prescrito de posiciones secuenciales, en esta tarea es de interés el movimiento total de eslabón acoplador. Conducir un cuerpo rígido a través de un conjunto de posiciones y orientaciones deseadas.

**generador de trayectoria** - Se define como el control de un punto en el plano de tal suerte que siga una trayectoria prescrita, en esta tarea es de interés la trayectoria de un punto trazador y no la rotación del eslabón acoplador. Conversión de un movimiento de entrada de rotación simple en la generación de una trayectoria deseada.

**isómeros** - Número de conexiones particulares de los eslabones disponibles que producen diferentes propiedades de movimiento. Para el mecanismo de cuatro barras se un solo isómero. para el mecanismo de seis barras se tienen dos isómeros. Uno conocido como máquina de Watt y otro como máquina de Stephenson.

**junta o par** - Unión entre eslabones y establecen el tipo y la cantidad de movimiento permisible. Pueden permitir la rotación . traslación o ambos movimientos entre los eslabones unidos.

**junta implícita** - Se presenta cuando más de dos eslabones se encuentran sujetos mediante el mismo elemento físico.

**junta redundante** - Es aquella que conecta un eslabón que al ser retirado no modifica la cinemática de todos el conjunto.

**junta revoluta** - Unión que permite movimiento rotacional entre los eslabones que une entre eslabones y establecen el tipo y la cantidad de movimiento permisible.

**junta prismática o corredera** - Unión que solo permite movimiento traslacional entre los eslabones que une.

**manivela** - Eslabón que puede realizar una rotación completa sobre una de sus juntas, no necesariamente respecto respecto al eslabón fijo.

**ley o criterio de Grashof** - Establece que la suma de los eslabones más corto y más largo de un eslabonamiento de cuatro barras no puede ser mayor que la suma de los dos eslabones restantes para que se tenga una rotación relativa continua dentro los eslabones.

**máquina** - Combinación de cuerpos resistentes acomodados ara hacer que las fuerzas mecánicas de la naturaleza realicen trabajo acompañadas por movimientos determinados. Conjunto de mecanismos dispuestos para transmitir fuerzas y realzar trabajo.

**mecanismo** - Es un dispositivo mecánico que tiene el propósito de transferir el movimiento o fuerza de una fuente a una salida. Conjunto de eslabones unido por juntas formando una malla cerrada donde al menos uno de los eslabones está fijo al marco de referencia.

**mecanismo de cuatro barras** - Es el mecanismo más simple de lazo cerrado que tienen tres eslabones móviles y un eslabón fijo, y cuatro juntas de revoluta. Todos los mecanismos de cuatro barras tienen inversiones geométricas.

**mecanismo de Stephenson** - Mecanismo de seis barras y se puede considerar como dos eslabonamientos de cuatro barras conectados en paralelo y que comparten dos eslabones en común.

**mecanismo de Watt** - Mecanismo de seis barras y se puede considerar como dos eslabonamientos de cuatro barras conectados en serie y que comparten dos eslabones en común.

**movilidad** - Indica la cantidad de entradas de movimiento que admite un mecanismo. Se estima con la ecuación de Gruebler.

**movimiento complejo** - Es una combinación simultánea de rotación y traslación.

**nodo** - Es un punto de unión de un eslabón con otros eslabones.

**orden de eslabón** - Es el número de nodos por eslabón.

**par inferior o junta completa** - Unión entre eslabones que permite únicamente un tipo de movimiento independiente entre ellos, es decir presentan un GDL, ejemplos; pasadores y deslizantes.

**par superior o semijunta** - Unión entre eslabones que permite más de un tipo de movimiento independiente entre ellos (rotacional y traslacional), tienen solo contacto puntual o lineal.

**posición de agarrotamiento** - Se presenta por la colinealidad de dos eslabones móviles. Esta condición es indeseable si evita que el eslabonamiento pase de una posición deseada a otra. Su utilidad radica que puede crear una función autotrabante cuando el eslabonamiento se mueve ligeramente más allá de la posición de agarrotamiento contra un tope fijo.

**oscilador** - Eslabón que presenta un movimiento angular alternativo, sin llegar a realizar una revolución completa.

**revolvabilidad** - Se define como la capacidad de un eslabón  $L_i$  de girar por completo con respecto a los demás eslabones de la cadena y se puede determinar con:  $L_i + L_N \leq \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} L_k$  Donde  $L_i$  son los eslabonamientos de  $N$  barras, con  $L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_N$ .

**relación de tiempo Q** - Parámetro de movilidad de un mecanismo de cuatro barras y se define como la relación entre el tiempo de avance del oscilador y el tiempo de retroceso. Dicha relación es útil para determinar la capacidad del mecanismo manivela-oscilador para retornar a su posición inicial en un tiempo menor al avance.

**rotabilidad** - Es la capacidad de que por lo menos un eslabón de una cadena cinemática realce una revolución completa con respecto a los otros eslabones y define la cadena como clase I, II o III.

**salida de balancín** - Se usa para situaciones en donde se requiere una manivela-balancín de Grashof. Es un caso de generación de función donde la salida se define como dos posiciones angulares.

**salida de acoplador** - Es un caso de generación de movimiento en el que dos posiciones de una línea se definen como salida.

**síntesis de número** - Es la determinación del número y el orden de eslabones y juntas necesarias para producir movimiento de un GDL en particular.

**síntesis dimensional de un eslabonamiento** - Es la determinación de las longitudes de los eslabones necesarios para lograr los movimientos deseados.

**síntesis de dos posiciones** - Se divide en dos categorías: rotación pura (salida de balancín) y movimiento complejo (salida de acoplador).

**sistema conservativo** - Sistema en el que las pérdidas de energía debido a la fricción, calor, etc., son despreciables en comparación con la energía total transmitida por el sistema, y si se supone que no hay efectos por las fuerza de inercia la potencia de entrada es igual a la potencia de salida. Ejemplo de estos sistemas son los mecanismos.

**tareas de desempeño** - Son las aplicaciones o usos de todos los sistemas mecánicos: generación de función, generación de trayectoria y generación de movimiento.

**ventaja mecánica** - Relaciona la fuerza en el eslabón de salida de un mecanismo con la fuerza del eslabón de entrada. Si el ángulo de transmisión se reduce, entonces también se reduce la ventaja mecánica. Pequeños valores de fricción pueden provocar que el mecanismo se trabe. Se recomienda mantener un ángulo de transmisión mayor a  $45^\circ$  para garantizar un movimiento suave y con buena transmisión de fuerza.

## Apéndice C

# Glosario de términos médicos

**anastomosis** - Unión de elementos anatómicos.

**articulación sinovial** - Es el movimiento de la planta del pie hacia el plano medio (la planta mira en dirección medial).

**avulsión** - Es una amputación no reglada, sino producida por una extirpación por tracción o arrancamiento de una extremidad, debida a un accidente, siendo muy traumática y que pone en peligro la vida del individuo.

**diartrosis** - Articulación de amplios movimientos que está formada por dos superficies articulares y se clasifican según el tipo de movimiento:

- **troclea** - Con movimientos de flexión y extensión.
- **trocoides** - Con movimientos de rotación alrededor del eje longitudinal y permiten sólo los movimientos de rotación lateral y rotación medial (ejemplo: atlanto-axial y la cúbito-radial).
- **artrodia** - Sus superficies articulares son planos y solo permiten movimientos de deslizamiento (Ejemplos: articulaciones intercarpianas y acromioclavicular)
- **enartrosis** - Articulación esférica con movimientos libres en cualquier dirección (ejemplos: coxo-femoral y la hombro-humeroescapular)

**distal** - Término que indica que una parte de un órgano o miembro está más distante del eje o línea media del organismo, o del arranque de un miembro u otro órgano.

**movimientos del cuerpo humano**

- **abducción** - Es el alejamiento de un miembro situado en el plano coronal con respecto al plano medio.
- **aducción** - Es el acercamiento de un miembro situado en el plano coronal en dirección al plano medio.
- **circunducción** - Es un movimiento circular que combina flexión, extensión abducción y aducción de tal manera que el elemento extremo distal efectúa un círculo.
- **eversión** - Es el alejamiento de la planta del pie del plano medio (giro lateral de la planta).
- **extensión** - Indica el aumento del ángulo entre los huesos. La extensión del miembro inferior realizado por la rodilla es anterior. La extensión más allá del límite normal se denomina hiperextensión y es causa de lesión.
- **flexión** - Significa disminuir el ángulo que forman los huesos. La flexión del miembro inferior realizada por la rodilla es posterior.
- **inversión** - Es el movimiento de la planta del pie hacia el plano medio (la planta mira en dirección medial).
- **pronación** es la combinación de la eversión y abducción que determina un descenso del borde medial del pie.
- **rotación lateral** - Aleja la cara anterior de un miembro del plano medio.
- **rotación medial** - Aproxima la cara anterior de un miembro al plano medio.
- **supinación** - Es el movimiento de elevación del borde medial del pie.

**ejes de movimiento del cuerpo humano** - Los movimientos de las articulaciones músculo-esqueléticas son en su gran mayoría rotacionales y perpendiculares al plano en el que se lleva a cabo el movimiento y se les conoce como eje de rotación. Existen 3 ejes de rotación:

- **eje anteroposterior o sagital** - Eje horizontal que va desde la mitad posterior a la anterior y esta formado por la intersección de los planos sagital y horizontal.
- **eje transversal o frontal** - Eje horizontal que va de izquierda a derecha y esta formado por la intersección de los planos frontal y horizontal.

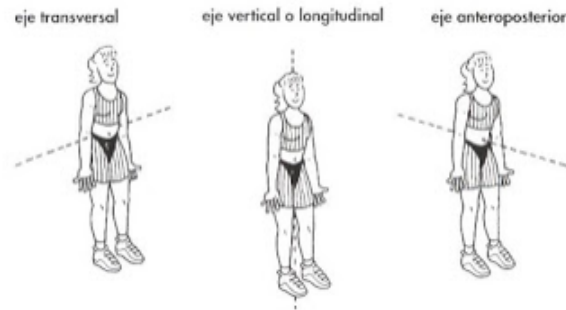


Figura C.1: Ejes del cuerpo humano

- **eje vertical o longitudinal.** Está formado por la intersección del plano sagital y el plano frontal.

**fisiología** - Conjunto de propiedades y funciones de los órganos y tejidos del cuerpo de los seres vivos.

**miodesis** - Es la fijación de grupos musculares a estructuras óseas.

**patología** - Parte de la medicina que estudia los trastornos anatómicos y fisiológicos de los tejidos y los órganos enfermos, así como los síntomas y signos a través de los cuales se manifiestan las enfermedades y las causas que las producen.

**planos anatómicos** - Son cuatro planos imaginarios que atraviesan el cuerpo en la posición anatómica (ver figura C.2).

- **plano mediano o medio** - Es el plano vertical que atraviesa el cuerpo en sentido longitudinal y lo divide en dos mitades, derecha e izquierda.
- **plano sagital o plano anteroposterior** - Son planos verticales que atraviesan el cuerpo en forma paralela al plano medio y que va de la parte posterior a la parte frontal.
- **plano frontal o coronal** - Plano vertical que atraviesan el cuerpo en forma perpendicular al plano medio y los divide en las porciones anterior (frontal) y posterior (dorsal).
- **plano horizontal o transversal** - Plano que atraviesa el cuerpo de forma perpendicular a los planos mediano y coronal. Un plano horizontal divide al cuerpo en la mitad superior (cranial) y la mitad inferior (caudal)

**posición anatómica** - Es aquella en la que la persona permanece de pie, de la siguiente forma:

- La cabeza, los ojos y los dedos de los pies se dirigen en sentido anterior (hacia adelante).

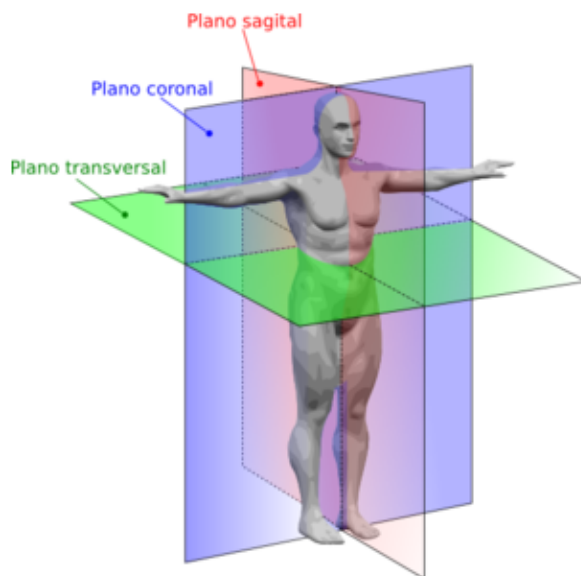


Figura C.2: Planos del cuerpo humano

- Los miembros superiores cuelgan con las plantas mirando en dirección anterior (al frente).
- Los miembros inferiores y los pies se dirigen hacia adelante.

**proximal** - Término que indica que una parte de un órgano o miembro está más cerca del eje o línea media del organismo, o del arranque de un miembro u otro órgano.

**trocleoartrosis** - Cuando las superficies articulares son por un lado una tróclea o polea y por el otro una cresta y dos carillas para sus partes laterales.



# Bibliografía

- [1] Neri, Ferrante and Cotta, Carlos, *A primer on memetic algorithms*, Springer Verlag, 2012.
- [2] Neri, Ferrante, Cotta, Carlos, Moscato, Pablo, *Handbook of memetic algorithms*, Springer Verlag, 2012.
- [3] Brookshear J.G. *Theory of computation. Formal languages, automata, and complexity*, Addison Wesley, 1989.
- [4] Brookshear J.G. *Computer science. An overview*, Addison Wesley, 1994.
- [5] Goldschlager, L., Lister, A. *Computer science*. Prentice Hall, 1982.
- [6] Zwass, V. *Computer Science*, Harper and Row Publishers, Inc, 1981.
- [7] Kelly D. *Automata and formal languages: An introduction*. Prentice Hall.1995.
- [8] Einstein A., *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, Annalen der Physik, 1905.
- [9] Copeland B.G. *Colossus: The Secrets of Bletchley Park's Codebreaking Computers*, Oxford University Press, 2006.
- [10] Polya G., *How to solve it*, Computer science library, 1945.
- [11] Bremermann H. J., *Optimization through evolution and recombination*, Spartan Books, 1962.
- [12] Holland J. H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, MIT Press, 1975.
- [13] Schwefel, H. P.: *Evolution and Optimum Seeking*, Wiley Interscience, 1995.
- [14] Rao, Singiresu, *Engineering Optimization*, Wiley, 2009.

- [15] Mezura-Montes E., Cetina-Domínguez O., Hernández-Ocaña B., *Nuevas Heurísticas Inspiradas en la naturaleza para Optimización Numérica*, Laboratorio Nacional de Informática Avanzada, 2006.
- [16] Yang, X.S. *Nature-inspired Metaheuristic Algorithms*, Luniver Press, 2010.
- [17] Glover, F., Kochenberger, G. A. *Handbook of metaheuristics*. Springer Science Business Media, 2003.
- [18] Areibi S. and Abdullah H., *A comparison of genetic algorithm/memetic algorithm and heuristic searching*, Proceedings of the 2001 International Conference on Artificial Intelligence ICAI 2001, 2001.
- [19] Boussaid, Ilhem, Lepagnot, Julien and Starry, Patrick, *A survey on optimization metaheuristics*, Information Sciences 237 (2013) 82-117. Elsevier, 2013.
- [20] Laguna, M. , Delgado, C., *Introducción a los metaheurísticos*, Monográfico 3 . ETS. Ingenieros Industriales, 2007.
- [21] Mezura-Montes E., Coello-Coello C., Tun-Morales E. *Simple feasibility rules and differential evolution for constrained optimization*. In International Conference on Artificial Intelligence (MICAI), Heidelberg Germany, 707-716, 2004.
- [22] Domínguez-Isidro S., Mezura-Montes E., Leguizamón G., *Performance Comparison of Local Search Operators in Differential Evolution for Constrained Numerical Optimization Problems*.
- [23] Moscato P. *On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Towards Memetic Algorithms*. Caltech Concurrent Computation Program (report 826). 1989.
- [24] Moscato P., Cota C., *An introduction to memetic Algorithms*, Revista Iberoamericana de inteligencia Artificial No.19 pp 131-148, 2003.
- [25] Krasnogor N. *Coevolution of genes and memes in memetic algorithms*. Graduate Student Workshop: 371.1999
- [26] Krasnogor N. *A memetic algorithm with self-adaptive local Search: TSP as a case study*. Graduate Student Workshop: .2000
- [27] Krasnogor N. and Gustafson S. *Toward truly memetic algorithms: discussion and proof of concepts*. Advances in Nature-Inspired Computation: the PPSN VII Workshops. PEDAL (Parallel Emergent and Distributed Architectures Lab). University of Reading.2002.

- [28] Krasnogor N. and Gustafson S. *A study in the use of "self-generation" in memetic algorithms*. Natural Computing. Kluwer Academic Publishers.2004.
- [29] Chen X. S., Ong Y. S., Lim M. H. *Research Frontier: Memetic Computation - Past, Present and Future*. IEEE Computational Intelligence Magazine 5 (2): 24-36.(2010)
- [30] Chen X. S., Ong Y. S., Lim M. H., Tan K. C. *A Multi-Facet Survey on Memetic Computation* IEEE Transactions on Evolutionary Computation 15 (5): 591-607. 2011
- [31] Domínguez-Isidro S., Mezura-Montes E., Leguizamón G., *Memetic differential evolution for constrained numerical optimization problems*.
- [32] Dawkins R. *The Selfish gene*, Oxford University Press, 1976.
- [33] Wolpert D. H., Macready W. G., *No free lunch theorem for optimization*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1(1):67-82,1997.
- [34] Ozcan, E.; Basaran, C. , *A Case Study of Memetic Algorithms for Constraint Optimization*. Soft Computing: A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications. 2009
- [35] Martinez-Salazar, I. , Rafael-Caballero, J., *Memetic algorithms for solving a bio-objective transportation location routing problem*, Proceeding of the 2014 Industrial and Systems Engineering Research Conference. 2014.
- [36] Vega, E. et al. *Hybrid metaheuristic for designing an end effector as a constrained optimization problem simplex method for function minimization*. IEEE Access, 2017.
- [37] Cenedet. *Rehabilitación del paciente adulto amputado de extremidad inferior por diabetes mellitus, en el segundo y tercer nivel de atención*. Gobierno Federal, México.(2015)
- [38] Enríquez-Torres, J.R., Alonso-Arreguin, Elizabeth, Méndez-Sánchez, A. F., Pérez-Trejo, L., *Diseño y construcción de una prótesis de rodilla con pistón magnetoreológico*, 8th. Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, 2007.
- [39] Campos-Padilla, I. Y. *Diseño de un mecanismo policéntrico para prótesis de rodilla*. Mechanical Engineering Dept. México. Instituto Politécnico Nacional.M.Sc.:108.
- [40] Luenberger D. G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1973.

- [41] Storn R., Price K. *Differential evolution? a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces*. Journal of global optimization, 11(4), 341-359, 1997
- [42] Price K., Storn, R., Lampinen J. *Differential evolution: a practical approach to global optimization*. Springer Science Business Media, 2007.
- [43] Youssef H., Sadiq M., HakimAdiche, *Evolutionary algorithms, simulated annealing and tabu search: a comparative study*. Engineering Applications of Artificial Intelligence 14,167?181,2001
- [44] Koepfen M., Schaefer G., Abraham A (Eds). *Intelligence Computational Optimization in Engineering. Techniques and Applications*, Springer Verlag, 2011.
- [45] Kennedy J. ,Rusell E., *Particle swarm optimization*. In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Piscataway, volume 4, 1942-1948, 1995.
- [46] Kennedy J. ,Rusell E., *Swarm Intelligence*, Academic Press, 2001
- [47] Glover, F., McMillan, C. *The general employee scheduling problem*. An integration of MS and AI. Computers operations research, 13(5), 563-573, 1986.
- [48] Karaboga D. *An idea based on honey bee swarm for numerical optimization*, Technical Report, 2005.
- [49] Karaboga D.,Basturk B., *A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial bee Colony (ABC) algorithm*, J Glob Optim 39:459-471, 2007.
- [50] Karaboga D.,Basturk B., *On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm*. Journal of Applied Soft Computing 8 687?697, 2008.
- [51] Yang, X.-S., Deb, S. *Cuckoo search via Lévy flights*. World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing, IEEE, 2009.
- [52] Price, K. *An Introduction to Differential Evolution in New Ideas in Optimization*. McGraw-Hill, 1999.
- [53] Deb, K. *An efficient constraint handling method for genetic algorithm*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2000.
- [54] Yang, X.S. *Flower Pollination Algorithm for global Optimization*, Unconventional Computation and Natural Computation, Lecture Notes in Computer Science, 2012.

- [55] Yang, X.-S., et al *Global convergence analysis of the flower pollination algorithm*. International conference on computational Science, 2017.
- [56] Universidad Militar de Nueva Granada, *Documento preclínico, ingeniería-reingeniería de prótesis de rodilla*, Grupo de Investigación en Mecatrónica Davinci Hospital Militar Central GSED-INDUMIL, 2012.
- [57] Crespo, X., Curell, N., Curell, J., *Anatomía*, Osiris Editores, 1989.
- [58] Moore, K., Dalley, A., *Anatomía con orientación clínica*, Editorial Médica Panamericana, 2002.
- [59] Cultura Librería Americana, *Anatomía y fisiología del cuerpo humano*, Arquetipo Grupo Editorial, 2005.
- [60] Universidad de Valencia., *Biomecánica Articular*, España, 1996.
- [61] Sánchez-Lacuesta, J.: *Biomecánica de la marcha humana normal y patológica*, Instituto de Biomecánica de Barcelona, España, 1993.
- [62] Le Veau, Barney, *Biomecánica del movimiento humano*, Trillas, 2008.
- [63] Pérez-Soriano, P., Llana-Belloch, S., *Biomecánica básica, aplicada a la actividad física y el deporte*, Paidotribo, 2015.
- [64] Arellano-González, J.C., Medellín-Castillo, H. I., *Análisis y síntesis cinemática de un mecanismo para prótesis externa de rodilla humana*, Memorias del XIX Congreso Internacional anual de la SOMIM, 2013.
- [65] Valentino-Orozco, G. A., Guerreo-Beltrán, L., Obregón-Velasco, D., Avalos-Fernández, O., *Desarrollo de prótesis externa de rodilla con mecanismo policéntrico*, Acta ortopédica Mexicana, 2008.
- [66] Livingston-Castro, V., Camacho-BrausenDorff, F., *Diseño y modelado virtual del mecanismo policéntrico de una prótesis de rodilla*, Revista Tecnológica ESPOL, 2012.
- [67] Amador, B.T., Torrealba, R. R., Rojas, M., Cappelletto, J., Mueller-Karger, C., *Metodología para dimensionamiento de mecanismo policéntrico de rodilla utilizando análisis de marcha y algoritmos genéticos*, Revista Ingeniería Biomédica, 2012.

- [68] Merchán-Cruz E.A., Lugo-González E. Ramirez-Gordillo, J., Rodriguez-Cañizo, R. G., Sandoval-Pineda, J., Hernández-Gómez,L.H., *Síntesis genética de mecanismos para aplicaciones en prótesis de miembro inferior*, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial. Vol 8, Num2, 2011.
- [69] Radcliffe, C., *Prosthetic-knee mechanism for above-knee amputees* Prosthetic and Orthotics practice: 225-249.
- [70] Radcliffe, C., *Four-bar linkage knee mechanism: kinematics, alignment and prescription criteria* Prosthetic and Orthotics Internatonal: 18:159-173.
- [71] Jin, D., Zhang, R. et al. *Kinematic and dynamic performance of prosthetic knee joint using six-bar mechanism*, Journal of rehabilitation research and development 40(1):39-48.
- [72] Portilla-Flores E. *Diseño mecatrónico y técnicas heurísticas*. Technical report, Instituto Politécnico Nacional, CIDETEC, México, 2010.
- [73] Deb K., *Optimization for Engineering Design*, PHI Learning, 2012.
- [74] Portilla-Flores E., Calva-Yañez, M., Villareal-Cervantes, M. G., Niño-Suárez, P. A., Sepúlveda-Cervantes, G., *Dynamic approach to optimum synthesis of a four-bar mechanism using a swarm intelligence algorithm*. Kybernetyka, 2014.
- [75] Quintero, F. H., Calle-Trujillo, G., Díaz-Arias, A., *Síntesis de generación de trayectoria y de movimiento para múltiples posiciones en mecanismos utilizando algoritmos genéticos*, Scientia et Technica, 2004.
- [76] Drillis, R., Contini R., Bluestein M., *Body segment parameters. A survey of measurements techniques*. Artificial Limbs, Vol.8, Num. 1, 1964.
- [77] Cabrera, J.A., Simon, A., Prado, M., *Optimal synthesis of mechanisms with genetic algorithms*. Mechanism and Machinery Theory 37:1165-1177.
- [78] Alciatore, D., Histan, M., *Introducción a la mecatrónica y los sistemas de medición*, Mc Graw-Hill, 2008.
- [79] Bolton, W., *Mecatrónica, sistemas de control electrónico en la ingeniería mecánica y eléctrica*, Alfaomega, 2013.

- [80] Kumar-Saha S., *Introducción a la robótica*, Mc Graw-Hill, 2008.
- [81] Reyes-Cortés F., *Matlab aplicado a robótica y mecatrónica*, Alfaomega, 2012.
- [82] Reyes-Cortés F., Cid-Monjaraz, J., Vargas-Soto, E., *Mecatrónica, control y automatización*, Alfaomega, 2013.
- [83] Shigley, J. E., *Teoría de Máquinas y Mecanismos*, Mc Graw-Hill, 1988.
- [84] Budynas, G., Keith Nisbett J., *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*, Mc Graw-Hill, 2012.
- [85] Myszka, David, *Máquinas y mecanismos*, Pearson, 2012.
- [86] Norton, Robert, *Diseño de maquinaria*, Mc Graw-Hill, 2013.
- [87] Erdam, A., Sandor, G., *Diseño de mecanismos, análisis y síntesis*, Pearson, 2015.
- [88] Guerra-Torres, C., *Análisis y síntesis de mecanismos con aplicaciones*. Grupo Editorial Patria, 2016.
- [89] Galeano-Ureña, C. A., Duque-Daza, C. A., Garzón-Alvarado, D. A. *Aplicación de diseño óptimo dimensional a la síntesis de posición y velocidad en mecanismos de cuatro barras*, Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia No. 47, 2009.
- [90] Spiegel, Murray, *Mecánica teórica*, Serie Schaum, Mc Graw-Hill, 1976.
- [91] Dennis J. E., Woods D. J. *Optimization on microcomputers: The Nelder-Mead simplex algorithm*. New computing environments: microcomputers in large-scale computing, 116-122,1987.
- [92] Gunston F., Winnipeg, et al., *Polycentric knee arthroplasty. Prosthetic simulation of normal knee movement*, Journal of bone and joint surgery 53 B: 272-277.
- [93] Hatamlou A. *Black hole: A new heuristic optimization approach for data clustering*. Information Sciences, 2012.
- [94] Hobston, D. A. and Torfason, L.E., *Optimization of four-bar knee mechanism, a computerized approach*, Journal of Biomechanics 7(4):371-376.
- [95] Hobston, D. A. and Torfason, L.E., *Computer optimization of polycentric knee prosthetic knee mechanism*, Bulletin of prosthetic research 10(23):187-201.

- [96] Lugo-González, E., Ramírez-Gordillo, J., Velázquez-Sánchez, A., Campos-Padilla, I. Y., *Mecanismos analizados con algoritmos genéticos y métodos analíticos*, Memorias del 14 Congreso Internacional anual de la SOMIM, 2008.
- [97] Lugo-González, E., *Diseño de mecanismos utilizando algoritmos genéticos con aplicación en prótesis para miembro inferior*. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional. Tesis de Doctorado.
- [98] Nelder J. A., Mead R. *A simplex method for function minimization*. The Computer Journal, Vol. 7 308, 1965.
- [99] Peón-Escalante, R., Méndez-Gamboa, J., Villanueva-López, C., Pech-Oy, D., *Síntesis dimensional óptima de un mecanismo planar RRRR usando algoritmos genéticos*, Revista Facultad de Ingeniería UADY, 2009.
- [100] Runarsson, T. P.; Yao, X. *Stochastic Ranking for Constrained Evolutionary Optimization* IEEE Transactions on Evolutionary Computation: 311R. 2000
- [101] Siegel, S, Castellan N. *Non Parametric Statistics for the Behavioral Science*, Mc Graw Hill , 1995.
- [102] Stevenson, W. *Business Statistics: Concepts and Applications*, Harper and Row Publishers, Inc., 1978.
- [103] Geem, Z. W., Kim J. H., Loganathan, G. V. *A new heuristic optimization algorithm: harmony search*. Simulation, 76(2), 60-68, 2001.
- [104] Lee, K. S., Geem, Z. W. *A new meta-heuristic algorithm for continuous engineering optimization: harmony search theory and practice*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 194(36), 3902-3933, 2005.