



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

TESIS

**“APORTACIONES A LA ESTIMACIÓN
DEL PERÍMETRO DE CURVAS Y ÁREAS
DE SUPERFICIES DIGITALES”**

*PARA OBTENER EL GRADO DE: DOCTORADO EN CIENCIAS
DE LA COMPUTACIÓN*

PRESENTA:

M. en C. Mario Villafuerte Bante

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Juan Humberto Sossa Azuela

Dra. Petra Wiederhold Grauert



Ciudad de México, Mayo, 2022



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS Y DESIGNACIÓN DE DIRECTORES DE TESIS

México, D.F. a 26 de Septiembre de 2012

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del **Centro de Investigación en Computación** en su sesión ordinaria No. 8 celebrada el día 27 del mes de Agosto de 2012.
conoció la solicitud presentada por el(la) alumno(a):

VILLAFUERTE Apellido paterno	BANTE materno	MARIO nombre(s)
Con registro:		
A	1	2
0	4	3
9		

aspirante al grado de: **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

1.- Se designa al aspirante el tema de tesis titulado:

“APORTACIONES A LA ESTIMACIÓN DEL PERÍMETRO DE CURVAS Y ÁREAS DE SUPERFICIES DIGITALES”

2.- De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos

Capítulo 1 Introducción Capítulo 2 Estado del arte Capítulo 3 Estimadores DSS,MLP y el Algoritmo propuesto
Capítulo 4 Calendario de actividades

2.- Se designan como Directores de Tesis a los Profesores:

DR. JUAN HUMBERTO SOSSA AZUELA Y DRA. PETRA WIEDERHOLD GRAUERT

- 3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesis será elaborado por el alumno en:
El Centro de Investigación en Computación, que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.
- 4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

Directores de Tesis

Dr. Juan Humberto Sossa Azuela

Dra. Petra Wiederhold Grauert

Aspirante

C. Mario Villafuerte Bante



Presidente del Colegio

Dr. Luis Alfonso Villa Vargas
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN
EN COMPUTACIÓN
DIRECCIÓN



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 10:00 horas del día 14 del mes de diciembre de 2015 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

Centro de Investigación en Computación

para examinar la tesis titulada:

“Aportaciones a la estimación del perímetro de curvas y áreas de superficies digitales”

Presentada por el alumno:

VILLAFUERTE

Apellido paterno

BANTE

Apellido materno

MARIO

Nombre(s)

Con registro:

A	1	2	0	4	3	9
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de: **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dr. Juan Humberto Sossa Azuela

Dra. Petra Wiederhold Grauert

Dr. Sergio Suárez Guerra

Dr. Herón Molina Lozano

Dra. Elsa Rubio Espino

Dr. Ricardo Barrón Fernández

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN
EN COMPUTACIÓN
DIRECCIÓN
IPN-CIC

Dr. Luis Alfonso Villa Vargas



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE AUTORIZACIÓN DE USO DE OBRA PARA DIFUSIÓN

En la Ciudad de México el día **07** del mes de **Julio** del año **2022**, el que suscribe **Mario Villafuerte Bante**, alumno del programa **DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**, con número de registro **A120439**, adscrito al Laboratorio de Robótica y Mecatrónica, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del **Dr. Juan Humberto Sossa Azuela y la Dra. Petra Wiederhold Gruert** y cede los derechos del trabajo intitulado **“APORTACIONES A LA ESTIMACIÓN DEL PERÍMETRO DE CURVAS Y ÁREAS DE SUPERFICIES DIGITALES”**, al Instituto Politécnico Nacional, para su difusión con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expresado del autor y/o director(es). Este puede ser obtenido escribiendo a las siguiente(s) dirección(es) de correo. mvbante@gmail.com. Si el permiso se otorga, al usuario deberá dar agradecimiento correspondiente y citar la fuente de este.

Nombre completo y firma autográfica del (de la)
estudiante

AGRADECIMIENTOS

Con toda mi gratitud:

- **A mis sinodales: Dra. Elsa Rubio Espino, Dr. Ricardo Barrón Fernández, Dr. Víctor Hugo Ponce Ponce y Dr. Herón Molina Lozano; por su invaluable tiempo y apoyo en esta tesis.**

- **A mi asesora, la Dra. Petra Wiederhold Grauert, por todo su trabajo y apoyo, así como sus grandes aportaciones, visión y objetividad, todas invaluable y determinantes para la realización de esta tesis.**

- **A mi asesor Dr. Juan Humberto Sossa Azuela por su gran disposición y apoyo, así como sus aportaciones, recomendaciones, experiencia, visión y amistad incondicional.**

- **Al Departamento de Control Automático del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (DCA-CINVESTAV-IPN).**

- **Al Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional (CIC-IPN).**

- **Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT).**

DEDICATORIAS.

➤ **Con todo mi amor:**

A mi esposa Thelma, a mis hijos Andrea y Mario Luis: POR TODA LA FELICIDAD.

➤ **Con amor y respeto:**

A mi madre Elvia, mi padre Jorge (QEPD) y mis abuelitos (QEPD).

➤ **Con mucho afecto y admiración:**

A “El Padrino” Don Luis (QEPD).

➤ **Con gratitud y cariño:**

A mi hermano César V.B.

Índice de contenido

Lista de figuras	v
Lista de tablas	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Introducción	xv
Introducción y trabajo relacionado	xv
Motivación para el presente trabajo	xvi
Contenido del trabajo de tesis	xvii
Resumen de las aportaciones de la tesis	xvii
Organización de la tesis	xviii
Capítulo 1. Preliminares	1
1. Suposiciones generales	1
2. Curvas and polígonos simples y débilmente simples	1
3. 4-contornos y su determinación mediante el seguimiento de contornos	3
Capítulo 2. 4-contornos y sus caminos exteriores	7
1. Camino exterior al 4-contorno	7
2. El poliomino entre 4-contorno y su camino exterior	9
3. Relaciones entre vértices cóncavos del 4-contorno y de su camino exterior	10
Capítulo 3. Una propuesta de aproximación poligonal para 4-contornos	11
1. Polígono de perímetro mínimo para 4-contornos	11
2. Vértices especiales de la MLPC y candidatos	12
3. Propuesta del polígono y estrategia para determinar sus vértices	16
4. Determinación de vértices complementarios del polígono	18
4.1. Tratamiento de sublistas de candidatos	18
4.2. Vértices complementarios para tres candidatos	19
4.3. Vértices complementarios para cuatro candidatos	21
4.4. Vértices complementarios para cinco candidatos	22
Capítulo 4. Algoritmo para construir una aproximación poligonal para 4-contornos generales	25
1. Algoritmo para determinar los vértices del polígono propuesto	25
2. Propiedades del algoritmo	27
2.1. Correctitud	27
2.2. Requerimiento de espacio	27
2.3. Complejidad de tiempo	28
3. Ejemplos	28
Capítulo 5. Experimentos de estimación del perímetro	35
1. Planteación y preparación de experimentos	35
2. Estimación de perímetro de objetos con 4-contornos simples	35

3. Objetos con 4-contornos débilmente simples usados para la experimentación	37
4. Resultados de experimentos de estimación de perímetro con 4-contornos débilmente simples	37
Conclusiones	45
Bibliografía	47
Apéndice A. Lemas extendidas y demostraciones matemáticas	49
1. Demostración de Lema 15	49
2. Lema sobre la detección de vértices complementarios del polígono, para cuatro puntos candidatos, con su demostración	50
3. Lema sobre la detección de vértices complementarios del polígono, para cinco puntos candidatos, con su demostración	53
Apéndice B. Tablas de resultados de experimentos de estimación del perímetro	61

Lista de figuras

- 1 Los dos primeros polígonos perteneces a una secuencia que converge al último polígono el cual sólo es débilmente simple. Durante este proceso de convergencia, pequeñas traslaciones de vértices transforman a la secuencia original de vértices $(a, b, c, d, e, g_2, h, g_1, k, o, p, n, m, q)$ hacia la secuencia $(a, b, c, d, e, g, h, g, k, o, p, n, m, q)$. En el límite, los puntos g_1 y g_2 resultan identificados al punto g , y los puntos c, e, n, m llegan a estar sobre un canto del último polígono, el cual tiene partes degeneradas y un agujero formado por los puntos o, p, n . 2
- 2 Código de Freeman para la 8-vecindad. 4
- 3 Un objeto es dibujado como subgráfica inducida por la 4-gráfica vecina, también su 4-contorno C que fue obtenido por seguimiento de contorno respetando el sentido de trazado del contorno según las manecillas del reloj. Este objeto coincide con su 4-frontera dada por el conjunto $\{a, b, c, d, e, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$. Obtenido por seguimiento de contorno con el punto inicial b , el 4-contorno resulta ser $C = (b, a, b, c, d, t, u, w, x, w, v, z, y, z, v, t, s, r, e, r, s, c)$ que es una secuencia ordenada única pero cíclica de píxeles, no todos distintos. Cualquier otro punto inicial de contorno generaría la misma secuencia cíclica C que tiene el código de cadena de Freeman $F(C) = (2, 0, 2, 0, 2, 0, 4, 4, 2, 4, 0, 6, 6, 4, 4, 4, 0, 0, 6, 6, 6, 2)$. 5
- 1 El 4-contorno C está dibujado en azul, $Ext(C)$ en rosa. **a)** Obsérvese que durante el trazado de la parte (e, r, s, c, b, a) de C , cada punto lineal r, c, b proporciona un pixel al camino exterior $Ext(C)$, igualmente como lo hacen los puntos lineales w, v, s más tarde, por ejemplo. Cada punto convexo d, u y z , contribuye tres puntos a $Ext(C)$. **b)** Cada punto cóncavo de C , como s en la tripleta (r, s, c) , c en (b, c, d) , t en (d, t, u) , y más tarde, t en la tripleta (v, t, s) , genera un punto de $Ext(C)$. **c)** Cada pico de C (a, e, x, y) proporciona cinco puntos exteriores. Los puntos cóncavos z y t con el punto lineal v entre ellos, genera el mismo punto de $Ext(C)$ el cual resulta ser el pico p marcado en **d)**. La secuencia $Ext(C)$ puede contener elementos más de una vez, sin embargo, ningún elemento aparece repetido inmediatamente. 8
- 2 El poliomino entre C y $Ext(C)$ según Lema 6 proporciona relaciones entre los vértices cóncavos de ambos 4-caminos, así como también una condición local en C para detectar picos en $Ext(C)$. 9
- 1 Un 4-contorno simple C en azul, su camino exterior $Ext(C)$ en rosa. Los vértices convexos de C , marcados en rojo, junto con los vértices cóncavos de $Ext(C)$ (verde) que corresponden de manera única a vértices cóncavos de C , forman la lista de candidatos de los vértices del MPP, visualizados en la figura del lado derecho. 11
- 2 Un 4-contorno C (azul) y $Ext(C)$ (rosa), solamente sus vértices son visualizados como píxeles gordos. La parte superior de C presenta dos picos y dos cantos extremos superiores horizontales con puntos finales convexos, que son todos colineales, incluyendo tres picos de $Ext(C)$. En las partes inferiores de C y $Ext(C)$, varios puntos convexos siendo puntos finales de cantos extremos de C y puntos finales cóncavos de cantos extremos de $Ext(C)$

	son todos colineales. Como resultado, todos estos puntos pertenecen a la MLPC de C , sólo algunos pocos, marcados en amarillo, son vértices de la MLPC.	12
3	Demostración de Lema 11. Píxeles de C son visualizados en azul, picos en café, flechas negras indican el orden en C . Cada pico proporciona cinco puntos de $Ext(C)$ (rosa).	13
4	Demostración de Lema 11, primer caso de un pico de $Ext(C)$. Píxeles de C are visualizados en azul, de $Ext(C)$ en rosa.	14
5	Para el 4-contorno C de las Figuras 3, 1, 2, sus vértices convexos son marcados en rojo, sus picos en café. Cada vértice cóncavo de C corresponde a un vértice cóncavo (verde) o a un pico (rosa) de $Ext(C)$. La figure izquierda muestra la secuencia ordenada de los candidatos, la derecha visualiza los vértices de la MLPC.	15
6	Las ocho situaciones para tres candidatos subsecuentes, donde el segundo punto puede ser necesario como vértice complementario. El 4-contorno C es dibujado en azul, $Ext(C)$ en rosa, los cuadrados del poliomino son presentados en gris, puntitos indican que puede haber cualquier número de puntos lineales, por lo tanto también más cuadrados, entre c_1 y c_2 , y entre c_2 y c_3 .	20
1	Representación por retícula: a) lista de candidatos (convexo - rojo, cóncavo - verde, pico convexo - café, pico cóncavo - salmón), b) vértices del polígono marcados por círculos amarillos, la frontera del polígono marcada en negra para $m = 3$, c) el polígono para $m = 4$, d) el polígono para $m = 5$. Comparación con Figura 5 revela que el polígono no coincide con el MLP, puesto que tiene un vértice adicional marcado como p .	29
2	Representación por cuadrado: a) C del objeto de Figura 1. b) candidatos. c) vértices del polígono para $m = 5$: cuatro picos convexos en café, un pico cóncavo en salmón, un vértice complementario convexo en azul cielo, un vértice complementario cóncavo en amarillo. Durante el trazado de $Cand$ en sentido del reloj, el punto rojo en la línea inferior line de c) fue encontrado como punto inicial de un canto extremo horizontal, y su vecino izquierdo como punto final de este canto. Más tarde, este punto fue confirmado como pico convexo y por eso, fue marcado nuevo como café.	29
3	Representación por cuadrado: a) objeto, b) C , c) C pintado en azul sobre el objeto negro, luego, $Ext(C)$ fue marcado sobre eso en rosa, d) candidatos marcados sobre el 4-contorno azul, d) el polígono construido para $m = 5$: cantos extremos (rojo y verde), otros vértices extremos (dos picos en café y salmón), dos vértices complementarios (azul cielo, amarillo), todos pintados sobre el 4-contorno negro.	30
4	Polígono ($m = 5$) del objeto de Figura 3a), vértices del polígono encerrados por círculos amarillos, la frontera del polígono marcada negra.	30
5	Representación por cuadrado: vértices del polígono (convexos complementarios) y cantos localmente extremos (con puntos finales convexos), para versiones rotadas de una elipse (ejes de 150 y de 50 píxeles).	30
6	Representación por cuadrado: a) objeto, b) C , c) candidatos sobrepuestos sobre C , d) vértices del polígono ($m = 5$) y cantos extremos sobrepuestos sobre el 4-contorno negro. Abajo, la representación por retícula del polígono para $m = 5$.	31
7	Representación por cuadrado: parte superior de los círculos con radios de 10 a 100 píxeles, arriba son marcados los puntos candidatos, abajo son visualizados sus polígonos calculados con $m = 5$.	32
8	Representación por cuadrado: vértices del polígono y cantos localmente extremos, para cuatro versiones escaladas de un objeto con 4-contorno simple.	33
9	Representación por cuadrado: objeto Cx10, con su 4-contorno, y su polígono calculado para $m = 5$. En la segunda línea, el polígono para versiones rotadas del mismo objeto.	33

10	Representación por cuadrado del polígono del objeto Cx5, para $m = 3, 4, 5$. Para mejor apreciación, abajo se muestra la representación por retícula, de la región alrededor de uno de los picos.	34
1	Objeto Kx10 en representation por cuadrados. Primera línea: el objeto, una ilustración de su construcción, y su 4-contorno en azul. Segunda línea: su polígono para $m = 5$, también para dos versiones rotadas del objeto.	36
2	Object Mx20, its polygon vertices and extremal edges.	36
3	Una espiral arquimediana, y el objeto Q1 con $a_1 = 25$.	38
4	Objetos Q3 (izquierda) y Q1 (derecha) con $a_1 = 65$, cada uno de estos objetos caben exactamente en una imagen de 1700x1700 píxeles.	38
5	Números de puntos del 4-contorno, candidatos, y de vértices del polígono para $m = 5$, de los objetos C y K bajo magnificación.	39
6	Errores relativos del perímetro estimado (porcentaje) para los objetos C y K bajo magnificación (polígono para $m = 5$).	39
7	Razón de compresión para los objetos C and K bajo magnificación (polígono para $m = 5$).	39
8	Analysis of object M under magnification.	40
9	Vértices complementarios del polígono para $m = 5$ (marcados en azul cielo y amarillo), cantos extremos (en rojo y verde), y picos convexos (café) del objeto Q1 en la región alrededor de pico central muy pronunciado, para diversas magnificaciones de este objeto.	40
10	Analysis of objects Q1 and Q3 under magnification.	41
11	Análisis del perímetro para dos objetos bajo rotaciones.	42
12	Analysis of Object M under rotations.	43
1	Demostración de Lema 15, situaciones de tipo a), c_1 convexo, $\overline{c_1 c_3} \subset M$.	49
2	Demostración de Lema 20, caso a), c_1 convexo, $x_1 = x_2$.	51
3	Demostración de Lema 20, caso a), c_1 convexo, $y_2 = y_3$.	52
4	Demostración de Lema 20, caso a), c_1 convexo, $(x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3)$.	52
5	Demostración de Lema 20, caso a), c_1 convexo, $(x_1 = x_2) \wedge (y_2 = y_3)$.	53
6	Demostración de Lema 21, instancias de las tres posibles situaciones para el caso $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.	56
7	Demostración de Lema 21, caso $x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.	58
8	Demostración de Lema 21, caso $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.	58
9	Demostración de Lema 21, caso $x_1 = x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$. De la izquierda a la derecha, la figura muestra las situaciones $y_5 - y_4 = y_3 - y_2$ (ningún vértice), $y_5 - y_4 = y_3 - y_2 + 2$ (ningún vértice), $y_5 - y_4 = y_3 - y_2 + 1$ (ningún vértice), $y_5 - y_4 < y_3 - y_2$ (vértice c_3), $y_5 - y_4 > y_3 - y_2 + 2$ (vértice c_4).	59
10	Demostración de Lema 21, caso $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.	59
11	Demostración de Lema 21, caso $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.	59
12	Ejemplo que ilustra la función que transforma cada situación local para c_1 convexo en la situación correspondiente para c_1 cóncavo.	60

Lista de tablas

- 1 Propiedades estadísticas de la estimación del perímetro para los objetos bado estudio, de todas las magnificaciones, usando el poígono para $m = 5$. 42
- 2 Varianza del error del perímetro bajo rotaciones por todos los ángulos de 5, 10, 15, 20, \dots 90 grados, para algunos objetos. 42
- 3 Números específicos de puntos y errores del perímetro, usando el polígono para $m = 3, 4, 5$ para algunos objetos. 44

Resumen

La presente tesis desarrolla una propuesta de aproximación poligonal para caminos en 4-gráficas vecinas, las cuales constituyen un modelo estándar en el procesamiento y análisis de imágenes digitales de dimensión dos. Estos 4-caminos, llamados 4-contornos, son obtenidos mediante métodos de seguimiento de contornos, ampliamente conocidos y empleados para procesar imágenes digitales.

Los 4-contornos, en general, no son curvas digitales de Jordan, sino generan curvas poligonales quasi-simples en el plano euclidiano. El polígono propuesto es fácil de calcular y resulta ser útil para representar la forma de objetos y para reducir la cantidad de datos.

La tesis presenta un algoritmo de complejidad de tiempo lineal, para determinar la lista ordenada de vértices del polígono, a partir de la lista ordenada de píxeles del 4-contorno dado. El algoritmo se basa en condiciones de extremidad local y de minimalidad semi-local de longitud para ciertos caminos, y utiliza solamente operaciones sencillas entre números enteros.

El resultante polígono se aproxima a lo que sería una generalización del polígono de perímetro mínimo. Este polígono es conocido de la literatura para 4-contornos solamente para el caso restringido de curvas digitales simples (curvas digitales de Jordan), las cuales son relacionadas con retículas simples (simple grid continua), y con ciertos tipos de subconjuntos de mosaiqueados, donde han sido aplicados a la estimación del perímetro y para el análisis de convexidad y concavidad. El presente trabajo aplica el polígono propuesto en aproximar 4-contornos correspondientes a curvas débilmente simples de longitud conocida, con el fin de estimaciones del perímetro de figuras en el plano. Se reportan amplios experimentos en este contexto.

Abstract

The present work proposes a polygonal approximation for closed 4-paths obtained from standard contour following under 4-connectivity. Those 4-contours generate weakly simple polygons in the Euclidean plane, in general, they are not digital Jordan curves. The proposed polygon is easy to calculate and useful for shape representation and data reduction. The paper presents a linear algorithm for determining the ordered list of polygon vertices which are pixels determined from the point list of the given 4-contour. The algorithm relies on local extremity and semi-local shortest path requirements, it uses only simple operations of integer calculus. The resulting polygon approximates what would be a generalization of the minimal perimeter polygon. The latter is known from the literature for 4-contours only for restricted cases such as digital Jordan curves related to simple grid continua, or certain types of subsets of rectangular mosaics, where it has been applied to perimeter estimation and for convexity and concavity analysis. We apply the polygon proposed to approximate 4-contours corresponding to weakly simple curves of known perimeter and report on experiments of perimeter estimation.

Introducción

Introducción y trabajo relacionado

Aproximaciones poligonales de curvas digitales y contornos son ampliamente utilizadas en el procesamiento y análisis de imágenes digitales, con fines de la reducción de datos, y de la representación de formas, para facilitar la determinación de características de objetos que sirven para clasificarlos o reconocerlos [10]. Para propiedades geométricas numéricas como longitud, perímetro, curvatura, área o volumen, cuando un objeto digital M es considerado como discretización de un subconjunto S del plano euclidiano \mathbb{R}^2 , aplicaciones prácticas requieren que un estimador calculado a partir de M , de la propiedad de S , mantenga los errores relativos bajo cierta cota. Otra exigencia es que el estimador sea convergente en la medida que la resolución de discretización crece (*multigrid convergent*), es decir, que entonces converge al valor verdadero de la característica de S . Adicionalmente, en la práctica es importante que los estimadores puedan ser calculados con mucha eficiencia.

Muchos libros de texto, como [10, 11], recomiendan estimadores de la longitud de curvas y del perímetro de objetos basados en el conteo de los píxeles que pertenecen a las curvas discretizadas. Algunos de estos métodos utilizan pesos para los cantos de la gráfica vecina, con el fin de simular la distancia euclidiana entre puntos vecinos, o aprovechan experiencia estadística. Sin embargo, todos los estimadores de este tipo, no son convergentes en la medida que la resolución de discretización crece [7, 13, 15, 16, 34].

Estimadores de la longitud de curvas con la citada propiedad de convergencia, o con comportamiento similar, se basan en aproximaciones poligonales de la curva discretizada. La longitud de curva entonces es estimada como la suma de las longitudes euclidianas de todos los segmentos de línea recta de la curva poligonal. Para ciertas curvas cerradas, la curva aproximativa poligonal corresponde es la frontera de un polígono que aproxima al objeto. Enfoques modernos consideran píxeles como puntos de una retícula rectangular, principalmente de la retícula cuadrática estándar $(\mathbb{Z})^2$ o $(c\mathbb{Z})^2$. Estos píxeles son interpretados equivalentemente como cuadrados con longitud c de canto. Aproximaciones poligonales de una curva discretizada tratan de obtener los vertices del polígono como puntos centro, o como vertices, de tales cuadrados. Construcciones de estos polígonos son basadas principalmente en segmentos de línea recta (DSS, por su nombre en inglés: digital straight line segments) de longitud máxima [15], o en el polígono de perímetro mínimo (MPP, por su nombre en inglés: minimal perimeter polygon) [28, 29, 30, 31, 32, 15], o en conjuntos que rodean la curva por ambos lados, llamados “salchichas de aproximación” (approximation sausages) [3, 4]. También se han publicado propuestas basadas en polígonos ortogonales (con todos sus lados paralelos a los ejes de coordenadas) que aproximan las curvas dadas por dentro o por fuera [21, 5, 9, 2]. Naturalmente, aproximaciones poligonales basadas en DSS son apropiadas para describir fronteras de objetos o curvas que tienen partes largas que presentan muy baja variación de curvatura. Para estimadores de la longitud de curva basados en DSS, su convergencia en la medida que la resolución de discretización crece, ha sido demostrada para curvas de Jordan convexas [15, 17], sin embargo, numerosos experimentos lo han mostrado para curvas más generales [7]. De la literatura, se conocen varios algoritmos para determinar los vertices de los DSS [14, 18, 20].

El polígono de perímetro mínimo (MPP) fue definido por primera vez para ciertos subconjuntos de un mosaiqueado del plano, donde píxeles son identificados con azulejos (tiles) convexos [28,

29, 30, 31]. En este contexto, fueron propuestos varios algoritmos para encontrar los vértices del MPP, para conjuntos de azulejos dentro de un tipo de mosaiqueado rectangular canto-a-canto, llamado complejo regular **[30]**, y para tal llamados complejos normales dentro de ciertos tipos de mosaiqueados **[31]**. En estos casos, el MPP es un polígono único cuya frontera se encuentra entre las fronteras exterior e interior del complejo. Estos algoritmos han sido adaptados al caso muy particular del 4-contorno en el plano digital estándar donde los píxeles son cuadrados de retícula, todos del mismo tamaño **[14, 16, 18]**. Uno de estos algoritmos más tarde fue reportado como erróneo en algunos casos **[8]**, sin embargo, un pseudocódigo del algoritmo corregido apareció en el libro **[20]**.

El enfoque de **[14, 16, 18]** fue generalizado en **[32, 33]** con el objetivo de la estimación del perímetro de figuras. Estos trabajos desarrollaron una nueva definición del MPP, dado como un polígono contenido en un subconjunto del plano correspondiente a la discretización exterior de Jordan, y contenido en un conjunto correspondiente a la discretización interior de Jordan, de cualquier subconjunto de \mathbb{R}^2 encerrado por una curva de Jordan. De esta manera, se consideran un “polígono interior” A y un “polígono exterior” B , ambos polígonos simples y ortogonales (cuyos lados todos son paralelos a los ejes del sistema cartesiano de coordenadas) y con la propiedad que $A \subset B$. El MPP es el polígono único que tiene perímetro mínimo, entre todos los polígonos que contienen al conjunto A y están contenidos en B . El conjunto $(B \setminus A)$ es una unión de cuadrados de retícula, y es llamado poliomino **[40]**, o también continuo de retícula (*grid continuum*) **[15]**. Para el plano digital estándar, fue demostrado en **[32, 33]** que para curvas suaves (es decir, diferenciables) de Jordan que son discretizadas con una resolución de discretización suficientemente grande, el perímetro del MPP es un estimator convergente en la medida que la resolución crece, para la longitud de dichas curvas de Jordan. Es importante enfatizar que la mencionada definición del MPP, en relación a curvas digitales o contornos en $(c\mathbb{Z})^2$ (donde c es la constante de retícula), ha sido propuesta y publicada hasta hoy, solamente para el caso de curvas digitales de Jordan, más precisamente, para 4-curvas simples (es decir, curvas bajo la 4-conexidad). Tales curvas se relacionan con continuos de retícula simples **[32, 33]**. En un contexto más general, el MPP resulta ser un caso muy especial de la cubierta convexa relativa para polígonos simples **[42]**, también llamada cubierta convexa geodésica **[35]**.

En los trabajos **[25, 26, 27]**, con el objetivo de identificar y analizar las partes maximales convexas y cóncavas de 4-curvas simples, una “representación poligonal fiel” fue determinada a partir de la cubierta tangencial la cual es dada por la colección de todos los DSS de máxima longitud. El resultante polígono es estrictamente relacionado al MPP o MLP.

De manera muy similar, un “MLP aritmético” fue construido para 4-curvas simples, a partir de la cubierta tangencial, en **[19, 24]**. Estos últimos autores demostraron que su MLP puede ser definido, equivalentemente, por conceptos combinatorios, lo cual lleva a un algoritmo muy eficiente para la determinación del MLP. Este algoritmo utiliza métodos sintácticos del análisis del código de cadena de Freeman de la 4-curve de entrada.

Motivación para el presente trabajo

Todos los algoritmos y métodos para determinar al MLP mencionados justo arriba, tienen complejidad de tiempo lineal, sin embargo, es una exigencia explícita que la 4-curve de entrada es simple. Hasta ahora, aparentemente, no se ha dado a conocer un algoritmo que para el caso de 4-contornos correspondientes a curvas no necesariamente simples, sino débilmente simples (*weakly simple curves*), nuestra propuesta publicada en **[36]** es la primera en este contexto.

Esta trabajo de tesis es motivada por el deseo de estimar el perímetro de cualquier subconjunto compacto del plano \mathbb{R}^2 cuya discretización hacia un objeto en \mathbb{Z}^2 es 4-conexo, y cuya frontera es una curva cerrada de longitud finita. Esta curva no es requerida de ser de Jordan, ni poligonal, ni suave. Es decir, por motivaciones prácticas, la curva es permitida de tener picos, de tocar a sí misma, o

de regresar sobre sí misma durante su transcurso. Sin embargo, se impone la hipótesis que la curva nunca cruza a sí misma transversalmente.

Contenido del trabajo de tesis

La tesis desarrolla una propuesta de aproximación poligonal para 4-contornos que pueden ser obtenidos mediante métodos estándar de seguimiento de contornos, a partir de cualquier objeto (es decir, subconjunto finito) 4-conexo, de al menos dos píxeles, de \mathbb{Z}^2 , o del plano discreto $(c\mathbb{Z})^2$ con constante de retícula c . Estos métodos de seguimiento de contornos presentan técnicas estándar en la segmentación de imágenes digital. Tales 4-contornos pueden fallar de ser 4-curvas simples, es decir, de ser curvas digitales de Jordan. En general, tales 4-contornos generan curvas poligonales débilmente simples, las cuales encierran polígonos débilmente simples en el plano \mathbb{R}^2 . El polígono propuesto en esta tesis, constituye una generalización del MPP. Cabe recordar, una vez más, que el MPP, en el contexto de 4-contornos o 4-curvas, es conocido de la literatura solamente para 4-curvas simples, es decir, curvas digitales de Jordan que son equivalentes a continuos de retícula simples [7, 14, 15, 24, 32, 33], y para 4-contornos sin puntos finales (es decir, sin picos) relacionados a ciertos tipos de conjuntos de “azulejos” [28, 29, 30, 31]. La presente tesis desarrolla un algoritmo de complejidad de tiempo lineal, junto con la fundamentación matemática necesaria, que determina la lista ordenada de vértices del polígono. Todos los vértices resultan ser píxeles y pueden ser calculados con facilidad a partir del 4-contorno dado. Nuestro algoritmo se basa en condiciones locales de exterioridad geométrica, y en condiciones semi-locales de caminos de mínima longitud. El algoritmo utiliza cálculos sencillos a partir de coordenadas dadas como números enteros, los cálculos pueden ser efectuados completamente dentro del conjunto de números enteros.

El trabajo de tesis aplica la aproximación poligonal propuesta, a la estimación del perímetro de figuras del plano. Se reportan experimentos con diversos objetos cuyas fronteras son curvas débilmente simples de longitud conocidas, o calculables con exactitud. Estos objetos son discretizados bajo 4-conexidad, usando diversas resoluciones de discretización, con el resultado de subconjuntos 4-conexos en el plano digital. Se aprovecha que el aumento de la resolución de discretización para digitalizar un objeto de tamaño fijo, es equivalente a la discretización con resolución fija, de una versión escalada, es decir, agrandada, del objeto original. Los 4-contornos de los objetos son obtenidos por técnicas estándar de seguimiento de contornos.

El estimador de perímetro, dado como la longitud de la curva poligonal propuesta en esta tesis, no se puede esperar de ser convergente a medida que la resolución de discretización crece. Eso se debe al método semi-local de la determinación de los vértices de nuestro polígono. Sin embargo, en amplios experimentos con objetos cuyas discretizaciones forman objetos digitales de tamaños en ciertos rangos, el estimador alcanza una exactitud de error relativo de menos de 0.16% con respecto al perímetro verdadero del objeto original del plano \mathbb{R}^2 . En los experimentos reportados en esta tesis, los objetos digitales tienen tamaños tales que caben justamente en imágenes de hasta 4000x4000 píxeles, los 4-contornos tienen entre 3000 and 30200 píxeles como elementos. Los experimentos incluyen un análisis de la variación del error bajo rotaciones del objeto original. Tales variaciones resultan con una desviación estándar de de menos de 0.08 para objetos pequeños, y menos de 0.04 para objetos de tamaños medianos.

Resumen de las aportaciones de la tesis

- Una definición del polígono de perímetro mínimo (MPP - minimal perimeter polygon), apropiada para el ambiente de polígonos débilmente simples, que aparecen en relación con 4-contornos generales obtenidos por métodos estándar del seguimiento de contornos en imágenes digitales binarias de dimensión dos.
- Un algoritmo para determinar la lista ordenada de los vértices del polígono propuesto, junto con la fundamentación matemática, la cual permite demostrar formalmente que el algoritmo es correcto y plenamente justificado, y que tiene complejidad de tiempo lineal.

- Una justificación de la utilidad del polígono propuesta, para estimar los perímetros de objetos cuya discretización genera objetos digitales de tamaño dentro de ciertos rangos.

El algoritmo desarrollado en esta tesis, junto con un reporte sobre su aplicación para estimar perímetros de objetos del plano, fue publicado en [36]:

Mario Villafuerte, Petra Wiederhold: A polygonal approximation for general 4-contours corresponding to weakly simple curves, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* (Springer), 33 páginas, aceptado en diciembre de 2021, doi: 10.1007/s10851-021-01060-0 .

Organización de la tesis

Sección 1 proporciona preliminares sobre curvas, polígonos, y 4-contornos.

Sección 2 describe propiedades de 4-contornos y sus caminos exteriores, lo cual es necesario para definir al polígono propuesto en esta tesis.

Sección 3 contiene la fundación matemática para la construcción del polígono propuesto, culminando en una estrategia para determinarlo para cualquier 4-contorno dado.

Sección 4 presenta el algoritmo para determinar la lista ordenada de los vértices del polígono, junto con la demostración formal de que el algoritmo es correcto y plenamente justificado, así como también su análisis de complejidad. Para que esta sección mantenga un formato fácilmente leible, versiones extensas de algunos lemas, y algunas demostraciones matemáticas, han sido puestas en Apéndices de la tesis.

Sección 5 reporta resultados de experimentos de estimación de perímetro, que ilustran la utilidad de polígono propuesto. Algunas tablas de resultados, que fundamentan las gráficas y resultados resumidos en esta sección, están organizadas como Apéndices de la tesis.

Conclusiones y comentarios sobre posibles continuaciones del trabajo completan al documento.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1. Suposiciones generales

En este trabajo de tesis, \mathbb{R} denota al conjunto de números reales, \mathbb{Z} al de los números enteros, \mathbb{R}^2 al plano euclidiano con su topología estándar donde cl e int significan la cerradura y el interior topológico, respectivamente.

Para $p, q \in \mathbb{R}^2$, \overline{pq} denota al segmento de línea recta que une los puntos p y q . Cuando $p \neq q$, \vec{pq} denota al segmento de línea recta dirigido de p hacia el punto q .

El término de *puntos subsecuentes*, o *elementos subsecuentes*, se refiere a elementos de una secuencia ordenada que son sucesores inmediatos en esta lista.

Todas las fórmulas y definiciones usan el sistema cartesiano estándar del plano \mathbb{R}^2 . Este sistema es orientado en sentido matemático positivo, es decir, donde el eje x apunta hacia la derecha, y el eje y está dirigido hacia arriba.

Píxeles son considerados como elementos de \mathbb{Z}^2 . Sin embargo, todo que es presentado en este trabajo, puede ser fácilmente adaptado a un plano discreto $(c\mathbb{Z})^2 = \{(cx, cy) : x, y \in \mathbb{Z}\}$, con una constante de retícula $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

2. Curvas and polígonos simples y débilmente simples

Recordemos que una *curva* en \mathbb{R}^2 es la imagen del intervalo cerrado $[0, 1]$ bajo una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. La curva es llamada cerrada si $f(0) = f(1)$. Una curva cerrada $\gamma = f([0, 1])$ es llamada *simple* o *curva de Jordan* si γ es inyectiva sobre $[0, 1)$.

Una curva $\gamma = f([0, 1])$ es *lineal por pedazos*, también llamada una *polilínea* si existen $n \in \mathbb{N}$ y s_1, s_2, \dots, s_n con $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ tales que para todo $i = 1, 2, \dots, n$, $f([s_{i-1}, s_i])$ es un segmento de línea recta. Entonces γ tiene longitud finita. Un punto p de una polilínea γ , $p = f(s_i) \in \gamma$ ($1 \leq i \leq n-1$) se llama *vértice* de γ si $f(s_i) \notin \overline{f(s_{i-1})f(s_{i+1})}$. En caso que γ es cerrada, $f(0) = f(1)$ es un vértice si $f(0) \notin \overline{f(s_{n-1})f(s_1)}$.

Bajo una *curva poligonal* entendemos cualquier curva cerrada y lineal por pedazos. Una curva poligonal es completamente determinada por la secuencia finita de sus vértices. Pero una tal curva puede ser representada por alguna otra secuencia de puntos, que contiene también puntos de la curva que no necesariamente son vértices.

Un *polígono* definimos en esta tesis, como cualquier subconjunto compacto (es decir, acotado y topológicamente cerrado) y conexo del plano euclidiano \mathbb{R}^2 , el cual es encerrado por una curva poligonal. Eso es en concordancia con fuentes como [6, 12, 22, 35, 39]. En esta tesis consideramos solamente polígonos simples y polígono débilmente simples, para los cuales vamos a explicar qué significa que son encerrados por una curva. Todo vértice de una curva poligonal también es llamado vértice del polígono encerrado por dicha curva.

Definición 1. Un *polígono simple* es definido como cualquier subconjunto compacto y conexo del plano euclidiano \mathbb{R}^2 , cuya frontera es una curva poligonal simple, es decir, de Jordan.

Un polígono simple P cuya frontera es una curva γ , tiene dimensión dos, por lo tanto tiene al menos tres vértices. El hecho que γ es una curva de Jordan, también implica que P no tiene agujeros.

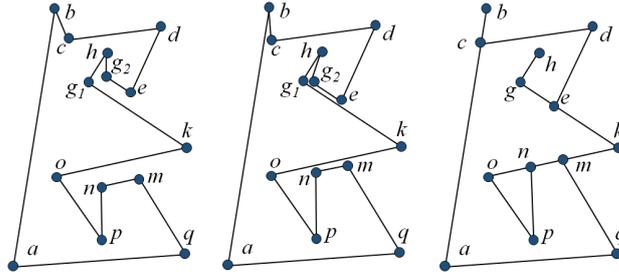


FIGURA 1. Los dos primeros polígonos pertenecen a una secuencia que converge al último polígono el cual sólo es débilmente simple. Durante este proceso de convergencia, pequeñas traslaciones de vértices transforman a la secuencia original de vértices $(a, b, c, d, e, g_2, h, g_1, k, o, p, n, m, q)$ hacia la secuencia $(a, b, c, d, e, g, h, g, k, o, p, n, m, q)$. En el límite, los puntos g_1 y g_2 resultan identificados al punto g , y los puntos c, e, n, m llegan a estar sobre un canto del último polígono, el cual tiene partes degeneradas y un agujero formado por los puntos o, p, n .

Un polígono débilmente simple es encerrado por una curva poligonal la cual puede tocarse a sí misma, por regresar sobre su propio trazo, pero nunca se cruza a sí misma transversalmente. La región encerrada por una tal curva sigue siendo bien definida, aunque esta región puede tener partes “degeneradas” o “delgadas”, puede tener una dimensión menor a 2, puede tener agujeros. Curvas poligonales débilmente simples han sido tratadas informalmente en textos como [35], y fueron formalizadas, por ejemplo, en [6]. Denotando por d la distancia euclidiana, la **distancia de vértices** $d_V(\gamma, \delta)$ entre dos curvas poligonales γ y δ , representadas por las secuencias de sus vértices (p_1, p_2, \dots, p_k) y (q_1, q_2, \dots, q_k) , es definida en [6] como el mínimo, sobre todos los s con $0 \leq s \leq n - 1$, de los valores $\max\{d(p_i, q_{(i+s) \bmod n}) : 1 \leq i \leq k\}$. Lo último mide máximos de distancias entre vértices correspondientes de ambas curvas, cuando una traslación de la secuencia cíclica de vértices de la curva δ ha sido realizada.

Definición 2. Para toda curva poligonal γ con $k \geq 3$ vértices, γ es llamada **débilmente simple** si para cualquier $\epsilon > 0$, existe una curva poligonal simple δ con k vértices tal que la distancia de vértices entre γ y δ es menor que ϵ . En este caso, el polígono encerrado por la curva γ se llama un **polígono débilmente simple**.

En consecuencia, la curva γ es débilmente simple si puede ser transformada en una curva simple mediante traslaciones arbitrariamente pequeñas, aplicadas a sus vértices. Una curva débilmente simple γ puede ser considerada también como límite de una secuencia de curvas simples γ_j , donde cada vértice de γ es el límite de una secuencia de vértices correspondientes de las curvas γ_j [6]. Entonces, el polígono encerrado por γ es el límite de una secuencia de polígonos simples fronterizados por las curvas de Jordan γ_j , vea Figura 1.

Una curva de Jordan puede ser trazada en sentido según las manecillas del reloj, o en sentido contrario. Como cada curva poligonal débilmente simple γ es la imagen de una curva simple δ , bajo una función g que realiza una traslación arbitrariamente pequeña a cada vértice de δ para obtener el vértice correspondiente de γ , la orientación de trazado de δ es heredado por la curva $\gamma = g(\delta)$. Eso justifica que en este documento, asumimos que tanto curvas de Jordan como también curvas débilmente simples son trazadas siempre en sentido según las manecillas del reloj.

Una vez fijada la orientación del trazado de la curva que fronteriza un polígono, este polígono, no importando si es simple o débilmente simple, puede ser representado de manera única por la secuencia cíclica de sus vértices (p_1, p_2, \dots, p_k) , donde para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, $p_i \notin \overline{p_{(i-1) \bmod k} p_{(i+1) \bmod k}}$.

Para un polígono simple, eso significa que cada tres vértices subsecuentes (es decir, sucesores inmediatos) en esta secuencia, no están sobre la misma línea recta, además, son todos distintos. Estas propiedades no son garantizadas para polígonos débilmente simples, vea Figura 1.

Recordemos que el área de un triángulo formado por puntos $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, $p_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, es dado como $\frac{1}{2} \cdot |D(p_1, p_2, p_3)|$ donde el determinante calculado como

$$D(p_1, p_2, p_3) = x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - (x_3y_2 + x_2y_1 + x_1y_3) .$$

Además, $D(p_1, p_2, p_3) < 0$ si y solo si p_3 se encuentra al lado derecho de $\overrightarrow{p_1p_2}$ (*vuelta derecha*). $D(p_1, p_2, p_3) > 0$ es equivalente a que p_3 se encuentra al lado izquierda de $\overrightarrow{p_1p_2}$ (*vuelta izquierda*). $D(p_1, p_2, p_3) = 0$ es equivalente a que los tres puntos son colineales: p_1, p_2, p_3 están sobre la misma línea recta, la cual puede ser degenerada a ún sólo punto.

Definición 3. Sean (p_1, p_2, p_3) tres puntos subsecuentes de una secuencia finita cíclica de puntos de una curva poligonal débilmente simple γ , trazada en sentido según las manecillas del reloj. El punto de curva p_2 es llamado **punto convexo** si $D(p_1, p_2, p_3) < 0$ (*vuelta derecha*), **punto cóncavo** si $D(p_1, p_2, p_3) > 0$ (*vuelta izquierda*), **punto lineal** si $p_2 \in \overline{p_1p_3}$, p_2 se llama un **pico** si $D(p_1, p_2, p_3) = 0$ pero $p_2 \notin \overline{p_1p_3}$.

Una curva poligonal no puede tener vértices lineales. Puntos de curva que son convexos o cóncavos, son vértices. Una curva poligonal simple no puede tener picos.

Cuando p_2 es un punto lineal o un pico entonces es colineal con p_1 y p_3 . Para un pico p_2 , vale que $p_1 \in \overline{p_2p_3}$, eso significa que $\overline{p_1p_2} \subseteq \overline{p_2p_3}$, o, $p_3 \in \overline{p_1p_2}$, es decir, $\overline{p_2p_3} \subseteq \overline{p_1p_2}$. Entonces $S = \overline{p_1p_2} \cap \overline{p_2p_3}$ es un segmento de línea, la curva regresa sobre sí misma. En este caso, es posible que S es una parte degenerada del polígono que completamente pertenece a su frontera. Eso es el caso del segmento \overline{bc} para el pico b en Figura 1. También puede ser que S penetra al interior del polígono, como pasa con los segmentos $\overline{eg}, \overline{gh}, \overline{nm}$ en Figura 1.

3. 4-contornos y su determinación mediante el seguimiento de contornos

En esta tesis usaremos las nociones, bien conocidas de la literatura, de k -vecino, k -camino, k -conexidad, para $k \in \{4, 8\}$, en el conjunto $(c\mathbb{Z})^2$ de *puntos de retícula*, también llamados *píxeles* donde $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, es la constante de retícula, vea por ejemplo [15]. Consideramos el plano digital estándar \mathbb{Z}^2 , donde $c = 1$. Sin embargo, todo lo presentado en esta tesis puede ser adaptado al caso general $(c\mathbb{Z})^2$, con otra constante c .

Bajo un **objeto** entendemos cualquier **subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 que es 4-conexo y que tiene al menos dos píxeles**. Entonces, todo objeto también es 8-conexo.

Recordemos que para todo conjunto k -conexo M de píxeles, con $k \in \{4, 8\}$, la **k -frontera** de M es el conjunto de todos los píxeles $p \in M$ tales que p tiene al menos un l -vecino $q \in (\mathbb{Z}^2 \setminus M)$ donde $l = 4$ para $k = 8$, $l = 8$ para $k = 4$. La k -frontera es k -conexa y puede ser representada como un k -camino cerrado llamado **k -contorno**. El *Seguimiento de contorno*, también llamado **trazado de contorno**, es una de las técnicas básicas del procesamiento de imágenes digitales, para realizar la segmentación de imagen y la identificación de objetos de interés, vea [10, 15, 11]. En la literatura, la mayoría de algoritmos para el seguimiento de contorno son propuestos para fronteras de conjuntos 8-conexos, por ejemplo en los libros de texto muy conocidos como: Capítulo 7 de [23], Capítulo 11 de [10] donde el algoritmo clásico de Moore es presentado, vea también [11] (Edición 3, la Edición 2 reporta la misma información sobre este tema).

En esta tesis, un **4-contorno** es asumido como generado a partir de cualquier objeto (vea definición arriba), por cualquier algoritmo estándar de seguimiento de contorno que trabaja en sentido de trazado del 4-contorno según las manecillas del reloj.

La técnica de seguimiento de contorno usa características del objeto que permiten decidir si un píxel $p \in \mathbb{Z}^2$ pertenece al objeto M o no, eso facilita la segmentación de M del fondo $(\mathbb{Z}^2 \setminus M)$ de

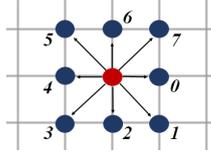


FIGURA 2. Código de Freeman para la 8-vecindad.

una imagen digital. Bajo la suposición estándar que el objeto es completamente rodeado de píxeles del fondo, un tal algoritmo inicia en el fondo de la imagen, y escanea al conjunto de píxeles de la imagen en búsqueda de un primer píxel del objeto, llamado *punto inicial de contorno*. Este escaneo comúnmente es realizado sobre renglones de la imagen, de la izquierda hacia la derecha. Una vez que un punto inicial de contorno fue encontrado, digamos $p_1 \in M$, el contorno es detectado, punto por punto, formando una secuencia ordenada cíclica de píxeles $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$. Si el algoritmo continuara, los siguientes puntos de contorno detectados serían, nuevamente, $p_{k+1} = p_1$, luego $p_{k+2} = p_2, \dots$.

En la práctica del procesamiento de imágenes digitales, un contorno es descrito por el código de cadena de Freeman el cual no solo sirve como descripción compacta, sino también es una herramienta importante durante el seguimiento de contorno. Figura 2 recuerda el código de Freeman: para cualquier píxel p , el canto en la gráfica vecina de 8-conexidad que relaciona p con cualquiera de sus 8-vecinos q , es codificado por un número $f(p, q) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Los números pares 0, 2, 4, 6 codifican los cantos hacia los 4-vecinos de p . Mientras que $f(p, q)$ describe el canto dirigido de p hacia q , el canto revertido desde q hacia p resulta ser codificado por $f(q, p) = (f(p, q) + 4) \bmod 8$.

Cualquier **algoritmo de seguimiento de contorno** que detecta al 4-contorno de un objeto M respetando el trazado del contorno según las manecillas del reloj (*4-contour following due to clockwise oriented tracing*), esencialmente realiza los siguientes tres pasos, para construir la lista C de puntos de contorno (por ejemplos, los algoritmos “Alg. 4.3” en [15], y “Alg. 2.2.-1” en [37]). Para lo siguiente, supongamos que el punto inicial de contorno $p_1 = (x_1, y_1)$ fue encontrado de tal manera que su 4-vecino izquierdo q , es decir, $q = (x_1 - 1, y_1)$ (in standard cartesian coordinates), no pertenece al objeto M .

Paso 1: Después de inicializar la lista $C := (p_1)$ y $d := 2$, el algoritmo realiza iterativamente $d := (d + 2) \bmod 8$. Para cada tal d , es analizado si el píxel p' que satisface $f(p, p') = d$, pertenece a M . Mientras que eso sigue siendo falso, d es aumentado para continuar la búsqueda de un punto del objeto M . Cuando $p' \in M$, $p_2 := p'$ es agregado a la lista C , y el algoritmo procede al Paso 2.

Paso 2: Usando la lista actual $C = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ como dato de entrada, se calcula $d := (4 - f(p_{n-1}, p_n)) \bmod 8$. Luego, el algoritmo realiza iterativamente $d := (d + 2) \bmod 8$. Para cada tal d , es analizado si el p' que satisface $f(p_n, p') = d$, pertenece a M . Mientras sigue valiendo $p' \notin M$, d es aumentado para continuar la búsqueda de un punto del objeto M . Cuando $p' \in M$, el algoritmo procede a la “Prueba de la condición para finalizar”.

Prueba de la condición para finalizar:

Si $p' \neq p_1$, $p_{n+1} := p'$ es agregado a la lista C , entonces el algoritmo procede a repetir el Paso 2 con la lista actual C como dato de entrada.

Si $p' = p_1$, $p_{n+1} := p'$ es agregado a la lista C , después, el algoritmo performa una vez más al Paso 2, con la lista actual C como dato de entrada, pero solamente para obtener al siguiente punto $p' \in M$ de contorno. Entonces:

(a) Si $p' = p_2$, p_{n+1} es removido de la lista C , después el algoritmo para (stop). La lista actual final $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ representa al 4-contorno de resultado.

(b) Si $p' \neq p_2$, $p_{n+2} := p'$ es agregado a la lista C , después el algoritmo procede al Paso 2, normalmente, con la lista actual C como dato de entrada.

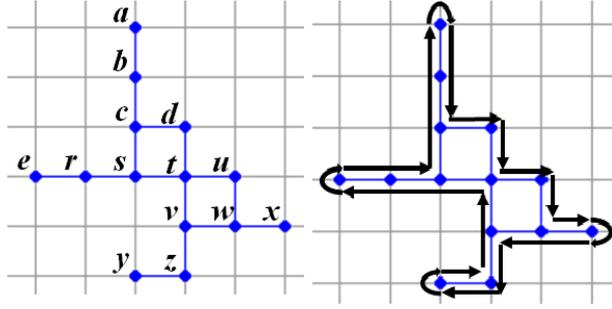


FIGURA 3. Un objeto es dibujado como subgráfica inducida por la 4-gráfica vecina, también su 4-contorno C que fue obtenido por seguimiento de contorno respetando el sentido de trazado del contorno según las manecillas del reloj. Este objeto coincide con su 4-frontera dada por el conjunto $\{a, b, c, d, e, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$. Obtenido por seguimiento de contorno con el punto inicial b , el 4-contorno resulta ser $C = (b, a, b, c, d, t, u, w, x, w, v, z, y, z, v, t, s, r, e, r, s, c)$ que es una secuencia ordenada única pero cíclica de píxeles, no todos distintos. Cualquier otro punto inicial de contorno generaría la misma secuencia cíclica C que tiene el código de cadena de Freeman $F(C) = (2, 0, 2, 0, 2, 0, 4, 4, 2, 4, 0, 6, 6, 4, 4, 4, 0, 0, 6, 6, 6, 2)$.

Este prototipo de algoritmo encuentra al 4-contorno de cualquier objeto M . En Paso 2, posiblemente $p_{n+1} = p_{n-1}$ cuando el contorno traza de regreso sobre sí mismo, entonces p_n es un pico o punto final (con un sólo 4-vecino en el contorno).

Paso 2 encontrará p_1 , de nuevo, cuando el seguimiento de contorno es terminado, pero eso puede suceder también cuando el contorno se toca a sí mismo de casualidad en el punto p_1 . La “Prueba de la condición para finalizar” distingue entre ambas situaciones.

Implementaciones convenientes guardan no solamente los puntos de contorno (con sus coordenadas), sino también los códigos de Freeman $f_i = f(p_i, p_{i+1})$ para todos los $i = 1, 2, \dots, n - 1$, y también $f_n = f(p_n, p_1)$. Todo 4-contorno corresponde a una secuencia ordenada cíclica $C = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ de píxeles, y también puede ser descrita por la secuencia de los códigos de Freeman (llamada código de cadena de freeman) $F(C) = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$, Figura 3 muestra un ejemplo.

Todo 4-camino $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, en particular, todo 4-contorno, genera una curva $\gamma(C)$ en el plano euclidiano \mathbb{R}^2 , simplemente por conectar todos los segmentos de línea recta correspondientes a los cantos (p_i, p_{i+1}) en la gráfica, es decir, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$, y el segmento (p_n, p_1) . Un punto $p_j \in C$ es llamado **punto convexo**, **respectivamente**, **punto cóncavo**, **pico**, **punto lineal**, y un **vértice del 4-contorno** C siempre cuando p_j tiene esta misma propiedad como punto de curva de $\gamma(C)$.

En general, para un 4-contorno C , $\gamma(C)$ no es una curva de Jordan, pero siempre es una curva poligonal débilmente simple, que consiste de segmentos de línea recta horizontales y verticales, cada uno teniendo la longitud 1 (o, c , la constante de retícula). Es claro que $\gamma(C)$ rodea al objeto M en un trazado según las manecillas del reloj, y en este trazado, deja al objeto M siempre a su lado derecho.

Recordemos finalmente que un 4-camino cerrado D es llamado en la literatura una *curva digital de Jordan*, o *k-curva simple* si D es un ciclo en la k -gráfica vecina, es decir, si D es una subgráfica en la cual, cada pixel de D tiene exactamente dos k -vecinos en D [15, 41]. Bajo condiciones muy especiales, cuando el objeto “ M no tiene picos, ni cuevas o partes delgadas”, C resulta ser una curva digital de Jordan curve y $\gamma(C)$ una curva Jordan en \mathbb{R}^2 .

4-contornos y sus caminos exteriores

1. Camino exterior al 4-contorno

Sea $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ un 4-contorno con códigos de Freeman $f_i = f(p_i, p_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $f_n = f(p_n, p_1)$, además, denotemos $f_{j,back} = f(p_j, p_{j-1})$. Entonces, para cualquier $p_j \in C$, todos los puntos q_1, q_2, \dots, q_s que satisfacen que $f(p_j, q_i) \in \{f_{j,back} + 2, f_{j,back} + 3, \dots, f_j\}$, son puntos del fondo, debido a que el contorno deja al objeto siempre a su lado derecho durante su trazado. Si p_j es un punto lineal o cóncavo entonces $s = 1$, $s = 3$ cuando p_j es convexo, y $s = 5$ para un pico, vea Figura 1. Estos píxeles del fondo son usados a continuación para construir un 4-camino exterior para C :

Definición 4. Para todo 4-contorno $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, su **camino exterior** $Ext(C)$ es definido por la secuencia ordenada cíclica construida como sigue (vea Figura 1):

Trazando la secuencia C (en sentido según las manecillas del reloj), para cada p_j , $j = 1, 2, \dots, n$,

- Si p_j es un punto lineal entonces, el único punto q que satisface que $f(p_j, q) = (f_{j+1} - 2) \bmod 8$, es agregado a la lista $Ext(C)$.
- Si p_j es un punto convexo entonces, los puntos q_1, q_2, q_3 que satisfacen que $f(p_j, q_1) = (f_{j+1} - 4) \bmod 8$ y $f(p_j, q_2) = (f_{j+1} - 3) \bmod 8$ y $f(p_j, q_3) = (f_{j+1} - 2) \bmod 8$, son agregados, en este mismo orden, a la lista $Ext(C)$.
- Si p_j es un pico entonces, los puntos q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 que satisfacen que $f(p_j, q_1) = (f_j - 2) \bmod 8$, $f(p_j, q_2) = (f_j - 1) \bmod 8$, $f(p_j, q_3) = (f_j) \bmod 8$, $f(p_j, q_4) = (f_j + 1) \bmod 8$, $f(p_j, q_5) = (f_j + 2) \bmod 8$, son agregados, en este mismo orden, a la lista $Ext(C)$.
- Si p_j es cóncavo entonces, el único punto q que satisface que $f(p_j, q) = (f_{j+1} - 1) \bmod 8$, es agregado a la lista $Ext(C)$.

En todo caso, los puntos de la lista $Ext(C)$ nunca son inmediatamente duplicados. Es decir, un punto es agregado a la lista $Ext(C)$ solamente cuando este punto no coincide con el último elemento de la lista actual. Para $j = n$, el último punto que pretende ser agregado a la lista, es realmente agregado a $Ext(C)$ solamente si no coincide con el primer elemento de la lista actual.

La lista $Ext(C)$ representa un 4-camino cerrado que rodea al objeto M realizando un trazado en sentido según las manecillas del reloj. Sin embargo, comentamos que este camino exterior corresponde a una curva poligonal $\gamma(Ext(C))$ que no es garantizada de ser débilmente simple.

Los tipos de los píxeles de una curva pueden ser caracterizados mediante los códigos de Freeman: Sea p_j un pixel dentro de una secuencia cíclica (p_1, p_2, \dots, p_n) la cual representa un 4-contorno C , o un camino exterior $Ext(C)$, con sus códigos de Freeman $f_i = f(p_i, p_{i+1})$, con $i = 1, 2, \dots, n-1$, $f_n = f(p_n, p_1)$. Entonces el punto p_j es convexo o un pico cuando f_{j+1} presenta un incremento con respecto a f_j por 2 o 4, respectivamente. En contraste, p_j es cóncavo cuando f_{j+1} presenta un decremento con respecto a f_j por 2. El punto p_j es lineal cuando $f_{j+1} = f_j$. Denotemos $diff(i) = (f_i - f_{i-1}) \bmod 8$ for $i = 2, \dots, n$, y $diff(1) = (f_1 - f_n) \bmod 8$. Con eso, obtenemos lo siguiente:

Lema 5. Si (p_1, p_2, \dots, p_n) representa un 4-contorno, o su camino exterior, con sus códigos de Freeman $f_i = f(p_i, p_{i+1})$ for $i = 1, 2, \dots, n-1$, $f_n = f(p_n, p_1)$, y p_j ($1 \leq j \leq n$),

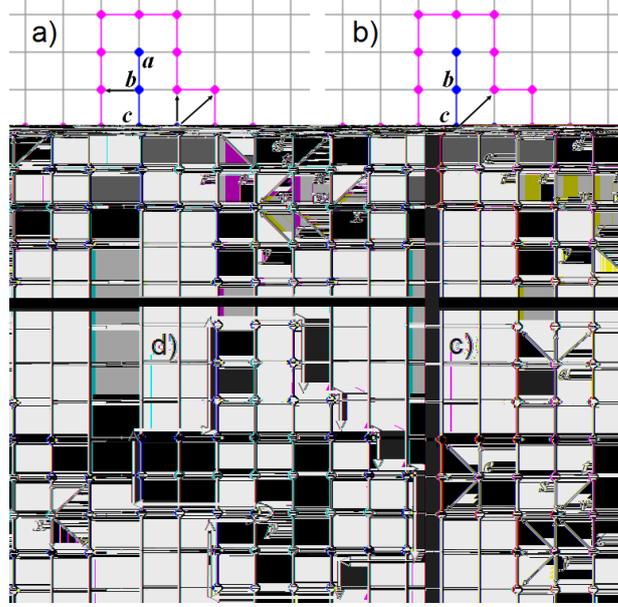


FIGURA 1. El 4-contorno C está dibujado en azul, $Ext(C)$ en rosa. **a)** Obsérvese que durante el trazado de la parte (e, r, s, c, b, a) de C , cada punto lineal r, c, b proporciona un pixel al camino exterior $Ext(C)$, igualmente como lo hacen los puntos lineales w, v, s más tarde, por ejemplo. Cada punto convexo d, u y z , contribuye tres puntos a $Ext(C)$. **b)** Cada punto cóncavo de C , como s en la tripleta (r, s, c) , c en (b, c, d) , t en (d, t, u) , y más tarde, t en la tripleta (v, t, s) , genera un punto de $Ext(C)$. **c)** Cada pico de C (a, e, x, y) proporciona cinco puntos exteriores. Los puntos cóncavos z y t con el punto lineal v entre ellos, genera el mismo punto de $Ext(C)$ el cual resulta ser el pico p marcado en **d)**. La secuencia $Ext(C)$ puede contener elementos más de una vez, sin embargo, ningún elemento aparece repetido inmediatamente.

- p_j es convexo si y solo si $diff(j) = 2 \bmod 8$,
- p_j es cóncavo si y solo si $diff(j) = 6 \bmod 8$,
- p_j es un punto lineal si y solo si $diff(j) = 0 \bmod 8$,
- p_j es un pico si y solo si $diff(j) = 4 \bmod 8$.

Un 4-contorno C , igualmente su camino exterior $Ext(C)$, puede tener picos, puntos lineales, puntos convexos y punto cóncavos. Sin embargo, los picos son de distinta naturaleza:

Todo pico p del 4-contorno C es un “pico convexo”. Eso vale porque la curva $\gamma(C)$, trazada en sentido según las manecillas del reloj, deja al objeto M a su lado derecho. Por eso, la curva tiene un ángulo interior de 0° en el punto p , por ejemplo, en los puntos a, e, x, y de Figure 3. Eso se debe a que el seguimiento de contorno nunca “penetraría” al objeto. Por razones similares, la lista C no puede tener dos puntos subsecuentes cóncavos.

En cambio, por la construcción de $Ext(C)$, todo pico del camino exterior es un “pico cóncavo” donde la curva $\gamma(Ext(C))$ tiene un ángulo interior de 360° , así como por ejemplo el pixel p en Figura 1 donde la curva penetra el interior del objeto. La única manera para obtener un pico de $Ext(C)$, es a partir de dos puntos cóncavos $p_j, p_{j+2} \in C$ para los cuales $p_{j+1} \in C$ es un punto lineal.

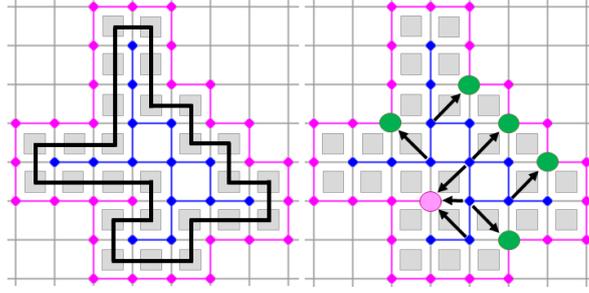


FIGURA 2. El poliomino entre C y $Ext(C)$ según Lema 6 proporciona relaciones entre los vértices cóncavos de ambos 4-caminos, así como también una condición local en C para detectar picos en $Ext(C)$.

2. El poliomino entre 4-contorno y su camino exterior

Todo pixel del 4-contorno C no solamente proporciona píxeles únicamente determinados al camino exterior $Ext(C)$, según la Definición 4 sino también indica un cuadrado cuyos lados tienen longitud 1 (o, la constante de retícula c) y que se encuentra entre las curvas $\gamma(C)$ y $\gamma(Ext(C))$. Eso genera una colección únicamente determinada de cuadrados, vea Figura 2, comunmente llamada un poliomino [40].

En esta tesis, definimos un **poliomino** como cualquier secuencia ordenada cíclica de cuadrados (cerrados, es decir, que contienen su frontera), todos del mismo tamaño y en posición paralela a los ejes de coordenadas en el plano euclidiano. Además requerimos que cada dos cuadrados distintos de esta se intersecan a lo más en sus fronteras, y que cada dos cuadrados subsecuentes en la secuencia, se intersecan en un lado común. Para un **poliomino simple**, exigimos que cada cuadrado comparte un lado con cada uno de exactamente dos otros cuadrados de la secuencia. Lo siguiente es claro por las definiciones:

Lema 6. Para todo 4-contorno C y su camino exterior $Ext(C)$, la siguiente construcción genera una secuencia ordenada cíclica S de cuadrados que forma un poliomino. Según la Definición 4, trazando $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ una vez, para todo p_j , $j = 1, 2, \dots, n$,

- Si p_j es un punto lineal entonces, los cuadrados que tienen las diagonales $\overline{p_j q_1}$ y $\overline{p_j q_2}$, en este orden, son agregados a la lista S , donde q_1, q_2 satisfacen que $f(p_j, q_1) = (f_{j+1} - 3) \bmod 8$ y $f(p_j, q_2) = (f_{j+1} - 1) \bmod 8$.
- Si p_j es un punto convexo entonces, el cuadrado que tiene la diagonal $\overline{p_j q}$, es agregado a la lista S , donde q satisface que $f(p_j, q) = (f_{j+1} - 3) \bmod 8$.
- Si p_j es un pico entonces, los cuadrados que tienen las diagonales $\overline{p_j q_1}$ y $\overline{p_j q_2}$, en este orden, son agregados a la lista S , donde q_1, q_2 satisfacen que $f(p_j, q_1) = (f_j - 5) \bmod 8$, $f(p_j, q_2) = (f_j - 3) \bmod 8$.
- Si p_j es un punto cóncavo entonces, el cuadrado que tiene la diagonal $\overline{p_j q}$, es agregado a la lista S , donde q satisface que $f(p_j, q) = (f_{j+1} - 1) \bmod 8$.

En todos los casos, se evita duplicar elementos subsecuentes en la lista S .

Si $\gamma(Ext(C))$ es una curva poligonal débilmente simple, entonces la unión de todos los cuadrados de S coincide con el conjunto $cl(B \setminus A)$ donde A y B son los polígonos débilmente simples encerrados por las curvas $\gamma(C)$ y $\gamma(Ext(C))$, respectivamente.

3. Relaciones entre vértices cóncavos del 4-contorno y de su camino exterior

Durante el trazado de $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, mientras que la secuencia S de cuadrados es construida según Lema 6, relaciones útiles entre los vértices cóncavos de C y de $Ext(C)$ pueden ser observadas (vea Figura 2):

- Para cada vértice cóncavo $p_j \in C$, existe un vértice cóncavo único q de $Ext(C)$, dado como el punto final opositorio a p_j , de la diagonal del cuadrado que es agregado a S en este caso, q satisface que $f(p_j, q) = (f_{j+1} - 1) \bmod 8$.
- La única manera de obtener un pico de $Ext(C)$ es a partir de dos vértices cóncavos p_j, p_{j+2} de C tales que p_{j+1} es lineal. Entonces p_j proporciona un cuadrado M a la lista S y el punto final opositorio p_M de la diagonal de M , p_{j+2} proporciona un cuadrado N a la lista S y el punto final opositorio p_N de la diagonal de N , y eso resulta en el pico $p_M = p_N$. El punto p_{j+1} proporciona estos mismos cuadrados M, N a la lista S (pero no son duplicados subsecuentemente en S), M y N comparten un lado que tiene p_M como punto final opositorio al punto p_{j+1} .

Corolario 7. Para todo 4-contorno $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ con códigos de Freeman (f_1, f_2, \dots, f_n) and $p_j \in C$,

(i) si p_j es un punto cóncavo entonces el punto únicamente determinado q de $Ext(C)$ que satisface que $f(p_j, q) = (f_{j+1} - 1) \bmod 8$, es cóncavo, o es un pico.

(ii) Para cada situación de puntos subsecuentes p_j, p_{j+1}, p_{j+2} de C tales que p_j y p_{j+2} son cóncavos y p_{j+1} es un punto lineal, los dos puntos de $Ext(C)$ obtenidos según (i) a partir de p_j y p_{j+2} , coinciden y representan un pico de $Ext(C)$.

$Ext(C)$ genera una curva poligonal $\gamma(Ext(C))$ que puede fallar a ser débilmente simple cuando la frontera del objeto pasa muy cerca de sí misma, donde parejas de puntos que pertenecen a distintas partes de la frontera, llegan a ser 8-vecinos. Sin embargo, Lemas 6, 7, y el Corolario 7, son validos y pueden ser aplicados en general, porque cada paso de construcción del camino exterior, y del poliomino, como también las relaciones entre ciertos tipos de vértices de C y de $Ext(C)$, se basan solamente en propiedades locales.

Una propuesta de aproximación poligonal para 4-contornos

1. Polígono de perímetro mínimo para 4-contornos

Cuando un 4-contorno $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ es una 4-curva simple, es decir, una curva digital de Jordan, entonces el camino exterior $Ext(C)$ tiene esta misma propiedad. Entonces ambos polígonos, B encerrado por la curva $\gamma(Ext(C))$, y A encerrado por $\gamma(C)$, son polígonos simples tales que $A \subset int(B)$. la secuencia cíclica de cuadrados obtenida por el Lema 6 forma el conjunto diferencia $cl(B \setminus A)$ y un poliomino simple, también llamado continuo de retícula simple [33]. Bajo estas condiciones especiales, el *Polígono de perímetro mínimo (MPP - minimal perimeter polygon)* de C fue definido en [32, 33] como el polígono encerrado por la curva de Jordan de longitud mínima, entre todas las curvas de Jordan que están en $cl(B \setminus A)$ y rodean a A . Fue demostrado que este MPP existe y es único, y que su frontera es una curva poligonal cuyos vértices pertenecen al conjunto de vértices convexos de A y vértices cóncavos de B . Además, existe entonces una relación biyectiva entre los vértices cóncavos de A y de B , también entre los vértices convexos de A y de B , vea Figura 1. Por eso, es fácil generar una lista ordenada de candidatos de vértices del MPP, durante un trazado completo de C . Eso fue utilizado en el algoritmo de [14, 16, 18]. El MPP es reportado de manera similar en [10] y [11] (igualmente en las ediciones 2 y 3 de este libro) donde los píxeles de $Ext(C)$ son llamados elementos del “muro exterior”, y los puntos de $Ext(C)$ correspondientes a puntos cóncavos de C (el “muro interior”) son llamados puntos “reflectados”.

El 4-contorno que es el dato de entrada a todos los algoritmos conocidos de la literatura, es requerido como simple. Puntos finales (es decir, picos) de C y encajamientos como alrededor de un pico de $Ext(C)$, como por ejemplo del punto p de $Ext(C)$ en Figura 1, son explícitamente prohibidos en todas estas fuentes de literatura mencionadas.

Intuitivamente, el MPP de un 4-contorno general C es el polígono encerrado por una curva de longitud mínima, entre todas las curvas de cierto tipo que rodean a C pero son confinadas por $Ext(C)$. Tales curvas son contenidas en el conjunto formado por la unión de todos los cuadrados que pertenecen al poliomino generado por C pero deben visitar todos estos cuadrados en el orden “correcto”. La siguiente definición formaliza esta idea.

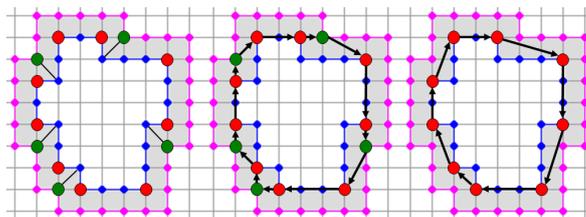


FIGURA 1. Un 4-contorno simple C en azul, su camino exterior $Ext(C)$ en rosa. Los vértices convexos de C , marcados en rojo, junto con los vértices cóncavos de $Ext(C)$ (verde) que corresponden de manera única a vértices cóncavos de C , forman la lista de candidatos de los vértices del MPP, visualizados en la figura del lado derecho.

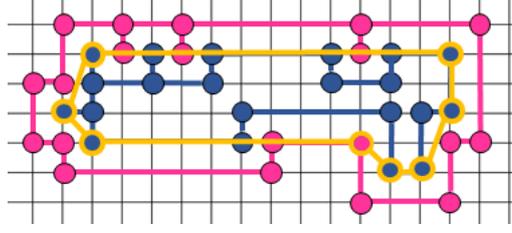


FIGURA 2. Un 4-contorno C (azul) y $Ext(C)$ (rosa), solamente sus vértices son visualizados como píxeles. La parte superior de C presenta dos picos y dos cantos extremos superiores horizontales con puntos finales convexos, que son todos colineales, incluyendo tres picos de $Ext(C)$. En las partes inferiores de C y $Ext(C)$, varios puntos convexos siendo puntos finales de cantos extremos de C y puntos finales cóncavos de cantos extremos de $Ext(C)$ son todos colineales. Como resultado, todos estos puntos pertenecen a la MLPC de C , sólo algunos pocos, marcados en amarillo, son vértices de la MLPC.

Definición 8. Sea C un 4-contorno y $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ el poliomino construido según Lema 6. Se dice que una curva $\alpha = f([0, 1])$ de longitud finita **visita al poliomino** S si α , durante un trazado completo, llega a intersectar a todos los cuadrados de S , en el mismo orden como parecen en la lista S . Es decir, existen $t_1, t_2, \dots, t_{k-1} \in \mathbb{R}$ con $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$ tales que, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, la restricción de f al subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ es una curve que pertenece al cuadrado s_i .

Con ayuda del concepto de una curva que visita al poliomino, es posible proponer la siguiente definición de un MPP simplificado pero generalizado:

Definición 9. Sea C un 4-contorno con camino exterior $Ext(C)$ y su poliomino S construido según Lema 6. La **curva poligonal de mínima longitud** de C (**MLPC** - minimal length polygonal curve) es definida como la curva de mínima longitud, entre todas las curvas poligonales débilmente simples que visitan al poliomino S , y que cumplen que cada una de sus vértices es un vértice de C o de $Ext(C)$. El **polígono de perímetro mínimo** (**MPP** - minimal perimeter polygon) correspondiente a C es definido como el polígono encerrado por la MLPC de C .

La curva $\gamma(C)$ pertenece al conjunto de curvas poligonales débilmente simples del cual la MLPC debe ser seleccionada. Por definición, este conjunto es finito porque C y $Ext(C)$ tienen números finitos de vértices. Por eso, la existencia de la MLPC y del MPP es garantizada. Además, por nuestra definición, solamente vértices de C y de $Ext(C)$ son candidatos a ser vértices de la MLPC.

2. Vértices especiales de la MLPC y candidatos

El polígono propuesto en esta tesis, es construido a partir de vértices especiales de la MLPC que pueden ser encontrados fácilmente, y otros vértices determinados por condiciones semi-locales de caminos más cortos. Recordemos que todas las curvas son siempre trazadas en sentido según las manecillas del reloj, y puntos de \mathbb{Z}^2 son considerados siempre en coordenadas cartesianas estándar.

Definición 10. Sea $L = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ un 4-contorno, o su camino exterior, $p_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Un 4-camino dado por una sublista $(p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_{j+k})$ para $k \geq 0$, es llamado **canto (localmente) extremo** de L con puntos finales p_j y p_{j+k} si

- $x_{j-1} < x_j = x_{j+1} = x_{j+2} = \dots = x_{j+k} > x_{j+k+1}$ (canto vertical derecho), o,
- $x_{j-1} > x_j = x_{j+1} = x_{j+2} = \dots = x_{j+k} < x_{j+k+1}$ (canto vertical izquierdo), o,
- $y_{j-1} < y_j = y_{j+1} = y_{j+2} = \dots = y_{j+k} > y_{j+k+1}$ (canto horizontal superior), o,
- $y_{j-1} > y_j = y_{j+1} = y_{j+2} = \dots = y_{j+k} < y_{j+k+1}$ (canto horizontal inferior).

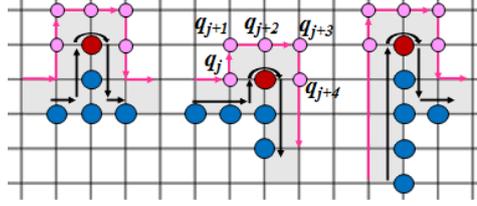


FIGURA 3. Demostración de Lema 11. Píxeles de C son visualizados en azul, picos en café, flechas negras indican el orden en C . Cada pico proporciona cinco puntos de $Ext(C)$ (rosa).

En caso que $k = 0$, el canto extremo (p_j) es llamado un **punto (localmente) extremo**.

Un punto extremo es un canto extremo donde los dos puntos finales coinciden, claro que todo pico es un punto extremo. Figura 2 muestra que varios cantos extremos pueden ser colineales.

Lema 11. Sea C un 4-contorno con camino exterior $Ext(C)$.

(i) Si $E = (p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_{j+k})$, $k \geq 1$, es una secuencia de puntos subsecuentes de C , o de $Ext(C)$, formando un segmento de línea recta vertical o horizontal, entonces E es un canto extremo si y sólo si p_j y p_{j+k} ambos son convexos, o, ambos son cóncavos.

(ii) Si p_j y p_{j+k} son puntos distintos de C que ambos son convexos, o, ambos son cóncavos, y tal que todos los puntos de C entre ellos son puntos lineales, entonces $(p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_{j+k})$ es un canto extremo de C . La misma propiedad vale para $Ext(C)$.

(iii) Todo pico de C , o de $Ext(C)$, pertenece a la MLPC de C .

(iv) Todo canto localmente extremo de C con puntos finales convexos, y todo canto localmente extremo de $Ext(C)$ con puntos finales cóncavos, pertenece a la MLPC de C .

Demostración: Sea $C = \{p_1, \dots, p_n\}$, $Ext(C) = \{q_1, \dots, q_m\}$. Todos los cálculos con índices de puntos en las listas C and $Ext(C)$, sean realizados módulo la longitud de la lista.

(i) es evidente. Nótese que, si $p_j, p_{j+1}, \dots, p_{j+k}$ se encuentran todos sobre un segmento de línea recta vertical o horizontal, ninguno de los puntos finales p_j y p_{j+k} puede ser un pico.

(ii) es consecuencia de (i). Eso se debe a que cualesquiera dos puntos convexos, igualmente cualesquiera dos puntos cóncavos, que tienen entre ellos solamente puntos lineales (o ningún punto), necesariamente forman un segmento de línea recta vertical o horizontal.

(iii) Todo pico $p = p_i = (x_i, y_i)$ de C es un pico convexo, es decir, entonces p_{i-1}, p_i, p_{i+1} son subsecuentes en C y satisfacen que $p_{i-1} = (x_i, y_i - 1) = p_{i+1}$, o $p_{i-1} = (x_i, y_i + 1) = p_{i+1}$, o $p_{i-1} = (x_i - 1, y_i) = p_{i+1}$, o $p_{i-1} = (x_i + 1, y_i) = p_{i+1}$. Es suficiente analizar al primer caso, los otros pueden ser obtenidos por rotaciones por 90° del primero.

Según Definición 4 y Lema 6, p genera los puntos $q_j, q_{j+1}, q_{j+2}, q_{j+3}, q_{j+4}$ de $Ext(C)$ que son vértices de dos cuadrados s_n, s_{n+1} del poliomino S , vea Figura 3. Según Definición 9, la MLPC de C tiene longitud mínima, entre todas las curvas que, en particular, visitan los cuadrados $s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$, en este orden. Pero eso es posible solamente si la MLPC tiene uno o varios vértices que pertenecen al conjunto $\{p, q_j, q_{j+1}, q_{j+2}, q_{j+3}, q_{j+4}\}$, todos estos seis puntos tienen su coordenada y en $\{y_i, y_i + 1\}$. Sea v el último vértice de la MLPC de C , antes de llegar al cuadrado s_n , y sea w el vértice de la MLPC que es el inmediatamente siguiente después de visitar s_{n+1} , ambos estos vértices tienen su coordenada y menor o igual a y_i . Entonces, la curva poligonal $\overline{vp} \cup \overline{pw}$ es el camino más corto que une los puntos v y w y pasa a través de los cuadrados s_n y s_{n+1} . En consecuencia, p pertenece a la MLPC de C .

Ahora sea q un pico de $Ext(C)$. Entonces q es un pico cóncavo. Según la Definición 4, q puede ser obtenido solamente a partir de puntos subsecuentes p_j, p_{j+1}, p_{j+2} de C tales que p_j, p_{j+2} son

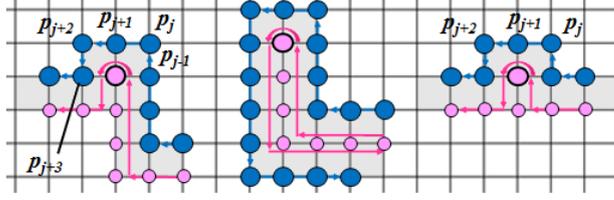


FIGURA 4. Demostración de Lema 11, primer caso de un pico de $Ext(C)$. Píxeles de C are visualizados en azul, de $Ext(C)$ en rosa.

cóncavos y p_{j+1} es lineal. Hay cuatro casos para eso, pero es suficiente estudiar uno de ellos, puesto que los otros son obtenidos del primero mediante rotaciones, vea Figura 4. Entonces p_j, p_{j+1}, p_{j+2} todos tienen la misma coordenada y , igual a y_j .

Debido a que p_j y p_{j+2} son cóncavos, p_{j-1} y p_{j+3} de C , tienen la misma coordenada y , igual a $(y_j - 1)$, igualmente como q . Sea $s_n \in S$ el cuadrado que tiene la diagonal $\overline{qp_j}$, y $s_{n+1} \in S$ el cuadrado que tiene la diagonal $\overline{qp_{j+2}}$. La MLPC de C tiene mínima longitud, entre todas las curvas que, en particular, visitan los cuadrados $s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$. Eso es posible solamente si la MLPC tiene uno o varios vértices que pertenecen al conjunto $\{q, p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, p_{j+3}\}$. Denotemos por v al vértice último de la MLPC, antes de que la curva llegue al cuadrado s_n , y sea w el vértice inmediatamente siguiente, después de haber visitado al cuadrado s_{n+1} . Entonces v y w ambos tienen su coordenada y menor o igual a $(y_j - 1)$. En consecuencia, la curva poligonal $\overline{vq} \cup \overline{qw}$ es el camino más corto que une v con w y pasa por los cuadrados s_n y s_{n+1} , es decir, q pertenece a la MLPC de C .

(iv) Consideremos un canto localmente extremo E dado como sublista $(p_j, p_{j+1}, \dots, p_{j+k})$ en C tal que p_j y p_{j+k} son convexos. El caso $k = 0$ corresponde a un pico, que ya fue analizado en (iii). Ahora asumimos que $k \geq 1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos E como un canto superior horizontal. Los otros casos según la Definición 10 pueden ser obtenidos por rotación.

Entonces $y_{j-1} + 1 = y_j = y_{j+1} = \dots = y_{j+k} = y_{j+k+1} + 1$. La MLPC es la curva poligonal más corta la cual, en particular, visita los cuadrados $s_1, s_2, \dots, s_{k+3}, s_{k+4}$. Además, todos los vértices de la MLPC de C son vértices de C y de $Ext(C)$, por lo tanto también son vértices de los cuadrados de S . Por eso, si v es el último vértice de la MLPC antes de llegar al cuadrado s_2 , y w es el vértice inmediatamente siguiente, después de visitar al cuadrado s_{k+3} , entonces v y w ambos tienen su coordenada y menor o igual a y_j . En consecuencia, la curva poligonal que pasa a través de $p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_{j+k}$, es el camino más corto que une v con w y pasa a través de los cuadrados s_2, s_3, \dots, s_{k+3} . Es decir, E pertenece completamente a la MLPC de C .

Argumentos muy similares muestran que cualquier canto localmente extremo E de $Ext(C)$ con puntos finales cóncavos, dado como sublista $(q_j, q_{j+1}, q_{j+2}, \dots, q_{j+l})$ en $Ext(C)$, $l \geq 1$, pertenece completamente a la MLPC de C .

□

Similarmente como es conocido para 4-contornos simples [33], es intuitivamente claro que cada vértice de la MLPC, o es un vértice convexo o un pico de C , o es un vértice cóncavo o un pico de $Ext(C)$. Eso da la idea de generar una lista ordenada de vértices de C y de $Ext(C)$ que contiene todos los candidatos para vértices de la MLPC de C .

Definición 12. Para todo 4-contorno C con camino exterior $Ext(C)$, una secuencia ordenada $Cand(C)$ de vértices de C y $Ext(C)$ llamada **lista de candidatos** es generada como sigue: Trazando la lista C una vez, para todo $p \in C$:

- (i) Si p es un punto convexo o un pico, p es agregado a la lista $Cand(C)$.
- (ii) Si p es un punto cóncavo pero pertenece a una situación especial según Corolario 7(ii) entonces, el pico correspondiente de $Ext(C)$ es determinado y agregado a la lista $Cand(C)$. Si durante la

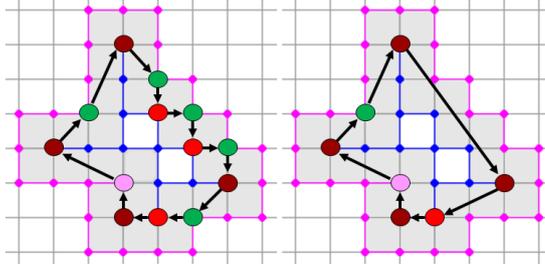


FIGURA 5. Para el 4-contorno C de las Figuras 3, 1, 2, sus vértices convexos son marcados en rojo, sus picos en café. Cada vértice cóncavo de C corresponde a un vértice cóncavo (verde) o a un pico (rosa) de $Ext(C)$. La figure izquierda muestra la secuencia ordenada de los candidatos, la derecha visualiza los vértices de la MLPC.

continuación del trazado de C , una tal situación es encontrada inmediatamente después, de nuevo, el mismo pico de $Ext(C)$ no es duplicado en la lista $Cand(C)$.

(iii) Si p es un punto cóncavo y no pertenece a una situación especial según Corolario 7(ii) entonces el vértice cóncavo correspondiente de $Ext(C)$ es determinado y agregado a la lista $Cand(C)$.

*En todo caso, duplicación de elementos subsecuentes en la lista $Cand(C)$ es evitada. Los elementos de $Cand(C)$ son llamados **candidatos** o **puntos candidatos**.*

La lista $Cand(C)$ contiene vértices convexos y picos de C , y vértices cóncavos y picos de $Ext(C)$, pero no tiene puntos lineales. La secuencia $Cand(C)$ es cíclica y obedece al trazado en sentido según las manecillas del reloj, de la curva $\gamma(Cand(C))$. Lo siguiente constituye las primeras partes de nuestro algoritmo de construcción del polígono.

Corolario 13. *Sea C un 4-contorno con camino exterior $Ext(C)$ y lista de candidatos $Cand(C)$.*

(i) Cada elemento de $Cand(C)$ que es un pico de C o de $Ext(C)$, pertenece a la MLPC de C .

(ii) Cada dos elementos subsecuentes de $Cand(C)$ que ambos son convexos (vértices de C), o, ambos son cóncavos (vértices de $Ext(C)$), ambos pertenecen a la MLPC of C .

Demostración: Sea $C = \{p_1, \dots, p_n\}$, $Ext(C) = \{q_1, \dots, q_m\}$, $Cand(C) = \{c_1, \dots, c_t\}$, correspondiendo al trazado de la curva en sentido según las manecillas del reloj. La parte (i) era parte de Lema 11, sólo falta demostrar la parte (ii).

Cada dos elementos subsecuentes de $Cand(C)$ que ambos son convexos, son puntos distintos convexos p_j, p_{j+k} de C con $(k-1) \geq 0$ puntos lineales entre ellos. Es decir, $p_j, p_{j+1}, \dots, p_{j+k}$ forman un canto extremo de C el cual, por Lema 11, pertenece completamente a la MLPC de C . Por lo tanto, la MLPC contiene los puntos p_j y p_{j+k} .

Análogamente, dos elementos subsecuentes de $Cand(C)$ que ambos son cóncavos, son puntos distintos cóncavos q_j, q_{j+l} de $Ext(C)$ con $(l-1) \geq 0$ puntos lineales entre ellos. Entonces $q_j, q_{j+1}, \dots, q_{j+l}$ forman un canto extremo de $Ext(C)$ el cual, por Lema 11, pertenece completamente a la MLPC de C . Por lo tanto, la MLPC contiene los puntos q_j and q_{j+l} . □

La lista de candidatos se vuelve una herramienta útil para detectar eficientemente a vértices especiales de la MLPC, si los puntos en $Cand(C)$ son marcados como convexos (entonces siendo puntos de C), o como cóncavos (entonces siendo puntos de $Ext(C)$), o como picos. Eso facilita encontrar picos y puntos finales de cantos localmente extremos, aplicando el Corolario 13. Cada uno de estos puntos especiales es un vértice p de la MLPC, siempre cuando no es colineal entre otros de tales puntos especiales de la MLPC, que tal vez fueron detectados inmediatamente antes o después de p . En consecuencia, cuando el análisis de la lista $Cand(C)$ es acompañado por pruebas

de colinealidad, todos los vértices de la MLPC que son picos o puntos finales de cantos localmente extremos, pueden ser encontrados.

3. Propuesta del polígono y estrategia para determinar sus vértices

El polígono P que se propone en esta tesis para aproximar a todo 4-contorno dado $C = \{p_1, \dots, p_n\}$, es encerrado por una curva poligonal débilmente simple que visita al poliomino correspondiente a C . Esta curva es construida como una lista ordenada $Polygon(C)$ de vértices seleccionados de la lista de candidatos $Cand(C)$. La lista final $Polygon(C)$ contiene a todos los vértices especiales de la MLPC que son puntos finales de cantos localmente extremos, incluyendo todos los picos de C y de $Ext(C)$, y vértices complementarios determinados por condiciones semi-locales de caminos más cortos, y por el requerimiento que la curva a ser construida, queda confinada dentro del poliomino de C .

Entonces, de la lista C de entrada, de puntos del 4-contorno, primero la lista de candidatos $Cand(C)$ es generada, luego la lista $Polygon(C)$ de vértices del polígono es construida en varios pasos. Recordemos que cada candidato es un pixel que pertenece a C o a $Ext(C)$. Todos los vértices del polígono final son seleccionados de la lista de candidatos.

Estrategia para determinar la lista $Polygon(C)$ de vértices del polígono: para todo 4-contorno $C = \{p_1, \dots, p_n\}$,

- (1) Trazando la lista C , se genera la lista de candidatos $Cand(C) = \{c_1, \dots, c_t\}$ según Definición 12, aplicando Corolario 7. Cada punto candidato es un punto convexo o pico de C , o, un punto cóncavo o pico del camino exterior $Ext(C)$, sin embargo, todos los candidatos pueden ser determinados fácilmente sólo con trazar la lista C .
- (2) Trazando la lista $Cand(C)$, se determinan todos los puntos especiales de la MLPC según Corolario 13, cada uno de estos puntos es copiado a la lista $Polygon(C)$. Cada uno de estos puntos especiales de la MLPC es un punto final de una canto localmente extremo, eso incluye todos los picos. Como resultado, una versión preliminar de la lista $Polygon(C)$ es obtenida.
- (3) Trazando la actual lista preliminar $Polygon(C)$, cada dos elementos subsecuentes son analizados como sigue: estos elementos originalmente eran puntos c_j, c_{j+k} de la lista $Cand(C)$. Para el caso $k \geq 2$, se determina si el segmento de línea recta $\overline{c_j c_{j+k}}$ está completamente contenido en el poliomino de C . Si eso es verdad, se sigue trazando la lista $Polygon(C)$. En cambio, si este segmento de línea sale del poliomino, la sublista de $Cand(C)$ dada como $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k})$, es sometida a un procedimiento de búsqueda de **vértices complementarios** para el polígono P . La determinación de tales vértices se basa en condiciones semi-locales de caminos más cortos. Los vértices complementarios son seleccionados de la lista $Cand(C)$ de candidatos, más precisamente, de la sublista $(c_{j+1}, c_{j+2}, \dots, c_{j+k-1})$. Al final, estos vértices son insertados entre c_j y c_{j+k} en la lista $Polygon(C)$.

La generación de la lista $Polygon(C)$, y el procesamiento mencionado arriba de cada sublista, es acompañado del análisis de colinealidad. Cada vez que se pretenden agregar puntos a la lista $Polygon(C)$, cuando colinealidad con los últimos puntos subsecuentes ya presentes en la lista, es detectada, elementos de la lista son borrados apropiadamente. Eso incluye la detección de cantos extremos o picos colineales. Es un reto del algoritmo que en la versión final de la lista ordenada cíclica $Polygon(C)$, cada tres elementos subsecuentes no son colineales. Solo entonces, la lista $Polygon(C)$ contiene los vértices del polígono deseado P .

Nótese que el primer paso no requiere determinar la lista completa del camino exterior de C , solamente vértices cóncavos y picos de $Ext(C)$ son candidatos, y éstos pueden ser calculados completamente a partir de la lista C . Para la situación mucho más sencilla que C es una curva digital de Jordan, la lista de candidatos fue utilizada también en los algoritmos de [14, 20, 30, 11]. Todos los puntos de la MLPC que son determinadas en el segundo paso, son puntos finales

de cantos localmente extremos, incluyendo picos, de C y de $Ext(C)$. Tales puntos no han sido usados, o considerados explícitamente, en algoritmos que determinan al MPP o MLP, conocidos de la literatura.

El tratamiento de la sublista en el tercer paso, es realizado de una manera semi-local: no involucra toda la sublista a la vez, sino utiliza una ventana de la lista de tres, cuatro, o cinco puntos subsecuentes, como será explicado en los siguientes secciones. El tratamiento emplea solamente comparaciones y cálculos básicos con números enteros. Lo que el algoritmo realiza con la sublista, puede ser interpretado como una técnica de amapeamiento de patrones, sin embargo, estos patrones son rígidos solamente con respecto al número de puntos involucrados, pero no con respecto a las distancias entre ellos. En consecuencia, nuestro método de determinación del polígono, según la Definición 8.7 en [15], no es un método local, pero tampoco es global.

Algorithm 1 Idea principal del **Tratamiento de una sublista de *Cand*** que determina vértices complementarios de P .

Input: Lista $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k})$, $k \geq 2$, contiene alternamente candidatos convexos y cóncavos, ningún punto en $(c_{j+1}, \dots, c_{j+k-1})$ es un pico. Detotemos por M la unión de todos los cuadrados del poliomino de C .

Output: Lista L de vértices complementarios para el polígono P , que son seleccionados de la sublista $(c_{j+1}, \dots, c_{j+k-1})$; L puede resultar como vacía.

```

1: inicializar  $i = j$ ,  $NumCand := 3$ , y la lista de puntos  $L$  como vacía.
2: while  $i \leq j + k - 2$  do
3:   determinar un vértice complementario para  $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2})$  como sigue:
4:   if  $\overline{c_i c_{i+2}}$  se encuentra dentro de  $M$ , then
5:      $NumCand := 4$ 
6:   else
7:      $c_{i+1}$  es agregado a  $L$ ,  $i := i + 1$ .
8:   end if
9:   if  $NumCand = 4$  y  $i \leq j + k - 3$  then
10:    determinar un vértice complementario para  $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3})$  como sigue:
11:    if  $\overline{c_i c_{i+3}}$  se encuentra dentro de  $M$ , then
12:       $NumCand := 5$ 
13:    else
14:      un vértice complementario  $c_{i+r}$ ,  $r \in \{1, 2\}$ , es determinado and agregado a  $L$ ,
15:       $i := i + r$ ,  $NumCand := 3$ .
16:    end if
17:  end if
18:  if  $NumCand = 5$  y  $i \leq j + k - 4$  then
19:    determinar un vértice complementario para  $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4})$  como sigue:
20:    if  $\overline{c_i c_{i+4}}$  se encuentra dentro de  $M$ , then
21:      Reset  $NumCand := 3$ .
22:    else
23:      un vértice complementario  $c_{i+r}$ ,  $r \in \{1, 2, 3\}$ , es determinado y agregado to  $L$ ,
24:       $i = i + r$ ,  $NumCand := 3$ .
25:    end if
26:  end if
27: end while
28: La lista final  $L$  contiene todos los vértices complementarios del polígono, entre los puntos  $c_j$ 
    y  $c_{j+k}$ , asumiendo que análisis apropiados de colinealidad son efectuados cada vez cuando un
    nuevo elemento está por ser agregado a la lista  $L$ .

```

4. Determinación de vértices complementarios del polígono

4.1. Tratamiento de sublistas de candidatos. .

Para realizar el tercer paso de la estrategia para construir la lista de vértices $Polygon(C)$, supóngase que $Polygon(C)$ ya contiene todos los candidatos que fueron seleccionados de la lista $Cand(C)$, manteniendo su orden que tenían allí, que son puntos finales de cantos extremos, incluyendo todos los picos. Ahora sean p, q dos elementos subsecuentes de esta lista $Polygon(C)$. Estos puntos originalmente eran candidatos $p = c_j, q = c_{j+k}$ con $k \geq 1$ de la lista $Cand(C)$.

Si $k = 1$, no hay un candidato, pero eventualmente hay cualquier número de puntos lineales de C o de $Ext(C)$, entre los puntos p y q . Entonces, el segmento de línea recta \overline{pq} siempre se encuentra completamente dentro del poliomino S de C , lo cual confirma que p y q son vértices subsecuentes del polígono a ser construido.

Ahora supongamos que $k \geq 2$, y consideramos una sublista $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k})$ de $Cand(C)$. Mientras que $p = c_j$ y $q = c_{j+k}$ son puntos finales de cantos extremos de C o de $Ext(C)$, por la suposición que p y q son subsecuentes en la lista $Polygon(C)$, los puntos restantes $c_{j+1}, \dots, c_{j+k-1}$ son candidatos que no son puntos finales de cantos extremos, en particular, ningún punto de éstos es un pico. Además, si cualesquiera dos puntos subsecuentes de la sublista $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k})$ serían ambos convexos, o ambos cóncavos entonces, por Proposición 13(ii), ambos ya serían elementos de la lista $Polygon(C)$ lo cual, contradice las suposiciones. Obtenemos la siguiente conclusión:

Lema 14. *Después de haber efectuado los primeros dos pasos de la estrategia para construir la lista de vértices $Polygon(C)$, para cualesquiera dos puntos subsecuentes $p = c_j$ y $q = c_{j+k}$ en $Polygon(C)$ tales que existe una sublista $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k})$ de $Cand(C)$ con $k \geq 2$, todos los candidatos $c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k}$ son alternadamente convexos (puntos de C) y cóncavos (puntos de $Ext(C)$).*

Los vértices faltantes de P que eventualmente son necesarios y entonces deben ser insertados en la lista $Polygon(C)$ entre los puntos c_j y c_{j+k} , son determinados por una técnica de ventanas deslizantes que analiza maximalmente $m \geq 3$ puntos a la vez. Iniciando con los primeros m puntos $c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+m-1}$ de la sublista $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k})$, los nuevos vértices deben garantizar que la curva poligonal a ser construida entre c_j y c_{j+m-1} , se encuentra dentro del poliomino de C , y que dicha curva es la curva más corta posible con esta propiedad de estar dentro del poliomino. Si $\overline{c_j c_{j+m-1}}$ no sale del poliomino, ningún vértice complementario es necesario entre estos dos puntos, entonces c_{j+m-1} es definido como el siguiente vértice de P y es agregado a la lista $Polygon(C)$. El algoritmo entonces procede a trabajar con los siguientes m puntos $c_{j+m}, c_{j+m+1}, \dots, c_{j+2m-1}$. En otro caso, vértices complementarios son determinados, por ejemplo, digamos que el último de éstos es c_{j+i} para algún $i \in \{1, \dots, j+m-2\}$. Entonces los siguientes m puntos a ser analizados son $c_{j+i}, c_{j+i+1}, \dots, c_{j+i+m-1}$.

Para efectuar eso de una manera eficiente, procesamos cada grupo de m puntos de la sublista $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k})$ tal que, primero, solamente los primeros tres puntos son analizados. Si para ellos, un vértice complementario es necesitado, el cual entonces sólo puede ser el segundo punto, la ventana deslizante inmediatamente es movida hacia este vértice complementario como siguiente punto inicial de ventana. Solamente en el caso que los primero tres puntos no proporcionan un vértice complementario, un cuarto punto es incorporado en el análisis.

Entonces, de nuevo, si para estos cuatro puntos, un vértice complementario es necesitado, este vértice es determinado, y agregado a la lista $Polygon(C)$. Después, la ventana deslizante es movida a este vértice como nuevo punto inicial de ventana. Solamente en el caso que los primero cuatro puntos no proporcionan un vértice complementario, un quinto punto es incorporado en el análisis y posible determinación de vértices complementarios. Este procedimiento es continuado hasta que el número máximo m de puntos incorporados en el análisis es alcanzado. En el caso que $m > k$, solamente k puntos son procesados; en todo caso, el tratamiento de la sublista de $Cand(C)$ llega a terminarse, o llega a ser truncado cuando incorpora al último punto de la lista $Polygon(C)$.

En esta tesis solamente trabajamos con $m = 5$, pero mostramos algunos ejemplos para $m = 3$ y $m = 4$. El Algoritmo 1 presenta la idea principal del tratamiento de una sublista de $Cand(C)$. Allí, la lista final L contiene todos los vértices complementarios del polígono que deben ser insertados en la lista $Polygon(C)$ entre sus elementos c_j y c_{j+k} . El procedimiento para determinar vértices complementarios para tres, cuatro, y cinco candidatos, será descrito en los siguientes párrafos.

En la práctica, la sublista $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+k})$ puede ser larga. Nuestro método de detección de vértices complementarios es local debido al número restringido de m puntos para la ventana deslizante. Sin embargo, entre dos candidatos subsecuentes puede haber cualquier número finito de puntos lineales, por lo tanto, las distancias entre los puntos de la ventana no son restringidas por algún número prefijado.

4.2. Vértices complementarios para tres candidatos. .

Consideremos una sublista (c_j, c_{j+1}, c_{j+2}) de $Cand(C)$ de puntos alternadamente convexos y cóncavos, donde c_{j+1} no es punto final de un canto extremo, en particular, no es un pico. Sea M la unión de los cuadrados del poliomino de C . Puesto que la curva poligonal a ser construida debe estar dentro del conjunto M , c_{j+1} es necesitado como vértice complementario para el polígono P si y sólo si $\overline{c_j c_{j+2}}$ sale de M . Para simplificar la notación, denotemos la sublista a ser procesada por (c_1, c_2, c_3) . Existen ocho situaciones, presentadas en la Figura 6, puesto que el avance local del 4-contorno C sólo puede ser hacia cuatro direcciones: a) hacia el norte-este (NE - *north-east*), b) hacia el norte-occidente (NW - *north-west*), c) hacia el sur-este (SE - *south-east*), o, d) hacia el sur-occidente (SW - *south-west*).

Lema 15. *Sean c_1, c_2, c_3 puntos subsecuentes de la lista $Cand(C)$ que son alternadamente convexos y cóncavos, donde c_2 no es un pico. Sea M la unión de los cuadrados del poliomino de C , $c_i = (x_i, y_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Según cada uno de los ocho tipos de situaciones locales de C , las siguientes condiciones son equivalentes al hecho que $\overline{c_1 c_3} \not\subset M$, y por lo tanto, indican detectar c_2 como vértice complementario para el polígono P .*

Para el caso (c_1 convexo, c_2 cóncavo, c_3 convexo):

- a) *Si C avanza en dirección NE, es decir, $y_1 + 1 = y_2, x_2 + 1 = x_3$, entonces $\overline{c_1 c_3} \not\subset M \iff (x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge \text{not}(x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3))$.*
- b) *Si C avanza en dirección SE, es decir, $x_1 + 1 = x_2, y_2 - 1 = y_3$, entonces $\overline{c_1 c_3} \not\subset M \iff (y_1 > y_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge \text{not}(y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 + 1 = x_3))$.*
- c) *Si C avanza en dirección SW, es decir, $y_1 - 1 = y_2, x_2 - 1 = x_3$, entonces $\overline{c_1 c_3} \not\subset M \iff (x_1 > x_2 \wedge y_2 > y_3 \wedge \text{not}(x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 - 1 = y_3))$.*
- d) *Si C avanza en dirección NW, es decir, $x_1 - 1 = x_2, y_2 + 1 = y_3$, entonces $\overline{c_1 c_3} \not\subset M \iff (y_1 < y_2) \wedge x_2 > x_3 \wedge \text{not}(y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 - 1 = x_3)$.*

Para el caso (c_1 cóncavo, c_2 convexo, c_3 cóncavo):

- a) *Si C avanza en dirección NE, es decir, $x_1 + 1 = x_2, y_2 + 1 = y_3$, entonces $\overline{c_1 c_3} \not\subset M \iff (y_1 < y_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge \text{not}(y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 + 1 = x_3))$.*
- b) *Si C avanza en dirección SE, es decir, $y_1 - 1 = y_2, x_2 + 1 = x_3$, entonces $\overline{c_1 c_3} \not\subset M \iff (x_1 < x_2 \wedge y_2 > y_3 \wedge \text{not}(x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 - 1 = y_3))$.*
- c) *Si C avanza en dirección SW, es decir, $x_1 - 1 = x_2, y_2 - 1 = y_3$, entonces $\overline{c_1 c_3} \not\subset M \iff (x_2 > x_3 \wedge y_1 > y_2 \wedge \text{not}(y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 - 1 = x_3))$.*
- d) *Si C avanza en dirección NW, es decir, $y_1 + 1 = y_2, x_2 - 1 = x_3$, entonces $\overline{c_1 c_3} \not\subset M \iff (x_1 > x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge \text{not}(x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3))$.*

La demostración del lema es presentada en el Apéndice. Para cada caso, cuando la condición de Lema 15 se cumple, entonces c_2 es detectado como vértice complementario, claramente entonces $\overline{c_1 c_2} \subset M$ y $\overline{c_2 c_3} \subset M$. Las condiciones de Lema 15 presentan muchas similitudes, por eso, pueden ser unificadas y simplificadas, si son agrupadas apropiadamente.

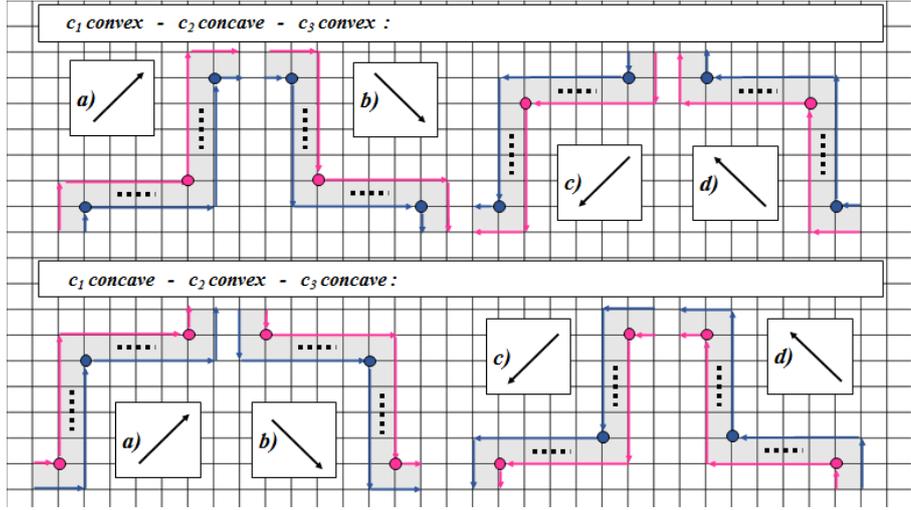


FIGURA 6. Las ocho situaciones para tres candidatos subsiguientes, donde el segundo punto puede ser necesario como vértice complementario. El 4-contorno C es dibujado en azul, $Ext(C)$ en rosa, los cuadrados del poliomino son presentados en gris, puntitos indican que puede haber cualquier número de puntos lineales, por lo tanto también más cuadrados, entre c_1 y c_2 , y entre c_2 y c_3 .

Definición 16. Sean c_1, c_2, c_3 candidatos subsiguientes en la lista $Cand(C)$ que son puntos alternadamente convexos y cóncavos, donde c_2 no es un pico. Los ocho tipos de situaciones determinadas por la dirección del avance local del 4-contorno C y los tipos de candidatos, sean agrupados como sigue:

Grupo 1 contiene las siguientes situaciones:

- a) c_1 convexo, C avanza hacia NE, es decir, $y_1 + 1 = y_2, x_2 + 1 = x_3$.
- b) c_1 cóncavo, C avanza hacia SE, es decir, $y_1 - 1 = y_2, x_2 + 1 = x_3$.
- c) c_1 convexo, C avanza hacia SW, es decir, $y_1 - 1 = y_2, x_2 - 1 = x_3$.
- d) c_1 cóncavo, C avanza hacia NW, es decir, $y_1 + 1 = y_2, x_2 - 1 = x_3$.

Grupo 2 contiene las siguientes situaciones:

- a) c_1 cóncavo, C avanza hacia NE, es decir, $x_1 + 1 = x_2, y_2 + 1 = y_3$.
- b) c_1 convexo, C avanza hacia SE, es decir, $x_1 + 1 = x_2, y_2 - 1 = y_3$.
- c) c_1 cóncavo, C avanza hacia SW, es decir, $x_1 - 1 = x_2, y_2 - 1 = y_3$.
- d) c_1 convexo, C avanza hacia NW, es decir, $x_1 - 1 = x_2, y_2 + 1 = y_3$.

Para cada situación específica de tres candidatos subsiguientes (c_1, c_2, c_3), es sencillo determinar a cuál grupo pertenece. Eso puede ser todavía más facilitado si los candidatos en la lista $Cand$ son marcados como convexos o cóncavos, lo cual es recomendado para implementaciones. Como corolario de Definición 16 y Lema 15, el Lema 17 reporta la condición única para cada grupo, que tiene que ser analizada para determinar si el segmento de línea $\overline{c_1 c_3}$ sale del conjunto M , en este caso, c_2 tiene que ser definido como vértice complementario. Nótese que para píxeles distintos $c_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $(|x_1 - x_2| = 1 \wedge |y_2 - y_3| = 1)$ es falso si y sólo si $(|x_1 - x_2| \geq 2 \vee |y_2 - y_3| \geq 2)$, y que $not(|y_1 - y_2| = 1 \wedge |x_2 - x_3| = 1)$ es equivalente a $(|y_1 - y_2| \geq 2 \vee |x_2 - x_3| \geq 2)$.

Lema 17 (vértices complementarios para tres candidatos). .

Sean c_1, c_2, c_3 puntos subsiguientes en la lista $Cand(C)$ que son alternadamente convexo y cóncavos, y donde c_2 no es un pico. Sea M la unión de los cuadrados del poliomino de C , $c_i = (x_i, y_i)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Si (c_1, c_2, c_3) pertenece al Grupo 1 según Definición 16 entonces $\overline{c_1c_3} \not\subset M$ si y sólo si $(x_1 \neq x_2 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge (|x_1 - x_2| \geq 2 \vee |y_2 - y_3| \geq 2))$.

Si (c_1, c_2, c_3) pertenece al Grupo 2 según Definición 16 entonces $\overline{c_1c_3} \not\subset M$ si y sólo si $(y_1 \neq y_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge (|y_1 - y_2| \geq 2 \vee |x_2 - x_3| \geq 2))$.

Si la condición se cumple, c_2 es definido como vértice complementario para el polígono a ser construido, entonces c_2 satisface que $\overline{c_1c_2} \cup \overline{c_2c_3} \subset M$.

4.3. Vértices complementarios para cuatro candidatos. .

Consideremos cualquier sublista $(c_j, c_{j+1}, c_{j+2}, c_{j+3})$ de $Cand(C)$ de puntos alternadamente convexos y cóncavos donde c_{j+1} y c_{j+2} no son picos, claro que entonces tampoco son otros puntos finales de cantos extremos. Sea M la unión del poliomino de C . Para simplificar la notación, denotemos la sublista a ser procesada como (c_1, c_2, c_3, c_4) . Según la estrategia propuesta, el objetivo ahora es detectar vértices complementarios para estos cuatro candidatos, ya sabiendo que para los primeros tres de ellos, ningún tal vértice fue encontrado. Es decir, necesitamos deducir condiciones para detectar cuando $\overline{c_1c_4} \not\subset M$, bajo la suposición que $\overline{c_1c_3} \subset M$. En tal caso, un vértice complementario $p \in \{c_2, c_3\}$ tiene que ser determinado. El punto p debe asegurar que la curva $\overline{c_1p} \cup \overline{pc_4}$ se encuentra dentro de M y es la curva más corta posible con esta propiedad, entre las dos opciones para p .

De nuevo hay ocho situaciones, considerando c_1 como convexo, o como cóncavo, y tomando en cuenta el avance local de C que sólo puede ser igualmente como descrito arriba para tres candidatos: a) NE, b) NW, c) SE, d) SW. Las condiciones detalladas y las indicaciones para definir los vértices complementarios para todos los casos, son reportadas en Lema 20 contenido , junto con su demostración completa formal, en el Apéndice. Utilizando los grupos según la Definición 16, similitudes y analogías entre las condiciones de Lema 20 llevan a la siguiente versión condensada para el tratamiento de cuatro candidatos.

Lema 18 (vértices complementarios para cuatro candidatos). .

Sean c_1, c_2, c_3, c_4 puntos subsecuentes en la lista $Cand(C)$ que son alternadamente convexos y cóncavos, y donde c_2 y c_3 no son picos. Sea M la unión de los cuadrados del poliomino de C , y $c_i = (x_i, y_i)$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Para cada grupo según la Definición 16, las siguientes condiciones garantizan que $\overline{c_1c_4} \not\subset M$. El punto $p \in \{c_2, c_3\}$ indicado abajo para cada caso, satisface que la curva $\overline{c_1p} \cup \overline{pc_4}$ se encuentra dentro de M y tiene longitud mínima entre las dos opciones para p . Es decir, entonces p es detectado como vértice complementario del polígono. Cuando ninguna condición se cumple, entonces $\overline{c_1c_4} \subset M$.

Si (c_1, c_2, c_3) pertenece al Grupo 1 entonces:

- (1) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge x_3 \neq x_4$ entonces $p = c_3$.
- (2a) Si $x_1 \neq x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge |x_2 - x_4| < |x_1 - x_2|$ entonces $p = c_2$.
- (2b) Si $x_1 \neq x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge |x_1 - x_3| < |x_3 - x_4|$ entonces $p = c_3$.
- (3) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge |x_3 - x_4| \geq 2$ entonces $p = c_3$.
- (4a) Si $|x_1 - x_2| = |y_2 - y_3| = 1 \wedge x_3 = x_4$ entonces $p = c_2$.
- (4b) Si $|x_1 - x_2| = |y_2 - y_3| = 1 \wedge |x_3 - x_4| \geq 2$ entonces $p = c_3$.

Si (c_1, c_2, c_3) pertenece al Grupo 2 entonces:

- (1) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge y_3 \neq y_4$ entonces $p = c_3$.
- (2a) Si $y_1 \neq y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge |y_2 - y_4| > |y_1 - y_2|$ entonces $p = c_2$.
- (2b) Si $y_1 \neq y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge |y_1 - y_3| < |y_3 - y_4|$ entonces $p = c_3$.
- (3) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge |y_3 - y_4| \geq 2$ entonces $p = c_3$.
- (4a) Si $|y_1 - y_2| = |x_2 - x_3| = 1 \wedge y_3 = y_4$ entonces $p = c_2$.
- (4b) Si $|y_1 - y_2| = |x_2 - x_3| = 1 \wedge |y_3 - y_4| \geq 2$ entonces $p = c_3$.

Los grupos según Definición 16 son determinados por los primeros tres puntos. Según la estrategia propuesta para detectar vértices complementarios, antes de analizar a los cuatro candidatos, el grupo ya está conocido, puesto que los primeros tres puntos han sido tratados antes. Lema 18 proporciona un método de detección apropiado para la implementación: para dados (c_1, c_2, c_3, c_4) , basado en el grupo, en el peor caso, las seis condiciones (1), (2a), (2b), (3), (4a), (4b) tienen que ser probadas, eso involucra solamente operaciones sencillas entre números enteros.

4.4. Vértices complementarios para cinco candidatos. .

Consideremos cualquier sublista $(c_j, c_{j+1}, c_{j+2}, c_{j+3}, c_{j+4})$ de $Cand(C)$ de puntos alternadamente convexos y cóncavos donde c_{j+1} , c_{j+2} y c_{j+3} no son pisos, entonces tampoco pueden ser otros puntos finales de cantos extremos. Sea M la unión de los cuadrados del poliomino de C . Para simplificar la notación, denotemos la sublista a ser procesada como $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$. El objetivo ahora es detectar vértices complementarios para estos cinco candidatos, cuando para los primeros tres y los primeros cuatro de ellos, ninguntal vértice fue encontrado. Es decir, necesitamos deducir condiciones que garantizan que $\overline{c_1c_5} \not\subset M$, bajo la suposiciones que $\overline{c_1c_3} \subset M$ y $\overline{c_1c_4} \subset M$. En tal caso, un vértice complementario $p \in \{c_2, c_3, c_4\}$ debe ser determinado. Este punto p debe garantizar que la curva $\overline{c_1p} \cup \overline{pc_5}$ se encuentra dentro de M y es la curva más corta posible entre las tres opciones para p .

Como antes, el problema puede ser analizado para todas las situaciones posibles, donde por un lado, se consideran los casos que c_1 es convexo o cóncavo, y por otro lado, se toman en cuenta las direcciones de avance local posibles de C , siendo NE, NW, SE, or SW. Eso lleva a muchas situaciones y condiciones las cuales son reportadas en detalle y demostradas matemáticamente en Lema 21 que está contenido en el Apéndice. Utilizando los grupos de situaciones según la Definición 16, lo cuales son completamente determinados por los primeros tres candidatos c_1, c_2, c_3 , las condiciones numerosas del Lema 21 pueden ser unificadas hacia la siguiente versión condensada que es apropiada para implementaciones.

Lema 19 (vértices complementarios para cinco candidatos). .

Sean c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 puntos subsecuentes en la lista $Cand(C)$ que son alternadamente convexos y cóncavos, y donde ningún punto es un pico. Sea M la unión de los cuadrados del poliomino de C , además $c_i = (x_i, y_i)$ para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Para cada grupo según Definición 16, cada una de las siguientes condiciones garantiza que $\overline{c_1c_5} \not\subset M$. El punto $p \in \{c_2, c_3, c_4\}$ indicado abajo para cada caso, satisface que $\overline{c_1p} \cup \overline{pc_5}$ se encuentra dentro de M y tiene longitud mínima entre las tres opciones para p . Entonces p es detectado como vértice complementario para el polígono. Cuando ninguna condición se cumple, entonces $\overline{c_1c_5} \subset M$.

Si (c_1, c_2, c_3) pertenece al Grupo 1 entonces:

- (1) Si $x_1 \neq x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 \neq x_4$, y además,
 - (1a) $|x_2 - x_1| + n = |x_4 - x_2|$ para $n \in \{0, 1, 2\}$ y $y_4 \neq y_5$, entonces $p = c_4$.
 - (1b) $|x_2 - x_1| + 2 = |x_4 - x_2|$ y $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
- (2) Si $|x_1 - x_2| = |y_2 - y_3| = |x_3 - x_4| = 1$, y además,
 - (2a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
 - (2b) $|y_5 - y_4| \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (3) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge |x_3 - x_4| = 1$, y además,
 - (3a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
 - (3b) $|y_4 - y_5| \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (4) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge x_3 = x_4$, y además,
 - (4a) $|y_4 - y_5| < |y_2 - y_3|$, entonces $p = c_3$.
 - (4b) $|y_4 - y_5| > |y_2 - y_3| + 2$, entonces $p = c_4$.
- (5) Si $|x_1 - x_2| = 1 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge |y_4 - y_5| \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (6) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge |y_4 - y_5| \geq 3$, entonces $p = c_4$.

Si (c_1, c_2, c_3) pertenece al Grupo 2 entonces:

- (1) Si $y_1 \neq y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 \neq y_4$, y además,
(1a) $|y_1 - y_2| + n = |y_2 - y_4|$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $x_4 \neq x_5$, entonces $p = c_4$.
(1b) $|y_1 - y_2| + 2 = |y_2 - y_4|$ y $x_4 = x_5$, then $p = c_3$.
(2) Si $|y_1 - y_2| = |x_2 - x_3| = |y_3 - y_4| = 1$, y además,
(2a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
(2b) $|x_4 - x_5| \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(3) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge |y_3 - y_4| = 1$, y además,
(3a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
(3b) $|x_4 - x_5| \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(4) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge y_3 = y_4$, y además,
(4a) $|x_4 - x_5| < |x_2 - x_3|$, entonces $p = c_3$.
(4b) $|x_4 - x_5| > |x_2 - x_3| + 2$, entonces $p = c_4$.
(5) Si $|y_1 - y_2| = 1 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge |x_4 - x_5| \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(6) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge |x_4 - x_5| \geq 3$, entonces $p = c_4$.

Este lema proporciona un método de detección de vértices complementarios, apropiado para implementaciones: para toda sublista $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ a ser procesada, basado en el conocimiento del grupo que ya ha sido determinado antes, en el peor de los casos, las diez condiciones (1a), (1b), \dots , (5), (6), tienen que ser checadas. Sin embargo, nótese que eso involucra solamente comparaciones y operaciones de cálculo sencillas entre las coordenadas de los puntos, que son números enteros.

Algoritmo para construir una aproximación poligonal para 4-contornos generales

1. Algoritmo para determinar los vértices del polígono propuesto

El Algoritmo 2 muestra un pseudo-código que determina los vértices del polígono propuesto para cualquier 4-contorno. A continuación comentamos sobre su funcionamiento, su justificación, y su implementación:

(a) Determinar la lista de candidatos $Cand(C)$ a partir de la lista C (línea 2), se basa en Definición 12 y Corolario 7. Para poder efectuar eso eficientemente, es recomendado que la lista C , a parte de las coordenadas de cada punto p_i , contiene también los códigos de Freeman de la dirección de paso desde p_i hacia p_{i+1} .

(b) Como resultado del preprocesamiento de la lista $Cand(C)$ (línea 3), para $i=1$, exactamente una de las condiciones de líneas 6 y 14, se cumple, por lo tanto, el primer punto p_1 de la lista $Polygon(C)$ es un punto convexo de la MLPC.

(c) El tratamiento de una sublista de $Cand$ fue mostrado en el Algoritmo 1, el cual toma la lista $(c_m, c_{m+1}, \dots, c_i)$ de candidatos subsecuentes como dato de entrada, y genera una lista de $l \geq 0$ vértices complementarios del polígono, la cual después tiene que ser insertada a la lista $Polygon(C)$ entre los puntos c_m y c_i .

(d) El condicionamiento para agregar el punto c_i a la lista $Polygon(C)$ en líneas 15-17, que consiste en que este punto no es ya el último punto de la lista actual $Polygon(C)$, es necesitado cuando $Cand(C)$ contiene más que dos puntos subsecuentes que todos son convexos, o, todos son cóncavos:

Supongamos que $i \leq t - 1$ y c_i, c_{i+1}, c_{i+2} de $Cand(C)$, todos son puntos convexos. Puesto que la condición de línea 14 se cumple para la pareja c_i, c_{i+1} , al menos c_{i+1} es agregado a $Polygon(C)$, volviéndose el actualmente último punto de esta lista. Después de la prueba si vértices complementarios deben ser insertados en la lista $Polygon(C)$ en posiciones antes del punto c_i , el próximo paso inicia aumentando i , luego la pareja c_{i+1}, c_{i+2} de puntos convexos es encontrada (línea 14) y se pretende agregarla a $Polygon(C)$. Sin embargo, c_{i+1} ya es el último elemento de la lista actual $Polygon(C)$. Eso justifica la condición en línea 15.

El condicionamiento para agregar el punto c_{i+1} a $Polygon(C)$ en línea 18 es justificado puesto que $c_{i+1} = c_1$ para $i = t$ (vea línea 14), pero c_1 ya pertenece a la lista $Polygon(C)$ como su primer elemento.

(e) El borrado de puntos de $Polygon(C)$ que son colineales entre otros puntos situados en la lista inmediatamente antes y subsecuentemente después (línea 29), puede requerir localmente varias iteraciones. Es decir, después de borrar el punto medio de una tripleta de puntos colineales, los puntos restantes podrían todavía estar en una situación de colinealidad con otros puntos situados inmediatamente antes y después en la lista. Trazando $Polygon(C)$ como secuencia cíclica significa incluir el eventual borrado del punto p_1 de $Polygon(C)$ en caso que fuera colineal con p_n y p_2 . La lista final $Polygon(C)$ contiene todos los vértices del polígono a construir, y en ella, cualesquiera tres puntos subsecuentes no son colineales.

Algorithm 2 Determinación de la lista ordenada de vértices del polígono.

Input: Lista $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $n \geq 2$, de un 4-contorno.

Output: Lista $Polygon(C)$ de vértices del polígono.

```
1: Se inicializa la lista  $Polygon(C)$  como vacía.
2: Se determina la lista  $Cand(C) = (c_1, c_2, \dots, c_t)$  de candidatos, donde para cada  $c_i$ , sus coordenadas  $x_i, y_i$  and su tipo (punto convexo, punto cóncavo, pico convexo o cóncavo) son guardadas.
3: La lista  $Cand(C)$  es preprocesada: se determina al primer punto  $c_k$  que es un pico convexo, o, un punto convexo tal que  $c_{k+1}$  también es convexo. Después, la secuencia cíclica  $Cand(C)$  es trasladada con movimientos  $c_1 := c_k, c_2 := c_{k+1}$ , etc., tal que la versión final procesada queda como  $Cand(C) = (c_1, c_2, \dots, c_t)$ , es decir, inicia con un punto convexo de la MLPC.
4:  $i := 1$  (índice de Cand),  $j := 0$  (índice de Polygon),  $m := 1$ 
5: while  $i \leq t$  do
6:   if  $c_i = (x_i, y_i)$  es un pico then
7:      $j := j + 1$ , entonces  $p_j = c_i$  es agregado a  $Polygon(C)$ .
8:     if  $i - m \geq 2$  then
9:       Tratamiento de la sublista de  $Cand$   $(c_m, c_{m+1}, \dots, c_i)$ , los  $l \geq 0$  vértices complementarios obtenidos son insertados en  $Polygon(C)$  entre los puntos  $c_m$  y  $c_i$ .
10:       $j := j + l$ 
11:     end if
12:      $m := i$  (último índice de  $Cand$  de un punto final de un canto extremo)
13:   end if
14:   if  $c_i = (x_i, y_i)$  y  $c_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$  (para  $i = t$ ,  $c_i$  and  $c_1$ ) ambos son convexos, o, ambos son cóncavos then
15:     if el punto  $c_i$  no coincide con el punto  $p_j$  then
16:        $j := j + 1$ , entonces  $p_j = c_i$  es agregado a  $Polygon(C)$ .
17:     end if
18:     if  $i \leq t - 1$  then
19:        $j := j + 1$ , entonces  $p_j = c_{i+1}$  es agregado a  $Polygon(C)$ .
20:     end if
21:     if  $i - m \geq 2$  then
22:       Tratamiento de la sublista de  $Cand$   $(c_m, c_{m+1}, \dots, c_i)$ , los  $l \geq 0$  vértices complementarios son insertados en  $Polygon(C)$  entre los puntos  $c_m$  y  $c_i$ .
23:       $j := j + l$ 
24:     end if
25:      $m := i + 1$  (último índice de  $Cand$  de un punto final de un canto extremo)
26:   end if
27:    $i := i + 1$ 
28: end while
29: Trazando  $Polygon(C)$  como una secuencia cíclica, se borran todos los puntos en medio de tripletas de puntos subsecuentes que son colineales.
```

(f) Realizar el tratamiento de colinealidad al final del algoritmo durante un trazado adicional de la lista $Polygon(C)$, no es la única opción. En nuestra implementación, pruebas de colinealidad son efectuados cada vez cuando uno o dos puntos pretenden de ser agregados a la lista $Polygon(C)$. Una tal prueba es utilizada para decidir si un punto de la lista actual $Polygon(C)$ tiene que ser borrado del fin de la lista, antes de que un nuevo punto es agregado, o, si de dos nuevos puntos, realmente ambos son agregados o no. Por ejemplo, cuando se detectó un pico (línea 6) o un prospectivo vértice complementario durante el “Tratamiento de una sublista de $Cand$ ”, digamos p , y los últimos dos puntos p_j, p_{j-1} de la lista actual $Polygon(C)$ satisfacen que p_j, p_{j-1}, p son colineales, entonces p_{j-1} es eliminado de $Polygon(C)$ antes de agregar p a esta lista. En caso que p_j, p_{j-1} ambos son

convexos, o, ambos son cóncavos, y una nueva pareja (p, q) de tales puntos es detectada (línea 14), es conveniente checar si (p_j, p_{j-1}, p, q) están todos sobre la misma línea recta, en este caso, p_{j-1} es borrado de $Polygon(C)$ y luego, solamente q es agregado. Entonces, al final del algoritmo sólo queda analizar la situación alrededor del primero y el último punto de $Polygon(C)$.

2. Propiedades del algoritmo

2.1. Correctitud. .

- El algoritmo primero selecciona de la lista de candidatos todos los puntos finales de cantos localmente extremos, incluyendo picos, todos estos son copiados a la lista $Polygon(C)$. Por Lema 11 y Corolario 13, todos estos puntos pertenecen a la MLPC, pero no necesariamente son vértices, por posibles situaciones de colinealidad.
- Después, mediante el tratamiento de sublistas de $Cand$, vértices complementarios del polígono eventualmente son obtenidos y son insertados apropiadamente en la lista $Polygon(C)$. Vértices complementarios satisfacen condiciones semi-locales de caminos más cortos, además, garantizan que la curva poligonal a ser construida es confinada por el poliomino definido por el 4-contorno dado. El tratamiento de sublistas de $Cand$ según Algoritmo 1 trabaja con la sublista dada de candidatos mediante una ventana deslizante de maximalmente cinco puntos subsecuentes, donde primero, los primeros tres puntos are considerados. En caso que éstos no necesitan un vértice complementario, el cuarto punto es incluido. Si la curva generada por estos cuatro puntos no sale del poliomino, el quinto punto es incorporado al tratamiento. La correctitud de este procedimiento se basa en los Lemas 17, 18, 19. Vértices complementarios no necesariamente son puntos de la MLPC.
- Comentario (a) de arriba ya fundamentó la generación de la lista de candidatos $Cand(C)$. Para preprocesar esta lista en línea 3 del algoritmo, es necesario encontrar un pico convexo, o una pareja de candidatos subsecuentes convexos. Tales puntos obviamente existen para el 4-contorno C de cualquier objeto (conjunto finito 4-conexo de al menos dos píxeles). Puesto que C corresponde a una curva cerrada débilmente simple que rodea al objeto, si el objeto contiene un cuadrado de 2×2 puntos, C tiene al menos cuatro cantos localmente extremos con puntos finales convexo, aunque cualquiera de estos cantos puede estar degenerado a un pico. Aún en el caso especial que el objeto fuera degenerado a un conjunto “delgado”, contendría al menos dos picos convexos.
- Como fue explicado en los Comentarios (e),(f) arriba, pruebas apropiadas y tratamientos de colinealidad local completan al algoritmo, para que genere la lista ordenada completa de píxeles que son los vértices del polígono deseado.

2.2. Requerimiento de espacio. .

Los *datos de entrada* son proporcionados como lista de un 4-contorno $C = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ de n puntos. Para cada punto p_i , C contiene sus coordenadas enteros x_i, y_i y el código de Freeman $f_i \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ de la dirección de paso desde p_i hacia p_{i+1} . Por lo tanto, C es una matriz de enteros, de tamaño $n \times 3$. El algoritmo genera $Cand(C)$ y $Polygon(C)$, ambas son matrices de enteros con maximalmente n renglones, sus primeras dos columnas contiene las coordenadas enteras de puntos. $Cand(C)$ tiene una tercer columna, guardando para cada punto $p_i = (x_i, y_i)$ su tipo $t_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (1 = punto convexo, 2 = punto cóncavo, 3 = pico convexo, 4 = pico cóncavo). $Polygon(C)$ podría también guardar tal información adicional para futuros usos. Si ambas listas $Cand(C)$ y $Polygon(C)$ son manejadas como matrices $k \times 3$, $k \leq n$, entonces el algoritmo requiere a lo más $9n$ lugares para enteros.

La lista sometida al tratamiento de sublistas de $Cand$ (líneas 9 y 22 del algoritmo) es parte de la lista $Cand(C)$ y puede ser manejada como tal. Las listas C , $Cand(C)$ y $Polygon(C)$ no necesariamente tiene que ser guardadas de manera separada, la matriz C puede ser extendida por una columna donde por números enteros puede ser codificada información como el tipo del punto, o

si es candidato, o si es un vértice el polígono final. De esta manera, el algoritmo requiere solamente $4n$ lugares para enteros.

2.3. Complejidad de tiempo. .

La complejidad de tiempo del algoritmo es *lineal en dependencia del número n de puntos del 4-contorno de entrada*. Más precisamente, generar $Cand(C)$ requiere trazar la lista C una vez, tratando cada punto involucra solamente su predecesor y su sucesor inmediatos. Los restantes pasos están basados en trazar $Cand(C)$ que tiene a lo más n points. Los números máximos de veces que cada punto de $Cand(C)$ es visitado, y los cálculos necesitados, son como sigue:

- Si C es dado sólo como lista de coordenadas, se necesita trazar C una vez, realizando esencialmente $2n$ operaciones, para generar los códigos de Freeman y agregarlos a la lista.
- Preprocesar $Cand(C)$ (línea 3) tiene complejidad de orden on , puesto que el índice k tiene valor de a lo más aproximadamente $n/2$, y trasladar la lista requiere n operaciones.
- Cada vez cuando un canto extremo (pico, o puntos subsecuentes ambos convexos, o ambos cóncave) es encontrado, el último $Cand$ -índice del punto final de un canto extremo es actualizado (líneas 12 y 25). Por eso, el punto inicial de una lista para el tratamiento de sublistas de $Cand$ (líneas 9 y 22) siempre está disponible. Durante el tratamiento de sublistas de $Cand$, todos los puntos de dicha sublista son tratados por segunda vez como elementos de $Cand(C)$. Cada tal tratamiento involucra a lo más cuatro otros puntos, donde en el peor caso, todas las condiciones para detectar vértices complementarios tienen que ser checadas. Después de haber determinado el grupo según Definición 16 (lo cual requiere un cálculo simple involucrando tres puntos), hay una tal condición para tres candidatos (Lema 17), seis condiciones para cuatro candidatos (Lema 18), y diez condiciones para cinco candidatos (Lema 19). Trabajando con la lista preprocesada $Cand(C)$ que tiene a lo más n puntos, en el peor de los casos, se necesitan $18n$ tests para determinar todos los vértices prospectivos del polígono.
- El proceso de borrar de la lista $Polygon(C)$ que tiene a lo más n puntos, los puntos que son colieales entre sus predecesores y sucesores inmediatos, vea línea 29 del algoritmo, tiene complejidad de tiempo de orden n , aún si se necesitan varias iteraciones para eso (vea Comentario (e) arriba).

Asumiendo que la lista de entrada C ya incluye los códigos de Freeman, se pueden construir (artificialmente) casos donde casi todos los puntos del 4-contorno resultan ser candidatos, en tales caso el algoritmo alcanza su máxima complejidad de tiempo de orden $21n$. Para los mejores casos donde casi todos los vértices del polígono son puntos finales de cantos localmente extremos, el algoritmo necesita un orden de $3n$ operaciones solamente. Para los 4-contornos usados en experimentos para el presente trabajo, el número de candidatos resultó entre 58.5% y 64%, el número de vértices del polígono entre 8.5% y 14.6%, relativo al número de puntos del 4-contorno de entrada. Es importante enfatizar que todos los datos de entreaa y de salida son números enteros, y que todos los cálculos necesitados pueden efectuarse entre enteros.

3. Ejemplos

Las Figuras 1 y 2 presentan los candidatos y el polígono de un objeto pequeño mostrado ya antes. Las figuras subsecuentes muestran otros objetos, entre ellos algunos cuyos 4-contornos generan curvas débilmente simples, pero no simples.

Mientras que antes, píxeles fueron visualizados como puntos de retícula, ahora usamos también una *representación por cuadrado*, donde cada pixel es mostrado como cuadrado sólido. Entonces, 4-contornos son dibujados en azul. Candidatos aparecen sobrepuestos sobre el 4-contorno azul C , un candidato siendo un punto convexo ($\in C$) se vuelve rojo, un punto cóncaveo ($\in Ext(C)$) verde, un pico convexo ($\in C$) se ve café, y un pico cóncavo ($\in Ext(C)$) recibe color salmón. En otras figuras, el polígono es presentado, entonces éste fue sobrepuesto sobre el 4-contorno el cual entonces aparece en negro, cantos extremos con puntos finales convexos son dibujados completos en rojo,

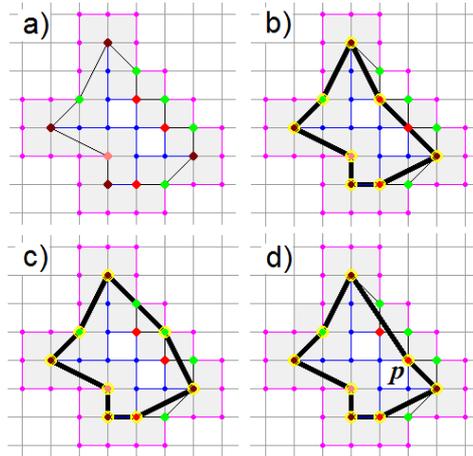


FIGURA 1. Representación por retícula: a) lista de candidatos (convexo - rojo, cóncavo - verde, pico convexo - café, pico cóncavo - salmón), b) vértices del polígono marcados por círculos amarillos, la frontera del polígono marcada en negra para $m = 3$, c) el polígono para $m = 4$, d) el polígono para $m = 5$. Comparación con Figura 5 revela que el polígono no coincide con el MLP, puesto que tiene un vértice adicional marcado como p .

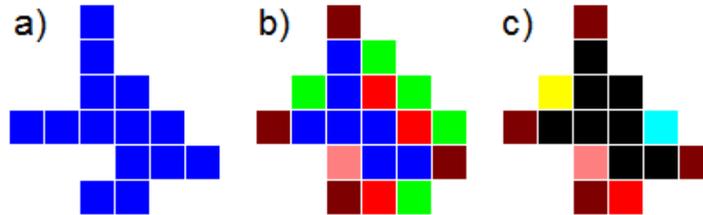


FIGURA 2. Representación por cuadrado: a) C del objeto de Figura 1. b) candidatos. c) vértices del polígono para $m = 5$: cuatro picos convexos en café, un pico cóncavo en salmón, un vértice complementario convexo en azul cielo, un vértice complementario cóncavo en amarillo. Durante el trazado de $Cand$ en sentido del reloj, el punto rojo en la línea inferior line de c) fue encontrado como punto inicial de un canto extremo horizontal, y su vecino izquierdo como punto final de este canto. Más tarde, este punto fue confirmado como pico convexo y por eso, fue marcado nuevo como café.

cantos extremos con puntos finales cóncavos en verde, picos convexos lucen café, picos cóncavos en color salmón. Cada vértice complementario convexo tiene color azul, cada vértice complementario cóncavo es mostrado en amarillo.

En la *representación por retícula*, usada como antes, C es dibujado en azul, $Ext(C)$ en rosa, el poliomino entre C y $Ext(C)$ en algunas figuras es sombreado en gris. Candidatos son presentados por los mismos colores como en la representación por cuadrado, su orden en la lista $Cand(C)$ es visualizado por ténues líneas negras, los vértices del polígono son entonces marcados por círculos amarillos, y la frontera del polígono es marcada por una curva negra.

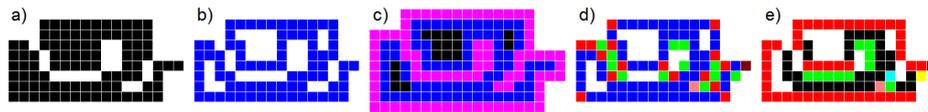


FIGURA 3. Representación por cuadrado: a) objeto, b) C , c) C pintado en azul sobre el objeto negro, luego, $Ext(C)$ fue marcado sobre eso en rosa, d) candidatos marcados sobre el 4-contorno azul, e) el polígono construido para $m = 5$: cantos extremos (rojo y verde), otros vértices extremos (dos picos en café y salmón), dos vértices complementarios (azul cielo, amarillo), todos pintados sobre el 4-contorno negro.

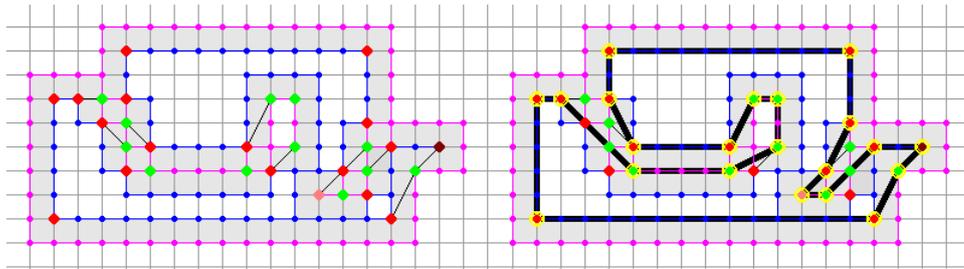


FIGURA 4. Polígono ($m = 5$) del objeto de Figura 3a), vértices del polígono encerrados por círculos amarillos, la frontera del polígono marcada negra.

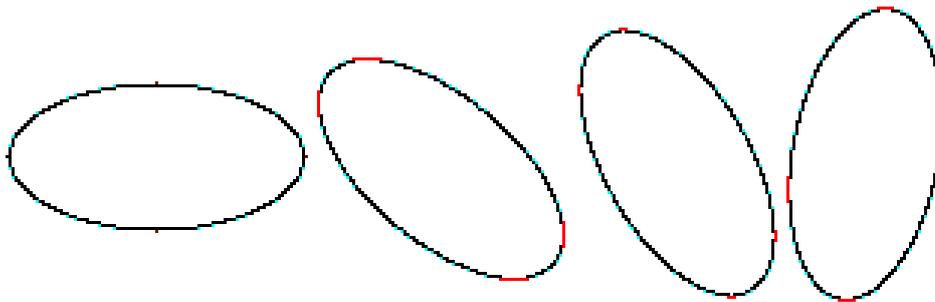


FIGURA 5. Representación por cuadrado: vértices del polígono (convexos complementarios) y cantos localmente extremos (con puntos finales convexos), para versiones rotadas de una elipse (ejes de 150 y de 50 píxeles).



FIGURA 6. Representación por cuadrado: a) objeto, b) C , c) candidatos sobrepuestos sobre C , d) vértices del polígono ($m = 5$) y cantos extremos sobrepuestos sobre el 4-contorno negro. Abajo, la representación por retícula del polígono para $m = 5$.

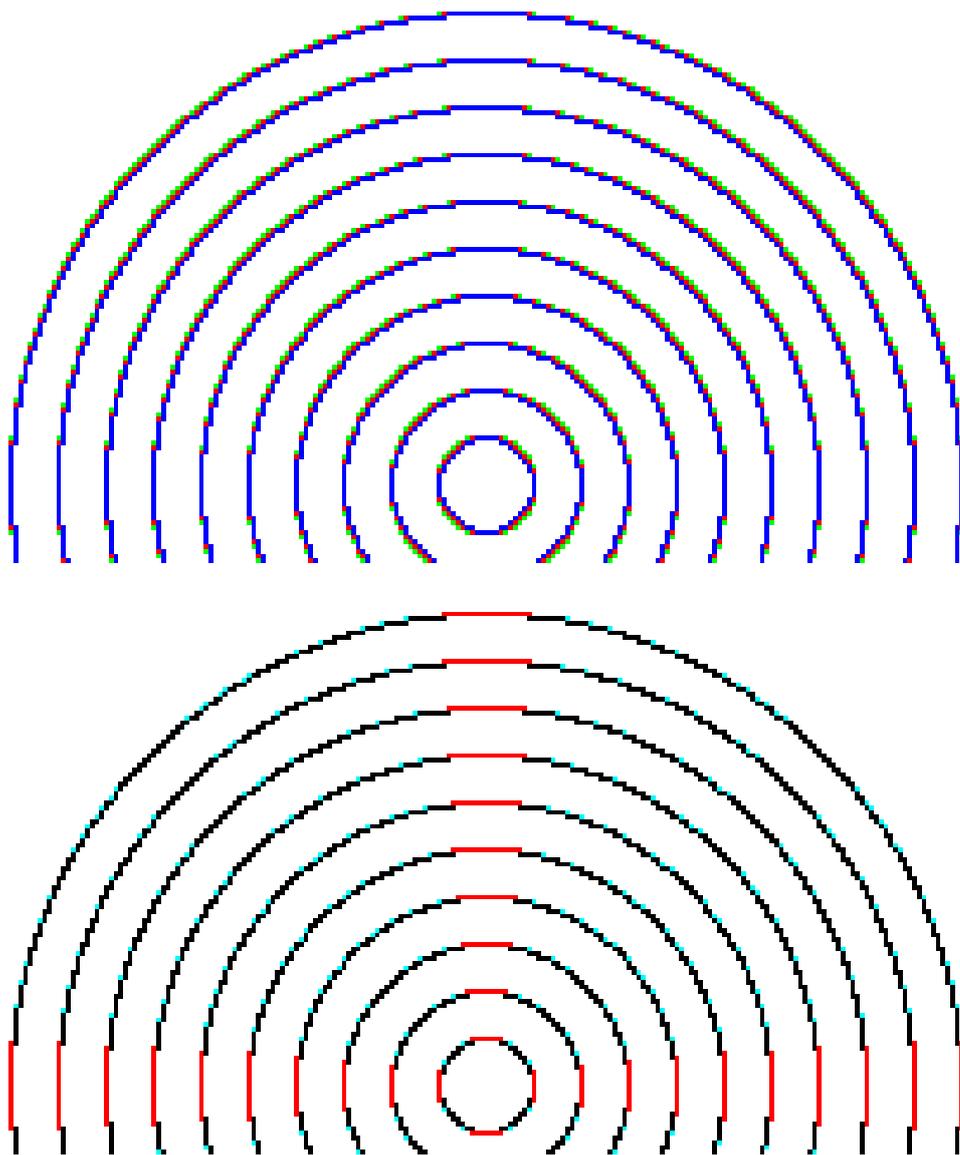


FIGURA 7. Representación por cuadrado: parte superior de los círculos con radios de 10 a 100 píxeles, arriba son marcados los puntos candidatos, abajo son visualizados sus polígonos calculados con $m = 5$.

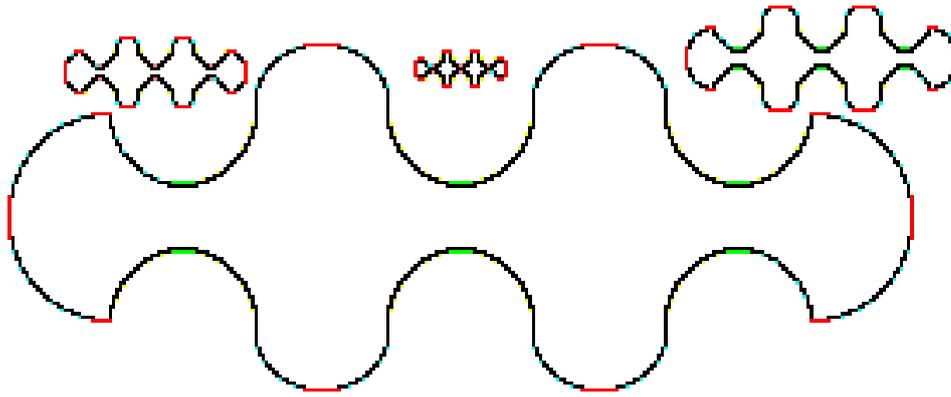


FIGURA 8. Representación por cuadrado: vértices del polígono y cantos localmente extremos, para cuatro versiones escaladas de un objeto con 4-contorno simple.

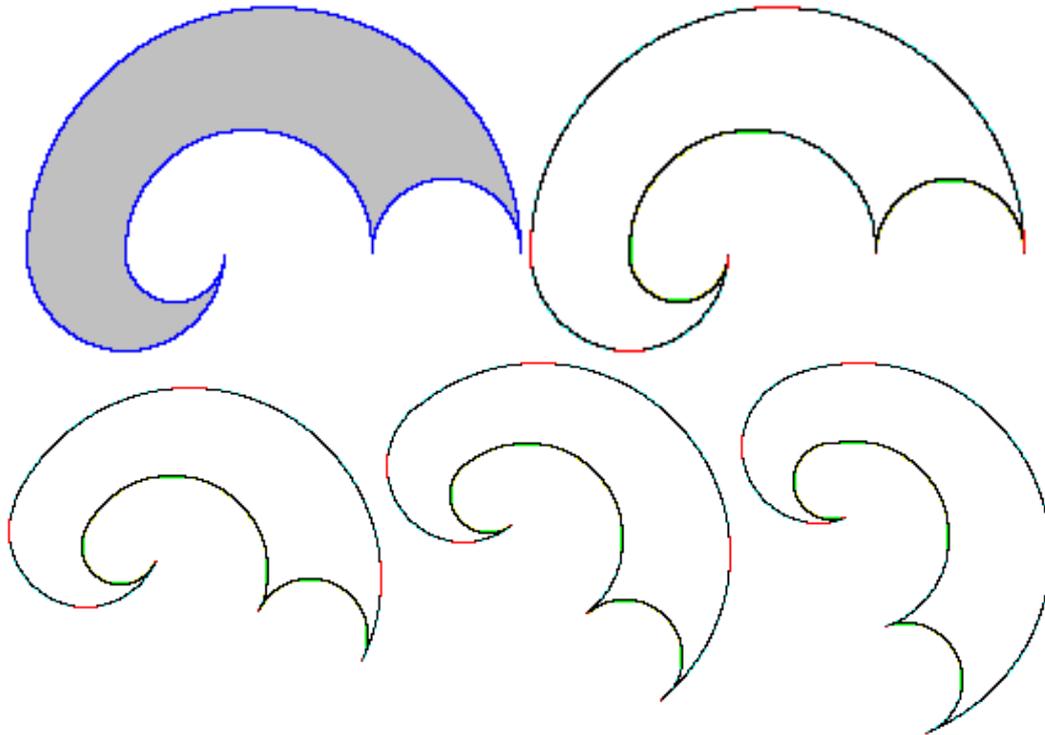


FIGURA 9. Representación por cuadrado: objeto Cx10, con su 4-contorno, y su polígono calculado para $m = 5$. En la segunda línea, el polígono para versiones rotadas del mismo objeto.

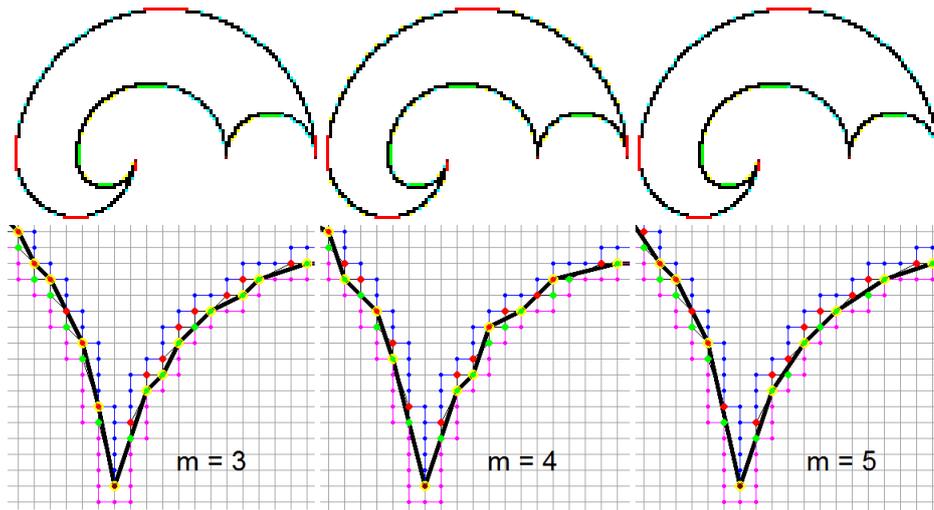


FIGURA 10. Representación por cuadrado del polígono del objeto Cx5, para $m = 3, 4, 5$. Para mejor apreciación, abajo se muestra la representación por retícula, de la región alrededor de uno de los picos.

Experimentos de estimación del perímetro

1. Planteación y preparación de experimentos

Para ilustrar que la aproximación poligonal propuesta en esta tesis tiene utilidad para 4-contornos generales de objetos digitales de tamaños pequeños y medianos, el presente capítulo reporta resultados de experimentos de estimación del perímetro de objetos del plano cuya discretización genera objetos digitales 4-conexos que caben en imágenes de hasta 4000x4000 píxeles, con 4-contornos que contienen hasta 30200 píxeles. La longitud euclidiana de la curva que fronteriza al polígono propuesto, es usada como estimador del perímetro del objeto original del plano euclidiano \mathbb{R}^2 . Los objetos en \mathbb{R}^2 empleados para nuestros experimentos fueron generados a partir de curvas cuya longitud verdadera es calculable mediante fórmulas conocidas, como círculos o arcos circulares, elipses o arcos elipsoidales, segmentos de líneas rectas, y espirales arquimedianas. Las curvas cerradas fueron discretizadas por el método de discretización de retícula (*grid intersection digitization*) [15] y después rellenadas, para así generar objetos digitales 4-conexos. Después, sus 4-contornos fueron obtenidos mediante métodos estándar de seguimiento de contornos en imágenes binarias.

El *error (relativo)* de la estimación del perímetro es calculado como el porcentaje

$$\text{error} = \frac{|\text{perímetro estimado} - \text{perímetro verdadero}|}{\text{perímetro verdadero}} \cdot 100.$$

Debido al método semi-local para determinar los vértices del polígono, no se puede esperar la convergencia del estimador de perímetro bajo aumento de la resolución de discretización. Sin embargo, el trabajo de la presente tesis incluye un análisis del comportamiento del error bajo aumento de la resolución de discretización, o, equivalentemente, bajo escalamientos del objeto original: el objeto es generado en muchas versiones más grandes, y luego discretizado de nuevo. Para objetos cada vez más grandes, también fueron analizadas la varianza del error relativo bajo rotaciones del objeto original, y la *razón de compresión*, dada como el porcentaje

$$\text{razón de compresión} = \frac{|\text{número de píxeles de } C - \text{número de píxeles del polígono}|}{\text{número de píxeles de } C} \cdot 100.$$

2. Estimación de perímetro de objetos con 4-contornos simples

Los experimentos iniciaron con objetos cuyos 4-contornos son curvas digitales simples, con el fin de comprobar que el código del algoritmo determine correctamente al polígono, y para realizar primeras pruebas del comportamiento de perímetros estimados bajo aumento del tamaño del objeto.

- **Círculos:** fueron generados de radios siendo múltiples de 10, entre 10 y 1000 píxeles, y algunos de radios entre 1500 y 2000 píxeles. Figura 7 muestra parte de los círculos de radios entre 10 y 100 píxeles, con sus polígonos. Los errores relativos del perímetro resultaron entre 0.19% y 0.30% para radios entre 300 y 1000 píxeles, y de 0.15% a 0.20% para radios entre 1000 y 2000 píxeles.
- **Elipses:** Se realizaron pruebas con elipses en posición alineada y con elipses rotadas, con diversas combinaciones entre eje mayor y menor entre 50 y 950 píxeles. Los errores principalmente resultaron debajo de 0.1%, con una variación hasta 0.1 si ambos ejes tienen al menos 150 píxeles. Parte de los resultados pueden ser consultadas en las tablas del Apéndice B.

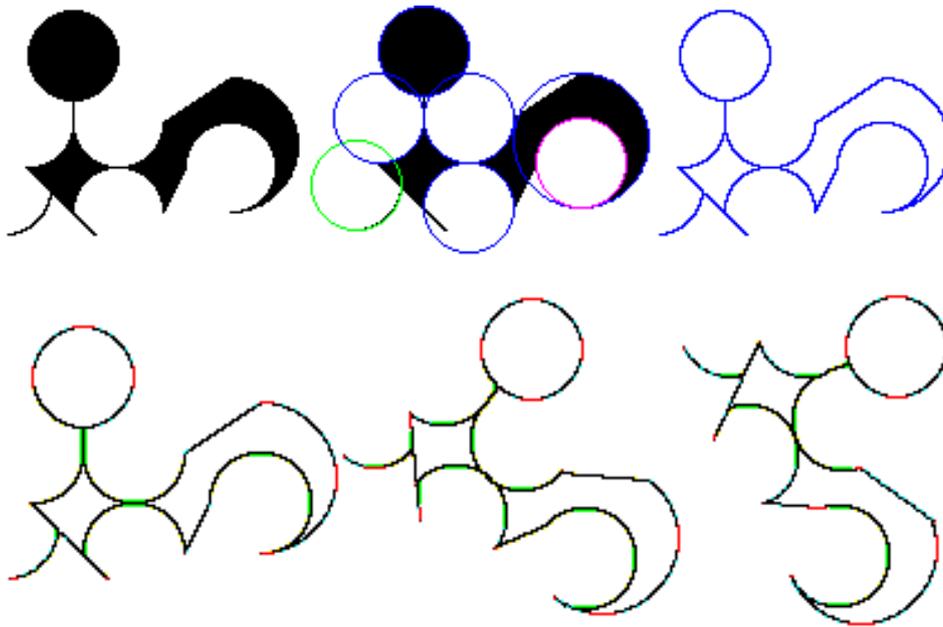


FIGURA 1. Objeto Kx10 en representation por cuadrados. Primera línea: el objeto, una ilustración de su construcción, y su 4-contorno en azul. Segunda línea: su polígono para $m = 5$, ta,bién para dos versiones rotadas del objeto.

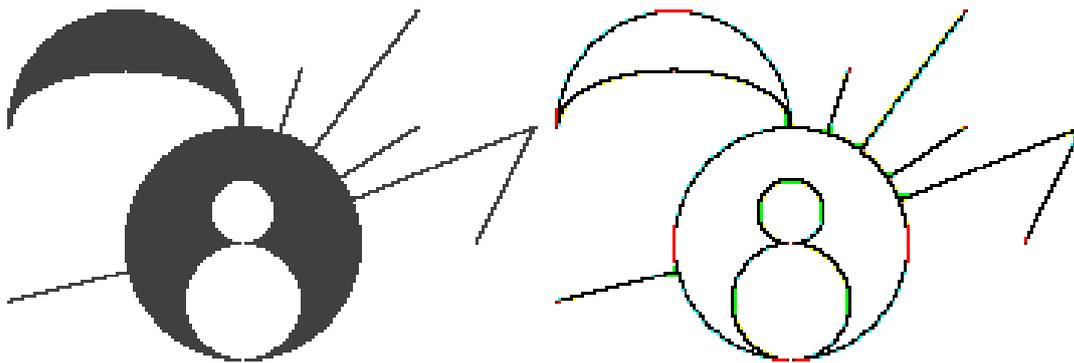


FIGURA 2. Object Mx20, its polygon vertices and extremal edges.

Para calcular el perímetro verdadero de elipses, se utilizó una fórmula de Ramanujan conocida de la literatura: el perímetro de una elipse con medios ejes a y b , puede ser aproximado por

$$\pi(a + b) \left(1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4 - 3h}} \right), \text{ donde } h = \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2}.$$

La fórmula es mencionada, por ejemplo, en página 602 de [1].
(el artículo es disponible en <http://www.jstor.org/stable/2323302>)

3. Objetos con 4-contornos débilmente simples usados para la experimentación

Objeto C: es construido a partir de arcos circulares, vea Figure 10. Su versión magnificada **CxN** tiene una anchura de $20 \cdot N$ píxeles. El objeto fue analizado para $N=10, 15, 20, \dots, 150$ (29 instancias).

Objeto K: es generado a partir de arcos circulares segmentos de líneas rectas, vea Figure 1. Su versión magnificada **KxN** tiene una anchura de $15 \cdot N$ píxeles. El objeto fue analizado para $N=10, 20, \dots, 230, 240, 248$ (25 instancias).

Objeto M: construido a partir de círculos, un arco circular y un arco elipsoidal, y segmentos de líneas rectas, vea Figure 2. La versión magnificada **MxN** tiene una anchura de $N \cdot 10$ píxeles. El objeto fue analizado para $N=30, 40, 50, \dots, 380$ (36 instancias).

Objetos Q1 y Q3: son construidos a partir de dos espirales arquimedianas [38] y un arco circular. Tal espiral es una curva en el plano, dada para coordenadas cartesianas $x, y \in \mathbb{R}$ por

$$x = a \cdot \delta \cdot \cos \delta, \quad y = a \cdot \delta \cdot \sin \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}, \delta \geq 0,$$

donde δ es un parámetro de ángulo en segundos de arco, y $a \in \mathbb{R}, a > 0$, es un parámetro fijo, vea las Figuras 3 y 4. En coordenadas polares (r, δ) , la curva es representada como $r = a \cdot \delta$. La longitud de arco de la curva generada por $\delta \in [0, t]$ puede ser calculada por integración:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\delta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\delta}\right)^2} d\delta \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2 [(\cos \delta - \delta \sin \delta)^2 + (\sin \delta + \delta \cos \delta)^2]} d\delta \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de la curva para $\delta \in [0, t]$ es dada por

$$a \int_0^t \sqrt{1 + \delta^2} d\delta = \frac{a}{2} \left[\delta \sqrt{1 + \delta^2} + \ln \left(\delta + \sqrt{1 + \delta^2} \right) \right]_0^t$$

El objeto Q1 es fronterizado por una espiral arquimediana larga con parámetro a_1 y otra espiral más corta con parámetro $a_2 = a_1 - 10$. La misma idea es usada para el objeto Q3 donde $a_2 - a_1 = 30$. Ambas espirales inician en el punto origen $(0, 0)$ y terminan sobre el eje x . La espiral larga termina en el punto $x = 4\pi a_1$, la corta en $x = 4\pi a_2$. El hueco entre los dos puntos finales es cerrado por un medio círculo, vea Figura 4. Debido a los tres picos muy pronunciados, los 4-contornos, marcados en azul, no son curvas digitales simples. El objeto Q1 es analizado para $a_1 \in \{25, 30, 35, 40, \dots, 150\}$ (26 instancias), Q3 para $a_1 \in \{65, 70, 75, 80, \dots, 150\}$ (18 instancias). El objeto más largo resulta tener una anchura de casi 4000 píxeles.

4. Resultados de experimentos de estimación de perímetro con 4-contornos débilmente simples

Las Figuras 5, 6, 7, 8, y 10, presentan propiedades de los objetos C, K, M, Q1, Q3, para una magnificación creciente de los objetos. Particularmente,

- del objeto CxN, $N \leq 150$, el error relativo del perímetro estimado es menor a 0.1% para $35 \leq N \leq 110$, y menor a 0.123% para $N \geq 25$. Relativo al número de puntos del 4-contorno, el número de candidatos se encuentra cerca de 59%, la razón de compresión (%) está en el intervalo [10.7, 14.3].
- para el objeto KxN, $N \leq 248$, el error del perímetro es menor a 0.05% para $N \geq 130$, y menor a 0.1% para $N \geq 100$ (el 4-contorno C tiene entonces entre 8596 y 21324 puntos). Relativo al número de puntos del 4-contorno, el número de candidatos está entre 62% y 64%, la razón de compresión (%) en el intervalo [8.5, 14.6].

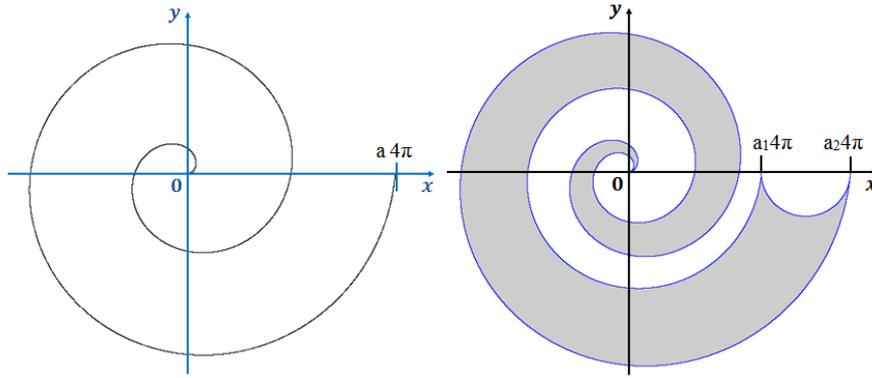


FIGURA 3. Una espiral arquimediana, y el objeto Q1 con $a_1 = 25$.

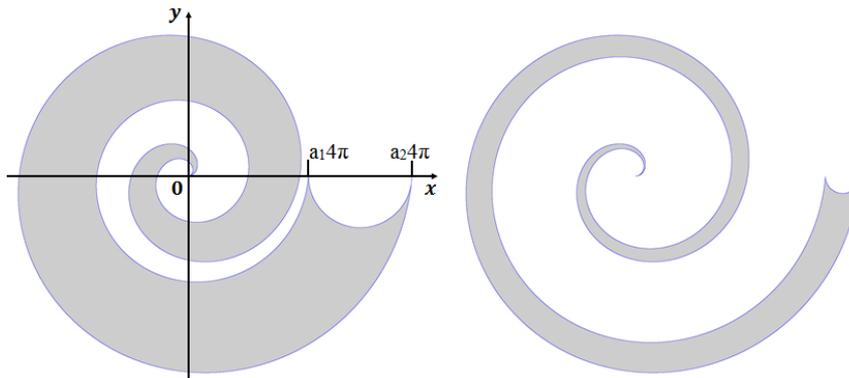


FIGURA 4. Objetos Q3 (izquierda) y Q1 (derecha) con $a_1 = 65$, cada uno de estos objetos caben exactamente en una imagen de 1700x1700 píxeles.

- para el objeto $M \times N$, $N \leq 380$, el error del perímetro es menor a 0.5% para $90 \leq N$, no sobrepasa 0.2% para $160 \leq N$, en este último caso, el 4-contorno tiene entre 12422 y 29526 puntos. Relativo al número de puntos del 4-contorno, el número de candidatos es de 61%, la razón de compresión (%) está en el intervalo [8.8, 12.4].

- para el objeto Q1, el error relativo máximo para todos los tamaños del objeto, es de 0.1553%, el 4-contorno C tiene 4372 puntos para $a_1 = 25$ y 30160 puntos para $a_1 = 150$. Para el objeto Q3, el error máximo es de 0.1488%, C tiene 11066 puntos para $a_1 = 65$, y 28596 puntos para $a_1 = 150$. Para ambos objetos Q1 y Q3, el número de candidatos se encuentra alrededor de 59% , relativo al número de puntos del 4-contorno C , la razón de compresión (%) está en el intervalo [10.4, 11.8].

Todos los objetos estudiados caben dentro de imágenes de hasta 4000x4000 píxeles. Errores, en general, son esperados como grandes cuando la resolución de discretización es demasiado baja para que la forma geométrica del objeto sea bien representada. Pero estos errores bajan lentamente en tendencia, para crecientes magnificaciones de los objetos, hasta que los objetos alcanzan los tamaños medianos estudiados en este trabajo. Se espera que los errores pueden volver a crecer lentamente, para magnificaciones mucho más grandes de los objetos, debido al método semi-local de determinación de los vértices del polígono.

La Tabla 1 resume promedios de los errores relativos, su desviación estándar σ (la raíz cuadrada de la varianza estadística), y el promedio de la razón de compresión, para los objetos estudiados.

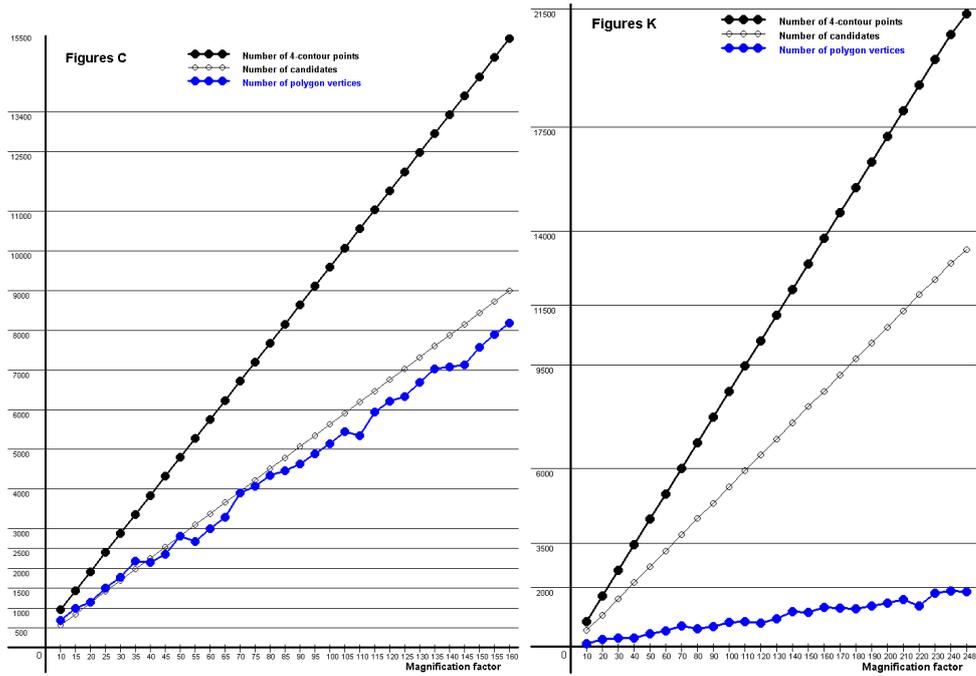


FIGURA 5. Números de puntos del 4-contorno, candidatos, y de vértices del polígono para $m = 5$, de los objetos C y K bajo magnificación.

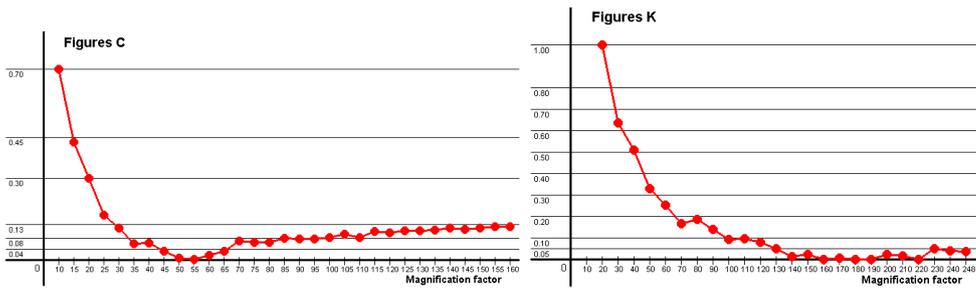


FIGURA 6. Errores relativos del perímetro estimado (porcentaje) para los objetos C y K bajo magnificación (polígono para $m = 5$).

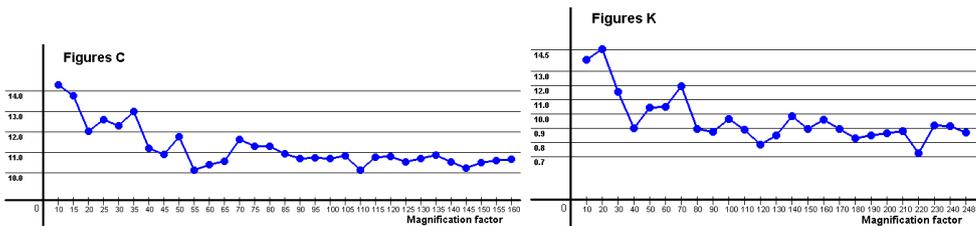


FIGURA 7. Razón de compresión para los objetos C and K bajo magnificación (polígono para $m = 5$).

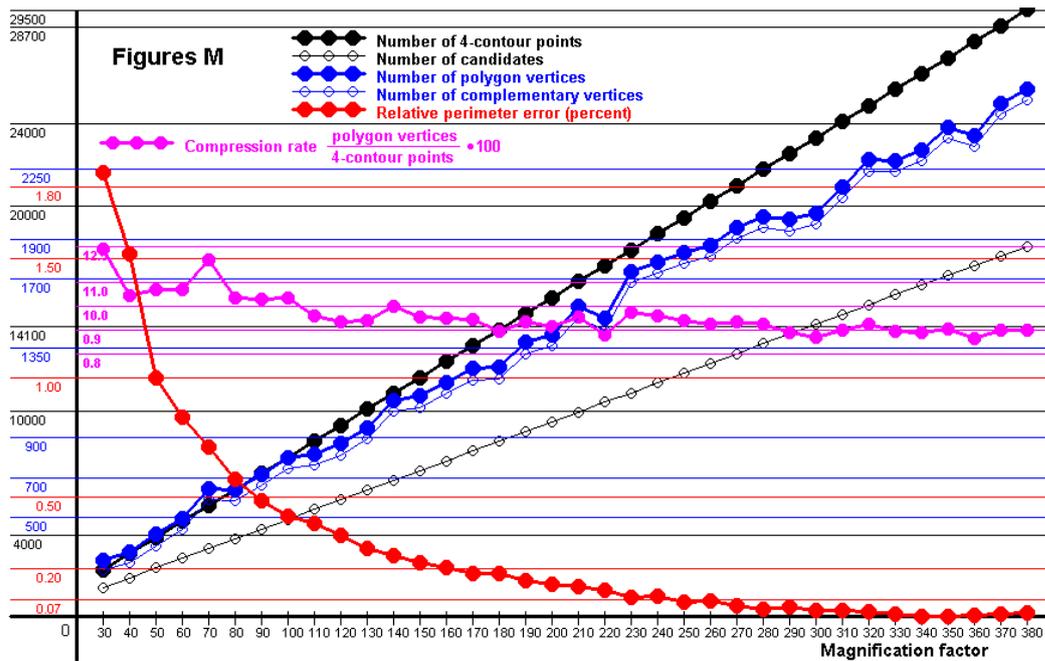


FIGURA 8. Analysis of object M under magnification.

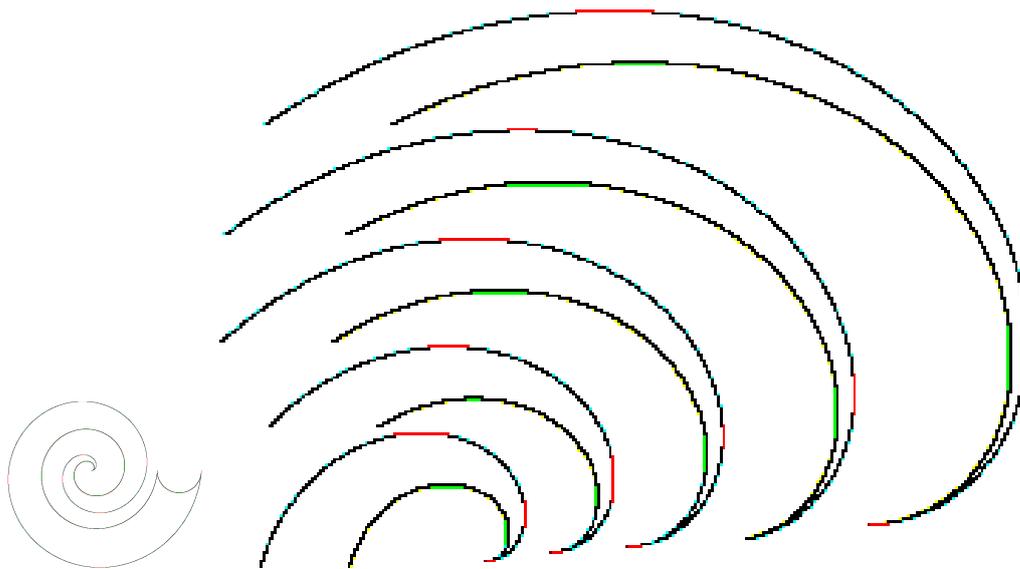


FIGURA 9. Vértices complementarios del polígono para $m = 5$ (marcados en azul cielo y amarillo), cantos extremos (en rojo y verde), y picos convexas (café) del objeto Q1 en la región alrededor de pico central muy pronunciado, para diversas magnificaciones de este objeto.

Las Figuras 11 y 12 visualizan la varianza del error relativo del perímetro, bajo rotaciones del objeto por ángulos de $5, 10, 15, \dots, 90$ grados. Nótese que una escala muy fina es usada para mostrar estos errores, su variación corresponde a la esperada, puesto que aproximadamente similar

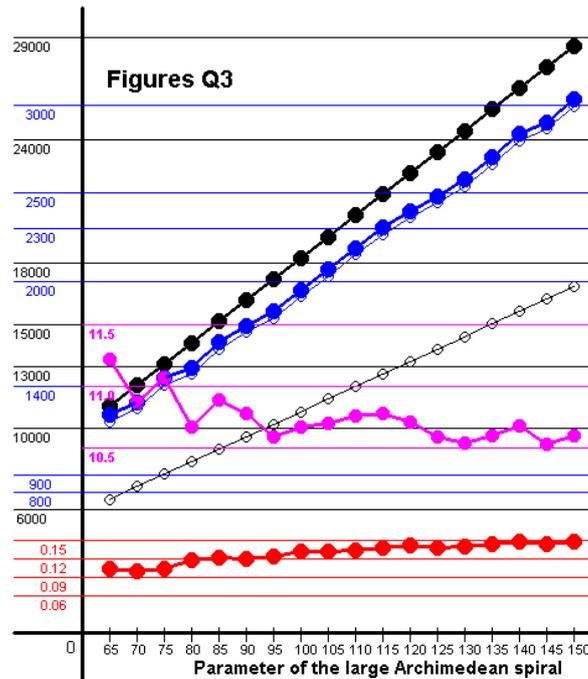
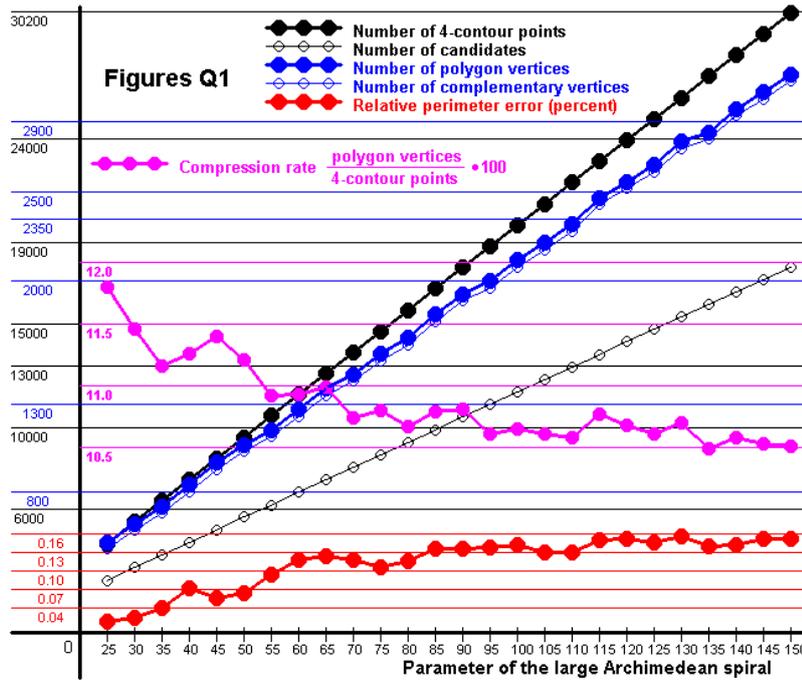


FIGURA 10. Analysis of objects Q1 and Q3 under magnification.

al comportamiento de los números de puntos del 4-contorno y de los candidatos. La Tabla 2 resume los errores y su desviación estándar σ , sobre todas las versiones rotadas, para dos objetos.

Intuitivamente, se espera que los errores relativos del perímetro estimado, decrecen en tendencia, y su comportamiento se hace similar a la convergencia bajo aumento de la resolución de

objeto	error promedio (%)	error mínimo (%)	error máximo (%)	desviación estándar σ del error	razón compresión promedia	razón compresión máxima
C	0.1210	0.0036	0.7002	0.1327	11.2093	14.3006
K	0.1564	0.0003	1.0080	0.2387	9.6137	14.5688
M	0.2915	0.0014	1.5222	0.3275	9.6043	12.3921
Q1	0.1133	0.0180	0.1553	0.0409	10.8568	11.8024
Q3	0.1296	0.0996	0.1488	0.0151	10.7368	11.2236

TABLA 1. Propiedades estadísticas de la estimación del perímetro para los objetos bado estudio, de todas las magnificaciones, usando el poígono para $m = 5$.

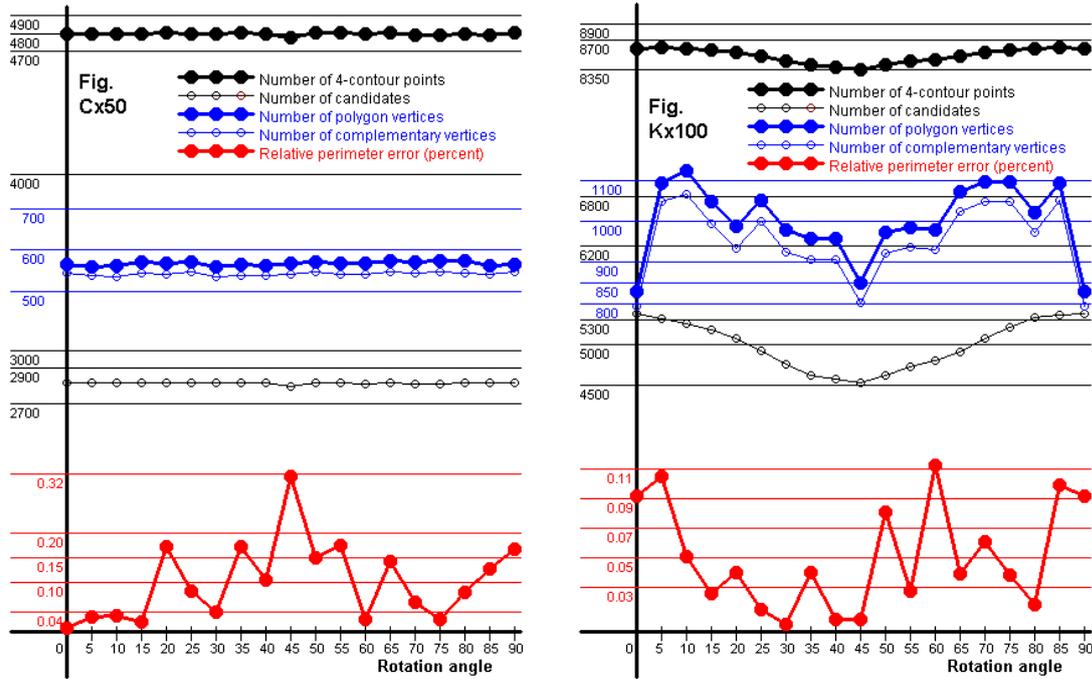


FIGURA 11. Análisis del perímetro para dos objetos bajo rotaciones.

objeto	error promedio (%)	error mínimo (%)	error máximo (%)	desviación estándar σ del error
Cx20	0.1314	0.0050	0.4358	0.1196
Cx50	0.1015	0.0076	0.3154	0.0773
Kx100	0.0505	0.0046	0.1121	0.0349
Kx180	0.0641	0.0003	0.1329	0.0415
Mx150	0.2072	0.1067	0.2906	0.0565
Mx200	0.1093	0.0274	0.2906	0.0424
Mx300	0.0322	0.0011	0.0800	0.0196

TABLA 2. Varianza del error del perímetro bajo rotaciones por todos los ángulos de 5, 10, 15, 20, \dots 90 grados, para algunos objetos.

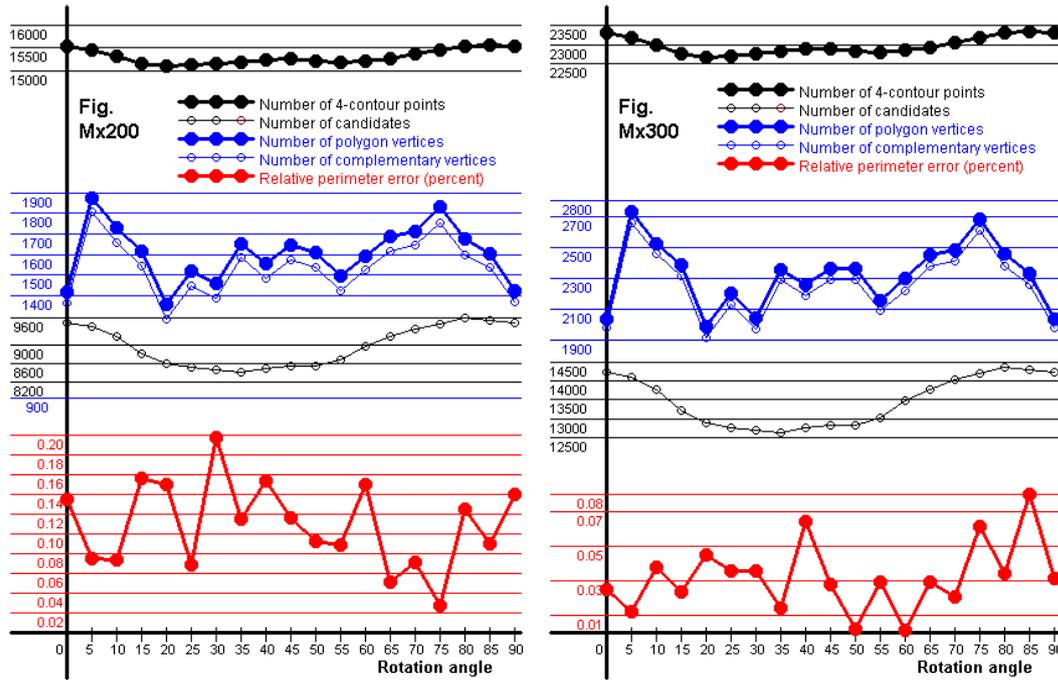


FIGURA 12. Analysis of Object M under rotations.

discretización, entre más grande es m , el número máximo de puntos que participan en los patrones usados para detectar vértices complementarios del polígono. En el mismo proceso de aumentar m , el número de vértices del polígono debería decrecer (relativamente al número de puntos del 4-contorno), lo cual aumentaría la razón de compresión.

Sin embargo, el número de vértices del polígono, y el resultante error relativo del perímetro, no dependen de manera sencilla y solamente de m , sino también de propiedades locales y globales de curvatura del 4-contorno, también pueden depender de la orientación rotacional del objeto.

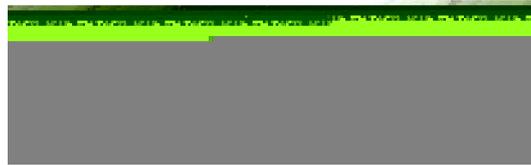
Se espera que valores pequeños como $m = 3$ o $m = 4$, generan un número grande de puntos que potencialmente son vértices complementarios. Sin embargo, es posible que la mayoría de estos puntos sean eliminados durante la construcción de la curva poligonal, debido a que resultan ser colineales entre otros puntos de la curva. Por eso, es posible que para ciertos objetos, el algoritmo para $m = 3$ genere un resultado similar como para $m = 5$ o para otros números impares para m . Para los mismos datos de entrada, $m = 4$ podría generar un resultado de error mucho mayor, puesto que los patrones para cuatro puntos podrían interrumpir ciertas partes largas del 4-contorno, poniendo muchos vértices complementarios que no resultarían colineales con otros. Experimentos usando varios valores para m revelaron que no hay garantía de que, aumentando m solo por uno, resulte en un error menor de la estimación del perímetro. La Tabla 3 ilustra este fenómeno.

Para investigar sobre la estimación del perímetro usando valores m mayores, el conjunto de condiciones para cada m tiene que ser determinado. Luego, experimentos tienen que ser realizados para estos m , para investigar si los errores son esencialmente menores para más grandes m . Para cada nuevo m , el conjunto adicional de condiciones (los "patrones") tiene que ser agregado al algoritmo, eso lo vuelve claramente más tediosos y lento. Recordemos que, una vez que el grupo según Definición 16 fue determinado, se tiene que checar en el algoritmo una condición para detectar vértices complementarios para $m = 3$, seis condiciones adicionales para $m = 4$, y diez condiciones adicionales para $m = 5$ (dando un total de 17 condiciones). Como resultado de nuestras investigaciones, el polígono para $m = 5$ propuesto en esta tesis, parece ser una aproximación para 4-contornos

objeto	número de puntos contorno	número de candi-datos	número vértices polígono $m = 3$	puntos colin. borrados $m = 3$	error relat. (%) $m = 3$	número vértices polígono $m = 4$	puntos colin. borrados $m = 4$	error relat. (%) $m = 4$	número vértices polígono $m = 5$	puntos colin. borrados $m = 5$	error relat. (%) $m = 5$
C											
Cx50	4798	2817	706	710	0.2383	934	19	1.2690	564	271	0.0076
Cx80	7678	4505	1159	1101	0.2924	1499	23	1.4604	867	439	0.0653
Cx100	9598	5629	1411	1411	0.3105	1875	21	1.3316	1027	583	0.0834
K											
Kx80	6876	4320	909	1266	0.1094	1456	20	1.3905	615	624	0.1857
Kx100	8596	5384	1229	1478	0.2037	1787	36	1.5558	828	744	0.0918
Kx150	12896	8088	1797	2262	0.2389	2709	31	1.5682	1152	1155	0.0225
Q1											
$a_1 = 60$	11596	6845	1752	1683	0.3372	2281	35	1.4350	1268	695	0.1172
$a_1 = 120$	23972	14161	3530	3563	0.3675	4721	44	1.4453	2561	1464	0.1518
$a_1 = 140$	28094	16592	4131	4178	0.3678	5521	56	1.4580	2973	1724	0.1412

Cuadro 1: Números específicos de puntos y errores del perímetro, usando el polígono para $m = 3, 4, 5$ para algunos objetos.

generales interesante, todavía fácil a ser calculada, y además, útil y de calidad suficiente para estimar el perímetro de objetos de tamaños medianos.



Conclusiones

La tesis propone un polígono novedoso y presenta un algoritmo para determinar sus vértices, con el fin de aproximar 4-contornos generales correspondientes a curvas poligonales débilmente simples que pueden tener picos o puntos finales, pueden tocarse a sí mismas, o trazar de regreso sobre partes de sí mismas, o tener cavidades delgadas. El polígono propuesto es una versión aproximativa de lo que sería una generalización del polígono de perímetro mínimo (MLP), el cual ha sido definido en la literatura en el contexto de 4-contornos, solamente para el caso de 4-curvas digitales simples, o continuos de retícula simples [7, 14, 15, 24, 32, 33, 10, 11]. La tesis emplea una definición simplificada de una curva generalizada de longitud mínima (MLPC) para 4-contornos generales, no necesariamente simples.

El algoritmo de construcción del polígono fue implementado en una plataforma libre de acceso llamada "Digital Image Analysis System" desarrollada por la Universidad Jena (Alemania), utilizando su lenguaje de programación, y algunos procedimientos de procesamiento de imágenes tales como de seguimiento de contornos. Una implementación en Matlab o Python es planeada para el cercano futuro.

La tesis reporta resultados de experimentación de la estimación del perímetro bajo creciente resolución de discretización (equivalentemente, bajo incremento del tamaño de los objetos). La longitud de la frontera del polígono construido es usado como estimador del perímetro del objeto. Los experimentos arrojaron un comportamiento aceptable de errores relativos para objetos del plano fronterizados por curvas débilmente simples de longitudes conocidas, cuyas versiones discretizadas son objetos 4-conexos del plano digital de tamaños pequeños y medianos, con 4-contornos entre 300 and 30000 píxeles.

El algoritmo propuesto de detección de los vértices del polígono, es semi-local puesto que incluye una técnica similar al amapeamiento de patrones, donde el número de puntos participantes en cada patron es restringido por una cota prefijada. Sin embargo, ninguna restricción es impuesta sobre las distancias entre estos puntos. La tesis propone trabajar con $m = 5$ puntos para participar como máximo en cada patron.

Sería interesante trabajar con valores más grandes para m , por ejemplo, para la estimación del perímetro. Sin embargo, para cada m mayor, un conjunto adicional de patrones tiene que ser involucrado en el algoritmo, lo cual puede aumentar notablemente su complejidad de tiempo, y no garantiza en todo caso errores relativos menores del perímetro estimado. Como conclusión, el polígono para $m = 5$ propuesto en este trabajo, parece ser una aproximación útil e interesante para 4-contornos generales, la cual todavía es fácil de calcular, y a la vez, es suficientemente buena de calidad, para estimar el perímetro de objetos de tamaños medianos.

Bibliografía

- [1] G. Almkvist and B. Berndt. Gauss, landen, ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, pi, and the ladies diary. *The American Mathematical Monthly*, 95:585–608, 1988.
- [2] A.A.A. Aman, A. Sarkar, M. Dutt, and A. Biswas. A linear time combinatorial algorithm to compute the relative orthogonal convex hull of digital objects. *Theoretical Computer Science*, 847:103–121, 2020.
- [3] T. Asano, Y. Kawamura, R. Klette, and K. Obokata. Minimum-length polygons in approximation sausages. In C. Arcelli et al., editor, *Proc. of IWVF4, 4th Int. Workshop on Visual Form*, pages 103–112. Springer, LNCS 2059, Berlin Heidelberg, 2001.
- [4] T. Asano, Y. Kawamura, R. Klette, and K. Obokata. Digital curve approximation with length evaluation. *ICEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E86-A(5):987–994, 2003.
- [5] A. Biswas, P. Bhowmick, and B.B. Bhattacharya. Construction of isothetic covers of a digital object: A combinatorial approach. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 21(4):295–310, 2010.
- [6] Hsien-Chih Chang, J. Erickson, and Chao Xu. Detecting weakly simple polygons. In P. Indyk, editor, *Proc. of SODA 2015, 26th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (USA, 2015)*, volume 3, pages 1657–1672. SIAM (ISBN 978-1-61197-374-7), 2015.
- [7] D. Coeurjolly and R. Klette. Comparative evaluation of length estimators of digital curves. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2):252–258, 2004.
- [8] F. de Vieilleville and J.O. Lachaud. Digital deformable model simulating active contours. In S. Brlek et al., editor, *Proc. of DGCI, Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 203–216. Springer LNCS 5810, Berlin Heidelberg, 2009.
- [9] M. Dutt, A. Biswas, P. Bhowmick, and B.B. Bhattacharya. On finding an orthogonal convex skull of a digital object. *Int. Journal on Imaging Systems and Technology*, 21:14–27, 2011.
- [10] R.C. Gonzalez and R.E. Woods. *Digital Image Processing*. Addison Wesley Comp., USA, reprint 1993 edition, 1992.
- [11] R.C. Gonzalez, R.E. Woods, and S.L. Eddins. *Digital Image Processing using Matlab (The parts of interest for this article are contained as the same in its 2nd edn. 2010)*. Gatesmark Publishing LLC, USA, 3rd edition, 2020.
- [12] B. Grünbaum and G.C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman and Company, USA, 1978.
- [13] R. Klette. Multigrid convergence of geometric features. In G. Bertrand, A. Imiya, and R. Klette, editors, *Digital and Image Geometry*, pages 318–338. Springer, LNCS 2243, Heidelberg, 2002.
- [14] R. Klette, V. Kovalevsky, and B. Yip. On the length estimation of digital curves. In SPIE, editor, *SPIE Proc. of Vision Geometry VIII*, pages 117–129. SPIE Proc. Series, USA, 1999.
- [15] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry - Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Morgan Kaufmann Publisher, USA, 2004.
- [16] R. Klette and B. Yip. The length of digital curves. *Machine Graphics and Vision*, 9:673–703, 2000.
- [17] V. Kovalevsky and S. Fuchs. Theoretical and experimental analysis of the accuracy of perimeter estimates. In W. Förster and S. Ruwiedel, editors, *Robust Computer Vision*, pages 218–242. Wichmann, Karlsruhe, Germany, 1992.
- [18] V.A. Kovalevsky. New definition and fast recognition of digital straight segments and arcs. In *Proc. of 10th Int. Conf on Pattern Recognition, Vol.II*, pages 31–34. IEEE, NJ, USA, 1990.
- [19] J.O. Lachaud and X. Provencal. Two linear-time algorithms for computing the minimum length polygon of a digital contour. *Discrete Applied Mathematics*, 159:2229–2250, 2011.
- [20] F. Li and R. Klette. *Euclidean Shortest Paths, Exact or Approximate Algorithms*. Springer, London, 2011.
- [21] J. Mukhopadhyay et al. *Digital Geometry in Image Processing*. IIT Kharagpur Research Monograph Series, CRC Press, India, 2013.
- [22] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, USA, 2nd edition, 1998.
- [23] T. Pavlidis. *Algorithms for Graphics and Image Processing*. Computer Science Press, USA, 1982.
- [24] X. Provencal and J.O. Lachaud. Two linear-time algorithms for computing the minimum length polygon of a digital contour. In S. Brlek, C. Reutenauer, and X. Provencal, editors, *Proc. of DGCI, Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 104–117. Springer, LNCS 5810, Berlin Heidelberg, 2009.
- [25] T. Roussillon and I. Sivignon. Faithful polygonal representation of the convex and concave parts of a digital curve. *Pattern Recognition*, 44:2693–2700, 2011.

- [26] T. Roussillon and I. Sivignon. Local convexity properties of digital curves. *Technical Report*, at <https://liris.cnrs.fr/Documents/Liris-4798.pdf> (accessed Dec.2, 2020), pages 1–22, Aug. 2010.
- [27] T. Roussillon, L. Tougne, and I. Sivignon. What does digital straightness tell about digital convexity ? In P. Wiederhold and R.P. Barneva, editors, *Proc. of IWCIA, Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis IWCIA*, pages 43–55. Springer, LNCS 5810, Berlin Heidelberg, 2009.
- [28] J. Sklansky. Recognition of convex blobs. *Pattern Recognition*, 2:3–10, 1970.
- [29] J. Sklansky. Measuring cavity on a rectangular mosaic. *IEEE Trans. on Computing*, C-21(12):1355–1364, 1972.
- [30] J. Sklansky, R.L. Chazin, and B.J. Hansen. Minimum perimeter polygons of digitized silhouettes. *IEEE Trans. on Computing*, 21(3):260–268, 1972.
- [31] J. Sklansky and D.F. Kibler. A theory of nonuniformly digitized binary pictures. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 6(9):637–647, 1976.
- [32] F. Sloboda and J. Stoer. On piecewise linear approximation of planar jordan curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 55:369–383, 1994.
- [33] F. Sloboda, B. Zatco, and J. Stoer. On approximation of planar one-dimensional continua. In R. Klette, A. Rosenfeld, and F. Sloboda, editors, *Advances in Digital and Computational Geometry*, pages 113–160. Springer, Singapore, 1998.
- [34] M. Tajine and A. Daurat. On local definitions of length of digital curves. In Nyström et al., editor, *Proc. of DGCI, Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 114–123. Springer, LNCS 2886, Berlin Heidelberg, 2003.
- [35] G.T. Toussaint. Computing geodesic properties inside a simple polygon. *Revue d’Intelligence Artificielle*, 3(2):265–278, 1989.
- [36] M. Villafuerte and P. Wiederhold. A polygonal approximation for general 4-contours corresponding to weakly simple curves (accepted nov. 9, 2021). *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(0):xx–xx, 2022.
- [37] K. Voss. *Discrete images, objects, and functions in \mathbb{Z}^n* . Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.
- [38] Eric W. Weisstein. Archimedes’ Spiral. *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/ArchimedesSpiral.html> (accessed Oct. 2021), 2021.
- [39] E.W. Weisstein. Polygon. *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/Polygon.html>, 2021.
- [40] E.W. Weisstein. Polyomino. *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html>, 2021.
- [41] P. Wiederhold. Digital geometry. In P. Laplante, editor, *Encyclopedia of Computer Science and Technology (2nd Ed.)*, volume I, pages 364–376. Taylor and Francis Group, 2016.
- [42] P. Wiederhold and H. Reyes. Relative convex hull determination from convex hulls in the plane. In R.P. Barneva et al., editor, *Proc. of IWCIA, Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (India, 2015)*, pages 1–15. Springer LNCS 9448, Switzerland, 2015.

Lemas extendidas y demostraciones matemáticas

1. Demostración de Lema 15

Demostración:

El objetivo es obtener para cada situación, una condición equivalente a $\overline{c_1c_3} \not\subset M$. Debido a las similitudes entre las situaciones, es suficiente analizar la situación de tipo a), las otras tendrían que ser tratadas de manera análoga.

Supongamos primero que c_1 es convexo, entonces también c_3 . Entonces, en cualquier situación de tipo a), $y_2 = y_1 + 1$, $x_3 = x_2 + 1$, $x_2 \geq x_1$, $y_3 \geq y_2$, recuerde la Figura 6. Si $x_2 = x_1$ o $y_3 = y_2$, entonces claro que $\overline{c_1c_3} \subset M$, vea Figura 1 que incluye al caso especial ($x_2 = x_1 \wedge y_3 = y_2$). En consecuencia, $(x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3)$ es una condición necesaria para $\overline{c_1c_3} \not\subset M$. Recuerde que $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}^2$, la condición significa $(x_1 + 1 \leq x_2 \wedge y_2 + 1 \leq y_3)$.

Más generalmente, $\overline{c_1c_3} \not\subset M$ si y sólo si la pendiente de la línea recta $\overrightarrow{c_1c_2}$ es estrictamente menor a la pendiente de $\overline{c_1c_3}$, es decir, si $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$. Eso es equivalente a $1 + \frac{1}{x_2 - x_1} < y_3 - y_1$, porque $y_2 - y_1 = 1$, $x_3 = x_2 + 1$, y asumiendo las condiciones obtenidas antes, es decir, $x_1 + 1 \leq x_2$ y $y_3 \geq y_2 + 1$ que implica $y_3 - y_1 \geq 2$. Puesto que $x_2 - x_1 \geq 1$, el lado izquierdo de la última desigualdad no sobrepasa 2, por lo tanto, la desigualdad se cumple cuando $y_3 - y_1 > 2$. Sólo falta analizar la desigualdad para el caso $y_3 - y_1 = 2$ que es equivalente a $x_2 - x_1 \geq 2$. Ya antes habíamos requerido que $x_2 - x_1 \geq 1$, entonces, la única situación en la cual, la condición para $\overline{c_1c_3} \not\subset M$ no está satisfecha, ocurre cuando $x_2 - x_1 = 1$. Pero $(x_2 - x_1 = 1 \wedge y_3 - y_1 = 2)$ corresponde al caso diagonal de situación a), con ningún punto colineal entre c_1, c_2, c_3 , donde c_1, c_2, c_3 son colineales y $c_2 \in \overline{c_1c_3} \subset M$. En este caso, c_2 no es necesitado como nuevo vértice, vea Figura 1. Como resultado, la condición para detectar c_2 como vértice complementario es as follows: $\overline{c_1c_3} \not\subset M \iff (x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge \text{not}(x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3))$.

Si c_1 es cóncavo entonces también c_3 lo es, y $x_2 = x_1 + 1$, $y_3 = y_2 + 1$, $y_2 \geq y_1$, $x_3 \geq x_2$. Nótese que todas las suposiciones y afirmaciones para este caso pueden ser obtenidas simplemente intercambiando todas las coordenadas x por las y , y al revés, en las expresiones del caso que c_1 es convexo. Eso se debe a que cada situación con c_1 cóncavo es obtenida a partir de la situación únicamente determinada correspondiente con c_1 convexo, aplicando la función espejo por una línea recta paralela al eje x , seguido por una rotación por 90 grados, similarmente como es mostrado para

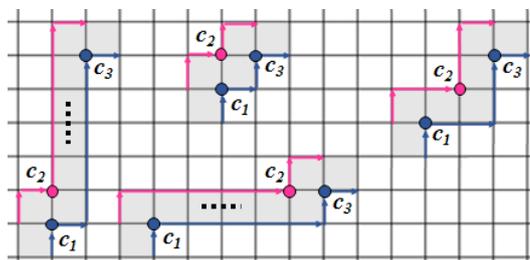


FIGURA 1. Demostración de Lema 15, situaciones de tipo a), c_1 convexo, $\overline{c_1c_3} \subset M$.

cinco candidatos en Figura 12. Por lo tanto, la demostración para c_1 cóncavo sería completamente análoga al caso que c_1 es convexo. □

2. Lema sobre la detección de vértices complementarios del polígono, para cuatro puntos candidatos, con su demostración

Lema 20. Sean c_1, c_2, c_3, c_4 cualesquiera puntos subsecuentes de la lista $Cand(C)$ que alternadamente son convexos y cóncavos, además, donde c_2 y c_3 no son picos. Denotemos por M el conjunto unión del poliomino de C , además, $c_i = (x_i, y_i)$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Para dada una de los ocho posibles tipos de situaciones, si cualquiera de las siguientes seis condiciones se cumple, entonces $\overline{c_1 c_4} \not\subset M$. Si ninguna condición se satisface, entonces $\overline{c_1 c_4} \subset M$. Para el caso que alguna condición se cumple, la indicación abajo afirma cuál $p \in \{c_2, c_3\}$ satisface que $\overline{c_1 p} \cup \overline{p c_4}$ está en M y tiene la longitud mínima entre las dos opciones para p .

Para el caso (c_1 convexo, c_2 cóncavo, c_3 convexo, c_4 cóncavo):

a) Si C avanza en dirección NE, es decir, $y_1 + 1 = y_2, x_2 + 1 = x_3, y_3 + 1 = y_4$,

(1) si $x_1 = x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 < x_4$ entonces $p = c_3$.

(2a) si $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_4 - x_2 < x_2 - x_1$ entonces $p = c_2$.

(2b) si $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_4 - x_3 > x_3 - x_1$ entonces $p = c_3$.

(3) si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_4 - x_3 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

(4a) si $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3 \wedge x_3 = x_4$ entonces $p = c_2$.

(4b) si $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3 \wedge x_4 - x_3 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

b) Si C avanza en dirección SE, es decir, $x_1 + 1 = x_2, y_2 - 1 = y_3, x_1 + 1 = x_2$,

(1) si $y_1 = y_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge y_3 > y_4$ entonces $p = c_3$.

(2a) si $y_1 > y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_2 - y_4 < y_1 - y_2$ entonces $p = c_2$.

(2b) si $y_1 > y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 - y_4 > y_1 - y_3$ entonces $p = c_3$.

(3) si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 - y_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

(4a) si $y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 + 1 = x_3 \wedge y_3 = y_4$ entonces $p = c_2$.

(4b) si $y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 + 1 = x_3 \wedge y_3 - y_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

c) Si C avanza en dirección SW, es decir, $y_1 - 1 = y_2, x_2 - 1 = x_3, y_3 - 1 = y_4$,

(1) si $x_1 = x_2 \wedge y_2 > y_3 \wedge x_3 > x_4$ entonces $p = c_3$.

(2a) si $x_1 > x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_2 - x_4 < x_1 - x_2$ entonces $p = c_2$.

(2b) si $x_1 > x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 - x_4 > x_1 - x_3$ entonces $p = c_3$.

(3) si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 - x_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

(4a) si $x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 - 1 = y_3 \wedge x_3 = x_4$ entonces $p = c_2$.

(4b) si $x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 - 1 = y_3 \wedge x_3 - x_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

d) Si C avanza en dirección NW, es decir, $x_1 - 1 = x_2, y_2 + 1 = y_3, x_3 - 1 = x_4$,

(1) si $y_1 = y_2 \wedge x_2 > x_3 \wedge y_3 < y_4$ entonces $p = c_3$.

(2a) si $y_1 < y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_4 - y_2 < y_2 - y_1$ entonces $p = c_2$.

(2b) si $y_1 < y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_4 - y_3 > y_3 - y_1$ entonces $p = c_3$.

(3) si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_4 - y_3 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

(4a) si $y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 - 1 = x_3 \wedge y_3 = y_4$ entonces $p = c_2$.

(4b) si $y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 - 1 = x_3 \wedge y_4 - y_3 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

Para el caso (c_1 cóncavo, c_2 convexo, c_3 cóncavo, c_4 convexo):

a) Si C avanza en dirección NE, es decir, $x_1 + 1 = x_2, y_2 + 1 = y_3, x_3 + 1 = x_4$,

(1) si $y_1 = y_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge y_3 < y_4$ entonces $p = c_3$.

(2a) si $y_1 < y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_4 - y_2 < y_2 - y_1$ entonces $p = c_2$.

(2b) si $y_1 < y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_4 - y_3 > y_3 - y_1$ entonces $p = c_3$.

(3) si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_4 - y_3 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

(4a) si $y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 + 1 = x_3 \wedge y_3 = y_4$ entonces $p = c_2$.

- (4b) si $y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 + 1 = x_3 \wedge y_4 - y_3 \geq 2$ entonces $p = c_3$.
- b) Si C avanza en dirección SE, es decir, $y_1 - 1 = y_2, x_2 + 1 = x_3, y_3 - 1 = y_4$,
- (1) si $x_1 = x_2 \wedge y_2 > y_3 \wedge x_3 < x_4$ entonces $p = c_3$.
- (2a) si $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_2 - x_1 > x_4 - x_2$ entonces $p = c_2$.
- (2b) si $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 - x_1 < x_4 - x_3$ entonces $p = c_3$.
- (3) si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 - x_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.
- (4a) si $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 - 1 = y_3 \wedge x_3 = x_4$ entonces $p = c_2$.
- (4b) si $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 - 1 = y_3 \wedge x_4 - x_3 \geq 2$ entonces $p = c_3$.
- c) Si C avanza en dirección SW, es decir, $x_1 - 1 = x_2, y_2 - 1 = y_3, x_3 - 1 = x_4$,
- (1) si $y_1 = y_2 \wedge x_2 > x_3 \wedge y_3 > y_4$ entonces $p = c_3$.
- (2a) si $y_1 > y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_1 - y_2 > y_2 - y_4$ entonces $p = c_2$.
- (2b) si $y_1 > y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_1 - y_3 < y_3 - y_4$ entonces $p = c_3$.
- (3) si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 - y_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.
- (4a) si $y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 - 1 = x_3 \wedge y_3 = y_4$ entonces $p = c_2$.
- (4b) si $y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 - 1 = x_3 \wedge y_3 - y_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.
- d) Si C avanza en dirección NW, es decir, $y_1 + 1 = y_2, x_2 - 1 = x_3, y_3 + 1 = y_4$,
- (1) si $x_1 = x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 > x_4$ entonces $p = c_3$.
- (2a) si $x_1 > x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_1 - x_2 > x_2 - x_4$ entonces $p = c_2$.
- (2b) si $x_1 > x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_1 - x_3 < x_3 - x_4$ entonces $p = c_3$.
- (3) si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 - x_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.
- (4a) si $x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3 \wedge x_3 = x_4$ entonces $p = c_2$.
- (4b) si $x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3 \wedge x_3 - x_4 \geq 2$ entonces $p = c_3$.

Demostración:

El objetivo es obtener para cada tipo de situación, todas las condiciones que garantizan que $\overline{c_1 c_4} \not\subset M$, suponiendo que $\overline{c_1 c_3} \subset M$. Es suficiente analizar situación a), todas las situaciones restantes pueden ser tratadas de manera análoga.

Asumimos primero que c_1 es convexo, entonces también c_3 lo es, y cada situación de tipo a) es caracterizada por $y_1 + 1 = y_2$ y $x_2 + 1 = x_3$, y también satisface $y_3 + 1 = y_4$, $x_1 \leq x_2$, $y_2 \leq y_3$, $x_3 \leq x_4$. Lema 15 implica que $\overline{c_1 c_3} \subset M$ si y sólo si $\text{not}(x_1 < x_2) \vee \text{not}(y_2 < y_3) \vee (x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3)$, lo cual es equivalente a $(x_1 = x_2) \vee (y_2 = y_3) \vee (x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3)$. Vamos a analizar todas las situaciones para las cuales, la última condición consistiendo de tres expresiones, es verdad. Eso con el fin de encontrar condiciones para $\overline{c_1 c_4} \not\subset M$, y en dado caso, determinar $p \in \{c_2, c_3\}$ tal que la curva $\overline{c_1 p} \cup \overline{p c_4}$ es contenida en M y es la más corta, entre las dos opciones para p .

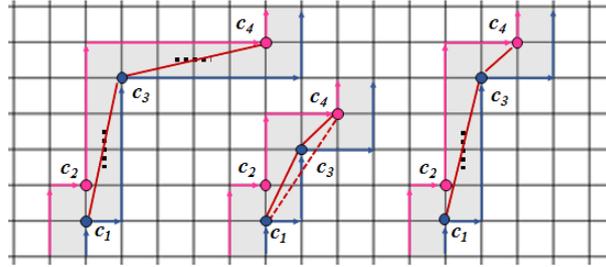


FIGURA 2. Demostración de Lema 20, caso a), c_1 convexo, $x_1 = x_2$.

(i) Supongamos $(x_1 = x_2)$, recuerde que también $y_1 + 1 = y_2$, $x_2 + 1 = x_3$, $y_3 + 1 = y_4$, $y_2 \leq y_3$, $x_3 \leq x_4$, vea Figura 2. El caso $(y_2 = y_3)$ será tratado más tarde, ahora sea $(y_2 < y_3)$. Evidentemente $\overline{c_1 c_4} \subset M$ si $x_3 = x_4$. Asumimos ahora que $x_3 < x_4$. El punto c_2 es irrelevante para el problema puesto

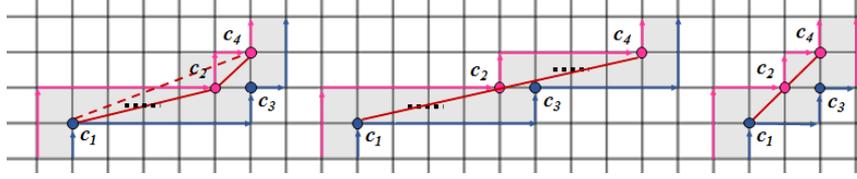


FIGURA 3. Demostración de Lema 20, caso a), c_1 convexo, $y_2 = y_3$.

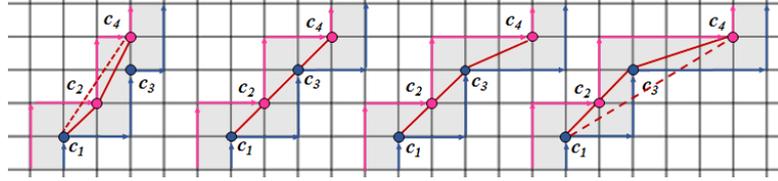


FIGURA 4. Demostración de Lema 20, caso a), c_1 convexo, $(x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3)$.

que no restringe el segmento $\overline{c_1c_4}$. Entonces, solamente $p = c_3$ podría ser necesitado como vértice complementario. Claro que $\overline{c_1c_4} \not\subset M$ siempre cuando la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_3}$ sobrepasa estrictamente la pendiente de $\overrightarrow{c_3c_4}$. Pero eso es verdad bajo las suposiciones: $x_4 \geq x_3 + 1$ implica que la pendiente de $\overrightarrow{c_3c_4}$ es menor o igual a 1, $y_3 \geq y_2 + 1 = (y_1 + 1) + 1 = y_1 + 2$ y $x_3 = x_2 + 1 = x_1 + 1$ implican que la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_3}$ es mayor o igual a 2. En consecuencia, la condición para definir c_3 como vértice complementario, es dada por $(x_1 = x_2) \wedge (x_3 = x_4) \wedge (y_2 < y_3)$. Eso comprueba condición (1) del lema.

(ii) Supongamos que $(y_2 = y_3)$, recuerde que también $y_1 + 1 = y_2$, $x_2 + 1 = x_3$, $y_3 + 1 = y_4$, $x_1 \leq x_2$, $x_3 \leq x_4$, vea Figura 3. El caso $(x_1 = x_2)$ será tratado más tarde, ahora sea $(x_1 < x_2)$. Figura 3 muestra que

– $\overline{c_1c_4} \not\subset M$ si la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_2}$ es estrictamente menor que la pendiente de $\overrightarrow{c_2c_4}$, en este caso, solamente $p = c_2$ asegura que $\overline{c_1p} \cup \overline{pc_4} \subset M$.

– $\overline{c_1c_4} \not\subset M$ si la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_3}$ estrictamente sobrepasa la pendiente de $\overrightarrow{c_3c_4}$, en este caso, solamente $p = c_3$ asegura que $\overline{c_1p} \cup \overline{pc_4} \subset M$.

La condición para definir $p = c_2$ es obtenida como sigue, tomando en cuenta que $x_2 - x_1 > 0$, $y_2 - y_1 = 1$, $x_4 - x_3 \geq 1 > 0$, y $y_4 - y_3 = y_4 - y_2 = 1$,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \iff x_4 - x_2 < x_2 - x_1.$$

La condición para definir $p = c_3$ es obtenida como

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} > \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \iff x_4 - x_3 > x_3 - x_1.$$

Resumiendo, $(y_2 = y_3) \wedge (x_1 < x_2) \wedge (x_4 - x_2) < (x_2 - x_1)$ es la condición para definir $p = c_2$, y $(y_2 = y_3) \wedge (x_1 < x_2) \wedge (x_4 - x_3) > (x_3 - x_1)$ lleva a definir $p = c_3$. Eso demuestra (2a) y (2b) del lema.

(iii) Supongamos que $(x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3)$, recuerde que también $y_1 + 1 = y_2$, $x_2 + 1 = x_3$, $y_3 + 1 = y_4$, $x_1 \leq x_2$, $y_2 \leq y_3$, $x_3 \leq x_4$. Eso es el caso diagonal donde $c_2 \in \overline{c_1c_3}$, trivialmente también $(x_1 < x_2)$ y $(y_2 < y_3)$. De Figura 4 es claro que $\overline{c_1c_4} \subset M$ si $x_4 = x_3 + 1$, puesto que entonces c_1, c_2, c_3, c_4 son colineales. Además,

– $\overline{c_1c_4} \not\subset M$ si $x_4 = x_3$, puesto que entonces, la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_4}$ es estrictamente mayor a 1. En este caso, ambos $p = c_2$ y $p = c_3$ implican que $\overline{c_1p} \cup \overline{pc_4} \subset M$. Sin embargo, la curva $\overline{c_1c_2} \cup \overline{c_2c_4}$ tiene longitud $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ mientras que $\overline{c_1c_3} \cup \overline{c_3c_4}$ tiene la longitud mayor $2\sqrt{2} + 1$. Por lo tanto, la condición

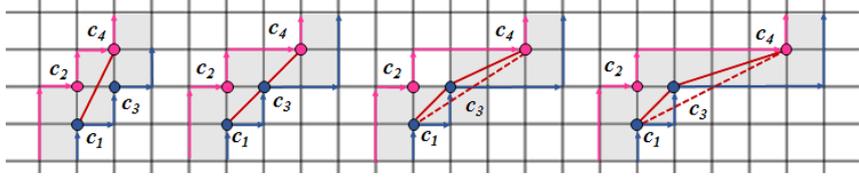


FIGURA 5. Demostración de Lema 20, caso a), c_1 convexo, $(x_1 = x_2) \wedge (y_2 = y_3)$.

$(x_1 + 1 = x_2) \wedge (y_2 + 1 = y_3) \wedge (x_3 = x_4)$ lleva a definir $p = c_2$ como vértice complementario. Eso confirma (4a) del lema.

– $\overline{c_1 c_4} \notin M$ si $x_4 \geq x_3 + 2$, puesto que entonces, la pendiente de $\overline{c_1 c_4}$ es estrictamente menor a 1. En este caso, solamente $p = c_3$ garantiza que $\overline{c_1 p} \cup \overline{p c_4} \subset M$. Eso comprueba (4b) del lema.

(iv) Supongamos que $(x_1 = x_2)$ y $(y_2 = y_3)$, recuerde que también $y_1 + 1 = y_2$, $x_2 + 1 = x_3$, $y_3 + 1 = y_4$, $x_3 \leq x_4$, vea Figura 5. Claro que $x_4 = \{x_3, x_3 + 1\}$ implica $\overline{c_1 c_4} \subset M$. Pero para $x_4 \geq x_3 + 2$, la pendiente de $\overline{c_3 c_4}$ es estrictamente menor a 1 lo cual es la pendiente de $\overline{c_1 c_3}$. Ambos $p = c_2$ y $p = c_3$ aseguran que $\overline{c_1 p} \cup \overline{p c_4} \subset M$ pero la curva $\overline{c_1 c_2} \cup \overline{c_2 c_4}$ es más larga que $\overline{c_1 c_3} \cup \overline{c_3 c_4}$. Por eso, la condición $(x_1 = x_2) \wedge (y_2 = y_3) \wedge (x_4 - x_3 \geq 2)$ lleva a definir $p = c_3$ como vértice complementario. Eso demuestra (3) del lema.

(v) Las tres expresiones $[(x_1 = x_2) \wedge (x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3)]$, $[(y_2 = y_3) \wedge (x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3)]$, y $[(x_1 = x_2) \wedge (y_2 = y_3) \wedge (x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3)]$, no pueden ser verdaderas. Por eso, ya no se necesita estudiar más situaciones, no hay más condiciones que implican $\overline{c_j c_{j+2}} \notin M$. Por lo tanto, si ninguna condición enlistada en el lema como (1), (2a), (2b), (3), (4a), o, (4b), es cumplida, entonces $\overline{c_j c_{j+2}} \subset M$.

En caso que c_1 es cóncavo, también c_3 lo es, y toda situación del tipo a) es caracterizada por $x_1 + 1 = x_2$ y $y_2 + 1 = y_3$, y también satisface $x_3 + 1 = x_4$, $y_1 \leq y_2$, $x_2 \leq x_3$, $y_3 \leq y_4$. Como ya fue observado en la demostración del lema para tres candidatos, todas las descripciones para este caso, son transcripciones del caso donde c_1 es convexo, simplemente, todas las coordenadas x son intercambiadas con las y . Eso es verdad por la función biyectiva entre cada situación local para c_1 convexo, y su contraparte para c_1 cóncavo. Esa función espeja la situación por una línea recta paralela al eje x , y luego realiza una rotación por 90° , similar a la Figura12 donde lo mismo es mostrado para cinco candidatos. Eso completa la demostración. \square

3. Lema sobre la detección de vértices complementarios del polígono, para cinco puntos candidatos, con su demostración

Lema 21. Sean c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 cualesquiera puntos subsecuentes de $Cand(C)$ que son alternadamente convexos y cóncavo, y donde c_2, c_3, c_4 no son picos. Sea M el conjunto unión del poliomino de C , además sea $c_i = (x_i, y_i)$ for $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple, entonces $\overline{c_1 c_5} \notin M$, y el punto $p \in \{c_2, c_3, c_4\}$ indicado abajo satisface que $\overline{c_1 p} \cup \overline{p c_4}$ está dentro de M y tiene longitud mínima, entre las tres opciones para p . Si ninguna condición se cumple, entonces $\overline{c_1 c_5} \subset M$.

Para el caso (c_1 convexo, c_2 cóncavo, c_3 convexo, c_4 cóncavo, c_5 convexo):

a) Supongamos que C avanza en dirección NE: $y_1 + 1 = y_2$, $x_2 + 1 = x_3$, $y_3 + 1 = y_4$, $x_4 + 1 = x_5$.

(1) Si $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 < x_4$, y, además,

(1a) $x_2 - x_1 + n = x_4 - x_2$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $y_4 < y_5$, entonces $p = c_4$.

(1b) $x_2 - x_1 + 2 = x_4 - x_2$ y $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.

(2) Si $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3 \wedge x_3 + 1 = x_4$, y, además,

(2a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.

- (2b) $y_5 - y_4 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (3) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 + 1 = x_4$, y, además,
- (3a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
- (3b) $y_5 - y_4 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (4) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 = x_4$, y, además,
- (4a) $y_5 - y_4 < y_3 - y_2$, entonces $p = c_3$.
- (4b) $y_5 - y_4 > y_3 - y_2 + 2$, entonces $p = c_4$.
- (5) Si $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_5 - y_4 \geq 2$ entonces $p = c_4$.
- (6) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_5 - y_4 \geq 3$ entonces $p = c_4$.
- b) Supongamos que C avanza en dirección SE: $x_1 + 1 = x_2, y_2 - 1 = y_3, x_3 + 1 = x_4, y_4 - 1 = y_5$.
- (1) Si $y_1 > y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 > y_4$, y, además,
- (1a) $y_1 - y_2 + n = y_2 - y_4$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $x_4 < x_5$, entonces $p = c_4$.
- (1b) $y_1 - y_2 + 2 = y_2 - y_4$ y $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
- (2) Si $y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 + 1 = x_3 \wedge y_3 - 1 = y_4$, y, además,
- (2a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
- (2b) $x_5 - x_4 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (3) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 - 1 = y_4$, y, además,
- (3a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
- (3b) $x_5 - x_4 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (4) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge y_3 = y_4$, y, además,
- (4a) $x_5 - x_4 < x_3 - x_2$, entonces $p = c_3$.
- (4b) $x_5 - x_4 > x_3 - x_2 + 2$, entonces $p = c_4$.
- (5) Si $y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge x_5 - x_4 \geq 2$ entonces $p = c_4$.
- (6) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge x_5 - x_4 \geq 3$ entonces $p = c_4$.
- c) Supongamos que C avanza en dirección SW: $y_1 - 1 = y_2, x_2 - 1 = x_3, y_3 - 1 = y_4, x_4 - 1 = x_5$.
- (1) Si $x_1 > x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 > x_4$, y, además,
- (1a) $x_1 - x_2 + n = x_2 - x_4$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $y_4 > y_5$, entonces $p = c_4$.
- (1b) $x_1 - x_2 + 2 = x_2 - x_4$ y $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
- (2) Si $x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 - 1 = y_3 \wedge x_3 - 1 = x_4$, y, además,
- (2a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
- (2b) $y_4 - y_5 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (3) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 - 1 = x_4$, y, además,
- (3a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
- (3b) $y_4 - y_5 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (4) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 > y_3 \wedge x_3 = x_4$, y, además,
- (4a) $y_4 - y_5 < y_2 - y_3$, entonces $p = c_3$.
- (4b) $y_4 - y_5 > y_2 - y_3 + 2$, entonces $p = c_4$.
- (5) Si $x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 - y_5 \geq 2$ entonces $p = c_4$.
- (6) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 - y_5 \geq 3$ entonces $p = c_4$.
- d) Supongamos que C avanza en dirección NW: $x_1 - 1 = x_2, y_2 + 1 = y_3, x_3 - 1 = x_4, y_4 + 1 = y_5$.
- (1) Si $y_1 < y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 < y_4$, y, además,
- (1a) $y_2 - y_1 + n = y_4 - y_2$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $x_4 > x_5$, entonces $p = c_4$.
- (1b) $y_2 - y_1 + 2 = y_4 - y_2$ y $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
- (2) Si $y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 - 1 = x_3 \wedge y_3 + 1 = y_4$, y, además,
- (2a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
- (2b) $x_4 - x_5 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (3) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 + 1 = y_4$, y, además,
- (3a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
- (3b) $x_4 - x_5 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
- (4) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 > x_3 \wedge y_3 = y_4$, y, además,

- (4a) $x_4 - x_5 < x_2 - x_3$, entonces $p = c_3$.
(4b) $x_4 - x_5 > x_2 - x_3 + 2$, entonces $p = c_4$.
(5) Si $y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge x_4 - x_5 \geq 2$ entonces $p = c_4$.
(6) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge x_4 - x_5 \geq 3$ entonces $p = c_4$.

Para el caso (c_1 cóncavo, c_2 convexo, c_3 cóncavo, c_4 convexo):

a) Supongamos que C avanza en dirección NE: $x_1 + 1 = x_2, y_2 + 1 = y_3, x_3 + 1 = x_4, y_4 + 1 = y_5$.

- (1) Si $y_1 < y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 < y_4$, y , además,
(1a) $y_2 - y_1 + n = y_4 - y_2$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $x_4 < x_5$, entonces $p = c_4$.
(1b) $y_2 - y_1 + 2 = y_4 - y_2$ y $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
(2) Si $y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 + 1 = x_3 \wedge y_3 + 1 = y_4$, y , además,
(2a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
(2b) $x_5 - x_4 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(3) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 + 1 = y_4$, y , además,
(3a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
(3b) $x_5 - x_4 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(4) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge y_3 = y_4$, y , además,
(4a) $x_5 - x_4 < x_3 - x_2$, entonces $p = c_3$.
(4b) $x_5 - x_4 > x_3 - x_2 + 2$, entonces $p = c_4$.
(5) Si $y_1 + 1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge x_5 - x_4 \geq 2$ entonces $p = c_4$.
(6) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge x_5 - x_4 \geq 3$ entonces $p = c_4$.

b) Supongamos que C avanza en dirección SE: $y_1 - 1 = y_2, x_2 + 1 = x_3, y_3 - 1 = y_4, x_4 + 1 = x_5$.

- (1) Si $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 < x_4$, y , además,
(1a) $x_2 - x_1 + n = x_4 - x_2$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $y_4 > y_5$, entonces $p = c_4$.
(1b) $x_2 - x_1 + 2 = x_4 - x_2$ y $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
(2) Si $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 - 1 = y_3 \wedge x_3 + 1 = x_4$, y , además,
(2a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
(2b) $y_4 - y_5 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(3) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 + 1 = x_4$, y , además,
(3a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.
(3b) $y_4 - y_5 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(4) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 > y_3 \wedge x_3 = x_4$, y , además,
(4a) $y_4 - y_5 < y_2 - y_3$, entonces $p = c_3$.
(4b) $y_4 - y_5 > y_2 - y_3 + 2$, entonces $p = c_4$.
(5) Si $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 - y_5 \geq 2$ entonces $p = c_4$.
(6) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 - y_5 \geq 3$ entonces $p = c_4$.

c) Supongamos que C avanza en dirección SW: $x_1 - 1 = x_2, y_2 - 1 = y_3, x_3 - 1 = x_4, y_4 - 1 = y_5$.

- (1) Si $y_1 > y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 > y_4$, y , además,
(1a) $y_1 - y_2 + n = y_2 - y_4$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $x_4 > x_5$, entonces $p = c_4$.
(1b) $y_1 - y_2 + 2 = y_2 - y_4$ y $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
(2) Si $y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 - 1 = x_3 \wedge y_3 - 1 = y_4$, y , además,
(2a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
(2b) $x_4 - x_5 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(3) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 - 1 = y_4$, y , además,
(3a) $x_4 = x_5$, entonces $p = c_3$.
(3b) $x_4 - x_5 \geq 2$, entonces $p = c_4$.
(4) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 > x_3 \wedge y_3 = y_4$, y , además,
(4a) $x_4 - x_5 < x_2 - x_3$, entonces $p = c_3$.
(4b) $x_4 - x_5 > x_2 - x_3 + 2$, entonces $p = c_4$.
(5) Si $y_1 - 1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge x_4 - x_5 \geq 2$ entonces $p = c_4$.
(6) Si $y_1 = y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_3 = y_4 \wedge x_4 - x_5 \geq 3$ entonces $p = c_4$.

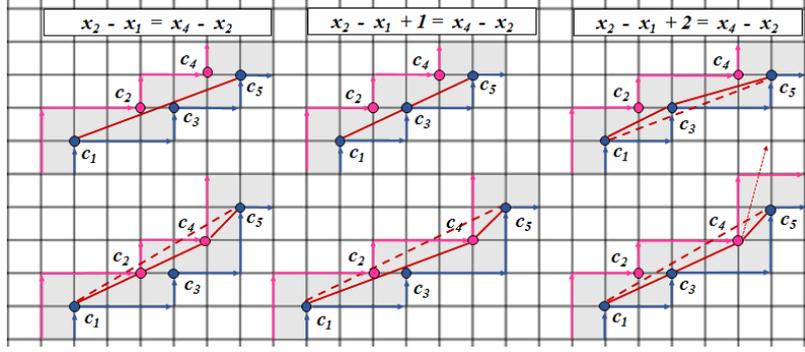


FIGURA 6. Demostración de Lema 21, instancias de las tres posibles situaciones para el caso $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

d) Supongamos que C avanza en dirección NW: $y_1 + 1 = y_2, x_2 - 1 = x_3, y_3 + 1 = y_4, x_4 - 1 = x_5$.

(1) Si $x_1 > x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 > x_4$, y , además,

(1a) $x_1 - x_2 + n = x_2 - x_4$ para $n \in \{0, 1, 2\}$, y $y_4 < y_5$, entonces $p = c_4$.

(1b) $x_1 - x_2 + 2 = x_2 - x_4$ y $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.

(2) Si $x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3 \wedge x_3 - 1 = x_4$, y , además,

(2a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.

(2b) $y_5 - y_4 \geq 2$, entonces $p = c_4$.

(3) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 - 1 = x_4$, y , además,

(3a) $y_4 = y_5$, entonces $p = c_3$.

(3b) $y_5 - y_4 \geq 2$, entonces $p = c_4$.

(4) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 = x_4$, y , además,

(4a) $y_5 - y_4 < y_3 - y_2$, entonces $p = c_3$.

(4b) $y_5 - y_4 > y_3 - y_2 + 2$, entonces $p = c_4$.

(5) Si $x_1 - 1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_5 - y_4 \geq 2$ entonces $p = c_4$.

(6) Si $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_5 - y_4 \geq 3$ entonces $p = c_4$.

Demostración:

El objetivo es obtener para cada tipo de situación, todas las condiciones que garantizan que $\overline{c_1 c_5} \not\subset M$, suponiendo que $\overline{c_1 c_3} \subset M$ y $\overline{c_1 c_4} \subset M$. Es suficiente analizar la situación a), las restantes situaciones pueden ser obtenidas por rotaciones y presentan propiedades análogas.

Asumimos primero que c_1 es convexo, entonces c_3 y c_5 también lo son. Cualquier situación de tipo a) es caracterizada por $y_1 + 1 = y_2$ y $x_2 + 1 = x_3$, y también satisface $y_3 + 1 = y_4$ y $x_4 + 1 = x_5$. Además, las siguientes cuatro relaciones son libres: pueden presentar menor estricto, o igualdad, $x_1 \leq x_2, y_2 \leq y_3, x_3 \leq x_4, y_4 \leq y_5$. Vamos a analizar todas las posibles combinaciones de menor estricto e igualdad.

• Supongamos que $x_1 = x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

Esta situación no es de interés, puesto que incluye condición (1) de Lema 20 para c_1, c_2, c_3, c_4 , eso implica que $\overline{c_1 c_4} \not\subset M$.

• Supongamos que $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

La parte $(x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3)$ está incluida en las condiciones (2a),(2b) de Lema 20 para c_1, c_2, c_3, c_4 . Para evitar la contradicción $\overline{c_1 c_4} \not\subset M$, las partes restantes de las condiciones (2a),(2b) tienen que ser negadas, por eso, debemos asumir $x_4 - x_2 \geq x_2 - x_1 \wedge x_4 - x_3 \leq x_3 - x_1$. Tomando en cuenta que $x_2 + 1 = x_3$, la segunda desigualdad significa $x_4 - x_2 - 1 \leq x_2 + 1 - x_1$. Entonces, todo junto es $x_2 - x_1 \leq x_4 - x_2 \leq x_2 - x_1 + 2$. Existen tres situaciones que satisfacen eso: (vea Figura 6):

(i) $x_2 - x_1 = x_4 - x_2$.

Entonces c_1, c_2, c_4 son colineales, $x_4 - x_1 = 2(x_2 - x_1)$, las pendientes de $\overrightarrow{c_1c_2}$, $\overrightarrow{c_2c_4}$ y $\overrightarrow{c_1c_4}$ todas coinciden: $(x_2 - x_1)^{-1} = (x_4 - x_2)^{-1} = 2(x_4 - x_1)^{-1}$.

Si $y_4 = y_5$ entonces la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_5}$ es estrictamente menor que la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_4}$, pero también es estrictamente mayor que la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_3}$:

$$2(x_5 - x_1)^{-1} = 2(x_4 - x_1 + 1)^{-1} < 2(x_4 - x_1)^{-1}, \text{ y}$$

$$2(x_5 - x_1)^{-1} = 2(x_4 - x_1 + 1)^{-1} = 2(x_3 - x_1 + 2)^{-1} < 2(x_3 - x_1)^{-1}.$$

Por lo tanto, $\overrightarrow{c_1c_5} \subset M$, ningún vértice complementario es necesitado.

Si $y_4 \neq y_5$ entonces $y_5 - y_4 \geq 1$. Claro que $\overrightarrow{c_1c_5} \not\subset M$ siempre y cuando la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_5}$ estrictamente sobrepasa la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_4}$, es decir, cuando $\frac{2}{x_4 - x_1} < \frac{2 + y_5 - y_4}{x_5 - x_1}$, lo cual es equivalente a $2 < (y_5 - y_4)(x_4 - x_1)$, recordando que $x_4 + 1 = x_5$. Pero esta última condición se cumple siempre cuando $y_4 < y_5$. Eso es debido a que las suposiciones $x_2 - x_1 \geq 1$, $x_2 + 1 = x_3$, $x_4 - x_3 \geq 1$, implican $x_4 - x_2 \geq 2$, $x_3 - x_1 \geq 3$, $x_4 - x_1 \geq 4$. Incluyendo $y_5 - y_4 \geq 1$, se sigue $2 < 1 \cdot 4 \leq (y_5 - y_4)(x_4 - x_1)$. En consecuencia, la condición para $\overrightarrow{c_1c_5} \not\subset M$ se reduce a $y_4 < y_5$, donde claramente $p = c_4$ es necesitado como vértice complementario. Eso demuestra parte de Condición (1a) del lema.

(ii) $x_2 - x_1 + 1 = x_4 - x_2$.

Si $y_4 = y_5$ entonces $\overrightarrow{c_1c_3}$ tiene la pendiente $(x_3 - x_1)^{-1} = (x_2 + 1 - x_1)^{-1} = (x_4 - x_2)^{-1} = (x_4 - (x_3 - 1))^{-1} = (x_4 + 1 - x_3)^{-1} = (x_5 - x_3)^{-1}$ que es la pendiente de $\overrightarrow{c_3c_5}$, así que, c_1, c_3, c_5 son colineales. Es claro también que la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_5}$ es menor que las pendientes de $\overrightarrow{c_1c_2}$ y $\overrightarrow{c_1c_4}$, vea Figura 6. Por lo tanto, $\overrightarrow{c_1c_5} \subset M$, ningún vértice complementario es necesitado.

Si $y_5 - y_4 \geq 1$, de la Figura 6 es claro que $\overrightarrow{c_1c_5} \not\subset M$ y c_4 es necesitado y apropiado como vértice complementario. Eso debido a que $\overrightarrow{c_1c_4}$ es el camino más corto que conecta c_1 y c_4 , y la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_4}$ es estrictamente menor que la de $\overrightarrow{c_4c_5}$.

Hay un caso especial donde también c_3 parece posible como vértice complementario: para $x_3 + 1 = x_4$ y $y_4 + 1 = y_5$, entonces c_3, c_4, c_5 son colineales. Entonces el camino $c_1 - c_3 - c_4 - c_5$ tiene longitud $\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$. Sin embargo, $c_1 - c_4 - c_5$ tiene la longitud más corta $\sqrt{13} + \sqrt{2}$, por eso, c_4 resulta ser el vértice complementario correcto, de nuevo. Eso contribuye a demostrar la condición (1a) de lema.

(iii) $x_2 - x_1 + 2 = x_4 - x_2$.

Entonces c_1, c_2, c_4 son colineales, vea Figura 6.

Si $y_4 = y_5$, todas las posiciones de puntos son fijadas, y $\overrightarrow{c_1c_5} \not\subset M$. El camino $c_1 - c_3 - c_5$ tiene longitud $\sqrt{5} + \sqrt{10}$, el camino $c_1 - c_4 - c_5$ tiene la longitud mayor $\sqrt{20} + 1$. Por eso, la condición $y_4 = y_5$ lleva a definir c_3 como vértice complementario. Eso comprueba la condición (1b) del lema.

En contraste, si $y_5 - y_4 \geq 1$ entonces $\overrightarrow{c_1c_5}$, $\overrightarrow{c_2c_5}$, y $\overrightarrow{c_3c_5}$ no cabe dentro de M . Por lo tanto, entonces c_4 es el único posible vértice complementario, eso completa la demostración de condición (1a).

• Supongamos que $x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

$(x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3)$ es parte de la condición para el vértice complementario c_2 para los puntos c_1, c_2, c_3 . La suposición $\overrightarrow{c_1c_3} \subset M$ nos requiere asumir $x_1 + 1 = x_2$ y $y_2 + 1 = y_3$, es decir, c_1, c_2, c_3 forman una línea diagonal. Pero junto con $x_3 = x_4$, eso constituye la condición (4a) de Lema 20, en contradicción de la suposición $\overrightarrow{c_1c_4} \subset M$. Así que, esta situación no es de interés.

• Supongamos que $x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

De nuevo, puesto que $(x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3)$ es parte de la condición de Lema 15, la suposición $\overrightarrow{c_1c_3} \subset M$ lleva a asumir al caso especial diagonal para c_1, c_2, c_3 : $x_1 + 1 = x_2 \wedge y_2 + 1 = y_3$.

Puesto que $x_3 \neq x_4$, la condición (4a) de Lema 20 no se cumple, entonces la condición (4b) tiene que ser negada. Eso requiere asumir $x_4 - x_3 < 2$. Por la suposición $x_3 < x_4$, entonces $x_4 - x_3 = 1$, c_1, c_2, c_3, c_4 todos están situados en la misma línea recta diagonal.

De Figura 7 es claro que, si $y_4 = y_5$, c_3 es necesitado como vértice complementario. Eso se debe a que $\overrightarrow{c_3c_5}$ tiene pendiente $1/2 < 1$, $\overrightarrow{c_1c_5}$ y $\overrightarrow{c_2c_5}$ no caben dentro de M , y el camino $c_3 - c_4 - c_5$ es más largo que $\overrightarrow{c_3c_5}$. Eso demuestra (2a).

Si $y_4 + 1 = y_5$, $x_4 + 1 = x_5$ implica que c_5 está sobre la misma línea diagonal $\overrightarrow{c_1c_4}$, entonces $\overrightarrow{c_1c_5} \subset M$, ningún vértice complementario es necesitado.

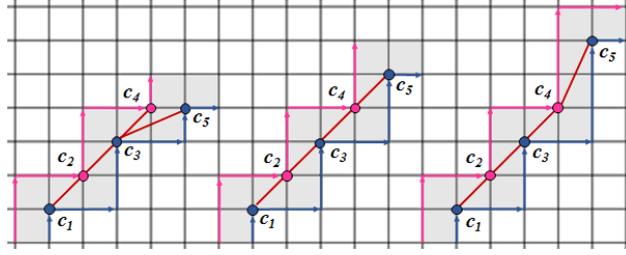


FIGURA 7. Demostración de Lema 21, caso $x_1 < x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

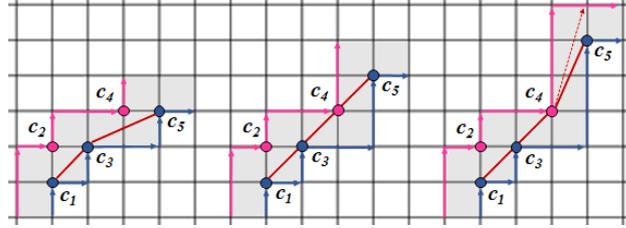


FIGURA 8. Demostración de Lema 21, caso $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

En contraste, si $y_5 - y_4 \geq 2$, la pendiente de $\overrightarrow{c_4c_5}$ es igual o mayor que 2, estrictamente sobrepasando la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_4}$. Por lo tanto, c_4 es necesitado como vértice complementario. Eso comprueba (2b).

- Supongamos que $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 < x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

($x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3$) es parte de la condición (3) de Lema 20, entonces la suposición $\overline{c_1c_4} \subset M$ lleva a tener que asumir $x_4 - x_3 < 2$, entonces $x_4 - x_3 = 1$. Eso significa que c_1, c_3, c_4 pertenecen a la línea diagonal con pendiente 1, vea Figura 8.

Si $y_4 = y_5$ entonces $\overline{c_1c_5} \not\subset M$, puesto que $\overrightarrow{c_3c_5}$ tiene la pendiente $1/2 < 1$. Entonces un vértice complementario $p \in \{c_2, c_3, c_4\}$ es necesitado. Claro que $p = c_3$ proporciona el camino más corto de c_1 hacia c_5 . Eso demuestra (3a) del lema.

Si $y_4 + 1 = y_5$, puesto que también $x_4 + 1 = x_5$, c_5 está sobre la línea diagonal formada por c_1, c_3, c_4 , entonces $\overline{c_1c_5} \subset M$, no se necesita un vértice complementario.

Si $y_5 - y_4 \geq 2$ entonces $\overline{c_1c_5} \not\subset M$, puesto que $\overrightarrow{c_4c_5}$ tiene la pendiente $\geq 2 > 1$, implicando que el vértice complementario c_4 es necesitado. Eso demuestra (3b) del lema.

- Supongamos que $x_1 = x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

Las posiciones relativas de c_1, c_2 y de c_3, c_4 son entonces fijadas, y $\overline{c_1c_2}$, $\overline{c_1c_3}$ y $\overline{c_1c_4}$ caben dentro de M . La situación de $\overline{c_1c_5}$ depende del valor de $(y_5 - y_4)$ en relación con $(y_3 - y_2)$, vea Figura 9.

Si $y_5 - y_4 = y_3 - y_2$ entonces $y_5 - y_3 = y_3 - y_1$, $\overrightarrow{c_1c_3}$ y $\overrightarrow{c_3c_5}$ tienen pendientes iguales, c_1, c_3, c_5 son colineales, $\overline{c_1c_5} \subset M$.

La misma conclusión es obtenida para $y_5 - y_4 = y_3 - y_2 + 2$. Eso se debe a que entonces $y_5 - y_4 = y_4 - y_1$, $\overrightarrow{c_1c_4}$ y $\overrightarrow{c_4c_5}$ tienen pendientes iguales, c_1, c_4, c_5 son colineales, $\overline{c_1c_5} \subset M$. En ambos casos, no se necesitan vértices complementarios.

Si $y_5 - y_4 = y_3 - y_2 + 1$, vea Figura 9, la pendiente de $\overrightarrow{c_1c_5}$ es dada por $\frac{1}{2}((y_5 - y_4) + 1 + (y_3 - y_2) + 1) = \frac{1}{2}((y_3 - y_2 + 1) + (y_3 - y_2) + 2) = \frac{1}{2}(2(y_3 - y_2 + 1) + 3) = (y_3 - y_2) + \frac{3}{2}$. Este valor se encuentra entre la pendiente $(y_3 - y_2) + 1$ de $\overrightarrow{c_1c_3}$ y la pendiente $(y_3 - y_2) + 2$ de $\overrightarrow{c_1c_4}$, por lo tanto, $\overline{c_1c_5}$ está en M , no se necesita un vértice complementario.

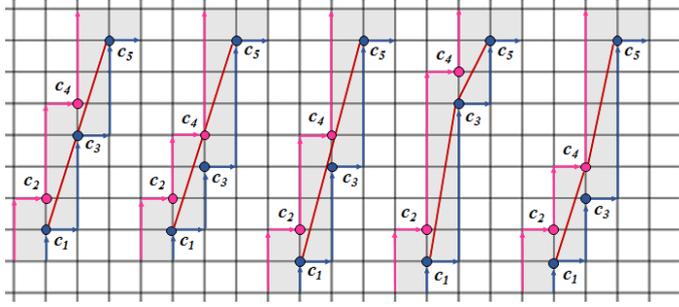


FIGURA 9. Demostración de Lema 21, caso $x_1 = x_2 \wedge y_2 < y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$. De la izquierda a la derecha, la figura muestra las situaciones $y_5 - y_4 = y_3 - y_2$ (ningún vértice), $y_5 - y_4 = y_3 - y_2 + 2$ (ningún vértice), $y_5 - y_4 = y_3 - y_2 + 1$ (ningún vértice), $y_5 - y_4 < y_3 - y_2$ (vértice c_3), $y_5 - y_4 > y_3 - y_2 + 2$ (vértice c_4).

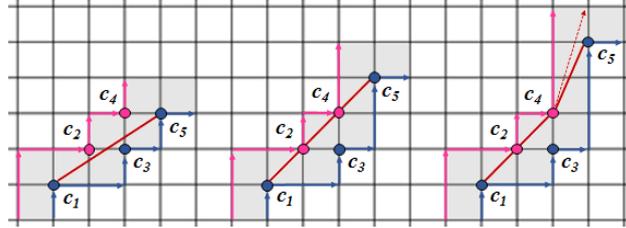


FIGURA 10. Demostración de Lema 21, caso $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

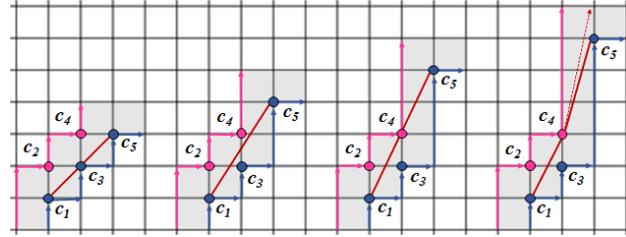


FIGURA 11. Demostración de Lema 21, caso $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$.

Si $y_5 - y_4 < y_3 - y_2$ (lo cual incluye al caso especial $y_5 = y_4$) entonces $\overline{c_1 c_5} \notin M$, puesto que $\overline{c_1 c_3}$ tiene una pendiente estrictamente mayor que la de $\overline{c_3 c_5}$. De las opciones $p \in \{c_2, c_3, c_4\}$, claro que $p = c_3$ proporciona el camino más corto $c_1 - c_3 - c_5$. Eso demuestra (4a).

Si $y_5 - y_4 > y_3 - y_2 + 2$ entonces $(y_5 - y_4) - (y_3 - y_2 + 2) = k > 0$ que implica $\overline{c_1 c_5} \notin M$. Eso debido a que $\overline{c_1 c_4}$ tiene la pendiente $y_4 - y_1 = (y_3 - y_2 + 2)$ pero $c_1 c_5$ tiene la pendiente estrictamente mayor $\frac{1}{2}(y_5 - y_4 + y_3 - y_2 + 2) = \frac{1}{2}(2(y_3 - y_2 + 2) + k) = (y_3 - y_2 + 2) + \frac{k}{2}$. Aunque ambos puntos c_3 y c_4 parecen ser posibles vértices complementarios, vea Figura 9, el camino $c_1 - c_4 - c_5$ es más corto que el camino $c_1 - c_3 - c_5$. Por lo tanto, c_4 es el vértice correcto. Eso comprueba (4b).

- Supongamos que $x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$. ($x_1 < x_2 \wedge y_2 = y_3$) es parte de las condiciones (2a),(2b) de Lema 20, negación de (2a) lleva a asumir $x_4 - x_2 \geq x_2 - x_1$. La parte restante de (2b) es $x_4 - x_3 \geq x_3 - x_1$ lo cual es imposible, puesto que $x_3 = x_4$. Asumiendo $x_4 - x_2 \geq x_2 - x_1$ y tomando en cuenta $x_2 + 1 = x_3$, $x_1 < x_2$ implica $x_2 = x_1 + 1$. Por lo tanto, c_1, c_2, c_3, c_4 tiene posiciones fijadas donde c_1, c_2, c_4 son colineales sobre una línea de pendiente 1, vea Figura 10.

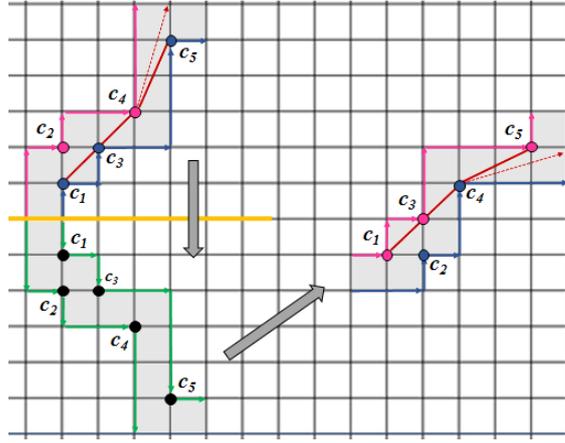


FIGURA 12. Ejemplo que ilustra la función que transforma cada situación local para c_1 convexo en la situación correspondiente para c_1 cóncavo.

Obviamente $\overline{c_1c_5} \subset M$ si $y_4 = y_5$, también si $y_5 - y_4 = 1$ donde c_1, c_2, c_4, c_5 son colineales. Pero para $y_5 - y_4 \geq 2$, la pendiente de $\overline{c_4c_5}$ estrictamente sobrepasa 1, entonces $\overline{c_1c_5} \not\subset M$ y c_4 es necesitado como vértice complementario. Eso confirma (5) del lema.

- Supongamos que $x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge y_4 \leq y_5$. $(x_1 = x_2 \wedge y_2 = y_3)$ es parte de la condición (3) de Lema 20, pero la parte restante de (3) es $x_4 - x_3 \geq 2$ lo cual no es posible, puesto que $x_3 = x_4$. Entonces tenemos un caso nuevo a ser analizado, donde c_1, c_2, c_3, c_4 tienen posiciones fijadas, $\overline{c_1c_4}$ cabe dentro de M y tiene pendiente 2, vea Figura 11.

Claro que $\overline{c_1c_5} \subset M$ si $y_4 = y_5$ donde c_1, c_3, c_4 son colineales, y también si $y_5 - y_4 = 1$ donde $\overline{c_1c_5}$ tiene pendiente $3/2$ y por eso, pasa entre $\overline{c_1c_4}$ y $\overline{c_1c_5}$. Aún para $y_5 - y_4 = 2$ todavía vale $\overline{c_1c_5} \subset M$, puesto que entonces c_1, c_4, c_5 son colineales. Pero cuando $y_5 - y_4 \geq 3$, la pendiente de $\overline{c_4c_5}$ es estrictamente mayor a 2 lo cual es la pendiente de $\overline{c_1c_4}$. Entonces $\overline{c_1c_5} \not\subset M$, c_4 es necesitado como vértice complementario. Eso proporciona la condición (6) del lema.

Si c_1 es cóncavo, también c_3 y c_5 lo son. Cualquier situación de tipo a) es caracterizada por $x_1 + 1 = x_2$ y $y_2 + 1 = y_3$, y también satisface $x_3 + 1 = x_4$, $y_4 + 1 = y_5$, $y_1 \leq y_2$, $x_2 \leq x_3$, $y_3 \leq y_4$, $x_4 \leq x_5$. Para analizar las situaciones dadas por todas las posibles combinaciones donde las últimas cuatro relaciones son estrictas o presentan igualdades, sería completamente análogo al caso donde c_1 es convexo. Como ya fue observado en las demostraciones anteriores, cada situación local para c_1 convexo, corresponde a su contraparte donde c_1 es cóncavo, mediante la biyección espejo que mapea la situación con c_1 convexo, por una línea recta paralela al eje x , seguido por una rotación por 90° , vea Figura 12. Eso completa la demostración. □

APÉNDICE B

Tablas de resultados de experimentos de estimación del perímetro

Las siguientes páginas contienen tablas de resultados de experimentos de estimación del perímetro, para varios objetos. Estas tablas dan el soporte de evidencia para las gráficas y estadísticas presentadas en el Capítulo 5 de la tesis.

Resultados de estimación del perímetro para círculos

en todas las tablas:

C8 = número de píxeles del 8-contorno, C4 = número de píxeles del 4-contorno

cand = número de puntos candidatos, polyg = número de vértices del polígono

iso = número de puntos finales de cantos localmente extremos ("isotéticos")

peak = número de picos, collin = número de puntos colineales borrados por el algoritmo

compl = número de vértices complementarios

perim = perímetro estimado, error = error relativo de perímetro

rad = radio

rad	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	compl	collin	perim	error
100	564	800	476	104	8	0	96	52	631.13	0.4479
110	624	880	516	120	8	0	112	36	694.47	0.4803
120	680	960	564	128	8	0	120	36	757.32	0.4424
130	736	1040	612	128	8	0	120	64	820.27	0.4236
140	792	1120	660	176	8	0	168	24	883.27	0.4117
150	848	1200	708	144	8	0	136	68	945.79	0.3514
160	904	1280	756	144	8	0	136	80	1008.65	0.3325
170	960	1360	804	176	8	0	168	68	1071.65	0.3288
180	1020	1440	844	152	8	0	144	80	1134.61	0.3213
190	1076	1520	892	168	8	0	160	96	1197.67	0.3237
200	1132	1600	940	192	8	0	184	96	1260.92	0.3409
210	1188	1680	988	192	8	0	184	104	1323.66	0.3178
220	1244	1760	1036	192	8	0	184	116	1386.26	0.2863
230	1300	1840	1084	208	8	0	200	104	1449.22	0.2827
240	1356	1920	1132	184	8	0	176	144	1512.09	0.2738
250	1416	2000	1172	232	8	0	224	112	1575.85	0.3215
260	1472	2080	1220	216	8	0	208	140	1638.23	0.2817
270	1528	2160	1268	248	8	0	240	140	1701.40	0.2914
280	1584	2240	1316	280	8	0	272	104	1764.84	0.3154
290	1640	2320	1364	288	8	0	280	120	1827.50	0.2952
300	1696	2400	1412	272	8	0	264	148	1890.21	0.2790
310	1752	2480	1460	276	8	0	268	152	1952.91	0.2629
320	1812	2560	1500	308	8	0	300	136	2016.41	0.2879
330	1868	2640	1548	304	8	0	296	144	2079.05	0.2703
340	1924	2720	1596	308	8	0	300	156	2142.26	0.2799
350	1980	2800	1644	332	8	0	324	164	2205.11	0.2725
360	2036	2880	1692	292	8	0	284	204	2267.63	0.2512
370	2092	2960	1740	312	8	0	304	196	2330.90	0.2631
380	2148	3040	1788	324	8	0	316	200	2393.32	0.2392
390	2208	3120	1828	344	8	0	336	184	2457.07	0.2704
400	2264	3200	1876	352	8	0	344	184	2519.80	0.2598
410	2320	3280	1924	356	8	0	348	188	2581.89	0.2246
420	2376	3360	1972	376	8	0	368	196	2645.11	0.2339
430	2432	3440	2020	356	8	0	348	212	2708.07	0.2331
440	2488	3520	2068	308	8	0	300	260	2770.09	0.1986
450	2544	3600	2116	360	8	0	352	240	2833.77	0.2241
460	2604	3680	2156	432	8	0	424	196	2898.01	0.2678
470	2660	3760	2204	404	8	0	396	216	2959.98	0.2330
480	2716	3840	2252	448	8	0	440	200	3023.25	0.2427
490	2772	3920	2300	452	8	0	444	228	3086.90	0.2644
500	2828	4000	2348	460	8	0	452	228	3149.58	0.2542

rad	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	compl	collin	perim	error
510	2884	4080	2396	424	8	0	416	264	3211.73	0.2279
520	2940	4160	2444	440	8	0	432	260	3274.36	0.2175
530	3000	4240	2484	456	8	0	448	256	3338.37	0.2486
540	3056	4320	2532	480	8	0	472	236	3400.91	0.2356
550	3112	4400	2580	420	8	0	412	308	3464.03	0.2394
560	3168	4480	2628	492	8	0	484	260	3527.14	0.2430
570	3224	4560	2676	472	8	0	464	304	3589.40	0.2228
580	3280	4640	2724	432	8	0	424	336	3652.16	0.2170
590	3336	4720	2772	492	8	0	484	300	3715.35	0.2231
600	3396	4800	2812	464	8	0	456	340	3778.15	0.2184
610	3452	4880	2860	532	8	0	524	276	3841.52	0.2290
620	3508	4960	2908	544	8	0	536	292	3904.48	0.2285
630	3564	5040	2956	512	8	0	504	340	3967.24	0.2232
640	3620	5120	3004	576	8	0	568	288	4030.73	0.2360
650	3676	5200	3052	536	8	0	528	336	4093.31	0.2262
660	3732	5280	3100	552	8	0	544	344	4156.22	0.2247
670	3792	5360	3140	600	8	0	592	296	4219.76	0.2380
680	3848	5440	3188	548	8	0	540	348	4281.97	0.2201
690	3904	5520	3236	580	8	0	572	328	4344.69	0.2142
700	3960	5600	3284	624	8	0	616	320	4408.31	0.2291
710	4016	5680	3332	560	8	0	552	384	4470.50	0.2115
720	4072	5760	3380	592	8	0	584	368	4533.42	0.2105
730	4128	5840	3428	556	8	0	548	404	4596.18	0.2062
740	4188	5920	3468	636	8	0	628	340	4659.34	0.2104
750	4244	6000	3516	668	8	0	660	332	4723.13	0.2279
760	4300	6080	3564	632	8	0	624	376	4785.43	0.2138
770	4356	6160	3612	644	8	0	636	384	4847.94	0.2044
780	4412	6240	3660	648	8	0	640	388	4911.09	0.2082
790	4468	6320	3708	648	8	0	640	404	4973.83	0.2038
800	4524	6400	3756	636	8	0	628	432	5036.32	0.1944
810	4584	6480	3796	676	8	0	668	416	5100.53	0.2191
820	4640	6560	3844	704	8	0	696	392	5163.97	0.2283
830	4696	6640	3892	720	8	0	712	400	5226.73	0.2241
840	4752	6720	3940	736	8	0	728	380	5289.52	0.2205
850	4808	6800	3988	712	8	0	704	428	5352.36	0.2182
860	4864	6880	4036	724	8	0	716	428	5415.83	0.2274
870	4920	6960	4084	740	8	0	732	428	5477.88	0.2106
880	4980	7040	4124	724	8	0	716	448	5541.27	0.2183
890	5036	7120	4172	744	8	0	736	436	5603.95	0.2131
900	5092	7200	4220	736	8	0	728	444	5666.93	0.2134
910	5148	7280	4268	760	8	0	752	456	5729.96	0.2145
920	5204	7360	4316	780	8	0	772	440	5792.79	0.2122
930	5260	7440	4364	732	8	0	724	488	5855.31	0.2045
940	5316	7520	4412	740	8	0	732	472	5917.57	0.1926
950	5376	7600	4452	776	8	0	768	464	5981.44	0.2079
960	5432	7680	4500	816	8	0	808	460	6044.79	0.2144
970	5488	7760	4548	824	8	0	816	468	6107.06	0.2029
980	5544	7840	4596	772	8	0	764	508	6169.68	0.1974
990	5600	7920	4644	764	8	0	756	536	6232.48	0.1950
1000	5656	8000	4692	852	8	0	844	464	6295.99	0.2038

rad	C4	cand	polyg	iso	peak	compl	collin	perim	error
1800	14400	8436	1428	8	0	1420	936	11331.47	0.1922
1810	14480	8484	1472	8	0	1464	912	11395.03	0.1975
1820	14560	8532	1480	8	0	1472	932	11458.40	0.2012
1830	14640	8580	1524	8	0	1516	884	11520.41	0.1929
1840	14720	8628	1520	8	0	1512	920	11584.21	0.2002
1850	14800	8676	1524	8	0	1516	920	11645.91	0.1894
1860	14880	8724	1464	8	0	1456	960	11708.58	0.1870
1870	14960	8764	1496	8	0	1488	956	11772.03	0.1912
1880	15040	8812	1540	8	0	1532	932	11834.92	0.1907
1890	15120	8860	1544	8	0	1536	972	11899.06	0.2008
1900	15200	8908	1576	8	0	1568	940	11961.03	0.1925

Resultados de estimación de perímetro para elipses

en todas las tablas:

C8 = número de píxeles del 8-contorno, C4 = número de píxeles del 4-contorno

cand = número de puntos candidatos, polyg = número de vértices del polígono

iso = número de puntos finales de cantos localmente extremos ("isotéticos")

peak = número de picos, collin = número de puntos colineales borrados por el algoritmo

perim = perímetro estimado, error = error relativo de perímetro

true = perímetro verdadero calculado con fórmula de Ramanujan

Elipses pequeñas, posición alineada (sin rotación):

r = longitud del eje mayor, s = longitud del eje menor

r	s	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	true	error
100	50	220	300	160	32	0	4	20	241	242	0.3802
150	50	316	400	168	56	0	4	0	334	334	0.0801
150	100	360	500	280	80	0	4	8	397	397	0.0487
200	50	412	500	176	56	0	4	4	428	429	0.1969
200	100	444	600	312	72	0	4	28	484	484	0.0560
200	150	500	700	400	76	0	4	40	553	553	0
250	50	508	600	184	44	0	4	16	525	525	0.1330
250	100	536	700	328	76	0	4	24	575	575	0.0788
250	150	580	800	440	84	0	4	48	638	638	0.0475
250	200	640	900	520	104	0	4	56	709	709	0.0333
300	50	608	700	184	60	0	4	4	622	623	0.0953
300	100	632	800	336	88	0	4	16	668	668	0.0498
300	150	668	900	464	112	0	4	28	727	727	0.0094
300	200	720	1000	560	140	0	4	36	794	793	0.0931
300	250	780	1100	640	120	0	4	68	866	866	0.0425
350	50	704	800	192	56	0	4	4	719	720	0.1702
350	100	728	900	344	88	0	4	20	762	763	0.0564
350	150	760	1000	480	102	0	4	46	817	817	0.0036
350	200	804	1100	592	112	0	4	68	880	880	0.0022
350	250	860	1200	680	124	0	4	64	950	949	0.0732
350	300	920	1300	760	146	0	4	70	1023	1023	0.0525
400	50	804	900	192	60	0	4	8	818	819	0.1286
400	100	824	1000	352	100	0	4	20	858	858	0.0180
400	150	852	1100	496	100	0	4	44	909	909	0.0432
400	200	892	1200	616	130	0	4	54	969	969	0.0117
400	250	940	1300	720	144	0	4	76	1035	1035	0.0347
400	300	1000	1400	800	156	0	4	80	1106	1105	0.0981
400	350	1060	1500	880	182	0	4	78	1181	1179	0.1005

Elipses pequeñas con rotación

r = longitud del eje mayor, s = longitud del eje menor

w = ángulo de rotación / inclinación (en grados)

r = 100, s = 50, perímetro verdadero: 242

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	220	300	160	32	0	4	20	241	0.3802
20	216	304	180	37	8	0	21	241	0.4524
40	210	312	208	46	8	0	20	241	0.4476
60	212	312	204	46	8	0	22	241	0.3568
80	220	300	164	40	8	0	12	241	0.4306
100	220	300	164	40	8	0	12	241	0.4306
120	212	312	204	46	8	0	22	241	0.3568
140	210	312	208	46	8	0	20	241	0.4107
160	216	304	180	36	8	0	22	241	0.4894

r = 150, s = 50, perímetro verdadero: 334

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	316	400	168	56	0	4	0	334	0.0801
20	304	416	228	58	8	0	16	333	0.3210
40	282	440	320	64	8	0	30	335	0.1859
60	290	436	296	58	8	0	34	334	0.1526
80	312	400	180	44	8	0	14	333	0.4374
100	312	400	180	44	8	0	14	333	0.4106
120	290	436	296	58	8	0	34	334	0.1715
140	282	440	320	64	8	0	30	333	0.2127
160	304	416	228	58	8	0	16	333	0.3210

r = 150, s = 100, perímetro verdadero: 397

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	360	500	280	80	0	4	8	397	0.0487
20	356	500	292	64	8	0	22	396	0.1036
40	352	504	308	68	8	0	28	396	0.1196
60	354	504	304	72	8	0	24	396	0.0878
80	356	496	284	56	8	0	32	396	0.2643
100	356	496	284	56	8	0	32	396	0.2802
120	354	504	304	72	8	0	24	396	0.1037
140	352	504	308	68	8	0	28	396	0.1196
160	356	500	292	64	8	0	22	396	0.1036

r = 200, s = 50, perímetro verdadero: 429

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	412	500	176	56	0	4	4	428	0.1969
20	392	540	300	68	8	0	24	429	0.0888
40	354	580	456	90	8	0	44	429	0.0020
60	372	564	388	78	8	0	36	429	0.0850
80	406	512	216	58	8	0	16	428	0.2860
100	406	512	216	58	8	0	16	428	0.2798

120	372	564	388	76	8	0	38	429	0.0703
140	354	580	456	90	8	0	44	429	0.0250
160	392	540	300	68	8	0	24	429	0.0741

r = 200, s = 100, perímetro verdadero: 484

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	444	600	312	72	0	4	28	484	0.0560
20	436	612	356	66	8	0	36	484	0.1321
40	424	628	412	86	8	0	36	484	0.0329
60	428	624	396	88	8	0	34	484	0.0462
80	442	600	320	62	8	0	40	484	0.1635
100	442	600	320	62	8	0	40	484	0.1820
120	428	624	396	88	8	0	34	484	0.0408
140	424	628	412	84	8	0	38	484	0.0384
160	436	612	356	66	8	0	36	484	0.1321

r = 200, s = 150, perímetro verdadero: 553

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	500	700	400	76	0	4	40	553	0
20	496	700	412	94	8	0	34	553	0.0223
40	494	704	424	84	8	0	42	552	0.0307
60	494	700	416	78	8	0	48	552	0.0489
80	496	696	404	68	8	0	48	552	0.1260
100	496	696	404	68	8	0	48	552	0.1422
120	494	700	416	78	8	0	48	552	0.0651
140	494	704	424	84	8	0	42	552	0.0307
160	496	700	412	96	8	0	32	553	0.0053

r = 250, s = 50, perímetro verdadero: 525

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	508	600	184	44	0	4	16	525	0.1330
20	482	660	360	72	8	0	32	524	0.2473
40	428	716	580	110	8	0	64	526	0.1870
60	454	696	488	96	8	0	46	524	0.1566
80	502	620	240	68	8	0	6	525	0.1258
100	502	620	240	68	8	0	6	524	0.1449
120	454	696	488	97	8	0	45	525	0.1415
140	428	716	580	108	8	0	66	526	0.1870
160	482	660	360	72	8	0	32	524	0.2423

r = 250, s = 100, perímetro verdadero: 575

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	536	700	328	76	0	4	24	575	0.0788
20	520	724	412	80	8	0	42	575	0.1040
40	496	760	530	108	4	2	50	576	0.1339
60	506	748	488	98	8	0	48	575	0.0036
80	532	704	348	76	8	0	36	575	0.1178
100	532	704	348	76	8	0	36	575	0.1132

120	506	748	488	100	8	0	46	575	0.0082
140	496	760	530	108	4	2	50	576	0.1137
160	520	724	412	80	8	0	42	575	0.1241

r = 250, s = 150, perímetro verdadero: 638

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	580	800	440	84	0	4	48	638	0.0475
20	574	808	472	92	8	0	48	638	0.0386
40	564	820	516	102	8	0	52	638	0.0036
60	568	816	500	114	8	0	42	638	0.0142
80	580	796	436	88	8	0	42	638	0.0632
100	580	796	436	88	8	0	42	638	0.0590
120	568	816	500	112	8	0	44	638	0.0340
140	564	820	516	102	8	0	52	638	0.0145
160	574	808	472	92	8	0	48	638	0.0427

r = 250, s = 200, perímetro verdadero: 709

w	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	error
0	640	900	520	104	0	4	56	709	0.0333
20	636	900	532	110	8	0	54	709	0.0337
40	634	904	544	102	8	0	58	709	0.0098
60	636	900	532	90	8	0	64	709	0.0131
80	636	896	524	108	8	0	54	709	0.0028
100	636	896	524	108	8	0	54	709	0.0318
120	636	900	532	90	8	0	64	709	0.0384
140	634	904	544	102	8	0	58	709	0.0080
160	636	900	532	110	8	0	54	709	0.0211

Elipses medianas sin rotación:

r	s	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	true	error
500	50	1004	1100	192	74	0	4	4	1015	1016	0.0763
500	100	1016	1200	368	98	0	4	30	1050	1051	0.0752
500	150	1044	1300	512	130	0	4	34	1097	1096	0.0026
500	200	1076	1400	648	148	0	4	56	1151	1151	0.0336
500	250	1116	1500	768	156	0	4	80	1212	1211	0.0569
500	300	1164	1600	872	164	0	4	98	1277	1276	0.0554
500	350	1220	1700	960	206	0	4	94	1347	1346	0.1099
500	400	1280	1800	1040	196	0	4	112	1420	1418	0.1002
500	450	1344	1900	1112	228	0	4	104	1493	1493	0.1316
600	50	1204	1300	192	70	0	4	4	1214	1214	0.0374
600	100	1216	1400	368	102	0	4	26	1245	1245	0.0211
600	150	1236	1500	528	140	0	4	34	1287	1287	0.0016
600	200	1264	1600	672	160	0	4	54	1337	1336	0.0178
600	250	1296	1700	808	166	0	4	86	1393	1392	0.0148
600	300	1340	1800	920	182	0	4	96	1454	1453	0.0828
600	350	1388	1900	1024	186	0	4	114	1519	1518	0.0843

600	400	1440	2000	1120	210	0	4	122	1588	1587	0.0898
600	450	1500	2100	1200	240	0	4	128	1660	1658	0.1394
600	500	1560	2200	1280	256	0	4	124	1733	1731	0.1014
600	550	1624	2300	1352	272	0	4	134	1809	1807	0.1105
700	50	1400	1500	200	64	0	4	12	1411	1413	0.0891
700	100	1412	1600	376	112	0	4	22	1440	1441	0.0594
700	150	1428	1700	544	118	0	4	56	1478	1479	0.0433
700	200	1456	1800	688	164	0	4	60	1525	1525	0.0208
700	250	1484	1900	832	202	0	4	62	1578	1577	0.0542
700	300	1520	2000	960	190	0	4	104	1635	1634	0.0484
700	350	1564	2100	1072	202	0	4	118	1697	1695	0.0692
700	400	1612	2200	1176	244	0	4	114	1762	1760	0.0974
700	450	1664	2300	1272	278	0	4	112	1830	1828	0.1248
700	500	1720	2400	1360	278	0	4	140	1901	1898	0.1318
700	550	1780	2500	1440	286	0	4	146	1973	1971	0.1336
700	600	1840	2600	1520	310	0	4	138	2047	2045	0.1174
700	650	1908	2700	1584	298	0	4	168	2124	2121	0.1207
800	50	1600	1700	200	74	0	4	8	1610	1611	0.0586
800	100	1612	1800	376	118	0	4	16	1637	1637	0.0418
800	150	1624	1900	552	150	0	4	38	1672	1673	0.0323
800	200	1648	2000	704	190	0	4	48	1716	1716	0.0324
800	250	1676	2100	848	204	0	4	66	1765	1765	0.0351
800	300	1708	2200	984	194	0	4	100	1819	1818	0.0406
800	350	1744	2300	1112	232	0	4	114	1877	1876	0.0631
800	400	1788	2400	1224	248	0	4	114	1939	1938	0.0710
800	450	1832	2500	1336	254	0	4	142	2004	2002	0.0866
800	500	1884	2600	1432	276	0	4	146	2071	2069	0.0896
800	550	1940	2700	1520	314	0	4	146	2142	2139	0.1512
800	600	2000	2800	1600	302	0	4	174	2214	2210	0.1446
800	650	2060	2900	1680	336	0	4	158	2287	2284	0.1286
800	700	2124	3000	1752	384	0	4	156	2363	2359	0.1718
800	750	2192	3100	1816	354	0	4	190	2439	2435	0.1546
900	50	1800	1900	200	72	0	4	4	1809	1810	0.0577
900	100	1808	2000	384	98	0	4	32	1833	1834	0.0557
900	150	1824	2100	552	152	0	4	34	1867	1868	0.0114
900	200	1840	2200	720	160	0	4	74	1907	1908	0.0336
900	250	1868	2300	864	172	0	4	90	1954	1954	0.0088
900	300	1896	2400	1008	220	0	4	92	2005	2005	0.0268
900	350	1928	2500	1144	230	0	4	114	2061	2060	0.0386
900	400	1968	2600	1264	250	0	4	124	2120	2118	0.0783
900	450	2012	2700	1376	290	0	4	138	2182	2180	0.1147
900	500	2056	2800	1488	288	0	4	158	2246	2244	0.0901
900	550	2108	2900	1584	290	0	4	190	2314	2311	0.1139
900	600	2160	3000	1680	318	0	4	174	2382	2380	0.0985
900	650	2220	3100	1760	336	0	4	178	2453	2451	0.1158
900	700	2280	3200	1840	350	0	4	194	2527	2523	0.1364
900	750	2340	3300	1920	370	0	4	206	2601	2597	0.1320
900	800	2408	3400	1984	404	0	4	180	2677	2673	0.1554
900	850	2472	3500	2056	396	0	4	220	2754	2749	0.1499
950	50	1900	2000	200	88	0	4	0	1909	1910	0.0519
950	100	1908	2100	384	106	0	4	24	1932	1933	0.0420
950	150	1920	2200	560	134	0	4	44	1964	1965	0.0454

950	200	1940	2300	720	144	0	4	78	2004	2004	0.0157
950	250	1964	2400	872	200	0	4	74	2050	2049	0.0303
950	300	1992	2500	1016	224	0	4	88	2099	2099	0.0362
950	350	2024	2600	1152	228	0	4	126	2153	2152	0.0520
950	400	2060	2700	1280	268	0	4	122	2211	2210	0.0615
950	450	2100	2800	1400	300	0	4	126	2272	2270	0.0882
950	500	2144	2900	1512	310	0	4	140	2335	2333	0.1055
950	550	2192	3000	1616	304	0	4	174	2401	2398	0.0930
950	600	2244	3100	1712	342	0	4	166	2469	2466	0.1120
950	650	2300	3200	1800	388	0	4	166	2539	2535	0.1530
950	700	2360	3300	1880	366	0	4	186	2610	2607	0.1393
950	750	2420	3400	1960	388	0	4	196	2684	2680	0.1539
950	800	2480	3500	2040	404	0	4	196	2758	2754	0.1389
950	850	2548	3600	2104	408	0	4	216	2834	2830	0.1464
950	900	2616	3700	2168	434	0	4	214	2911	2907	0.1540

Elipses medianas, rotadas por 30 grados:

r	s	C8	C4	cand	polyg	iso	peak	collin	perim	true	error
500	50	876	1368	988	202	8	0	94	1016	1016	0.0002
500	100	910	1396	976	196	8	0	98	1052	1051	0.1062
500	150	958	1436	960	194	8	0	92	1098	1096	0.1263
500	200	1014	1496	968	194	8	0	100	1152	1151	0.1301
500	250	1074	1560	976	200	8	0	96	1212	1211	0.1299
500	300	1138	1636	1000	196	8	0	106	1278	1276	0.0944
500	350	1204	1716	1028	202	8	0	104	1347	1346	0.1001
500	400	1274	1804	1064	194	8	0	118	1419	1418	0.0808
500	450	1342	1896	1112	206	8	0	122	1494	1493	0.1042
600	50	1046	1644	1200	224	8	0	124	1215	1214	0.0763
600	100	1078	1668	1182	232	4	2	118	1247	1245	0.1583
600	150	1120	1700	1164	236	8	0	110	1289	1287	0.1529
600	200	1172	1748	1156	240	8	0	108	1339	1336	0.1715
600	250	1230	1804	1152	236	8	0	110	1395	1392	0.1556
600	300	1290	1872	1168	224	8	0	130	1455	1453	0.1316
600	350	1354	1948	1192	246	8	0	116	1518	1518	0.1525
600	400	1420	2028	1220	242	8	0	120	1589	1587	0.1434
600	450	1486	2112	1256	250	8	0	120	1660	1658	0.1095
600	500	1554	2204	1304	244	8	0	144	1733	1731	0.1105
600	550	1624	2296	1348	252	8	0	144	1809	1807	0.1106
700	50	1220	1916	1396	278	8	0	128	1414	1413	0.1164
700	100	1246	1936	1384	284	8	0	128	1443	1441	0.1928
700	150	1284	1964	1364	266	8	0	138	1482	1479	0.1719
700	200	1332	2008	1356	266	8	0	142	1528	1525	0.1720
700	250	1386	2056	1344	270	8	0	130	1580	1577	0.1781
700	300	1444	2116	1348	260	8	0	142	1637	1634	0.1544
700	350	1506	2184	1360	260	8	0	148	1698	1695	0.1497
700	400	1568	2260	1388	284	8	0	132	1763	1760	0.1467
700	450	1634	2336	1408	260	8	0	156	1830	1828	0.1236
700	500	1700	2420	1444	282	8	0	152	1901	1898	0.1308
700	550	1768	2508	1484	306	8	0	150	1973	1971	0.1342
700	600	1838	2604	1536	304	8	0	156	2048	2045	0.1449

700	650	1908	2696	1580	310	8	0	154	2124	2121	0.1331
800	50	1392	2188	1596	326	8	0	142	1613	1611	0.1068
800	100	1414	2204	1584	310	8	0	154	1640	1637	0.1444
800	150	1450	2232	1568	312	8	0	162	1676	1673	0.2023
800	200	1494	2264	1544	298	8	0	164	1719	1716	0.1689
800	250	1544	2316	1548	310	8	0	150	1768	1765	0.1918
800	300	1600	2368	1540	296	8	0	150	1821	1818	0.1474
800	350	1660	2428	1540	302	8	0	152	1879	1876	0.1521
800	400	1720	2496	1556	310	8	0	156	1941	1938	0.1578
800	450	1784	2572	1580	306	8	0	156	2005	2002	0.1520
800	500	1850	2648	1600	326	8	0	150	2072	2069	0.1517
800	550	1916	2728	1628	302	8	0	178	2142	2139	0.1349
800	600	1984	2816	1668	306	8	0	178	2213	2210	0.1348
800	650	2052	2908	1716	340	8	0	166	2287	2284	0.1559
800	700	2122	3004	1768	364	8	0	170	2363	2359	0.1642
800	750	2190	3096	1816	334	8	0	200	2439	2435	0.1313
900	50	1564	2460	1796	358	8	0	160	1811	1810	0.0582
900	100	1584	2476	1788	352	8	0	174	1838	1834	0.1724
900	150	1616	2500	1772	336	8	0	194	1871	1868	0.1855
900	200	1656	2532	1756	344	8	0	182	1911	1908	0.1926
900	250	1706	2572	1736	330	8	0	174	1957	1954	0.1741
900	300	1758	2620	1728	342	8	0	168	2008	2005	0.1698
900	350	1816	2680	1732	348	8	0	168	2064	2060	0.1844
900	400	1876	2740	1732	354	8	0	164	2122	2118	0.1980
900	450	1936	2808	1748	336	8	0	182	2183	2180	0.1622
900	500	2000	2884	1772	352	8	0	178	2248	2244	0.1769
900	550	2064	2960	1796	354	8	0	182	2314	2311	0.1450
900	600	2130	3040	1824	366	8	0	178	2383	2380	0.1344
900	650	2198	3128	1864	356	8	0	198	2455	2451	0.1600
900	700	2264	3216	1908	360	8	0	200	2526	2523	0.1327
900	750	2334	3308	1952	378	8	0	194	2601	2597	0.1530
900	800	2402	3404	2008	362	8	0	224	2676	2673	0.1242
900	850	2474	3496	2048	388	8	0	218	2753	2749	0.1442
950	50	1650	2596	1896	380	8	0	170	1912	1910	0.0791
950	100	1670	2612	1888	360	8	0	200	1937	1933	0.1849
950	150	1700	2636	1876	372	8	0	182	1969	1965	0.2118
950	200	1740	2664	1852	380	8	0	178	2009	2004	0.2303
950	250	1786	2708	1848	360	8	0	190	2053	2049	0.2088
950	300	1838	2752	1832	346	8	0	194	2103	2099	0.1961
950	350	1894	2804	1824	358	8	0	182	2156	2152	0.1864
950	400	1950	2864	1832	362	8	0	190	2213	2210	0.1663
950	450	2014	2932	1840	366	8	0	186	2274	2270	0.1851
950	500	2076	3000	1852	366	8	0	182	1337	2333	0.1716
950	550	2138	3076	1880	344	8	0	216	2402	2398	0.1470
950	600	2206	3156	1904	366	8	0	186	2470	2466	0.1509
950	650	2270	3240	1944	354	8	0	220	2539	2533	0.1466
950	700	2338	3328	1984	386	8	0	208	2611	2607	0.1458
950	750	2406	3416	2024	406	8	0	192	2683	2680	0.1454
950	800	2476	3508	2068	398	8	0	212	2758	2754	0.1512
950	850	2546	3604	2120	406	8	0	220	2834	2830	0.1577
950	900	2614	3696	2168	406	8	0	232	2911	2907	0.1411

Resultados de estimación del perímetro para Objeto C

FigCxN, N es el factor de magnificación, perímetro verdadero: $N \times 75.398224$

en todas las tablas:

C8 = número de píxeles del 8-contorno, C4 = número de píxeles del 4-contorno

cand = número de puntos candidatos, polyg = número de vértices del polígono

iso = número de puntos finales de cantos localmente extremos ("isotéticos")

peaks = número de picos, collin = número de puntos colineales borrados por el algoritmo

compl = número de vértices complementarios

perim = perímetro estimado, error = error relativo de perímetro

N	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
10	674	958	569	137	16	3	118	49	748.70	0.7002
15	1014	1438	849	198	16	3	179	71	1126.07	0.4333
20	1352	1918	1133	231	16	3	212	117	1503.45	0.2993
25	1692	2398	1413	302	16	3	283	131	1881.83	0.1659
30	2032	2878	1693	354	16	3	335	151	2259.32	0.1163
35	2372	3358	1973	437	16	3	418	159	2637.33	0.0611
40	2710	3838	2257	430	16	3	411	229	3014.03	0.0630
45	3050	4318	2537	471	16	3	452	267	3391.78	0.0336
50	3390	4798	2817	564	16	3	545	271	3770.20	0.0076
55	3728	5278	3101	535	16	3	516	365	4147.04	0.0036
60	4068	5758	3381	599	16	3	580	377	4524.72	0.0183
65	4406	6238	3665	659	16	3	640	409	4902.45	0.0320
70	4750	6718	3937	781	16	3	762	377	5281.59	0.0703
75	5088	7198	4221	813	16	3	794	417	5658.59	0.0658
80	5426	7678	4505	867	16	3	848	439	6035.80	0.0653
85	5766	8158	4785	893	16	3	874	491	6413.92	0.0792
90	6104	8638	5069	925	16	3	906	529	6791.04	0.0767
95	6444	9118	5349	979	16	3	960	551	7168.38	0.0775
100	6784	9598	5629	1027	16	3	1008	583	7546.11	0.0834
105	7124	10078	5909	1091	16	3	1072	611	7924.26	0.0941
110	7462	10558	6193	1069	16	3	1050	673	8300.74	0.0837
115	7802	11038	6473	1189	16	3	1170	657	8679.93	0.1053
120	8142	11518	6753	1243	16	3	1224	673	9056.83	0.1000
125	8480	11998	7037	1265	16	3	1246	743	9434.95	0.1079
130	8818	12478	7321	1337	16	3	1318	763	9812.32	0.1076
135	9158	12958	7601	1407	16	3	1388	761	10189.99	0.1103
140	9502	13438	7873	1417	16	3	1398	811	10568.10	0.1167
145	9840	13918	8157	1425	16	3	1406	893	10945.11	0.1131
150	10178	14398	8441	1513	16	3	1494	885	11322.90	0.1164
155	10518	14878	8721	1579	16	3	1560	915	11701.02	0.1223
160	10856	15358	9005	1637	16	3	1618	925	12078.48	0.1224

FigCx50, con rotaciones (perímetro verdadero: 3769.9112)

ángulo	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
0	3390	4798	2817	564	16	3	545	271	3770	0.0076
5	3391	4798	2816	560	21	2	537	277	3771	0.0306
10	3391	4798	2816	562	25	2	535	275	3771	0.0326
15	3390	4798	2817	571	23	3	545	267	3771	0.0195
20	3396	4804	2817	568	23	3	542	270	3776	0.1717
25	3392	4800	2817	572	23	3	546	266	3773	0.0834
30	3391	4798	2815	560	23	3	534	274	3771	0.0393
35	3395	4804	2820	566	25	2	539	271	3776	0.1734
40	3392	4800	2817	563	23	3	537	272	3774	0.1043
45	3381	4778	2795	567	23	3	541	262	3758	0.3154
50	3395	4802	2815	572	23	3	546	262	3776	0.1497
55	3395	4804	2819	567	23	3	541	266	3777	0.1760
60	3390	4796	2813	567	22	3	542	268	3771	0.0257
65	3394	4802	2817	573	22	3	548	260	3775	0.1423
70	3387	4792	2811	571	23	3	545	261	3768	0.0604
75	3388	4794	2813	573	23	3	547	259	3769	0.0239
80	3386	4796	2818	573	24	6	543	264	3767	0.0800
85	3385	4792	2815	563	18	3	542	273	3765	0.1267
90	3396	4804	2817	565	16	3	546	271	3776	0.1663

FigCx20, con rotaciones (perímetro verdadero: 1507.96)

ángulo	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
0	1352	1918	1133	231	16	3	212	117	1503	0.2993
5	1360	1928	1137	231	18	3	210	120	1512	0.2584
10	1353	1918	1131	228	19	3	206	122	1504	0.2419
15	1358	1924	1133	232	23	3	206	118	1509	0.0997
20	1358	1926	1135	231	22	5	204	120	1510	0.1135
25	1359	1928	1139	233	23	3	207	118	1512	0.2974
30	1355	1922	1135	232	23	3	206	118	1508	0.0050
35	1355	1920	1132	230	25	2	203	119	1507	0.0885
40	1356	1922	1133	235	23	3	210	111	1508	0.0114
45	1357	1922	1131	237	23	3	211	110	1508	0.0355
50	1356	1922	1133	233	23	3	207	114	1508	0.0222
55	1356	1922	1133	235	23	3	209	111	1508	0.0242
60	1356	1920	1129	234	22	3	209	112	1507	0.0808
65	1357	1922	1131	235	22	3	210	114	1509	0.0381
70	1353	1918	1132	237	24	2	211	112	1505	0.1831
75	1354	1920	1133	235	23	3	209	115	1508	0.1493
80	1355	1922	1135	231	20	3	208	116	1508	0.0158
85	1350	1916	1132	229	15	4	210	120	1501	0.4358
90	1358	1924	1133	231	16	3	212	117	1509	0.0960

Experimentos con m=3,4,5 para FigCxN (perímetro verdadero: N x 75.398224)

N=10	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	674	958	569	137	16	3	118	49	748.70	0.7002
M=4:	674	958	569	194	14	3	177	10	761.16	0.9516
M=3:	674	958	569	154	14	3	137	138	750.37	0.4796
N=50	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	3390	4798	2817	564	16	3	545	271	3770.20	0.0076
M=4:	3390	4798	2817	934	16	3	915	19	3817.75	1.2690
M=3:	3390	4798	2817	706	14	3	689	710	3778.90	0.2383
N=80	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	5426	7678	4505	867	16	3	848	439	6035.80	0.0653
M=4:	5426	7678	4505	1499	16	3	1480	23	6119.94	1.4604
M=3:	5426	7678	4505	1159	14	3	1142	1101	6049.50	0.2924
N=100	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	6784	9598	5629	1027	16	3	1008	583	7546.11	0.0834
M=4:	6784	9598	5629	1875	16	3	1856	21	7640.22	1.3316
M=3:	6784	9598	5629	1411	14	3	1394	1411	7563.24	0.3105
N=150	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	10178	14398	8441	1513	16	3	1494	885	11322.90	0.1164
M=4:	10178	14398	8441	2821	16	3	2802	19	11481.36	1.5175
M=3:	10178	14398	8441	2091	14	3	2074	2137	11347.87	0.3372

Resultados de estimación del perímetro para Objeto K

FigKxN, N es el factor de magnificación, perímetro verdadero: N x 66.905549

en todas las tablas:

C8 = número de píxeles del 8-contorno, C4 = número de píxeles del 4-contorno

cand = número de puntos candidatos, polyg = número de vértices del polígono

iso = número de puntos finales de cantos localmente extremos ("isotéticos")

peaks = número de picos, collin = número de puntos colineales borrados por el algoritmo

compl = número de vértices complementarios

perim = perímetro estimado, error = error relativo de perímetro

N	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
20	1181	1716	1068	250	27	6	217	78	1324.72	1.0008
30	1767	2576	1616	298	27	6	265	190	1994.39	0.6363
40	2355	3436	2160	310	29	6	275	291	2662.60	0.5091
50	2941	4296	2708	450	29	6	415	366	3334.24	0.3301
60	3543	5156	3224	542	29	6	507	368	4004.22	0.2519
70	4129	6016	3772	718	29	6	683	379	4675.59	0.1666
80	4715	6876	4320	615	29	6	580	624	5342.51	0.1857
90	5317	7736	4836	675	29	6	640	650	6012.97	0.1416
100	5903	8596	5384	828	29	6	793	744	6684.41	0.0918
110	6491	9456	5928	843	29	6	808	847	7352.50	0.0966
120	7077	10316	6476	810	29	6	775	1010	8022.17	0.0810
130	7679	11176	6992	948	29	6	913	1029	8693.33	0.0505
140	8265	12036	7540	1188	29	6	1153	944	9365.48	0.0139
150	8851	12896	8088	1152	29	6	1117	1155	10033.58	0.0225
160	9453	13756	8604	1322	29	6	1287	1120	10704.98	0.0008
170	10039	14616	9152	1310	29	6	1275	1257	11374.67	0.0064
180	10627	15476	9696	1282	29	6	1247	1446	12043.03	0.0003
190	11213	16336	10244	1390	29	6	1355	1501	12712.18	0.0010
200	11815	17196	10760	1484	29	6	1449	1506	13384.22	0.0232
210	12401	18056	11308	1592	29	6	1557	1583	14052.31	0.0153
220	12987	18916	11856	1374	29	6	1339	1844	14719.23	0.0004
230	13589	19776	12372	1822	29	6	1787	1639	15396.13	0.0510
240	14175	20636	12920	1884	29	6	1849	1708	16063.83	0.0405
248	14639	21324	13368	1856	29	6	1821	1874	16598.77	0.0373

FigKx100 con rotaciones (perímetro verdadero sin rotación: 6690.5549)

angle	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
0	5903	8596	5384	828	29	6	793	744	6684.41	0.0918
5	5949	8612	5324	1092	37	6	1049	511	6697.58	0.1050
10	5977	8606	5255	1122	48	7	1067	467	6693.97	0.0510
15	5999	8590	5178	1048	47	8	993	485	6692.27	0.0257
20	6016	8554	5070	989	46	8	935	526	6687.85	0.0404
25	6050	8512	4920	1052	45	8	999	412	6689.54	0.0152
30	6074	8454	4756	978	46	6	926	444	6690.25	0.0046
35	6083	8400	4630	959	47	6	906	443	6687.90	0.0396

40	6090	8382	4582	957	45	6	906	423	6689.97	0.0087
45	6080	8354	4544	849	41	6	802	503	6689.99	0.0085
50	6085	8402	4630	972	46	4	922	438	6685.16	0.0807
55	6089	8454	4727	984	41	7	936	447	6692.41	0.0278
60	6066	8472	4810	980	42	6	932	458	6683.06	0.1121
65	6051	8512	4919	1073	41	7	1025	408	6693.20	0.0395
70	6019	8558	5076	1096	41	6	1049	444	6694.63	0.0609
75	5978	8590	5218	1097	41	8	1048	460	6693.11	0.0382
80	5938	8602	5326	1022	43	6	973	563	6689.34	0.0181
85	5930	8612	5363	1094	39	5	1050	490	6697.21	0.0995
90	5903	8596	5384	828	29	6	793	744	6684.41	0.0918

FigKx180 con rotaciones (perímetro verdadero sin rotación: 12042.998)

angle	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
0	10627	15476	9696	1282	29	6	1247	1446	12043.03	0.0003
5	10703	15498	9586	1738	38	8	1692	1050	12056.91	0.1155
10	10758	15492	9466	1826	51	4	1771	932	12059.00	0.1329
15	10790	15452	9321	1694	47	7	1640	963	12045.84	0.0236
20	10833	15404	9137	1520	44	9	1467	1103	12050.03	0.0583
25	10896	15332	8868	1679	45	6	1628	856	12055.12	0.1006
30	10921	15212	8579	1556	44	5	1507	916	12039.34	0.0304
35	10956	15132	8349	1514	45	7	1462	911	12052.23	0.0767
40	10954	15088	8264	1537	43	6	1488	873	12045.68	0.0222
45	10944	15040	8187	1301	38	7	1256	1039	12047.53	0.0376
50	10958	15138	8356	1541	39	8	1494	884	12052.28	0.0771
55	10954	15218	8526	1588	42	6	1540	891	12052.62	0.0799
60	10923	15262	8677	1552	45	5	1502	929	12042.94	0.0005
65	10893	15326	8862	1715	38	8	1669	855	12051.72	0.0724
70	10833	15406	9143	1755	42	7	1706	911	12056.71	0.1138
75	10760	15458	9394	1742	44	6	1692	946	12053.81	0.0897
80	10691	15486	9589	1653	46	5	1602	1103	12051.25	0.0685
85	10668	15500	9662	1755	38	6	1711	1025	12057.10	0.1171
90	10627	15476	9696	1282	29	6	1247	1446	12043.03	0.0003

Experimentos con m = 3, 4, 5 para FigKxN (perímetro verdadero: N x 66.905549)

N=20	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	1181	1716	1068	250	27	6	217	78	1324.72	1.0008
M=4:	1181	1716	1068	360	27	6	327	20	1347.80	1.7244
M=3:	1181	1716	1068	332	23	6	303	217	1331.88	0.4658

N=50	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	2941	4296	2708	450	29	6	415	366	3334.24	0.3301
M=4:	2941	4296	2708	906	29	6	871	19	3391.96	1.3954
M=3:	2941	4296	2708	591	23	6	562	778	3343.57	0.0510

N=80	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	4715	6876	4320	615	29	6	580	624	5342.51	0.1857
M=4:	4715	6876	4320	1456	29	6	1421	20	5426.87	1.3905
M=3:	4715	6876	4320	909	23	6	880	1266	5358.30	0.1094
N=100	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	5903	8596	5384	828	29	6	793	744	6684.41	0.0918
M=4:	5903	8596	5384	1787	29	6	1752	36	6794.64	1.5558
M=3:	5903	8596	5384	1229	23	6	1200	1478	6704.18	0.2037
N=150	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	8851	12896	8088	1152	29	6	1117	1155	10033.58	0.0225
M=4:	8851	12896	8088	2709	29	6	2674	31	10193.21	1.5682
M=3:	8851	12896	8088	1797	23	6	1768	2262	10059.81	0.2389
N=200	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
M=5:	11815	17196	10760	1484	29	6	1449	1506	13384.22	0.0232
M=4:	11815	17196	10760	3591	29	6	3556	36	13602.41	1.6538
M=3:	11815	17196	10760	2517	23	6	2488	2878	13421.12	0.2990

Resultados de estimación del perímetro para Objeto M

FigMxN, N es el factor de magnificación,

perímetro verdadero: es calculado en cada caso (tiene un arco de media elipse el cual es calculado con la fórmula de Ramanujan)

en todas las tablas:

C8 = número de píxeles del 8-contorno, C4 = número de píxeles del 4-contorno

cand = número de puntos candidatos, polyg = número de vértices del polígono

iso = número de puntos finales de cantos localmente extremos ("isotéticos")

peaks = número de picos, collin = número de puntos colineales borrados por el algoritmo

compl = número de vértices complementarios

perim = perímetro estimado, error = error relativo de perímetro

FigMxN sin rotación

N	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
50	2676	3876	2379	415	40	17	358	309	3005	2975	1.0018
60	3219	4650	2849	497	38	17	442	341	3607	3576	0.8356
70	3759	5424	3318	647	40	16	591	345	4208	4178	0.7083
80	4302	6204	3792	641	38	16	587	472	4809	4782	0.5729
90	4847	6980	4255	718	42	15	661	515	5411	5385	0.4850
100	5382	7758	4740	802	40	16	746	599	6012	5987	0.4176
110	5919	8536	5221	819	37	17	765	715	6614	6588	0.3880
120	6459	9314	5699	870	42	15	813	778	7215	7191	0.3397
130	7002	10094	6170	948	36	18	894	846	7817	7794	0.2834
140	7544	10868	6635	1088	37	17	1034	842	8418	8396	0.2556
150	8080	11646	7120	1110	39	16	1055	960	9019	8999	0.2233
160	8624	12422	7583	1179	39	17	1123	1005	9621	9601	0.2027
170	9162	13200	8064	1248	40	16	1192	1084	10222	10204	0.1775
180	9698	13976	8544	1254	40	16	1198	1196	10824	10804	0.1809
190	10237	14756	9026	1380	41	16	1323	1232	11425	11408	0.1514
200	10781	15532	9490	1421	39	16	1366	1292	12027	12010	0.1354
210	11321	16308	9963	1561	41	15	1505	1298	12628	12612	0.1250
220	11862	17088	10440	1500	41	16	1443	1440	13229	13215	0.1101
230	12406	17862	10899	1739	38	17	1684	1392	13831	13820	0.0797
240	12943	18640	11384	1787	43	14	1730	1450	14432	14420	0.0859
250	13482	19422	11864	1830	33	20	1777	1562	15034	15025	0.0610
260	14019	20196	12342	1871	40	16	1815	1655	15635	15625	0.0640
270	14562	20974	12812	1957	38	16	1903	1682	16237	16229	0.0465
280	15105	21754	13283	2013	34	19	1960	1745	16838	16832	0.0319
290	15642	22526	13758	2001	45	14	1942	1899	17439	17433	0.0387
300	16185	23308	14232	2033	37	18	1978	1997	18041	18036	0.0252
310	16724	24084	14708	2164	40	16	2108	2009	18642	18638	0.0244
320	17259	24860	15190	2298	39	16	2243	2025	19244	19240	0.0188
330	17798	25640	15672	2296	40	16	2240	2167	19845	19843	0.0113
340	18342	26418	16137	2347	35	19	2293	2208	20447	20446	0.0018
350	18882	27192	16608	2465	40	16	2409	2250	21048	21048	0.0014

360	19424	27972	17083	2423	39	17	2367	2381	21649	21650	0.0045
370	19967	28750	17550	2583	33	20	2530	2374	22251	22253	0.0112
380	20506	29526	18027	2656	38	17	2601	2427	22852	22855	0.0139
390	21044	30308	18512	2756	32	20	2704	2471	23454	23460	0.0287

FigMx200 con rotaciones (perímetro: 12026.58, imagen de 2410 x 2410 píxeles)

ángulo	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
0	10781	15532	9490	1421	39	16	1366	1292	12010	0.1354
5	10750	15460	9411	1873	52	13	1808	880	12018	0.0747
10	10723	15324	9192	1728	55	14	1659	952	12018	0.0732
15	10754	15168	8819	1618	58	13	1547	883	12008	0.1564
20	10791	15096	8599	1356	53	15	1288	1095	12009	0.1498
25	10864	15126	8511	1519	52	17	1450	886	12018	0.0688
30	10924	15162	8464	1460	55	16	1389	988	12003	0.1978
35	10982	15200	8422	1650	48	18	1584	795	12013	0.1155
40	10995	15254	8504	1558	54	18	1486	892	12008	0.1542
45	10980	15258	8547	1648	61	13	1574	883	12013	0.1157
50	10923	15204	8550	1609	54	16	1539	876	12015	0.0922
55	10834	15178	8679	1497	57	13	1427	994	12016	0.0886
60	10722	15218	8980	1595	54	16	1525	940	12009	0.1496
65	10672	15272	9190	1687	58	14	1615	919	12020	0.0510
70	10683	15368	9358	1712	52	16	1644	976	12018	0.0708
75	10716	15456	9471	1830	63	13	1754	961	12023	0.0274
80	10742	15540	9586	1674	60	14	1600	1065	12011	0.1255
85	10784	15566	9553	1604	52	15	1537	1093	12016	0.0906
90	10780	15532	9492	1425	40	16	1369	1293	12010	0.1403

FigMx300 con rotaciones (perímetro: 18040.87, imagen de 3610 x 3610 píxeles)

ángulo	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	perim	error
0	16185	23308	14232	2033	37	18	1978	1997	18036	0.0252
5	16231	23192	14112	2728	55	14	2659	1361	18039	0.0124
10	16102	22996	13775	2525	51	17	2457	1445	18048	0.0380
15	16149	22766	13224	2390	57	14	2319	1324	18037	0.0237
20	16198	22652	12897	1986	53	15	1918	1613	18033	0.0450
25	16300	22680	12748	2203	52	16	2135	1333	18034	0.0360
30	16409	22764	12700	2043	58	14	1971	1565	18034	0.0360
35	16487	22808	12628	2357	47	18	2292	1258	18038	0.0141
40	16507	22890	12752	2261	53	18	2190	1382	18029	0.0640
45	16481	22898	12822	2362	55	16	2291	1382	18036	0.0278
50	16395	22816	12828	2361	55	16	2290	1311	18041	0.0018
55	16256	22770	13013	2156	44	19	2093	1525	18036	0.0295
60	16104	22850	13482	2296	59	14	2223	1446	18041	0.0011
65	16021	22914	13775	2455	59	15	2381	1443	18046	0.0291
70	16037	23060	14033	2483	53	17	2413	1532	18045	0.0207
75	16085	23194	14209	2680	58	13	2609	1479	18052	0.0611
80	16128	23320	14376	2456	66	12	2378	1622	18035	0.0344
85	16176	23338	14313	2332	55	15	2262	1674	18026	0.0800
90	16185	23308	14234	2037	41	16	1980	2000	18035	0.0311

Resultados de estimación del perímetro para Objetos Q1, Q3

en todas las tablas:

C8 = número de píxeles del 8-contorno, C4 = número de píxeles del 4-contorno

cand = número de puntos candidatos, polyg = número de vértices del polígono

iso = número de puntos finales de cantos localmente extremos ("isotéticos")

peaks = número de picos, collin = número de puntos colineales borrados por el algoritmo

compl = número de vértices complementarios

perim = perímetro estimado, error = error relativo de perímetro

FigQ1 con parámetro creciente (perímetro verdadero es calculado en cada caso)

parámetros: a1 dado en la tabla, a2 = a1-10

a1	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
25	3084	4372	2577	516	35	3	478	253	3430	3430	0.0180
30	3812	5408	3193	620	35	3	582	320	4238	4239	0.0243
35	4539	6440	3803	719	36	3	680	393	5047	5049	0.0402
40	5263	7472	4419	841	36	3	802	446	5855	5859	0.0719
45	5988	8498	5022	969	37	2	930	491	6663	6667	0.0556
50	6713	9532	5640	1069	38	2	1029	570	7471	7476	0.0633
55	7443	10562	6239	1153	36	3	1114	649	8279	8287	0.0931
60	8174	11596	6845	1268	36	3	1229	695	9088	9098	0.1172
65	8898	12626	7457	1387	35	3	1349	763	9896	9908	0.1233
70	9626	13656	8061	1467	36	3	1428	843	10704	10717	0.1181
75	10350	14686	8674	1586	38	2	1546	899	11512	11524	0.1059
80	11076	15714	9278	1676	38	2	1636	971	12320	12334	0.1152
85	11808	16754	9893	1807	35	3	1769	1014	13128	13146	0.1369
90	12532	17782	10501	1922	36	3	1883	1066	13937	13956	0.1361
95	13260	18814	11109	1997	36	3	1958	1158	14745	14765	0.1378
100	13987	19846	11719	2114	36	3	2075	1225	15553	15575	0.1424
105	14710	20870	12322	2215	38	2	2175	1284	16361	16382	0.1294
110	15436	21908	12946	2317	38	2	2277	1354	17169	17192	0.1292
115	16167	22940	13547	2470	36	3	2431	1375	17978	18005	0.1500
120	16892	23972	14161	2561	36	3	2522	1464	18786	18814	0.1518
125	17620	25004	14769	2653	36	3	2614	1535	19594	19623	0.1469
130	18348	26032	15369	2786	36	3	2747	1574	20402	20434	0.1553
135	19070	27062	15986	2840	38	2	2800	1682	21210	21240	0.1390
140	19799	28094	16592	2973	38	2	2933	1724	22019	22050	0.1412
145	20525	29126	17203	3067	36	3	3028	1783	22827	22861	0.1514
150	21255	30160	17811	3169	36	3	3130	1856	23635	23671	0.1513

FigQ3 con parámetro creciente (perímetro verdadero es calculado en cada caso)

parámetros: a1 dado en la tabla, a2 = a1-30

a1	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
65	7798	11066	6538	1242	37	2	1203	651	8674	8683	0.1031
70	8523	12096	7148	1315	38	2	1275	746	9482	9492	0.0996
75	9251	13126	7752	1453	38	2	1413	779	10290	10301	0.1047
80	9980	14158	8358	1510	38	2	1470	870	11099	11112	0.1170

85	10706	15192	8974	1654	37	2	1615	916	11907	11921	0.1212
90	11433	16222	9580	1748	38	2	1708	987	12715	12730	0.1209
95	12159	17250	10184	1827	38	2	1787	1071	13523	13540	0.1248
100	12885	18282	10796	1951	38	2	1911	1125	14331	14350	0.1319
105	13613	19314	11404	2067	37	2	2028	1172	15140	15160	0.1325
110	14338	20348	12022	2190	38	2	2150	1225	15948	15969	0.1339
115	15067	21382	12632	2304	38	2	2264	1282	16756	16779	0.1383
120	15794	22408	13230	2400	38	2	2360	1369	17564	17589	0.1415
125	16520	23438	13838	2483	38	2	2443	1441	18372	18398	0.1389
130	17247	24472	14452	2579	38	2	2539	1515	19181	19207	0.1393
135	17973	25502	15060	2704	38	2	2664	1559	19989	20018	0.1445
140	18700	26538	15678	2835	38	2	2795	1612	20797	20828	0.1476
145	19425	27566	16284	2904	38	2	2864	1710	21605	21636	0.1440
150	20154	28596	16886	3032	38	2	2992	1740	22413	22447	0.1488

FigQ1 polígono para $m = 3, 4, 5$ (parámetro $a_2 = a_1 - 10$)

a1=30	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	3812	5408	3193	622	35	3	584	320	4238	4239	0.0242
M=4:	3812	5408	3193	1068	33	3	1032	28	4238	4300	1.4560
M=3:	3812	5408	3193	851	34	3	814	758	4238	4249	0.2567
a1=60	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	8174	11596	6845	1268	36	3	1229	695	9088	9098	0.1172
M=4:	8174	11596	6845	2281	36	3	2242	35	9088	9218	1.4350
M=3:	8174	11596	6845	1752	34	3	1715	1683	9088	9118	0.3372
a1=90	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	12532	17782	10501	1922	36	3	1883	1066	13937	13956	0.1361
M=4:	12532	17782	10501	3496	36	3	3457	39	13937	14140	1.4568
M=3:	12532	17782	10501	2637	34	3	2600	2626	13937	13986	0.3555
a1=120	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	16892	23972	14161	2561	36	3	2522	1464	18786	18814	0.1518
M=4:	16892	23972	14161	4721	35	3	4683	44	18786	19057	1.4453
M=3:	16892	23972	14161	3530	34	3	3493	3563	18786	18859	0.3675
a1=140	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	19799	28094	16592	2973	38	2	2933	1724	22019	22050	0.1412
M=4:	19799	28094	16592	5521	38	2	5481	56	22019	22340	1.4580
M=3:	19799	28094	16592	4131	36	2	4093	4178	22019	22100	0.3678

FigQ3 polígono para $m = 3, 4, 5$ (parámetro $a_2 = a_1 - 30$)

a1=70	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	8523	12096	7148	1315	38	2	1275	746	9482	9492	0.0996
M=4:	8523	12096	7148	2380	38	2	2340	40	9482	9616	1.4049
M=3:	8523	12096	7148	1803	36	2	1765	1784	9482	9513	0.3204

a1=80	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	9980	14158	8358	1510	38	2	1470	870	11099	11112	0.1170
M=4:	9980	14158	8358	2789	38	2	2749	36	11099	11261	1.4583
M=3:	9980	14158	8358	2120	36	2	2082	2072	11099	11136	0.3383

a1=90	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	11433	16222	9580	1748	38	2	1708	987	12715	12730	0.1209
M=4:	11433	16222	9580	3189	38	2	3149	43	12715	12897	1.4295
M=3:	11433	16222	9580	2417	36	2	2379	2386	12715	12758	0.3410

a1=100	C8	C4	cand	polyg	iso	peaks	compl.	collin	true	perim	error
M=5:	12885	18282	10796	1951	38	2	1911	1125	14331	14350	0.1319
M=4:	12885	18282	10796	3597	37	2	3558	147	14331	14540	1.4552
M=3:	12885	18282	10796	2665	36	2	2627	2746	14331	14381	0.3475