



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

***ANÁLISIS Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE
ESTRUCTURAS DINAMICAS NO LINEALES A
TRAVES DE METODOS DE RELAJACION
ENERGETICA***

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

ING. JOSE MANUEL PAZ FERNANDEZ



Resumen

En el presente trabajo se pretende estructurar la información que hasta hoy se tiene (al alcance) respecto al análisis estructural de elementos viga y placa, para establecer un procedimiento de aplicación a estructuras complejas, principalmente aeronáuticas.

El capítulo 1 describe una breve historia de lo que ha sido la Aeronáutica en México, como se inicia y como en los últimos años va decayendo. Además, muestra los conceptos básicos necesarios para el diseño de una aeronave (estructuralmente), donde se definen los tipos de estructuras, los elementos que la componen, cargas que soportan, etc. Y por último, se dan una introducción de lo que es el Método del Elemento Finito.

En el capítulo 2 se definen los conceptos de viga y placa, estableciendo la diferencia entre el caso lineal y el no lineal.

El capítulo 3 desarrolla el concepto matemático de interpolación de los elementos viga y placa, iniciando con la interpolación de Lagrange, para elementos que sufren únicamente desplazamientos lineales, hasta la interpolación de Hermite, donde ya intervienen desplazamientos angulares. Este capítulo es muy extenso, debido a la gran cantidad de elementos que se pueden formar y a la complejidad que se presenta al ir aumentando el número de nodos de dicho elemento, así como los grados de libertad que tiene. Aquí también se describen los criterios básicos en la modelación de una estructura, para evitar errores considerables en la aproximación de la solución.

El capítulo 4 muestra a grandes rasgos la teoría utilizada en el análisis de vigas y placas. Todos aquellos conceptos que se han venido utilizando antes de introducir el método del elemento finito en este campo. Cabe mencionar que estos conceptos teóricos nos limitan en el análisis de estructuras complejas, ya que se han establecido bajo ciertas consideraciones particulares, y en muchos casos se ha recurrido al análisis experimental para soportar sus resultados. Es muy importante que cada resultado obtenido, ya sea por análisis tradicional, experimental o computacional (MEF), se compare con otro resultado obtenido con otro método de solución; y se recomienda que la comparación sea: tradicional-experimental o computacional-experimental. Hoy en día, la segunda opción es más viable.

En los capítulos 5 y 6 se desarrolla toda la formulación de los métodos energéticos incluyendo el método del Elemento Finito, iniciando con el caso general (cuerpo

sólido) hasta reducirlo a los casos particulares de elementos viga y placa. La formulación se extiende del caso lineal hasta el caso no lineal donde se contempla, principalmente la no linealidad de un material.

Finalmente, en el capítulo 7 se muestran varios ejemplos de la aplicación del método para la solución de problemas estructurales que contengan elementos viga y placa para problemas complejos por medio del método del Elemento Finito y el cálculo de las frecuencias en estos elementos.

Abstract

In the present work it is wanted to structure the information available until today related to the structural analysis of elements beam and plate, in order to establish an application procedure to complex structures, specially on aircraft structures.

Chapter 1 describes a brief history of the Mexican aviation, from his beginnings to his declination on these last years. In addition, it includes the basic concepts for the aircraft structure design, types of structures, elements that compose it, supported loads, etc. At the end of this chapter, its presents an introduction of the Finite Element Method.

Chapter 2 presents the definition of beam and plates elements, establishing the difference between the linear case and non linear case.

In the Chapter 3 develop the mathematical concept of interpolation on beam and plate elements, initiating with the Lagrange interpolation, for elements that suffers only linear displacements, up to Hermite interpolation, where are involved angular displacements. This chapter is very extensive, due to the large number of elements that can be formed and to the complexity resulting from increase the number of nodes of this element, as well as the degrees of freedom that it has. Here is also described the basic criteria in the modelling of a structure, to avoid considerable errors in the approach of the solution.

Chapter 4 shows in general terms the theory used in the beams and plates analysis. All those concepts that have been used before the introduction of the Finite Element Method to this field. It is worth pointing out that these theoretical concepts limit to us in the analysis of complex structures, since they have settled down under certain particular considerations, and in many cases it has resorted to the experimental analysis to support his results. It is very important that each obtained result by means traditional, experimental or computational analysis (MEF), must be compared with another result obtained with another method of solution; it is recommended that the comparison must be: traditional-experimental or computational-experimental. Today, the second option is more viable.

In chapters 5 and 6, all energetic formulations including the Finite Element Method are developed, starting with the general case (solid body) until reducing it to the particular cases of beam and plate elements. The formulation extends from the linear case to the nonlinear case, where it is contemplated mainly the nonlinearity of material.

Finally, in Chapter 7 are several examples of the application of the method for the solution of structural problems that contain beam and plate elements for complex problems by means of the Finite Element Method and the calculation of the frequencies in these elements.

INDICE

SECCIÓN	PAGINA
ÍNDICE	i-iii
ÍNDICE DE FIGURAS	iv
INDICE DE TABLAS	v
SIMBOLOGÍA	vi-viii
RESUMEN	ix
ABSTRACT	ix
INTRODUCCIÓN	x

INDICE

CAPITULO 1 ESTADO DEL ARTE	PAGINA
1.1 Breve historia de la aeronáutica en México	1
1.2 Estructuras aeronáuticas	6
1.3 El método del elemento finito	16
CAPITULO II CONCEPTOS GENERALES	21
2.1 Elementos vigas.	21
2.1.1 Caso lineal.	22
2.1.2 Caso no lineal.	25
2.2. Elemento placa.	25
2.2.1 Caso lineal.	26
2.2.2.Caso no lineal	27
CAPITULO III INTERPOLACIÓN Y MODELACION.	30
3.1 Introducción.	30
3.2 Descripción matemática.	39
3.2.1 Condiciones de convergencia.	40
3.2.2 Ecuaciones que gobiernan a los problemas con valores en la frontera.	42
3.3 Interpolación de barras.	44
3.3.1 Interpolación de barras.	44
3.3.1.1 Elemento cuadrático en 1D — C^0	48
3.3.1.2 Elemento triangular — C^0	62
3.3.1.3 Elemento cuadrilateral C^0	75
CAPITULO IV METODO ANALÍTICO DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS Y PLACAS.	89
4.1.Principios generales de elasticidad.	89
4.1.1 Ecuaciones de equilibrio.	90

4.1.2 Relaciones de desplazamiento-deformación.	94
4.1.3 Relaciones esfuerzo-deformación(ecuaciones de estado).	96
4.1.4 Ecuaciones de compatibilidad.	97
4.2 Análisis clásico de vigas.	98
4.2.1 Análisis de vigas curvas.	107
4.2.2 Vigas sometidas a flexión.	109
4.2.3 Vigas sometidas a estado de esfuerzo compuesto	118
4.2.4 Vigas estáticamente indeterminadas.	119
4.2.5 Vigas continuas	123
4.3 Análisis clásico de placas	127
4.3.1 Placas circulares	128
4.3.2 Análisis y simplificación de placas.	132
CAPITULO V ANÁLISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS	145
5.1 Tipos de análisis.	145
5.1.1 Análisis del eigenvalor.	146
5.1.2 Análisis de la respuesta a la frecuencia	147
5.1.3 Análisis de la respuesta transitoria.	149
5.2 Ecuaciones dinámicas de movimiento.	150
5.2.1 Matrices masa consistente y concentrada.	153
5.2.2 Matrices masas consistentes en el sistema coordinado global.	155
5.2.3 Matriz masa consistente de un elemento eslabón articulado.	156
5.2.4 Matriz masa consistente de un elemento armadura.	157
5.2.5 Matriz masa consistente de un elemento membrana triangular.	160
5.2.6 Matriz masa consistente de un elemento flexion triangular.	161
5.2.7 Matriz masa consistente de un elemento tetraédrico.	163
5.3 Análisis de vibraciones libres.	164
5.4 Condensación del problema eigenvalor(economizador eigenvalor).	165
5.5 Calculo de la respuesta dinámica usando el método del elemento finito.	170
5.5.1 Las ecuaciones desacopladas de movimiento en un sistema no amortiguado.	170
5.5.2 Ecuaciones del movimiento desacopladas de un sistema amortiguado.	173
5.6 Optimización del método del elemento finito en análisis estructural.	174
5.7 Los pasos de análisis en dinámica de estructuras.	175
5.8 Proceso de salida y evaluación de resultados.	176
CAPÍTULO VI ANÁLISIS DINAMICO NO LINEAL DE VIGAS, PLACAS Y CASCARON	169
6.1 Introducción.	169
6.2 Teorías de vigas.	171
6.2.1 Suposiciones de teorías de vigas.	171
6.2.2 Teoria de Timoshenko(viga cortante).	172
6.2.3 Teoria de Euler-Bernoulli.	173
6.2.4 Teoria discreta de Kirchhoff y Mindlin-Reissner.	175
6.3.-Viga continuo basado.	175
6.3.1 Definiciones y nomenclatura.	175
6.3.2 Suposiciones.	177

6.3.3 Movimientos.	178
6.3.4 Fuerzas nodales.	180
6.3.5 Actualizaciones constitutivas.	181
6.3.7 Matriz masa	183
6.3.8 Ecuaciones de movimiento.	185
6.3.9 Rigidez tangente.	185
6.4.-Análisis de la viga CB.	186
6.4.1 Movimiento.	186
6.4.2 Velocidades de deformación.	189
6.4.3 Esfuerzos resultantes y fuerzas internas.	190
6.4.4 Fuerzas externas resultantes.	192
6.4.5 Condiciones de frontera.	193
6.4.6 Forma débil.	194
6.4.7 Forma Fuerte.	194
6.4.8 Aproximación del elemento finito.	196
6.5 IMPLEMENTACION DEL ELEMNTO CONTINUO BASADO CASCARON	199
6.5.1 Suposiciones en teorías clásicas del cascaron.	199
6.5.2 Coordenadas y definiciones.	200
6.5.3 Suposiciones.	201
6.5.4 Sistemas coordenados.	201
6.5.5 Aproximación del elemento finito de movimiento.	202
6.5.6 Coordenadas locales.	204
6.5.7 Ecuaciones constitutivas.	206
6.5.8 Espesores.	206
6.5.9 Fuerzas nodales maestras.	207
6.5.10 Matriz masa .	207
6.5.11 Ecuación del momentum discreto.	208
6.5.12 Rigidez tangente.	209
6.5.13 Formulación de cinco grados de libertad.	209
6.5.14 Relaciones largas.	210
6.5.15 Teoremas de Euler.	210
6.6 TEORÍAS DE CASCARON CB	212
6.6.1 Movimiento.	212
6.6.2 Velocidades de deformación	212
6.6.3 Esfuerzos resultantes.	214
6.6.4 Condiciones frontera.	216
6.6.5 Inconsistencias e idesioncracias de las teorías estructurales.	218
6.7 CORTANTE Y MEMBRANAS SUJETAS	219
6.7.1 Descripción y definiciones.	219
6.7.2 Cortantes sujetos.	220
6.7.3 Membranas sujetadas.	223
6.7.4 Eliminación de las sujeciones.	225
6.8 SUPOSICIONES DE LOS ELEMNTOS FINITOS	226
6.8.1Suposiciones de deformación de cuatro nodos cuadrilaterales.	226
6.8.2 Rango de elementos.	228
6.8.3 Nueve nodos cuadrilaterales.	229
6.9.-Elementos cuadratura de un punto.	230

CAPITULO VII CASOS DE ANÁLISIS DINAMICO .	234
Introducción	234
CASO I	235
CASO II	239
CASO III	242
CASO IV	245
CASO V	250
Conclusiones	
Trabajos futuros	

SIMBOLOGIA

q	Rapidez o flujo de calor
k	Conductividad térmica
A	Sección transversal que atraviesa el flujo de calor
dT/ dx	Gradiente de temperatura con respecto a la posición
h	Coefficiente de transferencia de calor por convección
T_s	Temperatura de la superficie sólida
T_∞	Temperatura del fluido
σ	Constante de Boltzmann
t	Tiempo
\hat{n}	Vector unitario normal a la superficie isotérmica
$\partial T / \partial n$	Cambio diferencial de la temperatura a lo largo de la normal
q'	Flujo de calor con generación de calor interna
ρ	Densidad del fluido
c	Calor específico
α	Difusividad térmica ($k / \rho c$)
$\partial T / \partial t$	Variación de la temperatura con respecto al tiempo
$\nabla^2 T$	Operador Laplaciano
$\partial T / \partial r$	Variación de la temperatura radialmente
c_1, c_2	Constantes de integración
L	Longitud del sistema
R	Resistencia térmica (L / kA)
$1 / R$	Conductancia térmica (kA / L)
δ	Espesor
P	Perímetro
Pdx	Área de convección
m^2	Cambio de variable ($m^2 = hP / kA$)
T, u	Temperatura
b	Ancho de la aleta
B^2	Cambio de variable ($B^2 = 2Lh / k\delta$)
I_0, K_0	Funciones modificadas de Bessel de orden cero
λ	Constante de integración
n	Número entero positivo
$R\phi$	Solución producto para la ecuación de Laplace
T_z	Temperatura media radial
J_0	Parámetro de la función de Bessel
ϕ	Angulo entre el eje x y la proyección de r sobre el plano xy en una esfera
ε	Transformación para los coeficientes de Legendre
θ	Relación de temperaturas
a, b, c	Coefficientes polinomiales
C	Constante evaluada en la solución exacta
$n(x)$	Función continua
L	Lado de la placa

Y_i	Es la ordenada que corresponde a Y_i
X_i	Punto central en una malla o red
i, j	Nodo en una malla o red, que representan la temperatura en un punto del sistema
p	Punto nodal (i, j, k)
m	Nodos vecinos del nodo p
Δt	Intervalo de tiempo
U	Temperatura (en el Método Explícito de Dirección Alternada)
B_i	Número de Biot
Q	Cantidad de calor
L	Operador lineal de conducción de calor
$[\]$	Vector renglón o matriz cuadrada o rectangular
$\{ \}$	Vector columna, aunque en ocasiones se escribe horizontalmente.
A	Área de la sección transversal.
A_n	Coefficiente " n " del polinomio de interpolación del elemento lineal para el Problema de esfuerzos Térmicos En Tuberías.
$[B]$	Matriz con las derivadas de las funciones de forma.
D	Diámetro exterior.
$[D]$	Matriz de propiedades de los elementos.
e	Elemento e de la red
F	Carga Aplicada.
$[F]$	Matriz de flexibilidades.
$\{f\}$	Vector columna global de fuerzas.
$\{f^{(e)}\}$	Vector columna local de fuerzas.
$\{g\}$	Vector columna gradiente.
h	Coefficiente de convección.
i, j, k	Nodos i, j, k
k_{xx}, k_{yy}	Conductividades térmicas.
$[k]$	Matriz de conductividad global.
$[k^{(e)}]$	Matriz de conductividad del elemento e .
L	Longitud del elemento.
L_i, L_j, L_k	Coordenadas de área.
MEF	Método del Elemento Finito
TIF	Transforma Integral Finita
MDF	Método de las Diferencias Finitas
N_i, N_j, N_k	Funciones de forma.
T_∞	Temperatura del Medio
T_s	Temperatura en la superficie.
$\{T\}$	Vector Temperatura
Δ^n	Elemento n de la red.
$\Delta^{(e)}$	Dominio del elemento e .
$\partial\Delta^{(e)}$	Frontera del elemento e .
δ	Operador variacional.
$\{\phi\}$	Vector columna de valores nodales.
ϕ	Polinomio de interpolación.
Ω	Dominio en estudio
$\partial\Omega$	Frontera del dominio o diferencial del dominio en estudio.
$\tilde{\Omega}$	Dominio discreto.
MEF-MDF	Método del elemento finito y método de las diferencias finitas

BEM	Boundary element method
W, w	Función de Green
Γ	frontera
EIF	Ecuación integral finita
$C(P), C(\varepsilon), \alpha$	Valor que toma EIF según en la posición que se encuentre
\tilde{C}_j	Cuerda
u_0	Temperatura
q_0	Flujo de calor
u^*	Temperatura desconocida
q^*	Flujo de calor desconocido
$p(\xi, \eta)$	Singularidad en p
$\delta(\xi - x, \eta - y)$	Función de Dirac
L	Operador de Laplace, Poisson, Fourier
L^*	Operador adjunto
G	Función de Green
G^*	Función adjunta de Green

CAPITULO I.

ESTADO DEL ARTE.

1.1.-BREVE HISTORIA DE LA AERONÁUTICA EN MÉXICO.

Al igual que en todos los países, los mexicanos han tenido un respeto y anhelo por el vuelo. Iniciando desde la mitología mexicana; como ejemplo, dando culto a seres voladores, encontramos la serpiente emplumada, el soldado águila y los voladores de Papantla con más de 4 siglos de antigüedad. Desde la época prehispánica se han hecho infinidad de intentos por volar, pero solo hasta 1842 el estudiante de ingeniería, de la Real y Pontificia Escuela de Minas, Benito León Acosta fue el primer aeronauta mexicano al realizar su primera travesía desde la ciudad de México hasta la Hacienda del Espejo, cercana a Querétaro, en un globo inflado con aire caliente. De ahí, el vuelo en globo se convirtió en un deporte regulado por un bando de policía, pues solo podían volar quienes tuvieran autorización oficial. Con esto, en 1844, Don Joaquín de la Cantolla y Rico funda la Empresa Aerostática Mexicana, la primera en el continente americano, quien realizó el diseño y proyecto del aerostato dirigible en 1862. Construyó tres globos, el Moctezuma I el Moctezuma II y el Vulcano, que terminaron consumidos por el fuego en aparentes accidentes. En 1895, el estudiante de ingeniería Luis Brigas redacta artículos sobre aspectos técnicos de aerostación y aviación dando una importante aportación a la aeronáutica. Julio Fuentes, en 1907, en Sombrerete, Zacatecas, construye y vuela un aparato cuya característica eran sus gruesas alas de manta. Pero el primer mexicano en idear y construir planeadores en México fue Miguel Lebrija, utilizando un automóvil para hacer que su aparato se elevara; por esas fechas, los hermanos Juan Pablo y Eduardo Aldasoro hacían volar sus primeros planeadores en las cercanías del Panteón Francés de La Piedad, aprovechando las corrientes de aire; mientras que en Hidalgo, Juan Guillermo Vil1asana deslizaba su planeador sobre ruedas y cuesta abajo en la Hacienda de San Juan de la Labor. Poco después, en 1908, el ingeniero Alfredo Robles Domínguez escribe un libro de carácter científico llamado "Tratado de Locomoción Aérea", que fue el primer tratado científico de aeronáutica publicado en México, relacionado con las técnicas más adecuadas sobre ese tipo de navegación, después de lo cual se dedicó a realizar pruebas en su hangar-taller. En 1909 Alberto Braniff realizaría en nuestro país la hazaña de remontar el vuelo independiente en los llamados Llanos de Balbuena, los cuales llegarían a convertirse en el Centro Nacional de Aeronáutica (ver figura 1.1). El 8 de enero de 1910, en un aparato de fabricación francesa (Voisin) y bautizado como "Avión", Braniff logró un récord mundial de altura sobre el nivel de mar (25 mts en la Capital).

A este acontecimiento le siguieron dos exhibiciones aéreas de importancia; la última llevó como pasajero al futuro presidente de México, don Francisco I Madero, quien impresionado por la experiencia da el apoyo gubernamental a la aviación otorgando becas de aprendizaje de vuelo para Alberto y Gustavo Salinas, Juan Pablo y Eduardo Aldasoro y Horacio Ruiz, así como apoyo para la compra de aviones de fabricación norteamericana.

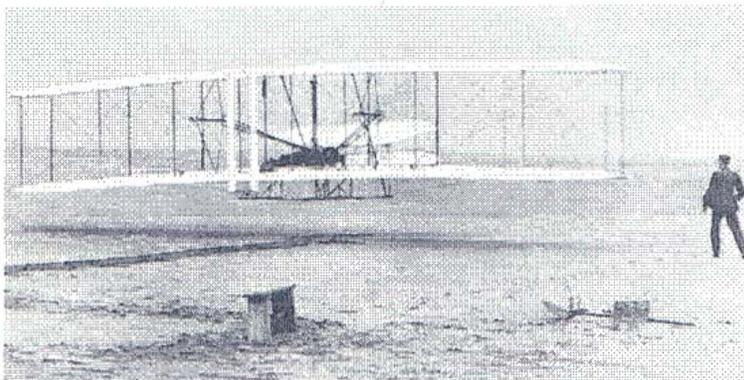


Figura 1.1.-Inicio del vuelo en los Llanos de Balbuena

El 11 de abril de ese mismo año, Juan G. Villasana, a la postre considerado como el fundador de la aviación civil mexicana, probó en su ciudad natal de Pachuca su primer avión con motor *Curtis* de 15 H.P. con relativo éxito (ver fig.1.2), pero que le serviría para construir su primer helicóptero. Los hermanos Aldasoro se ocuparon de las tareas para lograr deshacerse de la molesta dependencia de los caprichosos vientos, una vez lograda la relativa estabilidad de los planeadores, en enero de 1911 terminaban el primer motor aéreo que se elaboraba en México, de 2 cilindros opuestos, 60 H.P. y 900 r.p.m., con un peso de 3 kg/HP. A fines de 1911, Villasana, asociado con el ruso Santiago Poveregsky, estableció su taller y fábrica de aviones en la calle de Las Vizcaínas de donde saldría su primer avión hecho en México, el "Latinoamérica #1", el cuál solo contaba con su motor Ansani de 80 H.P. como el único componente importado. En 1912 se le encomienda a Juan G. Villasana la construcción de cinco aeroplanos destinados al Ejército, pero al iniciarse el movimiento revolucionario, se dan a conocer instrucciones gubernamentales suspendiendo toda actividad aérea, disposición que es anulada por el usurpador Huerta, quien inquieto por las posibilidades que se le habían sugerido al que fuera su jefe, el presidente Madero, ordena una demostración de la reciente tecnología. El 7 de abril de 1913 con ojos asombrados, los militares recorren el velo que cubría la más poderosa arma de guerra, el bombardeo aéreo, aportación tristemente celebre de México a la aviación mundial. Los hombres que lo realizaron fueron Miguel Lebrija como primer piloto de la aeronave de combate y Juan Guillermo Villasana primer artillero aéreo; la máquina fue una Depensussin con 80 H.P., biplaza y dos bombas Martín-Hale.

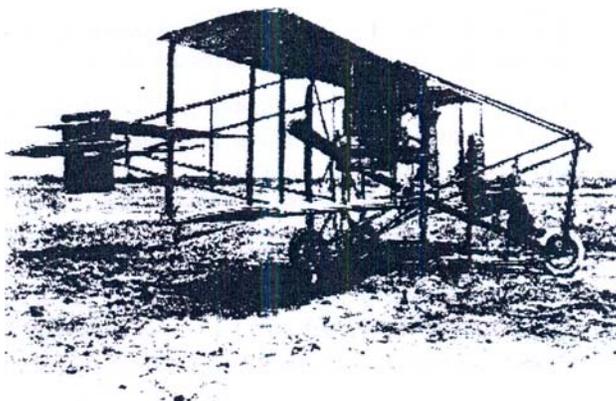


FIG.1.2.-PRUEBA EXPERIMENTAL DEL AVION CON MOTOR CURTIS.

A principio de 1914 el mexicano Alberto Braniff y Don Cantolla y Rico vuelan a bordo de un fino globo francés de gas tipo Gordon-Bennett de 2000 m^3 de capacidad, desde Paseo de la Reforma con rumbo a las inmediaciones de Tlalpan. El 5 de febrero de 1915, por instrucciones del jefe del ejército constitucionalista, Venustiano Carranza, se crea la Fuerza Aérea Mexicana (FAM), designando jefe del arma al mayor Alberto Salinas. En ese mismo año, se forma la Escuela de Aviación y los Talleres de Aplicación Aeronáutica, quedando al frente Francisco Santarini.

El 15 de noviembre fueron inaugurados los Talleres Nacionales de Construcciones Aeronáuticas (TNCA) y el Campo de Maniobras de la Escuela de Aviación Militar, la primera en su género en Latinoamérica. Por lo tanto, las construcciones aeronáuticas en México se iniciaron formalmente en el año de 1915, colocando la industria aeronáutica nacional en un lugar muy destacado a nivel mundial a principio de los años 20.

Santarini y Villasana iniciaron en México una serie de aportaciones tecnológicas que dieron un gran impulso a la aviación civil y militar a nivel mundial. Juntos construyeron el biplano "Serie A" número 1 con motor Aztatl. Para 1917 construyeron el avión "Serie C" que fue el primero en Latinoamérica con fuselaje y alas de estructura metálica, así como partes del motor Anzani-Aztatl (francés). Para mejorarlo se modificó el sistema de enfriamiento. Las partes que se fabricaban eran el cárter, cilindros, tiradores de válvulas, bielas y bujías. Sobre la base de un avión Serie A, Santarini fabricó el primer hidroavión en Veracruz. En esa época se trataba de encontrar una hélice que pudiera tener un rendimiento adecuado para las condiciones de la ciudad de México. Debido a la altitud, la industria aérea nacional da un nuevo paso a nivel mundial a cargo, otra vez, de Villasana, quien ahora diseña y construye la revolucionaria hélice Anáhuac, que tenía características únicas para los vuelos a gran altitud, proporcionando muchas más revoluciones a los motores. Por su éxito fueron exportadas hasta Japón.

México hacía nuevamente historia el seis de julio de 1917 en Pachuca, donde se efectúa el primer servicio postal de ruta aérea en el mundo. El 2 de septiembre se lleva a cabo el primer vuelo de larga distancia entre la ciudad de México y Cd. Juárez, a bordo del monoplano rígido de ala alta llamado "Coahuila" pilotado por el célebre Emilio Carranza. Él mismo logra la hazaña México-Washington D.C.; fue el primer avión mexicano que se posaba en suelo norteamericano. Luego, el 26 del mismo, el Águila Solitaria Mexicana, como ya se conocía internacionalmente a Carranza, llega a Nueva York, siendo homenajeado grandemente por los habitantes de aquella ciudad. Otro grande fue el célebre Francisco Sarabia, que con su nave Conquistador del Cielo (un GEE-BEE de alta velocidad), bate los récords entre México y Los Ángeles, México-Chetumal, México-Mérida y México-Guatemala.

En 1918 se le otorga el título de ingeniero en aeronáutica a Juan Guillermo Villasana durante su estancia en la American School of Aviation en Buffalo, N.Y., donde adquirió materiales aeronáuticos y estudió los nuevos tipos de aviones. En ese mismo año estudió en Texas las características y funcionamiento de los motores Liberty y los sistemas de enseñanza en el campo militar de Kelly. No fue sino hasta 1920, cuando queda formalmente incorporada al régimen del Estado la aeronáutica civil, adscrita a la Secretaría de Comunicaciones bajo el mando de Juan G. Villasana. En este período se siguen forjando otros grandes diseñadores y constructores de aeronaves, como Angel Lascurain, el general Juan F. Azcárate y sus ideas de acciones "a la medida", Salvador Mariscal Flores con el malogrado Mariscraft, avión para vuelos intercontinentales y el ingeniero Alberto Barrera con la mayor experiencia en aeronaves.

A finales de los años veinte el Ingeniero Azcárate creó la fábrica de aviones "Juan F. Azcárate S. En C. ", con participación de Abelardo L. Rodríguez. El primero de julio de 1928 por decreto presidencial se crea la Dirección General de Aeronáutica Civil. La carrera de Ingeniería Aeronáutica se funda el primero de febrero de 1937 por el ingeniero León Avalos y Vez; cofundadores de la carrera fueron Manuel Cerrillo, Juan Brelivet y Angel Calvo. El 11 de diciembre de 1958 se funda la fábrica de aviones "Lockheed-Azcárate" al comprar Azcárate los derechos de fabricación de un avión utilitario que había sido fabricado por Al Mooney

TRATADOS DE BUCARELLI

El 27 de mayo de 1921 el Departamento de Estado en Washington declaró que el gobierno de los Estados Unidos se abstendría de reconocer al gobierno de Obregón hasta que ambas partes firmasen un tratado de amistad y comercio. El tratado estipulaba que las propiedades de los norteamericanos no estaban nunca sujetas a confiscación, aunque podría ejercitarse el derecho de expropiación por causa de utilidad pública, no sin el pago inmediato de una justa compensación, ya que en el artículo 27 constitucional se declaran propiedad de la Nación los mantos petrolíferos del subsuelo y el 27 de junio de 1921 que no tendría efecto retroactivo.

Tal fue la inconformidad de los norteamericanos y la desesperación de Obregón por obtener el reconocimiento, que en abril de 1923 se gestionó la reunión de comisionados mexicanos y norteamericanos que dieron nacimiento a las Conferencias de Bucarelli. Las juntas de los comisionados se iniciaron el 14 de mayo de 1923, en la casa número 85 de la calle de Bucarelli, en la ciudad de México y se prolongaron hasta el 15 de agosto siguiente.

El tema petrolero ocupó las primeras sesiones, siguiendo con el tema agrícola. Las dos convenciones que forman parte de los Tratados de Bucarelli fueron: la convención especial de reclamaciones y la convención general de reclamaciones. La primera se refiere a las reclamaciones provenientes de pérdidas o daños sufridos por ciudadanos norteamericanos a consecuencia de actos revolucionarios dentro del período comprendido desde el 20 de noviembre de 1910 hasta el 31 de mayo de 1920 (derrocamiento de Carranza), la segunda que abarca el período desde el 4 de julio de 1868 trata sobre la indemnización también de los ciudadanos norteamericanos por parte de México y viceversa por pérdidas y daños no incluidos en la primera convención.

Existió un pacto extraoficial que contemplaba una solución práctica a los conflictos petroleros y agrario. Este pacto se refiere a la forma en que el gobierno mexicano habría de aplicar la Constitución de 1917 a los Estados Unidos. El 31 de agosto de 1923 deciden reanudar sus relaciones diplomáticas. Obregón había obtenido (según él) un triunfo rotundo y aplastante, sin contraer ningún compromiso. Sin embargo, después de firmadas las convenciones, faltaba la ratificación del senado para que éstas pudieran ser consideradas como tratados; dicha ratificación le era urgente solamente a Obregón, ya que a principios de diciembre de 1923 había estallado la rebelión Delahuertista y necesitaba la ayuda del gobierno americano. Algunos senadores no se mostraban dispuesto a ello y el entonces secretario de relaciones exteriores trató de convencer a los senadores a aceptar firmar, obteniendo una rotunda negativa que dio como resultado el surgimiento de hechos reprobables, incluso hasta asesinatos de los mismos senadores. A fin de cuentas, en febrero de 1924, se firman las convenciones. El gobierno de Washington satisfecho ya con la ratificación de los convenios, otorgó aviones y armas a Obregón para que acabara con la rebelión de De La Huerta.

De todo lo anterior se obtiene que los Tratados de Bucarelli consisten en un pacto extraoficial y dos tratados solemnes que nunca se ratificaron por los senados de ambos países. Con el pacto

extraoficial México se obligó a no dar efecto retroactivo al Artículo 27 Constitucional en materia de petróleo (sin embargo ya existía un fallo de la Suprema Corte, de 1921, en este sentido) y a indemnizar en efectivo a los norteamericanos por toda expropiación agraria que tuviera otro objeto que la dotación ejidal o que, persiguiendo ese fin, excediera las 1755 hectáreas. El pacto extraoficial fue sin duda una violación a la Constitución Mexicana y el punto crucial donde creemos comenzó a gestarse todo el misterio que durante muchos años cubrió a los Tratados de Bucarelli (y sigue actualmente). Cabe mencionar que después de la firma dichos Tratados, se dieron una serie de sabotajes que afectaron muchos de los proyectos que estaban en desarrollo, así como el retiro de apoyo del Gobierno de México a dichos proyectos.

ÚLTIMOS LOGROS

En 1967 el médico mexicano Alejandro Elizondo, gran aficionado al aeromodelismo, logró construir el Anáhuac T A- 70 "Tauro" para fumigación. El proyecto aerodinámico estuvo a cargo de los ingenieros Alejandro Betancourt y Amo Gjumlich. Los cálculos de construcción fueron obra de los ingenieros Cesar Trujillo y David Zamora. El prototipo se terminó en agosto de 1968 y a fines de 1969 se le entregó el certificado de aeronavegabilidad DGAC-I. Para ese entonces, el hombre pisaba la luna y estábamos a punto de entrar a una nueva década que se significaría por la decisión de la carrera de ingeniería aeronáutica de retomar las construcciones aeronáuticas.

Así en 1970 se construyó el avión fumigador "Bárceñas" construido por el mecánico de aviación del mismo nombre, en el complejo IUSA de Uruapan, Michoacán. Posteriormente vino el "CHAC", derivado del Bárceñas. Este proyecto fue el primero al que se le invirtió más dinero proveniente de la misma fuente de fabricación y con más apoyo humano, junto con un estudio de mecánica de vuelo por parte de la Universidad de Madrid. Posteriormente surgió un proyecto muy ambicioso presentado por el ingeniero César Trujillo en 1975, el "Nauti", avión

semimonocoque utilitario parecido al Domier 228. El Nauti se vio limitado por falta de presupuesto como único obstáculo para continuar con el proyecto. Este proyecto fue un buen intento para disminuir de alguna forma la dependencia tecnológica que venimos arrastrando desde la segunda década del siglo, en la cuál nuestra industria aeronáutica no tenía una diferencia tan grande comparada a las demás naciones. El Nauti dio origen al proyecto "Tonatiuh" iniciado en enero de 1979. Era un avión tipo STOL (Short Take Off and Landing) de dos plazas y tren convencional. El proyecto fue adquirido por la Secretaría de Marina. El mismo año se firmo un acuerdo con la SARH para el proyecto "Tlaloc" que sería un avión de control remoto y que serviría para la estimulación de lluvias.

En la década de los 80 se trataron de llevar a cabo varios proyectos con alumnos del IPN, pero todo quedó solo en proyectos. Se trabajó en el proyecto "Tlaloc II" en cooperación con la UNAM, trabajo que consistió en el diseño de un avión a control remoto para la toma de fotografías a gran altura.

DISEÑO DEL ACR-TLALOC II

El Programa ACR- TLALOC II es un desarrollo tecnológico con una fuerte dosis de investigación aplicada que opera en un formato de cinco proyectos divididos por especialidades y cuyo objetivo final es el diseño y construcción de una aeronave operada por control remoto, la cual tendrá una serie de aplicaciones tales como: percepción remota, fotografía aérea, vigilancia u observación aérea, muestreo atmosférico de bajo nivel, enlace aéreo de radiocomunicación, etc. El diseño de la aeronave ACR-TLALOC II considera aspectos técnicos que la hacen ideal para cumplir con la variedad de misiones referidas, ya que será una aeronave no tripulada, robusta, diseñada dentro de la clasificación de aeronaves utilitarias, según la Federal Aviation Association, tendrá un buen desempeño para despegar y aterrizar en pistas no preparadas, tomando en cuenta que, por sus dimensiones, se puede transportar en una unidad móvil adaptada. y en cuanto a su operación, contará con un compartimiento de carga en donde se podrá instalar el equipo requerido por cada misión.

1 .2.- ESTRUCTURAS AERONÁUTICAS

Un avión debe satisfacer ciertos objetivos de operación para proporcionar un servicio satisfactorio. Por ejemplo, un avión comercial debe operar en un plazo largo de tiempo para obtener ganancias, mientras que uno militar debe ser capaz de llevar una carga importante a su destino con un costo razonable en materiales y mano de obra. Con el tiempo se han incrementado el tamaño de los aviones, el número de pasajeros y la cantidad de carga de paga que llevan; con esto, también la cantidad de material del que están hechos y su peso han ido en ascenso. Por otro lado, la velocidad de las aeronaves se ha incrementado con los avances de la tecnología de propulsión, esto ha alcanzado el punto donde el calentamiento aerodinámico de las aviones se convierta en el mayor problema a resolver.

Debido a todos estos factores, el peso inicial del aeronave ha ido creciendo para satisfacer la demanda, es decir que, para ser económicamente justificable, una aeronave debe ser capaz de permanecer en servicio (o en una misión, en el caso militar) con un costo razonable para un largo período de tiempo. Esto significa que no solamente es incrementar la vida del aeronave, sino también hacer crecer el porcentaje total del tiempo en que el aeronave está en el aire.

El diseño estructural básico es para garantizar la mayor calidad del aeronave, utilizando los mejores materiales disponibles, así como las técnicas de diseño y manufactura más adecuadas. El término de calidad debe relacionar la estructura del aeronave con todo el medio ambiente, de manera que para definir esta calidad en términos de uso en servicio se establecen metas específicas de diseño:

Seguridad.

El avión debe ser capaz de resistir las cargas más severas durante toda su vida útil sin sufrir una falla catastrófica; no solamente debe sostener las cargas en vuelo y tierra, sino también sobrevivir a daños por impactos con cuerpos ajenos. La seguridad es una meta que no puede ser comprometida.

Durabilidad.

En el diseño, una larga vida en un aeronave es un compromiso que depende de su rendimiento y mantenimiento. El operador está interesado, primeramente, en un avión que tenga una buena capacidad de carga de paga en un rango de distancia largo, con un requerimiento de mantenimiento estructural moderado.

Peso Estructural Mínimo.

Para que un avión sea económicamente provechoso debe tener el menor peso estructural posible. Una forma de lograr esto es utilizando la mayor deformación de los materiales disponibles, así también como la resistencia a la fatiga, a la fractura, a la corrosión, etc.; esto es muy importante para determinar la máxima eficiencia en la distribución de materiales.

Razón de Utilización y Mantenimiento.

La razón de utilización es una medida de la eficiencia con la cuál un operador opera su flota, esto es, el número de horas por día que un aeronave es utilizada. Una forma de tener una alta razón de utilización es con la facilidad de mantenimiento: si las partes son fácilmente reparadas o reemplazadas, el tiempo en que el aeronave está en servicio es mínimo.

CRITERIOS DE DISEÑO

En los inicios de la aviación, las agencias gubernamentales tomaron la responsabilidad de establecer criterios de diseño estructural. Antes de 1927, solo las aeronaves militares se sujetaban a regulación, no había requerimientos para el vuelo de las aeronaves civiles. En 1927, la

Burocracia del Comercio Aéreo, una rama del Departamento de Comercio de los Estados Unidos, estableció reglas de tráfico aéreo, registro y licencia de aeronaves y pilotos, y estándares de eficiencia y estructurales para aeronaves y motores. En 1938, esta organización se convierte en la Administración de Aeronáutica Civil y es, hoy en día la *Administración Federal de Aviación (FAA)*.

Los requerimientos de diseño para un aeronave militar están establecidos por la División de *Sistemas Aeronáuticos de la Fuerza Aérea* de los Estados Unidos y por el Comando de Sistemas Aéreos de la Marina del mismo país. Estas agencias expiden juntas las especificaciones para el diseño de las aeronaves de la Fuerza Aérea y la Marina; las cuales son las series *MIL-A8860(ASG)* hasta *MIL-A-8870(ASG)*. Existen algunas diferencias en la naturaleza y diversidad de requerimientos de las diferentes agencias. Estos surgen primeramente en la diferencia del uso de las aeronaves por cada agencia.

AERONAVEGABILIDAD.

Las *Regulaciones Federales de la Aviación (FAR)*, en su parte 25, da los "Estándares de Aeronavegabilidad: categoría Aeroplanos de Transporte". La Aeronavegabilidad ha sido definida como la calidad por la cuál un aeronave hace su contribución para la seguridad de vuelo. Esto depende de muchas características tales como: controlabilidad , estabilidad,

eficiencia, deformación y rigidez estructural, confianza en las partes en movimiento, adecuado y exactitud de instrumentos, y otros. Estos estándares deben ser alcanzables con la estructura económica de operación del aeronave. Las regulaciones no cubren solamente la parte estructural, sino también todos los aspectos de diseño y operación del aeronave. Las subpartes principales son:

Subparte

- A) General
- B) Vuelo
- C) Estructura
- D) Diseño y Construcción
- E) Motores (Planta de Potencia)
- F) Equipo
- G) Límites de operación e información

Debido a que todos los componentes del aeronave deben operar como parte integral del vehículo completo, el contenido de cada subparte es dependiente de los otros. Los requerimientos del diseño estructural están cubiertos por las subpartes: "Estructura" y "Diseño y Construcción". La historia de los criterios de diseño ha sido que, como el conocimiento del medio ambiente, al cual el aeronave es expuesta constantemente, y el conocimiento de cómo el aeronave responde a este medio han aumentado, el criterio ha requerido más y más análisis racional. Hoy, el criterio está casi completamente relacionado a la simulación racional de vuelo y fenómeno operacional en tierra. Como en otros campos, el avance de la computadora ha revolucionado la determinación de cargas en. diseño estructural, facilitando el cálculo de los esfuerzos y/o deformaciones que se presentan en una estructura mediante la aplicación de métodos numéricos; siendo el *Método del Elemento Finito* (MEF) uno de los más convenientes para este tipo de trabajos.

MATERIALES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE AERONAVES.

Los materiales de uso aeronáutico se seleccionan de acuerdo a los siguientes criterios:

Eficiencia de la resistencia estática;

Resistencia a la fatiga;

Resistencia a la fractura y crecimiento de rotura;

Corrosión;

Estabilidad química al medio ambiente;

Disponibilidad;

Costo del material;

Características de fabricación;

Erosión y abrasión;

Características de desgaste;

Compatibilidad con otros materiales; y

Características térmicas y eléctricas.

De acuerdo a estos criterios, los metales más utilizados en la construcción de aeronaves han sido desarrollados para satisfacer las necesidades que se presenten. En el Apéndice " A " se muestran los materiales más utilizados en estos casos.

ANÁLISIS ESTRUCTURAL (EJEMPLO)

Primeramente, la figura 1.3 muestra las partes principales de una aeronave común, todas las aeronaves constan de las mismas partes principales, lo que varía es la forma de diseño (aerodinámico y estructural), equipo y uso.

Las estructuras aeronáuticas se pueden clasificar en tres tipos: las estructuras tubulares, las estructuras monocoque y las estructuras semimonocoque. Las estructuras tubulares son elementos (tubos) unidos de tal manera que dan la forma al aeronave y que posteriormente es forrada de tela o lámina metálica. Las estructuras monocoque es una estructura de una sola pieza, es decir, como el cascarón de un huevo, el cuál solo puede ser hecho, hoy en día, con los materiales compuestos. Y, finalmente, las estructuras semimonocoque que es un conjunto de elementos viga y placa unidos de tal manera que den la forma estructural deseada; en el presente trabajo se tratará el análisis estructural de este tipo de estructuras.

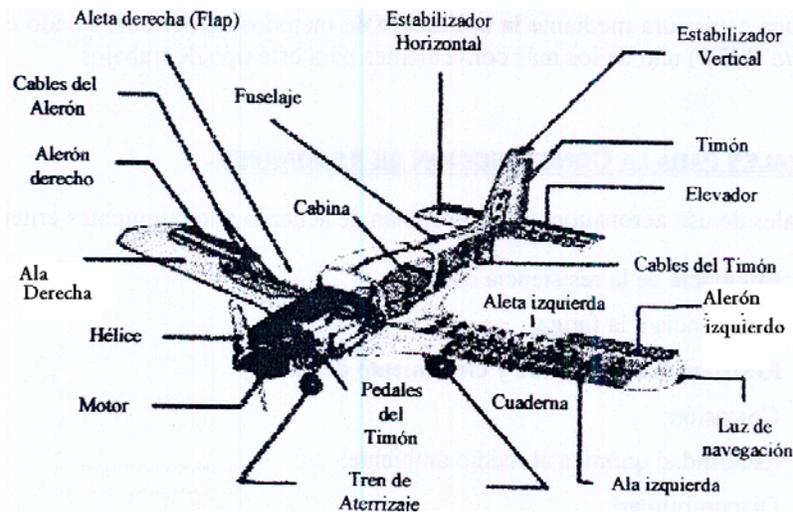


FIG.1.3.-PARTES PRINCIPALES DE UNA AERONAVE.

PIEL. Transmite las fuerzas aerodinámicas a los elementos transversales y longitudinales por placa y acciones de membrana. Desarrolla esfuerzos cortantes, los cuales reaccionan a los momentos torsionantes aplicados y/o a las fuerzas cortantes. Actúa conjuntamente con los largueros para resistir flexión y fuerza axial y con elementos transversales reaccionando a la carga circunferencial cuando la estructura es presionada.

ALMA DE LA VIGA. Desarrolla esfuerzos cortantes los cuales reaccionan a los momentos

torsionantes aplicados y a las fuerzas cortantes.

LARGUEROS O ATIEZADORES. Se emplea para resistir flexión y carga axial junto con la piel, divide a la piel en pequeños tableros. Actúa con la piel para resistir carga axial causada por la presionización.

PATINES DE LA VIGA. Resiste flexión y carga axial junto con la piel, además divide a la piel en pequeños tableros.

CUADERNA DEL ALA. Mantiene la forma de la sección transversal, distribuye la carga concentrada en la estructura y distribuye esfuerzos. Establece la longitud de la columna y dan condiciones de frontera a estas. Dan condiciones de frontera a los tableros de la piel. Actúa con la piel resistiendo carga circunferencial debido a la presionización. Largueros solo llevan esfuerzo axial, las almas y la piel llevan sólo esfuerzo cortante.

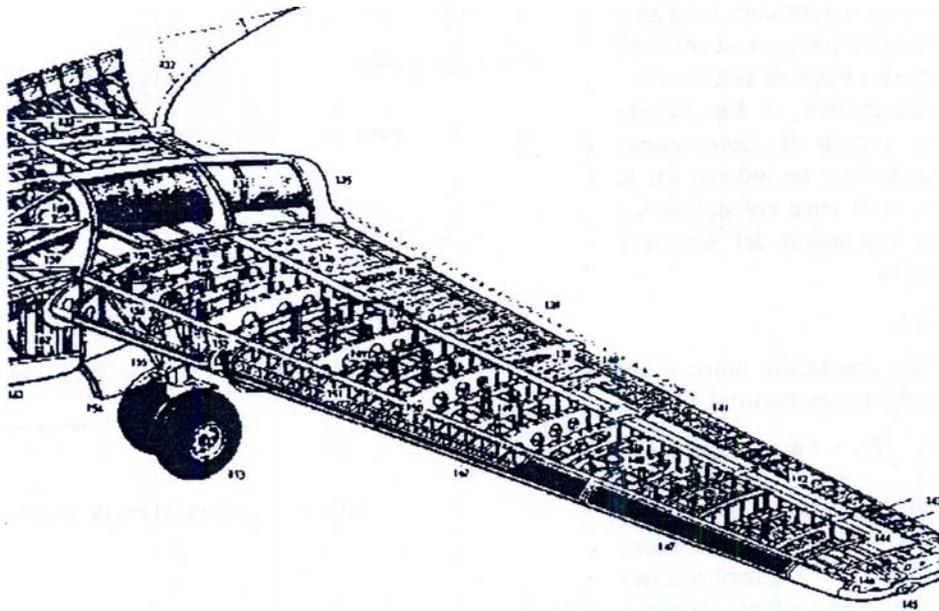


FIG.1.4.-ESTRUCTURAS SEMIMONOCOQUE.

El esfuerzo axial es constante sobre la sección transversal de cada uno de los largueros y el esfuerzo cortante es uniforme a través del espesor de la placa. Los marcos transversales y cuadernas son rígidos dentro de su propio plano.

Para desarrollar el análisis de los elementos estructurales de un aeronave se tienen que determinar antes las condiciones de vuelo que tendrá el avión y con esto definir cada una de las condiciones de carga y frontera a las cuales se ven sometidos estos elementos estructurales.

Primeramente es necesario construir la Envolvente de Vuelo del aeronave en diseño con la cual se van a encontrar los límites del Factor de Carga del avión a diferentes velocidades de vuelo.. El factor de carga "n" se define como la relación entre la sustentación que produce el ala y el peso del avión:

$$n=L/W$$

donde n es el factor de carga, L el levantamiento que produce el ala y W es el peso del avión.

En vuelo horizontal " $n=1$ ", pero si el avión se encuentra con una ráfaga vertical ascendente o descendente, habrá un cambio momentáneo de ángulo de ataque, originando un D_L que modificará el valor de n . El valor de n puede ser ahora mayor a la unidad, menor o negativo, la variación de n aumentará proporcionalmente el esfuerzo a la estructura alar.

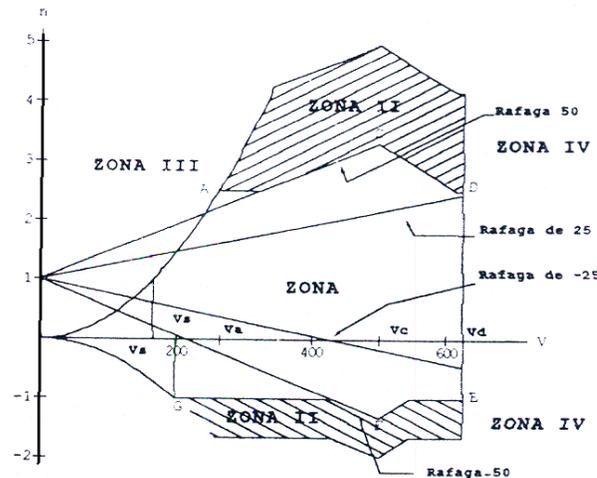


FIG.1.5.-ENVOLVENTE DE VUELO.

El cálculo de las curvas de la envolvente se determinan mediante las condiciones que presenta el FAR 23, para varios tipos de aeronaves. Esta gráfica, la *Envolvente de Vuelo*, consta de cuatro zonas de operación que se indican en la figura 1.5; cada zona nos define los límites de operación del aeronave para su vuelo:

ZONA I. Para operación normal sin falla ni problema estructural alguna.

ZONA II. Para operación transitoria no intencional, excediéndose las cargas normales y produciendo fallas estructurales leves ;como deformaciones permanentes, ondulaciones de pieles, falla de elemento de sujeción, etc.

ZONA III. Área imposible al vuelo por estar fuera de la capacidad sustentadora del ala.

ZONA IV. Área de cargas excesivas que ocasionan falla estructural catastrófica.

Las condiciones de vuelo están definidas por los coeficientes de levantamiento, resistencia al avance y de momento, a los cuales estará sometido el aeronave y, que para su estudio, se transformarán, por cambio de ejes, a los coeficientes normales y cordales del ala. De acuerdo con la figura 1.6:

$$C_N = C_L \cos \alpha + C_D \operatorname{sen} \alpha$$

$$C_C = C_D \cos \alpha - C_L \operatorname{sen} \alpha$$

y el valor de la posición " X_{cp} " será:

$$CP = \left(\frac{C_m}{C_N} \right) + 0.25(C)$$

$$X_{CP} = CP(C)$$

donde C es la CAM de la semiala.

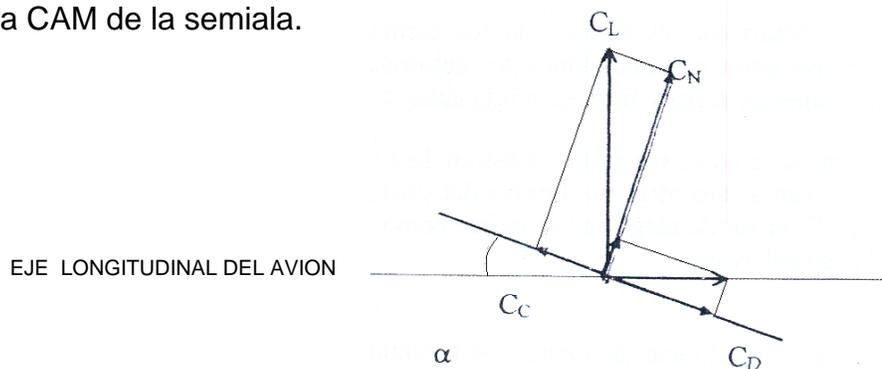
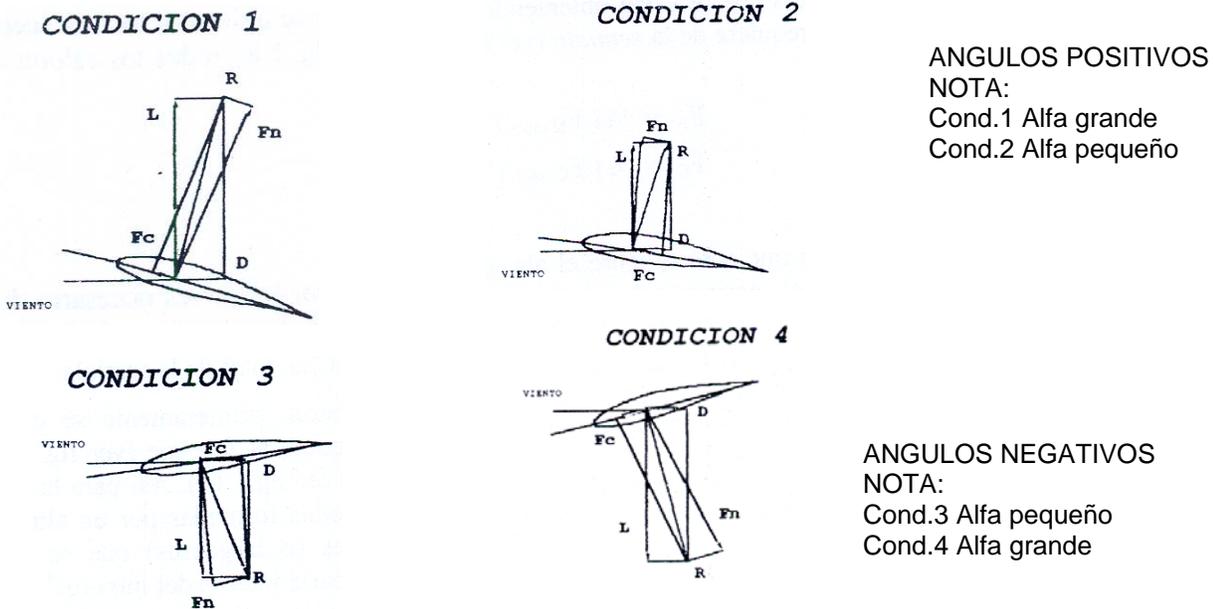


FIG.1.6.-DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.



Condición	CUADRANTES				CUADRANTES CRITICOS
	I	II	III	IV	
1	TC	T	TC	C	I,III
2	C	TC	T	TC	II,IV
3	TC	C	TC	T	I,III
4	T	TC	C	TC	II,IV

FIG.1.7.-CONDICIONES DE VUELO.

Así se tienen cuatro condiciones básicas de carga ,las cuales provocan lo que se conoce como regiones criticas ;estas se presentan en la figura 1.7.Una vez determinados los coeficientes normal (C_N) y cordal (C_C),se obtendrán los valores de sus respectivas fuerzas F_N y F_C para cada condición de vuelo con las ecuaciones siguientes:

$$F_{N_{iTOTAL}} = q_i(S)(C_{N_i})$$

$$F_{C_{iTOTAL}} = q_i(S)(C_{C_i})$$

Cabe mencionar que las fuerzas que se están obteniendo se aplican a toda la sección del ala, pero como nuestro análisis sólo requiere de la *semiala* (ver fig. 1.8), todos los valores de fuerza se dividirán entre dos:

$$F_N = 1/2(F_{Ntotal})$$

$$F_C = 1/2(F_{Ctotal})$$

También existen otras fuerzas que actúan sobre el ala, por lo que es necesario determinar la posición del C.G. total de la semiala corresponde a la establecida por el peso de la misma., el peso del motor y el peso del combustible (el cuál se divide entre los dos tanques localizados en la semiala). Teniendo la posición de los C.G.'s para cada uno de estos componentes, y por medio de la ecuación del *momento estático* obtenemos la posición del C.G. total de la semiala. Tomando como ejemplo el diseño de la caja de torsión, primeramente se establece la configuración del aeronave; que posición tendrá el ala respecto al fuselaje (ver fig. 1.10). Con esto se determina el tipo de sujeción que tendrá la misma (ver fig.1.11). Así para la semiala en estudio se define que constará de dos vigas, cada una de ellas formadas por un alma y cuatro patines. Estará reforzada por medio de cuatro atezadores (o largueros) que se encuentran distribuidos, dos en la parte interna del extradós y dos en la parte interna del intrados.

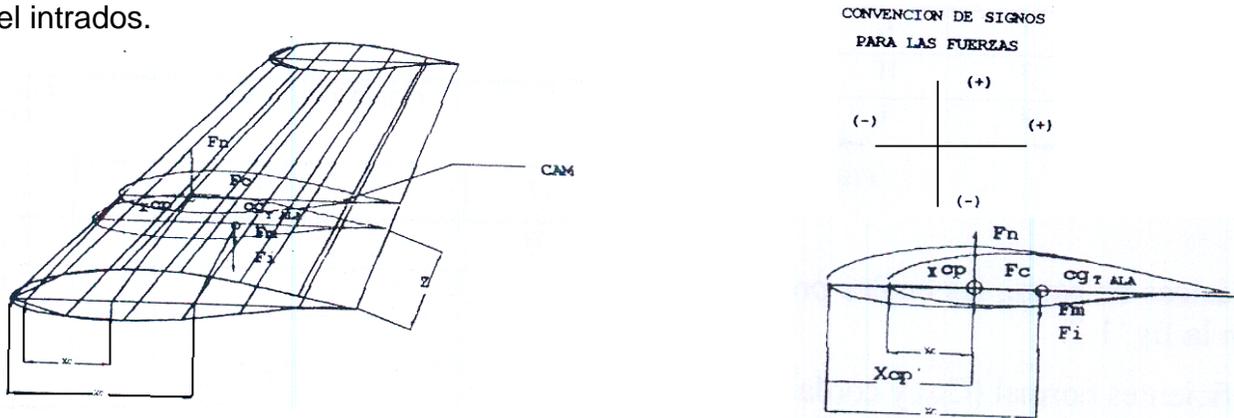


FIGURA 1.8.-FUERZAS QUE ACTUAN SOBRE EL ALA.

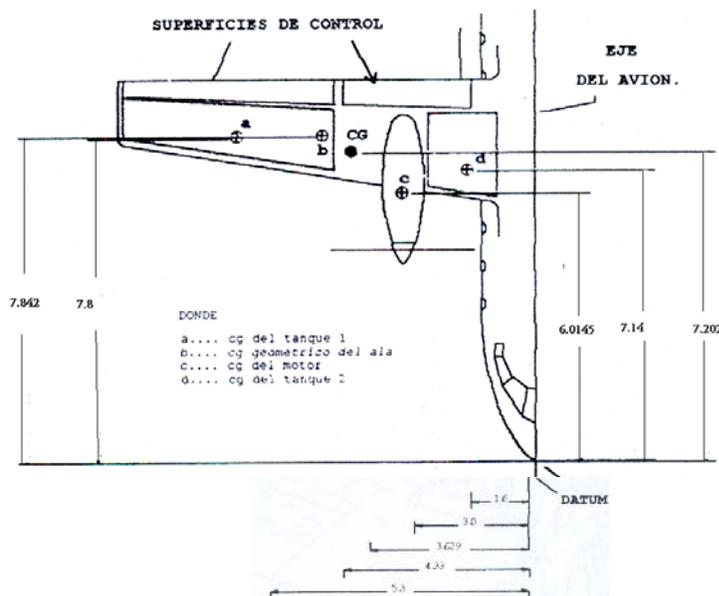


FIGURA 1.9.-POSICION DEL C.G EN LA SEMIALA.

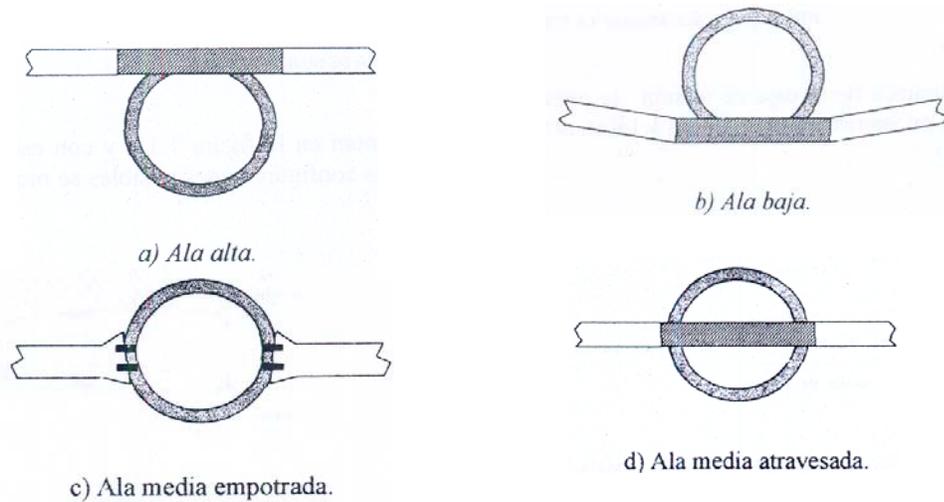


FIGURA 1.10.-POSICION VERTICAL DEL ALA RELATIVA AL FUSELAJE.

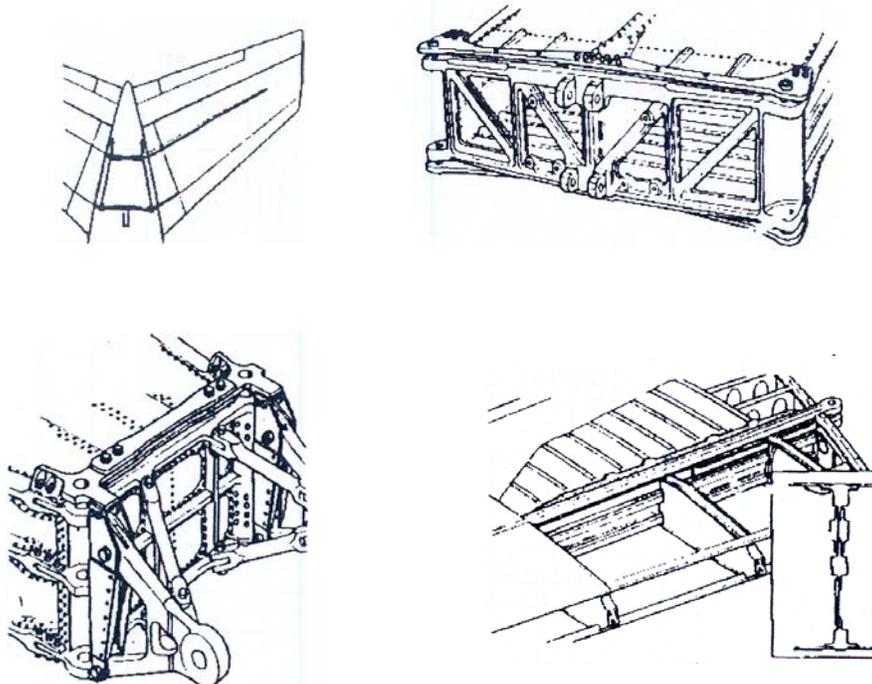
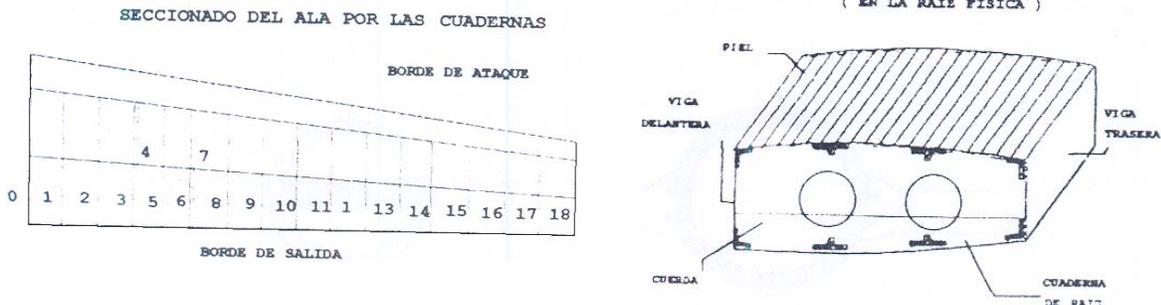


FIG.1.11.-EJEMPLO DE LA FORMA DE SUJECIÓN DE ALA.

La configuración de la caja de torsión se presenta en la figura 1.12, y con esto podemos mostrar el ala en isométrico en la figura 1.13 (a) ;otras configuraciones posibles se muestran en la figura 1.13(b).



a)Distribución de las cuadernas en la semiala.

b)Caja de torsión.

FIG.1.12.-CAJA DE TORSIÓN.

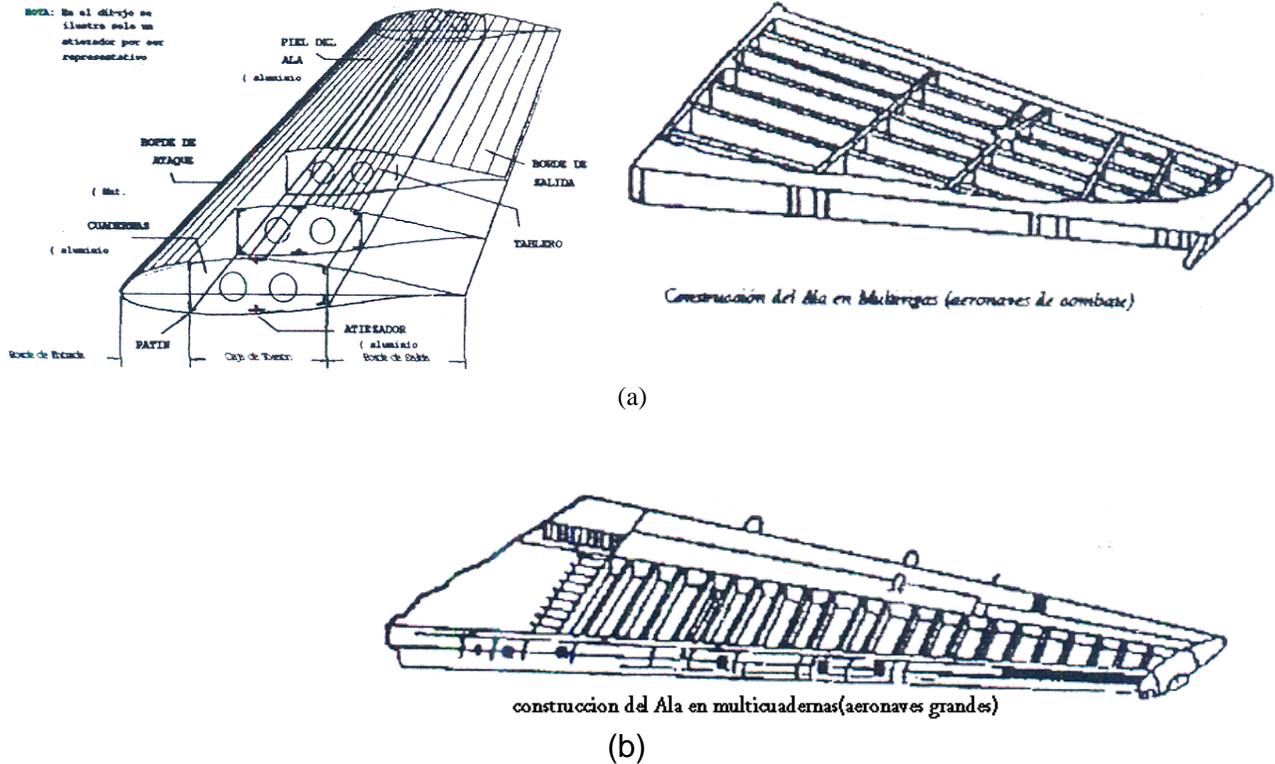


FIG.1.13.-CONFIGURACIONES DEL ALA.

Sin embargo, los elementos estructurales del ala no trabajan únicamente a flexión, sino que también trabajan a tensión, compresión y/o torsión, por lo que es necesario realizar una verificación de columnas. Para poder conocer el esfuerzo crítico en la columna del patín o atizador sometido al mayor esfuerzo en la condición más crítica de vuelo y comparar dicho esfuerzo crítico con el esfuerzo aplicado de la misma, debemos conocer si éste actúa como columna larga o corta y de ese modo utilizemos el método adecuado. Para conocer el esfuerzo aplicado existente en nuestras columnas críticas tenemos que hacer uso del esfuerzo aplicado en el patín y atizador delanteros correspondientes, que es donde se encuentran dichas columnas críticas consideradas.

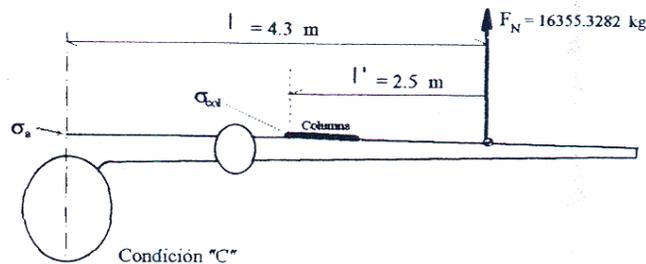


FIG.1.14.-

Como se vio, de las condiciones de vuelo, la más crítica es la condición "C" entonces, podemos conocer el valor del esfuerzo máximo aplicado en los elementos de la raíz (por mayor momento) y columna mayor, para ello utilizamos la siguiente relación:

$$\frac{M_a}{M_{col}} = \frac{\sigma_a}{\sigma_{col}}$$

Como podemos ver, todo este análisis es muy laborioso y complejo tratándose de estructuras con un número muy grande de elementos viga y placa, además de que el análisis

tratado es solo un principio y considera los elementos por separado. El MEF da una nueva posibilidad de realizar el análisis de una estructura completa mediante la aplicación de sistemas matriciales.

1.3.- EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

El Método del Elemento Finito (MEF) inicia como tal en los años 50's, del presente siglo, junto con la aparición de los computadores digitales. Su aplicación se fue extendiendo de tal forma que el interés en su desarrollo se incrementó hasta hoy en día con la creación de grandes programas computacionales que facilitan los análisis.

Existen tres áreas principales donde el MEF es aplicado:

- 1) dentro de problemas de estado estacionario o análisis de equilibrio;
- 2) problemas de eigenvalores que son una extensión de los anteriores pero involucran el cálculo de las características fundamentales del cuerpo o sistema examinado; y
- 3) problemas trascendentes o de propagación donde aparecen funciones que dependen del tiempo.

Dentro de la mecánica estructural el análisis de sistemas complejos limita la potencialidad humana, por lo cuál el hombre se ve obligado a recurrir al MEF para solucionar problemas de este tipo. Este método consiste, a grandes rasgos, en discretizar un sistema continuo (sea pieza o estructura) en un número finito de elementos a los cuales se les darán todas las características mecánicas del sistema, es decir, se les asignarán las propiedades del (os) material(es) que componen dicho sistema. Los elementos se componen de nodos en sus extremos o vértices según sea el caso (ver fig.1.15), los cuales relacionan los elementos entre sí. En estos nodos y/o elementos se establecerán las condiciones de frontera y de carga para el análisis y serán los que sufran los desplazamientos que representan la deformación del sistema.

Las condiciones de frontera representan las restricciones que tiene el sistema en su movimiento, ya sean desplazamientos, empotres, apoyos, giros, etc., y las condiciones de carga representan las fuerzas externas que están actuando en la estructura, tales como fuerzas puntuales, cargas distribuidas, momentos, etc. Con estas condiciones se simula la situación a la cuál está sometido el sistema.

Teniendo hecho el modelado y sus condiciones, conociendo la posición de los nodos, cargas y restricciones, se hace uso de las *Ecuaciones Constitutivas* las cuales relacionan los esfuerzos con las deformaciones que tiene la estructura y a partir de éstas se obtienen otros valores de interés, como desplazamientos, cortantes, momentos, etc.; cabe mencionar que también existen ecuaciones de relación de esfuerzos con temperaturas (esfuerzos térmicos) los cuales no son analizados en el presente trabajo.

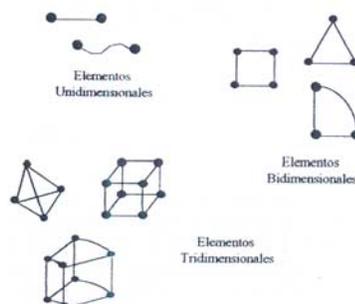


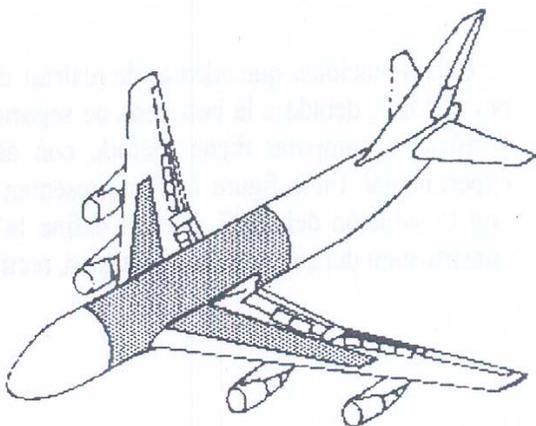
FIG.1.15.-TIPOS DE ELEMENTOS.

Una de las aplicaciones que se le ha dado a este método, es dentro de la Ingeniería Aeronáutica como un auxiliar en el análisis aerodinámico y estructural de las aeronaves. La figura 1.16 muestra un análisis por el MEF hecho a un avión Boeing 747; recordando que la estructura de un avión consta de hojas delgadas de metal (piel) sujeta al conjunto de vigas, atezadores, cuadernas y costillas dando su forma, tanto del fuselaje como de las alas y estabilizadores (ver tema 1.2).

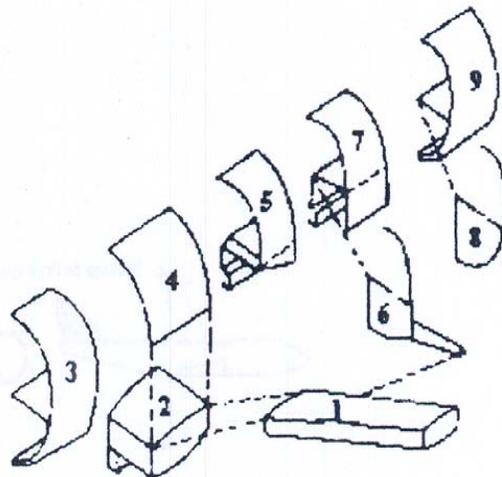
Debido a la complejidad de las aeronaves, su estructura se divide en segmentos que podrán ser analizados fácilmente por el MEF, ya que analizar completamente la estructura de un avión requeriría de un número de elementos muy grande. Sin embargo, para realizar estas divisiones es necesario conocer las condiciones a las cuales se encuentra sometido cada segmento en su frontera o contorno para simular su posición en la estructura completa. Como un ejemplo, podemos ver la sección de la escotilla del B747 en la figura 1.15(b) dividida en segmentos para ser analizada con elementos finitos, y en la tabla 1.1 se representan los detalles listados de esta sección.

En resumen, el MEF consta de 7 etapas :

- 1.-Discretización del sistema continuo; donde se modela la estructura en elementos finitos.
2. Selección de polinomios de interpolación; donde se relaciona cada uno de los elementos con los demás, como parte del sistema completo.
3. Definición de las ecuaciones de los elementos; es decir, las ecuaciones que representan la posición de cada elemento o carga y su movimiento.
4. Ensamble de las ecuaciones de los elementos; donde se construye el sistema de ecuaciones constitutivas.
5. Solución de las incógnitas; aquí se resuelve dicho sistema de ecuaciones.
6. Obtención de variables secundarias; es decir, se calculan los parámetros que se deseen obtener en el análisis.
7. Interpretación de resultados.



a)Aeronave Boeing 747.(zona para analizar por el metodo del elemento finito)



b)Subestructurado de la region de escotilla para analizar por el metodo del elemento finito.

FIG.1.16.-ANALISIS DEL AVION B-747 POR EL MEF.

Cabe mencionar que además de realizar un análisis numérico (por computadora), en este caso por el MEF, debido a la búsqueda de seguridad y/o confiabilidad en los resultados, es necesario verificar y comparar dicho método con otro, ya sea teórico clásico y/o, en su mejor caso, experimental. En la figura 1.17 se presentan los resultados de las pruebas de diseño comparadas con la solución del MEF: lo cuál define la compatibilidad de resultados para continuar con la construcción del aeronave o, en su caso, rectificar los análisis y pruebas.

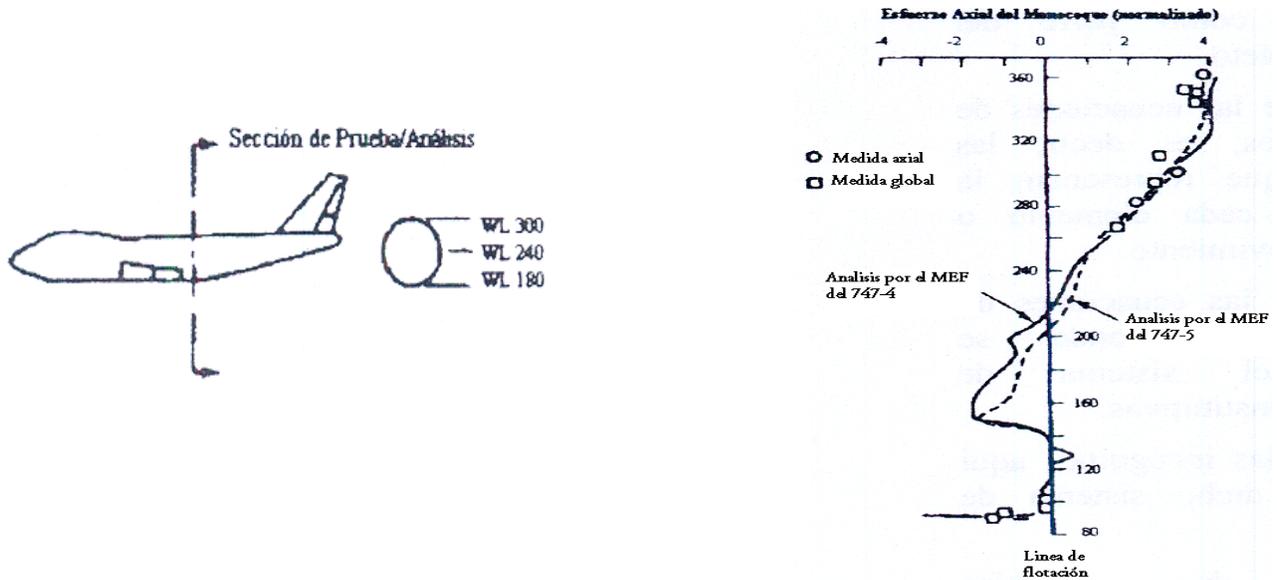


FIG.1.17.-CORRELACION CON DATOS DE PRUEBA DEL B747 Y SU ANÁLISIS POR ELEMENTO FINITO.

TABLA 1.1.-RESUMEN DE LA IDEALIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE LA SECCION CENTRAL DEL B7475

SUBESTRUCTURA	DESCRIPCION	NODOS	UNIDADES DE CARGA	VIGAS	PLACAS	INTERACCIONES LIBRES	LIBRES TOTALES
1	Ala	262	14	355	363	104	796
2	Ala central	267	8	414	295	198	880
3	Cuerpo	291	7	502	223	91	1026
4	Cuerpo	213	5	377	185	145	820
5	Cuerpo	292	7	415	241	200	936
6		170	10	221	103	126	686
7	Cuerpo	285	6	392	249	233	909
8		129	10	201	93	148	503
9	Cuerpo	286	7	497	227	92	1038
TOTAL		2195	63	3374	1979	555	7594

CAPITULO 2

CONCEPTOS GENERALES

En el análisis estructural se definen los elementos mecánicos como las fuerzas o momentos actuantes en una estructura; tales como momento flector, fuerza axial y fuerza cortante. De acuerdo al tipo de elemento mecánico que soporta, las estructuras se clasifican en

- I. Viga, diseñada para soportar las fuerzas cortantes y momentos flectores;
 - II. Armadura, también llamada Cercha, diseñada para soportar las fuerzas rodantes, ya sean de tensión o compresión. Está formada por elementos atravesados y nodos articulados, se conoce como viga de alma abierta;
 - III. Marco, diseñada para soportar los tres elementos mecánicos, es una estructura con nodos rígidos.
- Sin embargo, también existen otro tipo de estructuras clasificadas por su forma:
- A. Reticulares, es decir, elementos prismáticos;
 - B. Laminares, son elementos continuos tales como placas, cascarones, láminas, etc;
 - C. Másicas, son las que resisten cargas por su propio peso tales como zapatas de cimentación, presas, etc.

Existen otros tipos de estructuras las cuales no son necesarias mencionar, pues solo se tratará el análisis de vigas y placas.

2.1 .- ELEMENTO VIGA.

Las vigas como ya se mencionó, son elementos estructurales los cuales soportan cargas que les producen flexión, en otros casos, una viga puede estar trabajando como columna (o tirante) al estar soportando también cargas axiales (de compresión o tensión) y, en un caso especial, una viga puede soportar torsión, como es el caso *en flexión asimétrica*.

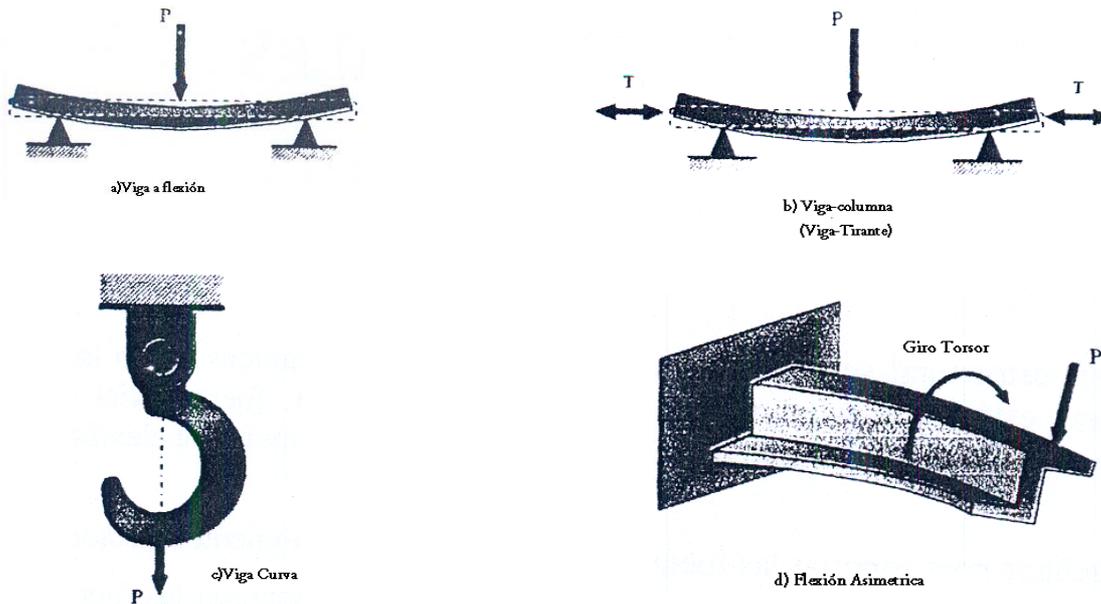


FIG.2.1.-TIPOS DE VIGAS.

El Análisis estructural de vigas implica el cálculo de los esfuerzos que soportan y las deformaciones que sufren. Dado a las diferentes solicitaciones de carga en las vigas, se han desarrollado una serie de perfiles convenientes para cada caso, ya que la resistencia de las vigas a estas solicitaciones depende en gran parte de su sección transversal; según la ecuación de la

escuadría (generalizada) se tiene: $F = \frac{M \cdot c}{I}$, donde $I = \int x^2 dA$ (momento de inercia).

Gracias a este concepto, el análisis matemático de un elemento viga se simplifica a un *caso unidimensional* cuando se trata de una sección transversal constante. Es necesario aclarar que el análisis de una viga puede hacerse en el espacio, es decir, con posiciones y movimientos en 3D y la palabra unidimensional indica que el elemento en su representación matemática está formado por una línea con una trayectoria. Para el caso de vigas con sección transversal variable, el análisis se realiza con el *caso tridimensional*, es decir, la representación matemática de la viga mediante elementos tridimensionales (prismas); ver fig. I. 15.

2.1.1.- CASO LINEAL

Al diseñar una estructura la resistencia de materiales no es el único criterio a emplearse, también hay que tomar en cuenta la rigidez y otras propiedades tales como la dureza, tenacidad y ductilidad entre otras, las cuales se determinan con lo que llamamos *Ensayo de Materiales*.

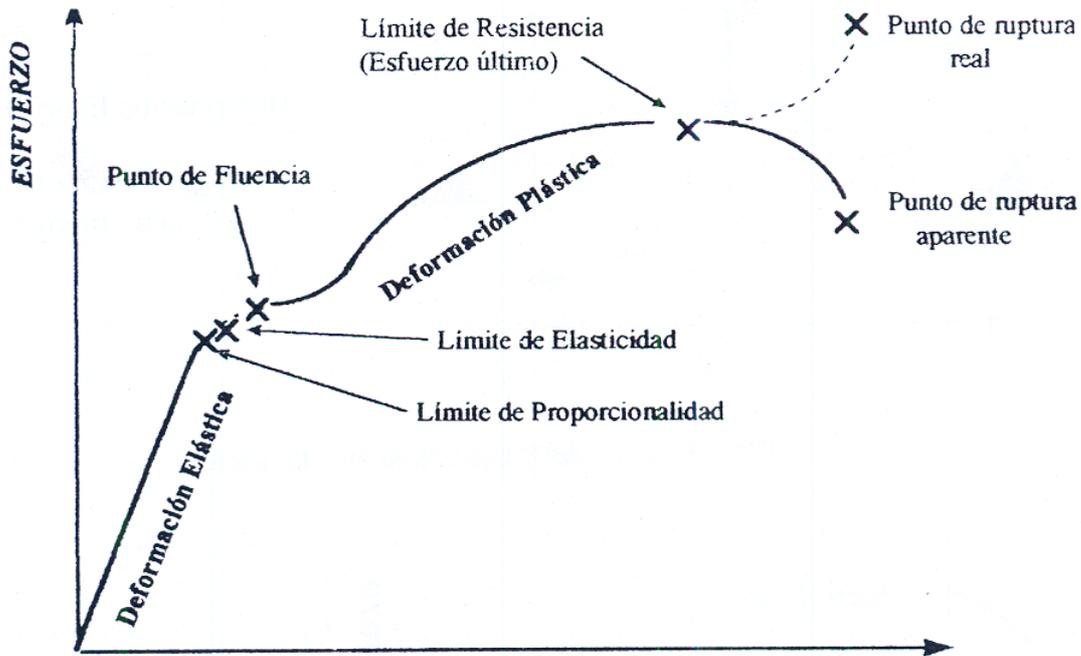


FIG.2.2.-DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACION.

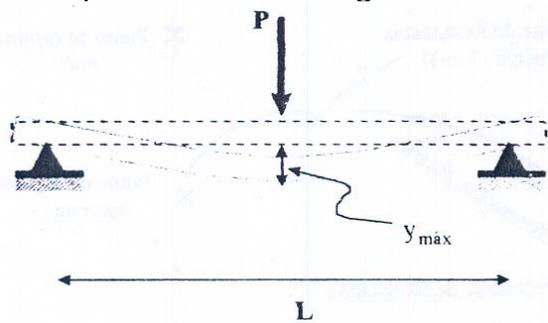
Dentro de estos ensayos se forma lo que denominamos *Diagrama de Esfuerzo-Deformación* el cuál representa un gráfico entre las fuerzas unitarias o esfuerzos y los alargamientos unitarios o deformaciones presentados por un material solicitado a una carga, Este diagrama se muestra en la figura 2.2, donde podemos ver que desde el origen "O" hasta el punto llamado *límite de proporcionalidad* el diagrama sigue una trayectoria recta, lo que indica que existe una relación proporcional entre el esfuerzo y la deformación (enunciada en 1678 por Robert Hooke). Esta relación se conoce como *Módulo de Elasticidad* (o de Young) y es la pendiente de la curva

$$\text{esfuerzo-deformación de la región elástica: } E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Más allá de éste punto encontramos el *límite de elasticidad*, punto donde termina la región elástica. Por lo tanto, el segmento de la curva del diagrama, del origen al límite de elasticidad, representa la zona en donde el material sufre *Deformación Elástica*; es decir, que cuando se le aplica una carga los enlaces entre los átomos se estiran y el material se alarga y , cuando se retira la carga los enlaces regresan a su longitud original y el material vuelve a su tamaño inicial, en otras palabras, la deformación no es permanente. Esta concepto establece el *comportamiento Lineal* del material, sin embargo, esto no indica que el análisis será lineal, puesto que también se debe tomar en cuenta el comportamiento de la estructura.

Con esto, podemos decir que para realizar *el análisis estructural lineal de una viga se debe considerar que el material se encuentre en condiciones de*

deformación elástica y que la viga sufra desplazamientos pequeños, comparados con su longitud



Deformación Elástica=E

$$y_{\text{máx}} \leq 0.5\% L$$

(valor a criterio)

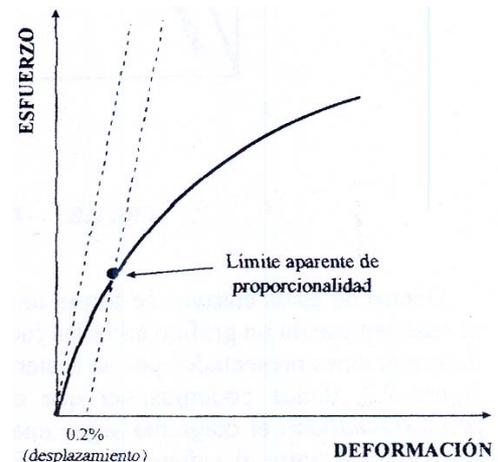
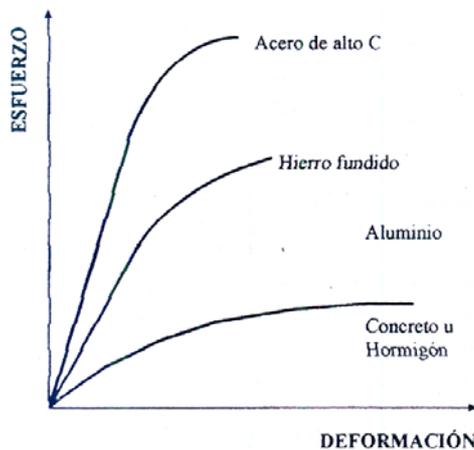


FIG.2.2.-DIAGRAMA ESFUERZO DEFORMACIÓN.

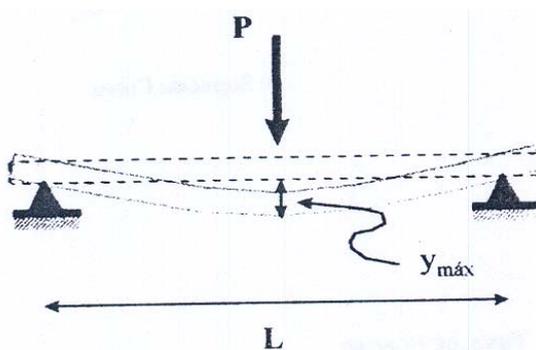
Dentro de las condiciones de deformación elástica, la proporcionalidad es esencial dentro del análisis lineal, es decir, el material debe obedecer la ley de Hooke para trabajar con comportamiento lineal. En general todos los metales tienen un módulo de elasticidad (límite de proporcionalidad), sin embargo, este no puede ser constante en materiales con esfuerzos residuales, como consecuencia de cargas, tratamientos térmicos o de sus procesos de fabricación; ver figura 2.4. A estos materiales que no tienen un límite de proporcionalidad bien definido por esfuerzos residuales, se les aplica un procedimiento de equiparación con los que sí lo tienen. Consiste en trazar una recta paralela a la recta tangente a la curva en el origen partiendo del valor normalizado de 0.2%, o sea 0.002 m/m, aunque puede ser otro valor, en la figura 2.5 la intersección de esta recta con la curva define el punto considerado llamado Límite Aparente de Proporcionalidad.

Otros materiales que no siguen la ley de Hooke son los polímeros y materiales compuestos, los cuales no podrán ser analizados linealmente, pues su curva esfuerzo-deformación sigue una función exponencial.

2.1.2.- CASO NO LINEAL.

Regresando a la figura 2.2, adelante del límite de elasticidad, encontramos el *Punto de Fluencia*, en este punto el deslizamiento es notorio, es decir, aparece un considerable alargamiento (o fluencia) del material sin que aumente la carga. Si se aumenta la carga se llegará al *Límite de Resistencia* el cuál es el punto del *esfuerzo último* que puede soportar el material. En este tramo de la curva, del punto de fluencia al límite de resistencia, el material se comporta de una manera *plástica*; se empiezan a producir dislocaciones, ocurre deslizamiento y el material se deforma plásticamente. Este comportamiento de *Deformación Plástica* es permanente y establece el comportamiento *No Lineal* del material.

Teniendo este concepto podemos decir que para realizar *el análisis no lineal de una viga, ésta debe sufrir desplazamientos considerables, comparados con su longitud, y/o el material del que está hecha se debe encontrar en condiciones de deformación plástica*. También las vigas hechas con polímeros o materiales compuestos se deben analizar de una forma no lineal.



Deformación Plástica

$$y_{\text{máx}} > 0.5\% L$$

(valor a criterio)

FIG.2.6.-ANÁLISIS NO LINEAL DE UNA VIGA.

2.2.- ELEMENTO PLACA

Las placas se encuentran dentro del tipo de estructuras laminares, las cuales, a sus vez, podemos clasificarlas en segmentos planos o curvas y envolventes, todos ellos delgados o gruesos; ver figura 2.7. Al igual que las vigas, este tipo de elementos pueden soportar flexión, tensión, compresión y/o torsión (condiciones que se presentan claramente en una estructura aeronáutica).

Independientemente del tipo de placa, a diferencia de las vigas, su análisis estructural depende del espesor de la placa, lo que simplificaría a un *Caso*

Bidimensional el análisis matemático de un elemento Placa. Sin embargo, en casos especiales de discontinuidad en el espesor, el análisis matemático tendería a desarrollarse en un *Caso Tridimensional*.

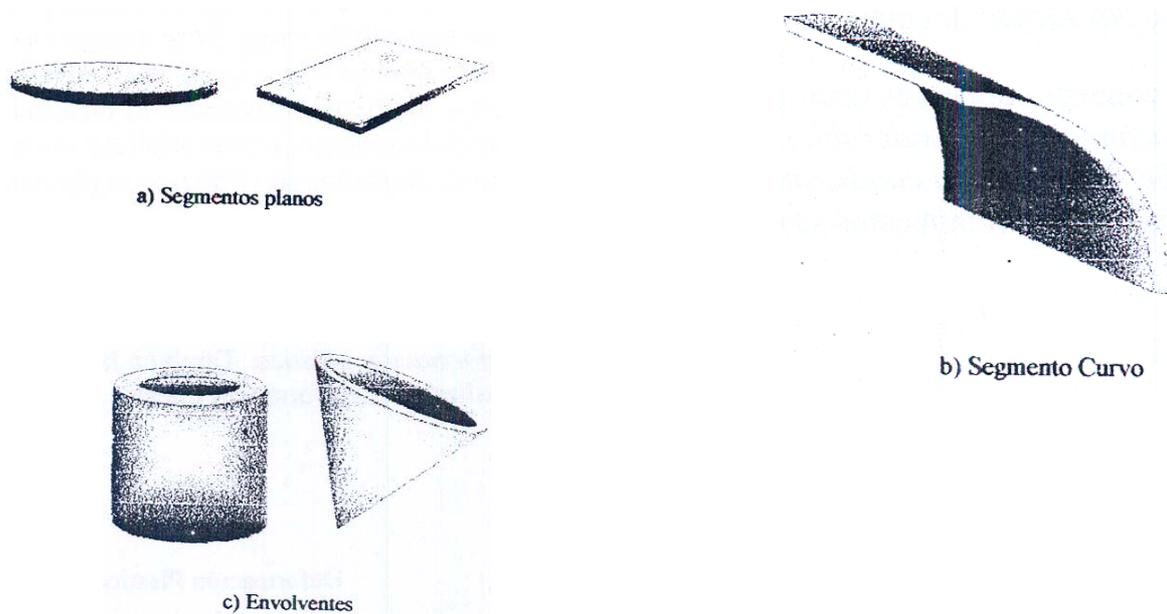


FIG.2.7.-TIPOS DE VIGAS.

2.2.1.- CASO LINEAL.

El análisis de una placa, considerando pequeñas deflexiones comparadas con su espesor, puede realizarse las siguientes suposiciones:

- 1) En el plano medio de la placa no hay deformación, lo que hace que éste se defina como *plano neutro*.
- 2) Los puntos de la placa, que inicialmente se encuentran en un plano normal al plano medio, después de la flexión permanecerán en una superficie normal a la superficie media de la placa, Esto es equivalente a despreciar los efectos de las fuerzas de corte en la deflexión de las placas.
- 3) Los esfuerzos normales en dirección transversal a la placa son despreciados,

Con esto, todas las componentes del esfuerzo se expresan en función de la deflexión de la placa, la cuál es una función bidimensional en el plano de la placa, Esta función se satisface con una ecuación diferencial parcial lineal y,

junto con las condiciones de frontera, definen completamente a la deflexión. Así, con la solución de esta ecuación se pueden determinar todos los esfuerzos en cualquier punto de la placa. Cuando se tienen casos, como por ejemplo placa con orificios, la segunda suposición no se cumple y los efectos de corte son considerables, los cuales deben introducirse mediante correcciones en la ecuación diferencial.

Por lo tanto, *el análisis lineal de un elemento Placa es apropiado cuando se considera que el elemento está trabajando bajo las tres suposiciones anteriores. En resumen, el material debe estar trabajando en condiciones de deformación elástica y la de flexión de la placa debe ser pequeña comparada con sus dimensiones.*

Esto también es aplicable a casos de Placas Curvas, en las que los esfuerzos de membrana aparecen sin afectar el carácter lineal de la teoría de flexión, siempre y cuando la placa tenga pequeñas deflexiones.

2.2.2.-CASO NO LINEAL.

Cuando tenemos un elemento Placa cuyas deflexiones no son pequeñas comparadas con sus dimensiones los esfuerzos correspondientes al plano medio deben tomarse en consideración dentro de la ecuación diferencial que rige a las placas, con lo que obtenemos ecuaciones *no lineales*, También, cuando una placa se somete a una grande deflexión es importante tomar en cuenta el movimiento del plano de la placa, ya que cuando se tienen extremos fijos los esfuerzos de tensión actúan en oposición a la carga lateral, y así dicha carga es transmitida tanto por la rigidez en los extremos como por la acción de la membrana

Así, el análisis No Lineal de un elemento Placa se realiza cuando dicha placa se somete a grandes deflexiones (con desplazamientos considerables) y/o cuando el material del que está hecha se encuentra trabajando dentro de las condiciones de deformación plástica.

Es importante mencionar que el análisis de placas con un espesor considerable (grueso) no tiene aproximación real con la teoría de placas delgadas, especialmente en el caso de altas concentraciones de carga, por lo que se aplica la teoría de placas gruesas la cual supone los problemas de placas como problemas de elasticidad tridimensional. Este análisis se hace más complicado y se resuelve sólo para casos particulares. Sin embargo, la linealidad y no anualidad del análisis de este tipo de placas depende de las mismas contemplaciones que en los casos anteriores, con la diferencia de la referencia del espesor.

Como conclusión podemos decir que los sistemas estructurales que se encuentran en la practica tienen configuraciones bastante complejas ,y sus diversos elementos se pueden reducir a los siguientes tipos simples:

VIGA.-Es un cuerpo que tiene dos dimensiones pequeñas comparada con la tercera y se define por un eje .Como caso particular ,puede ser de sección

transversal constante y de eje rectilíneo ,aunque existen con ejes curvados y secciones variables.

PLACA.-Es un cuerpo limitado por dos planos ,a distancia pequeña en comparación con las otras dimensiones .Este elemento también puede estar formado por dos superficies curvilíneas.

El análisis de este tipo de elementos se basa en la Teoría de la Elasticidad definiendo el carácter lineal del análisis, o en su caso especial ,se utiliza la Teoría de plasticidad que definen al análisis con carácter no lineal.

CAPITULO 3

INTERPOLACION Y MODELACION

3.1.-Introducción

Para iniciar un análisis por elemento finito, primeramente es necesario realizar, a lo más posible, la simplificación del problema. Para esto, podemos tomar dos criterios: la Simplificación por Aproximación Geométrica y la Simplificación por Simetría.

En la Aproximación Geométrica se considera que la geometría y las cargas del problema se pueden describir completamente en un plano por lo que el problema se modela en 2D. Entonces, cuando el cuerpo de análisis es largo y su geometría y cargas no varían en dirección longitudinal, éste se puede modelar utilizando una representación de deformación plana, ver fig. 3.1. Otro caso de la Aproximación Geométrica es teniendo cuerpos con una dimensión pequeña los cuales están cargados en el plano del mismo, con lo que se asume que su condición de trabajo es de esfuerzo plano, ver fig. 3.2.

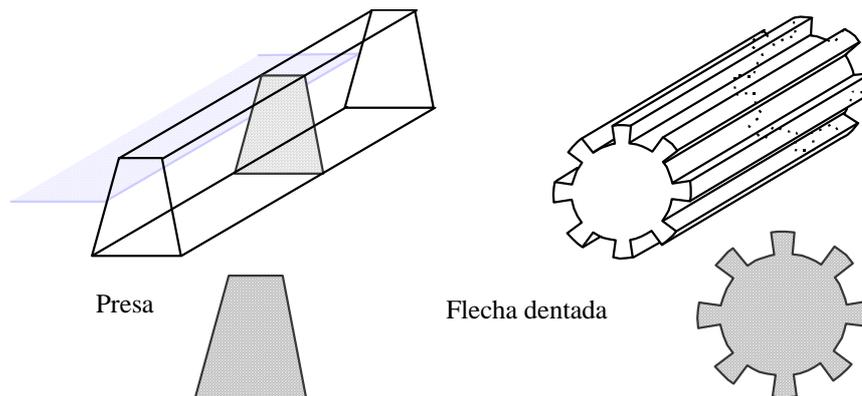
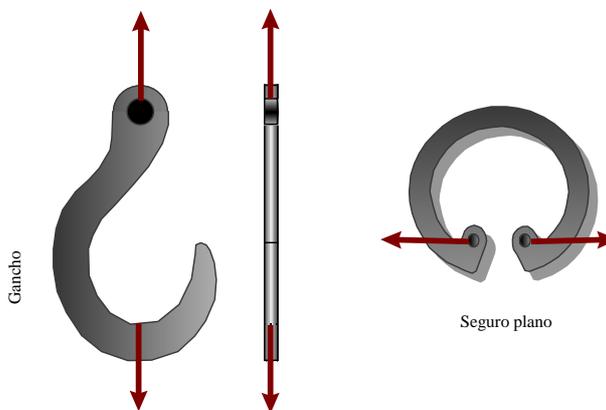


Fig. 3.1. Problemas tridimensionales simplificados a 2D por Deformación Plana.



Por otro lado, en la Simplificación por Simetría se tienen cuatro tipos: axial, plana, cíclica y repetitiva (ver fig. 3.3). La *simetría Axial* simplifica a los sólidos de revolución los cuales forman elementos axisimétricos. La *simetría Plana* trata a los cuerpos que sobre su plano puede dividirse en secciones que corresponden a iguales condiciones de frontera. La *simetría Cíclica* representa a los cuerpos con características repetidas alrededor de su eje. Y la *simetría Repetitiva* involucra a los cuerpos que tienen características repetidas sobre su longitud.

FIG.3.2.- Problemas tridimensionales simplificados a 2D por esfuerzo plano.

Cabe mencionar que el hecho de realizar una simplificación por alguno de estos tipos, es necesario establecer las restricciones correctas sobre el cuerpo¹ simplificado, por ejemplo en la fig. 3.4 al realizar el corte se establecen las restricciones u y v sobre los extremos cortados. En este caso, u y v representan las deflexiones a lo largo del eje x e y respectivamente.

Como se vio en la sección 1.3, existen diferentes elementos utilizados en el MEF, los cuales se pueden clasificar bajo el criterio del Tipo de Análisis. El comportamiento general de estos elementos en problemas de esfuerzo se puede dividir en cinco categorías:

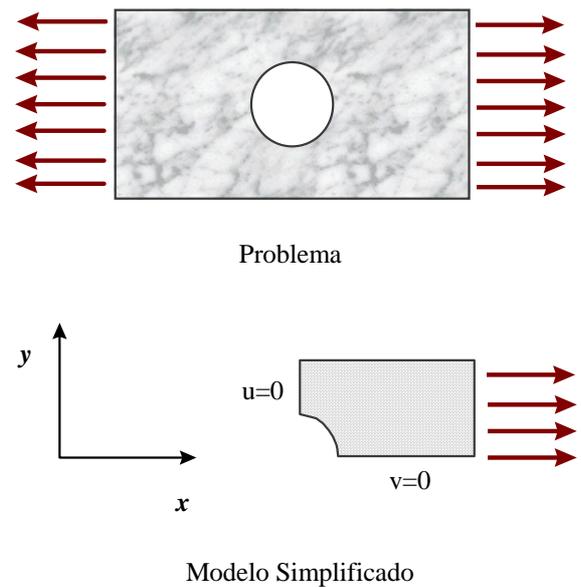


Fig. 3.4.- Ejemplo de un Problema con simetría Plana.

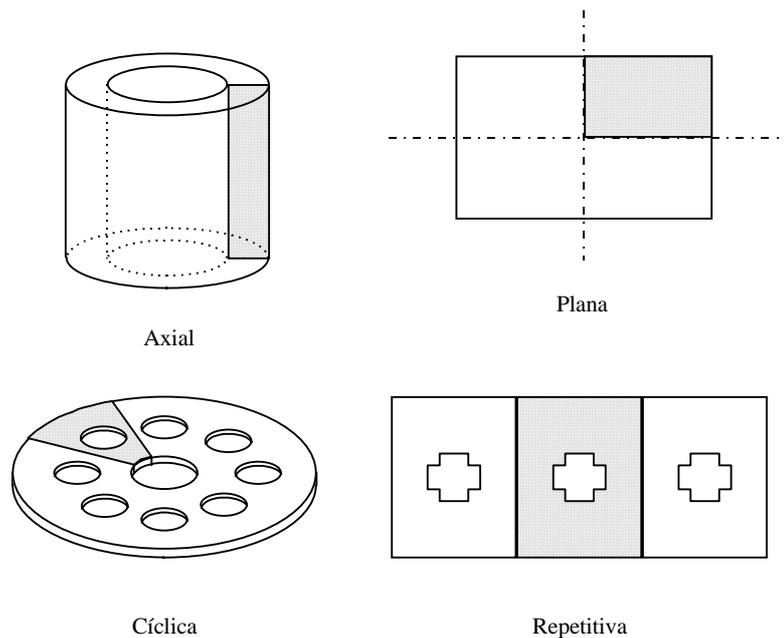


Fig. 3.3.- Tipos de Simetría.

¹ No solo los cuerpos analizados se pueden simplificar, también podemos simplificar una estructura cuando tenga las características correspondientes.

- 1) **Membrana.** Representado por cargas en un plano, sin flexión rígida normal a dicho plano.
- 2) **Flexión.** Soportado solo por cargas flexionantes.
- 3) **Placa/Cascarón.** Es una combinación de los comportamientos de membrana y flexión.
- 4) **Sólido.** Dispone de un régimen de esfuerzo tridimensional.
- 5) **Axisimétrico.** Se asume en dirección circunferencial una distribución constante de una variable.

Con esta consideración tendremos que realizar la selección del elemento a utilizar de acuerdo al problema que se va a analizar. Como guía se presenta en la fig. 3.5 un conjunto de elementos típicos para análisis de esfuerzos².

6)

² Existen otros elementos típicos específicos para análisis de problemas de campo.

TIPO DE ELEMENTO	GRADOS DE LIBERTAD	FORMA
Masa	—	
Barra 2D*	u, v	
Viga 2D*	u, v, θ_z	
Sólido isoparamétrico 2D esfuerzo plano Deformación plana Axisimétrico*	u, v	
Interface 2D*	u, v	
Cascarón axisimétrico* [⊕]	u, v, θ_z	
Barra 3D*	u, v, w	
Viga 3D*	u, v, w $\theta_x, \theta_y, \theta_z$	
Sólido isoparamétrico 3D [⊕]	u, v, w	
Cascarón 3D [⊕]	u, v, w $\theta_x, \theta_y, \theta_z$	
Interface 3D*	u, v, w	

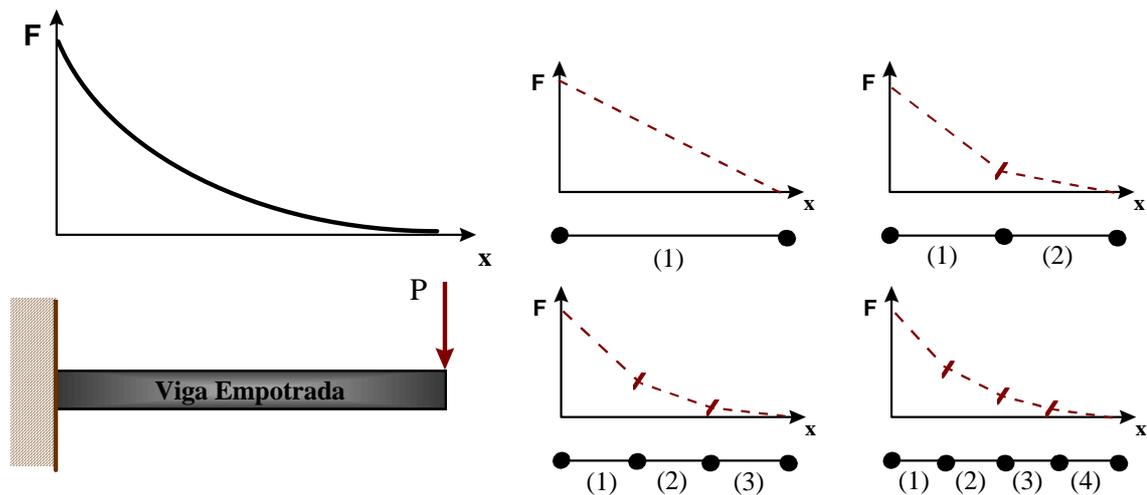
Otras Posibles opciones:

- * Barra: solamente tensión o compresión.
- * Viga: uniforme, cónica, simétrica, asimétrica.
- Axisimétrico: incluyendo elementos armónicos.

- *Interface: abertura con/sin fricción.
- ⊕ Cascarón: delgado o grueso.
- ⊕ Sólido: isotrópico, anisotrópico.

Fig. 3.5.- Típicos elementos para análisis de esfuerzos.

Es importante imaginar el modelo con los elementos disponibles para hacer la selección, ya que el modelado de un problema se puede hacer con elementos tridimensionales o, simplificando, hasta con elementos bidimensionales. *El objetivo de la selección del tipo de elemento es la de satisfacer las condiciones del problema y facilitar su modelado reduciendo el cálculo.*



Distribución de Esfuerzo

Modelado por MEF

Fig. 3.6.- Efecto del número de elementos en un análisis de esfuerzos

Ahora, teniendo el tipo de elemento a utilizar, es necesario definir el número de elementos, éste nos dará directamente el tamaño de cada elemento. Es obvio que el número de elementos determina la exactitud en los resultados obtenidos (ver fig. 3.6), sin embargo no es factible utilizar un número muy grande de elementos ya que el cálculo se complicaría significativamente. Utilizando un número de elementos adecuado al problema de análisis la solución obtenida no tendrá error considerable lo que daría un resultado satisfactorio. Esto es aplicable solo a modelos en donde todos los elementos tienen el mismo tamaño, por otro lado, el tamaño de los elementos puede variar según las necesidades del analista. Por ejemplo, teniendo una zona específica de interés en el cuerpo del problema, la densidad de la malla del modelo requeriría de un número mayor de elementos y por consiguiente de tamaño pequeño, y en la zona que no es de interés se tendrían elementos de mayor tamaño. Estos cambios en el tamaño de los elementos (y de la densidad de la malla) puede hacerse de distintas formas según convenga, como se observa en la figura 3.7(a, b, c y d), pero debe observarse que los nodos deben estar *interpolados* adecuadamente, ya que si no se define bien la interpolación, quedando nodos "suelos", se podría caer en discontinuidad en esos puntos (ver fig.3.7e).

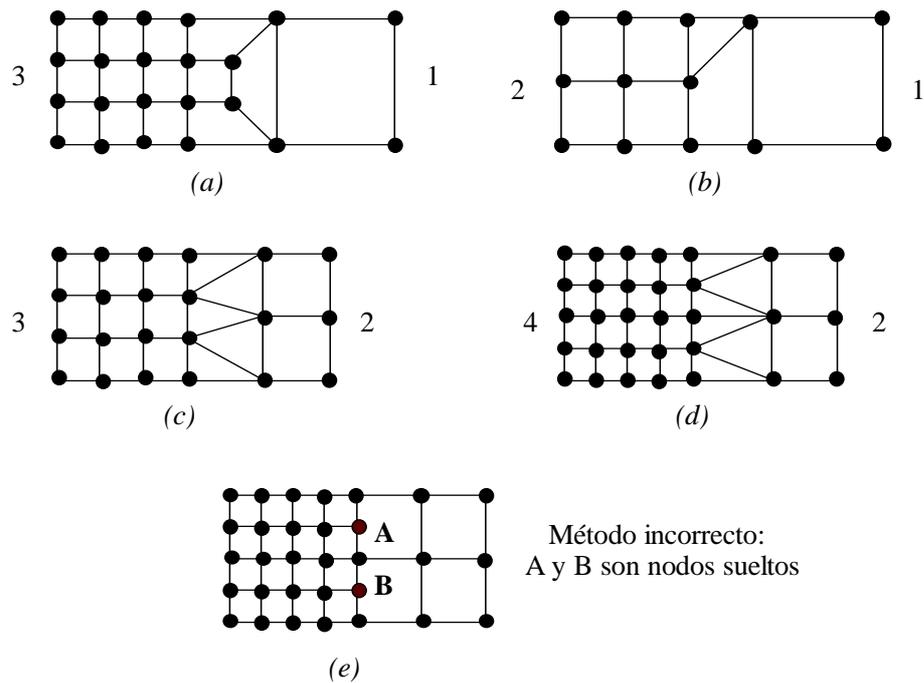


Fig. 3.7.- Métodos para el cambio de densidad en la malla.

Otro aspecto para garantizar la confiabilidad de los resultados en un análisis es observar la forma de los elementos. Lo ideal en un modelo es ocupar elementos del mismo tamaño, si es el caso bidimensional debe buscarse que los elementos triangulares y cuadriláteros, principalmente, sean equiláteros y cuadrados respectivamente; lo mismo para el caso tridimensional. Esto es debido a que distorsiones en la forma de los elementos producen errores en el cálculo ya que se vuelve más complicado. Sin embargo, existen límites establecidos para la distorsión de los elementos, que garantizan la confiabilidad de los resultados.

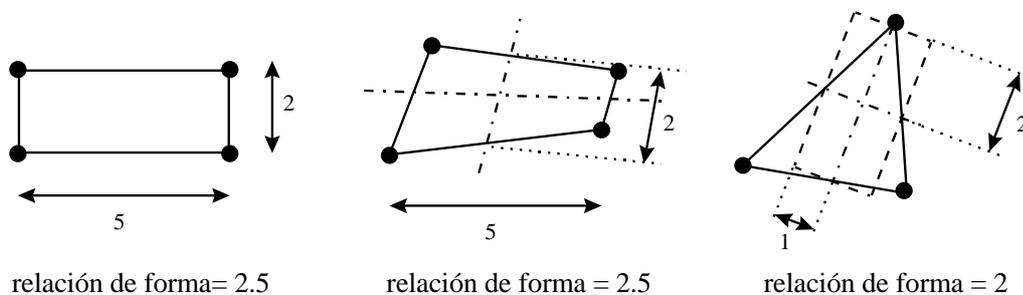


Fig. 3.8.- Ejemplos de la Relación de Forma para medir la distorsión de un elemento.

Primeramente para medir la distorsión de los elementos utilizamos la *relación de forma* la cuál es la relación de la medida mayor entre la menor del elemento, como se ve en la fig. 3.8. Para distinguir la diferencia de forma en elementos con la misma relación se utiliza la medida del ángulo y/o conicidad, los cuales se establecen con límites, ver fig. 3.9. Y cuando se trabajan secciones curvas los elementos pueden ser de contornos curvados (de orden superior; no lineales), sin embargo, la curvatura también debe ser limitada según lo muestra la fig. 3.10.

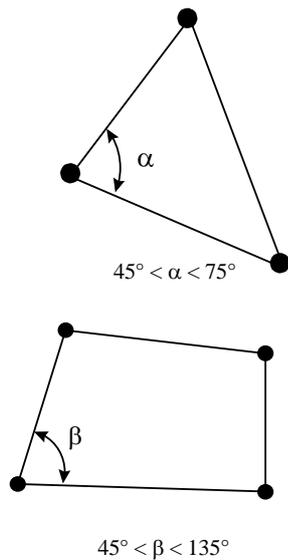


Fig. 3.9.- Límite para los ángulos de un elemento.

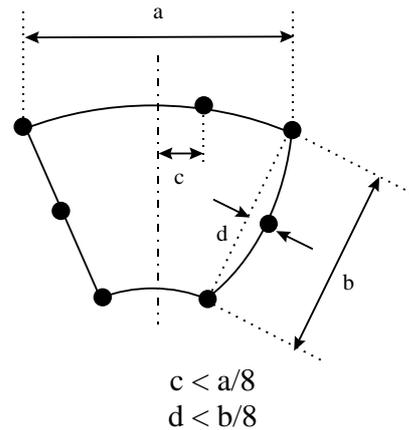


Fig. 3.10. Límite de curvatura en un elemento de orden superior.

Establecido el o los elementos para construir el modelo del cuerpo en estudio hay que tomar en cuenta la división de la geometría en elementos para distribuirlos adecuadamente. Se debe considerar que en las zonas importantes, tales como cambios de material, cambios abruptos de sección y condiciones de frontera y carga, la localización de los nodos se hace más necesaria por lo que se recomienda marcar esas zonas para definir respuestas más específicas; ver fig. 3.11.

Finalmente, hecho el modelo de elementos (y nodos) que representan el problema, se debe realizar la numeración de los mismos para organizar el cálculo posterior. Primeramente se enumeran los elementos y después los nodos, puede tomarse el criterio de enumerarlos sobre las dimensiones más cortas del modelo a través de toda su longitud; principalmente los elementos, por ejemplo la viga en voladizo de la fig. 3.12.

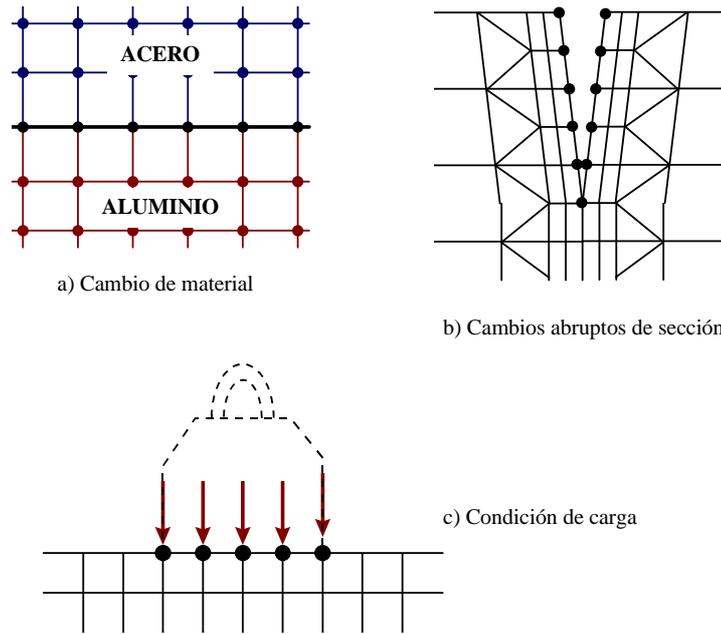


Fig. 3.11.- Ejemplos donde la localización de los nodos es importante (para modelos en 2D).

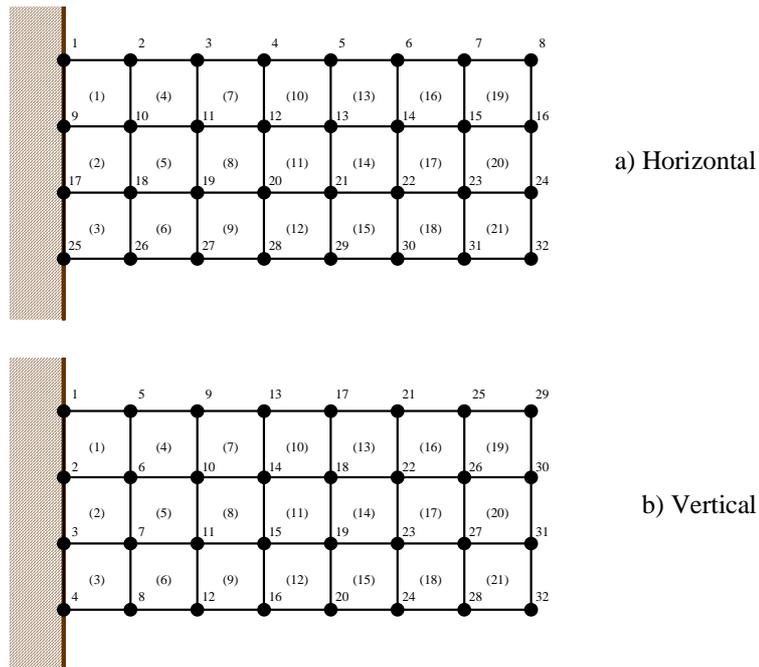


Fig. 3.12.- Dos métodos diferentes de enumerar los nodos.

3.2. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA

Supóngase que Ω es una región limitada en \mathbb{R}^3 , el espacio Euclidiano tridimensional, y que $U = U(x,y,z)$ es una función (de valores reales) de posición en Ω . Entonces se dice que U es de clase C^m sobre Ω [o pertenece a $C^m(\Omega)$, o " $\in C^m(\Omega)$," o, simplemente, es una función $—C^m$] si U y todas sus derivadas parciales de orden menor o igual a m son continuas en cualquier punto (x,y,z) en Ω , donde m es un entero positivo. Comúnmente se utiliza la siguiente notación como la definición de $C^m(\Omega)$:

$$C^m(\Omega) = \left\{ U = U(x,y,z), (x,y,z) \in \Omega \mid U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^m U}{\partial x^m}, \frac{\partial^m U}{\partial x^{m-1} \partial y}, \dots, \frac{\partial^m U}{\partial z^m} \text{ son continuas en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \right\} \quad (3.1)$$

la cuál se lee como: " $C^m(\Omega)$ es un arreglo de funciones, una típica función U la cuál tiene la propiedad de que $U, \partial U/\partial x, \dots, \partial^m U/\partial z^m$ son continuas en una región Ω contenida en un espacio Euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 ". Anotando la ec.(3.1) de una forma más compacta:

$$C^m(\Omega) = \left\{ U \mid \frac{\partial^r U}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \text{ son continuas en } \Omega \subset \mathbb{R}^3; i, j, k \geq 0, i + j + k = r, r \leq m \right\} \quad (3.2)$$

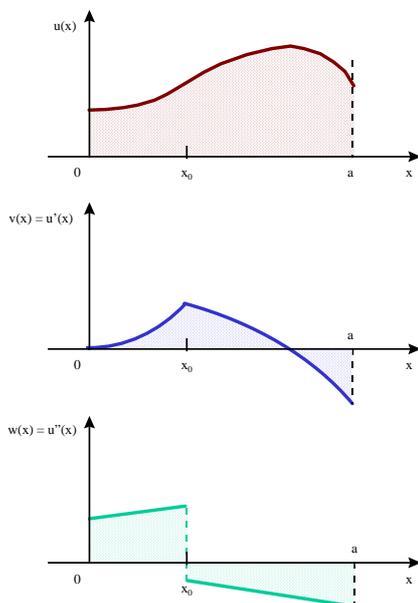


Fig. 3.13. Función u con segunda derivada discontinua pero primera derivada continua.

La clase $C^m(\Omega)$ es un *espacio lineal* de funciones; en otras palabras, si $u \in C^m(\Omega)$ y $v \in C^m(\Omega)$, entonces $\alpha u + \beta v \in C^m(\Omega)$ para cualquier escalar α y β .

Considere, por ejemplo, la función u definida en un dominio unidimensional $[0,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq a\}$ en la figura 3.13. Si dejamos que $v(x) = u'(x)$ y $w(x) = v'(x) = u''(x)$. Claramente, w sufre un salto discontinuo en el punto x_0 . Por lo tanto, u no puede pertenecer a $C^2([0,a])$. Sin embargo, v es continua, así que u es una función $—C^1$, es decir, $u \in C^1([0,a])$, y $v \in C^0([0,a])$. Similarmente, la función f en la figura 3.14 es una función $—C^0$ y no $—C^1$ porque $\partial f/\partial x$ tiene una discontinuidad en la línea $x = x_0$. Si u es infinitamente diferenciable sobre Ω , se tiene $u \in C^\infty(\Omega)$.

Algunas veces se desea incluir condiciones de frontera en la definición de clases de funciones. Un ejemplo típico es el espacio $C_0^m(\Omega)$, el cual está definido como el subespacio de $C^m(\Omega)$ consistente de aquellas funciones $u \in C^m$, donde u y sus derivadas normales $\partial u / \partial n$, $\partial^2 u / \partial n^2$, ..., $\partial^{m-1} u / \partial n^{m-1}$ desaparecen en la frontera $\partial\Omega$ de Ω , n indica la dirección de la normal unitaria para $\partial\Omega$.

3.2.1. CONDICIONES DE CONVERGENCIA

Dado a la necesidad de garantizar un resultado confiable al problema real, las funciones deben satisfacer apropiadamente **condiciones de complejidad y continuidad**, además de las condiciones actuales del problema en sí. Las condiciones de complejidad y continuidad que aquí se presentan son aplicables a aquellos problemas gobernados por ecuaciones en las cuales el operador diferencial es lineal, simétrico y bajo la frontera positivo. Esto asume que la ecuación diferencial que gobiernan al problema es de orden $2m$, donde $m = 0, 1, 2, \dots$, y que las ecuaciones residuales han sido integradas en m partes. Por lo tanto m es el orden superior obtenido de la solución del elemento $^{(e)}$ (y las funciones de prueba $\phi_i^{(e)}$).

Condición de Complejidad.

La solución de prueba del elemento $^{(e)}$ y cualquiera de sus derivadas con orden arriba de m , deben asumir cualquier valor constantes cuando, en el límite, el tamaño del elemento tienda a cero. Las condiciones de complejidad pertenecen al interior del elemento.

Condición de Continuidad.

En fronteras de interelementos las soluciones de prueba del elemento deben tener una continuidad C^{m+1} ; esto es, que $^{(e)}$ y sus derivadas con orden

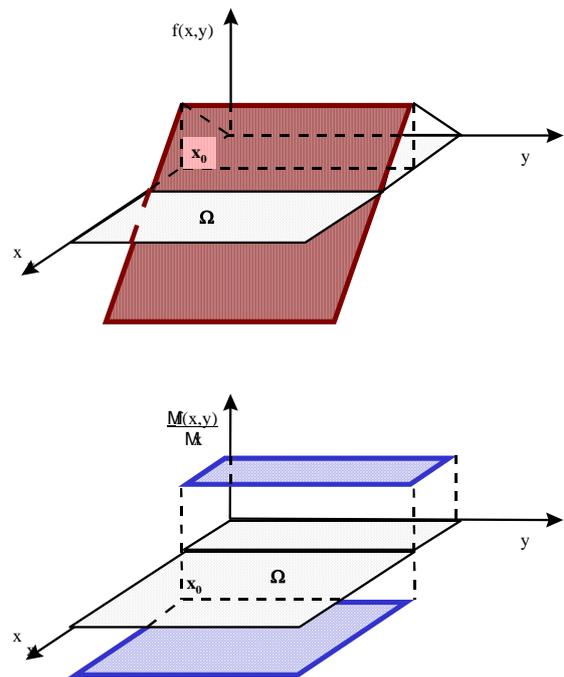


Fig. 3.14. Función f con continuidad C^0 definida en un espacio Ω bidimensional.

arriba de $m+1$ deben ser continuas. Las condiciones de continuidad pertenecen a las fronteras entre elementos.

Si las funciones del elemento $\phi_i^{(e)}$ están construidas para que $\psi^{(e)}$ satisfaga ambas condiciones, entonces una secuencia de soluciones, correspondientes a la secuencia de la malla refinada sucesivamente, convergirá a la solución exacta (suponiendo que no existe otro tipo de error) en el límite cuando $h_{\text{máx}} \rightarrow 0$. En este caso h representa el tamaño de un elemento (es decir, la longitud de un elemento en 1D o una dimensión representativa de un elemento 2D o 3D). Dado que $h_{\text{máx}}$ es el tamaño del elemento mayor, y la estipulación de que $h_{\text{máx}} \rightarrow 0$ especifica que todos los elementos deben tender a cero para convergir a la solución exacta. Este tipo de convergencia está referida como *convergencia-h* dado que el tamaño de los elementos tiende a ser progresivamente menor.

La condición de complejidad es necesaria para que se converja a la solución exacta, mientras que la condición de continuidad no es necesaria. El propósito de ésta última condición es de medir que la discontinuidad en las fronteras de interelementos no sea lo bastante severa para introducir errores sumados al error de discretización. La condición de continuidad puede algunas veces ser relajada si los errores introducidos disminuyen a cero (lo bastante rápido) refinando la malla, en tal caso la convergencia para la solución exacta debe detenerse cuando $h_{\text{máx}} \rightarrow 0$.

Si las dos condiciones se satisfacen, entonces la convergencia es segura, es decir, las dos condiciones juntas son suficientes para la convergencia. Un elemento que satisface las dos condiciones es llamado *elemento conformado*, o *compatible*. Estos nombres enfatizan la satisfacción de la condición de continuidad. Un elemento que satisface la condición de complejidad pero no la de continuidad, donde el proceso se detiene al exhibir convergencia, es llamado un *elemento no conformado*, o *incompatible*. Dichos elementos comúnmente presentan un comportamiento relativamente superior a la de los elementos conformados.

Dado que los polinomios son utilizados universalmente para soluciones de prueba, es necesario examinar la condición de complejidad en el contexto de soluciones polinomiales. Primero se requiere de una definición: un *Polinomio de grado p* está *completo* cuando todas las potencias desde 0 (el término constante) hasta p se presentan en él. Si una potencia es omitida cualquier potencia superior no contribuye a la condición de complejidad. Por ejemplo, los polinomios $a_1+a_2x+a_3x^2$ y $a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^4$ son ambos de segundo grado. El segundo polinomio tiene una potencia mayor a 2 pero debido a que se omitió el término cúbico, sólo se completa a grado 2; si el término cúbico estuviera presente, entonces se completaría a grado 4.

Con la definición anterior, tenemos la siguiente condición de complejidad alternativa:

Condición de Complejidad utilizando polinomios.

Si un polinomio de grado p es utilizado para la solución de prueba del elemento $\text{U}^{(e)}$, el polinomio debe completarse por lo menos al grado m^3 ; esto es, $p \geq m$. Al igual que a la condición de complejidad más general, m es el orden mayor obtenido de $\text{U}^{(e)}$.

Un polinomio completo de grado m es continuo y tiene derivadas continuas arriba del orden m , cada una controlada por un parámetro diferente conforme el elemento tiende a cero. Por lo tanto $\text{U}^{(e)}$ y cada una de sus derivadas arriba del orden m pueden asumir cualquier valor constante conforme el elemento tiende a cero. Tal como lo requiere la condición de complejidad más general. Entonces esta condición de complejidad alternativa y la de continuidad están lo suficientemente unidas para asegurar la convergencia a la solución exacta.

3.2.2. ECUACIONES QUE GOBIERNAN A LOS PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

Cuando desarrollamos primeramente la formulación diferencial de un problema establecemos el equilibrio y los requerimientos que lo constituyen de elementos diferenciales típicos en términos de variables de estado. Estas consideraciones son primordiales para un sistema de ecuaciones diferenciales en las variables de estado, y es posible que todos los requerimientos de compatibilidad (es decir, los requerimientos de interconectividad de los elementos diferenciales) están contenidos en estas ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en general, las ecuaciones deben ser suplementadas por ecuaciones diferenciales adicionales que imponen restricciones apropiadas sobre las variables de estado de manera que todos los requerimientos de compatibilidad estén satisfechos. Finalmente, para completar la formulación del problema, todas las condiciones de frontera son condiciones de estado.

Para propósitos de análisis matemático, clasificamos las ecuaciones diferenciales que gobiernan a los problemas. La forma general de una ecuación diferencial parcial de segundo orden que involucra dos variables independientes (dominio: x,y) puede representarse como

$$A(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \phi \left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

donde U es la variable de estado desconocida. Dependiendo del valor de los coeficientes, la ecuación diferencial (3.3) es elíptica, parabólica o hiperbólica,

³ La condición de complejidad se aplica a la solución de prueba del elemento $\text{U}^{(e)}$, no para cada una de sus funciones separadamente. Por lo tanto algunas de las funciones pueden ser (y comúnmente son) polinomios incompletos.

$$(B(x, y))^2 - 4A(x, y)C(x, y) \begin{cases} < 0 & \text{elíptica} \\ = 0 & \text{parabólica} \\ > 0 & \text{hiperbólica} \end{cases} \quad (3.4)$$

Normalmente las ecuaciones elípticas ocurren en problemas de equilibrio, mientras que las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas ocurren en problemas de propagación. La diferencia entre los problemas de equilibrio y de propagación está dada por las condiciones aplicadas en las fronteras del dominio; el dominio para un problema de equilibrio está cerrado y sus condiciones de frontera se dan alrededor de toda su frontera.

Dentro de las ecuaciones del tipo elíptico encontramos dos casos especiales,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \nabla^2 U = \phi_1(x, y) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = \nabla^2(\nabla^2 U) = \nabla^4 U = \phi_2(x, y) \quad (3.6)$$

La ec. (3.5) es elíptica de acuerdo a la definición anterior (desde $\lambda=-4$), y es comúnmente conocida como la *ecuación de Poisson*. La *ecuación de Laplace* se obtiene como un caso especial cuando $\phi_1 = 0$. La ec.(3.6) es una ecuación elíptica de cuarto orden. Para distinguir a las dos ecuaciones nombramos a la ec. (3.5) como una ecuación **Armónica** y a la ec. (3.6) como una ecuación **Biarmónica**. Las ecuaciones armónicas son las que gobiernan el comportamiento de los problemas de torsión, mientras que las ecuaciones biarmónicas gobiernan los problemas de flexión (elasticidad), esfuerzo plano y deformación plana.

En el análisis de esfuerzos, el problema más sencillo es la torsión de barras (o flechas) y se clasifica como un *problema de Campo*. La ecuación que gobierna este proceso se puede representar como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (3.7)$$

Las condiciones de frontera asociadas con la ec.(3.7) en su forma más general son

$$\phi = \phi_1 \quad (3.8)$$

sobre la superficie S_1 , y

$$K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q = 0 \quad (3.9)$$

$$K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + h(\phi - \phi_\infty) = 0 \quad (3.10)$$

sobre las superficies S_2 y S_3 respectivamente, donde S_1 , S_2 y S_3 forman la frontera de la región considerada. El término q y los coeficientes K_x , K_y y K_z pueden ser funciones de las coordenadas x , y y z , pero son independientes de la variable ϕ . l_x , l_y y l_z son los cosenos directores de la normal externa a la frontera.

Considerando una situación en dos dimensiones donde $K_x = K_y = 1$ y $Q = 2G\theta_1$, con las condiciones de frontera de ϕ igual a una constante (usualmente cero) alrededor de la frontera, se tiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta_1 \quad (3.11)$$

Aquí ϕ es la función de esfuerzo de *Prandtl*, G es el módulo de corte del material y θ_1 es el ángulo de torsión por unidad de longitud de la barra. Los esfuerzos de corte en la barra se determinan por las derivadas de ϕ en las direcciones x e y , y el torque por el volumen bajo la superficie ϕ .

3.3.- INTERPOLACIÓN

3.3.1.- Interpolación de Barras

Cuando se trata de interpolar modelos que representan problemas de campo, la forma más utilizada de determinar las funciones de interpolación y de forma es mediante **Polinomios de Lagrange**. Para comprender este concepto, supongamos un elemento de dos nodos (caso unidimensional) el cuál se convierte en el dominio completo Ω .

Primero consideremos un polinomio lineal, escrito como series de potencias:

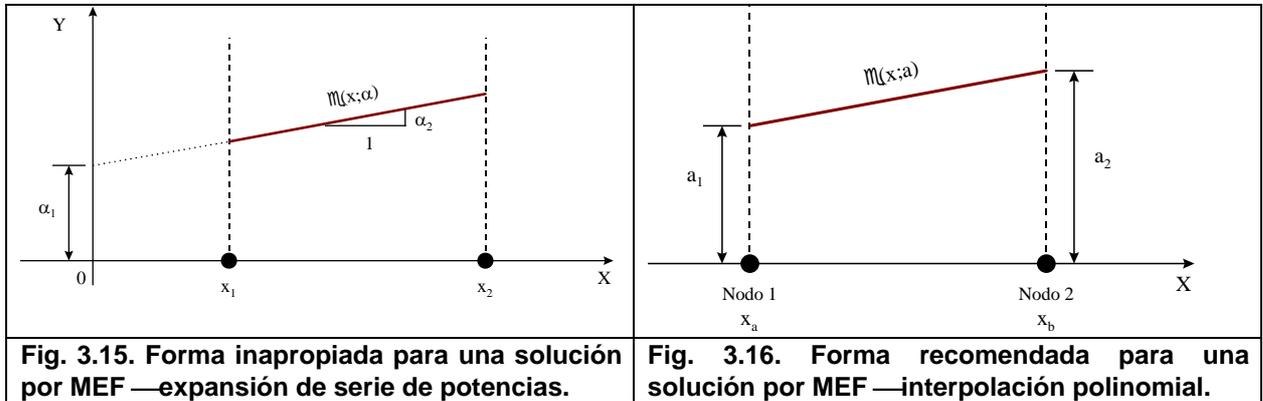
$$\tilde{U}(x; \alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.12)$$

La figura 3.15 muestra un dibujo de la función $\tilde{U}(x; \alpha)$ e indica las medidas de α_1 y α_2 . Sin embargo, esta expresión es inapropiada para uso en el MEF debido a los parámetros α que utiliza. Por tal motivo recurrimos al concepto de *polinomio de interpolación*. El principio de interpolación es simple:

- Cada parámetro a_i debe representar el valor de la solución en un punto específico en el elemento.
- Cada punto es llamado **nodo**.

En la figura 3.16 se muestra la aplicación del principio anterior

$$\begin{aligned} (x_a; a) &= a_1 \\ (x_b; a) &= a_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$



Ahora expresando la ec.(3.12) en términos de a_1 y a_2 , le introducimos las ecs.(3.13):⁴

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 x_a &= a_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_b &= a_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

resolviendo para α_1 y α_2 , sustituyendo en la ec.(3.12) y combinando los coeficientes a_1 y a_2 , obtenemos finalmente:

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) \quad (3.15a)$$

donde las funciones $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ tienen la forma

$$\phi_1(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \quad \phi_2(x) = \frac{x - x_a}{x_b - x_a} \quad (3.15b)$$

y satisfacen las siguientes propiedades en los puntos de frontera del elemento⁵:

⁴ Escribiendo las ecs.(3.14) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_a \\ 1 & x_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

el determinante de la matriz de coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & x_a \\ 1 & x_b \end{vmatrix}$

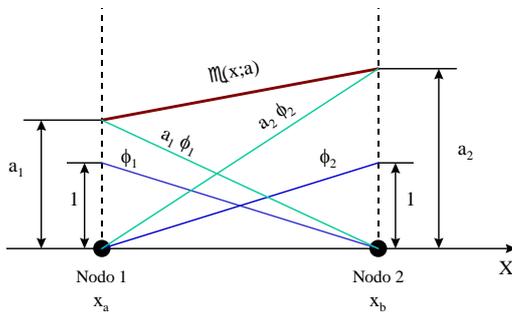
Este determinante es llamado "Determinante de Vandermonde" (así como a todas las extensiones a polinomios de orden superior).

⁵ Estas funciones fueron construidas para satisfacer las condiciones sobre la frontera del dominio, recuerdese que en este caso la frontera del elemento es también la frontera del dominio. Cuando se trabaje con un dominio formado por 2 o más elementos, estas funciones deben construirse para satisfacer condiciones similares sobre la frontera del elemento.

$$\begin{aligned} \phi_1(x_a) &= 1 & \phi_2(x_a) &= 0 \\ \phi_1(x_b) &= 0 & \phi_2(x_b) &= 1 \end{aligned} \tag{3.16}$$

La funciones de las ecs. (3.15b) son interpolatorias por la ec.(3.16), es decir, cada una está definida para ser igual a la unidad en un nodo y a cero en el otro nodo. Esta propiedad se puede apreciar mejor si cambiamos la notación utilizada por una más general. Así, sustituyendo a x_1 por x_a y a x_2 por x_b , las ecs. (3.15b) quedan como

$$\phi_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \qquad \phi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{3.17}$$



Con esto podemos escribir a las ecs.(3.16) en una forma general como

$$\phi_j^{(e)}(x_i) = \delta_{ij} \tag{3.18}$$

donde δ_{ij} , llamada *Delta Kronecker*, tiene la propiedad⁶ de

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \tag{3.19}$$

Fig. 3.17.- Solución y funciones de las ecs. (3.15).

Cuando se trata de dominios con un número finito de elementos, por ejemplo “n” y “n+1” nodos, cada elemento debe tratarse en forma similar. La diferencia está en la notación, pues deben especificarse cuales son las funciones para cada elemento, así como la aparición del concepto de *condiciones de frontera de interelementos*. Por lo tanto la función que represente el dominio será ahora:

$$\tilde{U}(x; a) = \sum_{e=1}^n \tilde{U}^{(e)}(x; a) \tag{3.20}$$

donde

⁶ La ec.(3.14) será referida como la **propiedad de interpolación**. Esta es un propiedad general que caracteriza a casi todas las funciones usadas para ecuaciones diferenciales de segundo orden. Refiriéndonos a ecuaciones diferenciales de orden superior, se utiliza una propiedad de interpolación similar mas generalizada, involucrando derivadas de las funciones.

Note que la ec.(3.22) establece una única relación entre las coordenadas X y ξ sobre la barra. La ecuación de transformación de coordenadas locales a globales para nuestro ejemplo queda como

$$X = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2 \quad (3.24)$$

Las funciones de interpolación para el sistema global de la barra se expresan de la misma forma que las coordenadas del sistema global:

$$\tilde{U}^{(e)}(\xi; a) = \sum_{k=1}^m a_k^{(e)} \phi_k^{(e)}(\xi) \quad (3.25)$$

donde en este caso la variación de las funciones de forma es lineal. La *interpolación de las coordenadas (X) y desplazamientos (δ) del elemento real utilizandolas mismas funciones de interpolación, las cuales están definidas en un sistema de coordenadas local, es la base de la formulación del elemento finito **isoparamétrico**.*

Para problemas donde el elemento barra es de tipo curvo, una alternativa es utilizar un número de elementos lineales adecuado para simular la curvatura, sin embargo los resultados obtenidos estarían presentando errores considerables en la mayoría de los casos. Es posible, en mejor forma, utilizar elementos de orden superior que se adecuen a la forma curva de la barra.

3.3.1.1.- ELEMENTO CUADRÁTICO EN 1D — C^0

En un **elemento cuadrático** — C^0 se requerirá de 3 nodos para definir el polinomio cuadrático; en cada extremo del elemento debe localizarse un nodo y el tercero se puede localizar en cualquier parte del interior del elemento. Ahora la solución de prueba del elemento es la suma de tres funciones de forma:

$$\tilde{U}^{(e)}(x; a) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j^{(e)}(x) \quad ; \quad n = 3 \quad (3.26)$$

donde cada función de forma es un polinomio cuadrático que satisface la propiedad de interpolación: ec.(3.18).

Evaluando la ec.(3.26) en x_i , y utilizando la ec.(3.18), obtenemos:

$$\tilde{U}^{(e)}(x_i; a) = a_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.27)$$

Utilizando la ec.(3.18) para determinar las ecuaciones de las funciones de forma, iniciamos considerando la primera función de forma, la cuál escribimos como un polinomio cuadrático:

$$\phi_1^{(e)}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \quad (3.28)$$

Aplicando la ec.(3.18) a la (3.27) en cada uno de los tres puntos nodales:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 &= 1 \\
 \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 &= 0 \\
 \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_3^2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Resolviendo el sistema (3.29) para cada α_i en términos de x_i y sustituyéndolos en la ec.(3.28), obtenemos la siguiente expresión para $\phi_1^{(e)}(x)$:

$$\phi_1^{(e)}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}
 \tag{3.30}$$

Repitiendo el mismo procedimiento para $\phi_2^{(e)}(x)$ y $\phi_3^{(e)}(x)$ obtenemos:

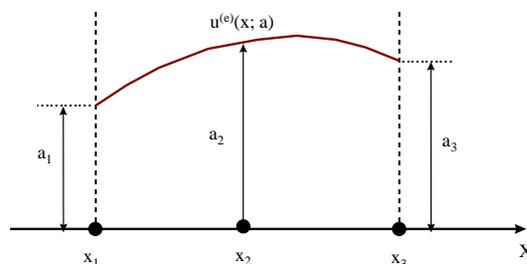
$$\begin{aligned}
 \phi_2^{(e)}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
 \phi_3^{(e)}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

La figura 3.19 muestra las tres funciones de forma para un elemento cuadrático en 1D; ésta proporciona un resumen de las relaciones entre las funciones de forma y la solución del elemento.

Nótese que estas funciones de forma son *polinomios de interpolación de Lagrange* de segundo grado (cuadráticos); esta terminología fué introducida anteriormente donde las funciones de forma para los elemento lineales — C^0 fueron identificados como polinomios de Lagrange de primer grado. Así que, generalizando el polinomio de Lagrange de grado “p” en 1D se tiene:

$$\phi_j^{(e)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_p)(x-x_{p+1})}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_p)(x_j-x_{p+1})} \quad j=1,2,\dots,p+1 \tag{3.32}$$

La solución de prueba del elemento para un elemento típico, $u^{(e)}(x; a)$, es un polinomio cuadrático completo,



Está representado como la suma de 3 funciones de forma:

$$\tilde{U}^{(e)}(x; a) = \sum_{j=1}^3 a_j \phi_j^{(e)}(x)$$

cada coeficiente a_j es el valor de $\tilde{U}^{(e)}(x; a)$ en el nodo x_j . Cada función de forma, $\phi_j^{(e)}(x)$, es un polinomio cuadrático similar que satisface la propiedad de interpolación, $\phi_j^{(e)}(x) = \delta_{ji}$:

El polinomio $\phi_j^{(e)}(x)$ interpola a los $p+1$ nodos $(x_1, x_2, \dots, x_{p+1})$; esto es, satisface la propiedad de interpolación:

$$\phi_j^{(e)}(x_i) = \delta_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, p+1 \quad (3.33)$$

Elemento cuadrático isoparamétrico

Los *elementos isoparamétricos*, como ya se vio, emplean la forma estándar para la solución de prueba del elemento, ec.(3.26), y las funciones de forma satisfacen la propiedad de interpolación, ec.(3.27). Sin embargo, las funciones de forma son generadas indirectamente, primero desarrollando un **elemento maestro** se ajustan las funciones de forma utilizando la aproximación directa empleada anteriormente, y entonces se hace la transformación del *elemento maestro* sobre cada uno de los elementos reales en una malla. Se verá que la transformación generalmente (pero no siempre) hace imposible escribir expresiones explícitas para el resultado real de las funciones de forma, $\phi_j^{(e)}(x)$.

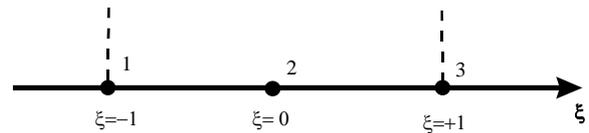
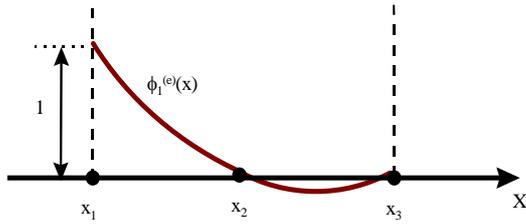
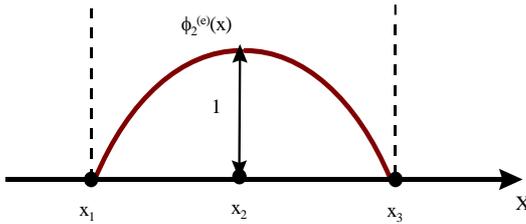


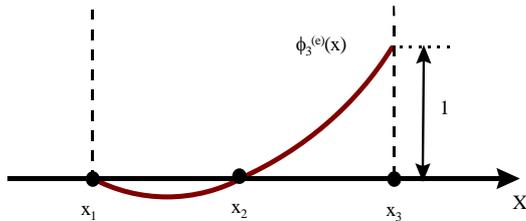
Fig. 3.20.- Elemento maestro para el elemento isoparamétrico cuadrático — C^0 en 1D.



$$\phi_1^{(e)}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

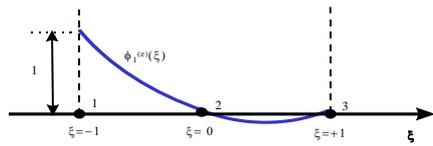


$$\phi_2^{(e)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

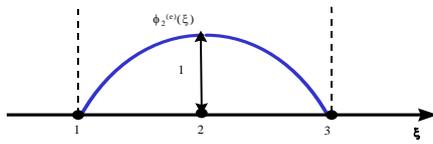


$$\phi_3^{(e)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

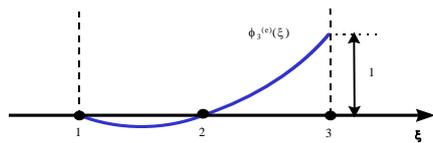
Fig. 3.19.-Elemento cuadrático —C⁰ (no isoparamétrico)



$$\phi_1^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)$$



$$\phi_2^{(e)}(\xi) = (\xi+1)(\xi-1)$$



$$\phi_3^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi+1)$$

Fig. 3.21. Funciones de forma maestras para el elemento isoparamétrico cuadrático —C⁰ en 1D.

Iniciamos definiendo un elemento maestro a lo largo de un eje separado ξ , con los tres nodos uniformemente espaciados en $\xi = -1, 0, +1$ (figura 3.20). Posteriormente definimos las funciones de forma cuadráticas — C^0 , $\phi_i(\xi)$, en el elemento maestro. Este puede ser copiado de la figura 3.19, sustituyendo -1 para x_1 , 0 para x_2 , $+1$ para x_3 y ξ para x . Las funciones de forma (del elemento maestro) y sus expresiones se muestran en la figura 3.21; nos referimos a ellas como las **funciones de forma maestras**. Finalmente definimos una transformación de coordenadas:

$$x = X^{(e)}(\xi) \quad (3.34)$$

el cual transforma el elemento maestro (en el intervalo $\xi = -1$ a $\xi = +1$) sobre cada uno de los elemento reales en una malla. El superíndice (e) se utiliza porque cada elemento usa una transformación separada, tal como se muestra en la figura 3.22.

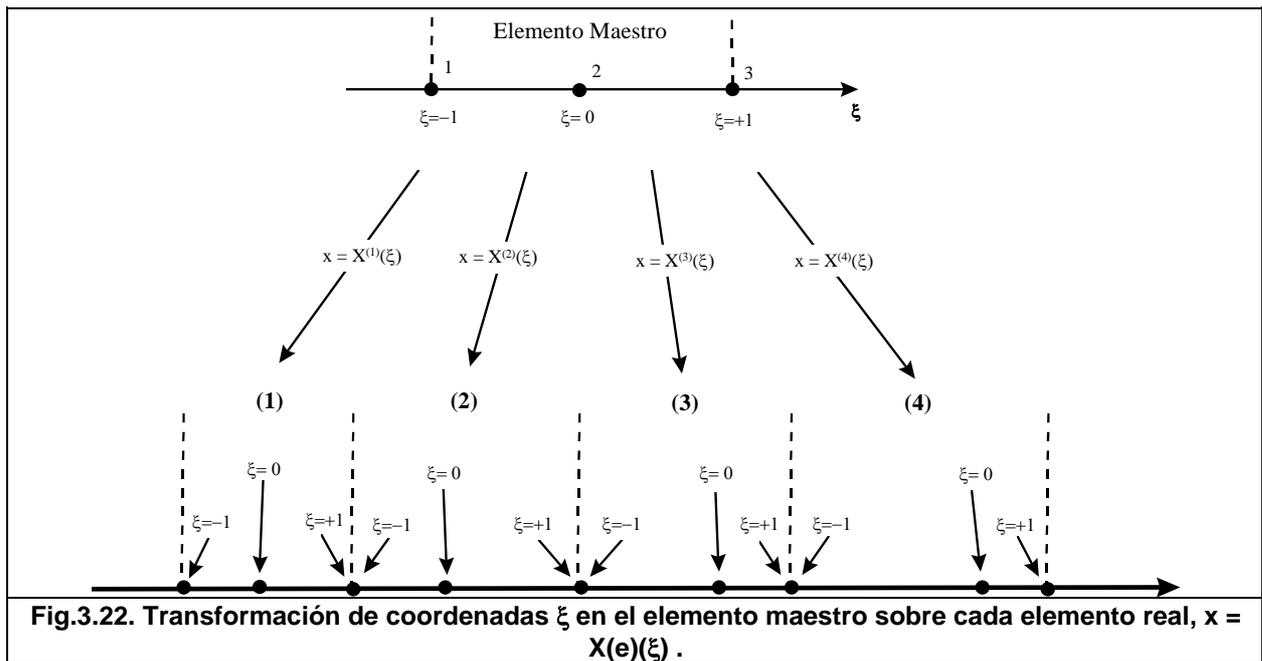
Una consecuencia importante de este proceso es que las tres funciones de forma maestras, $\phi_i(\xi)$, se “llevan a todo lo largo” en cada transformación, resultando “funciones de forma definidas sobre cada elemento real”. En otras palabras, un ajuste de las tres funciones de forma, $\phi_i(x)$, se crea para cada elemento. Esta, entre otras, es la principal ventaja del proceso de transformación de coordenadas del elemento maestro: para facilitar la construcción de las funciones de forma sobre elementos reales. Esta ventaja es más significativa en problemas de 2D o 3D⁷.

Para cada elemento en la malla es deseable que la transformación de coordenadas [ec.(3.34)] sea “una a una”, por ejemplo, cada punto ene el elemento maestro transformado sobre un punto ene el elemento real, y viceversa. En particular, queremos los nodos de la frontera del elemento maestro ($\xi = \pm 1$) transformarlos sobre los nodos de la frontera del elemento real. Esto es necesario para asegurar la continuidad del transformado en las fronteras de elementos adyacentes⁸.

Existen varios caminos para establecer dicha transformación. La más utilizada, hoy en día, es la aproximación isoparamétrica en la cuál la ec(3.34) toma la forma:

⁷ Por ejemplo, en problemas de 2D o 3D, los elementos pueden tener formas complicadas con fronteras curvadas. En estos casos sería muy difícil, pero no imposible, definir las funciones de forma apropiadas sobre dichas formas. Por otro lado, un elemento maestro es construido usando la forma más simple; como un cuadrado bi-unitario en 2D (esquinas con nodos en $\pm 1, \pm 1$) o un cubo bi-unitario en 3D (esquinas con nodos en $\pm 1, \pm 1, \pm 1$). Es mucho más fácil construir funciones de forma sobre los cuadrados o cubos maestros y entonces transformarlos a los elementos curvilíneos reales.

⁸ Transformaciones no aceptables son fáciles de construir. Por ejemplo considere la transformación del elemento maestro de la figura 3.22 sobre el elemento (1) por la función $x = x_2(3+\xi)$. Los nodos de frontera en $\xi = -1$ y $\xi = +1$ serían transformados sobre los puntos $x = 2x_2$ y $4x_2$, respectivamente, lo cuál no será en x_1 y x_3 .



$$x = \sum_{k=1}^l x_k^{(e)} \psi_k(\xi) \quad (3.35)$$

donde $x_k^{(e)}$, $k = 1, 2, \dots, l$, son las coordenadas de los l nodos en el e -ésimo elemento real, y $\psi_k(\xi)$ se definen como las funciones de forma maestras.

$$\psi_k(\xi) = \phi_k(\xi) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (3.36)$$

Utilizando las expresiones de la figura 3.21 para el elemento cuadrático — C^0 , tenemos

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^3 x_k^{(e)} \phi_k(\xi) \\ &= \frac{1}{2} \xi(\xi-1)x_1^{(e)} + (1+\xi)(1-\xi)x_2^{(e)} + \frac{1}{2} \xi(\xi+1)x_3^{(e)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Está claro que la ec.(3.37) transforma los nodos maestros sobre los nodos reales, esto es:

$$\begin{aligned} \xi = -1 &\Rightarrow x = x_1^{(e)} \\ \xi = 0 &\Rightarrow x = x_2^{(e)} \\ \xi = +1 &\Rightarrow x = x_3^{(e)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

La transformación de la ec.(3.37) puede utilizarse para cada elemento real; solo necesitamos cambiar los valores numéricos de $x_1^{(e)}$, $x_2^{(e)}$ y $x_3^{(e)}$ para cada elemento.

Analizando la palabra **isoparamétrico** el prefijo **iso** (del griego que significa “igual”) se refiere a los factores que intervienen en las funciones de transformación para las coordenadas, $\psi_k(\xi)$, son semejantes a las funciones de forma $\phi_k(\xi)$; y la palabra **paramétrico** se refiere al uso del parámetro de transformación, ξ . En general las $\psi_k(\xi)$ no necesitan ser semejantes a $\phi_k(\xi)$, y los $x_k^{(e)}$ pueden corresponder a otros puntos en el elemento, no necesariamente los nodos. Un elemento es llamado **Subparamétrico** si el número de $\psi_k(\xi)$ es menor que $\phi_k(\xi)$ ⁹, y **Superparamétrico** si hay más $\psi_k(\xi)$ que $\phi_k(\xi)$.

De los tres tipos los elementos isoparamétricos son los más utilizados.

Veamos ahora como las funciones de forma maestras $\phi_i(\xi)$ son transformadas en funciones de forma sobre el elemento real $\phi_i^{(e)}(x)$ como resultado de la transformación anterior de coordenadas. Note que dos de los tres nodos del elemento real están en los extremos, pero el tercer nodo puede localizarse en cualquier punto entre ellos. Por lo tanto, la naturaleza de la transformación de coordenadas y de las funciones de forma, está completamente determinada por la localización del nodo interno relativo a los nodos en los extremos.

Considere primero un elemento real en el cual el nodo interno $x_2^{(e)}$ está localizado en el centro:

$$x_2^{(e)} = \frac{1}{2} (x_1^{(e)} + x_3^{(e)}) \quad (3.39)$$

Esta es la situación más simple para tratar analíticamente. También es la más interesante porque colocando el nodo interno en el centro se crea un *elemento balanceado*, lo que es una característica deseada en la mayoría de todos los análisis prácticos.

Para obtener las expresiones analíticas de las funciones de forma transformadas $\phi_i^{(e)}(x)$, primero sustituiremos la ec.(3.39) en la (3.37):

$$x = X^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi) x_1^{(e)} + \frac{1}{2} (1 + \xi) x_3^{(e)} \quad (3.40)$$

La ec.(3.40) es la transformación de coordenadas para este elemento. Note que la ec.(3.37) es cuadrática con respecto a ξ , pero la ec.(3.40) es lineal, y debido a esta linealidad podemos invertir esta ecuación, por ejemplo, resolviendo para ξ en términos de x :

$$\xi^{(e)}(x) = \frac{2x - x_3^{(e)} - x_1^{(e)}}{x_3^{(e)} - x_1^{(e)}} \quad (3.41)$$

Finalmente, sustituimos la ec.(3.41) en las funciones de forma maestras de la figura 3.21. Por ejemplo,

⁹ Un ejemplo de una transformación subparamétrica aceptable para un elemento cuadrático — C^0 es

$$x = \frac{1}{2} (1 - \eta) x_1^{(e)} + \frac{1}{2} (1 + \eta) x_3^{(e)}$$

$$\phi_1^{(e)}(x) = \phi_1(\xi^{(e)}(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x - x_3^{(e)} - x_1^{(e)}}{x_3^{(e)} - x_1^{(e)}} \right) \left(\frac{2x - x_3^{(e)} - x_1^{(e)}}{x_3^{(e)} - x_1^{(e)}} - 1 \right) \quad (3.42a)$$

Utilizando la ec. (3.39) esto puede ser simplificado y, similarmente para las otras funciones de forma se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(e)}(x) &= \frac{(x - x_2^{(e)})(x - x_3^{(e)})}{(x_1^{(e)} - x_2^{(e)})(x_1^{(e)} - x_3^{(e)})} \\ \phi_2^{(e)}(x) &= \frac{(x - x_1^{(e)})(x - x_3^{(e)})}{(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})(x_2^{(e)} - x_3^{(e)})} \\ \phi_3^{(e)}(x) &= \frac{(x - x_1^{(e)})(x - x_2^{(e)})}{(x_3^{(e)} - x_1^{(e)})(x_3^{(e)} - x_2^{(e)})} \end{aligned} \quad (3.42b)$$

Reconocemos las ecs. (3.42b) como funciones de forma de polinomios de Lagrange obtenidas con la aproximación directa (elemento no isoparamétrico) (figura 3.19). En otras palabras, cuando el nodo interno está en el centro, la transformación isoparamétrica hace que las funciones de forma maestras transformadas en funciones de forma real sean ambas polinomios de Lagrange cuadráticos. Estas relaciones se resumen en la figura 3.23. Note que las coordenadas ξ transformadas, mostradas bajo el elemento real, son uniformes de -1 a +1, esto es porque la ec. (3.40) (de transformación) es lineal. Debido a esta uniformidad, las funciones de forma reales son simplemente una expansión (o contracción) uniforme de las funciones de forma maestras a través de todo el elemento, por el cambio de longitud de 2 en coordenadas de ξ a $x_3^{(e)} - x_1^{(e)}$ en coordenadas de x . En conclusión, la ecuación de transformación (3.40) ha producido solo un cambio en la escala; no produce ninguna distorsión en las funciones de forma.

Ahora considere un elemento donde el nodo interior no está localizado en el centro; por ejemplo, si está en un punto sobre la cuarta parte del elemento,

$$x_2^{(e)} = x_1^{(e)} + \frac{1}{4} (x_3^{(e)} - x_1^{(e)}) \quad (3.43)$$

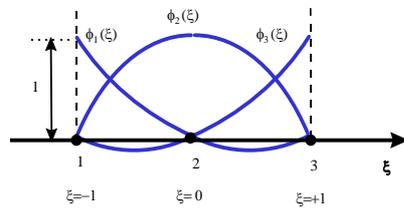
Sustituyendo la ec.(3.43) en la ec.(3.37) obtenemos la siguiente transformación de coordenadas:

$$x = X^{(e)}(\xi) = \frac{1}{4} (3 + \xi) (1 - \xi) x_1^{(e)} + \frac{1}{4} (1 + \xi)^2 x_3^{(e)} \quad (3.44)$$

Afortunadamente no es necesario realizar el análisis subsecuente para obtener dichas expresiones. Podemos hacerlo seleccionando varios valores para ξ en el intervalo de -1 a +1 y calculando los valores correspondientes de x y ϕ_i con la ec.(3.44) y la figura 3.21, respectivamente. Los resultados se muestran en la figura 3.24, en la cual se dibujan las funciones de forma transformadas para varios elementos reales diferentes, iniciando con un elemento donde el nodo interno $x_2^{(e)}$ está en el centro y gradualmente se va moviendo hacia un extremo. Bajo cada elemento real está trazado el eje transformado ξ .

La figura 3.24 ilustra un principio importante: Si el nodo interno del elemento Fig. 3.23. Transformación isoparamétrica de funciones de forma maestra sobre un elemento real en el cual

Elemento Maestro

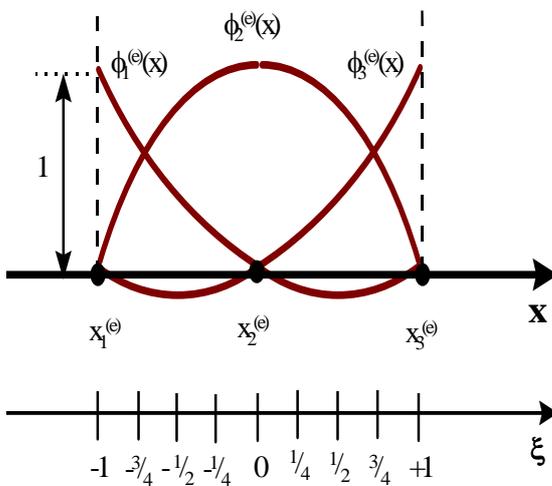


$$\begin{aligned} \phi_1^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{2} \xi(\xi - 1) \\ \phi_2^{(e)}(\xi) &= (\xi + 1)(\xi - 1) \\ \phi_3^{(e)}(\xi) &= \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) \end{aligned}$$



$$x = \frac{1}{2} (1 - \xi) x_1^{(e)} + \frac{1}{2} (1 + \xi) x_3^{(e)}$$

Elemento Real



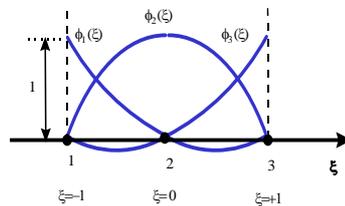
$$\phi_1^{(e)}(x) = \frac{(x - x_2^{(e)})(x - x_3^{(e)})}{(x_1^{(e)} - x_2^{(e)})(x_1^{(e)} - x_3^{(e)})}$$

$$\phi_2^{(e)}(x) = \frac{(x - x_1^{(e)})(x - x_3^{(e)})}{(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})(x_2^{(e)} - x_3^{(e)})}$$

$$\phi_3^{(e)}(x) = \frac{(x - x_1^{(e)})(x - x_2^{(e)})}{(x_3^{(e)} - x_1^{(e)})(x_3^{(e)} - x_2^{(e)})}$$

real no está en el centro, entonces la transformación no es uniforme, es distorsionada, resultando en el eje coordenado ξ la compresión en un extremo del elemento (hacia $x_1^{(e)}$ en la figura) y la expansión en el otro extremo, al mismo tiempo las funciones de forma transformadas se comprimen hacia un extremo $-x_1^{(e)}$ y se expanden hacia el

tro extremo $-x_3^{(e)}$ de tal modo que se distorsiona la forma polinomial de las funciones maestras en formas no-polinomiales. Note que la distorsión es provocada por una expansión y contracción horizontal y no vertical; el rango de valores para cada $\phi_i^{(e)}(x)$ permanece igual como para su correspondiente $\phi_i^{(e)}(\xi)$.



*Polinomio de
Lagrange cuadrático*

*Elemento y funciones de forma maestras.
Elemento y funciones de forma reales: $L = x_3^{(e)} - x_1^{(e)}$*

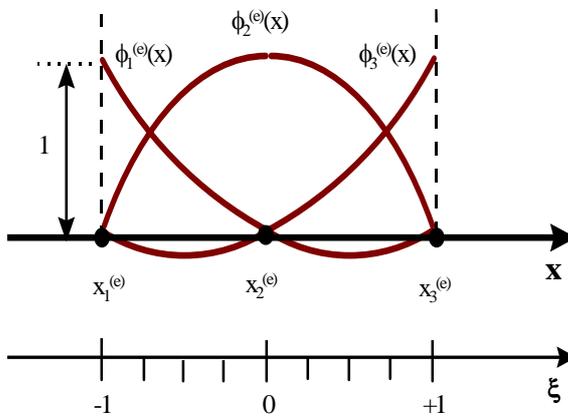
Como se dijo en la sección 2.1, existe un límite que indica que tan lejos $x_2^{(e)}$ puede aproximarse hacia $x_1^{(e)}$ o $x_3^{(e)}$ antes de que el eje de coordenadas ξ se comprima y las funciones de forma se distorsionen. Esto puede observarse en la figura 3.24: (a) no hay distorsión, solo un cambio uniforme en la escala y las funciones de forma $\phi_i^{(e)}(x)$ siguen siendo polinomios cuadráticos; (b) la distorsión es pequeña, donde $\phi_i^{(e)}(x)$ no es un polinomio (de orden superior) con respecto a x porque la expansión o contracción no es uniforme a través del elemento, sin embargo, la transformación es aceptable porque cada punto en ξ está sobre un punto en x y viceversa; (c) la distorsión es severa cerca de $x_1^{(e)}$, la transformación es “uno a uno” en todas partes excepto en ξ donde se convierte infinitamente comprimido, resultan esto es, con pendiente infinita en ese punto (claramente comportamiento no polinomial)¹⁰; (d) la distorsión es extrema, las coordenadas ξ salen del elemento resultando en funciones con doble valor a lo largo del eje x , esta distorsión severa podría provocar problemas numéricos ya que no tiene

¹⁰ Dichas funciones de forma pueden ser evitadas. Estas funciones solo se utilizan cuando se modela una región alrededor de un punto donde se conoce que la solución exacta también tiene el mismo tipo de comportamiento singular.

suficientes valores uno a uno sobre regiones finitas de x , haciendo este elemento inaceptable¹¹.

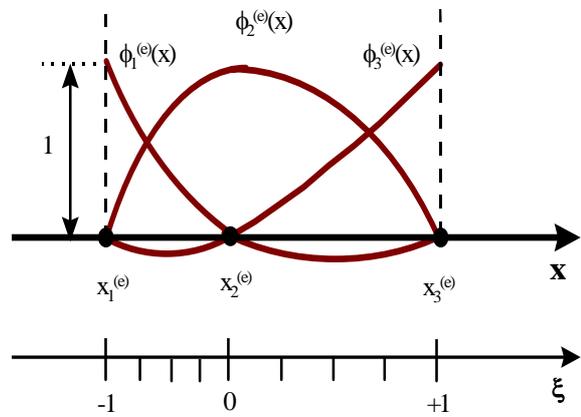
do en funciones de forma "singular" en $x_1^{(e)}$,

$x_2^{(e)}$ en el centro: $[x_2^{(e)} = x_1^{(e)} + 1/2 L]$



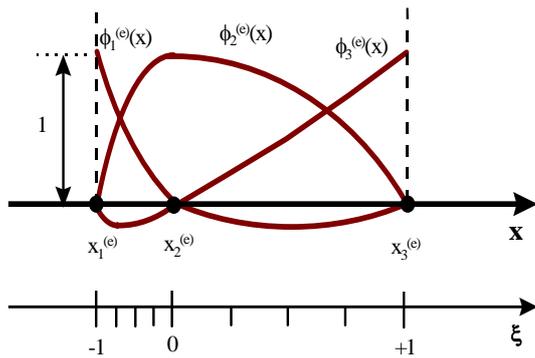
(a)

$x_2^{(e)}$ en la 3/8a parte: $[x_2^{(e)} = x_1^{(e)} + 3/8 L]$



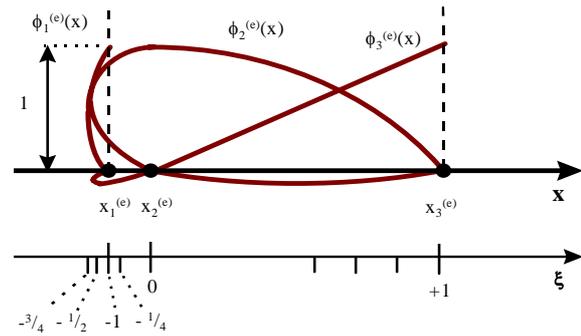
(b)

$x_2^{(e)}$ en la 1/4a parte: $[x_2^{(e)} = x_1^{(e)} + 1/4 L]$



(c)

$x_2^{(e)}$ en la 1/8a parte: $[x_2^{(e)} = x_1^{(e)} + 1/8 L]$



(d)

¹¹ Se puede ver que el elemento cuadrático no isoparamétrico también experimenta dificultades si el nodo interno se localiza próximo a un nodo en un extremo.

La figura 3.24 también ilustra una propiedad general importante de transformaciones isoparamétricas. Dado que las funciones de forma maestras satisfacen la propiedad de interpolación en los nodos del elemento maestro —esto es, $\phi_j(\xi_i) = d_{ji}$ — y dado que los nodos maestros transforman a los nodos reales, entonces las funciones de forma transformadas también satisfacen la propiedad de interpolación en el elemento real:

$$\phi_j^{(e)}(x_i) = d_{ji} \quad (3.45)$$

esto mide la continuidad — C^0 de las funciones de forma transformadas.

Los cuatro casos mostrados en la figura 3.24 son una ayuda visual para propósitos de decisión, pero la construcción de gráficas no es muy práctica para determinar cuando una transformación es aceptada o no, especialmente con elementos en 2D y 3D. Afortunadamente, existe una prueba analítica que puede determinar la aceptación de una transformación sin calcular la misma. Está basada en una comparación de como un segmento de línea infinitesimal $d\xi$ en el elemento maestro es transformado sobre un correspondiente segmento de línea dx en el elemento real. Su relación, $dx/d\xi$, es la derivada de la transformación, y lo llamamos *cantidad de contracción o expansión local* de las coordenadas debido a la transformación. Cuando es aplicado a la transformación de coordenadas, tal como la nuestra, esta derivada se denomina **Jacobiano**¹², simbolizado por $J^{(e)}(\xi)$:

$$J^{(e)}(\xi) = \frac{dx}{d\xi} \quad (3.46)$$

El Jacobiano juega un papel muy importante en el análisis por elemento finito de elementos isoparamétricos. El criterio para que una transformación sea aceptable es:

$$J^{(e)}(\xi) > 0 \quad \text{para} \quad -1 \leq \xi \leq +1 \quad (3.47)$$

es decir, el Jacobiano debe ser positivo en cualquier punto dentro del elemento y sobre su frontera¹³.

Aplicando este criterio a la figura 3.24. De la ec.(3.37),

$$J^{(e)}(\xi) = \sum_{k=1}^3 x_k^{(e)} \frac{d\phi_k(\xi)}{d\xi} \quad (3.48)$$

¹² Actualmente, las transformadas en 1D no utilizan una terminología especial. Pero 1D es directamente análoga a 2D (o 3D) en la cuál la analogía para $dx/d\xi$ es una matriz llamada **Matriz Jacobiana** y la determinante de la matriz Jacobiana es llamada **Jacobiano**.

¹³ En principio, el intervalo $-1 \leq \xi \leq +1$ se podría cambiar a $-1 < \xi < +1$, de ese modo permitiendo que $J^{(e)}(\xi)=0$ sobre la frontera del elemento. Esto corresponde a una situación especial e inusual involucrando comportamiento singular en la frontera, como se ilustra en la figura 3.24(c). Sin embargo, la ec.(3.47) está definida para aplicaciones generales donde el comportamiento singular es indeseable en un elemento.

y de la figura 3.21,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} &= \xi - \frac{1}{2} \\ \frac{d\phi_2(\xi)}{d\xi} &= -2\xi \\ \frac{d\phi_3(\xi)}{d\xi} &= \xi + \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{3.49}$$

Por lo tanto,

$$J^{(e)}(\xi) = \left(\xi - \frac{1}{2}\right)x_1^{(e)} - 2\xi x_2^{(e)} + \left(\xi + \frac{1}{2}\right)x_3^{(e)}\tag{3.50}$$

Ahora considerando cada uno de los cuatro casos de la figura 3.24 y sustituyendo la expresión de $x_2^{(e)}$ correspondiente en la ec.(3.50), tenemos:

•**Fig. 8.9(a):** $J = \frac{L}{2} \quad \therefore \quad J > 0$ en cualquier punto del elemento.

Aquí J es una constante a través del elemento porque la transformación es *lineal* con respecto a ξ . Esto muestra una propiedad importante del Jacobiano para elementos de cualquier dimensión: *el Jacobiano es constante sí y sólo si la transformación es lineal*. En este caso la transformación solo produce un cambio uniforme de escala, es decir, no hay distorsión.

•**Fig. 8.9(b):** $J = \left(\frac{\xi + 2}{2}\right)\frac{L}{2} \quad \therefore \quad J > 0$ en cualquier punto del elemento.

Aquí J varía sobre el elemento, resultando en una transformación no uniforme, es decir, distorsionada. Sin embargo, las funciones de forma transformadas son solo distorsionadas ligeramente.

•**Fig. 8.9(c):** $J = (\xi + 1)\frac{L}{2} \quad \therefore \quad J > 0$ dentro del elemento, pero $J = 0$ sobre la frontera en $\xi = -1$, es decir, en $x = x_1^{(e)}$.

En el punto $x_1^{(e)}$ un segmento $d\xi$ finito (no cero) está sobre un $dx = 0$, el cuál hace que las coordenadas ξ sean infinitamente comprimidas sobre el eje x. Por lo tanto, las funciones de forma, las cuales son llevadas a lo largo por la transformación, son similarmente comprimidas, resultando en pendientes infinitas, es decir, una singularidad. Este tipo de elementos podría ser muy efectivo si se conociera que la solución exacta tiene una singularidad similar en este punto, de lo contrario, daría muy poca

aproximación cerca del punto. El elemento es por lo tanto inaceptable para aplicación general.

•Fig. 8.9(d): $J = \left(\frac{3\xi + 2}{2} \right) \frac{L}{2} \quad \therefore \quad J > 0, = 0 \text{ y } < 0 \text{ en cualquier punto del elemento.}$

$$J > 0 \quad \text{para} \quad -\frac{2}{3} < \xi \leq 1$$

$$J = 0 \quad \text{para} \quad \xi = -\frac{2}{3}$$

$$J < 0 \quad \text{para} \quad -1 \leq \xi < -\frac{2}{3}$$

$J < 0$ significa que un segmento $d\xi$ positivo está sobre uno dx negativo. Esta revisión del signo significa que las coordenadas ξ se encuentran detrás de sí mismas, resultando en las funciones de forma con doble valor en un mismo punto; es decir, la transformación no es "uno a uno". Dicha distorsión extrema hace más dañosa una aproximación pobre; esto también produce ciertas condiciones en el sistema de ecuaciones que encontrándose en el proceso de solución se presenta una discontinuidad. Este tipo de elemento es absolutamente inaceptable.

La figura 3.24 ilustra el movimiento de $x_2^{(e)}$ hacia $x_2^{(e)}$. Pero si realizamos el movimiento de $x_2^{(e)}$ hacia $x_3^{(e)}$, obtendríamos resultados idénticos (como una imagen reflejada) debido a la simetría de las funciones de forma maestras.

Concluyendo, utilizando la ec.(3.47) derivamos una regla para obtener el rango aceptable de desplazamiento del nodo interior, así aplicando la ec.(3.47) a la ec.(3.50) obtenemos

$$J^{(e)}(\xi) = \left(\xi - \frac{1}{2} \right) x_1^{(e)} - 2\xi x_2^{(e)} + \left(\xi + \frac{1}{2} \right) x_3^{(e)} > 0 \quad \therefore \quad -1 \leq \xi \leq +1 \quad (3.51)$$

Note que $J^{(e)}(\xi)$ es una función lineal de ξ . Por lo tanto, $J^{(e)}(\xi) > 0$ para $-1 \leq \xi \leq +1$ si y sólo si $J^{(e)}(\pm 1) > 0$, esto es que $J^{(e)}(\xi) > 0$ en ambas fronteras, como se muestra en la figura 3.25. Aplicando las condiciones anteriores obtenemos el intervalo de valores permisibles para la distorsión del elemento en cuestión:

$$x_c^{(e)} - \frac{L}{4} < x_2^{(e)} < x_c^{(e)} + \frac{L}{4} \quad (3.52)$$

donde $x_c^{(e)} = (x_1^{(e)} + x_3^{(e)}) / 2$ es el centro del elemento. Esto se ilustra en la figura 3.26.

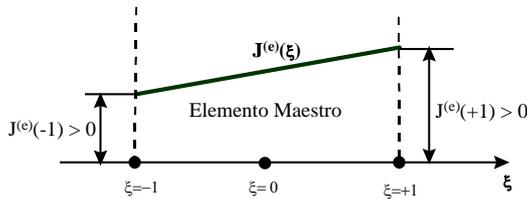


Fig.3.25.- Condiciones en los nodos de frontera para que $J^{(e)}(\xi) > 0$ sobre el todo elemento.

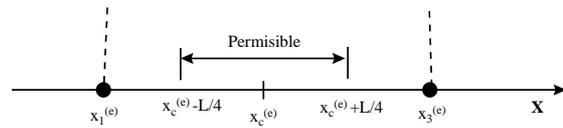


Fig. 3.26.- Intervalo permisible donde el nodo interno, de un elemento cuadrático — C^0 en 1D, puede localizarse.

3.3.1.2.- ELEMENTO TRIANGULAR — C^0

Por otro lado, cuando hablamos de interpolar barras para el tratado de problemas de torsión se requiere de la interpolación para ecuaciones diferenciales de segundo orden en 2D. En estos casos, se toma las mismas consideraciones para determinar los polinomios de interpolación sobre una región Ω , pero ahora en un plano x-y. Por lo tanto, podemos escribir la formula general para la solución de un elemento típico:

$$\tilde{U}^{(e)}(x, y; a) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j^e(x, y) \tag{3.53}$$

donde n es el número de grados de libertad en el elemento y (x,y) son las funciones de forma, las cuales ahora en ambos sentidos x e y para problemas de 2D.

El más simple de los elementos que satisface las condiciones de convergencia en un plano, es un elemento de forma triangular (con lados rectos) formado por el polinomio lineal en 2D — C^0 de la ec.(3.53).

Como se puede observar, un polinomio en 2D tiene la forma general (en series de potencias) como sigue:

$$\underbrace{a}_{\text{Constante}} + \underbrace{bx + cy}_{\text{Terminos Lineales}} + \underbrace{dx^2 + exy + fy^2}_{\text{Terminos Cuadráticos}} + \dots \tag{3.54}$$

Esta ecuación tiene un arreglo más comprensible el cuál es llamado *Triángulo de Pascal*, en el cuál se ve que muchos de los términos tienen la forma $x^r y^s$, donde $r, s = 0, 1, 2, 3, \dots$, y $p=r+s$ es el grado de cada término del Triángulo de Pascal, así cada fila tiene en sus términos un grado p. El valor de p va desde 0 (término constante), 1 (término lineal),..., hasta ∞ .

Un polinomio lineal completo, por lo tanto, contiene como mínimo los tres términos 1, x, y, así la forma más simple de la solución de prueba del elemento puede ser de la siguiente forma:

$$^{(e)} = a + bx + cy \quad (3.55)$$

Ahora examinemos la condición de continuidad. Aquí encontramos un problema especial que no aparece en los problemas unidimensionales.

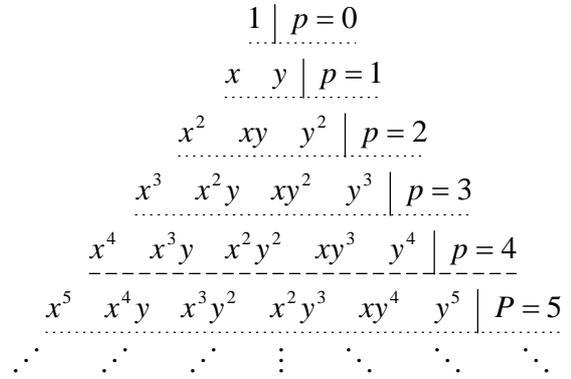


Fig. 3.27.- Triángulo de Pascal.

Para elementos en 2D (y 3D), la continuidad en interelementos se logra más eficientemente utilizando polinomios de interpolación con nodos localizados en la frontera del elemento. Sin embargo, ahora la frontera es una línea (o superficie en 3D) y obviamente no podemos convertirlo en un número infinito de nodos, así se tendrá el problema adicional de medir la continuidad del interelemento a lo largo de la frontera entre los nodos.

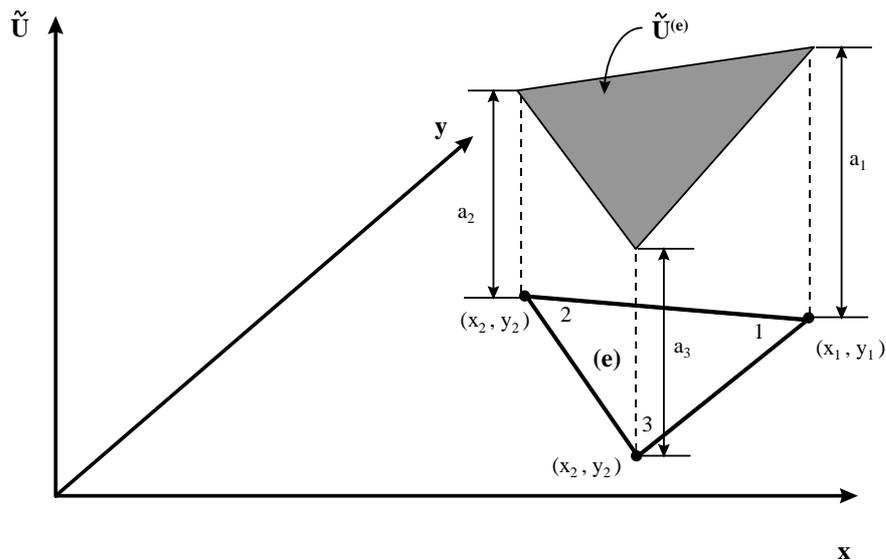


Fig. 3.27.- Elemento triangular lineal —C⁰ y su solución de prueba.

Para solucionar esto, iniciamos observando que la solución de prueba del elemento en la ec.(3.55) tiene tres grados de libertad. Al igual que en elementos en 1D, escribimos este polinomio en la forma de un polinomio de interpolación, lo que requerirá tres puntos de interpolación, es decir, nodos. Utilizaremos un triángulo de lados rectos con un nodo en cada vértice, como se muestra en la figura 3.27. Los nodos se numeran en sentido del movimiento de las manecillas del reloj para facilitar los cálculos e integrar la frontera en dicho sentido.

La solución de prueba del elemento $\psi^{(e)}$ se muestra en la figura 3.27 representada por la superficie sombreada arriba del plano x-y. Dado que $\psi^{(e)}$ es lineal, esta superficie es plana, aunque generalmente inclinada respecto al mismo plano. El valor de $\psi^{(e)}$ en el nodo i es el grado de libertad interpolatorio a_i , esto es,

$$\psi^{(e)}(x_i, y_i; a) = a_i \quad (3.56)$$

Como anteriormente se realizó, deseamos expresar $\psi^{(e)}$ de la ec. (3.55) en términos de los parámetros a_1 , a_2 y a_3 , y después pasarlos a términos de los parámetros a, b y c, por lo que aplicamos la ec.(3.56) a la ec. (3.55):

$$\begin{aligned} a + bx_1 + cy_1 &= a_1 \\ a + bx_2 + cy_2 &= a_2 \\ a + bx_3 + cy_3 &= a_3 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para a, b y c, entonces sustituyendo el resultado de las expresiones en la ec.(3.55) y reordenando términos, obtenemos la forma interpolatoria deseada para $\psi^{(e)}$:

$$U^{(e)}(x, y; a) = \sum_{j=1}^3 a_j \phi_j^{(e)}(x, y) \quad (3.58)$$

donde

$$\phi_j^{(e)}(x, y) = \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta} \quad j = 1, 2, 3$$

y

$$a_j = x_k y_l - x_l y_k$$

$$b_j = y_k - y_l$$

$$c_j = x_l - x_k$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{Area del elemento}$$

Los subíndices j, k, l tienen los valores 1,2 y 3 para $\phi_1^{(e)}(x, y)$ y está permutado cíclicamente por $\phi_2^{(e)}(x, y)$ y $\phi_3^{(e)}(x, y)$.

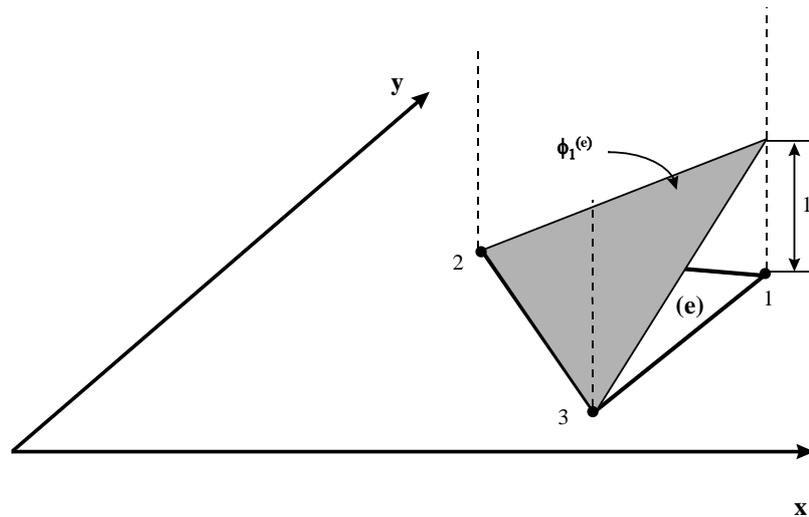


FIG.3.28. Función de forma $\phi_1^{(e)}(x,y)$ asociada con el nodo 1 para el elemento triangular lineal —C0.

Las funciones $\phi_j^{(e)}(x,y)$ son las funciones de forma ya que de las ecs.(3.58) se puede comprobar que poseen el requisito de la propiedad de interpolación:

$$\phi_j^{(e)}(x_i, y_i) = \delta_{ji} \quad (3.59)$$

La figura 3.28 ilustra $\phi_1^{(e)}(x,y)$, la función de forma asociada con el nodo 1, la cuál es igual a 1 en el nodo 1 y cero en los otros nodos. Las otras dos funciones de forma tienen la misma forma triangular pero con los valores nodales 1 y 0 permutados cíclicamente. Ahora regresamos a la cuestión de la continuidad de interelemento y nos preguntamos si este elemento nos proporciona la continuidad —C⁰ a lo largo de toda su frontera. Considere uno de los lados del triángulo de la figura 2.27, lado 2-3. Note que $\phi_1^{(e)}$ es una línea recta a lo largo de 2-3, es decir, entre el parámetro a_2 y a_3 . Esto, por supuesto, se debe a que $\phi_1^{(e)}$ es un polinomio lineal. Dado que es una línea recta que está determinada únicamente con dos puntos, entonces $\phi_1^{(e)}$ se determina a lo largo de todo el lado 2-3 únicamente por los valores a_2 y a_3 . Consecuentemente, si la solución de prueba del elemento $\phi_1^{(e)}$ en un elemento adyacente (f) (ver figura 3.29) podría asumir los mismo valores de a_2 y a_3 , entonces $\phi_1^{(f)}$ podría ser la misma línea recta a lo largo del lado 2-3, por lo tanto se establece la continuidad interelemental. Por supuesto, el propósito del ensamble es para asegurar la continuidad en los nodos. Entonces, cuando el elemento (e) y (f) se ensamblan, la continuidad resultante en los nodos también produciría una continuidad a lo largo de todo el lado. Con esto podemos expresar en forma general que:

Para establecer la continuidad de interelementos a lo largo de cualquier lado de un elemento que tiene q nodos distribuidos, donde q es el número de nodos que determinarán únicamente la solución de prueba del elemento a lo largo de todo el lado.

El valor de q se determina por el grado del polinomio que representa a la solución de prueba del elemento sobre su frontera.

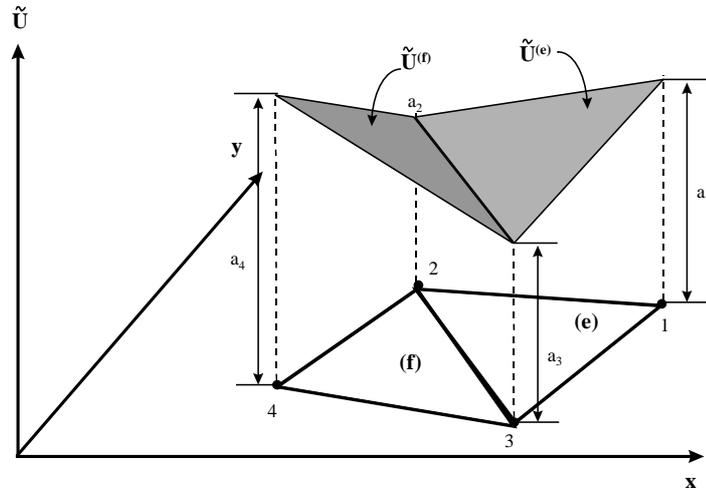
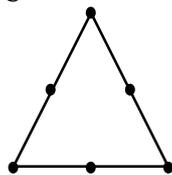


Fig. 3.29. Para el elemento triangular lineal —C⁰, la continuidad en (e) y (f) en lo nodos (producida por el ensamble) asegura la continuidad a lo largo de los lados.

Triángulo Isoparamétrico Cuadrático —C⁰

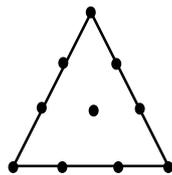
Hemos visto que el elemento lineal —C⁰ de tres nodos es el elemento en 2D más simple, empleando solo los tres primeros términos en el Triángulo de Pascal (ver figura 3.27). Si se desea se puede desarrollar una secuencia de elementos triangulares —C⁰ de orden superior, cada uno de los cuales contiene un término más del Triángulo de Pascal. La figura 3.30 muestra los siguientes cuatro elementos de orden superior, así como los términos en la solución de prueba correspondiente a cada elemento. Cada solución de prueba es un polinomio completo de grado p. Sin embargo, la mayoría de los elementos podrían involucrar polinomios incompletos; estos polinomios incompletos tienen importantes pero limitadas aplicaciones.

Cuadrático —C⁰



$$\begin{aligned} \psi^{(e)}(x, y; a) = & a_1 \\ & + a_2x + a_3y \\ & + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \end{aligned}$$

Cúbico —C⁰



$$\begin{aligned} \psi^{(e)}(x, y; a) = & a_1 \\ & + a_2x + a_3y \\ & + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \\ & + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 \end{aligned}$$

Cuártico —C⁰

$$\begin{aligned} \psi^{(e)}(x, y; a) = & a_1 \\ & + a_2x + a_3y \\ & + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \end{aligned}$$

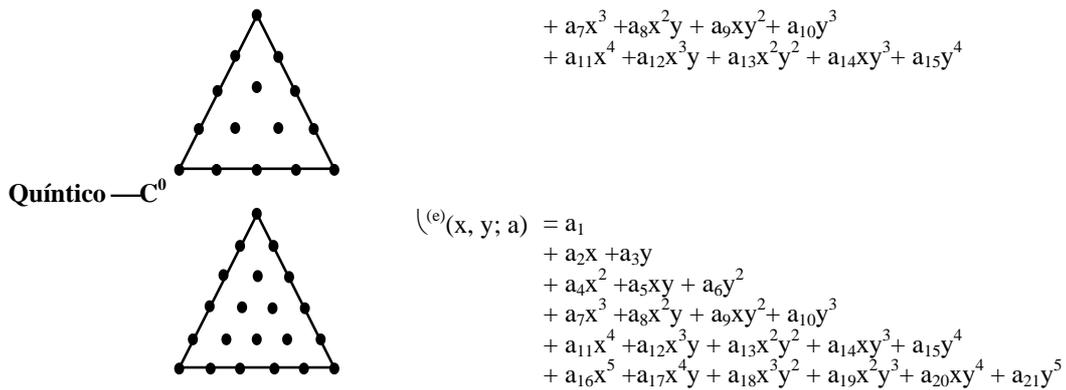


Fig. 3.30. Primeros cuatro elementos triangulares de orden superior empleando polinomios completos para 2D.

Note que el arreglo de la localización de los nodos en cada elemento es triangular, similar al arreglo de los términos en el Triángulo de Pascal. Esto es principalmente porque los elementos de forma triangular se prestan naturalmente para completar polinomios en 2D. Los triángulos de la figura 3.30 se muestran con sus lados rectos cuya longitud es aproximadamente igual y los nodos están distribuidos con un patrón de espacio uniforme. En la práctica, los lados pueden ser curvados y de diferente longitud, y los nodos se pueden distribuir de manera no uniforme. Sin embargo, estas desviaciones producirían problemas numéricos debido a la distorsión de los elementos.

Observemos dos propiedades prácticas importantes de los elementos triangulares completos. Primero, la solución de prueba tiene *geometría isotrópica*, lo que significa que están balanceados con respecto a las variables independientes x e y . Así, para cada término de la forma $x^r y^s$ hay también un término $x^s y^r$, con lo que x e y podrían ser intercambiados y la forma de la solución no cambiaría. La isotropía geométrica no es necesaria para la convergencia, no obstante es una propiedad deseada. La falta de isotropía significa que una variable está representada con mayor exactitud que las otras, por lo que el comportamiento del elemento podría variar significativamente de un punto en la malla a otro.

La otra propiedad muy utilizada es que cada lado del elemento tiene el mismo número de nodos. Esto da el mismo orden de aproximación a lo largo de cada lado, por lo el comportamiento del elemento es independiente de su orientación. Esto hace más fácil la combinación de números mayores de dichos elementos en cualquier clase de patrón de malla, por lo que cualquier lado de un elemento es compatible con cualquier lado de otro elemento similar.

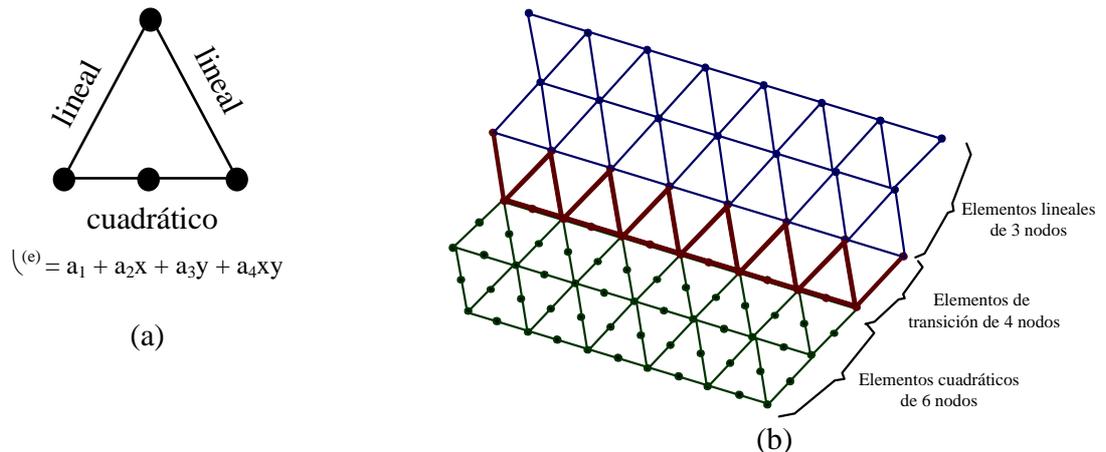


Fig. 3.31. (a) Un elementos triangular de 4 nodos que emplea un polinomio cuadrático incompleto; (b) una malla utilizando elementos triangulares de 4 nodos como elementos de transición.

Los triángulos con polinomio incompleto tienen un número diferente de nodos sobre sus lados, por lo que no pueden combinarse en grandes ramas solo en trayectorias generalmente significativas de cambio de elementos. Por ejemplo, el triángulo de 4 nodos en la figura 3.31 es lineal sobre dos de sus lados y cuadrático en su tercer lado. (Note que el cuarto término de la solución de prueba del elemento, el cuál necesita ser un término cuadrático, está definido por xy en lugar de x^2 o y^2 , en orden para proporcionar la isotropía geométrica. Una malla solo con triángulos de 4 nodos se puede obtener alternando bandas lineales y cuadráticas, la cuál no aparecería de cualquier valor práctico general. Sin embargo, Como se ilustra en la figura 3.31(b) una simple fila de dichos elementos podría proporcionar la transición entre una región de elementos lineales completos y una región de elementos cuadráticos completos. En general, los elementos con diferente número de nodos en sus lados están limitados en su función a la *transición de elementos*.

Para elementos en 2D (y 3D) desarrollar los elementos por aproximación directa se limita a elementos de lados rectos ya que es incapaz de producir la continuidad de interelementos sobre lados curvos utilizando la regla estándar de ensamble. Por tal motivo es necesario utilizar la transformación isoparamétrica sobre el modelado de superficies curvadas en 2D (y 3D), para esto utilizaremos el **elementos isoparmétrico cuadrático** — C^0 triangular en 2D.

La figura 3.32(a) muestra el elemento maestro en ξ , espacio n ; la figura 3.32(b) muestra el elemento maestro transformado sobre un elemento real curvado en el espacio x,y . Primero examinemos al elemento maestro, después desarrollaremos las funciones de forma del elemento y finalmente lo transformaremos sobre el elemento real.

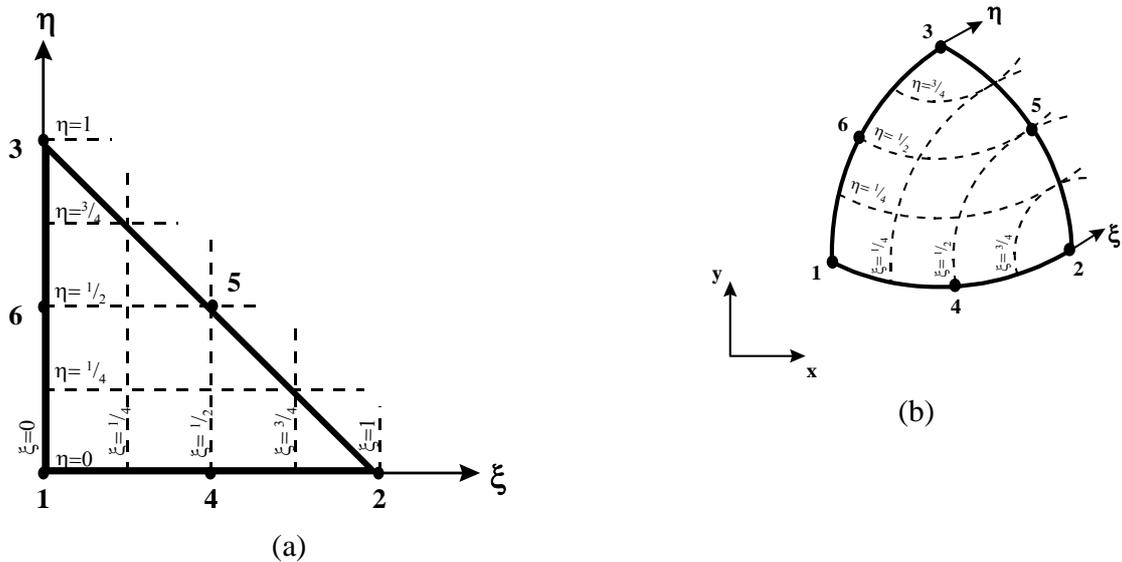


Fig. 3.32. (a) El elemento maestro para el triángulo isoparamétrico cuadrático —C0 de 6 nodos; (b) un elemento real de lados curvos que muestra la transformación del elemento maestro sobre él.

Los lados del elemento maestro deben ser rectos, aunque que los elementos reales sean curvos, para proporcionar la continuidad interelemental. El elemento maestro puede tener cualquier forma triangular, sin embargo es mas conveniente utilizar formas regulares ya que los elementos reales que están severamente distorsionados por la forma maestra provocan problemas numéricos. El triángulo recto es el más útil debido a que tiene dos de sus lados alineados a los ejes cartesianos (ξ , η), lo que simplifica el álgebra; note que los dos lados correspondientes a los ejes (ξ , η) son de longitud unitaria.

Utilizando la propiedad de interpolación $\phi_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}$ desarrollemos las funciones de forma maestras. Debido a que la solución de prueba del elemento maestro es un polinomio completo en 2D, entonces cada función de forma puede contener cualquiera de los términos en un polinomio completo en 2D. Así, para el nodo 1,

$$\phi_1(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 \quad (3.60)$$

donde la propiedad de interpolación requiere que

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi_1, \eta_1) &= 1 \\ \phi_1(\xi_j, \eta_j) &= 0 \quad j = 0, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Aplicando las condiciones (3.61) a la ec.(3.60) obtenemos seis ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 &= 0 \\
\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6 &= 0 \\
\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_4 &= 0 \\
\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_4 + \frac{1}{4}\alpha_5 + \frac{1}{4}\alpha_6 &= 0 \\
\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_6 &= 0
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Resolviendo las ecs.(3.62) obtenemos:

$$\phi_1(\xi, \eta) = [1 - (\xi + \eta)][1 - 2(\xi + \eta)] \tag{3.63a}$$

y de forma similar podemos obtener

$$\begin{aligned}
\phi_2(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1) \\
\phi_3(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1) \\
\phi_4(\xi, \eta) &= 4\xi[1 - (\xi - \eta)] \\
\phi_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta \\
\phi_6(\xi, \eta) &= 4\eta[1 - (\xi - \eta)]
\end{aligned} \tag{3.63b}$$

La figura 3.33 muestra las funciones $\phi_1(\xi, \eta)$ y $\phi_4(\xi, \eta)$. Las otras dos funciones de forma, $\phi_2(\xi, \eta)$ y $\phi_3(\xi, \eta)$, son similares a $\phi_1(\xi, \eta)$, y las últimas dos funciones de forma, $\phi_5(\xi, \eta)$ y $\phi_6(\xi, \eta)$, tienen la misma forma que $\phi_4(\xi, \eta)$.

Transformando el elemento maestro sobre cada uno de los elementos reales, con el mismo procedimiento que para elementos unidimensionales sólo que aquí definimos una transformación para dos coordenadas en lugar de una. Para una transformación isoparamétrica las funciones de transformación son similares a las funciones de forma. Así tenemos

$$x = \sum_{k=1}^6 x_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta)$$

$$y = \sum_{k=1}^6 y_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta)$$

(3.64)

donde $x_k^{(e)}$, $y_k^{(e)}$, $k= 1,2,\dots,6$ son las coordenadas de los seis nodos en el e-ésimo elemento real. Las ecs. (3.64) transforman claramente los nodos maestros sobre los nodos reales, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{Nodo 1: } & \xi = 0, \eta = 0 \rightarrow x_1^{(e)}, y_1^{(e)} \\ \text{Nodo 2: } & \xi = 1, \eta = 0 \rightarrow x_2^{(e)}, y_2^{(e)} \\ & \vdots \\ \text{Nodo 6: } & \xi = 0, \eta = \frac{1}{2} \rightarrow x_6^{(e)}, y_6^{(e)} \end{aligned}$$

(3.65)

Las ecs. (3.64) transforman las coordenadas ξ, η del elemento maestro sobre cada elemento real, como lo ilustra la figura 3.34. Sólo los valores numéricos para $x_k^{(e)}$, $y_k^{(e)}$, difieren de un elemento a otro. Para entender este término, la figura muestra las líneas de coordenadas ξ, η en sólo dos de los elementos. En el elemento (5), por ejemplo, los nodos maestros 1 a 6 muestran la transformación sobre los nodos globales 18, 9, 7, 15, 8, 14, respectivamente. También se puede realizar la transformación tomando el nodo maestro 1 sobre el nodo global 9 o 7 (en lugar del nodo 18, como se muestra) con la correspondiente rotación de los ejes ξ, η .

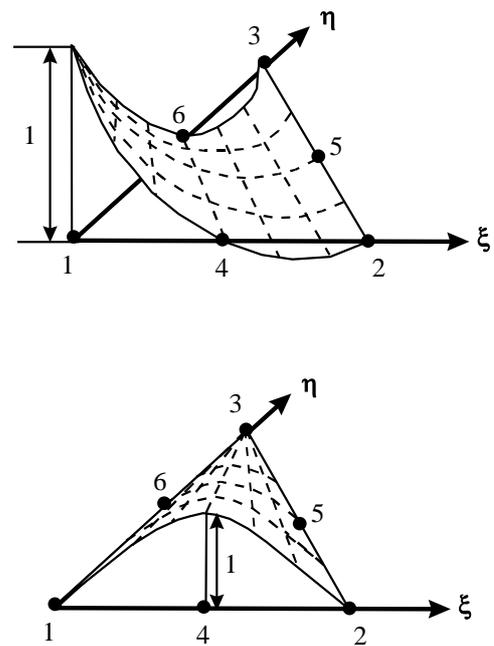


Fig.3.33.- Funciones de forma maestras para el triángulo isoparamétrico cuadrático —C⁰.

Las funciones de forma maestras se obtienen de acuerdo a esta transformación de coordenadas para cada uno de los elementos reales, la figura 3.35 muestra como la solución de prueba del elemento puede aparecer en dos elementos adyacentes. Note que la continuidad C^0 a lo largo de la frontera entre elementos implica continuidad en todas las *derivadas paralelas* a la frontera. Sin embargo, la derivada normal a la frontera (y por lo tanto, todas las derivadas de orden superior normales a la frontera) por lo general serán discontinuas para la solución aproximada por EF.

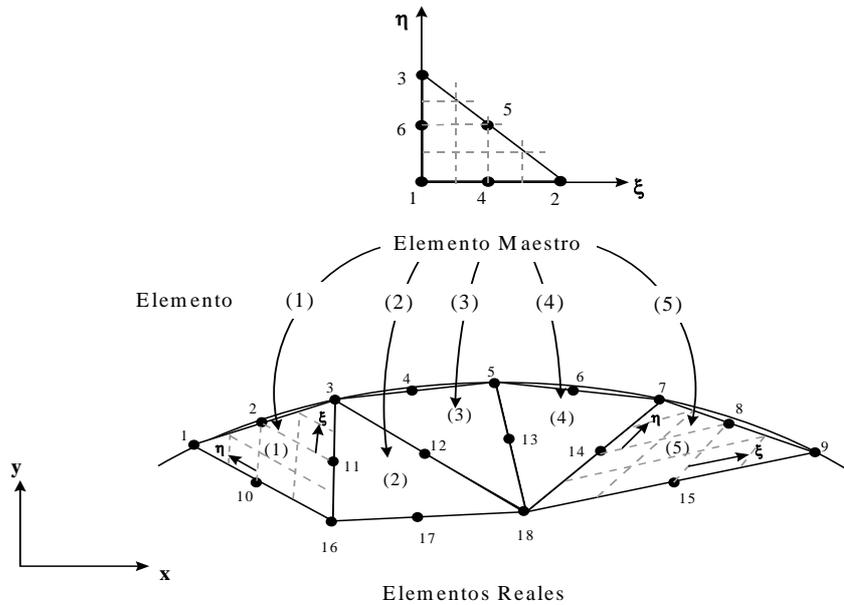


Fig. 3.34. Transformación de coordenadas ξ, η desde el elemento maestro para cada elemento real en la malla.

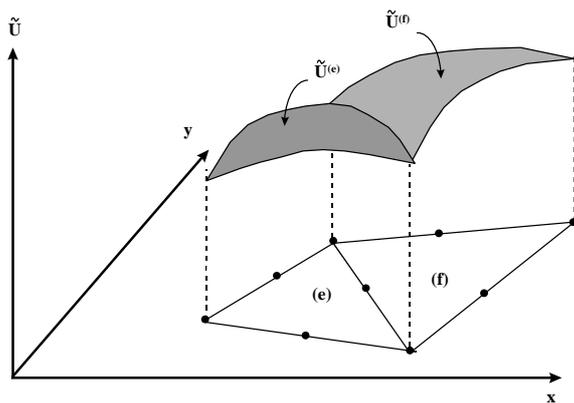


Fig.3.35. Forma típica de la solución de prueba del elemento en dos elementos adyacentes.

es:

Al igual que en el elemento isoparamétrico o en 1D, debemos ser cuidadosos de que nuestro elemento en 2D no esté distorsionado. Recordemos que un elemento isoparamétrico es aceptable si y solo si su transformación a elementos maestros es de 1 a 1; es decir, cada punto en el elemento maestro transforma a un punto en el elemento real, y viceversa.

La prueba analítica para aceptar un elemento en 2D, análogamente al elemento en 1D,

$$|J^{(e)}(\xi, \eta)| > 0 \quad (3.65)$$

donde $|J^{(e)}(\xi, \eta)|$ es el Jacobiano, el cuál es el determinante de la matriz Jacobiana dada por:

$$J^{(e)}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{(e)}(\xi, \eta) & J_{12}^{(e)}(\xi, \eta) \\ J_{21}^{(e)}(\xi, \eta) & J_{22}^{(e)}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

por lo tanto,

$$|J^{(e)}(\xi, \eta)| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.67)$$

Las derivadas de la transformación de coordenadas se obtienen de las ecs.(2.64):

$$\begin{aligned} J_{11}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^6 x_k^{(e)} \frac{\partial \phi_k(\xi, \eta)}{\partial \xi} & J_{12}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^6 y_k^{(e)} \frac{\partial \phi_k(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ J_{21}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^6 x_k^{(e)} \frac{\partial \phi_k(\xi, \eta)}{\partial \eta} & J_{22}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^6 y_k^{(e)} \frac{\partial \phi_k(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.68)$$

y las derivadas de las funciones de forma se obtienen de las ecs.(2.63):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -3 + 4\xi + 4\eta & \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -3 + 4\xi + 4\eta \\ \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -1 + 4\xi & \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial \phi_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -1 + 4\xi \\ \frac{\partial \phi_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 4(1 - 2\xi - \eta) & \frac{\partial \phi_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -4\xi \\ \frac{\partial \phi_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 4\eta & \frac{\partial \phi_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 4\xi \\ \frac{\partial \phi_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -4\eta & \frac{\partial \phi_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 4(1 - \xi - 2\eta) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Análogamente al elemento en 1D, el Jacobiano en 2D es la relación de un área diferencial en el elemento maestro correspondiente al área diferencial en el elemento real que es transformada en:

$$dx dy = |J^{(e)}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (3.70)$$

El valor de $|J^{(e)}(\xi, \eta)|$ es llamado como la cantidad de expansión o contracción local de las coordenadas dadas para la transformación. Por ejemplo, si $|J^{(e)}(\xi^*, \eta^*)| = 0$, entonces un área distinta de cero $d\xi \cdot d\eta$ en la vecindad del punto (ξ^*, η^*) en el elemento maestro transforma a un área cero en el elemento real (la cuál indica que la transformación no es 1 a 1), resultando en las funciones de forma real pendientes infinitas, y por lo tanto un elemento inaceptable.

Existe una mayor diversidad de formas y nodos para elementos maestros en 2D que en 1D, por lo que no hay una regla para convertir todos los posibles tipos de distorsión. Sin embargo, se tienen algunas referencias que son suficientes para aplicaciones prácticas. La forma más utilizada emplea lados rectos, con nodos intermedios, esto es,

$$\begin{aligned}x_4^{(e)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(e)} + x_2^{(e)}) \\x_5^{(e)} &= \frac{1}{2}(x_2^{(e)} + x_3^{(e)}) \\x_6^{(e)} &= \frac{1}{2}(x_3^{(e)} + x_1^{(e)})\end{aligned}\tag{3.71}$$

Sustituyendo las ecs.(3.63) y (3.71) en las ecs.(3.64) obtenemos

$$\begin{aligned}x &= x_1^{(e)} + (x_2^{(e)} - x_1^{(e)})\xi + (x_3^{(e)} - x_1^{(e)})\eta \\y &= y_1^{(e)} + (y_2^{(e)} - y_1^{(e)})\xi + (y_3^{(e)} - y_1^{(e)})\eta\end{aligned}\tag{3.72}$$

la cuál es una *transformación lineal*. Sustituyendo las ecs.(3.72) en la ec.(3.67) obtenemos

$$\begin{aligned}|J^{(e)}(\xi, \eta)| &= (x_2^{(e)} - x_1^{(e)})(y_3^{(e)} - y_1^{(e)}) - (x_3^{(e)} - x_1^{(e)})(y_2^{(e)} - y_1^{(e)}) \\&= 2\Delta \quad (\text{el doble del area del triangulo})\end{aligned}\tag{3.73}$$

El Jacobiano es constante a lo largo de todo el elemento, implicando la no distorsión. Esto es, las funciones de forma reales son polinomios cuadráticos, teniendo la misma forma que las funciones de forma maestras (ver figura 3.33), aunque posiblemente oblicuo o quizá solo alargado o disminuido por un cambio de escala.

La siguiente forma más utilizada emplea dos lados rectos, con nodos intermedios, y un lado curvo, como se muestra en la figura 3.36. Esto puede ser útil a lo largo de la frontera curvada de un dominio, ya que solo el lado que va a lo largo de la frontera necesita ser curvo. Se puede mostrar en la figura 3.37, que el Jacobiano no es cero en el triángulo, si el nodo medio del lado curvado se desvía a cualquier lado del sector indicado.

Para cualquier forma general, el ángulo interior de cada vértice podría estar entre los 0° y 180° . Para el triángulo de lados rectos esto es obvio, dado que el área del triángulo podría ser cero. Para triángulos de lados curvos, como se muestra en la figura 3.37, un ángulo de 0° o 180° implica localmente un área cero en la vecindad del vértice. También es evidente que cerca de dichos vértices las líneas de coordenadas ξ y η podrían ser paralelas, lo cuál sería un obvio colapso del sistema de coordenadas (en 2D).

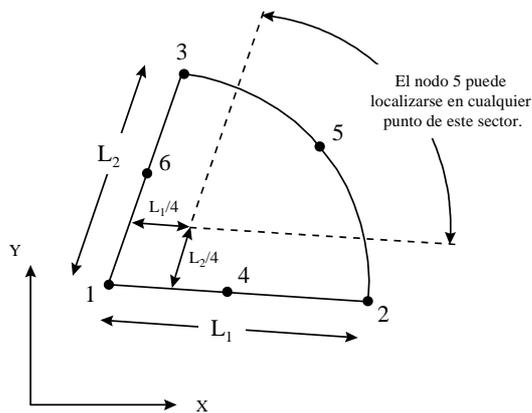


Fig. 3.36. Posición aceptable del nodo intermedio a lo largo del lado curvo de un triángulo isoparamétrico cuadrático —C0.

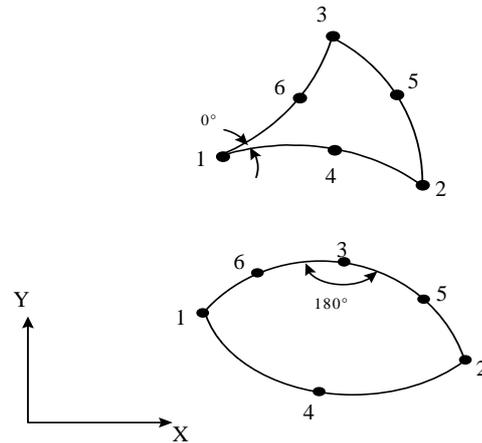


Fig. 3.37. Ángulos de vértices inaceptables para un elemento isoparamétrico cuadrático —C0.

Las figuras 3.36 y 3.37 describen los extremos límites de la distorsión aceptable., es decir, la condición en la cuál el elemento podría divergir siempre el análisis. Utilizar un elemento que esté cerca de estos límites, es por lo tanto una invitación a los problemas de cálculo, dado que el elemento tiende a ser numéricamente condicionado, el cuál podría causar problemas esporádicos e impredecibles.

En resumen, entonces, se pueden siempre utilizar elementos cuyos lados sean rectos o sólo moderadamente curvados, los ángulos de los vértices deberán ser similares a los de los ángulos maestros (ciertamente no cercanos a 0° o 180°), y los nodos medios deberán estar en o cerca del centro del lado (nunca cerca de la cuarta parte de dicho lado).

3.3.1.3.- ELEMENTO CUADRILATERAL —C⁰

Conceptualmente la forma más simple y directa para desarrollar las funciones de forma de un elemento cuadrilateral —C⁰ es el producto de dos polinomios de interpolación de Lagrange unidimensionales., uno con respecto a x (ó ξ en un elemento maestro) y el otro con respecto a y (ó η), resultando en los llamados elementos bilineal, bicuadrático, etc... La figura 3.38 ilustra los primeros cuatro elementos en esta familia, e indica los términos del triángulo de Pascal presentes en la solución de cada elemento.

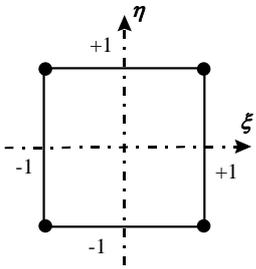
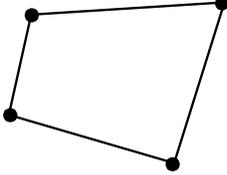
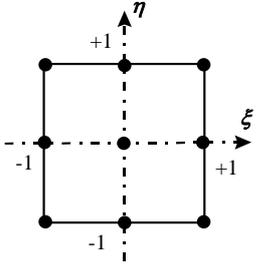
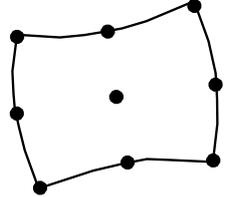
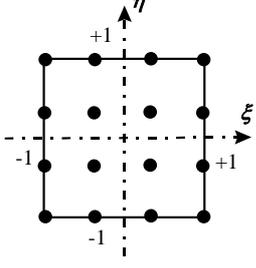
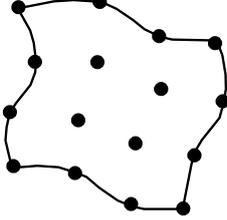
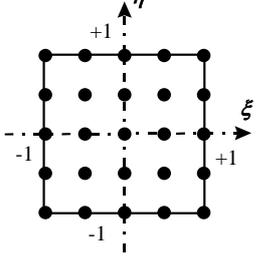
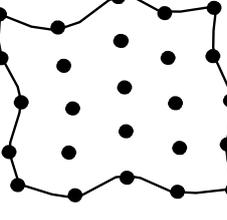
Tipo de Elemento	Elemento Maestro	Elemento Real	Terminos polinomiales en la solución de prueba del elemento
Bilineal			$\begin{matrix} 1 \\ \xi \quad \eta \quad \quad p=1 \\ \cdot \quad \xi\eta \quad \cdot \end{matrix}$
Bicuadrático			$\begin{matrix} 1 \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \quad p=2 \\ \cdot \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \xi^2\eta^2 \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}$
Bicúbico			$\begin{matrix} 1 \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \quad \quad p=3 \\ \cdot \quad \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \xi^3\eta^2 \quad \xi^2\eta^3 \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \xi^3\eta^3 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}$
Bicuártico			$\begin{matrix} 1 \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \\ \xi^4 \quad \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \eta^4 \quad \quad p=4 \\ \cdot \quad \xi^4\eta \quad \xi^3\eta^2 \quad \xi^2\eta^3 \quad \xi\eta^4 \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \xi^4\eta^2 \quad \xi^3\eta^3 \quad \xi^2\eta^4 \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \xi^4\eta^3 \quad \xi^3\eta^4 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \xi^4\eta^4 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}$

Fig. 3.38. Primeros cuatro miembros de elementos cuadriláteros de la familia de Lagrange.

Por ejemplo, las nueve funciones de forma maestras para el elemento bicuadrático son el producto de $\phi_i(\xi)\phi_j(\eta)$ para $i, j = 1, 2, 3$ donde ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son las tres funciones de forma en la figura 3.21. La función de forma correspondientes al nodo de cada esquina se muestra en la figura 3.39. Fácilmente se satisface la propiedad de interpolación; mientras en la esquina prevalece el valor unitario, en los otros nodos el valor nulo (cero). Esto es la consecuencia del producto de dos funciones de interpolación en 1D, es decir, que para cada lado común al nodo unitario, una de las funciones $\phi_i(\xi)$ es unitaria, así las funciones de forma en 2D se reducen a una de las funciones de forma en 1D.

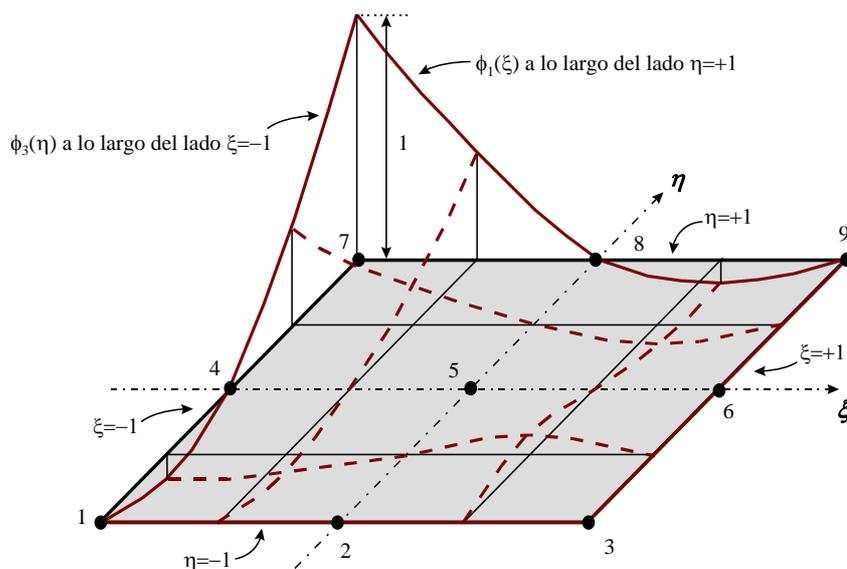


Fig. 3.39. Ilustración de la función de forma de un nodo de esquina (en el elemento maestro) para un elemento bicuadrático de Lagrange.

Los elementos de Lagrange en 2D tienen un par de desventajas. Primero, se vuelven más ineficientes en cálculo conforme el grado del elemento incrementa. Recordemos que la relación de convergencia de un elemento depende del grado del polinomio completo en la solución de prueba del elemento. Como se indica por el triángulo de Pascal, en la figura 3.38, estos elementos contienen muchos términos extras de orden superior que no contribuyen a completarlo. Por ejemplo, el elemento bicúbico se completa con un grado 3, pero también contiene seis términos adicionales de grados 4, 5 y 6; en otras palabras, la solución de prueba del elemento es un polinomio cúbico completo pero un polinomio cuarto incompleto (quinto o sexto). En general, los elementos de Lagrange en 2D completos de grado p contienen $(p+1)^2$ términos de los cuales solo $(p+1)(p+2)/2$ de éstos son necesarios para completarlo, y resultando en $p(p+1)/2$ términos que no aseguran la relación de convergencia.

Una segunda desventaja es que los nodos internos pueden crear un problema en la construcción de las mallas. Esto requiere un cálculo adicional para localizar a los nodos de un elemento de lado curvo con lo que la distorsión de la transformación se minimiza.

Estos problemas se resuelven satisfactoriamente con la *familia de elementos serendipíticos*¹⁴. La figura 3.40 ilustra los primeros cuatro miembros de esta familia. La característica más clara de esta familia es que se abstienen de elementos internos, por lo que sus soluciones de prueba para los elementos son polinomios incompletos. Cada uno de estos elementos tienen un número igual de nodos en todos sus lados. Dichos elementos son el elemento “básico” ya que proporcionan el mismo nivel de confiabilidad en todas las direcciones, sin embargo, pueden construirse elementos *serendipíticos* de transición, es decir, elementos con diferente número de nodos sobre sus lados los cuales proporcionan transición entre regiones de elementos de orden superior y orden menor.

El elemento lineal *serendipítico* en la figura 3.40 es en realidad un elemento bilineal, idéntico al elemento bilineal de Lagrange. Para obtener el elemento *serendipítico* cuadrático se requiere aumentar 4 nodos al *serendipítico* lineal (uno por lado), esto requiere adicionar cuatro términos más del triángulo de Pascal, los dos términos cuadráticos ausentes (ξ^2 y η^2) más dos términos cúbicos ($\xi^2\eta$ y $\xi\eta^2$) que son simétricos a ξ y η para preservar la isotropía geométrica. Similarmente, para obtener el elemento cúbico debemos adicionarle cuatro nodos al cuadrático (uno por lado); por lo que adicionamos los dos términos cúbicos ausentes (ξ^3 y η^3) más dos términos cuárticos ($\xi^3\eta$ y $\xi\eta^3$) que son simétricos en ξ y η .

Para el caso de obtener el elemento cuártico del cúbico se tiene un a diferencia. Ahora se necesitan adicionar cinco términos más: tres para completar el cuártico (ξ^4 , $\xi^2\eta^2$ y η^4), más dos términos de potencia cinco para preservar la isotropía geométrica ($\xi^4\eta$ y $\xi\eta^4$). El quinto nodo estaría localizado en el centro para evitar influir en cualquier lado del elemento. Como ya se mencionó, en aplicaciones prácticas es difícil trabajar con nodos internos. La solución utiliza una función de forma de *menos nodos* (“nodeless”). Esto podría ser $(1-\xi^2)(1-\eta^2)$, la cuál introduce el término anterior $\xi^2\eta^2$. Esta función de forma se construye intencionalmente igualada a cero en todos los demás nodos por lo que conserva su propiedad de interpolación. Sin embargo, las demás funciones no se restringen a ser cero en el centro o cualquier otro punto interno, así el parámetro (grado de libertad) que está multiplicando esa función de forma nodales no puede ser igual al valor de la solución de prueba en cualquier punto (de ahí el nombre “nodeless”). Note que cuando se forman las ecuaciones del elemento, la ecuación correspondiente a este grado de libertad interno, es decir, la función de forma nodeless, se puede eliminar por *Condensación Estática*¹⁵, dejando una matriz de rigideces de 16X16 que involucra solamente los 16 grados de libertad sobre la frontera del elemento.

¹⁴ Este nombre se refiere al desarrollo original de estos elementos, el cuál fue principalmente por inspección e intuición.

¹⁵ La Condensación Estática es una técnica para reducir el tamaño de la matriz de rigideces de los elementos eliminando aquellos grados de libertad cuyas funciones de forma son cero en todos los nodos de la frontera.

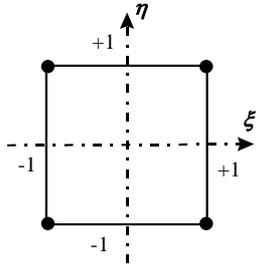
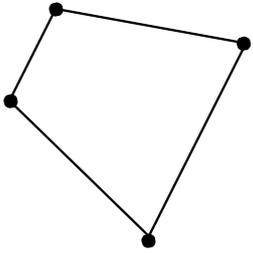
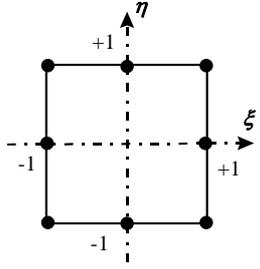
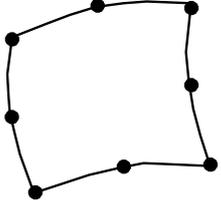
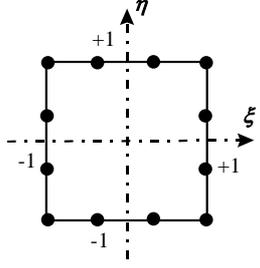
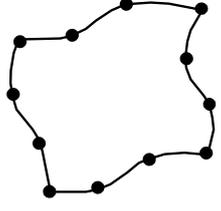
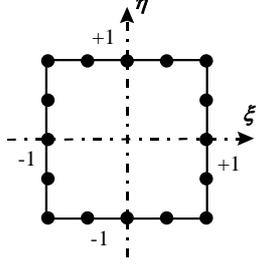
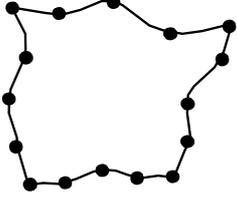
Tipo de Elemento	Elemento Maestro	Elemento Real	Terminos polinomiales en la solución de prueba del elemento
Bilineal			$\begin{matrix} 1 \\ \xi \quad \eta \end{matrix} \Big p=1$ $\bullet \quad \xi\eta \quad \bullet$
Bicadrático			$\begin{matrix} 1 \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \end{matrix} \Big p=2$ $\bullet \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \bullet$
Bicúbico			$\begin{matrix} 1 \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \end{matrix} \Big p=3$ $\bullet \quad \xi^3\eta \quad \bullet \quad \xi\eta^3 \quad \bullet$
Bicuártico			$\begin{matrix} 1 \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \\ \xi^4 \quad \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \eta^4 \end{matrix} \Big 1$ $\bullet \quad \xi^4\eta \quad \bullet \quad \bullet \quad \xi\eta^4 \quad \bullet$

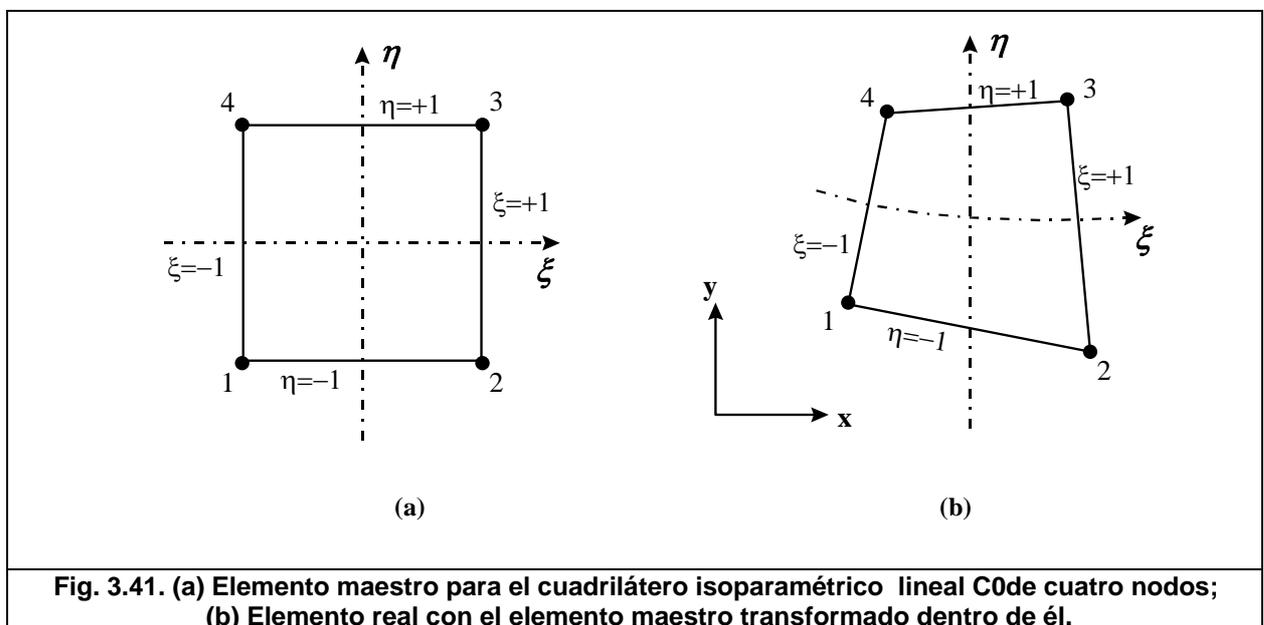
Fig. 3.40. Primeros cuatro miembros de elementos cuadriláteros de la familia Serendipica.

Para formar un elemento quíntico (de grado 5) adicionaríamos los cuatro términos faltantes de grado cinco al elemento cuártico, los cuales son: ξ^5 , $\xi^3\eta^2$, $\xi^2\eta^3$ y η^5 . Esto crearía un quíntico completo (de 21 términos) sin los términos extras de orden superior. Veinte de los términos estarían asociados con los nodos de la frontera y el nodo 21 tendría la misma condición de función NODELESS interna como en el caso anterior.

Pasando del elemento quíntico el patrón de adicionar nodos y/o funciones de forma nodeless se convierte menos común porque el análisis es más complicado, dependiendo de los términos que deben adicionarse según el triángulo de Pascal. Por ejemplo, para el elemento de seis grados (séxtico) podría necesitarse adicionar al menos siete términos al elemento quíntico.

Cuadrilátero Isoparamétrico Lineal —C⁰

Este es el primer miembro de la familia Serendiptica en 2D (ver la figura 3.40). La figura 3.41(a) muestra al elemento maestro en el espacio ξ - η , y la figura 3.41(b) muestra al elemento maestro transformado sobre el elemento real. En el espacio x - y . El elemento maestro para cuadriláteros se elige como un cuadrado bi-unitario ya que conviene cuando se aplican las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre (las cuales integran de -1 a +1). Como se observa en la figura, el elemento real puede tener arbitrarios los ángulos en sus vértices y la longitud de sus lados (dentro de los límites de distorsión permitidos), pero los lados deben ser rectos dado que la transformación isoparamétrica debe ser lineal a lo largo de cada lado.



Como se indica en la figura 3.40, la solución de prueba del elemento es un polinomio bilineal en 2D, utilizando el término 1, ξ , η y $\xi\eta$; esto es, un polinomio lineal en 2D más un término cuadrático extra (por lo tanto un polinomio cuadrático incompleto). Las funciones de forma maestras se pueden derivar de la manera anterior, utilizando la propiedad de interpolación, pero para este simple elemento solo por inspección podemos escribir:

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \phi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\end{aligned}\tag{3.74}$$

Todas tienen la misma forma, tal como se ilustra en la fig. 3.42.

Las funciones de forma son lineales a lo largo de cada lado. Esto mide la continuidad C^0 entre elementos dado que hay dos nodos sobre un lado, por supuesto, únicamente determina una línea recta. Note, sin embargo, que dentro del elemento la función ϕ_i puede variar en forma cuadrática en algunas direcciones, debido al término cuadrático extra $\xi\eta$. Así, paralelo a los ejes de coordenadas (ξ , η) la función ϕ_i varía linealmente, pero en cualquier otra dirección varía cuadráticamente. Por ejemplo, a lo largo de la diagonal 1-3 $\xi = \eta = s$ y $\phi_i(s) = (1-s)^2/4$, como se muestra en la figura 3.42.

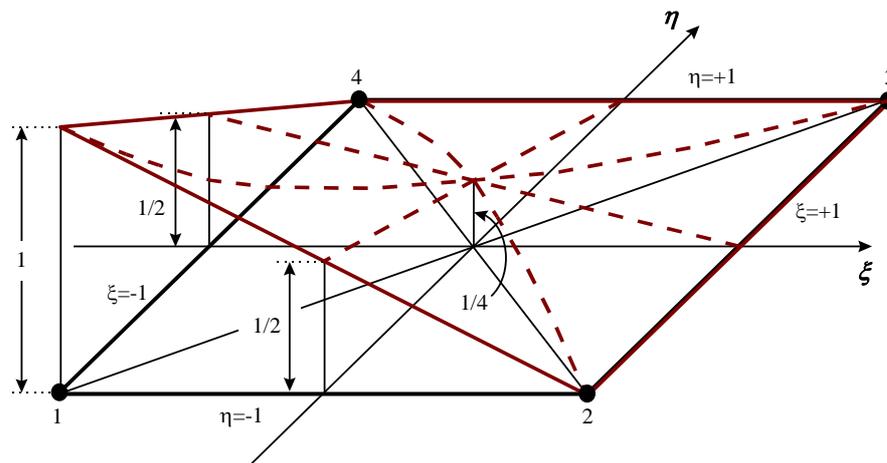


Fig. 3.42.- Función de forma maestra $\phi_1(\xi, \eta)$ para el cuadrilátero isoparamétrico lineal C^0 .

Para una transformado isoparamétrico tenemos

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^4 x_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta) \\ y &= \sum_{k=1}^4 y_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.75)$$

lo cuál proporciona continuidad entre elementos adyacentes gracias a la continuidad C^0 de la función ϕ_k . Para calcular el Jacobiano de esta transformación se necesitarán las derivadas de las funciones de forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1(\xi \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{\partial \phi_1(\xi \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ \frac{\partial \phi_2(\xi \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta) & \frac{\partial \phi_2(\xi \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi) \\ \frac{\partial \phi_3(\xi \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{\partial \phi_3(\xi \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi) \\ \frac{\partial \phi_4(\xi \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{\partial \phi_4(\xi \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi) \end{aligned} \quad (3.76)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} J_{11}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^4 x_k^{(e)} \frac{\partial \phi_k(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{4} [(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})(1-\eta) + (x_3^{(e)} - x_4^{(e)})(1+\eta)] \end{aligned} \quad (3.77a)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} J_{12}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} [(y_2^{(e)} - y_1^{(e)})(1-\eta) + (y_3^{(e)} - y_4^{(e)})(1+\eta)] \\ J_{21}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} [(x_4^{(e)} - x_1^{(e)})(1-\xi) + (x_3^{(e)} - x_5^{(e)})(1+\xi)] \\ J_{22}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} [(y_4^{(e)} - y_1^{(e)})(1-\xi) + (y_3^{(e)} - y_5^{(e)})(1+\xi)] \end{aligned} \quad (3.77b)$$

De acuerdo al criterio para que un elemento sea aceptable (esto es, $|J^{(e)}(\xi, \eta)| > 0$ en cualquier punto del elemento) se tiene que la única limitación sobre la forma del elemento real es que cada ángulo interno debe ser $< 180^\circ$; es decir, el elemento debe ser convexo (figura 3.43a). Por supuesto, los ángulos que son menores pero muy cercanos a los 180° (figura 3.43b) estarán condicionados y podrán ser inaceptables.

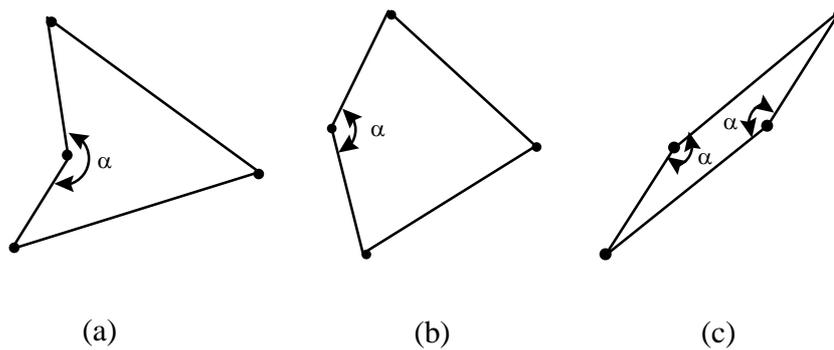


FIG.3.43.- Elementos cuadrilateros isoparamétricos lineales C^0 de forma inconveniente: (a) vértice fuera de límite ($\alpha > 180^\circ$) inaceptable, la transformación no es de 1 a 1; (b) la transformación es de 1 a 1, pero está condicionado dado que α está muy próximo a los 180° ; (c) sin distorsión (paralelogramo), pero doblemente condicionado porque α está próximo a los 180° y $J(e)$ se aproxima a cero en cualquier punto.

Podemos también mostrar que $|J^{(e)}(\xi, \eta)| = (\text{área del elemento})/4$ si el elemento es un paralelogramo; es decir no hay distorsión en su transformación. Sin embargo, Un paralelogramo extremadamente estrecho (figura 3.43c) estaría doblemente condicionado ya que dos de sus ángulos internos son cercanos a 180° . En resumen, el área de dicho elemento, y por lo tanto su Jacobiano, es aproximadamente 0, así podría tener una mucho mayor rigidez que otros, elementos menos distorsionados, y esto sería una fuente de condicionamiento en el ensamble de elementos.

Como nota previa, no hay razón práctica para utilizar formas aproximadas a estos extremos. Uno puede y debe utilizar elementos que no varíen mucho en su forma respecto a la de los elementos maestros, es decir, teniendo lados y ángulos de valores comparables. Una relación de forma de 5 a 1 o de 10 a 1 es un límite prudente en muchas aplicaciones. Los ángulos internos se pueden encontrar cerca de 20° o 30° a partir del ángulo recto.

Caudrilátero Isoparamétrico Cuadrático — C^0

Este es el segundo miembro de la familia serendíptica en 2D. La figura 3.44(a) muestra al elemento maestro en el espacio ξ - η , y la figura 3.44(b) muestra al elemento maestro transformado sobre el elemento real en el espacio x - y . De la figura, el elemento real puede tener los ángulos y la longitud de sus lados arbitrarios (dentro de los límites de distorsión permitidos), pero los lados deben ser cuadráticos dado que el transformado isoparamétrico es cuadrático a lo largo de cada lado. El numerado debe ser primero en los nodos sobre los vértices seguido de los nodos medios, esto permite una numeración maestra consistente cuando se trata con los elementos de transición donde existe insuficiencia de nodos medios.

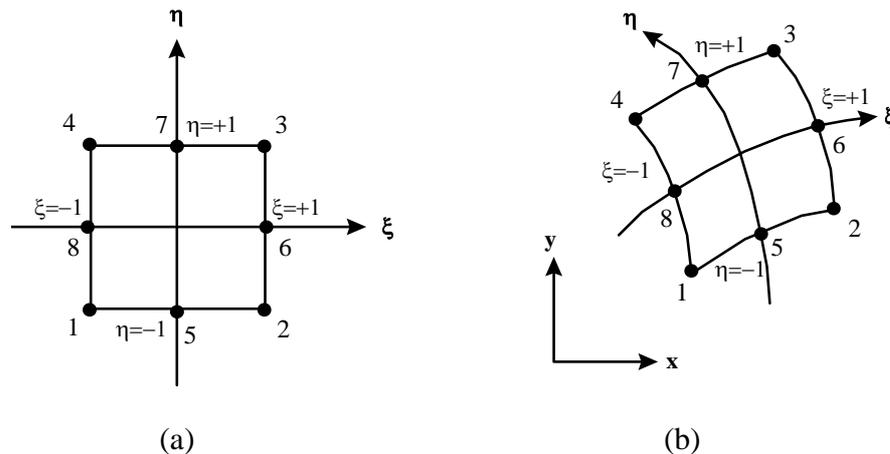


Fig. 3.44. (a) Elemento maestro para el cuadrilátero isoparamétrico cuadrático —C0 de ocho nodos; (b) Un elemento real con el elemento maestro transformado sobre él.

Como se indica en la figura 3.40 la solución del elemento de prueba utiliza los ocho términos $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^2\eta$ y $\xi\eta^2$, el cuál es un polinomio cuadrático completo en 2D más dos términos extras cúbicos (por lo tanto es un polinomio cúbico incompleto). Se pueden derivar las funciones de forma maestras de la manera usual, utilizando la propiedad de interpolación. Sin embargo, en lugar de eso, demostraremos un procedimiento simple que puede ser utilizado para generar este y otros elementos serendipicos. El procedimiento consiste primeramente en generar las funciones de forma de los nodos medios a partir de una prescripción simple, y entonces generando las funciones de forma de los nodos en los vértices, por una sustracción apropiada se multiplican por las funciones de los nodos medios a partir de una función inicial.

La figura 3.45(a) muestra que la función de forma del nodo medio 5, $\phi_5(\xi, \eta)$, se puede escribir abajo “por inspección” como el producto de un cuadrático en ξ a lo largo del lado 1-5-2 por un lineal en η . El cuadrático proporciona los valores nodales necesarios 1 y 0 a lo largo de dicho lado, así como todos los valores cero a lo largo de los lados 2-6-3 y 4-8-1. El lineal en η no distorsiona los valores anteriores, pero si proporciona los valores nodales 0 a lo largo del cuarto lado 3-7-4. La figura también muestra a la función $\phi_8(\xi, \eta)$, la cuál tiene una forma idéntica (girada 90°) y una expresión similar. Por supuesto, $\phi_6(\xi, \eta)$ y $\phi_7(\xi, \eta)$ también tienen formas idénticas y expresiones similares.

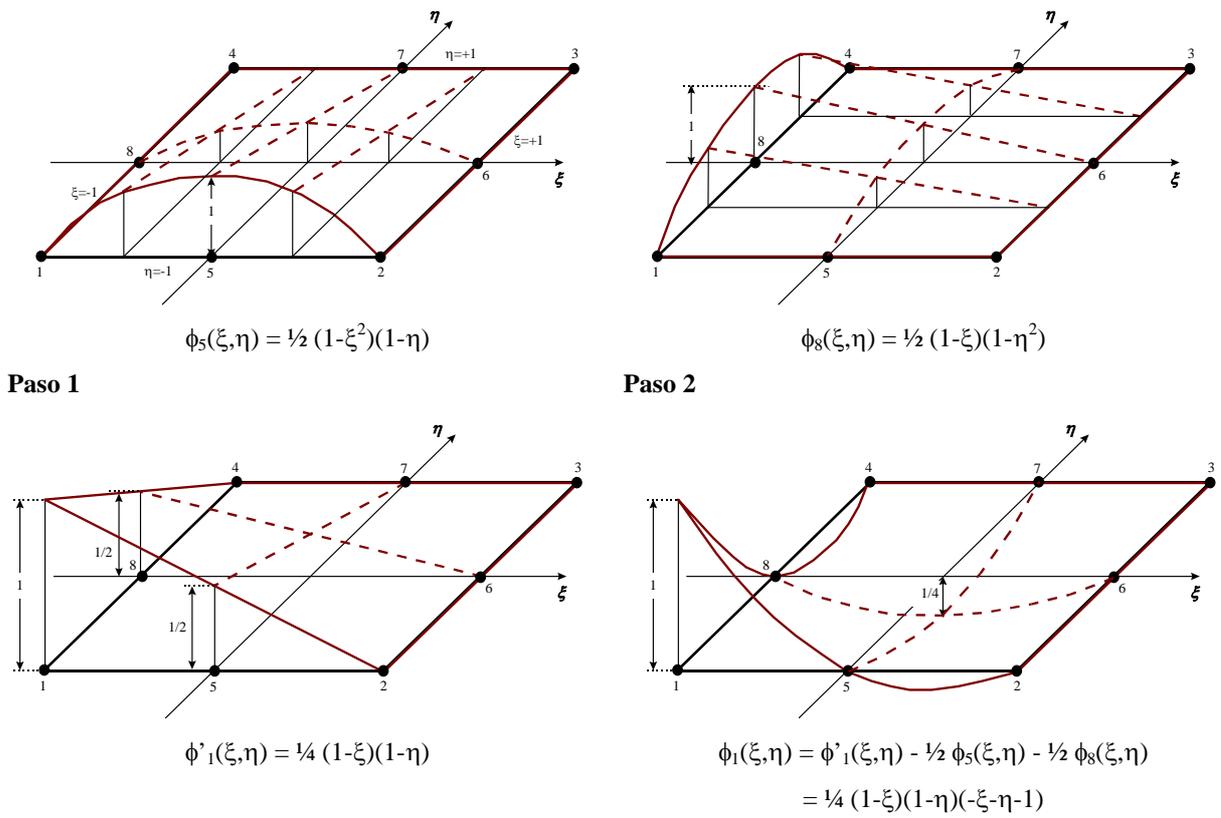


Fig. 3.45. Desarrollo de las funciones de forma maestras cuadráticas —C⁰ para (a) nodos medios y (b) nodos en los vértices.

Las funciones de los nodos en los vértices se construyen en dos pasos, como se ilustra en la figura 3.45(b) para $\phi_1(\xi, \eta)$. En el primer paso se escribe la función bilineal la cuál tiene el valor de 1 en el nodo 1 y 0 en los otros nodos. Esto proporciona los valores apropiados 1 y 0 en todos los nodos excepto en los nodos medios 5 y 8; en estos dos nodos $\hat{\phi}_1(\xi, \eta)$ es igual a $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, en el segundo paso corregimos esta deficiencia por sustracción de $\phi_5(\xi, \eta)/2$ y $\phi_8(\xi, \eta)/2$. Esta sustracción no distorsiona los valores en los otros seis nodos. Las funciones de forma para los otros tres nodos en los vértices se desarrolla de manera similar.

Las funciones resultantes para las funciones de forma son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\
\phi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\
\phi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
\phi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\
\phi_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
\phi_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi^2)(1-\eta^2) \\
\phi_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
\phi_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Las funciones de forma son cuadráticas a lo largo de cada lado. Esto asegura la continuidad C^0 entre los elementos dado que hay tres nodos sobre cada lado y tres nodos determinan una función cuadrática. Por otro lado, la función ϕ_i del elemento varía cúbicamente en algunas direcciones debido a los términos cúbicos que contiene. Como se mencionó anteriormente, podemos garantizar la relación de convergencia de acuerdo al grado mayor del polinomio *completo*. Así podemos pensar siempre que este elemento es esencialmente cuadrático.

El método anterior se puede generalizar para elementos de orden superior. Así las funciones de forma para nodos intermedios son producto de un polinomio de grado m sobre una variable y un polinomio lineal sobre la otra variable; las funciones de forma para los nodos en los vértices son un polinomio bilineal menos múltiplos de las funciones de los nodos intermedios. Este procedimiento hace fácil la generación de elementos de transición. Sin embargo, el procedimiento solo se aplica a funciones de forma de nodos sobre la frontera que contienen términos de la forma ξ^p , $\xi^p\eta$, $\xi\eta^p$, η^p , por ejemplo, aquellos términos a lo largo de las dos diagonales externas del triángulo de Pascal, resultando en elementos incompletos para el cuártico y superiores.

Para una transformación isoparamétrica tenemos,

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{k=1}^8 x_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta) \\
y &= \sum_{k=1}^8 y_k^{(e)} \phi_k(\xi, \eta)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

la cual proporciona continuidad entre elementos adyacentes gracias a la continuidad C^0 de la función ϕ_k . Para calcular el Jacobiano de esta transformación necesitamos las derivadas de las funciones de forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta) & \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+2\eta) \\
\frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) & \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(-\xi+2\eta) \\
\frac{\partial \phi_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) & \frac{\partial \phi_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta) \\
\frac{\partial \phi_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta) & \frac{\partial \phi_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta) \\
\frac{\partial \phi_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\xi(1-\eta) & \frac{\partial \phi_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2}(1-\xi^2) \\
\frac{\partial \phi_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}(1-\eta^2) & \frac{\partial \phi_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\eta(1+\xi) \\
\frac{\partial \phi_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\xi(1+\eta) & \frac{\partial \phi_7(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2) \\
\frac{\partial \phi_8(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2}(1-\eta^2) & \frac{\partial \phi_8(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\eta(1-\xi)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

El primer componente del Jacobiano es entonces

$$\begin{aligned}
J_{11}^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^8 x_k^{(e)} \frac{\partial \phi_k(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\
&= \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta)x_1^{(e)} + \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta)x_2^{(e)} \\
&\quad + \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta)x_3^{(e)} + \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta)x_4^{(e)} - \xi(1-\eta)x_5^{(e)} \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-\eta^2)x_6^{(e)} - \xi(1+\eta)x_7^{(e)} - \frac{1}{2}(1-\eta^2)x_8^{(e)}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Los otros tres componentes

$$J_{12}^{(e)} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad J_{21}^{(e)} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad J_{22}^{(e)} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{3.82}$$

los cuales pueden escribirse de una forma similar utilizando las ecs. (3.79) y (3.80). Como sabemos, el criterio para que un elemento sea aceptable es que la transformación sea de 1 a 1; esto es, $|J^{(e)}(\xi, \eta)| > 0$ en cualquier punto del elemento. Esto impone dos restricciones sobre un elemento (fig. 3.46): los ángulos internos deben ser $< 180^\circ$, y los nodos intermedios deben localizarse entre el intervalo de $\pm L/4$ a partir de la mitad de cada lado. Experimentos numéricos han mostrado que es necesario una menor tolerancia cuando la curvatura de un lado es tan grande que el arco, definido por los tres nodos, forma un ángulo próximo a los 180° .

Como en los casos anteriores, estos intervalos o restricciones representan los *límites extremos*, los que acercarse a éstos límites provocaría problemas en el cálculo posterior. En la práctica no es necesario utilizar elementos tan distorsionados. En el interior de un dominio uno puede y debería utilizar elementos de lados rectos con nodos intermedios centrados. Las relaciones de forma generalmente deberían ser cercanas, pero menores, de 5 a 1 o 10 a 1 para usar propiedades físicas isotrópicas ($\alpha_x = \alpha_y$). Si se tiene una anisotropía considerable, es decir $\alpha_x \gg \alpha_y$, entonces podría ser aconsejable hacer la dimensión x del elemento cercana o mayor a la dimensión y en orden para evitar un condicionamiento en la continuidad del elemento (debido a que las componentes de K_{ij} en la dirección x inician mucho mayor que en la dirección y).

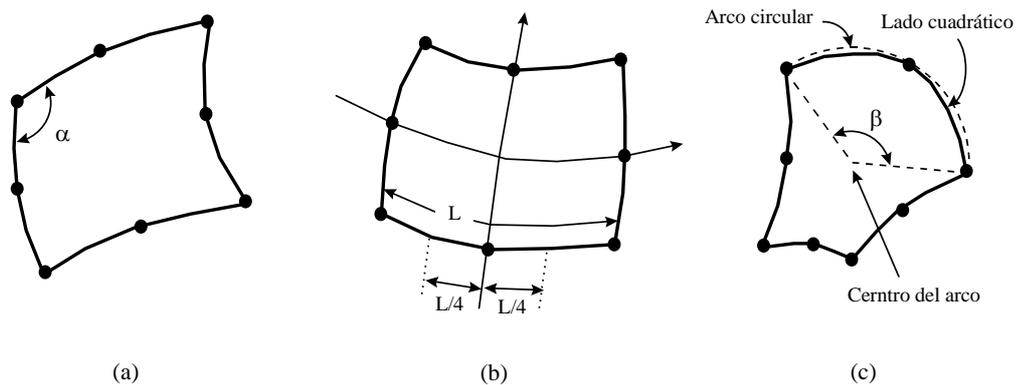


Fig. 3.46. Límites sobre los elementos cuadriláteros cuadráticos isoparamétricos C0 para evitar problemas en la transformación: (a) $\alpha < 180^\circ$; (b) el nodo intermedio debe localizarse entre $\pm L/4$ a partir del centro del lado; (c) $\beta \leq 45^\circ$.

CAPITULO 4 .MÉTODO ANALÍTICO DEL ANÁLISIS

ESTRUCTURAL DE VIGAS Y PLACAS.

Todos los elementos de las estructuras y de las máquinas deben funcionar sin amenaza de rotura o deformación peligrosa de la sección y de la forma bajo la acción de las fuerzas exteriores. Todos los elementos reales sometidos a la acción de fuerzas exteriores se deforman; es decir, cambian de forma y dimensiones. La aplicación de fuerzas externas hace que varíe la distancia entre las moléculas, al mismo tiempo de que varía la interacción intermolecular y dentro del cuerpo surgen fuerzas que se oponen a la deformación y tienden a restituir las partículas del cuerpo a su posición anterior .Estas fuerzas internas se denominan *fuerzas de elasticidad*.

Como se explicó brevemente en el capítulo 2, cuando las fuerzas exteriores son pequeñas, el sólido, una vez que desaparece la carga, recobra sus dimensiones iniciales, Esta propiedad de los sólidos se llama *elasticidad*. En este caso, las deformaciones que desaparecen una vez que se suprime la carga se dice que son *deformaciones elásticas*. Estas deformaciones elásticas aparecen sólo cuando las fuerzas externas no exceden un límite determinado según el material que se esté utilizando; si la carga que actúa es mayor, el cuerpo, además de la deformación elástica, experimenta una *deformación residual o plástica*.

4. 1 .- Principios generales de elasticidad.

Para simplificar los cálculos de resistencia, rigidez y estabilidad de los elementos de las estructuras hay que recurrir a ciertas suposiciones e hipótesis sobre las propiedades de los materiales y el carácter de las deformaciones. Las hipótesis principales en relación a las propiedades de los materiales, utilizados en las estructuras, se reduce a que son materiales homogéneos, macizos o continuos y con las mismas propiedades en todas las direcciones

Las hipótesis fundamentales acerca del carácter de las deformaciones elásticas consisten en lo siguiente:

1. Los desplazamientos que se producen en los cuerpos elásticos por la acción de las fuerzas exteriores son muy pequeños en comparación con las dimensiones de los elementos de que se trata.

2. El desplazamiento de los puntos de un cuerpo elástico es directamente proporcional a las cargas que actúan.

3. En virtud de la pequeñez de los desplazamientos que surgen y de la dependencia directamente proporcional de dichos desplazamientos respecto a las cargas, se puede suponer que las fuerzas exteriores, en un cuerpo elástico, actúan independientemente unas de otras (*principio de superposición*).

Las relaciones básicas de un cuerpo elástico son las relaciones *desplazamiento-deformación* y *esfuerzo-deformación* para obtenerlas y relacionadas a un caso específico se necesitan las ecuaciones de *equilibrio* y *compatibilidad*.

4.1.1.- ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

Estas ecuaciones definen que cada parte del cuerpo debe encontrarse en equilibrio, aún bajo la acción de fuerzas externas, asumiendo que el cuerpo es capaz de sufrir pequeños desplazamientos con respecto a un sistema fijo de ejes ortogonales x-y-z en un punto arbitrario (ver figura 4.1). Para asegurar dicho equilibrio debe establecerse tanto el equilibrio de fuerzas como de momentos en el cuerpo.

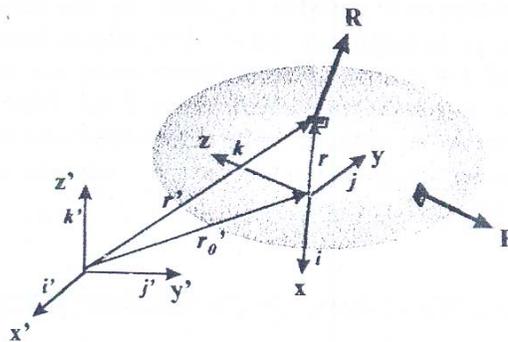


FIG.4.1.-CUERPO ELÁSTICO SOMETIDO A FUERZAS INTERNAS Y EXTERNAS.

Generalizando para obtener las ecuaciones de equilibrio de un sistema como el de la figura 4.1, suponemos un cuerpo sometido a cargas internas del mismo cuerpo (peso) por unidad de volumen y cargas superficiales por unidad de área. Por lo que para el equilibrio de fuerzas tenemos

$$Fuerza = m.a = \int_v \rho dv \frac{d^2 r'}{dt^2} = \int_v R dv + \int_s F ds$$

donde ρ es la masa por unidad de volumen, $\frac{dr'}{dt} = \dot{r}'$ es la velocidad del cuerpo; y

$\frac{d^2 r'}{dt^2} = \ddot{r}'$ es la aceleración del cuerpo. Reduciendo

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \rho \dot{r} dv \right] = \int_V R dv + \int_S F ds \quad (4.1)$$

Ahora bien ,para el equilibrio de momentos tenemos

$$r \times \frac{d}{dt} \left[\int_V \rho \dot{r} dv \right] = r \times \int_V R dv + r \times \int_S F ds$$

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \left(r \times \rho \dot{r} \right) dv \right] = \int_V (r \times R) dv + \int_S (r \times F) ds \quad (4.2)$$

En el caso de que el origen del sistema de coordenadas se encuentre localizado en el centro de gravedad entonces $r_0 = r$, por lo que se tiene la siguiente condición :

$$mr_0 = \int_V \rho r dv \quad (4.3)$$

donde m= masa total del cuerpo ;y r_0 =vector de posición al centro de gravedad .Teniendo que r es un vector de posición de una partícula en sistema de ejes x-y-z,de la figura 4.1 tenemos

$$r = r_0 + r \quad (4.4)$$

Ahora sustituyendo la ec.(4.3) en la ecuación (4.1) obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} [mr_0] = \int_V R dv + \int_S F ds$$

Si suponemos que Mv es el momento vectorial o cantidad de movimiento lineal, y H es el vector resultante de las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo entonces tendremos

$$\frac{dMv}{dt} = H \quad (4.5)$$

Esta ecuación representa un teorema muy importante el movimiento del centro de masa designado por el vector de posición r_0 , sigue la ley de movimiento de una sola partícula cuya masa es la suma total del sistema, sometida a una fuerza igual a la fuerza exterior total que actúa sobre el sistema.

De forma similar sustituimos las ecs.(4.3) y (4.4) en la ec.(4.2) y de acuerdo a la

ec.(4.1),eliminamos los términos que contienen al vector r_0 (el cual es constante),quedando finalmente

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V (r \times \rho \dot{r}) dv \right] = \int_V (r \times R) dv + \int_S (r \times F) ds$$

Suponiendo que M_A es el momento angular o momento del momentum y además N es el vector resultante del momento alrededor del c.g., la ecuación anterior queda como:

$$N = \dot{L} = (r \times H)$$

Con esto establecemos que la razón de cambio del momento angular alrededor del centro de masa es igual al momento resultante alrededor del centro de masa .Las ecs.(4.5) y (4.6) son la base para calcular el movimiento total de un sistema aeroelastico ,pero no nos informan sobre la respuesta elástica o interna .Esto ultimo se obtiene recurriendo a las propiedades de esfuerzo y deformación dentro del cuerpo elástico .Para un sistema tridimensional ,el vector de cargas superficiales queda representado como

$$F = iF_x + jF_y + kF_z$$

Donde i,j,k son los vectores unitarios en las direcciones x,y,z respectivamente .Las componentes de las fuerzas F están relacionadas a los esfuerzos internos en la superficie por las condiciones de frontera:

$$F_x = \sigma_x n.i + \tau_{xy} n.j + \tau_{xz} n.k$$

$$F_y = \tau_{yx} n.i + \sigma_y n.j + \tau_{yz} n.k$$

$$F_z = \tau_{zx} n.i + \tau_{zy} n.j + \sigma_z n.k$$

donde n es un vector unitario normal a la superficie en sentido exterior, de donde

$$n.i = \cos(x, n) = l$$

$$n.j = \cos(y, n) = m$$

$$n.k = \cos(z, n) = n$$

son los cósenos directores de la normal con respecto a los ejes x,y,z respectivamente (ver figura 4.2).

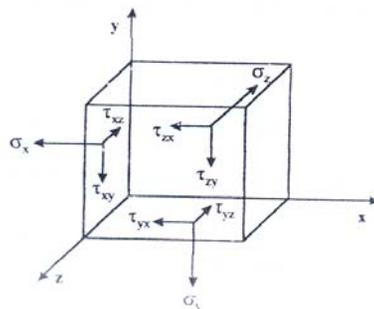


FIG.4.2.-COMPONENTES DE LOS ESFUERZOS SOBRE UN CUERPO

Procediendo para obtener el tensor de esfuerzos reducido, sustituimos la ec.(4.8) en la ec.(4.7) y utilizando a los cósenos directores se tiene:

$$F = (i\sigma_x l + i\tau_{xy} m + i\tau_{xz} n) + (j\tau_{yx} l + j\sigma_y m + j\tau_{yz} n) + (k\tau_{zx} l + k\tau_{zy} m + k\sigma_z n)$$

Aplicando las siguientes propiedades vectoriales de calculo tensorial

$$i\sigma_x l = \sigma_x i(n \cdot i)$$

$$i(n \cdot i) = i_i n_j i_j = n_j i_i i_j = n \cdot ii$$

de la ecuación anterior tenemos

$$F = (n \cdot \sigma_x ii + n \cdot \tau_{xy} ij + n \cdot \tau_{xz} ik) + (n \cdot \tau_{yx} ji + n \cdot \sigma_y ij + n \cdot \tau_{yz} jk) + (n \cdot \tau_{zx} ki + n \cdot \tau_{zy} kj + n \cdot \sigma_z kk)$$

Si factorizamos el vector normal unitario n podemos visualizar el *tensor de esfuerzos de segundo grado* (ec. 4.10). Por lo tanto,

$$F = n \cdot \phi \quad (4.9)$$

donde

$$\phi = i(\sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k) + j(\tau_{yx} i + \sigma_y j + \tau_{yz} k) + k(\tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \sigma_z k) \quad (4.10)$$

Sustituyendo la ec.(4.9) en las ecs.(4.1) y (4.2) y transformando el primer término con las ecs.(4.3) y (4.4), obtenemos:

$$\int_V \rho \ddot{r} dv = \int_V R dv + \int_S n \cdot \phi ds \quad (4.11)$$

$$\int_V (r \times \rho \ddot{r}) dv = \int_V r \times (R) dv + \int_S (r \times n \cdot \phi) ds \quad (4.12)$$

Ahora, utilizando el teorema de la divergencia transformamos la integral de superficie en una integral de volumen, por lo que las ecs.(4.11) y (4,12) quedan como:

$$\int_V (\rho \ddot{r} - R - \nabla \cdot \phi) dv = 0 \quad (4.13)$$

$$\int_V \left[(r \times \rho \ddot{r} - (r \times R) + \nabla \cdot (\phi)) \right] dv = 0 \quad (4.14)$$

Matemáticamente, teniendo la integral de volumen igualada a cero (del tipo de las ecs.4.13 y 4.14) para una elección arbitraria de V, las integrales desaparecen y los integrandos

quedan igualados a cero. Con esto las ecuaciones anteriores quedan como:

$$\vec{r} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$R = Xi + Yj + Zk$$

Despejando de la ec.(4.15), desarrollando el término $\nabla \cdot \phi$ de acuerdo con la ec.(4.10) y sustituyendo el vector de aceleración y de fuerza se tienen las ecuaciones de equilibrio de fuerzas:

$$\begin{aligned} \rho a_x &= \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} + X \\ \rho a_y &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} + Y \\ \rho a_z &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z + Z \end{aligned} \quad (4.17)$$

Finalmente, de la ec.(4.16) se obtiene que los esfuerzos cortantes son iguales mutuamente perpendiculares, por lo que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (4.18)$$

4.1.2.- Relaciones desplazamiento-deformación.

Para establecer estas relaciones es necesario referirnos a la figura 4,3, la que muestra un punto Po en la posición del vector \vec{r} relativo a un origen fijo, y un segundo punto Po' desplazado desde Po por una distancia dr . La deformación se describe a partir del cambio de posición; es decir, teniendo primeramente la fibra Po-Po' en un estado no deformado, bajo la influencia de cargas externas y cambios de temperatura la fibra se deforma tomando una nueva posición $P_1 - P_1'$. Con esto, la longitud de la fibra pasa a ser de dr a $dr + \varepsilon dr$, donde ε es la deformación de la fibra.

Si los desplazamientos de la fibra son: $U_i = (u, v, w)$ en el punto Po y $u_i' = (u', v', w')$, haciendo uso de la Serie de Taylor en forma vectorial se tiene:

$$u(r + dr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (dr \cdot \nabla)^n u(r)$$

donde de acuerdo con la figura 4.3: $u(r+dr) = u_i'$ y $u(r) = u_i$. Esto implica que

$$u_i' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (dr \cdot \nabla)^n u_i$$

Considerando los desplazamientos muy pequeños y sustituyendo el vector dr y el operador, tendremos

$$u' = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)$$

$$v' = v + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right)$$

$$w' = w + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)$$

Las proyecciones de la fibra deformada en los ejes x , y , z son, respectivamente:

$$dx + u' - u = dx + (dr \cdot \nabla)u$$

$$dy + v' - v = dy + (dr \cdot \nabla)v$$

$$dz + w' - w = dz + (dr \cdot \nabla)w$$

Por otro lado se sabe que

$$(dr + \varepsilon dr)^2 = dx + (dr \cdot \nabla)u^2 + dy + (dr \cdot \nabla)v^2 + dz + (dr \cdot \nabla)w^2$$

y tomando en cuenta que: $dx = l dr$, $dy = m dr$, $dz = n dr$; donde l , m y n son los cosenos directores de dr y los ángulos que forman con los ejes x , y , z , respectivamente. Conociendo también la identidad trigonométrica: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ y despreciando los productos de las derivadas (pues los desplazamientos son muy pequeños), hacemos el desarrollo obteniendo la *siguiente* relación:

$$\varepsilon = \left\{ 1 + 2 \left[l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + n^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + lm \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + ln \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + mn \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\}^{-1}$$

Aplicando la expansión binomial

$$(1+x)^{1/2} = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2$$

y tomando solo la parte lineal obtenemos:

$$\varepsilon = l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + n^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + lm \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + ln \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + mn \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

De acuerdo a la ecuación anterior, obtenemos las siguientes relaciones desplazamiento deformación :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.20)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

donde ε y γ son las deformaciones normales y cortantes respectivamente.

4.1.3.- Relaciones esfuerzo-deformación(ecuaciones de estado).

Suponiendo un cuerpo en el espacio sometido a un estado de esfuerzos triaxial y a una variación de temperatura. De la ley de Hooke lineal $\sigma = E\delta$ o (ver capítulo 2), de la relación de Poisson $\nu = \delta_1 / \delta_t$ (deformación lineal entre deformación transversal) y de la deformación térmica que en todas direcciones es igual a $\delta_T = \alpha\Delta T$ (donde α es el coeficiente de expansión térmica, cuyo valor depende del material), podemos obtener la deformación total en cada uno de los ejes. Como el esfuerzo cortante induce solo deformaciones cortantes, la relación esfuerzo-deformación cortante está dada por $\tau = G\gamma$, donde G es el módulo de elasticidad al corte por deformación angular. El cambio de temperatura no produce deformación cortante debido a que la expansión térmica libre no produce distorsión angular en un material isotrópico. Por lo tanto, con lo anterior encontramos la ley de Hooke tridimensional donde las deformaciones están en función de los esfuerzos:

$$\delta_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha\Delta T$$

$$\delta_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] + \alpha\Delta T \quad (4.21)$$

$$\delta_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha\Delta T$$

donde las constantes G, E y ν se relacionan con la ecuación:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.22)$$

4.1.4.- Ecuaciones de compatibilidad.

Para asegurar la continuidad y su perseveración en un cuerpo deformado es necesario cumplir con las ecuaciones de compatibilidad, las cuales son ecuaciones que relacionan las derivadas de las componentes de la deformación. Estas ecuaciones de compatibilidad aseguran que las funciones de desplazamiento sean continuas.

Estas ecuaciones se satisfacen si el conjunto de las tres ecuaciones de equilibrio, las seis relaciones de desplazamiento-deformación y las seis relaciones de esfuerzo-deformación se satisfacen.

Las primeras tres ecuaciones de compatibilidad se encuentran diferenciando doblemente las deformaciones cortantes de la ec. (4,20), suponiendo que u, v, w son continuas, y reduciendo, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \epsilon_x \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \epsilon_z \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon_x \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para encontrar las otras tres ecuaciones de compatibilidad pueden hallarse diferenciando, por ejemplo, γ_{xy} con respecto a x, z y sumando el resultado a γ_{zx} diferenciada con respecto a x,y. Similarmente para las otras dos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{2\partial^2}{\partial y \partial z} \epsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xy} \right] \\ \frac{2\partial^2}{\partial z \partial x} \epsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xy} \right] \\ \frac{2\partial^2}{\partial x \partial y} \epsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zy} - \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xy} \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.2.- Análisis clásico de vigas.

El primer caso para analizar dentro del estudio de las vigas, es la determinación de los esfuerzos producidos por la torsión; los cuales son únicamente de corte. Para este caso, la ley de Hooke también se hace válida, siempre y cuando no se sobrepase del límite elástico del material. Ahora esta ley va a relacionar la deformación angular del elemento con el esfuerzo cortante que la produce, es decir

$$\tau = G\gamma \quad (4.25)$$

La magnitud G se denomina *módulo de rigidez* (o de deslizamiento) el cuál tiene la misma unidad de medida que el módulo de elasticidad E ; fuerza sobre unidad de área. La relación existente entre los módulos de rigidez G y de elasticidad E depende del *coeficiente de Poisson* ν la cuál se da sin deducirla

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.26)$$

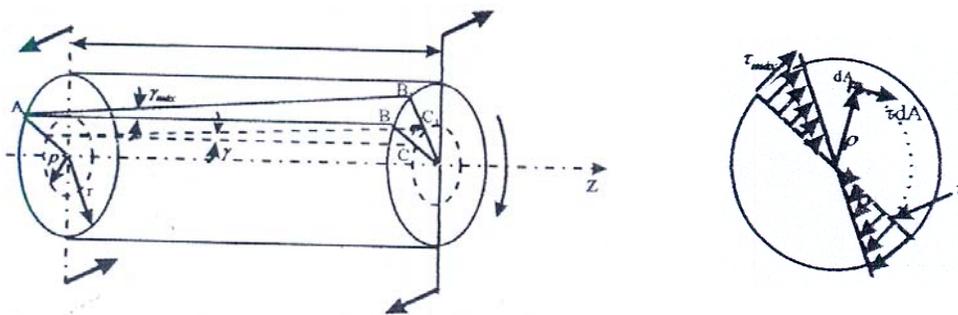


FIG.4.4.-BARRA CILÍNDRICA SOMETIDA A TORSIÓN PURA.

Deduciendo la ecuación para determinar las deformaciones y esfuerzos que surgen durante la torsión de una barra, únicamente de sección transversal circular o anular, tenemos que dichas secciones conservan su forma plana durante la torsión y los radios giran sin deformarse. Consideremos una barra cilíndrica de longitud L (ver figura 4.4), la cuál está fija por su extremo izquierdo. Haciendo girar el extremo derecho, desde el punto B hasta el punto B_1 , la barra experimenta una deformación que se determina por el ángulo γ_{\max} sobre la superficie de la barra (generatriz AB) o γ para cualquier punto interno de la barra (generatriz EC). Al mismo tiempo, el radio de la sección del extremo derecho OB pasa a ocupar la posición OB_1 , es decir, gira un cierto ángulo φ , llamado

ángulo de torsión. Teniendo en cuenta que la deformación es muy pequeña, por geometría podemos obtener la siguiente relación entre los ángulos:

$$BB_1 = \gamma_{\max} L = \phi r; \quad CC_1 = \gamma L = \phi \rho$$

de donde

$$\gamma_{\max} = \phi r L$$

$$\gamma = \phi \rho L$$

Despejando ϕ de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, se obtiene

$$\gamma = \gamma_{\max} \rho r$$

Por lo tanto, el ángulo de distorsión en la sección transversal es directamente proporcional a la distancia ρ al eje de la barra. Este deslizamiento va acompañado de la aparición de esfuerzos tangenciales que se determinan por la ley de Hooke:

$$\tau = G\gamma = G\gamma_{\max} \rho r$$

Pero si $\rho = r$, entonces $\tau_{\max} = G\gamma_{\max}$, por lo que

$$\tau = \tau_{\max} \rho / r \quad (4.27)$$

es decir, los esfuerzos tangenciales o cortantes en la sección transversal varían a lo largo del radio según una ley lineal, los cuales son perpendiculares al radio de la barra.

Ahora procedemos a determinar la magnitud de estos esfuerzos cortantes, en función del momento de torsión aplicado sobre la barra. Para esto, suponemos un elemento diferencial de área dA (ver figura 4.4) de una superficie elemental, cuya fuerza aplicada sobre ella será la producida por el esfuerzo cortante τdA , la cuál produce un momento respecto al eje de la barra que es igual a $\tau dA \rho$. La suma de los momentos de todas las fuerzas elementales tangenciales internas que surgen en la sección transversal de análisis es el momento de torsión M_t de dicha sección y se determina integrando sobre toda la superficie:

$$\int_A \tau dA \rho = M_t$$

Sustituyendo la ec.(4.27), obtenemos:

$$\frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \tau dA \rho^2 = M_t$$

Analizando la integral podemos decir que se refiere al momento polar de inercia I_p

(ver el Apéndice A-4), por lo tanto la ecuación se reduce a

$$\tau_{\max} = \frac{M_t r}{I_p}$$

de donde, de acuerdo a la ec.(4.27),

$$\tau = \frac{M_t \rho}{I_p} \quad (4.28)$$

La ec.(4.28) define al esfuerzo cortante o tangencial en un punto cualquiera de una sección transversal durante la torsión de una barra de sección transversal circular. Además, considerando las relaciones entre los ángulos y sustituyendo la ec.(4.28), podemos obtener el ángulo de torsión en función del momento torsor:

$$\varphi = \frac{M_t L}{GI_p} \quad (4.29)$$

Las ecuaciones desarrolladas anteriormente para secciones circulares no pueden ser utilizadas en formas no circulares. En una flecha circular sujeta a torsión pura, la distribución del esfuerzo cortante es como se indica en la figura 4.5(a), donde el máximo esfuerzo cortante se localiza en la fibra más alejada del eje de la barra y es perpendicular al radio desde el punto forzado. A una distancia dada desde el eje de rotación el esfuerzo de corte es constante en ambas direcciones, lo que hace que tanto los extremos de segmento de la barra como su torcimiento permanezcan paralelos uno a otro; en otras palabras, la sección de la barra no se tuerce fuera de su plano cuando la barra sufre un torcimiento.

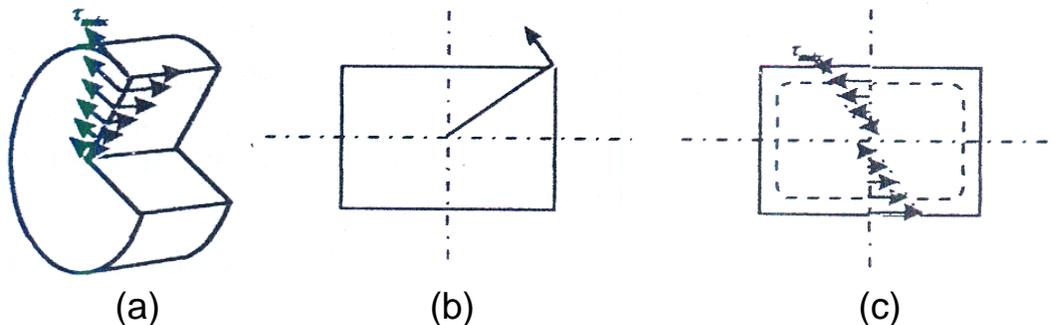


FIG.4.5.-ANÁLISIS DEL ESFUERZO DE CORTE POR TORSIÓN.

Si las condiciones de la figura 4. 5(a) son aplicadas a una barra rectangular, figura 4.5(b), la fibra con mayor esfuerzo será la de la esquina y el esfuerzo será dirigido como se muestra; el esfuerzo podría entonces tener una componente normal a la superficie y esto no es verdad. La *teoría de elasticidad* muestra el máximo esfuerzo cortante ocurre en la línea media de la longitud de los lados, como se ve en la figura 4.5(c), y que el esfuerzo en las esquinas es cero. Así, cuando una barra rectangular sufre torcimiento, el esfuerzo cortante no es constante a la misma distancia de los ejes de rotación y los extremos del corte de los segmentos a lo largo de la barra podrían no permanecer

paralelos uno a otro cuando la barra se tuerce; es decir, el torcimiento de la sección lo toma fuera de su plano. La figura 4.6 ilustra esta acción en una barra cuadrada torcida. Los extremos de la barra se tuercen o sufren distorsión normal al plano original no forzado de los extremos de la barra.

La determinación de los esfuerzos en una barra no circular es un problema que no puede resolverse por los métodos de resistencia de materiales. Así pues, la determinación de los ángulos de distorsión requiere tener en consideración no solo el ángulo de giro mutuo de las secciones, sino también la distorsión local, relacionada con el alabeo de las secciones. El hecho se complica aún más cuando las tensiones dependen no solamente de una variable, ρ (el radio), sino de las dos coordenadas (x,y) . Los esfuerzos tangenciales en las secciones transversales, en los puntos situados en las proximidades del contorno de la sección tienen que estar orientadas obligatoriamente según la tangente a éste. Supongamos el punto A (figura 4.7a) el esfuerzo tangencial τ cerca del borde de la sección va dirigida con cierta inclinación respecto al contorno. Descomponiendo este esfuerzo en dos componentes, una según la tangente al borde (τ_t) y la otra, según la normal (τ_n), en la superficie libre de la barra deberá aparecer un esfuerzo tangencial $\tau_n' = \tau_n$. Pero como la superficie exterior está libre de carga resulta que $\tau_n' = \tau_n = 0$. En el caso cuando la sección transversal tiene ángulos salientes, los esfuerzos tangenciales en estos lugares son iguales a cero. Descomponiendo el esfuerzo τ en las inmediaciones de ángulo (ver figura 4.7b) en dos componentes según las normales a los lados del ángulo, se obtienen los esfuerzos τ_1 y τ_2 . Los esfuerzos recíprocos a estos τ_1 y τ_2 son nulos, es decir serán también los esfuerzos τ_1 y τ_2 .

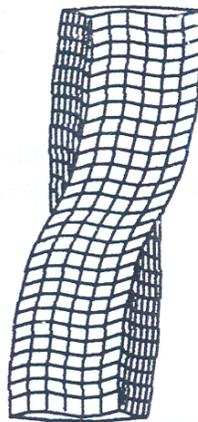


FIG.4.6.- TORSIÓN DE UNA BARRA CUADRADA.

En la figura 4.8(a) está representado el diagrama de los esfuerzos tangenciales que se obtienen por los métodos de la teoría de elasticidad para una barra de sección rectangular. En los ángulos los esfuerzos son iguales a cero, mientras que los esfuerzos máximos surgen en los centros de los lados mayores, es decir, en los puntos A,

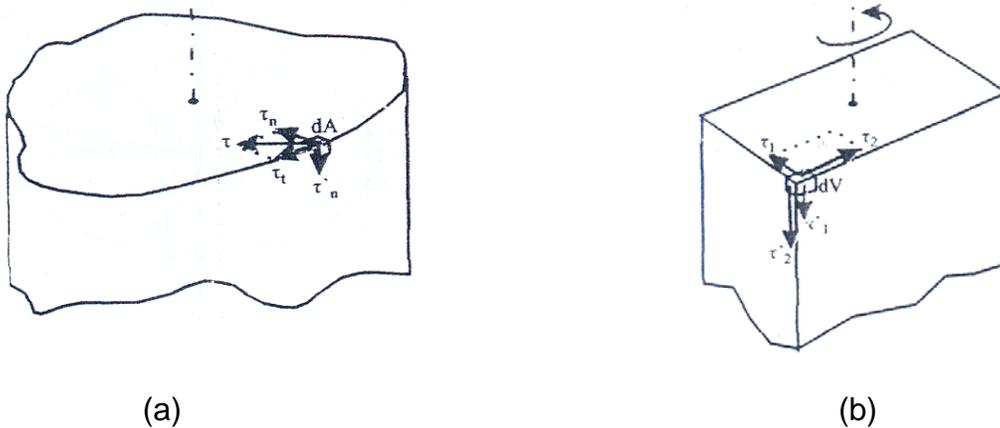


FIG.4.7.-SIMULACION DEL ESFUERZO CORTANTE EN LOS EXTREMOS DE UNA SECCION NO CIRCULAR.

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha ab^2} \quad (4.30)$$

En el punto B obtendremos,

$$\tau_B = \eta \tau_{\max} \quad (4.31^a)$$

siendo a el lado mayor y b el lado menor del rectángulo. Los coeficientes α y η dependen de la fracción a/b ; los valores de estos coeficientes están dados en 1a tabla 4.1. El desplazamiento angular se obtiene por la fórmula:

$$\varphi = \frac{M_t l}{G \beta b^3 a} \quad (4.31b)$$

TABLA 4.1

a/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.211	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
η	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

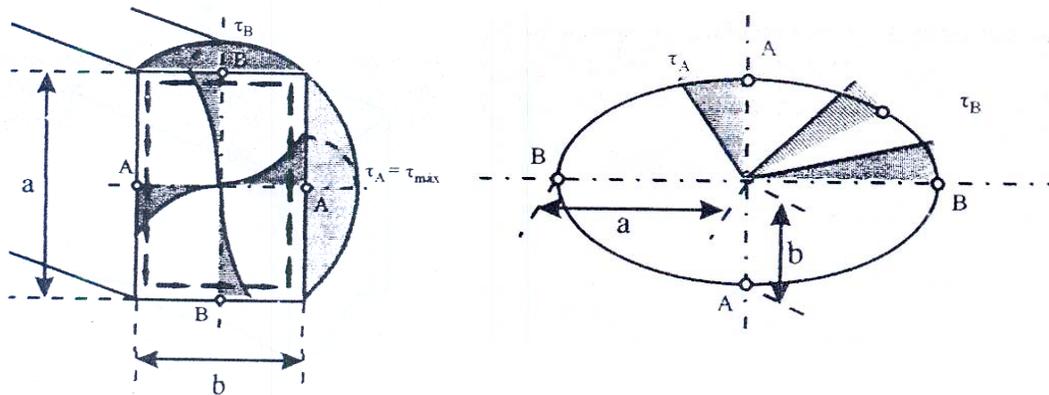


FIG.4.8.-DISTRIBUCION DE ESFUERZOS CORTANTES.

El coeficiente β también depende de la fracción a/b . Sus valores numéricos figuran en la tabla 4.1. En el caso de una sección elíptica (figura 4.8b) el esfuerzo máximo aparecerá en los puntos A, es decir, en los extremos del eje menor. La tabla 4.2 resume las fórmulas para la deflexión torsional y esfuerzo para unas cuantas formas de sección transversal. Estas fórmulas están basadas en la suposición que la sección transversal está libre de torcedura (extremos no restringidos); el material es homogéneo y los esfuerzos están dentro del rango elástico.

ANALOGÍA DE LA MEMBRANA ELÁSTICA

En los problemas de la mecánica se encuentran muy a menudo casos cuando problemas de naturaleza física completamente diferentes se reducen a las mismas ecuaciones diferenciales. Se puede, sin resolver la ecuación, afirmar que entre variables x_1 y y_1 de un problema existe la misma relación que entre las variables x_2 y y_2 del otro. Entonces se dice que un problema es análogo al otro. En este caso, la analogía permite representar claramente las leyes que rigen en el primer problema. Considerando el problema de la torsión, resulta que independientemente de la forma de la sección en cuestión, el problema de la torsión de la barra nos lleva a la misma ecuación diferencial que el problema del equilibrio de una membrana estirada sobre un contorno de la misma configuración y solicitada por una presión uniformemente distribuida. El análogo del esfuerzo es el ángulo que forma la tangente a la superficie de la membrana con el plano del contorno, y el análogo del momento torsor es el volumen contenido entre el plano el contorno y la superficie de la membrana.

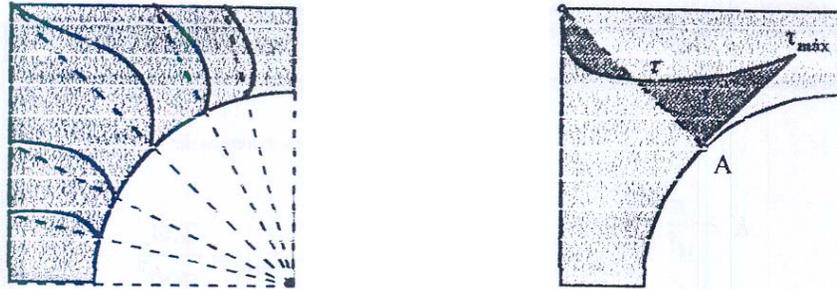


FIG.4.9.-EJEMPLIFICACION DE LA ANALOGÍA DE LA MEMBRANA.

Supongamos por ejemplo, que se necesita establecer la ley de distribución de los esfuerzos en la sección representada en la figura 4.9(a). Supongamos además que sobre el contorno indicado se estira una membrana sometida a una carga uniformemente distribuida. Veamos varias secciones de la membrana. En función de los ángulos de inclinación de la membrana representamos de manera aproximada la distribución de los esfuerzos en la sección (fig.4.9b). Mediante esta analogía, no solo se pueden obtener resultados cualitativos, sino también relaciones cuantitativas; para ello se emplea un dispositivo especial simple.

La analogía expuesta no es la única. La técnica moderna aprovecha ampliamente distintas analogías. Cuando en calidad de analogía se emplea un sistema creado artificialmente, el método de la analogía se denomina *Método de Modelación*. Este método se emplea para la investigación de muchos procesos complejos que no pueden ser observados a simple vista.

En la construcción de máquinas y, sobre todo, en la construcción de aviones resulta necesario calcular la torsión de las barras denominadas de *paredes delgadas*. Estos perfiles se dividen en abiertos y cerrados. Las formas típicas de los perfiles laminados, doblados, estirados y prensados se dan en la figura 4.10.

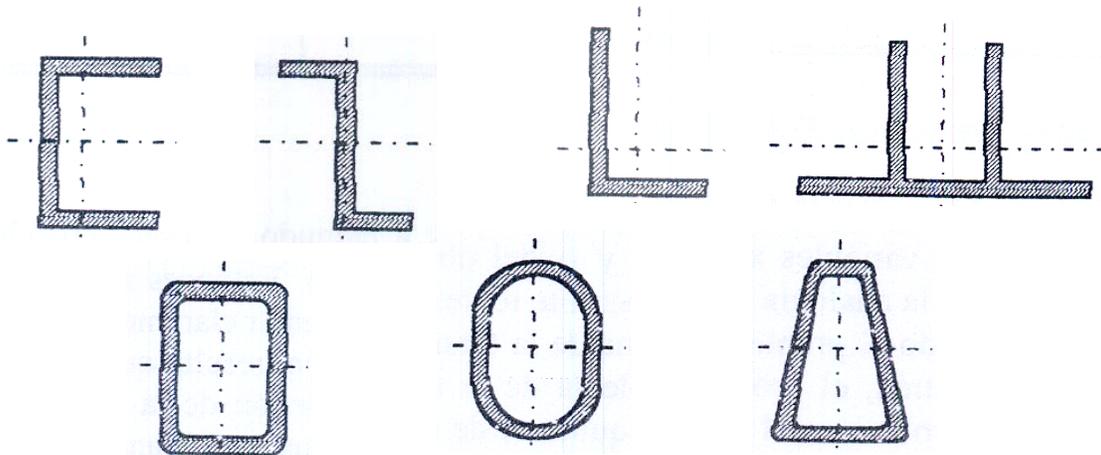


FIG.4.10.- PERFILES DE PARED DELGADA.

Aunque en el caso de las secciones sólidas no circulares requiere de cálculos más complejos para determinar los esfuerzos, en las secciones de pared delgada (no circulares) es más simple obtener una solución muy aproximada a la exacta.

En el caso de perfiles abiertos, supongamos una viga con perfil "C" de sección transversal la cuál está empotrada en uno de sus extremos y soporta una carga puntual en el otro extremo (ver figura 4.11a), obteniendo su diagrama de cortantes. Analizando la sección B de la viga con una longitud dx , podemos observar (figura 4.11 b) que existe una diferencia entre los esfuerzos normales producidos, los cuales generan las fuerzas axiales F_1 y F_2 (figura 4.11c) donde $F_1 > F_2$. Para equilibrar el sistema se genera sobre la sección transversal lo que se *denomina flujo de corte "q"*. Para determinar el valor del esfuerzo de corte en la sección y del flujo de corte en la misma es necesario establecer las condiciones de equilibrio del sistema.

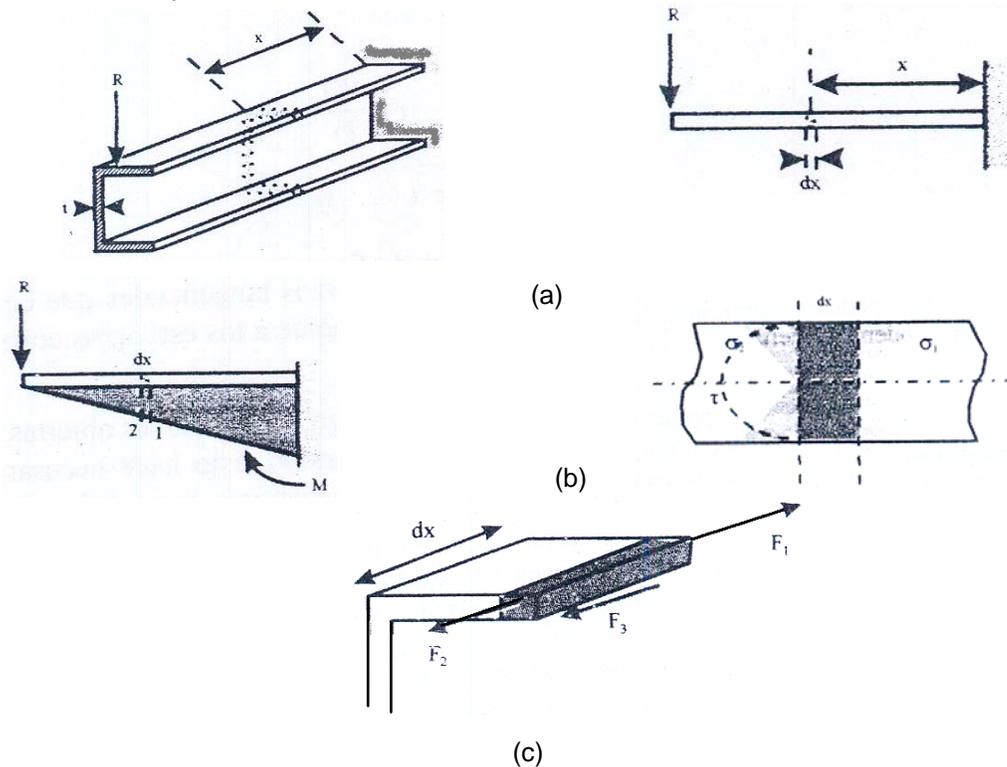


FIG.4.11.-VIGA DE SECCION ABIERTA.

Suponiendo la suma de fuerzas en dirección axial,

$$\sum F_x = F_1 - F_2 - F_3 = 0$$

$$F_1 = \sigma_1 A = \frac{M_1 y}{I} A$$

$$F_2 = \sigma_2 A = \frac{M_2 y}{I} A$$

$$F_3 = \tau(t)(dx)$$

Si tenemos que $Q = yA$ (momento estático de la sección) y que la diferencia de momentos sobre unidad de longitud es la fuerza cortante que actúa sobre la sección; es

decir

$$V = M_1 - M_2 / dx = dM / dx$$

Resolviendo el sistema se tiene:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$q = \tau.t \quad \therefore q = \frac{VQ}{I}$$

El flujo de corte se expresa en unidades de fuerza por unidades de longitud; por ejemplo Nw-m; τ es el esfuerzo cortante en la sección, t es el espesor del perfil, V es la fuerza cortante que actúa sobre la sección y, Q e I son el momento estático y momento de inercia de la sección respectivamente. Este flujo de corte genera los esfuerzos tangenciales que equilibran al sistema en dirección axial y con él podemos determinar fácilmente a los esfuerzos cortantes máximos que aparezcan en la viga.

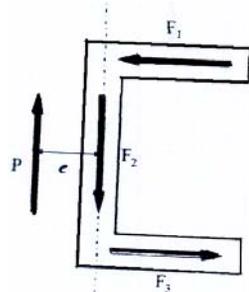


FIG.4.12.-POSICION DEL CENTRO DE CORTE.

Sin embargo, las secciones abiertas no son capaces de soportar la torsión, esto hace necesario buscar la línea axial donde la fuerza o carga aplicada no genere torsión en la viga (de sección abierta), cualquier punto en esta línea axial se conoce como *Centro de Corte*. En la estructura de un ala, la unión de todos los centros de corte en cada cuaderna forman la línea denominada *eje elástico*.

El centro de corte puede encontrarse aplicando las condiciones de equilibrio en cuanto a momentos se refiere. Por ejemplo, se desea determinar el punto de aplicación de una carga aplicada en una viga de sección transversal en forma de C, tal como se muestra en la figura 4.12. Debido al flujo de corte se generan fuerzas en dirección de cada pared (F_1, F_2 y F_3). Para este caso, las fuerzas F_1 y F_3 forman un par torsor, por lo que para equilibrar a la viga es necesario que la fuerza F_2 junto con la carga aplicada generen otro par torsor igual en valor pero opuesto en dirección. Como los valores de fuerza son constantes, la distancia e es la que definirá el equilibrio ;esta distancia da la posición al centro de corte.

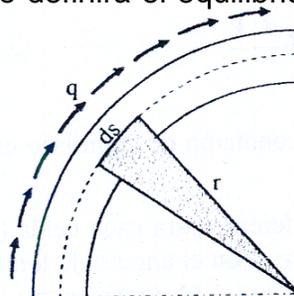


FIG.4.13.-MOMENTO PRODUCIDO EN UN ELEMENTO CURVO

4.2.2.-Análisis de vigas curvas.

Cuando se trata de elementos curvos, no es posible determinar una fuerza como en el caso anterior, ya que ésta iría cambiando de dirección continuamente. Para estos casos es necesario establecer no la fuerza, sino el momento que produce el conjunto de fuerzas diferenciales sobre ese segmento curvo. De la figura 4.13, tenemos que

$$dM_T = (q \cdot ds)r$$

$$M_T = \int q(r \cdot ds)$$

pero $dA = 1/2(r \cdot ds)$, por lo tanto

$$M_T = 2q \int dA$$

Así tenemos que el momento producido por el flujo de corte a través de un elemento curvo (de pared delgada) depende únicamente del flujo de corte mismo y del área que genera el elemento, a partir de su radio de giro:

$$M_T = 2qA \quad (4.33)$$

Este principio puede aplicarse también a perfiles de pared delgada con segmentos rectos y una combinación de curvos con rectos.

Si la sección es *asimétrica* entonces existe el producto de inercia de la sección y, si además tenemos doble flexión o cargas oblicuas (inclinadas; es decir, en las dos direcciones x,y) entonces se tiene una ecuación general para flujo de corte:

$$q = \frac{(V_x I_x - V_x I_{xy}) A \cdot x + (V_y I_y - V_x I_{xy}) A \cdot y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (4.34)$$

donde A es el área del elemento al cuál se le desea determinar el flujo de corte q, y los valores de x e y corresponden a las coordenadas del centroide de dicho elemento. Esta ecuación es muy útil cuando se trata de perfiles para alas de aviones, donde se concentran *puntos masa* (largueros) de dicho perfil; cada punto representa un elemento.

Cuando se tienen secciones cerradas de pared delgada, la determinación del flujo de corte se vuelve poco más laboriosa, ya que se tiene inicialmente un flujo redundante (q_0) con el cuál se trabaja generando las ecuaciones del flujo de corte de cada elemento en función del flujo redundante, por lo tanto la ec.(4,34) se convierte en

$$q_{i+1} = q_i + \frac{(V_x I_x - V_y I_{xy}) \sum A \cdot x + (V_y I_y - V_x I_{xy}) \sum A \cdot y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (4.35)$$

Ahora, para determinar el valor de q_0 , es necesario establecer la condición de equilibrio en el sistema, es decir, $\sum M = 0$.

Finalmente, para el caso de **Multiceldas** el flujo de corte será diferente para cada celda (ver figura 4.14), donde se tendría la ecuación que relaciona al flujo de corte con

el ángulo de torsión. Considerando únicamente una diferencial ds , como se muestra en la figura 4.14, tenemos que

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_i G} \int q \frac{ds}{t}$$

Integrando

$$\theta = \frac{1}{2A_i G} \frac{qL}{t} \quad (4.36)$$

donde θ es el ángulo de torsión en la celda, A_i es el área de la celda i , G es el módulo de elasticidad al corte o a la torsión y t es el espesor de la pared de la sección.

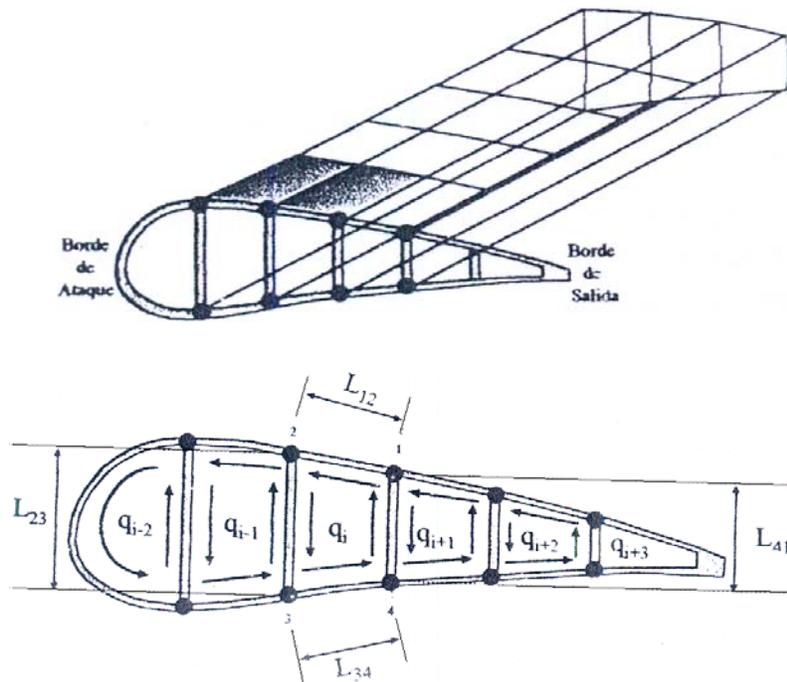


FIG.4.14.-FLUJO DE CORTE EN MULTICELDAS.

Para obtener el flujo de corte en las multiceldas es muy importante tomar en cuenta el ángulo de torsión con la condición de que dicho ángulo es el mismo en celdas adyacentes. Entonces, si analizamos una celda i con la celdas adyacentes $(i-1)$ e $(i+1)$, si consideramos que $(L/t) = \delta$, aplicando la condición anterior tenemos

$$\theta_i = \frac{1}{2A_i G} [q_{12}\delta_{12} + q_{23}\delta_{23} - q_{32}\delta_{32} + q_{34}\delta_{34} + q_{41}\delta_{41} - q_{14}\delta_{14}]$$

$$\theta_i = \frac{1}{2A_i G} [q_i(\delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{34} + \delta_{41}) - q_{i-1}\delta_{32} - q_{i+1}\delta_{14}] \quad (4.37)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2A_i G} [-q_{i-1}\delta_{32} + q_i(\delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{34} + \delta_{41}) - q_{i+1}\delta_{14}]$$

En el caso de las alas de avión, es muy común encontrar formas cónicas para la estructura del ala. La conicidad implica que al aplicar un cortante genera componentes verticales y horizontales, por lo tanto,

$$V_R = \sum F_v \quad (4.38)$$

donde V_R incluye el cortante y las componentes verticales de la fuerza axial en los largueros.

4.2.1.- Vigas sometidas a flexión.

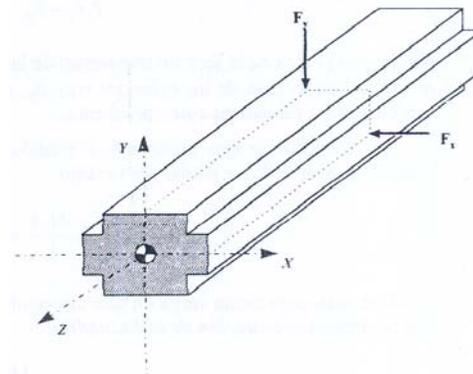


FIG.4.15.-VIGA FLEXIONADA.

Para determinar los esfuerzos en las vigas que se suponen sometidas únicamente a flexión pura, es necesario definir la ecuación conocida como la *Ecuación General de la Flexión*. Para esto, se sabe que el esfuerzo en la flexión se distribuye linealmente sobre la sección transversal del elemento, por lo tanto, podemos suponer que la distribución del esfuerzo sobre un plano (x, y) se define por un polinomio lineal de tres coeficientes, es decir,

$$\sigma = Ax + By + C \quad (4.39)$$

Considerando un elemento diferencial sobre la sección transversal de un elemento viga, tenemos que el momento, en el plano (ver figura 4.15), producido por el esfuerzo en el material al flexionar dicha viga, por la aplicación de una carga F , es

$$M_x = y \int \sigma dA \quad (4.40^a)$$

$$M_y = x \int \sigma dA \quad (4.40b)$$

Donde (x, y) son las coordenadas de un punto a partir del eje neutro; es decir, el eje z para este caso. Sustituyendo la ec.(4.39) en las ecs.(4.40) y, como en el eje z no existen reacciones, $C = 0$. Por lo tanto, desarrollando obtenemos

$$M_x = AI_{xy} + BI_x \quad (4.41^a)$$

$$M_y = AI_y + BI_{xy} \quad (4.41b)$$

Resolviendo el sistema de ecs.(4.41) para los coeficientes A y B , se tiene

$$A = \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad ; \quad B = \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

Sustituyendo el valor de los coeficientes en la ec.(4.39), se obtiene la ecuación general de la flexión; a la cuál, si le adicionamos el efecto de una fuerza axial P y contemplando el efecto del cambio de temperatura ΔT en el material, se tiene finalmente

$$\sigma_z = \frac{(M_y I_x - M_x I_{xy})x + (M_x I_y - M_y I_{xy})y}{I_x I_y - I_{xy}^2} + \frac{P}{A} + \alpha(\Delta T) \quad (4.42)$$

donde A es el área de la sección transversal de la viga y α es el coeficiente de dilatación lineal del material. Para el caso de los esfuerzos σ_x y σ_y , se puede ocupar la misma expresión únicamente cambiando los subíndices correspondientes.

Si z e y fueran ejes principales o cuando la sección es simétrica (como en el caso de la figura), el valor de I_{xy} se anula, por lo tanto

$$\sigma_z = \frac{M_y x}{I_y} + \frac{M_x y}{I_x} \quad (4.43)$$

Si además, solo existe carga en una dirección (dirección vertical, por ejemplo), obtenemos lo que se denomina *Ecuación de la Escudría*:

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x} \quad (4.44)$$

FLEXIÓN ASIMÉTRICA

Para que la ecuación general de la flexión, ec.(4.44) sea válida es necesario que el plano de cargas contenga o sea paralelo a uno de los ejes principales de inercia de la sección; es decir, que pase por el centro de corte. Así, el eje neutro es el otro eje principal y los esfuerzos son proporcionales a su distancia a la superficie neutra.

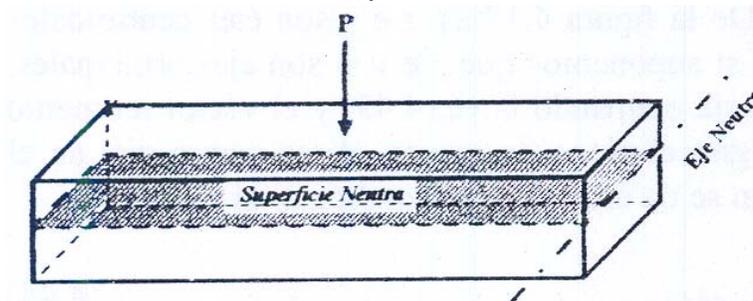


FIG.4.16.-REPRESENTACION DEL EJE NEUTRO.

Si la ubicación del plano de cargas no cumple con la condición marcada, el esfuerzo normal en un punto cualquiera de la sección ya no está dado por la ec.(4.44) y el eje neutro no será uno de los ejes principales. Si el plano de cargas está inclinado respecto a uno de los ejes principales, se tiene lo que se llama *Flexión Asimétrica* (oblicua o desviada). En la flexión asimétrica se pueden presentar dos situaciones:

1. Sección simétrica y plano de cargas inclinado (ver figura 4.15); y
2. Sección asimétrica (ver figura 4.17).

En ambos casos se puede trabajar respecto a ejes principales o respecto a ejes no principales. Si se trabaja respecto a ejes principales la carga se descompone en componentes respecto a dichos ejes, cada carga produce un esfuerzo y el esfuerzo total es la suma algebraica de dichos esfuerzos (superposición). Pero si en secciones asimétricas se trabaja respecto a ejes no principales, se tiene también superposición, pero las expresiones de esfuerzo ya no son de la forma de la ecuación de la escudría.

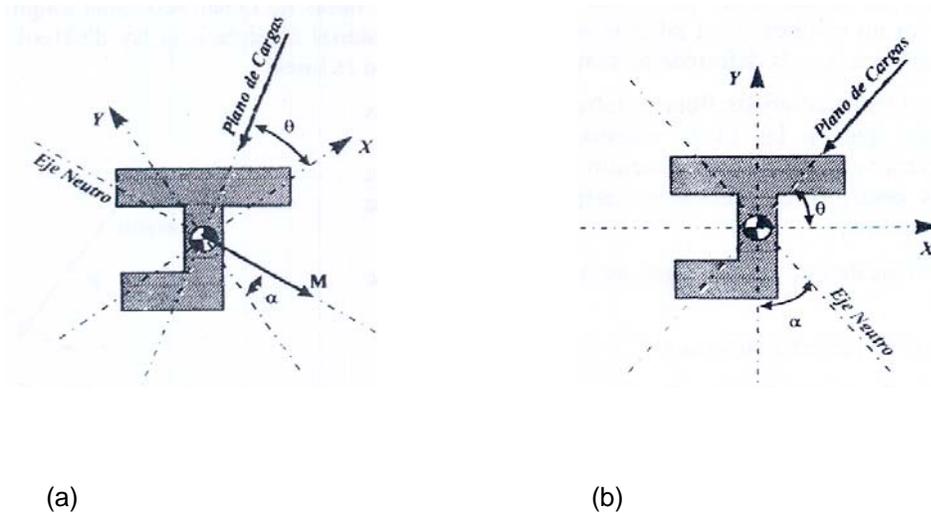


FIG.4.17.-FLEXION ASIMÉTRICA DE UNA VIGA DE SECCION ASIMÉTRICA.

Para el caso de sección asimétrica el esfuerzo longitudinal σ_z en un plano cualquiera está dado por la ecuación general de la flexión, ec.(4.42). De la figura 4.17(a), z e y son ejes centroidales (no principales) y M es el vector momento. Pero si suponemos que z e y si son ejes principales, entonces el valor del producto de inercia se anularía ocupando la ec.(4.43) y el vector momento es perpendicular al plano de carga P; cuando se gira el plano de cargas, el eje neutro gira en el mismo sentido pero a partir del otro eje. La flexión se da en un eje perpendicular al eje neutro.

$$m(\alpha) = \frac{I_x}{I_y} m(\theta) \quad (4.45)$$

Si se trabaja respecto a ejes no principales (figura 4.17b), la ecuación del esfuerzo se mantiene, pero para el eje neutro ,se tiene,

$$m(\alpha) = \frac{I_{xy} - I_x m(\theta)}{I_{xy} m(\theta) - I_y} \quad (4.46)$$

FLEXION DE VIGAS CURVAS

Cuando se trata de vigas curvas, se considera que cumplen todas las condiciones de flexión de las vigas rectas, excepto la de que la viga sea recta. En este caso, la viga tiene una curvatura inicial.

Las secciones planas antes de la deformación, siguen siendo planas después de la deformación. La ley del alargamiento es lineal ya que todas las fibras tienen la misma longitud y

como se considera un material que cumple la ley de Hooke la relación de proporcionalidad del esfuerzo y la deformación es también es lineal. En el caso de una viga curva, las fibras internas (a la curvatura) son más cortas y, por lo tanto, más rígidas; implica que absorben mayor esfuerzo. El alargamiento sigue siendo lineal, pero como las fibras no tienen la misma longitud, entonces la deformación ya no es lineal y, si además el material obedece a la ley de Hooke indica que la relación del esfuerzo con la deformación tampoco es lineal.

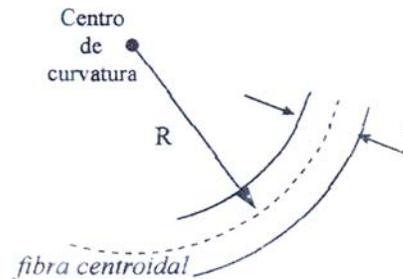


FIG.4.18.-VIGA CURVA.

Dado que el esfuerzo en las fibras internas es siempre mayor que en las fibras externas, la superficie neutra se desplaza hacia el centro de la curvatura, es decir, el eje neutro se desplaza hacia el lado interno.

Para el análisis de este tipo de vigas, se divide en dos casos:

1. Vigas de pequeña curvatura: $R/t > 0$; y
2. Vigas de gran curvatura: $R/t < 0$;

donde R es el radio de curvatura de la viga, y t es el espesor de la viga (ver figura 4.18).

En el primer caso la curvatura *no* influye en la distribución de esfuerzos de tal manera que se considera que responden como vigas rectas, esto es: la ley de esfuerzo lineal; no se corre el eje neutro y el esfuerzo se determina mediante la ecuación de la escuadría; con la condición de eliminar el valor del radio de curvatura inicial.

En el segundo caso la variación de esfuerzos es *no lineal*, se corre el eje neutro hacia el centro de curvatura y los esfuerzos no se calculan mediante la ecuación de la escuadría. Supongamos un tramo de la barra de curvatura grande de sección constante solicitado en sus extremos por los momentos M (ver figura 4.19). Como en el caso de la viga recta, se puede demostrar que el conjunto de puntos que antes de la flexión constituían el plano de la sección transversal, después de la flexión, también formarán una sección plana, pero girada en el espacio. Es decir, que las secciones transversales de la viga de gran curvatura, en la flexión pura, permanecen planas.

Separemos de la viga curva, por dos secciones normales próximas, un tramo elemental (figura 4.19). Durante la flexión las secciones contiguas girarán una respecto a la otra un ángulo $\Delta d\phi$ lo que conduce a que en las capas de la viga aparecerán ciertos alargamientos.

Llamemos ρ_0 (figura 4.19a) al radio de curvatura del eje de la viga (lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones) y r_0 al radio de curvatura de la capa neutra; cuya magnitud queda por ahora desconocida.

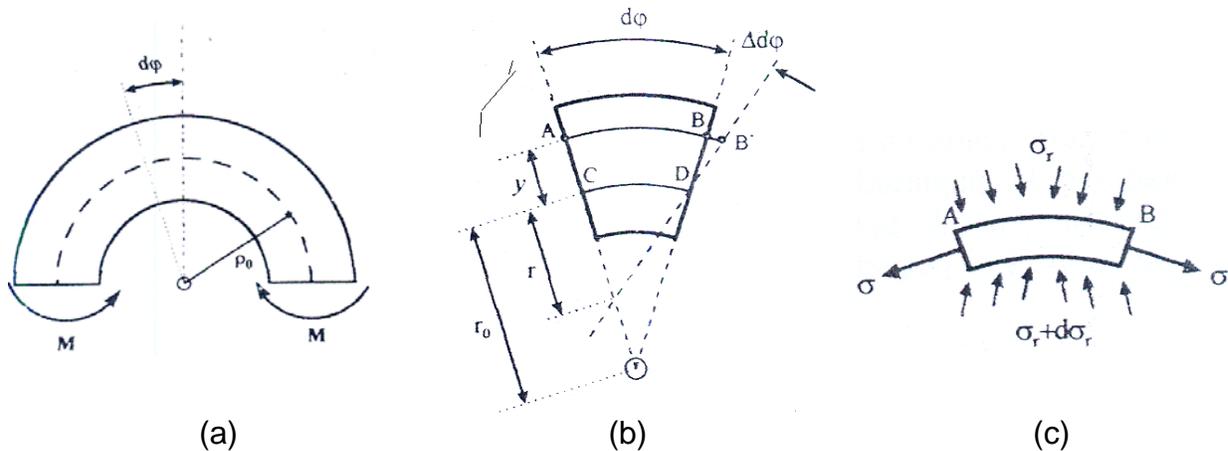


FIG.4.19.-ANÁLISIS DE UNA VIGA CURVA.

El alargamiento de la capa AB (figura 4. 19b) será

$$\varepsilon = \frac{BB'}{AB} = \frac{y\Delta d\varphi}{(r_0 + y)d\varphi} \quad (4.47)$$

Aquí se supone que durante el proceso de la flexión de la viga, la magnitud y no varía, aunque en realidad esto no es así, pues si analizamos las condiciones de equilibrio de la franja elemental AB (figura 4.19c) resultará evidente que entre las fibras contiguas deberá existir una acción mutua en forma de fuerzas dirigidas radialmente y, como resultado, variará la forma de la sección transversal de la viga y la magnitud de y . En el caso de secciones macizas estas variaciones son insignificantes, pero en el caso de secciones de pared delgada (perfiles) los desplazamientos radiales de las fibras serán bastante grandes y pueden conducir a una variación significativa del cuadro de distribución de las tensiones en la sección.

La fracción $\Delta d\varphi/d\varphi$ es proporcional a la variación de la curvatura de la viga. De la figura 4.19 se deduce que el segmento $CD = (d\varphi + \Delta d\varphi)r$, siendo r el radio de curvatura de la capa neutra después de la deformación. Por otra parte $CD = r_0 d\varphi$. Igualando estas magnitudes obtendremos:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \quad (4.48)$$

Así pues, podemos afirmar que

$$\varepsilon = \frac{y}{(r_o + y)} r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \quad (4.49)$$

y, aplicando la ley de Hooke, entonces,

$$\varepsilon = E\varepsilon = E \frac{y}{(r_o + y)} r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \quad (4.50)$$

En estas expresiones se ve claramente la particularidad principal de las vigas de gran curvatura: como en este caso las dimensiones de la sección transversal son comparables con el radio r_o la magnitud de y que figura en el denominador adquiere un valor importante y las tensiones, por lo tanto, se distribuyen de manera no lineal. En el caso de vigas de *pequeña curvatura* y es pequeña en comparación con r_o y

$$\sigma = Ey \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \quad (4.51)$$

Cuando $\frac{1}{r_o} = 0$ esta expresión coincide con la expresión correspondiente a la viga recta.

Supongamos para mayor simplicidad que la sección transversal de la viga es simétrica respecto al plano de curvatura. Entonces, el eje Y de la sección será el eje de simetría (figura 4.20) y el momento de las fuerzas elementales σdA respecto a este eje será igual a cero. Escribiendo la expresión de la fuerza normal N y la del momento flector M,

$$N = \int_s \sigma dA, \quad M = \int_s y \sigma dA \quad (4.52)$$

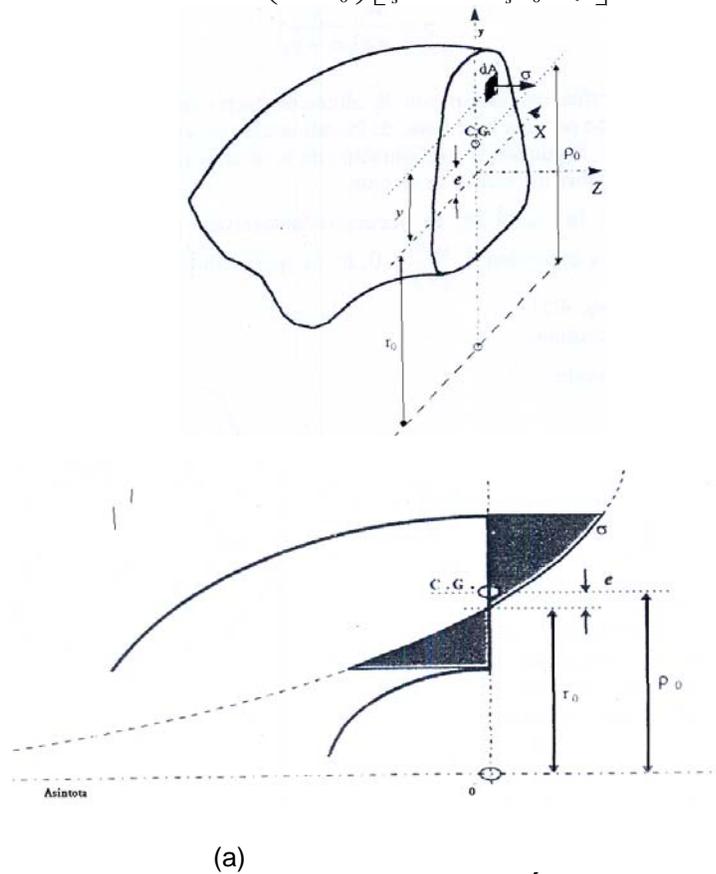
Introduciendo la ec.(4.50) en la ec.(4.52) obtendremos,

$$N = Er \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \int_s \frac{y dA}{r_o + y} \quad (4.53)$$

$$M = Er_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \int_s \frac{y^2 dA}{r_0 + y} \quad (4.54)$$

Como la fuerza axial es igual a cero (ya que el sistema está en equilibrio), entonces $\int_s \frac{y^2 dA}{r_0 + y} = 0$, lo que indica que $N = 0$, Para resolver la ec.(4.54) transformamos la integral en dos sumandos, es decir,

$$M = Er_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \left[\int_s y dA - r_0 \int_s \frac{y dA}{r_0 + y} \right] \quad (4.55)$$



(a) (b)
FIG.4.20.-VIGA CURVA SIMÉTRICA.

La primera de estas integrales representa el momento estático de la sección respecto a la línea neutra y es igual al producto Ae , siendo e la distancia de la línea neutra al centro de gravedad,

$$e = \rho_0 - r_0 \quad (4.56)$$

La integral que figura en el denominador constituye una característica geométrica de la sección, como por ejemplo, el momento estático o el momento de inercia. Como resumen, la tabla 4.3 presenta las ecuaciones correspondientes a r_0 de las secciones transversales que se utilizan con más frecuencia en el análisis de esfuerzos de vigas curvas.

4.2.3.- Vigas sometidas a estado de esfuerzo compuesto.

El estado de esfuerzo compuesto se presenta en aquellos casos en que un elemento de la estructura está sometido simultáneamente a varias de las deformaciones simples anteriormente analizadas (flexión, torsión y compresión -o tensión--). Debido a que en estos casos la falla del material se produce con diversas magnitudes de los factores de fuerza en la sección, surge la necesidad de hallar un procedimiento para plantear las condiciones de resistencia de estado de esfuerzo compuesto partiendo de las magnitudes de los esfuerzos límites obtenidos en los ensayos de un estado de esfuerzo simple.

En dependencia de la hipótesis de resistencia que se acepte, se determina el esfuerzo equivalente σ_{eq} o τ_{eq}^2 , que puede compararse con el esfuerzo de carga axial. De acuerdo con la condición de resistencia, el esfuerzo equivalente no debe ser mayor que el permisible para el material es decir

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &\leq \sigma_{per} \\ \tau_{eq} &\leq \tau_{per}\end{aligned}\quad (4.59)$$

El caso más general es la determinación del esfuerzo en un punto de una viga sometida a cargas de flexión, axiales y de torsión; los cuales son

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{MC}{I_x} \pm \frac{F}{A} \\ \tau_{xy} &= \frac{M_t c}{J}\end{aligned}\quad (4.60)$$

donde M es el momento flexionante, F es la fuerza axial (de tensión o de compresión), M_t es el momento torsor, A es el área de la sección transversal de la viga, I_x es el momento de inercia y J es el momento polar. Utilizando el *Círculo de Mohr* se puede demostrar que los dos esfuerzos principales no nulos son

$$\sigma_{A,B} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\quad (4.61)$$

Estos esfuerzos pueden combinarse para obtener los esfuerzos equivalentes normal y cortante:

$$\tau_{eq} = \sqrt{\sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (4.62)$$

$$\tau_{eq} = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Sustituyendo las ecs.(4.60) en las ecs.(4.62) se tiene

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{I_x} \pm \frac{F}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_t c}{J}\right)^2} \quad (4.63)$$

$$\tau_{eq} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{Mc}{I_x} \pm \frac{F}{A}\right)^2 + \left(\frac{M_t c}{J}\right)^2}$$

Estas ecuaciones permiten determinar los valores de esfuerzo equivalente en cualquier punto cuando se conocen las características de la sección transversal de la viga y las condiciones de carga.

4.2.4.- Vigas estáticamente indeterminadas.

Para este tipo de vigas, se tiene que las ecuaciones de la elástica no son suficientes para obtener la solución al problema. Por lo tanto, se han desarrollado cuatro métodos para la obtención de la solución al problema:

MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN.

Para utilizar este método es necesario primeramente definir la *ecuación diferencial de la elástica*. Supóngase una viga sometida a una carga transversal P, como se muestra en la figura 4.22, en la cuál se cumple la ley de Hooke, por lo que tenemos que

$$k = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} \quad (4.64)$$

donde K es la curvatura que adquiere la sección dx (de m_1 a m_2) de la viga y ρ es el radio de curvatura. Pero de la figura tenemos que $\rho = \frac{ds}{d\theta}$ entonces, además podemos, asumir que

$ds \approx dx$ y que $\theta = tn(\theta)$, ya que se trata de ángulos muy pequeños; siendo $tn(\theta) = \frac{dy}{dx}$

Sustituyendo en la ec.(4.64) se tiene

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (4.65)$$

Esta es la *ecuación diferencial de la elástica*. Por otro lado tenemos que $dM = V dx$ y $q = -V dx$, por lo que sustituyendo en la ec.(4.65) obtenemos las relaciones entre el cortante y la carga con la deflexión en una viga:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \quad (4.66)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (4.67)$$

Finalmente. para proceder con el método de la doble integración , integramos la ec(4.65) veces y obtenemos

$$y = -\frac{1}{EI} \iint M dx^2 + c_1 x + c_2 \quad (4.68)$$

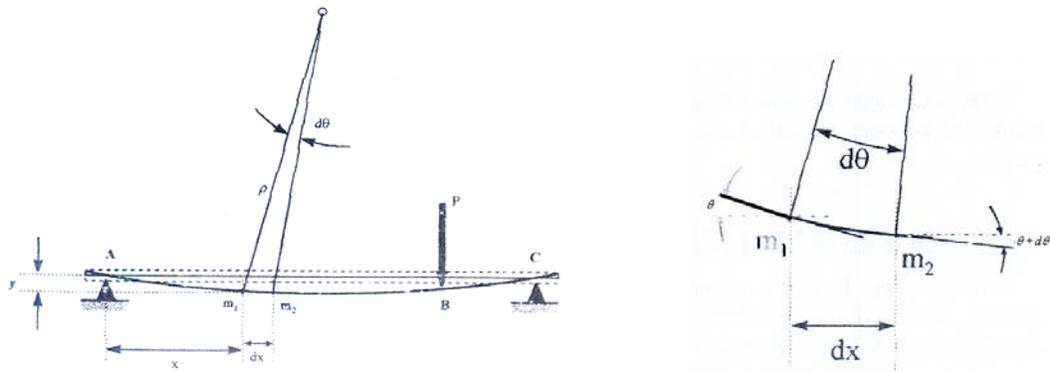


FIG.4.22.-OBTENCION DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ELASTICA.

El momento flexionante M debe quedar en función de x , y las constantes C_1 y C_2 se obtienen a partir de las condiciones de frontera del elemento.

MÉTODO DEL AREA DE MOMENTOS.

Analizando una viga sometida a una fuerza y apoyada en dos puntos, como la de la figura 4.23, se pueden obtener sus diagramas de momentos; y para mejor comprensión analizamos la viga ya deformada (la elástica), ampliando el dibujo.

Recordando la ec.(4,64) y la condición de ángulos muy pequeños, tenemos

$$d\theta = -\frac{M}{EI} dx \quad (4.69)$$

Entonces, integrando de X_A hasta X_B podemos obtener la variación angular entre A y B:

$$\theta_{AB} = -\frac{1}{EI} \int_{X_A}^{X_B} M dx$$

$$\theta_{AB} = -\frac{1}{EI} \{AREA\}_{AB} \quad (4.70)$$

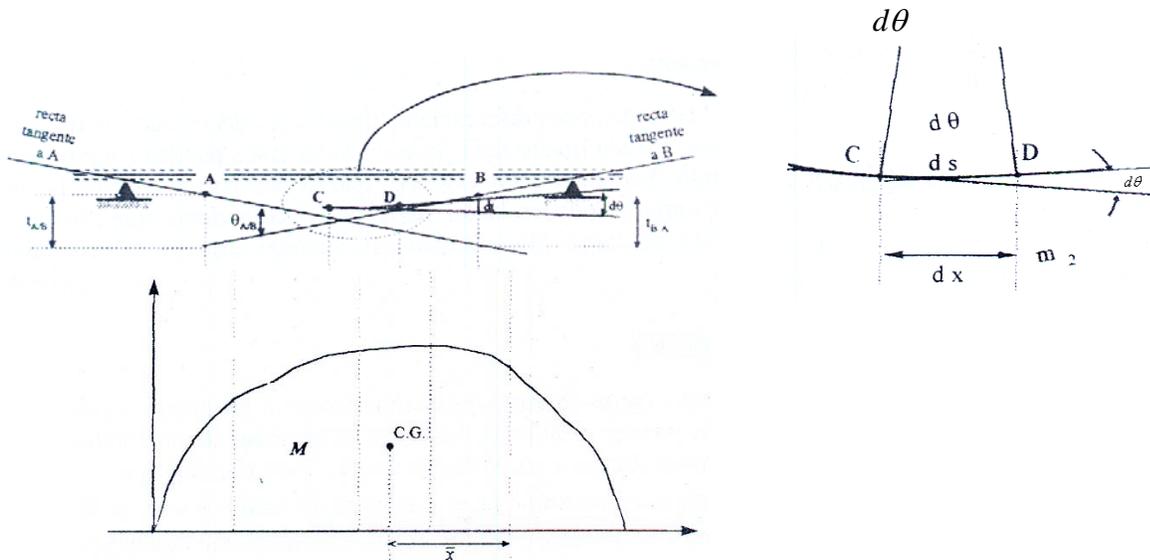


FIG.4.23.-RELACION DE LA ELASTICA CON EL AREA DE MOMENTOS.

De la ec.(4.70) se obtiene un primer teorema: *la variación o incremento de la pendiente entre las tangentes trazadas a la elástica en 2 puntos cualesquiera A y B es igual al producto de $(\frac{1}{EI})$ por el área del diagrama de momentos flectores entre estos dos puntos.*

, Por otro lado tenemos que la diferencia de la desviación t es $dt = x d\theta$, pero como $d\theta$ sabe de se obtiene a partir de la ec.(4.69), por lo que integrando dt desde X_A hasta X_B se tiene

$$t_{B/A} = -\frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} M dx \cdot \bar{x} \quad (4.71)$$

$$t_{B/A} = -\frac{1}{EI} \{AREA\}_{AB} \cdot \bar{x}$$

Donde se obtiene un segundo teorema: *la desviación de un punto cualquiera B respecto de la tangente trazada desde la elástica en otro punto A, en dirección perpendicular a la inicial de la viga, es igual al producto ($\frac{1}{EI}$) por el momento --de área de la porción de diagrama de momentos entre los puntos A y B--respecto de B.*

Estos dos teoremas junto con ciertas consideraciones geométricas y trigonométricas, nos ayudan a determinar los valores de la pendiente y la deflexión de la viga en un caso específico de sollicitación de cargas y condiciones de frontera.

MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN.

Las ecuaciones de la elástica son ecuaciones diferenciales lineales, es decir, que sus términos están elevados a la primera potencia. Esto quiere decir que sus soluciones pueden superponerse para diversas condiciones de carga. Podemos decir entonces que la deflexión generada en una viga por distintas condiciones de carga se pueden hallar sumando las deflexiones que produciría independientemente cada condición de carga. Sin embargo, este método requiere de unas tablas que muestren un resumen de vigas cargadas con sus valores correspondientes de momento, pendiente y deflexión (ver apéndice 5).

MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

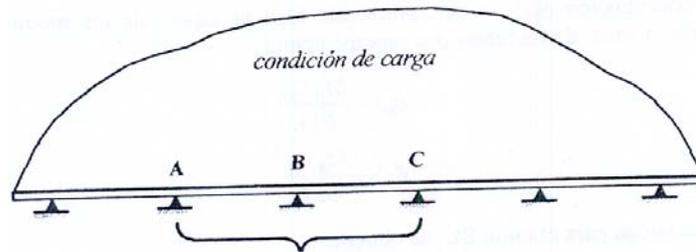
La analogía de las relaciones entre carga-cortante-momento flector y momento-pendiente -ordenada, sugiere que éstas últimas se pueden establecer mediante los métodos desarrollados para calcular la fuerza cortante y el momento flector a partir de las cargas. Para ello hay que suponer que la viga está cargada no con las cargas reales sino con el diagrama como una carga ficticia. Se calcula entonces la fuerza cortante y el momento flector ficticios en un punto cualquiera, que corresponden *con* la pendiente y *la* ordenada de *la* elástica en ese punto de *la* viga inicial. Su desventaja es que se apoya en una carga ficticia para calcular la deflexión; no directamente por las cargas reales.

$$Pendiente Real = Fuerza Cortante Ficticia$$

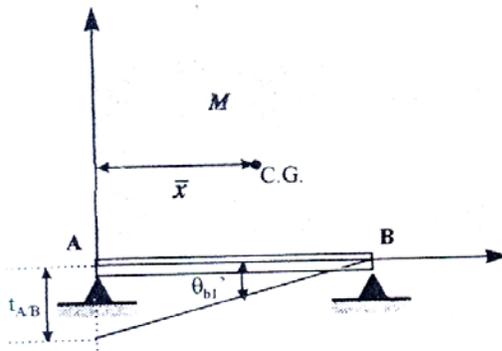
$$Deformación = Momento Flector Ficticio \quad (4.72)$$

4.2.5.- Vigas continuas.

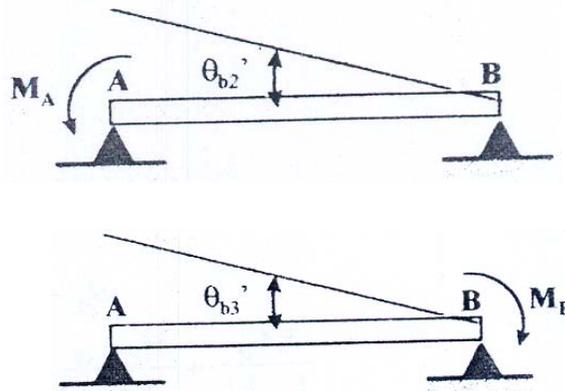
Se considera una *viga continua* aquella que pasa por más de tres apoyos, es decir, que no se interrumpen al pasar por muchos apoyos. Debido a que en estas vigas se consideran las deformaciones verticales, lo que indica que únicamente el primer apoyo será el pasador (articulado) y el resto de rodillos, para su solución no es práctico aplicar los métodos anteriores, por lo que se utiliza el *Método de los Tres Momentos*.



(A) VIGA CONTINUA CARGADA ; SECCION A ANALIZAR ; ABC.



(B) PENDIENTE QUE GENERA LA CARGA APLICADA SOBRE EL TRAMO AB.



(C) PENDIENTE QUE GENERAN LAS CARGAS A LOS LADOS IZQUIERDO Y DERECHO ,DEL TRAMO AB.

FIG.4.24.-APLICACIÓN DEL METODO DE LOS TRES MOMENTOS

De la figura 24 tenemos una ecuación de compatibilidad, es decir, $\theta_b' = \theta_b''$. Pero para conocer el valor de θ_b' bajo la acción de la carga externa hacemos uso de los métodos anteriormente vistos.

Considerando el uso de las ecuación (4,64) hasta la (4,72) tenemos, primeramente la pendiente θ_{b1}' producida por las cargas aplicadas en la sección ,AB:

$$\theta_{b1}' = \frac{dy}{dx} = \frac{t_{A/B}}{L_{AB}} \quad (4.73)$$

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI_1} \bar{x}A_{AB}$$

Ahora ,la contribución θ_{b2}' y θ_{b3}' producida bajo la acción de los momentos M_A y M_B respectivamente , a partir de las tablas pro superposición.

$$\theta_{b2}' = \frac{M_A L_{AB}}{6EI_1} \quad (4.74)$$

$$\theta_{b3}' = \frac{M_B L_{BA}}{3EI_1}$$

De manera análoga para el tramo BC ,se obtiene:

$$\theta_{b1}'' = \frac{\bar{x}A_{BC}}{L_{BC}EI_2}$$

$$\theta_{b2}'' = \frac{M_B L_{BC}}{6EI_2} \quad (4.75)$$

$$\theta_{b3}'' = \frac{M_C L_{CB}}{3EI_2} \quad (4.76)$$

Aplicando la ecuación de compatibilidad y sustituyendo las ecuaciones(4.72) hasta (4.76) se tiene:

$$\theta_{b1}' + \theta_{b2}' + \theta_{b3}' = \theta_{b1}'' + \theta_{b2}'' + \theta_{b3}''$$

$$\frac{\bar{x}A_{AB}}{L_{AB}EI_1} + \frac{M_A L_{AB}}{6EI_1} + \frac{M_B L_{BA}}{3EI_1} = \frac{\bar{x}A_{BC}}{L_{BC}EI_2} + \frac{M_B L_{BC}}{6EI_2} + \frac{M_C L_{CB}}{3EI_2}$$

$$M_A \left(\frac{L_{AB}}{I_1} \right) + 2M_B \left(\frac{L_{AB}}{I_1} + \frac{L_{BC}}{I_2} \right) + M_C \left(\frac{L_{BC}}{I_2} \right) = -\frac{6A_{AB}\bar{x}}{I_1 L_{AB}} - \frac{6A_{BC}\bar{x}}{I_2 L_{BC}}$$

Si además ,la viga es de sección constante, lo que indica que todos los tramos tienen el mismo momento de inercia($I_1 = I_2$),entonces reducimos la expresión anterior en la expresión

general de la ecuación de los tres momentos:

$$M_A L_{AB} + 2M_B (L_{AB} + L_{BC}) + M_C L_{BC} = -\frac{6A_{AB}\bar{x}}{L_{AB}} - \frac{6A_{BC}\bar{x}}{L_{BC}} \quad (4.77)$$

El numero total de reacciones será el mismo que el de apoyos y el grado de indeterminación estática será menor en dos que este numero.

Aunque una viga continua puede analizarse por cualquiera de los métodos ya descritos, resulta práctico elegir como reacciones redundantes a los momentos flexionantes en los apoyos intermedios. En esto consiste la aplicación de la ecuación de los tres momentos, ec.(4.77). Esta ecuación puede escribirse tantas veces como momentos flexionantes halla.

Una vez determinados estos momentos flexionantes, no hay dificultad en hallar las reacciones verticales mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático, o olvidando que la reacción en un apoyo de dos tramos adyacentes será la suma algebraica del análisis de ambos tramos.

Este método también puede ser utilizado para resolver vigas empotradas *espejeando* la viga y sus condiciones de carga y frontera a partir del extremo empotrado; en el caso de vigas con un empotre se espejea toda la viga, y para el caso de dos empotres se espejea la mitad de la viga en cada lado.

METODO DE CROSS.

Al igual que el método anterior, este método consiste en determinar primero los momentos flectores en los apoyos de una viga. Para su desarrollo es necesario conocer las siguientes definiciones:

Rigidez, el cuál comúnmente se conoce como la fuerza necesaria para producir una deformación unitaria, pero que en el caso del análisis de vigas la definiremos como *el momento necesario para producir un giro unitario* $\left(\frac{M}{rad}\right)$.

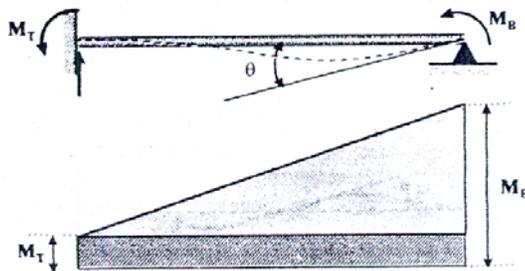


FIG.4.25.-DETERMINACION DEL FACTOR DE RIGIDEZ.

Momento Transmitido, que es el momento que se produce en un extremo empotrado por la

acción de un momento aplicado en el otro extremo (articulado).

Considerando la viga empotrada de la figura 4.25 se tiene que $\theta_A = 0$, por lo que la desviación $t_{A/B} = 0 = \frac{1}{EI} (Area)_{AB} (\bar{x}_B)$, de tal modo que

$$EI t_{A/B} = \frac{1}{2} M_T L \left(\frac{2}{3} L \right) + \frac{1}{2} M_B \left(\frac{2}{3} L \right)$$

$$M_T = -\frac{1}{2} M_B \quad (4.78)$$

Aplicando el primer teorema de área de momentos, ec.(4.70), $\theta_{AB} = (Area)_{AB}$, se tiene

$$EI \theta_{AB} = \frac{1}{2} M_T L + \frac{1}{2} M_B L \quad (4.79)$$

Sustituyendo la ec.(4.78) en la ec.(4.79), reduciendo y despejando M_B obtenemos

$$EI \theta_{AB} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} M_B \right) L + \frac{1}{2} M_B L$$

$$EI \theta_{AB} = -\frac{1}{4} M_B L + \frac{1}{2} M_B L$$

$$EI \theta_{AB} = -\frac{1}{4} M_B L + \frac{1}{2} M_B L$$

$$M_B = \frac{AEI \theta_{AB}}{L} \quad (4.80)$$

De acuerdo a la definición de rigidez en vigas, nuestro *factor de rigidez*, teniendo $M_B = K$ y $\theta_{AB} = 1$ rad, será.

$$k = \frac{4EI}{L} \quad (4.81)$$

Siendo E constante, podemos obtener un

$$\text{factor de rigidez relativo: } k = \frac{I}{L}$$

Ahora, para su aplicación consideremos la viga ilustrada en la figura 4.26(a) perfectamente empotrada en los extremos y apoyada en el centro. Supongamos que restringimos el giro en el punto B (como si estuviese empotrada), de tal modo que la acción de la carga P y Q generan

momentos en este "empotre"; estos momentos se conocen como *momentos de empotramiento perfecto (MEP)*.

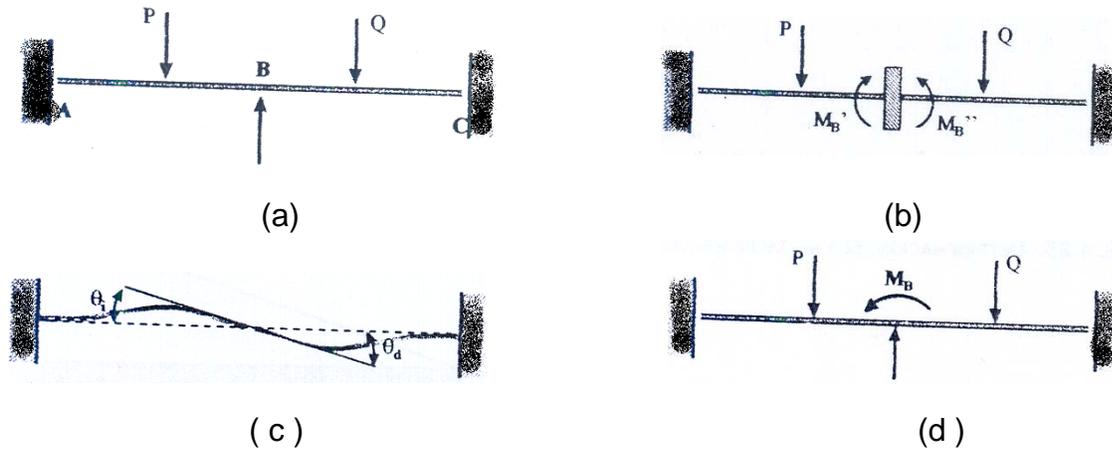


FIG.4.26.-APLICACIÓN DEL METODO DE CROSS.

Al soltar la sujeción B, la diferencia entre los momentos hace girar al nodo B como se indica en la figura 4.26(c) hasta que los momentos se equilibran a uno y otro lado; se observa pues que el momento no equilibrado se distribuye entre los dos lados al permitir el giro en B. La rotación en B producida por este momento genera momentos transmitidos en A y en C de la mitad de su valor y de signo contrario. Si consideramos que este momento se distribuye entre los tramos de la viga AB y BC es evidente que tendría *un factor de distribución* diferente, el cuál tendrá un valor de

$$FD_i = \frac{K_i}{\sum_j K_j} \quad (4.81)$$

Donde FD_i y K_i es el factor de distribución y de rigidez del tramo i, respectivamente. Por lo tanto, para un empotre $FD = 0$, y para una articulación (en el extremo) $FD = 1$. El MEP se obtiene a partir de tablas como en el caso del método de superposición. Este procedimiento es iterativo hasta que ΔMB (de la figura 4.26) sea nulo.

4.3.- Análisis clásico de placas.

El inicio del análisis de las placas se enfoca al desarrollo de la *teoría membranar*. En realidad, la placa es un elemento cascarón cuya superficie media es un plano, y se clasifican de acuerdo a su configuración del borde exterior. El elemento placa curva se diferencia del elemento cascarón por su tamaño; mientras que una estructura puede construirse, sin discontinuidad del material, por un elemento cascarón, dicha estructura se puede construir también por un conjunto de placas, curvas (o rectas) unidas de tal forma que generen la geometría deseada (esta unión de placas genera la discontinuidad del material).

Supongamos un elemento cascarón simétrico de espesor h (ver figura 4.27). Designemos por ρ_m al radio de curvatura del arco del meridiano de la superficie media (figura 4.27a) y por ρ_t , al segundo radio principal, es decir, el radio de curvatura de la sección normal perpendicular al arco del meridiano. Este radio es igual al segmento de la normal entre la superficie media y el eje de simetría. Estos radios, ρ_m y ρ_t , son en el caso general, funciones del ángulo θ entre la normal y el eje de simetría.

Con dos pares de secciones meridionales y normales cónicas (figura 4.27b) separamos un elemento del cascarón de dimensiones ds_1 y ds_2 , como el indicado en la figura 4.27(c). Consideramos que sobre las caras del elemento actúan los esfuerzos σ_m y σ_t ; denominados esfuerzo meridional y esfuerzo circunferencial, respectivamente. Si multiplicamos estos esfuerzos por las áreas correspondientes de las caras del elemento se obtienen las fuerzas $\sigma_m h ds_2$ y $\sigma_t h ds_1$. A este elemento se le aplica la fuerza de la carga normal $p ds_1 ds_2$. Proyectando todas las fuerzas sobre la normal se obtiene,

$$p ds_1 ds_2 - \sigma_m h ds_2 d\theta - \sigma_t h ds_1 d\varphi = 0$$

pero como $d\theta = \frac{ds_1}{\rho_m}$ y $d\varphi = \frac{ds_2}{\rho_t}$, obtendremos finalmente la relación que se conoce como ecuación de Laplace

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \quad (4.82)$$

En el caso de la figura 4.27(C) se puede plantear también otra ecuación, proyectando todas las fuerzas sobre la dirección del eje del cascarón, pero es más conveniente plantearla, no para el elemento, sino para la parte del cascarón separada por la sección cónica normal (ver figura 4.27d).

4.3.1.-Placas circulares.

Después de haber analizado un cascarón, ahora vamos a relacionarlo con la flexión en placas. Debido a que la teoría de la flexión de placas es una parte muy compleja de la teoría de la elasticidad, en el presente trabajo sólo se presentaran los caso más generales.

Supongamos una placa circular bajo la acción de ciertas fuerzas exteriores, que actúan perpendicularmente al plano medio, por lo que la placa varía su curvatura (figura 4.29). Esta variación de la curvatura ocurre, como regla general, en dos planos simultáneamente y, como resultado, se obtiene la así denominada *superficie elástica* de curvatura pequeña, cuya forma se caracteriza por la ley de variación de las deflexiones w de la placa. En los cálculos de las

placas se considera que la deflexión w es mucho menor que el espesor h de la placa. Solamente haciendo esta suposición se puede estudiar la flexión de la placa independientemente de la tracción. Las placas que cumplen esta condición se les denomina *placas finas*. Las placas cuyas deflexiones son comparables con el espesor se calculan teniendo en cuenta el alargamiento de la superficie media.

La teoría de la deflexión de las placas y cascarones se basa sobre ciertas suposiciones simplificadoras. La primera de ellas consiste en que se considera *invariable* la normal; esta suposición se conoce como *Hipótesis de Kirchhoff* y que consiste en que los puntos situados antes de la deformación sobre cierta recta normal a la superficie media, siguen formando, después de la deformación, una recta normal a la superficie deformada. Esta suposición indica que se puede prescindir de las deformaciones angulares de los cascarones en comparación con los desplazamientos angulares. Esto es aceptable en la medida en que el espesor de la placa es pequeño en comparación con las otras dimensiones.

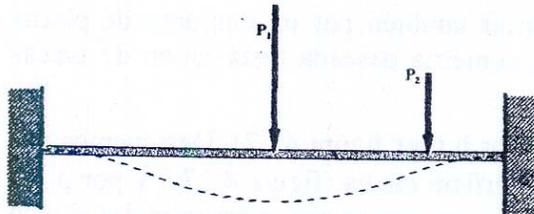


FIG.4.29.-PLACA CIRCULAR CON CARGAS PERPENDICULARES.

Consideremos en adelante, que los esfuerzos normales en las secciones paralelas al plano medio son considerablemente pequeños en comparación con los esfuerzos originados por la flexión, es decir, que no existe presión alguna entre las capas de la placa. Con esto pasamos a determinar los esfuerzos en las placas circulares.

Supongamos una placa de espesor constante h , solicitada por fuerzas situadas simétricamente con respecto al eje Z de la placa (ver figura 4.30a). Las deformaciones, desplazamientos y esfuerzos que aparecen en la placa serán también simétricos respecto al eje Z .

La deflexión de la placa se designa por w y el ángulo de giro de la normal, por ϑ (figura 4.30b). Estas magnitudes son funciones únicamente del radio r y están relacionadas entre sí por la relación

$$\vartheta = -\frac{dw}{dr} \quad (4.84)$$

El signo negativo se elige de acuerdo al esquema de la deflexión dado en la figura; por lo que no tiene especial importancia por depender solamente de la dirección en que se miden las deflexiones. Cuando disminuye la deflexión w , el ángulo ϑ aumenta,

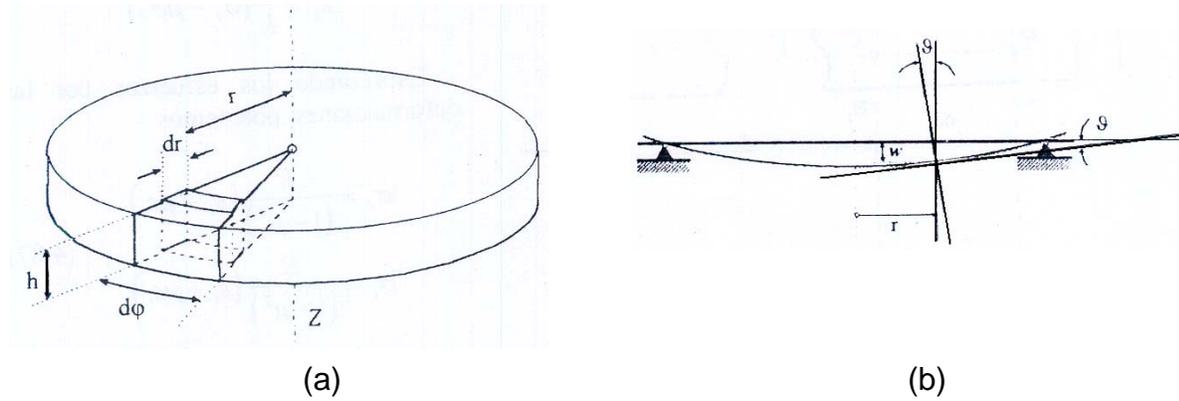


FIG.4.30.-PLACA CIRCULAR CON CARGAS SIMÉTRICAS.

En la figura 4.31 está representada una sección axial de la placa. Los puntos situados sobre la normal A_1B_1 , después de la flexión de la placa, forman la normal $A_1'B_1'$ girada un ángulo θ , La normal A_2B_2 girará un ángulo $\theta + d\theta$.

El segmento CD situado a la distancia z del plano medio, y orientado radialmente, recibe el alargamiento siguiente

$$z(\theta + d\theta) - z\theta = z d\theta$$

El alargamiento unitario será

$$\varepsilon_r = z \frac{d\theta}{dr} \quad (4.85)$$

El alargamiento unitario en el punto C en la dirección perpendicular al plano del dibujo se puede obtener, comparando las longitudes de las circunferencias correspondientes, antes y después de la deformación. Antes de la deformación de la placa, la longitud de la circunferencia que pasa por el punto C era $2\pi r$, mientras que después de la deformación, será $2\pi (r + z\theta)$, Por lo tanto, el alargamiento unitario circunferencial será,

$$\varepsilon_t = z \frac{\theta}{r} \quad (4.86)$$

Separamos, mediante dos secciones axiales que forman un ángulo $d\langle \rangle$ y dos superficies cilíndricas de radios r y $r + dr$ (figura 4,28a) el prima elemental de la placa ilustrado en la figura 4.30(a). Como en las secciones paralelas al plano no existen esfuerzos normales, los alargamientos y los esfuerzos estarán unidos por la ley de Hooke en la forma siguiente,

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r)$$

Expresando los esfuerzos por las deformaciones, obtenemos

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) \quad (4.87)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r)$$

o de acuerdo a las ecs.(4.85) y (4.86)

$$\sigma_r = \frac{Ez}{(1-\mu^2)}\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right) \quad (4.88)$$

$$\sigma_t = \frac{Ez}{(1-\mu^2)}\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right)$$

Sobre las caras del prisma (figura 4.32a) pueden actuar no solamente esfuerzos normales, sino también esfuerzos tangenciales. De la condición de simetría se deduce fácilmente que los esfuerzos tangenciales pueden aparecer solamente en los planos perpendiculares al radio r y que se orientan verticalmente.

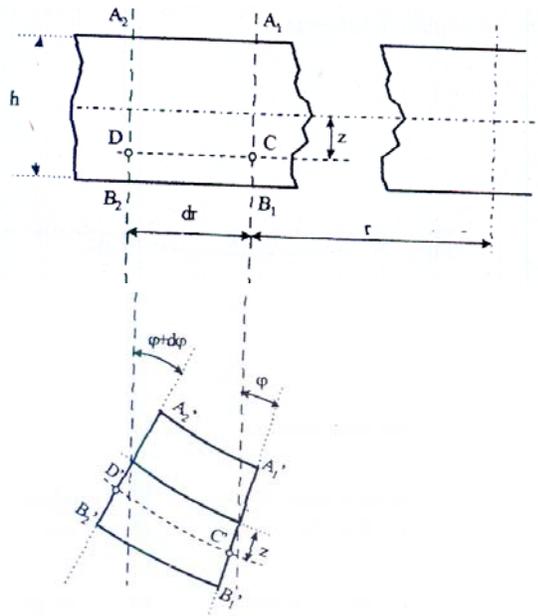


FIG.4.31.-SECCION AXIAL DE LA PLACA CIRCULAR.

4.3.2.-Análisis y simplificación de placas.

Veamos ahora las condiciones de equilibrio del prisma separado. Para ello, hallamos primero las resultantes de las fuerzas que actúan sobre las caras del elemento. Los esfuerzos tangenciales en la cara $A_1B_1 A_1B_1$ (figura 4.32a) originan una fuerza resultante cortante dirigida según el eje Z. La intensidad de esta fuerza, es decir, la magnitud de la fuerza que se refiere a la unidad de longitud del arco $r d\varphi$ se designa por Q kgf/cm. La fuerza cortante en la cara $A_1B_1 A_1B_1$ será $Q r d\varphi$ y la fuerza cortante en la cara $A_2B_2 A_2B_2$, $(Q+dQ)(r+dr) d\varphi$ (ver figura 4.32b).

Como los esfuerzos en las capas superiores e inferiores son iguales, pero de signo opuesto [ec.(4.88)], serán nulas las fuerzas normales sobre las caras del elemento. Los esfuerzos normales σ_r y σ_t que actúan sobre las caras correspondientes se reducen a momentos resultantes en los planos verticales. La intensidad de los momentos sobre las caras $A_1B_1 A_1B_1$ y $A_1B_1 A_2B_2$, es decir, las magnitudes de los momentos referidos a la unidad de longitud de la sección se designan por M_r y M_t kgf cm/cm respectivamente, Las magnitudes de estos momentos se denominarán simplemente momentos y Q , fuerza cortante (para mayor comodidad).

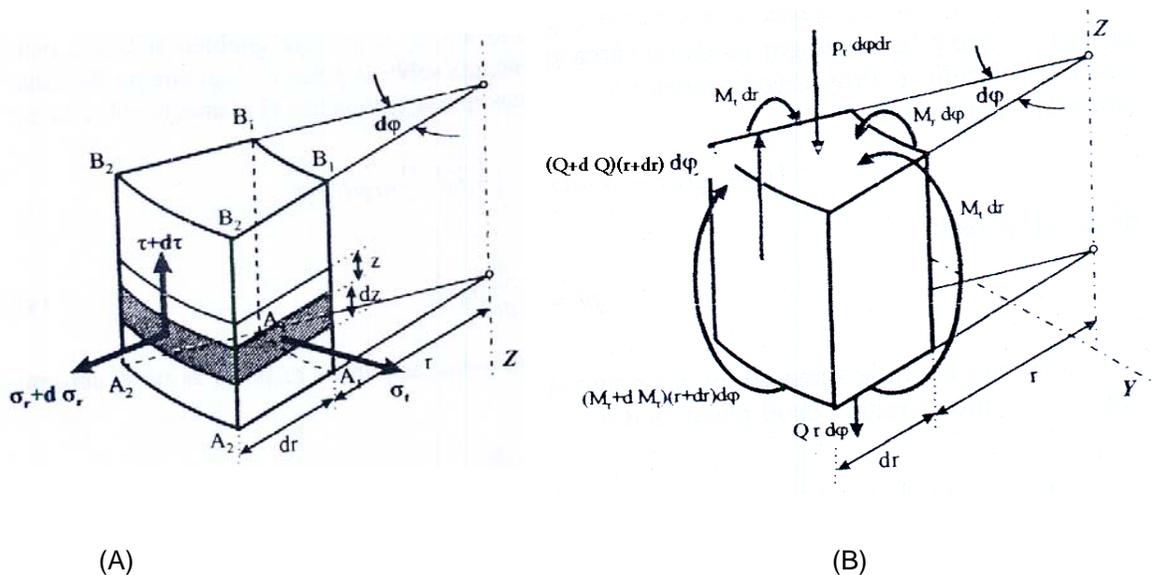


FIG.4.32.-SECCION DE LA PLACA PARA ANÁLISIS.

Conociendo los esfuerzos σ_r y σ_t determinamos los momentos resultantes sobre las caras como sigue,

$$M_r r d\varphi = r d\varphi \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z dz \quad , \quad M_t dr = r dr \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t z dz$$

De acuerdo a la ec.(4.88) obtendremos,

$$M_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \quad , \quad M_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \quad ,$$

se deduce,

$$M_r = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right)$$

$$M_t = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right)$$

La magnitud $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ se denomina rigidez de la placa a la flexión.

Entre las fuerzas aplicadas al elemento (figura 4.32b) se incluye también la fuerza exterior $p r d\vartheta$ siendo p la fuerza por unidad de área aplicada sobre la placa (kgf/cm²) que puede variar en función del radio r . Proyectando todas las fuerzas que actúan sobre el elemento sobre el eje de simetría obtendremos,

$$(Q + dQ)(r + dr)d\varphi - Qrd\varphi - prd\varphi dr = 0$$

de donde se halla,

$$pr = \frac{d}{dr}[Qr] \quad (4.90)$$

Planteamos ahora la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al eje Y, tangente al arco del círculo de radio r en el plano medio.

$$(M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - M_r r d\varphi - pr dr d\varphi \frac{dr}{2} - M_t dr d\varphi + (Q + dQ)(r + dr)d\varphi dr = 0$$

o, prescindiendo de las magnitudes de orden superior y pasando al límite,

$$M_t - \frac{d}{dr}[M_r r] = Qr \quad (4.91)$$

Las ecuaciones de equilibrio restantes se satisfacen automáticamente debido a las condiciones de simetría. Introduciendo M_r y M_t de las ecs.(4.89) en la ec.(4.91) y suponiendo que la rigidez D de la placa es constante resulta,

$$r \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r} = -\frac{Qr}{D}$$

de donde se halla,

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\vartheta r) \right] = -\frac{Q}{D} \quad (4.92)$$

Esta última transformación se comprueba fácilmente derivando la última expresión. Después de una doble integración de la ec.(4.92) hallamos

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr} \int \left[r \int Q dr \right] dr \quad (4.93)$$

siendo C_1 y C_2 , las constantes arbitrarias de integración que se deben determinar de las condiciones de borde, en cada caso concreto. La fuerza cortante Q se puede obtener de la ecuación de equilibrio (4.90), pero esto resulta mucho más cómodo, analizando las condiciones de equilibrio de la parte central de la placa que se obtiene la sección cilíndrica de radio r.

Una vez obtenida la función ϑ [ec.(4.93)], hallamos, de la ec.(4.89), los momentos flectores M_r y M_t y de la ec.(4.84), la flecha w. Conociendo los momentos flectores es fácil obtener los esfuerzos. Comprobando la ec(4.88) con la ec.(4.89) se demuestra que

Los momentos flectores M_x y M_y máximos, referidos a la unidad de longitud de la sección ocurren en este mismo punto y son,

$$M_{x\max} = \beta pa^2 \quad ; \quad M_{y\max} = \gamma pa^2$$

Los coeficientes α , β y γ para algunos valores de b/a y para $\mu = 0.3$ están dados en la tabla 4.4.

TABLA 4.4.-VALORES PARA α , β y γ , TENIENDO $\mu=0$; DE PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA.

A/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	3	4	5	∞
α	0.0433	0.0616	0.0770	0.0906	0.1017	0.1106	0.1336	0.1400	0.1416	0.1422
β	0.0479	0.0626	0.0753	0.0862	0.0948	0.1017	0.1189	0.1235	0.1246	0.1250
γ	0.0479	0.0501	0.0506	0.0493	0.0479	0.0464	0.0404	0.0384	0.0375	0.0375

En el caso de la placa empotrada en los cuatro lados, la flecha máxima ocurrirá, como en el caso anterior, en el centro de la placa,

$$w_{\max} = \alpha_1 \frac{pa^4}{Eh^3}$$

El momento flector máximo surge en los centros de los lados mayores, es decir, cuando $x = \pm a/2$ e $y=0$,

$$M_{x\max} = \beta_1 pa^2$$

Los coeficientes α y β para ciertos valores de b/a y para $\mu = 0.3$ están dados en la tabla 4.5.

TABLA 4.5.- VALORES PARA α Y β , TENIENDO $\mu = 0.3$; DE PLACA RECTANGULAR EMPOTRADA.

a/b	1	2	3	4	5	w
α	0.0138	0.0199	0.0240	0.0264	0.0277	0.0284
β	0.0513	0.0665	0.0757	0.0817	0.0829	0.0838

CAPITULO 5.-ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS.

Introducción.

Cuando una estructura tiene una carga que varía con el tiempo, también la correspondiente respuesta variará con el tiempo. En el caso de estructuras sometidas a cargas estáticas, la respuesta fue estática y proporcional a la rigidez de la estructura, y a la variación en las cargas aun para cargas aplicadas que varían con respecto al tiempo, aproximadamente será de frecuencia cercana a una tercera parte de la frecuencia natural de la estructura. La respuesta dada para la solución estática será proporcional a la carga instantánea, en este caso necesitamos solo desarrollar un análisis estático, para el grupo más alto de las condiciones de carga esperadas o la combinación máxima de la carga en varios puntos con tiempo.

Por consiguiente, cuando la carga varía más rápidamente, debemos emplear diferentes técnicas de solución; que incluye los efectos inerciales debido a efectos materiales de la masa y amortiguamiento. Hay varios procedimientos diferentes involucrados, en hacer análisis dinámicos, que son dependientes por encima del tipo de solución que el usuario está buscando.

Presentaremos los tipos de análisis dinámicos que pueden ser hechos y los factores involucrados en desarrollar un análisis del elemento finito, para el problema dinámico la formulación del elemento estructural y la clasificación de la estructura que hemos ya cubierto permanecen válidos para el caso dinámico.

5.1-. Tipos de análisis.

En el caso más general, el problema a resolver es la ecuación [5.1], este da la respuesta dependiente del tiempo de cada punto nodal en la estructura; por la incorporación de fuerzas inerciales equivalentes y fuerzas de amortiguamiento en la ecuación. Las fuerzas inerciales están dadas por el producto de masas tiempo y aceleraciones, y las fuerzas de amortiguamiento están dadas por el producto del coeficiente de amortiguamiento con el tiempo y la velocidad. La ecuación general es

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{F\} \quad (5.1)$$

donde, en forma matricial $[M]$ representa la matriz masa estructural, $\{\ddot{D}\}$ es el vector aceleración en el nodo, $[C]$ es la matriz amortiguamiento estructural, $\{\dot{D}\}$ es el vector velocidad en el nodo, $[K]$ es la matriz rigidez estructural, $\{D\}$ es

el vector desplazamiento en el nodo ,y $\{F\}$ es el vector carga nodal variante en el tiempo aplicado.

Esta ecuación es el grupo de ecuaciones diferenciales de movimiento en forma matricial ,para la respuesta dinámica de algunas estructuras modeladas con un numero finito de grados de libertad. Mientras la formulación del elemento finito para la respuesta geométrica estática sigue una aproximación integral , mejor a la aproximación de la ecuación diferencial de formulaciones en el tiempo a la aproximación numérica para la forma diferencial .La solución de esta ecuación produce la respuesta variante al tiempo de la estructura ,para algún grupo especificado de cargas de entrada .

Por lo tanto la solución de este grupo de ecuaciones toma muchos incrementos de tiempo involucrados, quizás miles de soluciones estáticas ,para generar la historia completa del tiempo en la respuesta .Esto obviamente vendrá a ser impractico, para algunos ciclos significantes de tiempo largo .Típicamente en aplicaciones ingeniérriles ,estamos mas interesados en la respuesta de la estructura en específicos tipos de entradas y el carácter vibratorio en la estructura de estas relaciones de entradas.

5.1.1.Análisis del eigenvalor.

El tipo mas común de análisis dinámico para estructuras, es la frecuencia natural o análisis del eigenvalor.En muchas aplicaciones de ingeniería, estamos interesados en los valores de las frecuencias naturales de vibración para una estructura.EL correspondiente modo de forma de vibración para la estructura deformada en la respuesta para entradas a estas frecuencias naturales serán también de interés.Estas serán las vibraciones libres no amortiguados de la estructura causada por una perturbación de la posición de equilibrio estático .

El problema del eigenvalor [5.1] derivado de la ecuación [5.1] posterior se hará cero en los coeficientes de amortiguamiento y fuerzas aplicadas.La vibración en la estructura, empieza por una condición inicial de desplazamiento, velocidad o aceleración .Posteriormente suponemos que el movimiento de cada nodo del modelo del elemento finito es una función sinusoidal de la amplitud de desplazamiento máximo ,para cada modo.Subtituyendo para la componente de aceleración como sigue .Definimos el vector desplazamiento en la ecuación [5.2] donde, $\{A\}$ es el vector de desplazamiento máximo

$$\{D\} = \{A\} \text{sen}(\omega t) \quad (5.2)$$

para cada componente de desplazamiento en el nodo y en el modelo del elemento finito, ω es la frecuencia circular de vibración .El vector de velocidad es entonces

$$\{\dot{D}\} = \{A\} \omega \cos(\omega t) \quad (5.3)$$

y la aceleración es

$$\left\{ \ddot{D} \right\} = -\{A\} \omega^2 \text{sen}(\omega t) \quad (5.4)$$

sustituyendo estos en la ecuación general ,produce la ecuación eigenvalor

$$([K] - \lambda[M])\{A\} = \{0\} \quad (5.5)$$

Donde el eigenvalor λ , es igual a ω^2 , y $\{A\}$ es el eigenvector del desplazamiento nodal máximo asociado con cada valor específico de λ , comúnmente llamado el modo de forma.

Existirán los mismos números de eigenvalores independientes, como el total de grados de libertad en el modelo del elemento finito .Cada uno de los eigenvalores tienen un eigenvector independiente o modo de forma .Puesto que los eigenvectores no serán vectores nulos ,la ecuación por resolver para los eigenvalores serán

$$[K] - \lambda[M] = \{0\} \quad (5.6)$$

Después de encontrar los eigenvalores y frecuencias naturales en la estructura ,encontramos el correspondiente modo de forma por la sustitución en la ecuación (5.5).El vector modo de forma, es un grupo de desplazamientos nodales relativos, usualmente normalizados con respecto al componente de desplazamiento máximo en el vector .Las condiciones de entrada que inician la vibración controlan las actuales amplitudes de vibración en algún problema dado.

Así que la solución total resulta en una frecuencia natural para cada DOF en el modelo del elemento finito .Por lo consiguiente ,usualmente necesitamos de unos cuantos de los engenvalores menores del modelo dado .El caso, en alguna aproximación del elemento finito de la estructura ,los eigenvalores y eigenvectores mayores serán inexactos .

Teóricamente la solución para la ecuación del eigenvalor implica que si deformamos alguna estructura en su primer modo de forma ,por ejemplo ,cuando lo liberamos ,este podrá continuar vibrando en ese modo de forma indefinidamente .Prácticamente ,por lo mismo, existirá siempre algún amortiguamiento ,en algún sistema mecánico y por lo mismo las vibraciones usualmente decaerán .

5 .1.2 .-análisis de respuesta a la frecuencia.

Otro tipo de análisis dinámicos de interés, es la respuesta al estado estable de la estructura para una fuerza armónica de entrada para una frecuencia dada .Esta respuesta puede ser necesaria para un rango de frecuencias. En el análisis de la respuesta a la frecuencia la respuesta del

desplazamiento de la estructura para una entrada armónica es también armónica y ocurre a la misma frecuencia [5,2]. Define las fuerzas de entrada por la ecuación

$$\{F\} = \{F_o\} e^{i\omega t} \quad (5.7)$$

Donde, cada componente de fuerza en el nodo está dado por esta amplitud máxima, $\{F_o\}$, con una vibración armónica a la frecuencia, ω en el dominio complejo. El correspondiente desplazamiento en el nodo tomará la forma

$$\{D\} = \{D_o\} e^{i\omega t} \quad (5.8)$$

Entonces la velocidad es

$$\{\dot{D}\} = \{D_o\} i\omega e^{i\omega t} \quad (5.9)$$

y la aceleración es

$$\{\ddot{D}\} = -\{D_o\} \omega^2 e^{i\omega t} \quad (5.10)$$

La ecuación gobernante para este análisis a la respuesta a la frecuencia puede ser derivado por la sustitución de estas cantidades dentro de la ecuación 5.1 esta acción resulta en

$$(-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K])\{D_o\} = \{F_o\} \quad (5.11)$$

donde la función para las amplitudes del desplazamiento $\{D_o\}$, es claramente una función de frecuencia amortiguamiento y fuerzas amplitudes $\{F_o\}$. Resolviendo esta ecuación sobre un rango de entradas a la frecuencia discreta determinada la respuesta de frecuencia a la vibración de la estructura.

Las amplitudes de desplazamiento en este caso define la forma estructural deformada este no es generalmente de la misma forma como el modo de forma de la estructura a una frecuencia natural a menos que la frecuencia de entrada ocurra o conocida con una frecuencia natural mas estructura son ligeramente amortiguadamente y para esto debemos despreciar el amortiguamiento en esta ecuación entonces podemos computarizar la respuesta para todos los valores de frecuencia excepto para esta en las cuales iguales a la frecuencia natural en una frecuencia de entrada igual a una frecuencia natural produce una respuesta de desplazamiento infinito cuando este no este amortiguado, y el algoritmo de solución numérico fallara. Este no es un serio problema, porque podemos calcular la respuesta cerca de la frecuencia natural, y la respuesta exacta sobre la frecuencia natural es

altamente dependiente de la cantidad de amortiguamiento presente de cualquier forma. Determinando la cantidad de amortiguamiento es un proceso muy dificultoso para la respuesta calculada que no será muy confiable.

5.1.3.-Análisis de la respuesta transitoria .

Si la función de carga de entrada no es armónica pero es una función dependiente del tiempo arbitrario, entonces debemos realizar un análisis de respuesta dinámica, hay dos aproximaciones generales para resolver el problema de respuesta dinámica transitoria [5.1]. Uno de estos es la integración directa del sistema de ecuaciones después de aproximarlos por una diferencia finita o método del elemento finito en la dimensión del tiempo para las componentes de velocidad, aceleración en cada intervalo. Este puede llegar a ser una tarea de computarización larga para problemas de medida significativas.

La segunda aproximación llamada superposición modal ayuda en menos parte a este problema de computarización. Las bases de esta aproximación es una superposición para la superposición de los modos de forma correspondientes a la frecuencia natural inferior adecuadamente representa la respuesta dinámica de la estructura. La respuesta completa es encontrada por la suma total de frecuencias correctas de los modos de forma de las frecuencias bajas. Matemáticamente estas cantidades para una transformación de las ecuaciones de coordenada de desplazamiento en nodos para un grupo de coordenadas modales. Los cambios de transformación del grupo de sistema de ecuaciones consisten de una ecuación para cada grado de libertad en el modelo para un grupo de ecuaciones modales involucrados en el número seleccionado de dos modos de forma este resultado en muchas menos ecuaciones. Este también es una aproximación de la respuesta estructural total, pero en más casos de la respuesta de vibración estructura este tiene que mostrarse para ser suficientemente exacto.

Ambos métodos tienen varios diferentes algoritmos para ver en la solución. En algunos tipos de análisis podemos ver que la complejidad del problema en encontrar la respuesta dinámica de la estructura es mucho más grande que para la respuesta estática. Estas complejidades de el problema en encontrar la respuesta dinámica de la estructura es mucho más grande que para la respuesta estática. Estas complejidades se traducen en grandes dificultades en lograr una solución dinámica confiable.

Parte de esta dificultad con análisis dinámico es que las estructuras que tienen problemas de vibración serán usualmente delgadas, y tenemos que modelar entonces con elementos placas o cascarones. Estos elementos conocidos por tener serias desventajas en análisis estático.

5.2.-Ecuaciones dinámicas de movimiento.

En problemas dinámicos los desplazamientos ,velocidades ,deformaciones ,esfuerzos y cargas son todos dependientes del tiempo .El procedimiento involucrado en la derivación de las ecuaciones del elemento finito de un problema dinámico puede ser establecido por los siguientes pasos:

PASO 1.-Idealicé el cuerpo en elementos finitos E.

PASO 2.-Suponga el modelo del desplazamiento del elemento e como

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = [N(x, y, z)] \vec{Q}^{(e)}(t) \quad (5.1)$$

Donde \vec{U} es el vector de desplazamiento , $[N]$ es la matriz de la función de forma y $\vec{Q}^{(e)}$ es el vector de desplazamiento nodal ,el cual se supone ser función del tiempo t.

PASO 3.-Derive los elementos matrices característicos(rigidez y masa) y vectores característicos(cargas).

Las deformaciones pueden ser expresadas como

$$\vec{\varepsilon} = [B] \vec{Q}^{(e)} \quad (5.2)$$

y los esfuerzos como

$$\vec{\sigma} = [D] \vec{\varepsilon} = [D][B] \vec{Q}^{(e)} \quad (5.3)$$

Diferenciando la ec.(5.1) con respecto al tiempo , el campo de velocidad puede ser obtenido como

$$\dot{\vec{U}}(x, y, z, t) = [N(x, y, z)] \dot{\vec{Q}}^{(e)}(t) \quad (5.4)$$

Donde $\dot{\vec{Q}}^{(e)}(t)$ es el vector de las velocidades nodales .Para derivar las ecuaciones de movimiento de una estructura ,podemos usar otras ecuaciones Lagrangianas o principios de Hamilton[5.1] .Las ecuaciones de Lagrange serán dadas por

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial \dot{Q}} \right\} = \{0\} \quad (5.5)$$

Donde

$$L = T - \pi_p \quad (5.6)$$

es llamada la función Lagrangiana ,T es la energía cinética, π_p es la energía potencial ,R es la función de disipación ,Q es el desplazamiento nodal y \dot{Q} es la velocidad nodal.Las energías cinéticas y potenciales de un elemento “e” pueden ser expresados como

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} V^{(e)} \iiint \rho \dot{U}^T \dot{U} dV \quad (5.7)$$

$$\pi_p^{(e)} = \frac{1}{2} V^{(e)} \iiint \epsilon^T \sigma dV - S_1^{(e)} \int \dot{U}^T \phi dS_1 - V^{(e)} \int \dot{U}^T \phi dV \quad (5.8)$$

Donde $V^{(e)}$ es el volumen , ρ es la densidad y \dot{U} es el vector de velocidades del elemento “e” .Pero suponiendo la existencia de fuerzas disipativas proporcionales a las velocidades relativas, la función de disipación del elemento e puede ser expresado como

$$R^{(e)} = \frac{1}{2} V^{(e)} \iiint \mu \dot{U}^T \dot{U} dV \quad (5.9)$$

Donde μ puede ser llamado el coeficiente de amortiguamiento .En las ecuaciones (5.7) a (5.9) la integral de volumen ha sido tomada sobre el volumen del elemento y en la ec.(5.8),la integral de superficie ha sido tomada sobre la porción de la superficie del elemento ,en el cual la fuerza distribuida sobre la superficie será preescrita.

Usando las eq.(6.1) a (6.3),las expresiones T , π_p y R pueden ser reescritas como:

$$T = \sum_{e=1}^E T^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E V^{(e)} \iiint \sigma [N]^T [N] dV \right] \dot{Q} \quad (5.10)$$

$$\pi_p = \sum_{e=1}^E \pi_p^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E V^{(e)} \iiint [B]^T [D] [B] dV \right] \dot{Q} - \dot{Q}^T \left(\sum_{e=1}^E S_1^{(e)} \int \dot{U}^T \phi dS_1 + V^{(e)} \int \dot{U}^T \phi dV \right) - \dot{Q}^T P(t) \quad (5.11)$$

$$R = \sum_{e=1}^E R^{(e)} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\dot{Q}}^T \left[\sum_{e=1}^E V^{(e)} \underset{\sim}{\int} \sigma^{[N]T} [N]_{dv} \underset{\sim}{\dot{Q}} \right] \quad (5.12)$$

Donde $\underset{\sim}{\dot{Q}}$ es el vector desplazamiento nodal global, $\underset{\sim}{\dot{Q}}$ es el vector nodal global y $\underset{\sim}{P}$ es el vector de fuerzas nodales concentradas de la estructura o cuerpo. Por definición, las matrices involucran las integrales como

$$[M^{(e)}] = \text{elemento matriz} = V^{(e)} \underset{\sim}{\int} \sigma^{[N]T} [N]_{dv} \quad (5.13)$$

$$[K^{(e)}] = \text{elemento matriz rigidez} = V^{(e)} \underset{\sim}{\int} [B]^T [D] [B]_{dv} \quad (5.14)$$

$$[C^{(e)}] = \text{elemento matriz amortiguamiento} = V^{(e)} \underset{\sim}{\int} \sigma^{[N]T} [N]_{dv} \quad (5.15)$$

$\underset{\sim}{P}_s^{(e)}$ = vector del elemento de fuerzas nodal producida por

$$\text{fuerzas superficiales} = S_1^{(e)} \underset{\sim}{\int} [N]^T \bar{\phi} \bullet dS_1 \quad (5.16)$$

y

$\underset{\sim}{P}_b^{(e)}$ = vector del elemento de fuerzas nodales producida por

$$\text{fuerzas del cuerpo} = V^{(e)} \underset{\sim}{\int} [N]^T \bar{\phi} \bullet dV \quad (5.17)$$

PASO 4.-Ensamble de las matrices elementos y vectores y la derivación de todo el sistema de ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones (5.10) a (5.12) pueden ser reescritas como

$$T = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\dot{Q}}^T [M] \underset{\sim}{\dot{Q}} \quad (5.18)$$

$$\pi_p = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\dot{Q}}^T [k] \underset{\sim}{\dot{Q}} - \underset{\sim}{\dot{Q}}^T \underset{\sim}{P} \quad (5.19)$$

$$R = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\dot{Q}}^T [C] \underset{\sim}{\dot{Q}} \quad (5.20)$$

Donde

$$[M] = \text{Matriz masa maestra de la estructura} = \sum_{e=1}^E [M^{(e)}]$$

$$[K] = \text{Matriz rigidez maestra de la estructura} = \sum_{e=1}^E [K^{(e)}]$$

$$[C] = \text{Matriz de amortiguamiento maestro de la estructura} = \sum_{e=1}^E [C^{(e)}]$$

$$\vec{P}(t) = \text{Vector de carga total} = \sum_{e=1}^E [P_s^{(e)}(t) + P_b^{(e)}(t)] + \vec{P}_c(t)$$

Por la sustitución de las ecuaciones (5.18) a (5.20) dentro la ecuación (5.5), obtenemos las ecuaciones dinámicas de movimiento deseada de la estructura o cuerpo como

$$[M] \ddot{\vec{Q}}(t) + C \dot{\vec{Q}}(t) + [K] \vec{Q}(t) = \vec{P}(t) \quad (5.21)$$

Donde $\ddot{\vec{Q}}$ es el vector de aceleraciones nodales en el sistema global. Si el amortiguamiento es despreciable, las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas como

$$[M] \ddot{\vec{Q}} + [K] \vec{Q} = \vec{P} \quad (5.22)$$

PASO 5. Resolver las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones (5.21) o (5.22) pueden ser resueltas por sustitución de las técnicas, para problemas de propagación. Una vez que la historia del tiempo en los desplazamientos nodales, $\vec{Q}(t)$, es conocida, la historia del tiempo de esfuerzos y deformaciones en los elementos pueden ser encontradas como en el caso de problemas estáticos. Los elementos finitos especiales en espacio-tiempo también han sido desarrollados para la solución de problemas de mecánica de sólidos y mecánica estructural y dinámicas [5.2,5.3].

5.2.1-Matrices masa consistente y concentrada.

La ecuación (5.13) para la matriz masa fue primero derivado por Archer [5.4] y es llamada la matriz masa "consistente" del elemento. Esta se conoce como "consistente" porque el mismo modelo de desplazamiento el cual es

usado para derivar la matriz elemento rigidez es usado para derivar la matriz masa .Hay que observar que varios problemas dinámicos son y fueron resueltos con formas simples de matrices masas .Las formas mas simple de matriz masa que puede ser usado es la obtenida por la del punto masa colocado (concentrada) m_i en los puntos nodales i en las direcciones de los grados de libertad del desplazamiento supuesto .Las masas concentradas refieren a la inercia rotacional y traslacional del elemento ,y será calculado por la suposición del material dentro del lado del desplazamiento particular como en el cuerpo rígido, mientras que en el resto del elemento no participa .Esta suposición excluye los acoplamientos dinámicos que existen entre los desplazamientos del elemento y por lo tanto la matriz masa resultante es puramente diagonal y es llamada la matriz masa “concentrada”.Como un ejemplo ,considere el elemento barra articulada .Para un modelo de desplazamiento lineal ,tenemos:

$$u(x) = [N] \vec{q}^{(e)} \quad (5.23)$$

donde

$$[N] = \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(\frac{x}{l} \right) \right] \quad (5.24)$$

$$\vec{q}^{(e)} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u(x=0) \\ u(x=l) \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (5.25)$$

y

u = Desplazamiento axial paralelo al eje x .

La matriz masa consistente del elemento esta dada por

$$[m^{(e)}] = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Donde A es el área de la sección transversal y l es la longitud del elemento .Por lo que las matrices masas consistentes ,en genera ,será totalmente populares en el otro manejo ,la matriz masa concentrada del elemento puede ser obtenido (por la subdivisión de la masa total en el elemento igualmente entre los dos nodos) como

$$[m^{(e)}] = \frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

la matriz masa concentrada se aproximara casi a los resultados exactos, si varios y pequeños objetos son colocados en los nodos de una estructura de peso ligero. Las matrices masas consistentes serán exactas si la actual forma deformada (bajo condiciones dinámicas) esta contenida en los desplazamientos de las funciones de forma $[N]$. Puesto que la forma deformada bajo condiciones dinámicas no es conocida frecuentemente la distribución del desplazamiento estático a asimismo es usado para $[N]$. Por lo que la distribución de masa resultante será aproximada.

Por lo tanto, la exactitud esta generalmente adecuado en mas propósitos prácticos. Dado que las matrices concentradas serán diagonales, el ensamble sobre todas las matrices masas consistentes de la estructura requiere menos espacio de almacenamiento, que la matriz masa consistente.

5.2.2.-Matrices masas consistentes en el sistema coordinado global.

Para reducir el error computacional, generalmente las matrices masas consistentes de elementos no ensamblados serán derivados en un sistema de coordenadas local deseable y entonces transformado en el sistema global seleccionado por la estructura ensamblada. Si $[m^{(e)}]$, $\vec{q}^{(e)}$ y $\dot{\vec{q}}^{(e)}$ describe la matriz masa, el vector desplazamiento nodal y el vector velocidad nodal en el sistema local coordinado, la energía cinética asociada con el movimiento del elemento puede ser expresado como

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^{(e)T} [m^{(e)}] \dot{\vec{q}}^{(e)} \quad (5.28)$$

Si el elemento desplazamiento nodal y velocidad nodal son denotados como $\vec{Q}^{(e)}$ y $\dot{\vec{Q}}^{(e)}$ en el sistema global, tenemos la relación de transformación:

$$\vec{q}^{(e)} = [\lambda] \vec{Q}^{(e)} \quad (5.29)$$

y

$$\dot{\vec{q}}^{(e)} = [\lambda] \dot{\vec{Q}}^{(e)} \quad (5.30)$$

Por la sustitución de las ecuaciones (5.30) en la ecuación (5.28), obtenemos

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^{(e)T} [\lambda]^T [m^{(e)}] [\lambda] \dot{\vec{Q}}^{(e)} \quad (5.31)$$

Nombrando la matriz masa del elemento en el sistema coordenado global como $[M^{(e)}]$, la energía cinética asociada con el movimiento del elemento puede ser expresada como

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{(e)T} [M^{(e)}] \dot{\mathbf{Q}}^{(e)} \quad (5.32)$$

ya que la energía cinética es una cantidad escalar, este deberá ser independiente del sistema coordenado. Por la sustitución de las ecuaciones (5.31) y (5.32), obtenemos la matriz masa consistente del elemento en el sistema global como

$$[M^{(e)}] = [\lambda]^T [m^{(e)}] [\lambda] \quad (5.33)$$

En esto puede ser notado que la relación de transformación es similar a la primera usada en el caso del elemento matriz rigidez

5.2.3.-Matriz masa consistente de un elemento eslabón articulado (barra espaciada).

Como en el caso de la derivación de la matriz rigidez, un modelo de desplazamiento lineal es supuesto como (Figura 5.1)

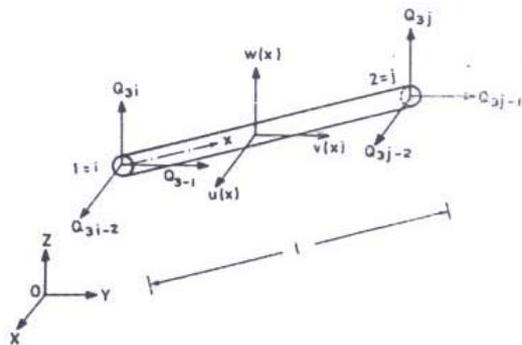


Figura 5.1.-Un elemento barra en el espacio.

$$\vec{U}(x) = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = [N] \dot{\mathbf{Q}}^{(e)} \quad (5.34)$$

Donde

$$[N] = \begin{bmatrix} (1-\frac{x}{l}) & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{x}{l}) & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\frac{x}{l}) & 0 & 0 & \frac{x}{l} \end{bmatrix}$$

y

$$\vec{Q}^{(e)} = \begin{Bmatrix} Q_{3i-2} \\ Q_{3i-1} \\ Q_{3i} \\ Q_{3j-2} \\ Q_{3j-1} \\ Q_{3j} \end{Bmatrix}$$

Donde Q_{3i-2}, Q_{3i-1} y Q_{3i} serán las componentes de desplazamiento del nodo i (nodo local 1) y Q_{3j-2}, Q_{3j-1} y Q_{3j} serán las componentes de desplazamiento del nodo j (nodo local 2) en el sistema global XYZ. Si la densidad (ρ) y el área de la sección transversal (A) de la barra son constantes, la matriz masa consistente del elemento puede ser obtenida como

$$[m^{(e)}] = [M^{(e)}] = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

5.2.4.-Matriz masa consistente de un elemento armadura.

Un elemento armadura espaciado deberá tener doce grados de libertad, seis de flexión y seis rotacionales, como se muestra en la figura 5.2 (a). Tomando el origen del sistema coordenado local al nodo 1, a lo largo de la longitud del eje x del elemento y a lo largo del eje z los ejes principales del elemento de la sección transversal, el modelo del desplazamiento puede ser expresado como

Donde ρ es la densidad ,A es el área de sección transversal ,l es la longitud y J es el momento polar de inercia del elemento .Para el elemento armadura planar mostrado en la figura (5.3) ,solamente los grados de libertad axial y en flexión , el plano existirán y la matriz consistente será

$$[m^{(e)}] = \rho A l \begin{bmatrix} 1/3 & & & & & & \\ 0 & 13/35 & & & & & \\ 0 & 11l/210 & l^2/105 & & & & \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & & & \\ 0 & 9/70 & 13l/420 & 0 & 13/35 & & \\ 0 & -13l/420 & -l^2/140 & 0 & -11l/210 & l^2/105 & \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Para un elemento viga flexión ,los grados de libertad de desplazamiento no necesitan ser considerados(figura 5.4) y la matriz masa consistente vendrá a ser

$$[m^{(e)}] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Las matrices transformación necesarias para la derivación de los elementos matrices masas en el sistema coordenado global de estas ,obtenidas por las ecuaciones (5.36),(5.37),(5.38) son obtenidas respectivamente .

Figura 5.2 (a)

Si la sección transversal del elemento armadura (o viga) no es pequeño ,los efectos de inercia rotatoria y deformación cortante vienen a ser importantes en el análisis dinámico .La derivación de las matrices rigidez y elementos masa de vigas ,incluyen los efectos de inercia y deformación cortante .

5.2.5.-Matriz masa consistente de un elemento membrana triangular.

Considerando los nueve grados de libertad del elemento (como se muestra en la figura(5.5),las funciones de forma lineal en términos de las coordenadas local x,y y pueden ser usadas para expresar el campo de desplazamientos como

$$\vec{U}(x) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = [N] \vec{Q}^{(e)} \quad (5.40)$$

Donde

$$[N(x, y)] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

Con $N_1(x,y)$, $N_2(x,y)$ y $N_3(x,y)$ están dadas por la ecuación

$$\vec{Q}^{(e)} = \{Q_{3i-2} \quad Q_{3i-1} \quad Q_{3i} \quad Q_{3j-2} \quad Q_{3j-1} \quad Q_{3j} \quad Q_{3k-2} \quad Q_{3k-1} \quad Q_{3k}\}^{(T)}$$

La matriz masa consistente del elemento (aplicable en algún sistema coordinado) puede ser obtenido como

$$[m^{(e)}] = V_{(e)}^{[N]^T [N] \rho A t} \quad (5.41)$$

la matriz masa puede ser obtenida como

$$[M^{(e)}] = [m^{(e)}] = \frac{\rho A t}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Donde t es el espesor del elemento

5.2.6.-Matriz masa consistente de un elemento flexión triangular.

Para el elemento flexión placa triangular mostrado en la figura 5.6 la matriz rigidez ha sido derivado por la suposición del modelo de desplazamientos:

$$w(x, y) = [\eta] \vec{\alpha} \quad (5.43)$$

el desplazamiento transversal w puede ser expresado como

$$w(x, y) = \left([\eta] \begin{bmatrix} \eta \\ \sim \end{bmatrix}^{-1} \right)^{\rightarrow(e)} q \quad (5.44)$$

Debido a las rotaciones de las normales a la línea media del plano alrededor del eje x y y , algún punto localizado a una distancia de z de la línea media al plano tendrá componentes de desplazamiento en el plano, obtenidas por

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

De este los tres desplazamientos traslacionales pueden ser expresadas, usando las ecuaciones (5.44) y (5.45) como

$$\vec{U}(x) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial [\eta]}{\partial x} \\ -z \frac{\partial [\eta]}{\partial y} \\ [\eta] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \sim \end{bmatrix}^{-1 \rightarrow(e)} q = [N_1] \begin{bmatrix} \eta \\ \sim \end{bmatrix}^{-1 \rightarrow(e)} q \equiv [N] \vec{q} \quad (5.46)$$

Donde

$$[N_1] = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 & -2xz & -yz & 0 & -3x^2z & -z(y^2 + 2xy) & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 & -xz & -2yz & 0 & -z(2xy + x^2) & -3y^2z \\ 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & (x^2y + xy^2) & y^3 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

y

$$[N] = [N_1] \begin{bmatrix} \eta \\ \sim \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.48)$$

La matriz masa consistente del elemento puede ser evaluado como

$$\begin{aligned}
 [m^{(e)}] &= V^{(e)} \int \rho [N]^T [N] dV \\
 &= V^{(e)} \int \rho \left(\begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-1} \right)^T [N_1]^T [N_1] \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-1} dV
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

La ecuación (5.49) denota la matriz masa obtenida por la consideración de ambas inercias traslacionales (debido a ω) y rotacional (debido a u y v) del elemento .Si la inercia rotacional es despreciada ,como es hecho en muchos casos computacionales prácticos ,la matriz masa consistente puede ser obtenido por el establecimiento simple $[N_1] \equiv [\eta]$ en la ecuación (5.48).En este caso obtenemos

$$\begin{aligned}
 [m^{(e)}] &= V^{(e)} \int \rho \left(\begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-1} \right)^T [\eta]^T [\eta] \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-1} dV \\
 &= \rho t \left(\begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-1} \right)^T \left(\iint_A [N]^T [N] dx dy \right) \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}
 &\rho t \left(\begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-1} \right)^T \iint_A \begin{bmatrix}
 1 & & & & & & & & \\
 x & x^2 & & & & & & & \\
 y & xy & y^2 & & & & & & \\
 x^2 & x^3 & x^2 y & x^4 & & & & & \\
 xy & x^2 y & xy^2 & x^3 y & x^2 y^2 & & & & \\
 y^2 & xy^2 & y^3 & x^2 y^2 & xy^3 & y^4 & & & \\
 x^3 & x^4 & x^3 y & x^5 & x^4 y & x^3 y^2 & x^6 & & \\
 (x^2 + xy^2) & (x^2 y^2 + x^3 y) & (x^3 y^2 + x^4 y) & (x^3 y^2 + x^4 y) & (x^2 y^3 + x^3 y^2) & (xy^4 + x^2 y^3) & (x^4 y^2 + x^5 y) & (xy^2 + x^2 y)^2 & \\
 y^3 & xy^3 & y^4 & x^2 y^3 & xy^4 & y^5 & x^2 y^3 & (xy^5 + x^3 y^3) & y^6
 \end{bmatrix} \\
 &dx dy \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

Para este, la determinación de la matriz masa $[m^{(e)}]$ involucra la evaluación de integrales de la forma

$$\iint_{area} x^i y^j dx dy \quad , \quad i = 0 \text{ a } 6 \text{ y } j = 0 \text{ a } 6
 \tag{5.51}$$

Note que las potencias mas altas de x y y aparecen en el integrando de las ecuaciones (5.51) seran mas largas que las potencias involucradas en la derivación de la matriz rigidez del mismo elemento .Esta característica es verdadera para todos los elementos finitos.

5.2.7.-Matriz masa consistente de un elemento tetraédrico.

Para el elemento tetraédrico sólido mostrado en la figura 5.37 ,el campo de desplazamiento se dio anteriormente .El elemento matriz masa en el sistema coordenado global puede ser encontrado de la derivación:

$$[M^{(e)}] = V_{(e)} \int_{(e)} \rho [N]^T [N] dV \quad (5.52)$$

Figura .-

Después de obtener las longitudes de las integrales de volumen la matriz masa puede ser obtenida como

$$[M^{(e)}] = \frac{\rho V^{(e)}}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

5.3.-Análisis de vibraciones libres.

Si perturbamos alguna estructura elástica de una manera apropiada inicialmente en un tiempo $t=0$ (por la imposición propiamente seleccionada del desplazamiento inicial y entonces hacer estas restricciones), la estructura puede ser hecha para oscilantes armónicamente. Este movimiento oscilatorio es una propiedad característica de la estructura. Si el amortiguamiento esta presente, las amplitudes de oscilación decaerán progresivamente y si la magnitud de amortiguamiento excede un cierto valor crítico, el carácter oscilatorio del movimiento cesara también. En el otro extremo, si el amortiguamiento esta ausente, el movimiento oscilatorio continuara indefinidamente, con las amplitudes de oscilación dependientes sobre las perturbaciones impuestas inicialmente o desplazamiento. El movimiento oscilatorio ocurrirá en ciertas frecuencias conocidas como frecuencias naturales o valores característicos y estos siguen patrones de deformación definidos como modos de forma o modos característicos. El estudio de tales vibraciones libres (libres porque las vibraciones estructurales con fuerzas no externas después de $t=0$) es muy importante encontrar la respuesta dinámica de las estructuras elásticas.

Pero suponiendo el vector fuerza externo \vec{p} sea cero y el desplazamiento sea armónico como

$$\vec{Q} = \vec{Q} \cdot e^{i\omega t} \quad (5.54)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones de vibraciones libres

$$[[k] - \omega^2 [M]] \vec{Q} = \vec{0} \quad (5.55)$$

Donde \vec{Q} representa las amplitudes del desplazamiento \vec{Q} (llamado el modo forma o eigenvector) y ω denota la frecuencia natural de vibración. La ecuación (5.55) es llamada un problema algebraico de eigenvalor algebraico "lineal". Ya que ni $[k]$ ni $[M]$ es una función de la frecuencia circular ω , y este tendrá soluciones diferentes de cero para \vec{Q} previendo que la determinante de la matriz de coeficientes es

$[[k] - \omega^2 [M]]$ es cero,

$$[[k] - \omega^2 [M]] = 0 \quad (5.56)$$

Varios métodos para encontrar las frecuencias naturales y modos de forma fueron discutidos. En general todos los eigenvalores de la ecuación (5.56) son diferentes y por lo tanto la estructura tiene n frecuencias naturales diferentes. Solamente para estas frecuencias naturales, una solución diferente

de cero puede ser obtenida para \vec{Q} y este depende de la distribución de masas y rigidez en la estructura ecuación (5.55). Designaremos los eigenvectores (modos de forma) correspondientes a la j th frecuencia natural (ω_j) como \vec{Q}_j .

En esto se supone que los grados de libertad del cuerpo rígido fueron eliminados. Si los grados de libertad del cuerpo rígido no son eliminados en la derivación de las matrices $[k]$ y $[M]$, algunas de las frecuencias naturales ω podrían ser cero. En tal caso, para una estructura tridimensional general, este será de seis grados de libertad del cuerpo rígido y por lo mismo seis frecuencias cero. Esto podrá ser fácilmente visto porque $\omega=0$ es una solución. Para $\omega=0$, $\vec{Q}=\vec{Q}$ =vector constante en la ecuación (5.54)

y por consiguiente $\ddot{\vec{Q}}=0$. De tal forma obtenemos, que

$$[k] \vec{Q}_{\text{cuerporigido}} = \vec{0} \quad (5.57)$$

Lo cual es obviamente satisfactorio debido al hecho que los desplazamientos del cuerpo rígido solo no producen alguna fuerza restauradora elástica en la estructura. Los grados de libertad del cuerpo rígido en análisis dinámico pueden ser eliminados por la eliminación de los renglones y columnas correspondientes a estos grados de libertad de las matrices $[k]$ y $[M]$, y por la eliminación de los correspondientes elementos de los vectores desplazamientos (\vec{Q}) y carga (\vec{P}).

5.4.-Condensación del problema eigenvalor (economizador eigenvalor).

Un método de eliminación de los grados de libertad no deseables en análisis estático (conocido como procedimiento de condensación estático). Ya se estableció anteriormente un problema similar a esta [5.7, 5.8] disponible en el análisis dinámico. Para algún número dado de grados de libertad r , la determinación de eigenvalores y eigenvectores es más costosa que una solución estática. Esto es deseable, por lo tanto, para limitar los grados de libertad del ya existente "sistema discretizado" como para hacer el eigen una solución más económica. Por ejemplo, es una práctica común el considerar solamente los grados de libertad, representando deflexiones normales en las mitades del plano del ala en el análisis convencional del análisis dinámico de estructuras de aviación (aunque las deflexiones en el plano medio serán incluidos en el análisis estático). El método general de condensación presentado en esta sección no está limitada al análisis de eigenvalores o incluso al análisis dinámico general; esto es esencialmente una técnica para reducir el tamaño de un sistema de ecuaciones surgida en algún análisis estructural de elementos finitos. En esta sección, presentamos el método con

referencia a un problema de eigenvalor. Este método de condensación es también conocido como “condensación dinámica” o “eigenvalores economizadores”.

Permitamos que las ecuaciones estructurales(estático) pueden ser escritas como:

$$[k] \vec{Q} = \vec{P} \quad (5.58)$$

Donde \vec{Q} y \vec{P} serán, respectivamente, los vectores desplazamientos y cargas del problema estático. Después fraccionamos la ecuación (5.58) como

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{Q}_1 \\ \vec{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \end{Bmatrix}, \quad R=P+Q \quad (5.59)$$

Hagamos las fuerzas \vec{P}_2 igual a cero. Aquí podemos desear el retener los grados de libertad asociado con el vector \vec{Q}_1 en el problema del eigenvalor(estamos interesados en la eliminación de los grados de libertad al cual no se aplican fuerzas como en se le es aplicado al problema estático) La ecuación (5.59) puede describirse como

$$[K_{11}] \vec{Q}_1 + [K_{12}] \vec{Q}_2 = \vec{P}_1 \quad (5.60)$$

y

$$[K_{21}] \vec{Q}_1 + [K_{22}] \vec{Q}_2 = \vec{P}_2 = \vec{0} \quad (5.61)$$

resolviendo la ecuación (5.60), obtenemos

$$\vec{Q}_2 = -[K_{22}]^{-1} [K_{21}] \vec{Q}_1 \quad (5.62)$$

Las ecuaciones (5.60) y (5.62) producen

$$[K_r] \vec{Q}_1 = \vec{P}_1 \quad (5.63)$$

Donde la matriz de rigidez reducida, $[K_r]$, es obtenida por

$$[K_r] = [K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{21}] \quad (5.64)$$

De la cantidad anterior se realiza una transformación de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} \vec{Q}_1 \\ \vec{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{22}]^{-1}[K_{21}] \end{bmatrix} \vec{Q}_1$$

$$\vec{Q} = [T] \vec{Q}_1 \quad (5.65)$$

Donde la matriz transformación esta dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{22}]^{-1}[K_{21}] \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

La energía cinética y potencial de la estructura puede ser escrita como (suponiendo que no hay fuerzas externas)

$$\pi_p = \frac{1}{2} \vec{Q}^T [K] \vec{Q} \quad (5.67)$$

y

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T [M] \dot{\vec{Q}} \quad (5.68)$$

Con la transformación mostrada en la ecuación (5.65), π_p y T pueden describirse como

$$\pi_p = \frac{1}{2} \vec{Q}_1^T [T]^T [K] [T] \vec{Q}_1 = \frac{1}{2} \vec{Q}_1^T [K_r] \vec{Q}_1 \quad (5.69)$$

y

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}_1^T [T]^T [M] [T] \dot{\vec{Q}}_1 = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}_1^T [M_r] \dot{\vec{Q}}_1 \quad (5.70)$$

Donde $[K_r]$ y $[M_r]$ serán las matrices masas y rigidez reducida dada por

$$[K_r] = [T]^T [K] [T] \quad (5.71)$$

y

$$[M_r] = [T]^T [M] [T] \quad (5.72)$$

Si la matriz masa original $[M]$ se particióna como

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

entonces la matriz masa reducida esta dada

$$\begin{aligned} [M_r] = & [M_{11}] - [M_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[M_{21}] \\ & + [K_{12}][K_{22}]^{-1}[M_{22}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \end{aligned} \quad (5.74)$$

Para reducir el problema de eigenvalor (de orden p , en vez de $p+q$) puede ahora establecerse como

$$[[k_r] - \omega^2 [M_r]] \vec{Q}_1 = \vec{0} = 0 \quad (5.75)$$

Donde $[K_r]$ y $[M_r]$ están dadas por las ecuaciones (5.64) y (5.74), respectivamente. La eliminación de los grados de libertad, \vec{Q}_2 , son conocidos como “esclavos” y los grados de libertad retenidos, \vec{Q}_1 , son llamados “maestros”, llevando las cargas aplicadas, mientras los grados de libertad \vec{Q}_2 (esclavos) simplemente serán extensas, como este dictado por la geometría y las propiedades elásticas de la estructura. Después de resolver el problema de reducir el eigenvalor establecido en la ecuación (5.75), el modo completo \vec{Q} puede haber sido recuperado del modo reducido correspondiente \vec{Q}_1 . Por esto, podemos descartar y usar la relación de transformación mostrada en la ecuación (5.65). Por lo mismo, este será un defecto de la transformación surgida del hecho que los grados de libertad \vec{Q}_2 (esclavos) no llevan cargas en el análisis estático que genera la matriz $[T]$. Actualmente, las cargas de inercia podrán ser aplicadas a los grados de libertad \vec{Q}_2 mientras recobramos \vec{Q} . Para esto, tenemos que fraccionar el problema del eigenvalor original como

$$\left[\begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \vec{Q}_1 \\ \vec{Q}_2 \end{array} \right\} = \vec{0} \quad (5.76)$$

Resolviendo la segunda parte de la ecuación anterior, para \vec{Q}_2 . Entonces el modo completo puede ser obtenido como

$$\vec{Q} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{Q}_1 \\ \vec{Q}_2 \end{array} \right\}.$$

La ecuación (5.75) da frecuencias naturales p de la estructura. Las frecuencias elevadas no están representadas en todo, ya que los grados de libertad que han sido descartados. Posteriormente, el uso de la ecuación (5.75) da valores mas altos para las bajas frecuencias de la estructura, por las restricciones impuestas. El éxito de este “procedimiento de condensación” depende del grado de libertad maestro que se empezó, de tal manera que sea capaz de representar adecuadamente los modos de vibración de la estructura actual.

5.5-Calculo de la respuesta dinámica usando el método del elemento finito.

Cuando una estructura esta sujeta a cargas dinámicas(dependientes del tiempo),los desplazamientos ,deformaciones y esfuerzos correspondientes variarán con el tiempo .Las cargas dinámicas surgirán de una variedad de razones similares deseando explotar cargas o ráfagas debidas a turbulencias atmosféricas y fuerzas de impacto en los frenos de aterrizaje de aeroplanos ,cargas de viento en alas y terremotos en las edificaciones ,etc .El calculo de la respuesta dinámica incluye la determinación de desplazamientos y esfuerzos como función del tiempo en cada punto de la estructura o cuerpo .Las ecuaciones de movimiento para un cuerpo elásticamente amortiguado han sido obtenidos anteriormente usando un procedimiento del elemento finito .Estas ecuaciones de movimiento pueden ser resueltos por otros métodos para resolver problemas de propagación.

La aproximación de integración directa involucra la integración numérica de las ecuaciones de movimiento por el avance en unas series de intervalos de tiempos Δt evaluando aceleraciones ,velocidades y desplazamientos en cada intervalo .Las bases del método de superposición es que la matriz modal(la matriz formada por el uso de modos en el sistema) pueden ser usadas la diagonalización de las masas ,matrices amortiguamiento y rigidez y las ecuaciones de movimiento desacopladas .La solución de estas ecuaciones independientes ,tiene una correspondencia a cada grado de libertad ,puede ser encontrada por técnicas estándares y finalmente la solución del problema original puede ser encontrado por la superposición de las soluciones individuales .En esta parte ,consideramos los métodos de modos normal(o modo de superposición o análisis modal)métodos para encontrar la respuesta dinámica de un cuerpo elástico con algunos detalles.

5.5.1.-Las ecuaciones desacopladas de movimiento en un sistema no amortiguado.

Las ecuaciones de movimiento en un sistema elástico no amortiguado están dadas por las ecuaciones anteriores.

$$[M]\ddot{\vec{Q}}+[K]\dot{\vec{Q}}=\vec{P} \quad (5.77)$$

Donde \vec{Q} y \vec{P} son los desplazamientos dependientes del tiempo y vectores carga respectivamente .La ecuación (5.77) representa un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas donde n es el numero de grados de libertad de la estructura .Presentaremos un método para desacoplar estas ecuaciones.

Consideremos las frecuencias naturales del problema de eigenvalor no amortiguado.

$$-\omega^2 [M] \underline{\vec{Q}} + [K] \underline{\vec{Q}} = \vec{0} \quad (5.78)$$

están dadas por $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ con los correspondientes eigenvectores dados por $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n$, respectivamente. Por el arreglo de los eigenvectores (modos normal) como columnas, una matriz $[\underline{Q}]$, conocida como matriz modal, puede estar definida como

$$[\underline{Q}] = \begin{bmatrix} \vec{Q}_1 & \vec{Q}_2 & \dots & \vec{Q}_n \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Ya que los eigenvectores son $[M]$ -ortogonales, tenemos

$$\vec{Q}_i^T [M] \vec{Q}_j = \begin{cases} 0 / \text{para } (i \neq j) \\ 1 / \text{para } (i = j) \end{cases} \quad (5.80)$$

Las ecuaciones (5.79 y (5.80) producen

$$[\underline{Q}]^T [M] [\underline{Q}] = [I] \quad (5.81)$$

Donde $[I]$ es la matriz identidad de orden n , y el problema de eigenvector, ecuación (5.78) puede quedar como

$$[\omega^2] [M] [\underline{Q}] = [K] [\underline{Q}] \quad (5.82)$$

Donde

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

por la premultiplicación de la ecuación (5.82) por $[\underline{Q}]^T$, obtenemos

$$[\omega^2] [\underline{Q}]^T [M] [\underline{Q}] = [\underline{Q}]^T [K] [\underline{Q}] \quad (5.82)$$

lo cual, visto de la ecuación (5.81), se transformara

$$[\omega^2] = [\underline{Q}]^T [K] [\underline{Q}] \quad (5.85)$$

ya que algún vector n -dimensional puede ser expresado por la superposición de los eigenvectores uno puede ser expresado $\vec{Q}(t)$ como

$$\vec{Q}(t) = [\underline{Q}] \vec{\eta}(t) \quad (5.86)$$

Donde $\vec{\eta}(t)$ es un vector columna consistente de un grupo de coordenadas generalizada dependiente del tiempo $\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)$. Por la sustitución de la ecuación (5.86) en (5.77), obtenemos,...

$$[M][\underline{Q}] \ddot{\vec{\eta}} + [K][\underline{Q}] \vec{\eta} = \vec{P} \quad (5.87)$$

premultiplicando ambos lados de la ecuación (5.87) por $[\underline{Q}]^T$ y escribimos

$$[\underline{Q}]^T [M][\underline{Q}] \ddot{\vec{\eta}} + [\underline{Q}]^T [K][\underline{Q}] \vec{\eta} = [\underline{Q}]^T \vec{P} \quad (5.88)$$

Los modos normales se satisfacen por las ecuaciones ((5.81) y (5.85), por lo tanto la ecuación (5.88) se reduce a

$$\ddot{\vec{\eta}} + [\omega^2] \vec{\eta} = \vec{N} \quad (5.89)$$

Donde

$$\vec{N} = [\underline{Q}]^T \vec{P}(t) \quad (5.90)$$

La ecuación (5.89) representa un grupo de n ecuaciones diferenciales de segundo orden desacopladas del tipo

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = N_i(t) \quad , \quad i=1,2,\dots, n \quad (5.91)$$

La razón para desacoplar las ecuaciones de movimiento original de la ecuación (5.77) en la forma de la ecuación (5.91) es que la solución de la n ecuaciones diferenciales desacopladas es considerablemente mas fácil que la solución de n ecuaciones diferenciales acopladas.

5.5.2.-Ecuaciones del movimiento desacopladas de un sistema amortiguado.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema elásticamente amortiguada están dada por

$$[M]\ddot{\vec{Q}}+[C]\dot{\vec{Q}}+[K]\vec{Q}=\vec{P} \quad (5.92)$$

Generalmente es poco conocido acerca de la evaluación de los coeficientes de amortiguamiento que son los elementos de la matriz de amortiguamiento $[C]$. Por lo tanto, ya que el efecto de amortiguamiento es pequeño comparado a estas inercias y rigidezes, la matriz de amortiguamiento $[C]$ esta representada por las expresiones simplificadas. Una forma simple de expresar la matriz de amortiguamiento involucra la representación de $[C]$ como una combinación lineal de matrices masa y rigidez en la forma

$$[C]=a[M]+b[K] \quad (5.93)$$

Donde las constantes a y b deberán ser escogidas para satisfacer el problema a manejar. En este caso, las ecuaciones de movimiento pueden ser desacopladas por la misma transformación de la ecuación (5.86) como para el sistema no amortiguado. De esto, el uso de la ecuación (5.86) y (5.93) en la ecuación (5.92) nos proporciona

$$[\underline{Q}]^T [M] [\underline{Q}] \ddot{\vec{\eta}} + (a [\underline{Q}]^T [M] [\underline{Q}] + b [\underline{Q}]^T [K] [\underline{Q}]) \dot{\vec{\eta}} = [\underline{Q}]^T \vec{P} \quad (5.94)$$

La ecuación (5.92) puede ser expresada como

$$\ddot{\vec{\eta}} + (a[I] + b[\omega^2]) \dot{\vec{\eta}} + [\omega^2] \vec{\eta} = \vec{N} \quad (5.95)$$

Donde \vec{N} esta obtenida por la ecuación (5.88) y puede escribirse en forma escalar como

$$\ddot{\eta}_i(t) + (a + b\omega_i^2) \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = N_i(t) \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.96)$$

La cantidad $a + b\omega_i^2$ es conocida como la constante de amortiguamiento modal en el 1er modo normal y se define como la cantidad ξ_i conocida como razón de amortiguamiento modal en el 1er modo normal

$$\xi_i = \frac{a + b\omega_i^2}{2\omega_i} \quad (5.97)$$

Las ecuaciones de movimiento en términos de las coordenadas generalizadas quedara

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = N_i(t) \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.98)$$

La ecuación (5.98) visualiza un grupo de n ecuaciones diferenciales de segundo orden desacopladas para el sistema elástico amortiguado.

5.6.-Optimización del elemento finito en análisis dinámico estructural

El modelo del elemento finito deberá ser compatible con el tipo de análisis a ser hecho el primer paso es el escoger el elemento correcto a usar para el modelo dinámico y este no es siempre el mismo elemento que podemos usarse para el modelado estático por ejemplo si el caso estático es esfuerzo plano en 2 a con un pequeño espesor entonces la frecuencia natural inferior de vibración y el correspondiente modo de forma puede involucrar un movimiento fuera del plano a si para un modelo analizamos en esfuerzo plano en 2d para la carga estática podemos necesitar el modelar con un elemento placa o cascaron para un análisis de eigenvalor como determinar todas las frecuencias naturales y modos de forma podemos saber que al escoger el elemento podemos eliminar parte de la solución si un elemento es fuerza plano 2^a es escogido para un modelo dinámico entonces encontraremos solamente las frecuencias naturales y modos de forma involucrando movimientos en el plano sin un elemento placa teniendo no nombre en el plano DOF es escogido para un modelo entonces solamente logramos modos flexión de vibración ya que la formulación del elemento excluye algún movimiento en el plano si usamos un elemento viga en 2d para un modelo entonces obtendremos solamente las frecuencias naturales y modos de forma situado en el plano en 2 d por lo mismo las frecuencias naturales y modos de forma involucran movimiento fuera del plano poder quizás ser bajos y excitado primero en servicio actual de la estructura cigua para el modelo del elemento finito podrá no tener otra existencia predicada .

El requerimiento de malla para el caso dinámico también de pendiendo del tipo de problema y la salida de importancia si estamos buscando para solamente las frecuencias naturales entonces podemos usar una malla relativamente brusca mientras el modo de forma exacto necesita una mayor malla retenida para obtener el esfuerzo resultante de los modos de vibración requiere una mayor aun malla retenida para lograr una exactitud razonable también el diseño de la malla proveerá una razonable aproximación de todos los modos de forma inferiores si solamente los primeros pocos frecuencias naturales son importantes entonces una malla relativamente brusca podrá ser satisfactoria mayor malla retenida acompañan la necesidad para mayores frecuencias naturales , utilizando simetrías en modelos dinámicos es un poco difícil los modos de forma a la frecuencias naturales tendrá a desarrollar en ambos simétricas patrones un tisimetricos a lo largo con múltiples periodos subdivisiones de estos patrones entonces no podemos explotar simetrías para reducir el modelo de medida sin deseo potencialmente algunas de las frecuencias naturales de la estructura en el modelo cuando usamos un

modelo simétrico debemos especificar evidadosamente las condiciones fronteras desplazamiento en nodos sobre los planes de simetría para evitar la información por ejemplo modelando una placa circular como se muestra en la figura 5.2 podemos esperar que el modo de forma para la correspondiente frecuencia natural de esta placa pueda excitaren ambos patrones de simetría y antisimetría a si si tomamos la mitad de placa para un modelo entonces aplicamos condiciones de frontera desplazamiento que fuerza la estructura a ser simetría alrededor de esta línea entonces debemos seguir este caso donde restringiremos los nodo en el plano de simetría que solamente permita movimiento un simétrico la solución en este caso provecera todas las frecuencias naturales y modo de forma para los modos antisimetricas la combinación de los dos casos dan el grupo total de frecuencia naturales y modos de forma

FIGURA una placa circular con soporte a través de un diámetro usando una cuarta sección de el plato se requiere correr tres casos estos podrán ser 1. condiciones simétricas a lo largo de ambos extremos radiales 2. la condición simétrica en un extremo y la condición antisimetrica en el otro 3.condiciones antisimetricas en ambos extremos alguna mas reducción simétrica no podrán permitir la determinación de todas las frecuencias naturales y modos de torina de la estructura ya que no podemos usar simétricamente como efectivamente para un modelo dinámico como para modelo estático entonces en general esto ase que la solución dinámica sea mas difícil para obtener exactitud debemos incorporar a la condición fronteras soportada que actualmente que exista en una estructura dentro el modelo ya que las condiciones de restricción influyen fuertemente en la frecuencias naturales y modo de forma por ejemplo una viga de longitud ya podrá tener un grupo de frecuencias naturales si esta es un viga en cartiliver y tendrá un diferente grupo si este es una viga simplemente soportada en un análisis para eigenvlor para frecuencias naturales no existe una distribución de carga aplicada a un análisis de la respuesta a la frecuencia deberá tener las amplitudes de carga y entradas de distribución junto a la frecuencia.

En una respuesta dinámica o análisis histórico del tiempo de cargas entradas por fuerzas ,desplazamientos ,velocidades , o aceleraciones serán una función del tiempo .Muchos programas comerciales están programados en la habilidad para aplicar un existente diseño de espectro de carga tal como para condiciones de simulación de temblores.

5.7.-Los pasos de análisis en dinámica de estructuras.

El analista es responsable de seleccionar el tipo de análisis o ejecutar .En mas casos un análisis del eigenvlor sera hecho primero ,incluso si otro tipo de análisis se hiciera mente .El análisis del eigenvlor provee un valioso entendimiento en el comportamiento esperado de la estructura dinámica .Un análisis del eigenvlor podrá ser hecho por varios algoritmos diferentes [5.1].Por consiguiente ,algún programa dado podrá tener solamente uno o dos opciones del cual el analista puede escoger .En una “condensación estática” o “reducción Guyan” proceso el programa usualmente selecciona automáticamente el DOF maestro analista deberá decidir cuantos maestros escogerá .Este podrá obviamente ser maestro que el numero de eigenvlores que deseamos para determinar con algunos grados de exactitud .Usualmente

cinco tiempos el número de eigenvalores con incrementos grandes factores mostraron convergencia de los números deseados de eigenvalores.

Si el programa no tiene un proceso de condensación, entonces el modelo podrá ser un poco rústico que podría ser necesario para el análisis de esfuerzo para asegurar una razonable exactitud numérica del algoritmo numérico en valor.

Para otro tipo de análisis la malla podrá ser capaz de representar exactamente las frecuencias de vibración de arriba para un valioso de los últimos tres tiempos altos para la frecuencia superior contenida de la carga aplicada dinámica [5.1].

Hay muchos diferentes algoritmos numéricos para el análisis de los eigenvalores y también muchas diferentes aproximaciones numéricas para el cálculo de la respuesta transitoria. Por lo mismo, el método usado, para algún programa dado, es usualmente (pero no siempre) adecuadamente referenciado para que el usuario explore este gran detalle. Esto es importante que el usuario tenga algún razonable entendimiento de la aproximación a usar y cual dificultad potencial pueda ser tan buena como que exactitud potencial pueda ser, más allá que el usuario deberá experimentar dentro los parámetros que en el usuario seleccione para algún algoritmo dado para obtener los resultados deseados del curso experiencia con soluciones anteriores y correlación o verificación de estas soluciones con otro analíticamente o datos experimentales es invaluable.

5.8.-Proceso de salida y evaluación de resultados.

Los resultados de un análisis del eigenvalor tendrá las frecuencias naturales requeridas de cualquier especificación de el número de frecuencias inferiores por encontrar o especificación de un rango de frecuencia en el cual para encontrar todas las frecuencias naturales. Los grupos de nodos desplazamiento para cada modo describe los correspondientes modos de forma. Normalizando de los modos de forma pueden ser hechos por el establecimiento de las valores de amplitudes máximas en cada modo por unidad y escalado de todos los otros valores o menos que uno.

La actual respuesta de amplitud desplazamiento de una estructura excitada en una amplitud específica para los desplazamientos en un análisis de eigenvalor es solamente relativa a otros valores excepto en cada caso simple podemos ver los modos de forma bien de la examinación o impresión de valor por consiguiente los modos de forma impresos de un análisis por eigenvalor desplazados los modos de forma el analista puede especificar en el análisis por pasos el número de frecuencias naturales y los correspondientes modos de forma a encontrar el archivo de datos gráficos de los modos de forma consistirán en un modo de desplazamiento para cada una de las frecuencias naturales así hay es un modo de formado impreso por cada modo de forma de vemos evaluar cada modo de formado entonces para esta habilidad para describir los modos exactos de la malla que estamos usando si un análisis de la respuesta dinámica un modo superposición nodal es hecho

seguido al análisis eigenvalor debemos verificar la convergencia de la solución por determinar si hemos usado un adecuado número de eigenvalores exactos para un análisis de la respuesta dinámica en una superposición nodal examinemos el contenido de las frecuencias de la carga a determinar la frecuencia superior de alguna carga de entrada significativa entonces para un exacto análisis de respuesta dinámica por superposición modal usamos una malla la cual representamos exactamente todos los modos de arriba a trabos de una frecuencia alrededor de tiempo la frecuencia superior de carga de entrada esta malla requiere también implica al análisis de la respuesta dinámica usando integración directa ya que necesitamos para representar la respuesta calculada del modelo de esta frecuencias de exactitud de carga de entrada la continua remitiendo de la malla hasta obtener suficiente exactitud de los importantes eigenvalores la malla s dinámicos serán normalmente cercanos a mallas regulares examine los modos de formados de los modos interés especialmente estos a altas frecuencias muy cuidadosamente para verificar una representación ligera o el campo de desplazamiento refinado la malla en estas áreas donde los campos de desplazamiento extraviando mas rápidamente y por lo mismo necesita la malla refinada para hacer un suave acondicionamiento contorno de esfuerzo para cada modo forma de un análisis de eigenvalores también será disponible para mantener en mente que la magnitud será escalada para forma de formando normalizada esta puede hacer los valores extremadamente altos y en algunos casos solamente represento relativos valores porque el actual amplitudes de desplazamiento no será conocido por lo mismo el esfuerzo contorno plateado de un análisis de la respuesta transitoria podrá representar valores actuales si tenemos desplazamientos exactos.

CAPITULO 6.-ANALISIS DINAMICO NO LINEAL DE VIGAS PLACAS Y CASCARONES.

6.1.-INTRODUCCION.

Los elementos cascarones y otros elementos son importantes en el modelado de muchos componentes de ingeniería y estructuras. Los cascarones delgados aparecen en muchos productos. Tales como la lamina de un metal en un automóvil, el fuselaje, las alas y el timón de un aeroplano, las cubiertas de productos tales como cargadores de teléfonos, máquinas de lavado y computadoras. Modelar estos productos con elementos continuos podría requerir de un alto numero de elementos y necesitar costosas computadoras. Modelar una viga con elementos continuos hexaédricos requiere un mínimo de aproximadamente cinco elementos a través del espesor. De esta forma los elementos cascaron de bajo orden planos pueden reemplazar cinco o mas elementos continuos, el cual mejora inmensamente la eficiencia computacional. Además, modelando estructuras delgadas con elementos continuos a menudo nos llevan a altas relaciones de dimensión y nos disminuyen las condiciones de las ecuaciones y la exactitud de la solución. En métodos explícitos, los modelados de elementos continuos de estructuras delgadas serán restringidas a muchos pequeños intervalos de tiempo por requerimientos de estabilidad. Por consiguiente los elementos estructurales serán muy útiles en análisis de ingeniería.

Los elementos estructurales serán clasificados como:

- 1.-Vigas, en el cual el movimiento esta descrito como función de una sola variable independiente.
- 2.-Cascarones, donde el movimiento esta descrito como una función de dos variables.
- 3.-Placas, los cuales serán cascarones planos cargados normalmente a estas superficies.

Las placas son usualmente modeladas por elementos cascaron en softwares computacionales. Dado que son obviamente cascarones planos, por lo que no consideraremos elementos placas separadamente. Las vigas requieren de consideraciones teóricas y proveen de simples modelados para aprender los fundamentos de elementos estructurales, el cual veremos.

Los elementos cascaron pueden ser desarrollados en dos formas:

- 1).-Por el uso de una forma simple de las ecuaciones cascaron clásicas para el balance del momento (o equilibrios).
- 2).-Por el desarrollo de elementos directamente de un elemento continuo, declarando las imposiciones de suposiciones estructurales, esto es llamado la aproximación del continuo basado (CB).

La primera aproximación es muy difícil ,especialmente para cascarones no lineales ,ya que las ecuaciones gobernantes para cascarones no lineales son muy complejas y difíciles para tratarse con esto; será usualmente tratado y formulado en términos de componentes curvilíneos de tensores , y caracterizados en sus variaciones de espesores ,uniones y rigidezes serán difíciles de incorporar .Esto no esta aclarado como cual será la mejor ecuación cascaron no lineal .La aproximación CB(continuo basado) ,en otro uso, es directo ,flexible y aplicable por sus resultados en deformaciones arbitrariamente largas y es extensamente usado en softwares comerciales .De esta forma nos concentraremos en la metodología del CB ,al que se le conoce como aproximación del continuo generado ,preferimos el de continuo basado nombrado por Stanley(1985) ,los cuales se degradan de estos elementos.

La metodología CB no es tan simple ,pues requiere de una aplicación mas intelectual de esta ,para desarrollar elementos cascaron de las teorías clásicas de cascarones .En otras teorías de cascarones y placas ,las ecuaciones de equilibrio y momentos serán desarrolladas por la imposición de suposiciones cinemáticas en el movimiento y de este usando el principio de trabajo virtual ,para derivar las ecuaciones diferenciales parciales .El desarrollo de una forma simple de las ecuaciones de movimiento para el propósito de discretización ,regresa al principio de trabajo virtual .En la aproximación CB ,las suposiciones cinemáticas serán impuestas en las pruebas y funciones tratadas en la forma simple del continuo .Por lo que la metodología de cascarones es una forma directa para obtener las ecuaciones discretas para cascarones y otras estructuras.

En la metodología CB las suposiciones cinemáticas de cascarones serán impuestas por dos aproximaciones:

- 1.-Por el movimiento de un continuo en forma simple, o
- 2.-Por las ecuaciones discretas para continuos.

Nosotros empezaremos con una descripción de vigas en dos dimensiones .El cual producirá la discusión de varias teorías de estructuras y comparadas con la teoría CB .Iniciaremos con una descripción de la implementación de las simplicidad y caracterización acopladas de la aproximación CB ,haciéndola mas clara .Por lo que examinaremos los elementos vigas CB mas empleados pudiendo visualizar sus resultados.

Los elementos cascaron CB serán vistos a continuación .Otra vez empezaremos con la implementación ,ilustrando muchas de las técnicas desarrolladas para elementos continuos aplicados a cascarones .La teoría de cascarones CB desarrollada a continuación será una síntesis ,incorporando un nuevo tratamiento de cambios en el espesor debido a deformaciones largas .Las metodologías para describir largas rotaciones en tres dimensiones serán descritas.

Dos de los atajos de elementos cascaron CB serán descritos ,los cortantes y membranas sujetas. Estas características serán tratadas en el presente de vigas , pero la ventaja obtenida será aplicable a elementos

cascaron. Métodos para abarcar estas dificultades por el significado de asumir campos de deformación, serán tratados y elementos ejemplos los cuales darán cortantes y membranas sujetas.

Concluiremos con una descripción del elemento cascaron de cuatro nodos cuadrilaterales usado en programas explícitamente, a menudo llamados elementos de un punto de cuadratura. Estos elementos son rápidos y robustos adaptados para cualquier análisis a larga escala. Varios elementos de este genero serán revisados y comparados.

6.2.-TEORIAS DE VIGAS.

6.2.1.-SUPOSICIONES DE TEORIAS DE VIGAS.

La característica que une y distingue estructuras del continuo, es que las suposiciones sean hechas alrededor del movimiento y el estado de esfuerzos en el elemento. Estas suposiciones están basadas en hipótesis verificadas por observaciones experimentales. Las suposiciones en el movimiento de cascarones delgados son llamadas suposiciones cinemáticas, mientras las suposiciones en el campo de esfuerzos serán llamadas suposiciones cinéticas.

La mayor suposición cinemática trata el movimiento de las normales a la línea central (también llamada línea de referencia) de la viga. En teoría estructural lineal, la línea central es usualmente escogida a ser el lugar geométrico de los centroides, de las secciones transversales de la viga. Por consiguiente, la posición de una línea de referencia no está afectada en un elemento CB: alguna línea cual corresponda aproximadamente a las formas de la viga puede ser escogida como la línea de referencia. La posición de la línea de referencia afecta solamente de los momentos resultantes; los esfuerzos y la respuesta total no está afectada. Nosotros usamos los términos intercambibilidad de la línea de referencia y línea central, notando que planamente cuando el termino línea central es usado, la ubicación precisa de esta línea relativa a la sección transversal de la viga es irrelevante en un elemento CB. El plano definido por las normales a la línea central es llamado el plano normal. La figura 9.1 muestra la línea de referencia y el plano normal para una viga.

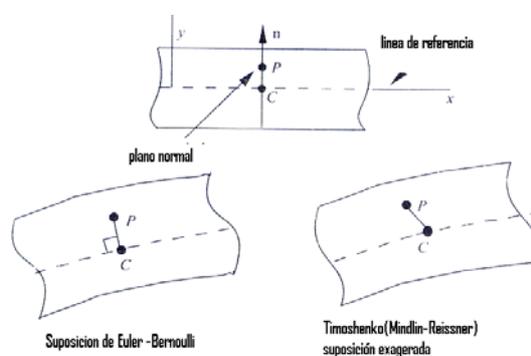


Figura 6.1.-Movimiento en una viga Euler-Bernoulli y una viga cortante

(Timoshenko);en la viga de Euler-Bernoulli el plano normal permanece plano y normal ,mientras en la viga cortante el plano normal permanece plano pero no normal.

Dos tipos de teorías de vigas son extensamente usadas :la teoría de viga Euler-Bernoulli y la teoría de viga Timoshenko .Las suposiciones cinemáticas de estas teorías son:

1.-Teoría de viga Euler – Bernoulli :Los planos normales a la línea central serán supuestos a permanecer planos y normales, también es conocida como teoría de viga ingenieril y la correspondiente teoría de cascarones es llamada la teoría de cascarones de Kirchhoff-Love.

2.-Teoría de vigas de Timoshenko :Los planos normales a la línea central serán supuestas a permanecer planas ,pero no necesariamente normales; es también llamada teoría de viga cortante ,y la correspondiente teoría de cascarones es llamada la teoría de cascarones de Mindlin-Reissner.

Las vigas Euler-Bernoulli ,como veremos , no admite algún cortante transversal ,mientras que las vigas gobernadas por la segunda suposición admite cortante transversal .Los movimientos de una viga Euler-Bernoulli ,serán un subconjunto de los movimientos permitidos para la teoría de viga cortante.

Para el propósito de describir las consecuencias de estas suposiciones cinemáticas ,consideremos una viga recta a lo largo del eje x en dos dimensiones como se muestra en la figura 6.1.Permítanos que el eje x coincida con la línea central y el eje y con la normal a la línea central .Consideremos solamente movimientos instantáneos de una configuración actualmente especificadas ,para las siguientes ecuaciones no constituyen una teoría no lineal .Primero expresaremos las suposiciones cinemáticas matemáticamente y desarrollaremos el tensor velocidad de deformación ,la velocidad de deformación tendrá las mismas propiedades como la deformación lineal ya que las ecuaciones para la velocidad de deformación pueden ser obtenidas por el desplazamiento para desplazamientos para velocidades en las relaciones deformaciones-desplazamiento lineales .El objetivo de lo siguiente es ilustrar las secuencias de las suposiciones cinemáticas en el campo de esfuerzos ,nos construye una teoría la cual es una implementación valiosa.

6.2.2.-Teoria Timoshenko(viga cortante).

Primero describiremos la teoría de viga de Timoshenko .La mayor suposición cinemática de esta teoría será que el plano normal permanece plano ,plana y ninguna deformación ocurre dentro este plano .Para esto el plano normal a la línea normal a la línea central rota como cuerpo rígido .Considere el movimiento de un punto P cuya proyección ortogonal en la línea central es el punto C .Si el plano central rota como un cuerpo rígido ,la velocidad del punto c es obtenido por

$$V_{PC} = \omega \times r \quad (6.2.1)$$

Donde ω es la velocidad angular del plano y r es el vector de C a P .En dos dimensiones ,la única componente diferente de cero de la velocidad angular es la componente Z ,pero $\omega = \dot{\theta} e_z = \omega e_z$ donde $\dot{\theta}(x,t)$ es la velocidad angular de la normal .Ya que $r = y e_y$,la velocidad relativa es

$$V_{PC} = \omega \times r = -y \omega e_x \quad (6.2.2)$$

La velocidad de algún punto en la línea central es una función de x y el tiempo t ,para $v^M(X,T) = v_x^M e_x + v_y^M e_y$.La velocidad de algún punto es entonces la suma de la velocidad relativa(6.2.1) la velocidad en la línea central

$$V = v^M + \omega \times r = (v_x^M - y\omega) e_x + v_y^M e_y \quad (6.2.3 a)$$

$$v_x(x, y, t) = v_x^M(x, t) - y\omega(x, t), v_y(x, y, t) = v_y^M(x, t) \quad (6.2.3 b)$$

Aplicando la definición de la velocidad de deformación, $D_{ij} = sym(v_{ij})$ obtenemos

$$D_{xx} = v_{x,x}^M - y\omega, x, \quad D_{yy} = 0, \quad D_{xy} = \frac{1}{2}(v_{y,x}^M - \omega) \quad (6.2.4 a-c)$$

En esto se puede ver que solamente la componente diferente de cero de la velocidad de deformación será la componente axial, D_{xx} ,y la componente cortante , D_{xy} ;posteriormente será llamado el cortante transversal.

Esto puede ser visto inmediatamente en (6.2.4) que las variables dependientes v_i^M y ω necesitan ser solamente c^o para la velocidad de deformación para ser finito por toda la viga .Pues las funciones de forma comunes isoparametricas pueden ser usadas en la construcción del elemento viga cortante .Las teoría para los cuales las interpolaciones necesitan ser solamente c^o serán a menudo llamados teorías estructurales c^o .

6.2.3.-Teoría Euler –Bernoulli :

En la teoría Euler-Bernoulli (viga ingenieril),las suposiciones cinemáticas es que el plano normal permanece plano y normal .Por lo tanto la velocidad angular de la normal esta dada por la velocidad del cambio de la inclinación de la línea central.

$$\omega = v_{y,x}^M \quad (6.2.5)$$

Por la examinación de (6.2.4 c) puede ser visto que la parte superior es equivalente al requerimiento del cortante D_{xy} para desaparecer, lo cual implica que el ángulo entre la normal y la línea central no cambia, la normal queda normal. El desplazamiento axial está entonces, dado por

$$v_x(x, y, t) = v_x^M(x, t) - yv_{y,x}^M(x, t) \quad (6.2.6)$$

La velocidad de deformación en la teoría de vigas Euler-bernoulli está dada por

$$D_{xx} = v_{x,x}^y - yv_{y,xx}^M, \quad D_{yy} = 0, \quad D_{xy} = 0 \quad (6.2.7)$$

Dos características son notables en la en la parte de encima.

- 1.-El cortante transversal desaparece.
- 2.-La segunda derivada de la velocidad aparece en la expresión para la velocidad de deformación, por lo que el campo de velocidad deberá ser C^1 .

Mientras la viga de Timoshenko tiene dos variables dependientes (desconocidas) y solamente una variable dependiente aparece en la viga de Euler-Bernoulli. Reducciones similares toman lugar en las correspondientes teorías de cascarones. Una teoría de cascarones de Kirchhoff-Love tiene solamente tres variables dependientes, mientras que una teoría de Mindlin-Reissner tiene cinco variables dependientes (seis serán a menudo usado en la práctica).

La teoría de viga de Euler-Bernoulli es a menudo llamada una teoría C^1 por la necesidad de la aproximación C^1 . Este requerimiento es la más grande desventaja de Euler-Bernoulli y la teoría de Kirchhoff-Love, ya que una aproximación C^1 es difícil para construir en multidimensiones. Por esta razón, la teoría estructural C^1 será rara vez usada en softwares, excepto para vigas. Los elementos vigas están a menudo basados en la teoría de Euler-Bernoulli porque las interpolaciones C^1 será fácilmente construido en una dimensión.

El cortante transversal es de importancia, solamente en vigas gruesas. Por consiguiente, las vigas de Timoshenko y cascarones de Mindlin-Reissner son frecuentemente empleados, incluso cuando el cortante transversal tiene un pequeño efecto sobre la respuesta. Cuando una viga es delgada, la energía transversal cortante en un modelo de viga Timoshenko, tiende a cero en elementos bien comportados. Para la teoría normalizada, menciona que el transversal cortante desaparece, para vigas delgadas y en los experimentos también observamos, además que las soluciones numéricas lo confirman.

Estas suposiciones están basadas en las evidencias experimentales, las predicciones de esta teoría es concordante con los resultados obtenidos. En los materiales elásticos, las soluciones analíticas de forma cerrada para vigas también validan esta teoría. En materiales no lineales arbitrarios, el error

debido a las suposiciones estructurales no tienen que ser acertadamente analíticos.

6.2.4.-Teoría discreta de Kirchhoff y Mindlin-Reissner.

Una tercera aproximación, el cual es usado solamente en métodos numéricos, es la teoría discreta de Kirchhoff, la suposición de Kirchhoff –Love es solamente aplicada discretamente, en un número finito de puntos, usualmente los puntos cuadraturas. El cortante transversal es entonces desarrollado en otros puntos del elemento, pero es ignorado. Similarmente, los elementos discretos de Mindlin-Reissner serán formulados para imponer estas suposiciones discretamente.

6.3.-VIGA CONTINUO BASADO.

En lo precedente, la formulación del continuo basado (CB) para una viga en dos dimensiones es desarrollada. Las ecuaciones gobernantes para estructuras será idéntica para continuos;

Conservación de masas.
 Conservación del momento lineal y angular.
 Conservación de energía.
 Ecuaciones constitutivas.
 Ecuaciones deformación-desplazamiento.

Para especializar estas ecuaciones a vigas, las suposiciones de la teoría de vigas serán impuestas al movimiento y al estado de esfuerzos.

En esta sección, impondremos las restricciones cinemáticas de la teoría de vigas CB sobre las ecuaciones discretas, el elemento finito continuo será modificado para que se comporte de forma similar en las vigas. Desarrollaremos la viga CB por la imposición de las suposiciones cinemáticas en el movimiento antes desarrollar la forma débil y las ecuaciones discretas. Introduciremos algunos de los conceptos y técnicas las cuales serán usadas en elementos cascaron CB. Los elementos a ser desarrollados serán aplicables en materiales no lineales y geoméricamente no lineales. Una actualización Lagrangiana o una formulación Lagrangiana total puede ser usada, pero enfatizaremos el anterior.

Los elementos Lagrangianos serán casi siempre usados para cascarones y estructuras, porque estos consisten de superficies cerradas separadamente, lo cual será muy complicado para tratar con elementos Eulerianos.

6.3.1.-Definiciones y nomenclatura.

Un elemento viga CB es mostrado en la figura 6.2. El elemento principal es también mostrado, como puede ser visto, el elemento continuo tiene solamente nodos en la parte de arriba y en el inferior, pero el movimiento debe ser lineal

en η . Estos nodos se conocen como nodos esclavos, un cuadrilátero de seis nodos se muestra aquí como el elemento principal, pero algún otro elemento continuo con nodos n_N en la superficie superior e inferior puede ser también usado. La línea de referencia es coincidente con la línea $\eta = 0$.

Las líneas de constante ξ son llamadas fibras. Los vectores unitarios a lo largo de las fibras se llaman directores, denotados por $p(\xi, t)$, estos son también conocidos por seudonormales. Los directores juegan el mismo papel en la teoría CB como normales en la teoría clásica Mindlin-Reissner, por lo tanto el nombre alternativo seudonormales. Las líneas de constante η se conocen como laminas.

Los nodos maestros serán introducidos a las intersecciones de las fibras conectando nodos esclavos con la línea de referencia. Los grados de libertad de estos nodos describen el movimiento de la viga. Las ecuaciones de movimiento serán formuladas en términos de las fuerzas generalizadas y velocidades de los nodos maestros. Cada nodo maestro esta asociado con un par de nodos esclavos a lo largo de una fibra común, ver figura 6.2. Los nodos esclavos serán identificados por otros asteriscos sobrescritos o por sobrescrito de signos maS o menos sobre los números de los nodos; en estos los nodos I^+ y I^- serán los nodos esclavos asociados con el nodo maestro I y extendidos en la superficie superior(+) y inferior (-) de la viga; I^* será el numero de nodos alterno del elemento continuo. Cada tripleta de nodos I^- , I y I^+ , es colineal y extendido sobre la misma fibra.

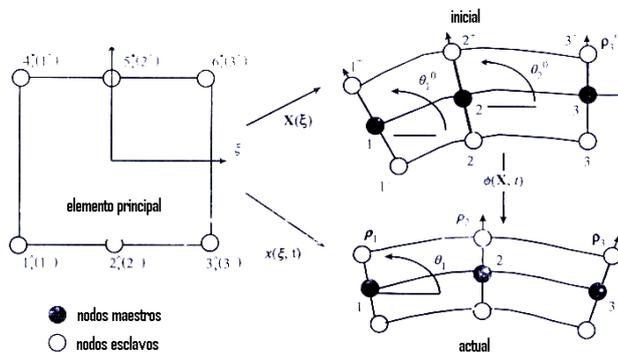


Figura 9.2.-Un elemento viga de tres nodos BC y el elemento continuo principal de seis nodos ;las dos notaciones para nodos esclavos del elemento continuo principal será mostrado.

Las apelaciones “arriba” y “inferior” no se han definido exactamente, otras superficies de la viga puede ser diseñada como la superficie “superior”. Los dos grupos de números de nodos para el elemento continuo esta relacionado por

$$\begin{aligned}
 I^- &= I^* & \text{para} & & I^* \leq n_N \\
 I^+ &= I^* - n_N & \text{para} & & I^* > n_N
 \end{aligned}
 \tag{6.3.1}$$

El nodo maestro asociado con algún nodo esclavo puede ser obtenido por la convención del número de nodos esclavos I^* a los números denotados con nodos sobrescritos + y - usando la regla de arriba ;el valor integrado da entonces el número del nodo maestro.

Para cada punto en la viga ,un sistema coordenado corotacional esta definida con la tangente \hat{e}_x a la lamina; \hat{e}_y es normal a la lamina y esta dirección puede cambiar a través del espesor de la viga ;esto no es necesariamente colineal con el director .Este sistema de coordenadas es también llamado un sistema de coordenada laminar porque uno de los ejes es tangente a la lamina.

6.3.2.-Suposiciones .

Las siguientes suposiciones son hechas sobre el movimiento y el estado de esfuerzos.

Las fibras permanecen rectas.

El esfuerzo transversal normal es despreciable ,al que se le llama condición de esfuerzo plano.

$$\hat{\sigma}_{yy} = 0 \quad (6.3.2)$$

Las fibras serán inextensibles.

La primera suposición se llamara suposición modificada de Mindlin-Reissner .Este difiere de la clásica suposición de Mindlin-Reissner ,el cual requiere que la normal permanezca recta .En el elemento c^o por desarrollar ,las fibras no estarán normales a la línea central ,las restricciones de movimiento de una fibra no es equivalente a la restricción del movimiento a la normal .La teoría resultante es similar a la teoría única del director Cosserat .Usamos la denominación “modificada de Mindlin-Reissner “ para estas suposiciones de ambas vigas y cascarones; en el caso de vigas se le conoce como suposición modificada de Timoshenko.

Si el elemento viga CB esta para aproximar las vigas de Timoshenko ,es necesario que las fibras sean alineadas tan cerradas como sea posible con la normal a la línea central .Esto puede ser obtenido por las especificaciones de las condiciones iniciales de los nodos maestros y que las fibras sean tan cerradas a la normal .De otra manera el comportamiento del elemento viga CB puede desviarse sustancialmente del comportamiento de la teoría de Timoshenko y puede no estar de acuerdo con el comportamiento observado en vigas.

En esto se puede notar , que la inextensibilidad se aplica solamente al movimiento .Contradicciones de inextensibilidad supuestas al plano esfuerzo :Las fibras son usualmente cerradas en la dirección \hat{y} y es si $\hat{\sigma}_{yy} = 0$,la velocidad de deformación \hat{D}_{yy} generalmente no puede desaparecer .Las contradicciones pueden ser recompensadas, pero no usarse en el movimiento a computarizar \hat{D}_{yy} .En vez de esto , \hat{D}_{yy} es obtenida de la ecuación constitutiva para el requerimiento que $\hat{\sigma}_{yy} = 0$,y el cambio de espesores sea computarizada de \hat{D}_{yy} .Esto es equivalente en obtener los espesores de la conservación de la materia ya que el esfuerzo plano constituye ecuaciones incorporadas a la conservación de la materia .Las fuerzas nodales internas serán entonces modificadas reflejar cambios en los espesores .Por lo mismo, la suposición de inextensibilidad aplica solamente a la cinemática.

Nosotros no obtenemos la condición de esfuerzo plano en termino del esfuerzo PK2 o esfuerzo nominal, a menos que las suposiciones simplificadas sean hechas ,esto es mas complejo que (6.3.3).La condición de esfuerzo plano requiere que la componente \hat{y} del esfuerzo físico desaparezca.

6.3.3.-Movimiento.

El movimiento de la viga esta descrito por la translaciones de los nodos maestros, $x_I(t)$, $y_I(t)$, y las rotaciones de los directores nodales $\theta_I(t)$,ver figura 6.2.El ángulo $\theta_I(t)$ es positivo en el sentido contrario al de las manecillas del reloj del eje x. El movimiento es obtenido por el mapa isoparametrico estándar para elementos continuos en termino de los nodos movimientos esclavos:

$$X(\xi, t) = \sum_{I^+=1}^{n_N} X_{I^+}(t) N_{I^+}(\xi, \eta) + \sum_{I^-=1}^{n_N} X_{I^-}(t) N_{I^-}(\xi, \eta) = \sum_{I^*=1}^{2n_N} X_{I^*}(t) N_{I^*}(\xi, \eta) \quad (6.3.3)$$

En la parte de arriba $N_{I^*}(\xi, \eta)$ será la función de forma estándar, para el continuo(indicado por el asterisco o superíndice de signo “+” y “-“ en el nodo indicado.

Las funciones de forma del elemento principal deberá ser lineal en η para el movimiento de arriba para ser consistente con la suposición modificada de Mindlin-Reissner .Por consiguiente ,el elemento principal podrá tener solamente 2 nodos a lo largo de la dirección η ,este puede ser solamente de dos nodos esclavos a lo largo de la fibra.

El campo de velocidad es obtenido tomando ,la derivada respecto del tiempo del material de arriba ,con lo cual obtenemos

$$V(\xi, t) = \sum_{I^+=1}^{n_N} V_{I^+}(t) N_{I^+}(\xi, \eta) + \sum_{I^-=1}^{n_N} V_{I^-}(t) N_{I^-}(\xi, \eta) = \sum_{I^*=1}^{2n_N} V_{I^*}(t) N_{I^*}(\xi, \eta) \quad (6.3.4)$$

Ahora impondremos la inextensibilidad y la suposición modificada Mindlin-Reissner en el movimiento de los nodos esclavos:

$$X_{I^+}(t) = X_I(t) + \frac{1}{2} h_I^0 P_I(t) \quad , \quad X_{I^-}(t) = X_I(t) - \frac{1}{2} h_I^0 P_I(t) \quad (6.3.5)$$

a,b)

Donde $P_I(t)$ es el director al nodo maestro I, y h_I^0 es el espesor inicial de la viga al nodo I (o mas precisamente un pseudo-espesor ya que este es la distancia entre la superficie superior y la inferior a lo largo de la fibra). Este es el paso crucial en la conservación de un elemento continuo a una viga CB.

El director al nodo I es un vector unitario a lo largo de la fibra (I^-, I^+), para esto el actual director nodal será obtenido por

$$P_I(t) = \frac{1}{h_I^0} (X_{I^+}(t) - X_{I^-}(t)) = e_x \cos \theta_I + e_y \sin \theta_I \quad (6.3.6)$$

Donde el espesor inicial es obtenido por

$$h_I^0 = \|X_{I^+} - X_{I^-}\| \quad (6.3.7)$$

y e_x y e_y son los vectores base globales .La ecuación de arriba se obtiene de la sustracción de (6.3.5b) de (6.3.5 a). Los directores nodales iniciales serán

$$P_I^0(t) = \frac{1}{h_I^0} (X_{I^+} - X_{I^-}) = e_x \cos \theta_I^0 + e_y \sin \theta_I^0 \quad (6.3.8)$$

Donde θ_I^0 es el ángulo inicial del director al nodo I .Esto es fácilmente mostrando que el movimiento (6.3.5) reúne los requerimientos de inextensibilidad sobre las fibras a través del nodo I .Se vera que todas las fibras quedan constantes en la longitud conforme a la teoría de vigas CB.

Las velocidades de los nodos esclavos serán el material de las derivadas del tiempo (6.3.5), dándonos

$$V_{I^+}(t) = V_I(t) + \frac{1}{2} h_I^0 \omega_I(t) \times P_I(t) \quad , \quad V_{I^-}(t) = V_I(t) - \frac{1}{2} h_I^0 \omega_I(t) \times P_I(t) \quad (6.3.9)$$

Donde nosotros hemos usado (6.2.1) para expresar la velocidad nodal en términos de las velocidades angulares ,notando que los vectores del nodo maestro para el nodo esclavo será $\frac{1}{2} h_I^0 P_I(t)$ y $-\frac{1}{2} h_I^0 P_I(t)$ para el nodo esclavo superior e inferior ,respectivamente .Ya que el modelo es de dos dimensiones

$\omega = \omega e_z \equiv \dot{\theta} e_z$ y el nodo velocidad esclavo puede escribirse usando (6.3.6),(6.3.7) y (6.3.9) como :

$$V_{I^+}(t) = V_I - \omega_{zI}((y_{I^+} - y_I)e_x - (x_{I^+} - x_I)e_y) = V_I - \frac{1}{2} \omega_{zI} h_I^0 (e_x \text{sen} \theta_I - e_y \text{cos} \theta_I) \quad (6.3.10)$$

$$V_{I^-}(t) = V_I - \omega_{zI}((y_{I^-} - y_I)e_x - (x_{I^-} - x_I)e_y) = V_I + \frac{1}{2} \omega_{zI} h_I^0 (e_x \text{sen} \theta_I - e_y \text{cos} \theta_I) \quad (6.3.11)$$

El movimiento de los nodos maestro esta descrito por tres grados de libertad por nodo:

$$d_I(t) \equiv d_I^{mast} = [u_{xI}^M \quad u_{yI}^M \quad \theta_I]^T, \quad \dot{d}_I(t) = [v_{xI}^M \quad v_{yI}^M \quad \omega_I]^T \quad (6.3.12)$$

Las ecuaciones (6.3.10-11) pueden ser escritas en forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} V_{I^-} \\ V_{I^+} \end{Bmatrix}^{esclavo} = \begin{Bmatrix} v_{xI^-} & v_{yI^-} & v_{xI^+} & v_{yI^+} \end{Bmatrix}^T = T_I \dot{d}_I^{mast} \quad (\text{no suman sobre } I) \quad (6.3.13)$$

Donde nosotros hemos adicionado el sobrescrito "esclavo" y "mast" para enfatizar que los nodos continuos sean los nodos esclavos y los nodos vigas sean los nodos maestros .Haciendo una comparaci3n entre (9.3.13) y (9.3.14) podemos ver que

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_I & -y_{I^-} \\ 0 & 1 & x_{I^-} & -x_I \\ 1 & 0 & y_I & -y_{I^+} \\ 0 & 1 & x_{I^+} & -x_I \end{bmatrix} \text{ y definimos } T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & T_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & T_n \end{bmatrix} \quad (6.3.14)$$

6.3.4.-Fuerzas nodales.

Las fuerzas internas del nodo maestro est1n relacionadas a las fuerzas internas del nodo esclavo por la regla de transformaci3n .Puesto que las velocidades nodales esclavas est1n relacionadas a la velocidad nodal maestro por (9.3.13-14),las fuerzas nodales est1n relacionadas por

$$f_I^{mast} = \begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \\ mI \end{Bmatrix} = T_I^T \begin{Bmatrix} f_{I^-} \\ f_{I^+} \end{Bmatrix}^{esclavo} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ y_I - y_{I^-} & x_{I^-} - xI & y_I - y_{I^+} & x_{I^+} - x_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{xI^-} \\ f_{yI^-} \\ f_{xI^+} \\ f_{yI^+} \end{Bmatrix} \quad (6.3.15)$$

Las fuerzas nodales externas a los nodos maestros pueden ser obtenidas de la fuerza externa del esclavo por la misma transformaci3n .La matriz columna sw fuerza nodal consiste de dos componentes de la fuerza f_{xI}

y f_{yI} y el momento m_I . La fuerza nodal esta conjugada en potencia a las velocidades del nodo maestro, la potencia de las fuerzas al nodo I es obtenida por $d_I^T \dot{f}_I$ (no suman sobre I)

6.3.5.-Actualizaciones constitutivas.

Para convertir el elemento constitutivo estándar a una viga CB, la suposición del esfuerzo plano (6.3.2) deberá ser forzado. Para este propósito, es conveniente usar componentes laminares del esfuerzo y velocidad de deformación. Los vectores base laminares \hat{e}_i esta construido para que \hat{e}_x sea tangente a la lamina y \hat{e}_y sea normal a la lamina (ver figura 6.3).

$$\hat{e}_x = \frac{X, \xi}{\|X, \xi\|} = \frac{x, \xi e_x + y, \xi e_y}{(x^2, \xi + y^2, \xi)^{\frac{1}{2}}}, \quad \hat{e}_y = \frac{-y, \xi e_x + x, \xi e_y}{(x^2, \xi + y^2, \xi)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.3.16)$$

$$x, \xi = \sum_{I^*} x_{I^*} N_{I^*}, \xi(\xi, \eta), \quad y, \xi = \sum_{I^*} y_{I^*} N_{I^*}, \xi(\xi, \eta) \quad (6.3.17)$$

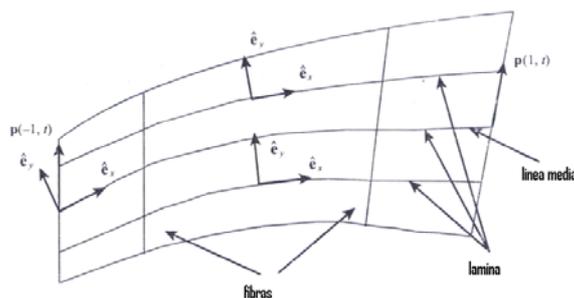


Figura 6.3.-Esquema de viga CB mostrando la lamina, el vector unitario o corrotacional \hat{e}_x y \hat{e}_y y el director $P(\xi, t)$ en los extremos, note que P usualmente no coincide con \hat{e}_y .

Nosotros hemos superpuesto un sombrero (^) sobre la componente laminar, porque este rota con el material y por lo mismo puede ser considerado corrotacional. A menos que las normales a la línea de referencia permanezcan normal, la velocidad angular de este sistema no es precisamente \dot{W} o $\dot{\Omega}$ y la rotación de la lamina no es exactamente \dot{R} . Por consiguiente, en mas problemas de cascarones, el cortante es pequeño para que las diferencias sean menores. Si consideramos las diferencias importante, se puede establecer otro sistema de coordenadas rotadas por la descomposición polar R , pero hay que sostener en mente que la condición de esfuerzo plano podrá ser impuesta en el sistema laminar.

Las componentes laminares de la velocidad de deformación serán

$$\hat{D} = R_{lam}^T D R_{lam} \quad \text{donde } R_{lam} = \begin{bmatrix} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y \\ \hat{e}_y \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y \end{bmatrix} \quad (6.3.18)$$

En la evaluación del esfuerzo, la restricción del esfuerzo plano $\hat{\sigma}_{yy} = 0$ deberá ser evaluado. Si la ecuación constitutiva es una forma de velocidad, la restricción es $\frac{D \hat{\sigma}_{yy}}{Dt} = 0$. Por ejemplo, para un material isotrópico hipoeelástico, la componente esfuerzo velocidad, será obtenido por

$$\frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yy} \end{pmatrix} = \frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{D}_{xx} \\ 2\hat{D}_{xy} \\ \hat{D}_{yy} \end{pmatrix} \quad (6.3.19)$$

Las componentes esfuerzo y velocidad de deformación en la forma de Voigt han sido reordenadas para que las componentes \hat{yy} sea la ultima. Resolviendo la ultima línea para el $\hat{\sigma}_{yy}$ obtenemos $\hat{D}_{yy} = -\nu \hat{D}_{xx}$. Sustituyendo la ecuación anterior en (6.3.19), obtenemos

$$\frac{D \hat{\sigma}_{xx}}{Dt} = E \hat{D}_{xx}, \quad \frac{D \hat{\sigma}_{xy}}{Dt} = \frac{E}{(1+\nu)} \hat{D}_{xy} \quad (6.3.20)$$

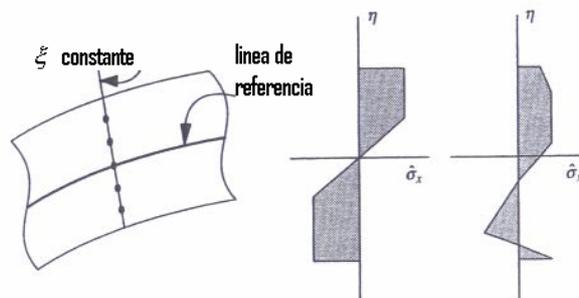


Figura 6.4.-Un grupo de puntos cuadratura y ejemplos de la distribución de un material elasto-plástico.

Esto integra exactamente las fuerzas axiales (si el elemento continuo principal es rectangular) pero desintegrables los esfuerzos cortantes transversales cortantes, visto por Hughes(1987). El numero de puntos de cuadratura en la dirección de η depende de las leyes de los materiales y de la exactitud deseada. Para la ley de materiales hiperelásticos ligero, tres puntos de cuadratura de Gauss será apropiados. Para la ley del material elasto-plástico, un mínimo alrededor de cinco puntos de cuadratura es necesario, ya que la distribución de esfuerzo no es continuamente diferenciable. La distribución de esfuerzo elasto-plástico tiene derivadas discontinuas, tal como

se muestra en la figura 6.4. la cuadratura de Gauss no es opcional para las leyes de elasto-plástica ya que estos esquemas de cuadraturas están basados en polinomios de interpolación de alto orden, el cual se asume silenciosamente en los datos. La regla trapezoidal es a menudo usada porque es mas efectiva para funciones mas ligeras.

Para ilustrar la integración selectiva –reducida procede que el cortante circunvecino se fija, consideremos un elemento viga de dos nodos basado en un elemento cuadrilateral de cuatro nodos. Las fuerzas nodales serán obtenidas por integración con un solo grupo de puntos cuadratura a $\xi=0$

$$\left[f_{xI^*}, f_{yI^*} \right]^{\text{int}} = \frac{h}{h^0} \sum_{Q=1}^{n_Q} \left(\left[N_{I^*,x} \quad N_{I^*,y} \right] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} w_Q a J_\xi \right) \Big|_{(0,\eta Q)} \quad (6.3.22)$$

Donde ηQ serán los puntos cuadratura ηQ a través del espesor de la viga, w_Q será el peso de cuadratura, a es la dimensión de la viga en la dirección z y J_ξ es el determinante Jacobiano con respecto a las coordenadas del elemento principal. La única diferencia de la relación del elemento continuo (E4.2.14) h/h^0 es el factor el cual se cuenta aproximadamente para el cambio en los espesores. Los esfuerzos computarizados deberán ser rotados hacia atrás a el sistema global antes de evaluar las fuerzas internas nodales por (6.3.22).

Las fuerzas internas nodales pueden solo ser computarizadas en términos de las componentes corotacional de los esfuerzos :

$$\left[f_{xI^*}, f_{yI^*} \right]^{\text{int}} = \frac{h}{h^0} \sum_{Q=1}^{n_Q} \left(\left[N_{I^*,x} \quad N_{I^*,y} \right] \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xx} & \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{xy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{yx} \\ R_{xy} & R_{yy} \end{bmatrix} w_Q a J_\xi \right) \Big|_{(0,\eta Q)} \quad (6.3.23)$$

Las componentes de los esfuerzos $\hat{\sigma}_{yy}$ desaparecieron en (6.3.23) por las condiciones de esfuerzo normal igual a cero. En la parte de arriba, el sistema de coordenadas corotacional laminar generalmente difiere para cada punto de cuadratura.

6.3.7.-Matriz masa.

La matriz masa del elemento viga CB puede ser obtenido por una transformación

$$M = T^T \hat{M} T \quad (6.3.24)$$

Donde \hat{M} es la matriz masa para el elemento continuo principal. La matriz masa Lagrangiana es dependiente del tiempo, el cual es inusual para un elemento Lagrangiano y debido a las restricciones cinemáticas de la teoría CB.

\hat{M} puede ser la otra consistente o matriz masa concentrada del elemento continuo .La ecuación (6.3.24) no da una matriz diagonal aun cuando la matriz masa diagonal del elemento continuo es usado.

Dos técnicas serán usadas para obtener matrices diagonal:

- 1.-La técnica de suma de renglones.
- 2.-masas físicas(physical lumping).

Para un elemento CB basado en el elemento continuo basado rectangular de cuatro nodos el segundo procedimiento produce

$$M = \frac{\rho_0 h_0 l_0 a_0}{420} \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha h_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 210 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha h_0^2 \end{bmatrix} \quad (6.3.25)$$

Donde α es un factor de escala para la inercia rotacional .El factor de escala es escogido en códigos explícitos, para el cual el intervalo del tiempo critico depende solamente de los grado de libertad traslacional ,para que el intervalo de tiempo evite la dependencia de l^2 .Esto fue propuesto por Key y Beisinger (1971).

La matriz masa concentrada de arriba no se toma en cuenta en el tiempo dependiente de la matriz T .Si nosotros contabilizamos para el tiempo dependiente de T, la fuerza inercial esta dada por,

$$f^{kin} = T^T \hat{M} T \ddot{d} + T^T \hat{M} \dot{T} \dot{d} \quad (6.3.26)$$

Donde \hat{M} dada anteriormente y T_I es dada por (6.314).La matriz \dot{T} es obtenida tomando una derivada del tiempo de (6.3.14) lo cual nos da

$$\dot{T}_I = \frac{dT_I}{dt} = \omega I \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_I - & x_{I^-} \\ 0 & 0 & y_I - & y_{I^-} \\ 0 & 0 & x_I - & x_{I^+} \\ 0 & 0 & y_I - & y_{I^+} \end{bmatrix} \quad (6.3.27)$$

De esta la aceleración incluirá un termino proporcional al cuadrado de la velocidad angular, y los términos inercial en las ecuaciones semidiscretas no son linealidades largas en las velocidades .El tiempo de integración de las ecuaciones de movimiento ,es entonces mas compleja. Posteriormente ,este termino es a menudo pequeño ,por lo cual es usualmente despreciado.

6.3.8.-Ecuaciones de movimiento .Las ecuaciones de movimiento en un nodo maestro esta dado por

$$M_{IJ} \ddot{d}_J + f_I^{\text{int}} = f_I^{\text{ext}} \quad (6.3.28)$$

Donde las fuerzas nodales y velocidades nodales serán

$$f_I = \begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \\ m_I \end{Bmatrix} \quad \dot{d}_I = \begin{Bmatrix} v_{xI} \\ v_{yI} \\ \omega_I \end{Bmatrix} \quad (6.3.29)$$

Para una matriz masa diagonal las ecuaciones de movimiento ,en un nodo son

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_{xI} \\ \dot{v}_{yI} \\ \dot{\omega}_I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \\ m_I \end{Bmatrix}^{\text{int}} = \begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \\ m_I \end{Bmatrix}^{\text{ext}} \quad (6.3.30)$$

Donde M_{ii} , $i=1$ a 3 , es el ensamblado de las masas diagonal al nodo I .Aun cuando no se han derivado estas ecuaciones explícitamente ,solamente transformamos las variables para (9.3.13) y (9.3.15).En el proceso de equilibrio ,los términos inerciales son descartados.

6.3.9.-Rigidez tangente .

La tangencial y cargas rigidezes serán obtenidas de las correspondientes matrices para el elemento continuo principal por transformación .Estas matrices no necesitan ser derivadas para vigas C.

$$\hat{K}_{I^*J^*}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \hat{B}_{I^*}^T \left[\hat{C}_P^{\text{lam}} \right] \hat{B}_{J^*} d\Omega + I \int_{\Omega} \mathbf{B}_{I^*}^T \sigma \mathbf{B}_{J^*} d\Omega \quad (6.3.31)$$

$$\left[\hat{C}_P^{\text{lam}} \right] = \hat{C}_{aa} - \hat{C}_{ab} \hat{C}_{bb}^{-1} \hat{C}_{ba}, \quad \hat{B}_{I^*} = \begin{bmatrix} N_{I^*,x} & 0 \\ N_{I^*,y} & N_{I^*,x} \end{bmatrix} \quad (6.3.32)$$

Donde \hat{C}_{aa} , \hat{C}_{ab} , \hat{C}_{ba} y \hat{C}_{bb} serán las submatrices de $\left[\hat{C}^{\text{lam}} + \hat{C}^* \right]$ necesitan

ser eliminado al ultimo renglón .Note que la matriz corrección \hat{C}^* depende del giro al cual se escoge .La rigidez tangente puede ser expresada en términos de los nodos maestros para la rigidez transformación , $K = T^T \hat{K} T$, con la matriz transformación T dada por (6.3.14) .La carga de rigidez es similarmente obtenido de la carga rigidez del elemento continuo.

6.4.-ANÁLISIS DE LA VIGA CB.

6.4.1.-Movimiento.

En orden para obtener un mejor del entendimiento de la viga CB , es provechoso examinar este movimiento desde un punto de vista el cual esta mas estrechamente paralela a la teoría clásica de vigas .El análisis en esta parte se orienta en las ecuaciones discretas las cuales serán idénticas a las vistas en las anteriores secciones .Esto es conceptualmente mas trabajable ,ya que muchas de las entidades necesitan para una implementación estándar ,tal como la rigidez tangente y la matriz masa ,tenemos que desarrollar desde el principio ,mientras que en las previas aproximaciones de están serán inherentes de un elemento continuo.

Empezamos con una descripción del movimiento .Para satisfacer la suposición modificada de Mindlin-Reissner , el movimiento deberá ser lineal en η , a través del espesor de la viga .Consecuentemente podemos describir el movimiento de la viga CB por

$$X(\xi, \eta, t) = X^M(\xi, t) + \frac{1}{2} \eta h^0(\xi) p(\xi, t) \quad (6.4.1)$$

Donde $X^M(\xi, t)$ es la configuración actual de la línea de referencia y $p(\xi, t)$ es el campo director a lo largo de la línea central .Otra expresión para el movimiento equivalente a la parte de arriba es

$$X^M(\xi, t) + \eta x^B(\xi, t) \quad (6.4.2)$$

Donde $x^B(\xi, t)$ es la parte flexible del movimiento dado por

$$x^B = \frac{1}{2} h^0 p \quad (6.4.3)$$

Las variables ξ y η serán las coordenadas curvilíneas .Note que aunque usamos las mismas nomenclaturas para las coordenadas del elemento principal (6.4.1) no necesitamos referir al elemento principal .Las superficies superior e inferior de la viga están dados por $\eta=1$ y $\eta=-1$, respectivamente ,y $\eta=0$ corresponde a la línea central .La configuración inicial esta , dada por (6.4.1) en el tiempo inicial.

$$X(\xi, \eta) = X^M(\xi) + \eta \frac{h^0}{2} p_0(\xi) \quad (6.4.4)$$

donde $p_0(\xi)$ es el director inicial y $X^M(\xi)$ describe la línea central inicial .En esta forma de el movimiento ,este es directo como se muestra para todas las

fibras sean inextensibles. La longitud de una fibra es la distancia entre la superficie superior e inferior a lo largo de todas las fibras, la distancia entre los puntos a $\eta=-1$ y $\eta=1$. Para un valor constante de ξ . Usando (6.4.1) sigue que la longitud de alguna fibra en la configuración deformada esta dada por

$$\begin{aligned} h(\xi, t) &= \|X(\xi, 1, t) - X(\xi, -1, t)\| = \left\| \left(X^M + \frac{h^0}{2} p \right) - \left(X^M - \frac{h^0}{2} p \right) \right\| \\ &= \|h^0 p\| = h^0 \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Donde el ultimo paso continua con el hecho que el director p es un vector unitario. Por consiguiente, la longitud de una fibra es siempre $h^0(\xi)$. Esta propiedad no esta sostenida para la aproximación del elemento finito. El desplazamiento es obtenido por la sustracción de (6.4.4) de (6.4.1) con lo que obtenemos

$$u(\xi, \eta, t) = u^M(\xi, t) + \eta \frac{h^0}{2} (p(\xi, t) - p_0(\xi)) = u^M(\xi, t) + \eta u^B(\xi, t) \quad (6.4.6)$$

Donde $u^B(\xi, t)$ es llamado el desplazamiento flexión. Ya que los directores son vectores unitarios, el segundo termino en el RHS de arriba es una función de una sola variable dependiente, el ángulo $\theta(\xi, t)$, el cual es medido en sentido contrario a las manecillas del reloj del eje x como se muestra en la figura 6.2. La dependencia del desplazamiento flexión en una sola variable dependiente puede ser clasificado por la expresión del segundo termino de (6.4.6) en términos de los vectores base global.

$$u = u^M + \eta \frac{h^0}{2} (e_x(\cos \theta - \cos \theta_0) + e_y(\sin \theta - \sin \theta_0)) \quad (6.4.7)$$

Donde $\theta_0(\xi)$ es el ángulo inicial del director. La velocidad es la derivación del tiempo del material, del desplazamiento.

$$V(\xi, \eta, t) = V^M(\xi, t) + \eta \frac{h^0}{2} \dot{p}(\xi, t) = V^M(\xi, t) + \eta V^B(\xi, t) \quad (6.4.8)$$

Donde la velocidad de flexión $V^B(\xi, t)$ esta definida de arriba como

$$V^B = \frac{h^0}{2} \dot{p} \quad (6.4.9)$$

Usando (6.2.1), (6.4.8) podemos escribir

$$V = V^M + \eta \frac{h^0}{2} \omega \times p = V^M + \eta \frac{h^0}{2} \omega q \quad (6.4.10)$$

Donde $\omega = \dot{\theta}$ y $\omega = \omega(\xi, t) e_z$ es la velocidad angular del director y

$$\mathbf{q} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{p} = -\hat{e}_x \cos \bar{\theta} + \hat{e}_y \sin \bar{\theta} \quad (6.4.11)$$

Donde $\bar{\theta}$ es el ángulo entre la normal a la línea central y el director, como se muestra en la figura 6.5. Ahora comparemos la velocidad de arriba con esta en la teoría de vigas de Timoshenko (6.2.2). Para este propósito, expresamos los vectores en términos de los vectores base corrotacional.

$$\mathbf{p} = \hat{e}_x \sin \bar{\theta} + \hat{e}_y \cos \bar{\theta}, \quad \mathbf{V}^M = v_x^M \hat{e}_x + v_y^M \hat{e}_y \quad (6.4.12)$$

La velocidad puede entonces ser escrita en términos de los vectores base corrotacionales como

$$\mathbf{V} = v_x^M \hat{e}_x + v_y^M \hat{e}_y + \eta \frac{h^0}{2} \omega (-\hat{e}_x \cos \bar{\theta} + \hat{e}_y \sin \bar{\theta}) \quad (6.4.13)$$

De (6.4.2) y figura 6.5, este puede ser visto que

$$\frac{h^0}{2} \eta \cos \bar{\theta} = \hat{y} \quad \text{como} \quad \frac{h^0}{2} \eta = \frac{\hat{y}}{\cos \bar{\theta}} \quad (6.4.14)$$

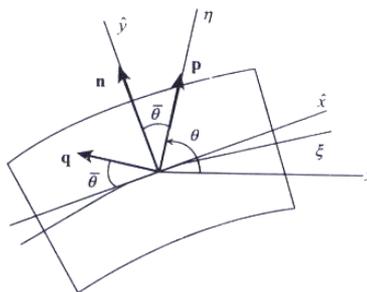


Figura 6.5.-Nomenclatura para viga CB en dos dimensiones, mostrando el director p y la normal n.

Sustituyendo la parte de arriba dentro (6.4.13) y escribiendo los vectores velocidad y matrices columna, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_x^M \\ \hat{v}_y^M \end{pmatrix} + \omega \hat{y} \begin{pmatrix} -1 \\ \tan \bar{\theta} \end{pmatrix} \quad (6.4.15)$$

Comparando la parte de arriba a (6.2.3) vemos que cuando $\bar{\theta} = 0$, la parte de arriba corresponde exactamente al campo de velocidad de la teoría clásica de Timoshenko, y tan grande como $\bar{\theta}$ sea pequeño, esto es una buena aproximación. Por lo tanto, los analistas a menudo se permiten a aproximar $\bar{\theta}$ en valores largos, igual a $\pi/4$, pero colocando los nodos esclavos como para

que el director no este alineado con la normal .Cuando el ángulo entre el director y la normal es largo ,el campo de velocidad difiere sustancialmente de este de la teoría de Timoshenko.

La aceleración esta obtenida por la derivada del tiempo del material de la velocidad.

$$\dot{V} = \dot{v}^M + \eta \frac{h^0}{2} (\dot{\omega} \times p + \omega \times (\omega \times p)) \quad (6.4.16)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta_{vil} f_{il}^{kin} &= \int_{\Omega} \delta V \cdot \rho (\dot{v}^M + \eta \frac{h^0}{2} (\dot{\omega} \times p + \omega \times (\omega \times p))) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta V \cdot \rho (\dot{v}^M + \eta \frac{h^0}{2} (\dot{\omega} q - \omega^2 p)) d\Omega \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

Para esto la fuerza inercial depende de ω^2 , como veremos.

Las variables dependientes para la viga serán las componentes de la velocidad en la línea central $V^M(\xi, t)$ y la velocidad angular $\omega(\xi, t)$; alternativamente uno puede permitir el desplazamiento en la línea central $u^M(\xi, t)$ y el ángulo actual del director $\theta(\xi, t)$ serán las variables dependientes .Las restricciones de la teoría de vigas CB reemplaza las dos componentes de velocidad traslacional de un continuo en dos dimensiones por las dos componentes traslacional de la línea central y el rotacional del director .Por consiguiente, las nuevas variables dependientes serán funciones de un solo espacio variable, ξ , mientras que las variables independientes del continuo serán funciones de dos espacios variables .Esta reducción en el dimensionamiento del problema ,es uno de los beneficios de las teorías estructurales.

6.4.2.-Velocidades deformación:

Examinemos las siguientes velocidad deformación en la viga CB .Esto es llevado acabo para unas series de expansión de la velocidad de deformación a través del espesor .Los resultados para $\bar{\theta} = 0$ es :

$$D_{\hat{x}\hat{x}} = v_{\hat{x},\hat{x}}^M - \eta \frac{h^0}{2} \left(\omega_{,\hat{x}} + p_{\hat{x},\hat{x}} v_{\hat{x},\hat{x}}^M \right) + O\left(\frac{\eta h^0}{R}\right)^2 \quad (6.4.18)$$

$$D_{\hat{x}\hat{y}} = \frac{1}{2} \left(-\omega + v_{\hat{y},\hat{x}}^M \right) + O\left(\frac{\eta h^0}{R}\right) \quad (6.4.19)$$

La velocidad de deformación axial \hat{D}_{xx} varía linealmente a través de la profundidad de la viga. Este consiste de tres partes:

1. $v_{x,x}^M$, el estirado de la línea central, porque estos términos están en las coordenadas corrotacional, esto también acopla flexión a deformación axial:

2. $\eta \frac{h^0}{2} \omega_{,x}$, la velocidad de deformación de flexión, el cual varía linealmente con η ;

3. $\eta \frac{h^0}{2} p_{x,x} v_{x,x}^M$, la flexión y los resultados estirados; estas uniones de estirado y flexión pero tiende a ser menos importante que el primer término.

La componente del cortante transversal \hat{D}_{xy} también varía linealmente a través de la profundidad, pero el término constante es dominante. Esta variación lineal no es consistente con los cortantes transversales observados. Por lo mismo, la distribución del cortante transversal juega una menor regla en la respuesta total de más vigas. Para vigas homogéneas delgadas, esto resulta insignificante y la energía cortante es justa una penalización que fuerza la hipótesis Euler-Bernoulli: que las normales permanecen normales. Para esto la forma exacta del cortante no es importante en vigas homogéneas delgadas. Para vigas compuestas y gruesas, las correcciones del cortante transversal serán a menudo requeridas.

Las ecuaciones de arriba serán generalmente no usadas para el cálculo de velocidades de deformación en una viga CB. Esto es solamente sensible para usar fórmulas cuando la velocidad es crítica o cuando las ecuaciones constitutivas serán expresadas en términos de esfuerzos resultantes.

6.4.3.-Esfuerzos resultantes y fuerzas internas.

En teorías de vigas clásicas y cascarones, los esfuerzos serán tratados en términos de otras integrales conocidas como esfuerzos resultantes. La predominancia de la parte constante y lineal del esfuerzo es la base para el reemplazamiento de los esfuerzos resultantes no es necesario en las computaciones, y serán eficientes solamente para materiales lineales.

Examinaremos los esfuerzos resultantes para la teoría de vigas CB. Para un desarrollo más manejable, suponemos el director a ser normal a la línea de referencia, esto es $\bar{\theta} = 0$. Consideremos una viga en dos dimensiones con la línea de referencia parametrizada por r ; $0 \leq r \leq L$, donde r tiene dimensiones físicas de longitud, en contraste a la coordenada curvilínea ξ , el cual no es dimensional. Para definir el esfuerzo resultante, expresamos el trabajo interno virtual en términos de la componente corrotacional del esfuerzo

de Cauchy .Omitimos el trabajo debido a $\hat{\sigma}_{yy}$ el cual desaparece debido a la suposición del esfuerzo plano .Esto da

$$\delta P^{\text{int}} = \int_0^L \int_A (\delta \hat{D}_{xx} \hat{\sigma}_{xx} + 2\delta \hat{D}_{xy} \hat{\sigma}_{xy}) dA dr \quad (6.4.20 a)$$

En la parte de arriba ,la integral dominante de tres dimensiones ha sido cambiada para una integral de área y una integral de línea .La integral de arriba es una buena aproximación para la integral sobre el volumen si los directores a los puntos finales serán normales a la línea de referencia y el espesor a razones radiales es comparado pequeño a la unidad .Invocaremos las cinemáticas de una viga CB .Sustituyendo (6.4.18-6.4.19) dentro de (6.4.20 a) obtenemos

$$\delta P^{\text{int}} = \int_0^L \int_A (\delta v_{x,x}^M \hat{\sigma}_{xx} - y(\delta \omega_{,x} + p_{x,x} \delta v_{x,x}^M) \hat{\sigma}_{xx} + (-\delta \omega + \delta v_{y,x}^M) \hat{\sigma}_{xy}) dA dr \quad (6.4.20 b)$$

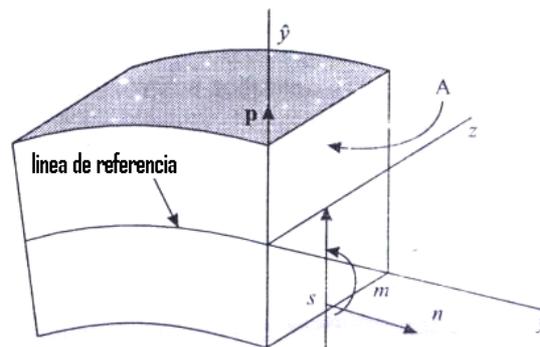


Figura 6.6.-Esfuerzo resultante en viga de 2D;el área de sección transversal A se muestra.

Las siguientes integrales de área de los esfuerzos (conocidos como momentos cero y primero) serán definidos:

Fuerza membrana $n = \int_A \hat{\sigma}_{xx} dA$

Momento $m = -\int_A y \hat{\sigma}_{xx} dA \quad (6.4.21)$

Fuerza cortante $s = \int_A \hat{\sigma}_{xy} dA$

La parte de arriba será conocida como esfuerzos resultantes o esfuerzos generalizados; estos se muestran en la figura 6.6 , con otras convenciones de signos positivos .La resultante n es la fuerza normal , también llamada la fuerza membrana o fuerza axial .Esta es la fuerza neta tangente a la línea central debido a los esfuerzos axiales .Este es también el momento cero de los esfuerzos axiales .El momento m es el primer momento de los esfuerzos axiales alrededor de la línea de referencia .La fuerza cortante S es la resultante neta (momento cero)de los esfuerzos cortantes transversales .Estas definiciones corresponden con las definiciones usuales en mecánica de estructuras.

Con estas definiciones, el trabajo virtual interno (6.4.20) dará

$$\delta P^{\text{int}} = \int_0^L (\underbrace{\delta v_{x,x}^M}_{\text{axial}} + \underbrace{(\delta \omega_{,x} + p_{x,x} \delta v_{x,x}^M)}_{\text{flexion}} m + \underbrace{(-\delta \omega + \delta v_{y,x}^M)}_{\text{cortante}}) dr \quad (6.4.22)$$

Los nombres de las diversas fuerzas serán indicadas .La fuerza axial o membrana es la fuerza expedida en estirar la viga, la fuerza de flexión en flexión de vigas .La fuerza transversal cortante surgirá también de la flexión, de esto la fuerza integral ha sido reducida a una integral de una dimensión .Esto es una característica sobresaliente de teorías estructurales ;la dimensión es reducida a una ,por la imposición de las restricciones en el movimiento.

6.4.4.-Fuerzas externas resultantes.

El desarrollo de fuerzas externas generalizadas paralelas al desarrollo de las fuerzas internas generalizadas que hemos justificado completamente.

Empezaremos con la expresión para un continuo y entonces impondremos las restricciones sobre el movimiento .Debido a las restricciones ,las fuerzas externas generalizadas involucran integrales sobre el espesor de la viga CB .Suponemos que P es coincidente con \hat{y} en los extremos de la viga .La superficie superior e inferior de la viga será conocida como Γ_{ib} y las superficies sobre los extremos por Γ .Empezaremos con el trabajo externo virtual para el continuo el cual es

$$\delta P^{\text{ext}} = \int_{\Gamma_{ib} \cup \Gamma} (\delta v_x^{\hat{}} t_x^{\hat{*}} + \delta v_y^{\hat{}} t_x^{\hat{*}}) d\Gamma + \int_{\Omega} (\delta v_x^{\hat{}} b_x^{\hat{}} + \delta v_y^{\hat{}} b_y^{\hat{}}) d\Omega \quad (6.4.23)$$

En la parte de arriba y el resto del trabajo ,usaremos un asterisco para designar las tracciones .Restringiremos el movimiento por la imposición de las suposiciones CB como las dadas por (6.4.15).Sustituyendo (6.4.15) dentro de la parte de arriba (con $\bar{\theta} = 0$) quedando

$$\delta P^{\text{ext}} = \int_{\Gamma_{ib} \cup \Gamma} ((\delta v_x^{\hat{}} - \delta \omega \hat{y}) t_x^{\hat{*}} + \delta v_y^{\hat{}} t_y^{\hat{*}}) d\Gamma + \int_{\Omega} ((\delta v_x^{\hat{}} - \delta \omega \hat{y}) b_x^{\hat{}} + \delta v_y^{\hat{}} b_y^{\hat{}}) d\Omega \quad (6.4.24)$$

Las fuerzas externas generalizadas serán ahora definidas ,similarmente a las esfuerzos resultantes ,pero tomando en cuenta los momentos ceros y primero de las tracciones:

$$n^* = \int_A \hat{t}_x^* dA \quad , \quad m^* = -\int_A \hat{y} \hat{t}_x^* dA \quad , \quad s^* = \int_A \hat{t}_y^* dA \quad (6.4.25)$$

Las tracciones y fuerzas del cuerpo entre los puntos finales vendrán a ser fuerzas del cuerpo generalizadas en teorías de vigas .Estas estarán definidas por

$$\bar{f}_x = \int_{\Gamma_{ib}} \hat{t}_x^* d\Gamma + \int_A \hat{b}_x^* dA \quad , \quad \bar{f}_y = \int_{\Gamma_{ib}} \hat{t}_y^* d\Gamma + \int_A \hat{b}_y^* dA \quad , \quad M = -\int_{\Gamma_{ib}} \hat{y} \hat{t}_x^* d\Gamma + \int_A \hat{y} \hat{b}_y^* dA \quad , \quad (6.4.26)$$

Ya que las variables dependientes han sido cambiadas de $v_i(x, y)$ a $v_i^M(r)$ y $\omega(r)$ por la suposición de Mindlin-Reissner , las definiciones de frontera serán cambiadas por consiguiente ;las fronteras vendrán a ser los puntos extremos de la viga .Los extremos serán las intersecciones de la línea central con Γ .El trabajo virtual externo (6.4.23) en forma simplificada de las definiciones (6.4.25-26),quedaran

$$\delta P^{ext} = \int_0^L (\delta \hat{v}_x \bar{f}_x + \delta \hat{v}_y \bar{f}_y + \delta \omega M) dr + \delta \hat{v}_x n^* \Big|_{\Gamma_n} + \delta \hat{v}_y s^* \Big|_{\Gamma_s} + \delta \omega_m \Big|_{\Gamma_m} \quad (6.4.27)$$

Donde $\Gamma_n, \Gamma_m, \Gamma_s$ serán los extremos de la viga en el cual la fuerza normal (axial),momento , y fuerza cortante serán preescritas ,respectivamente .Una frontera sobre la cual la tracción \hat{t}_x esta preescrita viene a ser una frontera de la fuerza normal preescrita y frontera momento, Γ_n y Γ_m .La transformación de un continuo una viga CB de estos cambia la naturaleza de las condiciones de frontera tracción .Las condiciones de frontera tracción será vista ,solamente los momentos cero y primero de las tracciones pueden ser preescritos .Esto es posible en la teoría de vigas para tener una frontera Γ el cual es una frontera Γ_m pero no una frontera Γ_n .Un ejemplo es una frontera el cual esta fijado en la dirección x pero conectado a un resorte de espiras con este eje alineado con e_z .Esta sutileza será debida al cambio de variables dependientes el cual resulta de las restricciones cinemáticas.

6.4.5.-Condiciones de frontera.

Las condiciones frontera estarán subdivididas ,dentro las condiciones frontera natural y esencial .Las condiciones frontera velocidad (desplazamiento) será esencial y dado por

$$\hat{v}_x^M = \hat{v}_x^{M^*} \quad \text{sobre } \Gamma_{v_x}^{\wedge} \quad , \quad \hat{v}_y^M = \hat{v}_y^{M^*} \quad \text{sobre } \Gamma_{v_y}^{\wedge} \quad , \quad \omega = \omega^* \quad \text{sobre } \Gamma_{\omega} \quad , \quad (6.4.28)$$

Donde el suscrito en Γ , indica cual velocidad esta prescrita .La velocidad angular es independiente de la orientación del sistema coordenado, por lo que, no hemos superpuesto un sobrerito en este.

Las condiciones frontera tracción generalizadas serán :

$$n = n^* \text{ sobre } \Gamma_n, \quad s = s^* \text{ sobre } \Gamma_s, \quad m = m^* \text{ sobre } \Gamma_m \quad (6.4.29)$$

Note que (6.4.28) y (6.4.29) serán condiciones frontera en variables cinemáticas y cinéticas el cual esta conjugada en potencias no pueden ser prescritas sobre las misma frontera ,pero uno de el debe estar prescrita en alguna frontera ,por consiguiente nos da

$$\begin{aligned} \Gamma_n \cup \Gamma_{v_x}^{\wedge} &= \Gamma, & \Gamma_n \cap \Gamma_{v_x}^{\wedge} &= 0 \\ \Gamma_s \cup \Gamma_{v_y}^{\wedge} &= \Gamma, & \Gamma_s \cap \Gamma_{v_y}^{\wedge} &= 0 \\ \Gamma_m \cup \Gamma_{\omega} &= \Gamma, & \Gamma_m \cap \Gamma_{\omega} &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.30)$$

6.4.6.-Forma débil.

La forma débil de la ecuación del momento para una viga esta dada por

$$\delta P^{kin} + \delta P^{int} = \delta P^{ext} \quad \forall (\delta v_x, \delta v_y, \delta \omega) \in u_0 \quad (6.4.31)$$

Donde u_0 es el espacio del intervalo de las funciones diferenciables ,funciones C^0 ,el cual desaparece en las correspondientes fronteras desplazamiento prescrita .Las funciones necesitan solamente ser C^0 pues solamente las primeras derivadas de las variables dependientes aparecerán en las expresiones del trabajo virtual .Note que la forma débil tiene la misma estructura como la forma débil para un continuo.

6.4.7.-Forma fuerte.

No derivaremos la forma fuerte equivalente a (6.4.31) para la geometría arbitraria .Esto puede ser hecho ,ver SIMO y Fox (1989) ,pero este o es difícil sin tensores curvilíneos .En vez de esto ,desarrollaremos la forma fuerte para la teoría de pequeñas deformaciones en una viga recta de sección transversal uniforme , el cual esta a lo largo del eje x ,con inercia y momento despreciables aplicado al cuerpo .Para la simplificación de arriba, usando las definiciones (6.4.22) y (6.4.27) , (6.4.31) podemos reducirla a

$$\int_0^L (\delta v_{x,x^n} + \delta \omega_{,x^m} + (\delta v_{y,x} - \delta \omega)s - \delta v_x \bar{f}_x - \delta v_y \bar{f}_y) dx - (\delta v_x n^*) \Big|_{\Gamma_n} - (\delta v_y s^*) \Big|_{\Gamma_s} - (\delta \omega m^*) \Big|_{\Gamma_m} = 0 \quad (6.4.32)$$

Los sombreritos han sido despreciados ,ya que el sistema coordenado coincide con el sistema global en todos los puntos .El procedimiento para encontrar la forma fuerte equivalente ,será paralelo al procedimiento encontrado anteriormente.

La idea es el remover todas las derivadas de las funciones prueba en la forma débil ,de tal manera que la parte de arriba pueda ser escrita como productos de las funciones de pruebas con una función de las fuerzas resultantes y otras derivadas .Esto es llevado a cabo por el uso de la integración por partes , ,lo cual esta descrito abajo para cada termino en la forma débil:

$$\int_0^L \delta v_{x,x} n dx = -\int_0^L \delta v_x n_{,x} dx + (\delta v_x n)|_{\Gamma_n} - \sum_i \llbracket \delta v_x n \rrbracket_{\Gamma_i} \quad (6.4.33)$$

$$\int_0^L \delta \omega_{,x} m dx = -\int_0^L \delta \omega m_{,x} dx + (\delta \omega m)|_{\Gamma_m} - \sum_i \llbracket \delta \omega m \rrbracket_{\Gamma_i} \quad (6.4.34)$$

$$\int_0^L \delta v_{y,x} s dx = -\int_0^L \delta v_y s_{,x} dx + (\delta v_y s)|_{\Gamma_s} - \sum_i \llbracket \delta v_y s \rrbracket_{\Gamma_i} \quad (6.4.35)$$

Donde Γ_i son los puntos de discontinuidad .En cada uno de encima hemos aplicado el teorema fundamental del calculo para una función diferenciable continuamente .También hemos usado el hecho que las funciones prueba desaparezcan sobre las fronteras desplazamientos preescritas ,por lo que el termino frontera solamente aplica a los puntos frontera tracción .Sustituyendo (6.4.33-35) en (6.4.32) obtenemos (haciendo un cambio de signos)

$$\int_0^L (\delta v_x (n_{,x} + f_x) + \delta \omega (m_{,x} + s) + \delta v_y (s_{,x} + f_y)) dx + \sum_i (\delta v_x \llbracket n \rrbracket + \delta v_y \llbracket s \rrbracket + \delta \omega \llbracket m \rrbracket)_{\Gamma_i} \quad (6.4.36)$$

$$-\delta v_x (n^* - n)|_{\Gamma_n} + \delta \omega (m^* - m)|_{\Gamma_m} + \delta v_y (s^* - s)|_{\Gamma_s} = 0$$

Usando el teorema de densidad como el dado , entonces obtenemos la siguientes formas fuertes:

$$n_{,x} + f_x = 0, s_{,x} + f_y = 0, m_{,x} + s = 0 \quad (6.4.37)$$

$$\llbracket n \rrbracket = 0, \llbracket s \rrbracket = 0, \llbracket m \rrbracket = 0 \text{ sobre } \Gamma_i \quad (6.4.38)$$

$$n = n^* \text{ sobre } \Gamma_n, s = s^* \text{ sobre } \Gamma_s, m = m^* \text{ sobre } \Gamma_m \quad (6.4.39)$$

Los cuales serán respectivamente ,las ecuaciones de equilibrio ,las condiciones de continuidad internas y la tracción generalizada (natural) condiciones de frontera.

Las ecuaciones de equilibrio de arriba serán conocidas en mecánica estructural .Estas ecuaciones de equilibrio no serán equivalentes a las ecuaciones de equilibrio continuo , $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$.En vez de esto ,este puede ser considerado formas de peso de las ecuaciones de equilibrio continuo .Estas ecuaciones de equilibrio serán una consecuencia directa de restricciones del movimiento por las suposiciones de Timoshenko .Para las restricciones de las funciones de prueba ,las ecuaciones de equilibrio serán diminutos.

6.4.8.-Aproximación del elemento finito.

La aproximación del elemento finito por (6.4.1) es construido del significado de las funciones de formas de una dimensión $N_I(\xi)$:

$$X(\xi, \eta, t) = (X_I^M(t) + \eta \frac{h^0}{2} p_I(t)) N_I(\xi) \quad (6.4.40)$$

Donde repetido el caso anterior será sumado a n_N .Como es indicado arriba ,el producto de los espesores con el director es interpolado .Si el espesor y el director son interpolados independientemente ,el segundo termino en la parte de arriba es cuadrático en las funciones de forma y el movimiento difiere del elemento continuo principal (6.33).Este es seguido inmediatamente de la parte de arriba que la configuración inicial de los elementos es obtenida por

$$X(\xi, \eta) = (X_I^M + \eta \frac{h^0}{2} p_I^0) N_I(\xi) \quad (6.4.41)$$

El desplazamiento es obtenido pero tomando la diferencia de (6.4.40) y (6.4.41), el cual es obtenido por

$$u(\xi, \eta, t) = (u_I^M(t) + \eta \frac{h^0}{2} (p_I(t) - p_I^0)) N_I(\xi) \quad (6.4.42)$$

Tomando el material de la derivada del tiempo de la parte de arriba obtenemos la velocidad.

$$V(\xi, \eta, t) = (V_I^M(t) + \eta \frac{h^0}{2} (\omega e_z \times p_I(t))) N_I(\xi) \quad (6.4.43)$$

Este campo de velocidad es idéntico por el campo de velocidad generado por la sustitución (6.3.9) en (6.3.4)

Inextensibilidad de todas las fibras:

A pesar que las fibras nodales sean inextensibles , las otra fibras en un elemento puede cambiar en longitud .Esto puede fácilmente ser visto sin algunas ecuaciones ,pero considerando la situación especifica mostrada en la figura 6.8;la fibra en el punto medio es obviamente corto

Fuerzas nodales :Las fuerzas nodales maestras serán obtenidas por (6.3.15).

$$\begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \\ m_I \end{Bmatrix} = T_I^T \begin{Bmatrix} f_{xI^-} \\ f_{yI^-} \\ f_{xI^+} \\ f_{yI^+} \end{Bmatrix} \quad \text{donde } T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_I & -y_{I^-} \\ 0 & 1 & x_{I^-} & -x_I \\ 1 & 0 & y_I & -y_{I^+} \\ 0 & 1 & x_{I^+} & x_I \end{bmatrix} \quad (\text{E6.1.6})$$

Evaluando la parte de arriba ,obtenemos:

$$f_{xI} = f_{xI^+} + f_{xI^-} \quad , \quad f_{yI} = f_{yI^+} + f_{yI^-} \quad (\text{E6.1.7})$$

$$m_I = (y_I - y_{I^-})f_{xI^-} + (x_{I^-} - x_I)f_{yI^-} + (y_I - y_{I^+})f_{xI^+} + (x_{I^+} - x_I)f_{yI^+} \quad (\text{E6.1.8})$$

entonces la transformación es obtenida ,de lo que se esperaba para el equilibrio :la fuerza nodal maestra es la suma de las fuerzas nodales esclavas y el momento maestro nodal es el momento de las fuerzas nodales esclavas alrededor del nodo maestro.

Deformación de Green:

Esta formulación del elemento puede ser aplicada a ecuaciones constitutivas en términos del esfuerzo p_{k2} y la deformación de Green .La computación de la deformación de Green requiere del conocimiento de θ_I y x_I .El director en las configuraciones inicial y actual ,esta obtenida por

$$p_{xI}^0 = \cos \theta_I^0 \quad , \quad p_{yI}^0 = \text{sen} \theta_I^0 \quad , \quad p_{xI} = \cos \theta_I \quad , \quad p_{yI} = \text{sen} \theta_I \quad (\text{E6.1.9})$$

Las posiciones de los nodos esclavos ,pueden entonces ser computarizados pero especificando (6.4.1) a los nodos ,con lo cual obtenemos.

$$\begin{aligned} X_{I^+} &= X_1 + \frac{h_0}{2} p_{x1}^0, Y_{I^+} = Y_1 + \frac{h_0}{2} p_{y1}^0 & x_{I^+} &= x_1 + \frac{h}{2} p_{x1}, & y_{I^+} &= y_1 + \frac{h}{2} p_{y1} \\ X_{I^-} &= X_1 - \frac{h_0}{2} p_{x1}^0, Y_{I^-} = Y_1 - \frac{h_0}{2} p_{y1}^0 & x_{I^-} &= x_1 - \frac{h}{2} p_{x1}, & y_{I^-} &= y_1 - \frac{h}{2} p_{y1} \\ X_{2^-} &= X_2 - \frac{h_0}{2} p_{x2}^0, Y_{2^-} = Y_2 - \frac{h_0}{2} p_{y2}^0 & x_{2^-} &= x_2 - \frac{h}{2} p_{x2}, & y_{2^-} &= y_2 - \frac{h}{2} p_{y2} \\ X_{2^+} &= X_2 + \frac{h_0}{2} p_{x2}^0, Y_{2^+} = Y_2 + \frac{h_0}{2} p_{y2}^0 & x_{2^+} &= x_2 + \frac{h}{2} p_{x2}, & y_{2^+} &= y_2 + \frac{h}{2} p_{y2} \end{aligned} \quad (\text{E6.1.10})$$

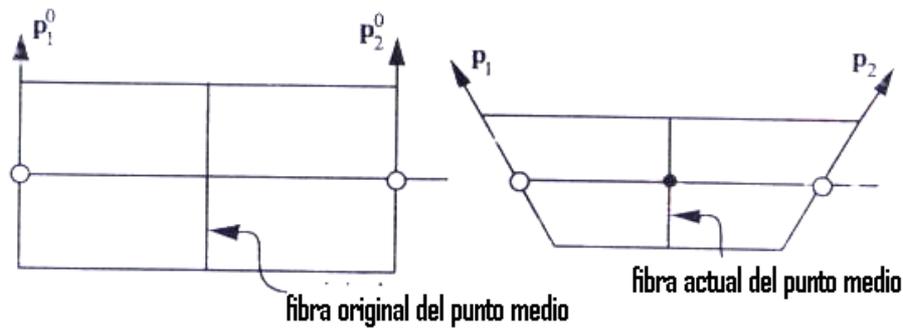


Figura 6.8 Deformación de una viga CB de 2-nodos ,mostrando fibras cortas del punto medio.

Los desplazamientos de los nodos esclavos es entonces obtenido tomando la diferencia de las coordenadas nodales .El desplazamiento de algún punto puede entonces ser obtenido tomando el campo de desplazamiento continuo por $u = u_{i^*} N_{i^*}$. La deformación de Green puede entonces ,ser computarizado por las leyes computarizadas .La parte de arriba es una forma simplificada para ejecutar la computación .Para minimizar el error de redondeo, la computarización puede ser hecha en términos desplazamientos.

Velocidades de deformación para un elemento rectangular :Cuando el elemento continuo principal es rectangular y la línea central de la viga esta a lo largo del eje x,el campo de velocidad (6.4.15) es

$$V = V^M - y \omega e_x \quad (E6.1.11)$$

Porque los directores están en la dirección y $\bar{\theta} = 0$.Escribiendo afuera las componentes de la parte de arriba con una dimensión ,las funciones de forma lineal dará,

$$v_x = v_{x1}^M \frac{1}{2}(1-\xi) + v_{x2}^M \frac{1}{2}(1+\xi) - y(\omega_1 \frac{1}{2}(1-\xi) + \omega_2 \frac{1}{2}(1-\xi))$$

$$v_y = v_{y1}^M \frac{1}{2}(1-\xi) + v_{y2}^M \frac{1}{2}(1+\xi)$$

Donde $\xi \in [-1, 1]$.Las componentes de la velocidad deformación , están entonces obtenidas por :

$$D_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{l}(v_{x2}^M - v_{x1}^M) - \frac{y}{l}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$2D_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{l}(v_{y2}^M - v_{y1}^M) - (\omega_1 \frac{1}{2}(1-\xi) + \omega_2 \frac{1}{2}(1+\xi))$$

La componente D_{yy} esta computarizada por la condición del esfuerzo plano.

6.5.-Implementación del elemento continuo basado Cascaron.

Ahora desarrollaremos los elemento finitos del elemento continuo basado (CB) cascaron .Esta aproximación fue iniciada por Ahmad ,Irons y Zienkiewicz (1970).Una versión no lineal de esta teoría fue expresada por Hughes y Liu(1981).Las extensiones y generalizaciones fueron obtenidas por Buechter y Ramm(1992) y SIMO y Fox (1989).En la implementación del cascaron CB ,como para vigas CB no es necesario repetir todos los pasos seguidos en la discretización del continuo ,desarrollando una forma débil ,discretizamos el problema pero usando interpolaciones del elemento finito ,etc .Una vez que el elemento cascaron es desarrollado impondremos las restricciones de la teoría de cascarones en un elemento continuo .Posteriormente ,examinamos cascarones CB de un punto de vista mas teórico pero ,imponiendo las restricciones sobre las pruebas y movimientos de ensayo antes de la discretización del elemento finito.

6.5.1.-Suposiciones en teorías clásicas del cascaron .

Para describir las suposiciones cinemáticas para cascarones ,necesitamos definir una superficie de referencia , a menudo llamada superficie media .La superficie de referencia ,como el segundo nombre implica ,el generalmente colocado al punto medio entre la superficie inicial superior e inferior del cascaron .Como en vigas CB no lineales ,la colocación exacta de la superficie de referencia en cascarones no lineales es irrelevante.

Antes de desarrollar la teoría de cascarones CB ,revisaremos brevemente las suposiciones cinemáticas de las teorías clásicas de cascarones .Como en vigas ,hay dos tipos de suposiciones cinemáticas ,pues estas admiten cortantes transversales otras no .Las teorías las cuales admiten cortantes transversales serán llamadas teorías de Mindlin-Reissner ,mientras que las teorías las cuales no admiten cortantes transversales serán llamadas teorías de Kirchoff-Love .Las suposiciones cinemáticas en estas dos teorías de cascarones serán:

- 1.-Teoría Kirchoff-Love :La superficie normal a la superficie media permanece recta y normal.
- 2.-Teoria Mindlin-Reissner :La normal a la superficie media permanece recta.

Los resultados experimentales muestran que las suposiciones de Kirchoff-Love serán obtenidas para cascarones delgados .Para cascarones gruesos o compuestos ,las suposiciones de Mindlin-Reissner serán apropiadas ,porque los cortantes transversales vienen a ser importantes .Los efectos del cortante transversal serán particularmente importantes en composiciones .La teoría de Mindlin-Reissner puede también ser usada para cascarones delgados en este caso la normal permanecerá aproximadamente normal y el cortante transversal casi desaparecerá.

Un punto el cual necesitamos hacer es que la teoría de Mindlin-Reissner fue hecha originalmente para problemas de pequeñas deformaciones, y más de otras verificaciones experimentales han sido hechas para pequeñas deformaciones. Una vez que las deformaciones sean largas, esto no es claro si es mejor que se suponga que la normal actual permanezca recta o que la normal inicial permanezca recta. Actualmente, más trabajos teóricos, la normal inicial es supuesta a permanecer recta. Esta es hecha probablemente porque este guía a aclarar la teoría. Sabemos sin experimentar que esta suposición es mejor que la suposición de que la normal actual permanece instantáneamente recta.

6.5.2.-Coordenadas y definiciones.

En la implementación y en la teoría de elementos cascaron CB, el cascaron es modelado por una sola capa de elementos de tres dimensiones. El movimiento es entonces restringido para mostrar la suposición modificada de Mindlin-Reissner.

Un elemento CB con nueve nodos maestros y el elemento continuo de tres dimensiones asociado será mostrado en la Figura 6.6. Las coordenadas del elemento principal será ξ^i , $i=1$ a 3; también usamos la notación $\xi^1 \equiv \xi$,

$\xi^2 \equiv \eta$, y $\xi^3 \equiv \zeta$; las coordenadas ξ^i serán coordenadas curvilíneas.

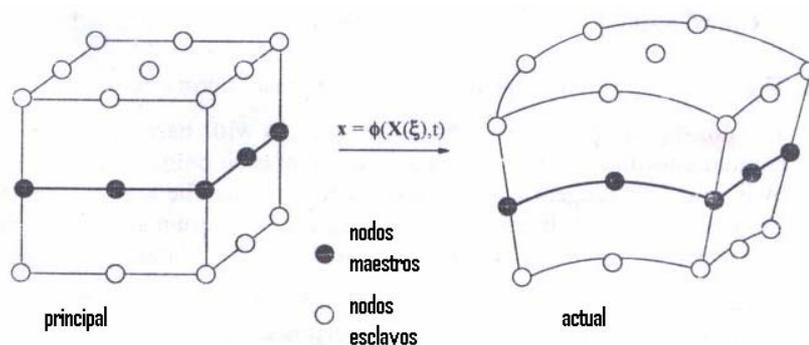


Figura 6.9.-Elemento cascaron de nueve nodos basado en un elemento continuo de 18 nodos.

A cada superficie de constante ζ es llamada una lamina. La superficie de referencia corresponde a $\zeta=0$. La superficie de referencia es parametrizada por las dos coordenadas curvilíneas (ξ, η) , ξ^α en notación indicial (letras Greek serán usada para indicar con un rango de 2). Las líneas a lo largo del eje ζ serán llamadas fibras, y el vector unitario a lo largo de una fibra es llamado un director. Estas definiciones serán análogas a las correspondientes definiciones para vigas CB obtenidas anteriormente. Los espesores están definidos como sigue. La distancia a lo largo de la fibra entre la superficie inferior y la superficie de referencia esta dotado por $h^-(\xi, \eta, t)$, y la distancia a lo largo de la fibra entre la superficie superior y la superficie de referencia esta denotado por h^+ . Los espesores están entonces dados por $h = h^+ + h^-$. Esto no es una

definición usual para los espesores de un cascaron ,el cual esta usualmente definido como la distancia entre la superficie superior e inferior a lo largo de la normal ,pero es común en teorías cascaron CB.

6.5.3.-Suposiciones.

En la teoría de cascarones CB ,la mejor suposición será:

- 1.-Las fibras permanecen rectas(suposición modificada de Mindlin-Reissner).
- 2.-El esfuerzo normal a la superficie media desaparecerá (también llamado la condición de esfuerzo plano).
- 3.-El momento debido a la extensión de la fibra y el balanceo del momento en la dirección de la fibra será despreciado.

La primera suposición difiere de la teoría clásica de Mindlin-Reissner en el cual las fibras restringidas a permanecer rectas, no a la normal .Como en vigas ,la suposición cinemática clásica de Mindlin-Reissner no puede ser impuesta exactamente en un elemento CB con interpolaciones C^0 .Los nodos podrán ser colocados de tal manera que la dirección de las fibras sea tan cerrada como posible a la normal .Mientras que la suposición uno puede ser visto como una aproximación a la suposición clásica de Mindlin-Reissner ,preferimos llamar a esta una suposición de Mindlin-Reissner.

Esto es a menudo supuesto en la teoría de cascaron CB que las fibras sean inextensibles .Por consiguiente esta suposición es aplicada solamente para la parte de arriba establecida y no se sostiene a través de la formulación .Ya que el espesor cambia para deformaciones largas ,algunos de los efectos de la inextensibilidad de las fibras serán incluidas.

6.5.4.-Sistema de coordenadas.

Tres sistemas de coordenadas son definidos:

- 1.-El sistema cartesiano global (x,y,z) como vectores base e_i .
- 2.-Las coordenadas laminares corrotacionales $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ con vectores base \hat{e}_i ,a menudo llamado coordenadas laminares .Estas serán construidas en cada punto .Los vectores base laminares varían de punto a punto ,pero serán vistos como un sistema cartesiano global .Posteriormente describiremos el sistema laminar.
- 3.-El sistema de coordenada nodal asociado con los nodos maestros ,la asociabilidad de los vectores base ortogonales serán identificadas por barras superpuestas ,como en $\bar{e}_i(t)$,y el subscrito identificado al nodo .Para una matriz masa concentrada, los vectores base serán coincidentes con las coordenadas principales de la matriz masa .Esto puede ser definido por

$$\bar{e}_{zI}(t) = p_I(t) \quad (6.5.1)$$

La orientación de los otros dos vectores es arbitraria.

Las coordenadas laminares no rotaran exactamente por la R del teorema de descomposición polar. Por consiguiente particularmente si el cortante transversal sea pequeño, la diferencia es menor y esto es de interés para pensar de estos como corrotacionales.

6.5.5.-Aproximación del elemento finito de movimiento.

El elemento continuo principal para un cascaron CB es un elemento isoparametrico de tres dimensiones con nodos $2n_N$, con nodos n_N , en la superficies superior e inferior como se muestra en la figura 6.9. Para observar la suposición modificada de Mindlin-Reissner que el movimiento es lineal en ζ , el elemento continuo puede tener mas de dos nodos esclavos a lo largo de alguna fibra. La malla es Lagrangiana y cualquiera otra actualización o una formulación actual Lagrangiana.

A la intersección de las fibras conectando un par de nodos esclavos con la superficie de referencia, definimos los nodos maestros n_N como se muestra en la figura 6.9. Como en la viga, dos notaciones serán usadas para los nodos esclavos. Los dos esquemas están relacionado por (6.3.1). La formulación puede tener otros cinco o seis grados de libertad por nodo maestro. Enfatizaremos la formulación de los seis grado de libertad y discutiremos la formulación de los cinco grados de libertad y los meritos relativos mas tarde. Las velocidades nodales y fuerzas nodales para un nodo maestro en la formulación de los seis grados de libertad serán

$$\dot{d}_I = \begin{bmatrix} v_{xI} & v_{yI} & v_{zI} & \omega_{xI} & \omega_{yI} & \omega_{zI} \end{bmatrix}^T \quad (6.5.2 a)$$

$$f_I = \begin{bmatrix} f_{xI} & f_{yI} & f_{zI} & m_{xI} & m_{yI} & m_{zI} \end{bmatrix}^T \quad (6.5.2 b)$$

Donde ω_{xi} serán las componentes de la velocidad angular y m_{yi} serán las componentes del momento al nodo I.

La aproximación del elemento finito al movimiento en términos de los nodos esclavos es

$$X(\xi, t) = \phi(\xi, t) = \sum_{I^- = 1}^{n_N} X_{I^-}(t) N_{I^-}(\xi) + \sum_{I^+ = 1}^{n_N} X_{I^+}(t) N_{I^+}(\xi) = \sum_{I^* = 1}^{2n_N} X_{I^*}(t) N_{I^*}(\xi) \quad (6.5.3)$$

Donde $N_{I^*}(\xi)$ serán estándares isoparametricos, funciones de forma de tres dimensiones y ξ serán las coordenadas del elemento principal. La notación para el numerado de los nodos esclavos es idéntico al obtenido en vigas visto en la sección 6.3.1. Renombrando que un elemento Lagrangiano, las

coordenadas del elemento puede ser usada como substitutos del material coordenados .El campo de velocidad del elemento continuo principal esta dado por

$$V(\xi, t) = \sum_{I^*=1}^{2n_N} \dot{X}_{I^*}(t) N_{I^*}(\xi) = \sum_{I^*=1}^{2n_N} V_{I^*}(t) N_{I^*}(\xi) \quad (6.5.4)$$

Donde $\dot{X}_{I^*} = V_{I^*}$ es la velocidad del nodo esclavo I^* , ya que el movimiento del cascaron CB es lineal en ξ , este puede ser escrito como

$$x = x^M + \zeta x^B \equiv x^M + \bar{\zeta} p \quad (6.5.5a)$$

$$\begin{aligned} x^B &= h^+ p & \text{y } \bar{\zeta} &= \zeta h^+ \text{ cuando } \zeta > 0, \\ x^B &= h^- p & \text{y } \bar{\zeta} &= \zeta h^- \text{ cuando } \zeta < 0 \end{aligned} \quad (6.5.5 b)$$

Las ecuaciones (6.5.3) y (6.5.5a) serán dos descripciones alternativas del mismo movimiento .Las formas son funciones de tres variables independientes espaciales ,una representación del continuo ,mientras que la posterior es una función de dos variables dependientes ,las coordenadas curvilíneas en la superficie de referencia.

El campo de velocidad es obtenido pero tomando las derivadas del tiempo para el material de (6.5.5):

$$V = V^M + \zeta V^B \equiv V^M + \bar{\zeta} \dot{p} + \dot{\bar{\zeta}} p \quad (6.5.6)$$

Las velocidades de los nodos esclavos serán posteriormente expresados en términos de las velocidades traslacionales de los nodos maestros $v_I^M = [v_{xI}^M, v_{yI}^M, v_{zI}^M]^T$ y las velocidades angulares del director $\omega I = [\bar{\omega}_{xI}, \bar{\omega}_{yI}, \bar{\omega}_{zI}]^T$. Escribiendo (6.5.6) a los nodos y usando (6.2.1) obtenemos

$$V_{I^+} = V_I^M + h^+ \omega_I x p_I + \dot{h}_I^+ p_I, \quad V_{I^-} = V_I^M + h^- \omega_I x p_I + \dot{h}_I^- p_I \quad (6.5.7)$$

Donde h_I^+ y h_I^- serán las razones de cambio en los espesores.

Como establecimos en la tercera suposición el balanceo del momentum (o equilibrio en estática) no esta forzada ,para el movimiento relativo en la dirección p .Para que los términos involucrados \dot{h}_I^+ y \dot{h}_I^- en las expresiones para la velocidad deformación sean descendidos en la construcción de las ecuaciones de movimiento .Estos serán también omitidos en la computarización del cambio de deformaciones porque los espesores están obtenidos de las ecuaciones constitutivas para la condición de esfuerzo plano

.Esto es confuso ,ya que mientras la inextensibilidad sea usada para omitir el momento de balance debido al movimiento relativo en la dirección p ,el cambio de espesores no es despreciable en la computarización de las fuerzas internas nodales .

Para obtener las relaciones entre las velocidades nodales para la tripleta de nodos a lo largo de una fibra ,expresamos el producto cruz en (6.5.7)como $h^+ \omega_I \times p_I = \Lambda^+ \omega_I$, donde Λ^+ es el tensor skewsimetrico dado por $\Lambda_{ij}^+ = h^+ e_{ijk} p_k$.Entonces usando una relación similar para V_{I^-} podemos relacionar las velocidades nodales esclavas para las velocidades nodales maestras por

$$\begin{Bmatrix} V_{I^-} \\ V_{I^+} \end{Bmatrix} = T_I \dot{d}_I \quad (\text{no se suma sobre } I) \quad (6.5.8)$$

$$v_{I^-} = [v_{xI^-}, v_{yI^-}, v_{zI^-}]^T, \quad v_{I^+} = [v_{xI^+}, v_{yI^+}, v_{zI^+}]^T \quad (6.5.9)$$

$$T_I = \begin{bmatrix} I & \Lambda^- \\ I & \Lambda^+ \end{bmatrix} \quad (6.5.10)$$

$$\Lambda^- = -h_I^- \begin{bmatrix} 0 & p_z & -p_y \\ -p_z & 0 & p_x \\ p_y & -p_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z_{I^-} - z_I & y_I - y_{I^-} \\ z_I - z_{I^-} & 0 & x_{I^-} - x_I \\ y_{I^-} - y_I & x_I - x_{I^-} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5.11)$$

$$\Lambda^+ = h_I^+ \begin{bmatrix} 0 & p_z & -p_y \\ -p_z & 0 & p_x \\ p_y & -p_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z_{I^+} - z_I & y_I - y_{I^+} \\ z_I - z_{I^+} & 0 & x_{I^+} - x_I \\ y_{I^+} - y_I & x_I - x_{I^+} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5.12)$$

Esto puede ser visto en (6.5.11) y (6.5.12) que el espesor actual será usado en la computarización de la fuerza nodal maestra ,al que contabilizaremos para la extensibilidad de las fibras.

6.5.6.Coordenadas locales .

Las fuerzas nodales esclavas para el cascaron CB ,las fuerzas en los nodos del elemento continuo principal ,serán obtenidos por el procedimiento usual para el elementos continuos .Sabemos que la suposición del esfuerzo plano y que la computarización del cambio de espesores deberá ser considerado .Para este propósito un sistema coordenado laminar corrotacional con vectores base \hat{e}_i ,esta establecido a cada punto de cuadratura , y la actualización constitutiva es hecha en este sistema coordenado.

Varios métodos están disponibles para establecer los vectores base \hat{e}_i . El método dado a bajo es de Hughes (1987). El objetivo es encontrar un grupo ortogonal de vectores base \hat{e}_i tan cerradas como sean posible a los vectores base covariante g_x dado por

$$g_x = \frac{\partial x}{\partial \xi^\alpha} \quad (6.5.13)$$

Los vectores g_x definen un plano tangente a la lamina ,y los vectores base \hat{e}_i también se situaran en este plano .Los vectores base normal a este plano están dados por

$$\hat{e}_z = \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|} \quad (6.5.14)$$

Los vectores base están desarrollados en dos pasos .Primero un grupo auxiliar de vectores están definidos por

$$a = \frac{g_1}{\|g_1\|} + \frac{g_2}{\|g_2\|}, \quad b = \hat{e}_z \times a \quad (6.5.15)$$

Los nuevos vectores base están entonces dados por

$$\hat{e}_x = \frac{a-b}{\|a-b\|}, \quad \hat{e}_y = \frac{a+b}{\|a+b\|} \quad (6.5.16)$$

Las componentes laminares pueden ser evaluadas en dos formas:

1.-Computarice D y transforme las componentes por

$$\hat{D} = R_{lam}^T D R_{lam}, \quad (R_{ij})_{lam} = e_i \cdot \hat{e}_j \quad (6.5.17)$$

2.-En cada punto computarice la velocidad y luego el cambio de deformación en el sistema coordenado laminar usando

$$\hat{v}_I = R_{lam}^T v_I, \quad \hat{X}_I = R_{lam}^T X_I, \quad \hat{L} = \hat{v}_I N_{I,x} = \hat{v}_I N_{I,\xi}^{\hat{x}^{-1}}, \quad \hat{D} = \frac{1}{2}(\hat{L} + \hat{L}^T) \quad (6.5.18)$$

El procedimiento estándar para elementos continuos Lagrangianos de tres dimensiones serán usados para evaluar todas las componentes excepto \hat{D}_{zz} , la componente a través de todo el espesor \hat{D}_{zz} esta computarizada por la condición de esfuerzo plano $\hat{\sigma}_{zz} = 0$.

6.5.7.-Ecuaciones constitutivas.

Algunas de las leyes materiales del continuo pueden ser usadas para cascarones CB .Por lo mismo la condición de esfuerzo plano deberá ser forzada .Los métodos para imponer restricciones ,tales como el método multiplicadores de Lagrange ,método de penalización ,pueden ser usado para imponer estas restricciones.

Para un modelo material en cambio de forma , la restricción de esfuerzo plano puede ser aplicado como sigue .La razón de las ecuaciones actualizadas serán escritas en la forma de Voigt :

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{yy} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{xz} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{zz} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{yy} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{xz} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{yy} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{xz} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ 0 \end{pmatrix}^n + \Delta t \begin{bmatrix} \hat{C}_{aa} & \hat{C}_{ab} \\ \hat{C}_{ab}^T & \hat{C}_{bb} \end{bmatrix}^{lam} \begin{pmatrix} \hat{D}_{xx} \\ \hat{D}_{yy} \\ 2\hat{D}_{xy} \\ 2\hat{D}_{xz} \\ 2\hat{D}_{yz} \\ \hat{D}_{zz} \end{pmatrix}^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.5.19)$$

Permitiendo $\hat{\sigma}_{zz} = 0$, en la parte de arriba ,la condición de esfuerzo plano ha sido impuesta .Las componentes de esfuerzo y velocidad de deformación han sido reordenadas de la forma estándar Voigt para que las componentes de los esfuerzos permanezcan..Las matrices \hat{C}_{aa} y \hat{C}_{ab} sean ,respectivamente , submatrices de 5x5 y 5x1 de la matriz modulo tangente , \hat{C}^{lam} .Una matriz modificada \hat{C}_{aa}^P , el cual relaciona que los incrementos de esfuerzo diferente de cero puede fácilmente ser obtenidos eliminando la sexta ecuación ,quedando

$$\hat{C}_{aa}^P = \hat{C}_{aa} - \hat{C}_{ab} \hat{C}_{bb}^{-1} \hat{C}_{ab}^T \quad (6.5.20)$$

La componente de la razón de \hat{D}_{zz} es obtenida de la ultima línea de (6.5.19) y es usada para obtener el cambio de espesor como se describe abajo.

6.5.8.-Espesores .

Los espesores pueden ser obtenidos también en razones de forma directamente .Los espesores en algún tiempo están dados por

$$h^+ = \int_0^1 h_0^+ F_{\zeta\zeta}^+(+\zeta) d\zeta \quad , \quad h^- = \int_0^1 h_0^- F_{\zeta\zeta}^-(-\zeta) d\zeta \quad (6.5.21)$$

Donde $F_{\zeta\zeta}$, esta obtenida por $F_{\zeta\zeta} = F_{ii}(e_i.p)(e_j.p)$. Note que los espesores están definidos aquí difieren de la condición usual de espesores, este es la distancia entre la superficie superior e inferior a lo largo de la fibra. Las razones de h^+ y h^- están dadas por

$$\dot{h}^+ = \int_0^1 h^+ D_{\zeta\zeta}(+\zeta) d\zeta, \quad \dot{h}^- = \int_0^1 h^- D_{\zeta\zeta}(-\zeta) d\zeta \quad (6.5.22)$$

Donde $D_{\zeta\zeta}$ esta obtenida por $D_{\zeta\zeta} = \hat{D}_{ij}(\hat{e}_i.p)(\hat{e}_j.p)$. Los espesores actualizados dados aquí proveen una aproximación de 2 parámetros para el espesor. Ya que el gradiente de deformaciones es aproximadamente lineal a través del espesor en elementos isoparametricos CB, esto es usualmente suficiente. A menudo, formas de un parámetro serán usados lo cual cuenta solamente para el promedio del cambio de espesores. La forma de dos parámetros es mas exacta porque cuando la flexión es superpuesta sobrestirado, el cambio de espesor en el lado comprimido y el lado de la tensión varia. Una exactitud mas alternativo es para computarizar las nuevas ubicaciones de todos los puntos de cuadratura, pero no es usualmente necesario.

6.5.9.-Fuerzas nodales maestras .

Las fuerzas nodales internas y externas en los nodos maestros pueden ser obtenidos de las fuerzas nodales esclavas

$$f_I = T_I^T \begin{Bmatrix} f_{I^-} \\ f_{I^+} \end{Bmatrix} \quad (\text{no suman sobre I}) \quad (6.5.23)$$

Donde f_I esta dada por (6.5.2b) y T_I esta dada por (6.5.10). Las fuerzas nodales esclavas serán computarizadas por los procedimientos para un elemento continuo.

6.5.10.-Matriz masa .

La matriz masa del elemento cascaron CB puede ser obtenido por una transformación, con \hat{M} la matriz masa para el elemento continuo principal. Las submatrices 6x6 de la matriz están entonces dadas por

$$M_{ij} = T_I^T \hat{M}_{ij} T_J \quad (\text{no suma sobre I o J}) \quad (6.5.24)$$

Donde M_{ij} es la submatriz de la matriz masa asociada con los nodos I y J. En programas explícitos y para elementos de bajo orden, las matrices masa diagonal serán frecuentemente empleadas. Las submatrices de una matriz masa diagonal esta obtenida por

$$M_{II} = \begin{bmatrix} M_{II} & 0 \\ 0 & M_{rI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{II} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{II} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{II} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{M}_{xxI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{M}_{yyI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{M}_{zzI} \end{bmatrix} \quad (6.5.25)$$

Donde $M_{II} = [M_{II}]$ es la masa traslacional y $M_{rI} = [\overline{M}]$ serán las inercias rotacionales el cual corresponde para los productos de inercia alrededor de los nodos .Usualmente expresado en términos del sistema coordenada nodal .En un isotropico ,la matriz masa diagonal tiene la propiedad $\overline{M}_r = M_{xx} = M_{yy} = M_{zz}$,estas componentes serán idénticas en algún sistema coordenado .La graduación de Key-Beisinger(1971) es frecuentemente usado en códigos explícitos para evitar limitaciones en los intervalos de tiempo estable para el comportamiento del rotacional.

6.5.11.-Ecuación del momentum discreto .

Para la matriz masa diagonal dado arriba ,las ecuaciones traslacionales de movimiento en un nodo están dados por

$$M_{II} \dot{v}_I + f_I^{\text{int}} = f_I^{\text{ext}} \quad (\text{no suman sobre } I) \quad (6.5.26)$$

Donde las fuerzas nodales y velocidades nodales serán

$$f_I = \begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \\ f_{zI} \end{Bmatrix}, \quad v_I = \begin{Bmatrix} v_{xI} \\ v_{yI} \\ v_{zI} \end{Bmatrix} \quad (6.5.27)$$

El movimiento rotacional de cada nodo esta descrito por la tríada de vectores base nodales \overline{e}_{iI} , $i=1$ a 3 .La orientación de la tríada de nodo I es coincidente con las coordenadas principales del tensor momento de inercia M_{ij} del nodo .Las ecuaciones rotacionales de movimiento están expresadas en el sistema coordenado nodal ,ya que la matriz masa rotacional es invariante en estas coordenadas .Las ecuaciones de movimiento para una masa diagonal anisotropico esta dada por

$$M_{xxI} \dot{\varpi}_{xI} + (\overline{M}_{zzI} - \overline{M}_{yyI}) \varpi_{yI} \varpi_{zI} + \overline{m}_{xI}^{\text{int}} = \overline{m}_{xI}^{\text{ext}} \quad (6.5.28)$$

$$M_{yyI} \dot{\bar{\omega}}_{yI} + (\bar{M}_{xxI} - \bar{M}_{zzI}) \bar{\omega}_{xI} \bar{\omega}_{zI} + \bar{m}_{yI}^{\text{int}} = \bar{m}_{yI}^{\text{ext}} \quad (6.5.29)$$

$$M_{zzI} \dot{\bar{\omega}}_{zI} + (\bar{M}_{yyI} - \bar{M}_{xxI}) \bar{\omega}_{xI} \bar{\omega}_{yI} + \bar{m}_{zI}^{\text{int}} = \bar{m}_{zI}^{\text{ext}} \quad (6.5.30)$$

Donde las barras indican las componentes en el sistema nodal .La parte de arriba serán las ecuaciones bien conocidas de Euler .Estas son no lineales en las velocidades angulares pero los términos cuadráticos desaparecen para una matriz masa isotropica rotacional.

6.5.12.-Rigidez tangente .

Las matrices rigidez tangente y carga rigidez puede ser obtenido de que el elemento continuo principal por la transformación estándar para matrices rigidez

$$K_{ij} = T_i^T \bar{k}_{ij} T_j \quad (\text{no suman sobre } I \text{ o } J) \quad (6.5.31)$$

Donde \bar{k}_{ij} es la matriz rigidez tangente del elemento continuo y T_i esta dado en (6.5.10) .Las matrices tangencial y carga rigidez para elementos continuos .

6.5.13.-Formulación de cinco grados de libertad.

Como veremos ,el movimiento de un cascaron en la ausencia de torceduras y Uniones pueden ser trotados con cinco grados de libertad por nodos .En este caso ,las velocidades nodales en un nodo maestro será

$$v_I = [v_{xI}, v_{yI}, v_{zI}, \bar{\omega}_{xI}, \bar{\omega}_{yI}]^T \quad (6.5.32)$$

Donde las componentes de velocidad angular $\bar{\omega}_{zI}$ han sido omitidas .En una formulación de cinco grados de libertad ,las componentes de velocidad angular deberá ser expresadas en el sistema nodal el cual rota con el nodo .Las fuerzas nodales serán conjugadas a las velocidades nodales en potencia y están dadas por

$$f_I = [f_{xI}, f_{yI}, f_{zI}, \bar{m}_{xI}, \bar{m}_{yI}]^T \quad (6.5.33)$$

Las relaciones entre las velocidades nodales maestras serán y esclavas para cada tripleta de nodos a lo largo de una fibra para una formulación de cinco grados de libertad puede ser escrita en forma matricial similar a (6.5.8-12)

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_{I^-} \\ \bar{v}_{I^+} \end{Bmatrix} = T_I \dot{d}_I \quad (\text{no suman sobre } I) \quad (6.5.34)$$

Donde las velocidades nodales serán expresadas en el sistema de coordenadas nodales del nodo maestro ,por conveniencia en la parte de arriba

$$\bar{v}_I = [\bar{v}_{xI}, \bar{v}_{yI}, \bar{v}_{zI}]^T, \quad \bar{v}_{I^+} = [\bar{v}_{xI^+}, \bar{v}_{yI^+}, \bar{v}_{zI^+}]^T \quad (6.5.35)$$

$$\dot{\bar{d}}_I = [\bar{v}_{xI}, \bar{v}_{yI}, \bar{v}_{zI}, \bar{\omega}_{xI}, \bar{\omega}_{yI}]^T \quad (6.5.36)$$

$$T_I = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \Lambda^- \\ I_{3 \times 3} & \Lambda^+ \end{bmatrix}, \quad \Lambda^- = -h_I^- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^+ = -h_I^+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5.37)$$

La transformación de las fuerzas nodales esclavas a fuerzas nodales maestras están dadas por (6.5.23).La formulación de los cinco grados de libertad mejor ajustados con la teoría de cascarones CB que hace la formulación de seis grados de libertad .El hecho es que cuando el cascaron es plano , la rigidez es singular para una formulación de seis grados de libertad .De otra manera ,una formulación de cinco grados de libertad deberá ser modificada en las esquinas y se le incorpora características estructurales tales como regidores .Para el software con un numero variable de grados de libertad en un nodo ,usando seis grados de libertad solamente en los nodos donde los grados de libertad adicional serán requeridos es probablemente mejor.

6.5.14.-Rotaciones largas.

El tratamiento de rotaciones largas en tres dimensiones será descrito a continuación .Este tema a sido extensamente visto en libros sobre métodos del elemento finito para largos desplazamiento y dinámica de multicuerpos ,para enumerar ,ver Crisfield (1991) o Shabana(1998).Las largas rotaciones son usualmente tratadas por ángulos de Euler en textos clásicos de dinámica .Por consiguiente ,los ángulos de Euler son no únicas para ciertas orientaciones y dirigida para ecuaciones de movimiento dificultoso .Por lo mismo técnicas alternativas las cuales son claras y mas robustas serán usualmente empleadas.

6.5.15.-Teorema de Euler.

Un concepto fundamental en rotaciones largas es el teorema de Euler .Este teorema establece que en alguna rotación del cuerpo rígido ,ahí existe una línea la cual permanece fijada ,el cuerpo rota alrededor de esta línea ,Para este las formulas del teorema general para la matriz rotación puede ser desarrollada.

Considere la rotación del vector r para un ángulo θ alrededor del eje definido por el vector unitario $e \equiv e_1$.El vector después que la rotaciones nombrada por r' como se visualiza en la figura 6.10.La matriz rotación R relaciona r' a r por

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{r} \quad (6.5.38)$$

Donde R esta por ser determinado .Primero derivaremos la fórmula

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \sin\theta \mathbf{e} \times \mathbf{r} + (1 - \cos\theta) \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \quad (6.5.39)$$

Donde \mathbf{e} es un vector unitario a lo largo del eje de rotación cuya existencia sabemos por el teorema de Euler .El esquema en la derecha de la figura 6.10 muestra el cuerpo como visualizado a lo largo del eje \mathbf{e} .Este esquema puede ser visto en

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r} + \alpha \sin\theta \mathbf{e}_2 + \alpha(1 - \cos\theta) \mathbf{e}_3 \quad \text{donde } \alpha = r \sin\phi \quad (6.5.40)$$

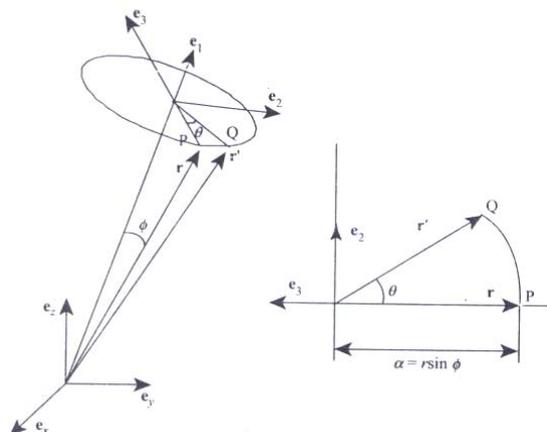


Figura 9.10.- Rotación de un vector \mathbf{r} visto como una rotación alrededor de un eje fijado $\theta = \theta \mathbf{e}$ acorde al teorema de Euler ;sobre la derecha superior, visto a lo largo del eje θ como se muestra

De la definición del producto cruz esto da que

$$\alpha \mathbf{e}_2 = r \sin\phi \mathbf{e}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{r}, \quad \alpha \mathbf{e}_3 = r \sin\phi \mathbf{e}_3 = \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \quad (6.5.41)$$

Sustituyendo la parte de arriba $\alpha \mathbf{e}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{r}$ y $\alpha \mathbf{e}_3 = \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r})$, dentro de (6.5.40) obtenemos (6.5.39) en forma matricial .Renombrando de que un tensor skew-simétrico puede ser definido por $\Omega_{ij}(\mathbf{v}) = -\epsilon_{ijk} v_k$ donde ϵ_{ijk} es el símbolo de permutación ,del cual

$$\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \Omega(\mathbf{v}) \mathbf{r} \quad \text{donde } \Omega(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5.42)$$

para algún vector \mathbf{v} . De la definición de $\Omega(\mathbf{v})$ esto sigue que

$$\Omega(\mathbf{e})\mathbf{r} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}, \quad \Omega^2(\mathbf{e})\mathbf{r} = \Omega(\mathbf{e})\Omega(\mathbf{e})\mathbf{r} = \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \quad (6.5.43)$$

La parte de arriba es ilustrada en la figura 6.11 a lo largo con potencias elevadas de $\Omega(v)$

Reemplazando los productos cruz en (6.5.39) con el producto vector obtenemos

$$\dot{r} = r + \text{sen}\theta\Omega(e) r + (1 - \text{cos}\theta)\Omega^2(e) r \quad (6.5.44)$$

Comparando de (6.544) con (6.5.38) obtenemos

$$R = I + \text{sen}\theta\Omega(e) + (1 - \text{cos}\theta)\Omega^2(e) \quad (6.5.45)$$

escribiendo la matriz rotación, esto es a menudo útil para definir una matriz columna θ dado por $\theta = \theta e$. En términos de $\Omega(\theta)$, (6.5.45) podemos escribir como

$$R = I + \frac{\text{sen}\theta}{\theta}\Omega(\theta) + \frac{1 - \text{cos}\theta}{\theta^2}\theta\Omega^2(\theta) \quad (6.5.46)$$

6.6.-TEORIA DE CASCARONES CB .

6.6.1.-Movimiento.

El objetivo es examinar el movimiento como una función de dos variables independientes, ξ y η , y el resultante campo de deformación de velocidad. En lo siguiente, ξ y η serán coordenadas curvilíneas sobre la superficie del cascaron. Este juega el mismo papel, como las correspondientes coordenadas del elemento por lo que proveeremos de una parametrización de la superficie de referencia del cascaron. La superficie de referencia del cascaron es un múltiple de dos dimensiones en el espacio de tres dimensiones.

De acuerdo a la suposición modificada de Mindlin-Reissner las fibras permanecen rectas, como el movimiento deberá ser lineal en ζ :

$$x(\xi, \eta, \zeta, t) = x^M(\xi, \eta, t) + \zeta h^-(\xi, \eta, t)p(\xi, \eta, t) \quad \text{para } \zeta < 0 \quad (6.6.1 a)$$

$$x(\xi, \eta, \zeta, t) = x^M(\xi, \eta, t) + \zeta h^+(\xi, \eta, t)p(\xi, \eta, t) \quad \text{para } \zeta > 0 \quad (6.6.1 b)$$

Donde $h^-(\xi, \eta, t)$ y $h^+(\xi, \eta, t)$ serán las distancias de la superficie de referencia a la superficie superior e inferior a lo largo del director, respectivamente. La mitad de la superficie inicial es supuesta a ser la parte media entre las superficies superior e inferior, como $h_0^- = h_0^+ = \frac{h_0}{2}$. La parte de arriba puede también ser escrita en la forma compacta (6.5.5 a):

$$x = x^M + \zeta x^B \equiv x^M + \bar{\zeta} p \quad (6.6.2)$$

Donde x^B debido a la flexión como se definió en (6.5.5b) y $\bar{\zeta}$ es también definida en (6.5.5b). Las coordenadas del cascaron en la configuración original será obtenida por la evaluación de (6.6.2) al tiempo inicial:

$$X(\xi, \eta, \zeta) = x^M(\xi, \eta) + \bar{\zeta}_0 p_0(\xi, \eta) = x^M + \zeta x^B \quad (6.6.3)$$

Donde $p_0 = p(\xi, \eta, 0)$ y $\bar{\zeta}_0$ esta definido en términos de la configuración inicial. El campo de desplazamiento es obtenido pero tomando la diferencia de (6.6.2) y (6.6.3):

$$u(\xi, \eta, \zeta, t) = u^M + \zeta u^B = u^M + \bar{\zeta}_0 (p - p_0) + \Delta \bar{\zeta} p = u^M + \zeta u^B + \Delta \bar{\zeta} p \quad (6.6.4)$$

donde

$$u^M = x^M - X^M, \quad u^B = x^B - X^B = \frac{h_0}{2} (p - p_0)$$

$$\Delta \bar{\zeta} = \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0 = \zeta (h^+ - h_0^+) \text{ para } \zeta > 0, \quad \Delta \bar{\zeta} = \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0 = \zeta (h^- - h_0^-) \text{ para } \zeta < 0, \quad (6.6.5)$$

Como puede ser visto arriba, el desplazamiento de flexión u^B depende sobre la diferencia entre dos vectores unitarios, $p - p_0$. Por lo tanto el desplazamiento de flexión u^B puede ser descritos por dos variables dependientes. El movimiento puede entonces ser descrito por cinco variables dependientes, las tres de traslación de la superficie media $u^M = [u_x^M, u_y^M, u_z^M]$, y las dos las cuales describen el desplazamiento de flexión, u^B .

El campo de velocidad es obtenido tomando la derivada del tiempo del material del desplazamiento o movimiento, usando (6.2.1) para describir el avance del director:

$$v(\xi, \eta, \zeta, t) = v^M(\xi, \eta, t) + \bar{\zeta} \omega(\xi, \eta, t) \times p + \dot{\bar{\zeta}} p \quad (6.6.6)$$

El ultimo termino de arriba representa la velocidad de cambio en los espesores. El campo de velocidad de arriba puede también ser escrita como.

$$v(\xi, \eta, \zeta, t) = v^M + \zeta v^B + \dot{\bar{\zeta}} p$$

$$\text{donde } \begin{cases} v^B = h^+ \omega \times p \\ v^B = h^- \omega \times p \end{cases} \text{ para } \zeta < 0 \text{ y para } \zeta > 0 \quad (6.6.7)$$

Como puede ser visto arriba, la velocidad de algún punto en el cascaron consiste de la suma de la velocidad de el plano de referencia v^M , la velocidad de flexión v^B , y la velocidad debido a el cambio en espesores. La velocidad de flexión depende sobre la velocidad angular del director. La componente de la velocidad angular paralela a el director p es irrelevante ya que estas causas no

cambian en P. Esta componente es llamada la componente de perforación o la perforación de manera corta. Ya que el perforador no afecta a la deformación, esto es aparente que una formulación de cinco grados de libertad es más consistente con cascarones CB que una formulación de seis grados de libertad.

6.6.2.-Velocidades de deformación.

En lo siguiente examinaremos las velocidades de deformación para la teoría de cascarones CB. Por simplicidad, consideremos un cascarón con la superficie de referencia a la superficie media y despreciemos los cambios en los espesores. Las velocidades de deformación serán estudiadas usando una expresión en series alrededor de la superficie media. Las formulas resultantes no serán recomendadas para cálculos excepto cuando el esfuerzo resultante sea usado. El análisis está basado por Belytschenko, Wong y Stolarski (1989). Por simplicidad, es supuesto que el director es colineal con la normal y que el plano de referencia es el plano medio, por lo tanto $h^+ = h^- = h/2$.

Considere la derivada de una función genérica $f(x)$. Nuestro objetivo es el expandir la expresión para la velocidad de deformación en potencias de $\xi = \zeta h / 2R$, con lo cual será pequeño para un cascarón. Por consiguiente los términos de alto orden como el cuadrático puede ser despreciados. Empezaremos la forma tridimensional a la regla de cadena (note que hemos escrito la transpuesta de forma usual):

$$\begin{Bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \\ f_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \hat{x}_{,\xi}^T f_{,x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} & \hat{z}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} & \hat{y}_{,\eta} & \hat{z}_{,\eta} \\ \hat{x}_{,\zeta} & \hat{y}_{,\zeta} & \hat{z}_{,\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi}^M + \zeta \hat{x}_{,\xi}^B & \hat{y}_{,\xi}^M + \zeta \hat{y}_{,\xi}^B & \hat{z}_{,\xi}^M + \zeta \hat{z}_{,\xi}^B \\ \hat{x}_{,\eta}^M + \zeta \hat{x}_{,\eta}^B & \hat{y}_{,\eta}^M + \zeta \hat{y}_{,\eta}^B & \hat{z}_{,\eta}^M + \zeta \hat{z}_{,\eta}^B \\ \hat{x}^B & \hat{y}^B & \hat{z}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{Bmatrix} \quad (6.6.8)$$

Consideremos solamente las derivadas x y x . Por lo que el sistema de coordenadas es corrotacional, en el plano de referencia $\hat{z}_{,\zeta} \cong h/2, \hat{z}_{,\eta} = \hat{z}_{,\xi} = 0$. Invirtiendo la parte de arriba en forma cerrada para la submatriz asociada con las derivadas x y y dando

$$(6.6.9)$$

Donde

(6.6.10)

Expresando el movimiento de flexión x^B en términos de las componentes del director en (6.6.9) dándonos

(6.6.11)

notamos que el radio de curvatura R esta dado por

(6.6.12)

Pero B en (6.11) es del orden R^{-1} y puede ser reescrito (6.6.11) como

$$= (A + \xi RB) \text{ donde } b = \quad (6.6.13)$$

Suponemos ahora que

Donde R es el radio de curvatura. La segunda ecuación de arriba sigue del primer ya que $|\xi| \leq 1$. Esta condición en la razón de espesores para los radios de curvatura es un requerimiento importante para la aplicabilidad de la teoría de cascarones. Cuando esto no esta reunido, la teoría de cascarones no es aplicable.

Multiplicando ambos el numerador y el denominador de (6.6.13) por $1 - b\xi$ y borrando los términos de orden cuadrático o elevando en ξ entonces damos (después reemplazamos ξ por ζ via (6.6.14):

(6.6.15)

Donde

Note que el denominador es después la multiplicación. Por lo que solamente el termino retenido en el denominador es J_0 . El gradiente de velocidad $L = v$. La razón de deformación $\hat{D}_{\alpha\beta}$ es la parte simétrica de L , por lo que esto es también lineal a través de los espesores. Estas correspondencias de la distribución a través de los espesores de deformaciones es clásico en teorías de cascarones. Note que la aplicabilidad de la teoría clásica de cascarones y la equivalencia de la teoría de cascarones clásico y teoría CB, ambos se vinculan en la desigualdad.

6.6.3.-Esfuerzos resultantes.

La energía interna esta dada por

$$(6.6.16)$$

Donde $\hat{\sigma}_{33}=0$ por la condición de esfuerzo plano. Si notamos que \hat{e}_z y definimos las resultantes por

$$(6.6.17)$$

la energía interna esta dada por

$$(6.6.18)$$

Donde S es la superficie de referencia. La energía de arriba esta asociada con la membrana, el cortante y flexión, respectivamente.

6.6.4.-Condiciones frontera.

La frontera es un contorno C que es la intersección de la superficie lateral del sólido adyacente con la superficie de referencia del cascaron. La tracción aplicada a las superficies superior e inferior serán tratadas similarmente a las fuerzas en los cuerpos. Las condiciones frontera serán expresadas en un sistema coordenado local con vectores base \hat{e}_x , \hat{e}_y , y \hat{e}_z donde \hat{e}_y es tangente a C, \hat{e}_z es normal a la superficie de referencia y $\hat{e}_x = \hat{e}_y \times \hat{e}_z$. Las tracciones en C serán subdivididas dentro de momentos cero y de primer orden:

$$(6.6.19)$$

Solamente los dos primeros momentos tienen algún efecto en la respuesta del cascaron CB.

La energía interna esta dada por

$$(6.6.20)$$

Donde ds es la diferencia del arco de longitud a lo largo de C. Cuando la frontera se sitúa en el plano, las fuerzas externas nodales resultantes de las tracciones diferentes de cero están dadas por

$$(6.6.21)$$

$$(6.6.22)$$

$i=1$ a 3 para 6 grados de libertad, $i=1$ a 2 para 5 g.d.l

Donde $N_i(\xi)$ es la proyección de la función de forma con $\zeta=0$ sobre el extremo.

Las condiciones de frontera para los cascarones de Mindlin-Reissner es entonces

$$\hat{v}_i = \hat{v}_i^* \text{ sobre } C_{vi}^{\wedge}, \quad \hat{f}_i = \hat{f}_i^* \text{ sobre } C_{fi}^{\wedge}, \quad C_{vi}^{\wedge} \cap C_{fi}^{\wedge} = 0, \quad C_{vi}^{\wedge} \cup C_{fi}^{\wedge} = C \quad (6.6.23)$$

$$\hat{\omega}_\alpha = \hat{\omega}_\alpha^* \text{ sobre } C_{\omega\alpha}^{\wedge}, \quad \hat{m}_\alpha = \hat{m}_\alpha^* \text{ sobre } C_{m\alpha}^{\wedge}, \quad C_{\omega\alpha}^{\wedge} \cap C_{m\alpha}^{\wedge} = 0, \quad C_{\omega\alpha}^{\wedge} \cup C_{m\alpha}^{\wedge} = C \quad (6.6.24)$$

En la teoría clásica de cascarones y en la implementación de cinco grados de libertad, solamente dos componentes del momento están preescritas a lo largo de una frontera porque el grado de libertad perforado no es una variable dependiente. Por lo mismo, cuando una formulación de seis grados de libertad es usada, las tres deberán ser preescritas. Las condiciones frontera de arriba serán exactas solamente cuando la frontera C se sitúa en un plano. Para fronteras general, el momento generalizado podrá ser definido directamente en términos de las tracciones.

$$, \quad (6.6.25)$$

6.6.5.-Inconsistencias e idiosincrasias de las teorías estructurales.

Las suposiciones de Mindlin-Reissner y Kirchhoff-Love introducen varias inconsistencias. En la teoría de Mindlin-Reissner, el esfuerzo cortante $\hat{\sigma}_{xz}$ y $\hat{\sigma}_{yz}$ es constante. Por consiguiente a menos que una tracción cortante sea aplicada a las superficies superior e inferior, el cortante transversal deberá desaparecer en estas superficies por las simetrías del tensor esfuerzo. Un análisis de equilibrio en vigas elásticas muestran que el esfuerzo cortante transversal puede ser cuadrático a través de la profundidad de la viga y desaparecerá en las superficies superior e inferior. Por tanto, una distribución del esfuerzo cortante constante sobreestima la energía cortante. Un factor de corrección conocido como corrección cortante, es a menudo usado para reducir la energía asociada o con el cortante transversal, las estimaciones exactas de este factor puede ser hecho para vigas elásticas y cascarones. Para materiales no lineales, esto es dificultoso al estimar un factor de corrección cortante.

La inconsistencia de la teoría de Kirchhoff-Love es mucho mas claro, ya que la suposición cinemática resultante en un cortante transversal desaparecerá. Para una viga de las teorías estructurales, esto es conocido que el cortante deberá ser diferente de cero si el momento no es constante.

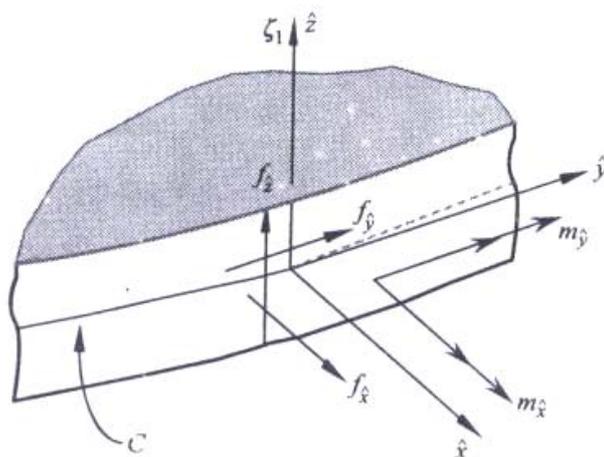


Figura 6.12.-Tracciones aplicadas y fuerzas externas resultantes y momentos.

Por lo que la suposición cinemática de Kirchoof –Love es inconsistente con el equilibrio .Sin embargo ,la comparación con experimentos muestran que esto es muy exacto ,y para cascarones delgados y homogéneos es exacto como la teoría de Mindlin-Reissner .El cortante transversal no juega un papel importante en la deformación de estructuras delgadas ,pero esta inclusión tiene un pequeño efecto .Por que de otra simplicidad ,los elementos de Mindlin-Reissner serán usado llanamente cuando los efectos de cortantes transversal sean despreciables.

Los modelos modificados de Mindlin-Reissner CB proveen adicionalmente posibilidades de errores .Si los directores no son normales a la superficie media ,los movimientos se desvían considerablemente del movimiento el cual es observado experimentalmente .La suposición del esfuerzo normal cero es inconsistente cuando una tracción normal deberá ser igual a la tracción normal aplicada en el equilibrio .Por lo mismo ,este será despreciable en teorías estructurales porque estos son mucho mas pequeños que el esfuerzo axial ;solamente una tracción pequeña de la energía es absorbida por el esfuerzo normal y este tiene un pequeño efecto sobre la deformación.

El análisis podrá ser observado por varios efectos de frontera cascarones ,ciertamente las condiciones de frontera resultan en los efectos de los extremos donde el comportamiento cambia dramáticamente en una capa fronteriza angosta .Para ciertas condiciones de frontera ,singularidades pueden ocurrir en las esquinas de la frontera.

Una razón para usar las suposiciones estructurales cinemáticas es que estos mejoran la condición de las ecuaciones discretas .Si un cascaron es modelado con elementos continuos de tres dimensiones ,los grados de libertad serán las traslaciones a todos los nodos ,los modos naturales asociados con las deformaciones a través de los espesores tienen muy largos eigenvalores .Como consecuencia ,el acondicionamiento de las linealizaciones de las ecuaciones de equilibrio o ecuaciones linealizadas para una actualización

implícita puede ser muy pobre .El acondicionamiento de estas ecuaciones cascaron es casi no tan bueno como para el modelo continuo estándar ,pero este es sustancialmente mejor que para modelos continuos de cascarones delgados .En métodos explícitos ,los modelos continuos de estructuras delgadas tienen muy pequeños intervalos de tiempos críticos debido a los eigenvalores largos de los modos a través del espesor .Los modelos del cascaron CB puede proveer muchos mas intervalos de tiempo largos críticos.

6.7.-CORTANTE Y MEMBRANAS SUJETAS .

6.7.1.-Descripción y definiciones .

Entre la mayor característica dificultosa de los elementos cascaron será el cortante y membrana sujeta .El cortante sujeto resulta de la apariencia falsa del cortante transversal .Mas precisamente ,esto surge de la inabilitilidad de muchos elementos para representar deformaciones en el cual el cortante transversal podrá desaparecer .Ya que la rigidez cortante es a menudo significativamente mas grande que la rigidez de flexión ,el cortante falso absorbe una parte larga de la energía impartida por las fuerzas externas y las predicciones de las flexiones y deformaciones pronosticadas serán también mucho mas pequeña ,de ahí el nombre de cortante sujeto.

El comportamiento observado de vigas delgadas y cascarones indica que las normales la línea media permanecen rectas y normales , y por lo tanto el cortante transversal desaparece .Este comportamiento puede ser visto como una restricción al movimiento del continuo .Mientras las restricciones normalmente no es exactamente forzada en la viga cortante o teorías cascaron CB ,la restricción normalmente aparece como una energía cortante ,un termino de penalización en la energía .El factor de penalización incrementa como el espesor decrece ,por lo que los espesores decrecen ,el cortante sujetos vienen a ser mas importante .El cortante sujeto no aparece en elementos C^1 ,ya que en elementos C^1 el movimiento esta definido como para que las normales permanezcan normales .En elementos C^0 ,la normal puede rotar relativamente a la línea media ,para los cortantes transversales extraños y sujetos pueden aparecer.

Las membranas sujetas resultan de la inhabilidad de elementos finitos cascaron para representar modos de inextensionalidad de deformación .Los cascarones se curvan sin estirarse ,tome una pieza de papel , vemos como fácilmente puede curvar este ;esto es llamado flexión de inextensionalidad .Por consiguiente, estirar una pieza de papel es casi imposible .Los cascarones se comportan similarmente ,la rigidez de flexión es pequeña pero las membrana rigidez son largas .Cuando el elemento finito no puede curvarse sin estirarse ,la energía es incorrectamente cambiada ,para la membrana energía ,resultando en predicciones no hechas de desplazamientos y deformaciones .La membrana sujeta es particularmente importante en simulación de colapciones, ya que muchos modos de doblamiento será completamente o aproximadamente inextensionales .

Los cortantes y membranas sujetas son similares a la sujeción volumétrica. Cuando una aproximación del elemento finito para movimientos no puede satisfacer una restricción, el modo de restricción es mucho más rígido que la rigidez del movimiento correcto. En el caso de sujeciones volumétricas, la restricción es incompresible, mientras para cortante y membrana sujetas las restricciones son las restricciones normales de Kirchhoff-Love y la restricción en la inextensibilidad en flexión (El cual no es nada para hacer con la inextensibilidad de fibras). Las analogías se resumen en la tabla 6.1. En este se podrá notar el comportamiento libre del cortante de cascarones delgados no es una restricción exacta. Para cascarones gruesos y vigas gruesas, algunos cortantes transversales son esperados, pero justo con elementos que sujetan volumetricamente ejecutando pobremente para materiales cercadamente incompresibles, los elementos cascaron los cuales aparecen cortantes efectuados pobremente para cascarones gruesos moderadamente cascarones gruesos a un cuando el cortante transversal aparece.

6.7.2.-Cortantes sujetos.

En lo siguiente usaremos las ecuaciones de desplazamiento deformación lineal, los cuales serán válidas solamente para pequeñas deformaciones y rotaciones. Esta descripción de cortante y membrana sujetas cerradamente seguida Stolarski, Belitschko y Lee (1994). Para examinar las causas de cortantes sujetos, consideremos el elemento viga de 2 nodos descritos. Por simplicidad, permitamos que el elemento se incline a lo largo del eje x y consideremos la respuesta lineal, lo que reemplazamos D_{ij} por la deformación lineal ε_{ij} y la velocidad para el desplazamiento en las relaciones cinemáticas. La deformación cortante transversal esta dada por la contraparte.

Tabla 6.1.-Analogía de fenómenos sujetos.

Restricción	Defecto del movimiento del E.F	Tipo de sujeción
-------------	--------------------------------	------------------

Incompresibilidad, movimiento isocórico, $J=\text{constante}, v_{i,i} = 0$	Deformación volumétrica aparece en elemento	Sujeción volumétrica
----------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------	----------------------

Restricción Kirchhoff-Love, $\hat{D}_{xz} = \hat{D}_{yz} = 0$	Deformación cortante transversal aparece en flexión pura	cortante sujeto
---------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------	-----------------

Restricción de inextensibilidad	Membrana deformación aparecen modo de flexión inextensional	membrana sujeta
---------------------------------	-------------------------------------------------------------	-----------------

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{l}(u_{x2}^M - u_{x1}^M) - \theta_1 \frac{1}{2}(1 - \xi) - \theta_2 \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad \text{donde } \xi \in [-1, +1] \quad (6.7.1)$$

Ahora considere el elemento en un estado de flexión pura :con $u_{x1} = u_{x2} = 0, \theta_1 = -\theta_2 = \alpha$. Para estos desplazamientos nodales ,(6.7.1) obtenemos

$$(6.7.2)$$

De las ecuaciones de equilibrio ,el cortante $s(x)$ podrá desaparecer cuando el momento es constante .Por lo mismo ,de (6.7.2) vemos que la deformación cortante transversal, y por lo tanto el esfuerzo cortante transversal $\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$, son diferentes de cero en todo el elemento excepto en $\xi = 0$. El cortante transversal el cual aparece en un estado de flexión pura es a menudo llamado cortante parásito.

Este cortante transversal parásito tiene un efecto largo sobre el comportamiento del elemento .Explicar la severidad del efecto ,las energías asociadas con la flexión y deformaciones cortantes serán examinadas para una lineal ,la viga elástica de profundidad unitaria y sección transversal cortante .La energía de flexión para el desplazamiento nodal de arriba esta dado por

$$(6.7.3)$$

donde las rotaciones asociadas con el modo de flexión $\theta_1 = -\theta_2 = \alpha$ han sido usado en la ultima expresión .La energía cortante para la viga esta dada por

$$(6.7.4)$$

La razón de estas dos energías es $W_{cortante} / W_{flex}$ es proporcional a $(l/h)^2$.Pero la energía cortante es significativamente mas grande que la energía de flexión cuando $l > 0$. Ya que la energía cortante puede desaparecer en flexión pura ,esta energía cortante parásita absorbe una gran parte de la energía disponible .El resultado es un significativo sobrepredicción del desplazamiento total .Por lo mismo, en contraste para volumétricas sujeciones ,donde no convergencia es observada con refinamiento ,los elementos que se sujetan en convergencia cortante a la solución correcta ,pero muy lentamente.

La ecuación (6.7.2) inmediatamente sugerida porque sobreintegrando puede aliviar el cortante sujeto en este elemento ,note que el cortante transversal desaparece en $\xi = 0$,el cual corresponde a el punto de cuadratura en cuadratura de un punto .Para esto ,el cortante transversal falso esta eliminado por la sobreintegración de los términos cortante relacionado.

El cortante sujeto en la viga de tres nodos con interpolaciones es cuadráticos es menos obvio que para la viga de dos nodos .Considere un elemento viga de tres nodos de longitud l con coordenadas principales $\xi = 2x/l, -1 \leq \xi \leq 1$. La deformación cortante en este elemento esta dado por

(6.7.5)

Considere un estado de flexión pura

Sustituyendo estos desplazamientos nodales en (6.7.5) mostramos que el cortante transversal desaparece a través del elemento. Por lo mismo consideremos otra deformación $u_y = \alpha \xi^3, \theta = u_{y,x} = 6\alpha \xi^2 / l$. El cortante podrá desaparecer ya que las normales permanecen normal. Por lo tanto, el cortante transversal dado por (6.7.5) para los desplazamientos nodales correspondientes a esta deformación es

(6.7.6)

Por lo que la aproximación del elemento finito da un cortante diferente en toda parte excepto en $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$. Por consiguiente una cantidad larga de cortante transversal ocurrirá en este elemento para el modo de cortante libre, y este no será efectivo en el modelado de vigas delgadas.

6.7.3.-Membranas sujetadas.

Para ilustrar una membrana sujeta usamos las ecuaciones de viga de debajo de Marguerre

$$, \quad (6.7.7 \text{ a } , \text{ b})$$

Donde w^0 es el desplazamiento inicial en la dirección z de la línea media a la viga, en el eje x. La variable w^0 refleja la curvatura de la de la viga, para una viga recta $w^0 = 0$. Este podrá ser esforzado para estas mientras estas relaciones cinemáticas difieren de las ecuaciones vigas CB, se aproximan cerradamente a las ecuaciones lineales CB para vigas poco profundas, donde $w^0(x)$ es pequeño.

Considere un elemento viga de tres nodos de longitud l con coordenadas principales $\xi = \frac{2x}{l}, -1 \leq \xi \leq 1$. En un modo inextensional, la membrana deformación ε_{xx} deberá desaparecer. Integrando las expresiones para $u_{x,x}^M$ en (6.7.7 a) y permitiendo $\varepsilon_{xx} = 0$ para $y=0$ obtenemos

(6.7.8)

Considere una viga en un modo de flexión pura como $\theta_1 = -\theta_3 = \alpha$, y $u_{21} = u_{23} = 0$. En la ausencia de cortante transversal este seguirá de (6.7.7 b) que

(6.7.9)

En una configuración simétrica inicial. Entonces (6.7.8) se satisface si. Evaluando la membrana deformación por (6.7.7^a) obtenemos

(6.7.10)

de esta forma, en este modo particular de inextensionabilidad de deformación, la deformación extensional es diferente de cero en donde quiera excepto $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$. Si el elemento incluye puntos donde la deformación extensional no se ha desaparecido, el elemento exhibirá una membrana sujeta.

La membrana sujeta podrá también ser explicada por la reexaminación del orden de los campos de desplazamiento. Las variables u_x, u_y y w^0 serán cuadráticas en x , y estos campos cuadráticos serán actuados en un modo de flexión pura. Ya que $u_{x,x}$ es solamente lineal, la membrana deformación (6.7.7^a) no puede desaparecer uniformemente a través del elemento en un modo puro de flexión si w^0 es diferente de cero. Para esto la membrana sujeta puede ser visto como el originador de la incapacidad de la interpolación de elemento finito para representar movimientos inextensionales. El cortante sujeta puede ser explicado similarmente como la inhabilidad de las interpolaciones del E.F para representar modos de flexión pura.

De lo anterior, un remedio obvio para membranas y cortantes sujetos podrá ser para ser igual al orden de las interpolaciones de diferentes componentes de movimientos. Por ejemplo, un campo cúbico u_x . Por lo mismo, esto es incompatible con la estructura de trabajo de elementos isoparamétricos CB, diferentes orden de interpolaciones para diferentes componentes sea difícil para programar los elementos impares para representar movimientos de cuerpo rígido lo cual es crucial para su convergencia.

Si el elemento es rectilíneo, w^0 desaparece y la membrana sujeta no ocurrirá, para un elemento recto, la flexión no genera membranas deformaciones, ver (6.7.7 a). La membrana sujeta no se presenta en elementos cascarones planos. Para esto, el elemento viga de dos nodos nunca exhibirá membranas sujetas y el elemento cascarón cuadrilateral de cuatro nodos manifiesta membranas sujetas solamente en configuraciones deformadas.

Aunque este modelo para membrana sujeta está basado en una viga poco profunda y está basado en las ecuaciones para la viga de Maguerre Shallow, este predice correctamente el funcionamiento de elementos desarrollados por la otra teoría de viga y cascarón y de elementos cascarón CB. El comportamiento mecánico de elementos cascarón es casi

independiente de la teoría de cascarones tan largo como en el elemento es poco profundo. Además, como la malla sea refinada, los elementos incrementados conforman para la hipótesis de cascarones poco profundos. Por consiguiente, la extensión de este análisis para elementos cascaron genera es muy dificultosos, particularmente cuando el elemento no es rectangular.

6.7.4.-Eliminación de las sujeciones.

Hemos mencionado en la sección 6.7.2 como el cortante sujeto puede ser evitado por la desintegración de la energía cortante con el punto de cuadratura $\xi = 0$. Restringiendo el ejemplo de la energía cortante para este punto evitamos el cortante parásito y por consiguiente el elemento abierto sujetando puede ser también rodeado por los modos multicampos diseñando el campo de deformación a apropiado. Por ejemplo, si la forma pesada de Hu-Wahizu es usada, el cortante sujeto puede ser redondeada pero haciendo el cortante transversal constante. La velocidad cortante trasversal y campo de esfuerzo cortante será:

$$\quad , \quad (6.7.11)$$

Donde α_1 y β_1 será determinado por la compatibilidad discreta y las ecuaciones constitutivas.

Suponiendo métodos de deformación aproximadas es para diseñar campos cortantes transversales y campos membranas de deformación para que los cortantes parásitos y membranas sujetas sean minimizadas. Suponiendo campos de deformación deberá ser diseñado para que el correcto rango de la matriz de rigidez sea retenido. Para la viga de 2-nodos, la suposición del campo de deformación podrá ser constante y podrá desaparecer en flexión pura. Podemos lograr estos objetivos si

$$(6.7.12)$$

El cual es un campo constante igual a D_{xy} en el punto medio. Para este campo en flexión pura, la velocidad de formación supuesta desaparecerá a través del elemento.

Para la viga CB de 3 nodos visto en la sección 6.7.2 también provee las indicaciones de cómo obtener ambos cortante y membranas sujetas. Remarcando, ambos el cortante en (6.7.6) y la membrana de deformación en (6.7.10) desaparece en los puntos $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$, los puntos de cuadratura de Gauss para dos puntos de cuadratura. Estos serán a menudo llamados puntos Barlow porque Barlow (1976) primero apuntan estos a fuera si los desplazamientos nodales de un elemento isoparamétricos de 8-nodos serán colocados por un campo cúbico, los esfuerzos en los puntos de Gauss de 2x2 tienen el mismo grado de exactitud como el desplazamiento nodal. Este

descubrimiento tiene a proveer muy útiles en el diseño efectivo de elementos cascaron .Por ejemplo, esto explica el éxito de la integración reducida introducida por Zienkiewicz ,Taylor ,y Too (1971).Para reducir la integración sobre el cortante y membranas fuerzas con cuadratura de Gauss de 2 puntos eliminando el cortante y membrana sujeta.

$$(6.7.13)$$

La forma débil de Hu-Washizu de las proyecciones de las velocidades deformaciones obtenidas de las velocidades dentro de estos campos lineales .Para las computaciones ,esto es conveniente si el campo de velocidad deformación en términos de deformación asumido de este tipo puede ser construido pero formando la ventaja de las propiedades de los puntos Barlow que justamente hemos descrito .Los campos serán

$$(6.7.14)$$

Donde D_{xy} y D_{xx} será obtenido del campo de velocidad y $\bar{\xi} = \pm 1/\sqrt{3}$.El cortante transversal desaparecerá en los movimientos considerados y el campo membrana desaparecerá en la deformación inextensional .Para esto las energías parásitas serán evitadas y el elemento no se abrirá.

6.8.-Suposiciones de los elementos deformación.

El cortante y membrana sujetas en elementos cascaron pueden también ser esquivados por los métodos deformación supuestos y la integración selectiva reducida .Por lo mismo el diseño de estos esquemas para cascarones es mas dificultoso que para las vigas o continuos .Por ejemplo, el elemento placa de cuatro nodos cuadrilaterales con integración selectiva-reductiva descrita por Hughes (1987) yHughes ,Cohen y Haroun (1978) ,el elemento todavía posee un modo de singularidad engañoso .Para mientras la integración selectiva-reductiva provee elementos robustos para continuo ,este no es útil para cascarones.

6.8.1-Suposiciones deformación de cuatro nodos cuadrilateral.

La construcción del campo cortante transversal es motivado por /(6.7.2).De estas ecuaciones podemos deducir que si la distribución del cortante transversal para una viga en flexión es lineal pero desaparece en el centro ,esta proyección sobre el campo constante también desaparece.

Primero consideremos un elemento cascaron planar y un rectangular .Un elemento cascaron rectangular se comprar similarmente a una viga :Cuando un momento de flexión es aplicado en los dos extremos como se muestra en la figura 6.13,el cortante transversal \bar{D}_{xz} podrá también desaparecer .Estas condiciones pueden encontrarse pero tomando el cortante constante ,pero permitiendo $\bar{D}_{xz} = \alpha_1$ donde α_1 es una constante, y usando la forma débil de

Hu-Washizu para evaluar α_1 . Esta suposición del cortante transversal desaparece para un momento constante. Por consiguiente, un cortante transversal constante guía a un rango deficiente y por lo mismo un elemento inestable. Para restaurar la estabilidad, una dependencia lineal en y es adicionada, por lo que el cortante transversal asumido es

$$(6.8.1)$$

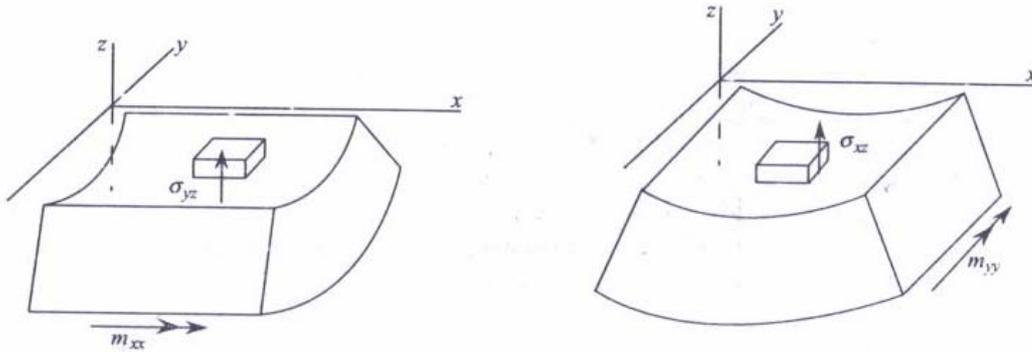


Figura 6.13.-Elemento rectangular bajo flexión pura mostrando el cortante transversal el cual está activado, si no eliminado, pero suponiendo métodos de deformación. Para la deformación mostrada m_{xx} y m_{yy} será negativa.

El término lineal no tiene efecto en el comportamiento bajo el momento de flexión m_{yy} , por que la abertura no es disturbada. Similarmente el cortante transversal \bar{D}_{yz} es también

$$(6.8.2)$$

Este concepto es una extensión para los cuadriláteros como sigue. El cortante transversal $\bar{D}_{\xi z}^{\wedge}$ es supuesta constante en la dirección ξ para evitar cortantes parásitos, lineales en la dirección η para estabilizar el elemento. Un argumento similar para $\bar{D}_{\eta z}^{\wedge}$ nos da

$$, \quad (6.8.3)$$

Donde ξ_i y β_i serán parámetros arbitrarios.

En la aplicación de la forma débil de Hu-Washizu, los parámetros ξ_i y β_i se encuentran por las ecuaciones de compatibilidad discreta. Por consiguiente, estas complicaciones la implementación. En vez de esto, la suposición de la velocidad de deformación \bar{D} puede ser interpolada en términos de D al seleccionar los puntos. Los puntos medios de los extremos son escogidos como puntos de interpolación. En estos puntos el cortante transversal desaparece para un elemento rectangular, como se ve para un elemento viga

.Subrayando ,esta propiedad del cortante desaparece en los en m los puntos medios de los extremos para un momento constante sostiene para cuadriláteros arbitrarios .Podemos tomar ventajas de esto pero permitiendo las suposición de las velocidades cortantes transversales ,haciendo

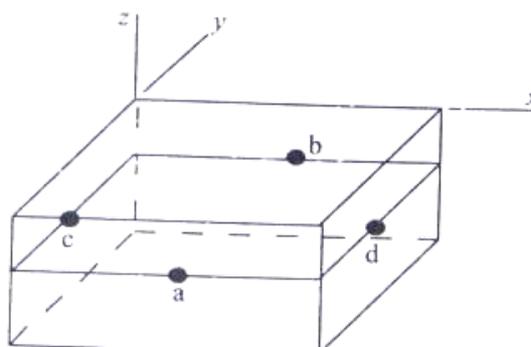


Figura 6.14.-Puntos de interpolación para cortante en cuatro nodos cuadrilateral.

(6.8.4)

(6.8.5)

Donde $\xi_a = (0, -1, 0)$, $\xi_b = (0, 1, 0)$, $\xi_c = (-1, 0, 0)$, $\xi_d = (1, 0, 0)$. Los puntos de interpolación serán mostrados en la figura 6.14. La componente $\xi\zeta$ es interpolada en la parte de arriba en vez de la componente $\hat{\xi}_z$. La razón de deformación en los puntos de interpolación son computarizados del campo de velocidad .Esta suposición del campo de deformación fue primero construido en las bases de los argumentos físicos por MacNeal (1982) y Hughues y Tezduyar (1981);la interpolación referencial fue dada por Wempner ,Talaslidis u Hwang (1982),quien uso los tres campos de la forma débil de Hu-Washizu,Dvorkin y Bathe (1984) desarrollada en el campo de deformación interpolada de arriba.

6.8.2.-Rango del elemento.

El rango suficientemente del elemento de arriba puede ser verificado por los métodos anteriores .Ilustramos esto para un elemento cascaron plano en el plano x-y .Solamente el comportamiento de verificación es considerado .Cada nodo tiene entonces tres grados de libertad relevantes: v_{zI} , ω_{xI} , ω_{yI} .Ya que estos son cuatro nodos ,el elemento tiene 12 grados de libertad .Tres de estos son el movimiento del cuerpo rígido :rotaciones alrededor de los ejes x y y y traslación en la dirección z .El rango propio del elemento es entonces 9.El campo de flexión tiene la misma estructura en términos de ω_x y ω_y como el campo plano examinado anteriormente ,pues este posee cinco campos

linealmente independientes .Los dos cortantes transversales de (6.8.3) poseen cuatro campos linealmente independientes .De lo cual el total del campo linealmente independientes es nueve ,lo cual es suficiente para proveer el rango propio del elemento.

6.8.3.-Nueve nodos cuadriláteros.

Suponemos campos de deformación para los cascarones de nueve nodos que evitan membranas y cortantes sujetos que han sido dados por Huang y Hinton (1986)y Bucelem y Bathe (1993) .En lo posterior ,la velocidad de deformación supuesta será interpolada para los puntos mostrados en la figura 6.15 a :

(6.8.6)

(6.8.7)

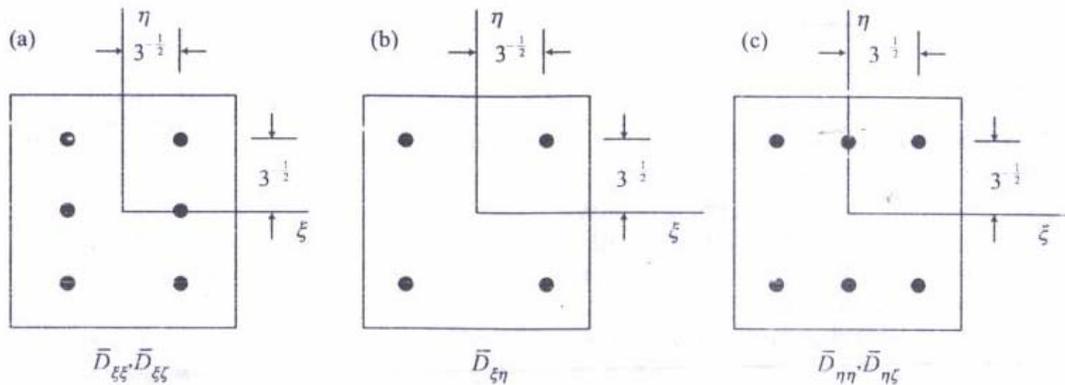


Figura 6.15.-Puntos de interpolación para suponer campos de velocidad en elementos cascaron de 9-nodos.

Donde I y J se refieren para el enumerado usual y $\xi_I = (-3^{-1/2}, 3^{-1/2}), \eta_J = (-3^{-1/2}, 0, 3^{-1/2})$, y $N_{IJ}^{(a,b)}(\xi, \eta)$ esta dada por

= (6.8.8)

$N_I^{(a)}(\xi)$ serán las interpolaciones de Lagrange de una dimensión de orden a .El ejemplo de la viga en la sección anterior quita algunos ligeraciones sobre el razonable para el de encima; a los puntos de cuadratura de Gauss,el cortante transversal desaparece en flexión y la deformación de la membrana desaparece en la flexión inextensional .Para estos el elemento no podrá exhibir cortantes transversales parásitas o deformaciones membrana .Los términos de alto orden η^2 y $\eta^2 \xi$ en los campos $\bar{D}_{\xi\xi}$ y $\bar{D}_{\xi\xi}$ proveen estabilidad .Las velocidades de deformación $\bar{D}_{\eta\eta}$ y $\bar{D}_{\eta\xi}$ serán interpoladas con los puntos

puntos mostrados en la figura 6.15 (c) .La componentes cortante $\bar{D}_{\xi\eta}$ es interpolada con los puntos mostrados en la figura 6.15 (b) usando $N_{IJ}^{(1,1)}(\xi, \eta)$.

6.9.-Elementos cuadratura de un punto.

En softwares explícitos, el mas extensamente usando de elementos cascaron será el cuadrilaterales de 4-nodos con un punto de cuadratura .Aquí una cuadratura de un punto refiere a el numero de puntos de cuadratura en el plano de referencia ,actualmente de cualquier manera de 3 a 30 o mas puntos de cuadratura será usado a través de los espesores ,dependiendo de la complejidad de la respuesta del material no lineal.

Por consiguiente, a menudo referimos a un montón de puntos de cuadratura .Estos elementos serán comúnmente usado en el análisis industrial de larga escala porque estos trabajan bien con matrices masas diagonal y será extremadamente robustos .Elementos de alto orden ,tales como los cuales están basadas en interpolaciones cuadráticas isoparametricos ,convergen mas rápidamente a soluciones mas suaves .Por consiguiente, más problemas de larga escala involucran fenómenos nonsmooth ,tales como elasto-plástico y contacto impacto ,con la potencia de aproximación mas grande de elementos de alto orden no es realizable en estos problemas.

Resumimos los elementos los cuales han sido mas frecuentemente usado en software .Estos elementos serán enumerados en la tabla 9.2, a lo largo con algunos de otras características y desventajas .Describimos entonces dos de estos elementos con mas detalle ,dibujado sobre el material el cual precede este para abreviar las descripción .El mas joven de los elementos cascaron de un punto es el elemento Belytschko-Tsay (BT) y (Belytschko y Tsay ,1983;Belytschko ,Lin y Tsay ,1984).Este esta construido para cambiar un plano ,elemento de cuatro nodos con un elemento membrana cuadrilateral de cuatro nodos plano .Como se ve en la tabla 9.2,este no responde correctamente cuando esta configuración en torsión.(este defecto manifiesta asimismo primeramente cuando uno o 2 líneas de elementos será usado para modelos vigas retorcidas).

Tabla 6.2. Elementos cascaron cuadrilaterales de cuatro nodos.

Elemento	Acrónimo	pasos prueba de parches	corrección de torcimiento	Robusteses
Belytschko-Tsay(1983)	BT	NO	NO	alto
Hughes-Liu(1981)	HL	NO	SI	alto
Belytschko-Wong-Chiang(1992)	BWC	NO	SI	moderado
Belytschko-Leviathan(1994)	BL	SI	SI	moderado y bajo
Englemann-Whirley(1990)	YASE	NO	NO	moderado

Cuadratura llena de MacNeal-Wemper(Dvorkin-Bathe,1984)	DB	NO	SI	moderado a bajo
--------------------------------------------------------	----	----	----	-----------------

El elemento Hughes-Liu(HL),parcialmente descritas por Hoghes y Liu (1981),esta basada en la teoría de cascarones CB .En códigos explícitos ,es usado con un solo grupo de puntos de cuadratura ,aunque este requiere el control de un dispositivo sensible ;las técnicas desarrolladas en Belytschko ,Lin y Tsay (1984) son usadas .Este es significativamente mas lento que el elemento BT .De otra manera ,este es muy similar en el elemento BL ,el control físico del dispositivo sensible descrito anteriormente será implementado .Este control del dispositivo sensible esta basado en un principio variacional multicampo y la aproximación deformación Dvorkin-Bthe .Para materiales elásticos, este reproduce al elemento .Por consiguiente, en la practica la no homogeneidad del estado de esfuerzo deformación previene la exactitud física del control del dispositivo del sensible ,no obstante ,esta forma de control prevé de una ventaja sustancialmente ,este puede ser incrementado para valores moderadamente largos sin sujeción ,mientras que en el elemento BT altos valores de los parámetros del control del dispositivo del tiempo resultan en cortantes sujetos.

Ambos el elemento BL y algún integrado lleno será afligido con otro defecto .En problemas con largas distorsiones ,estos elementos fallan de repente y dramáticamente abortando la simulación .El elemento BT ,en la otra manera ,es muy robusto bajo severas distorsiones y rara vez aborta una computación .Este es altamente evaluado en aplicaciones industriales .Por la ventaja de elementos de puntos de cuadratura no reside en la solamente en otra velocidad superior ;en adición ,tienden a ser mas robustos en problemas donde varias distorsiones sean esperadas ,tales como la simulación de golpes en los choques de carros.

El elemento YASE (acrónimo para “otro elemento cascaron” incorpora el campo de membrana Pian-Sumihara (1985) para mejorar la respuesta de la membrana en la viga a flexión ,para mejorar el funcionamiento de la curvatura, de otra manera ,este es idéntico a el elemento BT.

Los elementos BT,BWC, y BL están basados en una teoría discreta de Mindlin-Reissner ;este no es el continuo-basado.”Discreto” refiere al hecho que la suposición de Mindlin-Reissner sea aplicado al movimiento solamente en el punto de cuadratura .El movimiento esta restringido por el requerimiento de la normal actual para permanecer recta. Este puede ser visto de otra manera como la modificación de la suposición de Mindlin-Reissner ;mas bien que requiere que una formulación corrotacional sea usada .Aunque en las publicaciones originales el sistema coordenado corrotacional fue alineado con \hat{e}_x a lo largo de x,ξ , este puede dirigirse el las complicaciones.

El campo de velocidad esta dado por

$$v(\tilde{\xi}, t) =$$

En donde el tilde está superimpuesto en el director \tilde{p} para indicar que este pueda diferir del director como está definido en la sección 6.6; este es la normal actualizada a la superficie de referencia. La aproximación del elemento finito para el movimiento es

$$v(\tilde{\xi}, t) =$$

Convirtiendo el producto cruz a un producto matriz, la parte de arriba puede ser escrita

$$v(\tilde{\xi}, t) =$$

Donde N_i serán las funciones de forma isoparamétricas de cuatro nodos y $\Omega(w_i)$ está definida en (6.5.42). La razón de deformación corrotacional a el punto de cuadratura $\xi = \eta = 0$ está dada por

$$\hat{D}_{\alpha\beta} = \hat{D}_{\alpha\beta}^M + \tilde{\zeta} \hat{k}_{\alpha\beta}$$

donde $\hat{k}_{\alpha\beta}$ serán las razones de curvatura. La membrana deformación y membrana del dispositivo del control del tiempo sensible serán computarizadas en el sistema coordenado corrotacional por el procedimiento y ecuaciones dadas anteriormente. Las razones de curvatura a los puntos de cuadratura están dados por

Dónde $z_{,\gamma} = \hat{\gamma}^T z$ y donde $\hat{\gamma}$ se dio anteriormente. Los últimos términos en las expresiones de la razón de curvatura no desaparecen para una rotación del cuerpo rígido en un sistema coordenado arbitrario. En el sistema corrotacional, las velocidades nodales \hat{v}_x y \hat{v}_y son proporcionales a z y h en la rotación del cuerpo rígido y este puede mostrar que la razón de curvatura desaparece para una rotación del cuerpo rígido.

Ya que solamente un grupo de puntos de cuadratura será usado, el elemento es de rango deficiente sin estabilización. Este puede fácilmente ser visto por la comparación con el análisis del rango en la sección 6.8.2. Ya que el elemento carece de términos lineales en el cortante transversal y en la razón de curvatura, el rango de la flexión para cuadratura de un punto; la razón del campo de deformación consiste de tres momentos constantes y dos cortantes transversales. De este el rango de deficiencia de la parte de flexión es cuatro. El modo singular legítimo es mostrado por Hughes (1987). Tres de los modos serán comunicables, mientras uno en el modo plano retorcido, no es. Los tres modos comunicables serán controlados por control del tiempo sensible.

CAPITULO 7. – ANÁLISIS DINÁMICO ESTRUCTURAL

CASOS DE ESTUDIO: VIGAS Y PLACAS

1.-El primer caso es el análisis de una placa cuadrada ,con extremos simplemente apoyados y que tienen una presión de carga uniformemente laterales .La placa es de acero con un espesor de 0.1 pulgadas el cual tiene una longitud en sus extremos de 10 pulgadas .La presión de carga es 10 psi .Analizar la convergencia de la solución del elemento finito placa.

2.-El segundo caso examina la respuesta de una viga en cantilivered con un canal de sección transversal y una carga en su extremo final .Un canal de acero estándar de 6 x 36 pulgadas es usado .Una carga de 2400 libras se aplica en la sección transversal final.

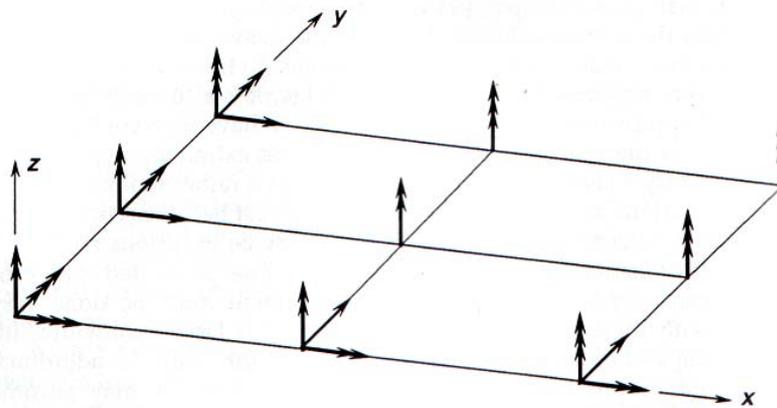
3.-En el tercer caso se necesitan encontrar los primeros cinco eigenvalores y modos de forma de una viga en cantiliver afilada .La viga de acero es de 10 pulgadas de longitud ,0.1000 pulgadas de grosor ,y este ancho varia de 2.0 pulgadas ,en la pared a 1.8 pulgadas ,en el extremo final.

4.-En este caso examinamos la respuesta transitoria de una placa en cantiliver .La placa de acero es de 2 pulgadas de longitud,1 pulgada de ancho y 0.1000 pulgada de espesor.

5.-El siguiente análisis tiene una entrada de desplazamiento armónico en una esquina cercana de amplitud 0.01 pulgadas sobre un rango de frecuencia de 1000 a 6000 hertz.

CASO I

En este caso se analiza una placa cuadrada simplemente soportada en los extremos y que tienen una carga de presión uniformemente lateral. La placa es de acero con un espesor de 0.1 pulgadas y el cual tiene una longitud lateral de 10 pulgadas. La carga de presión es de 10 psi. Una cuarta sección del modelo de cuatro elementos esta presentada en la figura 7.1. el cual será el modelo inicial. Este problema tiene una solución analítica de la teoría de placas clásica. Esta solución tendrá que ser usada para examinar la convergencia de la solución del elemento finito placa.



Figuran 7.1.-Cuatro modelos de una placa cuadrada con presión lateral.

El centro de la placa es la esquina izquierda mas alejada de la malla. las condiciones frontera de desplazamiento modelan los soportes y las restricciones simétricas. En los nodos una sola cabeza de flecha significa una restricción de traslación en la dirección de la flecha, una doble cabeza de flecha significa una restricción del vector rotación, y una triple cabeza de la flecha indica ambos la restricción de traslación y rotación en la dirección de la flecha. Nosotros restringiremos los extremos alejados del modelo contra el desplazamiento vertical para proveer la condición de soporte simple. En los extremos de simetría a lo largo del eje X la traslación y, y las rotaciones θ_x y θ_z serán restringidas. Sobre el extremo de simetría a lo largo del eje Y la traslación x, y las rotaciones θ_y y θ_z serán restringidas. Nosotros podemos aplicar o ignorar todas las restricciones de rotación de θ_z porque esta no es una rigidez actual para ese DOF en el elemento.

La forma deformada de este modelo inicial aparece en la figura 7.2 .Las condiciones frontera parecen ser apropiadas ,y el máximo desplazamiento inicial en el centro es 0.132 pulgadas .El resultado analítico es 0.148,con un error de – 7.4 por ciento .

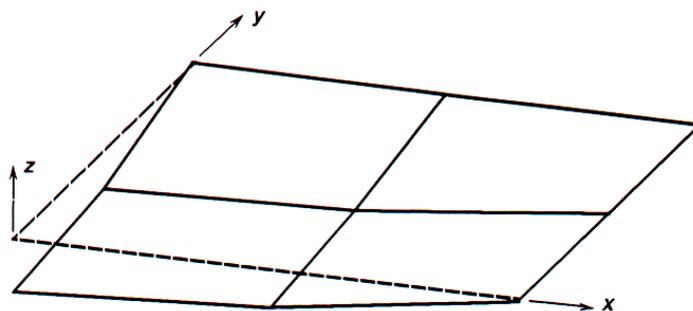


Figura 7.2.-Forma deformada de una placa cuadrada con presión lateral.

El contorno plotado de σ_x es mostrado en la figura 7.3 el máximo valor de 26.8 kpsi es 8 por ciento mas bajo que el valor analítico de 28.7 kpsi.El valor de σ_x a lo largo del extremo derecho debera ser igual a cero,y es cercanamente cierto basados en los extremos.Por lo mismo,las líneas de contorno cambian de dirección abruptamente para las variaciones de esfuerzo esperadas.

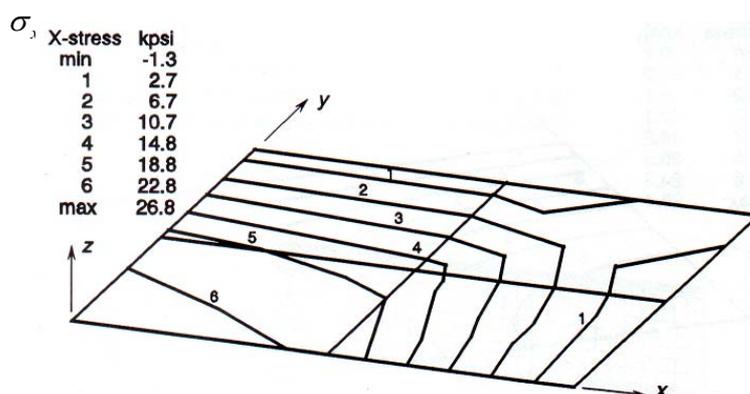


Figura 7.3.-Contorno impreso de σ_x en una placa cuadrada.

Una segunda malla propuesta dobla la densidad de la malla a 16 elementos . La máxima deflexión computarizada fue 0.145 pulgadas con un error de 2 por ciento , y el máximo esfuerzo fue de 28.0 kpsi con un error de –2.6 por ciento .

La tercera malla produce la forma deformada ilustrada en la figura 7.4 y el cual tiene una deflexión de 0.148 pulgadas, casi exactamente igual a la solución analítica. El esfuerzo planteado en la figura 7.4 da un máximo de 28.4 kpsi con un error de -1 por ciento. Note que las líneas de contorno serán mucho más suaves que en modelo de cuatro elementos.

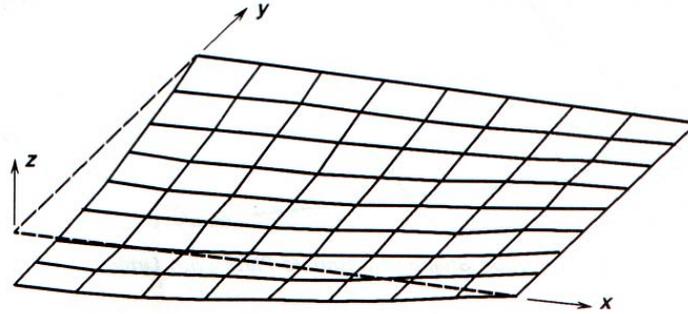


Figura 7.4.-Forma deformada refinada de una placa cuadrada.

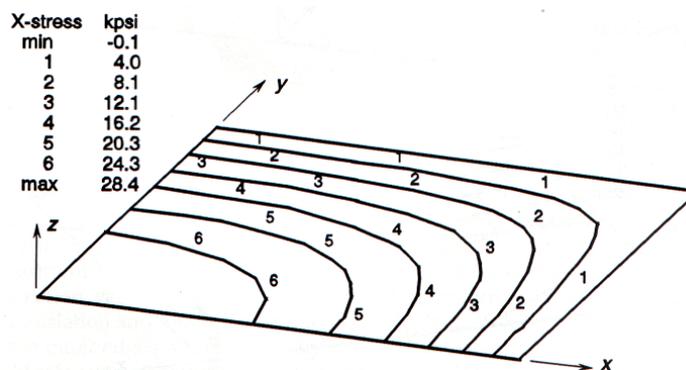


Figura 7.5.-Contorno refinado impreso de σ_x en una placa cuadrada.

El esfuerzo planteado es intuitivamente correcto con el máximo ocurrido en el centro de la placa. Por lo mismo, se observa que un valor de esfuerzo equivalente de Von Mises muestra un resultado aparentemente ilógico. El contorno planteado en la figura 7.6 muestra que el máximo esfuerzo equivalente ocurre en la esquina exterior más que en el centro de la placa. Esto ocurre ya que hay un esfuerzo cortante largo producido en el área de la esquina más que el centro deflecionado abajo, y crea el esfuerzo mayor equivalente en esta ubicación extraña.

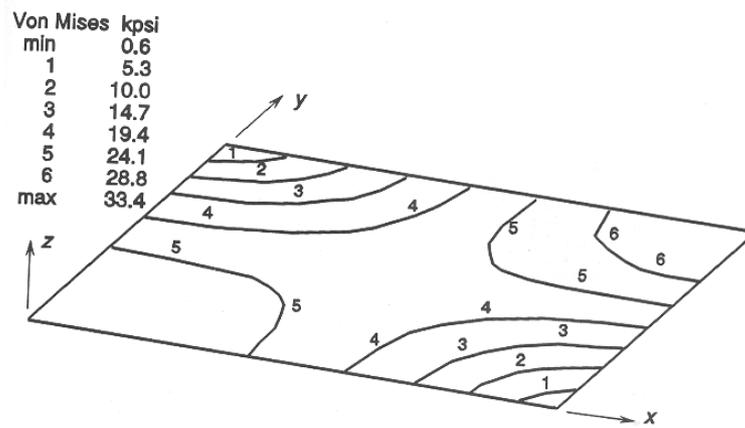


Figura 7.6.-Contorno ploteado del esfuerzo equivalente de Von Mises.

CASO II.

El segundo caso examina la respuesta de una viga en cantiliver con una sección transversal de canal con una carga en su extremo. Un estándar de canal de 6 pulgadas por 36 pulgadas de longitud está montado rígidamente en el extremo izquierdo final como se muestra en la figura 7.7. Esta figura despliega la malla del elemento finito generado usando elementos cascaron para representar la red y borde de el canal. Los elementos membrana tienen un espesor de 0.2000 pulgadas y los elementos bordes será de espesor de 0.3125 pulgadas. Una carga de 2400 libras se aplica en el extremo a través del extremo superior.

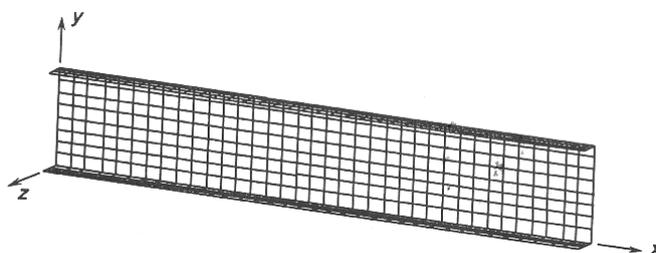


Figura 7.7.-Modelo del elemento finito de una viga con sección de canal.

Acercas de la solución, la forma deformada de la viga está mostrada en la figura 7.8. En vez del desplazamiento vertical esperado, el extremo final se deflexiona verticalmente y gira alrededor del eje x. Mientras el dibujo muestra una exageración de la medida de los desplazamientos, en este caso la deflexión vertical en el extremo es de -0.184 pulgadas y la deflexión horizontal es de 0.376 pulgadas, la medida de la parte de arriba hacia abajo nos da -0.376 pulgadas. De esto se nota que el torcimiento es mayor el movimiento horizontal y que el movimiento vertical. Además, la predicción de la solución de la deflexión vertical es de solamente -0.086 pulgadas.

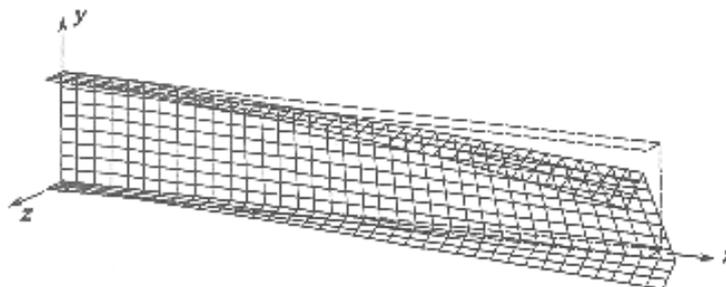


Figura 7.8.-Deformación de la viga de sección canal cargada.

El esfuerzo de flexión, σ_x , es mostrado en el contorno ploteado de la figura 7.9, cercano al extremo montado. Todos los contornos son razonables para los puntos de distribución esperados en una carga de la viga en cantiliver. Por lo mismo, este se nota más la variación a través del ancho del borde, como se

muestra en la vista ampliada .El máximo valor existente es de 54.1 kpsi .Un calculo convencional de vigas predice 19.0 kpsi ,el cual es tres veces inferior al real.

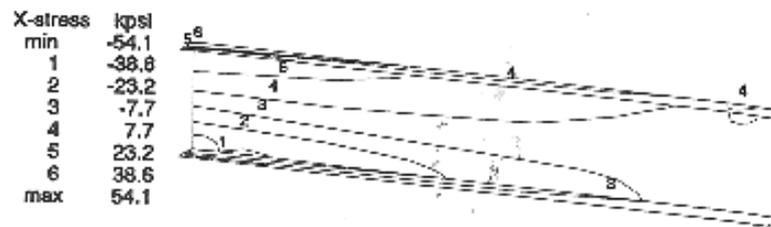


Figura 7.9.-Esfuerzo de flexión , σ_x en la viga.

Esta discrepancia existente sugiere que el análisis es erróneo o el comportamiento es realmente el camino inadecuado de la teoría de las vigas convencionales para estos tipos de problemas .Debemos de tener en cuenta y fijarnos teniendo consideración importante aquí en que las vigas con secciones transversales no simétricas deberán tener otras cargas aplicadas a través del centro de corte de la sección transversal para evitar esta reacción de torsión en la viga .El concepto de centro de corte esta usualmente presentado en libro de resistencia de materiales para localizar el centro cortante de varias formas de secciones.

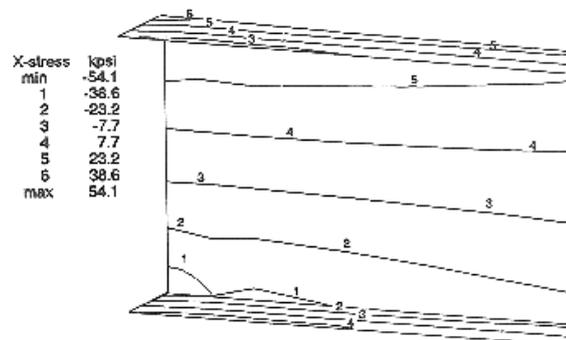


Figura 7.10.-Vista ampliada del esfuerzo de flexión.

Hay también otras soluciones aproximadas para los esfuerzos presentados en algunos textos de mecánica de materiales avanzado .Esto involucra varias suposiciones acerca de las distribuciones de los componentes del esfuerzo cortante y normal .El resultado es una combinación de los esfuerzos debido a la flexión con el esfuerzo que esta generalizado para la torsión debido ala carga paralela del centro cortante .Con esta solución el máximo valor esperado para σ_x es ahora 27.3 kpsi el cual es todavía dos veces inferior al problema anterior.

Si adicionamos una placa pequeña a el extremo del canal de la viga y aplicamos una carga a través del centro cortante ,la torsión podrá desaparecer ,y estar de acuerdo con la teoría de la viga podrá ser mejor Después de hacer esto ,la forma deformada de la viga es mostrada en la figura 7.11.La torsión es perdida y la deflexión vertical en el extremó es 0.0923 pulgadas el cual es cerca de 7 por ciento arriba del valor de la teoría de la viga

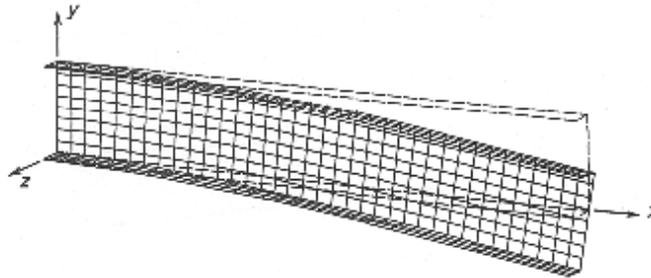


Figura 7.11.-Deformación de la viga cargada en el centro cortante.

El esfuerzo de flexión , σ_x ,del contorno plateado en la figura 7.12 muestra el contorno en mejor correlación con la teoría de la viga .Cerca de al soporte de esfuerzo tiene algunas variaciones a través de los bordes de la teoría de la viga que no predice ,pero que todos estamos de acuerdo que es razonable .El máximo valor es 24.2 kpsi el cual es alrededor de 25 por ciento mas grande que el valor de la teoría de la viga. Esto no es usual para secciones con borde delgados.

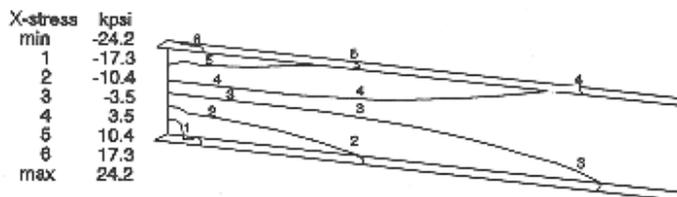


Figura 7.12.Esfuerzo de flexión de la viga cargada en el centro cortante.

En este caso de estudio convencional de la teoría de la viga es mostrado que tenemos algún error en secciones de vigas con bordes, a un cuando las cargas actúan en el centro del corte .También ,hay un largo efecto cuando la carga en las secciones no simétricas no actúan en el centro de corte .Este efecto es mucho mas largo que predijimos usando aproximaciones de métodos de solución de mecánica de materiales.

CASO III

El tercer caso analiza una viga simple en cantiliver con el extremo final cargado como se ilustra en la figura 7.13. La viga tiene una longitud de 5 veces la razón de la profundidad de la viga. El cual hace a este muy pequeño de manera que satisfaga las suposiciones de la teoría de vigas elementales. Por lo tanto, incluyendo la deformación cortante en la teoría de la viga elemental de la deflexión de la ecuación contabilizara para elongaciones pequeñas de la viga. Nosotros compararemos el análisis del elemento finito con la teoría de viga de la deflexión en el punto A y esfuerzo en el punto B.

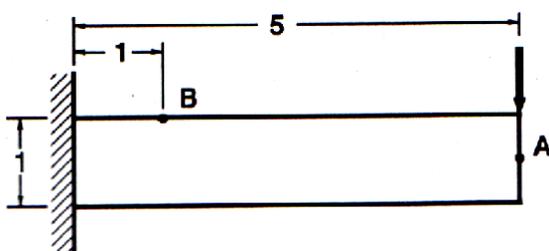


Figura 7.13.-Viga en cantiliver con carga en el extremo.

El análisis del modelo de la viga primero usa elementos triangulo pero empezando con una malla ordinaria y refinando a converger a la solución exacta. La secuencia del modelos de elementos triángulos serán mostrados en la figura 7.14. Los primeros cuatro modelos serán profundamente completa, y los últimos tres modelos usan restricciones antisimetricas a lo largo del eje neutral con un modelo medio profundo.

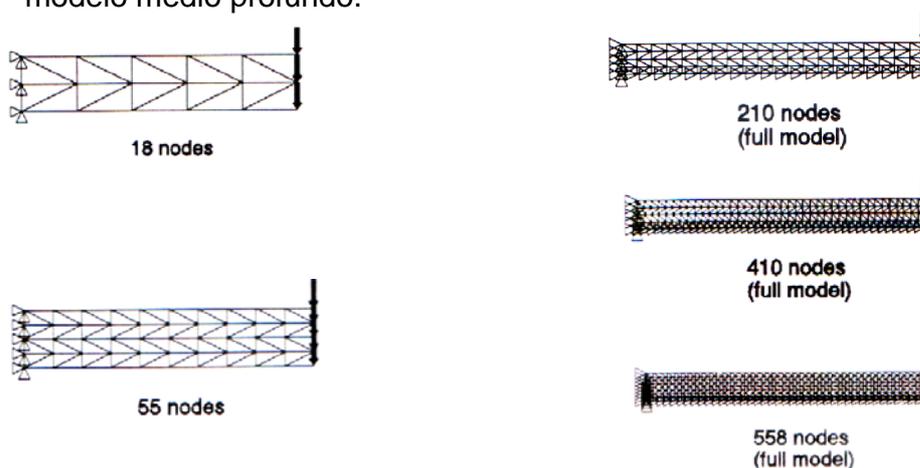


Figura 7.14.-Series de triangulo del modelo de elemento viga.

Seguimos. el modelo de la viga usa elementos cuadrilaterales con las series de modelos mostrados en la figura 7.15. El ultimo modelo de este grupo es un modelo antisimetrico medio profundo.

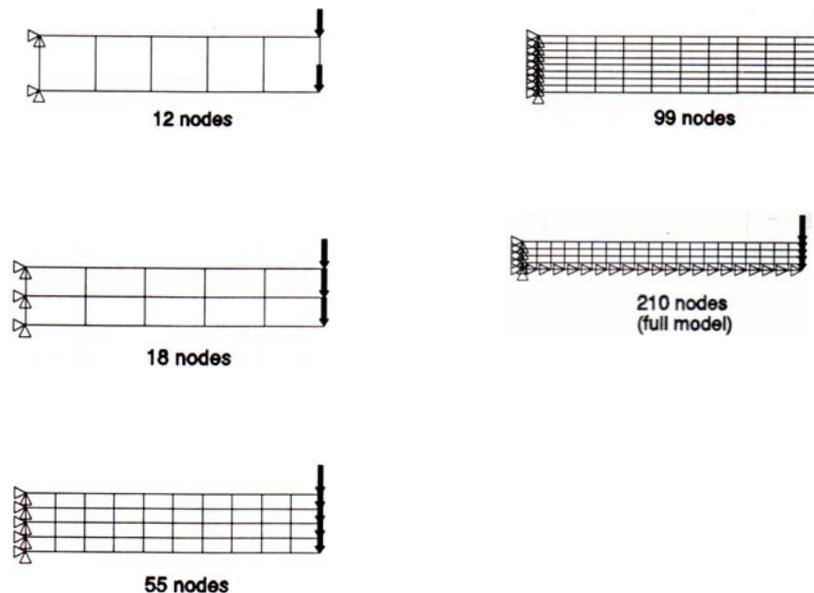


Figura 7.15.-Series de elementos cuadrilaterales del modelo del elemento viga.

El resultado de estos análisis serán resumidos en el las siguientes dos figuras .El desplazamiento del punto A el extremo de la viga para todos los modelos esta dado en la figura 7.16.Los valores para los modelos del elemento triangulo impresos con símbolos de triangulo y el modelo de elemento cuadrilaterales impresos con símbolos cuadrados .Ambos tipos de modelos producen resultados que convergen monotamente hacia la solución exacta .Por lo mismo ,el modelo del elemento cuadrilateral converge mucho mas rápidamente .El modelo del elemento triangulo de 558 nodos es menos exacto que el modelo del elemento cuadrilátero de 210 nodos.

La comparación de la convergencia del esfuerzo es aun mas dramática para el elemento cuadrilateral .La grafica del esfuerzo de flexión a el punto B esta en la figura 7.16.El esfuerzo calculado de el modelo del elemento triangulo es muy erróneo en el modelo de 558 nodos .El esfuerzo calculado en el modelo del elemento cuadrilateral converge muy rápidamente a 99 por ciento del valor teórico para el modelo de 210 nodos.

Este caso de estudio claramente muestra la dificultad en usar el elemento linear triangular en análisis de problemas de dos dimensiones .Ocasionalmente ,un elemento triangular enfatiza en hacer útil las mallas de transición para acomodar las mallas locales en el refinamiento de los modelos del elemento cuadrilateral.

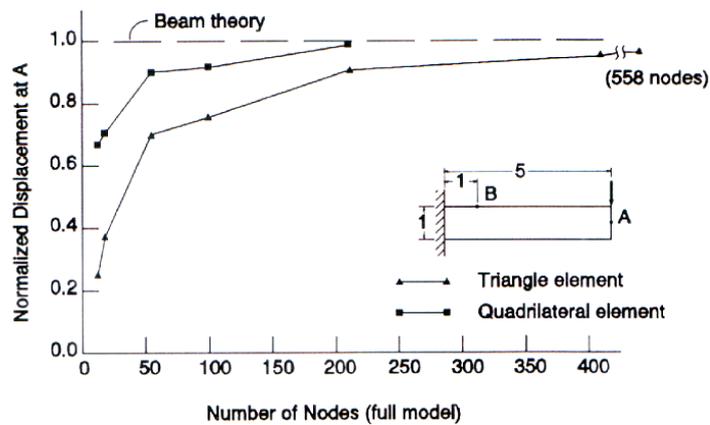


Figura 7.16.-Convergencia de desplazamiento a A con un numero de nodos.

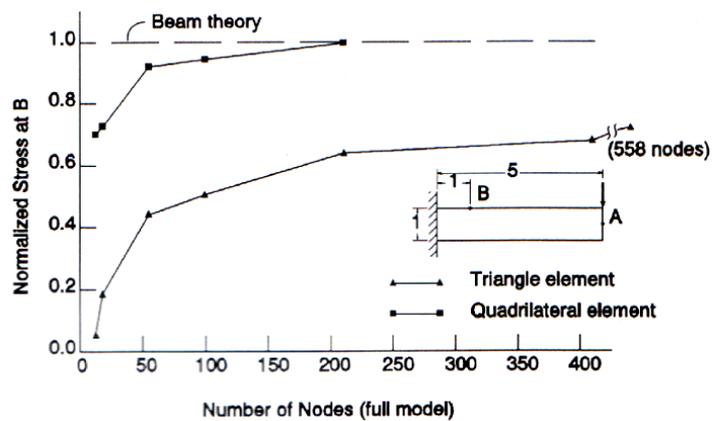


Figura 7.17.-Convergencia de esfuerzo a B con numero de nodos.

Basado en estos resultados, esta es la respuesta de desplazamiento puede ser satisfactoriamente para hacer esto no se haga seriamente degradada a todo el modelo, pero el esfuerzo computarizado en o cercano la elemento triangular puede tener largo error. Este error podrá por lo mismo estar limitado a la inmediata área.

CASO IV

Los casos de estudios empezaran con una viga simple en cantiliver afilada, para el cual encontraremos los primeros cinco eigenvalores y modos de forma. La viga de acero tiene 10 in de longitud, 0.100 pulgadas de grosor y sus anchos varían de 2,0 pulgadas en la pared a 1.8 pulgadas en el extremo final. Usaremos varios modelos para demostrar diferentes modelos aproximados y mallas que converjan. El primer modelo del elemento viga será usado luego en el modelado del elemento placa.

Un quinto modelo del elemento viga produce los resultados en la figura 7.18. La orientación de la viga tiene el eje x a lo largo de la longitud de 10 in, el eje y se cruza con ancho de 2 in, y el eje z tiene un espesor de 0.100 in. El primer modo muestra claramente el movimiento Z de la viga final, y el segundo modo es el siguiente modo z de movimiento. El tercer modo es torsional alrededor del eje x, y gráficamente es una simple línea recta sobre la longitud de la viga. El cuarto modo es el tercer modo de movimiento z, y el quinto modo es el primer modo de movimiento y. Las discrepancias de la malla es muy aparente en el modo de forma ilustrados.

Cambiando un modelo de la viga de 20 elementos produce los resultados en la figura 7.19. Los valores de las frecuencias difieren por lo menos en un 1 por ciento excepto en el modo torsional el cual tiene solamente 2 por ciento de diferencia. El modo de forma graficado será significativamente suave, pero no muestra alguna diferencia real en su carácter, excepto para el declive de la restricción en la pared.

Un modelo del elemento placa con un dos por cinco elementos malla da los resultados en la figura 7.20. Estos valores de frecuencia era dentro del 2 por ciento de los modelos del elemento viga, excepto al 8 modo torsional, el cual es alrededor del 8 por ciento mas elevados, y puede ser gráficamente ilustrado por el modelo placa.

Refinando el modelo de la malla de 4 a 10 elementos da los resulta en la Figura 7.21. Este refinamiento solamente mejora los valores de frecuencia alrededor del 1 por ciento, con algunos mejoramientos en la calidad visual.

Este estudio muestra que podemos obtener razonablemente valores exactos de frecuencias naturales y modos de forma para esta estructura usando relativos modelos burdos de otras vigas o elementos placas.

Esto es usualmente cierto para encontrar eigenvalores y modos de forma en mas estructuras. Los modelos burdos usualmente proveen buenos valores para los eigenvalores inferiores que serán los primeros de mas importancia.

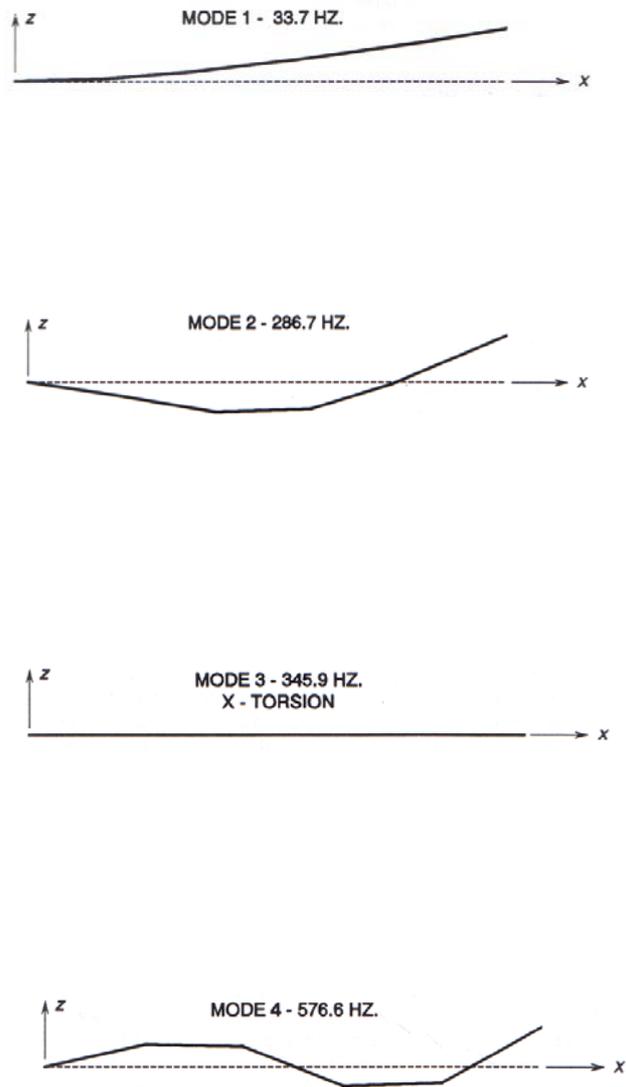


Figura 7.18.-Frecuencias naturales y modos en una modelo de 5 elementos.

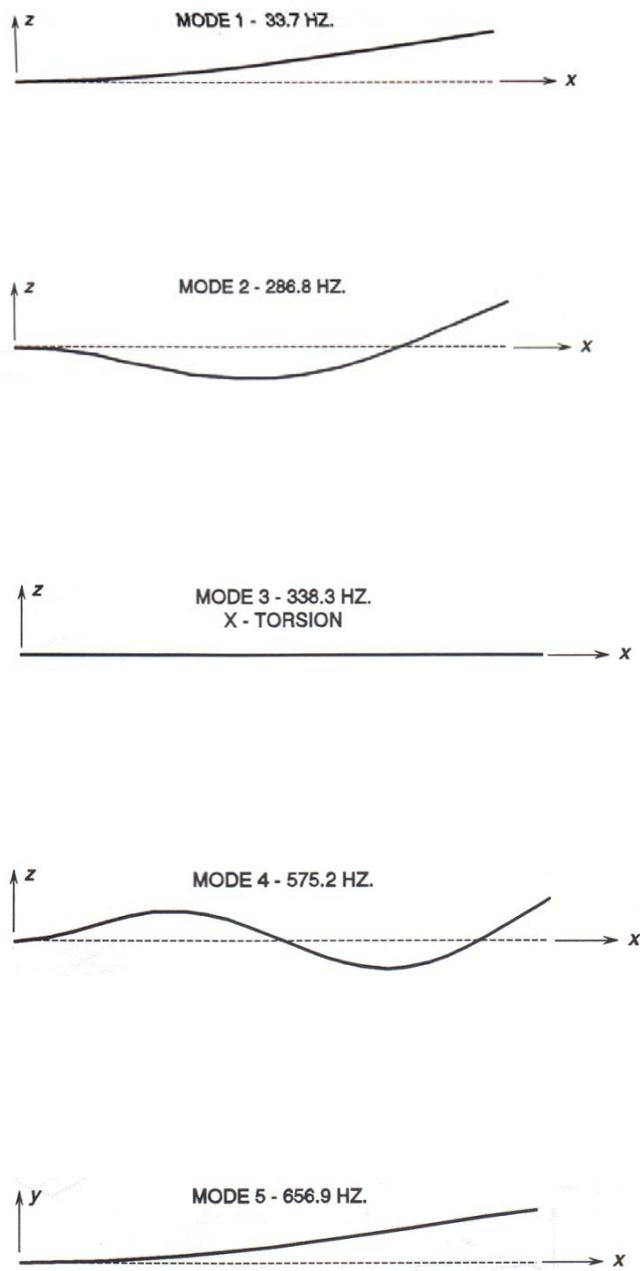


Figura 7.19.-Frecuencias naturales y modos en un modelo de veinte elementos.

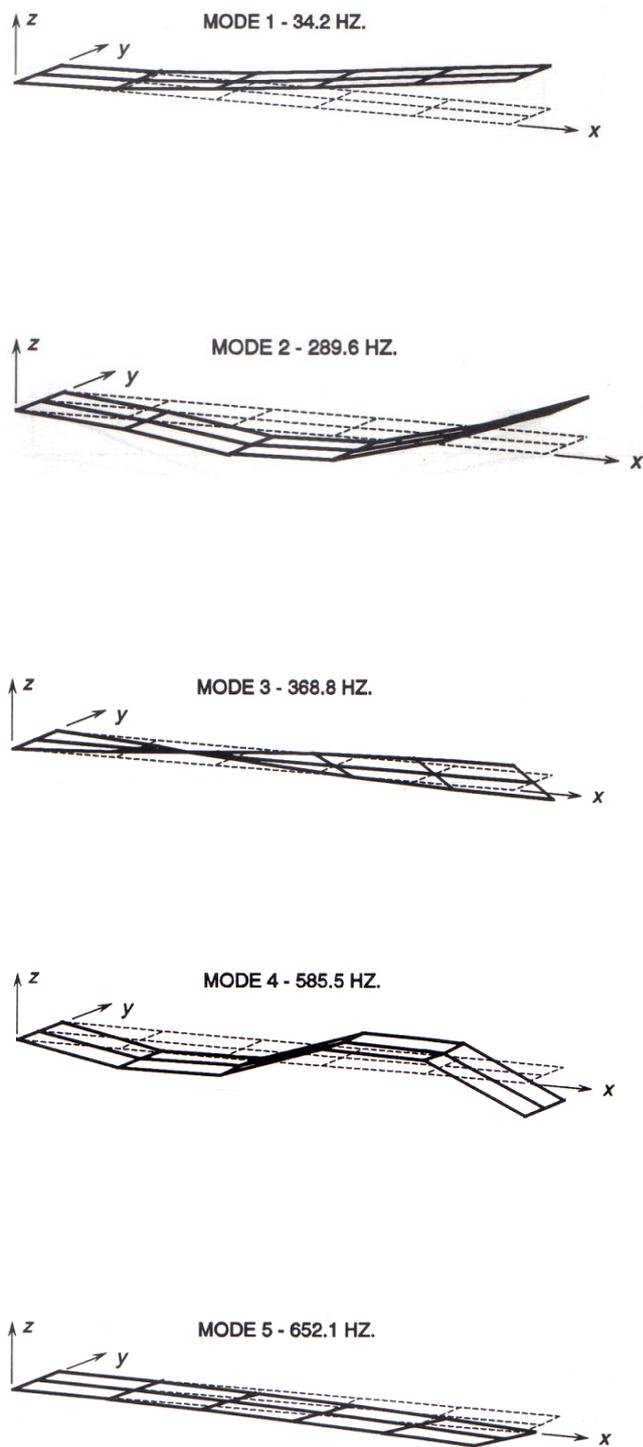


Figura 7.20.-Frecuencias naturales y modos e un modelo de diez elementos.

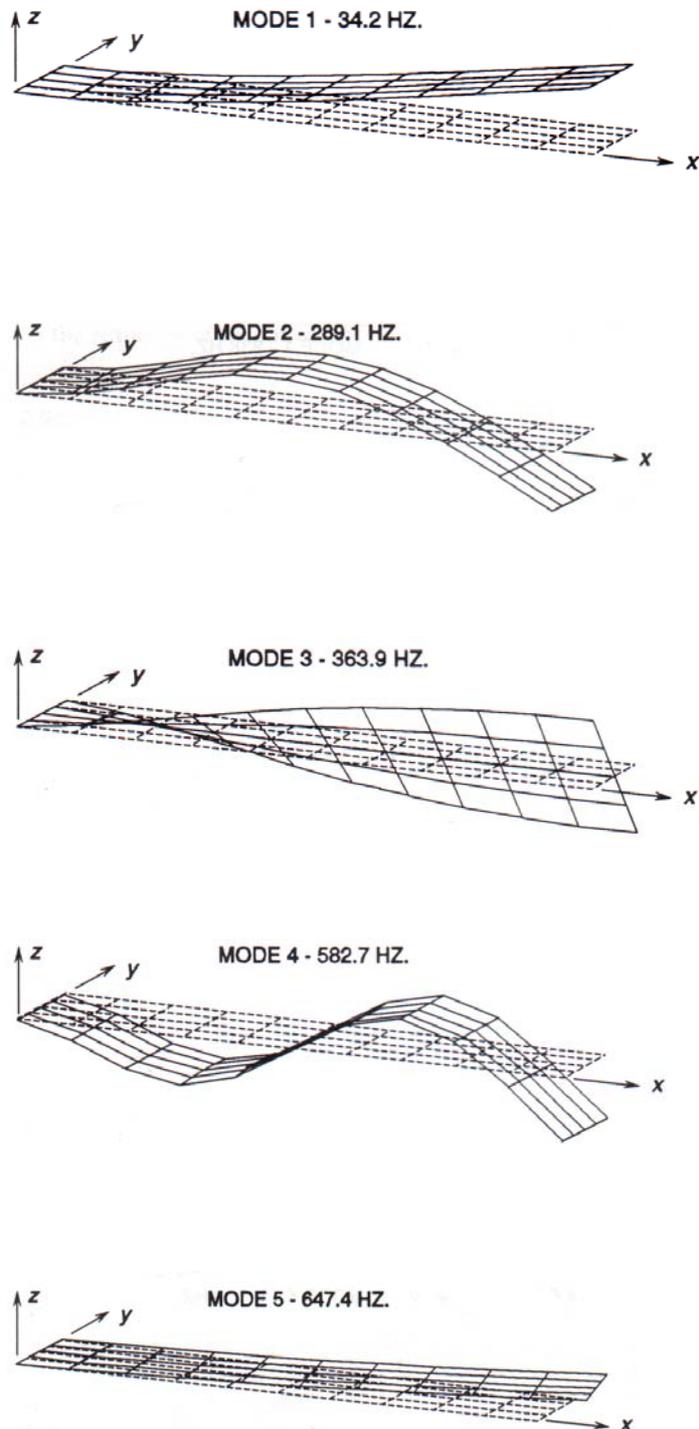


Figura 7.21.-Frecuencias naturales y modos en un modelo de cuatro elementos.

CASO V

El siguiente caso examinara la respuesta transitoria de una placa en cantiliver .La placa de acero es de 2 in de longitud,1 pulgada de ancho y 0.100 in de espesor .El primer paso en algún análisis transitorio es la solución del eigenvalor .Las primeras cuatro frecuencias naturales y modos de forma serán mostrados en la figura 7.22.El primer modo es el movimiento z típico de vigas en cantiliver .El segundo modo es el primer movimiento torsional alrededor del eje x .El tercer modo es el segundo modo de movimiento z , y el cuarto modo es el segundo torsional .En este análisis empleamos condensación estática descrita anteriormente .Para usar solamente la traslación z y x y rotación y de los nodos no restringidos como el nodo maestro DOF.

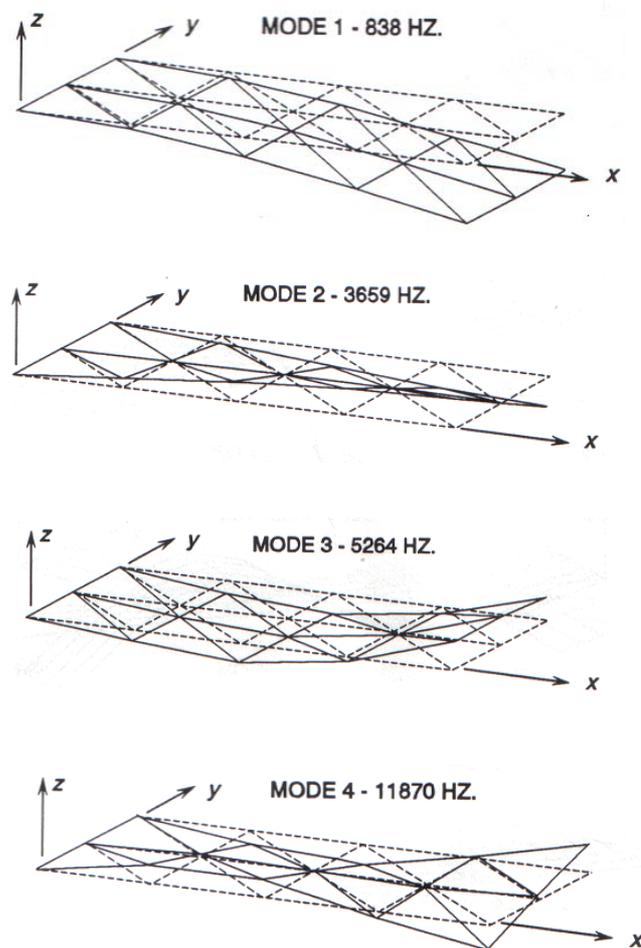


Figura 7.22.-Cuatro modos de 2 por 1 para 0.100 placa en cantiliver.

Dos análisis transitorios serán hechos .En cada caso la esquina cercana vista tendrá una entrada de desplazamiento especificado .Para controlar el valor de desplazamiento, el aparato de entrada deberá ser muy rígido, y por lo mismo actúa como una restricción fijada adicional en la esquina. Estos cambian los eigenvalores y modos de forma .Las primeras cuatro frecuencias serán ahora 2083 ,4698,8829 y 13580 hertz .

Esto es obvio que la restricción de rigidez de la estructura en sea grande .Si la entrada fue una función forzada ,con muy baja rigidez ,el eigenvalor de la placa no podrá cambiar .El primer análisis es para entrada de un intervalo desplazamiento de 0.01 in mantenido por 0.44 ms y entonces la rampa de abajo sera en un intervalo de 1.5 ms .El método de solución fue superposición modal usando los primeros cuatro modos .La respuesta de la otra esquina de la placa es mostrada en la figura 7.23.La curva rotulada A es el desplazamiento de entrada de la esquina cercana ,y la curva B rotulada es la respuesta de la esquina lejana.

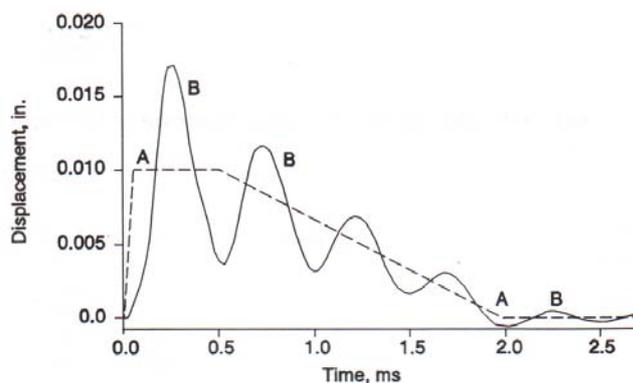


Figura 7.23.—Respuesta transitoria de la placa para un desplazamiento especificado..

El siguiente análisis tiene una entrada de desplazamiento armónica en la esquina cercana de amplitud 0.01 in sobre un rango de frecuencia de 1000 a 6000 hertz .La respuesta de frecuencia desplazamiento de la esquina alejada esta dada en al figura 7.24.La curva rotulada B es la amplitud constante de la entrada desplazamiento .La curva etiquetada A es la respuesta de la amplitud de vibración de la esquina lejana a la frecuencia dada .La amplitud obviamente incrementa rápidamente cerca de los primeros eigenvalores en 2083 hertz,y el segundo eigenvalor en 4698 hertz el cual será dentro la entrada del rango de la entrada de frecuencia .El modo de desplazamiento a 2050 hertz como la frecuencia aproxima las primeras frecuencias naturales mostradas en la figura 7.25.

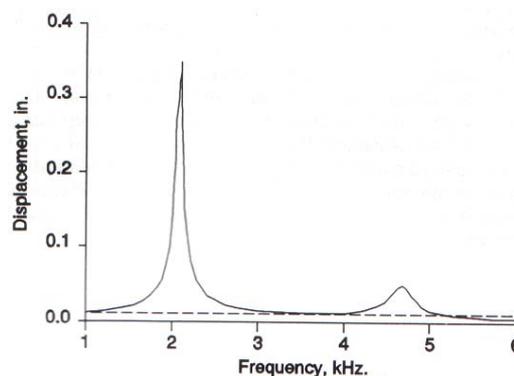


Figura 7.24.-Desplazamiento respuesta de la frecuencia de la placa.

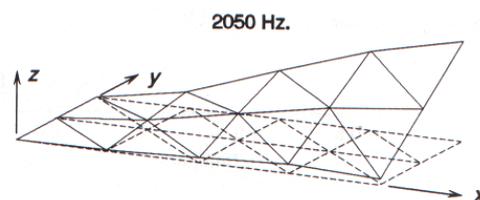


Figura 7.25.-Forma desplazada a una frecuencia de 2050 hertz

Finalmente el nivel de esfuerzos sobre el rango de frecuencia es mostrado en la figura 7.26.Este es el valor del esfuerzo equivalente de Von Mises la esquina del elemento ,donde la entrada de desplazamiento se aplica .La escala de esfuerzo fue colocada a 100 kpsi ,pero la máxima amplitud alcanza 486 kpsi cercana a la primera frecuencia de resonancia .La máxima amplitud cercana a la segunda frecuencia natural es 54 kpsi .Las dos curvas aquí representan la componente real y imaginaria de los esfuerzos .La componente real es en línea sólida y la línea imaginaria es la sombreada .

Como la frecuencia manejada va a través de la resonancia la fase de respuesta alterna 180 grados causando la componente real para hundir y la componente imaginaria para el máximo como se muestra en la plotada .Los cálculos fueron hechos en intervalos de 10 hertz.

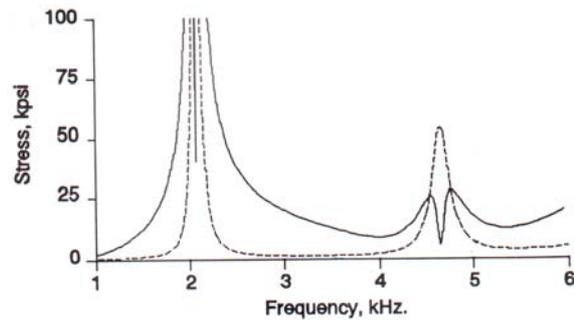


Figura 7.26.-Esfuerzo de la respuesta frecuencia de la placa

APENDICE 1

Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.
Sea la ecuación

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F = G$$

$G=0$ ecuación Homogénea

Ecuación **Hiperbólica** (si $B^2 - 4AC > 0$) por ejemplo la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ecuación **Parabólicas** (si $B^2 - 4AC = 0$) por ejemplo la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Ecuaciones **Elípticas** (si $B^2 - 4AC < 0$) por ejemplo la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

Si $\rho(x, y) = 0$ se reduce a la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

APENDICE 2

Identidades vectoriales

$$\nabla(\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \bullet (\nabla \phi) \quad (1)$$

$$\nabla(\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \bullet (\nabla \psi) \quad (2)$$

Ecuación fundamental del calculo variacional donde J esta definida en forma integral

(1)

donde

(2)

Entonces J tiene un valor estacionario si la ecuación diferencia de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \quad (2)$$

Satisface. Si se denota la derivada con respecto del tiempo \dot{y} es remplazada por la derivada especial denotada por y_x , la ecuación queda

(4)

Para tres variables independientes (Arfken 1985, pp. 924-944), la ecuación generalizada es

(5)

APENDICE 3

Teorema de Gauss-identidades de Green

Donde ∇ es la divergencia, ∇ es el gradiente, ∇^2 es el Laplaciano, del Teorema de la divergencia

$$\int_V (\nabla \cdot F) dV = \int_S F \cdot da \quad (1)$$

$$\int_S \phi (\nabla \psi) \cdot da = \int_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV \quad \text{primera identidad de Green}$$

sustrayendo 2 de 1 de las identidades vectoriales

$$\nabla(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

$$\int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot da = \int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV \quad \text{segunda identidad de}$$

APENDICE 4

si u tiene primeras derivadas parciales continuas y es armónica en una región entonces la tercera identidad de Green esta dada por:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[\ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] \right] ds$$

(Kaplan 1991, p. 361).

Para el operador de Laplace $\nabla^2 u = 0$ la función de Green G aplicada a este operador da como resultado $\nabla^2 G - \delta(x - \varepsilon, y - \eta) = 0$

Propiedades de la Delta de Dirac

$$\delta(x - \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \varepsilon \\ \infty & \text{si } x = \varepsilon \end{cases}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) \delta(x - \varepsilon) d\varepsilon$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \varepsilon) d\varepsilon$$

$$L[G(x, \varepsilon)] = \delta(x - \varepsilon)$$

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1) \text{ propiedad de simetría}$$

APENDICE 5

TEOREMA DE LA CUADRATURA DE EULER.

Dada una función continua $f(x)$ en $[a, b]$, $p(x)$ definida en $[a, b]$ continua y $p(x) > 0$, la integral de $\int_a^b p(x)f(x)dx$ alcanza su grado de error mínimo por cuadratura si $f(x)$ es aproximada por un polinomio de grado $2n - 1$ o menos.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + R[f]$$

donde los coeficientes C_1, C_2, \dots, C_n , x_1, x_2, \dots, x_n son determinados de un sistema de $2n$ ecuaciones en $2n$ incógnitas y $\varphi_n(x)$ es el polinomio $f(x) = \varphi_n(x)q(x) + r(x)$ de grado n ; $\varphi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ tal que

$$\int_a^b p(x)q(x)\varphi_n(x)dx = 0$$

es ortogonal a todo $q(x)$ de grado $n-1$ o menos.

Una aplicación importante de la fórmula de integración por cuadratura *Gaussiana*, es cuando se integra numéricamente utilizando polinomios de interpolación de *Lagrange*. Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nodos en $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$$\tilde{\varphi}(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

tal que $\tilde{\varphi}(x) = f(x_i) = \Phi_i$, así tenemos que del sistema de $(n+1)x(n+1)$ incógnitas a_0, a_1, \dots, a_n , se tiene $\tilde{\varphi}(x)$ en función de los valores Φ_i ,

$$\tilde{\varphi}(x) = N_0(x)\Phi_0 + N_1(x)\Phi_1 + \dots + N_n(x)\Phi_n$$

donde las funciones de forma $N_i(x)$ son polinomios de grado n , cuyas raíces son todas x_j , $j \neq i$

$$\hat{N}_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{Det}; 0 \leq i \leq n$$

$Det =$ Determinante de Vardemonde

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=0}^n \hat{N}_i(x)f(x_i)$$

$$\begin{aligned} I[f] &= \int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\tilde{\varphi}(x)dx = \int_a^b p(x)\left\{\sum_{i=0}^n \hat{N}_i(x)f(x_i)\right\}dx \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{\int_a^b p(x)\hat{N}_i(x)dx\right\}f(x_i) = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) \end{aligned}$$

Si

$$\hat{N}_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega'_n(x_i)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x-x_i)\omega'_n(x_i)}$$

los $C_i = \frac{1}{\omega'_n(x_i)} \int_a^b \frac{p(x)\omega_n(x)}{(x-x_i)} dx$; $0 \leq i \leq n$ en $a \leq b$, son los coeficientes C_i conocidos como los coeficientes de *Christoffel-Darboux*.

Aplicaciones: Cuadraturas con coeficientes iguales. Sea f continua en $[a, b]$, x_1, x_2, \dots, x_n , $p(x) = 1$.

$$I_n[f] = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_n f(x_i) = \alpha_n \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Si $f(x) \equiv 1$, $I_n[f] = \alpha_n n$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) = \alpha_n n \quad \therefore$$

los coeficientes son

$$\alpha_n = \frac{(b-a)}{n}$$

Con el fin de determinar los nodos x_1, x_2, \dots, x_n de tal forma que el error de la cuadratura sea mínimo; estableceremos un sistema de n condiciones en la cuadratura $I_n[x^r] = I[x^r]$, $r = 1, 2, \dots, m$

$$\alpha_n \sum_{i=1}^n x_i^r = \int_a^b x_i^r dx = \frac{x_i^{r+1}}{r+1} \Big|_a^b = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$

$r = 1, 2, \dots, n$.

Si esas n ecuaciones tienen n soluciones reales x_i , entonces el error de la cuadratura es mínimo $n = 1$, $I_1[f] = \alpha_1 f(x_1)$

$$\alpha_1 x_1 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{(b+a)(b-a)}{2}$$

$\alpha_1 = (b-a)$; $x_1 = \frac{(b+a)}{2}$ punto medio de $a \rightarrow b$ por lo tanto

$$I_1[f] = \alpha_1 f(x_1) = (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

la cual es exacta para funciones lineales en $a \rightarrow b$, $f(x) = cx + d$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (cx + d)dx &= \int_a^b cx dx + \int_a^b d dx = c \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + dx \Big|_a^b = \frac{c(b^2 - a^2)}{2} + (b - a)d \\ &= \frac{c(b + a)(b - a)}{2} + (b - a)d = (b - a) \left[c \frac{(b + a)}{2} + d \right] = \alpha_1 f(x_1)\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{b + a}{2}.$$

Para el caso $n = 2$,

$$I_2[f] = \int_a^b f(x) dx = \alpha_2 \sum_{j=1}^2 f(x_j) = \alpha_2 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

Del sistema de condiciones impuesta a $I_2[x_j^r] = I[x_j^r]$ se tiene: $r = 1, 2$

$$I_2[x_j] = \alpha_2 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{1}{1+1} (b^{1+1} - a^{1+1}) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

$$I_2[x_j^2] = \alpha_2 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \frac{1}{2+1} (b^{2+1} - a^{2+1}) = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

$$x_1 = \frac{b + a}{2} - \frac{b - a}{2\sqrt{3}}; \quad x_2 = \frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2\sqrt{3}}$$

los nodos x_1, x_2 son colocados simétricos al centro del intervalo $[a, b]$. En general, la solución del sistema;

$$\alpha_n \sum_{j=1}^n x_j^r = \frac{1}{r+1} (b^{r+1} - a^{r+1}) \quad r = 1, 2, \dots, n$$

determina al polinomio

$$\tilde{\phi}_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

cuyas raíces son los nodos x_j requeridos.

Si se expresa al polinomio como:

$$\tilde{\phi}_n(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + \sigma_{n-1} x + \sigma_n$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ \sigma_n &= (-1)^n x_1x_2 \cdots x_n\end{aligned}$$

pero como $S_r = x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r$, $r = 1, 2, \dots, n$ se obtiene por las condiciones sobre x_j^r , $j = 1, 2, \dots, n$, $r = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}S_1 + \sigma_1 &= 0 \\ S_2 + S_1\sigma_1 + 2\sigma_2 &= 0 \\ &\vdots \\ S_n + S_{n-1}\sigma_1 + \cdots + S_n\sigma_{n-1} + n\sigma_n &= 0\end{aligned}$$

De esta manera, la determinación de los nodos x_1, x_2, \dots, x_n , se reduce a determinar las raíces del polinomio $\tilde{\phi}_n(x) = \sum_{j=0}^n \sigma_j X^{n-j}$; $\sigma_0 = 1$, donde los coeficientes σ_j ; son determinados de las relaciones S_j .

La expresión del residuo $R[f]$ de la fórmula de integración de la cuadratura *Gaussiana* es posible

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + R[f]$$

donde

$$C_i = \int_a^b \frac{p(x)\tilde{\phi}_n(x)}{(x-x_i)\phi'_n(x_i)} dx$$

Coefficientes de *Christoffel-Darboux*

También los coeficientes pueden ser obtenidos explícitamente cuando se utilizan polinomios de interpolación de Hermite pasando por los valores $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, donde x_1, x_2, \dots, x_n , raíces de $\tilde{\phi}_n(x)$; y la derivada de f valuada en $f'(x_1), f'(x_2), \dots, f'(x_n)$.

Si $H(x)$ denota el polinomio de *Hermite*,

$$f(x) = H(x) + (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \cdots (x-x_n)^2 f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n)$$

donde $H(x)$ es de grado $2n-1$.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)H(x)dx + \int_a^b p(x)\tilde{\phi}_n^2(x)f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n C_i H(x_i) + \int_a^b p(x)\tilde{\phi}_n^2(x)f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n)dx$$

$$R[f] = \int_a^b p(x)\tilde{\phi}_n^2(x)f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n)dx$$

como $p(x) > 0$, $\tilde{\phi}_n^2(x) > 0$, $p(x)\tilde{\phi}_n^2(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$, existen $\xi, \eta \in (a, b)$ tales que

$$R[f] = f(\xi, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) \frac{f^{2n}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b p(x)\tilde{\phi}_n^2(x)dx$$

Teorema del valor medio iterativo

Para el caso $p(x) = 1$, el residuo $R[f]$ queda:

$$R[f] = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{2n}(\xi)$$

la Fórmula de integración *Gaussiana* se realiza de hecho en el intervalo $[-1,1]$, transformando el intervalo $[a,b]$ en $[-1,1]$ mediante las coordenadas.

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t; \quad -1 \leq t \leq 1$$

De esta manera la fórmula de integración *Gaussiana* para polinomios de *Hermite* queda:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + \frac{(2)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{2n}(\xi); \quad \xi \in (-1,1)$$

Ejemplos.

$$\eta = 1, \quad x_1 = 0; \quad \frac{1}{2} C_1^{(1)} = 1; \quad R_1 = \frac{1}{3} f''(\xi)$$

$$\eta = 2$$

$$-x_1 = x_2 = 0.5773502691896258$$

$$\frac{1}{2}C_1^{(2)} = \frac{1}{2}C_2^{(2)} = \frac{1}{2}; R_2 = \frac{1}{135}f^{(4)}(\xi)$$

$$\eta = 3$$

$$-x_1 = x_3 = 0.7745966692414834, x_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}C_1^{(3)} = \frac{1}{2}C_3^{(3)} = \frac{5}{18}; \frac{1}{2}C_2^{(3)} = \frac{4}{9}; R_3 = \frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi)$$

existen tablas de los valores de $x_1, x_2, \dots, x_k, k = 1, 2, 3, \dots, 7, \dots$ y de los coeficientes $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, C_1^{(3)}, C_2^{(3)}, C_3^{(3)}, \dots, C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, \dots, C_k^{(k)}$ en general cuando se consideran todos los cambios de $f(x)$ en x_1, x_2, \dots, x_n , hasta de orden k .

APÉNDICE 6

Operador de Sturm-Liouville

$$\left[L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q \right]$$

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right)$$

el Laplaciano para tres dimensiones ($L = \nabla^2$)

$$\int_{\Omega} [uL(v) - vL(u)] d\Omega = \int_{\Gamma} (u\nabla v - v\nabla u) d\Gamma$$

APENDICE 7

9 Función de Green para la ecuación de calor

se quiere resolver la ecuación de calor con posible fuente de calor que dependa del tiempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u + Q(x, t) \quad 6.1$$

sujeta a las condiciones iniciales $u(x, 0) = g(x)$. Se puede analizar este problema en una, dos o tres dimensiones. En esta parte no se especifica la región geometría o la posibilidad de condiciones de frontera no homogéneas. Estos pueden ser tres términos no homogéneos: la fuente $Q(x, t)$, la condición inicial, y las condiciones de frontera.

Definimos la función de Green $G(x, t; x_0, t_0)$ como la solución de

$$\frac{\partial G}{\partial t} = k\nabla^2 G + \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \quad 6.2$$

en la misma región con las condiciones de frontera homogéneas relacionadas. puesto que la función de Green representa la respuesta de la temperatura en t (en el tiempo t) debido a una fuente térmica concentrada en x_0 (en el tiempo t_0), insistiremos que ésta función de Green es cero antes de que actúe la fuente:

$$G(x, t; x_0, t_0) = 0 \quad \text{para } t < t_0 \quad 6.3$$

El principio de casualidad.

Además, demostramos que solamente el lapso de tiempo $t - t_0$ (del tiempo transcurrido a partir del tiempo de la iniciación $t = t_0$) es necesario.

$$G(x, t; x_0, t_0) = G(x, t - t_0; x_0, 0) \quad 6.4$$

la propiedad de traslación. La ecuación (6.4) es demostrada dejando $T = t - t_0$ en el caso que la función de Green $G(x, t, x_0, t_0)$ satisface

$$\frac{\partial G}{\partial T} = k\nabla^2 G + \delta(x - x_0)\delta(T) \text{ con } G = 0 \text{ para } T < 0$$

ésta es exacto la respuesta debido a una fuente concentrada en $x = x_0$ en $T=0$, implicando (6.4)

ponemos hasta más adelante el cálculo real de la función de Green por ahora, asumiremos que la función de Green está dada y preguntar cómo representar la temperatura $u(x, t)$ en los términos de la función de Green.

6.2 la ecuación de calor no tiene función adjunta natural.

Para demostrar cómo este problema se relaciona con otros discutidos en este libro, introducimos la notación linear del operador.

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \quad 6.5$$

llamado calor o a operador de la difusión. En problemas anteriores la relación entre la solución del problema no homogéneos y su función de Green era operador basado, el Laplaciano, y lo más recientemente posible el operador de la onda. Componen al operador L del calor de dos partes. ∇^2 es analizada fácilmente por el fórmula del Green para el Laplaciano, sin embargo, tan inofensivo como aparece $\frac{\partial}{\partial t}$, es mucho más difícil de analizar que cualesquiera de los otros operadores anteriores. para ilustrar la dificultad por los primeros derivados, considere

$$L = \frac{\partial}{\partial t}$$

para operadores de segundo orden Sturm-Liouville, a operadores, integraciones elementales radican en la fórmula del Green que la misma idea para $L = \frac{\partial}{\partial t}$ no se trabajará en detalle,

$$\int [uL(v) - vL(u)] dt = \int \left(u \frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt$$

no se puede simplificar, allí no hay una fórmula para evaluar $\int [uL(v) - vL(u)] dt$. el operador $\frac{\partial}{\partial t}$ no es el mismo adjunto. En lugar de otro, por la integración por partes estándar,

$$\int_a^b uL(v) dt = \int_a^b u \frac{\partial v}{\partial t} dt = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

y así

$$\int_a^b \left(u \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt = uv \Big|_a^b \quad 6.6$$

para el operador $L = \frac{\partial}{\partial t}$ se define el operador adjunto

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} \quad 6.7$$

tenemos integrar sobre todo el espacio y de un cierto $t = t_i$ del tiempo a otro $t = t_f$ del tiempo tenemos usando (6.6) para los términos del $\frac{\partial}{\partial t}$ y la formula de Green ($\int_{\Omega} [uL(v) - vL(u)] d\Omega = \int_{\Gamma} (u\nabla v - v\nabla u) d\Gamma$) para el operador ∇^2 . La “contribución de frontera”, son de dos tipos, la parte espacial (sobre \oint) y una parte temporal (en el tiempo inicial t_i y tiempo final t_f). Si u y v satisfacen la misma condición homogéneas de frontera (del tipo generalmente), entonces las contribuciones espaciales desaparecen.

$$\oint (v\nabla u - u\nabla v) dS = 0$$

6.4 función de Green adjunta

en orden de eventualidad deriva un fórmula de la representación para el $u(x,t)$ en términos de la función de Green $G(x,t; x_0, t_0)$, nosotros debemos considerar el resumir

de varias fuentes mide el tiempo así, nosotros consideramos la función del Green de fuente variable.

$$G(x, t_1, x_1, t) = G(x, -t, x_1, -t_1)$$

donde se ha utilizado la propiedad de traslación. por causalidad, éstos son cero si $t > t_1$

$$G(x, t_1, x_1, t) = 0 \quad \text{para } t > t_1 \quad 6.14$$

dejando el $\tau = -t$, vemos que la función $G(x, t_1, x_1, t)$ de Green de fuente variable satisface

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \right) G(x, t_1, x_1, t) = \delta(x - x_1)\delta(t - t_1) \quad 6.15$$

así como el principio de casualidad fuente variable (6.14). El operador del calor L no ocurre. en lugar, el operador L^* del calor del adjunto aparece:

$$L^*[G(x, t_1, x_1, t)] = \delta(x - x_1)\delta(t - t_1) \quad 6.16$$

vemos que $G(x, t_1, x_1, t)$ es la función de Green para el operador adjunto del calor (con fuente variable principio de casualidad). A veces se llama la función de Green adjunta, $G^*(x, t_1, x_1, t)$. Sin embargo, es innecesario calcularla o utilizar siempre, entonces

$$G^*(x, t, x_1, t_1) = G(x, t_1, x_1, t) \quad 6.17$$

y ambos son cero para el $t > t_1$

de (6.6)

$$\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)]dt = -uv \Big|_a^b \quad 9.8$$

esta es análoga a la formula de Green.

ahora volvemos al problema no homogéneo del calor:

$$L(u) = Q(x, t) \quad 6.9$$

$$L[G] = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \quad 6.10$$

donde

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \quad 6.11$$

para la ecuación de calor no homogénea, nuestros resultados son más complicados puesto que debemos introducir al operador adjunto,

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \quad 6.12$$

por calculo directo

$$uL^*(v) - vL(u) = -u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} + k(v \nabla^2 u - u \nabla^2 v)$$

y así

$$\int_{t_i}^{t_f} \int_{\Omega} [uL^*(v) - vL(u)] d\Omega dt = - \int_{\Omega} uv \Big|_{t_i}^{t_f} d\Omega + k \int_{t_i}^{t_f} \int_{\Gamma} (v \nabla u - u \nabla v) d\Gamma dt \quad 6.13$$

fuente variable o función de Green adjunta, $v = G(x, t_0; x_0, t)$ usando la definición de la ecuación diferencial (6.9) y (6.10), formula de Green (6.13) se convierte

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0+} \iiint [u \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) - G(x, t_0; x_0, t) Q(x, t)] d^3 x dt \\ &= \iiint u(x, 0) G(x, t_0; x_0, 0) d^3 x \\ &+ k \int_0^{t_0+} \iint [G(x, t_0; x_0, t) \nabla u - u \nabla G(x, t_0; x_0, t)] \cdot \hat{n} dS dt \end{aligned}$$

desde entonces $G=0$ para $t > t_0$. El solucionar para u , obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \int_0^{t_0} \iiint G(x, t_0; x_0, t) Q(x, t) d^3 x dt \\ &+ \iiint u(x, 0) G(x, t_0; x_0, 0) d^3 x dt \\ &+ k \int_0^{t_0} \iint [G(x, t_0; x_0, t) \nabla u - u \nabla G(x, t_0; x_0, t)] \cdot \hat{n} dS dt \end{aligned}$$

puede ser demostrado que los límites t_{0+} se pueden sustituir por t_0 , ahora (como antes) intercambiamos x con x_0 y t con t_0 . Además, nosotros utilizamos reciprocidad y derivamos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \iiint G(x, t; x_0, t_0) Q(x_0, t_0) d^3 x_0 dt_0 \\ &+ k \int_0^t \iint [G(x, t; x_0, t_0) \nabla_{x_0} u - u(x_0, t_0) \nabla_{x_0} G(x, t; x_0, t_0)] \cdot \hat{n} dS_0 dt_0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} L(u) &= \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) & L^*(v) &= \delta(x - x_1) \delta(t - t_1) \\ u &= 0 \text{ para } t < t_0 & v &= 0 \text{ para } t > t_1 \end{aligned}$$

la ecuación (6.14) ilustra cómo la temperatura $u(x, t)$ es afectado por los tres términos no homogéneos. La función de Green $G(x, t; x_0, t_0)$ es la función de influencia para el término de la fuente $Q(x_0, t_0)$, así como para el $u(x_0, 0)$ inicial de la distribución de la temperatura (si evaluamos la función de Green en $t_0 = 0$, como es absolutamente razonable). Además, las condiciones de frontera no homogéneas son consideradas por el término $+k \int_0^t \iint [G \nabla_{x_0} u - u(x_0, t_0) \nabla_{x_0} G] \cdot \hat{n} dS_0 dt_0$. la ecuación (6.14) ilustra el principio de la causalidad; en el tiempo t , las fuentes y las condiciones de frontera tenga un efecto solamente para el $t_0 < t$. La ecuación (6.14) generaliza el resultado obtenido por el método de expiación de de ingen funciones.

Reciprocidad

Derivamos una fórmula de la reciprocidad. Aquí, hay algunas diferencias pequeñas debido a la ocurrencia del operador del adjunto en fórmula Green (6.13). en (9.13) introducimos

$$u = G(x, t; x_0, t_0) \quad (6.18)$$

$$v = G(x, t_1; x_1, t) \quad (6.19)$$

el último que es demostrado para fuente variable o función de Green adjunta. así, las características que definen para u y v son:

$L(u) = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0)$	$L^*(v) = \delta(x - x_1) \delta(t - t_1)$
$u = 0$ para $t < t_0$	$v = 0$ para $t > t_1$

Integramos $t = -\infty$ a $t = \infty$, [es decir, $t_i = -\infty$ a $t_f = \infty$] obteniendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \iiint [G(x, t; x_0, t_0) \delta(x - x_1) \delta(t - t_1) - G(x, t_1; x_1, t) \delta(x - x_0) \delta(t - t_0)] d^3 x dt$$

$$= - \iiint G(x, t; x_0, t_0) G(x, t_1; x_1, t) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} d^3 x$$

Puesto que u y v ambos satisfacen las mismas condiciones de frontera homogéneas, de modo que

$$\iint (v \nabla u - u \nabla v) \cdot \hat{n} dS$$

desaparece las contribuciones también desaparecen en $t = \pm\infty$ debido a la causalidad usando las características de la función del delta del Dirac, nosotros obtenemos la reciprocidad:

$$G(x_1, t_1; x_0, t_0) = G(x_0, t_0; x_1, t_1)$$

como hemos demostrado para la ecuación de onda, intercambiar las posiciones de la fuente y de la localización no altera las respuestas si los tiempos transcurridos de las fuentes son iguales. en este sentido la función de Green para la ecuación del calor (difusión) es simétrico.

9.8 función de Green para la ecuación del calor en un dominio semi-infinito

Obtenemos la función de Green necesitada para solucionar la ecuación no homogénea del calor en intervalo semi-infinito, en una dimensión ($x > 0$), conforme a una condición de frontera no homogénea en $x = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u + Q(x, t) \quad x > 0 \quad (6.31)$$

$$\text{Bc: } u(0, t) = A(t) \quad (6.32)$$

$$\text{Ic: } u(x, 0) = f(x) \quad (6.33)$$

la función de Green es determinada por el método de las imágenes

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] \right\}$$

observamos que la condición de límite en $x = 0$ está, satisfecha automáticamente

6.9 función de Green para la ecuación del calor en un dominio finito ($0 < x < L$), la función de Green para la ecuación del calor por el método de extensiones del eigenfunciones con las condiciones de frontera cero en ambos extremos

$$G(x, t, x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi x_0}{L} e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)} \quad (6.35)$$

podemos obtener una representación alternativa para esta función de Green utilizando el método de imágenes.

por simetría, las condiciones de frontera en $x = 0$ y en el $x = L$ son satisfechas si las fuentes concentradas positivas están situadas en $x = x_0 + 2nL$ y las fuentes concentradas negativas están situadas en $x = -x_0 + 2nL$ (para todos los números enteros $n, -\infty < n < \infty$). Usando el espacio infinito de la función de Green, tenemos una representación alternativa de la función de Green para una barra un dimensional:

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] \right\}$$

propia ventaja. La expansión de la eigenfunciones, (9.35), es una serie infinita que converge rápidamente si $\frac{(t-t_0)k}{L^2}$ es grande. es así el más útil para $t \gg t_0$. en realidad, si

$t \gg t_0$,

$$G(x, t, x_0, t_0) \approx \frac{2}{L} \text{sen}\left(\frac{\pi x_0}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}$$

sin embargo, si el tiempo transcurrido $t - t_0$ es pequeño, entonces muchos términos de la serie infinita son necesarios.

Usando el método de imágenes, la función de Green también es representada por una serie infinita (9.36). El espacio infinito de la función de Green (para una t fija) exponencial se decae lejos de la posición de la fuente.

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \exp\left(-\left\{\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right\}\right)$$

se decae en espacios muy bruscamente si t esta cerca t_0 , si t esta cerca de t_0 , entonces solo las fuentes cercanas localizadas en x son importante; las fuentes muy lejanas no serán muy importantes (si t es cercano a t_0), las fuentes de las imágenes pueden ser ignoradas si t es cercana a t_0 (y si x o x_0 no es ningún cercano las frontera 0 o L, como aproximación,

$$G(x,t;x_0,t_0) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \exp\left(-\left\{\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right\}\right)$$

si t cerca de t_0 la función de Green con fronteras se puede aproximar (en regiones lejos de las fronteras) por el espacio infinito de funciones de Green.

Esto significa que por tiempos pequeños las fronteras puede ser descuidado (lejos de las frontera)

para ser mas exacto, el efecto de cada fuente de la imagen es mucho más pequeño que la fuente real si $\left(\frac{L^2}{k(t-t_0)}\right)$ es grande. Esto rinde una comprensión mejor de una

aproximación del "tiempo pequeño"

la función de Green puede ser aproximada por un espacio infinito de funciones de Green

si $t - t_0$ es pequeño (es decir $t - t_0 \ll \frac{L^2}{k}$, donde $\frac{L^2}{k}$ este cociente de cantidades físicamente medibles) alternativamente, esta aproximación es válida para una "barra larga" en el sentido que $L \gg \sqrt{k(t-t_0)}$.

En resumen, la producción del método de la imagen a la serie infinita rápidamente

convergente para la función de Green si $\frac{L^2}{k(t-t_0)} \gg 1$, mientras que la extensión del

eigenfunction rinde una representación infinita rápidamente convergente de la serie de

la función de Green si $\frac{L^2}{k(t-t_0)} \ll 1$

si $\frac{L^2}{k(t-t_0)}$ es ni pequeño ni grande, entonces las dos extensiones son competitivas, pero

ambo requiere por lo menos un número moderado de términos.

APENDICE 8

Calculo del límite $\xi \rightarrow \Gamma$

Para localizar el punto de carga en la frontera, primero ajustamos la frontera tal que contiene el punto dentro de un círculo de radio ε de acuerdo a la figura 1.

$$\Gamma' = (\Gamma' - \Gamma_\varepsilon) \cup \Gamma_\varepsilon$$

así el punto ξ que está dentro del dominio y la ecuación de frontera todavía es válida.

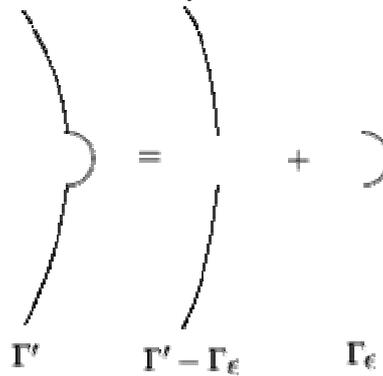


Figura 1. Extensión de la frontera por un círculo

La integración a lo largo de ε - círculo es parametrizado por

$$d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\varphi$$

Ver figura 2. Además la norma

$$|\bar{x} - \bar{\xi}| = \varepsilon$$

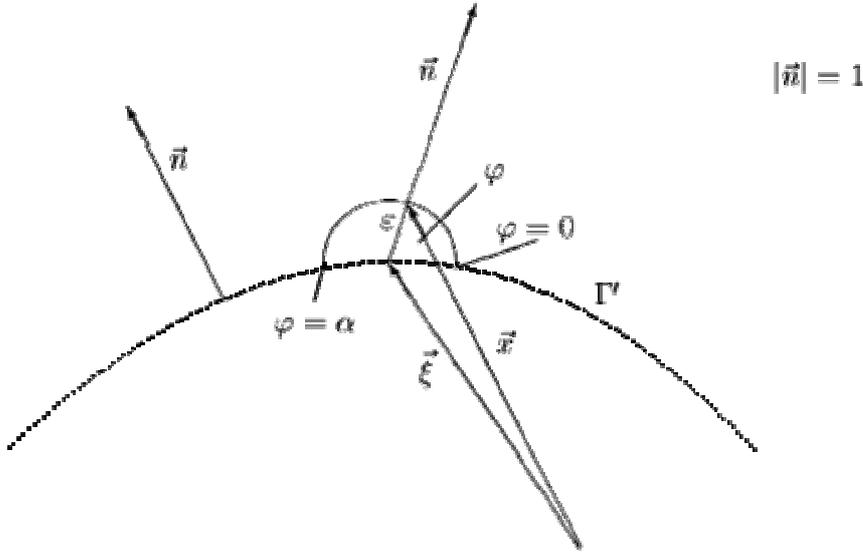


Figura 2. La geometría por acomodar el punto de carga en la frontera el valor del límite tomando EIF en la frontera puede ser ahora calcule. Para $\int qu^* d\Gamma$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} q \frac{\ln|\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma' - \varepsilon} q \frac{\ln|\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{\ln|\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma$$

en el límite, el primer integral es débilmente singular. Con las eq. (17,18) y la regla de L'HOSPITAL, el ultimo integrando en la eq. (19) los resultados en una contribución desapareciendo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{\ln|\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} q(\ln\varepsilon) \varepsilon d\varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} q \frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} -q\varepsilon d\varphi = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \varepsilon[\alpha - 0] = 0 \end{aligned}$$

La integral $\int uq^* d\Gamma$ las primacías a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot \bar{n}}{2\pi|\bar{x} - \bar{\xi}|^2} u(\bar{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma' - \varepsilon} \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot \bar{n}}{2\pi|\bar{x} - \bar{\xi}|^2} u(\bar{x}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot \bar{n}}{2\pi|\bar{x} - \bar{\xi}|^2} u(\bar{x}) d\Gamma \quad (21)$$

la primera integral en Eq. (21) es un integral fuertemente singular calculado por el valor principal de Cauchy. Para la segunda integral

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot \bar{n}}{2\pi |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} u(\bar{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} u(\bar{x}) \left(\frac{\varepsilon}{2\pi \varepsilon^2} \right) \varepsilon d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} u(\bar{x}) \left(\frac{1}{2\pi} \right) d\varphi = \frac{\alpha u(\bar{\xi})}{2\pi}$$

Sumando estos resultados y insertándolos en la eq.(8) se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} u(\bar{\xi}) &= \frac{\alpha}{2\pi} u(\bar{\xi}) + \int_{\Gamma} u(\bar{x}) \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot \bar{n}}{2\pi |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} d\Gamma - \int_{\Gamma} q(\bar{x}) \frac{\ln |\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma \\ \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) u(\bar{\xi}) + \int_{\Gamma} q^*(\bar{x}, \bar{\xi}) u(\bar{x}) d\Gamma &= \int_{\Gamma} u(\bar{x}, \bar{\xi}) q(\bar{x}) d\Gamma \\ C(\bar{\xi}) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \end{aligned}$$

el factorizan $C(\bar{\xi})$ es llamado el factor de frontera y denota la fracción de $u(\bar{\xi})$ en Ω como

$$C(\bar{\xi}) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2\pi} & \text{si } \bar{\xi} \in \Gamma \\ 1 & \text{si } \bar{\xi} \notin \Gamma, \in \Omega \\ 0 & \text{para } \bar{\xi} \notin \Gamma, \notin \Omega \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Asimov Isaac, Introducción a la ciencia, Plaza & Janes, S. A. España, 1982.
- [2] Ya Smorodinski, La Temperatura, Editorial MIR- URSS, 1983.
- [3] Carnot Sadi, Reflexiones sobre la Potencia Motriz del Fuego, IPN, México, 1976.
- [4] Kreit Frank, Principios de Transferencia de Calor, Hierro Hnos., Sucesores, S. A., México, 1970.
- [5] Sneider P. J., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley, USA, 1955.
- [6] Carslaw H. S., Conduction of Heat in Solids, Claredon Press - Oxford, Great Britain, 1986.
- [7] Jacob M, Heat Transfer, Vol.1, John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [8] Arpacı V, Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, USA, 1966.
- [9] Ozizik Necati, Heat Conduction, John Wiley and Sons, New York, 1980.
- [10] Eckert Robert, Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, Japan, 1972.
- [11] Chapman Alan J., Heat Transfer, MacMillan Company. USA, 1978.
- [12] McAdams W. H. Transmisión de Calor. McGraw Hill Book Company. USA, 1973.
- [13] Isachenko V. I., Osipava V. Sukomel, Heat transfer, Editorial Mir, Moscú, 1978.
- [14] Kern Donald, Extend Surface Heat Transfer, McGraw Hill Book Company, New York, 1972.
- [15] Karlekar B. V. Transferencia de Calor, Interamericana, México, 1985.
- [16] Welty James R., Transferencia de Calor Aplicada a la Ingeniería, Limusa, México, 1984.
- [17] Manrique José A., Transferencia de Calor, Editorial Harla, México, 1984.
- [18] Adams J. Alan, Computer-Aided Heat Transfer Analysis, McGraw Hill Book Company. USA, 1973.
- [19] Willie C. Ray, Advanced Engineering Mathematics, MacGaw Hill, Japan, 1975.
- [20] Courant & Gilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, John Wiley & Sons, USA, 1989.
- [21] Clive L., Shames, Mechanics Solid, A Variational Approach, MacGraw Hill, USA, 1973.
- [22] Reddy J.N. A Introduction to the Finite Element Method, McGraw Hill, USA, 1984.
- [23] Arfken George, Mathematical Methods for Physicists, Academy Press, USA, 1985.
- [24] Krasnov M.L., Makarenko G. I., Cálculo Variational, Editorial Mir, URSS, 1976.
- [25] Smith G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations Finite Difference Methods, Oxford, USA, 1978.
- [26] Clausing A. M., Numerical Methods in Heat Transfer, Vol. I, Journal Mathematics, USA, 1984.
- [27] M.L. James, Smith G.M., Métodos Numéricos Aplicados a la Computación Digital con FORTRAN, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A, México, 1987.
- [28] H. W. Reddick, F. H. Miller, Matemáticas Superiores para Ingenieros, Continental, S. A., España, 1965
- [29] Carnahan B., Luther H.A., Applied Numerical Methods, John Wiley an Sons, New

York, 1969.

- [30] Noye John, Numerical Simulation of Fluid Motion, North Holland Publishing, Amsterdam, 1976.
- [31] Pankatar Suchas V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, MacGraw Hill Book Company, USA, 1980.
- [32] Eriksson & Suden B. Transient Conduction a Rotating Cylindrical Shell Exposed to an incident time Varing Heat Flux, Computational Mechanics Publications, U K, 1994.
- [33] Schlichting H. Boundary Layer Theory, McGraw Hill Book, New York, 1968.
- [34] Charles A. Hall. Numerical Analysis Of Partial Differential Equations Printice Hall pp151 -152
- [35] Ruel V. Churchill. Variable Compleja y Aplicaciones (4^a Edición), M^c Grae-Hill, pp225-299.
- [36] Murray R. Spiegel. Teoria y Problemas de Variable Compleja. Pp253-300
- [37] Adrian Benjan Heat Transfer , John Wiley & Sons,Inc. 1993
- [38] Irwin Transferencia de Calor, M^c Graw Hill, 1995
- [39] Stanley M. Walas, Modeling with Diferential Equations in Chemical Engineering, BUTTERWORTH-Heinemann, 1991
- [40] José Angel Ortega Herrera. Análisis del Elemento Finito y sus Aplicaciones en la Ingeniería Sección de Graduados de E.S.I.M.E. 1996
- [41] Rita Águilar o. Análisis Numérico de la transferencia de calor en Ingeniería. Serie ciencias e Ingeniería. I.P.N 1994.
- [40] Israele Saucedo Meza Tesis de Maestría : Análisis de Fatiga Mediante el Método de elemento finito. E.S.I.M.E 1997.
- [41] Paquete Computacional ANSYS ver 5.0
- [42] Segerlin .D Larry j. Applied Finite Element Analysis ,New York Jhon Wiley & Sons, Inc.
- [43] Alfred Gray, Modern Diferential Geometry of curves and surfaces. CRC. Press 1996
- [44] Patrick Knupp, Stanly Steimberg Fundamentals of Grid Genetations CRC press 1993
- [45] Les Piegel. Fundamental Developments of Computer Aided Geometry Modeling. Academic Press 1993
- [46] L.C. Wrobel, C.A Brebbia. Bounary Element Methods in Heat Transfer Computational Mechanics Publications Elsevier Applied Science 1992.
- [47] J.N Ready, Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, M^c Graw-Hill International 1986
- [48] David GriffThs. The Mathematical Basis of Finite Element Methods, Clavendon Press, Oxford 1984
- [49] J.F Botha, G:F: Finder , Fundamental Concepts In The Numerical Solutions of Differential Ecuation, Jhon Wiley & Sons 1983
- [50] P.L George. Automatic Mesh Generation, John Wiley & Sons 1991
- [51] Borna Szabó , Ivo Babuska Finite Element Method. John Wiley & Sons 1991.
- [52] C.A Brebbia Bounary Element Thechniquess In computer Aided Engeneering. Martinus Nijhoff Publishers 1994
- [53] C.A. Brebbia J. Domínguez Bounary Bounary Elements and Introductory course CMP M^c Graw-Hill

- [54] Angel Ortega y L. Hector Hernández, Análisis Del Elemento finito Y sus aplicaciones a la Ingeniería, Serie en Ciencias e Ingeniería vol 6 1990.
- [55] Angel Ortega y R. Magdaleno R. Análisis y Diseño en Ingeniería Auxiliado por Computadora. Serie en Ciencias e Ingeniería V 10 1991.
- [56] M. Necati. Ozisik, Heat Conduction (Wiley, New York, 1980).
- [57] M. Necati. Ozisik, Boundary Value Problems of heat Conduction (Dover Publication,inc.,New York 1989).
- [58] R.Haberman. Elementary applied Partial Differential Equation, PH. 1998.
- [59]D.Zwillinger.Handbook of Differential Equations. Academic Press.1997.
- [60] W.A. Strauss. Partial Differential Equations. An Introduction. John Wiley 1992.
- [61]J.Kevorkian.Partial Differential equations. Analytical

SolutionTechniques.Wadsworth Brooks.1990.

- [62] R.V. Churchill. Operational Mathematics. Mc Graw Hill.1994.

- [63] I.A. Sneddon. The Use of Integral Transforms Mc Graw Hill 1972.
- [64] W.F. Ames. Nonlinear Partial Differential Equations. Academic Press.1965.
- [65] Haberman, Elementary applied Partial Differential Equation, PH.
- [66] J.I. Frankel, Brian Vick, An exact Methodology for Solvin Nonlinear Diffusion Equations Base on Integral Transforms. Applied Numerical Mathematical 3(1987) 467-477 (north-holland)
- [67] A. Aziz and J. Y. Benzies, Application of perturbation techniques to heat-transfer problems with variable thermal properties, Internal. J. Heat Mass Transfer, 19(1976) 271-275.
- [68] B. Vujanovic, Application of optimal linearization method to the heat transfer problem, Internal. J. Heat Mass Transfer, 16(1973) 1111-1117.
- [69] M. Imber, Thermally symmetric nonlinear heat transfer in solids, J. Heat Transfer 13 (1981) 745-752.
- [70] A. Muzzio, Approximate solution for convective fins with variable thermal conductivity, J. Heat transfer, 8 (1976) 680-682.
- [71] S. H. Cho and J. E. Sunderland, Phase charge problems with the temperature-dependent thermal conductivity, J. Heat Transfer 8 (1974) 214-217.
- [72] J. D. Lambert, computational Methods in ordinary Differential Equations(Wiley, New York, 1973).
- [73] L. W. Johnson and R. D. Riess, Numerical Analysis (Addison-Wesley, Reading M. A , 1982).
- [74]L. C. Wrobel and C.A. Brebbia, boundary element Methods in heat transfer, Computational Mechanics Publications Southhampton Boston
- [75] C.A. Brebbia and J. Dominguez, boundary elements An Introductory Course, Computational Mechanics Publications Southhampton Boston
- [76] G. Steven Gipson, boundary element Fundamentals, Computational Mechanics Publications Southhampton Boston
- [77] Masaka Tanaka, R. cholewa, Adbances in boundary element Techniques 2003

- [78] M. Tanaka, W. Chen, coupling dual reciprocity Bem and Differential quadrature method for time-dependent diffusion problems
- [79] Masaka Tanaka, Toshiro Matsumoto and Susumu, Takakuwa, DRM applied to the time-stepping BEM for transient heat conduction
- [80] Toshiro Matsumoto and M. Tanaka, A boundary integral treatment of domain integral term for initial condition in time-domain boundary element method for diffusion equation
- [81] Ryszard Bialecki, Eduardo Divo and Alain Kassab, Unknown time dependent heat flux boundary condition reconstruction using a BEM-base inverse algoritmo
- [82] J.I. Frankel and B. vick (U. S. A). pages 467-477, IMACS, ANMAEL North-Holland, Applied Numerical Mathematics. Vol 3 No &. Nov 1987, An exact methodology for solvin nolinear diffusion equations based on integral transforms.