



---

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

---

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
UNIDAD PROFESIONAL ADOLFO LÓPEZ MATEOS

**ANÁLISIS DE LAS VIBRACIONES  
LIBRES DE LA PALA DE UN  
AEROGENERADOR**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS**  
CON ESPECIALIDAD INGENIERÍA MECÁNICA

**P R E S E N T A**

**ING. DAVID MARTÍNEZ CANTERA**

DIRECTOR: DR. JULIO CESAR GÓMEZ MANCILLA



MÉXICO, D.F. 2007



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

**CARTA CESION DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, D. F., el día 1 del mes Junio del año 2007  
el(la) que suscribe David Martínez Cantera alumno (a) del Programa de  
Maestría en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Mecánica  
con número de registro B040978 adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la  
E.S.I.M.E. Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis  
bajo la dirección del Dr. Julio Cesar Gómez Mancilla y cede los derechos del  
trabajo intitulado: Análisis de las Vibraciones Libres de la Pala de un Aerogenerador al  
Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines Académicos y de Investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo  
sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la  
siguiente dirección: davidcantera@gmail.com, jcgomez@ipn.mx

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente  
del mismo.

Nombre y Firma

David Martínez Cantera



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO**

*ACTA DE REVISION DE TESIS*

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 10:00 horas del día 4 del mes de Mayo del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la E. S. I. M. E. para examinar la tesis de grado titulada:

**"ANÁLISIS DE LAS VIBRACIONES LIBRES DE LA PÁLA DE UN AEROGENERADOR"**

Presentada por el alumno:

**MARTÍNEZ**

Apellido paterno

**CANTERA**

Apellido materno

**DAVID**

Nombre(s)

Con registro: 

B	0	4	0	9	7	8
---	---	---	---	---	---	---

Aspirante al grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. JULIO CÉSAR GÓMEZ MANCILLA

Segundo Vocal

DR. IVÁN ENRIQUE CAMPOS SILVA

Secretario

DR. JOSÉ ÁNGEL LODEGARIO ORTEGA HERRERA

Presidente

DR. VALERY ROMANOVICH NOSSOV

Tercer Vocal

DR. JOSÉ MARTÍNEZ TRINIDAD

Suplente

DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCÍA

---

## ÍNDICE

Resumen	8
Abstract	9
Objetivos	10
Justificación	10
Contribuciones	11
CAPITULO 1 ESTADO DEL ARTE	
1.1 Antecedentes Históricos	13
1.2 Desarrollo Histórico	14
1.2.1 El molino de viento Persa de eje vertical	17
1.2.2 Los molinos de viento de <i>Neh</i>	19
1.2.3 Los molinos de viento Chinos de eje vertical	20
1.2.4 El cambio de eje	21
1.2.5 Cambio de eje y fuerzas de levantamiento	22
1.2.6 Elementos impulsados por fuerzas de arrastre	23
1.2.7 Elementos impulsados por fuerzas de levantamiento	24
1.3 Tipos de turbinas de viento	26
1.3.1 Subsistema del rotor de una turbina de viento de eje horizontal	28
1.3.2 Subsistema del tren de potencia	29
1.3.3 Subsistema de la cubierta ó carcasa	30
1.3.4 Subsistema de la torre	31
1.3.5 La estación de equipo en tierra	31
1.4 Desarrollo de la energía eólica en el mundo	33
CAPITULO 2 CONSIDERACIONES DINÁMICO-ESTRUCTURALES EN EL DISEÑO DE TURBINAS DE VIENTO	
2.1. Introducción	38
2.2. Filosofías de diseño para las turbinas de viento	39
2.2.1 Filosofía de diseños rígidos vs diseño flexibles	39
2.2.2 Filosofía de control de carga	39
2.2.3 Filosofía de pérdida aerodinámica	40

---

2.3. Geometría del rotor	40
2.3.1 Ángulo de conicidad de la pala	40
2.3.1. Uniones entre la pala y el eje	40
2.3.2. Numero de palas	41
2.4. Modelación de las características dinámicas	41
2.4.1. Modos de vibración natural	41
2.4.2. Modelos del rotor	42
2.4.3. Inestabilidad aeroelástica	42
2.5. Respuestas Dinámicas Típicas.	42
2.5.1. Efectos Aeroelásticos	42
2.5.2. Respuesta la viento cortante	43
2.5.3. Respuesta a las ráfagas	43
2.5.4. Respuesta a la Gravedad	43
2.5.5. Respuesta a las fluctuaciones de la velocidad del rotor	43
2.5.6. Respuesta a las resonancias	44
CAPITULO 3 COMPORTAMIENTO DINÁMICO-ESTRUCTURAL DE LA PALA.	
3.1. Introducción	46
3.2. Modelos Matemáticos	47
3.2.1. Modos de vibración y frecuencias naturales	47
3.2.2. Cargas sobre el sistema	47
3.2.2. Modelos de estabilidad aeroelástica	48
3.3. Desarrollo de las ecuaciones de movimiento de una viga giratoria	48
3.4. Ecuaciones de movimiento de palas de sección no uniforme	48
3.4.1 Procedimiento general	48
3.4.1. Derivación de la ecuación de deformación	49
3.4.2. Derivación de los momentos elásticos internos	51
3.4.3. Transformación de los momentos	52
3.4.4. Condiciones de equilibrio	53
3.4.5. Cargas resultantes	54
3.5. Ecuaciones diferenciales finales	55
3.5.1. Condiciones de frontera	55
3.5.2. Aspectos de la pala del aerogenerador BERGEY XL.1	56

---

---

CAPITULO 4 OBTENCIÓN DE RESULTADOS Y SU COMPARACIÓN CONTRA OTROS RESULTADOS.

4.1. Solución para la ecuación de Alabeo	60
4.2. Solución para las ecuaciones de Alabeo y Torsión acopladas	64
4.3. El método de Galerkin	66
4.4. Ecuaciones Finales	67
4.4.1. Batimiento	67
4.4.2. Torsión y Alabeo	70
CONCLUSIONES	77
TRABAJOS FUTUROS	77
REFERENCIAS	78
ANEXO A	80
ANEXO B	84

---

## Índice de Figuras

Fig. 1.1 Algunos conceptos de los molinos de viento descritas por Heron de Alejandría en su libro “Pneumatica”.	13
Fig. 1.2 El molino de viento Persa de eje vertical, de acuerdo a al-Dimashqi	16
Fig. 1.4 Molino de viento de eje vertical chino, con 8 veletas de bambú.	18
Fig. 1.4A Elemento traslacional de arrastre	19
Fig. 1.5 Elemento traslacional de arrastre	21
Fig. 1.6 Perfil aerodinámico con fuerzas de levantamiento y arrastre	22
Fig. 1.7 Comparación de los coeficientes de Potencia.	23
Fig. 1.8 Potencia de un perfil vs relación levantamiento/arrastre	24
Fig. 1.9 Principales subsistemas de una turbina de viento de eje horizontal (HAWT)	25
Fig. 1.10 Configuración general de una turbina de viento de eje vertical (VAWT)	26
Fig. 1.10A Algunas Configuraciones de una turbina de viento	26
Fig. 1.11 Subsistema del tren de potencia de un aerogenerador	28
Fig. 1.12 Subsistema de la carcasa	28
Fig. 1.13 Subsistema del tren de potencia de un aerogenerador	30
Fig. 1.14 Central Eólica “La Venta”	33
Fig. 2. Pala considerada	46
Fig. 2.1 Momentos sobre la sección transversal de la viga.	47
Fig. 2.3 Deformaciones entre los planos y esfuerzos.	48
Fig. 2.4 Momentos Elásticos Internos	49
Fig. 2.5 Equilibrio de fuerzas y momentos	50
Fig. 2.6 Datos del Aerogenerador BERGEY XL.1	54

---

## Resumen

El presente trabajo se divide en 5 Capítulos en los cuales se presenta el desarrollo de las ecuaciones para obtener las frecuencias naturales de la pala del aerogenerador BERGEY XL.1 en función de su velocidad nominal de operación, así como para comparar los resultados del método analítico y del método numérico seguido en otro trabajo relacionado con este tema.

En el primer capítulo se mencionan algunos problemas que presentan las palas del aerogenerador, así como un resumen del desarrollo histórico de las turbinas de viento desde sus comienzos hasta su desarrollo actual. También se incluye una descripción general de las turbinas de viento, los tipos y los diversos subsistemas que la componen.

En el capítulo dos se describen las diferentes filosofías de diseño para las turbinas de viento, así como las principales características que gobiernan el diseño de los rotores de dichas turbinas. También se da una explicación de las respuestas dinámicas típicas de los rotores.

En el capítulo tres, se presenta la metodología que se sigue para la obtención de las ecuaciones de movimiento de la pala, llegando a la ecuaciones finales de movimiento. Una vez que se cuenta con las ecuaciones finales, se presenta el caso de estudio, lo que implica hacer algunas consideraciones que reducen las ecuaciones diferenciales finales así como la obtención de sus soluciones.

En el capítulo cuatro se obtienen las soluciones de las ecuaciones de movimiento. La obtención de las soluciones se hace uso del método de Galerkin, que es la base para la teoría de elemento finito, para la obtención de las frecuencias naturales de la pala. Para los movimientos acoplados se crea una matriz con el fin de obtener los eigenvalores que arrojaran las frecuencias acopladas. Al final, se presentan las soluciones de las ecuaciones en función de la velocidad de operación del aerogenerador BERGEY XL.1 así como sus gráficas y sus diagramas de Campbell. Por último se comparan los resultados obtenidos con el método analítico y los resultados obtenidos mediante el uso del software de elemento finito ANSYS.

Finalmente se escriben las conclusiones a las que se llegaron con este trabajo, así como las propuestas para trabajos futuros.

---

## **Abstract**

The present work is divided in five chapters that show the trade study of the Natural frequencies equations for the BERGEY XL.1 Wind Turbine Blades in function of its operational rotational speed, also it compares the results obtained with the Analytic approach and the results obtained with the Numeric Approach from other related thesis work.

In the chapter one the problems that can be present in the Wind Turbine Blades are mentioned. It is included also a brief abstract of the Historical development of the Wind Turbines since they were invented. At least, a brief description the Wind Turbine's configuration is made, mentioning all the subsystems the Wind turbine are composed with.

In the Chapter two some Wind Turbine design theories are described, specifically those that emphasize to the design of the Wind Turbine Rotor. A description of the dynamic problems of the rotors is included.

In chapter three the methodology to obtain the equations of motion is presented. Once the final differential equations of motion are known, they are applied to the case study of the Wind Turbine BERGEY XL.1, which implies a simplification of the final differential equations of motion.

In chapter four the solutions of the equations of motion are obtained. The Galerkin method is used in order to achieve the solutions. This method, which is the base of the Finite Element theory, obtains the Eigenvalues that correspond to the natural frequencies of the Blade. At the end of this chapter, the solutions are plotted in a Campbell diagram considering the natural frequencies in function of the nominal rotational speed of the BERGEYXL.1 Wind Turbine, and the solutions are compared with those obtained in the Finite Element Software ANSYS.

Finally the conclusions that were reached with this job are presented, as well as the proposed future works.

---

## **Objetivos:**

Conocer el comportamiento aeroelástico de la pala de un aerogenerador, por medio del uso de métodos matemáticos, que son la base fundamental de herramientas actuales como el software ANSYS, y así conocer, por medio del conocimiento básico de la manipulación matemática, el alcance que se puede obtener mediante el uso de dichas herramientas computacionales.

Analizar el comportamiento dinámico de las palas de un aerogenerador, con el fin de determinar las características del sistema, como son las frecuencias naturales y sus formas modales, tanto en modo estático como en función de la velocidad de operación del aerogenerador.

Poner las bases para que con las formas modales y mediante el uso de las deformaciones de la pala poder obtener los esfuerzos dinámicos de la pala cuando se encuentra en operación.

Contribuir a la investigación que se lleva a cabo en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey en el desarrollo de este tipo de tecnologías y en la sección de Posgrado de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional.

## **Justificación.**

La creciente necesidad de electricidad en el mundo, ha dado lugar al surgimiento de nuevas fuentes de energía, que sean capaces competir con las fuentes actuales. Una de estas nuevas alternativas es la energía almacenada en el viento, y que por medio de una turbina puede ser extraída. El desarrollo tecnológico de estas turbinas de viento, ó aerogeneradores, ha sido enorme en los últimos años, aunque su invención se remonta muchos siglos atrás, y se ha llegado a un punto donde una sola máquina de estas puede entregar 2 MW. Esto ha originado que cada año más países instalen equipos que les aseguren un suministro continuo de energía, y claro está, que solo mejorando el diseño de estas, se podrá obtener un mejor rendimiento de las mismas.

Esta tarea se ha venido realizando en muchos países que hoy en día cuentan con sus propias empresas que se dedican al diseño y fabricación de turbinas de viento. En México, a pesar de que se cuenta con una región de gran potencial eólico, sólo cuenta con 105 aerogeneradores que generan aproximadamente 83 MW y no se tiene un proyecto propio que permita explotar ese recurso, por lo que es necesario traer del extranjero estas máquinas.

---

Una manera de solucionar esto, es crear desarrollos propios de acuerdo a las necesidades que el país tiene. De hecho, desde hace varios años, en varios lugares se han estado realizando estudios para llevar a cabo un diseño mexicano. Pero es claro, que no se cuenta con mucha experiencia en el diseño y fabricación de aerogeneradores, por lo que la tarea es mucho más difícil. Es por eso que, con el fin de poder contribuir al desarrollo de estos proyectos en México, es necesario conocer y comprender los métodos de diseño así como las herramientas a utilizar.

Aunque México esta muy por debajo del trabajo que se ha hecho en otros países, se cuenta con las bases suficientes para poder emprender una tarea como estas, sin embargo es necesario establecer las bases que conduzcan al buen uso de una herramienta tal como el elemento finito y es necesario comprender la teoría básica de esta aplicación con el fin de que sea mucho más fácil aplicarla en el desarrollo de nuevos proyectos.

Es por eso que en este trabajo de tesis se plantea ayudar al entendimiento de la teoría que es la base de las más modernas herramientas que ayudan al diseño de las turbinas de viento, así como establecer las bases para llevar a cabo un diseño estructural completo de la pala de un aerogenerador.

### **Contribuciones.**

Desarrollo de una metodología para la evaluación dinámica-estructural de la pala de un aerogenerador en su etapa de diseño.

Presentar las ecuaciones de movimiento y de deformación que puedan ser utilizadas para la elaboración de un programa que realice los cálculos de vibraciones y de integridad estructural de la pala del aerogenerador.

Contribuir a la investigación y desarrollo de aerogeneradores el cuál se lleva a cabo en el ITESM, así como introducir el estudio de esta tecnología en la Sección de estudios de Posgrado de la ESIME Zacatenco.

---

**CAPÍTULO 1**  
**ASPECTOS TRASCENDENTALES DE LAS TURBINAS  
DE VIENTO**

---

## 1.1. Antecedentes Históricos

Las turbinas de viento han tenido una historia singular alrededor de las primeras máquinas desarrolladas por el hombre. El momento de su creación se ha perdido en el tiempo, pero su existencia como una máquina capaz de proveer energía mecánica ha sido comprobada durante mucho tiempo. Prueba de esto son las dos primeras máquinas que utilizaron la energía cinética de las fuentes naturales, el molino de viento y la rueda de agua, y que se desarrollaron principalmente en los siglos XVII y XVIII. Pero con la aparición de las máquinas térmicas, su uso comenzó a decaer, ya que las nuevas máquinas, además de proveer más energía, eran más compactas, lo que les permitía adaptarse a diferentes usos.

Estas nuevas máquinas tenían la ventaja de que podían operar continuamente, sin depender de las variaciones que existían en la naturaleza, y podían ser colocadas en los lugares donde se necesitaran. Sin embargo, la turbina de viento sobrevivió a través de todo este tiempo e incluso a la revolución industrial, aunque solo en regiones donde no se necesitaba un abastecimiento continuo de energía, ya que su principal uso fue el bombeo de agua y molienda de granos.

Las máquinas de viento fueron resucitadas por el surgimiento y proliferación de dos de las mayores tecnologías desarrolladas: el rápido crecimiento de la electricidad como un transductor versátil entre el generador de energía y el trabajo, y florecimiento de la ingeniería en la ciencia de aerodinámica, que fue ocasionada por el desarrollo del aeroplano. Para finales del siglo XIX, entre los años de 1888 y 1900, varios países, que no contaban con una reserva propia de petróleo, comenzaron a realizar experimentos en los cuales los molinos de viento fueron usados para generar electricidad.

Uno de los países que más ha desarrollado esta tecnología ha sido Dinamarca, la cuál, entre los años 1900 y 1910, instaló varias plantas generadoras de electricidad que utilizaban al viento como fuente de energía, pero que decayeron, debido a la aparición de las máquinas Diesel, las cuales eran más baratas y más convenientes. Durante la Primera Guerra Mundial, el abastecimiento de petróleo fue nulo, por lo que la utilización de la energía del viento fue resucitada. Muchas plantas generadoras de 20 a 35 KW fueron construidas en ese tiempo. Después de la primera guerra, la electrificación se basó nuevamente en las máquinas térmicas, por lo que nuevamente, las turbinas de viento decayeron. En 1939, la Segunda Guerra mundial, causó otro desabastecimiento de petróleo, por lo que otra vez, las turbinas de viento surgieron para satisfacer las necesidades energéticas. Al final de la guerra, la electrificación tomó un nuevo impulso, pero esta vez no se olvidaron de las turbinas de viento, al contrario, se crearon programas de investigación que las consideraban como respaldo de las plantas generadoras más grandes.

---

Después de 1945, no solo Dinamarca contaba con estos desarrollos, también los tenían Francia, Alemania, y Gran Bretaña. También se inspiraron desarrollos en Estados Unidos, con el generador Smith-Putnam, que operó entre los años 1941 y 1945. Todas estas nuevas propuestas trajeron éxitos tecnológicos, pero no era suficiente en cuanto al costo que implicaba su desarrollo. Sin embargo, probaron ser un buen punto de partida para el renacimiento de las turbinas de viento en la década de los 70s, que fue provocada por la crisis petrolera de 1972.

Esta breve revisión sirve para colocar la evolución de los turbinas de viento en un contexto general. Pero, es necesario regresar a los orígenes de su desarrollo, para explorar su diseño mecánico y algunos problemas que fueron resueltos en el proceso y otros que no lo fueron. Pero primero es necesario establecer algunas características importantes de nomenclatura, para evitar confusiones en la discusión futura de la literatura pasada y presente.

Los términos que se han usado hasta el momento son los de “molinos de viento” y “Turbinas de viento”. La tecnología moderna ha establecido firmemente el segundo término, ya que la define como una máquina capaz de ser usada en cualquier número de diferentes aplicaciones, ninguna de la cuál está relacionada con la molienda de granos u otras sustancias, junto con otros elementos como son: transmisión mecánica, torre, generadores o bombas, cubiertas, etc. También, el término “Turbina de viento”, es descrito como un Sistema de conversión de energía del viento, o si es usado para producir energía eléctrica, como Generador de turbina de viento.

Los adjetivos horizontal y vertical, relacionados con los dos mayores tipos de máquinas de viento, son una fuente de confusión. En la terminología moderna, se refiere al aspecto geométrico del eje motriz sobre el cuál el rotor está montado. Por ejemplo, una máquina construida como un carrusel, con un eje central vertical y un número de veletas rectas ó dobladas dispuestas en una dirección más o menos paralela al eje motriz, es llamada hoy en día como “Turbina de viento de eje vertical”.

## **1.2. Desarrollo Histórico**

Las primeras menciones del uso de la energía del viento vienen de países del Este, como son: India, Tibet, Afganistán, Persia. Manuscritos antiguos han sufrido traducciones, revisiones e interpretaciones de diferentes personas por muchos siglos. En algunos, incluso los dibujos originales fueron cambiados a los deseos de los revisores, y ha habido casos de falsificación. Algunos autores como Drachman, Needham, Vowles y White citan ejemplos de tales aberraciones. Mari Boas da un buen ejemplo del tratamiento que un manuscrito puede sufrir en su monografía detallada “ Hero’s Pneumatica- A Study of its transmisión and influence (1949)”.

La monografía de Boas es oportuna, ya que en ella hace mención y le atribuye la invención del molino de viento a Heron (una variante de Hero) de Alejandría, en virtud de que es uno de sus muchos aparatos que aparecen en su “Pneumatica” , y que fue escrito hace más de

---

---

2000 años. Esta descripción o adjudicación es ahora rechazada por varias personas, que van desde una simple negación hasta un total repudio de tal idea.

Existe alguna dificultad respecto a la forma que se representa dicho molino en el libro “Pneumatica” y la comprensión de algunas palabras clave en la descripción de la máquina. Esta historia es revisada brevemente aquí debido a que es un ejemplo claro y clásico de cómo se han añadido “mejoras” a dichos manuscritos. Algunas preguntas que surgieron conforma este estudio se llevo a cabo fueron: ¿Será realmente Heron el inventor del molino de viento? o mas aún ¿Fue su invento la inspiración de todas aquellas máquinas que se crearon después del enorme lapso de tiempo que existió entre el nacimiento de la idea y la realización de la misma?; Estas y otras preguntas aun quedan en al aire, debido a las diversas modificaciones que han sufrido los escritos.

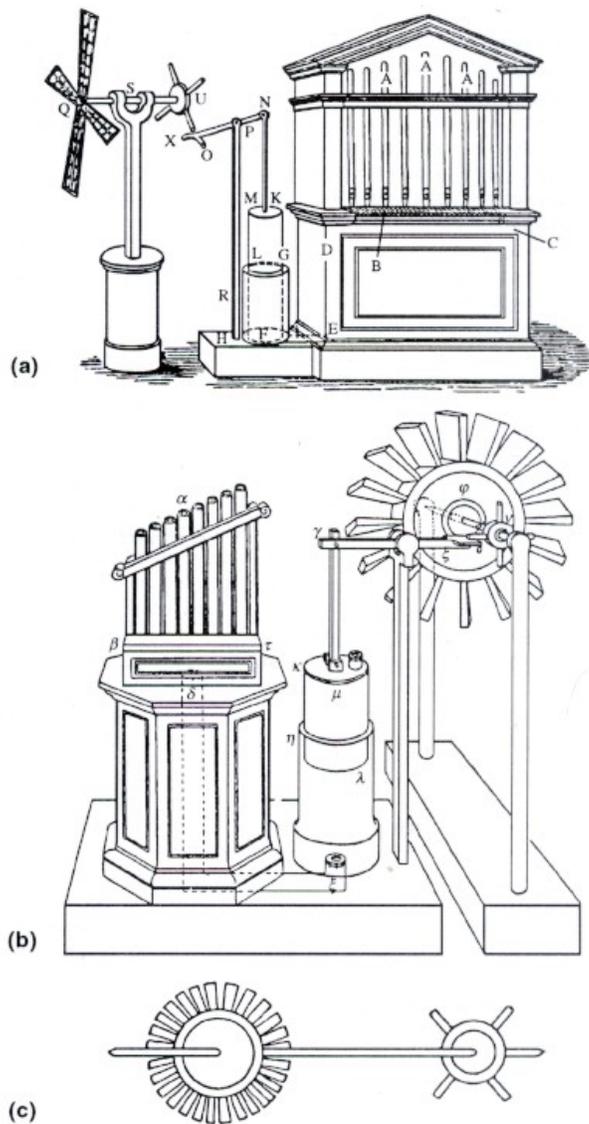
La fecha exacta del nacimiento y muerte de Heron no están muy claras, pero la mayoría lo sitúa entre los siglos 2 A.C. y el 3 D.C., pero algún tiempo en el siglo 1 D.C. es el más probable. Su libro “Pneumatica” (mejor conocido por muchos como el origen de las turbinas de vapor) consiste en descripciones de varios aparatos ingeniosos que operaban en base a la utilización del agua o del viento; algunos de ellos son de lo que hoy en día llaman “juguetes” o incluso “Máquinas mágicas”. Él mismo aseguró en su libro, que había añadido algunas invenciones suyas, pero nunca dijo cuales de ellas eran. El libro fue conocido y referenciado en la época medieval, pero muchas transcripciones y traducciones al latín y griego se perdieron en parte ó por completo. Una traducción al Ingles fue hecha por Bennett Woodcroft (1851) y una al alemán por Wilhelm Schmidt (1899). La última contiene el escrito en griego palabra a palabra, y es aceptado generalmente como un texto estándar.

La oración con la que comienza un capítulo del libro “Pneumatica” es dada por Woodcroft como “La construcción de un órgano del cuál, cuando el viento sopla, el sonido de una flauta será producido”. Schmidt da básicamente la misma traducción al alemán de la oración en su libro. Ambos libros contienen imágenes mostrando un eje con palas en un extremo y 4 ganchos en el otro extremo, los ganchos golpean intermitentemente un nivel de barra, el cuál a su vez levanta el pistón contenido en el cilindro. Entre los levantamientos, el pistón cae en el cilindro por su propio peso, resultando en un bombeo de aire al órgano musical. Aunque ambos dibujos están basados en la descripción del texto, cada uno fue hecho con la imaginación del intérprete: Woodcroft presenta un rotor de eje horizontal que tiene 4 velas, una configuración desconocida hasta el siglo XII, y Schmidt muestra una configuración de rotor tipo molino de agua, que también fue conocida en una época muy posterior. Pero Schmidt discute en su introducción una versión muchos más cruda del rotor mostrado en la figura 1.1c. De acuerdo con Drachmann (1961), quién ha hecho un replanteamiento detallado en años recientes, este es el dibujo más parecido al original que es posible conseguir. Vowles también discute el misterio de “Pneumatica” (1930) y muestra 4 ejemplos de imágenes transformadas de varios manuscritos posteriores y que confunden aún más el entendimiento de “Pneumatica”.

En conjunción con las dificultades que se tienen con los dibujos de las máquinas de Heron, el significado exacto de algunas palabras también esta en duda. Dos ejemplos claros son la palabras “anemurion”, que significa molino de viento o solo veleta, y si Heron usó la palabra “organon” para expresar un instrumento musical o sólo un término genérico, como

---

se podría hablar de un órgano del cuerpo. Existen problemas de diseño como, girar la máquina a la posición de la dirección del viento, y que la conducción de los ganchos, ya que deben permitir una rápida oscilación del pistón. Ninguno de estos movimientos parecen ser posibles, excepto en unas máquinas muy pequeñas que pudieran ser movidas con las manos, y que tuvieran un pistón muy ligero. Así que quizás la máquina fue pensada para ser un juguete y no una invención que pudiera ser tomada seriamente como una máquina que pudiera ser útil.



**Fig. 1.1 Algunos conceptos de los molinos de viento descritas por Heron de Alejandría en su libro “Pneumatica”. a) Rotor tipo alemán de 4 palas (Woodcroft 1851), b) Concepto con un rotor tipo molino de agua (Schmidt 1899), c) Dibujo de Heron de su rotor con eje (Schmidt 1899)**

---

Pero, ¿Si el inventor del molino de viento no fue Heron de Alejandría, entonces quién fue y en donde fue?. Esto no puede ser contestado, no es posible pensar en que algún día se conocerá realmente quien fue. En su lugar se puede pensar en que la invención se llevó a cabo en un número de pequeños avances, por medio de prueba y error en diferentes lugares, por años, que eventualmente fueron unidos para arrojar una máquina que funcionará y que no tuvo una fecha específica de nacimiento. Vowles señala algo lejano, a pesar del desprecio de cualquier evidencia directa, al afirmar que el molino de viento fue conocido en la época greco-romana como “un ejemplo no muy claro del trabajo de Heron”, lo cuál arroja la posibilidad de que quizás fue en esa época que se llevo a cabo dicha invención.

La primera parte del periodo medieval, desde el final del imperio romano hasta el renacimiento, fue llamada la edad oscura. La cultura griega se había expandido hacia muchos lugares más allá de sus costas (Incluyendo Alejandría), y muchas escuelas fueron establecidas por todo el cercano y medio este, como: Palestina, Siria, Anatolia, Mesopotamia, y Persia, por llamarlas por sus antiguos nombres. Esta región se convirtió en parte al Islam Por la conquista de Mohammedan en el siglo VII, y por lo tanto la herencia griega fue disponible para toda la región islámica. Muchos textos griegos fueron traducidos al árabe y por lo tanto gozaron de mucho más audiencia. Como sea, aunque es conocido que el molino de viento está incluido en “Pneumatica”, el tiempo de su aparición es desconocido y pudo ser alrededor del siglo IX. Por lo tanto, el trabajo de Heron pudo haber simulado el uso de la fuerza del viento en el mundo Islámico, pero no hay evidencia que lo sostenga. Todas las historias y escritos que existen de entre los siglos I y XII vienen del cercano oriente y Asia central, y por lo tanto esas regiones del mundo son consideradas como los lugares de nacimiento del molino de viento.

### *1.2.1 El molino de viento Persa de eje vertical.*

Existen sugerencias de que la rueda tibetana fue la inspiración del molino de viento, pero aunque puede ser una posibilidad, la proveniencia de la rueda tibetana es dudosa. La siguiente referencia cronológica proviene del siglo VII, pero el texto mismo apareció por lo menos 200 años después. La historia fue bien conocida y fue repetida muchas veces por varios escritores en más de una versión. La primera mención es dada por Ali al-Tabari (834-927 D.C.). De acuerdo con Needham (1965), el Califa Omar fue asesinado en la capital islámica de Medina en el año 644 D.C. por un esclavo/técnico persa capturado llamado Abu Lu'lu'a, quien estaba resentido por los altos impuestos; quién también afirmaba que era capaz de construir molinos que fueran impulsados por el viento. Esta historia fue repetida por el geógrafo Ali al-Mas'udi(956 D.C.), aparentemente en una pequeña variación en la cuál el Califa preguntó al artesano si el había alardeado algo acerca de que era capaz de construir un molino impulsado por el viento, a lo cuál recibió la replica “Por dios, yo construiré este molino del cuál el mundo hablará”, (Wulff 1996). Debido a que fue transmitido oralmente por muchos años, y no existe registro alguno de ese momento por parte de los escritores contemporáneos al tiempo de la muerte de Omar, el incidente puede ser usado solamente para prestar algo de plausibilidad a la posible existencia del molino de viento en el mundo islámico a mediados del siglo VII.

---

Una de las primeras referencias aceptadas del uso del molino de viento persa fue hecha por parte de al-Mas'udi, en el siglo X, y que la describe como:

“.. la tierra de vientos y arena. Ahí las maquinas de viento recolectan y suben el agua de los ríos, con la cuál los jardines son regados. No hay lugar en el mundo, y dios solo sabe, donde existe un uso mas frecuente de los vientos.”

Lo anterior está documentado y basado en escritores confiables y reforzado por dibujos antiguos que corresponden a los restos de viejos molinos y también a los que aún siguen en uso. La región a la que corresponden es Sistan, al este de Persia, en la frontera con Afganistán.

Al-Istakhri también alrededor del año 950 D.C., provee una descripción similar así como interesante, de cómo los habitantes se las arreglaban con las dunas cambiantes. Ellos las encerraban en cercas altas con una puerta en la parte baja de la cerca que permitía que el viento se llevara la arena lejos de la cerca, lo cual añade credibilidad a su habilidad en manejar los molinos de viento. El viento de Sistan es famoso, o notorio, debido a que puede alcanzar velocidades de 45 m/s (100 MPH) y que puede soplar con fuerza y con un respiro de 4 meses, que van desde la última parte de la primavera hasta el verano.

Algunos 300 años después, se tuvo la confirmación por parte del geógrafo al-Qazwini (1203-1283 D.C.), quien escribió:

“Allí el viento nunca es continuo, así que de la dependencia de sus molinos levantados, ellos hacen toda su molienda de granos con estos molinos, es una tierra caliente y tiene molinos que dependen de la utilización del viento” (Wulff 1996).

Alrededor del año 1300 D.C., Al-Dimashqi (1256-1326 D.C.), un cosmógrafo Sirio, escribió un reporte que contenía una descripción detallada y un dibujo del molino de viento Persa, Fig. 1.2.



**Fig. 1.2 El molino de viento Persa de eje vertical, de acuerdo a al-Dimashqi (1300 D.C)**

La estructura, rodeada por una pared en la parte inferior, tenía molinos de piedra en la parte superior del molino y un rotor en la parte inferior. Esto último consistía en un carrete atizador con 6 a 12 pestañas, cada una cubierta de tela para formar aspas separadas como aletas longitudinales sobre un tubo intercambiador de calor. La figura muestra como se hinchan las cubiertas de tela conforme reciben al viento y lo transmiten al carrete. La pared tenía orificios espaciados de la misma altura del rotor, y con su perímetro biselado, para reducir el área del espesor de la pared, se aumentaba la velocidad del viento proveniente de cualquier dirección.

### 1.2.2. Los Molinos de Viento de Neh

Los molinos de viento de este tipo continuaban siendo usados en 1963, en la región de Sistan, cuando un investigador del tema, H. E. Wulff, vio a 50 de éstas máquinas operando al norte del pueblo de Neh.

La construcción, mostrada en la fig. 1.3, consta de un rotor en la parte superior, encerrado por paredes laterales y con una apertura amplia dirigida hacia el norte, la principal dirección del viento. Este rotor esta unido a una flecha de madera que transmite el movimiento. En la parte baja, la flecha cuenta con una estaca de acero, que a su vez se encuentra apoyada sobre un bloque de madera. Una rueda de piedra estaba sujeta a la estaca de acero de la flecha y otra rueda se apoyaba sobre la estructura del propio molino. El rotor estaba formado por 8 velas sujetas por medio de filas de palos incrustados en la flecha.

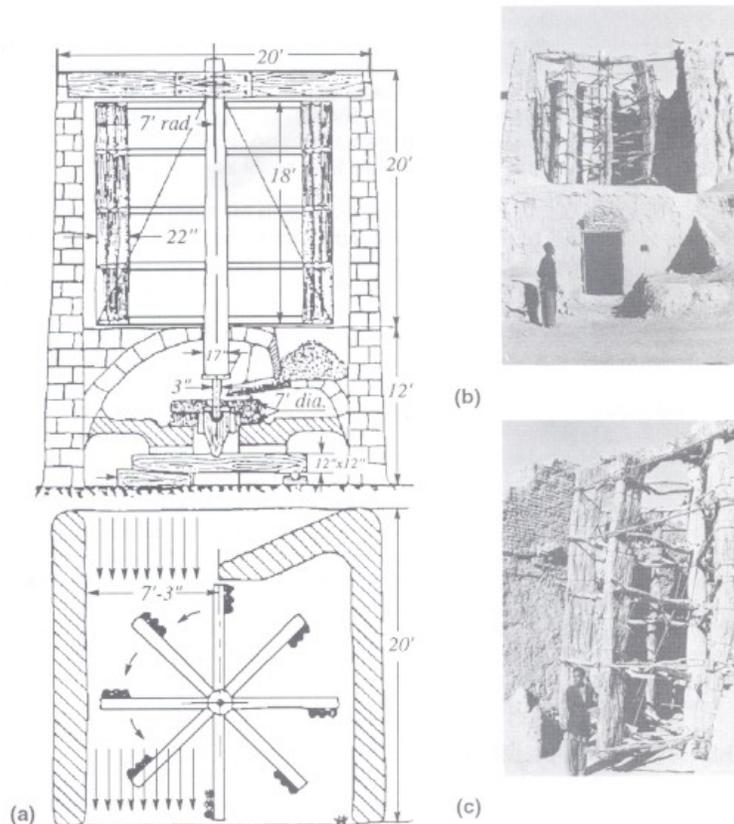


Fig. 1.3 Un molino de viento Persa, que aún existe en la región de Neh

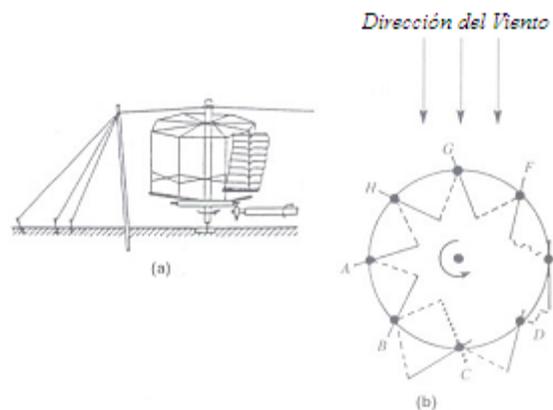
---

Como se puede ver, el diseño básico de estos molinos de eje vertical ha durado, por lo menos 1000 años, aunque se ha modificando principalmente la posición de la velas o del rotor, como se puede observar en las figs. 1.2 y 1.3, ya que se han elevado para poder tener una mejor exposición del rotor a vientos de mayor velocidad. Otro cambio notable es la utilización de junco en lugar de tela para mejorar el área de trabajo y el uso de una sola apertura amplia en lugar de varias más pequeñas.

### 1.2.3. *Los molinos de viento Chinos de eje vertical.*

Al parecer, una versión menos extendida muestra que los chinos inventaron el molino de viento y lo han estado usando por más de 2000 años. Puede ser cierto, considerando que ellos desarrollaron muchos artefactos de ingeniería, pero no existe evidencia de que el molino de viento fuera uno de esos desarrollos. La primera referencia importante es alrededor del año 1219 D.C., ya que existe un reporte de ese año, en el cuál, una autoridad de la astronomía e ingeniería, Yehlü Chhu-Tshai, relata en uno de sus poemas, que el trigo almacenado era molido por el viento apresurado, y que los habitantes utilizaban el molino de viento como los habitantes del sur utilizaban el molino de agua. Otras referencias chinas posteriores, apuntan a su importación de tierras adyacentes al oeste de China, como la razón más probable, y que fue hecha por mercaderes del centro y Sureste de Asia.

La forma de estos molinos era peculiar, tenían 8 velas de junco montadas sobre mástiles alrededor de un eje vertical, y colocadas de tal manera que se orientaran automáticamente, fig. 1.4. Los mástiles estaban sujetos a la flecha por medio de brazos radiales. La extracción de energía se obtenía por medio de engranes rectos. La figura 1.3b muestra el comportamiento de la vela conforme el rotor gira. Cada vela está montada asimétricamente sobre su mástil, y se coloca contra el viento por medio de una cuerda (posiciones G, H, A, y B) hasta que alcanza un punto en su rotación en el cuál se resiste y cambia su orientación balanceándose hacia fuera (C y D), y de ahí regresa hacia su posición original, movimiento en el cuál se produce una pequeña resistencia a la rotación de la flecha (E y F). Por lo que, este molino no necesita paredes protectoras como los modelos Sirios y puede utilizar el viento desde cualquier dirección. Este tipo de molinos sigue siendo usado en la parte este de China.



**Fig. 1.4 Molino de viento de eje vertical chino, con 8 veletas de bambú.**

---

El misterio real radica en el hecho de que el molino de viento persa de eje vertical nunca fue usado en el Noroeste de Europa. Al final del siglo XII, hubo una efervescencia de un tipo completamente nuevo, el molino de eje horizontal. Este desarrollo presenta un segundo enigma en el desarrollo técnico de la turbina de viento que ocurrió algunos miles de años después del enigma de la máquina de Heron.

#### *1.2.4. El cambio de Eje.*

El Noroeste de Europa, particularmente Francia, Alemania, Gran Bretaña, España, y países bajos, eventualmente se convirtieron en la región que desarrolló el más efectivo tipo de molino de viento, uno en el cual el eje que soportaba las veletas estaba orientado horizontalmente, a diferencia del molino de viento persa, el cual estaba orientado verticalmente. En muy poco tiempo, muchas de estas máquinas, llamadas Molinos de Viento de eje Horizontal Europeos, fueron usados en diversas tareas. La forma familiar en que sus aspas están colocadas sobre la flecha, ha prevalecido aproximadamente 800 años, desde el siglo XII hasta el siglo XX.

Los primeros indicios que se tienen de estas máquinas, se concentran en dos reportes de la época medieval. Uno de ellos expone el contexto social de la revolución tecnológica, y su información principal viene de los reportes financieros de los terratenientes. Los detalles técnicos casi no se exponen, pero en cambio se precisa su ubicación, su apariencia, patrocinadores, propietarios y arrendatarios. En este reporte se evidencia la existencia de 56 molinos de eje horizontal, todos construidos antes del año 1200 D.C.; Otro reporte indica la existencia de 23 molinos antes del año 1200, los cuales reafirman la existencia de aquellos reportados en el primer informe, pero además exponen la existencia de algunos desde el año 1137. Con este número de molinos, suena razonable considerar a Gran Bretaña como el origen del molino de viento de eje horizontal.

A finales del siglo XII, estos molinos se fueron haciendo más comunes en el Noroeste de Europa, y para el siglo XIV, ya eran la mayor fuente de energía de la región. Pero hay algo más importante aún que la rápida propagación de estas máquinas, el cambio completo del eje vertical al eje horizontal. Las 4 veletas del molino de viento europeo, que muy posiblemente eran tablas planas, estaban montadas en un eje horizontal, y cada pala ó veleta estaba orientada en un pequeño ángulo con respecto al plano de rotación de toda la rueda. Esto presentaba varios problemas de ingeniería; 3 de los cuales eran bastante complicados: 1) la transmisión de potencia de un eje horizontal a un eje vertical, en el cual las piedras estaban colocadas, 2) alinear el rotor del molino con la corriente del viento, y 3) detener el rotor cuando fuera necesario, ya que el viento no podía ser desviado o bloqueado.



Fig. 1.4A Algunos Molinos de viento Antiguos

El primer problema fue resuelto adoptando un engranaje tipo recto, diseñado mucho tiempo antes por Vitruvius para su rueda de agua de eje horizontal. Para resolver el segundo problema, se optó por colocar todo el sistema rotativo sobre una base que girará alrededor de un husillo central, compuesto por un poste soportado por grandes vigas. El tercer problema, detener el rotor, pudo ser solucionado mediante el desvío de la orientación del rotor de la corriente del viento y aplicando un freno de fricción a la rueda más grande del engranaje.

Considerando todo esto, el molino de eje horizontal era considerablemente más complejo en sus mecanismos que el molino Persa de eje vertical, pero su adopción es realmente explicada por el hecho de que era mucho más eficiente.

#### *1.2.5. Cambio de eje y fuerzas de levantamiento.*

Como se ha visto, el hombre solo a encontrado un camino eficiente de transformar la energía del viento en energía eléctrica o mecánica, y ha sido por medio de la turbina de viento. Durante todos estos años, el hombre ha desarrollado varios diseños de turbinas de viento, cubriendo cada concepto concebible, de forma y de tamaño. Como resultado, se obtuvieron diseños más completos y que muchos de ellos fueron construidos y probados. Durante este proceso de diseño, surgieron las dos principales configuraciones de turbinas de viento: las turbinas de eje Vertical y las de eje Horizontal, y que se refiere a la forma en que el eje rotatorio esta posicionado.

Pero aún hay más, aunque el mecanismo que permitió el cambio de eje, el engrane de ángulo recto, de la posición vertical a la horizontal, la acción de las veletas también tenían que se reorientadas  $90^\circ$ , esto fue revolucionario, por que significaba que el simple empuje directo del viento sobre la cara de la veleta fue reemplazado por la acción del viento fluyendo suavemente alrededor de la veleta, lo que daba lugar a una fuerza normal a la dirección del viento. Como concepto, es verdaderamente sofisticado, ya que no estaba

---

completamente desarrollado hasta la llegada del aeroplano al final del siglo XIX, y de la ciencia de la ingeniería aerodinámica.

De hecho, aunque no tuvieron a su disposición tal ciencia, los primeros constructores de los molinos de viento de eje horizontal habían descubierto el “levantamiento aerodinámico” y lo habían usado para alcanzar un diseño mejorado, más que aquel que usaba el “arrastre”, que fue la fuerza que impulsaba a los molinos de viento persas y que fue, quizás, la forma más simple de extraer la energía del viento.

Para entender mejor lo que se tratara de aquí en adelante, una explicación breve de lo que son los elementos impulsados por las fuerzas de levantamiento y de arrastre es necesaria.

### 1.2.6. Elementos impulsados por fuerzas de arrastre

Uno de los más simples tipos de máquinas es aquella que se mueve en línea recta bajo la acción del viento. Podemos considerar al elemento impulsado por el viento como un elemento de pala de una turbina de viento, que es afectado por las fuerzas de arrastre.

Considerando la velocidad del viento como  $V_\infty$ ,  $v$  la velocidad de traslación de la pala y  $D$  el arrastre de este elemento. Por lo tanto, la potencia extraída está dada por:

$$P = Dlv = C_D \rho_d A_p v = \frac{1}{2} \rho (V_\infty - v)^2 C_D S v \quad (1.1)$$

donde  $C_D$  representa el coeficiente de arrastre,  $S$  el área proyectada del elemento y  $(V_\infty - v)$  es la velocidad relativa del elemento de pala. Para una relación de velocidades  $v/V_\infty = 1/3$  se obtiene un coeficiente de potencia máximo.

$$C_{P_{\max}} = \frac{P_{\max}}{\frac{1}{2} \rho S V_\infty^3} = \frac{4}{27} C_D \quad (1.2)$$

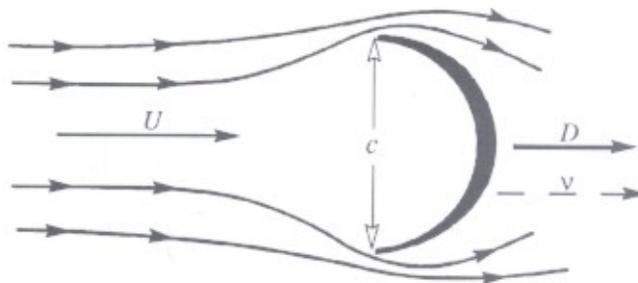


Fig. 1.5 Elemento traslacional de arrastre

---

### 1.2.7. Elementos impulsados por fuerzas de levantamiento

En contraste, el elemento de levantamiento lo hace mucho mejor. La fig. 1.6 muestra un perfil aerodinámico que está en movimiento perpendicular a la dirección del viento y que está sujeto tanto a fuerzas de levantamiento como de arrastre. Esta superficie sustentadora muestra una velocidad relativa que es una suma vectorial de la velocidad del viento en corriente libre y la velocidad inducida por el movimiento de traslación. El ángulo comprendido entre la dirección de la velocidad relativa del viento y la *cuerda* del perfil aerodinámico es llamado *ángulo de ataque*. Las fuerzas de levantamiento y de arrastre son perpendiculares y paralelas, respectivamente, a la velocidad relativa del viento y están dadas por:

$$L = 0.5\rho W^2 C_L c \quad (1.3)$$

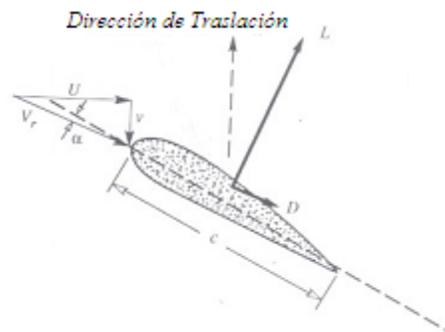
$$D = 0.5\rho W^2 C_D c \quad (1.4)$$

donde: L=Fuerza de levantamiento aerodinámico por unidad de longitud del perfil (N/m)

D=Fuerza de arrastre aerodinámico por unidad de longitud del perfil (N/m)

$C_L, C_D$ =Coeficientes de levantamiento y arrastre, respectivamente; funciones de la forma del perfil y del ángulo  $\alpha$ .

W=Velocidad relativa del elemento de pala.



**Fig. 1.6 Perfil aerodinámico con fuerzas de levantamiento y arrastre**

El análisis del perfil como un cuerpo libre, arroja la potencia extraída como:

$$P = 0.5\rho V_\infty^3 S \frac{v}{V_\infty} \left( C_L - C_D \frac{v}{V_\infty} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{v}{V_\infty} \right)^2} \quad (1.5)$$

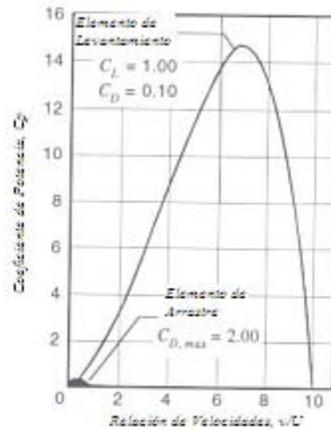
El coeficiente de potencia máximo se convierte en:

$$C_{P_{\max}} = \left( \frac{2}{9} \right) C_L \left( \frac{C_L}{C_D} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{4}{9} \right) \left( \frac{C_L}{C_D} \right)^2} \quad (1.6)$$

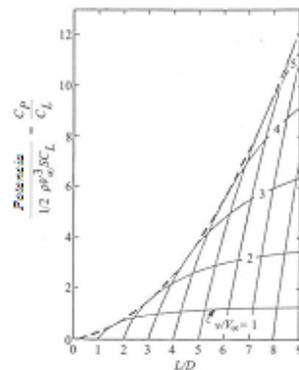

---

el cuál corresponde a una relación de velocidades máxima de :  $\frac{v}{V_\infty} = \frac{2}{3} \left( \frac{L}{D} \right)$

La figura 1.7 es una comparación del levantamiento y arrastre como mecanismos para extraer potencia del viento el cuál realmente muestra las ventajas de usar superficies de levantamiento. Las ecuaciones de (1.5) y (1.6) son usadas para construir esta gráfica. Las propiedades aerodinámicas son  $C_L=1.0$  y  $C_D=0.10$  para el perfil, y  $C_{D,max}=2.0$  para el elemento impulsado por el arrastre. El perfil tiene un coeficiente de potencia máximo de 15.0 comparado con el 0.3 para el elemento de arrastre. Por lo tanto, los mecanismos de levantamiento pueden producir 50 veces más la potencia por unidad de área que el producido por los mecanismos de arrastre. La potencia extraída de un mecanismo de levantamiento también es mostrada en la fig. 1.8 en la forma de la relación de coeficiente de potencia-coeficiente de levantamiento vs. la relación levantamiento-arrastre para diferentes relaciones de velocidad ( $v/V_\infty = 1,2,3,4,5$ ).



**Fig. 1.7 Comparación de los coeficientes de potencia entre un elemento de levantamiento y un elemento de arrastre.**



**Fig. 1.8 Potencia de un perfil vs relación levantamiento/arrastre**

---

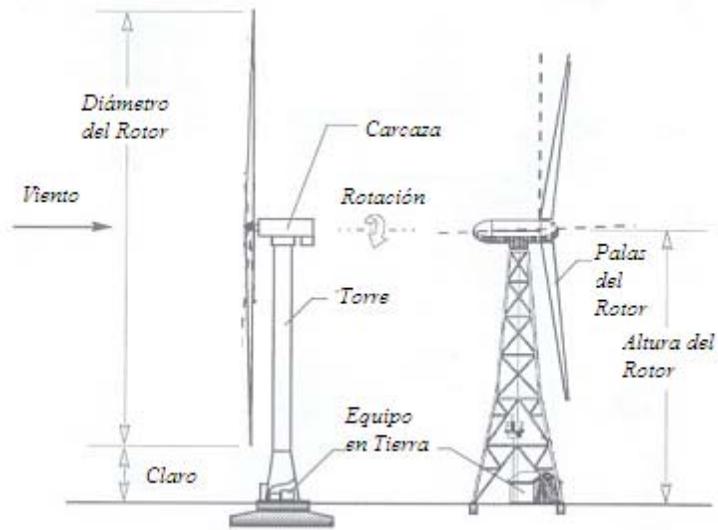
Los mecanismos de levantamiento tienen la ventaja de operar a velocidades más grandes que la velocidad del propio viento. Esto significa que los mecanismos de levantamiento están diseñados para manejar una relación de velocidades en la punta mayores a 1, que es mucho más ventajoso para maquinarias rotatorias. Es muy notorio que el máximo coeficiente de potencia de cualquier máquina rotativa que utiliza dispositivos de arrastre es menor a  $(4/27) C_{D,max}$ , basándose en el área proyectada por los elementos de arrastre, mientras que para un dispositivo de levantamiento es mucho mayor.

### **1.3. Tipos de turbinas de viento.**

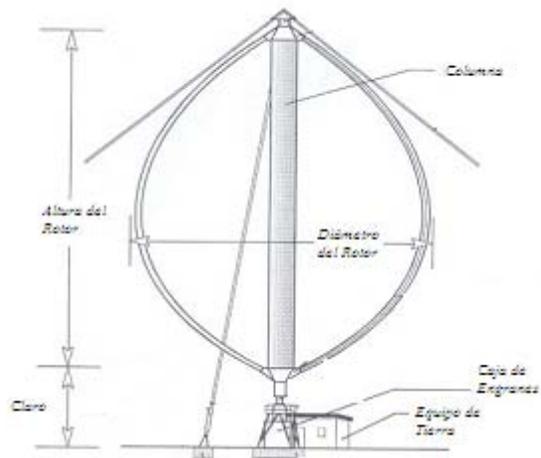
Con la superioridad de los dispositivos de levantamiento establecida, el concepto de colocar superficies de levantamiento en maquinarias rotatorias para dar forma a una turbina, parece ser un método obvio de convertir la energía del viento en trabajo útil.

Así que, el camino más eficiente de convertir la energía del viento en energía eléctrica ó mecánica es ofrecido por las turbinas que operan como dispositivos de levantamiento. Las turbinas de viento son clasificadas en dos categorías, de acuerdo a la posición o dirección de su eje rotacional: las turbinas de eje horizontal (HAWT por sus siglas en ingles) y las turbinas de eje vertical (VAWT por sus siglas en ingles). Las turbinas de eje horizontal (HAWT) capturan la energía cinética del viento con un rotor tipo hélice y su eje rotacional es paralelo a la dirección del viento fig. 1.9. Las turbinas de viento de eje vertical usan palas rectas o curvas (Turbina tipo Darrieus) en su rotor con el eje rotatorio perpendicular a la corriente del viento. Estas últimas pueden capturar al viento desde cualquier dirección fig. 1.10. Las turbinas de viento más populares son las de tipo de “hélice” ó de eje horizontal, pero las de eje vertical todavía no han sido beneficiadas por los años de desarrollo experimentados por las turbinas de eje horizontal.

Ambos tipos, las turbinas de eje horizontal (HAWT's) y las turbinas de eje vertical (VAWT's), tienen alrededor de la misma eficiencia ideal pero la turbina de eje horizontal es más común. Esta tiene un rotor entero, una caja de engranes y un generador eléctrico en la parte más alta de la torre, y debe de ser girada para quedar frente a la dirección del viento. La turbina de eje vertical, en cambio, acepta al viento de cualquier dirección, y toda su maquinaria pesada se encuentra a nivel del terreno; Esto es más conveniente para el mantenimiento, particularmente en grandes unidades o cuando se está operando en condiciones de potencial congelamiento.



**Fig. 1.9 Principales subsistemas de una turbina de viento de eje horizontal (HAWT)**



**Fig. 1.10 Configuración general de una turbina de viento de eje vertical moderna (VAWT)**



**Fig. 1.10A Algunas Configuraciones de una turbina de viento**

Ambos tipos de turbinas de viento tienen los mismos componentes generales:

- un **rotor** para convertir la energía del viento en energía mecánica
- una **torre** para soportar al rotor
- una caja **de engranes ó cambios** para ajustar la velocidad rotacional del eje motriz para el generador eléctrico o una bomba.
- un **sistema de control** para monitorear la operación de la turbina de viento en modo automático, incluyendo el arranque y el paro.
- una **fundación** (algunas veces auxiliada por cables tensores) para prevenir que la turbina sea derribada por vientos fuertes.

### *1.3.1. Subsistema del rotor de una turbina de viento de eje horizontal*

Los rotores de las turbinas HAWT son generalmente descritos como tipo “hélice”, ya que los principios aerodinámicos y estructurales que son básicos para las hélices de aviones, son aplicados también a los rotores de las turbinas. Por supuesto, los rotores de las turbinas desaceleran el aire, y las velocidades en la punta del rotor son mucho menores que las que existen en las hélices de aeronaves. Como se puede ver en la fig. 1.9, los componentes principales de un rotor HAWT son sus palas unidas a disco central. Generalmente se pueden encontrar arreglos de 2 y 3 palas. Conforme el rotor gira, sus palas generan una superficie imaginaria, cuya proyección en el plano vertical es llamada “Área barrida”. Los términos “rotor viento-abajo” y “rotor viento-arriba”, se refieren a la posición del rotor respecto a la torre. Un rotor recto es aquel en el cuál los ejes de la envergadura de todas las palas están en el mismo plano de rotación. En cambio, los ejes de las palas en un rotor

---

cónico, están inclinados “viento-abajo” desde un plano normal al eje de rotación, en un pequeño “ángulo de conicidad”. El motivo de esta pequeña inclinación es que ayuda a balancear la flexión “viento-abajo” de las palas, causada por las cargas aerodinámicas, y la flexión “viento-arriba”, causada por la fuerza centrífuga. El claro de torre (distancia mínima entre la punta de la pala y la torre), está influenciado por la conicidad del rotor, el balanceo del rotor (rotor teetering), y la deformación elástica de la pala bajo carga. Por lo común, un ángulo de inclinación del eje (axis-tilt angle) es necesario para obtener un claro suficiente ó más seguro. Este ángulo de inclinación se debe mantener al mínimo, debido a los efectos negativos que acarrea, tal como la reducción del área barrida y la generación de una componente vertical del torque del rotor y que puede ocasionar un momento de desvío en la cubierta.

Los dos tipos de disco del rotor son: rígido y articulados. En un disco rígido, cada pala esta empotrada al disco y el disco esta unido rígidamente al eje de la turbina. De esta forma, las palas transmiten todas sus cargas aerodinámicas directamente a la flecha. Para reducir las cargas cíclicas que se generan en este tipo de unión, se ha creado el disco articulado, el cuál está conectado a la flecha de la turbina por medio de un pivote, llamado “balero loco” ó “bisagra basculante”. Esta articulación permite que el rotor gire como cuerpo rígido, por medio de pequeños ángulos de balanceo, sin causar fatigas a la flecha.

Generalmente los rotores que tienen este tipo de unión son los de 2 palas, ya que cuentan con un desequilibrio dinámico, mientras que los rotores de 3 palas, están dinámicamente simétricos, por lo que no es necesario este tipo de unión.

Los rotores horizontales de mediana y gran escala contienen un mecanismo para ajustar el “paso de la pala”, que es el ángulo entre la cuerda del perfil y el plano de rotación. Este mecanismo de cambio de paso, que puede controlar el paso de toda la pala ó solo de la última sección de la pala, proporciona los medios para controlar el torque inicial, la potencia máxima, el torque de paro. Estos mecanismos son dispositivos de una alta calidad mecánica-estructural, con potentes actuadores hidráulicos y controles computarizados. Algunos turbinas de eje horizontal de pequeña y mediana escala tiene palas de paso fijo controladas por “pérdida aerodinámica”, evitando el costo y mantenimiento de los mecanismo de cambio de paso, dejando el trabajo de controlar la potencia de salida a la “pérdida aerodinámica”.

Una amplia variedad de materiales han sido usados exitosamente para la construcción de las palas, incluyendo fibras de vidrio, compuestos laminados de madera, perfiles de acero, y secciones aerodinámicas de acero soldadas. La selección de los materiales para las palas es una decisión de ingeniería, ya que se tienen que tener en cuenta aspectos como el tamaño, la rigidez, los esfuerzos, el peso de diseño, y experiencia de la manufactura, así como el mantenimiento y el costo.

### *1.3.2. Subsistema del tren de potencia.*

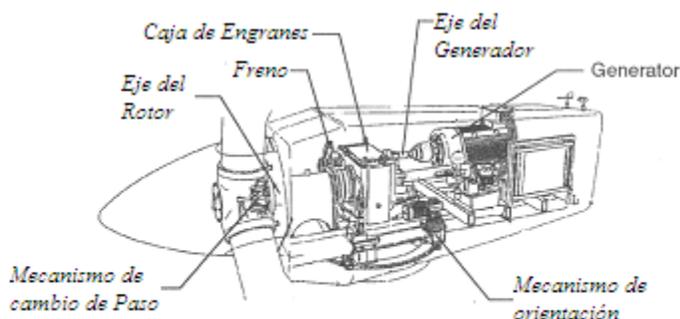
El subsistema del tren de potencia de una turbina consiste de series de componentes eléctricos y mecánicos que se requieren para convertir la potencia mecánica, recibida de la flecha conectada al rotor, a potencia eléctrica. En la turbinas HAWT, este equipo se

---

---

encuentra en la parte superior de la torre, junto con el rotor y la carcasa o cubierta, así que, un bajo mantenimiento es un requerimiento de diseño muy importante.

Este subsistema incluye al ensamble de la flecha de la turbina (también llamada flecha de baja velocidad o flecha primaria), la caja de engranes, la flecha del generador (también llamada flecha de alta velocidad o flecha secundaria), el freno del rotor, y un generador eléctrico, más equipo auxiliar de control, lubricación, y enfriamiento.

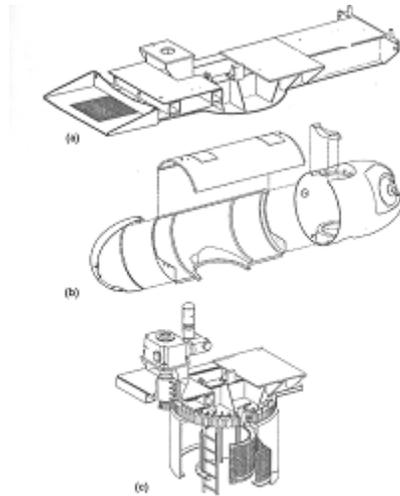


**Fig. 1.11 Subsistema del tren de potencia de un aerogenerador**

### *1.3.3. Subsistema de la cubierta o carcasa.*

La estructura de la carcasa o cubierta se caracteriza por ser la primera sobre la cuál actúan las fuerzas de la flecha del rotor, y que después transmite a la torre. En la fig. 1.12a se muestra la base y que soporta a los rodamientos de la flecha, los componentes del subsistema del tren de potencia, y el mecanismo de desvío. Generalmente son una combinación de secciones metálicas soldadas y remachadas que le dan forma, además de contar con una cubierta para proteger el equipo y al personal de mantenimiento.

Como se mencionó anteriormente, estas turbinas necesitan un mecanismo que oriente el rotor hacia la corriente del viento, esto se hace por medio del mecanismo de desvío, y que se encuentra conectado a la carcasa, esto con el fin de orientar todo el subsistema del rotor junto con el de tren de potencia. Como se ve en la fig. 1.12c, consta de engranajes grandes y un rodamiento que conecta a la base de la carcasa con la torre.



**Fig. 1.12 Subsistema de la carcasa**

#### *1.3.4. Subsistema de la torre.*

La torre es la encargada de elevar, tanto al rotor con al tren de potencia y la carcasa, hasta una altura establecida ó altura del disco, y que es la distancia entre el suelo y el centro del área barrida. Esta altura mínima es establecida por el claro de tierra (distancia entre el punto más bajo del área barrida y el suelo). Un aumento en la altura de la torre, sobre este mínimo, depende de un equilibrio entre el incremento en la captura de energía del viento (debido a que las velocidades promedio del viento aumentan conforma lo hace la altura), y el incremento en el costo del sistema, incluyendo los costos de mantenimiento y construcción.

El componente principal de la torre, es su estructura misma, la cuál puede ser de acero, mallas de concreto reforzado ó tubos de acero. También pueden incluir escaleras o elevadores que faciliten el acceso a la parte superior para el mantenimiento de la turbina.

Por lo general, estas torres están soportadas por fundaciones masivas ó concreto reforzado, dependiendo de las condiciones del terreno donde se planea instalar la turbina. Las dimensiones de la estructura de la torre, se calculan en base a los límites de la frecuencia fundamental del sistema, esto con el fin de minimizar la respuesta dinámica-estructural a las cargas aleatorias del subsistema del rotor.

#### *1.3.5. La estación de equipo en tierra.*

En esta estación se localiza aquel equipo que es necesario para la correcta conexión de la turbina con los sistemas de distribución eléctricos u otras aplicaciones. También se encuentran ahí equipo de control y acondicionamiento de potencia (transformadores, breakers, y componentes electrónicos de los sistemas de generación de velocidad variable), una unidad de control en tierra, grabadoras, cableado, etc. Algunos de estos elementos o todos pueden estar localizados dentro de la base de la propia torre.

---



**Fig. 1.13** Subsistema del tren de potencia de un aerogenerador

---

#### 1.4. Desarrollo de la energía eólica en el mundo

Actualmente, la tecnología de las turbinas de viento ha alcanzado tal nivel de calidad, que dichas turbinas ahora obtienen una viabilidad técnica de 99%. En la revista “Windsight” No. 5 de Junio de 1999, el Dr. Susuki mandó un mensaje a los canadienses diciendo: “El público está listo para los renovables..”. Él llamó a la energía alternativa y a la eficiencia energética “La mejor oportunidad de inversión desde la invención de la computadora”, y guió al gobierno a tomar un papel más activo en este tema. Incluso las compañías petroleras y otras corporaciones grandes están ahora invirtiendo en la energía solar y eólica debido a su potencial de desarrollo. Los gobiernos de otros países han creado incentivos que permiten acercar la energía eólica al mercado de la electricidad. La sociedad americana de energía eólica (AWEA por sus siglas en ingles) establece que mucho del crecimiento de la industria eólica en otros países (comparado con los EU) se debe principalmente a las políticas del gobierno acerca del uso de las fuentes de energía limpias y renovables. Algunos países que han desarrollado sus propios recursos eólicos incluyen: Alemania y la India(2/3 de la capacidad mundial instalada), EU.,Dinamarca, Holanda, Reino Unido, España, Suecia, Grecia, Nueva Zelanda, Australia, Canadá, China, Costa Rica, Brasil, Israel, Irán e Italia.

Uno de los mejores ejemplos del desarrollo de la industria eólica en el mundo hoy en día es Alemania, donde el gobierno ha estimulado la investigación y desarrollo de la energía eólica por medio de la ley de suministro de electricidad a través del control de los precios mínimos para la electricidad producida regenerativamente.

Los países europeos dominan el mundo de la energía eólica en términos de fabricación e instalación con aproximadamente  $\frac{3}{4}$  de la capacidad mundial instalada. El líder es Alemania con una capacidad instalada de 6410 MW en Abril del 2001 seguida de España con 2567 MW y después Dinamarca con 2346 MW. Es propio resaltar que Dinamarca tiene más de 6,000 turbinas de viento modernas, que en total, producen la aproximadamente el 14% de la toda la electricidad del país.

La potencia extraída del viento (en MW) instalada en Europa a finales del año 2000 y en Abril del 2001, se muestra en la siguiente tabla:

	1998 MW	1999 MW	2000 MW	2001 MW	2002 MW	2003 MW
<b>EUROPA</b>						
Alemania	2875	4443	6113	8753	12000	14000
España	834	1542	2402	3335	4828	5780
Dinamarca	1383	1771	2297	2417	2889	3094
Los Países Bajos	361	411	448	483	700	900
Italia	178	283	389	697	785	820
Reino Unido	333	347	409	485	557	648
Suecia	174	215	231	280	315	390
Grecia	55	158	189	272	276	354
Austria	30	42	78	95	138	267
Francia	21	25	79	85	137	231
Portugal	51	61	100	127	190	217
Irlanda	73	73	118	125	138	150
Noruega	9	13	13	17	97	100
Polonia	5	5	7	28	28	58
Bélgica	6	9	9	31	31	56
Finlandia	18	39	38	39	39	52
Ucrania	5	5	5	40	40	51
Latvia	0	0	1	1	1	24
Turquía	9	9	20	19	19	19
Luxemburgo	9	10	10	15	15	16
República Checa	5	5	5	5	5	10
Rusia	5	5	5	5	5	7
Suiza	0	0	3	5	5	5
Estonia	0	0	0	0	0	5
Hungría	0	0	0	1	1	2
Rumanía	0	0	1	1	1	1
<b>Total</b>	<b>6,434</b>	<b>9,466</b>	<b>12,965</b>	<b>17,356</b>	<b>23,235</b>	<b>27,257</b>
<b>NORTEAMÉRICA</b>						
Estados Unidos	1820	2534	2555	4245	4655	6336
Canadá	82	125	140	207	238	317
México	3	3	3	3	3	2
<b>Total</b>	<b>1,905</b>	<b>2,662</b>	<b>2,698</b>	<b>4,455</b>	<b>4,896</b>	<b>6,655</b>
<b>ASIA</b>						
India	992	1035	1220	1507	1702	1900
China	352	404	340	399	466	468
Corea del Sur	2	7	8	8	8	8
Taiwán	0	0	3	3	3	8
Sri Lanka	0	0	3	3	3	3
<b>Total</b>	<b>1,351</b>	<b>1,451</b>	<b>1,579</b>	<b>1,925</b>	<b>2,187</b>	<b>2,387</b>
<b>CENTRO Y SUDAMÉRICA</b>						
Costa Rica	27	51	51	66	66	71
Argentina	13	13	13	13	26	26
Brasil	17	19	20	20	20	22
Caribe	13	13	13	13	13	13
Chile	0	0	0	2	2	2
<b>Total</b>	<b>71</b>	<b>97</b>	<b>99</b>	<b>117</b>	<b>117</b>	<b>134</b>
<b>REGIÓN PACÍFICO</b>						
Japón	30	68	150	300	384	401
Australia	9	8	34	73	103	196
Nueva Zelanda	24	35	37	37	37	37
<b>Total</b>	<b>63</b>	<b>111</b>	<b>221</b>	<b>410</b>	<b>524</b>	<b>634</b>
<b>MEDIO ORIENTE Y AFRICA</b>						
Egipto	6	36	63	125	125	125
Marruecos	0	14	54	54	54	54
Irán	11	11	11	11	11	11
Túnez	0	0	11	11	11	11
Israel	6	8	8	8	8	8
África	0	0	3	3	3	6
Jordania	0	1	2	2	2	2
<b>Total</b>	<b>23</b>	<b>70</b>	<b>152</b>	<b>214</b>	<b>214</b>	<b>217</b>
<b>EN TODO EL MUNDO</b>						
<b>T O T A L (aproximado)</b>	<b>10,150</b>	<b>13,930</b>	<b>18,500</b>	<b>23,295</b>	<b>31,173</b>	<b>37,220</b>

---

La unión Europea quiere alcanzar que el 22% de sus necesidades eléctricas provengan de las energías renovables para el año 2010, y que una gran parte de ese porcentaje venga del viento. La asociación europea de energía eólica (EWEA por sus siglas en ingles) predijo un crecimiento significativo de la capacidad eólica con una capacidad arriba de 47 GW para el año 2010 y 90 GW para el año 2020 llegando, sólo en Europa, a arriba de 150 GW. Los Estados Unidos esperan tener 5.25 GW de capacidad eólica para fines del año 2001 y alcanzar 30 GW en el 2010. Las compañías de petróleo y gas, como Shell y BP, creen que las energías renovables proveerán del 5% al 10% del abasto de energía mundial para el año 2020 y 50% para el año 2050.

La situación en México es muy diferente de la que existe en Europa y otros países. Aunque México cuenta con una zona localizada en el Istmo de Tehuantepec que es una de las de mayor potencial eólico en el mundo, sólo cuenta con 2 parques eólicos, “La venta 1” y “ La Venta 2”, que juntos generan aproximadamente 86 MW, pero que puede incrementarse hasta alcanzar una capacidad instalada de 2000 MW.



**Fig. 1.14 Central Eólica “La Venta”**

---

A finales de 1993, CFE licitó la construcción de una Central Eoloeléctrica de 1,575 kW de capacidad para ser construida en terrenos del Ejido La Venta, Municipio de Juchitán, Oaxaca. La Central Eoloeléctrica La Venta, está integrada por siete aerogeneradores daneses, marca Vestas, modelo V-27. La capacidad nominal de dichas máquinas es 225 kW a 15 m/s. Su rotor mide 27 metros de diámetro y están colocadas sobre torres tubulares de 30 metros de altura.

Los aerogeneradores V-27 son del tipo eje horizontal, viento arriba, con orientación activa y con un sistema para regulación de velocidad por control del ángulo de paso de las aspas.

Hasta la fecha no se han reportado problemas graves o trascendentes como podrían ser la fractura de aspas, fallas estructurales o incendios catastróficos. Hasta donde se sabe, se presentaron los siguientes problemas operativos:

- Fallas por efecto de descargas eléctricas atmosféricas que ocasionaron daño permanente en algunas protecciones electrónicas.
- Paros forzados por exceso de temperatura en el interior de la carcasa.
- Desgaste prematuro de los rodamientos de los generadores eléctricos.

---

**CAPÍTULO 2**  
*CONSIDERACIONES DINÁMICO-ESTRUCTURALES EN  
EL DISEÑO DE TURBINAS DE VIENTO.*

---

## 2.1. Introducción

Un aerogenerador está sometido a cargas variables debido a la turbulencia del viento y al movimiento cíclico del rotor, por lo que es necesario comprobar la integridad estructural de los diferentes componentes mecánicos y estructurales a fatiga. Además, el aerogenerador es una estructura flexible con poco amortiguamiento, por lo que previamente se deberá asegurar que no se produzca fallo catastrófico repentino por vibraciones de amplitud excesiva.

En el caso de la comprobación a fatiga de los diversos elementos, existen dos métodos matemáticos, ambos de naturaleza estadística, para el tratamiento de las fuerzas de excitación y la obtención de la respuesta de la estructura. El método de la respuesta en el tiempo, basado en modelar cargas y respuesta estructural en el dominio del tiempo, este permite analizar la influencia del control e introducir cargas cíclicas derivadas del efecto de sombra de la torre o de la cortadura vertical del viento, que se pueden simular mediante algoritmos funcionales dependientes del tiempo. Sin embargo, este método requiere un esfuerzo de cálculo elevado al tener que considerar muchas historias temporales para conocer la respuesta del aerogenerador frente a las diferentes condiciones del viento y turbulencia.

Es por eso que en las primeras etapas del diseño es preferible utilizar otro método que ayude a obtener las respuestas más rápido. El método espectral, en el que tanto las cargas como la respuesta estructural se procesan en el dominio de la frecuencia, muestra directamente los picos dinámicos de respuesta en frecuencias cercanas a las de resonancia, por lo que permite determinar rápidamente los requerimientos dinámicos del aerogenerador, y la sensibilidad a variaciones de masa y rigidez.

En las palas, al contrario que en las alas de un avión, la divergencia estática no suele suponer un problema, pero siempre es necesario comprobarlo. Entre los diferentes tipos de inestabilidades que sufren las palas de un aerogenerador se encuentra el problema conocido como “Flutter”. Este problema se refiere al acoplamiento que existe entre los movimientos de alabeo y de torsión cuando existe una frecuencia que excita a ambos movimientos.

La experiencia ha demostrado que el comportamiento dinámico-estructural de una turbina de viento, ya sea bueno o malo, debe siempre ser abordado por los equipos de diseño y de mantenimiento. Mediante el uso de métodos de análisis conocidos, los efectos de cambios físicos, en controles, y en las características de los subsistemas, sobre el comportamiento dinámico de una nueva turbina de viento pueden ser comprendidos. Cuando esto es realizado, el comportamiento dinámico-estructural de la turbina puede ser mejorado. Aquí, el término “mejorado” significa incrementar la vida en fatiga y reducir el costo sin sacrificar la potencia capturada.

Una herramienta necesaria para realizar estas mejoras es la simulación computacional del sistema dinámico, con la cuál se puede estudiar y entender su comportamiento dinámico y determinar como el sistema debe de ser modificado para mejorar su rendimiento. Un modelo adecuado es aquel que considera las características del sistema y las propiedades

---

---

dimensionales que afectan la dinámica del sistema de cualquier manera. Estos modelos deben permitir al diseñador estudiar y mejorar el comportamiento del sistema conforme va probando la turbina real. Los diseños exitosos evolucionan conforme son modificados en la simulación.

## **2.2. Filosofías de Diseño para las Turbinas de Viento.**

Existen ciertas filosofías que se siguen para el diseño de turbinas de viento, y que involucran varios aspectos de las mismas, como son: HAWT vs. VAWT, grandes vs. pequeñas, Viento arriba vs. viento abajo, etc. La configuración de las turbinas de viento modernas tiene una arquitectura que pueden involucrar una o varias de estas filosofías de diseño, una arquitectura que busca combinar eficiencia con estructuras durables, con maquinaria y controles de alto rendimiento. Pero por lo general, los ingenieros están más cómodos con los requerimientos que con las filosofías, sin embargo, el producto final de su trabajo es siempre un registro de su filosofía de diseño.

La énfasis en este capítulo es sobre las filosofías de diseño y, en particular, sobre las arquitecturas del sistema basadas en la *conformidad* con la fuerzas de la naturaleza, más que en la *resistencia* a dichas fuerzas.

### *2.2.1. Filosofía de Diseños rígidos vs diseños flexibles.*

Una primera aproximación de establecer una filosofía de diseño, es aquella que involucra a los diseños rígidos vs los flexibles. Todos los sistemas estructurales dinámicos pueden ser modelados por medio de una serie de masas, resortes y amortiguadores conectados entre sí. En un modelo rígido, las cargas aerodinámicas transitorias recaen sobre los resortes como deformaciones físicas de los mismos, y tarde o temprano inducen fatiga a la pala. En el concepto flexible, dichas cargas aerodinámicas, son primeramente soportadas por las masas implicando una pequeña energía de deformación., por lo tanto hay una baja propensión a la falla por fatiga en un sistema dinámicamente flexible.

A parte de los aspectos que envuelven a la respuesta a la carga en la selección de una filosofía de diseño, la selección del concepto también afectará tanto al control de carga como a la facilidad o dificultad de una adecuada simulación del sistema.

### *2.2.2. Filosofía de Control de Carga*

Una segunda filosofía es la que se basa en controlar o atenuar las cargas aerodinámicas transitorias y su punto de aplicación: sobre las superficies de la pala. Haciendo un soporte estructural flexible para la pala, ayudará a reducir las cargas cíclicas aerodinámicas, por medio de efectos de amortiguamiento., pero características tales como una unión articulada en la raíz de la pala, son más efectivas en eliminar las componentes mayores de las cargas cíclicas. El control activo de paso podría contribuir directamente a la disminución de las cargas cíclicas. Todos los métodos de disminución de carga involucran de alguna manera una retroalimentación de la alineación del ángulo de ataque de la pala. Por lo tanto, en algunos de estos conceptos es posible que exista la inestabilidad dinámica. Esto debe ser muy tomado en cuenta por medio de modelos adecuados en la simulación del sistema.

---

---

### 2.2.3. *Filosofía de Pérdida Aerodinámica.*

Una tercera opción en el diseño de turbinas de viento, y que ha dividido a los diseñadores de turbinas de eje Horizontal en dos “escuelas”, es aquella que utiliza la pérdida aerodinámica como un medio de control, y aquella que intencionalmente mantiene al rotor fuera de la pérdida aerodinámica. Mientras que el control por medio de pérdida permite una simplificación mecánica, presenta problemas adicionales en predecir y controlar las cargas aerodinámicas periódicas y transitorias que surgen de la estela turbulenta que deja dicha pérdida. Además, al seleccionar esta opción, el diseñador no solo introduce nuevas fuentes de cargas de fatiga, si no que además surge la necesidad de tomar en cuenta los efectos aerodinámicos inestables en la simulación del sistema.

## 2.3. **Geometría del Rotor.**

La selección de la geometría básica del rotor de una turbina de viento tiene una mayor influencia sobre la forma en que el sistema estructural responde a cargas aerodinámicas y aceleraciones y de cómo se desarrollan las cargas internas. Los elementos de configuración que pueden ser usados para controlar estas cargas son: el ángulo de conicidad de la pala, las uniones entre la pala y el eje, y el número de palas.

### 2.3.1 *Ángulo de conicidad de la pala.*

La componente constante de levantamiento de la carga de la pala, que es considerada como la principal fuente de esfuerzos flexionantes, puede ser disminuida por medio de un ángulo fijo de conicidad de la pala, en el cuál, la pala se encuentra inclinada viento abajo del plano de rotación. La conicidad combinada con la fuerza centrífuga, actúa para contrarrestar una porción de la flexión de la pala que de otra forma sería creada por las fuerzas normales. Ambas, la fuerza aerodinámica constante y la centrífuga, pueden ser simplificadas, calculadas, y simuladas, así que, este aspecto del diseño del rotor es directo.

### 2.3.2. *Uniones entre la pala y el eje.*

Otro aspecto influyente sobre las cargas aplicadas a la pala es la presencia o ausencia de una unión basculante entre la pala y el eje que permita una libertad a la pala de moverse viento-arriba o viento-abajo bajo la influencia de cargas aerodinámicas no constantes. Con las uniones de aleteo se logran los mismos resultados pero son imprácticos (excepto quizás en rotores pequeños) debido a que las fuerzas centrífugas serían insuficientes para prevenir la conicidad excesiva y la pérdida de área efectiva del disco. Las cargas aerodinámicas fluctuantes son atenuadas como resultado del movimiento viento-arriba y viento-abajo que la unión basculante permite. Este movimiento causa cambios pasivos en los ángulos de ataque de la pala para oponerse y eliminar la mayor componente por revolución de las cargas aerodinámicas. Por ejemplo, una variación constante en sentido vertical del viento, la cuál crearía grandes fluctuaciones en las cargas aerodinámicas sobre la pala rígidamente unida al eje, solo produciría pequeños movimientos de balanceo o cabeceo, que a su vez, crean fluctuaciones cíclicas del ángulo de ataque y elimina la carga aerodinámica fluctuante.

---

### 2.3.3. *Numero de Palas.*

Otro aspecto importante en el diseño de aerogeneradores, es la selección del número de palas. Además, si el rotor no está articulado en las raíces de las palas, habrá mayores cargas de flexión sobre las palas, pequeñas turbulencias, flujo desviado, etc., todas causadas por el viento. Estas cargas doblarán las palas una vez por cada revolución de la flecha. Si el rotor, tiene 2 palas no articuladas, estas cargas cíclicas afectarán a la carcasa fuertemente a 2 ciclos por revolución (2P). Pero si hay 3 ó más palas, la carcasa no se afectará tanto, sin embargo, las palas continuarán doblándose debido a las cargas del viento. Las articulaciones en la raíz de la pala, eliminan tanto la flexión de la pala, y la agitación de la carcasa.

Una característica final que influye en las cargas cíclicas y en la vida a fatiga, es el módulo de elasticidad del material usado en la construcción de las palas. Una rigidez baja en la pala, realza los desplazamientos cíclicos y las velocidades que pueden ocurrir a un determinado nivel de vibración. Esto a su vez, incrementa el amortiguamiento aerodinámico y la impedancia inercial que la pala experimenta en respuesta a las cargas transitorias. Así, la selección de los materiales de la pala, con un alto valor de la relación “esfuerzos de fatiga permisibles / modulo de elasticidad”, puede reducir las cargas e incrementar la vida de fatiga. Estas relaciones son generalmente favorables en la madera y algunos materiales compuestos, y generalmente es desfavorable en los metales.

## **2.4. Modelación de las Características Dinámicas**

### 2.4.1. *Modos de vibración natural*

Es de gran importancia que las cargas periódicas sobre cualquier subsistema de la turbina de viento o aerogenerador, dependerán de la respuesta del sistema, en su totalidad, a los modos libres, o naturales, de vibración. Estos son trayectorias de vibración que el sistema asume después de que ha sido puesto en movimiento pero sin cargas externas aplicadas. Cada trayectoria tiene una forma y frecuencia distintas, que son llamadas “forma modal” y “frecuencia natural de vibración”, respectivamente. Solo cuando los modos naturales de cada elemento, como las palas, el tren de potencia, y la carcasa, han sido acoplados apropiadamente, es posible derivar los modos del sistema y el análisis dinámico-estructural de todo el sistema puede ser exitoso. Así, el modelo de simulación del aerogenerador debe iniciar con modelos detallados convenientemente de cada subsistema, para después combinarlos de manera que permita realizar un análisis aeroelástico del sistema en su totalidad.

El modelo completo del aerogenerador tendrá, por supuesto, un gran número de modos de vibración, cada modo relacionado con su frecuencia natural. Estas frecuencias se diferenciarán mucho de los modos y frecuencias de los elementos por separado. También, los modos de sistema completo dependerán de que tan rígidos estén unidos los subsistemas.

---

### 2.4.2. Modelos del rotor

No importa si el rotor es articulado o no, un modelo de simulación de la pala debe ser adecuado si este considera un análisis de vigas dividido entre 10 y 15 segmentos, para ambas cargas, aerodinámicas e inerciales. Puede que exista la necesidad de hacer una segmentación más fina, debido a que el diseño de la pala que se encuentra bajo una carga de gravedad cíclica, tiene una estructura tipo viga, la cuál es rígida en el plano de rotación, robusta en el disco central, y esencialmente una estructura continua de punta a punta a través del disco central. Un diseño adecuado para la vida en fatiga bajo carga gravitacional también resultaría en una rigidez torsional muy alta de la pala. Así, un modelo que considere 10 segmentos de pala sería más que adecuado para simular las deflexiones torsionales de la pala y los cambios resultantes en el ángulo de la pala.

### 2.4.3. Inestabilidad Aeroelástica.

La inestabilidad aeroelástica puede ocurrir cuando cualquier respuesta modal crea una fuerza aerodinámica periódica que excita a dicho modo. Esa fuerza aerodinámica inducida, que actúa como un mecanismo de amortiguamiento negativo, es creada por alguna forma de reacción de la forma modal hacia el ángulo de ataque del perfil aerodinámico de la pala. Esta inestabilidad puede ocurrir con perfiles sin pérdida aerodinámica (como en el caso del flutter) ó como resultado de la entrada en pérdida (como con el stall flutter).

Debido a que el primer mecanismo de la inestabilidad aeroelástica es una perturbación cíclica de los ángulos de ataque de la pala, es bueno mantener una rigidez torsional alta en la pala. También es benéfico contar con un buen balance de masa en el eje de la cuerda del perfil así como una buena localización del centro de corte, ya que esto reduciría o eliminaría las deflexiones torsionales producidas por las cargas periódicas torsionales. En los aerogeneradores de eje vertical típicos (HAWTs), el diseño robusto de la pala, necesario para soportar las cargas gravitacionales cíclicas, resulta en una gran rigidez torsional tal que la pala no necesita tener un balance completo en el eje de la cuerda para evitar el flutter.

## 2.5. Respuestas Dinámicas típicas

A continuación se discuten las respuestas esperadas de una turbina de viento bajo la aplicación de varias fuentes de excitación y otros parámetros que influyen en la magnitud de estas respuestas.

### 2.5.1. Efectos Aeroelásticos

Los efectos aeroelásticos encontrados en las turbinas de viento son generalmente favorables. Por ejemplo, los primeros modos de cuerpo rígido y de alabeo de un rotor articulado están altamente amortiguados aerodinámicamente. Las excitaciones debidas a ráfagas pueden crear deflexiones tanto en la torre como en la pala, mas que esfuerzos. Las cargas debidas a efectos transitorios del viento a ambos lados de la torre amortiguan la estructura aerodinámicamente. Generalmente, cuando la turbina cuenta con un sistema de

---

---

control que pueda manejar los efectos de la gravedad y las cargas de alabeo, la rigidez torsional será lo suficientemente grande para prevenir el flutter y la divergencia.

#### *2.5.2. Respuesta al viento cortante.*

Las cargas de viento cortante, horizontales y verticales, pueden impactar en el diseño de las palas en la unión con el disco del rotor. El uso de uniones articuladas reducen estos efectos. Es por eso que en rotores controlados por pérdida aerodinámica, los efectos pueden ser bastante graves, ya que mientras una pala se encuentra en pérdida la otra no lo está. Este problema se reduce aplicando uniones articuladas.

#### *2.5.3. Respuesta a las ráfagas.*

Una vez que la turbina ha sido optimizada hasta el punto de reducir o eliminar las respuestas dinámicas grandes, los efectos de las ráfagas se convierten en el principal parámetro de diseño de las palas. Si un sistema de control es diseñado para “atenuar” los efectos de las ráfagas en los picos de potencia, este sacrificará la captura de energía a cambio de reducir las cargas de ráfagas. Es por eso, que es más deseable evitar el control de respuesta a ráfagas y sustituirlo por uno que regule la velocidad de operación del rotor. Si esto es hecho, las respuestas a las ráfagas seguirán ocurriendo, pero en cambio, estas se alejarán del espectro de fatiga.

#### *2.5.4. Respuesta a la Gravedad.*

La gravedad aplica grandes cargas cíclicas y momentos flexionantes en el plano de rotación en una pala, cuando gira y estas se convierten en los parámetros de diseño de la pala. El esfuerzo que se aplica para el cálculo de la vida a fatiga bajo la excitación 1P resulta en una alta rigidez en la pala y en una frecuencia natural alta en el plano de rotación (Alabeo). Como resultado, la respuesta a la flexión debida a la gravedad no es amplificada significativamente, ni tampoco se puede hacer nada para atenuarla. Un cálculo de la respuesta dinámica a los efectos gravitatorios es adecuado en un diseño preliminar.

#### *2.5.5. Respuesta a las fluctuaciones de la velocidad del rotor.*

Las fluctuaciones en la velocidad del rotor es deseable tanto como fuente y absorbedor de energía en las ráfagas del viento. Mientras que una transmisión torsionalmente suave permite algunas fluctuaciones, un generador de torque-constante es la característica de diseño que toma gran ventaja de este beneficio de energía. La calidad en la potencia, en términos de salida de potencia constante en el generador, puede mejorarse con un rotor de velocidad variable, mas que con un control de paso de las palas y un rotor de velocidad constante. La captura de energía es mejorada cuando la velocidad del rotor es libre de adecuarse a las fluctuaciones del viento.

---

### 2.5.6. *Respuesta a las resonancias.*

La respuesta dinámica de una turbina de viento cuando una frecuencia natural de vibración coincide con un entero múltiple de la velocidad del rotor, puede pasar de “crítica” a “sin problema”, dependiendo de la filosofía de diseño empleada, el modo en cuestión, y de las características de amortiguamiento de ese modo. Las resonancias potenciales son mostradas gráficamente por medio de un “diagrama de Campbell”, el cuál se discute más adelante. En un rotor de velocidad variable con un amplio rango de velocidades habrá uno o más modos amortiguados pobremente y que se encontrarán dentro del rango de operación. En tales casos se puede diseñar un control que pueda “librar” los puntos de resonancia.

---

**CAPÍTULO 3**  
**COMPORTAMIENTO DINÁMICO-ESTRUCTURAL DE  
UNA PALA DE AEROGENERADOR.**

---

### 3.1. Introducción

Cuando se diseña una pala las responsabilidades son: predecir las cargas y deflexiones estructurales que ocurrirán durante toda la vida de la máquina, asegurar una respuesta dinámica favorable mediante el uso de buenos procedimientos de diseño y operacionales, evaluar las posibles mejoras al diseño así como su impacto en las cargas dinámicas y en la estabilidad, y relacionar los datos de carga y de control experimentales con los obtenidos en el diseño. La predicción de estas cargas ha sido la mayor preocupación en el diseño de las turbinas de viento hasta la fecha, es por eso que, aunque se pueda obtener una predicción perfecta, las palas son las partes más costosas de una turbina, y sólo reduciendo las cargas dinámicas se puede obtener una adecuada relación costo-función.

Los dos procesos que se siguen para obtener la predicción de cargas y el diseño estructural son altamente interactivos: las cargas y deflexiones deben de ser conocidos antes de que se haga un adecuado dimensionado estructural, que a su vez influye en las cargas mediante los cambios de masa y de rigidez. El diseño estructural en sí, identifica algunos puntos críticos (áreas donde localizan los mayores esfuerzos) que podrían ser los más beneficiados por la reducción de las cargas dinámicas. Cuando se llega a una adecuada convergencia entre estos dos procesos, se obtiene una estructura de la pala que ni es sub-diseñado (que podría resultar en fallas estructurales) ni sobre-diseñado (que resultaría en un peso y costo excesivos).

Esto se consigue mediante la aplicación de algunas materias que ayuden al entendimiento del comportamiento dinámico-estructural de las turbinas de viento, como son: aerodinámica (que ayuda a determinar la fuerza del viento y los efectos aeroelásticos), rotodinámica (que comprende las aceleraciones y respuesta del rotor), estadística (ayuda a trabajar con la turbulencia y la vida a fatiga), el modelado matemático y los experimentos.

El ciclo de diseño de una turbina de viento se divide usualmente en 2 partes: diseño de concepto y diseño de detalle. En el diseño de detalle se deben contemplar las cargas de diseño y determinar los requerimientos operacionales que asegurarán un comportamiento dinámico aceptable. Algunos objetivos que se siguen para obtener lo anterior son:

- Minimizar la sensibilidad de la respuesta dinámica a las inevitables diferencias que existen entre lo que se diseña y lo que se construye.
- Lograr que las frecuencias naturales de la pala se localicen favorablemente con respecto a las velocidades de operación de la turbina.
- Asegurar la estabilidad aeroelástica.

Los objetivos anteriores son logrados mediante el uso de modelos matemáticos (algunas veces complejos), que es el tema principal de este trabajo, y que nos ayudarán a entender mejor el comportamiento de la pala.

---

## 3.2. Modelos matemáticos

Mientras que ciertos análisis pueden ser obtenidos por el uso de algunas fórmulas simples, la experiencia ha mostrado que los análisis deben de hacerse por separado, mediante el uso de software especializado, para determinar:

- Modos de vibración del sistema y frecuencias naturales, los cuales incluyen efectos rotacionales.
- Cargas de estado estable y transitorio, en los más importantes grados de libertad.
- Estabilidad aeroelástica, que incluyan los efectos de interacción entre estructura y los sistemas de control.

En teoría, un software especializado podría lidiar con estas tres tareas, pero no sería tan eficiente como desarrollar cada una por separado. Es por eso, que el objetivo de este trabajo solo se enfoca en el primer apartado, ya que como se verá más adelante, es el punto de partida para conocer el comportamiento dinámico-estructural de la pala.

A continuación se dará una explicación breve de cada uno de los conceptos arriba mencionados, con el fin de entender cuál es el objetivo, y cuál es la ventaja de analizarlo por separado.

### 3.2.1. *Modos de vibración y frecuencias naturales.*

El análisis modal es la determinación de un conjunto de formas o modos de vibración, cada uno con su propia frecuencia natural, que describe una estructura. Estas formas, también conocidas como *modos naturales*, por lo general se analizan por separado para cada parte de un sistema. Estos modos pueden ser obtenidos de un análisis de esfuerzos más detallado, usando técnicas de reducción modal, por ejemplo los llamados ODS (operating deflection shapes), ó mediante el uso de elementos finitos, los cuales pueden incluir los efectos giroscópicos y rigidez centrífuga. Cualquiera que sea la herramienta que se use, es necesario contar con las ecuaciones fundamentales de movimiento del sistema, y que son el punto de partida para continuar con los otros análisis.

### 3.2.2. *Cargas sobre el sistema*

Este apartado es importante, ya que algunas cargas dinámicas sólo influyen en algunos modos de vibración de la pala. Es por eso que primero se necesitan obtener las frecuencias naturales de la pala y así saber cuál será el rango de operación de las cargas. La manera en que estas cargas se obtienen es mediante la aplicación de algunas teorías aerodinámicas, para después introducirlas a las ecuaciones de movimiento como fuerzas excitadoras del sistema, y que es el método más directo e informativo de solución. Este procedimiento, que es conocido como estimulación del sistema, maneja ambos tipos de carga: de estado estable y transitorio, ya que las ecuaciones de movimiento contienen coeficientes dependientes del tiempo y son generalmente no lineales. Es así que las soluciones analíticas de estas ecuaciones son innecesarias, considerando las capacidades de las computadoras de hoy en

---

---

día, y que la única tarea del ingeniero se concentra en analizar las soluciones obtenidas y explorar nuevos métodos para la reducción de las cargas dinámicas.

### 3.2.3. Modelos de estabilidad aeroelástica.

Este análisis se hace por separado de los análisis previos por dos razones principales. El primero, es preferible linealizar las ecuaciones de movimiento y examinar los eigenvalores resultantes para la estabilidad. La segunda razón es que los modos de vibración que son importantes para la inestabilidad son diferentes de aquellos que se necesitan para el análisis de las cargas. En un sistema bien diseñado, las inestabilidades ocurren fuera de los límites de operación del sistema, por lo tanto, un modo torsional de la pala, el cuál es inestable a altas revoluciones del rotor, estará controlada durante la operación normal de la turbina.

## 3.3. Desarrollo de las ecuaciones de movimiento de una viga rotatoria.

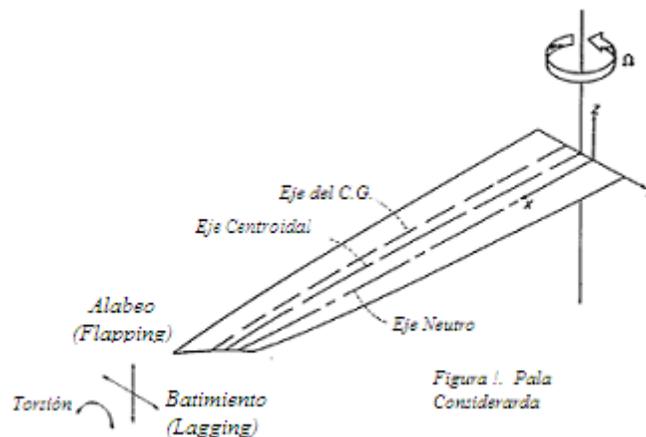
En este capítulo, se desarrollan las ecuaciones de movimiento de una viga que se encuentra sometida tanto a cargas aerodinámicas como a fuerzas centrífugas. El objetivo es obtener las ecuaciones que permitan conocer la dependencia de las frecuencias naturales de vibración en función de la velocidad angular de operación.

El primer paso será obtener dichas ecuaciones a partir de las deformaciones longitudinales que se presentan en una viga cuando se somete a la acción de una fuerza o equilibrio de fuerzas.

## 3.4. Ecuaciones de movimiento de palas de sección no uniforme

### 3.4.1. Procedimiento General

Como se muestra en la figura 1, se considera una viga rotativa. El eje  $x$ , del sistema coordenado  $x, y, z$ , cae a lo largo de la longitud de la viga y es coincidente con el eje elástico sin deformar. Este sistema de ejes se mueve junto con la viga alrededor del eje de rotación a una velocidad rotacional  $\Omega$  dada, y todas las deformaciones de la viga están referidas a este sistema. Considerando que la viga se encuentra sometida a cargas aerodinámicas distribuidas en el plano  $y-z$ , y bajo la acción de un torque distribuido alrededor del eje elástico, donde las intensidades de carga por unidad de longitud son:  $L_y$ ,  $L_z$  y  $M$ , respectivamente. La tensión en la viga es denotada por  $T$ .



En la figura 2 (a) y (b), se muestra el sistema coordenado utilizado para la sección transversal y los desplazamientos utilizados para este trabajo. Así, los ejes  $\eta$  y  $\zeta$ , con su origen en el eje elástico y la dirección  $\eta$  a lo largo del eje mayor de la sección transversal, se mueve con la sección transversal. Las deformaciones de la viga son denotadas por  $v, w$ , y son positivas tal como se muestran en la figura 2 (b).

El principal objetivo, es derivar las ecuaciones de movimiento mediante el uso de las deformaciones mencionadas, y siguiendo el siguiente esquema:

- La ecuación de deformación longitudinal para cualquier punto de la sección transversal de la viga es definida en términos de los desplazamientos.
- Una vez que se cuenta con dicha ecuación, es posible obtener los momentos elásticos internos, y los cuales son obtenidos en términos del sistema  $\eta$  y  $\zeta$ , como se muestra en la figura 2 (c).
- Se realiza una transformación de los momentos obtenidos a un sistema coordenado más fácil de utilizar, y que serán paralelos a los ejes  $x, y$  y  $z$ . (figura 2 (c))
- Se obtiene la condición de equilibrio mediante la aplicación de todas las cargas sobre la viga.
- Las cargas totales sobre la viga, compuestas por las cargas inerciales y las aplicadas, se obtienen
- Se combinan los pasos 3, 4 y 5 para obtener las ecuaciones diferenciales finales.

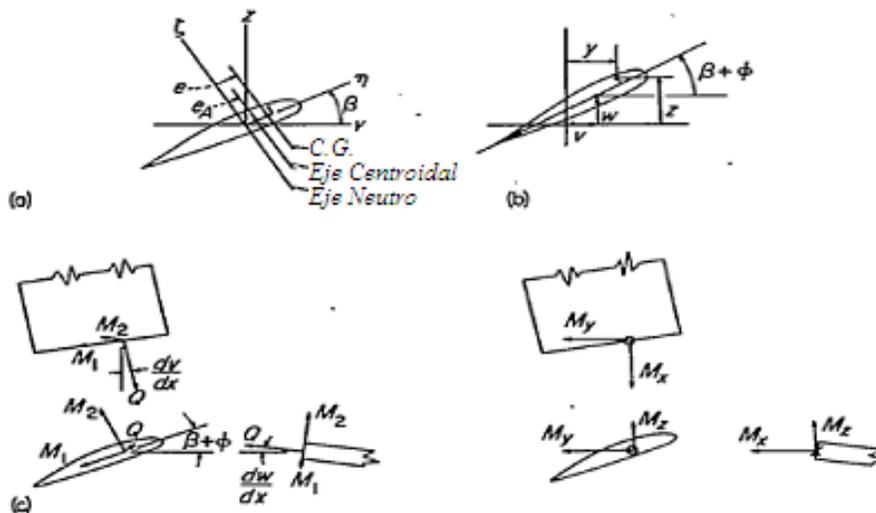


Figura 2. Momentos sobre la sección transversal de la viga. (a) Coordenadas, (b) Desplazamientos, (c) Momentos

---

### 3.4.2. Derivación de la ecuación de deformación.

Durante la flexión y torsión de una viga, se producen 2 tipos de deformaciones: las longitudinales y las transversales. En general, ambos tipos de deformaciones deber ser considerados en la obtención de las fuerzas y momentos resultantes que actúan sobre una sección transversal. Para este trabajo, dadas las consideraciones hechas acerca de pequeñas deformaciones, solo se tomarán en cuenta explícitamente las deformaciones longitudinales. Por ahora solo se presenta la ecuación resultante de deformación para cualquier fibra longitudinal de la viga, y un desarrollo más completo de esta ecuación es descrita en el anexo A. Lo obtención de la ecuación es meramente formal, pero se puede dar un acercamiento más físico de cómo se comporta la deformación considerando los posibles movimientos relativos que ocurren entre planos paralelos imaginarios de la viga, tal y como se muestra en la figura 3, y que se asume que permanecen planos durante la deformación.

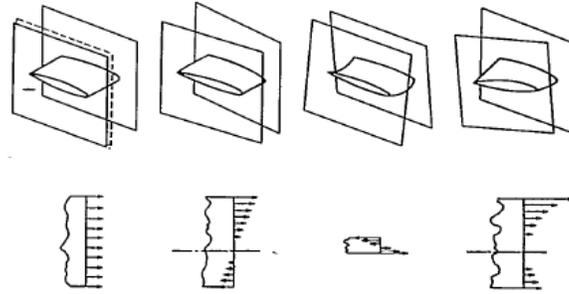


Figura 3. Deformaciones entre los planos, y esfuerzos

En general, la deformación puede surgir de 4 tipos de movimiento: desplazamiento puro de los planos en sentido longitudinal, rotación entre los planos asociada con el alabeo, rotación entre los planos asociada con el alabeo, y rotación entre los planos asociada a la torsión alrededor del eje elástico. Considerando lo anterior, se encuentra que la ecuación de deformación es:

$$\varepsilon = \varepsilon_T + (e_A - \eta)(v' \cos \beta + w' \sin \beta) + \xi(v' \sin \beta - w' \cos \beta) + (\xi^2 + \eta^2 - k_A^2)\beta' \phi' \quad (1)$$

El esfuerzo longitudinal que se relaciona con esta ecuación es:

$$\sigma = E \left[ \varepsilon_T + (e_A - \eta)(v' \cos \beta + w' \sin \beta) + \xi(v' \sin \beta - w' \cos \beta) + (\xi^2 + \eta^2 - k_A^2)\beta' \phi' \right] \quad (2)$$

La consideración de los esfuerzos cortantes, que están asociados con los esfuerzos longitudinales, esto es, los esfuerzos cortantes que son necesarios para satisfacer las condiciones de equilibrio de una sección elemental, es evitada aquí mediante la consideración de que el eje elástico (centro de corte) es tomado como eje de referencia, la consideración de los esfuerzos cortantes debidos a la deformación torsional es obviada aquí por medio de la asunción de que el torque resistente incluye los efectos de Saint Venant, y que es el mismo que se obtendría si la viga no tuviera pre-torcimiento. Ambos temas serán considerados a continuación.

---

---

### 3.4.3. Derivación de los momentos elásticos internos.

Las distribuciones de los esfuerzos en la sección transversal pueden ser ahora convertidas en momentos internos resistivos, a lo largo del eje elástico, como se muestra en las figuras 2 y 4. Para determinar estos momentos, la inclinación relativa al eje elástico de una fibra general de la viga debida a un torcimiento inicial y a una deformación torsional debe ser considerada. El esfuerzo a lo largo de la fibra es dividido en 2 componentes, una paralela al eje elástico y otra en un plano perpendicular al eje elástico (figura 4). De la componente longitudinal, el momento de alabeo  $M_1$  y el momento de alabeo  $M_2$  se dan de la siguiente forma:

$$M_1 = - \int_{\eta_e^{-t/2}}^{\eta_e^{t/2}} \int \sigma \xi d\xi d\eta \quad (3)$$

$$M_2 = - \int_{\eta_e^{-t/2}}^{\eta_e^{t/2}} \int \sigma \eta d\xi d\eta \quad (4)$$

donde el signo menos ha sido introducido para hacer los momentos positivos cuando producen compresión en las fibras superior y frontal, respectivamente.

La componente sobre el plano normal al eje elástico conduce a un momento torsional resistente efectivo. La consideración de este momento y la adición del torque asociado al torcimiento de Saint Venant, mencionado anteriormente, conduce a la ecuación para el torque resistivo total:

$$Q = GJ\phi' + \int_{\eta_e^{-t/2}}^{\eta_e^{t/2}} \int \sigma (\beta + \phi)' (\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta \quad (5)$$

donde el signo positivo esta asociado con un  $\phi$  positivo. En la ecuación 5, la selección del eje elástico como referencia es significativa. El eje elástico no necesariamente coincide con el eje centroidal y, si el eje centroidal o cualquier otro eje, hubiera sido usado como referencia, entonces los esfuerzos cortantes asociados con los esfuerzos longitudinales contribuirían al torque resistivo total.

Tal término tendría que ser incluido en la ecuación 5 y llevaría a una complicación en el análisis. Con la selección del eje elástico, tal término no aparece, debido a que el eje elástico es definido aquí como el eje a través del cuál el torque resultante debido a los esfuerzos cortantes es cero.

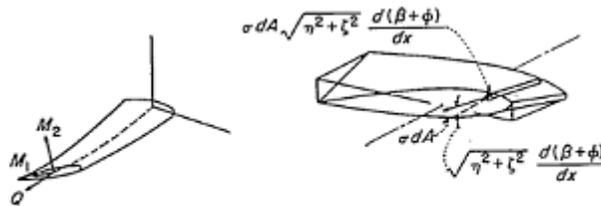


Figura 4 Momentos Elásticos Internos

---

La sustitución de la ecuación 2 en las ecuaciones 3,4 y 5, da las ecuaciones para los momentos elásticos totales en términos de desplazamientos.

$$M_1 = EI_1(-v'' \sin \beta + w'' \cos \beta) \quad (6)$$

$$M_2 = EI_2(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - Te_A - EB_2 \beta' \phi' \quad (7)$$

$$Q = [GJ + Tk_A^2 + EB_1(\beta')^2] \phi' + Tk_A^2 \beta' - EB_2(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) \quad (8)$$

Donde  $I_1$  y  $I_2$  son los momentos principales de inercia de la sección transversal, y  $B_1$  y  $B_2$  son constantes definidas por:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \int_{\eta_{te}}^{\eta_{te}} t \eta^2 \left( \eta^2 + \frac{t^2}{6} - k_A^2 \right) d\eta \\ B_2 &= \int_{\eta_{te}}^{\eta_{te}} t \eta \left( \eta^2 + \frac{t^2}{12} - k_A^2 \right) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

#### 3.4.4. Transformación de Momentos.

En la consideración del equilibrio entre los momentos, los cortante y la tensión, es más conveniente trabajar con momentos que son paralelos a los eje  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , esto es,  $M_x$ ,  $M_y$ , y  $M_z$ , como se muestra en la figura 2. Una transformación simple de los momentos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $Q$  a estos nuevos momentos es deseada. Cuando los momentos  $M_1$ ,  $M_2$  y  $Q$  son convertidos en componentes en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, y las siguientes relaciones para valores de  $\phi$  pequeños son usadas:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\beta + \phi) &= \sin \beta + \phi \cos \beta \\ \cos(\beta + \phi) &= \cos \beta + \phi \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

las siguientes relaciones son obtenidas:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Q + M_1(\cos \beta - \phi \sin \beta)v' + M_1(\sin \beta + \phi \cos \beta)w' + M_2(\sin \beta + \phi \cos \beta)v' - M_2(\cos \beta - \phi \sin \beta)w' \\ M_y &= M_1(\cos \beta - \phi \sin \beta) + M_2(\sin \beta + \phi \cos \beta) - Qv' \\ M_z &= -M_1(\sin \beta + \phi \cos \beta) + M_2(\cos \beta - \phi \sin \beta) - Qw' \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ahora, las ecuaciones 6, 7 y 8 son usadas para obtener las ecuaciones deseadas, y los términos de segundo orden son despreciados, por lo que se tiene.

$$M_x = [GJ + Tk_A^2 + EB_1(\beta')^2] \phi' + Tk_A^2 \beta' - EB_2 \beta' (v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - Te_A v' \sin \beta + Te_A w' \cos \beta \quad (12)$$

$$M_y = (EI_1 \cos^2 \beta + EI_2 \sin^2 \beta) w'' + (EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta v'' - (Te_A + EB_2 \beta' \phi') \sin \beta - Te_A \phi \cos \beta \quad (13)$$

$$M_z = (EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta w'' + (EI_1 \sin^2 \beta + EI_2 \cos^2 \beta) v'' - (Te_A + EB_2 \beta' \phi') \cos \beta + Te_A \phi \sin \beta \quad (14)$$

### 3.4.5. Condiciones de Equilibrio.

El equilibrio de las fuerzas y momentos que actúan sobre un elemento diferencial de la viga es ahora considerado. Para esto, se considera que un elemento esta formado por rebanadas paralelas al plano  $xy$ , y esto lleva a resultados más simples. Las fuerzas que actúan en tal elemento son mostradas en la figura 5(a) y los momentos en la figura 5(b). Las cantidades  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ,  $q_x$ ,  $q_y$ , y  $q_z$  son las fuerzas y momentos resultantes, que incluyen tanto las fuerzas inerciales y las fuerzas aerodinámicas. Las fuerzas inerciales debidas a las aceleraciones centrífugas y transversales, son derivadas en el anexo B.

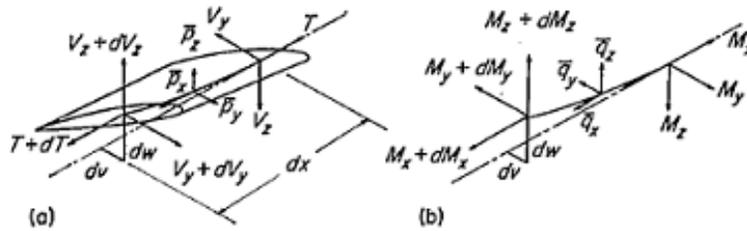


Figura 5. Equilibrio de fuerzas y momentos, (a) Fuerzas, (b) Momentos

La suma de las fuerzas en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y la suma de los momentos alrededor de los mismos ejes, arroja las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} T' + \overline{p_x} &= 0 \\ V_y' + \overline{p_y} &= 0 \\ V_z' + \overline{p_z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x' - V_y w' + V_z v' + \overline{q_x} &= 0 \\ M_y' - T w' + V_z + \overline{q_y} &= 0 \\ M_z' - T v' + V_y + \overline{q_z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Por sustitución, los cortantes en estas ecuaciones pueden ser eliminados tomando en cuenta las siguientes ecuaciones de equilibrio.

$$\left. \begin{aligned} M_x' - M_y v' + M_x w' + \overline{q_y} v' + \overline{q_z} w' + \overline{q_z} &= 0 \\ M_y'' - (T w')' + \overline{q_y}' - \overline{p_z} &= 0 \\ M_z'' - (T v')' + \overline{q_z}' - \overline{p_y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Sustituyendo las ecuaciones 12, 13, y 14 en la ecuación 17, tenemos:

$$-\left\{GJ + Tk_A^2 + EB_1(\beta')^2\right\}\phi' + Tk_A^2\beta' - EB_2\beta'(v''\cos\beta + w''\sin\beta) + Te_A v'\sin\beta - Te_A w'\cos\beta + \bar{q}_y v' - \bar{q}_z w' - \bar{q}_z = 0 \quad (18)$$

$$\left[(EI_1\cos^2\beta + EI_2\sin^2\phi)w'' + (EI_2 - EI_1)\sin\beta\cos\beta v'' - (Te_A + EB_2\beta'\phi')\sin\beta - Te_A\phi\cos\beta\right]' - (Tw')' + \bar{q}_y - \bar{p}_z = 0 \quad (19)$$

$$\left[(EI_2 - EI_1)\sin\beta\cos\beta w'' + (EI_1\sin^2\beta + EI_2\cos^2\phi)v'' - (Te_A + EB_2\beta'\phi')\cos\beta + Te_A\phi\sin\beta\right]' - (Tv')' + \bar{q}_z - \bar{p}_y = 0 \quad (20)$$

donde los términos de segundo orden han sido eliminados. Sólo quedan los términos de carga considerados.

### 3.4.6. Cargas resultantes

Como se menciona anteriormente, las cargas resultantes o totales están compuestas por cargas de inercia debidas a aceleraciones centrífugas y vibraciones y las cargas aerodinámicas aplicadas. Las cargas inerciales, que consisten en las fuerzas y momentos que se oponen a las aceleraciones del elemento de pala, son derivadas en el apéndice B, donde las cargas aerodinámicas  $L_y$ ,  $L_z$ , y  $M$  son dejadas en su forma simbólica, ya que son de naturaleza externa.

La aceleración de cualquier partícula de masa en la viga giratoria vibratoria, es derivada y sus componentes en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  son obtenidas. Estas componentes de aceleración incluyen los términos de coríolis y aceleraciones transversales y centrífugas junto con otros términos de mayor orden. La fuerza de inercia y momentos son obtenidos mediante la integración sobre la sección transversal, donde los términos de segundo orden son descartados, y son colocados junto con las fuerzas aerodinámicas y cargas aplicadas, con el fin de obtener las siguientes cargas resultantes  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ,  $q_x$ ,  $q_y$  y  $q_z$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_x &= -T' = \Omega^2 mx \\ \bar{p}_x &= L_y [\ddot{v} - \Omega^2(v e_0)] + me[\ddot{\phi}\sin\beta + \Omega^2(\cos\beta - \phi\sin\beta)] \\ \bar{p}_x &= L_z - m(\ddot{w} + e\ddot{\phi}\cos\beta) \\ \bar{q}_x &= M - \Omega^2 me[(v + e_0)\sin\beta + e_0\phi\cos\beta] + me(\ddot{v}\sin\beta - \ddot{w}\cos\beta) - \Omega^2 m(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)(\sin\beta\cos\beta + \phi\cos 2\beta) - mk_A^2 \ddot{\phi} \\ \bar{q}_y &= -\Omega^2 mex(\sin\beta + \phi\cos\beta) \\ \bar{q}_z &= -\Omega^2 mex(\cos\beta - \phi\sin\beta) \end{aligned} \right\} (21)$$

---

### 3.5. Ecuaciones Diferenciales Finales.

La sustitución de las ecuaciones 21 en las ecuaciones 18, 19 y 20 arroja las ecuaciones diferenciales de equilibrio deseadas:

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ \left[ GJ + Tk_A^2 + EB_1(\beta')^2 \right] \phi' + Tk_A^2 \beta' - EB_2 \beta' (v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) \right\} + Te_A (v'' \sin \beta - w'' \cos \beta) \\
 & + \Omega^2 m x e (-v'' \sin \beta + w'' \cos \beta) + \Omega^2 m e \sin \beta v + \Omega^2 m \left[ (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \cos 2\beta - e e_0 \cos \beta \right] + m k_m^2 \ddot{\phi} \\
 & - m e (v \sin \beta - w \cos \beta) = M + (Tk_A^2 \beta')' - \Omega^2 m \left[ (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \sin \beta \cos \beta + e e_0 \cos \beta \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ (EI_1 \cos^2 \beta + EI_2 \sin^2 \beta) w'' + (EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta v'' - Te_A \phi \cos \beta - EB_2 \beta' \phi' \sin \beta \right]' \\
 & - (Tw')' - (\Omega^2 m e x \phi \cos \beta)' + m (\ddot{w} + e \ddot{\phi} \cos \beta) = L_z + (Te_A \sin \beta)' + (\Omega^2 m e x \sin \beta)' \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ (EI_2 - EI_1) \sin \beta \cos \beta w'' + (EI_1 \sin^2 \beta + EI_2 \cos^2 \beta) v'' + Te_A \phi \sin \beta - EB_2 \beta' \phi' \cos \beta \right]' \\
 & - (Tv')' + (\Omega^2 m e x \phi \sin \beta)' + \Omega^2 m e \phi \sin \beta + m (\ddot{v} - e \ddot{\phi} \sin \beta) - \Omega^2 m v = L_y + (Te_A \cos \beta)' \\
 & + (\Omega^2 m e x \cos \beta)' + \Omega^2 m (e_0 + e \cos \beta) \quad (24)
 \end{aligned}$$

#### 3.5.1. Condiciones de Frontera

Ya que el problema es, por supuesto, un problema de valores en la frontera, es necesario considerar las condiciones de frontera que están relacionadas. El caso más general incluye 10 condiciones de frontera: 2 asociadas con la ecuación 22, y 4 para cada una de las ecuaciones 23 y 24. Todas estas condiciones surgen del tipo de restricciones que esta impuesto a los extremos de la viga, conforme a los desplazamientos  $v$ ,  $w$ , y  $\phi$ , los momentos  $M_y$ ,  $M_z$ , el torque  $Q$ , y los cortantes  $V_y$  y  $V_z$ .

Así, las condiciones de frontera para un extremo completamente fijo son:

$$v = w = \phi = v' = w' = 0$$

y para un el extremo libre:

$$Q = M_y = M_z = V_y = V_z = 0$$

La pala del aerogenerador BERGEY XL.1 contiene algunas características que no comparte con sus similares de mayor tamaño, pero aun así mantiene el comportamiento dinámico-estructural de la palas de gran tamaño, es por eso que la forma en que se analiza el problema es casi la misma.

Las ecuaciones 22, 23 y 24 son la base para obtener las propiedades dinámicas fundamentales de la pala de un aerogenerador de pequeña potencia. Es a partir de este punto que es necesario conocer más las características de la pala que se analizaran con el fin de reducir las ecuaciones a su forma más simple, y así, obtener su solución.

---

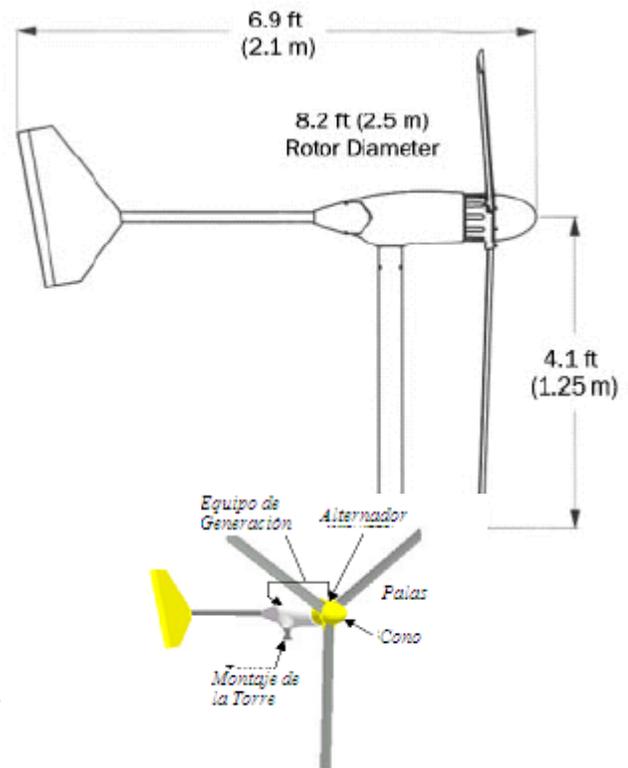
Para poder conocer estos datos, es necesario crear un modelo de la pala del aerogenerador, ya que la sección transversal de la pala es de una forma compleja, y es necesaria la ayuda de un software que sea capaz de calcular aspectos como: Momentos de inercia, posición del centro de gravedad y del centroide, etc.

El software en que puede ser usado para esta tarea es ANSYS V.8.1, ya que es un paquete basado en la teoría del elemento finito, y el cuál puede ayudar a comprobar los resultados que se obtengan de las soluciones a las ecuaciones.

### 3.5.2. Propiedades Geométricas de las palas del Aerogenerador BERGEY XL.1

Como se ha mencionado anteriormente, este aerogenerador es de baja potencia, por lo que sus características son muy simples en comparación con las de los aerogeneradores de mayor potencia. Una de esas características es el tipo pala recta, ya que debido al funcionamiento de la turbina no es necesario que la pala posea una geometría compleja, y consigue entregar la energía suficiente al generador. El hecho de que se cuente con una pala recta simplifica bastante la obtención de las propiedades geométricas, que se verá más adelante facilitan el manejo de las ecuaciones de movimiento así como su solución.

Las propiedades de este Aerogenerador se resumen en las siguientes tablas, y figuras:



#### Datos de Operación

Velocidad de viento inicial	3	m/s
Velocidad del viento para generación	2.5	m/s
Potencia Nominal	1000	Watts
Velocidad nominal de operación	11	m/s
Velocidad rotacional nominal del Rotor	490	RPM
Velocidad del viento para desvío	13	m/s
Máxima velocidad del viento	54	m/s

Fig. 6 Datos del Aerogenerador BERGEY XL.1

---

Algunos datos geométricos se pueden obtener del manual del aerogenerador, pero algunos otros se obtienen mediante el uso de ANSYS V 8.1, y cuyos valores se muestran a continuación.

$$A = 0.61 \text{ m}^2$$

$$\rho = 1800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$E = 2.48 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\nu = 0.2$$

$$m = 1.093 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$$

$$G = 1.033_{E11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$J = 3.3317_{E-7} \text{ m}^4$$

$$k_A = 0.02343 \text{ m}$$

$$e_0 = e = e_A = 0$$

$$k_M^2 = 0.261 \text{ m}^2$$

$$I_m = 0.3566 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_1 = 0.33_{E-6} \text{ m}^4$$

$$I_2 = 0.28_{E-8} \text{ m}^4$$

$$\beta = 0^\circ$$

Como se puede ver, la pala es sólida y de sección transversal constante, y sin ángulo de pre-torcimiento, el material del cuál está construida es fibra de carbono, mediante un proceso de poltrusión, lo que le da características de ligereza y de una alta resistencia mecánica.

El hecho de que la pala este construida por medio del proceso de poltrusión, hace que las propiedades mecánicas de la pala puedan ser consideradas como isotrópicas, por el hecho de que las diferentes capas de material son alineadas en diferentes direcciones, dándole a la resistencia mecánica del material un valor casi isual.

El hecho de que la pala tenga una sección transversal constante y que no cuente con ángulo de pre-torcimiento,  $\beta=0$ , conduce a una simplificación de las ecuaciones 22,23 y 24:

$$-\left\{GJ + Tk_A^2\right\}\phi' + Te_A w'' + \Omega^2 m x e w' + \Omega^2 m \left[ (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) - e e_0 \right] + m k_m^2 \ddot{\phi} + m e \dot{w} = M \quad (25)$$

$$\left[ EI_1 w'' - Te_A \phi' \right]' - (T w')' - (\Omega^2 m e x \phi)' + m (\dot{w} + e \ddot{\phi}) = L_z \quad (26)$$

$$\left[ EI_2 v'' \right]' - (T v')' - \Omega^2 m v + m \dot{v} = L_y \quad (27)$$


---

---

Estas ecuaciones son las que gobiernan el movimiento de una pala con sección transversal constante y sin ángulo de pre-torcimiento, ahora es posible obtener la solución para conocer el comportamiento de las frecuencias naturales de vibración en función de la velocidad angular de operación  $\Omega$

Para lograr lo anterior, primero se considera que todas las fuerzas excitadoras externas deberán ser iguales a cero, ya que como se menciono anteriormente, en este trabajo sólo se analizarán las vibraciones libres, por lo que las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente forma para torsión, alabeo y batimiento, respectivamente:

$$-\left\{GJ + Tk_A^2\right\}\phi'' + Te_A w'' + \Omega^2 mxew' + \Omega^2 m[(k_{m2}^2 - k_{m1}^2) - ee_0]\phi + mk_m^2 \dot{\phi} + me\dot{w} = 0 \quad (28)$$

$$[EI_1 w'' - Te_A \phi]' - (Tw')' - (\Omega^2 mex\phi)' + m(\ddot{w} + e\dot{\phi}) = 0 \quad (29)$$

$$[EI_2 v'']' - (Tv')' - \Omega^2 mv + .m\ddot{v} = 0 \quad (30)$$

El siguiente paso es obtener las soluciones de las ecuaciones 28, 29, y 30.

---

**CAPÍTULO 4**  
**DESARROLLO DE LAS SOLUCIONES DE LAS**  
**ECUACIONES.**

---

Como se puede ver en las ecuaciones, solo el movimiento de batimiento está desacoplado, y tanto la torsión y el alabeo se encuentran acoplados. Una vez que las ecuaciones finales son conocidas se pueden obtener un resultado aproximado mediante la solución de problema de valor propio de las ecuaciones.

Dado que la ecuación del batimiento está desacoplada, es más fácil obtener la solución, por lo que servirá de base para aproximar un método de solución para las ecuaciones de movimiento.

#### 4.1. Solución para la ecuación de batimiento.

La solución de la ecuación de batimiento para una condición puramente estática considera que  $\Omega = 0$  en la ecuación 30, y con esta consideración la ecuación se convierte en un problema ya conocido de vibraciones en una viga, por lo que la ecuación :

$$EI_2 v^{IV} + m\ddot{v} = 0 \quad (31)$$

La solución de esta ecuación es ya muy conocida y ampliamente desarrollada en cualquier libro especializado en vibraciones mecánicas, y que se presenta con el fin de fundamentar el cálculo realizado.

En la búsqueda de soluciones para sistemas continuos, como en este el caso, se siguen los mismos procedimientos que usados para la solución de sistemas discretos. Considerando esto, se consideran las vibraciones libres, las cuales llevan al problema de valor propio o eigenproblema. Para sistemas distribuidos, estos son eigenproblemas diferenciales, cada uno dependiendo de las propiedades de rigidez del sistema, contrariamente al eigenproblema algebraico que se obtiene con los sistemas discretos.

Como en los sistemas discretos, se exploran las circunstancias bajo las cuales el movimiento de la cadena es síncrono, por así llamarlo, uno en el cuál cada punto de la cadena ejecuta el mismo movimiento en el tiempo, pasando a través del punto de equilibrio al mismo tiempo y alcanzando su máximo desplazamiento al mismo tiempo también. La implicación es que, durante el movimiento sincrónico la cadena exhibe un perfil único, o forma general, y dichos perfiles o formas no cambian con el tiempo, solo lo hace la amplitud. En términos matemáticos, se dice que tal solución  $y(x,t)$  al problema de valores en la frontera, se puede separar en variables de espacio  $x$ , y de tiempo  $t$ , y puede ser expresada en la forma:

$$v(x,t) = V(x)F(t) \quad (32)$$

donde  $V(x)$  representa el perfil de la cadena, o la forma, o la configuración como función de  $x$  solamente, y  $F(t)$  indica como la amplitud del perfil varía con el tiempo. Sustituyendo la ecuación 32 en la ecuación 31, se tiene:

$$EI_2 F(t) \frac{d^4}{dx^4} V(x) + mV(x) \frac{d^2}{dt^2} F(t) = 0 \quad (33)$$

---

---

Observando que la ecuación es de variables separables, es posible afirmar que ambos términos de la ecuación deben de ser la misma constante, sólo que de signo diferente. En vista de esto, todos los términos de la ecuación deben de ser reales, y por lo tanto, debe ser igual a la constante  $\lambda$ .

Para explorar la naturaleza de la constante  $\lambda$ , se deben igualar ambos términos de la ecuación 33, pero antes es necesario dividir toda la ecuación entre  $m V(x)$  y  $F(t)$ , e igualarlo a la constante  $\lambda$ , que queda de la siguiente forma:

$$\frac{EI_2}{mV(x)} \frac{d^4}{dx^4} V(x) = -\frac{1}{F(t)} \frac{d^2}{dx^2} F(t) = \lambda \quad (35)$$

Ahora, separando el segundo termino de la ecuación y reacomodando:

$$\frac{d^2}{dt^2} F(t) - F(t)\lambda = 0 \quad (36)$$

Considerando una solución del tipo  $F(t)=Ae^{st}$ , e insertando en la ecuación 36, y dividiendo entre  $Ae^{st}$ , se obtiene la ecuación característica:

$$s^2 - \lambda = 0 \quad (37)$$

la cuál tiene las soluciones :

$$\frac{s_1}{s_2} = \pm\sqrt{\lambda} \quad (38)$$

Si  $\lambda$  es positivo, entonces las raíces son reales, una positiva y una negativa, tal que  $F(t)$  es la suma de dos términos exponenciales, una divergente y otra convergente. Debido a que las soluciones divergentes son inconsistentes con oscilaciones pequeñas, el caso en el cuál  $\lambda$  es positivo debe ser desechado. Por lo tanto, se asume que  $\lambda$  es negativa y se introduce la notación  $\lambda = -\omega^2$ , tal que la ecuación 38 se convierte en:

$$\frac{s_1}{s_2} = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega \quad (39)$$

Así se tiene que  $F(t)$  se convierte en:

$$F(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} = C \cos(\omega t - \phi) \quad (40)$$

y que representa un movimiento armónico, que es consistente con la consideración de pequeños desplazamientos.

---

---

Una vez que se cuenta con el valor de  $F(t)$ , puede ser sustituido en la ecuación 33, y dividiendo todo entre  $F(t)$  una vez más, se obtiene:

$$EI_2 \frac{d^4}{dx^4} V(x) - mV(x)\omega^2 = 0 \quad (41)$$

ó de la forma:

$$\frac{d^4}{dx^4} V(x) - \beta^4 V(x) = 0 \quad ; \text{ donde } \beta^4 = \frac{m\omega^2}{EI_2} \quad (42)$$

Ahora bien, asumiendo una solución del tipo:

$$V(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) + C \sinh(\beta x) + D \cosh(\beta x) \quad (43)$$

Desarrollando las derivadas de n-esimo orden.

$$\frac{d}{dx} V(x) = A\beta \cos(\beta x) + C\beta \cosh(\beta x) - B\beta \sin(\beta x) + D\beta \sinh(\beta x) \quad (44)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x) = -B\beta^2 \cos(\beta x) + D\beta^2 \cosh(\beta x) - A\beta^2 \sin(\beta x) + C\beta^2 \sinh(\beta x) \quad (45)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} V(x) = -A\beta^3 \cos(\beta x) + C\beta^3 \cosh(\beta x) + B\beta^3 \sin(\beta x) + D\beta^3 \sinh(\beta x) \quad (46)$$

Ahora, consideramos las condiciones de frontera para una viga empotrada en  $x=0$ , cuyas restricciones son:

$$V(0) = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dx} V(0) = 0 \quad (47)$$

Sustituyendo en las ecuaciones 43 y 44, se tiene:

$$V(0) = B + D = 0 \quad ; \quad B = -D \quad (48)$$

$$\frac{d}{dx} V(0) = \beta(A + C) = 0 \quad ; \quad A = -C \quad (49)$$

Ahora tomamos las condiciones de frontera para cuando  $x=L$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} V(L) = 0 \quad ; \quad \frac{d^3}{dx^3} V(L) = 0 \quad (50)$$


---

Sustituyendo en las ecuaciones 45 y 46, y tomando en cuenta los valores obtenidos para A y B, se obtiene el valor de B:

$$B = -\left(\frac{\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)}{\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)}\right)A \quad (51)$$

Sustituyendo los valores para A y B, en la ecuación 46 se obtiene:

$$\frac{d^3}{dx^3}V(x) = -A(\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)) - A\left(\frac{\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)}{\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)}\right)(\sin(\beta L) - \sinh(\beta L)) = 0 \quad (52)$$

Desarrollando la ecuación anterior y considerando que  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ , se tiene:

$$\cos(\beta L)\cosh(\beta L) = -1 \quad (53)$$

Y que es la ecuación característica para la solución de la ecuación 43, lo único que resta por hacer es obtener las raíces de esta ecuación numéricamente, y para esta tarea, se utiliza el software Mathematica©, el cuál arroja los siguientes valores, que son las 3 primeras raíces:

$$\beta_1 L = 1.8751 ; \beta_2 L = 4.6941 ; \beta_3 L = 7.8548 \quad (54)$$

Con estos valores, y con la segunda parte de la ecuación 42, se puede obtener la n-ésima frecuencia natural de vibración para una viga estática, y la forma o perfil que tomará la viga será:

$$V_n(x) = A_n \left( \sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x) - \left( \frac{\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)}{\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)} \right) (\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)) \right) \quad (55)$$

Una vez que se tienen los resultados para la pala estática, es posible regresar al problema de la ecuación 30, que corresponde al batimiento, y que es la ecuación de movimiento de la pala en función de la velocidad angular de operación  $\Omega$ .

$$[EI_2 v''']' - (Tv')' - \Omega^2 m v + m \ddot{v} = 0 \quad (30)$$

y recordando que :

$$v(x,t) = V(x)C \cos(\omega t) \quad (32)$$

donde C=A, considerando que es la misma amplitud de desplazamiento. Sustituyendo en la ecuación 30, y desarrollando:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_2 \frac{d^2}{dx^2} V(x) \right) - \frac{d}{dx} \left( T \frac{d}{dx} V(x) \right) - \Omega^2 m V(x) - m V(x) \omega^2 = 0 \quad (56)$$

---

Siendo  $V(x)$  el modo natural de vibración de la  $n$ -ésima frecuencia.

Para poder obtener la solución aproximada, se utilizará el método de Galerkin, ya que es el más apropiado para realizar esta tarea.

#### 4.2. Solución para las ecuaciones de alabeo y torsión acopladas.

Como se puede ver, las ecuaciones 28 y 29 están acopladas, tanto en condiciones dinámicas como es estáticas. Para encontrar la solución a estas ecuaciones se debe considerar lo siguiente: Ambas ecuaciones tienen frecuencias natural de vibración independientes y que corresponden a los modos de alabeo y torsión que no son acoplados, sin embargo, existen algunas frecuencias que excitarán algún modo de vibración que involucre a ambos modos.

Partiendo de eso, se asumirá que existe una frecuencia que excita a ambos modos, y que es la frecuencia de acoplamiento, cuya función es:

$$F(t) = Ae^{i\mu t} = A\cos(\mu t) \quad ; \quad \text{donde } \mu = \text{Frec. Natural de vibración acoplada} \quad (57)$$

Por lo que las funciones de los modos, tanto para alabeo como para torsión son:

$$\left. \begin{aligned} w(x,t) &= W(x)F(t) \\ \phi(x,t) &= \Phi(x)F(t) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned} W(x) &= a \left( \sin(\beta x) - \sinh(\beta x) - \left( \frac{\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)}{\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)} \right) (\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)) \right) \\ \Phi(x) &= b \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

son los modos de vibración de alabeo y torsión, desarrollados en el Apéndice A, y cuyas frecuencias naturales son:

$$\beta L = 1.8751; 4.6941; 7.8548$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi$$

que son los valores de las 3 primeras soluciones para las ecuaciones de alabeo y torsión, respectivamente, por separado y sin acoplamientos.

---

---

Por lo tanto, considerando las ecuaciones (58), se puede escribir las ecuaciones para Torsión y Alabeo en su forma general:

-para torsión:

$$-\frac{d}{dx} \left\{ [GJ + Tk_A^2] \frac{d}{dx} \phi(x,t) \right\} + Te_A \frac{d^2}{dx^2} w(x,t) + \Omega^2 m x e \frac{d}{dx} w(x,t) + \Omega^2 m [(k_{m2}^2 - k_{m1}^2) - e e_0] \phi(x,t) + m k_m^2 \frac{d^2}{dt^2} \phi(x,t) + m e \frac{d^2}{dt^2} w(x,t) = 0 \quad (60)$$

-para Alabeo:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI_1 \frac{d^2}{dx^2} w(x,t) - Te_A \phi(x,t) \right] - \frac{d}{dx} \left( T \frac{d}{dx} w(x,t) \right) - \frac{d}{dx} (\Omega^2 m e x \phi(x,t)) + m \left( \frac{d^2}{dt^2} w(x,t) + e \frac{d^2}{dt^2} \phi(x,t) \right) = 0 \quad (61)$$

ó en su forma particular para el primer modo ( $\beta L_1$  y  $\alpha_1$ ),

para Torsión:

$$\frac{1.234bGJ}{R} + .731bk_A^2 \Omega^2 mR + .581ae_A \Omega^2 mR + .918ae \Omega^2 mR + .5b(k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \Omega^2 mR + .614aemR\omega^2 + .5bk_M^2 mR\omega^2 = 0 \quad (60 A)$$

Para Alabeo:

$$\frac{23.04aEI_1}{R^3} + 1.465be_A \Omega^2 mR + .217a \Omega^2 mR - 1.617be \Omega^2 mR + 1.855amR\omega^2 + .695bemR\omega^2 = 0 \quad (61A)$$

Estas son las ecuaciones con las que se pueden obtener las frecuencias acopladas de la pala. Para llegar a este objetivo, es necesario contar con una herramienta que ayude a obtener la solución de dichas ecuaciones., Una de estas herramientas es el método de Galerkin, el cuál parece ser la herramienta más apropiada dadas las condiciones con las que se cuenta.

---

### 4.3. El Método de Galerkin

El método de Galerkin pertenece a una familia de técnicas para la solución aproximada de problemas de eigenvalores diferenciales conocido como métodos residuales. Así como el método de Rayleigh-Ritz, el método de Galerkin también representa una técnica de discretización de series donde la solución aproximada es asumida en la forma:

$$Y^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x) \quad (62)$$

Donde las funciones  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ , ...,  $\phi_n(x)$  son conocidas como funciones de comparación independientes y los valores  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_n$  son coeficientes indeterminados. La solución de la ecuación (62) no satisface exactamente la ecuación diferencial que define al problema de valor propio, así que siempre se provoca un error, donde ese error es denotado como  $R(Y^{(n)}(x), x)$  y referido como residuo. Debido a que  $Y^{(n)}(x)$  es una combinación lineal de las funciones de comparación, las condiciones de frontera son satisfechas exactamente. Para determinar los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_n$ , se multiplica el residuo  $R(Y^{(n)}(x), x)$  por  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ , ...,  $\phi_n(x)$ , en secuencia, se integra el resultado en el dominio del sistema y se iguala el resultado a 0, ó:

$$\int_0^L \phi_i(x) R(Y^{(n)}(x), x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (63)$$

así que las funciones de comparación  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ , ...,  $\phi_n(x)$  también juegan un papel de funciones de prueba. Continuando con la integración, Ec. (63), se convierte en un arreglo de ecuaciones algebraicas con las variables  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_n$  con  $\lambda = \lambda^{(n)}$  actuando como parámetro; y que son llamadas las ecuaciones de Galerkin y representan un problema de valor propio. El resto del proceso es igual al método de Rayleigh-Ritz.

Existe una diferencia básica entre el método de Rayleigh-Ritz y el método de Galerkin. El método de Rayleigh-Ritz representa una aproximación variacional, por el cual el problema de valor propio es derivado por la fijación de los cocientes de Rayleigh, y está restringido a sistemas conservativos, mientras que en el método de Galerkin el problema de valor propio es derivado mediante la igualación de los errores a cero. Como resultado, el método de Galerkin es más general y puede ser usado para ambos tipos de sistemas: conservativos y no conservativos.

La ecuación (63) implica matemáticamente que el residuo  $R$  es ortogonal a cada función de prueba  $\phi_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Conforme  $n$  aumenta sin fronteras,  $R$  puede permanecer ortogonal a un número infinito de arreglos de funciones independientes sólo si tiende a ser cero, ó:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(Y^{(n)}(x), x) = 0; \quad 0 < x < L \quad (64)$$

Pero, si el error tiende a cero en cada punto, se debe tener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y^{(n)}(x) = Y(x) \quad (65)$$

que demuestra la convergencia del método de Galerkin.

---

---

#### 4.4. Ecuaciones Finales.

Ahora solo queda aplicar el método de Galerkin a las ecuaciones 56, 60 y 61, así como las funciones 32 y 58, con sus valores respectivos.

Para la aplicación de la ecuación 63, se considera que la función  $R(Y^{(n)}(x),x)$  es cada una de las ecuaciones 56, 60 y 61, multiplicadas por la función a la cual se le desea obtener la frecuencia natural.

La forma en que se obtendrá la solución de las ecuaciones, será por medio de la integración analítica de dicha ecuación, mediante el uso del software Matemática®.

##### 4.4.1. Batimiento

Para aplicar el método de Galerkin a la ecuación (56), es necesario hacer algunas consideraciones que se mencionan a continuación.

Tomando en cuenta la ec. (62), donde  $\phi_j(x)$  es la forma modal y  $a_j$  su coeficiente, que en este caso se considera como la unidad, ya que la respuesta aquí se considerará como unitaria. Así entonces  $Y^{(n)}(x)$  es la suma de las formas modales para el alabeo.

$Y^{(n)}(x)=V_1+ V_2+ V_3$ , que es la suma de las 3 primeras formas modales del batimiento.

Por lo tanto, la ecuación (63) para el batimiento queda de la siguiente manera:

$$\int_0^R V_i * \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_2 \frac{d^2}{dx^2} (V_1 + V_2 + V_3) \right) dx - \int_0^R V_i * \frac{d}{dx} \left( T \frac{d}{dx} (V_1 + V_2 + V_3) \right) dx - \int_0^R V_i * \Omega^2 m (V_1 + V_2 + V_3) dx + \int_0^R V_i * m \omega^2 (V_1 + V_2 + V_3) dx = 0 \quad (66)$$

donde  $V_i(x)$  es la forma modal que se desea obtener, con  $i=1,2,3$ .

Así, para el primer modo se tiene:

$$\frac{23.0476EI_2}{mR^4} + 1.6388\Omega^2 + 1.8556\omega^2 = 0 \quad (67)$$

Y tomando en cuenta la formula (39) , el valor  $\omega$  es:

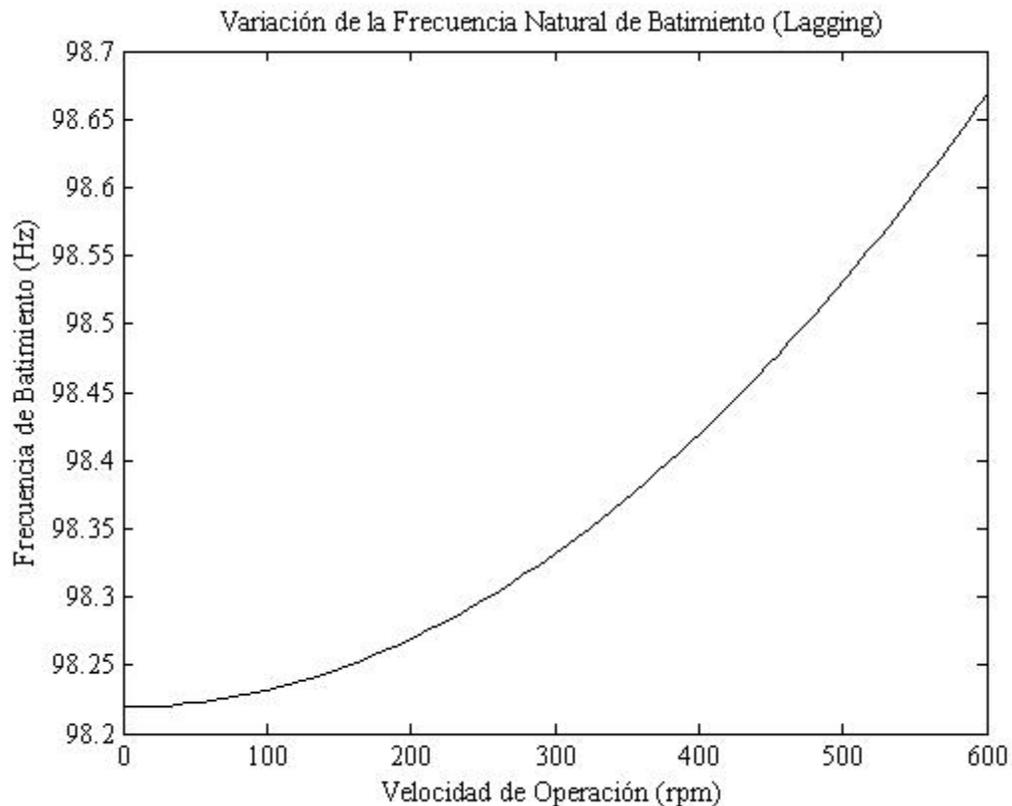
$$\omega = i \sqrt{\frac{23.0476EI_2}{1.8556mR^4} + \frac{1.6388\Omega^2}{1.8556}} \quad (68)$$

---

si  $\Omega=0$ , la frecuencia natural es la de condición estática, y que es igual a la primer frecuencia natural de la viga.

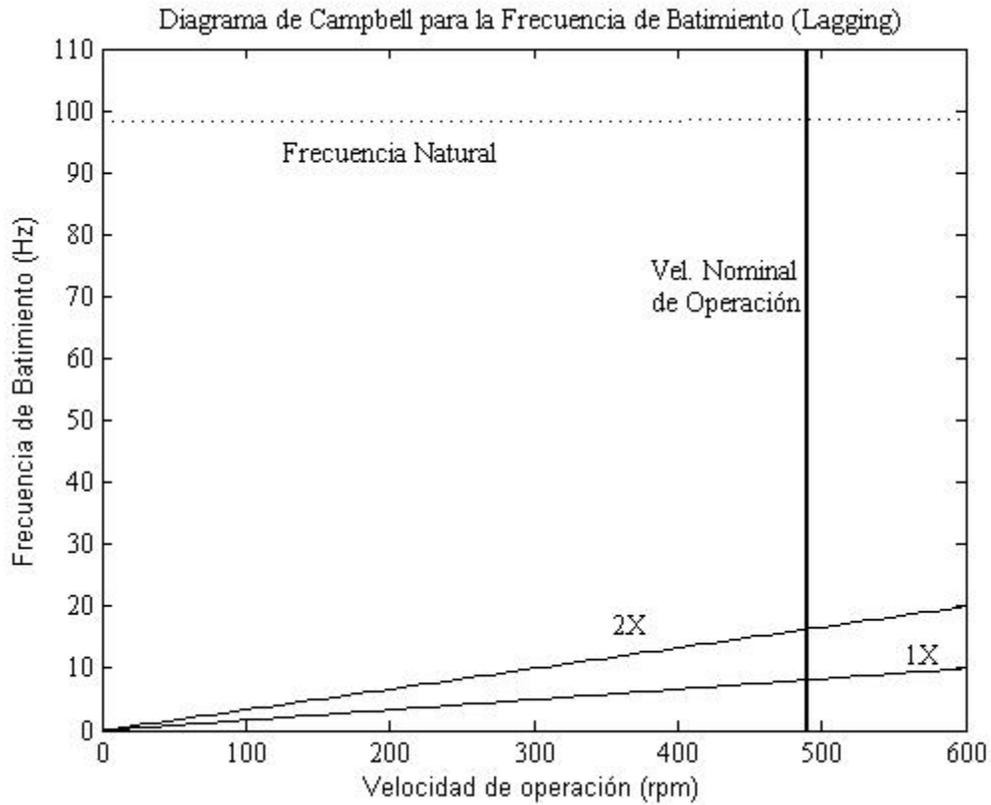
$$\omega = i \sqrt{\frac{23.0476EI_2}{1.8556mR^4}} = 617.3 \text{ rad / seg} = 98.23 \text{ Hz}$$

y la forma en que cambia conforme aumenta la velocidad de operación es:



En la gráfica solo se muestra el cambio de la primera frecuencia natural de Batimiento en el rango de operación del aerogenerador BERGEY XL.1, y el porcentaje de cambio es de solo 0.7 %, por lo que los efectos debidos a la fuerza centrífuga que imprime la velocidad de giro a las palas del aerogenerador es casi imperceptible para el caso de Batimiento.

La mejor manera de saber si la frecuencia natural de vibración de batimiento entrará en resonancia con las frecuencias de operación del rotor, se muestra a continuación el diagrama de Campbell.



y cuya forma modal es:

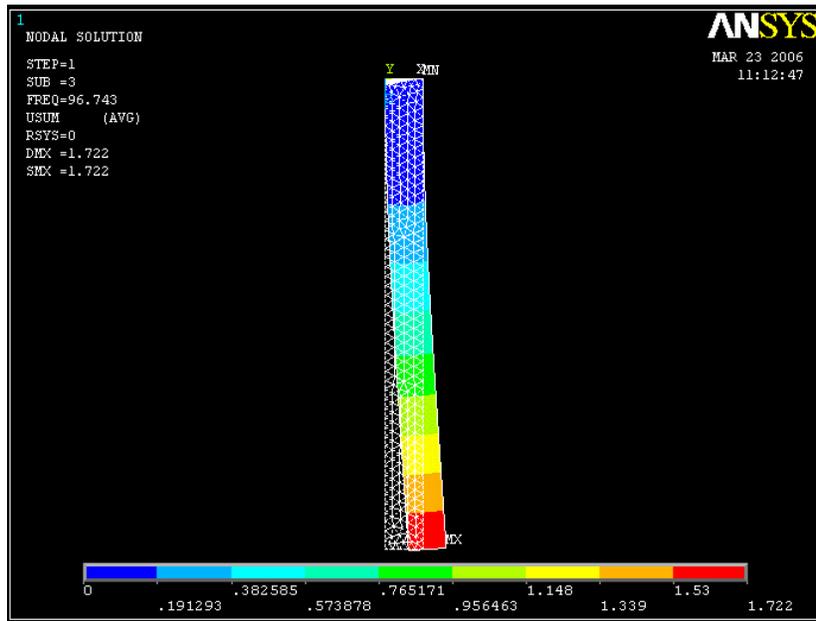


Fig. 7 Forma modal del primer modo de Batimiento

---

#### 4.4.2. Torsión y Alabeo

Dado que las ecuaciones de torsión y Alabeo están acopladas, se trabajará con un sistema matricial de ecuaciones, que servirá para distinguir los términos acoplados y los términos que pertenecen a las ecuaciones de torsión y Alabeo por separado. El sistema matricial, considerando las ecuaciones 58, 59, 60 y 61 quedan de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{12.365EI_1}{mR^4} + .1194\Omega^2 + \omega^2 & 1.154\Omega^2 e_A - .0707\Omega^2 e + .497\omega^2 e \\ -\frac{1.16884\Omega^2 e_A}{k_m^2} + \frac{2.8241\Omega^2 e}{k_A^2} + \frac{1.84\omega^2 e}{k_m^2} & \frac{2.46GJ}{mR^2 k_m^2} + \frac{1.075\Omega^2 k_A^2}{k_m^2} + \frac{\Omega^2(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)}{k_m^2} + \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

tomando en cuenta los valores para las excentricidades  $e_A=e_0=e=0$ , de las propiedades geométricas de la pala, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{12.365EI_1}{mR^4} + .1194\Omega^2 + \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{2.46GJ}{mR^2 k_m^2} + \frac{1.075\Omega^2 k_A^2}{k_m^2} + \frac{\Omega^2(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)}{k_m^2} + \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

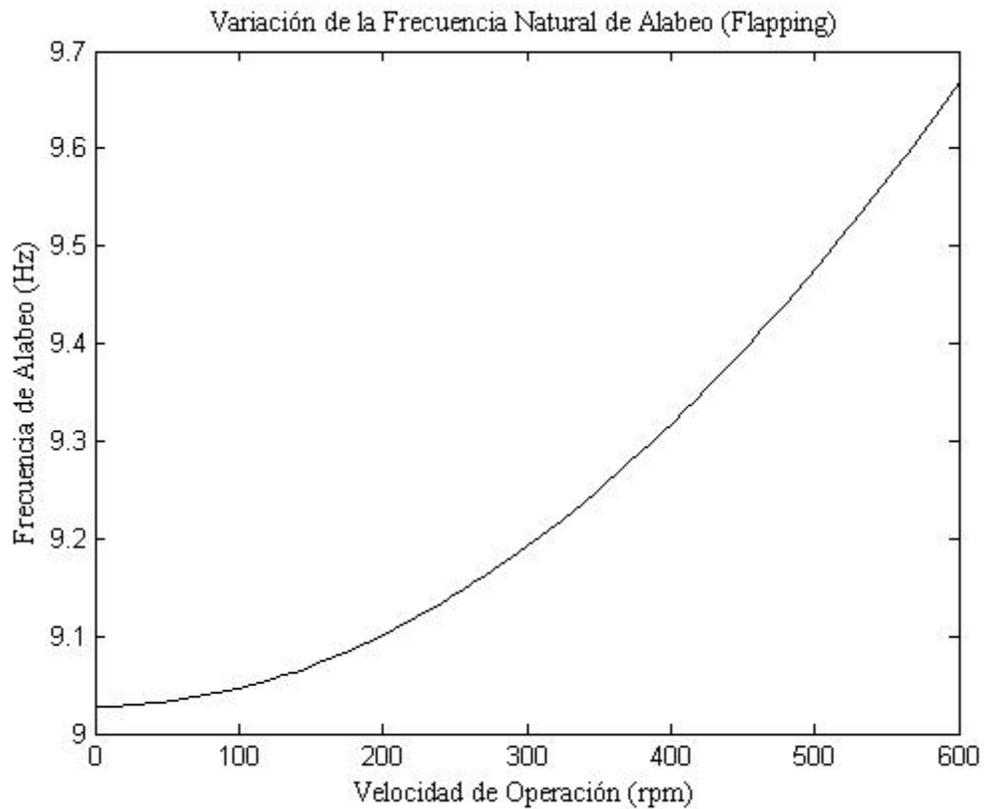
Como se puede observar, la matriz de frecuencias acopladas es mucho mas sencilla, ahora solo es necesario obtener los eigenvalores de la matriz, lo que arroja las frecuencias naturales acopladas  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en función de la velocidad de giro del rotor  $\Omega$ , y que cuyos resultados numéricos en Hz son:

$$\omega_1 = 9.03 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 284 \text{ Hz}$$

y la forma en que varían conforme lo hace la velocidad angular de operación es:

- Para el Alabeo:



con una variación del 11%, que se debe a las propiedades geométricas de la pala, particularmente al momento de inercia.

y cuya forma modal es:

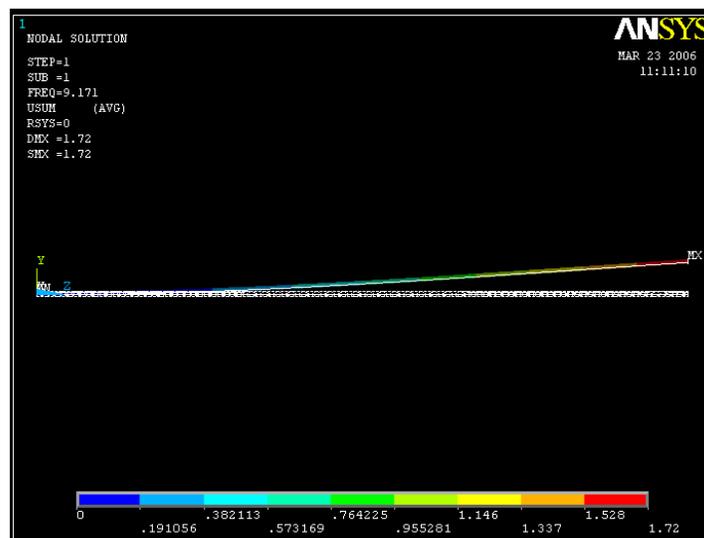
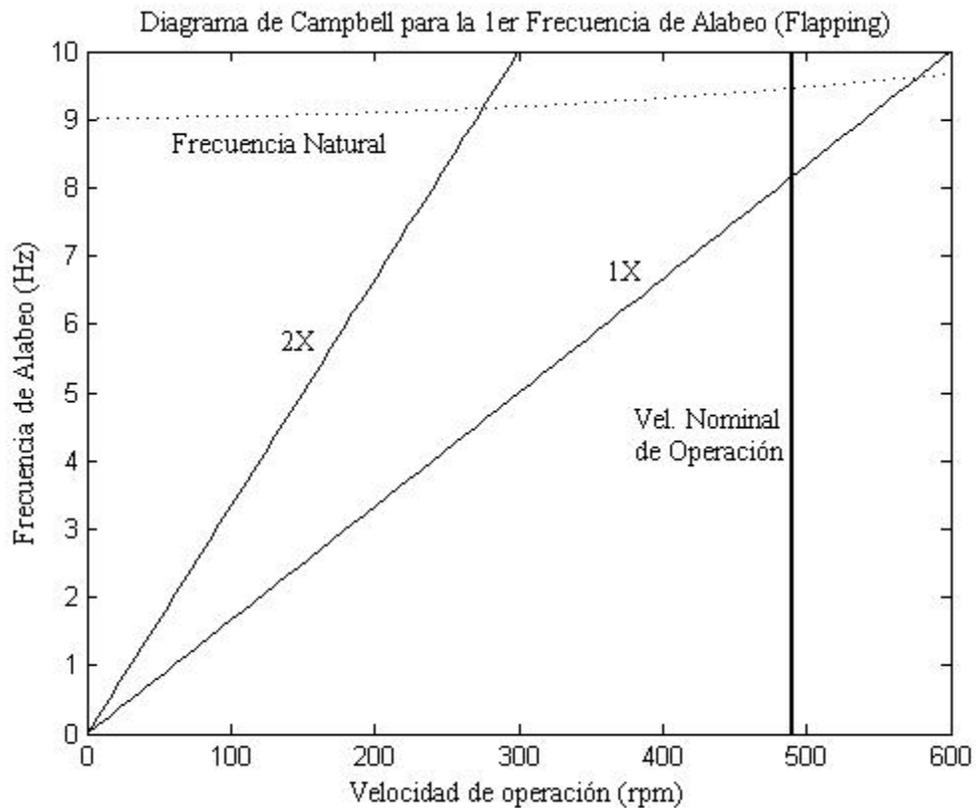


Fig. 8 Forma modal del primer modo de Alabeo

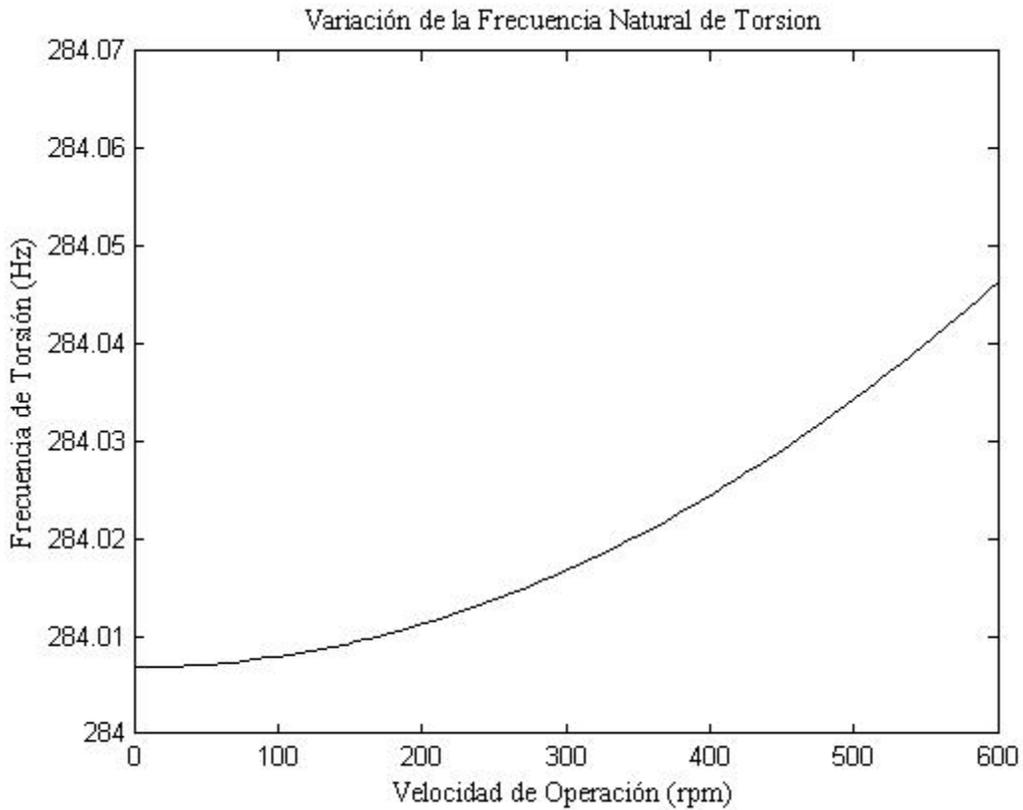
---

El diagrama de Campbell se muestra a continuación:



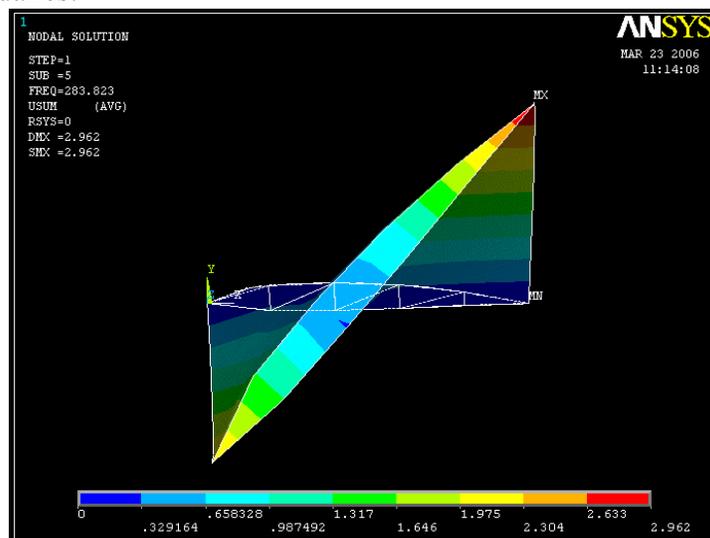
y como se observa, la primer frecuencia natural de Alabeo no entra en resonancia dentro del rango de operación del aerogenerador.

- Para Torsión:



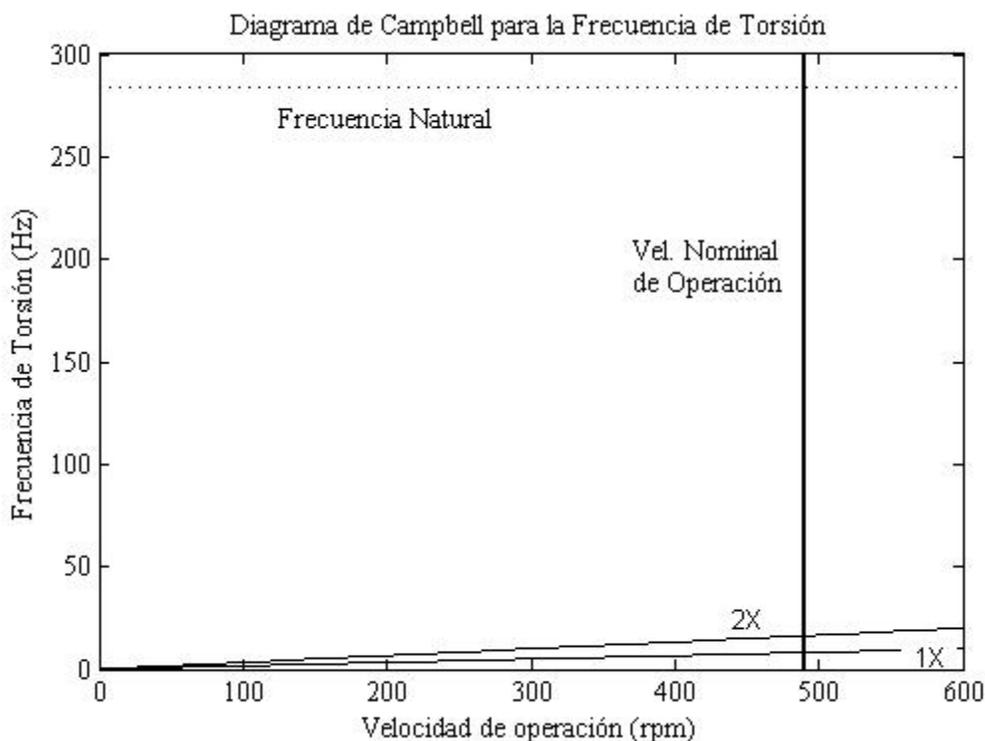
con una variación del 0.02% en la primer frecuencia natural de Torsión, y esto se debe a que tanto las propiedades geométricas de la pala como las propiedades mecánicas de la fibra de carbono imprimen una rigidez torsional muy alta a la pala.

y cuya forma modal es:



**Fig. 9 Forma modal del primer modo de Torsión**

A continuación se muestra el diagrama de Campbell del movimiento de Torsión



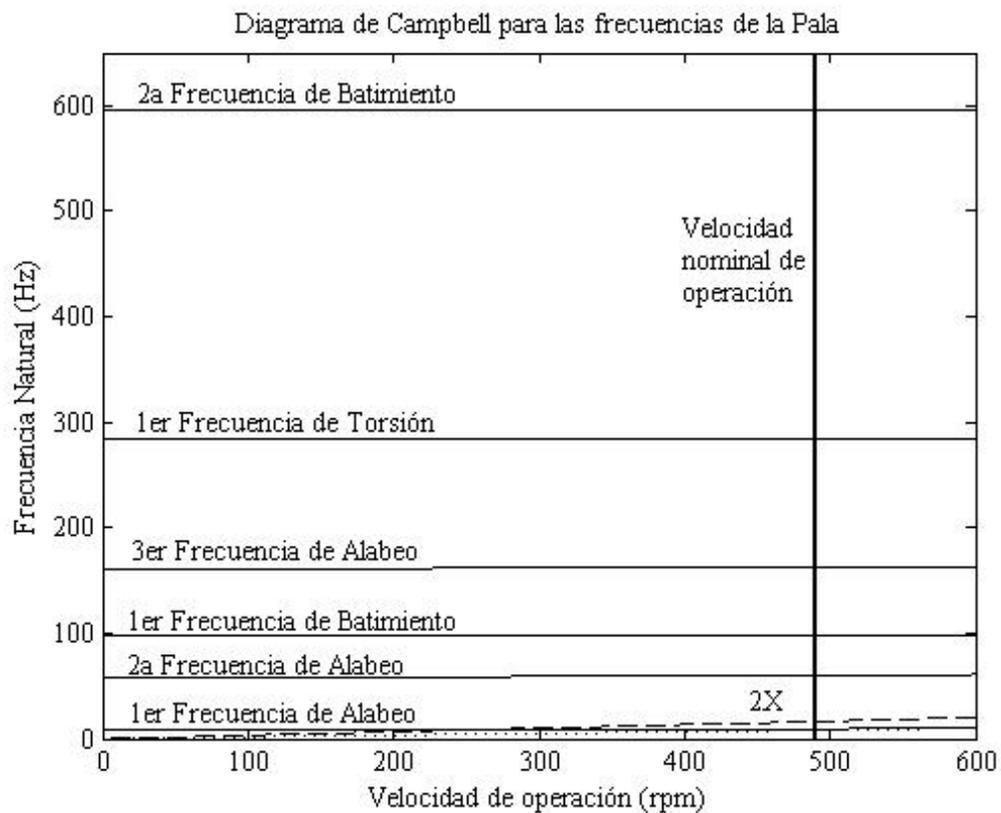
y como se muestra, la primer frecuencia natural de Torsión tampoco entra en resonancia dentro del rango de operación del aerogenerador.

Ahora solo resta comparar los resultados obtenidos en este trabajo con los obtenidos por medio del software de Elemento Finito ANSYS. Sólo se muestran los valores para las frecuencias naturales estáticas y aquellas para el valor de 600 rpm's del rotor.

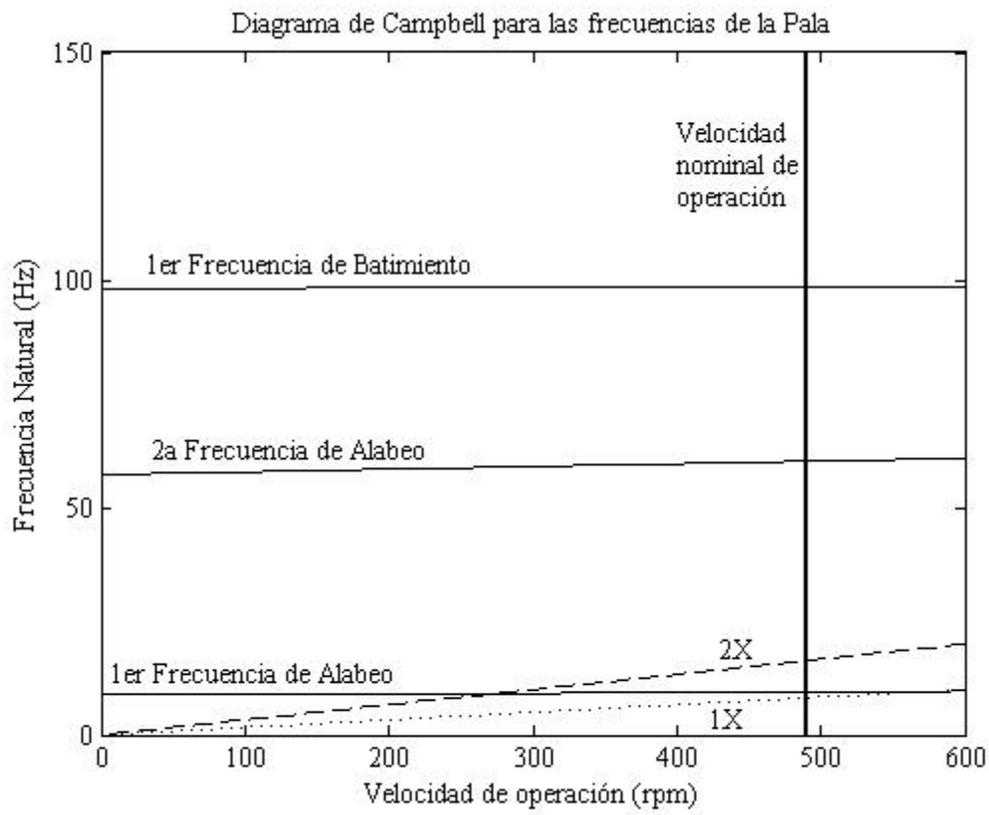
Comparación de las Frecuencias Naturales Obtenidas					
Modo	0 RPM		600 RPM		Movimiento
	Analítico	ANSYS	Analítico	ANSYS	
1	9.03	9.1709	9.83	14.43	Alabeo
2	57.23	57.676	61.8	90.54	Alabeo
3	98.23	96.743	98.94	97.43	Batimiento
4	161	161.01	161.84	162.41	Alabeo
5	284	283.82	284.7	284.05	Torsión
6	-	315.52	-	316.05	Alabeo
7	-	521.6	-	521.72	Alabeo
8	596.32	594.73	596.83	595.21	Batimiento

Como se aprecia en la tabla anterior, los valores calculados con el método analítico difieren de aquellos obtenidos en el programa de ANSYS. La principal razón de esta diferencia se debe al número de términos de las formas modales utilizados en el método de Galerkin, ya que mientras más términos o formas modales sean utilizados, mayor será la precisión del resultado.

El diagrama de Campbell que incluye todas las frecuencias encontradas se muestra a continuación.



Como se muestra en el Diagrama de Campbell, solo algunas frecuencias podrían tener problemas de vibración debido en el rango de operación del aerogenerador BERGEY XL.1.



Sólo la primer frecuencia de alabeo podría presentar problemas de vibración en el rango de operación del aerogenerador con la componente 1X

---

## **CONCLUSIONES**

Como se puede ver en los resultados, el efecto que imprime la velocidad rotacional en las frecuencias naturales es el de rigidizar las palas, debido a los efectos de la fuerza centrífuga, pero aún así, no existe problema de resonancia en la palas.

Este trabajo, se complementa mayormente con el trabajo de tesis “Análisis Dinámico de la pala de un aerogenerador”, que realiza el mismo estudio mediante el uso de software de elemento finito y de análisis experimentales, y que como se muestra anteriormente, los resultados aquí obtenidos y aquellos del trabajo de tesis, son muy parecidos, por lo que por ambos lados se obtiene un buen método de analizar este tipo de estructuras, o cualquier tipo de viga que se encuentre sometida a la acción de una velocidad de giro.

El método presentado aquí es una buena herramienta que puede ser utilizado tanto para fines didácticos como para aplicaciones practicas, ya que las ecuaciones desarrolladas son aplicables a palas de cualquier geometrías, llegando incluso a ser aplicadas a vigas en cantiliver de sección transversal simétrica alrededor de un eje.

Aunque las ecuaciones aquí presentadas solo son de vibración libre, es posible considerar las excitaciones debidas a los efectos aerodinámicos tanto de la pala en si como del conjunto rotor, y es una buena herramienta si se quiere aplicar el elemento finito o corroborar sus resultados, ya que hace uso de los métodos fundamentales del elemento finito.

## **TRABAJOS FUTUROS**

Para la continuación de este trabajo, es necesario incluir las fuerzas excitadoras debidas a los efectos aerodinámicos, también es necesario considerar los efectos de amortiguamiento tanto del material como aerodinámico, para así, tener un sistema mucho más completo.

Otro punto que se puede ser contemplado es el referente a los esfuerzos dinámicos que se tienen en cada modo de vibración, ya que las ecuaciones hacen uso de las deformaciones unitarias de la pala en sus 3 ejes, y considerando las fuerzas externas es posible obtener la deformación real o aproximada, mediante un estudio armónico, y que son fundamentales para obtener los esfuerzos generados, esto también puede relacionarse con los efectos en la vida a fatiga, ya que considerando los modos de vibración, así como los posibles esfuerzos generados, se puede obtener un esfuerzo alternante que domina la vida en fatiga del material.

---

## REFERENCIAS

- [1] David A. Spera: Wind Turbine Technology. The American Society of Mechanical Engineers, 1994.
- [2] Marco A. Borja Díaz, Oscar Jaramillo Salgado, Fernando Mimiaga Sosa, Primer Documento del Proyecto Eoloeléctrico del Corredor Eólico del Istmo de Tehuantepec, Instituto de Investigaciones Eléctricas, Gobierno del Estado de Oaxaca, 2004.
- [3] Ginsberg Jerry H.: Mechanical and Structural Vibrations. John Weley & Sons, 2001.
- [4] Larsen Gunner C., Hansen Morten H.: Models for Wind Turbines a Collection. Riso.
- [5] Palacios Méndez Alejandro: Análisis Dinámico de la Pala de un Aerogenerador, Tesis de Maestría, ESIME ZACATENCO
- [6] Bielawa Richard L.: Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity, AIAA Education Series, 1992
- [7] Kelly S. Graham: Fundamentals of Mechanical Vibrations, McGraw Hill, 2000.
- [8] Malcom David J.: Modelling of Blades as equivalent beams for aeroelastic analysis, Technical Report, Global Energy Concepts, LLC 2003
- [9] Larsen Gunner C., Hansen Morten H.: Modal Analysis of Wind Turbine Blades, Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark, 2002.
- [10] Hernández Pandelli R.: Análisis de la Estabilidad Dinámica de un rotor de levantamiento, Tesis de Maestría, ESIME ZACATENCO
- [11] Hernández Pandelli, R., Gómez Mancilla J., Nossov V.: Estabilidad de los Movimientos de Flexión y Torsión acoplados (Flutter) de las palas del rotor principal de un Helicóptero, 1er Encuentro de Investigadores y Alumnos PIFI, Participantes en proyectos de Investigación, México, Mayo 2005
- [12] Hernández Pandelli R., Gómez Mancilla J., Sánchez Silva F.: Análisis de Flapping de un rotor Articulado para Helicóptero en vuelo estacionario y su aplicación a un Banco de Pruebas prototipo, 8º Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México, Noviembre 2004.
- [13] Hernández Pandelli R., Gómez Mancilla J., Narro Quesada E.: Estabilidad Dinámica de Flexión y Torsión acoplados (Flutter) de las palas del rotor principal de un Helicóptero, 7º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, México, Octubre 2005.

- 
- [14] Hernández Pandelli, R., Gómez Mancilla J., Nossov V.: Estabilidad Dinámica de Adelanto-Retraso (Lagging) de las palas del rotor principal de un Helicóptero Mi-2, 4º Congreso Internacional de ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México, Noviembre 2005.
- [15] S.M. Habalí, I. A. Saleh: Local Design, testing and Manufacturing of small mixed airfoil wind turbine blades of glass fiber reinforced plastics, Energy Conversion & Management 41(2000).
- [16] Dayton A. Griffin: Evaluation of Design Concepts for Adaptive Wind Turbine Blades, SAND2002-2424 Unlimited Release Printed, August 2002.
- [17] D. Corbus, D. Prasher: Analysis and Comparison of Test Results from the Small Wind Research Turbine Test Project, National Renewable Energy Laboratory, January 2005.
- [18] Richardson Mark H.: Is it a mode shape or an Operating Deflection shape?, Vibrant Technology, Inc. March 1997
- [19] Anders Ahlström: Aeroelastic Simulation of Wind Turbine Dynamic. Tesis Doctoral 2005.

---

**ANEXO A**  
**DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE DEFORMACIÓN  
LONGITUDINAL.**

Es esta sección se obtendrá la ecuación de deformación de una viga que tiene pretorcimiento, y que se encuentra bajo deformaciones laterales y torsionales. Se considera una fibra de la sección transversal y que se encuentra a una distancia perpendicular  $\eta$  del eje mayor y a una distancia  $\zeta$  sobre el mismo eje de la sección transversal, tal y como se ve en las figuras 1 y 2. Considerando lo anterior, se puede considerar la razón de cambio de dichas distancias respecto a  $x$ , por lo que se pueden obtener las ecuaciones A1 y A2:

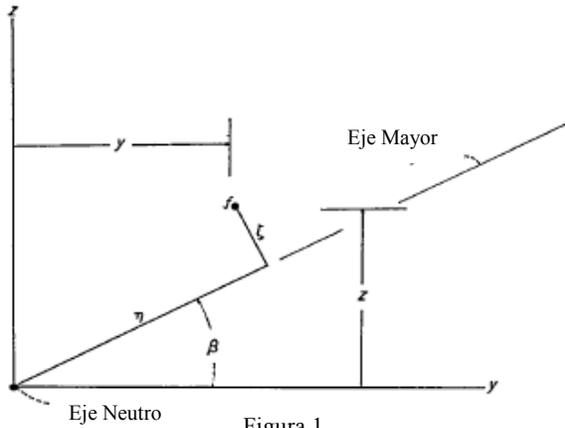


Figura 1

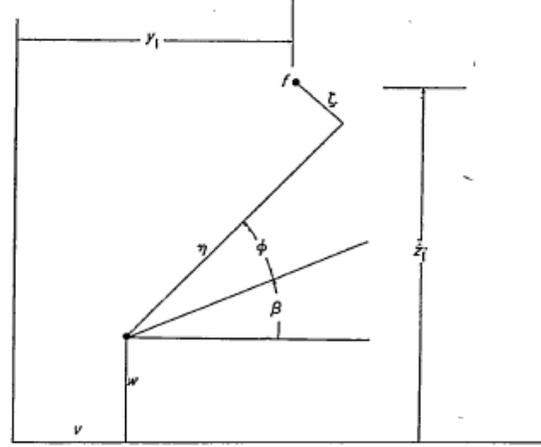


Figura 2

$$\left. \begin{aligned} y &= \eta \cos \beta - \zeta \sin \beta \\ z &= \eta \sin \beta + \zeta \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

$$\left. \begin{aligned} y' &= -\eta \beta' \sin \beta - \zeta \beta' \cos \beta = -\beta' z \\ z' &= \eta \beta' \cos \beta - \zeta \beta' \sin \beta = \beta' y \end{aligned} \right\} \quad (A2)$$

Ahora, tomando en cuenta la deformación sufrida por el eje elástico de la viga, mediante los desplazamientos  $u, v, y w$ , sobre los ejes  $x, y, z$ , respectivamente, tal que la sección transversal permanece perpendicular al eje elástico, y rota un ángulo  $\phi$  alrededor del mismo eje, es posible conocer la nueva posición de la fibra  $f$ . También, haciendo la consideración de pequeños desplazamientos angulares tales que  $\cos(\beta+\phi)=\cos\beta-\phi\sin\beta$  y  $\sin(\beta+\phi)=\sin\beta+\phi\cos\beta$ , se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + u - v'(y_1 - v) - w'(z_1 - w) = x + u - v' y - w' z \\ y_1 &= v + \eta(\cos \beta - \phi \sin \beta) - \zeta(\sin \beta + \phi \cos \beta) = v + y + z \phi \\ z_1 &= w + \eta(\sin \beta + \phi \cos \beta) + \zeta(\cos \beta - \phi \sin \beta) = w + z + y \phi \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

---

y sus derivadas respecto a  $x$ , son:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= 1 + u' - v''y + v'\beta'z - w''z - w'\beta'z = 1 + u' - y(v'' + \beta'w') - z(w'' - \beta'v'') \\ y_1' &= v' - \beta'z - \beta'y\phi - z\phi' = v' - y\beta'\phi - z(\beta' + \phi') \\ z_1' &= w' + \beta'y - \beta'z\phi + y\phi' = w' + y(\beta' + \phi') - z\beta'\phi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4})$$

La deformación longitudinal de una fibra puede ser obtenida de las ecuaciones anteriores, considerando el cambio de longitud  $ds$  debido a la nueva posición de la fibra. En términos de las componentes diferenciales de la longitud en las direcciones  $x, y, z$ , la longitud final  $ds_1$  de una fibra es:

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 \quad (\text{A5})$$

$$\left(\frac{ds_1}{dx}\right)^2 = (x_1')^2 + (y_1')^2 + (z_1')^2 \quad (\text{A6})$$

con el uso de las ecuaciones A4, lo anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds_1}{dx}\right)^2 &= 1 + 2[u' - y(v'' + \beta'w') - z(w'' - \beta'v'')] + z^2\beta'^2 - 2z\beta'(v' - y\beta'\phi - z\phi') + y^2\beta'^2 \\ &+ 2y\beta'(w' + y\phi' - z\beta'\phi) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\frac{ds_1}{dx} = \left\{ 1 + (y^2 + z^2)(\beta')^2 + 2[u' - yv'' - zw'' + (y^2 + z^2)\beta'\phi'] \right\}^{1/2} \quad (\text{A8})$$

La longitud inicial para la fibra  $ds$ , se obtiene de la ecuación A8 haciendo  $u=v=w=\phi=0$ . Por lo tanto:

$$\frac{ds}{dx} = \left[ 1 + (y^2 + z^2)(\beta')^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A9})$$

La deformación en tensión en la fibra puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{ds_1}{ds} - 1 = \left\{ 1 + \left[ \frac{2}{1 + (y^2 + z^2)(\beta')^2} \right] [u' - yv'' - zw'' + (y^2 + z^2)\beta'\phi'] \right\}^{1/2} - 1 \\ &= \left[ \frac{1}{1 + (y^2 + z^2)\beta'^2} \right] [u' - yv'' - zw'' + (y^2 + z^2)\beta'\phi'] \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

Ahora, tomando en cuenta que el factor  $(y^2 + z^2)\beta'^2 \ll 1$ , se tiene:

$$\varepsilon = u' - yv'' - zw'' + (y^2 + z^2)\beta'\phi' \quad (\text{A11})$$


---

Ahora bien, usando las ecuaciones A1, con el fin de expresar la deformación en términos de las coordenadas de la sección transversal  $\eta$  y  $\zeta$ , se obtiene:

$$\varepsilon = u' - \eta(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - \zeta(-v'' \sin \beta + w'' \cos \beta) + (\eta^2 + \zeta^2)\beta' \phi' \quad (\text{A12})$$

Ahora, es conveniente eliminar la componente  $u'$ , mediante el uso de la condición de que la integral, sobre la sección transversal, del esfuerzo longitudinal debe ser igual a la tensión total. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T &= E \int_{\eta e^{-t/2}}^{\eta e^{t/2}} \int_{\zeta e^{-t/2}}^{\zeta e^{t/2}} \varepsilon d\zeta d\eta \\ &= E \int_{\eta e^{-t/2}}^{\eta e^{t/2}} \int_{\zeta e^{-t/2}}^{\zeta e^{t/2}} [u' - \eta(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - \zeta(-v'' \sin \beta + w'' \cos \beta) + (\eta^2 + \zeta^2)\beta' \phi'] d\zeta d\eta \quad (\text{A13}) \end{aligned}$$

ó

$$T = E [Au' - Ae_A(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) + Ak_A^2 \beta' \phi'] \quad (\text{14})$$

Esta ecuación arroja:

$$u' = \frac{T}{EA} + e_A(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) + k_A^2 \beta' \phi' \quad (\text{A15})$$

Sí  $T/EA$  es renombrada como la deformación tensil  $\varepsilon_T$ , entonces la ecuación A15 combinada con la ecuación A12 arroja:

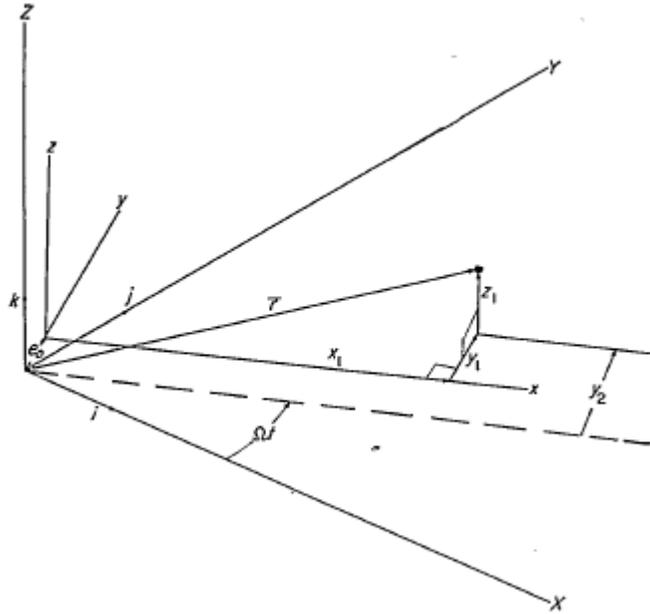
$$\varepsilon = \varepsilon_T + (e_A - \eta)(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) + \zeta(v'' \sin \beta - w'' \cos \beta) + (\eta^2 + \zeta^2 - k_A^2)\beta' \phi' \quad (\text{A16})$$

Que es la expresión completa para la deformación de cualquier fibra sobre la sección transversal.

---

ANEXO B  
DERIVACIÓN DE LAS CARGAS INERCIALES Y  
ACELERACIONES.

Lo primero que se debe hacer es establecer el sistema de coordenadas fijo X,Y, y Z, como se muestra en la figura. La figura también muestra el sistema giratorio  $x,y,z$ , así como la posición deformada de la fibra  $x_1, y_1, z_1$ . La posición azimutal del sistema rotatorio relativo a los ejes fijos está denotada por  $\Omega$ .



En términos de vectores unitarios  $i, j, k$ , el vector  $r$  es:

$$r = (x_1 \cos \Omega t - y_2 \sin \Omega t)i + (x_1 \sin \Omega t + y_2 \cos \Omega t)j + z_1 k \quad (B1)$$

Diferenciando 2 veces respecto al tiempo para obtener la velocidad y aceleración, respectivamente, se obtiene:

$$\dot{r} = (\dot{x}_1 \cos \Omega t - \Omega x_1 \sin \Omega t - \dot{y}_2 \sin \Omega t - \Omega y_2 \cos \Omega t)i + (\dot{x}_1 \sin \Omega t + \Omega x_1 \cos \Omega t + \dot{y}_2 \cos \Omega t - \Omega y_2 \sin \Omega t)j + \dot{z}_1 k \quad (B2)$$

$$\ddot{r} = [(\ddot{x}_1 - \Omega \dot{y}_2) \cos \Omega t - \Omega(\dot{x}_1 - \Omega y_2) \sin \Omega t - (\ddot{y}_2 + \Omega \dot{x}_1) \sin \Omega t - \Omega(\dot{y}_2 + \Omega x_1) \cos \Omega t]i + [(\ddot{x}_1 - \Omega \dot{y}_2) \sin \Omega t + \Omega(\dot{x}_1 - \Omega y_2) \cos \Omega t + (\ddot{y}_2 + \Omega \dot{x}_1) \cos \Omega t - \Omega(\dot{y}_2 + \Omega x_1) \sin \Omega t]j + \ddot{z}_1 k \quad (B3)$$

Ahora, es posible encontrar las componentes  $a_x, a_y, a_z$ , en las respectivas direcciones haciendo  $t=0$ , por lo que:

$$\ddot{r} = (\ddot{x}_1 - \Omega^2 x_1 - 2\Omega \dot{y}_2)i + (\ddot{y}_2 - \Omega^2 y_2 + 2\Omega \dot{x}_1)j + \ddot{z}_1 k = a_x i + a_y j + a_z k \quad (B4)$$

Lo siguiente es retomar las ecuaciones A3 del apéndice A, con el fin de obtener su variación respecto al tiempo, y tomando en cuenta que  $y_2 = y_1 + e_0$ , se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{u} - v' y - w' z \\ \dot{y}_2 &= \dot{v} - z\dot{\phi} \\ \dot{z}_1 &= \dot{w} + y\dot{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (B5)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{u} - v' y - w' z \\ \ddot{y}_2 &= \ddot{v} - z\ddot{\phi} \\ \ddot{z}_1 &= \ddot{w} + y\ddot{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (B6)$$

Substituyendo todo lo anterior en las ecuaciones B4, se obtienen las aceleraciones deseadas, en cada una de sus componentes.

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \ddot{u} - v' y - w' z - \Omega^2(x + u - v' y - w' z) - 2\Omega(\dot{v} - z\dot{\phi}) \\ a_y &= \ddot{v} - z\ddot{\phi} - \Omega^2(v + y - z\phi + e_0) + 2\Omega(\dot{u} - v' y - w' z) \\ a_z &= \ddot{w} + y\ddot{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (B7)$$

Ahora bien, tomando en cuenta las expresiones A1 para  $y$ ,  $z$ , las aceleraciones de la fibra óptica pueden ser obtenidas en función de las coordenadas  $\zeta$  y  $\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \ddot{u} - \Omega^2(x + u) - 2\Omega v + \eta \left[ -v' \cos \beta - w' \sin \beta + \Omega^2(v' \cos \beta + w' \sin \beta) + 2\Omega\dot{\phi} \sin \beta \right] \\ &+ \zeta \left[ v' \sin \beta - w' \cos \beta + \Omega^2(-v' \sin \beta + w' \cos \beta) + 2\Omega\dot{\phi} \cos \beta \right] \\ a_y &= \ddot{v} - \Omega^2(v + e_0) + 2\Omega^2 \dot{u} + \eta \left[ -\dot{\phi} \sin \beta - \Omega^2(\cos \beta - \phi \sin \beta) + 2\Omega(-v' \cos \beta - w' \sin \beta) \right] \\ &+ \zeta \left[ -\dot{\phi} \cos \beta - \Omega^2(-\sin \beta - \phi \cos \beta) + 2\Omega(v' \sin \beta - w' \cos \beta) \right] \\ a_z &= \ddot{w} + \eta\dot{\phi} \cos \beta - \zeta\dot{\phi} \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (B8)$$

Las cargas de inercia sobre la viga pueden ser obtenidas de estas ecuaciones de aceleraciones, mediante la integración apropiada sobre el área transversal. Las cargas totales o resultantes deseadas para este trabajo son la suma de las cargas inerciales y externas aplicadas, y son dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned}
\bar{p}_x &= - \int_{\eta e^{-t/2}}^{\eta e^{t/2}} \int a_x \rho d\zeta d\eta \\
\bar{p}_y &= L_y - \int_{\eta e^{-t/2}}^{\eta e^{t/2}} \int a_y \rho d\zeta d\eta \\
\bar{p}_z &= L_z - \int_{\eta e^{-t/2}}^{\eta e^{t/2}} \int a_z \rho d\zeta d\eta \\
\bar{q}_x &= M - \int_{\eta e^{-t/2}}^{\eta e^{t/2}} \int [-a_y(z_1 - w) + a_z(y_1 - v)] \rho d\zeta d\eta \\
\bar{q}_y &= - \int_{\eta e^{-t/2}}^{\eta e^{t/2}} \int [-a_x(z_1 - w)] \rho d\zeta d\eta \\
\bar{q}_z &= - \int_{\eta e^{-t/2}}^{\eta e^{t/2}} \int [-a_x(y_1 - v)] \rho d\zeta d\eta
\end{aligned} \right\} \quad (B9)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones B8 para las integraciones anteriores, las cargas anteriores toman la forma:

$$\bar{p}_x = -m[\ddot{u} - \Omega^2(x + u) - 2\Omega\dot{v}] - me[-\dot{v}' \cos \beta - \dot{w}' \sin \beta + \Omega^2(v' \cos \beta + w' \sin \beta) + 2\Omega\dot{\phi} \sin \beta] \quad (B10)$$

$$\bar{p}_y = L_y - m[\dot{v} - \Omega^2(v + e_0) + 2\Omega\dot{u}] - me[-\dot{\phi} \sin \beta - \Omega^2(\cos \beta - \phi \sin \beta) + 2\Omega(-\dot{v}' \cos \beta - \dot{w}' \sin \beta)] \quad (B11)$$

$$\bar{p}_z = L_z - m\dot{w} - me\dot{\phi} \cos \beta \quad (B12)$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_x &= M - \Omega^2 me[(v + e_0) \sin \beta + e_0 \phi \cos \beta] + me(\dot{v} \sin \beta - \dot{w} \cos \beta + 2\Omega\dot{u} \sin \beta) - \Omega^2 m[(k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \sin \beta \cos \beta \\
&+ (k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \phi \cos 2\beta] - \dot{\phi} m k_m^2 - 2\Omega m(k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) v' \cos \beta \sin \beta - 2\Omega m(k_{m_2}^2 \sin^2 \beta - k_{m_1}^2 \cos^2 \beta) w' \quad (B13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_y &= -\Omega^2 me[(x + u) \sin \beta + x \phi \cos \beta] + me(\ddot{u} \sin \beta - 2\Omega\dot{v} \sin \beta) + \Omega^2 m[(k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) v' \sin \beta \cos \beta \\
&+ (k_{m_2}^2 \sin^2 \beta + k_{m_1}^2 \cos^2 \beta) w'] - m(k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \dot{v}' \cos \beta \sin \beta + m(k_{m_2}^2 \sin^2 \beta - k_{m_1}^2 \cos^2 \beta)(2\Omega\dot{\phi} - \dot{w}') \quad (B14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_z &= -\Omega^2 me[(x + u) \cos \beta - x \phi \cos \beta] + me(\ddot{u} \cos \beta - 2\Omega\dot{v} \cos \beta) + \Omega^2 m[(k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) w' \sin \beta \cos \beta \\
&+ (k_{m_2}^2 \cos^2 \beta + k_{m_1}^2 \sin^2 \beta) v'] - m(k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \dot{w}' \cos \beta \sin \beta - m(k_{m_2}^2 \cos^2 \beta + k_{m_1}^2 \sin^2 \beta) v' \\
&+ 2\Omega m(k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \dot{\phi} \sin \beta \cos \beta \quad (B15)
\end{aligned}$$

---

Las ecuaciones B10 a la B15 dan las expresiones generales para las cargas y contienen muchos términos de segundo orden, los cuales pueden ser despreciados para propósitos ingenieriles. En el caso convencional de para una pala de sección transversal constante, es posible asumir que los valores para las ecuaciones anteriores son:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{p}_x &= -T' = m\Omega^2 x \\
 \bar{p}_y &= L_y - m[\dot{v} - \Omega^2(v + e_0)] + me[\dot{\phi} \sin \beta + \Omega^2(\cos \beta - \phi \sin \beta)] \\
 \bar{p}_z &= L_z - m(\dot{w} + e\dot{\phi} \cos \beta) \\
 \bar{q}_x &= M - \Omega^2 me[(v + e_0) \sin \beta + e_0 \phi \cos \beta] + me(\dot{v} \sin \beta - \dot{w} \cos \beta) \\
 &\quad - \Omega^2 m(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)(\sin \beta \cos \beta + \phi \cos 2\beta) - mk_m^2 \dot{\phi} \\
 \bar{q}_y &= -\Omega^2 mex(\sin \beta + \phi \cos \beta) \\
 \bar{q}_z &= -\Omega^2 mex(\cos \beta - \phi \sin \beta)
 \end{aligned} \right\} \quad (B16)$$

donde:

$$k_m^2 = k_{m2}^2 + k_{m1}^2$$