



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA**

UNIDAD CULHUACAN

**“DISEÑO DE UN CONTROLADOR PID POR ANÁLISIS
DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES PARA UN
SISTEMA DE LEVITACION ”**

**T E S I S
Q U E P R E S E N T A L A C.
S A N D R A H E R N A N D E Z G A R A Y
P A R A O B T E N E R E L T Í T U L O D E:
I N G E N I E R O E N C O M U N I C A C I O N E S Y
E L E C T R Ó N I C A**

**ASESORES: M. en C. Omar Jiménez Ramírez
M. en C. Rubén Vázquez Medina**



México, D. F. octubre del 2007



AGRADECIMIENTOS

- ❖ A Dios por darme la fortuna de vivir y conocer las cosas maravillosas de la vida.
- ❖ A mis padres Juana y Mateo por enseñarme a disfrutar la vida y los buenos valores.
- ❖ A mis hermanos Adriana, Eduardo y Héctor por estar a mi lado cuando más lo requería y regalarme un poco de su sabiduría.
- ❖ A mis sobrinos Alfonso, Fernando, Eduardo Mario, Armando, Guillermo y Axel por formar parte mi familia y darme una razón más para seguir adelante y darles lo poco o mucho de mis experiencias.
- ❖ A Leticia, Susana e Ismael por acompañarme en esta aventura.
- ❖ Al profesor Omar por ser mi formador en la Ingeniería además de brindarme su amistad.
- ❖ A Oscar por regalarme su amor y estar a mi lado sin ninguna condición en los momentos buenos y malos.
- ❖ A Gema, Marcelo, Claudia por mostrarme que en la vida hay personas de buen corazón.
- ❖ A mis grandes amigos Marco, David, Jessica, Cesar, Francisco, Ñonthe, Saúl, Sergio, Norberto y todos aquellos que formaron parte del mejor grupo el XC3M, por enseñarme la amistad y el compañerismo que solo ellos me brindan.
- ❖ A mis amigos de la infancia Juan, Oswaldo, Gersaint, Daniel, Hugo, Eduardo (el guapo del chuby), por estar a mi lado y disfrutar los buenos conciertos y anécdotas.
- ❖ Al Instituto Politécnico Nacional por ser mi Alma Mater y darme la formación que se requiere en mi país.

*“La ley del Señor es perfecta del todo
Y reconforta el alma;
Inmutables son las palabras del Señor
Y hacen sabio al sencillo”*

Del salmo 18

“El rock es libertad pero al mismo tiempo creatividad”

LA MOSCA

Para ustedes con todo mi corazón

ATENTAMENTE
Sandra Hernández Garay





OBJETIVO GENERAL

En este trabajo se tiene como objetivo generar y diseñar un controlador del tipo PID en base al proyecto PIFI con título “*Comparación de diferentes compensadores analógicos para controlar un sistema de levitación magnética*” y clave dada por CGPI 20061438.

El diseño del controlador se llevó a cabo por medio de una herramienta de análisis como es el Lugar Geométrico de las Raíces, el cual muestra el comportamiento del sistema gráficamente.

El controlador PID nos ayudara a controlar un sistema de levitación magnética el cual hace levitar una esfera metálica, además de que es importante documentar este tipo de proyectos pues no existe gran cantidad de información acerca estos.





JUSTIFICACIÓN

Hoy en día los sistemas de levitación magnética juegan un papel importante pues como se ha visto uno de los mas importantes es el de transporte, es decir, existen trenes de levitación magnética, con esto podemos ver lo importante que son en cuanto a la implementación de tecnología y por lo tanto el interés del presente trabajo para poder comprender exactamente como es que funcionan.

Como sabemos un sistema de levitación magnética por si solo es inestable, por tal motivo es necesario proponer mecanismos que nos permitan hacer estable este sistema. Alguno de estos son los compensadores del tipo PI, PD y PID; la razón por la cual son muy interesantes estos tipos de compensadores es el impacto en la industria. Muchas empresas utilizan en sus sistemas de control alguno de estos compensadores debido al fácil acoplamiento que estos compensadores tienen, además de que si la tecnología avanza los compensadores lo hacen de igual manera adaptándose a las necesidades requeridas en el momento y también por lo fácil que es encontrar componentes para construirlos.

Es por esto que se desea diseñar un compensador PID, para controlar el sistema de levitación, ya que este tipo de compensador nos permite eliminar el error en estado estacionario y hacer estable el sistema, además de la facilidad de construcción. El método de diseño para este tipo de compensador es el Lugar Geométrico de las Raíces debido a la flexibilidad para obtener información del comportamiento de un sistema de control en el tiempo.

No obstante es necesario recordar que este trabajo fue retomado del proyecto PIFI con título *“Comparación de diferentes compensadores analógicos para controlar un sistema de levitación magnética”* con clave dada por CGPI 20061438.



ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	I
Definición del problema	II
Justificación	III
Objetivo general	IV
Organización de la tesis	V
Índice general	VI
Índice de figuras	VIII
Capítulo I. Marco Teórico	
1.1 Fundamentos de la levitación magnética	1
1.1.1 Levitación magnética	3
1.1.2 Aplicaciones de la levitación magnética	4
1.1.3 Tipos de levitación magnética	4
1.2 Sistemas de control	6
1.2.1 Sistemas de control en lazo abierto y cerrado	6
1.2.2 Elementos básicos de un sistema en lazo abierto	6
1.2.3 Elementos básicos de un sistema en lazo cerrado	7
1.2.4 Tipos de controladores	8
Capítulo II. Modelado del sistema de levitación	
2.1 Resumen	11
2.2 Descripción del sistema de levitación	12
2.3 Subsistema de inducción magnética.	13
2.4 Subsistema de medición.	22
2.5 Subsistema de potencia.	24
2.6 Modelo matemático del sistema	25





Capítulo III. Diseño del controlador PID por el método del Lugar Geométrico de las raíces

3.1	Resumen	31
3.2	Respuesta de sistemas de segundo orden	31
3.3	Tipos de sistemas	35
3.4	Error en estado estacionario	35
3.5	El lugar geométrico de las raíces	39
	3.5.1 Condición de ángulo y magnitud	39
	3.5.2 Reglas de construcción del Lugar Geométrico de las Raíces	40
3.6	Diseño de controladores por análisis del Lugar Geométrico de las Raíces	45
	3.6.1 Diseño de un controlador PD	45
	3.6.2 Diseño de un controlador PI	50
	3.6.3 Diseño de un controlador PID	54

Capítulo IV. Construcción del controlador PID electrónico

4.1	Resumen	59
4.2	Realización del controlador PID	59
4.3	Resultados prácticos	64

Conclusiones y Perspectivas. 69

Apéndice A Análisis matemático

A.1	Resumen	71
A.2	Obtención de la función de transferencia	71

Apéndice B Hojas de especificaciones 79

Bibliografía 86

Unidades 88





ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	La tierra como un gigantesco imán	2
1.2	Subsistemas en un sistema de control en lazo abierto	6
1.3	Subsistemas en un sistema de control en lazo cerrado	7
2.1.	Esquema del sistema de levitación magnética	12
2.2	Subsistema de inducción magnética	18
2.3.	Gráfica experimental del comportamiento de la inductancia de la bobina en función de la separación con la esfera metálica	20
2.4.	Comparación de la gráfica experimental y la aproximación para los resultados del experimento 1	21
2.5	Circuito electrónico del sistema de medición.	22
2.6.	Gráfica experimental del comportamiento del sensor al variar la posición de la esfera metálica	23
2.7	Circuito electrónico del sistema de potencia (actuador)	24
2.8	Diagrama a bloques del sistema de levitación a lazo abierto	28
2.9	Respuesta al escalón del sistema de levitación a lazo abierto	29
2.10	Respuesta al escalón del sistema de levitación a lazo cerrado	30
3.1	Posición de los polos en el plano 's' para un sistema subamortiguado	33
3.2	Posición de los polos en el plano 's' para un sistema de amortiguamiento crítico	33
3.3	Posición de los polos en el plano 's' para un sistema sobreamortiguado	34
3.4	Respuesta de un sistema de segundo orden.	34
3.5	Sistema de control.	36
3.6	Lugar de las raíces para el sistema simulado	44
3.7	Diagrama a bloques del sistema de levitación magnética con un controlador PD	46
3.8	Determinación del cero del controlador PD	48
3.9	Lugar Geométrico de la raíces usando un controlador PD	49
3.10	Respuesta del sistema de levitación con el controlador PD	50
3.11	Diagrama a bloques del sistema de levitación con un controlador PI	51
3.12	Determinación del cero y el polo del controlador PI	52
3.13	Lugar Geométrico de la raíces usando un controlador PI.	53
3.14	Respuesta del sistema controlado con un PI	54





3.15 Diagrama a bloques del sistema de levitación con un controlador PID	55
3.16 Determinación de los dos polos y ceros del controlador PID	56
3.17 Lugar Geométrico de la raíces usando un controlador PID	57
3.18 Respuesta del sistema con un controlador PID	58
4.1 Diagrama a bloques de un sistema de levitación magnética	60
4.2 Circuito PID con amplificadores operacionales en cascada	60
4.3 Respuesta del sistema con el compensador PID simulado	63
4.4 Respuesta del sistema controlado	64
4.5 Señal de error en el sistema	65
4.6 Sistema de levitación práctico	65
4.7 Respuesta del sistema con el compensador PID simulado con un tiempo de establecimiento de 1s	67
4.7 Respuesta del sistema con el compensador PID con un tiempo de establecimiento de 1s.	67





ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

En el Capítulo I se presentan los fundamentos de la levitación magnética, así como sus aplicaciones como es el caso de los trenes de levitación magnética. Además se hace una pequeña reseña de los sistemas de control y los tipos de controladores que existen hoy en día.

Para el Capítulo II se describe el sistema de levitación magnética con cada uno de sus componentes como lo es el sistema de inducción magnética, medición y potencia, además se obtiene el modelo matemático del sistema y la función de transferencia del mismo.

El Capítulo III presenta el análisis del sistema por medio del Lugar Geométrico de las Raíces a lazo abierto, teniendo en cuenta el comportamiento del sistema de levitación se procede a diseñar tres tipos de controladores con sus respectivas simulaciones a lazo cerrado, analizando cual es el que permite llevar a cabo la levitación de la esfera metálica de forma adecuada.

La realización del circuito electrónico del controlador se lleva a cabo en el Capítulo IV, mostrando los resultados prácticos de la levitación del sistema, mediante las mediciones con el osciloscopio.

Por último se dan a conocer las conclusiones y perspectivas del trabajo realizado.

En el Apéndice A se muestra el análisis detallado de la obtención de la función de transferencia del sistema de levitación.

Se presentan las hojas de especificaciones en el Apéndice B de los circuitos integrados utilizados para la construcción del sistema de levitación magnética.

Finalmente se da a conocer la bibliografía consultada durante la elaboración del trabajo.





DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Una de las aplicaciones de la levitación magnética hoy en día es el transporte, pues existen trenes de levitación magnética en Japón. Esta tecnología aún no ha sido implementada en México por esta razón es necesario conocer como es que funciona este tipo de sistema y así en un futuro este tipo de transporte pueda ser implementado para usuarios en México. Utilizando la tecnología adecuada para su buen funcionamiento.

Además de que es necesaria buena documentación para la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica, pues se trata de un caso con aplicación y así los alumnos se interesarán más acerca de proyectos para mejoras dirigidas a la población.





CAPÍTULO I

MARCO TEÓRICO

1.1 FUNDAMENTOS DE LA LEVITACIÓN MAGNÉTICA

Uno de los hallazgos mas importantes en la vida del hombre data desde la antigüedad para ser mas exactos en la época de los griegos al ser encontradas piedras magnéticas en la ciudad de Magnesia ubicada en Asia Menor este hallazgo marca la pauta para que el hombre comience a notar las cualidades que las piedras ofrecían y así adentrarse en la tecnología y adoptarla en su vida cotidiana.

Las primeras aplicaciones de estas piedras fue la de orientar a un hombre en tierra firme este hombre es Huang Ti (siglo IV a.C.) [1]. Durante el siglo X los navegantes chinos ocuparon lo que conocemos como brújulas magnéticas para orientarse en altamar. Es necesario resaltar que los primeros en estudiar las cualidades de los imanes fue Tales de Mileto y Platón cada uno haciendo sus propias observaciones descubrieron los efectos magnéticos que los imanes tienen, pero la persona que se dedico a darle explicación a este tipo de fenómenos fue Empedocles (siglo V a.C.)





Se sabe que los imanes se rigen por dos grandes leyes que son la atracción y la repulsión, así como los polos magnéticos, esto fue definido por el científico Pierre Pelerin de Malicourt en el siglo XII.

Otra aportación muy significativa en nuestros días es la hecha por William Gilbert quien nombro a la tierra como un gigantesco imán en su gran libro De Magnete este personaje tan singular trata con sus múltiples experimentos de demostrar que la tierra se comporta como si tuviera un gran imán enterrado, teniendo las mismas cualidades que las de un imán; esto es, dos polos un norte y un sur como se muestra en la Figura 1.1.

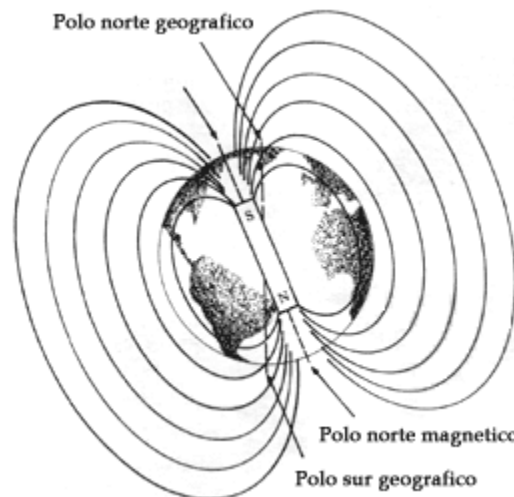


Figura 1.1 La tierra como un gigantesco imán.

Quienes tuvieron también grandes aportaciones a la ciencia fueron Michael Faraday quien descubrió que se necesita de un campo magnético para crear una corriente eléctrica este descubrimiento se hizo mediante un experimento que realizo enrollando un alambre conductor encima de un núcleo de madera y conectándolo a un galvanómetro después enrolló un segundo alambre conductor encima del primero y este lo conecto a una batería se dio cuenta que al cerrar el circuito por medio de un switch la aguja del galvanómetro se movía un poco, regresando a su estado normal después al volver a abrir el circuito la aguja volvía a moverse un poco hacia el lado contrario, con esto pudo concluir que existen corrientes eléctricas solo cuando hay un cambio en el efecto magnético.

Oesrted por el contrario se dedico a demostrar que debe existir un campo magnético para generar una corriente eléctrica que es lo que hoy se conoce como el principio de la inducción de la corriente eléctrica, este descubrimiento se llevo a cabo haciendo un experimento con una aguja de compás montada sobre una peana de madera y un hilo cuando este hilo era conectado a la corriente eléctrica la guja se movía. Obteniendo así con



ambos resultados los principios de funcionamiento del motor eléctrico y los generadores de corriente.

Ampere retomo lo estudiado por Oersted utilizando dos hilos, obteniendo como resultado que las corrientes que circulan en el mismo sentido se atraen y las que circulan en sentidos opuestos se repelen.

Una de las más grandiosas aplicaciones de lo descubierto por Oersted es la del teléfono y el telégrafo; estos dos aparatos en principio se activaban gracias a baterías.

Con lo anterior los experimentos y descubrimientos hechos por todos estos grandes personajes hoy en día la inducción electromagnética es el precursor para grandes aplicaciones como son el motor eléctrico y el dinamo.

1.1.1 LEVITACIÓN MAGNETICA

La levitación es la fuerza que se le aplica a un cuerpo con la finalidad de que este quede suspendido en el aire, esta fuerza es aplicada por un campo electromagnético.

Algunos de nosotros talvez alguna vez ha hecho el experimento de poner un imán encima del otro dándonos cuenta que con la acción de repulsión, pareciera que lo podemos mantener flotando, pero al final termina por caerse o por pegarse al otro imán este fenómeno fue descrito por Earnshawen en 1842, Earnshawen en su teorema explica que ningún cuerpo puede mantenerse en equilibrio por fuerzas eléctricas y gravitatorias estáticas [2]. Una explicación para este teorema se hace mediante el experimento de intentar sostener una varilla verticalmente sobre una superficie plana y darnos cuenta que la varilla termina por caer ahora bien si en lugar de la superficie plana usamos como apoyo nuestra propia palma de la mano, se percibe que es mas probable mantener esta en posición vertical ya que podemos mover la palma hacia donde la varilla se incline, es decir aplicamos una fuerza para poder mantener el equilibrio. Lo mismo pasa si queremos suspender un objeto ferromagnético mediante un electroimán, a este electroimán se le aplica una corriente para así poder controlar la fuerza magnética, esto es si el objeto se acerca demasiado al electroimán es de gran utilidad disminuir la fuerza que es la inducida por la corriente, y al contrario si el objeto se aleja demasiado sería necesario aumentar la corriente.

Lo anterior es un caso análogo para un material magnético, pero también es posible suspender objetos diamagnéticos; este tipo de objetos tienden a alejarse de los campos magnéticos, pero hoy en día se ha





escuchado el caso de que gotas de agua que se pueden suspender o hasta animales tales como las ranas.

1.1.2 APLICACIONES DE LA LEVITACIÓN MAGNÉTICA

La levitación magnética tiene una gran aplicación hecha en Japón en donde se constituyó la idea de un tren levitado magnéticamente llamados los MTS (Magnetically Suspended Transportation System o más conocida como Maglev).

Cabe mencionar que este tipo de trenes utilizan lo que se llama el efecto Meissner el cual nos dice que los materiales superconductores tienden a rechazar el campo magnético que intenta penetrar en ellos.

Al examinar los trenes a grandes rasgos se encuentran imanes que están a los lados de las guías. También hay imanes a los lados de los vagones del tren. Los imanes se colocan de manera que unos empujen y otros tiren al mismo tiempo.

Así, las fuerzas magnéticas levantan el tren del suelo. Lo mantienen en el centro de la guía y lo mueven hacia adelante.

Las razones para la elección de este sistema de transporte son las siguientes:

- Debido a la falta de rozamientos, la velocidad máxima teórica que puede alcanzar es muy superior a la de un tren convencional.
- Es un tren muy seguro, pues sus características constructivas hacen imposible el descarrilamiento.
- Como no existe contacto entre las partes móviles, éstas apenas se desgastan. Todo esto facilita el mantenimiento de los vehículos y la vía.
- Presenta niveles muy bajos de contaminación acústica.
- La única fuerza que limita su avance es la resistencia del aire.

1.1.3 TIPOS DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA

Existen tres tipos de levitación magnética utilizadas por los trenes maglev [2]:

- SUSPENSION ELECTROMAGNETICA (EMS): En este tipo de trenes existe la parte inferior del tren por debajo de una guía de material ferromagnético, cuando se accionan los electroimanes estos generan una fuerza de atracción ya que la guía no puede moverse estos electroimanes se mueven de tal manera que elevan al tren completo, existen sensores en el tren que regulan la corriente en las bobinas y





así el tren puede circular a una distancia de un centímetro de la guía. Permite altas velocidades y genera campos magnéticos poco peligrosos. Tiene un alto coste de producción y explotación. Es necesario recalcar que se utilizan electroimanes por lo tanto no se necesitan costosos sistemas de refrigeración como los imanes superconductores.

- **SUSPENSION ELECTRODINAMICA (EDS):** Una de las características mas importantes en este tipo de levitación es la del efecto Meissner el cual se puede definir como la capacidad de algunos cuerpos para rechazar las líneas de campo que intenten penetrarlos así se encuentra en la parte inferior del vehículo superconductores que pasan por encima de unas bobinas colocadas en el riel al ponerse en marcha el tren, se induce una corriente en las bobinas que actuaran ahora como electroimanes al ponerse en contacto con el superconductor del vehículo estas harán levitar al tren, por lo tanto cuando el tren se encuentre parado la fuerza de levitación será cero. En el tren también existen ruedas de tal manera que la levitación se da con la velocidad, es decir cuando el tren alcanza la velocidad para elevarse las ruedas quedan en el aire ahora bien si la velocidad disminuye lo cual hace que la acción repulsiva disminuya las ruedas vuelven a quedar apoyadas. Los trenes se pueden elevar 15 centímetros pero son muy costosos ya que utilizan imanes superconductores y por lo tanto necesitan de costosos sistemas de refrigeración. Los campos magnéticos generados son altamente perceptibles dentro y fuera del tren, lo cual imposibilita su uso a personas con marcapasos.
- **SUSPENSION CON IMÁNES PERMANENTES (INDUTRAK):** Este sistema es en esencia un EDS solo que este utiliza imanes permanentes con ellos se hace un distribución especial conocida como ordenación Halbach y así poder crear una fuerza de levitación poderosa para hacer funcionar el Maglev. Se trata de un sistema con menores costes de explotación debido a que no necesita corriente para proveer la levitación. El campo magnético permanente garantiza la suspensión en caso de fallo eléctrico. Los trenes deben dotarse de ruedas para proveer la propulsión.

El primer sistema comercial de trenes Maglev existente en el mundo está desarrollado por la compañía alemana Transrapid Internacional.





1.2 SISTEMAS DE CONTROL

La ingeniería de control emplea las leyes matemáticas que gobiernan los sistemas físicos conforme a una serie de especificaciones. Esta disciplina es esencial para el desarrollo y automatización de procesos industriales.

Un sistema de control es una interconexión de componentes que forman una configuración del sistema que proporcionará una respuesta deseada del sistema [3]

1.2.1 SISTEMAS DE CONTROL EN LAZO ABIERTO Y CERRADO.

Existen dos formas básicas de sistemas de control, una es la denominada en *lazo abierto* y la otra en *lazo cerrado* [4]. Con un sistema en lazo abierto la entrada se elige con base en la experiencia que se tiene con dichos sistemas para producir el valor de salida requerido. Esta salida, sin embargo, no se ve modificada por el cambio en las condiciones de operación externas.

Con un sistema de control en lazo cerrado se tiene una señal de realimentación hacia la entrada desde la salida, la cual se utiliza para modificar la entrada de modo que la salida se mantenga constante a pesar de los cambios en las condiciones de operación.

Los sistemas en lazo abierto tiene la ventaja de ser bastante sencillos y en consecuencia de bajo costo, y con buena confiabilidad. Los sistemas en lazo cerrado tienen la ventaja de ser capaces de igualar los valores reales a los requeridos.

1.2.2 ELEMENTOS BÁSICOS DE UN SISTEMA EN LAZO ABIERTO

Se puede considerar que un sistema en lazo abierto consiste en algunos subsistemas básicos arreglados como se muestra en la figura 1.2. Estos elementos pueden ser distintos, equipos separados, pero todas las funciones que cumple cada subsistema se deben preservar. La entrada global al sistema es una señal, que, basada en experiencias anteriores, es probable que conduzca a la salida requerida. Los subsistemas son:

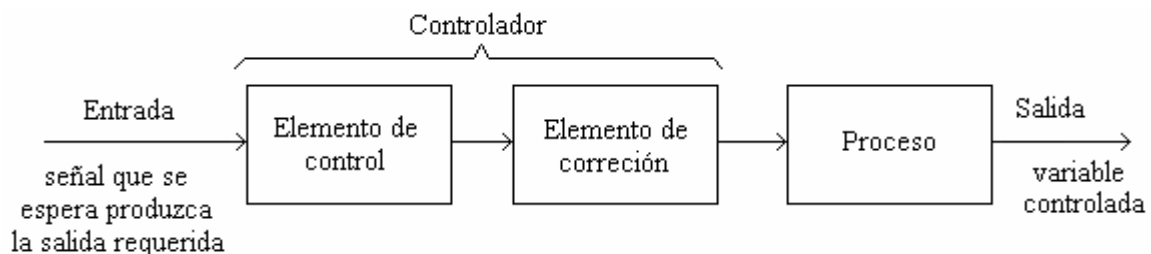


Figura 1.2 Subsistemas en un sistema de control en lazo abierto

- 1 *Elemento de control.* Este elemento determina que acción se va a tomar dada una entrada al sistema de control.
- 2 *Elemento de corrección.* Este elemento responde a la entrada que viene del elemento de control e inicia la acción para producir el cambio en la variable controlada al valor requerido.
- 3 *Proceso.* El proceso o planta es el sistema en el que se va a controlar la variable.

1.2.3 ELEMENTOS BÁSICOS DE UN SISTEMA EN LAZO CERRADO

Se puede considerar que un sistema de lazo cerrado consiste en algunos subsistemas básicos ordenados como se muestra en la figura 1.3. Estos elementos pueden no ser partes distintas o equipos separados, pero todas las funciones de los subsistemas estarán presentes. La entrada global al sistema de control es el valor requerido de la variable, y la salida es el valor real de la variable.

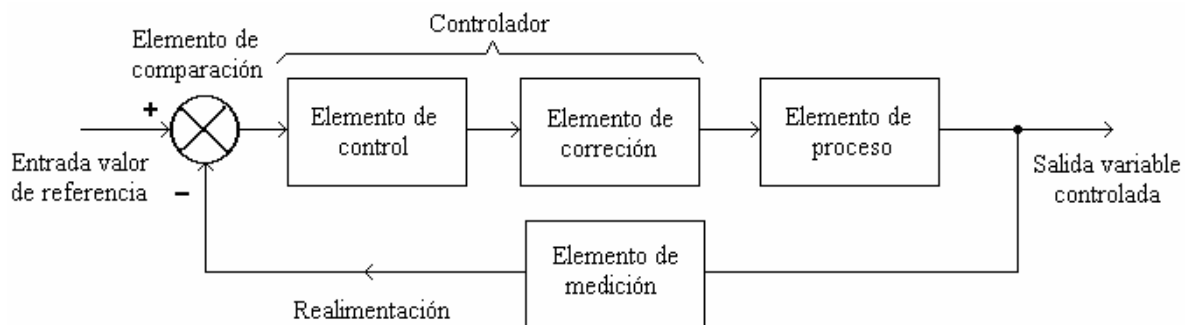


Figura 1.3 Subsistemas en un sistema de control en lazo cerrado

- 1 *Elemento de comparación.* Este elemento compara el valor requerido o de referencia de la variable por controlar con el valor medido de lo que se obtiene a la salida, y produce una señal de error la cual indica la diferencia del valor obtenido a la salida y el valor requerido.

$$\text{Señal de error} = \text{señal del valor de referencia} - \text{señal del valor medio}$$

- 2 *Elemento de control.* Este elemento decide que acción tomar cuando se recibe una señal de error. A menudo se utiliza el término de controlador para un elemento que incorpora el elemento de control y la unidad de corrección.
- 3 *Elemento de corrección.* Este elemento se utiliza para producir un cambio en el proceso al eliminar el error, y con frecuencia se denomina actuador.
- 4 *Elemento de proceso.* El proceso, o planta, es el sistema donde se va a controlar la variable.



- 5 *Elemento de medición.* Este elemento produce una señal relacionada con la condición de la variable controlada, y proporciona la señal de realimentación al elemento de comparación para determinar si hay o no error.

Una característica necesaria de un sistema de control en lazo cerrado es el lazo de realimentación. Este es el medio a través del cual una señal relacionada con la variable real obtenida se realimenta para compararse con la señal de referencia. Se dice que se tiene realimentación negativa cuando la señal realimentada se sustrae del valor de referencia, esto es:

$$\text{Señal de error} = \text{valor de referencia} - \text{señal de realimentación}$$

La realimentación negativa es necesaria para que logre el control. La realimentación positiva se presenta cuando la señal realimentada se adiciona al valor de referencia, esto es:

$$\text{Señal de error} = \text{valor de referencia} + \text{señal de realimentación}$$

1.2.4 TIPOS DE CONTROLADORES

Los avances en el control automático brindan los medios adecuados para lograr el funcionamiento óptimo de los sistemas dinámicos en un punto de operación esperado [5]. Resulta muy conveniente que los ingenieros posean un amplio conocimiento de esta materia.

En el análisis y diseño de cualquier sistema de control, uno de los puntos más importantes a considerar, es definir la forma en como la planta se deberá controlar.

En un sistema de control de lazo cerrado, el controlador compara el valor efectivo de salida de una planta con el valor deseado, determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor mínimo. La forma en que el controlador produce la señal de control recibe el nombre de acción de control.

En Control clásico se han planteado una serie de controladores a los que se clasifica de a cuerdo a la manera en que generan su señal de control de la siguiente forma [6]:

- a) Control proporcional (P)
- b) Control proporcional e integral (PI)
- c) Control proporcional y derivativo (PD)
- d) Control proporcional, integral y derivativo (PID)





- Control Proporcional (P).

El control proporcional no es más que un amplificador de ganancia ajustable. Su objetivo es hacer más rápida la respuesta del sistema y reducir el error de régimen estacionario, lo que se consigue al incrementar la ganancia del controlador. Sin embargo, este incremento en la ganancia puede provocar que el sistema se haga cada vez más oscilatorio.

- Control proporcional-derivativo (PD).

En este tipo de controlador, la parte proporcional (P) ayuda a incrementar la velocidad de respuesta, mientras que la parte derivativa (D) tiene su mayor efecto en los transitorios y hace más amortiguado y estable al sistema. Este tipo de control responde a la velocidad de variación del error actuante y puede producir una corrección significativa antes de que el error actuante se haga excesivo, esto significa que la acción derivativa se anticipa al error actuante, inicia una acción correctiva temprana y tiende a aumentar la estabilidad del sistema.

El control (PD) es un control con alta sensibilidad. Su desventaja radica en que amplifica señales de ruido y puede producir un efecto de saturación en el acondicionador.

Para obtener esta característica derivativa se deriva directamente la señal de error y se le afecta por una constante a la que se denomina constante derivativa.

- Control proporcional-integrativo (PI).

Si la función de transferencia del proceso o sistema a controlar no contiene un integrador $\left(\frac{1}{s}\right)$, ello implicará que exista un error de régimen estacionario en la respuesta a escalón del sistema. Este corrimiento puede ser eliminado si se incluye la acción integrativa. Al aplicar esta acción, se puede dar el caso de que la señal de control $u(t)$ tenga un valor diferente de cero cuando el error $e(t)$ es cero.

Este controlador tiene la desventaja de que puede llegar a causar problemas de inestabilidad.

Para la obtención de este tipo de acción se añade a la parte proporcional el resultado de integrar la señal de error habiendo afectado a ésta por una cierta constante a la que se denomina constante de integración.



- Controlador proporcional-integral-derivativo (PID).

Este controlador incorpora las ventajas que proporcionan cada una de las tres acciones individuales descritas anteriormente.





CAPÍTULO II

SISTEMA DE LEVITACIÓN

2.1 RESUMEN

En este capítulo se tratará la descripción y composición del sistema de levitación propuesto en este trabajo, resaltando las principales funciones de cada subsistema que lo conforma, así mismo se llevan a cabo dos experimentos que nos permiten obtener información acerca del comportamiento de los elementos del sistema y usando la teoría electromagnética se determina la ecuación diferencial que describe su comportamiento en el tiempo y por consiguiente la función de transferencia sobre la que se trabajará en los siguientes capítulos.

Se presentan durante este capítulo los circuitos electrónicos del sensor y el actuador, describiendo las conversiones de voltaje y corriente que realiza cada uno de ellos, resaltando el valor de las ganancias involucradas en cada conversión.



2.2 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE LEVITACIÓN

El sistema de levitación magnético propuesto en este trabajo, se conforma de cuatro subsistemas con tareas específicas cuyo fin es mantener el objeto levitante en suspensión. Dichos subsistemas se relacionan entre ellos como se muestra en la figura 2.1, los cuales se describen brevemente a continuación y en secciones posteriores se analizarán con más detalle.

1. Subsistema de inducción magnética. Esta formado por un electroimán, cuya labor es la de suministrar un campo magnético lo suficientemente intenso para poder vencer la fuerza de gravedad que se ejerce en el objeto levitante debido a su peso y de esta forma mantener un equilibrio de fuerzas, produciendo el fenómeno de la levitación.

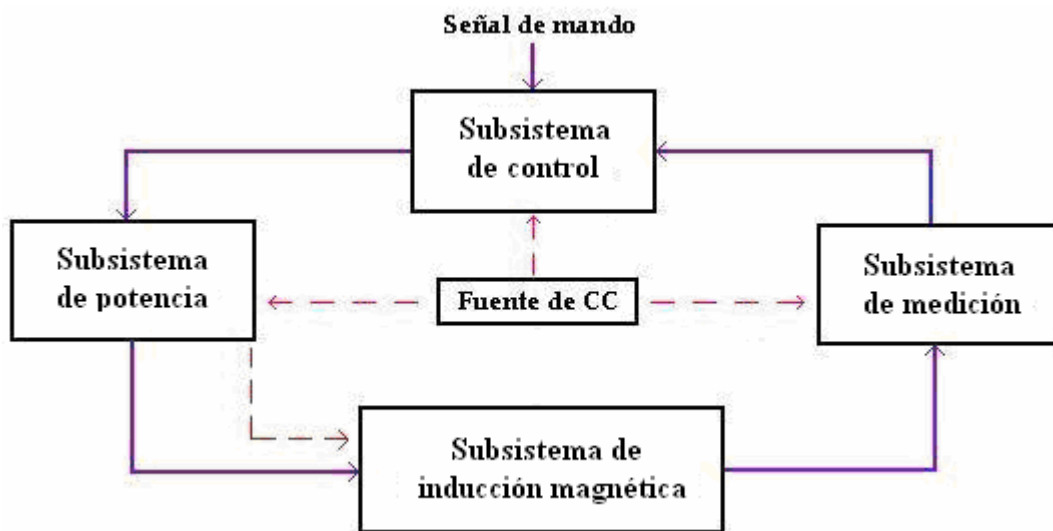


Figura 2.1. Esquema del sistema de levitación magnética.

2. Subsistema de medición. Es la parte encargada de sensar la posición del objeto levitante en su desplazamiento sobre el eje vertical, proporcionando una señal de voltaje que sirve como realimentación en la estructura de control propuesta.
3. Subsistema de potencia. Es la etapa encargada de regular y adecuar la señal proveniente del sistema de control a una señal de corriente con características específicas, la cual circula en el devanado del electroimán y que produce el campo magnético.
4. Subsistema de control. Es el cerebro del sistema, su función es la de generar una señal adecuada (llamada acción de control) que pueda ser interpretada por el sistema de potencia en base a una entrada de referencia y la señal proveniente del sistema de medición. Su construcción se detalla en el capítulo 4.



Las características de la señal de referencia se determinan en base a las mediciones de la posición de la esfera y el valor del voltaje que entrega el fototransistor en función de la luz infrarroja emitida por el LED.

Los valores de voltaje de las fuentes que alimentan cada una de las partes que conforman el sistema de levitación son de $20V/5A$ de CC para el sistema de potencia y el sistema de inducción magnética, con el que se cubre la demanda de corriente de la bobina, proporcionando una tolerancia del 40% como protección a los picos que se puedan presentar al probar el sistema completo. Por otra parte se utiliza un voltaje de $\pm 15V$ de CC para alimentar los amplificadores operacionales del sistema de control y $5V$ de CC para los elementos infrarrojos del sistema de medición.

2.3 SUBSISTEMA DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA

Todos los elementos en la naturaleza reaccionan de alguna forma al ser sometidos a un campo magnético. En muchos de estos, los efectos son tan débiles que a menudo se consideran no magnéticos; sin embargo el vacío es el único medio no magnético.

Para fines prácticos, se puede combinar el conocimiento de la acción de un campo magnético sobre la corriente de un circuito cerrado, con un modelo sencillo de un átomo y vislumbrar la diferencia en comportamiento de varios tipos de materiales en presencia de campos magnéticos.

Aunque resultados cuantitativos exactos sólo pueden predecirse mediante el uso de la teoría cuántica [7], el modelo atómico sencillo, que supone que hay un núcleo central positivo rodeado de electrones en varias órbitas circulares, produce resultados cuantitativos razonables y proporcionan una teoría cualitativa satisfactoria. Un electrón en una órbita es análogo al pequeño circuito cerrado de corriente (en el cual la corriente esta dirigida en dirección opuesta a la dirección de viaje del electrón) y como tal, experimenta un torque en un campo magnético externo, el torque tiende a alinear el campo magnético producido por el electrón orbital con el campo magnético externo. Si no fueran considerados otros momentos magnéticos se concluiría que todos los electrones orbitales en el material cambiarían de tal manera que sumarían su campo magnético al campo aplicado, y entonces el campo magnético resultante en cualquier punto del material sería mayor que el que se tendría si el material no estuviese presente.

Sin embargo, un segundo momento se atribuye al spin del electrón. Aunque resulta tentador, para modelar este fenómeno, considerar al electrón como girando alrededor de su propio eje y generando así un momento dipolar magnético, al hacerlo no se obtienen resultados cuantitativos satisfactorios





de la teoría. En su lugar, es necesario entender las matemáticas de la teoría cuántica relativista para demostrar que un electrón puede tener un momento de spin magnético cercano a $\pm 9 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$, donde los signos indican que el alineamiento puede ser ayudando u oponiéndose al campo magnético externo. En un átomo, con muchos electrones presentes, solo los spines de los electrones pertenecientes a capas que no están completamente llenas contribuirán al momento magnético del átomo.

Una tercera contribución al momento de un átomo es causada por el spin nuclear [8]. Aunque este factor proporciona un efecto despreciable sobre el total de las propiedades magnéticas de los materiales, constituye la base del procedimiento nuclear magnético de imágenes, proporcionado hoy en día por algunos de los más grandes hospitales.

En resumen, cada átomo contiene muchas componentes diferentes de momento y su combinación determina las características magnéticas del material y suministra su clasificación magnética general. Se describirán brevemente seis tipos diferentes de materiales: diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos, antiferromagnéticos, ferromagnéticos y superparamagnéticos.

Considérese primero aquellos átomos en los cuales los campos magnéticos pequeños producidos por el movimiento de los electrones en sus órbitas y aquellos producidos por el spin del electrón se combinan para producir un campo magnético neto cero. Nótese que se está considerando los campos producidos por el movimiento del electrón en sí mismo en ausencia de cualquier campo magnético externo; se puede describir este material como uno en el cual el momento magnético permanente m_0 de cada átomo es cero, tal material es llamado diamagnético. Parecería entonces, que un campo magnético externo no producirá torque sobre el átomo ni el realineamiento de los campos dipolares y consecuentemente el campo magnético interno sería el mismo que el campo aplicado. Con un error de sólo una parte en cien mil, esto es correcto.

Selecciónese un electrón orbital cuyo momento m_1 está en la misma dirección que el campo aplicado B_0 . El campo magnético produce una fuerza hacia afuera sobre el electrón orbital. Puesto que el radio orbital está cuantizado y no se puede cambiar, la fuerza (de Coulomb) interior de atracción tampoco cambia. Por lo tanto, la fuerza desbalanceada creada por la fuerza magnética externa se debe compensar por una reducción de la velocidad orbital. De esta forma, el momento orbital decrece, dando lugar a un campo interno más pequeño. Si se hubiera seleccionado un átomo para el cual m_0 y B_0 son opuestos, la fuerza magnética sería hacia adentro, la velocidad se iría incrementando, el momento orbital también se iría





incrementando y una apreciable cancelación de B_0 ocurriría, por lo que de nuevo resultaría un campo magnético interno más pequeño.

El bismuto metálico muestra un efecto diamagnético mayor que muchos otros materiales diamagnéticos, entre los cuales están el hidrógeno, helio y otros gases inertes, cloruro de sodio, cobre, oro, silicio, germanio, grafito y azufre. Se puede notar que el efecto diamagnético está presente en todos los materiales, puesto que proviene de una interacción del campo magnético externo con cada electrón orbital; sin embargo, se ve enmascarado por otros efectos en los materiales que se considerarán a continuación.

Hagamos referencia a un átomo en el cual los efectos del spin del electrón y del movimiento orbital no se cancelan completamente. El átomo como un todo tiene un pequeño momento magnético, pero la orientación al azar de los átomos en una muestra grande produce un momento magnético promedio de cero. El material no muestra efectos magnéticos en ausencia de un campo exterior. Sin embargo, cuando se aplica un campo externo, existe un pequeño torque en cada momento atómico, y estos momentos tienden a alinearse con el campo magnético externo. Este alineamiento conduce a un aumento del valor de B dentro del material sobre el valor externo. Sin embargo, el efecto diamagnético sigue actuando sobre los electrones orbitantes y puede contrarrestar el incremento antes dicho. Si el resultado neto es una disminución en B , el material sigue llamándose diamagnético. Sin embargo, si hay un incremento en B , el material es llamado paramagnético. El potasio, oxígeno, tungsteno, tierras raras y muchas de sus sales como el cloruro de erbio, óxido de neodimio y óxido de itrio, son ejemplos de sustancias paramagnéticas.

Las cuatro clases restantes de materiales, ferromagnéticos, antiferromagnéticos, ferromagnéticos y superparamagnéticos, tienen intensos momentos atómicos. Además, la interacción de átomos adyacentes causa un alineamiento de los momentos magnéticos de los átomos, en ocasiones sumándose y en otras restándose exactamente.

En materiales ferromagnéticos cada átomo tiene un momento dipolar relativamente grande, causado principalmente por los momentos de spin del electrón no equilibrados. Las fuerzas interatómicas causan que estos momentos se alineen en forma paralela por regiones que contienen un gran número de átomos. Estas regiones llamadas dominios pueden tener una variedad de formas y tamaños que fluctúan desde un micrómetro a varios centímetros, según el tamaño, la forma, el material y la historia magnética de la muestra. Materiales vírgenes ferromagnéticos tendrán dominios en que cada uno tiene un momento magnético intenso; sin embargo, los momentos de los dominios varían de dominio a dominio. El efecto completo es, por consiguiente, de cancelación y el material como un todo no tiene momento magnético. Sin embargo, con la aplicación de un campo magnético externo





aquellos dominios, que tienen momentos en dirección del campo aplicado, aumentan su tamaño a expensas de sus vecinos; el campo magnético interno aumenta grandemente por encima del campo magnético externo. En general cuando se retira el campo externo no se produce un alineamiento azaroso de dominios y un residuo, o remanente de campo dipolar, permanece en la estructura macroscópica. El hecho de que el momento magnético del material sea diferente después de que el campo se ha retirado o que el estado magnético sea función de su historia magnética, se le llama histéresis.

Los materiales ferromagnéticos no son isotrópicos en monocristales y, por lo tanto, se limitará la discusión a materiales policristalinos, excepto para mencionar que una de las características de los materiales magnéticos anisotrópicos es el cambio en dimensión del cristal cuando se aplica un campo magnético sobre él.

Los únicos elementos que son ferromagnéticos a la temperatura ambiente son hierro, níquel y cobalto, y pierden todas sus características ferromagnéticas arriba de una temperatura llamada de Curie, la cual es 1043°K (770°C) para el hierro. A bajas temperaturas, algunas tierras raras, tales como el gadolinio y el disprosio, son ferromagnéticos. También es interesante que algunas aleaciones metálicas no ferromagnéticas sean ferromagnéticas, tales como bismuto-manganeso y cobre-manganeso-estaño.

En materiales antiferromagnéticos, las fuerzas entre átomos adyacentes provoca que los momentos atómicos magnéticos se alineen de manera antiparalela. El momento magnético neto es cero, y los materiales antiferromagnéticos son afectados sólo levemente por la presencia de un campo magnético externo. Este efecto fue descubierto primero en el óxido de manganeso, pero varios cientos de materiales antiferromagnéticos se han identificado desde entonces. El antiferromagnetismo sólo se presenta a temperaturas relativamente bajas, y a menudo muy por debajo de la temperatura ambiente. El efecto no es importante para la ingeniería en el presente.

Las sustancias ferromagnéticas también muestran un alineamiento antiparalelo de momentos atómicos adyacentes, pero los momentos no son iguales. Por lo tanto, se origina una respuesta grande al campo magnético externo, aunque no tan grande como en materiales ferromagnéticos. El grupo más importante de materiales ferromagnéticos son las ferritas, en donde la conductividad es baja, varios órdenes de magnitud menores que la de los semiconductores. El hecho de que estas sustancias tengan resistencia mayor que los materiales ferromagnéticos da por resultado corrientes inducidas mucho menores en el material cuando se aplican campos alternantes, como en el caso de núcleos de transformadores que operan a altas frecuencias. El





ferromagnetismo también desaparece a temperaturas mayores que la temperatura de Curie.

Los materiales súperparamagnéticos están compuestos por un montaje de partículas ferromagnéticas en una matriz no ferromagnética. Aunque existen dominios dentro de las partículas individuales, las paredes de dominio no pueden penetrar el material matriz intermedio a la partícula adyacente. Un ejemplo importante es la cinta magnética usada para grabaciones de audio y video. La tabla 2.1 resume la clasificación de los materiales de acuerdo a sus propiedades magnéticas.

Tipo	Características y ejemplo
No magnético	Vacío
Diamagnético	Débilmente magnético. Momento que se opone al campo aplicado. Es repelido. Ejemplo: Bismuto
Paramagnético	Magnetismo significativo. Atraído por un campo magnético. Ejemplo: Aluminio
Ferromagnético	Fuertemente magnético (momentos magnéticos alineados). Atraído por un campo magnético. Ejemplo: Hierro, níquel y cobalto.
Antiferromagnético	No magnético aun en la presencia de un campo. Ejemplo: MnO_2
Ferrimagnético	Menos magnético que los materiales ferromagnéticos. Ejemplo: Ferrita de hierro
Superparamagnético	Materiales ferromagnéticos suspendidos en una matriz dieléctrica. Usado en cintas de audio y video. No se encuentra en forma natural.

Tabla 2.1 Clasificación magnética de los materiales.

Es importante mencionar que, teniendo como objeto levitante un material paramagnético o un ferromagnético se puede realizar levitación por atracción y para un mejor desempeño, en este trabajo se elige una esfera metálica de hierro (material ferromagnético) con una masa $m = 55 \times 10^{-3} \text{ Kg}$ y un diámetro $D = 2.3 \text{ cm}$, que además, por su constitución física no presenta el fenómeno de histéresis al ser sometida a un campo magnético intenso, lo que significa que al ser retirada de la fuente de campo, desaparece la imantación que poseía, instantáneamente.

Existen varias formas de controlar la intensidad de un campo magnético, una de ellas, y que se utilizará en este trabajo, es usando una bobina como fuente de campo magnético [9], el cual se produce al circular una corriente eléctrica a través de su devanado. La bobina es un cilindro de



material magnético (núcleo), sobre el cual se enrolla una bobina cubierta de barniz que aísla cada una de las vueltas que la forman. La bobina construida a prueba y error para este trabajo esta formada por 600 vueltas de alambre magneto de calibre 12, cuyo núcleo es un cilindro de hierro liso de 5 cm de longitud y un diámetro $\Delta = 1.8\text{cm}$ y que también presenta características ferromagnéticas e insignificante valor de histéresis.

En la referencia [3] se recomienda que los diámetros de la esfera metálica (D') y del núcleo de la bobina (Δ) deben guardar la relación mostrada en la ecuación (2.1) para obtener un desempeño óptimo, estos es, al tener un núcleo mayor se espera una densidad de líneas de fuerza mas distribuida sobre la esfera metálica en la vecindad del centro de la bobina, nulificando movimientos horizontales del objeto levitante que podrían causar las líneas de fuerza presentes en los costados de la bobina.

$$\Delta \leq 0.8D' \tag{2.1}$$

La distribución del campo magnético en la bobina con geometría cilíndrica es prácticamente uniforme lejos de sus extremos, paralelo al eje de la bobina y proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica que recorre la bobina [10], así como el número de espiras. La figura 2.2 muestra los elementos que forman el sistema de levitación, resaltando para esta sección el solenoide y la esfera.

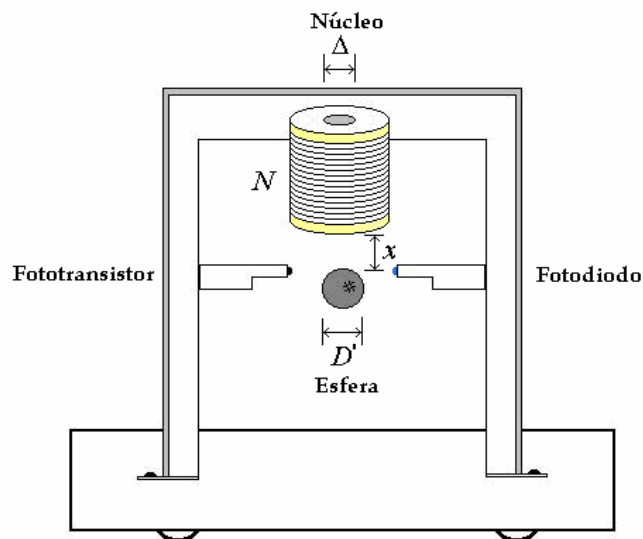


Figura 2.2 Subsistema de inducción magnética.

Se intuye a partir de que la esfera es un material ferromagnético, que el valor de la inductancia de la bobina cambia, al colocar la esfera metálica cerca de ella, ya que se considera como un solo elemento fuente de campo magnético, por lo que la inductancia de la bobina puede ser representada por una expresión matemática en función de la distancia x , que es la separación



entre la bobina y la esfera metálica. A continuación se da una descripción del proceso de medición, usado para cada experimento en este capítulo.

En todo proceso de medición existen limitaciones dadas por: los instrumentos usados, el método de medición, el observador (u observadores) que realiza la medición e incluso el mismo proceso de medición introduce errores o incertezas.

Decimos que conocemos el valor de una magnitud dada, en la medida en que conocemos sus errores. En la Ingeniería se considera que la medición de una magnitud con un cierto error no significa que se haya cometido una equivocación o que se haya realizado una mala medición. Con la indicación del error de la medición, expresamos en forma cuantitativa y lo más preciso posible, las limitaciones que nuestro proceso de medición introduce en la determinación de la magnitud medida. La precisión de un instrumento o un método de medición está asociada a la sensibilidad o menor variación de la magnitud que se pueda detectar con dicho instrumento o método. La exactitud de un instrumento o método de medición está asociada a la calidad de calibración del mismo [11].

Cuando realizamos una medición intentamos determinar el valor más representativo para la magnitud medida o “el mejor valor”, acotándola en un intervalo cuyos límites están determinados por sus correspondientes errores o incertezas de medición [12].

Para este primer experimento que consiste en medir la inductancia de la bobina en función de la distancia de separación entre la esfera y la misma bobina, se cuenta con un medidor de impedancias y un vernier. El medidor de impedancias es un instrumento digital que nos permite aproximarnos hasta décimas de milihenrys ($10^{-4} H$) en nuestras mediciones de inductancia de la bobina. Por otra parte, se utilizó un vernier para medir la distancia de separación x , el cual sufrió ciertas adecuaciones que nos permitieron hacer las mediciones de distancia, para los dos experimentos, más confiables. Dichas adecuaciones fueron realizadas por el Sr. Antonio Plancarte (Laboratorista de Electrónica en ESIME Culhuacán) que consistieron en fijar el vernier a una base que lo mantuviera vertical y al mismo tiempo paralelo al desplazamiento de la esfera, de tal forma que la soportara y con ayuda de un tornillo de precisión ajustar las distancias a las cuales se hacen las mediciones. El vernier nos permite hacer lecturas con aproximaciones hasta décimas de milímetro ($10^{-4} m$) para la distancia x .

En ciencias e ingeniería, el concepto de error tiene un significado diferente del uso habitual de este término. Coloquialmente, es usual el empleo del término error como análogo o equivalente a equivocación. Para fines experimentales, el error está más bien asociado al concepto de incerteza



en la determinación del resultado de una medición. Más aún, lo que procuramos en toda medición es conocer las cotas (o límites probabilísticos) de estas incertezas. Gráficamente, buscamos establecer un intervalo de confianza $y' - \Delta y \leq y \leq y' + \Delta y$, donde con cierta probabilidad, podamos decir que se encuentra el mejor valor de la magnitud y . Este mejor valor y' es el más representativo de nuestra medición y el semiancho Δy es denominado como incerteza o error absoluto debido a la exactitud con la que se calibra el instrumento usado en la medición. Para el medidor de impedancias $\Delta L = 10^{-4} H$ y para el vernier $\Delta x = 10^{-4} m$.

La figura 2.3 muestra el resultado de las mediciones del comportamiento de la inductancia al variar la distancia de separación x para el primer experimento. Se observa que los resultados de las mediciones no se consideran valores absolutos sino intervalos donde se encuentra el mejor valor de cada punto, respecto a la distancia y la inductancia.

Se deben resaltar dos valores que limitan la variación de la inductancia en un rango definido. El primero de ellos es L_1 , que es la inductancia cuando la esfera metálica se aleja un distancia muy grande (es decir $x \rightarrow \infty$), el cual es un valor mínimo; y la inductancia $L_1 + L_0$, la cual se mide cuando la esfera hace contacto con el núcleo de la bobina (es decir $x \rightarrow 0$) y es un valor máximo como se ve en la figura 2.3.

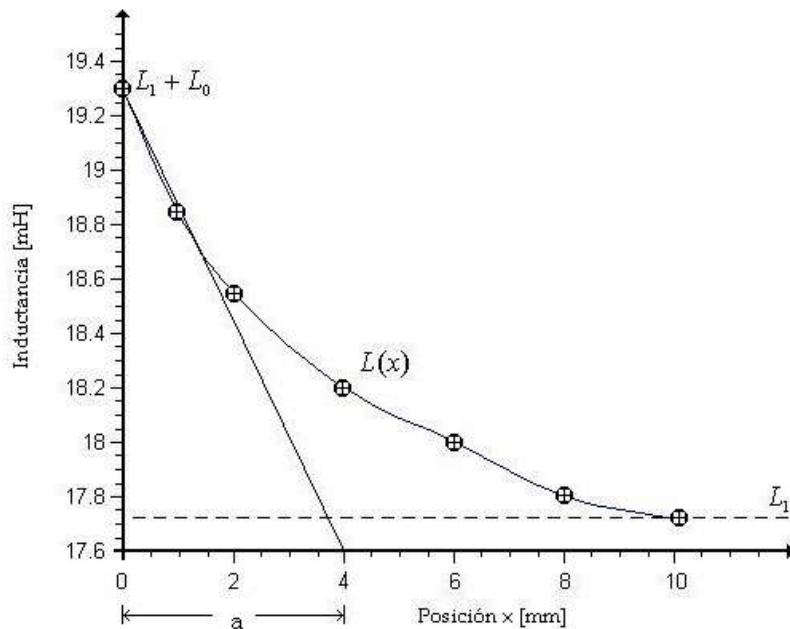


Figura 2.3. Gráfica experimental del comportamiento de la inductancia de la bobina en función de la separación con la esfera metálica.

Con base en las consideraciones hechas sobre el error en las mediciones, se determina que la mejor aproximación al comportamiento de la inductancia entre estos dos extremos y por simplicidad matemática es una función experimental de la forma:

$$L(x) = L_1 + L_0 e^{-\frac{x}{a}} \tag{2.2}$$

Donde el valor a es una distancia conocida como constante de longitud, la cual es análoga al concepto clásico de constante de tiempo en un sistema eléctrico RC [13]. El resultado de las mediciones y de acuerdo a lo mostrado en la figura 2.3, obtenemos que para nuestro sistema en particular $a = 4\text{mm}$, $L_1 = 17.6\text{mH}$ y $L_0 = 1.7\text{mH}$.

Procedemos a realizar una comprobación de la aproximación para el comportamiento de la inductancia al variar la distancia de separación entre la esfera y la bobina, la cual tiene la forma mostrada en la ecuación (2.2). El resultado de la prueba se muestra en la figura 2.4, donde se aprecia que los datos que se obtuvieron de forma experimental y de la figura 2.3 sirvieron para crear una buena aproximación del comportamiento de la inductancia, concluyendo con esto, que la aproximación es lo suficientemente correcta para fines de diseño del sistema de control, en el cual a fin de cuentas recae nuestra mayor atención.

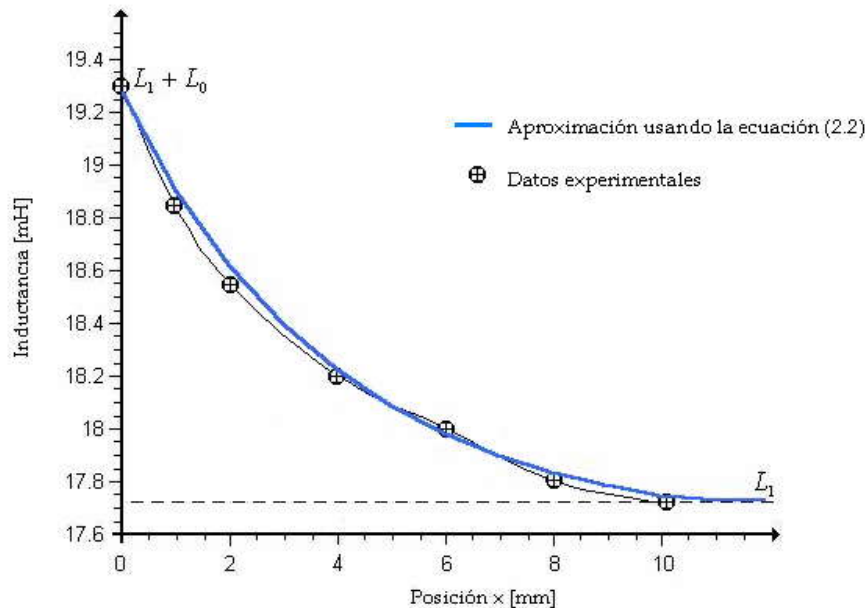


Figura 2.4. Comparación de la gráfica experimental y la aproximación para los resultados del experimento 1.

2.4 SUBSISTEMA DE MEDICIÓN

Para conseguir un buen diseño del sistema de levitación magnética, y en general para cualquier planta a controlar mediante un subsistema de control, se debe garantizar que la posición de la esfera o la variable de salida en cuestión, sea sensada de manera correcta y además que la señal que represente tal medición sea de las mismas características y de dimensiones proporcionales a la señal de referencia del sistema de control, para que exista compatibilidad entre ellas.

Bajo estas condiciones se propone construir un sistema basado en un fotodiodo IR333 (emisor) y un fototransistor PT331 (receptor) como elementos de sensado y un amplificador no inversor (LF353) como elemento de ganancia para proporcionar un valor adecuado a la señal proveniente del fototransistor.

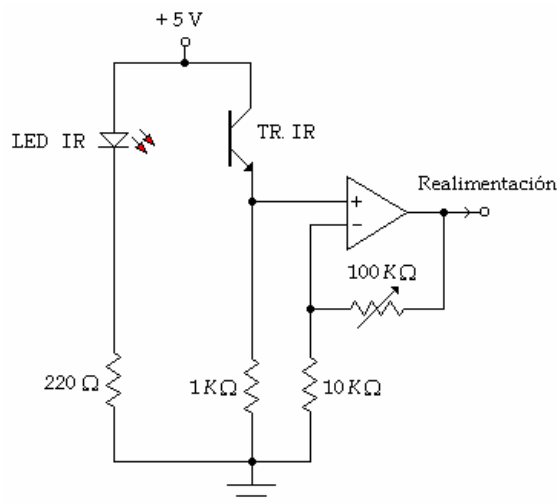


Figura 2.5 Circuito electrónico del sistema de medición.

En la figura 2.5 se muestra el diagrama electrónico del sistema de medición, donde se pueden apreciar los elementos que lo forman. El fotodiodo y el fototransistor se montan en el soporte del sistema de inducción magnética, como se ve en la figura 2.2, de tal forma que se encuentren de frente y a la misma altura con respecto a la base del soporte, para permitir de esta forma tener un rango de medición considerable.

El fotodiodo emite luz infrarroja, de tal forma que el fototransistor detecta esta luz que a su vez producirá un potencial en su base llevándolo a un estado de corte, el cual dependerá de la intensidad de luz que capte este dispositivo. Es decir que en el emisor del fototransistor aparecerá una corriente cuyo comportamiento está en función de la intensidad de la luz captada. Dicha intensidad de luz es máxima cuando no hay algún obstáculo entre los dispositivos infrarrojos y mínima cuando se obstruye el espacio que los separa. Para este sistema el obstáculo lo representa la esfera metálica, la

cual se suspenderá entre los dispositivos de sensado; variando la distancia de separación x y registrando los valores de voltaje que entrega el fototransistor en sus terminales, podemos obtener el comportamiento del sistema de medición. El resultado de las mediciones se muestra en la figura 2.6, con el mismo criterio empleado en el experimento anterior y sabiendo que la incerteza para el voltímetro usado es $\Delta V = 10^{-2} V$.

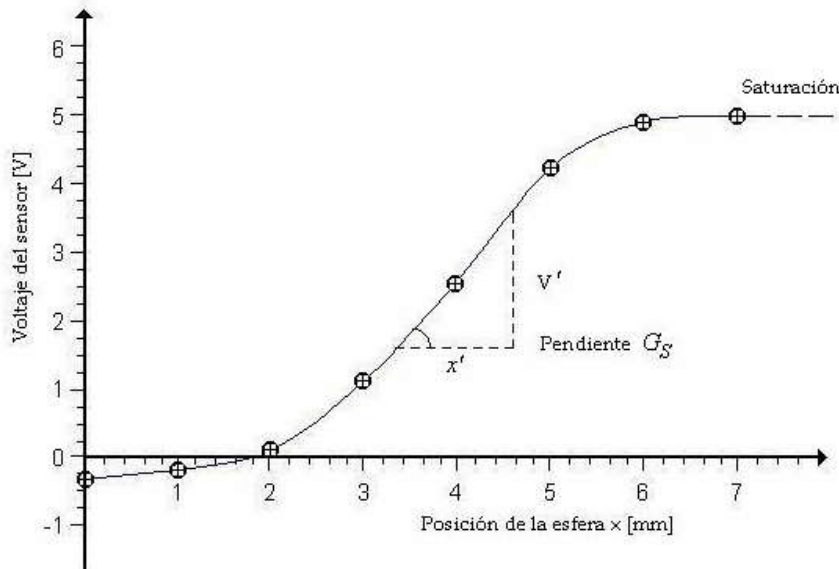


Figura 2.6. Gráfica experimental del comportamiento del sensor al variar la posición de la esfera metálica.

Se aprecia que el comportamiento es irregular en los dos primeros y en los últimos tres puntos de la medición, en cambio en el rango de 2 mm a 5 mm el comportamiento es lineal, por lo que este rango se elige como región de operación para el sistema de levitación, por facilidad en los cálculos. Cabe mencionar que las dimensiones de la señal proveniente del amplificador se ajustaron para que variaran entre los 0V y los 5V como mínimo y máximo respectivamente. Si observamos el comportamiento del sistema de medición en la región de operación, puede ser representado por una línea recta de pendiente, G_s obtenida de la figura 2.6, de la siguiente forma:

$$G_s = \frac{V'}{x'} = \frac{2.305V - 1.11V}{4mm - 3mm} = 1.205 V/mm = 1205 V/m \quad (2.3)$$

Este valor es la ganancia del sistema de medición G_s , la cual es el resultado de todas las adecuaciones hechas a la señal proveniente del fototransistor para que pueda ser compatible con la señal de referencia al sistema de levitación.

2.5 SUBSISTEMA DE POTENCIA

En el diseño de un sistema de control frecuentemente se desea tener un buen controlador para realizar una tarea en específico de la mejor manera. Muchas veces dicho controlador se obtiene a través de las variadas técnicas de Control clásico o moderno, pero el objetivo se alcanza con la ayuda de un buen actuador. Un actuador es un sistema capaz de adecuar la señal proveniente del controlador (acción de control) de manera que pueda manipularse el comportamiento de la planta, proporcionando rapidez y robustez al momento de procesar tal señal.

En los sistemas de control electrónicos los actuadores son circuitos diseñados a base de amplificadores de corriente o de voltaje capaces de soportar las exigencias de planta para llevarla a un estado predefinido con ayuda del controlador. Para nuestro sistema de levitación el sistema de potencia (actuador) es construido a partir de un amplificador de corriente Darlington TIP141, el cual regulará la corriente y el voltaje que circula a través de la bobina. Dicha tarea la realiza con ayuda de un circuito comparador LF353 el cual detecta la variación de corriente en la resistencia de potencia y la señal proveniente del controlador, produciendo una señal que pondrá al amplificador Darlington en corte y saturación, por lo que la bobina será sometida a dos valores de voltaje V_{max} y $0V$. El circuito electrónico del sistema de potencia se muestra en la figura 2.7.

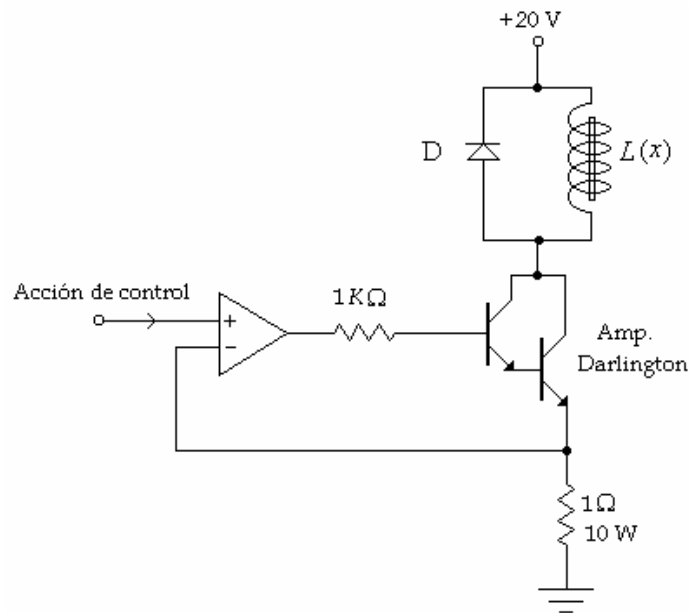


Figura 2.7 Circuito electrónico del sistema de potencia (actuador).

La característica inductiva de la bobina causa que la corriente a través de ella sea básicamente proporcional al voltaje entre sus terminales, por lo que al ser sometida a un voltaje máximo, su corriente aumentará



rápidamente hasta alcanzar un valor máximo. En contraparte, cuando es sometida a un voltaje de 0V, la corriente se descarga a través del diodo D de conmutación rápida 1N4003.

Por lo tanto, el amplificador Darlington actuará en las transiciones de encendido y apagado a frecuencias del orden de los 100Hz, de esta manera es posible controlar el nivel de corriente que circula por la bobina, lo cual se verá reflejado en cambios de intensidad del campo magnético lo que mantendrá la esfera en levitación una vez completado el diseño del sistema.

2.6 MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA

Como ya vimos en el Capítulo I, existen dos principios de levitación magnética: por repulsión y por atracción. Este último es inestable a lazo abierto y la dificultad que presenta este sistema se ve resumida en el teorema de Earnshaw [3], el cual muestra como el sistema es por naturaleza inestable, razón por la cual se requieren configuraciones especiales de campos que se repelen o de controladores actuando sobre la magnitud de la fuerza magnética para producir campos que se atraen.

Para que el sistema sea estable debe existir o debe proponerse una región alrededor de un punto de equilibrio en el cual todas las fuerzas que se generaran apunten hacia él. Cuando se trata de suspender un objeto con campos magnéticos en contra del campo gravitacional se encuentra que esta región no existe, debido a que los dos campos son no divergentes [14].

De acuerdo a la descripción del sistema hecha en las secciones previas, se puede observar que el movimiento de la esfera queda restringido físicamente a la dirección vertical cuyo movimiento es provocado por las fuerzas que actúan sobre la esfera, las cuales son la fuerza magnética ejercida por la bobina y la fuerza gravitacional debida al peso de la esfera; puede notarse además que estas fuerzas son colineales y opuestas. Por tanto, cuando las fuerzas actuantes sobre la esfera tienen la misma magnitud implica que la esfera se encuentra en equilibrio o se encuentra flotando a una determinada posición x .

Con estas consideraciones y analizando la dinámica del sistema en forma fenomenológica, podemos decir que el modelo que rige el comportamiento de la esfera en levitación está dada por la ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - F_m \quad (2.4)$$





donde m es la masa del objeto levitante (esfera), g es la constante de gravedad, F_m es la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la esfera y x es la distancia de separación que existe entre el núcleo de la bobina y el objeto levitante (ver figura 2.2)

Se debe considerar la co-energía magnética que actúa en el objeto levitante, la cual está en función de la distancia de separación x y de la corriente que circula por la bobina i , esto es:

$$W(i, x) = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad (2.5)$$

La fuerza de origen magnético que actúa sobre la esfera, se produce por los cambios que sufre la co-energía magnética al variar la distancia x . Matemáticamente esto es:

$$f = \frac{\partial W(i, x)}{\partial x} = -\frac{L_0}{2a} i^2 e^{-\frac{x}{a}} \quad (2.6)$$

Cuando se llega al equilibrio estático las fuerzas se neutralizan entre ellas, produciendo el estado de levitación en un punto de equilibrio donde la distancia de separación $x = d$ y la corriente $i = I$, produciendo:

$$mg = \frac{L_0}{2a} e^{-\frac{d}{a}} I^2 = \frac{N^2 L_d}{2a} I^2 \quad (2.7)$$

donde N es el número de vueltas de la bobina, L_d es el incremento de la inductancia en la posición $x = d$ debido a cada espira de la bobina. Reordenando la ecuación (2.7) se tiene:

$$I = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{2a mg}{L_d}} = \sqrt{\frac{2a mg}{L_0 e^{-\frac{d}{a}}}} \quad (2.8)$$

Con esta ecuación y con los datos presentados en el desarrollo de este capítulo, se calculó la corriente que circulará a través de la bobina para llevar la esfera a la distancia propuesta cuyo valor es de 2.584; y que además garantiza que la temperatura de la bobina se encuentre en un límite de operación razonable.

Retomando la ecuación (2.6), se observa que la fuerza f es de origen no lineal y en general las ecuaciones dinámicas del sistema de levitación; por



lo que antes de poder aplicar la teoría del Control Clásico (lineal), dichas ecuaciones deben ser linealizadas alrededor del punto de operación $x = d$ e $i = I$ que hemos propuesto. Las ecuaciones linealizadas describen las variaciones del punto de operación y se obtienen utilizando solo los dos primeros términos de la expansión por series de Taylor, los cuales al adecuarse a nuestro caso son:

$$f(i, x) = f(I, d) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{I, d} x + \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{I, d} i \quad (2.9)$$

Sustituyendo la ecuación (2.6) en la (2.9), se obtiene lo siguiente:

$$f = \frac{1}{2a^2} L_0 e^{-\frac{d}{a}} I^2 x - \frac{1}{a} L_0 e^{-\frac{d}{a}} I i \quad (2.10)$$

En equilibrio se da que $mg = f(I, d)$, respaldando la ecuación (2.7), por lo tanto la ecuación diferencial que describe la posición de la esfera en cualquier instante de tiempo, queda expresada como:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{N^2 L_d I^2}{2a^2} x + \frac{N^2 L_d I}{a} i = 0 \quad (2.11)$$

Aplicando transformada de Laplace con condiciones iniciales igual a cero a la ecuación (2.11), para conocer la dinámica del sistema de acuerdo a la ubicación de sus polos, se obtiene la función de transferencia dada por:

$$\frac{X'(s)}{I(s)} = \frac{-\frac{N^2 L_d I}{a}}{ms^2 - \frac{N^2 L_d I^2}{2a^2}} \quad (2.12)$$

Donde $X'(s)$ es la variable de salida y representa la posición de la esfera e $I(s)$ es la variable de entrada y representa la corriente a través de la bobina que produce la fuerza magnética. El signo negativo de la ganancia de la función de transferencia se entiende intuitivamente por el hecho de que es necesario aumentar la corriente en la bobina para reducir la distancia de separación de la esfera con la bobina.

Usando las ecuaciones (2.8) y (2.12), la función de transferencia del sistema puede escribirse también como:



$$\frac{X'(s)}{I(s)} = \frac{-\frac{2g}{I}}{s^2 - \frac{g}{a}} \quad (2.13)$$

Sustituyendo los valores de las constantes I , g y a que se indican en la ecuación (2.13), se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{X'(s)}{I(s)} = \frac{-7.5785}{s^2 - 2452.5} \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) es la función de transferencia de la planta que relaciona la corriente a través de la bobina y la posición de la esfera. Dicha posición es sensada por el sistema de medición, que entrega un voltaje proporcional a la posición de la esfera; además la constante de tiempo del sensor es insignificante en comparación con la dinámica del sistema de levitación, por lo tanto la función de transferencia del sensor, como ya vimos es simplemente una constante y la relación que guarda con respecto a la variable de salida es:

$$X_o(s) = G_s X'(s) \quad (2.15)$$

Para comprender mejor la ecuación (2.15) en la figura 2.8 se muestra la relación del sensor con la planta y el sensor.

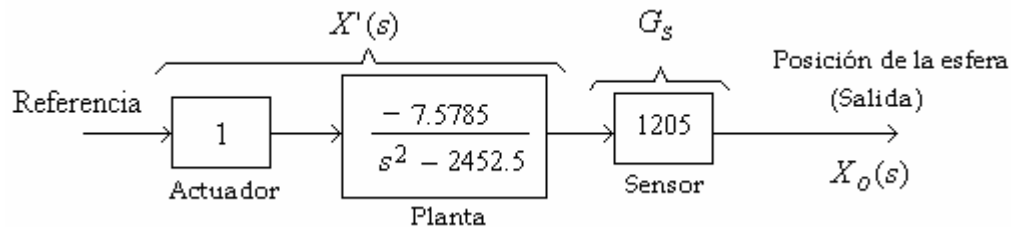


Figura 2.8 Diagrama a bloques del sistema de levitación a lazo abierto.

Donde G_s es la ganancia del sensor en V/m , que en nuestro caso tienen un valor de $1205V/m$. Podemos entonces, relacionar las ecuaciones (2.14) y (2.15) para obtener una nueva función de transferencia donde la distancia de separación x es una señal de voltaje, por lo que:

$$\frac{X_o(s)}{I(s)} = \frac{-9132.09}{s^2 - 2452.5} = \frac{-9132.09}{(s - 49.52)(s + 49.52)} \quad (2.16)$$

Donde X_0 representa la posición de la esfera sobre el eje vertical e $I(s)$ es la corriente eléctrica que circula a través de la bobina.



Haciendo analogía con los sistemas de segundo orden los cuales se analizan en el capítulo 3, obtenemos que el factor de amortiguamiento (ξ) es igual con cero y el valor de la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) es de 49.52rd/s .

Para darnos una idea clara del comportamiento del sistema en ausencia de cualquier controlador se procede a realizar simulaciones con ayuda de la ecuación (2.16) a lazo abierto y lazo cerrado. La primera de ellas se presenta en la figura 2.9.

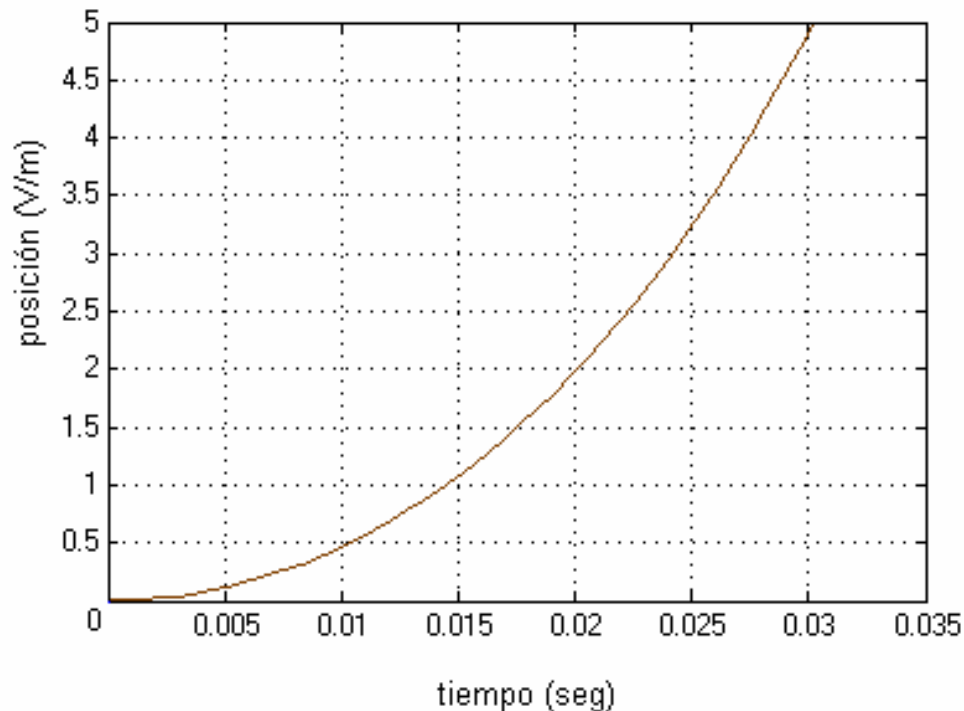


Figura 2.9 Respuesta al escalón del sistema de levitación a lazo abierto.

En la figura 2.9 anterior se aprecia que el sistema responde muy rápidamente y de forma inestable, ya que en menos de un tercio de segundo la posición de la esfera rebasa la escala de medición del sensor, lo que se interpreta que la esfera se desprenderá de la bobina en caída libre, sin que ninguna otra fuerza impida su desplazamiento vertical.

En la figura 2.10 se presenta la simulación del sistema a lazo cerrado con realimentación unitaria, donde se aprecia que el sistema oscila sostenidamente cuando se le suministra una señal escalón unitario a la entrada. Este comportamiento no es práctico ya que difícilmente la posición de la esfera describirá este movimiento con un simple lazo de control. Ambas figuras nos ayudan a definir que las características del sistema en forma natural no nos llevan a un estado de levitación estable, por lo que se deduce



que debe diseñarse un sistema de control que nos permita lograr el estado estable deseado.

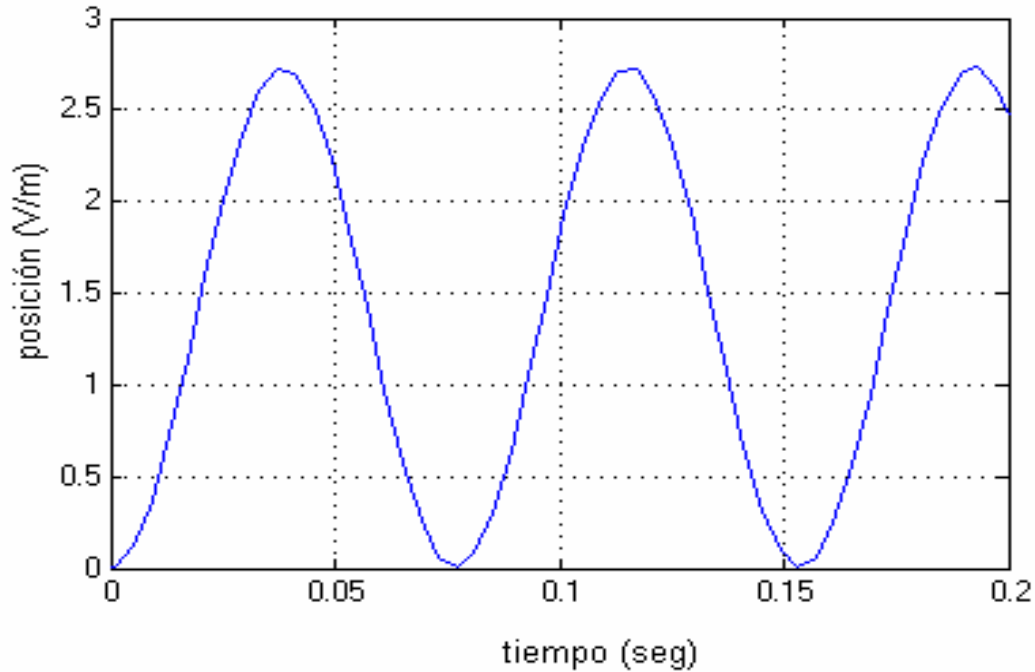


Figura 2.10 Respuesta al escalón del sistema de levitación a lazo cerrado.

Con la obtención de la ecuación (2.16) y las simulaciones presentadas se concluye el objetivo de este capítulo y en los siguientes se realizará el análisis correspondiente para obtener los elementos necesarios para poder diseñar los compensadores que nos permitan estabilizarlo y por consiguiente controlarlo.



CAPÍTULO III

DISEÑO DEL CONTROLADOR PID POR EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

3.1 RESUMEN

En este capítulo se da una breve reseña de la respuesta de los sistemas de segundo orden para poder comprender el comportamiento del sistema de levitación, a continuación se analiza el sistema determinando que tipo de sistema es, así como el error en estado estacionario para una entrada escalón unitario.

Por ultimo se analiza el sistema de levitación por medio del Lugar Geométrico de las Raíces y se diseñan tres tipos de controladores como son el (PI), (PD) y (PID), mostrando en cada caso las simulaciones correspondientes.

3.2 RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

La respuesta en el tiempo de los sistemas de segundo orden, ayudará a comprender cual es el valor de (ξ) mas apropiado para considerar en el diseño del sistema; además es necesario saber como es el





comportamiento del sistema para varios valores de (ξ) al considerar a la entrada un escalón unitario.

La respuesta de los sistemas de segundo orden a una entrada escalón unitario se analiza a continuación.

Podemos citar la función de transferencia de un sistema de segundo orden de la siguiente forma:

$$\frac{X_0(s)}{I(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.1)$$

En donde ω_n es la frecuencia natural no amortiguada y (ξ) la relación de amortiguamiento del sistema.

La dinámica del sistema depende de la ubicación de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado, los cuales están dados por

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (3.2)$$

Se puede describir el comportamiento dinámico de sistemas de segundo orden en términos de dos parámetros ξ y ω_n . Si $0 < \xi < 1$, los polos de lazo cerrado son complejos conjugados y yacen en el semiplano 's' izquierdo. Entonces se dice que el sistema es subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria. Si $\xi = 1$, se dice que el sistema tiene amortiguamiento crítico. Los sistemas sobreamortiguados corresponden a $\xi > 1$. La respuesta transitoria de los sistemas de amortiguamiento crítico y sobreamortiguados, no oscilan. Si $\xi = 0$, la respuesta transitoria no se extingue.

Se han de considerar tres casos distintos para la respuesta de un sistema a una entrada escalón unitario: el subamortiguado ($0 < \xi < 1$), críticamente amortiguado ($\xi = 1$) y sobreamortiguado ($\xi > 1$).

1) Caso subamortiguado ($0 < \xi < 1$): En este caso, los polos de la función de transferencia de lazo cerrado son números complejos conjugados, como se muestra en la figura 3.1. La respuesta a una entrada escalón unitario de un sistema de segundo orden para el caso subamortiguado es la siguiente:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (t \geq 0) \quad (3.3)$$



Donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ se denomina frecuencia natural amortiguada.

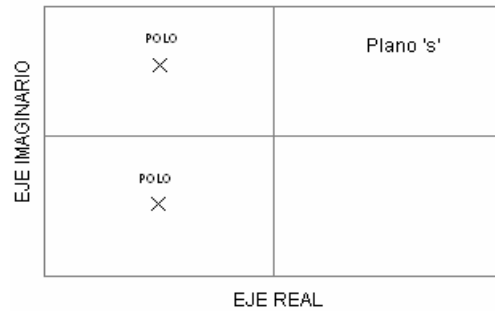


Figura 3.1. Posición de los polos en el plano 's' para un sistema subamortiguado.

Las respuestas subamortiguadas son más rápidas, en su arranque que todas las otras formas de respuesta de segundo orden.

Aún cuando la respuesta parte rápido y llega pronto a su valor final, luego sigue creciendo y oscila con una amplitud que decrece en el tiempo.

El comportamiento oscilatorio es tan pronunciado como pequeño sea el coeficiente de amortiguamiento.

2) Caso de amortiguamiento crítico ($\xi = 1$): En este caso los dos polos de la función de transferencia son iguales como se puede ver en la figura 3.2. La transformada inversa de Laplace para la función de transferencia de un sistema de segundo orden con amortiguamiento crítico puede ser hallada como:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0) \quad (3.4)$$

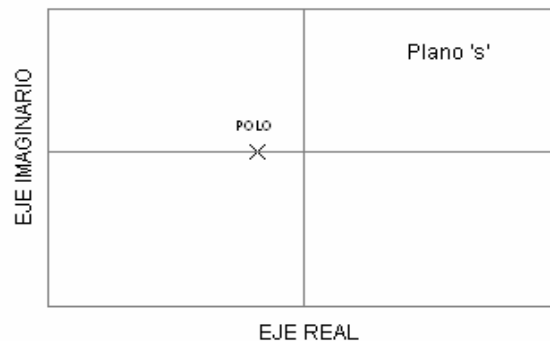


Figura 3.2. Posición de los polos en el plano 's' para un sistema de amortiguamiento crítico.

La respuesta críticamente amortiguada es la más rápida respuesta posible de un sistema de segundo orden que no oscile.

3) Caso sobreamortiguado ($\xi > 1$): En este caso los dos polos de la función de transferencia son negativos reales y distintos como se muestra en la figura 3.3, para una entrada escalón unitario podemos obtener la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia de un sistema de segundo orden cuando es sobreamortiguado de la siguiente manera:

$$c(t) = 1 - e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \quad (t \geq 0) \quad (3.5)$$

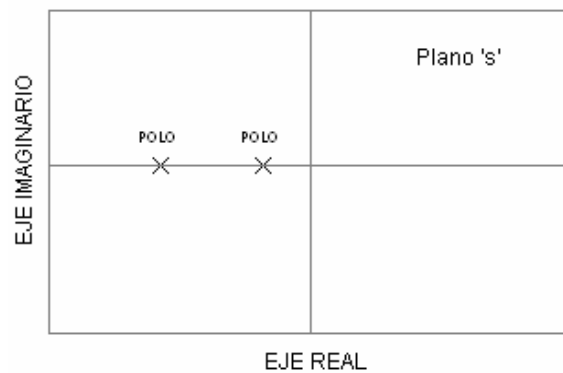


Figura 3.3. Posición de los polos en el plano 's' para un sistema sobreamortiguado.

En la gráfica se observa el comportamiento general, según cambia el coeficiente de amortiguamiento (ξ) figura 3.4.

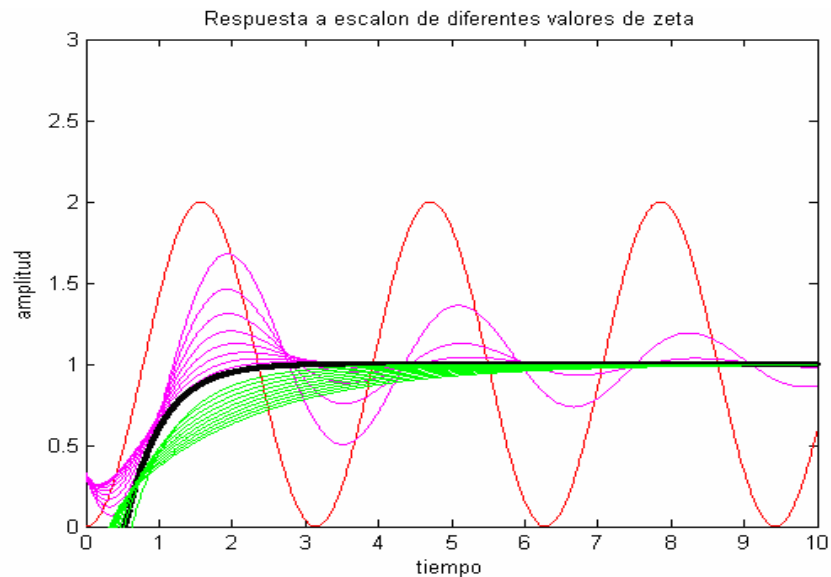


Figura 3.4 Respuesta de un sistema de segundo orden.



3.3 TIPOS DE SISTEMAS

Es necesario adentrarnos en analizar la función de transferencia obtenida en el capítulo anterior la cual nos describe el comportamiento del sistema.

Ahora bien se pueden clasificar los sistemas de control de acuerdo con su capacidad para responder a entradas de tipo escalón, rampa, parabólica, etc. Tomemos en cuenta la función de transferencia de lazo abierto que se presenta a continuación:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} \quad (3.6)$$

Es necesario tomar en cuenta el término s^N en el denominador de la ecuación anterior, el cual nos indica un polo de multiplicidad N en el origen, tomando en cuenta lo anterior se tiene que N da el tipo de sistema es decir, tipo 0 cuando $N=0$, tipo 1 cuando $N=1$ y así sucesivamente. Cuando se aumenta el tipo de sistema mejora la exactitud de este pero al mismo tiempo tendremos una inestabilidad mayor en el mismo.

Teniendo los antecedentes anteriores, la función de transferencia mostrada en la ecuación (2.16) que corresponde al sistema de levitación se puede transcribir de la siguiente forma:

$$\frac{X_0(s)}{I(s)} = - \frac{9132.09}{(s - 49.52)(s + 49.52)} \quad (3.7)$$

Haciendo una comparación de la ecuación (3.7) con la ecuación (3.6) en donde se presenta el término s^N se puede ver que el polo de multiplicidad N es igual a cero por lo tanto nuestro sistema es de tipo cero.

3.4 ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO

El término error en estado estacionario es una definición muy importante pues nos ayudará a entender la Respuesta Transitoria de un sistema a una entrada de referencia escalón unitario. La Respuesta Transitoria es aquella que va desde el estado inicial al estado final.

El error es la diferencia que existe entre la señal de referencia de entrada con respecto a la señal de salida [15], se reduce a un caso en





especifico si hablamos de aplicarle una señal y a la salida obtenemos la señal aplicada pero con alguna diferencia ese es el error.

El error de estado estacionario se define como [5] la diferencia entre la entrada y la salida de un sistema en el límite cuando el tiempo tiende a infinito (es decir cuando la respuesta ha alcanzado el estado estacionario) ecuación (3.8).

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) \quad (3.8)$$

Como se ha visto la función de transferencia de la planta es negativa así que se propone la realimentación positiva como estrategia, para poder obtener la ecuación característica de la siguiente forma:

$$F(s) = 1 - G(s)H(s) = 0 \quad (3.9)$$

Se puede sustituir el valor de la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ por la siguiente connotación $G_p(s)$ con su respectivo signo, en la ecuación anterior, entonces:

$$F(s) = 1 - (-G_p(s)) = 1 + G_p(s) = 0 \quad (3.10)$$

Lo anterior es de suma importancia pues al seguir con el análisis, en siguientes cálculos se podrá omitir el signo de $G_p(s)$ debido a lo aclarado anteriormente.

El error de estado estacionario dependerá del tipo de entrada (escalón, rampa, etc.) y de (tipo del sistema) que el sistema sea del tipo 0, 1, 2, ..., etc. Supongase que se tiene el siguiente sistema:

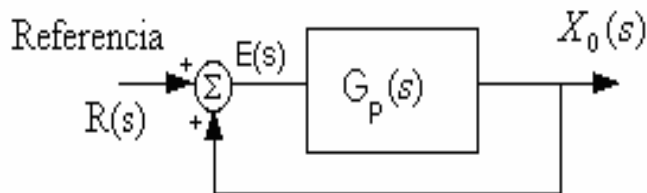


Figura 3.5. Sistema de control.

Se calcula el error de estado estacionario para este sistema cuando la realimentación sea unitaria aplicando el teorema del valor final.

La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema de segundo orden que se muestra en la figura 3.5 será de la siguiente manera:



$$\frac{X_0(s)}{R(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)H(s)} \quad (3.11)$$

Despejando $X_0(s)$ de la ecuación (3.11) obteniendo lo siguiente:

$$X_0(s) = R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.12)$$

Retomando la definición del error en estado estacionario ecuación (3.8) y aplicándolo para el sistema de la figura 3.4 se tiene:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - X_0(s)) \quad (3.13)$$

En el despeje en la ecuación (3.12) se conoce el valor de $X_0(s)$ ahora bien utilizando la ecuación (3.12) en la ecuación (3.13) se tiene que el error en estado estacionario se traduce de la siguiente manera:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[R(s) - \left(R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[R(s) \left(1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right) \right] \quad (3.14)$$

Por simplicidad $H(s)$ será igual con uno es decir $H(s)=1$ así el error en estado estacionario será de la siguiente manera:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.15)$$

Si se refiere de nuevo a las ecuaciones para el cálculo de errores de estado estacionario para sistemas con realimentación unitaria, hallará que se tienen definidas ciertas constantes (conocidas como las constantes estáticas de error). Estas constantes son la constante de posición (K_p), la constante de velocidad (K_v), y la constante de aceleración (K_a). Sabiendo el valor de estas constantes además del tipo del sistema, se predice si el sistema va a tener un error de estado estacionario finito.

Tomando en cuenta el caso del presente trabajo se retoma que el sistema es de tipo 0 por lo tanto ahora, en la tabla 3.1 se muestra la relación del error de estado estacionario con el tipo de sistema 0:





	Entrada escalón	Entrada rampa	Entrada aceleración
SISTEMA TIPO 0	$r(t) = 1$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{1}{2t^2}$
Formula de error de estado estacionario	$\frac{1}{(1 + K_p)}$	$\frac{1}{K_v}$	$\frac{1}{K_a}$
Constante Estática del Error	$K_p = \text{constante}$	$K_v = 0$	$K_a = 0$
Error	$\frac{1}{(1 + K_p)}$	∞	∞

Tabla 3.1 Error en estado estacionario para un sistema de tipo cero.

La entrada que se aplicara es una entrada de tipo escalón unitario ya que representa una posición de la esfera fija, con esto se procede a calcular el error en estado estacionario, en la ecuación (3.15) se sustituyen los valores de la entrada además de que se conoce el valor de $G(s)H(s)$ ecuación (2.16) tendremos:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \left[\frac{1}{1 + \frac{9132.09}{s^2 - 2452.5}} \right] \quad (3.16)$$

Evaluando la ecuación cuando s tiende a cero se obtiene:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{9132.09}{2452.5} \right)} \quad (3.17)$$

Se define el coeficiente de error estático de posición K_p por:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = G(0)H(0) \quad (3.18)$$

Si K_p es valuada cuando s tiende a cero se tiene:

$$K_p = -\frac{9132.09}{2452.5} = -3.7235 \quad (3.19)$$



Se puede reescribir la ecuación (3.13) de error en estado estacionario de la siguiente manera:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3.20)$$

Sustituyendo el valor de K_p en la ecuación (3.20):

$$e_{ss} = \frac{1}{1 - 3.72} = -0.3671 \quad (3.21)$$

El valor negativo nos indica que la señal de salida es mucho mayor que la señal de referencia de entrada un 36.71% este es el error en estado estacionario para el sistema de levitación sin compensación. Lo que indica que un controlador proporcional no será suficiente para eliminar el error en estado estacionario.

3.5 EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES.

La idea básica en el método del Lugar Geométrico de las Raíces, es que los valores de s que hacen la función de transferencia alrededor del lazo igual a -1, deben satisfacer la ecuación característica del sistema [16].

Es necesario mencionar que al realizar el análisis del sistema por medio del Lugar Geométrico de las Raíces este arrojará el valor de la ganancia que ayudará a encontrar los polos de lazo cerrado para el sistema, pues se cambia el valor de la ganancia desde cero hasta infinito.

Este método parte del conocimiento de los polos y ceros de lazo abierto. Como el método es un procedimiento gráfico para hallar las raíces de la ecuación característica, brinda un procedimiento en el cual se visualizan las raíces de cualquier ecuación polinómica que se presente en el estudio de sistemas físicos.

3.5.1 CONDICIÓN DE ÁNGULO Y MAGNITUD

Sea la función de transferencia de un sistema de lazo cerrado siguiente:

$$\frac{X_0(s)}{I(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.22)$$

Obtenemos la ecuación característica de la función de transferencia es decir:





$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.23)$$

$$G(s)H(s) = -1 \quad (3.24)$$

Como $G(s)H(s)$ es una magnitud compleja se pueden obtener las condiciones siguientes:

- CONDICION DE ANGULO

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2\tilde{n} + 1) \quad \text{con } (\tilde{n} = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.25)$$

- CONDICION DE MAGNITUD

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (3.26)$$

Los valores de s que cumplan con las condiciones de ángulo y magnitud son las raíces de la ecuación característica o polos de lazo cerrado. El diagrama de los puntos del plano complejo que satisfacen la condición de ángulo, solamente son el lugar de las raíces.

3.5.2 REGLAS DE CONSTRUCCIÓN DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

Se analiza el sistema por medio del método del Lugar Geométrico de las Raíces y así poder determinar que tipo de respuesta esta entregando el mismo. Se parte de ciertas reglas aplicadas, las cuales se enumeran en forma progresiva.

1) Se obtiene la ecuación característica y se reordena de manera que el parámetro de interés aparezca como factor multiplicador en la forma:

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_m)} = 0 \quad (3.27)$$

En la ecuación (3.27) se comprende que el parámetro de interés es K que es la ganancia, pero este método también es aplicable cuando el valor de interés es otro distinto a la ganancia.

Retomando la ecuación (3.27) para este trabajo en particular se puede reescribir de la siguiente forma:

$$1 + \frac{K9132.09}{(s - 49.52)(s + 49.52)} = 0 \quad (3.28)$$





2) Determinación de las raíces sobre el eje real del plano 's'. El lugar de las raíces sobre el eje real se determina por los polos y ceros de lazo abierto que estén sobre el.

De la ecuación característica se obtienen los polos y ceros de lazo cerrado, en este caso solo existen polos los cuales están ubicados en $s_1 = -49.52$ y $s_2 = 49.52$.

Los polos y ceros complejos conjugados de la función de transferencia de lazo abierto no tienen efecto en la ubicación del lugar de las raíces sobre el eje real. Cada porción del lugar de las raíces sobre el eje real se extiende sobre un rango que va desde un polo o cero hasta otro polo o cero. Al construir, el lugar de las raíces sobre el eje real, se elige un punto de prueba sobre el. Si la cantidad total de los polos reales y ceros reales a la derecha de este punto de prueba es impar, entonces este punto queda en una rama del Lugar Geométrico de las Raíces.

3) Se determinan las asíntotas de los lugares de las raíces. El Lugar Geométrico de las Raíces para valores muy grandes de K deben ser asíntóticos o rectos cuyos ángulos están dados por:

$$\gamma_q = \frac{\pm 180^\circ(2q+1)}{n-m} \quad (3.29)$$

Donde:

n = cantidad de polos finitos de $G(s)H(s)$

m = cantidad de ceros finitos de $G(s)H(s)$

$q = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$

En este caso $n = 2$ ya que este número de polos fue determinado en el paso dos al mismo tiempo el número de ceros para este sistema es cero es decir $m = 0$ esto quiere decir que existen dos polos o ramas que tienden al infinito en forma asíntótica. Los ángulos de las asíntotas están dadas por la ecuación (3.29) sustituyendo los valores de m y n se tiene que:

$$\gamma_0 = \frac{\pm 180^\circ(2(0)+1)}{2-0} = 90^\circ \quad (3.30)$$

$$\gamma_1 = \frac{\pm 180^\circ(2(1)+1)}{2-0} = 270^\circ \quad (3.31)$$

Ahora bien, existe un punto en donde se intersectan las asíntotas sobre el eje real y este punto es llamado centroide el cual se calcula con la ecuación (3.32).





$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{j=1}^m P_j}{n - m} \quad (3.32)$$

Sustituyendo los valores de los polos y ceros en la ecuación (3.32) podremos ver que el centroide está ubicado en:

$$\sigma_a = \frac{(-49.52 + 49.52) - (0)}{2} = 0 \quad (3.33)$$

4) Se hallan los puntos de ruptura de entrada y salida. Debido a la simetría conjugada del Lugar Geométrico de las Raíces, los puntos de ruptura de entrada y salida, o bien están sobre el eje real, o se producen en pares complejos conjugados.

Un punto de ruptura de salida del eje es un punto del lugar en el que dos ramas, que discurren por el eje real y que se aproximan cada vez más entre sí a medida que aumenta K , se unen, bifurcándose simétricamente en el plano complejo a partir de él.

Para poder obtener los puntos de ruptura se parte de la ecuación característica ecuación (3.28) en donde despejaremos K .

Con fines prácticos el valor $9132.05K$ que se observa en la ecuación característica se reduce de la siguiente manera:

$$K' = 9132.05K \quad (3.34)$$

Entonces con lo anterior la ecuación característica quedará de la siguiente manera:

$$s^2 - 2452.5 + K' = 0 \quad (3.35)$$

$$K' = -s^2 + 2452.5 \quad (3.36)$$

Este despeje es utilizado para poder igualar la derivada con cero y así poder encontrar las raíces de esta función, los cuales pueden ser puntos de ruptura de partida o de llegada sobre el eje real.

$$\frac{dK'}{ds} = -\frac{ds^2}{ds} + \frac{d2452.5}{ds} = 0 \quad (3.37)$$



$$\frac{dk'}{ds} = -2s = 0 \quad (3.38)$$

Se despeja el valor de s para así poder encontrar la raíz de esta función y el punto de ruptura ecuación (3.39):

$$s = -\frac{0}{2} = 0 \quad (3.39)$$

De la ecuación anterior $s=0$ es el valor de las dos raíces de la ecuación característica donde se encontrarán, este es un punto de ruptura. El valor de la ganancia del sistema para este punto se calcula a partir de la condición de magnitud:

$$\left| \frac{K'}{s^2 - 2452.5} \right|_{s=0} = 0 \quad (3.40)$$

Evaluándola en $s=0$ que es el punto de ruptura y despejando el valor de K' en la ecuación (3.35):

$$K' = |0^2 - 2452.5| = 2452.5 \quad (3.41)$$

El valor de la ganancia viene dado por:

$$K = \frac{K'}{9132.05} = 0.2685 \quad (3.42)$$

5) Se hallan los ángulos de partida o ángulos de llegada del lugar geométrico de las raíces desde los polos complejos o ceros complejos, según sea el caso. El ángulo de salida o ángulo de llegada del lugar geométrico de las raíces desde un polo complejo o cero complejo puede ser hallado restando de 180° la suma de todos ángulos de las cantidades complejas desde todos los otros polos y ceros al polo complejo o cero complejo en cuestión incluyendo los signos adecuados.

Este paso no aplica para este sistema pues como se ha visto en el análisis no se tienen polos ni ceros complejos conjugados.

6) Puntos de cruce con el eje imaginario. Se calculan partiendo de la ecuación característica haciendo $s = j\omega$ en la ecuación característica:

$$(j\omega)^2 - 2452.5 + 9132.05K = 0 \quad (3.43)$$





$$-\omega^2 - 2452.5 + 9132.05K = 0 \quad (3.44)$$

Igualando las partes real e imaginaria a cero y despejando los valores de ω y K . El valor de ω encontrado de la frecuencia a la cual el lugar de las raíces corta el eje imaginario, y el valor de K correspondiente a una ganancia crítica respecto a estabilidad.

Se puede ver que en la ecuación (3.44) solo se tiene la parte real y la parte imaginaria es igual a cero.

El Lugar Geométrico de las Raíces para el sistema de levitación se muestra en la figura 3.5. El Lugar de las Raíces comienza en $s_1 = -49.52$ y $s_2 = 49.52$ con una ganancia del control proporcional $K = 0$.

El sistema tendrá raíces reales positivas y negativas en el intervalo del controlador:

$$0 < K < 0.2685 \quad (3.45)$$

La figura 3.6 del Lugar Geométrico de las Raíces para el sistema de levitación, muestra que no existe cruce con el eje imaginario, las raíces se ubican sobre el eje imaginario para valores de $K > 0.2685$.

Este Lugar Geométrico de las Raíces se puede identificar como el Lugar de las Raíces utilizando un controlador del tipo (P)

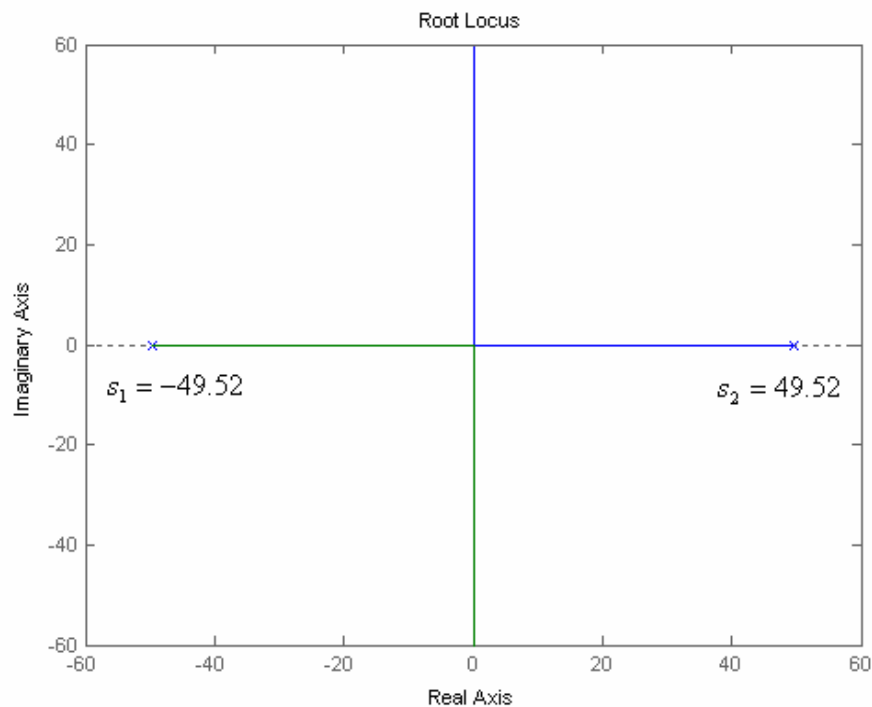


Figura 3.6 Lugar de las raíces para el sistema simulado.



Se concluye que lo más que se puede hacer con el sistema es hacerlo oscilar con un controlador proporcional y no existe un valor de K que haga que el sistema mantenga la levitación así que para esto se necesita compensar el sistema y así poder controlar la levitación.

3.6 DISEÑO DE CONTROLADORES POR ANÁLISIS DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES.

3.6.1 DISEÑO DEL CONTROLADOR PD

La estructura de un controlador **PD** (acción de control proporcional-derivativa) que se define mediante la ecuación (3.46).

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.46)$$

donde T_d es una constante denominada tiempo derivativo. La acción derivativa tiene carácter de previsión, lo que hace más rápida la acción de control, aunque tiene la desventaja importante que amplifica las señales de ruido y puede provocar saturación en el actuador. La acción de control derivativa nunca se utiliza por sí sola, debido a que sólo es eficaz durante periodos transitorios. La función transferencia de un controlador (PD) resulta:

$$G_D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + K_p T_d s \quad (3.47)$$

Factorizando la ecuación (3.47) se obtiene:

$$G_D(s) = \frac{K_p}{T_d} \left(s + \frac{1}{T_d} \right) \quad (3.48)$$

Donde $K = K_p / T_d$ y $a = 1/T_d$ de aquí la ecuación (3.48) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$G_D(s) = K(s + a) \quad (3.49)$$

Por lo tanto la función de transferencia de lazo abierto para el sistema compensado será:



$$G_D(s)G_P(s) = \frac{K9132.09(s+a)}{s^2 - 2452.5} \quad (3.50)$$

En la figura 3.7 se muestra el diagrama a bloques del sistema de levitación al utilizar un controlador (PD).

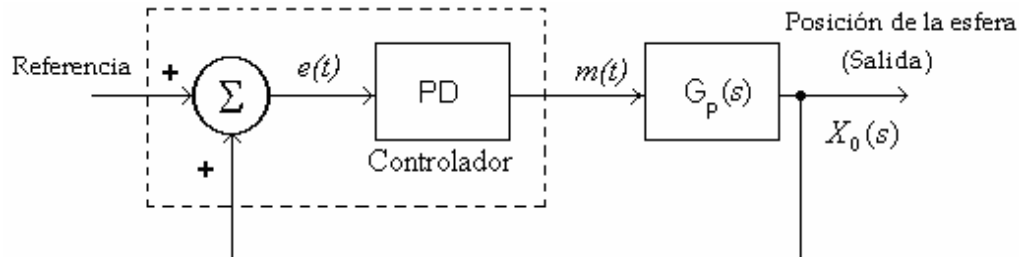


Figura 3.7 Diagrama a bloques del sistema de levitación magnética con un controlador PD.

Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error de estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y, por tanto, permite un valor más grande de la ganancia K , lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estacionario.

Se retoma la función de transferencia de la planta ecuación (3.7), para esto se propone el valor de $\xi = 0.7$ el cual se toma del prototipo hecho por Graham y Lathrop [17], otro valor propuesto el tiempo de establecimiento $t_s = 0.6 \text{ seg}$.

El tiempo de establecimiento es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar y mantenerse en un rango alrededor del valor final establecido, este valor dependerá del criterio a tomar y podrá calcularse de la siguiente manera:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \text{criterio del 2\%} \quad (3.51)$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad \text{criterio del 5\%} \quad (3.52)$$

Para este trabajo el criterio utilizado es el del 2% dado por la ecuación (3.51) pues con esto se hará mas fiel la respuesta del sistema. Sustituyendo los valores de ξ y t_s en la ecuación (3.51) para despejar ω_n se tiene que:



$$\omega_n = \frac{4}{(0.6)(0.7)} = 9.5238 \text{ rd / s} \quad (3.53)$$

donde ω_n es el valor de la frecuencia natural no amortiguada.

Otro parámetro muy importante es el del máximo sobreimpulso M_p que es el valor pico máximo de la curva de respuesta medido desde la unidad y viene dado por :

$$M_p = e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \quad (3.54)$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación (3.54) tendremos que el valor del máximo sobreimpulso será $M_p = 4.5\%$.

Para seguir con la optimización del diseño, los polos dominantes se calculan con la ecuación (3.2) sustituyendo los valores correspondientes.

$$s_{1,2} = -(0.7)(9.5238) \pm j(9.5238)\sqrt{1-(0.7)^2} \quad (3.55)$$

Los polos dominantes se ubican en $s_1 = -6.66 + j6.80$ y $s_2 = -6.66 - j6.80$ de acuerdo a la ecuación (3.55).

Al compensar con un controlador (PD) en el sistema de lazo cerrado el (PD) agrega un cero a la función de transferencia de lazo abierto. Ahora, para calcular el ángulo con que contribuye este cero al sistema, se parte de la ecuación (3.25) que es la condición de ángulo, obteniendo lo siguiente:

$$\angle G_D(s)G_p(s) = \angle s + a - [(\angle s - 49.52) + (\angle s + 49.52)] = \pm 180^\circ \quad (3.56)$$

El valor de los ángulos de los polos de la planta esta dado por:

$$\angle s - 49.52 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{6.80}{56.18}\right) = 173.09^\circ \quad (3.57)$$

$$\angle s + 49.52 = \tan^{-1}\left(\frac{6.80}{56.18}\right) = 9.01^\circ \quad (3.58)$$

Sustituyendo los valores de los ángulos en la ecuación (3.56).



$$\angle s + a = 2.10 = \alpha \tag{3.59}$$

El valor del cero estará dado por la función trigonométrica:

$$\tan \alpha = \frac{6.80}{x} \tag{3.60}$$

Despejando el valor de x en la ecuación (3.60) este será $x = 43.52$. Para encontrar el valor del cero se suma el valor del polo dominante en el eje real con valor absoluto, entonces el valor del cero estará dado como $a = 192.10$. Es decir la ubicación del cero esta en $s = -192.10$, como se muestra en la figura 3.8.

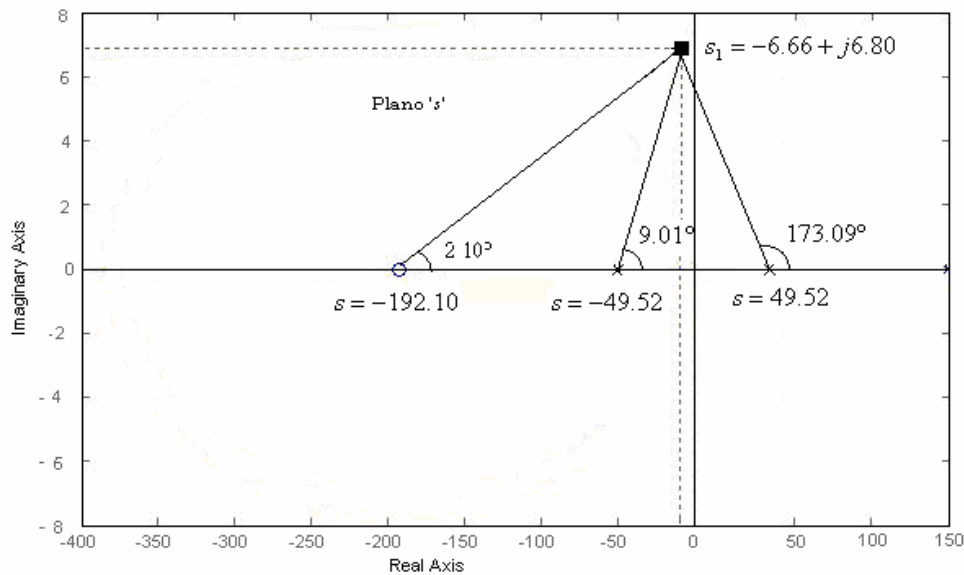


Figura 3.8 Determinación del cero del controlador PD.

Para encontrar el valor de la ganancia del compensador se parte de la condición de magnitud ecuación (3.26), la función de transferencia de lazo abierto ecuación (3.50), el valor de K' ecuación (3.34) y evaluando en el cero, la condición de magnitud entonces se dará de la siguiente manera:

$$\left| \frac{K'(s+a)}{s^2 - 2452.5} \right|_{s=-6.66+6.80i} = 1 \tag{3.61}$$

$$\left| \frac{K'(s+192.10)}{(-6.66+6.80)^2 - 2452.5} \right|_{s=-6.66+6.80i} = 1 \tag{3.62}$$

Se despeja el valor de K' para conocer su valor por lo tanto $K'=13.20$, el dato a conocer es el de la ganancia y no el de K' por lo tanto haciendo el despeje conveniente $K = 0.001456$.

El Lugar Geométrico de las Raíces para el sistema compensado con un controlador (PD) se muestra en la figura 3.9. La simulación muestra como al introducir un controlador del tipo (PD) obliga al sistema a llevar las ramas del Lugar Geométrico de las Raíces al semiplano izquierdo del plano s , teniendo como consecuencia estabilizar al sistema en lazo cerrado. La ganancia del controlador anteriormente calculado nos permite estabilizar el sistema y obtener una respuesta en el tiempo con las características propuestas por Graham y Lathrop.

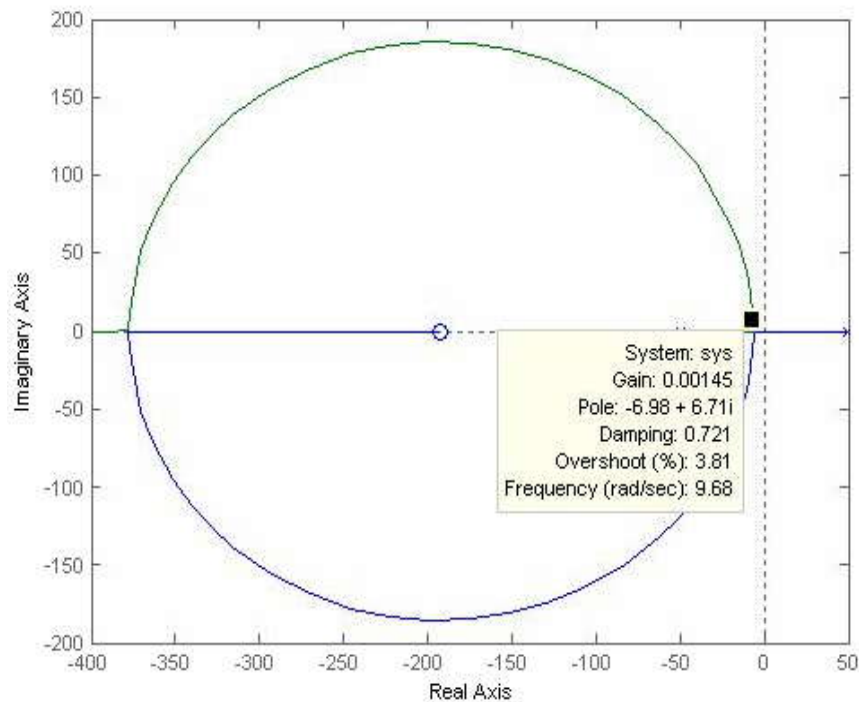


Figura 3.9 Lugar Geométrico de las raíces usando un controlador PD.

Sustituyendo los valores de la ganancia y el cero de la ecuación (3.49) se encuentra que:

$$G_D(s) = 0.001456(s + 192.10) \quad (3.63)$$

La respuesta del sistema de control de levitación ante una entrada escalón se muestra en la figura 3.10:

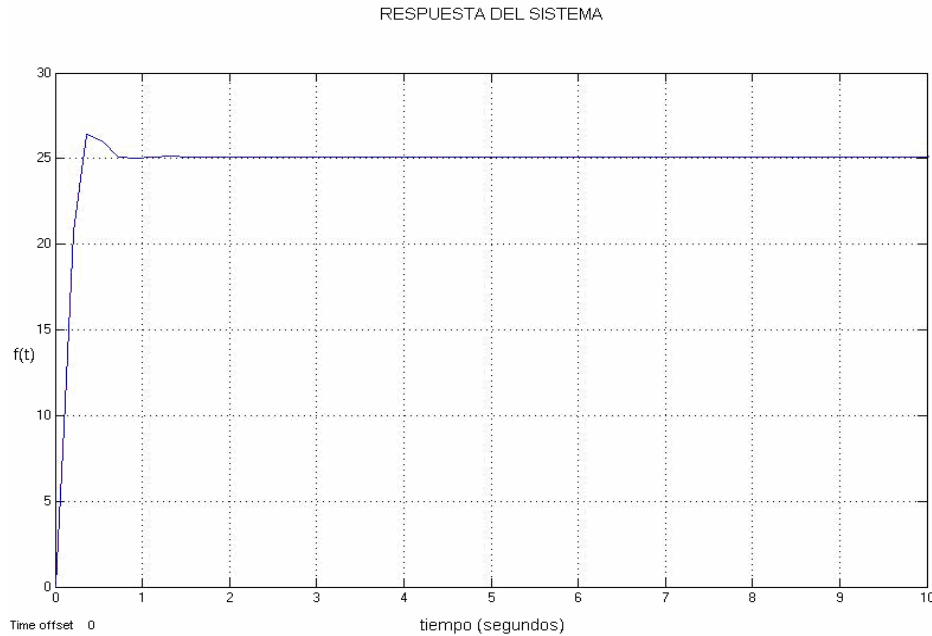


Figura 3.10 Respuesta del sistema de levitación con el controlador PD.

En la figura 3.10 se aprecia que el sistema sobrepasa al escalón unitario y se dispara así que si compensamos con este controlador se tiene un error en estado estacionario lo que no es conveniente en un sistema de control, para eliminar el error en estado estacionario se debe aumentar el tipo de sistema esto se logra introduciendo un controlador del tipo PI.

3.6.2 DISEÑO DEL CONTROLADOR PI

Para un controlador **PI** (acción de control proporcional integral) se tiene la siguiente definición:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (3.64)$$

donde T_i es una constante denominada tiempo integral.

La función de transferencia para el sistema es de la siguiente manera:

$$G_I(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_p \left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{s} \quad (3.65)$$

Donde $K = K_p$ y $a = 1/T_i$ se puede reescribir la ecuación (3.65) de la siguiente manera:

$$G_I(s) = \frac{K(s+a)}{s} \tag{3.66}$$

Con acción integral, un error pequeño positivo siempre nos dará una acción de control creciente, y si fuera negativo la señal de control será decreciente.

Este razonamiento sencillo muestra que el error en régimen permanente será siempre cero. Muchos controladores industriales tienen solo acción PI. Se puede demostrar que un control PI es adecuado para todos los procesos donde la dinámica es esencialmente de primer orden. Lo que puede demostrarse en forma sencilla, por ejemplo, mediante un ensayo al escalón.

Así la función de transferencia de lazo abierto para el sistema del levitador con un controlador PI será:

$$G_I(s)G_p(s) = \frac{K'(s+a)}{s(s^2 - 2152.5)} \tag{3.67}$$

En la figura 3.11 se muestra como es que estaría conectado el compensador PI al sistema de levitación magnética.

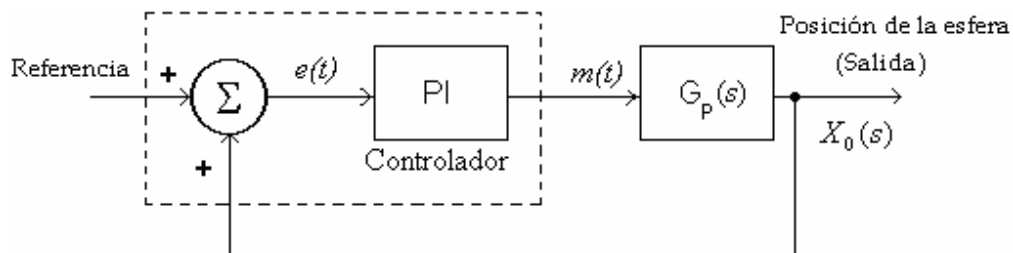


Figura 3.11 Diagrama a bloques del sistema de levitación con un controlador PI.

Recordando el valor de K' ecuación (3.34) para fines prácticos.

Ahora bien se proponen los mismos valores para $\xi = 0.7$ y $t_s = 0.6\text{seg}$, como fue en el caso del (PD) y la frecuencia natural no amortiguada será de $\omega_n = 9.5238\text{rad/s}$. Los polos dominantes por lo tanto estarán ubicados en $s_{1,2} = -6.66 \pm j6.80$.



Para saber con que ángulo contribuye el polo en $s = 0$ se parte de la condición de ángulo dada por la ecuación (3.25):

$$G_I(s)G_P(s) = \angle s + a - [\angle s + (\angle s - 49.52) + (\angle s + 49.52)] = \pm 180^\circ \quad (3.68)$$

No se conoce el valor del ángulo con que contribuye el polo del controlador que se encuentra en $s = 0$ por lo tanto este cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$\angle s = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{6.80}{6.66}\right) = 134.40^\circ \quad (3.69)$$

Sustituyendo los valores de los ángulos en la ecuación (3.68).

$$\angle s + a = 136.5^\circ = \alpha \quad (3.70)$$

El valor del cero estará dado por la función trigonométrica ecuación (3.60).

Como se ha hecho para el caso del controlador (PD) despejaremos x en la ecuación (3.60) éste será $x = 7.16$. Ahora bien a nuestro cero le sumaremos el valor del polo dominante en el eje real en valor absoluto entonces el valor del cero estará dado como $a = 0.505$.

La ubicación del cero esta en $s = -0.505$. Así en la figura 3.12 podemos encontrar.

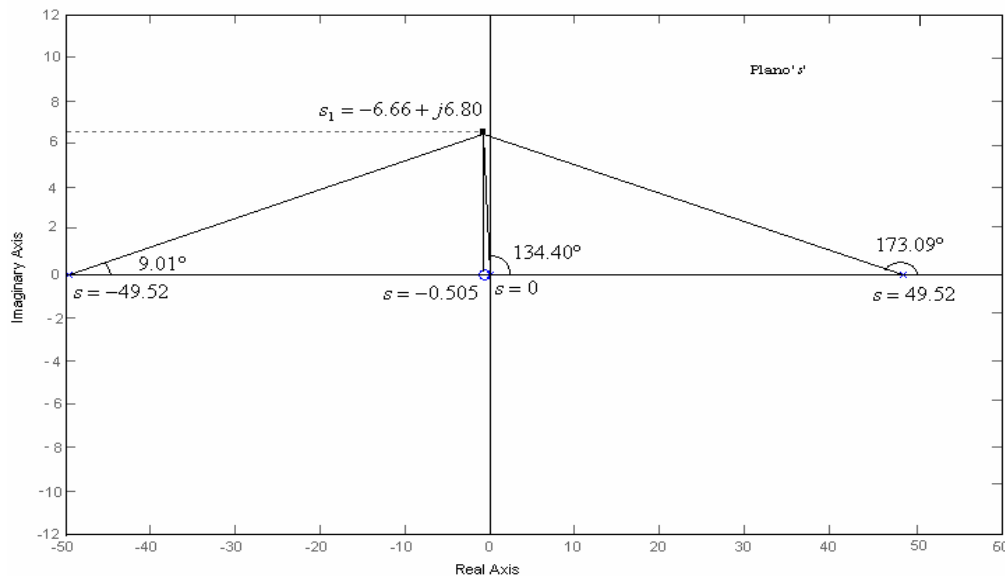


Figura 3.12 Determinación del cero y el polo del controlador PI.



La ganancia para el controlador estará dada por la condición de magnitud en la ecuación (3.26) como:

$$\left| \frac{K'(s + 0.505)}{s(s^2 - 2452.5)} \right|_{s=-6.66+6.80i} = 1 \quad (3.71)$$

En la ecuación anterior se sustituye el valor de K' de la ecuación (3.29) para poder así conocer el valor de la ganancia:

$$K = \left| \frac{s(s^2 - 2452.5)}{9132.09(s + 0.505)} \right|_{-6.66+6.80i} \quad (3.72)$$

El valor de la ganancia haciendo los cálculos correspondientes será de $K = 0.259$, sustituyendo el valor de la ganancia en la función de transferencia del controlador (PI) ecuación (3.66) se tiene:

$$G_I(s) = \frac{0.2591(s + 0.505)}{s} \quad (3.73)$$

Se presenta el Lugar Geométrico de las Raíces para el controlador (PI) en la figura 3.13, como se observa existe una rama en el semiplano derecho del plano s la cual implica inestabilidad. El valor obtenido anteriormente no está garantizando la estabilidad del sistema lo cual lleva a combinar las características de los controladores Derivativo e Integral.

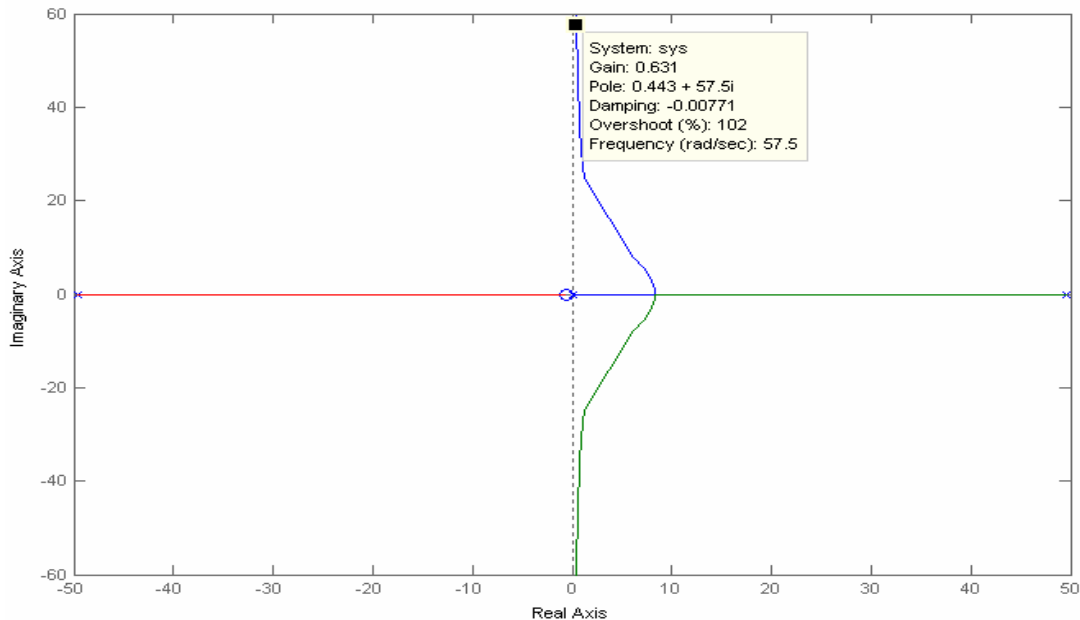


Figura 3.13 Lugar Geométrico de las raíces usando un controlador PI.

La respuesta de este controlador para la levitación del sistema no es la deseada como se puede observar en la simulación hecha de la figura 3.14.

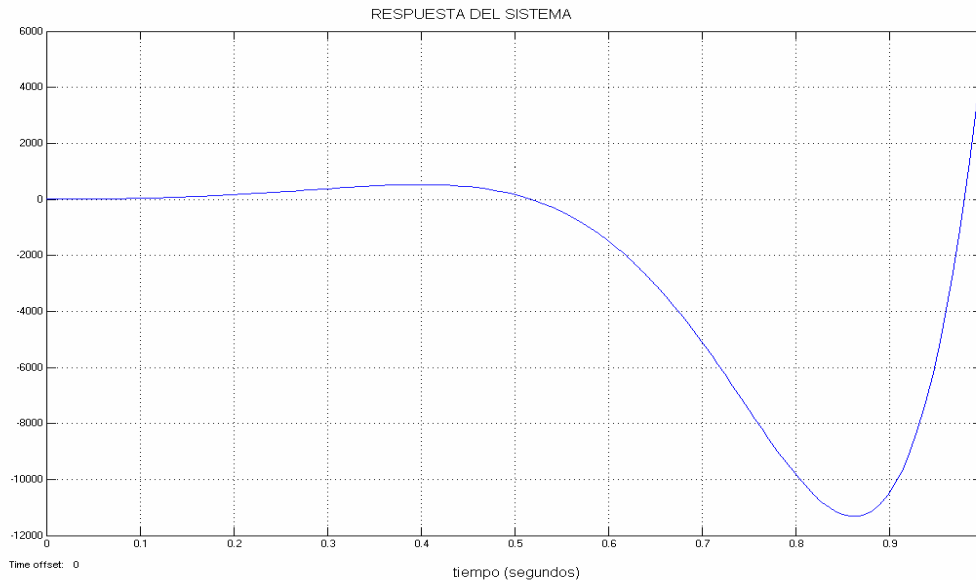


Figura 3.14 Respuesta del sistema controlado con un PI.

En la simulación de la figura 3.14 se puede apreciar como es que el sistema compensado con el controlador (PI) jamás se estabiliza si no al contrario este se dispara, así que la levitación del sistema no se lleva a cabo.

3.6.3 DISEÑO DE UN CONTROLADOR PID

Debido a los resultados obtenidos anteriormente se puede concluir que los controladores propuestos separadamente no cumplen con las necesidades requeridas, por lo que es necesario proponer una combinación de las acciones de control Proporcional, Integral y Derivativa.

La definición de un controlador **PID** se muestra a continuación:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.74)$$

Aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] = \frac{K_p (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s} \quad (3.75)$$

$$G_c(s) = K_p T_d \left[\frac{s^2 + \frac{1}{T_d}s + \frac{1}{T_i T_d}}{s} \right] \quad (3.76)$$

Para fines prácticos se harán las siguientes igualdades: $ab = \frac{1}{T_d T_i}$, $K = K_p T_d$ y $a + b = \frac{1}{T_d}$.

$$G_c(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{s} \quad (3.77)$$

El valor de K' se conoce de la ecuación (3.34) por lo tanto la función de transferencia de lazo abierto del sistema compensado será:

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K'(s+a)(s+b)}{s(s^2 - 2152.5)} \quad (3.78)$$

En la figura 3.15 se muestra el diagrama a bloques del sistema de levitación utilizando un controlador (PID).

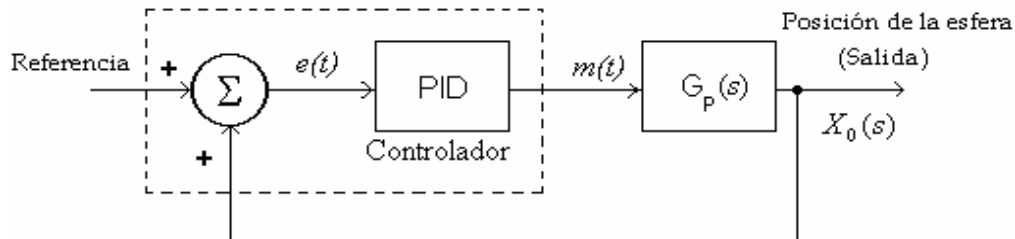


Figura 3.15 Diagrama a bloques del sistema de levitación con un controlador PID.

Se propone que los dos ceros del controlador contribuyan con el mismo ángulo es decir que $a = b$ por lo tanto la función de transferencia se podrá reescribir de la siguiente manera:

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K'(s+a)^2}{s(s^2 - 2152.5)} \quad (3.79)$$

Como se ha hecho anteriormente se proponen los mismos valores de $\xi = 0.7$ y $t_s = 0.6 \text{ seg}$, por lo tanto se tiene el mismo valor para la frecuencia natural no amortiguada de $\omega_n = 9.5238 \text{ rad/s}$.

De igual forma con esto el valor de los polos dominantes se encontraran en $s_{1,2} = -6.66 \pm j6.80$.

Utilizando la condición de ángulo :

$$G_C(s)G_P(s) = 2\angle s + a - [\angle s + (\angle s - 49.52) + (\angle s + 49.52)] = \pm 180^\circ \quad (3.80)$$

Se conoce ahora el ángulo con que contribuye el polo del compensador y en cálculos anteriores se encontró el valor del ángulo con que contribuyen los polos de la planta por lo tanto el valor del ángulo del cero será:

$$\angle s + a = 68.25^\circ = \alpha \quad (3.81)$$

Partiendo de la ecuación (3.60) el valor de a será de $a = 9.37$ por lo tanto el cero está en $s = -9.37$ estos valores se podrán apreciar en la figura 3.16.

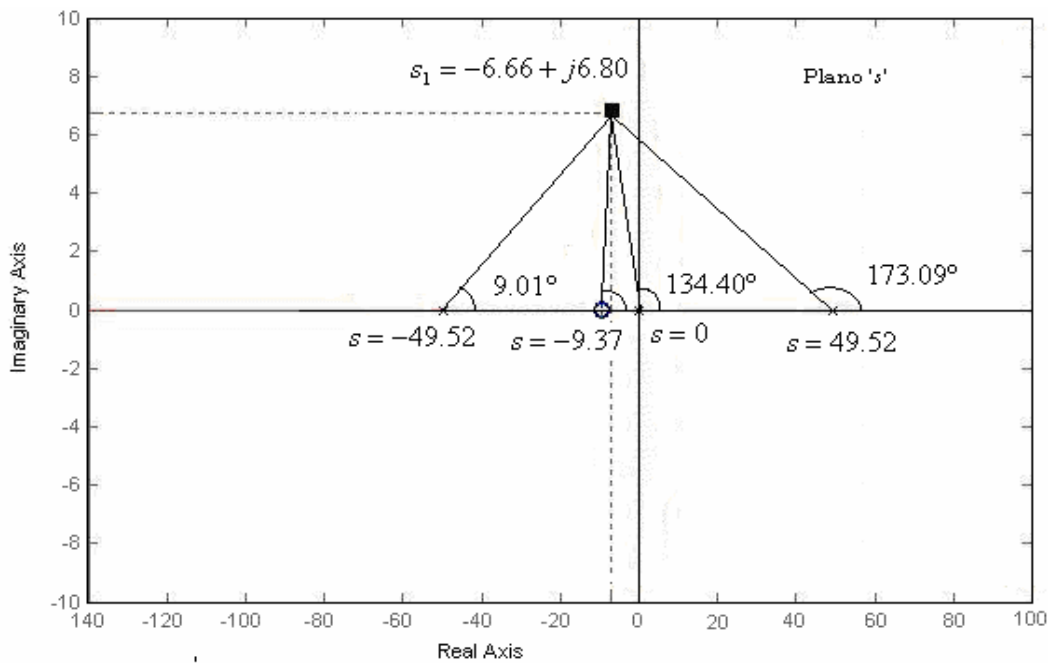


Figura 3.16 Determinación de los dos polos y ceros del controlador PID.

La ganancia estará dada utilizando la condición de magnitud ecuación (3.26):

$$\left| \frac{K'(s + 9.37)^2}{s(s^2 - 2452.5)} \right|_{s=-6.66+6.80i} = 1 \quad (3.82)$$

Despejando el valor de K' y haciendo la consideración del valor de K' de la ecuación (3.29) el valor de la ganancia K será:

$$K = \left| \frac{s(s^2 - 2452.5)}{9132.09(s + 9.37)^2} \right|_{-6.66+6.80i} \quad (3.83)$$

Encontrando así el valor de la ganancia en $K = 0.047$ en la ecuación de transferencia del controlador (PID) ecuación (3.77) se sustituyen los valores de ganancia, polos y ceros obteniendo lo siguiente:

$$G_c(s) = \frac{0.0477(s + 9.37)^2}{s} \quad (3.84)$$

Se presenta el diagrama del Lugar Geométrico de las Raíces en la figura 3.17, como se puede observar, el compensador (PID) logra que las ramas del Lugar Geométrico de las Raíces se ubiquen en el semiplano izquierdo del semiplano s , dando estabilidad al sistema.

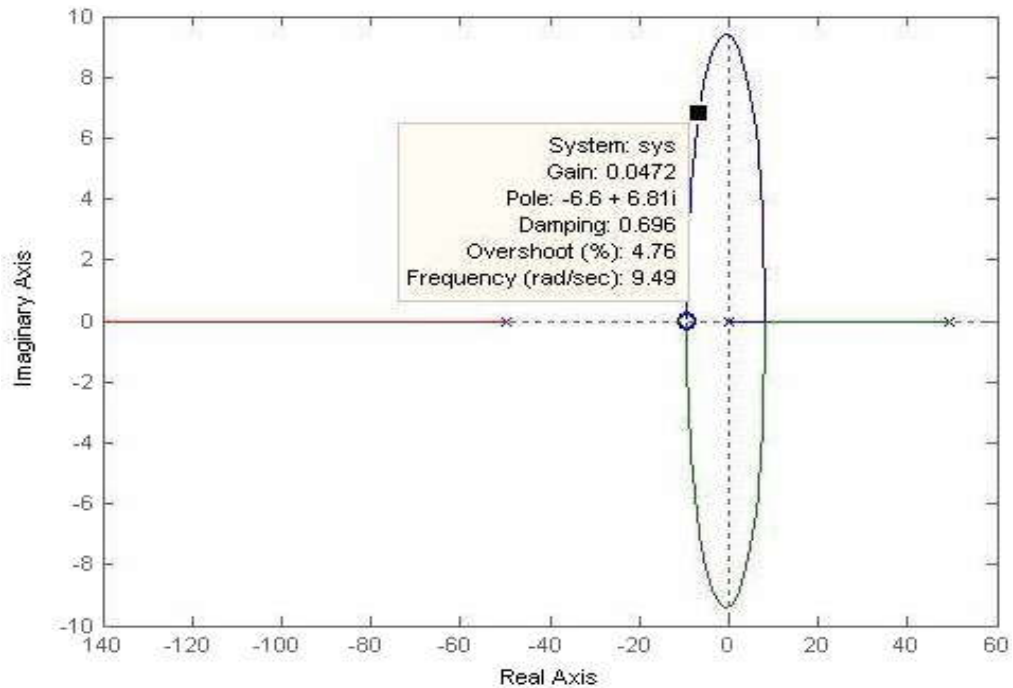


Figura 3.17 Lugar Geométrico de la raíces usando un controlador PID.

La respuesta del sistema compensado con un controlador (PID) se muestra en la figura 3.18 en donde se puede observar el buen funcionamiento del sistema.

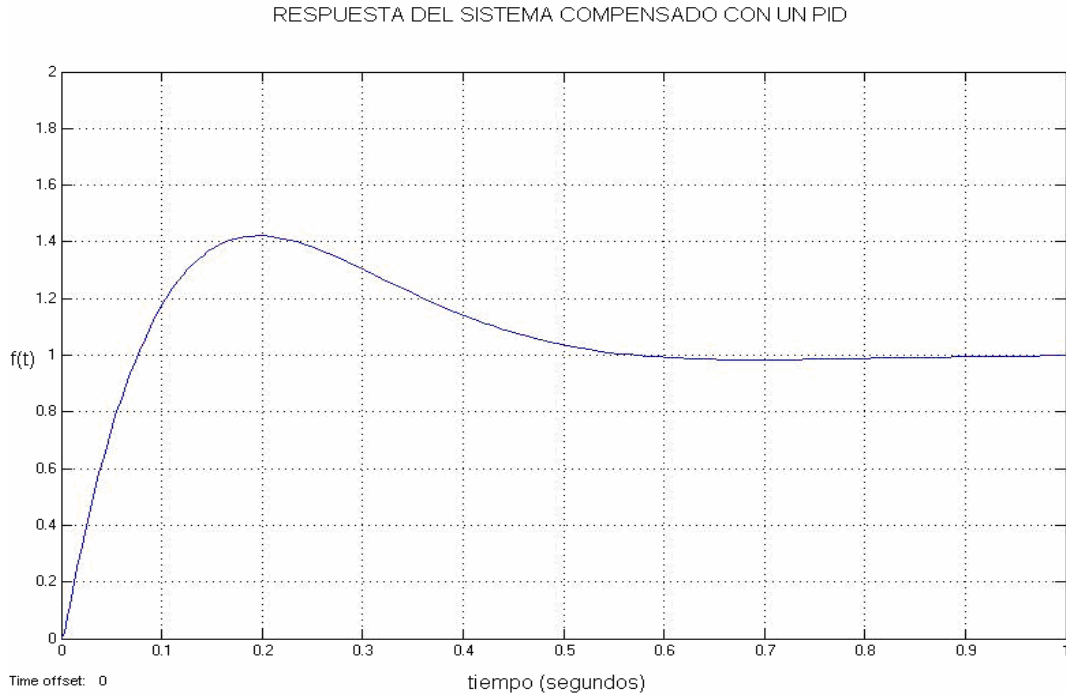


Figura 3.18 Respuesta del sistema con un controlador PID.

Se puede apreciar que el máximo sobreimpulso no es el valor calculado de la ecuación (3.54) que fue del 4.5%, por lo tanto se procede a calcular el valor de ξ para este valor del máximo sobreimpulso; se despeja el valor de ξ de la ecuación (3.54).

$$\xi = \left(\sqrt{\frac{\ln M_p}{\pi^2 + \ln M_p}} \right) \quad (3.85)$$

Sustituyendo el valor de máximo sobreimpulso $M_p = 0.41$ en la ecuación (3.85) obtenemos que el valor de ξ es de 0.31. Este valor difiere al propuesto, la razón por la cual cambio es por cálculos matemáticos ya que no se consideraron todos los decimales.

El sistema de levitación utilizando un controlador (PID) responde bien ante la entrada escalón, pues en el tiempo en que se elige para que el sistema se establezca éste lo hace, se deduce que el controlador que se utilizara para el sistema de levitación será el (PID), debido a que proporciona un funcionamiento adecuado en el tiempo. En estado estacionario se tiene un error de cero. La respuesta del sistema tiene un tiempo de establecimiento de 0.55seg, un tiempo pico de 0.2seg, el máximo sobreimpulso de 41%.



CAPÍTULO IV

CONSTRUCCIÓN DEL CONTROLADOR PID ELECTRÓNICO

4.1 RESUMEN

En este capítulo se presenta la realización del circuito electrónico de un compensador del tipo (PID), como hemos visto en el capítulo anterior nuestro sistema será controlado con un controlador (PID) así que ahora se harán las especificaciones necesarias para la construcción del mismo, así como los resultados arrojados al analizar el sistema levitando.

4.2 REALIZACIÓN DEL CONTROLADOR PID

El (PID) ha sobrevivido ha muchos cambios en tecnología, que van desde microprocesadores a la neumática a través de tubos electrónicos, transistores, circuitos integrados. El microprocesador ha tenido una dramática influencia en el controlador (PID), prácticamente todos los controladores (PID) son construidos sobres bases de microprocesadores. Esto ha dado oportunidades a suministrar características adicionales afinando la automatización.

En el capítulo III se ha demostrado que el controlador adecuado es el (PID) para compensar el sistema de levitación, ahora bien se muestra el



diagrama a bloques del sistema de levitación con el controlador como se muestra en la figura 4.1.

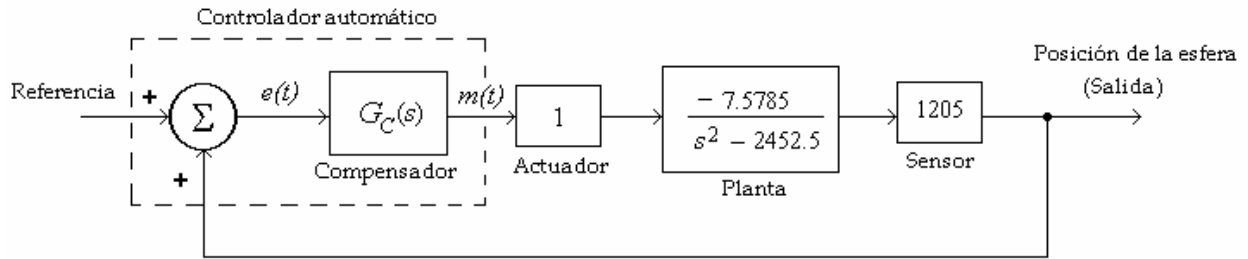


Figura 4.1 Diagrama a bloques de un sistema de levitación magnética.

Los controladores (PID) consisten en un arreglo de amplificadores operacionales que contienen elementos para determinar las constantes y factores que son requeridos por la ecuación (3.74), en donde K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral, y T_d es el tiempo derivativo, que se necesitan para compensar el error detectado por el sensor, el controlador es completamente analógico y funciona en forma continua, sin propiciar retardos en su respuesta más de los que se encuentran implícitos en la constitución física de los propios elementos.

Una de las configuraciones de un controlador (PID) electrónico en cascada se muestra en la figura 4.2 éste controlador está formado por un sumador y un compensador (PID).

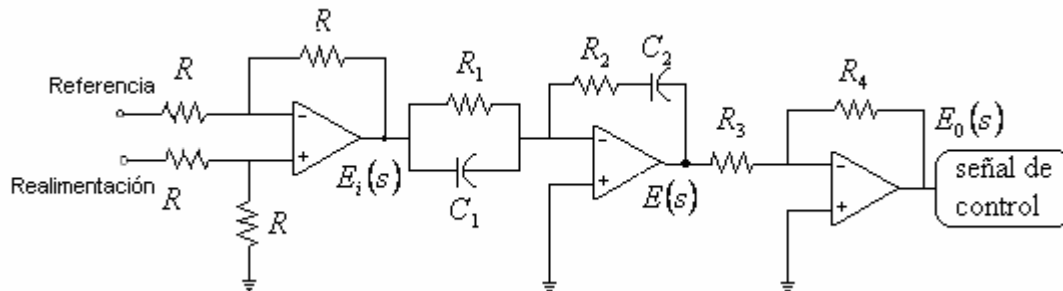


Figura 4.2 Circuito PID con amplificadores operacionales en cascada.

La función de transferencia del circuito del compensador estará dada de la siguiente manera:

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \tag{4.1}$$

Donde Z_1 se describe de la siguiente manera:



$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} \quad (4.2)$$

$$Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} \quad (4.3)$$

Sustituyendo los valores de estas impedancias en la función de transferencia del circuito eléctrico ecuación (4.1) tendremos:

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = - \left(\frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} \right) \left(\frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} \right) \quad (4.4)$$

Para la etapa de amplificación esta se podrá dar de la siguiente manera:

$$\frac{E_0(s)}{E(s)} = - \frac{R_4}{R_3} \quad (4.5)$$

Ahora bien, se hace la combinación de las ecuaciones (4.4) y (4.5) con lo cual se obtiene la función de transferencia del controlador electrónico:

$$\frac{E_0(s)}{E(s)} = \frac{R_4 R_2 (R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_3 R_1 R_2 C_2 s} \quad (4.6)$$

Reordenando la ecuación 4.6 se tiene lo siguiente:

$$\frac{E_0(s)}{E(s)} = \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \left[1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2) s} + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s \right] \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) corresponde a la función de transferencia del controlador (PID) de la figura 4.2. Relacionando (4.6) con (3.75) la ganancia proporcional viene dada por:

$$K_p = \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \quad (4.7)$$

El tiempo integral es de la siguiente manera:

$$T_i = R_1 C_1 + R_2 C_2 \quad (4.8)$$





Por lo tanto el tiempo derivativo lo obtendremos a continuación:

$$T_d = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \quad (4.9)$$

Se ha obtenido la función de transferencia del controlador en el capítulo anterior ecuación (3.77), se desarrolla el binomio cuadrado y se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = 0.8807 \left[1 + \frac{1}{0.2134s} + 0.0532s \right] \quad (4.10)$$

Para fines prácticos se relaciona la ecuación (4.10) con la (3.47) encontramos el valor de $K_p = 0.8807$, el tiempo integral $T_i = 0.2134s$ y el tiempo derivativo $T_d = 0.0532$.

Relacionando la ecuación (4.10) con los parámetros del controlador (PID) electrónico ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.9), se obtienen los valores de las resistencias. Propondremos los valores de los capacitores $C_1 = C_2 = 10\mu F$ esto se hace por comodidad, este valor de capacitor es el más comercial así la relación que existe entre la ecuación (4.8) y (4.10) viene dada por:

$$T_i = R_1 C_1 + R_2 C_2 = 0.2134 \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.11) en (4.9), se obtiene:

$$C_1 C_2 R_1 R_2 = 0.0113 \quad (4.12)$$

$$(C_1 R_1)(C_2 R_2) = (0.1065)(0.1065) \quad (4.13)$$

De la ecuación (4.13) el valor de $C_1 R_1 = 0.1065$, y además $R_1 = R_2$ entonces los valores de las resistencias de la siguiente manera:

$$R_1 = \frac{0.1065}{C_1} = 10.654K\Omega \quad (4.14)$$

$$R_2 = \frac{0.1065}{C_1} = 10.654K\Omega \quad (4.15)$$



Retomando la ecuación (4.7) la ganancia proporcional se puede escribir como:

$$K_p = \frac{2R_4}{R_3} = 0.8807 \quad (4.16)$$

$$R_4 = 0.4403R_3 \quad (4.17)$$

Para fines prácticos se propone un valor comercial para el valor de la resistencia $R_3 = 1K\Omega$, así utilizando la ecuación (4.17) el valor se obtiene $R_4 = 440\Omega$.

Con todo lo realizado anteriormente se han obtenido los valores de las resistencias del controlador (PID) el cual es utilizado en el sistema de levitación magnético mostrado en la figura 4.1. Al aplicar una señal cuadrada de referencia, de 2 volts pico a pico, el sistema tiene una respuesta como se presenta en la figura 4.3.

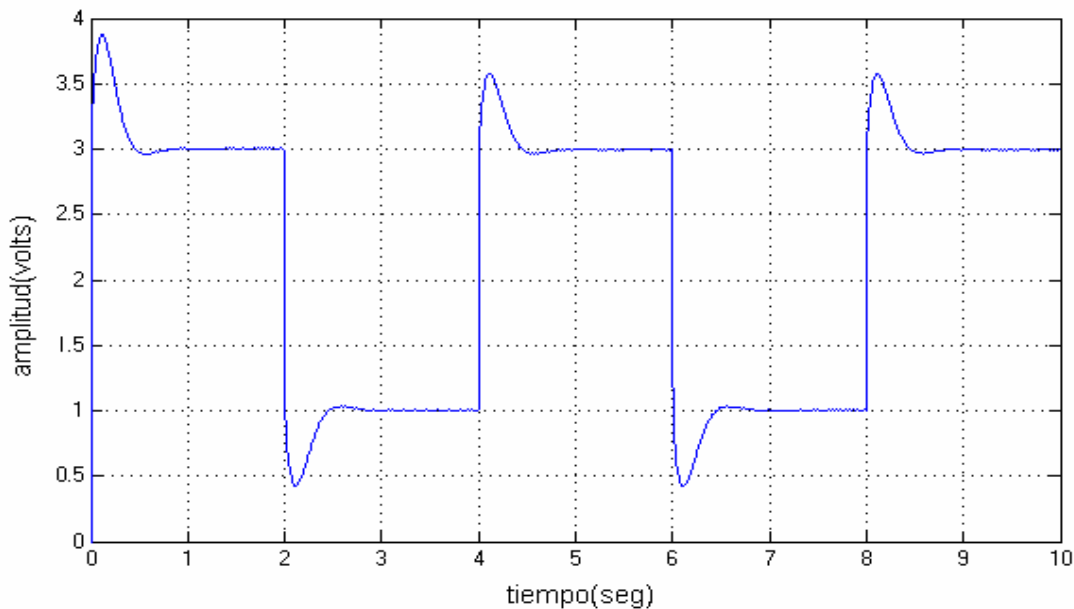


Figura 4.3 Respuesta del sistema con el compensador PID simulado.

Se puede observar que el error en estado estacionario es cero. La respuesta transitoria tiene un sobreimpulso de aproximadamente 35% y un tiempo de establecimiento de 0.45, dándonos la pauta para la construcción de este controlador.

4.3 RESULTADOS PRÁCTICOS

Para este trabajo se realizaron las pruebas de funcionamiento del sistema en forma práctica, es decir se llevó a cabo la levitación del balín. Se realizaron las conexiones del sistema con los valores de las resistencias y capacitores para el controlador (PID) como los presentados anteriormente aplicándole una *CC* que vario desde $4.25V$ y $2.75V$ cada segundo. La señal aplicada fue una señal cuadrada para fines prácticos de apreciación.

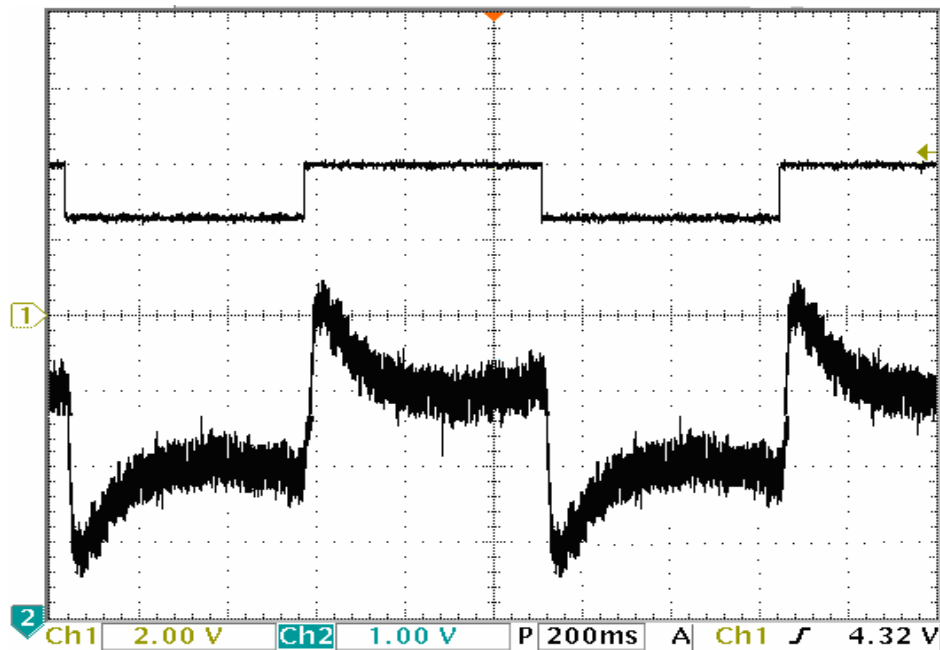


Figura 4.4 Respuesta del sistema controlado.

La respuesta del sistema compensado utilizando un controlador (PID) se muestra en la figura 4.4, el funcionamiento como podemos apreciar es bueno ya que físicamente se puede apreciar la levitación del balín, la medición se realizo con un osciloscopio en el cual la señal aparece con un poco de ruido, para evitar estas señales de ruido se puede introducir un filtro pasa bajas en la parte de medición.

Los resultados obtenidos son muy parecidos a los obtenidos en la simulación de la figura 4.3 pues nuestro el máximo sobrepulso es del 40%, el error en estado estacionario es igual con cero, además de que el tiempo de establecimiento es de $0.4seg$.

Con el fin de validar la observación de que el error en estado estacionario es igual con cero es decir que no existe error en estado estacionario utilizando un controlador (PID) se midió el error en estado estacionario por medio del osciloscopio como se muestra en la figura 4.5.

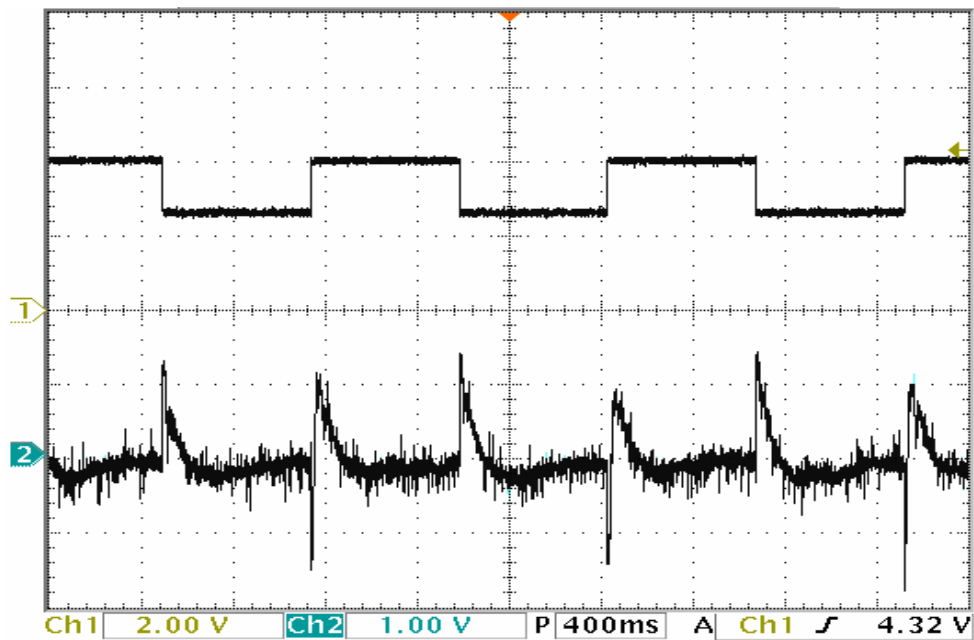


Figura 4.5 Señal de error en el sistema.

En la figura 4.6 se muestra una foto del sistema de levitación llevado a la práctica.

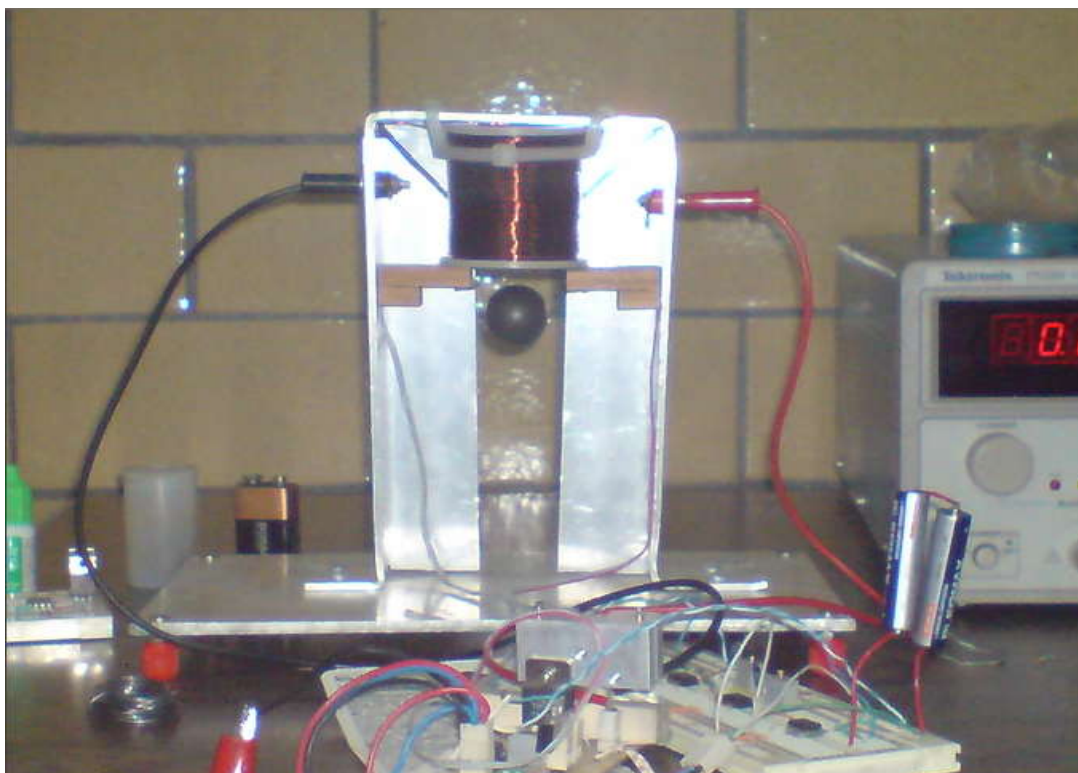


Figura 4.6 Sistema de levitación práctico.



Ahora bien, tomaremos un valor diferente para el tiempo de establecimiento $t_s = 1\text{seg}$ y $\xi = 0.7$. Con lo anterior encontramos que la frecuencia natural no amortiguada ω_n la cual es calculada en base a la ecuación (3.52) será $\omega_n = 5.7143\text{rd} / \text{seg}$.

Los polos dominantes de acuerdo a la ecuación (3.26) estarán dados como $s_{1,2} = -4 \pm j4$. La ubicación de los ceros estará en $s = -5.65$, y así la función de transferencia el compensador será de acuerdo a la ecuación (3.77):

$$G_c(s) = \frac{K(s + 5.65)(s + 5.65)}{s} \quad (4.18)$$

Utilizando la condición de magnitud ecuación (3.24) y despejando el valor de la ganancia, la ganancia para este compensador es de $K = 0.08115$. Así que sustituyendo el valor de la ganancia así como los polos y ceros en la ecuación (3.77) esta quedará de la siguiente manera:

$$G_c(s) = \frac{0.08115(s + 5.65)^2}{s} \quad (4.19)$$

Con lo anterior y desarrollando el binomio obtendremos la ecuación de transferencia siguiente:

$$G_c(s) = 0.917 \left[1 + \frac{1}{0.354s} + 0.0885s \right] \quad (4.20)$$

Relacionando las ecuaciones (3.47) y (4.20) el valor de $K_p = 0.917$, el tiempo integral $T_i = 0.354$ y el tiempo derivativo $T_d = 0.0885$.

Sustituyendo el valor del tiempo integral en la ecuación (4.8), además de utilizar la ecuación (4.10) y sobre todo tomando la consideración de que $R_1 = R_2$ y que $C_1 = C_2 = 10\mu\text{f}$ el valor de las resistencias R_1 y R_2 será de $17.7\text{K}\Omega$.

Partiendo de la ecuación (4.7) y proponiendo el valor de $R_3 = 1\text{K}\Omega$ el valor de la resistencia R_4 es de 458.5Ω .

A partir de estos cálculos se prosiguió a realizar la simulación del sistema de levitación con este diseño de controlador como se muestra en la



figura 4.7 la cual nos muestra un máximo sobre impulso del 45% así como un tiempo de establecimiento de 0.9 segundos. Como se puede observar arroja resultados muy parecidos al sistema diseñado con un tiempo de establecimiento de 0.6 segundos.

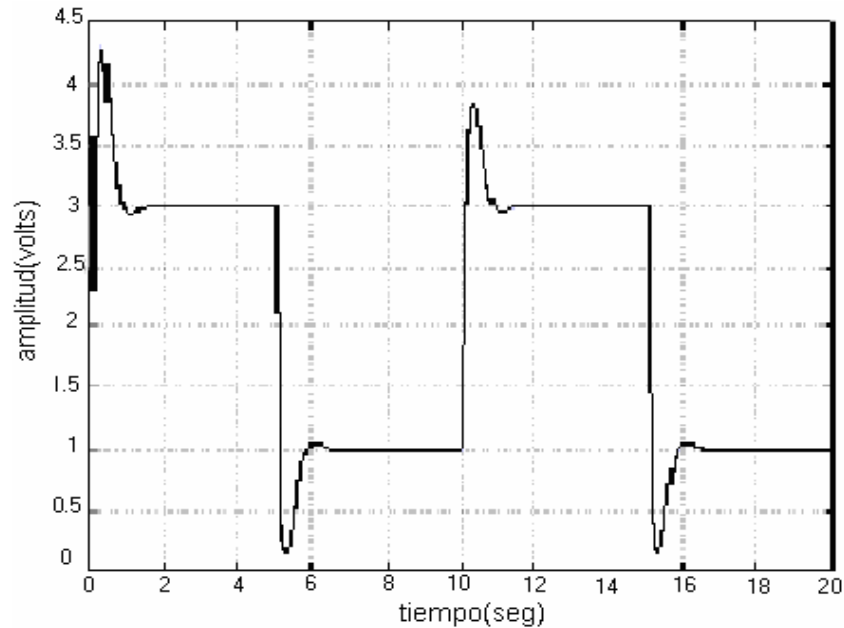


Figura 4.7 Respuesta del sistema con el compensador PID simulado con un tiempo de establecimiento de 1s.

Los resultados prácticos tomados con un osciloscopio se muestran en la figura 4.8.

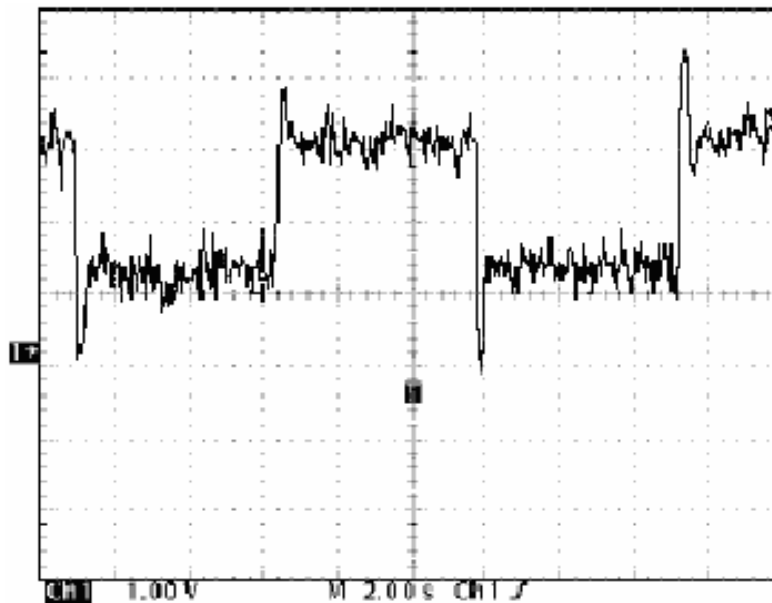


Figura 4.8 Respuesta del sistema con el compensador PID con un tiempo de establecimiento de 1s.



La figura 4.8 muestra un tiempo de establecimiento de 1 segundo, el error en estado estacionario igual con cero y el máximo sobreimpulso del 40%.

Es necesario recalcar que los resultados obtenidos con este compensador son muy parecidos a los resultados para un tiempo de establecimiento de 0.6 segundos.





APÉNDICE B

HOJAS DE ESPECIFICACIONES

A continuación se presentan las hojas de especificaciones de los elementos utilizados para la construcción del sistema de levitación magnética así como las de los componentes del compensador PID. Con el fin de hacer notar algunas de las limitantes que los componentes ofrecen al público.





www.fairchildsemi.com

LF353

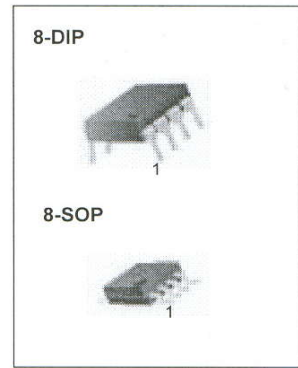
Dual Operational Amplifier (JFET)

Features

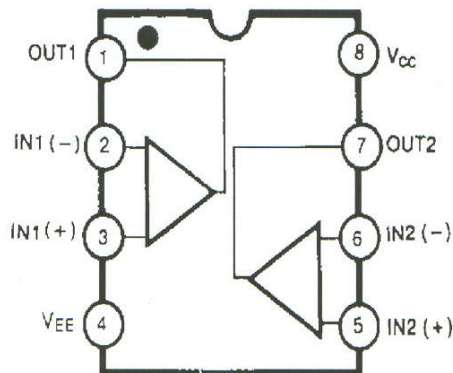
- Internally trimmed offset voltage: 10mV
- Low input bias current: 50pA
- Wide gain bandwidth: 4MHz
- High slew rate: 13V/μs
- High Input impedance: $10^{12}\Omega$

Description

The LF353 is a JFET input operational amplifier with an internally compensated input offset voltage. The JFET input device provides wide bandwidth, low input bias currents and offset currents.



Internal Block Diagram



Rev. 1.0.0

©2001 Fairchild Semiconductor Corporation





August 2000

LM741 Operational Amplifier

LM741 Operational Amplifier

General Description

The LM741 series are general purpose operational amplifiers which feature improved performance over industry standards like the LM709. They are direct, plug-in replacements for the 709C, LM201, MC1439 and 748 in most applications. The amplifiers offer many features which make their application nearly foolproof: overload protection on the input and

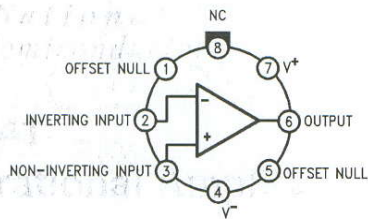
output, no latch-up when the common mode range is exceeded, as well as freedom from oscillations.

The LM741C is identical to the LM741/LM741A except that the LM741C has their performance guaranteed over a 0°C to +70°C temperature range, instead of -55°C to +125°C.

Features

Connection Diagrams

Metal Can Package

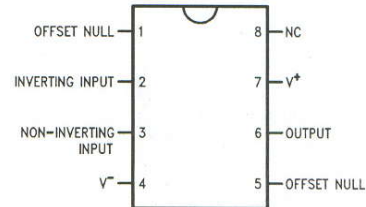


00934102

Note 1: LM741H is available per JM38510/10101

Order Number LM741H, LM741H/883 (Note 1),
LM741AH/883 or LM741CH
See NS Package Number H08C

Dual-In-Line or S.O. Package



00934103

Order Number LM741J, LM741J/883, LM741CN
See NS Package Number J08A, M08A or N08E

Ceramic Flatpak

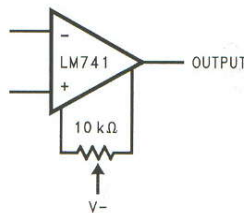


00934106

Order Number LM741W/883
See NS Package Number W10A

Typical Application

Offset Nulling Circuit



00934107



TIP140/141/142 TIP145/146/147

COMPLEMENTARY SILICON POWER DARLINGTON TRANSISTORS

- TIP141, TIP142, TIP145 AND TIP147 ARE STMicroelectronics PREFERRED SALESTYPES
- COMPLEMENTARY PNP - NPN DEVICES
- MONOLITHIC DARLINGTON CONFIGURATION
- INTEGRATED ANTIPARALLEL COLLECTOR-EMITTER DIODE

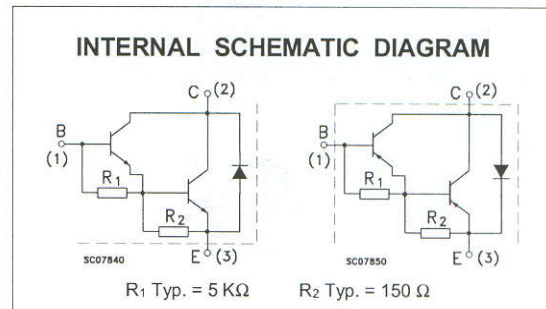
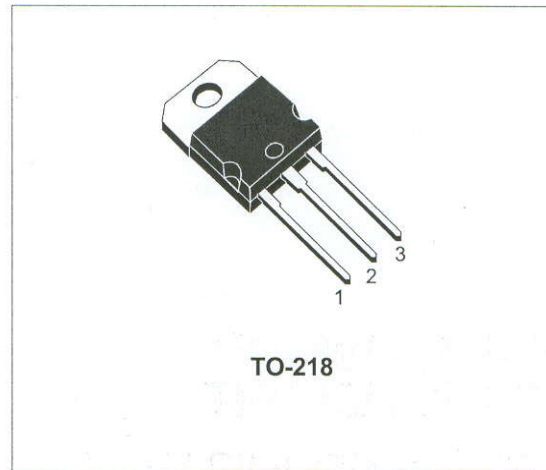
APPLICATIONS

- LINEAR AND SWITCHING INDUSTRIAL EQUIPMENT

DESCRIPTION

The TIP140, TIP141 and TIP142 are silicon Epitaxial-Base NPN power transistors in monolithic Darlington configuration, mounted in TO-218 plastic package. They are intended for use in power linear and switching applications.

The complementary PNP types are TIP145, TIP146 and TIP147 respectively.



ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Symbol	Parameter	Value			Unit	
		NPN	TIP140	TIP141		TIP142
V_{CB0}	Collector-Base Voltage ($I_E = 0$)		60	80	100	V
V_{CE0}	Collector-Emitter Voltage ($I_B = 0$)		60	80	100	V
V_{EBO}	Emitter-Base Voltage ($I_C = 0$)			5		V
I_C	Collector Current			10		A
I_{CM}	Collector Peak Current			20		A
I_B	Base Current			0.5		A
P_{tot}	Total Dissipation at $T_{case} \leq 25^\circ C$			125		W
T_{stg}	Storage Temperature			-65 to 150		$^\circ C$
T_j	Max. Operating Junction Temperature			150		$^\circ C$

For PNP types voltage and current values are negative.

March 2000

1/4





DEVICE NUMBER : DIR-033-007 REV : 1.2
ECN : _____ PAGE : 1/8

5mm Infrared LED

MODEL NO : IR333C-A

■ Features :

- High radiant intensity
- Peak wavelength $\lambda_p=940\text{nm}$
- View angle 20°
- High reliability
- 2.54mm Lead spacing

■ Description :

- Infrared Emitting Diode (IR333C-A) is a high intensity diode, molded in a water clear plastic package.

The device is spectrally matched with phototransistor, photodiode and infrared receiver module.

■ Applications :

- Free air transmission system
- Optoelectronic switch
- Floppy disk drive
- Infrared applied system
- Smoke detector

PART NO.	CHIP	LENS COLOR
	MATERIAL	
IR	GaAlAs	Water clear



LED INFRARROJO

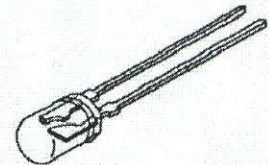
PT331C

Descripción del producto.

Con características estables, sensibilidad de iluminación alta. Su encapsulado es de plástico. Se aplica principalmente en: sistemas de control automático, control remoto, alarmas, foto detector, detector de humo, usos industriales, entre otros.

Máximos rangos absolutos.

Voltaje de sostenimiento de colector a emisor	30 V
Voltaje de ruptura colector a emisor	5 V
Corriente de colector	25mA
Rango de temperatura de operación	- 40°C ~ 85°C
Rango de temperatura de almacenamiento	- 40°C ~ 85°C
Temperatura de soldado	260°C
Humedad relativa a 85°C	85 %
Potencia de disipación a (o abajo) de 25°C	100 mW



Características radiantes y eléctricas

Parámetro	Símbolo	Mín.	Tip	Máx	Unidad	Condiciones
Voltaje de sostenimiento de colector a emisor	VCE (SUS)		1.3	1.7	V	IC = 100 μA H = 0
Voltaje de ruptura de emisor a colector	BVECO			10	μA	IC = 100 μA H = 0
Voltaje de saturación de colector a emisor	VCE (SAT)	6	10		mW	IC = 0.5 mA H = 20 mW/cm
Corriente en la oscuridad	ID		940		nm	VCE= 15 V H = 0
Corriente del foto, fuente de tungsteno	IL	1.0	20		mA	VCE= 5 V H = 20 mW/cm
Tiempo de elevación	TR		5		μS	VCC = 30 V IL = 800 μA
Tiempo de caída	TF		5		μS	RL = 1 KOHM



1N4001/L - 1N4007/L

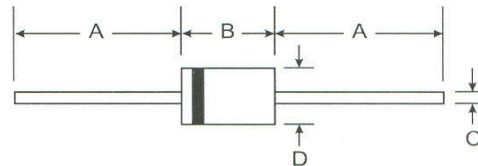
1.0A RECTIFIER

Features

- Diffused Junction
- High Current Capability and Low Forward Voltage Drop
- Surge Overload Rating to 30A Peak
- Low Reverse Leakage Current
- Lead Free Finish, RoHS Compliant (Note 4)

Mechanical Data

- Case: DO-41, A-405
- Case Material: Molded Plastic. UL Flammability Classification Rating 94V-0
- Moisture Sensitivity: Level 1 per J-STD-020C
- Terminals: Finish - Bright Tin. Plated Leads Solderable per MIL-STD-202, Method 208
- Polarity: Cathode Band
- Mounting Position: Any
- Ordering Information: See Last Page
- Marking: Type Number
- Weight: DO-41 0.30 grams (approximate)
A-405 0.20 grams (approximate)



Dim	DO-41 Plastic		A-405	
	Min	Max	Min	Max
A	25.40	—	25.40	—
B	4.06	5.21	4.10	5.20
C	0.71	0.864	0.53	0.64
D	2.00	2.72	2.00	2.70

All Dimensions in mm

"L" Suffix Designates A-405 Package
No Suffix Designates DO-41 Package

Maximum Ratings and Electrical Characteristics @ T_A = 25°C unless otherwise specified

Single phase, half wave, 60Hz, resistive or inductive load.
For capacitive load, derate current by 20%.

Characteristic	Symbol	1N 4001/L	1N 4002/L	1N 4003/L	1N 4004/L	1N 4005/L	1N 4006/L	1N 4007/L	Unit
Peak Repetitive Reverse Voltage Working Peak Reverse Voltage DC Blocking Voltage	V _{RRM} V _{RWM} V _R	50	100	200	400	600	800	1000	V
RMS Reverse Voltage	V _{R(RMS)}	35	70	140	280	420	560	700	V
Average Rectified Output Current (Note 1) @ T _A = 75°C	I _o	1.0							A
Non-Repetitive Peak Forward Surge Current 8.3ms single half sine-wave superimposed on rated load (JEDEC Method)	I _{FSM}	30							A
Forward Voltage @ I _F = 1.0A	V _{FM}	1.0							V
Peak Reverse Current @ T _A = 25°C at Rated DC Blocking Voltage @ T _A = 100°C	I _{RM}	5.0 50							μA
Typical Junction Capacitance (Note 2)	C _j	15				8			pF
Typical Thermal Resistance Junction to Ambient	R _{θJA}	100							K/W
Maximum DC Blocking Voltage Temperature	T _A	+150							°C
Operating and Storage Temperature Range (Note 3)	T _j , T _{STG}	-65 to +175							°C

- Notes:
1. Leads maintained at ambient temperature at a distance of 9.5mm from the case.
 2. Measured at 1. MHz and applied reverse voltage of 4.0V DC.
 3. JEDEC Value.
 4. RoHS revision 13.2.2003. Glass and High Temperature Solder Exemptions Applied, see EU Directive Annex Notes 5 and 7.





UNIDADES

A	Ampere
$A.m^2$	Ampere-metro cuadrado
CC	Corriente Continua
cm	Centimetro
f	Faradio
μf	$1 \times 10^{-6} f$
Hz	Hertz
H	Henry
mH	$1 \times 10^{-3} H$
Kg	Kilogramo
Ω	Ohm
$K\Omega$	$1 \times 10^3 \Omega$
m	Metro
mm	$1 \times 10^{-3} m$
rd / seg	Radianes por segundo
seg	Segundos
V	Volts
V / m	Volts por metro
W	Watts



APÉNDICE A

ANÁLISIS MATEMÁTICO

A.1 RESUMEN

En este apéndice se realiza en forma detallada los cálculos realizados para obtener la función de transferencia del sistema de levitación. Se pretende dar una explicación amplia a cada una de las operaciones realizadas para que de esta forma se tenga una base sólida al comenzar a tratar el problema de obtención del modelo matemático que se plantea en este trabajo.

A.2 OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Para analizar los sistemas de control se necesitan modelos matemáticos de los elementos que se emplean en dichos sistemas. Estos modelos son ecuaciones que representan la relación entre la entrada y la salida del sistema. Las bases de cualquier modelo matemático provienen de las leyes físicas fundamentales que gobiernan el comportamiento de un sistema.

Una gran mayoría de sistemas físicos son lineales dentro de algún intervalo de las variables. Sin embargo, todos los sistemas acaban siendo no lineales si sus variables aumentan sin ningún límite. Por



tanto, para cada sistema debe considerarse el problema de la linealidad y el intervalo de aplicación.

Un sistema se define como lineal en términos de su excitación y respuesta.

Los modelos matemáticos linealizados se utilizan debido a que la mayoría de las técnicas para sistemas de control se basan en que las relaciones de los elementos para dichos sistemas son lineales. También se debe a que en la mayor parte de los sistemas de control el valor de la salida se mantiene igual a un valor de referencia, las variaciones de este valor sean mas vine pequeñas y así el modelo linealizado es el apropiado.

Por todo lo anterior el modelo matemático del sistema de levitación se obtiene de la siguiente manera; es necesario recordar el comportamiento de la inductancia al variar la distancia de separación x como se muestra en la figura 1.

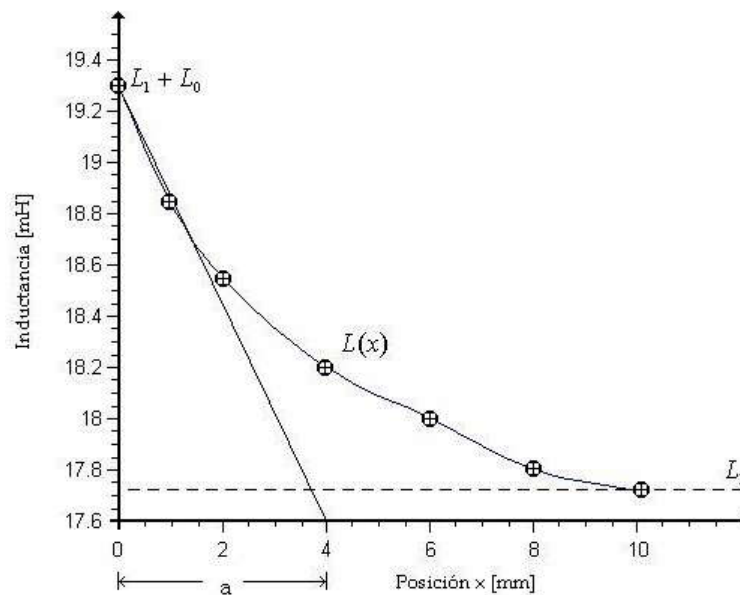


Figura 1. Gráfica experimental del comportamiento de la inductancia de la bobina en función de la separación con la esfera metálica.

La ecuación que representa la mejor aproximación al comportamiento de la inductancia es una expresión de la siguiente forma:

$$L(x) = L_1 + L_0 e^{-\frac{x}{a}} \quad (\text{A.1})$$

Donde x es la distancia que existe entre la bobina y el elemento levitante, L_1 es el valor mínimo de inductancia cuando $x \rightarrow \infty$, y para



nuestro caso es $L_1 = 17.6mH$, a es la constante de longitud para el sistema completo con $a = 4mm$.

La co-energía magnética del sistema es una función de la corriente en la bobina i y la suspensión x ecuación (A.2).

$$W(i, x) = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad (A.2)$$

Para el sistema la fuerza actuante de origen magnético con la esfera esta dada por la ecuación (A.3).

$$f = \frac{\partial}{\partial x} W(i, x) = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} (L_1 + L_0) i^2 \right)}{\partial x} \quad (A.3)$$

Realizando la derivada parcial, la ecuación (A.3) queda de la siguiente manera:

$$f = -\frac{L_0}{2a} i^2 e^{-x/a} \quad (A.4)$$

En equilibrio estático las fuerzas tanto magnética como gravitacional se neutralizan produciendo el estado de levitación en un punto de equilibrio donde la distancia de separación $x = d$ y la corriente $i = I$, produciendo:

$$mg = \frac{L_0}{2a} e^{-d/a} I^2 \quad (A.5)$$

Por simplicidad matemática se hará la siguiente relación $L_0 e^{-d/a} = N^2 L_d$; donde N es el número de vueltas de la bobina, L_d es el incremento de la inductancia en la posición $x = d$ debido a cada espira de la bobina.

$$mg = \frac{N^2 L_d I^2}{2a} \quad (A.6)$$

De la ecuación (A.6) se despeja el valor de la corriente I obteniendo la ecuación (A.7):

$$I = \sqrt{\frac{2a mg}{N^2 L_d}} \quad (A.7)$$





Si $L_d = \frac{L_0}{N^2} e^{-d/a}$ la ecuación (A.7) quedará expresada de la siguiente manera:

$$I = \sqrt{\frac{2a mg}{L_0 e^{-\frac{d}{a}}}} \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo los valores de $L_0 = 1.7mH$ que es la inductancia cuando $x = 0$, $g = 9.81m/s^2$, $m = 55 \times 10^{-3} Kg$ y a el valor de la corriente será de $2.58Am$.

Se puede reescribir la fuerza de origen magnética ecuación (A.4) de la siguiente forma:

$$f(i, x) = -\frac{1}{2a} L_0 i^2 e^{-x/a} \quad (\text{A.9})$$

Ahora considerando el punto de equilibrio $x = d$ y $i = I$ podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} x &= d + x' \\ i &= I + i' \\ f &= f + f' \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

La serie de Taylor de una función f de números reales o complejos que es infinitamente diferenciable en un entorno de números reales o complejos a , es la serie de potencias:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots \quad (\text{A.11})$$

La ecuación (A.11) puede ser escrita de una manera más compacta como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (\text{A.12})$$

donde n es el factorial de n y $f^{(n)}(a)$ denota la n -ésima derivada de f en el punto a ; la derivada cero de f es definida como la propia f y $(x-a)^0$ y $0!$ son ambos definidos como uno.

Las ecuaciones linealizadas se obtienen utilizando solo los dos primeros términos de la expansión por series de Taylor, los cuales al adecuarse a nuestro caso son:





$$f(i, x) = f(I, d) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{I, d} x' + \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{I, d} i' \quad (\text{A.13})$$

Tomando en cuenta solo la parte de las derivadas parciales tendremos lo siguiente:

$$f' = \left. \frac{\partial f(i, x)}{\partial x} \right|_{I, d} x' + \left. \frac{\partial f(i, x)}{\partial i} \right|_{I, d} i' \quad (\text{A.14})$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (A.9) en (A.14) se obtiene:

$$f' = \left. \frac{\partial \left(-\frac{1}{2a} L_0 i^2 e^{-x/a} \right)}{\partial x} \right|_{I, d} x' + \left. \frac{\partial \left(-\frac{1}{2a} L_0 i^2 e^{-x/a} \right)}{\partial i} \right|_{I, d} i' \quad (\text{A.15})$$

Realizando las derivadas se obtiene que:

$$f' = \frac{1}{2a^2} L_0 e^{-\frac{d}{a}} I^2 x' - \frac{1}{a} L_0 e^{-\frac{d}{a}} I i' \quad (\text{A.16})$$

El comportamiento de la esfera en levitación está dada por la ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = mg - F_m \quad (\text{A.17})$$

Despejando el valor de F_m tendremos que:

$$F_m = mg + m \frac{d^2 x'}{dt^2} \quad (\text{A.18})$$

Sustituyendo la ecuación (A.9) en la ecuación (A.18) se tiene que:

$$f(I, d) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{I, d} x' + \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{I, d} i' = mg + m \frac{d^2 x'}{dt^2} \quad (\text{A.19})$$

Como ya se menciono anteriormente en equilibrio $mg = f(I, d)$ por lo tanto se pueden eliminar los términos mg y $f(I, d)$, además igualando a cero la ecuación (A.19) quedará expresada de la siguiente manera:



$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{I,d} x' - \frac{\partial f}{\partial i} \Big|_{I,d} i' = 0 \quad (\text{A.20})$$

Se conocen los valores de las derivadas parciales de la ecuación (16), sustituyendo en la ecuación (A.20) se tiene:

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} - \frac{1}{2a^2} L_0 e^{-\frac{d}{a}} I^2 x' + \frac{1}{a} L_0 e^{-\frac{d}{a}} I i' = 0 \quad (\text{A.21})$$

Retomando la igualdad $L_0 e^{-\frac{d}{a}} = N^2 L_d$ la ecuación (A.21) quedará expresada de la siguiente manera:

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} - \frac{N^2 L_d I^2}{2a^2} x' + \frac{N^2 L_d I}{a} i' = 0 \quad (\text{A.22})$$

Aplicando transformada de Laplace con condiciones iniciales igual a cero a la ecuación (A.22) se tiene lo siguiente:

$$ms^2 X(s) - \frac{1}{2a^2} N^2 L_d I^2 X(s) + \frac{N^2 L_d I}{a} I(s) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Para conocer la dinámica del sistema de acuerdo a la ubicación de sus polos, se obtiene la función de transferencia dada por:

$$\frac{X'(s)}{I(s)} = \frac{-\frac{N^2 L_d I}{a}}{ms^2 - \frac{N^2 L_d I^2}{2a^2}} \quad (\text{A.24})$$

Retomando la ecuación (A.7) y aplicándole la inversa se tiene que:

$$\frac{1}{I} = \frac{\sqrt{N^2 L_d}}{\sqrt{2a mg}} \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo la ecuación (A.7) en la ecuación (A.24) obtendremos:

$$\frac{X'(s)}{I(s)} = -\frac{\frac{N^2 L_d}{a} \left(\sqrt{\frac{2a mg}{N^2 L_d}} \right)}{ms^2 - \frac{N^2 L_d}{2a^2} \left(\sqrt{\frac{2a mg}{N^2 L_d}} \right)^2} \quad (\text{A.26})$$

Reagrupando términos en la ecuación (A.26):





$$\frac{X'(s)}{I(s)} = -\frac{\frac{N^2 L_d}{a} \sqrt{\frac{2a mg}{N^2 L_d}}}{m \left(s^2 - \frac{g}{a} \right)} \quad (\text{A.27})$$

Para fines prácticos la ecuación (A.27) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{X'(s)}{I(s)} = -\frac{\sqrt{\frac{N^4 L_d^2}{m^2 a^2} \frac{2a mg}{N^2 L_d}}}{s^2 - \frac{g}{a}} = -\frac{\sqrt{\frac{N^2 L_d}{ma} 2g}}{s^2 - \frac{g}{a}} \quad (\text{A.28})$$

Por simplicidad el cociente de la raíz se multiplica por $\frac{2g}{2g}$ obteniendo lo siguiente:

$$\frac{X'(s)}{I(s)} = -\frac{\sqrt{4g^2 \left(\frac{N^2 L_d}{2mga} \right)}}{s^2 - \frac{g}{a}} \quad (\text{A.29})$$

Retomando la ecuación (A.25) y sustituyéndola en la ecuación (A.28) tendremos:

$$\frac{X'(s)}{I(s)} = \frac{-\frac{2g}{I}}{s^2 - \frac{g}{a}} \quad (\text{A.30})$$

Sustituyendo los valores de las constantes I , g y a que se indican en la ecuación (A.30), se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{X'(s)}{I(s)} = \frac{-7.5785}{s^2 - 2452.5} \quad (\text{A.31})$$

El sistema de levitación consta de una parte de medición que es la del sensor el comportamiento de este se muestra en la figura 2.



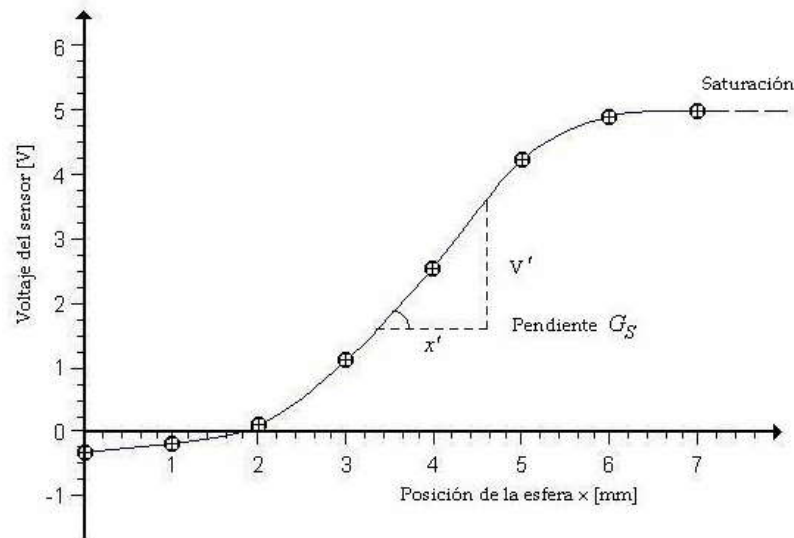


Figura 2. Gráfica experimental del comportamiento del sensor al variar la posición de la esfera metálica.

Si observamos el comportamiento del sistema de medición en la región de operación, puede ser representado por una línea recta de pendiente, G_s obtenida de la figura 1, de la siguiente forma:

$$G_s = \frac{V'}{x'} = \frac{2.305V - 1.11V}{4mm - 3mm} = 1.205 V/mm = 1205 V/m \quad (A.32)$$

La función de transferencia del sensor, como ya vimos es simplemente una constante y la relación que guarda con respecto a la variable de salida es:

$$X_o(s) = G_s X'(s) \quad (A.33)$$

Podemos entonces, relacionar las ecuaciones (A.31) (A.32) y (A.33) para obtener una nueva función de transferencia donde la distancia de separación x es una señal de voltaje, por lo que:

$$\frac{X_o(s)}{I(s)} = \frac{-9132.09}{s^2 - 2452.5} \quad (A.34)$$

Donde X_0 representa la posición de la esfera sobre el eje vertical e $I(s)$ es la corriente eléctrica que circula a través de la bobina.



BIBLIOGRAFÍA

- [1] Robert Word, *“Magnetismo: de la brújula a los imanes superconductores”*, Mc Graw-Hill, 1991.
- [2] W. G. Hurley y W. H. Wölfle, *“Electromagnetic Design of a Magnetic Suspension System”*, IEEE Transactions on Education, vol. 40, no. 2, May. 1997.
- [3] R. Dorf, *‘Sistemas Modernos de Control. Teoría y Práctica’*, Addison Wesley Iberoamericana, 1989
- [4] W. Bolton *“Ingeniería de control”*, 2ª Edición, Alfaomega, 2001.
- [5] Katsuhiko Ogata, *‘Ingeniería de Control Moderna’*, 2ª Edición, Prentice Hall, 1993.
- [6] Página Web: http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_control
- [7] William H. Hayt, *‘Teoría Electromagnética’*, 5ª Edición, Mc Graw Hill, 2001.
- [8] Kraus J., Fleisch D., *‘Electromagnetismo con Aplicaciones’*, 5ª Edición, Mc Graw Hill, 2000.





- [9] Tesis. Leonel G. Corona R., '*Diseño y construcción de un sistema de levitación magnética*', IPN-CINVESTAV Departamento de Ingeniería Eléctrica, Noviembre 2000.
- [10] Ángel A. H. y Aldo C. Z., "*Experiencia de levitación magnética de bajo costo para laboratorio de Control Automático*", Departamento de Ingeniería Eléctrica, PUCC, Santiago Chile, 1995.
- [11] F. Kronberg, P. I. Nikel y S. Poncelas, "*Teoría de errores. Histogramas*", Universidad Nacional de General San Martín, España 1999.
- [12] S. Gil y E. Rodríguez, "Teoría de errores–Incertezas de medición", UBA, Argentina 1998.
- [13] Jiménez O., Rashkovan V., Márquez J. F. y Méndez D., "*Diseño de un compensador del tipo Proporcional-Integral- Derivativo para controlar un sistema de levitación Electromagnético*", Presentado en el 4° CIIES, México D. F., Nov. 2005.
- [14] Página Web: <http://www.udistrital.edu.co/comunidad/grupos/maglev/11.htm>
- [15] B. Kuo, '*Sistemas Automáticos de Control*', Continental, 1982
- [16] Sandra Hernández G., '*Apuntes de la materia de Control II de la carrera de ICE*'. Prof. Omar Jiménez Ramírez.
- [17] Graham D. Lathrop R. C., "*The system of optimunresponse: Criteria and standardforms*", 1953, IIEE trans. Part II, p.p. 273-288.





CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Con la realización del presente trabajo se llegó al diseño y construcción del sistema de levitación magnética. Basándonos en primera instancia en el campo magnético generado por una bobina y el desplazamiento de una esfera metálica con masa $m = 55\text{mg}$.

Lo más importante en la realización del trabajo fue el diseño de un compensador capaz de hacer levitar la esfera metálica, tratando de eliminar tanto el error en estado estacionario como la inestabilidad del mismo ya que de manera natural el sistema de levitación es inestable así que se diseñaron primero dos tipos de compensadores, el primero fue el compensador PD el cual logró estabilizar el sistema teniéndose un error en estado estacionario; en segundo término el compensador (PI) el cual no se estableció.

Llegando a la conclusión de que es mejor combinar estos dos tipos de compensadores dando paso al compensador PID que nos permite llevar a cabo la levitación acaparando todas las necesidades requeridas, para el punto de operación planteado.





Se tiene las perspectivas siguientes para el sistema de levitación magnética:

- Diseñar un compensador PID que permita una respuesta mucho más rápida sin demandar otro tipo de componentes cuyo valor sea mas elevado.
- Realizar una planta la cual demande poca corriente y sea más fácil de implantar a nivel industrial.
- Analizar el sistema en otras dimensiones no solo en el desplazamiento en y si no también x y z .
- Diseñar una tarjeta de adquisición la cual nos permita mediante un programa operar la levitación por medios computarizados.
- Controlar al sistema de levitación con estrategias de variables de estado, contemplando variables tanto analógicas como digitales.

