**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

# ESPACIOS PESADOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS: PRIMITIVAS DE DERIVADAS

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS PRESENTAN:

**BELINDA RIVERA MUÑOZ**

**Y**

**SILVINA CORTEZ GÓMEZ**

DIRECTOR DE TESIS
DR. LUIS MANUEL TOVAR SÁNCHEZ

MEXICO, D. F., FEBRERO DEL 2004.

# Agradecimientos

*A mis padres: Por su dedicacin y entrega para
darnos a cada una de sus hijas la oportunidad de estudiar
y llegar a ser profesionales.*

*A mis hermanas:
Nora, Julisa, Edith y Miriam por sus buenos ejemplos
a seguir, sus consejos y palabras de a apoyo.*

*A mis sobrinos:
Alan Garcia y Marcos Lopez por su inocencia y visión
de la vida y por sus interminables preguntas.*

*A mi amigo:
Lic. Alexander Clemente, mi agradecimiento por estar
con migo apoyándome y ayudándome para poder terminar
esta etapa de mi vida.*

*A mi asesor:
Dr. Luis Manuel Tovar Sánchez por compartirme sus conocimientos,
por su tiempo y paciencia para la realización de este trabajo.*

*A los doctores:
Carlos Rentería Márquez, Enrique Ramírez de Arellano A.,
Miguel A. Xicotencatl Merino y Mikhaylo Shapiro Fishman;
con todo respeto, por su revisión, observaciones y
aprobación de este trabajo.*

*A CONACyT:
Por el apoyo otorgado.*

**Belinda Rivera Muñoz**.

*A mi asesor de tesis:*
*El Doctor Luis Manuel Tovar Sánchez por el tiempo*
*tan amablemente dedicado a este trabajo.*

*A San José María de Yermo y Parres:*
*Porque la inmensa bondad que tuvo hacia el projimo,*
*especialmente hacia las mujeres, ha contribuido demaciado*
*en mi formación profesional.*

*A las Siervas del Sagrado Corazón de Jesús y de los Pobres:*
*Integrantes de la Casa Hogar Nuestra Señora de la Paz,*
*muy especialmente a la Hermana María Paula Manzano Varela*
*por su comprensión, cuidado y apoyo para conmigo y a la Hermana Silvia*
*Velázquez Cortés por el gran apoyo brindado en el tiempo que he*
*permanecido con ellas, muchas gracias.*

*A mis hermanos:*
*Elena, Martha y Felipe porque su cariño y comprensión me*
*han ayudado a salir adelante y me motivarón constantemente en la*
*realización de este trabajo.*

*A mi gran amiga:*
*Celia Isabel del Barco López por ser una persona*
*tan maravillosa y estar conmigo en los momentos que más*
*la he necesitado.*

*A Tere. Perez., Iris, Guadalupe, Elena,*
*Elizabeth, Imelda, Olivia, Violeta, Lilia, Lorena, Janet,*
*Yadira, Elsa, Gabriela y la señora Tomasa por los momentos agradables*
*compartidos y el afecto mostrado.*

*A Dr. Enrique Ramírez de Arellano A., Dr. Mykhaylo Shapiro*
*Fishman, Dr. Miguel Alejandro Xicotencatl Merino y el Dr. Carlos*
*Rentería Marquez por las correcciones hechas al trabajo.*

*A CONACyT:*
*Por el apoyo brindado.*

**Silvina Cortez Gómez**.

# Índice general

# Introducción

Esta tesis es una ampliación del artículo titulado Weighted Function Spaces, Primitives and Derivatives elaborado por R. Aulaskari, L. F. Reséndis O. y L. M. Tovar S.

El trabajo realizado por nosotras fué desarrollar de la manera más clara posible, las demostraciones que el artículo ya contenía y consultar varios tipos de revistas y libros para elaborar algunas otras que solamente se enunciaban.

El objetivo principal del artículo Weighted Function Spaces, Primitives and Derivatives es, dada una función analítica definida en el disco unitario abierto que pertenece a alguno de los espacios $D_p, B^\alpha, \mathcal{Q}_p$ *o* $H^p$, analizar el comportamiento de sus primitivas y derivadas, es decir, si estas funciones se encuentran dentro del espacio dado o caen en alguno de los otros espacios.

Una de las razones más importantes para estudiar funciones analíticas en el disco unitario abierto nos la da el Teorema del mapeo de Riemann (Teorema B.16) el cual nos dice que cualquier dominio simplemente conexo del plano complejo distinto de $\mathbb{C}$ es "bianalíticamente" equivalente al disco unitario abierto. Nos interesa el comportamiento de dichas funciones cuando nos aproximamos a la frontera.

El hecho por el cual se les llama espacios pesados de funciones analíticas es porque se trata de medir el comportamiento de la función agregándole un "peso" para contrarrestar la convergencia a infinito del módulo de la derivada cuando nos acercamos a ciertos subconjuntos de la frontera.

Nuestro trabajo no está organizado totalmente en el orden del artículo sino de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, se introduce la notación que se usará en la tesis y se dan las definiciones de los espacios en el siguiente orden; $D_p, B^\alpha, \mathcal{Q}_p$ y $H^p$, se demuestra que son espacios de Banach, se dan ejemplos de funciones en dichos espacios, se verifican relaciones de contención entre los cuatro espacios y entre ellos mismos cuando $p < q$ por ejemplo.

En el Capítulo 2, se analizan las primitivas y derivadas de funciones dadas en alguno de los cuatro espacios y se dan ejemplos que ilustran tales situaciones.

Al final del artículo se incluyen dos apéndices, uno de Análisis Real y el otro de Análisis Complejo los cuales contienen resultados que se utilizan en las demostraciones. Tales resultados no se demuestran debido a que ya los contienen los libros de las áreas antes mencionadas y se incluyen solamente para facilidad del lector. Cuando hagamos uso de los teoremas que se incluyen en ambos apéndices nos referiremos a ellos como Teorema A. o Teorema B. y el número que le corresponda en el apéndice.

# Capítulo 1

# Propiedades de los espacios pesados.

En este trabajo adoptaremos las siguientes notaciones:

Para $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, consideremos el disco abierto $\Delta(z, r) = \{z : |z| < r\}$ con centro en $z$ y radio $r$, y su cerradura $\overline{\Delta}(z, r)$. Denotaremos al disco unitario abierto simplemente por $\Delta = \Delta(0, 1)$ y su frontera como $T = \partial\Delta$.

Se denotará como $\mathcal{A}$ al conjunto de funciones analíticas $f : \Delta \to \mathbb{C}$ (ver Definición B.2).

Para toda $z, w \in \Delta$, denotaremos la función de Green (ver [Co] p. 275) con singularidad logarítmica en $w$ por:

$$g(z, w) = \log \frac{|1 - \overline{w}z|}{|w - z|}. \tag{1.1}$$

Sea $\phi_a$ la transformación de Möbius (ver [Si] p. 89) dada por:

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \quad |a| < 1, \tag{1.2}$$

con polo en $z = 1/\overline{a}$. Esta transformación cumple que $\phi_a(\phi_a(z)) = z$ y su jacobiano satisface la relación

$$|\phi_a'(z)|^2 = \frac{(1 - |\phi_a(z)|^2)^2}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}z|^4}. \tag{1.3}$$

## 1.1. El espacio $D_p$.

En esta sección estudiaremos un espacio de funciones analíticas en el disco unitario que será de gran importancia por la relación que guarda con los espacios que se estudiarán más adelante.

**Definición 1.1** *Para $p \in \mathbb{R}$ y $f$ analítica en $\Delta$, con desarrollo en serie de potencias dado por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Se define el espacio $D_p$ como:*

$$D_p = \{f \in \mathcal{A} : \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2 < \infty\}.$$

*Para $p = 0$ tenemos el espacio conocido como espacio de Dirichlet el cual denotaremos por $\mathcal{D} = D_0$.*

**Proposición 1.1** *Si $p < q$ entonces $D_p \subset D_q$.*

Demostración.

Sea $f \in D_p$, como $p < q$ tenemos que $1 - q < 1 - p$, así

$$n^{1-q}|a_n|^2 < n^{1-p}|a_n|^2.$$

Aplicando la Observación A.2 se tiene que $f \in D_q$. ■

El siguiente teorema nos da otro criterio para saber cuando una función pertenece al espacio $D_p$, si $p > -1$.

**Teorema 1.1** *Para $p > -1$ la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}$ pertenece al espacio $D_p$ si y sólo si*

$$\iint_{\Delta} |f'(z)|^2(1 - |z|^2)^p \, dx \, dy < \infty.$$

Demostración.

Utilizando la Observación A.1 y el Teorema A.9 tenemos

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Delta} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^p\,dx\,dy \\
&\qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n\overline{a_m} nm\, r^{n+m-2} e^{i(n-m)\theta}(1-r^2)^p\, r\,dr\,d\theta \\
&\qquad = \int_0^1 \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n\overline{a_m} nm\, r^{n+m-1}(1-r^2)^p \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta\,dr \\
&\qquad = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2\int_0^1 r^{2n-1}(1-r^2)^p\,dr.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Integrando por partes cada una de las siguientes integrales, excepto la última, tomando $u_k = r^{2n-2k}$ y $dv_k = r(1-r^2)^{p+k-1}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 r^{2n-1}(1-r^2)^p\,dr = \frac{n-1}{p+1}\int_0^1 (1-r^2)^{p+1} r^{2n-3}\,dr \\
&\quad = \frac{(n-1)(n-2)}{(p+1)(p+2)}\int_0^1 (1-r^2)^{p+2}\, r^{2n-5}\,dr \\
&\quad \vdots \\
&\quad = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))(n-k)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+(k-1))(p+k))}\int_0^1 (1-r^2)^{p+k}\, r^{2n-(2k+1)}\,dr \\
&\quad \vdots \\
&\quad = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)\cdots(n-(n-1))}{(p+1)(p+2)\cdots(p+k)\cdots(p+(n-1))}\int_0^1 (1-r^2)^{p+(n-1)}\, r\,dr \\
&\quad = \frac{1}{2}\,\frac{(n-1)!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+k)\cdots(p+(n-1))(p+n)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto de (1.4), lo calculado y la Definición A.1 se tiene

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^p\,dx\,dy &= 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2\frac{1}{2}\frac{(n-1)!}{(p+1)\cdots(p+n)}\\ &= \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n)}\\ &= \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\frac{1}{\binom{n+p}{p}}. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Sean $a_n = \frac{n|a_n|^2}{\binom{n+p}{p}}$, $b_n = \frac{\Gamma(p+1)n|a_n|^2}{n^p}$, entonces $a_n > 0$ y $b_n > 0$. Utilizando la Proposición A.1 3) y la Definición A.1 resulta que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^p}{\Gamma(p+1)\binom{n+p}{p}}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!n^p}{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}}\frac{n!n^p}{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} 1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Así por el Teorema A.1, tenemos que $\Gamma(p+1)\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2 < \infty$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\frac{1}{\binom{n+p}{p}} < \infty$.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2 < \infty$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\frac{1}{\binom{n+p}{p}} < \infty$. ■

**Corolario 1.1** *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entoces $f \in \mathcal{D}$ si y sólo si*

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty.$$

Demostración.

Se sigue de (1.5), al tomar $p = 0$. ■

Verifiquemos que $D_p$ tiene estructura de espacio de Banach. Para ello se necesita que el espacio sea vectorial, normado y completo.

**Teorema 1.2** *$D_p$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\|f\|_{D_p} := |f(0)| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración.

Los únicos puntos que no son inmediatos para demostrar que el espacio $D_p$ es de Banach son: *i*) bajo la norma definida se satisface la desigualdad del triángulo, lo cual demostraría también que bajo la suma el espacio es cerrado y *ii*) bajo la norma el espacio resulta completo.

*i*) Sean $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, así $(f+g)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$.

Utilizando la desigualdad de Minkowski (Teorema B.17) tenemos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{D_p} &= |(f+g)(0)| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n+b_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |f(0)| + |g(0)| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big[n^{\frac{1-p}{2}}|a_n+b_n|\Big]^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |f(0)| + |g(0)| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|b_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= |f(0)| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + |g(0)| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|b_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{D_p} + \|g\|_{D_p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|f+g\|_{D_p} \leq \|f\|_{D_p} + \|g\|_{D_p}$.

*ii*) Sea $\{f_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $D_p$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un natural $N(\epsilon) = N$ tal que $\|f_r - f_s\|_{D_p} < \epsilon$ si $r, s \geq N$. Cada $f_l \in \{f_l\}_{n\in\mathbb{N}}$ estará dada por $f_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(l)} z^n$.

Sea $0 < \epsilon' = \epsilon/n^{(1-p)/2}, \epsilon' > 0$.

$$|f_r(0) + f_s(0)| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n^{(r)} - a_n^{(s)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \; si \; r, s \geq N.$$

Con lo que $|a_0^{(r)} - a_0^{(s)}| < \epsilon$ y $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n^{(r)} - a_n^{(s)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$ si $r, s \geq N$. Así $|a_n^{(r)} - a_n^{(s)}| < \epsilon/n^{(1-p)/2} = \epsilon'$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $r, s \geq N$.

De donde se concluye que $\{a_n^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, por lo tanto converge. Sea $a_n^{(0)}$ su límite y definamos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} z^n$, entonces tomando $r$ fijo, haciendo tender $s$ a infinito y aplicando el Teorema B.1 tenemos

$$\|f_r - f\|_{D_p} \leq \epsilon.$$

Además $\|f\|_{D_p} - \|f_r\|_{D_p} \leq \|f_r - f\|_{D_p} \leq \epsilon$, teniendo por consiguiente que $\|f\|_{D_p} \leq \epsilon + \|f_r\|_{D_p} < \infty$, y así $f \in D_p$. ■

Sea

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n^2},$$

la cual es analítica en $\Delta$.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $f_n(z) = \frac{z^{2^n}}{n^2}$, entonces

$$\left|\frac{z^{2^n}}{n^2}\right| \leq \frac{|z|^{2^n}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Luego por el Criterio M de Weierstrass (Teorema B.12) $f(z)$ es uniformemente convergente en $\overline{\Delta}$. Dado que los sumandos en la serie son continuos, por el Teorema B.13 $f(z)$ es continua también en $\overline{\Delta}$.

Además por el Corolario 1.1

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2\, dx\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left|\frac{1}{n^2}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4},$$

y esta serie no es convergente por lo tanto $f \notin \mathcal{D}$.

Por lo tanto $\mathcal{D}$ no contiene a todas las funciones en $\mathcal{A}$ y continuas en $\overline{\Delta}$

Sin embargo en $\mathcal{D}$ hay funciones no acotadas. Por ejemplo

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} z^n.$$

Nos damos cuenta que $f$ no está acotada al tomar el límite cuando $z \to 1$ y considerar el Teorema A.2.

Ahora por el Corolario 1.1 tenemos que:

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2\, dx\, dy = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 \log^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n},$$

luego por el Teorema A.3 tenemos que $f \in \mathcal{D}$.

**Teorema 1.3** *Sea $q \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces las siguientes contenciones son estrictas*

$$\bigcup_{p<q} D_p \subsetneq D_q \subsetneq \bigcap_{q<r} D_r.$$

Demostración.

Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1-\frac{q}{2}}}.$$

Veamos que $f \in \bigcap_{q<r} D_r - D_q$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-r}|a_n|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-r}\frac{1}{|n^{1-\frac{q}{2}}|^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{r-q+1}}.\end{aligned}$$

Como $r-q+1>1$, por el Teorema A.10 la serie converge. Por lo tanto $f \in \bigcap\limits_{q<r} D_r$.

Por otro lado si $q=r$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{r-q+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Por el Teorema A.10 esta serie diverge. Por lo tanto $f \in \bigcap\limits_{q<r} D_r - D_q$.

Ahora sea $s>1$ fijo y $g:\Delta \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n^{1-\frac{q}{2}}\log^s n}.$$

Veamos que $g \in D_q$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n^{1-q}|a_n|^2 &= \sum_{n=2}^{\infty} n^{1-q}\frac{1}{|n^{1-\frac{q}{2}}\log^s n|^2}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{2s} n}.\end{aligned}$$

Como $2s>1$, por el Teorema A.3 se sigue que ésta es una serie convergente, entonces $g \in D_q$.

Sea $p < q$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2 &= \sum_{n=2}^{\infty} n^{1-p}\frac{1}{|n^{1-\frac{q}{2}}\log^s n|^2}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n^{1-p}\Big(\frac{1}{n^{2-q}\log^{2s} n}\Big)\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+p-q}\log^{2s} n}.\end{aligned}$$

Debido a que $1+p-q<1$ y $2s>0$ por el Teorema A.4 la serie diverge. Por lo tanto $g \in D_q - \bigcup_{p<q} D_p$. ■

## 1.2. El espacio $B^\alpha$.

En esta sección estudiaremos funciones en $\mathcal{A}$ que satisfacen cierta condición de "peso" distinta a la del espacio $D_p$. Demostraremos algunas propiedades que cumplen estos espacios y veremos que relaciones de contención existen entre este espacio y el espacio $D_p$.

**Definición 1.2** *Sea $\alpha > 0$, se define el espacio $B^\alpha$ como:*

$$B^\alpha = \{f \in \mathcal{A} : \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| < \infty\}.$$

*Al tomar $\alpha$=1 se obtiene el llamado espacio de Bloch que denotaremos por $\mathcal{B} = B^1$.*

**Definición 1.3** *Sea $B_0$ el pequeño espacio de Bloch cuyos elementos son funciones en $\mathcal{A}$ que satisfacen la siguiente condición*

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)|f'(z)| = 0.$$

Demos algunos ejemplos de funciones que pertenecen al espacio $B^\alpha$.

**Ejemplo 1.1** *Sea $\alpha > 0$ y $f \in \mathcal{A}$ tal que $|f'(z)| \leq k$ para toda $z \in \Delta$, entonces*

$$(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| \leq (1-|z|^2)^\alpha k \leq k < \infty.$$

*Por lo tanto $B^\alpha$ contiene a todas las funciones con derivada acotada.*

**Ejemplo 1.2** *Sea $f(z) = \log(1-z)$ y $\alpha \geq 1$*

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| &\leq (1-|z|^2)^\alpha \left(\frac{1}{1-|z|}\right) \\ &= (1-|z|)^{\alpha-1}(1+|z|)^\alpha \\ &< \infty.\end{aligned}$$

*Por lo tanto $f(z) \in B^\alpha$ para $\alpha \geq 1$.*

**Proposición 1.2** *Para $\alpha \geq 1$, $B^\alpha$ contiene a las funciones en $\mathcal{A}$ y acotadas en $\Delta$.*

Demostración.

Sean $z, w \in \Delta$, $f \in \mathcal{A}$ y acotada en $\Delta$, y $\varphi, \psi : \Delta \to \Delta$ definidas por:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{z+w}{1+\overline{w}z}, \\ \psi(z) &= \frac{z-f(w)}{1-\overline{f(w)}z}.\end{aligned}$$

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi'(z) &= \frac{1-|w|^2}{(1+\overline{w}z)^2}, \\ \psi'(z) &= \frac{1-|f(w)|^2}{(1-\overline{f(w)}z)^2}.\end{aligned}$$

$\psi \circ f \circ \varphi : \Delta \to \Delta$ es analítica en $\Delta$. Veamos que $(\psi \circ f \circ \varphi)(0) = 0$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
(\psi \circ f \circ \varphi)(0) &= (\psi \circ f)(\varphi(0)) \\
&= (\psi \circ f)\left(\frac{w+0}{1+0}\right) \\
&= \psi(f(w)) \\
&= \frac{f(w) - f(w)}{1 - |f(w)|^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned}
(\psi \circ f \circ \varphi)'(0) &= \psi'((f \circ \varphi)(0))(f \circ \varphi)'(0) \\
&= \psi'(f(\varphi(0)))f'(\varphi(0))\varphi'(0) \\
&= \psi'(f(w))f'(w)\varphi'(0) \\
&= \frac{1 - |f(w)|^2}{(1 - |f(w)|^2)^2} f'(w)(1 - |w|^2) \\
&= \frac{f'(w)}{1 - |f(w)|^2}(1 - |w|^2). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Del Lema de Schwarz (Lema B.1) tenemos que $|(\psi \circ f \circ \varphi)'(0)| \leq 1$. Luego de este hecho y de (1.6) se tiene

$$|f'(w)|(1 - |w|^2) \leq |1 - |f(w)|^2|.$$

Sea $\alpha \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
|f'(w)|(1 - |w|^2)^\alpha &\leq |f'(w)|(1 - |w|^2) \\
&\leq |1 - |f(w)|^2|.
\end{aligned}$$

Pero tenemos que $f$ es acotada en $\Delta$, entonces $|1 - |f(w)|^2| \leq M$ para toda $z \in \Delta$, con lo que:

$$|f'(w)|(1 - |w|^2)^\alpha \leq M.$$

Por lo tanto $f \in B^\alpha$. ■

El Ejemplo 1.2 y la proposición precedente muestran que para $\alpha \geq 1$, $B^\alpha$ contiene funciones tanto acotadas en $\Delta$ como algunas que no lo son.

**Proposición 1.3** *Sean $r$ y $s$ tales que $0 < r < s$. Entonces $B^r \subset B^s$.*

Demostración.

Sea $f \in B^r$. Entonces

$$\sup_{z \in \Delta} (1 - |z|^2)^r |f'(z)| < \infty.$$

Por hipótesis tenemos que $r < s$ y como $1 - |z|^2 \leq 1$, entonces

$$(1 - |z|^2)^s |f'(z)| \leq (1 - |z|^2)^r |f'(z)|$$

Esto implica que:

$$\sup_{z \in \Delta} (1 - |z|^2)^s |f'(z)| < \infty.$$

Por lo tanto $f \in B^s$. ∎

**Proposición 1.4** *Se cumple que $B_0 \subset \mathcal{B}$.*

Demostración.

Sea $f \in B_0$. Entonces

$$\lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)|f'(z)| = 0. \tag{1.7}$$

Supongamos que $f \notin \mathcal{B}$, esto es

$$\sup_{z \in \Delta} (1 - |z|^2)|f'(z)| = \infty.$$

Entonces existe $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sucesión en $\Delta$ tal que $(1 - |z_k|^2)|f'(z_k)|$ no está acotada. Como $\{z_k\}$ es una sucesión acotada, entonces tiene una subsucesión convergente, sea $\{z_m\}$ dicha subsucesión. Entonces $\{z_m\}$ tiene dos opciones: converger a un punto de T , en cuyo caso $\lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z_m|^2)|f'(z_m)| = \infty$, lo cual es una contradicción a (1.7), ó converger a un punto $\omega \in \Delta$, con lo que se tendría $(1-|\omega|^2)|f'(\omega)| < \infty$, ya que $1-|\omega|^2 < 1$ y $f$ es analítica en $\Delta$, lo cual contradice que $f \notin \mathcal{B}$.

Por lo tanto $f \in \mathcal{B}$. ■

A continuación demostraremos que $B^\alpha$ con $\alpha > 0$ tiene estructura de espacio de Banach. Sólo bastará demostrar que bajo la norma que definiremos resulta un espacio completo, pues verificar que $B^\alpha$ es un espacio vectorial normado es inmediato.

**Teorema 1.4** *Sea $\alpha > 0$. Entonces $B^\alpha$ es un espacio de Banach, con la norma*

$$\|f\|_{B^\alpha} := |f(0)| + \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|.$$

Demostración.

Sea $f \in B^\alpha$, entonces $\sup\limits_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| = M < \infty$, con lo que:

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{(1-|z|^2)^\alpha}. \tag{1.8}$$

Sea $z = |z|e^{i\theta}$ la representación trigonométrica de $z$. Entonces

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \int_0^z f'(\xi)d\xi \\ &= e^{i\theta}\int_0^{|z|} f'(te^{i\theta})dt. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Así de (1.8) y (1.9) se tiene que:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(0)| + M\int_0^{|z|} \frac{dt}{(1-|te^{i\theta}|^2)^\alpha} \\ &= |f(0)| + M\int_0^{|z|} \frac{dt}{(1-t^2)^\alpha} \\ &\leq |f(0)| + M\int_0^{|z|} \frac{dt}{(1-t)^\alpha}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Sea $r \in (0,1)$, definamos $D = \{z \in \Delta : |z| \leq r\}$, el cual es un compacto en $\Delta$. Dividamos la demostración en dos casos:

Caso 1) Sea $\alpha \leq 1$ y $z \in D$.

De (1.10) se sigue que:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(0)| + M \int_0^{|z|} \frac{dt}{(1-t)} \\ &= |f(0)| + M \left( \log \frac{1}{1-|z|} \right) \\ &\leq |f(0)| + M \left( \log \frac{1}{1-r} \right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B^\alpha$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un natural $N(\epsilon) = N$ tal que $||f_n - f_m||_{B^\alpha} < \epsilon$ si $m, n \geq N$.

Ahora de (1.11) tenemos:

$$\begin{aligned} &|f_n(z) - f_m(z)| \\ &\quad \leq |f_n(0) - f_m(0)| + \left[ \sup_{z\in\Delta} (1-|z|^2)^\alpha |f_n'(z) - f_m'(z)| \right] \left( \log \frac{1}{1-r} \right) \\ &\quad \leq |f_n(0) - f_m(0)| + \left[ \sup_{z\in\Delta} (1-|z|^2)^\alpha |f_n'(z) - f_m'(z)| \right] \left( \log \frac{1}{1-r} \right) \\ &\quad + |f_n(0) - f_m(0)| \left( \log \frac{1}{1-r} \right) + \sup_{z\in\Delta} (1-|z|^2)^\alpha |f_n'(z) - f_m'(z)| \\ &\quad = ||f_n - f_m||_{B^\alpha} \left( \log \frac{1}{1-r} \right) + ||f_n - f_m||_{B^\alpha} \\ &\quad = ||f_n - f_m||_{B^\alpha} \left( \log \frac{1}{1-r} + 1 \right) \\ &\quad < \epsilon \left( \log \frac{1}{1-r} + 1 \right). \end{aligned}$$

Por lo que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en compactos de $\Delta$. Luego por el Teorema B.1 tenemos que $f = \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ es analítica en $\Delta$ y $f_i' \to f'$, cuando $i \to \infty$.

Tomando $n$ fija y haciendo tender $m$ a infinito, se obtiene

$$\|f_n - f\|_{B\alpha} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto como $B^\alpha$ es un espacio vectorial, $f \in B^\alpha$.

Caso 2) Sea $\alpha > 1$ y $z \in D$, luego de (1.10) se sigue que:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq |f(0)| + M\int_0^{|z|} \frac{dt}{(1-t)^\alpha} \\
&= |f(0)| + M\frac{1}{(\alpha-1)}\left[\frac{1}{(1-|z|)^{\alpha-1}} - 1\right] \\
&\leq |f(0)| + M\frac{1}{(\alpha-1)(1-r)^{\alpha-1}}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B^\alpha$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un natural $N(\epsilon) = N$ tal que $||f_n - f_m||_{B^\alpha} < \epsilon$ si $m, n \geq N$.

Así de (1.12) se sigue que:

$$\begin{aligned}
&|f_n(z) - f_m(z)| \\
&\quad \leq |f_n(0) - f_m(0)| + \left[\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^\alpha |f_n'(z) - f_m'(z)|\right]\frac{1}{(\alpha-1)(1-r)^{\alpha-1}} \\
&\quad \leq |f_n(0) - f_m(0)| + \left[\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^\alpha |f_n'(z) - f_m'(z)|\right]\frac{1}{(\alpha-1)(1-r)^{\alpha-1}} \\
&\quad +|f_n(0) - f_m(0)|\frac{1}{(\alpha-1)(1-r)^{\alpha-1}} + \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^\alpha |f_n'(z) - f_m'(z)| \\
&\quad = \|f_n - f_m\|_{B^\alpha}\frac{1}{(\alpha-1)(1-r)^{\alpha-1}} + \|f_n - f_m\|_{B^\alpha} \\
&\quad = \|f_n - f_m\|_{B^\alpha}\left[\frac{1}{(\alpha-1)(1-r)^{\alpha-1}} + 1\right] \\
&\quad < \epsilon\left[\frac{1}{(\alpha-1)(1-r)^{\alpha-1}} + 1\right].
\end{aligned}$$

Entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en compactos de $\Delta$. Luego por el Teorema B.1 tenemos que $f = \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ es analítica en $\Delta$ y $f_i' \to f'$, cuando $i \to \infty$. Por el mismo argumento antes utilizado tenemos que $f \in B^\alpha$.

Por lo tanto $(B^\alpha, \|f\|_{B^\alpha})$, con $\alpha > 0$ es un espacio de Banach. ■

**Proposición 1.5** *Si* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$, *entonces*

$$|a_n| \leq \frac{e}{2}\|f\|_{\mathcal{B}}, \quad n = 0, 1, \ldots \quad ,$$

*donde la constante* $\frac{e}{2}$ *es la menor posible.*

Demostración.

Para $n = 0$ :

$$\begin{aligned} |a_0| &\leq |a_0| + \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)| \\ &\leq \frac{e}{2}\|f\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$ : Por hipótesis $f \in \mathcal{B}$, entonces $(1-|z|^2)|f'(z)| \leq \|f\|_{\mathcal{B}}$ para toda $z \in \Delta$; en particular para $z = 0$ con lo que

$$\begin{aligned} |a_1| &= (1-|0|^2)|f'(0)| \\ &\leq \frac{e}{2}\|f\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Para $n \geq 2$. Usemos la fórmula de Cauchy para los coeficientes y tomemos $\xi = re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{1}{i2\pi n}\int_{|\xi|=r}\frac{f'(\xi)}{\xi^n}\,d\xi\right| \\ &= \frac{1}{2\pi n}\left|\int_{|\xi|=r}\frac{(1-|\xi|^2)f'(\xi)}{(1-r^2)\xi^n}\,d\xi\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi n}\int_{|\xi|=r}\frac{(1-|\xi|^2)|f'(\xi)|}{(1-r^2)|\xi|^n}\,|d\xi| \\ &\leq \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{2\pi n(1-r^2)}\int_{|\xi|=r}\frac{|d\xi|}{|\xi|^n} \\ &= \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{2\pi n(1-r^2)}\int_0^{2\pi}\frac{|ire^{i\theta}|}{|re^{i\theta}|^n}\,d\theta \\ &= \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{2\pi n(1-r^2)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r^{n-1}} \\ &= \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{n(1-r^2)}\frac{1}{r^{n-1}}, \end{aligned}$$

para todo $r \in (0,1)$.

Verifiquemos que:

$$\max_{r\in(0,1)}\{r^{n-1}(1-r^2)\} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2}{n+1}\right).$$

Sea

$$h(r) = (1-r^2)r^{n-1} = r^{n-1} - r^{n+1}.$$

Derivando obtenemos

$$h'(r) = (n-1)r^{n-2} - (n+1)r^n = r^{n-2}[(n-1) - r^2(n+1)] = 0,$$

teniendo por consecuencia

$$r = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} > 0.$$

Al calcular $h''$

$$\begin{aligned} h''(r) &= (n-2)(n-1)r^{n-3} - n(n+1)r^{n-1} \\ &= r^{n-3}[(n-2)(n-1) - n(n+1)r^2], \end{aligned}$$

y al substituir el valor de $r$ en ésta, obtenemos:

$$\begin{aligned} h''(r) &= r^{n-3}\left[(n-2)(n-1) - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)n(n+1)\right] \\ &= r^{n-3}(-2)(n-1) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} h\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right) &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\max_{r\in(0,1)}\{r^{n-1}(1-r^2)\} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2}{n+1}\right).$$

Teniéndose así que:

$$\begin{aligned}
|a_n| &\leq \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{n(\frac{n-1}{n+1})^{\frac{n-1}{2}}\frac{2}{n+1}}\\
&= \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}(n+1)(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{2n(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}\\
&= \frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{B}}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}} = e.$$

Por lo que $\varphi(n)\to\frac{e}{2}$ cuando $n\to\infty$.

Utilizando la Proposición A.2 llegamos a:

$$\varphi'(n) = \frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left[(1+n)\left\{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)-\frac{1}{n+1}\right\}-\frac{1}{n}\right].$$

Al aplicar la Proposición A.3 se obtiene

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) &> 2\left(\frac{\frac{n+1}{n-1}-1}{\frac{n+1}{n-1}+1}\right)\\ &= \frac{2}{n},\end{aligned}$$

pues $1+\frac{2}{n-1}>0$.

Entonces $\varphi'(n)>0$, por lo que la función $\varphi(n)$ es creciente y como converge es acotada, y de hecho converge al supremo, entonces

$$\sup_{n\geq 2}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}=\frac{e}{2}.$$

Por lo tanto $|a_n|\leq \frac{e}{2}\|f\|_{\mathcal{B}}$, donde la constante $\frac{e}{2}$ es la menor posible. ■

**Definición 1.4** *Las funciones que se pueden representar de la siguiente forma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ con $\frac{n_{k+1}}{n_k}\geq\lambda>1$ y $n_k\in\mathbb{N}$ son llamadas series lacunarias. (Se les da el nombre de lacunaria por los ceros que van apareciendo en los coeficientes con cierta frecuencia, como lagunas que en inglés es lacuna.)*

La siguiente proposición nos dará una condición necesaria para que una función que se puede representar como serie lacunaria pertenezca al espacio de Bloch.

**Proposición 1.6** *Sea $f:\Delta\to\mathbb{C}$ una función en $\mathcal{A}$ cuya representación es una serie lacunaria y $|a_k|\leq M$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Entonces $f\in\mathcal{B}$.*

Demostración.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $M=1$.

Tenemos para $z \in \Delta$ que:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||z|^{n_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{n_k} \\
&= |z|^{n_1} + |z|^{n_2} + \cdots + |z|^{n_m} + \cdots \\
&\leq |z| + |z|^2 + \cdots + |z|^n + \cdots \\
&= |z| \sum_{i=0}^{\infty} |z|^i \\
&= \frac{|z|}{1-|z|},
\end{aligned}$$

la última igualdad es por el Teorema B.10.

Notemos que para $n_s \leq n < n_{s+1}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n_k \leq n} \frac{n_k}{n} &\leq \sum_{k=1}^{s} \frac{n_k}{n_s} \\
&= \frac{n_1}{n_s} + \frac{n_2}{n_s} + \cdots + \frac{n_{s-1}}{n_s} + \frac{n_s}{n_s} \\
&\leq (\lambda^{-1})^{s-1} + (\lambda^{-1})^{s-2} + \cdots + (\lambda^{-1})^2 + \lambda^{-1} + 1 \\
&\leq \frac{1}{1-\lambda^{-1}}. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Ahora para $z \in \Delta$ tenemos

$$\frac{zf'(z)}{1-|z|} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} n_k |a_k||z|^{n_k} \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} |z|^i \right).$$

De ésto, de (1.13) y haciendo uso del Teorema B.10 tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{|z||f'(z)|}{1-|z|} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} n_k|z|^{n_k}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}|z|^i\right) \\
&= \sum_{n=n_1}^{\infty}\left(\sum_{n_k\leq n} n_k\right)|z|^n \\
&\leq \sum_{n=n_1}^{\infty}\left(\frac{n}{1-\lambda^{-1}}\right)|z|^n \\
&= \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\sum_{n=n_1}^{\infty} n|z|^n \\
&\leq \frac{1}{1-\lambda^{-1}}|z|\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|z|^n \\
&= \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue

$$(1-|z|)|f'(z)| \leq \frac{1}{1-\lambda^{-1}}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)|f'(z)| &= (1+|z|)(1-|z|)|f'(z)| \\
&\leq 2(1-|z|)|f'(z)| \\
&\leq \frac{2}{1-\lambda^{-1}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{B}$. ■

En los siguientes tres teoremas demostraremos que relaciones de contención existen entre los espacios $B^\alpha$ y $D_p$.

**Teorema 1.5** *Sea $p > 0$. Entonces $B^{\frac{p}{2}} \subset D_p$.*

Demostración.

Sea $f \in B^{\frac{p}{2}}$, entonces $\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^{\frac{p}{2}}|f'(z)| < \infty$. Además

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|z|^2)^p\,dx\,dy &= \iint_\Delta \left[|f'(z)|(1-|z|^2)^{\frac{p}{2}}\right]^2 dx\,dy \\
&\leq \sup_{z\in\Delta}\left[(1-|z|^2)^{\frac{p}{2}}|f'(z)|\right]^2 \iint_\Delta dx\,dy \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in D_p$. ∎

**Teorema 1.6** *Sea $p > -1$. Entonces*

$$\bigcup_{0<\alpha<\frac{p+1}{2}} B^\alpha \subset D_p.$$

Demostración.

Sea $f \in \bigcup_{0<\alpha<\frac{p+1}{2}} B^\alpha$, entonces existe un número $\alpha' \in \left(0, \frac{p+1}{2}\right)$ tal que $\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^{\alpha'}|f'(z)| = M < \infty$, luego

$$|f'(z)|^2 \leq \frac{M^2}{(1-|z|^2)^{2\alpha'}}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|z|^2)^p\,dx\,dy &\leq \iint_\Delta \frac{M^2}{(1-|z|^2)^{2\alpha'}}(1-|z|^2)^p\,dx\,dy \\
&= M^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^{2\alpha'-p}}\,dr\,d\theta \\
&\leq 2\pi M^2\int_0^1 \frac{dr}{(1-r)^{2\alpha'-p}} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ya que $2\alpha' - p < 1$ y por el Teorema A.5.

Por lo tanto $f \in D_p$. ∎

**Teorema 1.7** *Sea $\alpha > 0$. Entonces $B^\alpha \subset \bigcap_{2\alpha-1<q} D_q$.*

Demostración.

Tenemos que $2\alpha - 1 < q$ y $\alpha > 0$, entonces $-1 < 2\alpha - 1 < q$, así $q > -1$ y $\alpha < \frac{q+1}{2}$.

Sea $f \in B^\alpha$. Entonces de la demostración del teorema precedente se tiene, que para todo $q > 2\alpha - 1$

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|z|^2)^q \, dx\, dy &\leq M^2 \iint_\Delta \frac{dx\, dy}{(1-|z|^2)^{2\alpha-q}} \\
&= M^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^{2\alpha-q}} \, dr\, d\theta \\
&\leq 2\pi M^2 \int_0^1 \frac{dr}{(1-r)^{2\alpha-q}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Pues de $q > 2\alpha - 1$ se sigue que $1 > 2\alpha - q$ y por el Teorema A.5. Por lo tanto $f \in \bigcap_{2\alpha-1<q} D_q$. ■

**Definición 1.5** *Para $1 \leq p < \infty$ decimos que $f$ pertenece al espacio de Bergman $L^p_a$ (ver [Zh]) si:*

$$\|f\|_{L^p_a} := \left[\frac{1}{\pi}\iint_\Delta |f(z)|^p \, dz\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

El siguiente resultado nos da otro criterio para saber cuando una función pertenece al espacio de Bloch. Lo utilizaremos en la sección 2.4.

**Teorema 1.8** *Sean $1 \leq p < \infty$ y $0 < r < 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$,

*ii)* $\sup_{a\in\Delta} \|(f \circ \phi_a)(z) - f(a)\|_{L^p_a} < \infty$.

*donde* $\phi_a$ *es la transformación de Möbius definida en (1.2).*

Demostración.

$ii) \Rightarrow i)$ Supongamos que:

$$\sup_{a\in\Delta} \|(f \circ \phi_a)(z) - f(a)\|_{L^p_a} < \infty. \tag{1.14}$$

Sea $f \in \mathcal{A}$ y $t \in (0,1)$. La función analítica $f$ tiene una serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde $a_1 = f'(0)$ y la serie converge uniformemente en $t\Delta$, pues dicha serie converge en $\Delta$.

Los coeficientes de Taylor de $f$ son expresados de la forma

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{-n}e^{-in\theta}f(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Por lo que

$$a_1 = f'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})e^{-i\theta}}{r}\,d\theta.$$

Luego

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{4}{t^4}a_1\frac{t^4}{4} \\ &= \frac{2}{\pi t^4}\int_0^{2\pi} r^{-1}e^{-i\theta}f(re^{i\theta})\,d\theta \int_0^t r^3\,dr \\ &= \frac{2}{\pi t^4}\int_0^{2\pi}\int_0^t re^{-i\theta}f(re^{i\theta})\,r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{2}{\pi t^4}\iint_{t\Delta} \overline{z}f(z)\,r\,dr\,d\theta. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} |f'(0)| &\leq \frac{2}{|t|^4}\frac{1}{\pi}\iint_{t\Delta} |\overline{z}||f(z)|dz \\ &\leq \frac{2}{|t|^4}\frac{1}{\pi}\iint_{t\Delta} |f(z)|dz, \end{aligned}$$

tomando el límite cuando $t$ tiende a 1 se tiene

$$|f'(0)| \leq 2\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}|f(z)|dz. \tag{1.15}$$

Ahora para cada $z \in \Delta$ fijo tenemos que:

$$\begin{aligned}[(f\circ\phi_a)(z)-f(a)]' &= f'\big(\phi_a(z)\big)\phi_a'(z) \\ &= f'\Big(\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\Big)\left[\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\right]. \end{aligned}\tag{1.16}$$

Reemplazemos en (1.15) a $f$ por $(f\circ\phi_a)(z)-f(a)$ tenemos

$$\begin{aligned}|[(f\circ\phi_a)(0)-f(a)]'| &\leq 2\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}|(f\circ\phi_a)(z)-f(a)| \\ &= 2\|(f\circ\phi_a)(z)-f(a)\|_{L^1_a}.\end{aligned}$$

Luego por la (1.16) se obtiene

$$|f'(a)|(1-|a|^2) \leq 2\|(f\circ\phi_a)(z)-f(a)\|_{L^1_a}.$$

Entonces por (1.14) se concluye que $\|f\|_{\mathcal{B}}$.

Sea ahora $0<p<1$, utilizando la desigualdad de Hölder (Teorema B.18) obtenemos

$$\begin{aligned}|f'(0)| &\leq 2\left(\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}|f(z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}1^{\frac{p}{p-1}}\,dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= 2\left(\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}|f(z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2\|f\|_{L^p_a}.\end{aligned}$$

Entonces (1.16)

$$\begin{aligned}|[(f\circ\phi_a)(0)-f(a)]'| &= (1-|a|^2)|f'(a)| \\ &\leq 2\|(f\circ\phi_a)(z)-f(a)\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Por lo tanto de (1.14) se tiene que $\|f\|_{\mathcal{B}}<\infty$.

$i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$. Sea $z \in \Delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(0)| &\leq \int_0^{|z|} |f'(\xi)|\, d\xi \\
&= \int_0^{|z|} \frac{1-|\xi|^2}{1-|\xi|^2} |f'(\xi)|\, d\xi \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{B}} \int_0^{|z|} \frac{1}{1-|\xi|^2}\, d\xi \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{B}} \int_0^{|z|} \frac{1}{1-t}\, dt \\
&= -\|f\|_{\mathcal{B}} \ln(1-|z|). \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Sea $a \in \Delta$. Entonces de (1.3)

$$\begin{aligned}
\|f \circ \phi_a\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{a\in\Delta} (1-|z|^2)|(f\circ\phi_a)'(z)| \\
&= \sup_{a\in\Delta} (1-|z|^2)|f'(\phi_a(z))||\phi_a'(z)| \\
&= \sup_{a\in\Delta} (1-|z|^2)|f'(\phi_a(z))| \frac{1-|\phi_a(z)|^2}{1-|z|^2} \\
&= \sup_{a\in\Delta} (1-|\phi_a(z)|^2)|f'(\phi_a(z))| \\
&= \sup_{w\in\Delta} (1-|w|^2)\,|f'(w)| \\
&= \|f\|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

donde $w = \phi_a(z)$. Por lo que reemplazando en (1.17) $f$ por $f \circ \phi_a$ tenemos

$$\begin{aligned}
|(f\circ\phi_a)(z) - (f\circ\phi_a)(0)|^p &= |(f\circ\phi_a)(z) - f(a)|^p \\
&\leq (-\|f\|_{\mathcal{B}})^p \ln^p(1-|z|).
\end{aligned}$$

Al integrar tenemos

$$\frac{1}{\pi}\iint_\Delta |(f\circ\phi_a)(z) - f(a)|^p\, dz \leq (-1)^p \frac{1}{\pi}\|f\|_{\mathcal{B}}^p \iint_\Delta \ln^p(1-|z|)\, dz$$

donde $\iint_\Delta \ln^p(1-|z|)\, dz$ existe.

Por lo tanto se tiene que $\sup_{a\in\Delta} \|(f\circ\phi_a)(z) - f(a)\|_{L_a^p} < \infty$. ∎

## 1.3. El espacio $\mathcal{Q}_p$.

Al igual que en las dos secciones anteriores trabajaremos con funciones en $\mathcal{A}$. Demostraremos propiedades que satisface el espacio $\mathcal{Q}_p$ con $p \geq 0$ y las relaciones de contención que existe entre este espacio y los espacios $D_q$ y $B^\alpha$. Para establecer que relación existe entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{Q}_p$ es necesario demostrar primero una serie de resultados que nos serán de gran ayuda.

**Definición 1.6** *Denotaremos por $\mathcal{Q}_p$ al espacio de funciones en $\mathcal{A}$ que satisfacen la condición*

$$\{f\}^2_{\mathcal{Q}_p} := \sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy < \infty,$$

*donde $g$ es la función de Green definida en (1.1).*

*Para p=1 obtenemos el espacio de funciones analíticas de oscilación media acotada que es denotado por sus siglas en inglés BMOA.*

**Definición 1.7** *Denotaremos por $\mathcal{Q}_{p,0}$ al espacio de funciones en $\mathcal{A}$ que satisfacen*

$$\lim_{|a|\to 1} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy = 0.$$

**Definición 1.8** *Para un punto $a \in \Delta$ y $0 < R < 1$ definimos el disco pseudohiperbólico con centro en $a$ y radio $R$ como el conjunto*

$$U(a,R) := \{z : |\phi_a(z)| = \frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} < R\}.$$

Las dos proposiciones siguientes serán de gran utilidad para demostrar la proposición 1.9.

**Proposición 1.7** *Sea $\omega = f(z)$ analítica en $|z| \leq r$. Sí L denota la longitud de la imagen conforme del círculo $|z| = r$ bajo esta función. Entonces*

$$L \geq 2\pi r|f'(0)|.$$

Demostración.

Tenemos que $f(z)$ es analítica en $|z| \leq r$ y en su interior. La longitud L es:

$$L = \int_{|z|=r} |f'(z)||dz|.$$

Por el Teorema B.3 se tiene

$$|f'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{f'(\xi)d\xi}{\xi}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=r} \frac{|f'(\xi)||d\xi|}{|\xi|}.$$

Entonces

$$2\pi r|f'(0)| \leq \int_{|\xi|=r} |f'(\xi)||d\xi| = L. \qquad \blacksquare$$

**Proposición 1.8** *Sean $\omega = f(z)$ analítica en $U(0, R)$ y $A$ el área del dominio dentro del cual el círculo pseudohiperbólico es transformado por $\omega = f(z)$. Entonces*

$$A = \iint_{U(0,R)} |f'(z)|^2\, dx\, dy \geq \pi R^2|f'(0)|^2. \tag{1.18}$$

Demostración.

Tenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{\pi}\frac{R^2}{R^2}\iint_{U(0,R)} |f'(z)|^2\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{R^2\pi}\iint_{U(0,R)} |1|^2\, dx\, dy \iint_{U(0,R)} |f'(z)|^2\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Shchwarz (Teorema A.6) obtenemos

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{R^2\pi}\left(\iint_{U(0,R)} |f'(z)|\,dx\,dy\right)^2 \\ &= \frac{1}{R^2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^R |f'(re^{it})|\,r\,dr\,dt\right)^2 \\ &= \frac{1}{R^2\pi}\left(\int_0^R\left[\int_{|z|=r} |f'(z)|\,|dz|\right]dr\right)^2. \end{aligned}$$

Utilizando la proposición precedente tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2\pi}\left(\int_0^R\left[\int_{|z|=r} |f'(z)|\,|dz|\right]dr\right)^2 &\geq \frac{1}{R^2\pi}\left(\int_0^R 2\pi\,r|f'(0)|\,dr\right)^2 \\ &= \frac{4\pi^2}{R^2\pi}|f'(0)|^2\left(\int_0^R r\,dr\right)^2 \\ &= \pi\,R^2\,|f'(0)|^2. \end{aligned}$$

Esto demuestra que:

$$A = \iint_{U(0,R)} |f'(z)|^2\,dx\,dy \geq R^2\pi|f'(0)|^2. \qquad \blacksquare$$

**Proposición 1.9** *Si $f \in \mathcal{A}$ y $p > 0$, entonces para toda $a \in \Delta$*

$$(1-|a|^2)^2|f'(a)|^2 \leq \frac{16}{\pi}\left(\frac{2e}{p}\right)^p \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p\,dx\,dy.$$

Demostración.

Se cumple que:

$$\begin{aligned} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p\,dx\,dy &\geq \iint_{U(a,R)} |f'(z)|^2 g(z,a)^p\,dx\,dy \\ &= \iint_{U(a,R)} |f'(z)|^2\left(\log\frac{|1-\overline{a}z|}{|a-z|}\right)^p dx\,dy \\ &\geq \left(\log\frac{1}{R}\right)^p \iint_{U(a,R)} |f'(z)|^2\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Entonces por la desigualdad anterior, el Teorema de Cambio de Variable (Teorema B.9) y la ecuación (1.3) tenemos

$$\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,a)\, dx\, dy \geq \left(\log \frac{1}{R}\right)^p \iint_{U(0,R)} |f'(\phi_a(w))|^2 \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}w|^4}\, du\, dv.$$

Como $|1-\overline{a}z|^4 \leq (1+|a||z|)^4 \leq (1+R)^4$ resulta

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,a)^p\, dx\, dy &\geq \left(\log \frac{1}{R}\right)^p \frac{(1-|a|^2)^2}{(1+R)^4} \iint_{U(0,R)} |f'(\phi_a(w))|^2\, du\, dv \\ &\geq \left(\log \frac{1}{R}\right)^p \frac{(1-|a|^2)^2}{16} \iint_{U(0,R)} |f'(\phi_a(w))|^2\, du\, dv.\end{aligned}$$

Luego de (1.18) resulta

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,a)^p\, dx\, dy &\geq \left(\log \frac{1}{R}\right)^p \frac{(1-|a|^2)^2}{16}\, \pi R^2 |f'(\phi_a(0))|^2 \\ &\geq \frac{\pi}{16}\left(\log \frac{1}{R}\right)^p R^2 (1-|a|^2)^2 |f'(a)|^2.\end{aligned}$$

Esto implica que:

$$(1-|a|^2)^2 |f'(a)|^2 \leq \frac{16}{\pi R^2 \left(\log \frac{1}{R}\right)^p} \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,a)^p\, dx\, dy,$$

para toda $a \in \Delta$.

Veamos que $h(R) = R^2 \left(\log \frac{1}{R}\right)^p$ tiene un máximo en $R = \frac{1}{e^{\frac{p}{2}}} \in \Delta$.

Derivando $h$ obtenemos

$$h'(R) = R \left(\log \frac{1}{R}\right)^{p-1} \left(2 \log \frac{1}{R} - p\right).$$

Entonces

$$h'\left(\frac{1}{e^{\frac{p}{2}}}\right) = \frac{1}{e^{\frac{p}{2}}} \left(\frac{p}{2}\right)^{p-1} \left(2\frac{p}{2} - p\right) = 0.$$

Teniendo que $\frac{1}{e^{\frac{p}{2}}}$ es un máximo para $h$.

Como la última desigualdad se cumple para todo $h(R)$ en particular se cumple para el máximo; así

$$(1-|a|^2)^2|f'(a)|^2 \leq \frac{16}{\pi}\left(\frac{2e}{p}\right)^p \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p\,dx\,dy. \qquad \blacksquare$$

**Corolario 1.2** *Si $f \in \mathcal{A}$ y $p > 0$, entonces*

$$[B(f)]^2 \leq \frac{16}{\pi}\left(\frac{2e}{p}\right)^p \{f\}^2_{\mathcal{Q}_p},$$

*donde*

$$B(f) = \sup_{a\in\Delta}(1-|a|^2)|f'(a)|.$$

*Para $p = 1$ tenemos que $BMOA \subset \mathcal{B}$.*

**Proposición 1.10** *Si $f \in \mathcal{A}$ y $p > 1$, entonces para toda $a \in \Delta$*

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p\,dx\,dy \leq J(p)[B(f)]^2,$$

*donde*

$$J(p) = 2\pi \int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{r})^p}{(1-r^2)^2}\,r\,dr.$$

Demostración.

Primero demostraremos que $J(p)$ es finita para $p > 1$.

Como la función logarítmo es continua entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_1(\epsilon, 1)$ tal que si $|r-1| < \delta_1$, entonces $|\log r| < \frac{\epsilon}{2}$. Además $\lim\limits_{r\to 1} cr^2 = c$ entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_2(\epsilon, 1)$ tal que si $|r-1| < \delta_2$, entonces $|cr^2| - c \leq |cr^2 - c| \leq \frac{\epsilon}{2}$, por lo que $|cr^2| \leq \frac{\epsilon}{2} + c$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $|cr^2 - \log r| \leq |cr^2| + |\log r| < c + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = c + \epsilon$. Pero como $cr^2 - \log r \leq |cr^2 - \log r| < c + \epsilon$, entonces $\log\frac{1}{r} \leq c(1-r^2)$.

Luego

$$\frac{\left(\log \frac{1}{r}\right)^p}{(1-r^2)^2}\, r \leq \frac{c^p(1-r^2)^p}{(1-r^2)^2}\, r.$$

Además

$$2\pi \int_0^1 \frac{c^p(1-r^2)^p}{(1-r^2)^2}\, r\, dr = \frac{\pi c^p}{p-1}$$

Lo que demuestra que $J(p)$ es finita para $p > 1$.

Mostremos que el teorema se cumple para $a = 0$, esto es

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^p dx\, dy \leq J(p)[B(f)]^2.$$

Tenemos que:

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \leq B(f).$$

Así

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta |f'(z)|^2 \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^p dx\, dy &\leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{[B(f)]^2}{(1-r^2)^2} \left(\log \frac{1}{r}\right)^p r\, dr\, d\theta \\
&= 2\pi [B(f)]^2 \int_0^1 \frac{\left(\log \frac{1}{r}\right)^p}{(1-r^2)^2}\, r\, dr \\
&= J(p)[B(f)]^2.
\end{aligned}$$

Para el caso general consideremos el cambio de variable $z = \phi_a(w)$, entonces por el Teorema de Cambio de Variable (Teorema B.9) resulta

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p\, dx\, dy = \iint_\Delta |f'(\phi_a(w))|^2 g(\phi_a(w),a)^p |\phi_a'(w)|^2\, du\, dv.$$

Pero de (1.1)

$$\begin{aligned}
g(\phi_a(w),a)^p &= \left(\log \frac{|1-\overline{a}\phi_a(w)|}{|a-\phi_a(w)|}\right)^p \\
&= \left(\log \frac{1}{|w|}\right)^p \\
&= g(w,0)^p.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy \\
&\qquad = \iint_{\Delta} |f'(\phi_a(w))|^2 g(w,0)^p |\phi_a'(w)|^2 \, du\, dv \\
&\qquad = \iint_{\Delta} |f'(\phi_a(w))|^2 g(\phi_a(\phi_a(w)),0)^p |\phi_a'(w)|^2 \, du\, dv.
\end{aligned}$$

Ahora por el Teorema B.9, aplicado en este caso a $\phi_a(w)$, tenemos

$$\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy = \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(\phi_a(z),0)^p \, dx\, dy. \tag{1.19}$$

Luego por el Teorema B.14 se tiene que $g(z,0) = g(\phi_a(z),0)$. Así de (1.19) y lo demostrado para el caso $a = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy &= \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,0)^p \, dx\, dy \\
&\leq J(p)(B(f))^2,
\end{aligned}$$

para toda $a \in \Delta$. ■

**Teorema 1.9** *Sea $f \in \mathcal{A}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $f \in \mathcal{B}$,

*ii)* $\{f\}_{\mathcal{Q}_p} < \infty$ *para todo* $p > 1$,

*iii)* $\{f\}_{\mathcal{Q}_p} < \infty$ *para algún* $p > 1$,

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Se sigue de la Proposición 1.10
$ii) \Rightarrow iii)$ Es clara.
$iii) \Rightarrow i)$ Se sigue del Corolario 1.2. ■

**Teorema 1.10** *Sea $f \in \mathcal{A}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $f \in B_0$,

*ii)* $\lim\limits_{|a|\to 1^-} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy = 0$ *para todo* $p > 1$,

*iii)* $\lim\limits_{|a|\to 1^-} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy = 0$ *para algún* $p > 1$.

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Se sigue de la Proposición 1.10.
$ii) \Rightarrow iii)$ Es clara.
$iii) \Rightarrow i)$ Se sigue de la Proposición 1.9. ∎

**Corolario 1.3** *Sea $p > 1$. Entonces*

*i)* $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_p$,

*ii)* $B_0 = \mathcal{Q}_{p,0}$.

Demostración.

Se siguen de los Teoremas 1.9 y 1.10 respectivamente. ∎

**Teorema 1.11** *Si* $0 < p < q \leq 1$, *entonces*

*i)* $\mathcal{Q}_p \subset \mathcal{Q}_q$,

*ii)* $\mathcal{Q}_{p,0} \subset \mathcal{Q}_{q,0}$.

Demostración.

$i)$ Sea $f \in \mathcal{Q}_p$. Entonces

$$\sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy < \infty. \tag{1.20}$$

Usando de la desigualdad de Hölder ( Teorema B.18). Para $1 < k < \frac{1-p}{1-q}$ tenemos

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^q \, dx\, dy = \iint_\Delta |f'(z)|^{\frac{2}{k}} g(z,a)^{\frac{p}{k}} |f'(z)|^{2-\frac{2}{k}} g(z,a)^{q-\frac{p}{k}} dxdy$$
$$\leq \left( \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy \right)^{\frac{1}{k}} \left( \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^{\frac{qk-p}{k-1}} \, dx\, dy \right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{1.21}$$

Como $f \in \mathcal{Q}_p$ para $0 < p \leq 1$, entonces por la Proposición 1.9 se sigue que $f \in \mathcal{B}$; de esto y del hecho que $\frac{kq-p}{k-1} > 1$, tenemos por la Proposición 1.10 que:

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^{\frac{qk-p}{k-1}} \, dx\, dy \leq J\left( \frac{qk-p}{k-1} \right) [B(f)]^2. \tag{1.22}$$

Por consiguiente, de (1.21) y de (1.22) se obtiene

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^q \, dx\, dy$$
$$\leq \left( \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy \right)^{\frac{1}{k}} \left[ J\left( \frac{qk-p}{k-1} \right) [B(f)]^2 \right]^{\frac{k-1}{k}}.$$

Luego por (1.20) $f \in \mathcal{Q}_q$.

*ii*) Similar a *i*). ■

**Proposición 1.11** *Sean $p > 0$ y $f \in \mathcal{A}$. Entonces para toda $a \in \Delta$.*

$$(1-|a|^2)^2 |f'(a)|^2 \leq \frac{16(p+1)^{p+1}}{\pi p^p} \iint_\Delta |f'(z)|^2 (1-|\phi_a(z)|^2)^p \, dx\, dy,$$

Demostración.

Se tiene por (1.2) y la Definición 1.8 que:

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy &\geq \iint_{\Delta} |f'(z)|^2(1-R^2)^p\,dx\,dy\\ &\geq \iint_{U(a,R)} |f'(z)|^2(1-R^2)^p\,dx\,dy\\ &= (1-R^2)^p\iint_{U(a,R)} |f'(z)|^2\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Luego por el Teorema de Cambio de Variable (Teorema B.9) y de (1.3) se sigue que:

$$\begin{aligned}&\iint_{\Delta} |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy\\ &\qquad\geq (1-R^2)^p\iint_{U(0,R)} |f'(\phi_a(w))|^2\,|\phi_a'(w)|^2\,du\,dv\\ &\qquad= (1-R^2)^p(1-|a|^2)^2\iint_{U(0,R)} |f'(\phi_a(w))|^2\,\frac{du\,dv}{|1-\overline{a}w|^4}\\ &\qquad\geq \frac{(1-R^2)^p(1-|a|^2)^2}{(1+R)^4}\iint_{U(0,R)} |f'(\phi_a(w))|^2\,du\,dv.\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.8 tenemos

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy &\geq \frac{(1-R^2)^p(1-|a|^2)^2}{(1+R)^4}\,\pi R^2|f'(\phi_a(0))|^2\\ &\geq \frac{\pi}{16}R^2(1-R^2)^p(1-|a|^2)^2|f'(a)|^2.\end{aligned}$$

Así

$$(1-|a|^2)^2|f'(a)|^2 \leq \frac{16}{\pi R^2(1-R^2)^p}\iint_{\Delta} |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy,$$

para toda $a\in\Delta$.

Veamos que la función $h(x)=\pi x^2(1-x^2)^p$ alcanza un máximo en $\frac{1}{\sqrt{p+1}}$. Derivando $h$ tenemos que:

$$h'(x) = 2\pi x(1-x^2)^{p-1}[(1-x^2) - px^2],$$

y al substituir $\frac{1}{\sqrt{p+1}}$ tenemos

$$h'\left(\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{p+1}}\left(1-\frac{1}{p+1}\right)^{p-1}\left[1-\frac{1}{p+1}-\frac{p}{p+1}\right] = 0.$$

Teniendo así que $x = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$ es un máximo de $h$. La desigualdad se cumple en particular para el máximo, así

$$(1-|a|^2)^2|f'(a)|^2 \leq \frac{16(p+1)^{p+1}}{\pi p^p}\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\, dx\, dy. \qquad \blacksquare$$

**Teorema 1.12** *Sea $f \in \mathcal{A}$. Entonces para $0 < p \leq 1$*

*i)* $f \in \mathcal{Q}_p \Leftrightarrow \sup\limits_{a\in\Delta}\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\, dx\, dy < \infty$,

*ii)* $f \in \mathcal{Q}_{p,0} \Leftrightarrow \lim\limits_{|a|\to 1^-}\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\, dx\, dy = 0$.

Demostración.

*i)*

$\Rightarrow$) Sean $0 < p \leq 1$ y $f \in \mathcal{A}$ supongamos que:

$$\sup_{a\in\Delta}\iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p\, dx\, dy < \infty.$$

Mostremos primero que se cumple la siguiente desigualdad

$$1-|\phi_a(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}z|} \leq 2g(z,a) = \log\frac{1}{|\phi_a(z)|^2}.$$

Sea $t = |\phi_a(z)|$ y $h(t) = \log\frac{1}{t^2} + t^2 - 1$. Entonces $h(1) = 0$ y $h(t) \to \infty$ cuando $t \to 0$. Además al derivar a $h$ obtenemos

$$h'(t) = 2\left(t - \frac{1}{t}\right) < 0,$$

ya que $0 < t \leq 1$. Por lo que $h$ es una función decreciente y en consecuencia, dado $t_0 \geq t > 0$, se sigue que $h(t) \geq h(t_0) \to 0$ si $t \to 1$, entonces $h(t) \geq 0$. Así

$$1 - |\phi_a(z)|^2 \leq \log \frac{1}{|\phi_a(z)|^2} = 2g(z,a). \tag{1.23}$$

Luego de esta desigualdad tenemos

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx\, dy \leq 2^p \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy.$$

Utilizando la hipótesis llegamos a que:

$$\sup_{a \in \Delta} \iint_\Delta |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx\, dy < \infty.$$

$\Leftarrow$) Sean $0 < p \leq 1$ y $f \in \mathcal{A}$ supongamos que:

$$\sup_{a \in \Delta} \iint_\Delta |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx\, dy < \infty. \tag{1.24}$$

Ya que para $q > 1$ se tiene

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^q \, dx\, dy \leq \iint_\Delta |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx\, dy,$$

entonces por (1.24) al aplicar la Proposición 1.11 $f \in \mathcal{B}$, luego por el Teorema 1.9 para $q > 1$ se sigue que:

$$\sup_{a \in \Delta} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^q \, dx\, dy < \infty. \tag{1.25}$$

Dividamos la siguiente integral en dos partes

$$\begin{aligned} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy &= \iint_{\{|\phi_a(z)| \leq \frac{1}{4}\}} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy \\ &+ \iint_{\{|\phi_a(z)| > \frac{1}{4}\}} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Si $|\phi_a(z)| \leq \frac{1}{4}$ entonces $g(z,a) = \log \frac{1}{|\phi_a(z)|} \geq \log 4 > 1$. Luego

$$\begin{aligned}\iint_{\{|\phi_a(z)|\leq\frac{1}{4}\}} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy &\leq \iint_{\{|\phi_a(z)|\leq\frac{1}{4}\}} |f'(z)|^2 g(z,a)^q \, dx\, dy \\ &\leq \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g(z,a)^q \, dx\, dy.\end{aligned}$$

Por tanto de (1.25) se tiene

$$\sup_{a\in\Delta} \iint_{\{|\phi_a(z)|\leq\frac{1}{4}\}} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy < \infty. \tag{1.27}$$

Sea $t = |\phi_a(z)|$ y $h(t) = \log \frac{1}{t} + 4t^2 - 4$.

Luego $h(\frac{1}{4}) = \log 4 + \frac{1}{4} - 4 < 0$ y $h(1) = 0 - 4 + 4 = 0$.

Además al derivar se obtiene que $h'(t) = 8t - \frac{1}{t}$. Entonces $h'(t) < 0$ si $t < \frac{1}{\sqrt{8}}$ y $h'(t) \geq 0$ si $t \geq \frac{1}{\sqrt{8}}$.

Con lo que $h(t) = \log \frac{1}{t} - 4 + 4t^2 \leq 0$ si $t > \frac{1}{4}$. Por lo tanto

$$g(z,a) = \log \frac{1}{|\phi_a(z)|} \leq 4(1 - |\phi_a(z)|^2).$$

De este hecho se tiene

$$\begin{aligned}&\iint_{\{|\phi_a(z)|>\frac{1}{4}\}} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy \\ &\quad\leq 4^p \iint_{\{|\phi_a(z)|>\frac{1}{4}\}} |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx\, dy \\ &\quad< 4^p \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx\, dy.\end{aligned}$$

Luego de (1.24) se sigue que:

$$\sup_{a\in\Delta} \iint_{\{|\phi_a(z)|>\frac{1}{4}\}} |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy < \infty. \tag{1.28}$$

Por lo tanto de (1.26), (1.27) y (1.28) $f \in \mathcal{Q}_p$.

*ii*) La demostración es similar a *i*). ■

**Teorema 1.13** *$\mathcal{Q}_p$ es un espacio de Banach bajo la norma*

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_p} := |f(0)| + \left(\sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración.

Al igual que el caso del espacio $D_p$, los únicos puntos que no son inmediatos para demostrar que $\mathcal{Q}_p$ es espacio de Banach son: $i$) bajo la norma definida se cumple la desigualdad del triángulo, lo que probaría también que bajo la suma el espacio es cerrado y $ii$) bajo esta norma el espacio resulta completo.

$i$) Utilizando la desigualdad de Minkowski (Teorema B.17), tenemos

$$\begin{aligned}
&\|f+h\|_{\mathcal{Q}_p}\\
&= |(f+h)(0)| + \left(\sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |(f+h)'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq |(f+h)(0)| + \left(\sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |[(f+h)'(z)] g(z,a)^{\frac{p}{2}}|^2 \, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= |(f+h)(0)| + \left(\sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |f'(z) g(z,a)^{\frac{p}{2}} + h'(z) g(z,a)^{\frac{p}{2}}|^2 \, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq |f(0)| + \left(\sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+|h(0)| + \left(\sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |h'(z)|^2 g(z,a)^p \, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|f\|_{\mathcal{Q}_p} + \|h\|_{\mathcal{Q}_p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|f+h\|_{\mathcal{Q}_p} \leq \|f\|_{\mathcal{Q}_p} + \|h\|_{\mathcal{Q}_p}$.

$ii$) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{Q}_p$ y $p > 1$. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe un natural $N(\epsilon) = N$ tal que $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{Q}_p} < \epsilon$ si $n, m \geq N$.

Se demostró que $\mathcal{Q}_q \subset \mathcal{Q}_p$ si $q < p$ y para $p > 1$ $\mathcal{Q}_p = \mathcal{B}$, el cual es un espacio completo, por lo que existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Tomando $n$ fija y haciendo tender $m$ a infinito tenemos: $\|f_n - f\|_{\mathcal{Q}_p} \leq \epsilon$.

Por lo tanto $f_n - f \in \mathcal{Q}_p$, como $\mathcal{Q}_p$ es un espacio vectorial se sigue $f \in \mathcal{Q}_p$. $\blacksquare$

**Proposición 1.12** *Sea $p > 0$. Entonces $\mathcal{Q}_p \subset D_p$.*

Demostración.

Sea $f \in \mathcal{Q}_p$. Entonces por (1.23) tenemos que se cumple la siguiente desigualdad

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy \le 2^p \iint_\Delta |f'(z)|^2 g(z,a)^p\,dx\,dy.$$

Por lo tanto

$$\sup_{a\in\Delta}\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy < \infty.$$

En particular para $a = 0$ tenemos

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|z|^2)^p\,dx\,dy < \infty.$$

Por el Teorema 1.1 $f \in D_p$. $\blacksquare$

**Lema 1.1** *Para $a$, $z = re^{i\theta} \in \Delta$*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\bar{a}re^{i\theta}|^{2p}} \le \mathrm{C}(1-|a|r)^{-p},$$

*donde* C *es una constante y $0 < p \le 1$.*

Demostración.

Si $a = |a|e^{i\beta}$, considerando que la función coseno es de periodo $2\pi$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\bar{a}re^{i\theta}|^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-|a|re^{i(\theta-\beta)}|^2}\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2|a|r\cos(\theta-\beta)+|a|^2r^2}\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1-2|a|r\cos(\theta-\beta)+|a|^2r^2}.\end{aligned}$$

Veamos que $\operatorname{sen} x \geq \frac{2}{\pi}x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Sea $-f(\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, entonces $-f'(\theta) = -\cos\theta$ y $-f''(\theta) = \operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, así $-f'(\theta)$ es creciente, con lo cual $f(\theta)$ es cóncava y por lo tanto $\operatorname{sen}\theta \geq (2/\pi)\theta$. Utilizando este hecho para $|a|r \geq \frac{1}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned}
1-2|a|r\cos(\theta-\beta)+|a|^2r^2 &= 1-2|a|r+|a|^2r^2+2|a|r-2|a|r\cos(\theta-\beta)\\
&= (1-|a|r)^2+4|a|r\left[\frac{1-\cos(\theta-\beta)}{2}\right]\\
&= (1-|a|r)^2+4|a|r\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)\right]\\
&\geq (1-|a|r)^2+\frac{4|a|r}{\pi^2}(\theta-\beta)^2\\
&\geq (1-|a|r)^2+2\pi^{-2}(\theta-\beta)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1-2|a|r\cos(\theta-\beta)+|a|^2r^2} \leq \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-|a|r)^2+2\pi^{-2}(\theta-\beta)^2}.$$

Sea $t = \frac{\theta-\beta}{1-|a|r}$, entonces $dt = \frac{d\theta}{1-|a|r}$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-|a|r)^2+2\pi^{-2}(\theta-\beta)^2} &= \int_{-\frac{\pi}{1-|a|r}}^{\frac{\pi}{1-|a|r}}\frac{(1-|a|r)dt}{(1-|a|r)^2+2\pi^{-2}t^2(1-|a|r)^2}\\
&\leq \frac{1}{1-|a|r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+2\pi^{-2}t^2}\\
&= \frac{1}{1-|a|r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\frac{2\pi^2}{2\pi^2}+2\pi^{-2}t^2}\\
&= \frac{\pi^2}{2(1-|a|r)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(\frac{\pi^2}{\sqrt{2}})^2+t^2}\\
&= \frac{\pi^2}{2(1-|a|r)}\left[\frac{\sqrt{2}}{\pi}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right]_{-\infty}^{\infty}\\
&= \frac{\pi^2}{\sqrt{2}(1-|a|r)}\\
&= C'\frac{1}{1-|a|r}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\overline{a}re^{i\theta}|^2} \leq C' \frac{1}{1-|a|r}. \tag{1.29}$$

Por lo tanto la desigualdad de cumple para $p = 1$.

Ahora demostremos que se cumple para $0 < p < 1$.

Por la desigualdad de Hölder (Teorema B.18) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\overline{a}re^{i\theta}|^{2p}} &= \left[\int_0^{2\pi} 1^{\frac{1}{1-p}} d\theta\right]^{1-p} \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{|1-\overline{a}re^{i\theta}|^{2p}}\right)^{\frac{1}{p}} d\theta\right]^p \\
&= (2\pi)^{1-p} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\overline{a}re^{i\theta}|^2}\right)^p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto de (1.29)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\overline{a}re^{i\theta}|^2} &\leq (2\pi)^{1-p}(C')^p(1-|a|r)^{-p} \\
&= C(1-|a|r)^{-p}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 1.14** *Sean $I_n = \{k : 2^n \leq k < 2^{n+1},\ k \in \mathbb{N}\}$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analítica en $\Delta$. Si para $0 < p \leq 1$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-p)} (\sum_{k \in I_n} |a_k|)^2 < \infty,$$

*entonces $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$.*

Demostración.

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-p)}(\sum_{k\in I_n} |a_k|)^2 < \infty$ y $0 < r < 1$. No hay perdida de generalidad si suponemos que $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$.

Sea $I(a) = \iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\, dx\, dy$, entonces

$$\begin{aligned}
I(a) &= \iint_{\Delta} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \Big|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx \, dy \\
&\le \iint_{\Delta} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |z|^{n-1} \right)^2 \left( \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} \right)^p dx \, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |re^{i\theta}|^{n-1} \right)^2 \frac{(1-|a|^2)^p (1-|re^{i\theta}|^2)^p}{|1-\overline{a}re^{i\theta}|^{2p}} \, r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \right)^2 (1-r^2)^p (1-|a|^2)^p \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\overline{a}re^{i\theta}|^{2p}} \right) r \, dr.
\end{aligned}$$

Utilizando el Lema 1.1 tenemos

$$\begin{aligned}
I(a) &\le \mathrm{C} \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \right)^2 (1-r^2)^p (1-|a|^2)^p \frac{1}{(1-|a|r)^p} \, r \, dr \\
&\le 2^{2p} \mathrm{C} \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \right)^2 (1-r)^p (1-|a|)^p \frac{r \, dr}{(1-|a|r)^p}.
\end{aligned}$$

Como $|a|r \le |a|$, entoces se cumple que:

$$\left( \frac{1-|a|}{1-|a|r} \right)^p r \le r < 1.$$

Así

$$I(a) \le 2^{2p} \mathrm{C} \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \right)^2 (1-r)^p \, dr.$$

Aplicando el Lema A.3 al tomar $\alpha = p+1$, $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1}$ y $t_n = \sum_{k \in I_n} k|a_k|$, tenemos

$$\begin{aligned} I(a) &\leq 2^{2p}\mathrm{CK}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(p+1)} t_n^2 \\ &= 2^{2p}\mathrm{CK}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(p+1)} \left(\sum_{k\in I_n} k|a_k|\right)^2 . \end{aligned}$$

Pero $k|a_k| < 2^{n+1}|a_k|$ ya que $k \in I_n$, así

$$\left(\sum_{k\in I_n} k|a_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k\in I_n} 2^{n+1}|a_k|\right)^2 = 2^{2(n+1)}\left(\sum_{k\in I_n} |a_k|\right)^2 .$$

Entonces

$$\begin{aligned} I(a) &\leq 2^{2p}\mathrm{CK}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(p+1)} 2^{2(n+1)}\Big(\sum_{k\in I_n} |a_k|\Big)^2 \\ &= 2^{2p+2}\mathrm{CK}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-p)}\Big(\sum_{k\in I_n} |a_k|\Big)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Luego del Teorema 1.12 $f \in \mathcal{Q}_p$.

Para probar que $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$, notemos que $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 (1-r)^p\, dr$ es convergente, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-p)} \left(\sum_{k\in I_n} |a_k|\right)^2 < \infty$. Por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que:

$$\int_\delta^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 (1-r)^p\, dr < \epsilon.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
I(a) &\leq 2^{2p}\mathrm{C}\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 (1-r)^p \frac{(1-|a|)^p}{(1-|a|r)^p}\,dr \\
&= 2^{2p}\mathrm{C}\left[\int_0^\delta \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 (1-r)^p \frac{(1-|a|)^p}{(1-|a|r)^p}\,dr\right] \\
&+ 2^{2p}\mathrm{C}\left[\int_\delta^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 (1-r)^p \frac{(1-|a|)^p}{(1-|a|r)^p}\,dr\right] \\
&\leq 2^{2p}\mathrm{C}\left[\int_0^\delta \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 (1-r)^p \frac{(1-|a|)^p}{(1-|a|r)^p}\,dr\right] \\
&+ 2^{2p}\mathrm{C}\left[\int_\delta^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 (1-r)^p\,dr\right] \\
&< 2^{2p}\mathrm{C}(1-|a|)^p \int_0^\delta \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 \frac{(1-r)^p}{(1-|a|r)^p}\,dr + 2^{2p}\mathrm{C}\,\epsilon.
\end{aligned}$$

Como $0 \leq r \leq \delta$, entonces

$$\frac{1}{(1-|a|r)^p} \leq \frac{1}{(1-\delta)^p}.$$

Por lo que

$$I(a) \leq 2^{2p}\mathrm{C}\ \frac{(1-|a|)^p}{(1-\delta)^p}\int_0^\delta \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)^2 (1-r)^p\,dr + 2^{2p}\mathrm{C}\epsilon.$$

Elijamos $a$ de tal manera que $1-|a|$ sea suficientemente pequeño, así

$$\lim_{|a|\to 1^-} I(a) \leq 2^{2p}\mathrm{C}\epsilon \to 0,$$

cuando $\epsilon \to 0$. Por lo tanto $\lim\limits_{|a|\to 1^-} I(a) = 0$. ■

**Teorema 1.15** *Sea $0 < p \leq 1$. Si $f \in \mathcal{A}$ cuya representación es la serie lacunaria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $f \in \mathcal{Q}_p$,

*ii)* $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$,

*iii)* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2 < \infty$,

*donde* $I_k = \{n : 2^k \leq n < 2^{k+1}, n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración.

*ii)* $\Rightarrow$ *i)* Sea

$$h(a) = \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx \, dy,$$

con $0 < p \leq 1$ y $\phi_a(z)$ de (1.2).

Demostremos que $h$ es una función continua en $\Delta$.

Sea $a \in \Delta$ fijo y sea $\delta > 0$ tal que $\overline{\Delta(a,\delta)} \subset \Delta$. Definamos la función $H : \overline{\Delta}\text{x}\overline{\Delta(a,\delta)} \to \mathbb{R}$ por:

$$H(z,\zeta) = \frac{(1 - |\zeta|^2)^p}{|1 - \overline{\zeta} z|^{2p}},$$

la cual es uniformemente continua en $\overline{\Delta}\text{x}\overline{\Delta(a,\delta)}$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que si $|z' - z| < \rho$ y $|\zeta' - \zeta| < \rho$ entonces

$$|H(z',\zeta') - H(z,\zeta)| \quad < \quad \frac{\epsilon}{\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^p \, dx \, dy}.$$

De aquí

$$\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^p |H(z,a) - H(z,b)| \, dx \, dy < \epsilon.$$

Por otra parte sabemos que:

$$\begin{aligned} 1 - |\phi_a(z)|^2 &= (1 - |z|^2)|\phi_a'(z)| \\ &= (1 - |z|^2)\frac{1 - |a|^2}{|1 - \overline{a} z|^2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}(1-|\phi_a(z)|^2)^p-(1-|\phi_b(z)|^2)^p &= (1-|z|^2)^p\left[\frac{(1-|a|^2)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}-\frac{(1-|b|^2)^p}{|1-\overline{b}z|^{2p}}\right]\\ &= (1-|z|^2)^p[H(z,a)-H(z,b)].\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}|h(a)-h(b)| &= \left|\iint_\Delta |f'(z)|^2[(1-|\phi_a(z)|^2)^p-(1-|\phi_b(z)|^2)^p]\,dx\,dy\right|\\ &\leq \iint_\Delta |f'(z)|^2|(1-|\phi_a(z)|^2)^p-(1-|\phi_b(z)|^2)^p|\,dx\,dy\\ &= \iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|z|^2)^p|H(z,a)-H(z,b)|\,dx\,dy\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Teniendose así que $h$ es continua en $\Delta$.

Ahora sea $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$ entonces por el Teorema 1.12 *ii*)

$$\lim_{|a|\to 1^-}\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy=0,$$

y $h$ es continua en $\Delta$.

Supongamos que $f \notin \mathcal{Q}_p$, entonces

$$\sup_{a\in\Delta}\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy=\infty.$$

Luego existe una sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\Delta$ tal que:

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_{a_k}(z)|^2)^p\,dx\,dy,$$

es una sucesión no acotada. La sucesión $\{a_k\}$ tiene dos caminos de converger: a un punto de $T$, lo cual no puede ser, pues contradice el hecho de que $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$; ó converger a un punto $\omega \in \Delta$, en cuyo caso se tendría que

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_\omega(z)|^2)^p\,dx\,dy=\infty,$$

pero esto contradice el hecho de que $h$ es continua en $\Delta$. Por lo tanto $f \in \mathcal{Q}_p$.

$i) \Rightarrow iii)$ Supongamos que $f \in \mathcal{Q}_p$, por el Teorema 1.12 $i)$ se sigue que:

$$I(a) = \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx \, dy < \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{a \in \Delta} I(a) &\geq \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^p \, dx \, dy \\
&= \iint_{\Delta} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_k z^{n_k - 1} \Big|^2 (1 - |z|^2)^p \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_k r^{n_k - 1} e^{i(n_k - 1)\theta} \Big|^2 d\theta \right) (1 - r^2)^p \, r \, dr.
\end{aligned}$$

Por el Lema B.3, para $p = 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{a \in \Delta} I(a) &\geq \frac{2\pi}{A^2} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \Big| n_k a_k r^{n_k - 1} \Big|^2 (1 - r^2)^p \, r \, dr \\
&\geq \frac{2\pi}{A^2} \int_0^1 (1 - r^2)^p \sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 |a_k|^2 r^{2(n_k - 1)} dr \\
&\geq \frac{2\pi}{A^2} \int_0^1 (1 - r)^p \sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 |a_k|^2 \frac{r^{2n_k}}{r} \, dr.
\end{aligned}$$

Pues $r^2 \leq r$ y por consiguiente $(1 - r)^p \leq (1 - r^2)^p$.

Al aplicar el Lema A.3 para $p = \alpha - 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{a \in \Delta} I(a) &\geq \frac{2\pi}{A^2} \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(p+1)} \sum_{n_j \in I_k} n_j^2 |a_j|^2 \\
&\geq \frac{2\pi}{A^2} \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(p+1)} \sum_{n_j \in I_k} 2^{2k} |a_j|^2 \\
&= \frac{2\pi}{A^2} \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2.
\end{aligned}$$

Luego como $f \in \mathcal{Q}_p$ se tiene del Teorema 1.12

$$\frac{2\pi}{A^2}\frac{1}{\mathrm{K}}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2 \leq \sup_{a\in\Delta} I(a) < \infty.$$

Por lo tanto $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2 < \infty$.

$iii) \Rightarrow ii)$ Supongamos que: $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2 < \infty$.

Ahora

$$2 = \frac{2^{k+1}}{2^k} = \frac{1}{2^k}\,\frac{2^k+1}{2^k+1}\,\frac{2^k+2}{2^k+2}\cdots\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}-1}\,2^{k+1}.$$

Tenemos por hipótesis que $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1$ para todo $k$, entonces

$$2 = \frac{2^k+1}{2^k}\,\frac{2^k+2}{2^k+1}\cdots\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}-2}\,\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}-1} > \lambda^s.$$

donde $s$ es el número de enteros que hay entre $2^k$ y $2^{k+1}$.

Entonces $2\lambda > \lambda^s$, así $\log_\lambda 2\lambda > \log_\lambda \lambda^s$, por lo tanto $\log_\lambda 2 + 1 > s$, teniéndose que el número de coeficientes $a_j$ es menor que $\log_\lambda 2 + 1$ con $n_j \in I_k$. Luego para $q > 1$ aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema B.18) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|\Big)^q &\leq \Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} 1^{\frac{q}{q-1}}\Big)^{\frac{q-1}{q}} \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big]^q \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{N} 1\Big)^{q-1} \sum_{n=1}^{N} |a_n|^q \\
&= N^{q-1} \sum_{n=1}^{N} |a_n|^q.
\end{aligned}$$

Entonces para $q = 2$ y $N$ igual al número de coeficientes $a_j$, tenemos

$$\Big(\sum_{n_j \in I_k} |a_j|\Big)^2 \leq [\log_\lambda 2 + 1] \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2.$$

Por lo que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} \left( \sum_{n_j \in I_k} |a_j| \right)^2 \leq [(\log_\lambda 2) + 1] \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2 < \infty.$$

Por el Teorema 1.14 se tiene que $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$. ■

**Corolario 1.4** $\mathcal{Q}_p \subsetneq \bigcap_{p<q\leq 1} \mathcal{Q}_q$ *y* $\mathcal{Q}_{p,0} \subsetneq \bigcap_{p<q\leq 1} \mathcal{Q}_{q,0}$, *para* $0 < p < 1$.

Demostración.

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2^n} z^{2^n};$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2^{\frac{n(1-p)}{2}}},$$

entonces para todo $p < q \leq 1$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} 2^{n(1-q)} \sum_{n_j \in I_n} |a_j|^2 &= \sum_{n=0}^{m} 2^{n(1-q)} \sum_{n_j \in I_n} \left| \frac{1}{2^{\frac{n(1-p)}{2}}} \right|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{m} 2^{n(1-q)} \frac{1}{2^{n(1-p)}} \\
&= \sum_{n=0}^{m} \left( \frac{1}{2^{(q-p)}} \right)^n,
\end{aligned}$$

que es la m-ésima suma parcial de una serie convergente, luego por el Teorema 1.15 se tiene que $f \in \bigcap_{p<q\leq 1} \mathcal{Q}_{q,0}$.

Ahora para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} 2^{n(1-p)} \sum_{n_j \in I_n} |a_j|^2 &= \sum_{n=0}^{k} 2^{n(1-p)} \sum_{n_j \in I_n} \left| \frac{1}{2^{\frac{n(1-p)}{2}}} \right|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{k} 2^{n(1-p)} \frac{1}{2^{n(1-p)}} \\ &= \sum_{n=0}^{k} 1,\end{aligned}$$

que es una suma parcial divergente. Por lo tanto del Teorema 1.15 se tiene que $f \notin \mathcal{Q}_p$.

Así por el Teorema 1.15 tenemos que $f \in \bigcap_{p<q\leq 1} \mathcal{Q}_q$ y $f \notin \mathcal{Q}_{p,0}$. ∎

**Observación 1.1** *Se sigue de la definicion de $\mathcal{Q}_p$, el Teorema 1.12 i) y el Teorema 1.1, que: $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{D} = D_0$.*

## 1.4. El espacio de Hardy $H^p$

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de los espacios de Hardy y demostraremos las relaciones de contención que existen entre este espacio y los espacios ya estudiados en las secciones anteriores.

**Definición 1.9** *Sean $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica y $0 < r < 1$,*

$$M_p(r, f) := \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right]^{\frac{1}{p}} \quad \textit{para } 0 < p < \infty,$$

$$M_\infty(r, f) := \max_{0\leq\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})| \quad \textit{para } p = \infty,$$

*decimos que $f \in H^p$ si*

$$\|f\|_p := \sup_{r<1} M_p(r, f) < \infty \quad \textit{para } 0 < p \leq \infty.$$

Al contrario de los espacios $D_p$, $B^\alpha$ y $\mathcal{Q}_p$ la contención entre los espacios $H^p$ es inversa, esto es, el espacio con menor superíndice contiene a los demás espacios.

**Proposición 1.13** *$H^q \subset H^p$ sí $0 < p < q \leq \infty$.*

Demostración.

Sean $0 < p < q < \infty$ y $f \in H^q$. Entonces

$$\sup_{r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q\,d\theta\right]^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{1.30}$$

Haciendo uso del Lema A.2 tenemos $|f(re^{i\theta})|^p < |f(re^{i\theta})|^q + 1$. Por lo que

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right]^{\frac{1}{q}} &\leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(|f(re^{i\theta})|^q + 1\Big)\,d\theta\right]^{\frac{1}{q}}\\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\right]^{\frac{1}{q}}\\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q\,d\theta + 1\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Luego por (1.30) se sigue

$$\sup_{r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right]^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Por lo tanto al elevar a la fracción $\frac{q}{p}$ tenemos que:

$$\sup_{r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Así $f \in H^p$.

Haciendo tender $q$ a infinito se tiene que $H^\infty \subset H^p$ para todo $p > 0$. ∎

**Proposición 1.14** $D_1 = H^2$.

Demostración.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in D_1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

$$
\begin{aligned}
|f(z)|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \overline{\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m}\,\overline{z^m} \\
&= \sum_{k,m=0}^{\infty} a_k \overline{a_m} z^k \overline{z^m}.
\end{aligned}
$$

Con $z = re^{i\theta}$ tenemos $z^k = r^k e^{ik\theta}$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|f(re^{i\theta})|^2 &= \sum_{k,m=0}^{\infty} a_k \overline{a_m} r^k e^{ik\theta} r^m e^{-im\theta} \\
&= \sum_{k,m=0}^{\infty} a_k \overline{a_m} r^{k+m} e^{i(k-m)\theta}.
\end{aligned}
$$

Por ésto, haciendo uso del Teorema A.9 y de que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es uniformemente convergente en compactos tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k,m=0}^{\infty} a_k \overline{a_m} r^{k+m} e^{i(k-m)\theta} \, d\theta \\
&= \sum_{k,m=0}^{\infty} a_k \overline{a_m} r^{k+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\theta} d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \\
&< \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f \in H^2$.

Si $f \in H^2$, entonces $\sup\limits_{r<1} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta\right]^{\frac{1}{2}} = M < \infty$. De lo cual se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta < M.$$

Tomando el límite cuando $r$ tiende a 1 tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leq M.$$

Por consiguiente $f \in D_1$. ∎

**Corolario 1.5** $\mathcal{D} \subset \bigcap\limits_{0<p\leq 2} H^p$.

Demostración.

Tenemos de la Proposición 1.1 que $\mathcal{D} = D_0 \subset D_1$, de la Proposición 1.14 $D_1 = H^2$ y de la Proposición 1.13 $H^2 \subset H^p$ para $0 < p \leq 2$. ∎

Los espacios $H^p$ con $1 \leq p < \infty$ son de un interés especial, pues tienen una estructura de espacio de Banach; para demostrarlo, primero veamos que se cumple el siguiente teorema acerca de los coeficientes de Taylor de estas funciones.

**Teorema 1.16** *Sea $f$ una función analítica en $\Delta$ con $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, tal que $f \in H^p$ para $p \geq 1$, entonces $|a_n| \leq \|f\|_p$ y por lo tanto $|f(z)| \leq \frac{\|f\|_p}{1-|z|}$.*

Demostración.

Por la fórmula de Cauchy para los coeficientes tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|a_n| &= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}ire^{i\theta}\,d\theta\Big| \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^n}ie^{-in\theta}\,d\theta\Big| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{i\theta})|}{|r|^n}|ie^{-in\theta}|\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta. \qquad (1.31)
\end{aligned}
$$

Haciendo tender $r \to 1$ tenemos de (1.31) que $|a_n| \leq \|f\|_1$.

Sea ahora $p > 1$ y $q = \frac{p}{p-1}$, aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema B.18) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta &\leq \Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\Big]^{\frac{1}{p}}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1^{\frac{p}{p-1}}\,d\theta\Big]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{r<1}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_p.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto de (1.31) tenemos que $r^n|a_n| \leq \|f\|_p$, haciendo tender $r \to 1$ la primera desigualdad se cumple para $p \geq 1$.

Ahora

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f\|_p |z|^n \\
&= \|f\|_p \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \\
&= \frac{\|f\|_p}{1-|z|}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

**Teorema 1.17** $(H^p, \|f\|_p)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p < \infty$.

Demostración.

Para demostrar que el espacio es de Banach sólo basta demostrar los dos siguientes puntos que no son inmediatos: $i$) bajo la norma definida se cumple la desigualdad del triángulo, lo que también probaría que bajo la suma el espacio es cerrado y $ii$) bajo esta norma el espacio resulta completo.

$i$) Utilizando la desigualdad de Minkowski (Teorema B.17) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f+g)(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

$ii$) Mostremos ahora que $H^p$ es un espacio completo.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $H^p$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) = N$ elemento de los naturales tal que $\|f_l - f_m\|_p < \epsilon$ si $l, m \geq N$.

Sea $f_j(re^{i\theta}) = f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} z^n$, entonces:

$$f_l(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(l)} - a_n^{(m)}) z^n.$$

Como $f_l - f_m \in H^p$ para $l, m \geq N$, entonces haciendo uso del Teorema 1.16 se tiene que $|a_n^{(l)} - a_n^{(m)}| \leq \|f_l - f_m\|_p < \epsilon$, para toda $n$ y para toda $l, m \geq N$.

Por lo tanto $\{a_n^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, por tal razón converge. Sean $a_n^{(0)}$ su límite y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} z^n$.

Entonces tomando $l$ fija y haciendo tender $m$ a infinito tenemos por el Teorema B.1

$$\|f_l - f\|_p \leq \epsilon.$$

Por lo tanto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Tenemos además
$\|f\|_p - \|f_l\|_p \leq \|f_l - f\|_p \leq \epsilon$ lo cual implica que $\|f\|_p \leq \epsilon + \|f_l\|_p < \infty$.

Por tanto $f \in H^p$. ∎

**Proposición 1.15** *Si* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración.

Sean $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$ y $\{c_n\}$ los coeficientes de Fourier de la función $f(e^{i\theta})$. Por el Teorema B.15 $f(e^{i\theta})$ es continua en $|z| \leq 1$.
$f(re^{i\theta}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}, \quad 0 < r < 1$, donde $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{-n} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ y
$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\theta}$.

Por los Teoremas 1.16 y B.6 tenemos que

Para $n \geq 0$: $|r^n a_n - c_n| \leq \|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\|_1 \to 0$ cuando $r \to 1$, así $|a_n - c_n| = 0$, por lo tanto $a_n = c_n$.

Para $n < 0$: $|0 - c_n| \leq \|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\|_1 \to 0$ cuando $r \to \infty$, con lo que $|0 - c_n| = 0$, por lo tanto $c_n = 0$.

Concluimos que los coeficientes de Taylor para una función $f$ que pertenece al espacio $H^p$ coinciden con los coeficientes de Fourier. Aplicando el Lema A.1 se tiene el resultado. ■

**Teorema 1.18** *Sí $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$, para $0 < p < 1$. Entonces*

$$|a_n| \leq C n^{\frac{1}{p}-1},$$

*donde la constante $C$ depende únicamente de $f$ y $p$.*

Demostración.

De (1.31) se tiene que:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n}\, d\theta \\ &= r^{-n} M_1(r, f). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Como $f \in H^p$, para $0 < p < 1$ tenemos que

$$\|f\|_p = \sup_{r<1} M_p(r, f) < \infty.$$

Sí $N = \|f\|_p$, entonces $M_p(r, f) \leq N$ y usando el Teorema B.7 tenemos que existe $K = K(p)$ independiente de $f$ tal que

$$M_1(r, f) \leq \frac{KN}{(1-r)^{\frac{1}{p}-1}}, \quad 0 < p < q = 1.$$

Tomando $r = 1 - \frac{1}{n}$ y $n = \frac{1}{1-r}$ se tiene

$$M_1(r, f) \leq KNn^{\frac{1}{p}-1} = Kn^{\frac{1}{p}-1}\|f\|_p.$$

Como $0 < r < 1$, sea $r = \frac{1}{m}$, con $m \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Por lo tanto de (1.32) y lo anterior

$$|a_n| \leq \frac{M_1(r,f)}{r^n} \leq \frac{Kn^{\frac{1}{p}-1}\|f\|_p}{r^n} = Km^n n^{\frac{1}{p}-1}\|f\|_p = Cn^{\frac{1}{p}-1},$$

donde la constante $C$ depende unicamente de $f$ y $p$. ∎

**Lema 1.2** *Sean $p \in (0,\infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p - \alpha > -1$, se define*

$$I_{p,\alpha}(a) = \iint_\Delta \frac{(1-|z|^2)^{p-\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\, dx\, dy,$$

*entonces $I_{p,\alpha}(a) = \frac{C}{(1-|a|^2)^{p+\alpha-2}}$ si $p + \alpha - 2 > 0$.*

Demostración.

Sea $f(z) = \frac{1}{(1-\overline{a}z)^p}$, consideremos el cambio de variable $\xi = \overline{a}z$.

Para calcular la serie de Taylor de $f$ derivamos con respecto a $\xi$ y usando la Proposición A.1 llegamos a que

$$\frac{1}{(1-\overline{a}z)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)}{n!\Gamma(p)} \overline{a}^n z^n.$$

Así

$$\frac{1}{|1-\overline{a}z|^{2p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)^2}{(n!)^2\Gamma(p)^2} |a|^{2n}|z|^{2n}.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Delta} \frac{(1-|z|^2)^{p-\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\, dx\, dy &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)^2}{(n!)^2\Gamma(p)^2}|a|^{2n} \iint_{\Delta} (1-|z|^2)^{p-\alpha}|z|^{2n}\, dx\, dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)^2}{(n!)^2\Gamma(p)^2}|a|^{2n} \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^{p-\alpha} r^{2n} r dr d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)^2}{(n!)^2\Gamma(p)^2}|a|^{2n} 2\pi \int_0^1 (1-r^2)^{p-\alpha} r^{2n}\, r\, dr \\
&= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)^2}{(n!)^2\Gamma(p)^2}|a|^{2n} \int_0^1 (1-s)^{p-\alpha} s^n ds. \qquad (1.33)
\end{aligned}
$$

Al tomar $u = s^n$ y $dv = (1-s)^{p-\alpha}$, e integrando por partes tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (1-s)^{p-\alpha} s^n ds &= \left[ -\frac{s^n(1-s)^{p-\alpha+1}}{p-\alpha+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-s)^{p-\alpha+1}}{p-\alpha+1} n s^{n-1} ds \\
&= \frac{n}{p-\alpha+1} \int_0^1 (1-s)^{p-\alpha+1} s^{n-1}\, ds.
\end{aligned}
$$

Ahora tomemos $u = s^{n-1}$ y $dv = (1-s)^{p-\alpha+1}$, así

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (1-s)^{p-\alpha} s^n ds &= \frac{n}{p-\alpha+1} \left[ -\frac{s^{n-1}(1-s)^{p-\alpha+2}}{p-\alpha+2} \right]_0^1 \\
&- \frac{n}{p-\alpha+1} \int_0^1 -\frac{(1-s)^{p-\alpha+2}}{p-\alpha+2} (n-1) s^{n-2} ds \\
&= \frac{n}{p-\alpha+1} \frac{n-1}{p-\alpha+2} \int_0^1 (1-s)^{p-\alpha+2} s^{n-2}\, ds.
\end{aligned}
$$

Continuando así, ocupando la Definición A.1 y la Proposición A.1 se tiene para el paso $n$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-s)^{p-\alpha} s^n ds \\
&\quad = \frac{n}{p-\alpha+1} \cdots \frac{n-(n-1)}{p-\alpha+n} \int_0^1 (1-s)^{p-\alpha+n} s^{n-n} ds \\
&\quad = \frac{n}{p-\alpha+1} \cdots \frac{1}{p-\alpha+n} \int_0^1 (1-s)^{p-\alpha+n} ds \\
&\quad = \frac{n}{p-\alpha+1} \cdots \frac{1}{p-\alpha+n} \frac{1}{p-\alpha+n+1} \\
&\quad = \frac{n!}{(p-\alpha+1)\big[(p-\alpha+1)+1\big]\cdots\big[(p-\alpha+1)+n\big]} \\
&\quad = \frac{1}{p-\alpha+1} \frac{1}{\binom{n+p-\alpha+1}{p-\alpha+1}} \\
&\quad = \frac{1}{p-\alpha+1} \frac{1}{\frac{(n+p-\alpha+1)!}{(p-\alpha+1)!n!}} \\
&\quad = \frac{(p-\alpha+1)!n!}{(p-\alpha+1)(n+p-\alpha+1)!} \\
&\quad = \frac{(p-\alpha)!n!}{(n+p-\alpha+1)!} \\
&\quad = \frac{\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p-\alpha+2)}.
\end{aligned}$$

Además considerando la Proposición A.1 llegamos a que

$$\frac{\Gamma(n+p)^2}{n!\Gamma(n+p-\alpha+2)n^{p+\alpha-2-1}} = 1 \quad y \quad \frac{n^{p+\alpha-2-1}n!}{\Gamma(n+p+\alpha-2)} = 1.$$

Por lo tanto de (1.33) se tiene

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Delta} \frac{(1-|z|^2)^{p-\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\,dx\,dy \\
&\quad = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)^2}{(n!)^2\Gamma(p)^2} \frac{\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p-\alpha+2)} |a|^{2n} \\
&\quad = \frac{\pi\Gamma(p-\alpha+1)}{\Gamma(p)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)^2}{n!\Gamma(n+p-\alpha+2)} |a|^{2n} \\
&\quad = \frac{\pi\Gamma(p-\alpha+1)}{\Gamma(p)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{p+\alpha-2-1} |a|^{2n} \\
&\quad = \frac{\pi\Gamma(p-\alpha+1)}{\Gamma(p)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p+\alpha-2)}{n!} |a|^{2n} \\
&\quad = \frac{\pi\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(p+\alpha-2)}{\Gamma(p)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p+\alpha-2)}{n!\Gamma(p+\alpha-2)} |a|^{2n} \\
&\quad = \frac{\pi\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(p+\alpha-2)}{\Gamma(p)^2} \frac{1}{(1-|a|^2)^{p+\alpha-2}} \\
&\quad = \frac{C}{(1-|a|^2)^{p+\alpha-2}}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

**Proposición 1.16** *Si $r \in (\frac{1}{2}, 1)$ y $|\theta| < \pi$, entonces*

$$
\frac{\sqrt{2}}{\pi}|\theta| \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{r}|\theta| \leq 2\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\,\frac{|\theta|}{2} \leq |1-re^{i\theta}| < 2 < e.
$$

Demostración.

Ya que $\frac{1}{2} < r$, $\sqrt{2} < 2\sqrt{r}$, con lo cual $\frac{\sqrt{2}}{\pi}|\theta| \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{r}|\theta|$, cumpliéndose la primera desigualdad.

Veamos ahora que $\frac{|\theta|}{\pi} \leq \mathrm{sen}\,\frac{|\theta|}{2}$.

Sea $f(\theta) = \operatorname{sen}\frac{|\theta|}{2}$, $-f'(\theta) = -\frac{1}{2}\cos\frac{|\theta|}{2}$ y $-f''(\theta) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{|\theta|}{2} \geq 0$, pues $|\theta| < \pi$, con lo cual $-f'(\theta)$ es creciente y así $f(\theta)$ es cóncava.

Luego $\frac{|\theta|}{\pi} \leq \operatorname{sen}\frac{|\theta|}{2}$.

Verifiquemos la tercera desigualdad

Como $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, $(1-r)^2 > 0$ entonces

$$0 \;<\; (1-r)^2 = 1 + r^2 - 2r.$$

Así

$$\begin{aligned}
1 + r^2 - 4r &> -2r \\
&= -2r\Big(\operatorname{sen}^2\frac{|\theta|}{2} + \cos^2\frac{|\theta|}{2}\Big) \\
&= 2r\Big(-\operatorname{sen}^2\frac{|\theta|}{2} - \cos^2\frac{|\theta|}{2}\Big) \\
&= 2r\Big(\cos^2\frac{|\theta|}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{|\theta|}{2} - 2\cos^2\frac{|\theta|}{2}\Big) \\
&= 2r\Big(\cos\theta - 2\cos^2\frac{|\theta|}{2}\Big) \\
&= 2r\cos\theta - 4r\cos^2\frac{|\theta|}{2}.
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
1 + r^2 - 2r\cos\theta &> 4r\Big(1 - \cos^2\frac{|\theta|}{2}\Big) \\
&= 4r\operatorname{sen}^2\frac{|\theta|}{2},
\end{aligned}$$

teniendo por consiguiente

$$|1 - re^{i\theta}| \;=\; (1 - 2r\cos\theta + r^2)^{\frac{1}{2}} > 2\sqrt{r}\operatorname{sen}\frac{|\theta|}{2}.$$

Por último comprobemos la cuarta y quinta desigualdad .

$|1 - re^{i\theta}| \leq 1 + |re^{i\theta}| = 1 + r < 2 < e.$ ∎

El Lema 1.2 junto con la Proposición 1.16 nos ayudarán a demostrar la siguente proposición.

**Proposición 1.17** *Considere la función* $f : \Delta \to \mathbb{C}$ *dada por:*

$$f(z) = \log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - ... - \frac{z^n}{n} - ....$$

*Entonces* $f \in \mathcal{Q}_p \bigcap H^p$ *para cada* $p \in (0, \infty)$.

Demostración.

Por el Ejemplo 1.2 $f \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_p$ para $p > 1$. Para $0 < p \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p &= \frac{1}{|1-z|^2}\frac{(1-|z|^2)^p(1-|a|^2)^p}{|1-\bar{a}z|^{2p}} \\ &= (1-|a|^2)^p\frac{(1-|z|)^p(1+|z|)^p}{|1-z|^2|1-\bar{a}z|^{2p}} \\ &\leq 2^p(1-|a|^2)^p\frac{(1-|z|)^p}{|1-z|^2|1-\bar{a}z|^{2p}} \\ &\leq 2^p(1-|a|^2)^p\frac{(1-|z|)^p}{(1-|z|)^2|1-\bar{a}z|^{2p}} \\ &= 2^p(1-|a|^2)^p\frac{(1-|z|)^{p-2}}{|1-\bar{a}z|^{2p}}. \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy \leq 2^p(1-|a|^2)^p\iint_\Delta \frac{(1-|z|)^{p-2}}{|1-\bar{a}z|^{2p}}\,dx\,dy.$$

Del Lema 1.2 tomando $\alpha = 2$, $I_{p,2}(a) = \frac{C}{(1-|a|^2)^p}$ tenemos

$$\begin{aligned} \sup_{a\in\Delta}\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy &\leq 2^p(1-|a|^2)^p\sup_{a\in\Delta}\frac{C}{(1-|a|^2)^p} \\ &= 2^p\sup_{a\in\Delta}C\frac{(1-|a|^2)^p}{(1-|a|^2)^p} \\ &= 2^p\sup_{a\in\Delta}C \\ &= 2^pC. \end{aligned}$$

Luego por el Teorema 1.12 $i$) se concluye que $f \in \mathcal{Q}_p$.

Veamos ahora que $f \in H^p$

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| &= |\log(1-re^{i\theta})| \\ &\leq \Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big| + |\arg(1-re^{i\theta})| \\ &\leq \Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big| + \pi. \end{aligned}$$

Con ésto y la siguiente desigualdad

$$|a+b|^p \leq (|a|+|b|)^p \leq (\text{máx}\{2|a|,2|b|\})^p \leq 2^p(\text{máx}\{|a|^p,|b|^p\}) \leq 2^p(|a|^p+|b|^p)$$

que se cumple para $a, b \in \mathbb{C}$ y $p > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta &\leq \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p + \pi^p\right) d\theta \\ &= \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta + \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \pi^p\, d\theta \\ &= \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta + (2\pi)^p. \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} A = \{0 < \theta < \pi : |1-re^{i\theta}| \geq 1\}, \\ B = \{0 < \theta < \pi : |1-re^{i\theta}| < 1\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta \\
&\quad= \frac{2^p}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta \\
&\quad= \frac{2^p}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta + \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta \\
&\quad= -\frac{2^p}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\Big|\log|1-re^{-ix}|\Big|^p dx + \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta \\
&\quad= \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta + \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta \\
&\quad= \frac{2^p}{\pi}\int_0^{\pi}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta \\
&\quad= \frac{2^p}{\pi}\int_A\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta + \frac{2^p}{\pi}\int_B\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta.
\end{aligned}
$$

Haciendo uso de la Proposición 1.16 tenemos que se cumplen las desigualdades

$$
\begin{aligned}
&\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p \leq 1 \quad y \\
&\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p \leq \Big(\log\frac{1}{|1-re^{i\theta}|}\Big)^p \leq \Big(\log\frac{\pi}{\sqrt{2}|\theta|}\Big)^p,
\end{aligned}
$$

para los conjuntos A y B respectivamente. Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\log|1-re^{i\theta}|\Big|^p d\theta &\leq 2^p + \frac{2^p}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\log\frac{\pi}{\sqrt{2}|\theta|}\Big)^p d\theta \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\sup_{r<1}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta\Big]^{\frac{1}{p}} < \infty.
$$

Con lo cual se concluye que $f \in H^p$ y así $f \in \mathcal{Q}_p \bigcap H^p$. ■

La función $f(z) = \log(1-z)$ la seguiremos estudiando en la sección 2.3.

# Capítulo 2

# Primitivas y derivadas.

## 2.1. Resultados Preliminares.

En esta sección se enuncian los dos teoremas que motivaron el desarrollo de este trabajo, pero no se demuestran debido a que éstos quedan contenidos en los resultados que se obtienen en la sección 2.2, sin embargo como antecedente consideramos que vale la pena mencionarlos. Se demostrarán algunos resultados los cuales se utilizarán en secciones posteriores.

**Definición 2.1** *Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Definimos el espacio de primitivas de $\mathcal{F}$ como:*

$$P(\mathcal{F}) = \{F \in \mathcal{A} : F' \in \mathcal{F}\}.$$

**Teorema 2.1** *Sea $n \geq 1$ y $0 < p < \infty$. Entonces, para una función analítica $f : \Delta \to \mathbb{C}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $f \in \mathcal{Q}_p$,

*ii)* $\sup\limits_{a \in \Delta} \iint_\Delta |f^{(n)}(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p (1 - |z|^2)^{2n-2}\, dx\, dy < \infty.$

**Teorema 2.2** *Sea $n \geq 1$ y $0 < p < \infty$. Entonces, para una función analítica $f : \Delta \to \mathbb{C}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$,

*ii)* $\lim\limits_{|a|\to 1^-} \iint_\Delta |f^{(n)}(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p(1-|z|^2)^{2n-2}\,dx\,dy = 0.$

La siguiente proposición muestra que el espacio $\mathcal{Q}_p$ para $0 < p \leq 1$ contiene a su espacio de primitivas.

**Proposición 2.1** *Sea $0 < p \leq 1$. Entonces $P(\mathcal{Q}_p) \subset \mathcal{Q}_p$ (es decir, si $f \in \mathcal{Q}_p$, entonces $F \in \mathcal{Q}_p$).*

Demostración.

Sea $F : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $F' = f$.

Si $F \in P(\mathcal{Q}_p)$, entonces $f \in \mathcal{Q}_p$. Por el Teorema 1.12 $i$) se tiene entonces

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p\,dx\,dy < \infty.$$

Dado que

$$|f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p(1-|z|^2)^2 \leq |f'(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p.$$

Se tiene

$$\sup_{a\in\Delta} \iint_\Delta |F''(z)|^2(1-|\phi_a(z)|^2)^p(1-|z|^2)^2\,dx\,dy < \infty.$$

Luego por el Teorema 2.1 para $n = 2$, $F \in \mathcal{Q}_p$. ■

**Corolario 2.1** *Sean $f, F : \Delta \to \mathbb{C}$ funciones analíticas en el círculo unita rio abierto tales que $f^{(n)} \in \mathcal{Q}_p$ con $n \in \mathbb{N}$ y $F^{(k)} = f^{(n)}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces $F \in \mathcal{Q}_p$.*

Demostración.

Aplicando la proposición tenemos que si $F^{(k)} \in \mathcal{Q}_p$, entonces $F^{(k-1)} \in \mathcal{Q}_p$. Utilizando este procedimiento k-veces se tiene el resultado. ■

Notemos que la proposición no incluye el caso $p = 0$, esto es, el espacio de Dirichlet, el cual se analizará en la sección 2.2.

Podemos dar un resultado análogo al anterior para el espacio $\mathcal{Q}_{p,0}$. Así obtenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.2** *Sea $0 < p \leq 1$. Entonces $P(\mathcal{Q}_{p,0}) \subset \mathcal{Q}_{p,0}$ (es decir, si $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$, entonces $F \in \mathcal{Q}_{p,0}$).*

Demostración.

Sea $F : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $F' = f$.

Si $F \in P(\mathcal{Q}_{p,0})$, entonces $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$. Utilizando el Teorema 1.12 *ii*) tenemos

$$\lim_{|a|\to 1^-} \iint_\Delta |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx \, dy = 0.$$

Además, dado que

$$\iint_\Delta |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p (1 - |z|^2)^2 \, dx \, dy \leq \iint_\Delta |f'(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p \, dx \, dy,$$

ya que la última expresión tiende a cero cuando $|a| \to 1^-$ se sigue que

$$\lim_{|a|\to 1^-} \iint_\Delta |F''(z)|^2 (1 - |\phi_a(z)|^2)^p (1 - |z|^2)^2 \, dx \, dy = 0.$$

Aplicando el Teorema 2.2 para $n = 2$ se tiene que $F \in \mathcal{Q}_{p,0}$. ■

**Corolario 2.2** *Sea $f \in \mathcal{A}$. Si $f \notin \mathcal{Q}_p$ (resp. $f \notin \mathcal{Q}_{p,0}$) entonces $f^{(k)} \notin \mathcal{Q}_p$ (resp. $f^{(k)} \notin \mathcal{Q}_{p,0}$) para todo $k \in \mathbb{N}$ y $0 < p \leq 1$.*

Para las proposiciones 2.1 y 2.2 con sus respectivos corolarios, analizamos unicamente el caso $0 < p \leq 1$ dado que más adelante se demostrará que $P(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ (resp. $P(B_0) \subset B_0$). Recordando del Capítulo 1 que $\mathcal{Q}_p = \mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{Q}_{p,0} = B_0$) para $p > 1$ habremos concluido que los enunciados de ambas proposiciones se cumplen para $p > 0$.

Utilizando las proposiciones anteriores tenemos que si $0 < p \leq 1$ y $f \in \mathcal{Q}_p$ (resp. $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$), entonces $F \in \mathcal{Q}_p$. El siguiente teorema garantiza más aún que $F \in \mathcal{D}$ siempre y cuando la función $f$ tenga una representación en serie de potencias la cual es lacunaria.

**Teorema 2.3** *Sea $0 < p \leq 1$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ una función analítica en $\Delta$ y lacunaria. Si $f \in \mathcal{Q}_p$ (o equivalentemente $f \in \mathcal{Q}_{p,0}$) y $F : \Delta \to \mathbb{C}$ es una primitiva de $f$, entonces $F \in \mathcal{D}$.*

Demostración.

Sea $F : \Delta \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n_k + 1} z^{n_k+1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (n_k + 1) \left| \frac{a_k}{n_k + 1} \right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{n_k + 1}.$$

Sea $I_k = \{n : 2^k \leq n < 2^{k+1}, n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{n_k + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n_j \in I_k} \frac{|a_k|^2}{n_k + 1}.$$

Como $2^k \leq n_j < n_j + 1$ entonces $\frac{1}{n_j+1} < \frac{1}{2^k} \leq \frac{2^k}{2^k}$, además $0 < p \leq 1$ entonces $-k \leq -kp$ así $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{kp}}$. Por lo tanto

$$\frac{1}{n_j + 1} < 2^{k(1-p)}.$$

Tomando en cuenta esta última desigualdad tenemos que:

$$\frac{|a_k|^2}{n_k + 1} < 2^{k(1-p)} |a_j|^2.$$

Como $f \in \mathcal{Q}_p$, por el Teorema 1.15 se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n_j \in I_k} 2^{k(1-p)} |a_j|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2 < \infty.$$

Luego por la Observación A.2

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n_j\in I_k}\frac{|a_k|^2}{n_k+1}<\infty.$$

Por lo tanto $F\in\mathcal{D}$. ■

En la sección 1.2 se dió la condición para que una función pertenezca al espacio de Bloch, el siguiente teorema nos da una condición más general para tal situación.

**Teorema 2.4** *Sea $f:\Delta\to\mathbb{C}$ una función analítica y $n\in\mathbb{N}$ tal que:*

$$\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)|<\infty.$$

*Entonces $f\in\mathcal{B}$.*

Demostración.

Supongamos que $f\in\mathcal{A}$ y $n\geq 2$, tenemos por hipótesis que:

$$\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)|=K<\infty.$$

Entonces

$$|f^{(n)}(z)|\leq\frac{K}{(1-|z|^2)^n}.$$

Si $z \in \Delta$ y $\xi = zt$ con $0 \leq t < 1$, entonces por el teorema fundamental del cálculo se tiene

$$
\begin{aligned}
|f^{(n-1)}(z)| - |f^{(n-1)}(0)| &\leq |f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(0)| \\
&= \left| \int_0^z f^{(n)}(\xi)\, d\xi \right| \\
&= \left| \int_0^1 f^{(n)}(tz) z\, dt \right| \\
&\leq |z| \int_0^1 |f^{(n)}(tz)| dt \\
&\leq K|z| \int_0^1 \frac{dt}{(1 - |t|^2|z|^2)^n} \\
&\leq K|z| \int_0^1 \frac{dt}{(1 - t|z|)^n} \\
&= \left[ \frac{K}{(n-1)(1 - t|z|)^{n-1}} \right]_0^1 \\
&= \frac{K}{(n-1)(1-|z|)^{n-1}} - \frac{K}{n-1} \\
&\leq \frac{K}{(n-1)(1-|z|)^{n-1}} \\
&= \frac{K(1+|z|)^{n-1}}{(n-1)(1-|z|)^{n-1}(1+|z|)^{n-1}} \\
&\leq \frac{K2^{n-1}}{(n-1)(1-|z|^2)^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$|f^{(n-1)}(z)| \leq |f^{(n-1)}(0)| + \frac{K2^{n-1}}{(n-1)(1-|z|^2)^{n-1}}.$$

Entonces

$$(1-|z|^2)^{n-1}|f^{(n-1)}(z)| \leq \frac{K2^{n-1}}{(n-1)} + (1-|z|^2)^{n-1}|f^{(n-1)}(0)| < \infty.$$

Así $(1-|z|^2)^{n-1}|f^{(n-1)}(z)| < \infty$.

Realizando el mismo procedimiento $n-2$ veces llegamos a que:

$$\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty. \qquad \blacksquare$$

Podemos dar un resultado análogo al anterior para el espacio $B_0$, de tal forma el teorema es el siguiente.

**Teorema 2.5** *Sea $f:\Delta\to\mathbb{C}$ una función analítica y $n\in\mathbb{N}$ tal que:*

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)| = 0.$$

*Entonces $f\in B_0$.*

Demostración.

Similar a la demostración del teorema anterior. $\blacksquare$

Con la siguiente proposición concluiremos que los espacios $\mathcal{Q}_p$ y $\mathcal{Q}_{p,0}$ para $p>0$ contienen a su espacio de primitivas.

**Proposición 2.3** *$P(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}$ (resp. $P(B_0)\subset B_0$), es decir, si $f\in\mathcal{B}$, entonces $F\in\mathcal{B}$ (resp. si $f\in B_0$, entonces $F\in B_0$).*

Demostración.

Sea $F:\Delta\to\mathbb{C}$ una función analítica tal que $F'=f$.

Supongamos que $F\in P(\mathcal{B})$, entonces $f\in\mathcal{B}$ teniendo que

$$\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Dado que

$$(1-|z|^2)^2|f'(z)| \leq (1-|z|^2)|f'(z)|.$$

Tenemos entonces que

$$\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)^2|F''(z)| < \infty,$$

aplicando el Teorema 2.4 para $n = 2$, tenemos que $F \in \mathcal{B}$.

De manera análoga se demuestra que $P(B_0) \subset B_0$. ∎

El siguiente ejemplo es una aplicación de los Teoremas 2.4 y 2.5.

**Ejemplo 2.1** *Sea $F \in \mathcal{A}$ tal que $F^{(n)}(z) = e^{\frac{z-1}{z+1}}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$(1 - |z|^2)^n |F^{(n)}(z)| = (1 - |z|^2)^n |e^{\frac{z-1}{z+1}}| \leq (1 - |z|^2)^n,$$

*pero ésta última expresión tiende a cero cuando $|z| \to 1^-$. Luego*

$$\lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)^n |F^{(n)}(z)| = 0,$$

*aplicando el Teorema 2.5 tenemos que $F \in B_0$ (equivalentemente $f \in \mathcal{B}$).*

La función $F$ tiene propiedades interesantes que se analizarán más adelante.

## 2.2. El espacio $D_p$.

A diferencia de los espacios $\mathcal{Q}_p$ y $\mathcal{Q}_{p,0}$ en el espacio $D_p$ podemos ubicar de manera precisa en que espacio se encuentran sus derivadas y sus primitivas. El siguiente ejemplo es muy ilustrativo al respecto.

**Ejemplo 2.2** *Sea $\alpha > 0$ y $f : \Delta \to \mathbb{C}$ la función analítica dada por*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}.$$

*Entonces del Corolario 1.1 tenemos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 \, dx \, dy &= \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}} \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}, \end{aligned}$$

*la cual es una serie que converge debido al Teorema A.10 .*

*Por lo tanto $f \in \mathcal{D}$, sin embargo si $p = -2-\alpha$, $\alpha > 0$ y $F$ es una primitiva de $f$ entonces podemos suponer que $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$. Luego*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{1-p}\left|\frac{1}{(n+1)n^{1+\frac{\alpha}{2}}}\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{1-p}}{(n+1)^2 n^{2+\alpha}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{2+\alpha}}{(n+1)n^{2+\alpha}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2+\alpha}.
\end{aligned}$$

*Ya que $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2+\alpha} > \frac{1}{n}$, aplicando la Observación A.2 tenemos que la serie anterior diverge.*

*Por lo tanto $F \notin D_{-2-\alpha}$.*

Lo anterior motiva el siguiente resultado.

**Teorema 2.6** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica y $F$ una primitiva de $f$. Sea $p \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $f \in D_p$,

*ii)* $F \in D_{p-2k}$, *donde* $F^{(k)} = f$,

*iii)* $f^{(k)} \in D_{p+2k}$.

Demostración.

$i) \Leftrightarrow ii)$ Basta verlo para $k = 1$.

Sea $F : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $F' = f$ y $F \in P(D_p)$, entonces $f \in D_p$.

Si $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces podemos suponer que $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{1-(p-2)}\left|\frac{a_n}{n+1}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{1-p}|a_n|^2.$$

Además

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{1-p}|a_n|^2}{n^{1-p}|a_n|^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-p}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-p}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Como $f\in D_p$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p}|a_n|^2$ converge, por lo que al aplicar el Teorema A.1 se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{1-p}|\frac{a_n}{n+1}|^2$ converge, así $F\in D_{p-2}$.

Continuando de esta manera $k-1$ veces llegamos a que $F\in D_{p-2k}$, donde $F^{(k)}=f$.

*i)* $\Leftrightarrow$ *iii)* Supongamos que $f\in D_p$ y sea $h=f^{(k)}$.

Por la parte anterior tenemos que $h\in D_{p+2k}$. Si $H^{(k)}=h$, entonces $H=f$, es decir, $f$ es la primitiva de orden $k$ de $h$, esto sucede solamente si $f\in D_{(p+2k)-2k}=D_p$. ■

**Corolario 2.3** *Sea $p>0$. Entonces*

$$D_{-2}\subset P(\mathcal{Q}_{p,0})\subset P(\mathcal{Q}_p)\subset D_{p-2}.$$

Demostración.

Sea $f\in D_{-2}$, por consiguiente $f^{(k)}\in D_{-2+2k}$, tomando $k=1$ tenemos que $f'\in D_{-2+2}=D_0=\mathcal{D}\subset\mathcal{Q}_{p,0}\subset\mathcal{Q}_p$ (por el Teorema 1.1 y el Teorema 1.15). Por lo tanto se tienen las dos primeras contenciones.

Sea $F \in P(\mathcal{Q}_p)$, entonces $F' = f \in \mathcal{Q}_p \subset D_p$ (por la Proposición 1.12) para $p > 0$, por lo tanto $f \in D_p$, haciendo uso del Teorema 2.6 para $k = 1$ tenemos que $F \in D_{p-2}$. ∎

**Corolario 2.4** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica de tal manera que $f^{(n)} \in \mathcal{Q}_p, (resp.\ f^{(n)} \in \mathcal{Q}_{p,0})$ para $p > 0$. Entonces $f \in D_{p-2n}$.*

Demostración.

Para $p > 0$ se tiene que $\mathcal{Q}_{p,0} \subset \mathcal{Q}_p \subset D_p$. Por lo tanto si suponemos que $f^{(n)} \in \mathcal{Q}_p, (resp.\ f^{(n)} \in \mathcal{Q}_{p,0})$, entonces $f^{(n)} \in D_p$ y haciendo uso del Teorema 2.6 tenemos que $f \in D_{p-2n}$. ∎

**Corolario 2.5** *Sea $\alpha > 0$. Entonces*

$$P(B^\alpha) \subset \bigcap_{2\alpha-3<q} D_q.$$

*En particular*

$$P(\mathcal{B}) \subset \bigcap_{-1<q} D_q.$$

Demostración.

Sea $F \in P(B^\alpha)$, aplicando el Teorema 1.7 tenemos que

$$F' = f \in B^\alpha \subset \bigcap_{2\alpha-1<q+2} D_{q+2} = \bigcap_{2\alpha-3<q} D_{q+2}.$$

Haciendo uso del Teorema 2.6 se tiene que $F \in D_{(q+2)-2} = D_q$, para todo $q > 2\alpha - 3$. ∎

**Corolario 2.6** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f \notin \mathcal{D}$, entonces $f^{(k)} \notin \mathcal{D}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

Supongamos que existe $k$ elemento de los naturales tal que $f^{(k)} \in \mathcal{D}$, por lo tanto haciendo uso del Teorema 2.6 tenemos que $f \in D_{-2k} \subseteq D_{-2} \subset D_0 = \mathcal{D}$, lo cual es una contradicción. ■

El siguiente ejemplo muestra que aunque una función sea acotada y pertenezca al pequeño espacio de Bloch no necesariamente se encuentra en el espacio de Dirichlet, aunque su primitiva puede estarlo.

**Ejemplo 2.3** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ la función analítica dada por*

$$f(z) = e^{\frac{z-1}{1+z}}.$$

*Entonces $f(\Delta) = \Delta - \{0\}$.*

*Analizemos a la función f.*

*Sea $L(z) = \frac{z-1}{1+z}$.*

*Sea $E(\Delta)$ el exterior de $\Delta$ y $G = E(\Delta) - T$. Entonces $\Delta$ y $G$ son dos dominios en el plano z cuya frontera común es $T$. Sean $L(\Delta)$, $L(G)$ y $\Gamma = L(T)$ las imágenes de los dos dominios y de $T$ en el plano w. Entonces $L(\Delta)$ y $L(G)$ son dos dominios en el plano w cuya frontera común es $\Gamma$. Más aún para determinar cual de los dos dominios con frontera $\Gamma$ es la imagen del dominio $\Delta$ con frontera $T$ es suficiente localizar la imagen $w_0$ de cualquier punto $z_0 \in \Delta$, entonces el dominio que contenga a $w_0$ será la imagen de $\Delta$.*

*Recordemos que solamente necesitamos tres puntos de $T$ para identificar $\Gamma = L(T)$ en el plano w.*

$$L(z) = \begin{cases} 0 & si\ z = 1, \\ \infty & si\ z = -1, \\ i & si\ z = i. \end{cases}$$

*Los cuales indican que la imagen de $T$ bajo $L$ es una recta vertical que pasa por el origen y como $L(0) = -1$ la imagen de $\Delta$ bajo $L$ será enviada a la izquierda de la recta por lo que $G$ será enviado a la derecha de la misma.*

*Los puntos $w = u_0 + i(v_0 + 2k\pi)$ tienen la misma imagen para cada $k \in \mathbb{Z}$ bajo $e^w$, por lo que podemos restringirnos a la región $-\pi < Imw \leq \pi$ pues lo que ocurre en estas franjas infinitas, también ocurre en las franjas $-\pi + 2k\pi < Imw \leq \pi + 2ki$.*

*La transformación $e^w$ manda la franja infinita dibujada por $Rew < 0$ y $-\pi < Imw \leq \pi$ al círculo unitario abierto en forma inyectiva, por lo que al considerar el semiplano dibujado a la izquierda de la recta vertical formada por la transformación $L$ tendríamos que considerar una infinidad de franjas infinitas de longitud $2\pi$, las cuales por la periodicidad de la función $e^w$ recorrerán el círculo unitario abierto una infinidad de veces.*

*Recordemos que nuestro objetivo es demostrar que la función $f$ no se encuentra en el espacio de Dirichlet. Tenemos que*

$$\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 \, dx \, dy$$

*es el área de la imagen de $\Delta$ bajo la función $f$ contando multiplicidades pero por lo dicho arriba tenemos que:*

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 \, dx \, dy$$

*es el área del círculo unitario menos el origen una infinidad de veces (contando multiplicidades) multiplicado por $\frac{1}{\pi}$.*

*Por lo tanto $f \notin \mathcal{D}$.*

*Sin embargo si $F : \Delta \to \mathbb{C}$ es una primitiva de $f$ entonces $F \in \mathcal{D}$, ya que*

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} |F'(z)|^2 \, dx \, dy &= \iint_{\Delta} |f(z)|^2 \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Delta} \left| e^{\frac{z-1}{1+z}} \right|^2 dx \, dy. \end{aligned}$$

*Por lo visto arriba si $|z| < 1$, $\left| e^{\frac{z-1}{1+z}} \right| < 1$. Así $f \in \mathcal{D}$.*

*Además*

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|f'(z)| &= (1-|z|^2)\left|\frac{2}{(1+z)^2}e^{\frac{z-1}{1+z}}\right| \\ &\leq (1-|z|^2)\frac{2}{|1+z|^2}.\end{aligned}$$

*Pero esta expresión tiende a cero cuando* $|z| \to 1^-$.

*Por lo tanto* $f \in B_0$.

## 2.3. El espacio de Hardy $H^p$.

Los siguientes teoremas muestran que si $f \in H^p$, entonces su primitiva $F$ también pertenece a $H^p$, es decir, el espacio $H^p$ es otro de los espacios que contiene a su espacio de primitivas.

**Teorema 2.7** *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $f : \Delta \to \mathbb{C}$ *una función analítica en* $\Delta$ *que pertenece al espacio* $H^p$ *y* $F : \Delta \to \mathbb{C}$ *una primitiva de f. Entonces* $F \in H^p$ *y* $\|F\|_p \leq \|f\|_p$.

Demostración.

Sea $0 < R < 1$ y $1 < p < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}|F(Re^{i\theta})| &= \left|\int_0^R f(re^{i\theta})e^{i\theta}\,dr\right| \\ &\leq \int_0^R |f(re^{i\theta})|\,dr. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sea $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema B.18) tenemos

$$\begin{aligned}
|F(Re^{i\theta})|^p &\leq \Big( \int_0^R |f(re^{i\theta})|\, dr \Big)^p \\
&\leq \Big[ \Big( \int_0^R |f(re^{i\theta})|^p\, dr \Big)^{\frac{1}{p}} \Big( \int_0^R 1^q\, dr \Big)^{\frac{1}{q}} \Big]^p \\
&= \Big( \int_0^R |f(re^{i\theta})|^p\, dr \Big) \Big( \int_0^R 1^q\, dr \Big)^{\frac{p}{q}} \\
&= R^{\frac{p}{q}} \int_0^R |f(re^{i\theta})|^p\, dr.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(Re^{i\theta})|^p\, d\theta &\leq \frac{R^{\frac{p}{q}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R |f(re^{i\theta})|^p\, dr\, d\theta \\
&= R^{\frac{p}{q}} \int_0^R \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta\, dr \\
&= R^{\frac{p}{q}} R \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta \\
&= R^{\frac{p}{q}+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta.
\end{aligned}$$

Como $p > 1$, elevando ambos miembros de la desigualdad anterior a la fracción $\frac{1}{p}$ y haciendo uso de que $f \in H^p$ tenemos

$$\|F\|_p \leq R^{\frac{p+q}{pq}} \|f\|_p = R\|f\|_p \leq \|f\|_p < \infty,$$

es decir, $\|F\|_p < \infty$ para $1 < p < \infty$.

Veamos ahora el caso $p = 1$.

De (2.1) y aplicando tanto el teorema de Fubini como el hecho de que $f \in H^1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(Re^{i\theta})|\,d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R |f(re^{i\theta})|\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^R \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,d\theta\right) dr \\
&= \int_0^R M_1(r,f)\,dr \\
&= M_1(r,f)\int_0^R dr \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

De esta forma $\|F\|_1 < \infty$.

Para el caso $p = \infty$ utilizando nuevamente la desigualdad (2.1) tenemos

$$\begin{aligned}
|F(Re^{i\theta})| &= \int_0^R |f(re^{i\theta})|\,dr \\
&\leq \max_{0\leq\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})| \int_0^R dr \\
&= R \max_{0\leq\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})| \\
&= RM_\infty(r,f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $M_\infty(R,F) < \infty$. Luego $\|F\|_\infty < \infty$. ■

El caso $0 < p < 1$ es una consecuencia del siguiente resultado de Hardy Littlewood.

**Teorema 2.8** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica en $\Delta$ y $F : \Delta \to \mathbb{C}$ una primitiva de f. Si $f \in H^p$ para algún $0 < p < 1$, entonces $F \in H^q$ donde $q = \frac{p}{1-p}$. Para cada valor de p el índice q es el mejor posible.*

Demostración.

Caso 1: $\frac{1}{2} \leq p < 1$.

Sea $\hat{p} = \frac{q}{q-1} > 1$, por lo tanto $\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{p}} = 1$, aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema B.18) se tiene

$$\begin{aligned}
|F(Re^{i\theta})|^q &\leq \left(\int_0^R |f(re^{i\theta})|\, dr\right)^q \\
&\leq \left[\left(\int_0^R |f(re^{i\theta})|^q\, dr\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^R 1^{\hat{p}}\, dr\right)^{\frac{1}{\hat{p}}}\right]^q \\
&= \left(\int_0^R |f(re^{i\theta})|^q\, dr\right)\left(\int_0^R dr\right)^{\frac{q}{\hat{p}}} \\
&= R^{\frac{q}{\hat{p}}}\int_0^R |f(re^{i\theta})|^q\, dr.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(Re^{i\theta})|^q\, d\theta &\leq R^{\frac{q}{\hat{p}}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R |f(re^{i\theta})|^q\, dr\, d\theta \\
&\leq R^{\frac{q}{\hat{p}}}\int_0^R \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q\, d\theta\, dr.
\end{aligned}$$

Así

$$M_q(r,F)^q \leq R^{\frac{q}{\hat{p}}}\int_0^R M_q(r,f)^q\, dr \leq \int_0^1 M_q(r,f)^q\, dr.$$

Del Teorema B.4, tomando $\lambda = q$, tenemos $\int_0^1 M_q(r,f)^q\, dr < \infty$, con lo cual $M_q(r,F)^q < \infty$ por lo tanto $F \in H^q$.

Caso 2: $0 < p < \frac{1}{2}$.

Sea $\alpha$ fijo, con $\frac{1}{2p} < \alpha < \frac{1}{p}$, entonces $\alpha > 1$. Por el Lema B.2 suponemos que $f$ no tiene ceros en $|z| < 1$.

Sea $g = f^{\frac{1}{\alpha}}$, entonces por (2.1)

$$\begin{aligned} |F(Re^{i\theta})| &\leq \int_0^R |f(re^{i\theta})|\,dr \\ &= \int_0^R |g(re^{i\theta})|^\alpha\,dr \\ &= \int_0^R |g(re^{i\theta})||g(re^{i\theta})|^{\alpha-1}\,dr \\ &\leq [G(\theta)]^{\alpha-1}h(R,\theta). \end{aligned}$$

donde

$$G(\theta) = \sup_{r<1} |g(re^{i\theta})| \quad y \quad h(R,\theta) = \int_0^R |g(re^{i\theta})|\,dr.$$

Ahora sean $\beta = \frac{\alpha(1-p)}{\alpha-1}$, $\beta' = \frac{\beta}{\beta-1}$, $\beta > 1$, aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema B.18), se tiene

$$\begin{aligned} \{M_q(R,F)\}^q &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [G(\theta)]^{(\alpha-1)q}[h(R,\theta)]^q\,d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|[G(\theta)]^{(\alpha-1)q}[h(R,\theta)]^q\right| d\theta \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |[G(\theta)]^{(\alpha-1)q}|^\beta\,d\theta\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(R,\theta)|^{q\beta'}\,d\theta\right)^{\frac{1}{\beta'}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G(\theta)|^{\alpha p}\,d\theta\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(R,\theta)|^{q\beta'}\,d\theta\right)^{\frac{1}{\beta'}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G(\theta)|^{\alpha p}\,d\theta\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(R,\theta)|^{q\beta'}\,d\theta\right)^{\frac{1}{\beta'}}. \end{aligned}$$

Como $f \in H^p$

$$\begin{aligned} M_{\alpha p}(r,g) &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^{\alpha p}\,d\theta\right]^{\frac{1}{\alpha p}} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right]^{\frac{1}{\alpha p}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Luego $g \in H^{\alpha p}$. Aplicando el Teorema B.5 $G \in L^{\alpha p}$, además $q\beta' > 1$. Sea ahora M tal que $\frac{1}{q\beta'} + \frac{1}{M} = 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema B.18) se tiene

$$\begin{aligned} |h(R,\theta)|^{q\beta'} &\leq \left[ \left( \int_0^R |g(re^{i\theta})|^{q\beta'}\, dr \right)^{\frac{1}{q\beta'}} \left( \int_0^R 1^M\, dr \right)^{\frac{1}{M}} \right]^{q\beta'} \\ &= \left( \int_0^R |g(re^{i\theta})|^{q\beta'}\, dr \right) \left( R^{\frac{q\beta'}{M}} \right) \\ &\leq \int_0^R |g(re^{i\theta})|^{q\beta'}\, dr. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(R,\theta)|^{q\beta'} d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R |g(re^{i\theta})|^{q\beta'}\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^{q\beta'}\, d\theta\, dr \\ &\leq \int_0^1 M_{q\beta'}(r,g)^{q\beta'}\, dr. \end{aligned}$$

Como $g \in H^{\alpha p}$ del Teorema B.4, tomando $\lambda = q\beta' = \frac{\alpha p}{1-\alpha p}$, tenemos que $\int_0^1 M_{q\beta'}(r,g)^{q\beta'} dr < \infty$ por lo que $\left( \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(R,\theta)|^{q\beta'} d\theta \right)^{\frac{1}{q\beta'}} < \infty$. Como $g \in H^{\alpha p}$ aplicando el Teorema B.5 $\|G\|_{\alpha p}^{\frac{\alpha p}{\beta}} < \infty$, así $M_q(R,F) < \infty$ y $F \in H^q$.

Veamos ahora que el índice q es el mejor posible.

Sea $f(z) = (1-z)^{\epsilon - \frac{1}{p}}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1-re^{i\theta}|^{\epsilon p - 1}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^{1-\epsilon p}}\, d\theta < \infty. \end{aligned}$$

Para $\epsilon$ suficientemente pequeño $1 - \epsilon p < 1$ , entonces $f \in H^p$.

Elijamos $\epsilon$ de tal forma que $\epsilon - \frac{1}{p} \neq -1$, así

$F(z) = -\frac{(1-z)^{\epsilon-\frac{1}{p}+1}}{\epsilon-\frac{1}{p}+1} = -\frac{(1-z)^{\epsilon-\frac{1}{q}}}{\epsilon-\frac{1}{q}}$.

Sea $s > q$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^s \, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| -\frac{(1-z)^{\epsilon-\frac{1}{q}}}{\epsilon-\frac{1}{q}} \right|^s d\theta \\ &= \left| -\left(\epsilon - \frac{1}{q}\right)^{-s} \right| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-z|^{\frac{s}{q}-\epsilon s}} \, d\theta.\end{aligned}$$

Tenemos que $\epsilon s \leq \frac{s}{q} - 1 = \delta > 0$ se cumple para $\epsilon$ suficientemente pequeño, por lo tanto $\frac{s}{q} - \epsilon s \geq 1$. Así $f \notin H^s$, para todo $s > q$. ■

**Corolario 2.7** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica y $F$ una primitiva de $f$. Si $f \in H^p$ para algún $0 < p < 1$, entonces $F \in H^p$.*

Demostración.

Como $f \in H^p$ haciendo uso del teorema tenemos que $F \in H^{\frac{p}{1-p}}$ y como $p < \frac{p}{1-p}$, $H^{\frac{p}{1-p}} \subset H^p$ teniendo así la conclusión. ■

Los siguientes dos teoremas nos muestran bajo que condiciones el espacio $D_p$ contiene al espacio de primitivas de $H^q$.

**Teorema 2.9** *Sea $1 \leq q \leq 2$ fijo. Entonces*

$$P(H^q) \subset \bigcap_{p \geq 1-q} D_p = D_{1-q}.$$

Demostración.

Sean $f, F : \Delta \to \mathbb{C}$ funciones analíticas tales que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $F$ es una primitiva de $f$.

Si $F \in P(H^q)$, entonces $f \in H^q$, para $1 \leq q \leq 2$ y en particular tenemos que $f \in H^1$, pero además $H^2 \subseteq H^1$ por lo que al aplicar la Proposición 1.15 tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ y $|a_n|^2 \leq |a_n|^q$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $f \in H^q$ por el Teorema B.11 tenemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{q-2}|a_n|^q$ converge y además es una serie de términos no negativos, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{1-p}|\frac{a_n}{(n+1)^2}|^2$ también es una serie de términos no negativos y si $p \geq 1-q$ se cumple que

$$\begin{aligned} (n+1)^{1-p}\frac{|a_n|^2}{(n+1)^2} &= (n+1)^{-1-p}|a_n|^2 \\ &\leq (n+1)^{-1-p}|a_n|^q \\ &\leq (n+1)^{q-2}|a_n|^q \\ &\leq (n+1)^{q-2}|a_n|^q, \end{aligned}$$

luego por la Observación A.2 tenemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{1-p}|\frac{a_n}{(n+1)^2}|^2$ converge.

Por lo tanto $F \in \bigcap\limits_{p\geq 1-q} D_p$. ■

**Corolario 2.8** *Sea $F : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $F' = f$. Si $f$ pertenece al espacio $H^1$, entonces $F \in \mathcal{D}$.*

Demostración.

Sea $f \in H^1$, haciendo uso del teorema $F \in D_{1-1} = D_0 = \mathcal{D}$. ■

**Teorema 2.10** *Sea $0 < q < 1$ fijo. Entonces*

$$P(H^q) \subset \bigcap_{p\geq \frac{2}{q}-2} D_p = D_{\frac{2}{q}-2}.$$

Demostración.

Sea $0 < q < 1$ y $f \in H^q$ dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Como $f \in H^q$ por el Teorema B.11 tenemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{q-2}|a_n|^q$ converge y además es de términos no negativos. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{1-p}|\frac{a_n}{(n+1)^2}|^2$ también es una serie de términos no negativos por lo que considerando el Teorema 1.18 y el hecho de que $p \geq \frac{2}{q} - 2$ tenemos

$$\begin{aligned}
(n+1)^{1-p}\frac{|a_n|^2}{(n+1)^2} &= (n+1)^{-1-p}|a_n|^{2-q}|a_n|^q \\
&\leq (n+1)^{-1-p}C^{2-q}n^{(2-q)(\frac{1}{q}-1)}|a_n|^q \\
&\leq (n+1)^{-1-p}C^{2-q}(n+1)^{(2-q)(\frac{1}{q}-1)}|a_n|^q \\
&= C^{2-q}(n+1)^{-1-p}(n+1)^{\frac{2}{q}-3+q}|a_n|^q \\
&= C^{2-q}(n+1)^{\frac{2}{q}+q-p-4}|a_n|^q \\
&\leq C^{2-q}(n+1)^{q-2}|a_n|^q.
\end{aligned}$$

Luego por la Observación A.2 tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{1-p}|\frac{a_n}{(n+1)^2}|^2$ converge.

Por lo tanto $F \in D_p$ para todo $p \geq \frac{2}{q} - 2$. ■

A continuación analizaremos una función que fué estudiada en el Capítulo 1 Proposición 1.17, esta función es muy ilustrativa respecto al comportamiento de su primitiva y su derivada.

**Ejemplo 2.4** *Sea $f$ la función analítica dada en la Proposición 1.17, entonces $F(z) = (z-1)\log(1-z) - z$ y $F \in \mathcal{D}$ ya que*

$$F(z) = -\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2\cdot 3} - \frac{z^4}{3\cdot 4} - \frac{z^5}{4\cdot 5} - \ldots$$

*y por el Corolario 1.1*

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}|F'(z)|^2\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} n|A_n|^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}.$$

*Tenemos que las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ son de términos no negativos y $\frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n^2}$, luego por la Observación A.2 tenemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$*

*converge. Además*

$$f'(z) = -\frac{1}{1-z},$$

*entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^p} \, d\theta.$$

*Aplicando el Teorema A.5 tenemos que esta integral existe para $0 < p < 1$, pero no existe para $p \geq 1$ por lo tanto $f' \notin H^p$.*

*Tenemos también que $f \notin \mathcal{D}$ ya que*

$$\frac{1}{\pi}\iint_\Delta |f'(z)|^2 \, dx \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n\left|-\frac{1}{n}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

*la cual diverge por el Teorema A.10.*

**Teorema 2.11** *Sean $f, G : \Delta \to \mathbb{C}$ funciones analíticas, $0 < p < 1$ fijo y $k \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{k} < p < 1$. Sea $f \in H^p$ con serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

*y $G^{(k)} = f$. Entonces $G \in \mathcal{D}$ y la $k$-primitiva es la mejor posible.*

Demostración.

Sin pérdida de generalidad asumamos que G esta dada por:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} z^{n+k}$$

Veamos que $G \in \mathcal{D}$.

Haciendo uso del Teorema 1.18 tenemos

$$(n+k)\frac{|a_n|^2}{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(n+k)^2} \quad \leq \quad C^2\frac{(n+k)n^{\frac{2}{p}-2}}{n^{2k}}.$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+k)n^{\frac{2}{p}-2}}{n^{2k}}}{\frac{1}{n^{2k+1-\frac{2}{p}}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+k)n^{\frac{2}{p}-2}n^{2k+1-\frac{2}{p}}}{n^{2k}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+k)n^{2k-1}}{n^{2k}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo que utilizando el Teorema A.1 tenemos $C^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)n^{\frac{2}{p}-2}}{n^{2k}}$ converge ya que $C^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1-\frac{2}{p}}}$ converge (pues $2k+1-\frac{2}{p} > 1$, aplicando el Teorema A.10). Luego por la Observación A.2 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+k)\frac{|a_n|^2}{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(n+k)^2}$ converge.

Por lo tanto $G \in \mathcal{D}$.

Mostremos ahora que la k-primitiva es la mejor posible.

Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = -\frac{(k-2)!}{(1-z)^{k-1}}.$$

Sea $0 < p < \frac{1}{k-1}$ con $k = 2, 3, \ldots.$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|-\frac{(k-2)!}{(1-re^{i\theta})^{k-1}}\right|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{[(k-2)!]^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^{p(k-1)}} \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\frac{[(k-2)!]^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-r)^{p(k-1)}} \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{[(k-2)!]^p}{2\pi(1-r)^{p(k-1)}}\int_0^{2\pi} d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{(k-2)!}{(1-r)^{k-1}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función $f \in H^p$.

En particular podemos elegir $\frac{1}{k} < p < \frac{1}{k-1}$.

Sea $F : \Delta \to \mathbb{C}$ dada por $F(z) = (z-1)\log(1-z) - z$. Por el ejemplo anterior $F \in \mathcal{D}$ y $F^{(k)} = f$, con $\frac{1}{k} < p < \frac{1}{k-1} \leq 1$ y $k = 2, 3, ...$ ya que

$$F^{(l)}(z) = -\frac{(l-2)!}{(1-z)^{l-1}}, \qquad l = 2, 3, \ldots$$

Sin embargo $F^{(l)} \notin \mathcal{D} \quad l = 1, 2, ..., k-1$ . En efecto:

Utilizando el Teorema A.5 tenemos que

Para $l = 1$

$$\iint_\Delta |F''(z)|^2\, dx\, dy = \iint_\Delta \frac{1}{|1-z|^2}\, dx\, dy,$$

esta integral no es finita.

Para $l = 2, 3, ..., k-1$

$$\begin{aligned} \iint_\Delta |F^{(l+1)}(z)|^2\, dx\, dy &= \iint_\Delta \Big| -\frac{(l-1)!}{(1-z)^l}\Big|^2\, dx\, dy \\ &= [(l-1)!]^2 \iint_\Delta \frac{1}{|1-z|^{2l}}\, dx\, dy, \end{aligned}$$

esta integral no es finita. ∎

**Ejemplo 2.5** *Sea* $0 < p < 1$ *y* $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq \alpha + 1$, *tal que*

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha}.$$

*Entonces aplicando el Teorema A.5 tenemos*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-z|^{p\alpha}}\, d\theta,$$

*existe ya que $\alpha p < 1$, por lo tanto $f \in H^p$.*

*Sin embargo*
$$f'(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^{1+\alpha}},$$
*y*
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(z)|^p \, d\theta = \frac{\alpha^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-z|^{p+p\alpha}}\, d\theta,$$
*no existe puesto que $p + p\alpha \geq 1$ y así $f' \notin H^p$.*

## 2.4. El espacio de Bloch.

En las secciones anteriores enfocamos nuestro estudio en la función primitiva de una función dada , en esta sección analizaremos sus derivadas.

Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica que pertenece al espacio de Bloch, entonces
$$\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)| = M < \infty.$$

Con lo cual
$$|f'(z)| \;\; \leq \;\; \frac{M}{1-|z|^2}. \tag{2.2}$$
para todo $z \in \Delta$.

Una función continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que pertenece a la clase de Zygmund $\Lambda_*$ si existe una constante $M(\phi) = M > 0$ tal que

$$|\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h)| \leq Mh,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $h > 0$. Observemos que la condición anterior no implica continuidad.

**Teorema 2.12** *Sea $F : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces $F$ es continua en $|z| \leq 1$ y $\theta \to F(e^{i\theta})$ pertenece a la clase de Zygmund si y sólo si $F' = f$ pertenece al espacio de Bloch.*

**Corolario 2.9** *Sí $C(\Lambda_*) \subset \Lambda_*$ denota las subclases de funciones continuas en $|z| \leq 1$. Entonces*
$$C(\Lambda_*) \subset \bigcap_{-1<p} D_p.$$

Demostración.

Del Corolario 2.5 tenemos que $P(\mathcal{B}) \subset \bigcap_{-1<p} D_p$ y aplicando el teorema se tiene que
$$C(\Lambda_*) \subset P(\mathcal{B}).$$

Teniendo así el resultado. ■

Posteriormente daremos otras caracterizaciones de los espacios $P(\mathcal{B})$ y $P(B_0)$, para ello necesitaremos las siguientes estimaciones.

Sea $F : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica que pertenece al espacio de Bloch tal que $F' = f$. Para $|z| = r$ tenemos
$$f(z) - f(0) = \int_0^z f'(\xi) d\xi.$$

Entonces
$$\begin{aligned} |F'(z)| &= |f(z)| \\ &= \left| \int_0^z f'(\xi)\xi + f(0) \right| \\ &\leq \int_0^r |f'(te^{i\theta})|\,|dt| + |f(0)|. \end{aligned}$$

Ahora de la relación (2.2) se tiene que
$$\begin{aligned} |F'(z)| &\leq \int_0^r \frac{M}{1-|te^{i\theta}|^2}\, dt + |f(0)| \\ &= M\int_0^r \frac{dt}{1-|t|^2} + |f(0)| \\ &\leq M\int_0^r \frac{dt}{1-t} + |f(0)| \\ &= -M\ln(1-|z|) + |f(0)|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si $f(0) = 0$ la expresión anterior se reduce a

$$|F'(z)| \leq -M \ln(1 - |z|),$$

con lo cual

$$(1 - |z|^2)|F'(z)| \leq M(|z|^2 - 1)\ln(1 - |z|).$$

Por otra parte se tiene que $|z| < 1$ por lo que $|z|^2 - 1 < 1 - 2|z| + |z|^2$, es decir, $|z|^2 - 1 < (1 - |z|)^2$, así

$$(1 - |z|^2)|F'(z)| \leq M(1 - |z|)^2 \ln(1 - |z|),$$

Sea $r = 1 - |z|$, entonces $|z| \to 1^-$ cuando $r \to 0^+$. Entonces por el Teorema A.8

$$\lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)|F'(z)| = 0.$$

**Proposición 2.4** *Sea* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$g(t) = \begin{cases} (1-t)^\beta \ln^\alpha \frac{1}{1-t} & \text{si } t \in [0, 1), \\ 0 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

*donde* $0 < \alpha,\ \beta$. *Entonces*

$$|g(t)| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta e}\right)^\alpha.$$

Demostración.

De la forma en que $g$ se define es continua en $[0, 1]$. Además

$$g'(t) = (1-t)^{\beta-1} \ln^{\alpha-1} \frac{1}{1-t} \left(\alpha - \beta \ln \frac{1}{1-t}\right).$$

Sea $t_0 = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}}$, entonces

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= \left[1 - (1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}})\right]^{\beta-1} \ln^{\alpha-1} \frac{1}{1 - (1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}})} \left(\alpha - \beta \ln \frac{1}{1 - (1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}})}\right) \\ &= e^{-\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta}} \ln^{\alpha-1} e^{\frac{\alpha}{\beta}} (\alpha - \beta \ln e^{\frac{\alpha}{\beta}}) = 0, \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
g(t_0) &= \left[1-(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}})\right]^{\beta} \ln^{\alpha} \frac{1}{1-(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}})} \\
&= \left(e^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\beta} \ln^{\alpha} e^{\frac{\alpha}{\beta}} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\beta e}\right)^{\alpha} > 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $t_0$ es un máximo de $g$, más aún utilizando el Teorema A.7 tenemos que $t_0 = 1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ es un máximo absoluto de $g$.

Así $g(t) \leq g(t_0)$, $t \in [0,1]$.

Como $0 < t < 1$, entonces $\ln \frac{1}{1-t} > \ln 1 = 0$, además $(1-t)^{\beta} > 0$, teniendo así que $g(t) \geq 0$, por lo tanto

$$|g(t)| = g(t), \qquad t \in [0,1].$$

esto implica que $|g(t)| \leq g(t_0)$, para todo $t \in [0,1]$.

Por lo tanto

$$|g(t)| \leq \left(\frac{\alpha}{\beta e}\right)^{\alpha}, \qquad t \in [0,1]. \qquad \blacksquare$$

**Corolario 2.10** *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $0 < \beta < 1$ fijo. Entonces*

$$\iint_{\Delta} (-1)^k \ln^k(1-|z|)\, dx\, dy \leq \frac{2\pi}{1-\beta} \left(\frac{k}{\beta e}\right)^{k}.$$

Demostración.

Utilizando la proposición anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta (-1)^k \ln^k(1-|z|)\,dx\,dy &= \iint_\Delta \big[-\ln(1-|z|)\big]^k\,dx\,dy \\
&= \iint_\Delta \left(\ln^k \frac{1}{1-|z|}\right)\frac{(1-|z|)^\beta}{(1-|z|)^\beta}\,dx\,dy \\
&\leq \left(\frac{k}{\beta e}\right)^k \iint_\Delta \frac{dx\,dy}{(1-|z|)^\beta} \\
&= \left(\frac{k}{\beta e}\right)^k \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{(1-r)^\beta}\,dr\,d\theta \\
&\leq \left(\frac{k}{\beta e}\right)^k \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{(1-r)^\beta}\,dr\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{1-\beta}\left(\frac{k}{\beta e}\right)^k. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 2.13** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Delta$. Sea $\alpha > 0$ y $F$ una primitiva de $f^{\frac{\alpha}{2}}$. Si $f \in \mathcal{B}$, entonces $F \in \mathcal{D}$.*

Demostración.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq m$. Utilizando el Lema A.2, la desigualdad (2.3) y el hecho de que $f^\alpha$ es medible tenemos

$$\begin{aligned}
&\iint_\Delta |F'(z)|^2\,dx\,dy \\
&\quad= \iint_\Delta |f^{(\frac{\alpha}{2})}(z)|^2\,dx\,dy \\
&\quad= \iint_\Delta |f(z)|^\alpha\,dx\,dy \\
&\quad\leq \iint_\Delta |f(z)|^m\,dx\,dy + \iint_\Delta dx\,dy \\
&\quad\leq \iint_\Delta \big(-M\ln(1-|z|) + |f(0)|\big)^m\,dx\,dy + \pi \\
&\quad\leq \iint_\Delta \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}\big(-M\ln(1-|z|)\big)^k |f(0)|^{m-k}\,dx\,dy + \pi \\
&\quad\leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} M^k |f(0)|^{m-k} \iint_\Delta (-1)^k \ln^k(1-|z|)\,dx\,dy + \pi.
\end{aligned}$$

Aplicando el Corolario 2.10 llegamos a que

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} |F'(z)|^2 \, dx\, dy &\leq \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} M^k |f(0)|^{m-k} \frac{2\pi}{1-\beta} \left(\frac{k}{\beta e}\right)^k + \pi \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto $F \in \mathcal{D}$. ■

**Ejemplo 2.6** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}.$$

*Se tiene que $\frac{2^{k+1}}{2^k} = 2 > 1$ y $|a_{2^k}| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces por la Proposición 1.6 $f \in \mathcal{B}$.*

*Ahora*

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2 = \sum_{k=1}^{m} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} 1,$$

*y esta suma parcial no es acotada, por lo que utilizando el Teorema A.11 tenemos*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-p)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2,$$

*diverge. Utilizando el Teorema 1.15 tenemos que $f \notin \mathcal{Q}_{p,0}$ para $0 < p \leq 1$. Así $f \in \mathcal{B} - \mathcal{Q}_{p,0}$.*

*Además*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k z^{2^k - 1}$$

*y*

$$|a_{2^k - 1}| = 2^k,$$

*pero $2^k$ diverge cuando $k \to \infty$ y utilizando la Proposición 1.5 tenemos que $f' \notin \mathcal{B}$.*

Así dada una función en el espacio de Bloch su derivada no necesariamente pertenece a este espacio.

**Ejemplo 2.7** *Consideremos la familia de funciones* $f_\alpha : \Delta \to \mathbb{C}$ *tales que*

$$f'_\alpha(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha}, \quad \textit{para } 0 < \alpha < 1.$$

*Entonces utilizando el Teorema A.5 tenemos*

$$\iint_\Delta |f'_\alpha(z)|^2\, dx\, dy = \iint_\Delta \frac{dz}{|1-z|^{2\alpha}},$$

*existe por lo tanto* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{Q}_{p,0}$.

*Sin embargo la familia* $\{f'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)} \bigcap \mathcal{B} = \emptyset$. *En efecto:*

*Supongamos que* $\{f'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)} \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$, *entonces existe* $g \in \{f'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)} \bigcap \mathcal{B}$, *luego* $g \in \{f'_\alpha\}$ *y* $g \in \mathcal{B}$ *teniendo que* $g = f'_\alpha$ *para algún* $\alpha$ *y*

$$\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|g'(z)| < \infty.$$

*Además* $g'(z) = f''_\alpha(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^{\alpha+1}}$ *y*

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|g'(z)| &= (1-|z|^2)\left|\frac{\alpha}{(1-z)^{\alpha+1}}\right| \\ &= (1-|z|^2)\frac{\alpha}{|1-z|^{\alpha+1}},\end{aligned}$$

*pero esta última expresión diverge cuando nos acercamos a* $1+0i$.

*Tomando* $z = x \in (0,1)$ *tenemos*

$$\begin{aligned}(1-x^2)|g'(x)| &= (1-x^2)\frac{\alpha}{(1-x)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{(1-x)(1+x)\alpha}{(1-x)^{\alpha+1}} \\ &\geq \frac{(1-x)\alpha}{(1-x)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha}{(1-x)^\alpha},\end{aligned}$$

*diverge cuando $x$ tiende a 1.*

*Por lo tanto $f \notin \mathcal{B}$.*

*Ahora como $\mathcal{Q}_p = \mathcal{B}$ para $p > 1$ y $\mathcal{Q}_p \subset \mathcal{Q}_q$ si $p < q$, más aún se concluye que $\{f'_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)} \bigcap \mathcal{Q}_p = \emptyset$.*

**Teorema 2.14** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f \in \mathcal{Q}_p - \mathcal{D}$ para algún $p > 0$, entonces $f^{(k)} \notin \mathcal{B}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

Supongamos que $f^{(k)} \in \mathcal{B}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $f$ es una primitiva de orden k de $f^{(k)}$, luego por el Corolario 2.5 $f \in \mathcal{D}$ lo cual es imposible. ∎

Lo que muestra el teorema es que para saber cuando las derivadas de una función en $\mathcal{Q}_p$ pertenecen a $\mathcal{Q}_p$ debemos enfocar nuestro estudio en una subfamilia de funciones en el espacio de Dirichlet.

Los siguientes resultados de [Ax] nos ayudarán a obtener un criterio para saber cuando las derivadas de una función en el espacio de Dirichlet pertenecen al menos al espacio de Bloch.

**Teorema 2.15** *Sea $F \in \mathcal{D}$. Entonces $F' \in \mathcal{B}$, (equivalentemente $F \in P(\mathcal{B})$) si y sólo si*

$$\sup_{a\in\Delta} \|(F' \circ \phi_a)(z) - F'(a)\|_{L^p_a} < \infty,$$

*para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración.

Sea $f \in \mathcal{B}$, entonces $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$ y utilizando el Teorema 1.8 tenemos que $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$ si y sólo si

$$\sup_{a\in\Delta} \|(F' \circ \phi_a)(z) - F'(a)\|_{L^p_a} < \infty. \qquad \blacksquare$$

En forma similar es posible dar un resultado análogo para $P(B_0)$.

**Teorema 2.16** *Sea $F \in \mathcal{D}$. Entonces $F' \in B_0$ (o lo que es equivalente $F \in P(B_0)$) si y sólo si*

$$\lim_{|a|\to 1^-} \|(F' \circ \phi_a)(z) - F'(a)\|_{L_a^p} = 0$$

*para $1 \leq p < \infty$.*

**Teorema 2.17** *Sea $f \in \mathcal{A}$, entonces $f \in B^\alpha$ si y sólo si $f^{(n)} \in B^{n+\alpha}$.*

Demostración.

Por el Teorema B.8 para $n = 2$ se tiene que $f \in B^\alpha$ si y sólo si

$$\iint_\Delta |f''(z)|^s (1-|z|^2)^{(\alpha+2-1)s-2}(1-|\phi_a(z)|^2)^p\, dx\, dy < \infty,$$

pero

$$\iint_\Delta |f''(z)|^s (1-|z|^2)^{(\alpha+2-1)s-2}(1-|\phi_a(z)|^2)^p\, dx\, dy =$$
$$\iint_\Delta |(f')'(z)|^s (1-|z|^2)^{\left((\alpha+1)+1-1\right)s-2}(1-|\phi_a(z)|^2)^p\, dx\, dy < \infty,$$

tomando en cuenta el mismo teorema para $n = 1$ se tiene que $f' \in B^{\alpha+1}$.

Continuando de ésta manera llegamos al resultado. ∎

Si $p < q$ del Lema A.2 llegamos a que $L_a^q \subset L_a^p$, donde $L_a^p$ es el espacio de Bergman ver Definición 1.5. Así, si $f \in \mathcal{Q}_p$ para $p \geq 0$ tenemos en particular que $f \in \mathcal{Q}_2$ y por el Corolario 2.3 tenemos que $P(\mathcal{Q}_2) \subset \mathcal{D}$. Luego si $F \in \mathcal{A}$ y $F' = f$, entonces $F \in \mathcal{D}$ y

$$\iint_\Delta |f(z)|^2\, dx\, dy = \iint_\Delta |F'(z)|^2\, dx\, dy < \infty.$$

Así $f \in L_a^2$ y obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.18** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f \in \mathcal{Q}_p$ para $p \geq 0$, entonces $f \in L_a^q$ para todo $0 < q \leq 2$. Esto es*

$$\bigcup_{0\leq p} \mathcal{Q}_p \subset \bigcap_{0<q\leq 2} L_a^q.$$

Demostración.

Sea $f \in \bigcup_{0 \leq p} \mathcal{Q}_p$, entonces $f \in \mathcal{Q}_p$ para algún $p \geq 0$, luego $f \in L^2_a$ y como $L^q_a \subset L^p_a$, si $p < q$, tenemos que $L^2_a \subseteq L^q_a$ para todo $0 < q \leq 2$. Como se tiene que $\bigcap_{0<q\leq 2} L^q_a \subset L^2_a$ concluimos que $\bigcap_{0<q\leq 2} L^q_a = L^2_a$.

Por lo tanto $f \in \bigcap_{0<q\leq 2} L^q_a$. ∎

**Ejemplo 2.8** *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ y $F \in \mathcal{A}$ tal que $F^{(n)} = f$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \notin \mathcal{B}$.*

*Consideremos*

$$(1 - |z|^2)^n |F^{(n)}(z)| = (1 - |z|^2)^n |e^{\frac{1}{1-z}}|.$$

*Veremos que al tomar el supremo de esta cantidad con $z$ en cierta dirección diverge.*

*Sea $z = x \in (0, 1)$, así*

$$\begin{aligned}
(1 - |z|^2)^n |e^{\frac{1}{1-z}}| &= (1 - x^2)^n |e^{\frac{1}{1-x}}| \\
&= (1 - x^2)^n \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{1-x})^k}{k!} \right| \\
&= (1 - x^2)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(1-x)^k} \\
&= (1 + x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{k!(1-x)^k} \\
&= (1 + x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-k}}{k!},
\end{aligned}$$

*y*

$$
\begin{aligned}
&(1+x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-k}}{k!} \\
&= (1+x)^n \Big[(1-x)^n + (1-x)^{n-1} + \frac{(1-x)^{n-2}}{2!} + \cdots \\
&+ \frac{(1-x)}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!(1-x)} + \frac{1}{(n+2)!(1-x)^2} + \cdots\Big].
\end{aligned}
$$

*Por lo tanto*

$$
\frac{(1+x)^n}{(n+1)!(1-x)} < (1+x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-k}}{k!}.
$$

*Pero*

$$
\frac{(1+x)^n}{(n+1)!(1-x)},
$$

*diverge cuando* $x \to 1^-$*. Entonces por el Teorema 2.4* $F \notin \mathcal{B}$ *y por la Proposición 2.3, como* $F \notin \mathcal{B}$ *tenemos que* $F' \notin \mathcal{B}$*, aplicando el teorema n-1 veces se tiene que* $F^{(n)} \notin \mathcal{B}$*, para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

**Pregunta abierta**. Sea $\mathcal{F}$ cualquiera de los espacios $\mathcal{B}$, $B_0$, $\mathcal{Q}_p$, $\mathcal{Q}_{p,0}$ y $H^p$. ¿Existe $q \in [-2,0)$ tal que $P(\mathcal{F}) = D_q$ o alguna unión (intersección) de espacios $D_p$?.

Respuesta particular. $P(H^2) = D_{-1}$.

Aplicando el Teorema 2.9 tenemos que

$$P(H^2) \subset D_{1-2} = D_{-1}.$$

Ahora si $f \in D_{-1}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-(-1)}|a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2 < \infty$.

Por la Observación A.1 y el Teorema A.12 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} nmr^{n+m-2} e^{i(n-m)\theta} a_n \overline{a_m}\, d\theta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^{2n-2} |a_n|^2 2\pi \\
&= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2n-2}.
\end{aligned}$$

Como $n^2|a_n|^2 r^{2n-2} \leq n^2|a_n|^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2 r^{2n-2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2$ son series de términos no negativos por la Observación A.2, $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2$ converge.
Así $f' \in H^2$, luego $f \in P(H^2)$. ■

# Apéndice A

# Análisis Real

En este apéndice se dan los resultados importantes del Análisis Real que fuerón utilizados en la tesis. Como se mencionó en la introducción no se demuestran debido a que las demostraciones se encuentran en los libros cuya referencia se indica en cada caso.

**Teorema A.1** *([Ri] p. 94). (Criterio por comparación en el límite). Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos, es decir,* $a_n > 0$ *y* $b_n > 0$ *para toda* $n \geq 1$*. Supóngase que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

*entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge si y solamente si* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge.*

**Teorema A.2** *( [Ri] p. 127). La serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ *es divergente.*

**Teorema A.3** *([Ta] p. 114). Sean* $n, k \in \mathbb{N}$*, entonces* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^k}$ *converge para* $k > 1$*.*

**Teorema A.4** *([Ta] p. 96). Si* $a < 1$ *y* $b = cte$ *con* $b > 0$*, entonces* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a(\log n)^b}$ *diverge.*

**Lema A.1** *([He] p. 249). Lema de Riemann-Lebesgue. Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero cuando* $|n| \to \infty$.

**Teorema A.5** *Criterios de integrabilidad.*

*Sean* $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$. *Entonces*

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha < 1,$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha < 1,$$

*y ([Zh] p. 53)*

$$\iint_\Delta \frac{dx\,dy}{\|1-z\|^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha < 2.$$

**Lema A.2** *Para todo* $x \geq 0$ *y* $0 < p < q$ *se tiene* $x^p < x^q + 1$.

**Lema A.3** *([Au Xi Zh] p. 9). Sean* $I_n = \{k : 2^n \leq k < 2^{n+1}, k \in \mathbb{N}\}$, $\alpha > 0$, $p > 0$, $n \geq 0$, $a_n \geq 0$, $t_n = \sum\limits_{k \in I_n} a_k$ *y* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. *Entonces existe una constante* $K$ *que depende únicamente de* $p$ *y* $\alpha$ *tal que*

$$\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} t_n^p \leq \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} f(x)^p dx \leq K \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} t_n^p.$$

**Teorema A.6** *([Ap][2] p. 18-19). En un espacio Euclídeo* $V$, *todo producto interior satisface la desigualdad de Cauchy-schwarz:*

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y),$$

*para todo* $x$ *y todo* $y$ *en* $V$. *Además, el signo de igualdad es válido si y sólo si* $x$ *e* $y$ *son linealmente dependientes.*

*Sea $C(a,b)$ el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en el intervalo $[a,b]$ con el producto interior $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$. $C(a,b)$ con este producto es un espacio Euclídeo, por lo que aplicando lo anterior a este espacio encontramos que la desigualdad de Cauchy-Schwarz se transforma en:*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right).$$

**Teorema A.7** *([Th Fi] p. 207). (Localización de máximos absolutos en intervalos cerrados). Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo abierto $(a,b)$, entonces f toma un valor máximo absoluto M en $[a,b]$. Además los únicos puntos de $[a,b]$ donde f puede tomar valores extremos son:*

1. *Los puntos de $(a,b)$ donde $f' = 0$ y*
2. *Los puntos extremos a y b.*

**Teorema A.8** *([Au Re To][2]). Sea $\epsilon > 0$. Entonces*

$$\lim_{r\to 0^+} r^\epsilon \ln r = 0.$$

**Observación A.1**

$$\begin{aligned}
|f'(z)|^2 &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\Big)\overline{\Big(\sum_{m=1}^{\infty} ma_m z^{m-1}\Big)} \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} na_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m\overline{a_m} r^{m-1} e^{-i(m-1)\theta}\Big) \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} nm r^{n+m-2} e^{i(n-m)\theta} a_n \overline{a_m} \\
&= |f'(re^{i\theta})|^2.
\end{aligned}$$

**Teorema A.9** *([Zy] p.6). El sistema de funciones $e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ es ortogonal sobre cualquier intervalo de longitud $2\pi$ ya que para cualquier $\alpha$ real*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

**Definición A.1** *([Ha] p. xiv). Para $n = 0, 1, \ldots$*

$$\binom{n+\beta}{\beta} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{n!} = \binom{n+\beta}{n}.$$

**Proposición A.1** *([Sp][2] p. 285). La función Gamma que se denota $\Gamma(n)$, se define por*

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

*que es convergente para $p > 0$.*

*Propiedades de la función Gamma.*

1. *Si $n$ en un número natural $\Gamma(n) = (n-1)!$, razón por la cual $\Gamma(n)$ suele llamarse función factorial.*
2. *Una fórmula de recurrencia para la función Gamma es $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ donde $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Para $p > -1$ tenemos que $\Gamma(p+1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! n^p}{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}$.*

**Proposición A.2** *([Hu Li] p. 44). Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$, entonces*

$$\frac{du^v}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}.$$

**Proposición A.3** *([Sp][1] p. 111). Para $x > 0$ tenemos*

$$\ln x = 2\Big[\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big) + \frac{1}{3}\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^3 + \frac{1}{5}\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^5 + \cdots\Big]$$

**Teorema A.10** *([Ta] p. 95). La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ converge si $\lambda > 1$ y diverge si $\lambda \leq 1$.*

**Observación A.2** *([Ta] p. 87). Sí dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son de términos positivos y $a_n \leq b_n$ para todo $n$, entonces la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De la misma forma, la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

**Teorema A.11** *([Ta] p. 86). Una serie de términos positivos converge si y sólo si la sucesión de las sumas parciales es acotada.*

# Apéndice B

# Análisis Complejo

En este apéndice se dan los resultados de Análisis Complejo más impor tantes que fueron utilizados en la tesis. La mayoria de los resultados que aquí aparecen se pueden encontrar en el libro de Silverman [Si].

**Definición B.1** *([Si] p. 40). Un dominio es un cunjunto no vacío abierto y conexo.*

**Definición B.2** *([Si] p. 51). Una función definida en un dominio $G$ es analítica en $z_0 \in G$ si es complejo diferenciable en una vecindad de $z_0$. Diremos que $f$ es analítica en $G$ si lo es en todos los puntos de $G$.*

**Teorema B.1** *([Si] p. 192). (Teorema de Weierstrass sobre sucesiones de funciones analíticas uniformemente convergentes). Si la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en todo subconjunto compacto de un dominio $G$ y si todo término $f_n$ es analítica en $G$, entonces la función límite $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ es analítica en $G$, más aún, cuando $n \to \infty$ cada sucesión de las derivadas $\{f_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $k = 1, 2, \ldots$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ para todo subconjunto compacto de $G$.*

**Lema B.1** *([Co] p. 126). (Lema de Schwarz). Sea $f$ una función analítica en $\Delta$ con* *a)* $|f(z)| \leq 1$ *para toda* $z \in \Delta$,

*b)* $f(0) = 0$.

*Entonces* $|f'(0)| \leq 1$ *para toda* $z \in \Delta$, *más aún si* $|f'(0)| = 1$ *o si* $f(z) = |z|$ *para alguna* $z \neq 0$, *entonces existe una constante* $c$, $|c| = 1$, *tal que* $f(w) = cw$ *para toda* $w \in \Delta$.

**Teorema B.2** *([Si] p. 172). (Fórmula integral de Cauchy). Si* $f$ *es una función analítica en un dominio* $G$ *y si* $G$ *contiene una curva cerrada rectificable de Jordan* $L$ *y su interior* $I(L)$, *entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

*si* $z_0 \in I(L)$. *Esta integral es llamada la integral de Cauchy. Por otra parte*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0$$

*si* $z_0 \in E(L)$. *donde* $E(L)$ *es el exterior de* $L$.

**Teorema B.3** *([Si] p. 174). Si* $f$ *es analítica en un dominio* $G$, *entonces* $f$ *tiene derivadas de todos los órdenes en* $G$ *y dado* $z_0 \in G$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

*donde* $L$ *es una curva cerrada rectificable de Jordan tal que* $z_0 \in \overline{I(L)} \subset G$.

**Teorema B.4** *([Du] p. 87). (Hardy-Littlewood). Si* $0 < p < q \leq \infty$, $f \in H^p$, $\lambda \geq p$ *y* $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, *entonces*

$$\int_0^1 (1 - r)^{\lambda\alpha - 1} \{M_q(r, f)\}^\lambda dr < \infty.$$

**Lema B.2** *([Du] p. 79). Cualquier función $f \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$ puede ser expresada en la forma $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, donde $f_1$ y $f_2$ son funciones no cero en $H^p$ tal que $\|f_n\|_p \leq 2\|f\|_p$, $n = 1, 2$.*

**Teorema B.5** *([Du] p. 12). (Hardy-Littlewood) Sea $f \in H^p$, $0 < p \leq \infty$ y sea*

$$F(\theta) = \sup_{r<1} |f(re^{i\theta})|.$$

*Entonces $F \in L^p$ y*

$$\|F\|_p \leq B_p \|f\|_p,$$

*donde $B_p$ depende unicamente de de $p$ y*

$$\|f\|_p = \lim r \to 1 M_p(r, f).$$

**Teorema B.6** *([Du] p. 21). Si $f \in H^p$ $(0 < p < \infty)$ entonces*

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta$$

*y*

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0.$$

**Teorema B.7** *([Du] p. 84). (Hardy-Littlewood). Sea $f \in \mathcal{A}$ y supongamos*

$$M_p(r, f) \leq \frac{C}{(1-r)^\beta}, \quad 0 < p < \infty, \;\; \beta \geq 0.$$

*Entonces existe una constante $K = K(p, \beta)$ independiente de $f$ tal que*

$$M_q(r, f) \leq \frac{KC}{(1-r)^{\beta + 1/p - 1/q}}.$$

*Si $\beta = 0$ (es decir, si $f \in H^p$), entonces $M_q(r, f) = o((1-r)^{1/q - 1/p})$. El exponente $\beta + 1/p - 1/q$ es el mejor posible en todos los casos.*

**Teorema B.8** *([Rä] Teorema 4.1.2). Sean* $f \in \mathcal{A}$, $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$ *y sean tambien* $\alpha > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *o* $\alpha > 1$ *y* $n = 0$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1) $f \in B^{\alpha}$;

2) $\sup_{a\in\Delta} \iint_{\Delta} |f^{(n)}(z)|^s (1-|z|^2)^{(\alpha+n-1)s-2}(1-|\phi_a(z)|^2)^p \, dx\, dy < \infty$;

3) $\sup_{a\in\Delta} \iint_{\Delta} |f^{(n)}(\phi_a(z))|^s |\phi_a'(z)|^{(\alpha+n-1)s-2}(1-|z|^2)^{p+(\alpha+n-1)s-2} \, dx\, dy < \infty$;

4) $\sup_{a\in\Delta} \iint_{\Delta} |f^{(n)}(z)|^s (1-|z|^2)^{(\alpha+n-1)s-2} g(z,a)^p \, dx\, dy < \infty$.

**Teorema B.9** *([St] p. 411). Para* $a \in \Delta$ *la substitución* $z = \phi_a(w)$ *resulta en cambiar el jacobiano de la siguiente manera* $dA(w) = |\phi_a'(z)|^2 dA(z)$. *Para una función h Lebesgue integrable o una función Lebesgue medible no negativa sobre* $\Delta$ *tenemos la siguiete fórmula de cambio de variable.*

$$\iint_{\Delta(0,r)} h\big(\phi_a(w)\big) dA(w) = \iint_{\Delta(a,r)} h(z) \left( \frac{1-|\phi_a(z)|^2}{1-|z|^2} \right)^2 dA(z).$$

**Teorema B.10** *([Sp][3] p. 56). Serie Geométrica. Sea* $z \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

*Derivando la serie anterior obtenemos la siguiente serie.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1.$$

**Teorema B.11** *([Au Re To][2] p. 10). Sea* $f : \Delta \to \mathbb{C}$ *con* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una función analítica. Si* $f \in H^p$ *para* $0 < p \leq 2$*, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p < C_p\|f\|_p^p$$

*donde* $C_p$ *depende únicamente de* $p$*.*

**Teorema B.12** *([Si] p. 186). (Criterio M de Weierstrass). Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *una serie convergente cuyos términos son constantes no negativas y supongamos que* $f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ *son tales que* $|f_n(z)| \leq M_n$ *para todo* $z \in E$ *(*$E$ *es un conjunto en el plano complejo) y para todo* $n > N$ *con* $N$ *un entero positivo, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ *es uniformemente convergente en* $E$*.*

**Teorema B.13** *([Si] p. 186). Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ *es uniformemente convergente en* $E \subset \mathbb{C}$ *con* $z_0$ *como punto límite de* $E$ *y si todo término* $f_n(z)$ *es continuo en* $z_0$ *entonces la suma* $f(z)$ *es tambien continua en* $z_0$*.*

**Teorema B.14** *([Co] p. 278). Sean* $G$ *y* $\Omega$ *dominios tales que la función* $f : G \to \Omega$ *es una función analítica uno a uno; sean* $a \in G$ *y* $\alpha = f(a)$*. Si* $g_a$ *y* $\gamma_a$ *son funciones de Green para* $G$ *y* $\Omega$ *con singularidades* $a$ *y* $\alpha$ *respectivamente, entonces* $g_a(z) = \gamma_a(f(z))$*.*

**Teorema B.15** *([Du] p. 42) Sí* $f \in H^1$ *y* $f(e^{i\theta})$ *es igual casi en todas partes a una función de variación acotada. Entoces* $f(z)$ *es continua en* $|z| \leq 1$ *y* $f(e^{i\theta})$ *es absolutamente continua.*

**Teorema B.16** *([Co] p. 160). Sea* $G$ *un dominio simplemente conexo distinto de* $\mathbb{C}$ *y* $a \in G$*, entonces existe una única función analítica* $f : G \to \mathbb{C}$ *que tiene las siguientes propiedades:*

*a)* $f(a) = 0$ *y* $f'(a) > 0$*,*

*b)* $f$ *en uno a uno,*

*c)* $f(G) = \{z : |z| < 1\}$*.*

Las definiciónes ([He] p. 170 y p. 188), serán usadas en los próximos dos teoremas.

**Teorema B.17** *Desigualdades de Minkowski.*

*([Ku] p. 589). Desigualdad de Minkowski para sumas infinitas. Dados los números complejos* $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ *y* $1 \leq p < +\infty$*, se cumple la desigualdad*

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i + v_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

*Desigualdad de Minkowski. ([He] p. 191). Para* $1 \leq p < \infty$ *y* $f, g \in \pounds^p$*, tenemos*

$$\Big[\int_X |f+g|^p \, d\mu\Big]^{\frac{1}{p}} \leq \Big[\int_X |f|^p \, d\mu\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\int_X |g|^p \, d\mu\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

**Teorema B.18** *Desigualdades de Hölder.*

*([He] p. 190). Sean* $p > 1$*,* $q > 1$*, con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,* $f \in \pounds_p$ *y* $g \in \pounds_q$*, entonces* $fg \in \pounds_1^r$ *y se cumole que:*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X |g|^q \, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

*([Ku] p. 589). Desigualdad de Minkowski para sumas infinitas. Dados los números complejos* $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$*,* $1 < p < +\infty$ *y el número* $q$ *que se define por la igualdad* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Entonces se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i v_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

**Lema B.3** *Sea $0 < p < \infty$. Si $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de enteros positivos que satisface que $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1$ para todo $k$ entonces existe una constante $A$ que depende unicamente de $p$ y $\lambda$ tal que*

$$A^{-1}(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{in_k\theta}|^p\,d\theta)^{\frac{1}{p}} \leq A(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2)^{\frac{1}{2}},$$

*para cualquier número $a_k$, $k = 1, 2, \ldots$ .*