

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

**Distribuciones que en la media armónica son
mejores nuevas que usadas en promedio**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

MIGUEL CEDEÑO HERNÁNDEZ

Director de Tesis

Dr. José María Rocha Martínez

México, D. F.

Agosto de 2009



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO**

**ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS
Y DESIGNACION DE DIRECTOR DE TESIS**

SIP-18

México, D.F. a 02 de Julio de 2009

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESFM en su sesión

Ordinaria No. 09 celebrada el día 17 del mes de Junio de 2008 conoció la solicitud presentada por el(la) alumno(a):

Cedeño Hernández Miguel
Apellido paterno materno nombre

Con registro:

A	0	7	0	0	2	4
---	---	---	---	---	---	---

Aspirante al grado de: **Maestro en Ciencias en Matemáticas**

1.- Se designa al aspirante el tema de tesis titulado:

"Distribuciones que en la media armónica son mejores nuevas que usadas en promedio"

De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos:

Se anexa hoja

2.- Se designa como Director de Tesis al C. Profesor:

Dr. José María Rocha Martínez

3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesis será elaborado por el alumno en:

El Departamento de Ciencias en Matemáticas

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

Director de Tesis

Dr. José María Rocha Martínez

El Aspirante

Miguel Cedeño Hernández



Presidente del Colegio

Dr. Miguel Larriño Velázquez

ESCUELA SUPERIOR DE
FISICA Y MATEMATICAS
I. P. N.
SECCION DE GRADUADOS



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 11:00 horas del día 02 del mes de Julio de 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESFM para examinar la tesis de grado titulada:

"Distribuciones que en la media armónica son mejores nuevas que usadas en promedio"

Presentada por el alumno (a):

Cedeño
Apellido paterno

Hernández
materno

Miguel
nombre(s)

Con registro:

A	0	7	0	0	2	4
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

Maestro en Ciencias en Matemáticas

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. José María Rocha Martínez

Dr. Adrián Alcántar Torres

Dr. Carlos Rentería Márquez

Dr. Roberto Segundo Acosta Abreu

Dr. Sergio Octavio Esparza Núñez

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. Miguel Ángel Velázquez
CUELA SUPERIOR DE
FISICA Y MATEMATICAS
I. P. N.
SECCION DE GRUADOS





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 2 del mes de Julio del año 2009, el que suscribe Lic. Miguel Cedeño Hernández alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemáticas con número de registro A070024, adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. José María Rocha Martínez y cede los derechos del trabajo intitulado "Distribuciones que en la media armónica son mejores nuevas que usadas en promedio", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección hbreakerm@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Lic. Miguel Cedeño Hernández

*A mi padre Miguel Angel Cedeño Rodríguez, y a mi madre
Eulalia Hernández Montalvo, a quienes agradezco todo su
apoyo.*

La realización de este trabajo es gracias al apoyo de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI) de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) que me abrigó en sus instalaciones durante el tiempo de duración de mi programa individual de actividades como parte del programa de Maestría en Ciencias en Matemáticas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) quien me otorgó una beca por dos años para la realización de mis estudios de maestría.

Mi más grande agradecimiento al Dr. José María Rocha Martínez, director de esta tesis, cuya valiosa dirección y apoyo hicieron posible la conclusión del mismo.

Mi reconocimiento a los doctores Sergio O. Esparza Nuñez, Roberto S. Acosta Abreu, Adrian Alcántar Torres y Carlos Rentería Márquez, miembros de la Comisión Revisora de Tesis, por las valiosas sugerencias y reomendaciones hechas para mejorar la presente investigación.

Índice general

Resumen	1
Abstract	2
Introducción	3
1. Preliminares	6
1.1. Probabilidad	6
1.2. Procesos estocásticos	12
1.3. Fiabilidad	15
2. La clase HNBUE	24
2.1. Definición y caracterizaciones	24
2.2. Relación con otras clases	28
3. Obtención de Cotas	32
3.1. Cota superior para la clase HNBUE	32
3.2. Cota inferior para la clase HNBUE	36
3.3. Cota superior para la clase HNWUE	39
3.4. Cotas para un sistema en serie	41
3.5. Cotas para un sistema en paralelo	45
4. Operaciones en Fiabilidad	49
4.1. Sistemas coherentes	49
4.2. Convolución	54
4.3. Mezcla de distribuciones	60
5. Modelos de Choque	66
5.1. La clase HNBUE discreta	66

5.2. Un modelo de Poisson	68
5.3. Un modelo de Poisson no homogéneo	70
5.4. Modelos de choque más generales	72
6. Modelos de Daño Acumulado	84
6.1. Descripción del modelo	84
6.2. La clase HNBUE y la transformada de Laplace	89
6.3. Un modelo a tiempo discreto	94
Conclusiones	97
Bibliografía	98

RESUMEN

Se introduce la clase de distribuciones de vida continuas HNBUE (harmonic new better than used in expectation). Se muestra que la gran mayoría de objetos que se desgastan o degradan con el tiempo poseen tiempos de vida pertenecientes a esta clase. Ya que en la práctica no es posible conocer la forma explícita de la distribución del tiempo de vida de un objeto real, resulta entonces de gran utilidad determinar algunas cotas para la función de distribución bajo la hipótesis de ser ésta de clase HNBUE. A pesar de tratarse de una clase relativamente grande de distribuciones de vida, dicha clase aún posee propiedades generales de cerradura con respecto a varias operaciones en fiabilidad de interés. Finalmente, se analiza la relación que guarda esta clase de distribuciones con los llamados modelos de choque. Ahí, se introduce y utiliza la clase de distribuciones de vida discretas HNBUE.

ABSTRACT

The class HNBUE (Harmonic New Better than Used in Expectation) of continuous lifetime distributions is introduced. Most of the objects that waste or diminish with time are proved to have lifetimes belonging to this class. Since in practice it is not possible to know explicitly the life distribution function of a real object, it turns out to be very useful to determine some bounds for the distribution function under the hypothesis of being it of class HNBUE. Despite the fact that this class of lifetime distributions is relatively large, this class still has interesting closure properties with respect to various reliability operations. Finally, the relationship between this class of distributions and the so-called shock models is analyzed. There, the class HNBUE of discrete lifetime distributions is introduced and used.

Introducción

Un problema de interés en Teoría de Fiabilidad es modelar distintas nociones de envejecimiento. En la práctica, las nociones de envejecimiento se relacionan con problemas de fatiga de los materiales, desgaste de piezas, oxidación de partes, mortandad infantil, etc. Varios conceptos matemáticos se han empleado para modelar y analizar eficientemente algunas nociones de envejecimiento, como lo son la vida residual, la función tasa de falla y el orden estocástico. En las últimas décadas se han estudiado varias clases de distribuciones de vida asociadas a distintas nociones de envejecimiento basadas en diferentes propiedades que pudiera tener la función tasa de falla o la vida residual de un objeto de edad t , como son, por ejemplo, las clases IFR (Increasing Failure Rate), IFRA (Increasing Failure Rate Average), NBU (New Better than Used), NBUE (New Better than Used in Expectation) y sus clases duales, entre otras. Estas clases han aparecido de manera natural al estudiar diversos problemas relacionados con fiabilidad de sistemas, políticas de mantenimiento y reemplazo, refacciones, obtención de cotas de distribuciones, modelos de choque, etc.

El valor de la función tasa de falla de un objeto al tiempo t mide empíricamente la tasa con la que objetos de edad t fallan justo después del tiempo t , digamos en el intervalo $[t, t + dt]$, por unidad de tiempo en una muestra tomada de la población de tales objetos. Se puede decir entonces que la función tasa de falla detecta el envejecimiento de un objeto de manera local. En este caso, el envejecimiento de un objeto se reflejará en un incremento del valor de su función tasa de falla al correr el tiempo. Dicho incremento puede ser continuo a lo largo del tiempo, que sería el caso más restrictivo posible y que corresponde al requerimiento para pertenecer a la clase IFR, o en promedio en algún sentido. Por otra parte, un concepto que detecta el envejecimiento de un objeto de manera global es el de la vida residual del objeto en cualquier edad t . En este caso, el envejecimiento del objeto se reflejará, por ejemplo, al

comparar la vida residual promedio de un objeto de edad t con la vida residual promedio de un objeto de mayor edad o con la vida residual promedio de un objeto nuevo, siendo este último el requerimiento para pertenecer a la clase NBUE.

Se demuestra que las condiciones para pertenecer a la clase IFR son más restrictivas que las que se piden para pertenecer a las demás clases listadas en el párrafo anterior, mientras que las condiciones que se piden para pertenecer a la clase NBUE son las más débiles. En particular, la clase NBUE incluye a un mayor número de distribuciones de vida de objetos que envejecen con el tiempo con respecto a las demás clases. Sin embargo, veremos que es posible ampliar esta clase de distribuciones a una clase aún más grande de tal suerte que siga teniendo propiedades razonablemente buenas, que será la clase HNBUE (Harmonic New Better than Used in Expectation) que introduciremos en el Capítulo 2. Como en la definición de la clase NBUE se utilizan esencialmente promedios aritméticos, es posible obtener clases similares utilizando promedios geométricos o promedios armónicos. En el caso de la clase HNBUE se involucrarán promedios armónicos.

El interés en incluir al mayor número posible de distribuciones de vida que envejecen a lo largo del tiempo es por motivo de aplicación. Resulta que es prácticamente imposible determinar la forma específica que tienen las distribuciones de vida de la gran mayoría de los objetos reales, como son los aparatos eléctricos, electrónicos, mecánicos, etc.. Aún así, todo el mundo tiene la legítima percepción de que dichos objetos envejecen con el tiempo. Resulta ser pues de gran utilidad contar con resultados que indiquen el comportamiento general de tales distribuciones basados en el sólo hecho de que envejecen, tales como la obtención de algunas cotas y la determinación de algunas propiedades de cerradura, entre otros.

El objetivo principal de esta tesis es introducir y analizar las propiedades generales de la clase de distribuciones de vida HNBUE y estudiar la relación que existe entre esta clase y los llamados modelos de choque y modelos de daño acumulado. A pesar de que casi todas las distribuciones de vida que envejecen con el tiempo pertenecen a esta clase, veremos que el manejo formal de dichas distribuciones es técnicamente muy complejo.

Más específicamente, el trabajo se divide en seis capítulos. Los preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo en las áreas de probabilidad,

procesos estocásticos y fiabilidad son presentados en el Capítulo 1. La función característica, la función generadora de probabilidades, las distribuciones exponencial, gama, geométrica y binomial negativa se presentan en la primer sección. En la sección concerniente a los procesos estocásticos se hace una breve introducción a los procesos de Poisson homogéneo, no homogéneo así como al proceso de nacimiento puro. Finalmente se define la función tasa de falla, las funciones star shaped, así como las clases de distribuciones de vida IFR, IFRA, NBU, NBUE junto con sus respectivas clases duales.

En el Capítulo 2 se define a la clase HNBUE y se presentan diversas caracterizaciones para la misma. Se completa la cadena de implicaciones entre las clases de envejecimiento presentadas hasta el momento, mostrando a la clase HNBUE como la más general de ellas, aunque la menos restrictiva.

Dentro del Capítulo 3 se presentan útiles cotas superior e inferior para distribuciones que pertenecen a la clase HNBUE, así como una cota superior en el caso de la clase HNWUE. Analizamos la vida media de sistemas en serie y en paralelo, para sistemas conformados por componentes que tienen una distribución de vida con la propiedad HNBUE (HNWUE) y se presentan respectivas cotas.

La preservación de las clases HNBUE y HNWUE bajo las principales operaciones en fiabilidad, como son la formación de estructuras coherentes, la convolución y la mezcla de distribuciones son tratadas en el Capítulo 4.

Comenzamos el Capítulo 5 presentando la propiedad correspondiente a las distribuciones discretas, llamada la propiedad HNBUE discreta. Posteriormente consideramos la probabilidad de sobrevivencia \bar{H} de un aparato sujeto a choques los cuales ocurren de acuerdo a un proceso de conteo N . Se estudian estos modelos de choque bajo la hipótesis en que N es un proceso de Poisson homogéneo, no homogéneo ó un proceso de nacimiento puro.

El Capítulo 6 presenta los llamados modelos de daño acumulado, así como la relación existente entre la propiedad HNBUE y la transformada de Laplace, así como un modelo a tiempo discreto.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos y resultados básicos relacionados con Teoría de Probabilidad, Procesos Estocásticos y Teoría de Fiabilidad que serán usados en el desarrollo de esta tesis.

1.1. Probabilidad

En aplicaciones una variable aleatoria denota una cantidad numérica definida en términos del resultado de un experimento aleatorio pero matemáticamente hablando, se trata de una función con valores reales definida sobre un espacio de probabilidad.

Definición 1.1. *Una variable aleatoria es una función X definida sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) que es \mathcal{F} -medible, y que toma valores reales. La **función de distribución** F de X (también denotada por F_X haciendo referencia a la variable aleatoria X) se define como la función de \mathbb{R} en $[0, 1]$ dada por*

$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.1. *Si F es la función de distribución de una variable aleatoria X , entonces*

1. F es creciente¹ en \mathbb{R} .

¹A lo largo del manuscrito se utiliza la palabra creciente para decir no decreciente, similarmente se utiliza la palabra decreciente para decir no creciente

2. F es continua por la derecha en todo punto de \mathbb{R} .
3. $F(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $F(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

La demostración de este resultado puede encontrarse en Clarke [4], pag. 46.

Definición 1.2. Sea F la función de distribución de una variable aleatoria X . La **función de probabilidad de supervivencia** (o más brevemente, **función de supervivencia**) \bar{F} de X se define como

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - P(X \leq x) = P(X > x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Las propiedades de la función de supervivencia se deducen a partir de las propiedades de la función de distribución:

1. \bar{F} es no creciente en \mathbb{R} .
2. \bar{F} es continua por la derecha en todo punto de \mathbb{R} .
3. $\bar{F}(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $\bar{F}(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Definición 1.3. La **función característica** de una variable aleatoria X se define como

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}], \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.

Una cualidad de la función característica es que ésta existe para toda variable aleatoria X con valores reales y para todo valor real t .

Teorema 1.2. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, entonces

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Demostración. Puesto que X e Y son independientes, entonces e^{itX} y e^{itY} también son independientes. Luego

$$\varphi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX}e^{itY}] = E[e^{itX}]E[e^{itY}] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t),$$

probándose el resultado. ■

Corolario 1.1. Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, entonces $\varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$.

Otra cualidad de la función característica, es que se cumplen los dos siguientes teoremas, conocidos como Teorema de Unicidad y Teorema de Continuidad, respectivamente.

Teorema 1.3 (Teorema de Unicidad). *Si dos variables aleatorias tienen la misma función característica, entonces ambas variables aleatorias tienen la misma función de distribución.*

La demostración se puede ver en Shirayev [20], pag. 280.

Teorema 1.4 (Teorema de Continuidad). *Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria tales que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en todos los puntos x donde F_X es continua. En este caso, también decimos que F_{X_n} **converge débilmente** a F_X y escribimos

$$F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X.$$

La demostración se puede encontrar en Shirayev [20], pag. 320-322 (dicho autor realiza el tratamiento de la convergencia débil a partir de la pag. 306).

Definición 1.4. *Sea X una v.a. entero valuada no-negativa. Se define la función generadora de probabilidades de X como:*

$$\Phi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} P[X = x]t^x = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)t^x \quad -1 \leq t \leq 1$$

Teorema 1.5. *Sean X e Y v.a.'s entero valuadas no-negativas e independientes. Entonces*

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$$

Demostración. Observe que $f_{X+Y}(z) = \sum_{x=0}^z f_X(x)f_Y(z-x)$, donde z es un entero no negativo. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) &= \sum_{z=0}^{\infty} f_{X+Y}(z)t^z = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)t^x \sum_{z=x}^{\infty} f_Y(z-x)t^{z-x} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)t^x \sum_{y=0}^{\infty} f_Y(y)t^y = \Phi_X(t)\Phi_Y(t), \end{aligned}$$

teniéndose el resultado. ■

Corolario 1.2. Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s entero valuadas no-negativas e independientes. Entonces $\Phi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(t)$.

Del mismo modo que para funciones características, la función generadora de probabilidades determina de manera única la distribución de una variable aleatoria con valores enteros no negativos.

Distribuciones

La función de **distribución exponencial** de parámetro $\lambda > 0$ es

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \forall x \geq 0,$$

y $F(x) = 0, \forall x < 0$. La correspondiente función de sobrevivencia es de la forma

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad \forall x \geq 0$$

y $\bar{F}(x) = 1, \forall x < 0$, y su función de densidad (con respecto a la medida de Lebesgue) es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \forall x > 0,$$

y $f(x) = 0, \forall x \leq 0$. La esperanza de una v.a con distribución exponencial(λ) es $\mu = 1/\lambda$. Una característica que hace a la distribución exponencial de importancia en Teoría de Fiabilidad es la de ser la única distribución continua que posee la propiedad de "pérdida de memoria" siguiente

$$P(X > a + b | X > a) = P(X > b), \quad \forall a, b \geq 0.$$

La verificación de esta propiedad se puede ver, por ejemplo, en Hoel [9].

Una generalización de la distribución exponencial es la llamada **distribución gama**. La función de densidad gama con parámetros (α, λ) es

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad \forall x \geq 0,$$

y $f(x) = 0, \forall x < 0$, donde $\alpha > 0, \lambda > 0$ y

$$(1.1) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \forall \alpha > 0,$$

es la función gama. Una propiedad básica de la función gama es la siguiente

$$(1.2) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \forall \alpha > 0,$$

que se obtiene simplemente al integrar por partes en (1.1). Para $\alpha = 1$, tenemos que $\Gamma(1) = 1$. En el caso que $\alpha = n$ un entero positivo, se tiene de (1.2) que $\Gamma(n) = (n - 1)!$. Note que la distribución exponencial(λ) coincide con la distribución gama de parámetros $(1, \lambda)$. Por otra parte, no existe una expresión cerrada para la función de distribución gama excepto en el caso en que α es un entero positivo, resulta

$$F(x) = \int_0^x \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!},$$

donde la última igualdad se obtiene integrando por partes, equivalentemente,

$$(1.3) \quad F(x) = \sum_{k=\alpha}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Claramente la correspondiente función de sobrevivencia debe ser

$$(1.4) \quad \bar{F}(x) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

La esperanza de una v.a. con distribución $\text{gama}(\alpha, \lambda)$ es $\mu = \alpha/\lambda$.

Ejemplo 1.1. La función característica de una distribución gama de parámetros (α, λ) está dada por

$$E[e^{itX}] = \int_0^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{itx} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^\alpha,$$

por propiedades elementales de la Transformada de Fourier. ◀

Teorema 1.6. Sean X e Y dos v.a.'s independientes, donde X es $\text{gama}(\alpha_1, \lambda)$ y Y es $\text{gama}(\alpha_2, \lambda)$. Entonces $X + Y$ tiene distribución $\text{gama}(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

Demostración. Aplicando el ejemplo anterior, tenemos que

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{\alpha_1} \quad \text{y} \quad \varphi_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{\alpha_2}.$$

Utilizando el Teorema 1.2, se tiene

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Por el Teorema de Unicidad se tiene que la variable aleatoria $X + Y$ tiene una distribución $\text{gama}(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$. ■

Como consecuencias inmediatas del teorema anterior tenemos los dos resultados siguientes.

Corolario 1.3. *Si X_i tiene una distribución $\text{gama}(\alpha_i, \lambda)$, para $i = 1, \dots, n$, y X_1, \dots, X_n son independientes, entonces $X_1 + \dots + X_n$ tiene una distribución $\text{gama}(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda)$.*

Corolario 1.4. *Si X e Y son v.a.'s i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) con distribución $\text{exponencial}(\lambda)$ común, entonces la v.a. $X + Y$ tiene distribución $\text{gama}(2, \lambda)$. La conclusión subsiste para cualquier número finito de v.a.'s.*

La **distribución geométrica** con parámetro p , $0 < p < 1$, que es la contraparte discreta de la distribución exponencial, se define por medio de su función de densidad dada por

$$f(x) = p(1 - p)^x, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

y $f(x) = 0$ en otro caso. (Para ver que esta función efectivamente es una función de densidad discreta se utiliza la serie geométrica $\sum_{x=0}^{\infty} (1 - p)^x = 1/p$. La distribución geométrica(p) es la única distribución discreta no degenerada que posee la propiedad de "perdida de memoria"

$$P(X > a + b | X > a) = P(X > b), \quad \forall a, b \in \mathbb{N}_0.$$

La verificación de esta propiedad se puede ver, por ejemplo, en Hoel [9].

La **distribución binomial negativa** con parámetros (α, p) donde $\alpha > 0$, $0 < p < 1$, se define por medio de su función de densidad dada por

$$f(x) = \binom{\alpha + x - 1}{x} p^\alpha (1 - p)^x, \quad \forall x \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

y $f(x) = 0$ en otro caso. En el caso particular $\alpha = 1$ y p esta distribución coincide con la distribución geométrica con parámetro p .

Teorema 1.7. *Si X e Y son v.a.'s i.i.d. con distribución geométrica de parámetro p , entonces la distribución de la v.a. $X + Y$ es una distribución binomial negativa(2, p). Este resultado se generaliza a cualquier número finito de v.a.'s.*

Demostración. La función generadora de probabilidades de X es

$$\Phi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x t^x = p \sum_{x=0}^{\infty} [(1-p)t]^x = \frac{p}{1 - (1-p)t},$$

Por otra parte, la función generadora de probabilidades de una v.a. Z con distribución binomial negativa(2, p) es

$$\Phi_Z(t) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)t} \right)^2,$$

la cual se deduce en Hoel [9], pag.73. Utilizando el Teorema 1.5 tenemos que

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)t} \right)^2.$$

Por tanto la v.a. $X + Y$ tiene una distribución binomial negativa(2, p). ■

1.2. Procesos estocásticos

Considere un proceso estocástico continuo en el tiempo y con un espacio de estados discreto con valores enteros no negativos. Por ejemplo, la ocurrencia de accidentes en determinado lugar, la llegada de clientes a una tienda de servicio o las llamadas telefónicas que entran a un conmutador, etc. Típicamente, tales procesos comienzan al tiempo $t = 0$. Sea E un evento y sea $N(t)$ la variable aleatoria con valores enteros no negativos que indica el número total de ocurrencias del evento E en el intervalo $[0, t]$, $\forall t \geq 0$, donde se conviene en que $N(0) = 0$. Sea $p_n(t)$ la probabilidad de que ocurran n eventos en el intervalo $[0, t]$, es decir,

$$p_n(t) = P[N(t) = n], \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

para cada $t \geq 0$. Notemos que $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ es, de hecho, la función de densidad de la variable aleatoria $N(t)$, luego se debe tener

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

La familia de variables aleatorias $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ forma un proceso estocástico.

En caso de que $N(t)$ tenga una distribución de Poisson entonces el correspondiente proceso estocástico es llamado **proceso de Poisson**.

Postulados para un proceso de Poisson.

1. **Independencia:** La v.a $N(t)$ es independiente del número de ocurrencias (de un evento E) anteriores al intervalo $(0, t)$, por lo tanto cambios futuros en $N(t)$ son independientes de cambios en el pasado. A esto también se le conoce como propiedad markoviana.
2. **Homogeneidad en el tiempo:** $p_n(t)$ depende solo de la longitud t del intervalo y es independiente de donde se encuentre situado, es decir, $p_n(t)$ nos da la probabilidad del número de ocurrencias (del evento E) en el intervalo $(t_1, t_1 + t)$ para todo $t_1 \geq 0$.
3. **Regularidad:** En un intervalo de longitud infinitesimal h , la probabilidad de realizarse una ocurrencia es de $\lambda h + o(h)^2$, y de más de una ocurrencia es $o(h)$, es decir, las ocurrencias del evento E son de una en una de forma ordenada, o sea, que

$$p_1(h) = \lambda h + o(h) \quad \text{y} \quad p_k(h) = o(h), \quad \forall k \geq 2.$$

En particular se sigue de $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(h) = 1$, que

$$p_0(h) = 1 - \lambda h - o(h).$$

Teorema 1.8. *Si la v.a $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ cumple los postulados 1,2 y 3 anteriores, entonces $N(t)$ tiene una distribución de Poisson con media λt , es decir,*

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{y} \quad \forall t \geq 0.$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en Medhi [17]. Tenemos en particular que $E[N(t)] = \lambda t$, es decir, el número promedio de ocurrencias en un intervalo de longitud t es de λt . Tomando $t = 1$, tenemos que el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo es de λ . Esta cantidad es lo que se conoce como la intensidad del proceso de Poisson. También es de interés analizar los tiempos entre ocurrencias sucesivas del evento E , o tiempos entre arribos del proceso. Tenemos el resultado siguiente.

² $o(h)$ es un símbolo que denota una función de h la cual tiende a 0 más rápidamente que h , es decir, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Teorema 1.9. *Los tiempos entre arribos en un proceso de Poisson $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ con intensidad $\lambda > 0$, tiene una distribución exponencial con media $1/\lambda$.*

Demostración. Sea U_{i+1} la variable aleatoria que representa el tiempo entre las ocurrencias E_i y E_{i+1} , para $i = 0, 1, 2, \dots$. Se tiene

$$\begin{aligned} P(U_{i+1} > x) &= P(E_{i+1} \text{ no ha ocurrido en } (t_i, t_i + x) \text{ dado que } E_i \text{ ocurrió en } t_i) \\ &= P(N(t_i + x) = i \mid N(t_i) = i) = p_0(x) = e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

donde los postulados de homogeneidad e independencia implican la tercer igualdad. Luego, $F_U(x) = P(U \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $\forall x \geq 0$. Por tanto, el tiempo entre arribos se distribuye exponencialmente con media $1/\lambda$. ■

Ahora supongamos que la intensidad λ del proceso de Poisson no es constante, si no más bien se trata de una función del tiempo t , de tal suerte que

$$\begin{aligned} p_1(h) &= P[N(t+h) = 1 \mid N(t) = n] = \lambda(t)h + o(h), \\ p_k(h) &= o(h), \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

en particular, se debe tener $p_0(h) = 1 - \lambda(t)h + o(h)$. En esta situación el postulado concerniente a la homogeneidad no se cumple del todo, es por ello que a este tipo de proceso se le conoce como **proceso de Poisson no-homogéneo**.

Sea $E[N(t)] = \Lambda(t)$ el valor esperado de la v.a. $N(t)$, también conocido como función promedio. En Medhi [17], puede encontrarse que

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$$

y que la probabilidad de k ocurrencias en un intervalo de longitud t es

$$p_k(t) = \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} e^{-\Lambda(t)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Notemos que el caso $\lambda(t) = \lambda$, $\forall t \geq 0$, nos remite al proceso de Poisson homogéneo.

Ahora consideremos la situación en que la intensidad del proceso λ es una función dependiente del número de ocurrencias al momento de tiempo t , es decir,

$$\begin{aligned} p_1(h) &= P[N(t+h) = n+1 | N(t) = n] = \lambda_n h + o(h), \\ p_k(h) &= o(h), \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

en particular, se debe tener $p_0(h) = 1 - \lambda_n h + o(h)$. Cuando esto ocurre, al proceso se le conoce como un **proceso de nacimiento puro**. Para este proceso se tiene que los tiempos de espera entre las ocurrencias (nacimientos) k y $k+1$, tienen una distribución exponencial con parámetro λ_k , adicionalmente los tiempos de espera entre nacimientos son mutuamente independientes. Ver, por ejemplo, Karlin [10], pag.179.

1.3. Fiabilidad

En fiabilidad encontramos muchas situaciones, como el mantenimiento de sistemas, realización de inventarios, políticas de reemplazo, etc., donde diferentes formas de envejecimiento resultan ser de interés. Por ello durante las últimas décadas han sido introducidas diversas clases de distribuciones de vida basadas en las nociones de envejecimiento observadas en la práctica. Las clases más conocidas de dichas distribuciones son la IFR, IFRA, NBU y la NBUE, cada una con su respectiva distribución dual: DFR, DFRA, NWU y NWUE. En lo sucesivo, por una distribución de vida entenderemos una distribución con soporte contenido en los reales no negativos, es decir, la distribución de una v.a. que sólo toma valores reales no negativos. La herramienta matemática adecuada para estudiar las distintas nociones de envejecimiento es la llamada función tasa de falla.

Función tasa de falla

Llamaremos **función de fiabilidad** a la función de probabilidad de sobrevivencia

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x)$$

cuando F sea una distribución de vida. El número $\bar{F}(x)$ representa la probabilidad que una unidad con distribución de vida F sobreviva todo el intervalo

de tiempo $[0, t]$. La probabilidad condicional de sobrevivencia de una unidad que ha alcanzado una edad t es por definición

$$\bar{F}(x|t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \quad \text{si } \bar{F}(t) > 0.$$

Similarmente, la probabilidad condicional de que la unidad falle durante el siguiente intervalo de duración x de tiempo una vez que ha alcanzado la edad t es entonces

$$\begin{aligned} F(x|t) &= 1 - \bar{F}(x|t) = \frac{\bar{F}(t) - \bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \\ &= \frac{(1 - F(t)) - (1 - F(t+x))}{\bar{F}(t)} = \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)}. \end{aligned}$$

Definición 1.5. La **tasa de falla** de una distribución de vida F al tiempo t se define como

$$(1.5) \quad r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

siempre que $f(t)$ exista y $\bar{F}(t) > 0$.

En la definición anterior, si X es el tiempo de vida de una unidad con distribución F , entonces $r(t)dt$ representa intuitivamente la probabilidad de que la unidad a la edad t falle en el intervalo $[t, t + dt]$, más formalmente,

$$r(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h|t)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P[t \leq X < t+x | X \geq t].$$

Se pueden calcular empíricamente: la fiabilidad al tiempo t , la fiabilidad condicional de la unidad a la edad t y la función tasa de falla de X a partir de una muestra finita tomada de una población con distribución F de la siguiente manera:

Se toma $\bar{F}(t)$ como la fracción de objetos de la muestra que sobreviven después del tiempo t , $\forall t > 0$.

Se toma $\bar{F}(x|t)$ como la fracción de objetos que sobreviven el intervalo de tiempo $[t, t+x)$ de la totalidad de objetos de la muestra que sobreviven después del tiempo t .

En estas condiciones $r(t) \approx P[t \leq X < t + \Delta | X \geq t] / \Delta$ que sería la fracción de objetos que fallan en el intervalo $[t, t + \Delta)$ de la totalidad de objetos de la muestra que sobreviven después del tiempo t dividido por Δ , es decir, la fracción de objetos que fallan en el intervalo $[t, t + \Delta)$ de la totalidad de objetos de la muestra que sobreviven después del tiempo t por unidad de tiempo.

Note que si existe $r(t)$, necesariamente existe

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h},$$

que es la función de densidad (con respecto a la medida de Lebesgue) de F . Se concluye pues que el concepto de función tasa de falla anterior se aplica a distribuciones de vida continuas posiblemente con un átomo³ en el extremo derecho de su soporte. Para distribuciones de vida discretas con soporte contenido en \mathbb{N}_0 también se puede formular un concepto análogo de función tasa de falla discreta. Omitiremos este caso por no ser realmente necesario para nuestro desarrollo.

Las clases IFR, IFRA, NBU y NBUE

A lo largo de esta sección X denotará una variable aleatoria con valores enteros no negativos que que representa el tiempo de vida de una componente.

Definición 1.6. *Una distribución de vida F se dice que es de clase **IFR** (increasing failure rate) ó que tiene **tasa de falla creciente**, si se cumple alguna de las condiciones equivalentes siguientes:*

1. $t \mapsto \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$ es decreciente en $(0, \infty)$, para cada $x \geq 0$.
2. Su función tasa de falla r es creciente.
3. La función $\ln \bar{F}(t)$ es cóncava.

La utilización de una u otra definición depende en la existencia de la función de densidad f a lo largo de todo el soporte de F . La primera menciona

³Un átomo es un valor que una variable aleatoria puede tomar con probabilidad estrictamente positiva.

que la probabilidad condicional de sobrevivencia es decreciente en t , para cada $x > 0$, pues

$$P[X > x + t | X > t] = \frac{P[X > x + t]}{P[X > t]} = \frac{\bar{F}(x + t)}{\bar{F}(t)}.$$

La equivalencia entre la segunda y la primera se sigue de inmediato de la identidad

$$r(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{F(t + x) - F(t)}{\bar{F}(t)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[1 - \frac{\bar{F}(t + x)}{\bar{F}(t)} \right].$$

Recuerde que una función h es **cóncava** en un intervalo I si y sólo si

$$h((1 - \alpha)x + \alpha y) \geq (1 - \alpha)h(x) + \alpha h(y), \quad \forall x, y \in I \quad \text{y} \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1,$$

si y sólo si la función

$$x \mapsto \frac{h(x + t) - h(x)}{t}$$

es decreciente en I para cada $t > 0$. La equivalencia entre la primera y la tercera condición se sigue de inmediato de esta última versión de concavidad aplicada a la función $\ln \bar{F}$.

La clase dual de la clase IFR se define como sigue.

Definición 1.7. Una distribución de vida F es de clase **DFR** (*decreasing failure rate*) ó decimos que tiene **tasa de falla decreciente**, si se cumple alguna de las condiciones equivalentes siguientes:

1. $\frac{\bar{F}(t + x)}{\bar{F}(t)}$ es creciente en $t > 0$, para cada $x \geq 0$.
2. Su función tasa de falla r es decreciente.
3. La función $\ln \bar{F}(t)$ es convexa.

Observando las Definiciones 1.6 y 1.7, podríamos preguntarnos qué sucede con una distribución que tenga una tasa de falla constante en el tiempo, es decir, que es tanto creciente como decreciente respecto a t y, por tanto, perteneciente a ambas clases IFR y DFR, es decir, que cumpla

$$r(t) = \lambda, \quad \forall t \geq 0.$$

Integrando ambos términos, resulta

$$\int_0^x \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} dt = \int_0^x \lambda dt,$$

o sea

$$-\ln \bar{F}(x) = \lambda x, \quad \forall x \geq 0,$$

es decir,

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad \forall x \geq 0.$$

Por lo tanto, tal distribución corresponde a la distribución exponencial con parámetro λ . Por otra parte, es claro que la distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$ tiene tasa de falla constante. Se concluye pues que la distribución exponencial es IFR y DFR. El análisis de la distribución exponencial como la única distribución con tasa de falla constante puede encontrarse en Barlow and Proschan [1], pag. 57 y 58. Un ejemplo de un objeto con tasa de falla constante a lo largo del tiempo puede ser un fusible.

Puesto que no todas las distribuciones de vida tienen una tasa de falla monótona a lo largo del tiempo, es decir, son crecientes en ciertos intervalos mientras en otros son decrecientes, entonces podríamos preguntar si su tasa de falla es en promedio a lo largo del tiempo creciente ó decreciente. Integrando (1.5) desde al tiempo inicial 0 hasta un tiempo x , obtenemos la tasa de falla acumulada en el intervalo $(0, x)$ dada por

$$\int_0^x r(t) dt = \int_0^x \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} dt = \int_0^x \frac{-d\bar{F}(t)}{\bar{F}(t)} = -\ln \bar{F}(x), \quad \forall x \geq 0,$$

donde $f(t) = -\frac{d}{dt}\bar{F}(t)$. Ahora dividimos entre la longitud del intervalo, obteniendo la llamada función **tasa de falla promedio**

$$x \mapsto \frac{-\ln \bar{F}(x)}{x}$$

Este último concepto nos lleva a determinar una nueva clase de distribución de vida: la clase IFRA y su respectiva clase dual DFRA.

Definición 1.8. Una distribución de vida F es de clase **IFRA** (*increasing failure rate in average*) ó decimos que tiene **tasa de falla creciente en promedio** si la función

$$(1.6) \quad t \mapsto \frac{-\ln \bar{F}(t)}{t}$$

es creciente para $t > 0$. En caso de que (1.6) sea decreciente para $t > 0$, entonces decimos que F es de clase **DFRA** (decreasing failure rate in average) ó decimos que tiene **tasa de falla decreciente en promedio**.

Proposición 1.1. Una distribución de vida F pertenece a la clase IFRA (DFRA) si y sólo si se cumple

$$\bar{F}(\alpha t) \geq (\leq) \bar{F}^\alpha(t), \quad \forall 0 < \alpha < 1 \quad y \quad \forall t > 0.$$

Demostración. Fijemos s y t tales que $0 \leq s < t < \infty$. Entonces existe $0 < \alpha < 1$ tal que $s = \alpha t$. Suponiendo que F es de clase IFRA, se tiene

$$\frac{-\ln \bar{F}(x)}{x} \leq \frac{-\ln \bar{F}(y)}{y},$$

siempre que $0 < x \leq y$. Como $s = \alpha t \leq t$, se debe tener

$$\frac{-\ln \bar{F}(\alpha t)}{\alpha t} \leq \frac{-\ln \bar{F}(t)}{t}$$

si y sólo si

$$\ln \bar{F}(\alpha t) \geq \alpha \ln \bar{F}(t)$$

si y sólo si

$$\bar{F}(\alpha t) \geq \bar{F}^\alpha(t).$$

El caso DFRA se obtiene invirtiendo las desigualdades. ■

La relación entre las clases IFR e IFRA es la siguiente.

Teorema 1.10. Si F es de clase IFR (DFR), entonces F pertenece a la clase IFRA (DFRA).

Demostración. Veamos el caso IFR. Sean x e y tales que $0 \leq x < y$. Como F es IFR, entonces $h(x) = \ln \bar{F}(x)$ es cóncava, luego

$$h((1 - \alpha)x + \alpha y) \geq (1 - \alpha)h(x) + \alpha h(y), \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Para $x = 0$ se cumple $h(\alpha y) \geq \alpha h(y)$, pues $h(0) = \ln \bar{F}(0) = 0$. Luego

$$\ln \bar{F}(\alpha y) \geq \alpha \ln \bar{F}(y) = \ln \bar{F}^\alpha(y),$$

de donde $\bar{F}(\alpha y) \geq \bar{F}^\alpha(y)$. Por lo tanto, F es IFRA. El caso dual se obtiene del hecho que $\ln \bar{F}(x)$ es convexa e invirtiendo las desigualdades. ■

Definición 1.9. Se dice que una función $\Lambda(x)$ es **star shaped** (función con forma de estrella), si la función $x \mapsto \Lambda(x)/x$ es creciente en $[0, \infty)$ y $\Lambda(0) = 0$. También se dice que una función $\Lambda(x)$ es **anti-star shaped**, si $x \mapsto \Lambda(x)/x$ es decreciente en $[0, \infty)$ y $\Lambda(0) = 0$.

Proposición 1.2. Si $\Lambda(x)$ una función star shaped (anti-star shaped) en $[0, \infty)$, entonces

$$\Lambda(\alpha x) \leq (\geq) \alpha \Lambda(x), \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Demostración. Sea $0 \leq s \leq t$. Como Λ es star shaped, se tiene $\Lambda(s)/s \leq \Lambda(t)/t$. Existe α , con $0 \leq \alpha \leq 1$, tal que $s = \alpha t$. Por tanto

$$\frac{\Lambda(\alpha t)}{\alpha t} \leq \frac{\Lambda(t)}{t}$$

si y sólo si

$$\Lambda(\alpha t) \leq \alpha \Lambda(t),$$

obteniendo el resultado. En el caso dual se invierten las desigualdades. ■

Teorema 1.11. Una función $\Lambda(t)$ es star shaped (anti-star shaped) si y sólo si $\Lambda(at)$ es star shaped (anti-star shaped) para $a > 0$.

Demostración. Supongamos que $\Lambda(t)$ es star shaped. Para $a > 0$ existe $b \in [0, 1]$ tal que $0 \leq ba \leq 1$. Entonces por la proposición 1.2 se tiene que

$$\Lambda(bat) \leq b\Lambda(at),$$

luego $\Lambda(at)$ es star shaped. Suponga ahora que $\Lambda(at)$ es star shaped, con $a > 0$, entonces existe $b \in [0, 1]$, tal que $0 \leq ba \leq 1$. Entonces por la proposición 1.2

$$\Lambda(bat) \leq ba\Lambda(t),$$

luego $\Lambda(t)$ es star shaped. En el caso dual se invierten las desigualdades. ■

Corolario 1.5. Sea F de clase IFRA. Entonces $-\ln \bar{F}(x)$ es star shaped.

Teorema 1.12. Una distribución F es de clase IFRA (DFRA), si y sólo si para cada $\lambda > 0$, la función $\bar{F}(t) - e^{-\lambda t}$ tiene a lo más un cambio de signo, y si el cambio de signo ocurre se presenta de $+ a -$ (de $- a +$).

La demostración puede verse en Barlow and Proschan [1], pag. 89 y 90.

Definición 1.10. Una distribución de vida F es de clase **NBU** (*new better than used*) o se dice tener la propiedad **mejor nuevo que usado** si

$$(1.7) \quad \bar{F}(x+t) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t), \quad \forall x, t \geq 0.$$

En el caso de que se invierta la desigualdad en (1.7) decimos que F es de clase **NWU** (*new worse than used*) ó decimos que tiene la propiedad de ser **peor nuevo que usado**.

Que una componente tenga una distribución de vida NBU equivale a afirmar que la probabilidad condicional de sobrevivencia de un componente de edad t es menor que la correspondiente probabilidad de sobrevivencia de una componente nuevo. En otras palabras, dado que la componente ha cumplido una misión de duración t , decimos que la probabilidad de cumplir una cantidad adicional de tiempo x , es menor a la probabilidad de que un componente nuevo (al tiempo 0) cumpla esta misión de tiempo x , en símbolos

$$\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} = \frac{P[X > x+t]}{P[X > t]} = P[X > x+t | X > t] \leq P[X > x] = \bar{F}(x),$$

lo cual claramente equivale a (1.7).

Teorema 1.13. Si F es de clase IFRA (DFRA), entonces F es de clase NBU (NWU).

Demostración. Veamos el caso IFRA. Fijemos dos tiempos $x \geq 0$ y $t \geq 0$. Sean

$$a = \frac{-\ln \bar{F}(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \frac{-\ln \bar{F}(t)}{t}.$$

Por la propiedad IFRA, se tiene

$$\frac{-\ln \bar{F}(x+t)}{x+t} \geq \max\{a, b\}$$

pues $x+t \geq \max\{x, t\}$. Multiplicando por $(x+t)$ resulta

$$-\ln \bar{F}(x+t) \geq (x+t) \max\{a, b\} \geq ax + bt = -\ln \bar{F}(x) - \ln \bar{F}(t),$$

luego

$$\ln \bar{F}(x+t) \leq \ln \bar{F}(x) + \ln \bar{F}(t) = \ln[\bar{F}(x)\bar{F}(t)],$$

de donde $\bar{F}(x+t) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t)$. Para el caso DFRA implica NWU, la demostración es análoga considerando $\min\{x, y\}$, $\min\{a, b\}$ e invirtiendo las desigualdades. ■

Algunas distribuciones de vida podrían no cumplir la propiedad NBU para algún determinado tiempo t . Podemos preguntarnos entonces si a lo largo del tiempo esta propiedad se cumple en promedio. Recuerde que la **vida media** de una componente con distribución de vida F se define como

$$\mu = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx,$$

donde la segunda igualdad se obtiene integrando por partes.

Definición 1.11. Una distribución de vida F con media finita μ es de clase **NBUE** (*new better than used in expectation*) ó que tiene la propiedad de ser **mejor nuevo que usado en promedio** si se cumple

$$(1.8) \quad \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \leq \mu \bar{F}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

En el caso de que la desigualdad se invierta en (1.8) decimos que F es de clase **NWUE** (*new worse than used in expectation*) o que tiene la propiedad de ser **peor nuevo que usado en promedio**.

Puesto que $\int_t^{\infty} \bar{F}(x)/\bar{F}(t) dx$ representa la **vida residual promedio** de una unidad de edad t , entonces la ecuación (1.8) afirma que una componente con distribución de vida NBUE que ha alcanzado la edad t tiene una vida residual promedio menor con respecto a una componente nueva (notemos que para $t = 0$ la vida residual promedio es μ).

Teorema 1.14. Si F es de clase NBU (NWU), entonces F es de clase NBUE (NWUE).

Demostración. En la ecuación (1.7) integramos respecto a x . Se obtiene

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(x+t) dx \leq \int_0^{\infty} \bar{F}(x)\bar{F}(t) dx,$$

es decir,

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \leq \mu \bar{F}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

El caso NWU implica NWUE es análogo al anterior, sólo hay que invertir las desigualdades. ■

Capítulo 2

La clase HNBUE

En este capítulo se introduce la clase de distribuciones de vida HNBUE y se demuestran algunas caracterizaciones de la propiedad HNBUE. Se determina la relación que guarda esta noción de envejecimiento con otras nociones existentes en la literatura. En particular, dicha relación mostrará que la gran mayoría de las distribuciones de vida de objetos que se desgastan o degradan con el tiempo satisfacen la propiedad HNBUE, es decir, pertenecen a esa clase.

2.1. Definición y caracterizaciones

Definición 2.1. *Se dice que una distribución de vida F , con media finita μ , pertenece a la clase **HNBUE** (harmonic new better than used in expectation) o que tiene la propiedad de ser **armónicamente mejor nuevo que usado en promedio** si cumple*

$$(2.1) \quad \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq \mu e^{-t/\mu}, \quad \forall t \geq 0.$$

*La correspondiente clase dual se define de la siguiente manera. Se dice que F es de clase **HNWUE** (harmonic new worse than used in expectation) o que tiene la propiedad de ser **armónicamente peor nuevo que usado en promedio**, si se cumple*

$$(2.2) \quad \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \geq \mu e^{-t/\mu}, \quad \forall t \geq 0.$$

La razón por la que a esta clase se le asigna este nombre es la siguiente. Recordemos que el promedio armónico integral de una función $f(x)$ para $0 \leq x \leq t$, se define como

$$\frac{1}{\frac{1}{t} \int_0^t \frac{dx}{f(x)}}.$$

Consideremos ahora un objeto con tiempo de vida X y con distribución F tal que $\bar{F}(x) > 0, \forall x \geq 0$. Denotemos por $\phi_F(x)$ a la vida residual promedio de un objeto a la edad x , es decir,

$$\phi_F(x) = E[X - x | X > x] = \int_x^\infty \frac{\bar{F}(s) ds}{\bar{F}(x)}.$$

La propiedad HNBUE equivale a decir que el promedio armónico integral de $\phi_F(x)$, para $0 \leq x \leq t$, es menor ó igual a la vida media μ , es decir, que se cumple la desigualdad

$$(2.3) \quad \frac{1}{\frac{1}{t} \int_0^t \frac{dx}{\phi_F(x)}} \leq \mu, \quad \forall t > 0.$$

(Notemos que $\phi_F(0) = \mu$, y que el promedio armónico integral de $\phi_F(0)$ también es μ).

Teorema 2.1. *La desigualdad (2.3) caracteriza a la clase HNBUE.*

Demostración. Probaremos que (2.3) es equivalente a (2.1). Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{t} \int_0^t \frac{dx}{\phi_F(x)}} &= \frac{t}{\int_0^t \frac{\bar{F}(x)}{\int_x^\infty \bar{F}(s) ds} dx} \\ &= \frac{t}{-\ln \int_x^\infty \bar{F}(s) ds \Big|_{x=0}^{x=t}} = \frac{t}{\ln \int_0^\infty \bar{F}(s) ds - \ln \int_t^\infty \bar{F}(s) ds} \\ &= \frac{t}{\ln \left[\frac{\mu}{\int_t^\infty \bar{F}(s) ds} \right]}. \end{aligned}$$

Así pues (2.3) se cumple si y sólo si

$$\frac{t}{\ln \left[\frac{\mu}{\int_t^\infty \bar{F}(s) ds} \right]} \leq \mu,$$

es decir, si y sólo si

$$\frac{t}{\mu} \leq \ln \left[\frac{\mu}{\int_t^\infty \bar{F}(s) ds} \right],$$

o sea,

$$e^{t/\mu} \leq \frac{\mu}{\int_t^\infty \bar{F}(s) ds}.$$

Por lo tanto, (2.3) se cumple si y sólo si se cumple (2.1), es decir,

$$\int_t^\infty \bar{F}(s) ds \leq \mu e^{-t/\mu}, \quad \forall t \geq 0. \blacksquare$$

Invirtiendo las desigualdades en el resultado anterior se obtiene una caracterización análoga para la clase HNWUE.

Otra posible caracterización de la clase HNBUE es la siguiente. Sea T_F la **distribución de equilibrio** de F (de utilidad en Teoría de la Renovación), definida como

$$T_F(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(s) ds, \quad \forall x \geq 0.$$

Note que

$$\bar{T}_F(x) = 1 - T_F(x) = 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(s) ds,$$

luego

$$\mu \bar{T}_F(x) = \mu - \int_0^x \bar{F}(s) ds = \int_0^\infty \bar{F}(s) ds - \int_0^x \bar{F}(s) ds = \int_x^\infty \bar{F}(s) ds.$$

Entonces, se cumple (2.1) si y sólo si

$$\int_x^\infty \bar{F}(s) ds = \mu \bar{T}_F(x) \leq \mu e^{-x/\mu}, \quad \forall x \geq 0,$$

es decir,

$$\bar{T}_F(x) \leq \bar{G}(x), \quad \forall x \geq 0,$$

o sea, $F \leq_{st} G$ (se lee: “ G es mayor que F con respecto al orden estocástico usual”), donde $\bar{G}(x) = e^{-x/\mu}$, $\forall x \geq 0$, es la distribución exponencial con media μ . Note que, de hecho, esta última desigualdad estocástica ya está incluida dentro de la misma definición de la clase HNBUE. En efecto, recuerde que

$$\int_t^\infty \bar{G}(x) dx = \mu e^{-t/\mu}, \quad \forall x \geq 0.$$

Entonces la condición de ser F de clase HNBUE, es decir, que se cumpla (2.1), es equivalente a que se cumpla

$$(2.4) \quad \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq \int_t^\infty \bar{G}(x) dx, \quad \forall x \geq 0,$$

que es precisamente la definición del orden estocástico $F \leq_{st} G$.

La última caracterización de la clase HNBUE resalta a la distribución exponencial como punto de comparación para que una distribución dada pertenezca a esa clase. La importancia de esta caracterización se pone de manifiesto dentro del capítulo referente a la preservación de operaciones en fiabilidad.

Recuerde que una familia de distribuciones \mathcal{F} se dice que es invariante bajo factores de escala si $F(x) \in \mathcal{F}$ implica $F(\alpha x) \in \mathcal{F}$, $\forall \alpha > 0$. Se tiene la siguiente propiedad básica de la clase HNBUE.

Teorema 2.2. *La clase HNBUE es invariante bajo factores de escala.*

Demostración. Sea F de clase HNBUE con media μ y sea $\alpha > 0$. Debemos probar que $F(\alpha x)$ es también de clase HNBUE. Se tiene que la media de $F(\alpha x)$ debe ser

$$\int_0^\infty \bar{F}(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \bar{F}(u) du = \frac{\mu}{\alpha}$$

donde la primera igualdad se obtiene por el cambio de variable $x = u/\alpha$. Por ese mismo cambio de variable resulta

$$\int_t^\infty \bar{F}(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha t}^\infty \bar{F}(u) du \leq \frac{1}{\alpha} (\mu e^{-\alpha t/\mu}) = \frac{\mu}{\alpha} e^{-\alpha t/\mu},$$

donde la desigualdad se tiene pues F es HNBUE. Entonces $F(\alpha x)$ satisface (2.1), es decir, $F(\alpha x)$ es de clase HNBUE. ■

2.2. Relación con otras clases

Tenemos el resultado siguiente.

Teorema 2.3. *Si F es una distribución de vida de clase NBUE (NWUE), entonces F es de clase HNBUE (HNWUE).*

Demostración. Por definición de NBUE, se tiene

$$\int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq \mu \bar{F}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces

$$\frac{1}{\mu} \leq \frac{\bar{F}(t)}{\int_t^\infty \bar{F}(x) dx},$$

luego

$$\int_0^s \frac{dt}{\mu} \leq \int_0^s \frac{\bar{F}(t) dt}{\int_t^\infty \bar{F}(x) dx},$$

de donde

$$\frac{s}{\mu} \leq \left[-\ln \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \right]_{t=0}^{t=s},$$

es decir,

$$\frac{s}{\mu} \leq \ln \mu - \ln \int_s^\infty \bar{F}(x) dx,$$

o sea,

$$e^{s/\mu} \leq \frac{\mu}{\int_s^\infty \bar{F}(x) dx},$$

equivalentemente,

$$\int_s^\infty \bar{F}(x) dx \leq \mu e^{-s/\mu}, \quad \forall s \geq 0.$$

Por lo tanto F es de clase HNBUE. Para el caso dual se debe suponer que $\mu < \infty$ e invertir las desigualdades anteriores. ■

Con el Teorema 2.3 se concluye la demostración de las siguientes series de implicaciones:

$$IFR \Rightarrow IFRA \Rightarrow NBU \Rightarrow NBUE \Rightarrow HNBUE,$$

$$DFR \Rightarrow DFRA \Rightarrow NWU \Rightarrow NWUE \Rightarrow HNWUE,$$

donde es bien sabido que las implicaciones contrarias no se cumplen en general. Además, es claro a partir de la definición que la distribución exponencial es la única distribución que cumple con ser de ambas clases HNBUE y HNWUE. A continuación proporcionaremos un ejemplo de una distribución que pertenece a la clase HNBUE pero que no pertenece a la clase NBUE. En particular, esto demuestra que la clase HNBUE es estrictamente más grande que la clase NBUE.

Ejemplo 2.1. Sea F una distribución de vida definida como

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ 1/2 & \text{si } 1/2 \leq x < 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Se verifica de inmediato que la vida media de F es

$$\mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt = \frac{5}{4}.$$

Veamos que F pertenece a la clase HNBUE. En efecto, se tiene

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx = \frac{5}{4} - t, \quad \forall 0 \leq t < 1/2$$

Para que se cumpla (2.1), en este intervalo se debe cumplir que

$$\frac{5}{4} - t \leq \frac{5}{4} e^{-4t/5}, \quad \forall 0 \leq t < 0.5$$

Realizando la expansión en serie de Taylor para esta exponencial, tenemos

$$\frac{5}{4} \left[1 - \frac{4}{5}t + \dots \right] = \frac{5}{4} - t + \dots,$$

donde la suma de los términos a partir del término cuadrático es positiva para todo $t \in [0, 1/2]$. Además, la igualdad se cumple únicamente para $t = 0$. Entonces se cumple (2.1) en ese intervalo.

Para el segundo intervalo tenemos que

$$(2.5) \quad \int_t^\infty \bar{F}(x) dx = 1 - \frac{1}{2}t, \quad \forall 1/2 \leq t < 2$$

Para que se cumpla (2.1), en este intervalo se debe cumplir que

$$1 - \frac{1}{2}t \leq \frac{5}{4}e^{-4t/5}, \quad \forall 1/2 \leq t < 2.$$

Para probar esta desigualdad debemos probar que

$$H(t) = \frac{5}{4}e^{-4t/5} - 1 + \frac{1}{2}t \geq 0, \quad \forall 0.5 \leq t < 2.$$

Utilizamos el criterio de la segunda derivada. Derivando en una ocasión obtenemos $H'(t) = -e^{-4t/5} + 1/2$, la cual se anula en el punto $t_0 = -\frac{5}{4} \ln(\frac{1}{2})$, el cual es claramente positivo. Derivando de nueva cuenta, obtenemos

$$H''(t_0) = \frac{2}{5},$$

el cual, al ser una cantidad positiva, determina que la función H alcanza un mínimo en el punto t_0 .

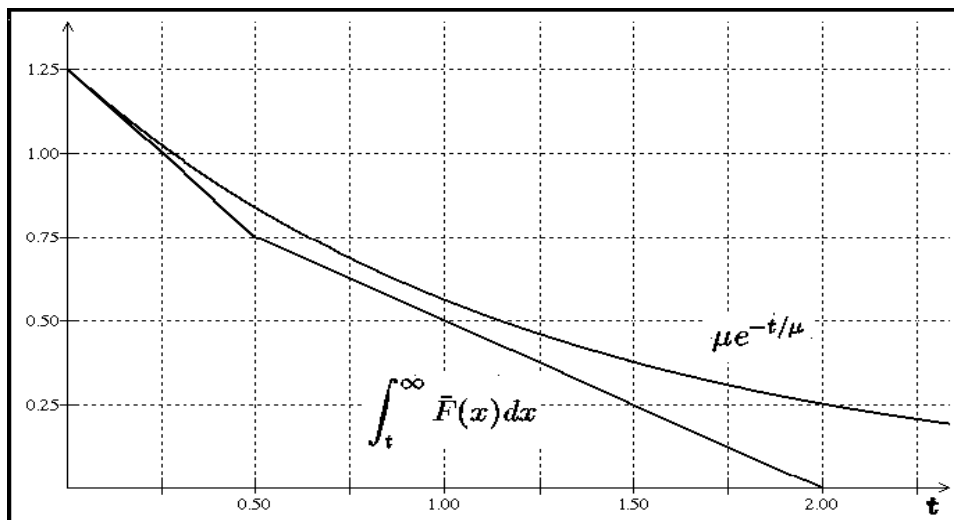


Figura 2.1.

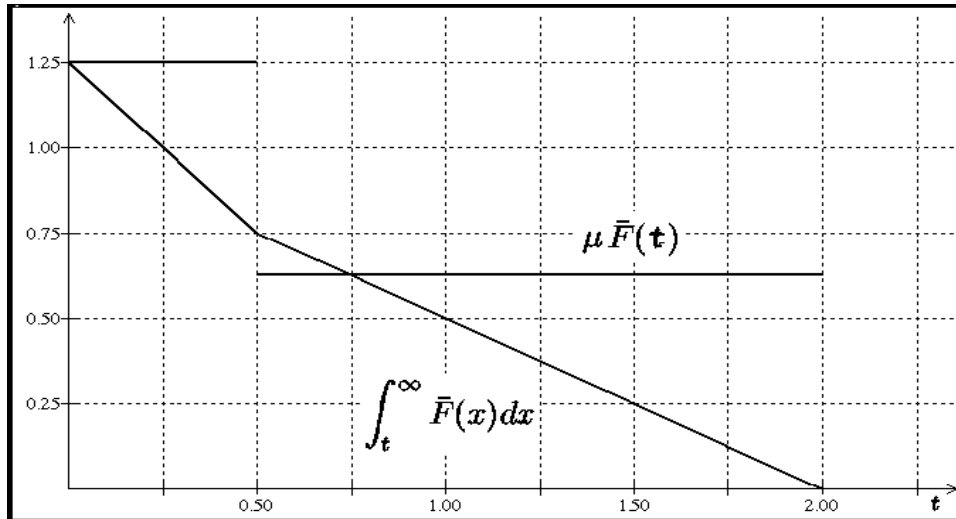


Figura 2.2.

Como $H(t_0) > 0$ (≈ 0.058) se debe tener que $H(t) > 0, \forall t \in [1/2, 2]$. Entonces se cumple (2.1) en este intervalo.

En el tercer subintervalo, se cumple trivialmente (2.1). Con ayuda de una computadora obtenemos la Figura 2.1 donde se pueden ver simultáneamente las gráficas de las funciones $t \mapsto \int_t^\infty \bar{F}(x) dx$ y de $t \mapsto \mu e^{-t/\mu}$.

Se aprecia que la gráfica de la función $t \mapsto \int_t^\infty \bar{F}(x) dx$ permanece todo el tiempo por debajo de la gráfica de la exponencial $t \mapsto \mu e^{-t/\mu}$, verificando en esta forma que la distribución de vida F pertenece a la clase HNBUE.

Veamos ahora que la distribución F no pertenece a la clase NBUE. Basta exhibir un solo punto en donde no se cumpla esta propiedad. Tomemos $t = 0.5$, con ayuda de (2.5) tenemos que la integral en este punto es 0.75. Pero

$$0.75 = \int_{0.5}^\infty \bar{F}(x) dx > \mu \bar{F}(0.5) = 0.625,$$

en contra de lo que enuncia la propiedad NBUE. Con ayuda de una computadora tenemos la Figura 2.2 donde la gráfica de la función $t \mapsto \int_t^\infty \bar{F}(x) dx$ se encuentra por encima de la gráfica de la función $t \mapsto \mu \bar{F}(t)$ a lo largo del intervalo $[0.5, 0.75]$, lo cual niega la propiedad NBUE para F , pues la desigualdad de la definición NBUE falla por lo menos en un punto. ◀

Capítulo 3

Obtención de Cotas

Cuando se considera el tiempo de vida de algún objeto real usualmente se desconoce la forma explícita de su función de distribución F . Sin embargo, se puede suponer en base a ciertas consideraciones subjetivas que tal objeto funciona mejor cuando está nuevo que cuando ya ha sido usado, es decir, que F es de clase NBU. En la realidad esto no siempre es así de claro, cuando lo anterior no sea del todo convincente, lo mejor que se puede asegurar es que la distribución de su tiempo de vida es de clase NBUE o, por lo menos, de clase HNBUE (HNWUE). En tales situaciones los teoremas siguientes nos brindan cotas para \bar{F} que son de utilidad ya que, como se dijo, se desconoce la forma exacta de F . Se presentan pues cotas superiores e inferiores para distribuciones pertenecientes a la clase HNBUE, así como una cota superior para una distribución de clase HNWUE, cada una de estas cotas es comparada con alguna otra cota de una clase más restrictiva. Por cierto, la única cota inferior que se conoce hasta el momento cuando \bar{F} es de clase HNWUE, es la trivial $\bar{F}(t) \geq 0$.

3.1. Cota superior para la clase HNBUE

Teorema 3.1. *Sea F una distribución de vida de clase HNBUE con media finita μ . Entonces*

$$(3.1) \quad \bar{F}(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{para } t \leq \mu \\ e^{(\mu-t)/\mu} & \text{para } t > \mu. \end{cases}$$

Demostración. Fijemos $t > 0$. Entonces

$$(3.2) \quad \int_s^t \bar{F}(x)dx \leq \int_s^\infty \bar{F}(x)dx \leq \mu e^{-s/\mu}, \quad \forall 0 < s < t,$$

donde la segunda desigualdad se sigue de la definición de clase HNBUE. Por otro lado, como $\bar{F}(x)$ es decreciente, se tiene

$$(3.3) \quad (t - s)\bar{F}(t) \leq \int_s^t \bar{F}(x)dx.$$

Por las desigualdades (3.2) y (3.3), tenemos que $(t - s)\bar{F}(t) \leq \mu e^{-s/\mu}$, luego

$$(3.4) \quad \bar{F}(t) \leq \inf_{0 < s < t} \frac{\mu e^{-s/\mu}}{t - s}$$

Consideremos la función

$$G(s) = \frac{\mu e^{-s/\mu}}{t - s}$$

Resta encontrar el valor s en donde la función $G(s)$ alcanza el mínimo, para ello utilizamos el criterio de la segunda derivada. Primero derivamos $G(s)$ e igualamos a cero

$$G'(s) = \frac{e^{-s/\mu}(\mu - t + s)}{(t - s)^2} = 0.$$

Esto ocurre solo cuando $s = t - \mu$. Ahora obtenemos la segunda derivada de $G(s)$ y evaluamos en ese punto

$$G''(t - \mu) = \frac{1}{\mu^2} e^{(\mu-t)/\mu}$$

resultando claramente positiva. Por tanto G alcanza su mínimo valor en $s = t - \mu$. Entonces en (3.4) tenemos

$$\bar{F}(t) \leq \inf_{0 < s < t} \frac{\mu e^{-s/\mu}}{t - s} = e^{(\mu-t)/\mu}.$$

Como $\bar{F}(t)$ siempre es menor o igual a 1, se tiene pues

$$\bar{F}(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{para } t \leq \mu \\ e^{(\mu-t)/\mu} & \text{para } t > \mu. \blacksquare \end{cases}$$

En Barlow and Proschan [1] se obtiene la siguiente cota superior para una distribución de vida F de clase IFRA.

Teorema 3.2. *Sea F una distribución de vida de clase IFRA con media μ . Para un tiempo fijo $t > 0$, se cumple*

$$(3.5) \quad \bar{F}(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{para } t \leq \mu \\ e^{-\omega t} & \text{para } t > \mu, \end{cases}$$

donde $\omega = \omega(t) > 0$, satisface la ecuación

$$(3.6) \quad 1 - \omega\mu = e^{-\omega t}.$$

Demostración. Tomemos t fijo tal que $t > \mu$. Definimos

$$\bar{G}(x) = \begin{cases} e^{-\omega x} & \text{para } x < t \\ 0 & \text{para } x \geq t. \end{cases}$$

Para que F y G tengan la misma vida media μ , ω debe ser es el único número no negativo que satisface

$$\frac{1}{\omega}[1 - e^{-\omega t}] = \int_0^t e^{-\omega x} dx = \mu,$$

es decir,

$$1 - \omega\mu = e^{-\omega t},$$

lo cual se cumple por la hipótesis (3.6). Dado que F es IFRA, $\bar{F}(x) - \bar{G}(x)$ tiene a lo más un cambio de signo, por el Teorema 1.12. Como \bar{F} domina a \bar{G} en $[t, \infty)$ y como ambas tienen la misma vida media, entonces \bar{F} no puede dominar estrictamente a \bar{G} en $[0, t]$. Por tanto, \bar{F} cruza a \bar{G} en $[0, t]$ y lo hace desde arriba, ó \bar{F} permanece debajo de \bar{G} en todo el intervalo $[0, t]$. En cualquier caso se tiene $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$. Por otro lado, como para $t \leq \mu$ no tenemos información al respecto, se toma la cota trivial $\bar{F}(t) \leq 1$. Esto prueba (3.5). ■

El ejemplo que sigue se comparan ambas cotas superiores para una distribución de vida para la cual solo se conoce la vida media μ .

Ejemplo 3.1. Sea F una distribución de vida con media $\mu = 1$. Para $t \leq \mu = 1$ ambas cotas toman el valor de 1. La siguiente tabla muestra algunos valores obtenidos por las cotas superiores IFRA y HNBUE, para $t > \mu$. En la tabla también se muestra el número no negativo ω que cumple

la restricción (3.6). En la Figura 3.1 se muestra gráficamente dicha tabla.

t	ω	Cota superior IFRA	Cota superior HNBUE
1.1	0.17613	0.82387	0.90484
1.2	0.31370	0.68630	0.81873
1.3	0.42297	0.57703	0.74082
1.4	0.51101	0.48899	0.67032
1.5	0.58281	0.41719	0.60653
1.6	0.64198	0.35802	0.54881
1.7	0.69119	0.30881	0.49659
1.8	0.73243	0.26757	0.44933
1.9	0.76724	0.23276	0.40657
2.0	0.79681	0.20319	0.36788
2.5	0.89264	0.10736	0.22313
3.0	0.94048	0.05952	0.13534

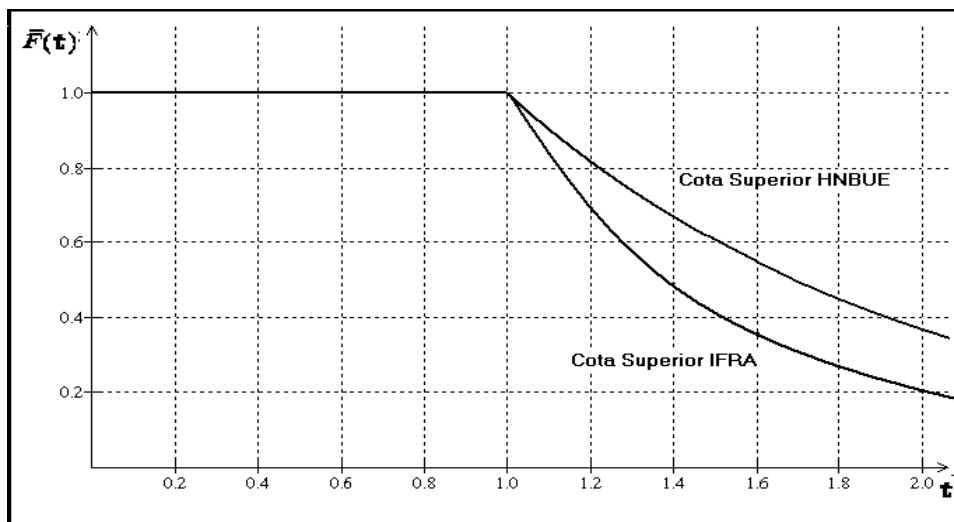


Figura 3.1.

Como se esperaba, la cota superior IFRA es mejor que la cota HNBUE. Desafortunadamente no siempre es posible determinar en la práctica la pertenencia de F a la clase IFRA lo que hace que la cota superior HNBUE sea de gran utilidad en estos casos. ◀

3.2. Cota inferior para la clase HNBUE

Teorema 3.3. Si F es una distribución de vida de clase HNBUE con media finita μ , entonces

$$(3.7) \quad \bar{F}(t) \geq \begin{cases} e^{-\alpha/\mu} & \text{para } 0 \leq t < \mu \\ 0 & \text{para } t \geq \mu, \end{cases}$$

donde α es la única solución no negativa de la ecuación

$$(3.8) \quad (\alpha - t + \mu)e^{-\alpha/\mu} - \mu + t = 0.$$

Demostración. Fijemos $t \geq 0$. Puesto que \bar{F} es decreciente y $\bar{F}(x) \leq 1$, $\forall x \geq 0$, se tiene, para todo $t < s$,

$$\begin{aligned} \int_0^s \bar{F}(x) dx &= \int_0^t \bar{F}(x) dx + \int_t^s \bar{F}(x) dx \\ &= \int_0^t dx + \int_t^s \bar{F}(x) dx \leq t + \bar{F}(t)(s - t). \end{aligned}$$

Entonces

$$(3.9) \quad \int_0^s \bar{F}(x) dx \leq t + \bar{F}(t)(s - t), \quad \forall t < s.$$

Por la definición de la propiedad HNBUE, se tiene $\int_s^\infty \bar{F}(x) dx \leq \mu e^{-s/\mu}$, de donde, $\mu - \int_s^\infty \bar{F}(x) dx \geq \mu - \mu e^{-s/\mu}$, o sea,

$$(3.10) \quad \int_0^s \bar{F}(x) dx \geq \mu(1 - e^{-s/\mu}).$$

Por las desigualdades (3.9) y (3.10) tenemos que

$$t + \bar{F}(t)(s - t) \geq \mu(1 - e^{-s/\mu}),$$

luego

$$\bar{F}(t) \geq \frac{\mu(1 - e^{-s/\mu}) - t}{s - t}, \quad \forall t < s,$$

de donde

$$(3.11) \quad \bar{F}(t) \geq \sup_{s>t} \frac{\mu - \mu e^{-s/\mu} - t}{s - t}.$$

Consideremos la función

$$H(s) = \frac{\mu - \mu e^{-s/\mu} - t}{s - t}.$$

Determinaremos el punto s donde H alcanza su máximo valor. El punto s debe satisfacer

$$H'(s) = \frac{(s + \mu - t)e^{-s/\mu} - \mu + t}{(s - t)^2} = 0.$$

Tomamos α como el valor no negativo de s más grande para el cual se cumple

$$(\alpha + \mu - t)e^{-\alpha/\mu} - \mu + t = 0.$$

Así pues $\mu - t = (\alpha + \mu - t)e^{-\alpha/\mu}$. Pero

$$H''(\alpha) = \frac{-1}{\mu(\alpha - t)}e^{-\alpha/\mu}$$

es negativa puesto que $\alpha - t > 0$. Por lo tanto, H alcanza su máximo valor en $s = \alpha$. Se sigue pues de (3.11) que

$$(3.12) \quad \bar{F}(t) \geq \sup_{s>t} \frac{\mu - \mu e^{-s/\mu} - t}{s - t} = \frac{(\alpha - t)e^{-\alpha/\mu}}{\alpha - t} = e^{-\alpha/\mu}$$

Por otra parte, si $t \geq \mu$, entonces la desigualdad $\bar{F}(t) \geq 0$ se cumple trivialmente. Esto prueba (3.7). ■

En Marshall y Proschan [16] se obtiene la siguiente cota inferior para el caso NBUE.

Teorema 3.4. *Si F es una distribución de vida de clase NBUE con media finita μ , entonces*

$$(3.13) \quad \bar{F}(t) \geq \begin{cases} \frac{\mu - t}{\mu} & \text{si } t < \mu \\ 0 & \text{si } t \geq \mu. \end{cases}$$

Demostración. A partir de la definición de la propiedad NBUE obtenemos $\int_t^\infty \bar{F}(x)dx \leq \mu\bar{F}(t)$, luego,

$$\mu - \int_t^\infty \bar{F}(x)dx \geq \mu - \mu\bar{F}(t),$$

o sea,

$$(3.14) \quad \int_0^t \bar{F}(x)dx \geq \mu(1 - \bar{F}(t)) = \mu F(t)$$

Como \bar{F} es decreciente y menor o igual a 1, se debe tener

$$(3.15) \quad t \geq \int_0^t \bar{F}(x)dx$$

Se sigue de las desigualdades (3.14) y (3.15) que

$$F(t) \leq \frac{t}{\mu},$$

de donde

$$\bar{F}(t) \geq 1 - \frac{t}{\mu} = \frac{\mu - t}{\mu}.$$

Siendo $\bar{F}(x) \geq 0, \forall x \geq 0$, lo anterior prueba (3.13). ■

En el ejemplo que sigue se comparan ambas cotas superiores para una distribución de vida cuya expresión explícita donde solo se conoce la vida media μ .

Ejemplo 3.2. Sea F una distribución de vida con media $\mu = 1$. Para $t \geq \mu$, se toman las cotas inferiores triviales cero. La siguiente tabla muestra algunos valores obtenidos por las cotas inferiores NBUE y HNBUE, para $0 \leq t < \mu$. En la tabla también se muestra el número no negativo α que cumple la restricción (3.8). En la Figura 3.2 se muestra gráficamente dicha tabla.

t	α	Cota inferior NBUE	Cota inferior HNBUE
0	0	1	1
0.1	0.20715	0.9	0.81289
0.2	0.43084	0.8	0.64996
0.3	0.67547	0.7	0.50892
0.4	0.94740	0.6	0.38774
0.5	1.25643	0.5	0.28467
0.6	1.61879	0.4	0.19814
0.7	2.06457	0.3	0.12687
0.8	2.66040	0.2	0.06992
0.9	3.61495	0.1	0.02692
0.95	4.51391	0.05	0.01096
0.99	6.47460	0.01	0.00154

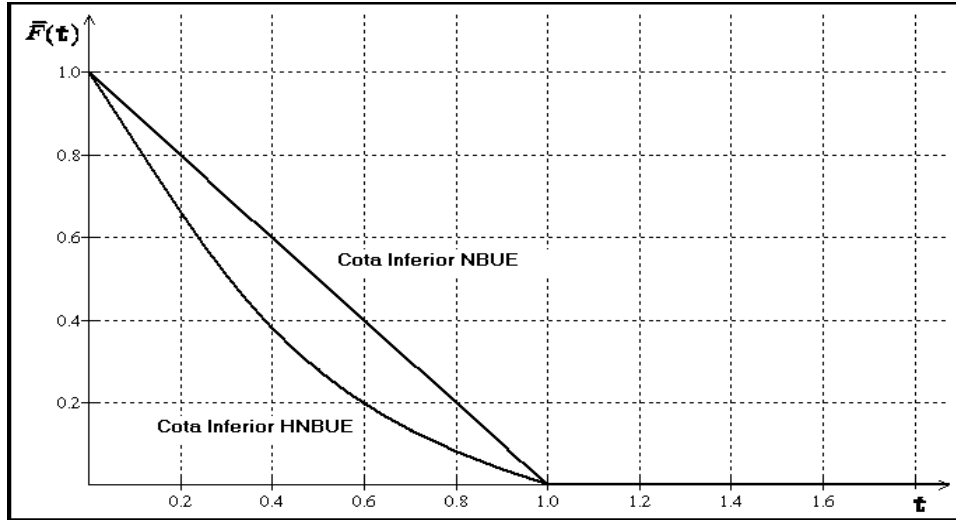


Figura 3.2.

Como se esperaba, la cota inferior NBUE es mejor que la cota HNBUE. Sin embargo, la cota inferior HNBUE es de utilidad, como se dijo, cuando no se sabe de antemano si F pertenece o no a la clase NBUE. ◀

3.3. Cota superior para la clase HNWUE

Teorema 3.5. Si F es una distribución de vida de clase HNWUE con media finita μ , entonces

$$(3.16) \quad \bar{F}(t) \leq \frac{\mu}{t}(1 - e^{-t/\mu}), \quad \forall t > 0.$$

Demostración. A partir de la definición de la propiedad HNWUE, se tiene $\int_t^\infty \bar{F}(x)dx \geq \mu e^{-t/\mu}$, $\forall t \geq 0$, es decir, $\mu - \int_t^\infty \bar{F}(x)dx \leq \mu - \mu e^{-t/\mu}$, o sea,

$$(3.17) \quad \int_0^t \bar{F}(x)dx \leq \mu(1 - e^{-t/\mu})$$

Puesto que \bar{F} es decreciente, tenemos que

$$(3.18) \quad t\bar{F}(t) \leq \int_0^t \bar{F}(x)dx.$$

Se sigue de las desigualdades (3.17) y (3.19) que $t\bar{F}(t) \leq \mu(1 - e^{-t/\mu})$, de donde

$$\bar{F}(t) \leq \frac{\mu}{t}(1 - e^{-t/\mu}), \quad \forall t > 0. \blacksquare$$

Al igual que antes, a continuación compararemos la cota superior obtenida para la clase HNWUE con, por ejemplo, la cota superior para la clase NBUE obtenida por Haines y Singpurwalla [6]. La demostración es similar a la de la cota inferior para la clase NBUE dada en (3.13) invirtiendo las desigualdades.

Teorema 3.6. *Si F es una distribución de vida de clase NWUE con media finita μ , entonces*

$$(3.19) \quad \bar{F}(t) \leq \begin{cases} \frac{\mu - t}{\mu} & \text{para } t < \mu \\ 0 & \text{para } t \geq \mu. \end{cases}$$

En el ejemplo que sigue se comparan ambas cotas superiores para una distribución de vida donde solo se conoce la vida media μ .

Ejemplo 3.3. Sea F una distribución de vida con $\mu = 1$. La siguiente tabla proporciona valores obtenidos por las cotas superiores NWUE y HNWUE para algunos valores de $t \geq 0$. En la Figura 3.3 se muestra gráficamente dicha tabla.

t	Cota superior NWUE	Cota superior HNWUE
0	1	1
0.1	0.9	0.95163
0.2	0.8	0.90635
0.3	0.7	0.86394
0.4	0.6	0.82420
0.5	0.5	0.78694
0.6	0.4	0.75198
0.7	0.3	0.71916
0.8	0.2	0.68834
0.9	0.1	0.65937
1	0	0.63212
1.2	0	0.58234
1.4	0	0.53815
1.6	0	0.49881
1.8	0	0.46372
2	0	0.43233

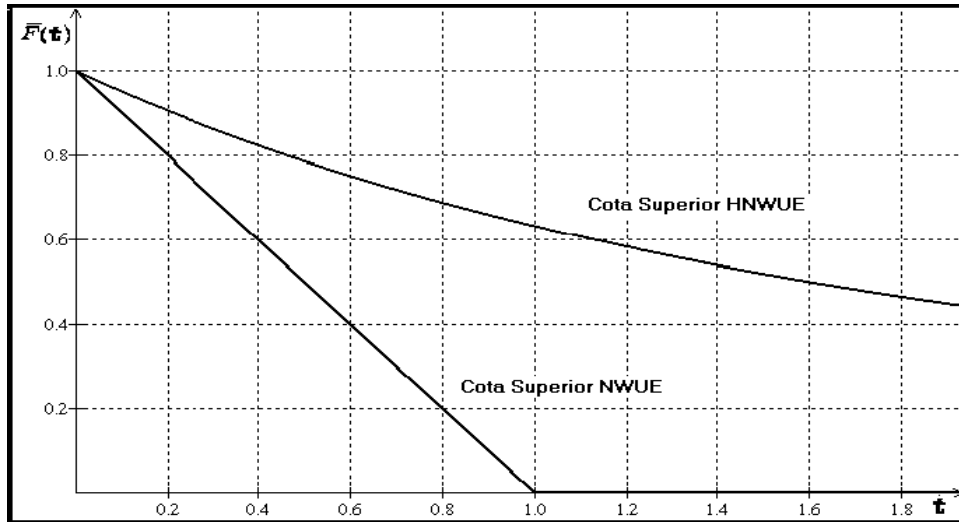


Figura 3.3.

En este caso la cota superior que se observa para la clase HNWUE resulta ser sumamente débil con respecto a la obtenida para la clase NWUE. ◀

3.4. Cotas para un sistema en serie

En esta sección consideraremos sistemas formados por n componentes cuyos tiempos de vida son v.a.'s independientes. Denotaremos el tiempo de vida de la componente j por X_j ; su función de distribución, por F_j ; y su función de fiabilidad, por \bar{F}_j , para $j = 1, \dots, n$. En un sistema en serie las componentes se encuentran conectadas de manera sucesiva de tal suerte que el sistema falla al fallar alguna de sus componentes.

Teorema 3.7. Si μ_s es la vida media de un sistema en serie, entonces

$$(3.20) \quad \mu_s = \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{F}_j(t) \right\} dt.$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \mu_s &= E[\text{mín}(X_1, \dots, X_n)] \\ &= \int_0^\infty P[\text{mín}(X_1, \dots, X_n) > t] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty P[X_1 > t, \dots, X_n > t] dt \\
 &= \int_0^\infty P[X_1 > t] \cdots P[X_n > t] dt \\
 &= \int_0^\infty \bar{F}_1(t) \cdots \bar{F}_n(t) dt \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{F}_j(t) \right\} dt
 \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se cumple por independencia. ■

El cálculo de las integrales en (3.20) casi siempre resulta ser muy complicado, alternativamente podemos encontrar cotas que sean de utilidad cuando las componentes del sistema son de clase HNBUE. Pero antes probaremos un lema tomado de Barlow and Proschan [1], pags. 120 y 121.

Lema 3.1. a) *Si $W(x)$ es una medida de Lebesgue-Stieltjes, no necesariamente positiva, para la cual $\int_t^\infty dW(x) \geq 0$ para todo t , y $h(x) > 0$ es una función creciente, entonces*

$$\int_{-\infty}^\infty h(x) dW(x) \geq 0.$$

b) *Si $W(x)$ es una medida de Lebesgue-Stieltjes, no necesariamente positiva, para la cual $\int_{-\infty}^t dW(x) \geq 0$ para todo t , y $h(x) > 0$ es una función decreciente, entonces*

$$\int_{-\infty}^\infty h(x) dW(x) \geq 0.$$

Demostración. Probaremos la parte (a), la demostración de la parte (b) es similar. Por hipótesis $\int_{-\infty}^\infty I_{[t,\infty)}(x) dW(x)$. Cualquier función creciente no-negativa puede ser aproximada por abajo mediante funciones simples, entonces $h(x)$ es aproximada por funciones de la forma $\sum_{i=1}^n a_i I_{[t,\infty)}(x)$, donde cada $a_i > 0$. Aplicando el Teorema de Convergencia Monótona se concluye el resultado. ■

Teorema 3.8. *Si F_j es de clase HNBUE con media finita μ_j , para $j = 1, \dots, n$, entonces*

$$(3.21) \quad \mu_s = \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{F}_j(t) \right\} dt \geq \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{G}_j(t) \right\} dt,$$

donde $\bar{G}_j(t) = e^{-t/\mu_j}$, $\forall t \geq 0$ (es decir, $\bar{G}_j(t)$ es exponencial con media μ_j). En el caso HNWUE se invierte la desigualdad.

Demostración. Veamos el caso HNBUE. Primero probaremos que

$$(3.22) \quad \int_0^x \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{F}_j(t) \right\} dt \geq \int_0^x \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{G}_j(t) \right\} dt.$$

Como F_j es de clase HNBUE, se tiene

$$(3.23) \quad \int_x^\infty \bar{F}_j(t) dt \leq \int_x^\infty \bar{G}_j(t) dt, \quad \forall x \geq 0,$$

pero como \bar{F}_j y \bar{G}_j tienen la misma vida media μ_j , entonces $\mu_j = \int_0^\infty \bar{F}_j(t) dt = \int_0^\infty \bar{G}_j(t) dt$, luego, por (3.23), $\mu_j - \int_x^\infty \bar{F}_j(t) dt \geq \mu_j - \int_x^\infty \bar{G}_j(t) dt$, obteniendo en esta forma

$$(3.24) \quad \int_0^x \bar{F}_j(t) dt \geq \int_0^x \bar{G}_j(t) dt, \quad \forall x \geq 0,$$

equivalentemente,

$$(3.25) \quad \int_0^x [\bar{F}_j(t) - \bar{G}_j(t)] dt \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Probaremos la desigualdad en (3.22) para el caso $n = 2$. Se tiene, $\forall x \geq 0$, que

$$\int_0^x \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t) dt \geq \int_0^x \bar{G}_1(t) \bar{G}_2(t) dt,$$

si y sólo si

$$\int_0^x [\bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t) - \bar{G}_1(t) \bar{G}_2(t)] dt \geq 0,$$

si y sólo si,

$$\int_0^x [\bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t) - \bar{G}_1(t) \bar{F}_2(t) + \bar{G}_1(t) \bar{F}_2(t) - \bar{G}_1(t) \bar{G}_2(t)] dt \geq 0,$$

si y sólo si

$$(3.26) \quad \int_0^x [\bar{F}_1(t) - \bar{G}_1(t)] \bar{F}_2(t) dt + \int_0^x [\bar{F}_2(t) - \bar{G}_2(t)] \bar{G}_1(t) dt \geq 0.$$

Utilizando el Lema 3.1.b en la ecuación (3.25) y el hecho de que \bar{F}_2 y \bar{G}_1 son decrecientes, obtenemos

$$\int_0^x [\bar{F}_1(t) - \bar{G}_1(t)]\bar{F}_2(t)dt \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_0^x [\bar{F}_2(t) - \bar{G}_2(t)]\bar{G}_1(t)dt \geq 0.$$

Así pues, (3.26) es cierta. Por lo tanto se cumple (3.22) para $n = 2$. Proce- diendo inductivamente sobre n , se completa la demostración de (3.22). Ahora hacemos tender x a $+\infty$ en (3.22) para obtener

$$\mu_s = \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{F}_j(t) \right\} dt \geq \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{G}_j(t) \right\} dt.$$

En el caso HNWUE, la desigualdad en (3.21) se invierte. ■

El Teorema 3.8 dice que la vida media de un sistema en serie es ma- yor que la del mismo sistema cuando las componentes tienen distribuciones exponenciales. El lado derecho de (3.21) puede ser simplificado como sigue.

Corolario 3.1. *Si F_j es de clase HNBUE, con vida media finita μ_j , $j = 1, \dots, n$, entonces*

$$\mu_s \geq \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \right)^{-1}.$$

En el caso HNWUE se cumple la desigualdad opuesta.

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \mu_s &\geq \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{G}_j(t) \right\} dt = \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n e^{-t/\mu_j} \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \exp \left\{ -t \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \right) \right\} dt = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \right)^{-1}. \blacksquare \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de la cota del Teorema 3.8.

Ejemplo 3.4. Consideremos un sistema en serie compuesto por 2 transisto- res, 2 resistencias y 6 capacitores. Cada uno de los componentes es indepen- diente y tiene una distribución de vida HNBUE, con vida media respectiva:

$\mu_t = 900,000$, $\mu_r = 400,000$ y $\mu_c = 300,000$ unidades de tiempo. Entonces la vida media del sistema en serie formado con esas componentes tiene una cota inferior dada por

$$\mu_s \geq \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{900,000} + \frac{2}{400,000} + \frac{6}{300,000} \right)^{-1} = 36,734.69. \blacktriangleleft$$

En el caso de que todas las componentes tengan la misma vida media μ , el Corolario 3.1 se reduce trivialmente al siguiente.

Corolario 3.2. *Si F_j es de clase HNBUE, con vida media finita μ_j , $j = 1, \dots, n$, entonces*

$$\mu_s \geq \frac{\mu}{n}.$$

En el caso HNWUE se cumple la desigualdad opuesta.

En particular, si en el Ejemplo 3.4 suponemos que cada componente tiene una vida media $\mu = 400,000$, entonces $\mu_s \geq 40,000$.

3.5. Cotas para un sistema en paralelo

En esta sección consideraremos sistemas formados por n componentes cuyos tiempos de vida son v.a.'s independientes. Denotaremos el tiempo de vida de la componente j por X_j ; su función de distribución, por F_j ; y su función de fiabilidad, por \bar{F}_j , para $j = 1, \dots, n$. En un sistema en paralelo todas las componentes se encuentran conectados a la señal de entrada y a la señal de salida, sin que exista inferencia directa entre componentes, de tal suerte que el sistema falla sólo cuando todas las componentes han fallado.

Teorema 3.9. *Si μ_p es la vida media del sistema en paralelo, entonces*

$$(3.27) \quad \mu_p = \int_0^\infty \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n F_j(t) \right\} dt = \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{F}_j(t) \right\} dt.$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \mu_p &= E[\text{máx}(X_1, \dots, X_n)] \\ &= \int_0^\infty P[\text{máx}(X_1, \dots, X_n) > t] dt \\ &= \int_0^\infty \{1 - P[\text{máx}(X_1, \dots, X_n) \leq t]\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} \{1 - P[X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t]\} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \{1 - P[X_1 \leq t] \cdots P[X_n \leq t]\} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \{1 - F_1(t) \cdots F_n(t)\} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n F_j(t) \right\} dt,
 \end{aligned}$$

donde la quinta igualdad se obtiene de la independencia de los componentes. Además, puesto que $F(t) = 1 - \bar{F}(t)$, entonces la vida media del sistema en paralelo puede reescribirse usando la operación de coproducto

$$\begin{aligned}
 \mu_p &= \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n F_j(t) \right\} dt = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n \{1 - \bar{F}_j(t)\} \right\} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{F}_j(t) \right\} dt. \blacksquare
 \end{aligned}$$

La integral en (3.27) casi siempre también resulta ser difícil de evaluar. De manera análoga al sistema en serie tenemos el resultado básico siguiente.

Teorema 3.10. *Si F_j es de clase HNBUE con media finita μ_j , para $j = 1, \dots, n$, entonces*

$$(3.28) \quad \mu_p = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n F_j(t) \right\} dt \leq \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n G_j(t) \right\} dt,$$

donde $\bar{G}_j(t) = e^{-t/\mu_j}$, $\forall t \geq 0$. En el caso HNWUE se invierte la desigualdad.

Demostración. Veamos el caso HNBUE. Primero probaremos que

$$(3.29) \quad \int_x^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n F_j(t) \right\} dt \leq \int_x^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n G_j(t) \right\} dt.$$

Se sigue de (3.23) que

$$\int_x^{\infty} \{1 - F_j(t)\} dt \leq \int_x^{\infty} \{1 - G_j(t)\} dt, \quad \forall x \geq 0.$$

De lo cual

$$(3.30) \quad \int_x^\infty [F_j(t) - G_j(t)] dt \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Probaremos la desigualdad (3.29) para el caso $n = 2$, es decir,

$$\int_x^\infty \{1 - F_1(t)F_2(t)\} dt \leq \int_x^\infty \{1 - G_1(t)G_2(t)\} dt, \quad \forall x \geq 0.$$

Se tiene, $\forall x \geq 0$, que la última desigualdad se cumple si y sólo si

$$\int_x^\infty [F_1(t)F_2(t) - G_1(t)G_2(t)] dt \geq 0,$$

si y sólo si

$$\int_x^\infty [F_1(t)F_2(t) - G_1(t)F_2(t) + G_1(t)F_2(t) - G_1(t)G_2(t)] dt \geq 0,$$

si y sólo si

$$(3.31) \quad \int_x^\infty [F_1(t) - G_1(t)]F_2(t) dt + \int_x^\infty [F_2(t) - G_2(t)]G_1(t) dt \geq 0$$

Aplicando el Lema 3.1.a en la ecuación (3.30) y el hecho de que F_2 y G_1 son crecientes, tenemos que

$$\int_x^\infty [F_1(t) - G_1(t)]F_2(t) dt \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_x^\infty [F_2(t) - G_2(t)]G_1(t) dt \geq 0.$$

Por tanto la ecuación (3.31) es cierta. Así pues se cumple (3.29) en el caso $n = 2$. Realizando un proceso inductivo se prueba (3.31) para $n > 2$. Ahora hacemos tender x a 0 en (3.22) para obtener

$$\mu_p = \int_0^\infty \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n F_j(t) \right\} dt \leq \int_0^\infty \left\{ 1 - \prod_{j=1}^n G_j(t) \right\} dt.$$

En el caso en que las distribuciones F_j sean de clase HNWUE, la desigualdad en (3.26) se invierte. La demostración es completamente análoga invirtiendo las desigualdades. ■

El Teorema 3.10 dice que la vida media de un sistema en paralelo es menor que la del mismo sistema cuando las componentes tienen distribuciones exponenciales. El lado derecho de (3.26) puede ser simplificado como sigue.

Corolario 3.3. Si F_j es de clase HNBUE, con vida media finita μ , $j = 1, \dots, n$, entonces

$$\mu_p \leq \mu \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

En el caso HNWUE se cumple la desigualdad opuesta.

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \mu_p &\leq \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^n \bar{G}_j(t) \right\} dt = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-t/\mu})^n] dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-1} e^{-t/\mu} (1 - e^{-t/\mu})^j dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\infty e^{-t/\mu} (1 - e^{-t/\mu})^j dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mu \left(\frac{1}{j+1} \right) (1 - e^{-t/\mu})^{j+1} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \mu \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} = \mu \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}. \blacksquare \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de la cota obtenida en el Teorema 3.10.

Ejemplo 3.5. Utilizando las componentes del Ejemplo 3.4, pero ahora formando un sistema en paralelo, se obtiene

$$\mu_p \leq 400,000 \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{j} = 1,171,587.30. \blacktriangleleft$$

Capítulo 4

Operaciones en Fiabilidad

En esta sección analizaremos el problema de la preservación de las propiedades HNBUE y HNWUE bajo las operaciones más comunes en teoría de la fiabilidad como son la formación de sistemas coherentes, la convolución y la mezcla de distribuciones.

4.1. Sistemas coherentes

La definición general de un sistema o estructura coherente puede encontrarse en Barlow and Proschan [1]. Limitaremos nuestro estudio en este capítulo al caso de sistemas en serie y en paralelo que fueron descritos en el capítulo anterior. Supondremos que dichos sistemas tienen n componentes cuyos tiempos de vida son v.a.'s independientes. Denotaremos el tiempo de vida de la componente j por X_j ; su función de distribución, por F_j ; y su función de fiabilidad, por \bar{F}_j , para $j = 1, \dots, n$.

Caso HNBUE

Primero probaremos, por medio de un contraejemplo, que la clase de distribuciones de vida HNBUE no es cerrada bajo la formación de sistemas coherentes.

Contraejemplo 4.1. Proporcionaremos un ejemplo de un sistema en serie con dos componentes que poseen tiempos de vida i.i.d. de clase HNBUE pero tales que el sistema no es de clase HNBUE. Consideremos pues una

componente cuya vida media es $\mu = 1.725$ y con función de fiabilidad dada por

$$\bar{F}_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 0.1 \\ 0.95 & \text{si } 0.1 \leq x < 0.2 \\ 0.85 & \text{si } 0.2 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

Se afirma que F_1 es HNBUE, es decir, que se cumple

$$(4.1) \quad \int_t^\infty \bar{F}_1(x) dx \leq 1.725e^{-t/1.725}, \quad \forall t \geq 0.$$

En efecto, para $t \in [0, 0.1)$, se tiene

$$y = \int_t^\infty \bar{F}(x) dx = -t + 1.725.$$

Así pues, debemos probar que

$$H(t) = 1.725e^{-t/1.725} + t - 1.725 \geq 0, \quad \forall t \in [0, 0.1).$$

Se tiene $H'(t) = -e^{-t/1.725} + 1 = 0$ si y sólo si $t = 0$. Además $H''(t) = (1.725)^{-1}e^{-t/1.725} \geq 0, \forall t \geq 0$. Luego H alcanza un mínimo en $t_0 = 0$ de valor

$$H(t_0) = 1.725 + 0 - 1.725 = 0.$$

Por lo tanto, se cumple (4.1) en $[0, 0.1)$.

Para $t \in [0.1, 0.2)$, se tiene

$$y = \int_t^\infty \bar{F}_1(x) dx = -0.95t + 1.72.$$

Así pues, debemos probar que

$$H(t) = 1.725e^{-t/1.725} + 0.95t - 1.72 \geq 0, \quad \forall t \in [0.1, 0.2).$$

Se tiene $H'(t) = -e^{-t/1.725} + 0.95 = 0$ si y sólo si $t = -1.725 \ln(0.95) \approx 0.088$. Además, $H''(t) = (1.725)^{-1}e^{-t/1.725} \geq 0, \forall t \geq 0$. Luego H alcanza un mínimo en $t_0 = -1.725 \ln(0.95)$ de valor

$$\begin{aligned} H(t_0) &= 1.725(0.95) - 1.725(0.95) \ln(0.95) - 1.72 \\ &= (1.725)(0.95)[1 - \ln(0.95)] - 1.72 \\ &> (1.725)(0.95)[1 + 0.05] - 1.72 = \frac{11}{16000} > 0, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se obtiene evaluando la serie de Taylor del logaritmo natural¹ en $x = -0.05$ y considerando sólo el primer término de dicha serie. Como $H(t_0) > 0$, se cumple (4.1) en $[0.1, 0.2)$. Finalmente, para $t \in [0.2, 2)$, se tiene

$$y = \int_t^\infty \bar{F}_1(x) dx = -0.85t + 1.7.$$

Así pues, debemos probar que

$$H(t) = 1.725e^{-t/1.725} + 0.85t - 1.7 \geq 0, \quad \forall t \in [0.2, 2).$$

Se tiene $H'(t) = -e^{-t/1.725} + 0.85 = 0$ si y sólo si $t = -1.725 \ln(0.85) \approx 0.2805$. Además, $H''(t) = (1.725)^{-1}e^{-t/1.725} \geq 0, \forall t \geq 0$. Luego H alcanza un mínimo en $t_0 = -1.725 \ln(0.85)$ de valor

$$\begin{aligned} H(t_0) &= 1.725(0.85) - 1.725(0.85) \ln(0.85) - 1.7 \\ &= (1.725)(0.85)[1 - \ln(0.85)] - 1.7 \\ &> (1.725)(0.85)\left[1 + 0.15 + \frac{(0.15)^2}{2}\right] - 1.7 = \frac{1717}{640000} > 0, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se obtiene evaluando la serie de Taylor del logaritmo natural en $x = -0.15$ y considerando sólo los dos primeros términos de dicha serie. Como $H(t_0) > 0$, se cumple (4.1) en $[0.2, 2)$. Finalmente, es claro que se cumple trivialmente (4.1) en $[2, \infty)$. Esto prueba que F_1 es de clase HNBUE. En la Figura 4.1 se observan las curvas de los dos miembros de (4.1).

Ahora coloquemos dos componentes i.i.d. con distribución común F_1 en un sistema en serie. La distribución del sistema está dada por

$$\bar{F}(x) = \prod_{i=1}^2 \bar{F}_i(x) = (\bar{F}_1(x))^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 0.1 \\ 0.9025 & \text{si } 0.1 \leq x < 0.2 \\ 0.7225 & \text{si } 0.2 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

La vida media del sistema es pues $\mu_F = 1.49075$. Probaremos que esta distribución no es de clase HNBUE. Consideremos, por ejemplo, el intervalo $[0.2, 2)$. Se tiene

$$y = \int_t^\infty \bar{F}(x) dx = -0.7225t + 1.445.$$

¹Recuerde que $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \forall |x| < 1$.

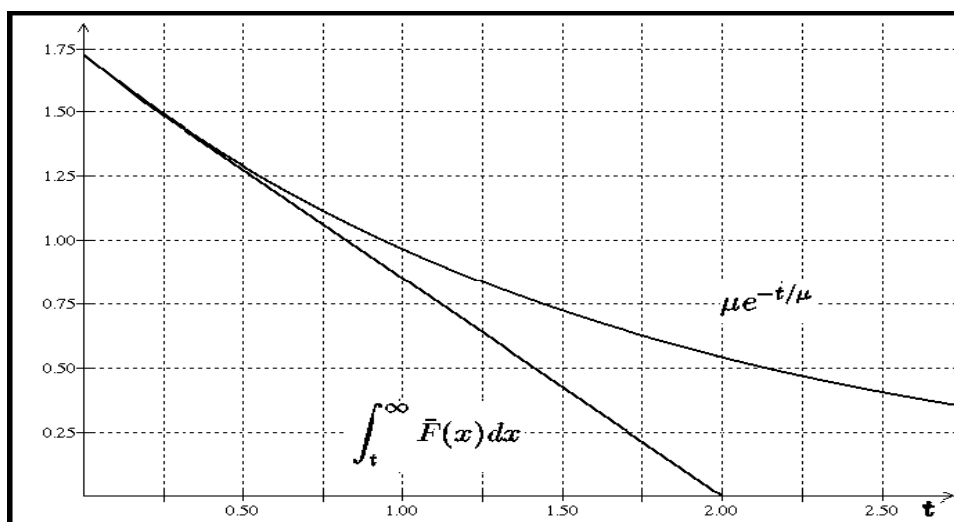


Figura 4.1.

La condición HNBUE exige que

$$-0.7225t + 1.445 \leq 1.49075e^{-t/1.49075}, \quad \forall t \in [0.2, 2).$$

Pero para $t = 0.5$ se tiene

$$-0.7225(0.5) + 1.445 = 1.08375$$

mientras que

$$1.49075e^{-0.5/1.49075} \approx 1.066.$$

Luego, para $t = 0.5$, tenemos

$$-0.7225t + 1.445 > 1.49075e^{-t/1.49075}.$$

Esto prueba que F no es de clase HNBUE. De hecho, la intersección entre la curva exponencial y la curva definida por la integral ocurre en $t_1 = 0.22117$ y $t_2 = 0.76441$ como puede apreciarse en la Figura 4.2, obtenida con ayuda de una computadora. Así pues, la clase HNBUE no es cerrada bajo la formación de sistemas coherentes. ◀

Caso HNWUE

Probaremos que la clase HNWUE tampoco es cerrada bajo formación de sistemas coherentes por medio del siguiente contraejemplo.

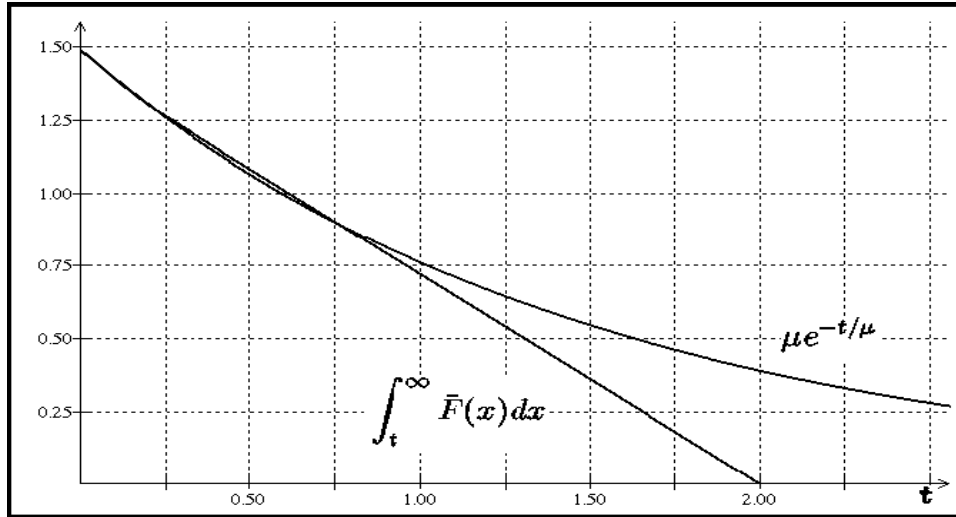


Figura 4.2.

Contraejemplo 4.2. Tomemos dos componentes colocados en un sistema en paralelo con distribuciones de vida exponencial con media igual a uno, es decir,

$$F_1(t) = F_2(t) = 1 - e^{-t}, \quad \forall t \geq 0.$$

La fiabilidad del sistema esta dada por el coproducto de \bar{F}_1 con \bar{F}_2 , es decir,

$$\bar{F}(t) = 1 - (1 - e^{-t})(1 - e^{-t}) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \forall t \geq 0.$$

La tasa de falla correspondiente está dada por

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{2e^{-t} - 2e^{-2t}}{2e^{-t} - e^{-2t}} = \frac{1 - e^{-t}}{1 - \frac{e^{-t}}{2}}.$$

Veamos que la tasa de falla es estrictamente creciente. Sean pues $0 \leq s < t$. Se tiene $r(s) < r(t)$ si y sólo si

$$\frac{1 - e^{-s}}{1 - \frac{e^{-s}}{2}} < \frac{1 - e^{-t}}{1 - \frac{e^{-t}}{2}}$$

si y sólo si $1 - e^{-s} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-s-t} < 1 - e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-s} + \frac{1}{2}e^{-s-t}$ si y sólo si $e^{-t} < e^{-s}$. Como la última desigualdad es cierta, entonces la tasa de falla es estrictamente creciente. Por tanto, F es de clase IFR. Luego F no puede ser de clase HNWUE. ◀

4.2. Convolución

Considere un sistema conformado por dos componentes con tiempos de vida independientes X_1 y X_2 y respectivas distribuciones F_1 y F_2 . Suponga que al fallar la primera componente ésta es reemplazada de inmediato por la segunda. El total del tiempo de vida acumulado del sistema es pues $X_1 + X_2$. La distribución de $X_1 + X_2$ es la convolución $F = F_1 * F_2$ dada por

$$(4.2) \quad F(t) = \int_0^t F_2(t-x) dF_1(x).$$

Note que como $F_2(t) = 0, \forall t < 0$, entonces

$$\int_0^t F_2(t-x) dF_1(x) = \int_0^\infty F_2(t-x) dF_1(x),$$

luego

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) = 1 - F(t) &= \int_0^\infty dF_1(x) - \int_0^\infty F_2(t-x) dF_1(x) \\ &= \int_0^\infty \bar{F}_2(t-x) dF_1(x). \end{aligned}$$

En esta sección probaremos que la clase HNBUE sí es cerrada bajo la operación de convolución pero que la clase HNWUE no lo es.

Caso HNBUE

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1. Si $F(t) = F_1 * \dots * F_n(t)$ y $G(t) = G_1 * \dots * G_n(t)$ y si

$$\int_t^\infty \bar{F}_i(x) dx \leq \int_t^\infty \bar{G}_i(x) dx, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

entonces

$$(4.3) \quad \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq \int_t^\infty \bar{G}(x) dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Probemos el caso $n = 2$. Se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_t^\infty \bar{F}(x) dx &= \int_t^\infty \left\{ \int_0^\infty \bar{F}_2(x - \theta) dF_1(\theta) \right\} dx \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \int_t^\infty \bar{F}_2(x - \theta) dx \right\} dF_1(\theta) \\
 &\leq \int_0^\infty \left\{ \int_t^\infty \bar{G}_2(x - \theta) dx \right\} dF_1(\theta) \\
 &= \int_t^\infty \left\{ \int_0^\infty \bar{G}_2(x - \theta) dF_1(\theta) \right\} dx \\
 &= \int_t^\infty \left\{ \int_0^\infty \bar{F}_1(x - \theta) dG_2(\theta) \right\} dx \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \int_t^\infty \bar{F}_1(x - \theta) dx \right\} dG_2(\theta) \\
 &\leq \int_0^\infty \left\{ \int_t^\infty \bar{G}_1(x - \theta) dx \right\} dG_2(\theta) \\
 &= \int_t^\infty \left\{ \int_0^\infty \bar{G}_1(x - \theta) dG_2(\theta) \right\} dx \\
 &= \int_t^\infty \bar{G}(x) dx,
 \end{aligned}$$

donde las igualdades son consecuencia del Teorema de Fubini y de la propiedad conmutativa de la convolución, mientras que las desigualdades se cumplen por las hipótesis. El caso general se sigue por inducción. ■

Aplicaremos el Teorema 4.1 en el caso de que G_i sea exponencial con media de igual valor a la de la distribución F_i , que no es más que decir que las distribuciones F_i son HNBUE, $i = 1, \dots, n$. Entonces para probar que la convolución de distribuciones preserva la propiedad HNBUE, bastará probar que la convolución de distribuciones exponenciales es HNBUE. De nueva cuenta bastará probar este resultado para $n = 2$. Tenemos dos casos, uno en el que las vidas medias de ambas distribuciones exponenciales son iguales, y el caso en que sean diferentes.

Caso I: G_1 y G_2 con vida media común. Sean X_1, X_2 variables aleatorias con distribuciones exponenciales G_1, G_2 de parámetro $(1/\mu)$, es decir,

con vida media en común μ . Por medio del Teorema 1.6 sabemos que la distribución de $X_1 + X_2$ es una distribución gamma con parámetros $(2, 1/\mu)$, con media 2μ . Luego, la función de distribución de $X_1 + X_2$ debe ser

$$\begin{aligned} G_{X_1+X_2}(t) &= \int_0^t g_{X_1+X_2}(z) dz = \frac{1}{\mu^2} \int_0^t z e^{-z/\mu} dz \\ &= \frac{1}{\mu^2} \left[-\mu t e^{-z/\mu} + \mu \int_0^t e^{-z/\mu} dz \right] = 1 - e^{-t/\mu} - \frac{1}{\mu} t e^{-t/\mu}, \end{aligned}$$

de donde

$$\bar{G}_{X_1+X_2}(t) = e^{-t/\mu} + \frac{1}{\mu} t e^{-t/\mu}.$$

La vida media correspondiente es pues

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{G}_{X_1+X_2}(t) dt &= \int_0^\infty e^{-t/\mu} dt + \frac{1}{\mu} \int_0^\infty t e^{-t/\mu} dt \\ &= \mu + \frac{1}{\mu} \left[-\mu t e^{-t/\mu} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \mu \int_0^\infty e^{-t/\mu} dt \right] = 2\mu. \end{aligned}$$

Veamos ahora que $X_1 + X_2$ es de clase HNBUE, es decir, que se cumple

$$\int_x^\infty \bar{G}_{X_1+X_2}(t) dt \leq 2\mu e^{-x/(2\mu)}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \bar{G}_{X_1+X_2}(t) dt &= \int_x^\infty e^{-t/\mu} dt + \frac{1}{\mu} \int_x^\infty t e^{-t/\mu} dt \\ &= \mu e^{-x/\mu} + \frac{1}{\mu} \left[\mu x e^{-x/\mu} + \mu \int_x^\infty e^{-t/\mu} dt \right] \\ &= \mu e^{-x/\mu} + x e^{-x/\mu} + \int_x^\infty e^{-t/\mu} dt \\ &= 2\mu e^{-x/\mu} + x e^{-x/\mu}. \end{aligned}$$

Aplicando la expansión en serie de Taylor de $e^{x/(2\mu)}$, se tiene

$$e^{x/(2\mu)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2\mu}\right)^j}{j!} \geq 1 + \frac{x}{2\mu},$$

donde la igualdad se alcanza en $x = 0$. Luego $2\mu + x \leq 2\mu e^{x/(2\mu)}$, de donde $2\mu e^{-x/\mu} + x e^{-x/\mu} \leq 2\mu e^{-x/(2\mu)}$. Por lo tanto

$$\int_x^\infty \bar{G}_{X_1+X_2}(t) dt \leq 2\mu e^{-x/(2\mu)},$$

lo cual prueba que $\bar{G}_{X_1+X_2}$ es de clase HNBUE.

Caso II: G_1 y G_2 con vida media distinta. Sean X_1, X_2 variables aleatorias con distribuciones exponenciales G_1, G_2 con parámetros $(1/\mu_1)$ y $(1/\mu_2)$, respectivamente, es decir, con vida media μ_1 y μ_2 donde $\mu_1 \neq \mu_2$. Probaremos que $X_1 + X_2$ es de clase IFR. Primero calculamos la densidad de la suma de X_1 y X_2 . Se tiene

$$\begin{aligned} g_{X_1+X_2}(z) &= \int_0^z g_1(x)g_2(z-x)dx \\ &= \frac{1}{\mu_1\mu_2} e^{-z/\mu_2} \int_0^z e^{-(1/\mu_1-1/\mu_2)x} dx \\ &= \frac{1}{\mu_1\mu_2} e^{-z/\mu_2} \left[\frac{-1}{\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right)} e^{-(1/\mu_1-1/\mu_2)x} \right]_{x=0}^{x=z} \\ &= \frac{1}{\mu_1\mu_2} e^{-z/\mu_2} \left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{-(1/\mu_1-1/\mu_2)z} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} e^{-z/\mu_2} - \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} e^{-z/\mu_1}. \end{aligned}$$

La función de distribución correspondiente está dada por

$$\begin{aligned} G_{X_1+X_2}(t) &= \int_0^t g_{X_1+X_2}(z) dz \\ &= \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^t e^{-z/\mu_2} dz - \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^t e^{-z/\mu_1} dz \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{-t/\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} e^{-t/\mu_1}, \end{aligned}$$

luego

$$\bar{G}_{X_1+X_2}(t) = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{-t/\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} e^{-t/\mu_1}$$

y la función tasa de falla, por

$$r_{X_1+X_2}(x) = \frac{g_{X_1+X_2}(x)}{\bar{G}_{X_1+X_2}(x)} = \frac{e^{-x/\mu_2} - e^{-x/\mu_1}}{\mu_2 e^{-x/\mu_2} - \mu_1 e^{-x/\mu_1}}.$$

Veamos que la función tasa de falla es estrictamente creciente. Sean pues $0 < s < t$. Se afirma que $r(s) < r(t)$. En efecto, se cumple $r(s) < r(t)$ si y sólo si

$$\frac{e^{-s/\mu_2} - e^{-s/\mu_1}}{\mu_2 e^{-s/\mu_2} - \mu_1 e^{-s/\mu_1}} < \frac{e^{-t/\mu_2} - e^{-t/\mu_1}}{\mu_2 e^{-t/\mu_2} - \mu_1 e^{-t/\mu_1}}$$

si y sólo si $\mu_1 e^{-s/\mu_2 - t/\mu_1} + \mu_2 e^{-s/\mu_1 - t/\mu_2} > \mu_1 e^{-s/\mu_1 - t/\mu_2} + \mu_2 e^{-s/\mu_2 - t/\mu_1}$ si y sólo si

$$(\mu_2 - \mu_1)e^{-s/\mu_1 - t/\mu_2} > (\mu_2 - \mu_1)e^{-s/\mu_2 - t/\mu_1}.$$

En el caso de que $\mu_2 - \mu_1 > 0$, la desigualdad anterior se cumple si y sólo si $e^{-s/\mu_1 - t/\mu_2} > e^{-s/\mu_2 - t/\mu_1}$ si y sólo si

$$-\frac{s}{\mu_1} - \frac{t}{\mu_2} > -\frac{s}{\mu_2} - \frac{t}{\mu_1}$$

si y sólo si $\mu_2 s + \mu_1 t < \mu_1 s + \mu_2 t$ si y sólo si $(\mu_2 - \mu_1)s < (\mu_2 - \mu_1)t$ si y sólo si $s < t$, lo cual es cierto. Ahora bien, en el caso de que $\mu_2 - \mu_1 < 0$, la desigualdad de arriba se cumple si y sólo si $e^{-s/\mu_1 - t/\mu_2} < e^{-s/\mu_2 - t/\mu_1}$ si y sólo si

$$-\frac{s}{\mu_1} - \frac{t}{\mu_2} < -\frac{s}{\mu_2} - \frac{t}{\mu_1}$$

si y sólo si $\mu_2 s + \mu_1 t > \mu_1 s + \mu_2 t$ si y sólo si $(\mu_2 - \mu_1)s > (\mu_2 - \mu_1)t$ si y sólo si $s < t$, lo cual es cierto. Esto prueba la afirmación. Por tanto la convolución de dos distribuciones exponenciales con vida media distinta, tiene una tasa de falla estrictamente creciente. Así pues es de clase IFR, luego también de clase HNBUE.

Por los dos casos anteriores se concluye que la convolución de distribuciones exponenciales es de clase HNBUE. Se concluye pues que la clase de distribuciones de vida HNBUE es cerrada bajo la operación de convolución.

Caso HNWUE

Se afirma que la clase HNWUE no es cerrada bajo la operación de convolución. En efecto, acabamos de ver en el caso HNBUE que la convolución de dos distribuciones exponenciales con vidas medias distinta tiene tasa de falla estrictamente creciente. Como toda distribución exponencial también es de clase HNWUE, se concluye que la clase HNWUE no puede ser cerrada con respecto a esta operación. Sin embargo, proporcionaremos a continuación un

contraejemplo en el que aunque ambas distribuciones tengan una misma vida media, la convolución tampoco es de clase HNWUE. Considere pues dos distribuciones de vida exponenciales con media igual a uno, digamos

$$F_1(t) = F_2(t) = 1 - e^{-t}.$$

Claramente ambas distribuciones son de clase HNWUE. La convolución de ambas distribuciones es

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t F_2(t-x)dF_1(x) = \int_0^t F_2(t-x)f_1(x) dx \\ &= \int_0^t (1 - e^{-(t-x)})(e^{-x}) dx = \int_0^t (e^{-x} - e^{-t}) dx \\ &= \int_0^t e^{-x} dx - e^{-t} \int_0^t dx = e^{-t} + 1 - te^{-t} = 1 - (1+t)e^{-t}. \end{aligned}$$

Luego

$$\bar{F}(t) = (1+t)e^{-t}.$$

La media de F es pues

$$\int_0^\infty \bar{F}(t) dt = \int_0^\infty (1+t)e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt + \int_0^\infty te^{-t} dt = 2.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \bar{F}(t) dt &= \int_x^\infty (1+t)e^{-t} dt = \int_x^\infty e^{-t} dt + \int_x^\infty te^{-t} dt \\ &= e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = (2+x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Se tiene que la propiedad HNWUE se cumple, es decir, que se cumple la desigualdad

$$\int_x^\infty \bar{F}(t) dt \geq \mu e^{-x/2}$$

si y sólo si $(2+x)e^{-x} \geq 2e^{-x/2}$ si y sólo si $2+x \geq 2e^{x/2}$ lo cual es una contradicción, como lo podemos verificar de la expansión en serie de Taylor siguiente

$$e^{x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} > 1 + \frac{x}{2}.$$

Este es pues otro contraejemplo que muestra que la clase HNWUE no es cerrada bajo la operación de convolución.

4.3. Mezcla de distribuciones

Para entender el concepto de una mezcla de distribuciones, supongamos que tenemos una fábrica que produce un determinado producto. El 60 % de la producción proviene de una línea de ensamblado número uno, y el resto, es decir un 40 %, de una línea de ensamblado número dos. Debido a diferencias entre máquinas, personal, etc., la distribución de vida F_1 de un producto producido por la línea de ensamble número uno puede ser diferente de la producida por la línea número 2, es decir, puede suceder que $F_1 \neq F_2$. Pasada la etapa de producción, los productos de ambas líneas de ensamblado son mezclados de manera aleatoria para su distribución. Entonces una unidad seleccionada al azar tendrá una distribución de vida

$$F = (0.6)F_1 + (0.4)F_2.$$

De manera más general, si mezclamos una cantidad finita de distribuciones, la distribución resultante es de la forma

$$F = \sum_{i=1}^n a_i F_i,$$

donde $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $0 \leq a_i \leq 1$. De manera más general, la cantidad de distribuciones a ser mezcladas puede ser una cantidad infinita y no numerable; por ejemplo, podemos pensar en que la calidad de un producto depende de una cantidad α de pureza de la materia prima principal, por tanto la distribución para esta cantidad específica de pureza es F_α . Suponiendo que $\alpha \in \mathbb{R}$ es aleatoria, más específicamente, una variable aleatoria con distribución $H(\alpha)$, entonces la mezcla sería

$$(4.4) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x) dH(\alpha).$$

La función de fiabilidad de la mezcla debe ser pues

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= 1 - F(x) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x) dH(\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dH(\alpha) - \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x) dH(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_\alpha(x)) dH(\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_\alpha(x) dH(\alpha) \end{aligned}$$

Antes de analizar el problema de la preservación de las propiedades HN-BUE y HNWUE bajo mezclas, probaremos que la clase DFR sí es cerrada bajo dicha operación. Será necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 4.1. La *transformada de riesgo de una mezcla* $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\alpha}(x) dH(\alpha)$ es por definición la función

$$\eta(\mathbf{u}) = -\ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u_{\alpha}} dH(\alpha)$$

donde \mathbf{u} es un vector con entradas u_{α} , $0 \leq u_{\alpha} \leq \infty$, $-\infty < \alpha < \infty$

Es claro que la función η es creciente en cada variable. La correspondiente **función de riesgo R de una mezcla** se define como

$$R(x) = -\ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-R_{\alpha}(x)} dH(\alpha) = \eta(\mathbf{R}(x))$$

donde \mathbf{R} es el vector con entradas las R_{α} .

Teorema 4.2. La transformada de riesgo de una mezcla es una función cóncava, es decir, se cumple

$$\eta[a\mathbf{u} + (1-a)\mathbf{v}] \geq a\eta(\mathbf{u}) + (1-a)\eta(\mathbf{v})$$

donde $0 \leq a \leq 1$ y $\mathbf{u} = \{u_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$, $\mathbf{v} = \{v_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$, con $0 \leq u_{\alpha}, v_{\alpha} \leq \infty$, son arbitrarios.

Demostración. Se tiene

$$\eta(a\mathbf{u} + (1-a)\mathbf{v}) = -\ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au_{\alpha} + (1-a)v_{\alpha}} dH(\alpha)$$

luego

$$e^{-\eta(a\mathbf{u} + (1-a)\mathbf{v})} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au_{\alpha}} e^{(1-a)v_{\alpha}} dH(\alpha)$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder² con $1/p = a$ y $1/q = 1 - a$, resultando

$$\begin{aligned} & \int e^{au_{\alpha}} e^{(1-a)v_{\alpha}} dH(\alpha) \\ & \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-au_{\alpha}})^{1/a} dH(\alpha) \right]^a \left[\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-(1-a)v_{\alpha}})^{1/(1-a)} dH(\alpha) \right]^{1-a} \end{aligned}$$

²**Desigualdad de Hölder:** Si $\int |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ y $\int |g(x)|^q d\mu(x) < \infty$, donde $p, q > 1$ y $1/p + 1/q = 1$, entonces $\int |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq [\int |f(x)|^p d\mu(x)]^{1/p} [\int |g(x)|^q d\mu(x)]^{1/q}$.

$$\begin{aligned}
 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u\alpha} dH(\alpha) \right]^a \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v\alpha} dH(\alpha) \right]^{1-a} \\
 &= [e^{-\eta(\mathbf{u})}]^a [e^{-\eta(\mathbf{v})}]^{1-a} \\
 &= e^{-[a\eta(\mathbf{u})+(1-a)\eta(\mathbf{v})]}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\eta[a\mathbf{u} + (1-a)\mathbf{v}] \geq a\eta(\mathbf{u}) + (1-a)\eta(\mathbf{v})$. ■

Lema 4.1. Sea $h(\mathbf{u})$ una función cóncava (convexa) y creciente en cada variable. Si $u_\alpha(t)$ es cóncava(convexa), $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, entonces $h(\mathbf{u}(t))$ es cóncava(convexa) en t .

Demostración. Probaremos el caso cóncavo. Por hipótesis $u_\alpha(t)$ es cóncava, es decir,

$$u_\alpha(at_1 + (1-a)t_2) \geq au_\alpha(t_1) + (1-a)u_\alpha(t_2),$$

de donde,

$$\begin{aligned}
 h[u_\alpha(at_1 + (1-a)t_2)] &\geq h[au_\alpha(t_1) + (1-a)u_\alpha(t_2)] \\
 &\geq ah[u_\alpha(t_1)] + (1-a)h[u_\alpha(t_2)]
 \end{aligned}$$

La primer desigualdad es debido a que h es creciente y la segunda es debido a que h es cóncava. En el caso convexo basta invertir las desigualdades. ■

Teorema 4.3. Sea F la mezcla de $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ con respecto a una distribución H . Si F_α es de clase DFR, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, entonces F es de clase DFR.

Demostración. Como F_α es de clase DFR $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que R_α es cóncava $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Resta probar que la función de riesgo R de la mezcla también es cóncava. Como $R(x) = \eta(\mathbf{R}(x))$, basta tomar $h = \eta$ y $\mathbf{u} = \mathbf{R}$ en el lema anterior. Por lo tanto R es cóncava y entonces la mezcla F es DFR. ■

Caso HNBUE

Veremos que la mezcla de distribuciones de clase HNBUE no necesariamente produce una distribución de la misma clase. Considere pues dos distribuciones exponenciales dadas por

$$F_1(x) = 1 - e^{-\alpha x} \quad \text{y} \quad F_2(x) = 1 - e^{-\beta x},$$

donde $\alpha \neq \beta$ son ambos positivos. Sabemos que las dos distribuciones son de clase HNBUE. Una mezcla entre ambas distribuciones está dada por

$$F(x) = aF_1(x) + bF_2(x),$$

donde $0 \leq a, b \leq 1$ y $a + b = 1$. La respectiva función de densidad es

$$f(x) = a\alpha e^{-\alpha x} + b\beta e^{-\beta x}$$

y la función de fiabilidad está dada por

$$\bar{F}(x) = ae^{-\alpha x} + be^{-\beta x}.$$

Probaremos que esta mezcla tiene una tasa de falla estrictamente decreciente. Supongamos pues que $r(s) > r(t)$. Se sigue de la definición de función tasa de falla que

$$\frac{a\alpha e^{-\alpha s} + b\beta e^{-\beta s}}{ae^{-\alpha s} + be^{-\beta s}} > \frac{a\alpha e^{-\alpha t} + b\beta e^{-\beta t}}{ae^{-\alpha t} + be^{-\beta t}}.$$

Multiplicando ambos miembros por $(ae^{-\alpha s} + be^{-\beta s})(ae^{-\alpha t} + be^{-\beta t})$ y dividiéndolos por ab , obtenemos

$$\alpha e^{-\alpha s - \beta t} + \beta e^{-\beta s - \alpha t} > \alpha e^{-\beta s - \alpha t} + \beta e^{-\alpha s - \beta t}.$$

Luego

$$(4.5) \quad (\alpha - \beta)e^{-\alpha s - \beta t} > (\alpha - \beta)e^{-\beta s - \alpha t}.$$

Tenemos dos casos a considerar. Primero supongamos que $\alpha - \beta > 0$. Entonces a partir de (4.5) tenemos $e^{-\alpha s - \beta t} > e^{-\beta s - \alpha t}$, de donde $-\alpha s - \beta t > -\beta s - \alpha t$, luego $(\alpha - \beta)s < (\alpha - \beta)t$, por tanto, $s < t$. Por otro lado, supongamos que $\alpha - \beta < 0$. Entonces $e^{-\alpha s - \beta t} < e^{-\beta s - \alpha t}$, de donde $-\alpha s - \beta t < -\beta s - \alpha t$, luego $(\alpha - \beta)s > (\alpha - \beta)t$, por tanto $s < t$. Así pues, hemos probado que $r(s) > r(t)$ implica $s < t$, es decir, que F tiene tasa de falla estrictamente decreciente, por tanto pertenece a la clase DFR. Dicha distribución no puede pertenecer entonces a la clase HNBUE.

Caso HNWUE

Se afirma que la clase HNWUE sí es cerrada bajo la operación mezcla. En efecto, supongamos que F_α es HNWUE, es decir,

$$(4.6) \quad \int_t^\infty \bar{F}_\alpha(x) dx \geq \mu_\alpha e^{-t/\mu_\alpha},$$

equivalentemente,

$$(4.7) \quad \int_t^\infty \bar{F}_\alpha(x) dx \geq \int_t^\infty \bar{G}_\alpha(x) dx,$$

donde G_α es la distribución exponencial con media μ_α , luego,

$$\mu_\alpha = \int_0^\infty \bar{F}_\alpha(x) dx = \int_0^\infty \bar{G}_\alpha(x) dx, \quad \forall \alpha.$$

Definimos las mezclas de $\{F_\alpha\}_\alpha$ y de $\{G_\alpha\}_\alpha$ con respecto a $H(\alpha)$ como

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty F_\alpha(x) dH(\alpha) \quad \text{y} \quad G(x) = \int_{-\infty}^\infty G_\alpha(x) dH(\alpha),$$

respectivamente. Para probar que la mezcla F es HNWUE, debemos probar que

$$(4.8) \quad \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \geq \mu e^{-t/\mu}$$

donde μ es la vida media de F . Note que

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^\infty \bar{F}(x) dx = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \bar{F}_\alpha(x) dH(\alpha) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \bar{F}_\alpha(x) dx dH(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \bar{G}_\alpha(x) dx dH(\alpha) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \bar{G}(x) dH(\alpha) dx = \int_0^\infty \bar{G}(x) dx, \end{aligned}$$

entonces μ es también la vida media para G . Por tanto, probar (4.8) equivale a probar

$$\int_t^\infty \bar{F}(x) dx \geq \int_t^\infty \bar{G}(x) dx.$$

Así pues, para probar que la mezcla F es HNWUE basta probar que la mezcla G es HNWUE. Como cada $G_\alpha(x)$ es exponencial entonces es de clase DFR, por el Teorema 4.3 se tiene que la mezcla

$$G(x) = \int_{-\infty}^\infty G_\alpha(x) dH(\alpha)$$

es DFR y por tanto HNWUE. Se concluye pues que la mezcla F es HNWUE.

En la siguiente tabla presentamos lo expuesto en esta sección, mostrando si es o no preservada la propiedad HNBUE/HNWUE bajo tres de las principales operaciones en fiabilidad.

	Sistemas Coherentes	Convolución	Mezcla
HNBUE	No Preservada	Preservada	No Preservada
HNWUE	No Preservada	No Preservada	Preservada

Adicionalmente proporcionamos la tabla respectiva para las clases IFR, IFRA, NBU y NBUE, junto con sus respectivas clases duales. Las pruebas, contraejemplos y comentarios relacionados pueden encontrarse en Barlow and Proschan [1]. El resultado concerniente a la mezcla de distribuciones NWUE puede encontrarse en Mehrotra [18].

	Sistemas Coherentes	Convolución	Mezcla
IFR	No Preservada	Preservada	No Preservada
DFR	No Preservada	No Preservada	Preservada
IFRA	Preservada	Preservada	No Preservada
DFRA	No Preservada	No Preservada	Preservada
NBU	Preservada	Preservada	No Preservada
NWU	No Preservada	No Preservada	No Preservada
NBUE	No Preservada	Preservada	No Preservada
NWUE	No Preservada	No Preservada	No Preservada

Capítulo 5

Modelos de Choque

En este capítulo se estudian algunas relaciones existentes entre la clase de distribuciones HNBUE y los llamados modelos de choque. Se supone que un objeto está sometido a choques (no necesariamente fatales) los cuales ocurren aleatoriamente a lo largo del tiempo de acuerdo a algún proceso de conteo. Se demuestran algunos resultados para que el tiempo de vida del objeto, sometido a un tal proceso de choques, sea de clase HNBUE bajo ciertas condiciones sobre el proceso de conteo. De paso, se hace una breve introducción al estudio de la clase HNBUE discreta.

5.1. La clase HNBUE discreta

Hasta el momento hemos tratado con distribuciones que son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue en \mathbb{R} que poseen la propiedad HNBUE, podemos preguntarnos si existe alguna versión de esta propiedad para distribuciones discretas. En el caso continuo se comparaba una función de sobrevivencia \bar{F} con la función de sobrevivencia exponencial \bar{G} con la misma media que \bar{F} . Para el caso discreto es natural hacer una comparación de $\{\bar{F}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ con el análogo discreto de una distribución exponencial, es decir, con la distribución geométrica $\{\bar{G}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ con la misma media que $\{\bar{F}(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Veamos esto a detalle.

Consideremos un objeto sujeto a choques y sea X el número de choques contabilizados hasta el momento en que el objeto falla. Descartando la posibilidad de que un objeto nuevo ya esté descompuesto, podemos suponer que X puede tomar sólo los valores $1, 2, 3, \dots$. En particular, se debe tener

$P(X = 0) = 0$, luego $P(X > 0) = 1$. Dada esta peculiaridad de X , para poder formular un análogo discreto apropiado de la propiedad HNBUE es natural comparar a la distribución F de X con la distribución G de una v.a. Y del tipo geométrico con algún parámetro α (a ser determinado) que tome los mismos valores $1, 2, 3, \dots$, es decir, con densidad

$$g(k) = (1 - \alpha)^{k-1} \alpha, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

y $g(0) = 0$, equivalentemente, con función de fiabilidad

$$\bar{G}(k) = P(Y > k) = (1 - \alpha)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y con función de distribución

$$G(k) = P(Y \leq k) = 1 - (1 - \alpha)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Suponga que F tiene media μ , donde necesariamente $\mu > 1$. Se verifica de inmediato que para que G tenga la misma media μ que F se debe tener $\alpha = 1/\mu$. Así pues, supondremos que G es una distribución del tipo geométrico con parámetro $1/\mu \in (0, 1)$, es decir, con media μ . En lo sucesivo usaremos la notación siguiente:

$$\bar{P}_j = P(X > j) \quad \text{y} \quad \bar{Q}_j = P(Y > j), \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

(en el caso continuo se consideraba $\bar{F}(t) = P(X > t)$, $\forall t \geq 0$). Note que

$$1 = \bar{P}_0 \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_2 \geq \dots$$

y que

$$1 = \bar{Q}_0 \geq \bar{Q}_1 \geq \bar{Q}_2 \geq \dots$$

Un análogo discreto de (2.4) debe ser pues

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j &\leq \sum_{j=k}^{\infty} \bar{Q}_j \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^j = \frac{\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)} = \mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5.1. Una distribución discreta, ó sus correspondientes probabilidades de sobrevivencia $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$, con media finita

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j,$$

se dice que es **HNBUE discreta (discreta armónicamente mejor nuevo que usado en promedio)** si

$$(5.1) \quad \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j \leq \mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Por otro lado, si

$$(5.2) \quad \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j \geq \mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

entonces la distribución, o sus probabilidades de sobrevivencia $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$, se dice que es **HNWUE discreta (discreta armónicamente peor nuevo que usado en promedio)**.

5.2. Un modelo de Poisson

Suponga que un objeto se encuentra sujeto a choques (por ejemplo, descargas eléctricas ó variaciones en el voltaje) que ocurren aleatoriamente de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$. Suponga también que el aparato tiene probabilidad \bar{P}_k de sobrevivir los primeros k choques, donde

$$1 = \bar{P}_0 \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_2 \geq \dots$$

Entonces, la probabilidad de que el aparato sobreviva en el intervalo $[0, t]$ debe estar dada por

$$(5.3) \quad \bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \bar{P}_k, \quad \forall t \geq 0.$$

Tenemos el resultado siguiente. Pero antes un lema.

Lema 5.1. Sea $t \geq 0$ y k un entero positivo, entonces:

$$\int_t^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dx = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Demostración. Integrando reiteradamente por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \int_t^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dx &= \frac{\lambda^k}{k!} \int_t^\infty x^k e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{\lambda k!} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^k}{\lambda(k-1)!} \int_t^\infty x^{k-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \dots = \frac{(\lambda t)^k}{\lambda k!} e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{\lambda(k-1)!} e^{-\lambda t} + \dots + \frac{(\lambda t)}{\lambda 1!} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}. \blacksquare \end{aligned}$$

En el lema anterior notemos que en el caso particular $t = 0$ la integral debe ser es igual a $1/\lambda$.

Teorema 5.1. La función de sobrevivencia $\bar{H}(t)$ en (5.3) es de clase HNBUE si $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^\infty$ es de clase HNBUE discreta.

Demostración. Primero obtengamos la vida media de $\bar{H}(t)$. Dado que la vida media de $\{\bar{P}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ es $\mu = \sum_{k=0}^\infty \bar{P}_k$, entonces la vida media de H debe ser

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{H}(x) dx &= \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \bar{P}_k \right] dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dx \right] \bar{P}_k = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\lambda} \bar{P}_k = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^\infty \bar{P}_k = \frac{\mu}{\lambda}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es cierta por el Teorema de Convergencia Monótona. Ahora, $\forall t \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \bar{H}(x) dx &= \int_t^\infty \left[\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \bar{P}_k \right] dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left[\int_t^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dx \right] \bar{P}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right] \bar{P}_k \\
 &= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \left[\sum_{k=j}^{\infty} \bar{P}_k \right] \\
 &\leq \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{\mu} \right)^j \right] \\
 &= \frac{\mu}{\lambda} e^{-\lambda t / \mu},
 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es cierta por el Teorema de Convergencia Monótona, la tercer igualdad se debe al Lema 5.1, y la desigualdad resulta de aplicar la propiedad HNBUE discreta. Se concluye que $\bar{H}(t)$ es HNBUE. ■

Invirtiendo la desigualdad tenemos el resultado siguiente.

Teorema 5.2. *La función de sobrevivencia $\bar{H}(t)$ en (5.3) es HNWUE si $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ tiene la propiedad HNWUE discreta.*

5.3. Un modelo de Poisson no homogéneo

Supongamos ahora que los choques ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo con función de valor promedio $\Lambda(t)$ y tasa de eventos $\lambda(t) = \Lambda'(t)$, $\forall t \geq 0$. Si el objeto tiene una probabilidad \bar{P}_k de sobrevivir los primeros k choques, entonces su función de sobrevivencia $\bar{H}(t)$ en el intervalo $[0, t]$ es dada en este caso por

$$(5.4) \quad \bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^k}{k!} \bar{P}_k.$$

Teorema 5.3. *Si $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es HNBUE discreta y $\Lambda(t)$ es star shaped, entonces $\bar{H}(t)$ en (5.4) es HNBUE.*

Demostración. Introduzcamos una función auxiliar $\bar{H}^*(t)$ tal que

$$\bar{H}(t) = \bar{H}^*(\Lambda(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

donde

$$\bar{H}^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^k}{k!} \bar{P}_k, \quad \forall x \geq 0.$$

En la demostración del Teorema 5.1 se probó que

$$\int_0^{\infty} \bar{H}^*(t) dt = \mu,$$

donde μ es la vida media de $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Como $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es HNBUE discreta, utilizando el Teorema 5.1 se tiene que $\bar{H}^*(t)$ es HNBUE. Por un cambio de variable resulta

$$\int_0^{\infty} \bar{H}^*(\mu t) dt = 1.$$

Sea $\alpha = \int_0^{\infty} \bar{H}(t) dt$. Por otro cambio de variable resulta

$$\int_0^{\infty} \bar{H}(\alpha t) dt = 1.$$

Se afirma que $\bar{H}(\alpha t)$ es HNBUE. En efecto, se sabe a partir del Teorema 1.11 que si $\Lambda(t)$ es star shaped, entonces $\Lambda(\alpha t)$ es star shaped, luego ésta cruza a lo más una vez a la recta constante μ/α en algún punto β , es decir,

$$\frac{\Lambda(\beta)}{\beta} = \frac{\mu}{\alpha}$$

(si el cruzamiento no ocurre se toma $\beta = 0$ ó $\beta = \infty$).

Suponga primero que $\alpha t \leq \beta$. Entonces

$$\frac{\Lambda(\alpha t)}{\alpha t} \leq \frac{\mu}{\alpha}$$

luego $\Lambda(\alpha t) \leq \mu t$. Como \bar{H}^* es decreciente, se tiene

$$\bar{H}(\alpha t) = \bar{H}^*(\Lambda(\alpha t)) \geq \bar{H}^*(\mu t),$$

Entonces para $x \leq \beta$, se tiene

$$\int_0^x \bar{H}(\alpha t) dt \geq \int_0^x \bar{H}^*(\mu t) dt \geq 1 - e^{-x},$$

pues, por el Teorema 2.2, $\overline{H}^*(t)$ de clase HNBUE implica que $\overline{H}^*(\mu t)$ es de clase HNBUE con media 1.

Suponga ahora que $\alpha t \geq \beta$. Entonces

$$\frac{\Lambda(\alpha t)}{\alpha t} \geq \frac{\mu}{\alpha}$$

luego $\Lambda(\alpha t) \geq \mu t$. Como \overline{H}^* es decreciente, se tiene

$$\overline{H}(\alpha t) = \overline{H}^*(\Lambda(\alpha t)) \leq \overline{H}^*(\mu t).$$

Entonces, para $x \geq \beta$, se tiene

$$\int_x^\infty \overline{H}(\alpha t) dt \leq \int_x^\infty \overline{H}^*(\mu t) dt \leq e^{-x},$$

pues $\overline{H}^*(\mu t)$ es de clase HNBUE con media 1.

Esto prueba $\overline{H}(\alpha t)$ es de clase HNBUE. Aplicando nuevamente el Teorema 2.2, es decir, que la clase HNBUE es invariante bajo factores de escala, se concluye que $\overline{H}(t)$ es también de clase HNBUE. ■

5.4. Modelos de choque más generales

Introduciremos algunas notaciones y resultados preliminares. Suponga que ahora el objeto está sujeto a choques que ocurren aleatoriamente a lo largo del tiempo de acuerdo a un proceso de conteo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$. Para cada $t \geq 0$ y $k \in \mathbb{N}_0$, se denota por $a_k(t)$ la probabilidad de que ocurran exactamente k choques en $[0, t]$, es decir,

$$(5.5) \quad a_k(t) = P[N(t) = k],$$

Denotamos a la variable aleatoria T_k como el tiempo de ocurrencia del k -ésimo choque y por $U_{k+1} = T_{k+1} - T_k$, con $T_0 = 0$, el tiempo de espera entre los choques k y $k + 1$ en el proceso de conteo. Como antes, sea \overline{P}_k la probabilidad de que el objeto sobreviva a k choques, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, luego

$$1 = \overline{P}_0 \geq \overline{P}_1 \geq \dots$$

La probabilidad $\bar{H}(t)$ de que el objeto sobreviva durante el intervalo $[0, t]$ debe ser pues

$$(5.6) \quad \bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \bar{P}_k.$$

Denotemos por A_k al tiempo de espera promedio entre los choques $k - 1$ y k , es decir,

$$(5.7) \quad A_k = E[U_{k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Consideraremos sólo procesos de conteo tales que la probabilidad de que ocurran una infinidad de choques en cualquier intervalo $(0, t]$ es igual a cero, es decir, tales que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) = 1, \quad \forall t > 0.$$

Se afirma que los $a_k(x)$ satisfacen la identidad

$$(5.8) \quad \sum_{k=0}^j a_k(x) = P \left[\sum_{k=1}^{j+1} U_k > x \right], \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

la cual será usada en el Lema 5.2. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^j a_k(x) &= \sum_{k=0}^j P[N(x) = k] = P[N(x) \leq j] \\ &= 1 - P[N(x) > j] = 1 - P \left[\sum_{k=1}^{j+1} U_k \leq x \right] \\ &= P \left[\sum_{k=1}^{j+1} U_k > x \right]. \end{aligned}$$

Notemos la siguiente característica de los tiempos entre choques U_k . Como sabemos, $P[U_k > x]$ es la probabilidad de que el tiempo de espera entre los choques $k - 1$ y k exceda una cantidad de tiempo x ; pues bien, si la variable aleatoria U_k tiene una distribución de clase HNBUE, entonces

$$\int_t^{\infty} P[U_k > x] dx = \int_t^{\infty} \bar{F}_{U_k}(x) dx \leq (A_{k-1}) e^{t/A_{k-1}}.$$

La desigualdad anterior sugiere considerar paralelamente otro modelo de choques tomando como proceso de conteo a un proceso de nacimiento puro $\{L(t)\}_{t \geq 0}$. Recuerde que en tal proceso de nacimiento puro los tiempos entre choques $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ son independientes y el tiempo de espera V_k entre los choques $k-1$ y k tiene distribución exponencial con parámetro λ_{k-1} , es decir,

$$P[V_k > x] = e^{-\lambda_{k-1}x}, \quad \forall x \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La probabilidad de que el objeto sobreviva en el intervalo $[0, t]$ al ser sometido a estos choques es pues

$$(5.9) \quad \bar{S}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \bar{P}_k,$$

donde $z_k(t)$ denota la probabilidad de que ocurran exactamente k choques en $(0, t]$ en ese proceso de conteo, es decir,

$$(5.10) \quad z_k(t) = P[L(t) = k], \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Los $z_k(x)$ deben satisfacer la siguiente identidad análoga a (5.8), es decir,

$$(5.11) \quad \sum_{k=0}^j z_k(x) = P \left[\sum_{k=1}^{j+1} V_k > x \right], \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

y también,

$$\int_0^{\infty} z_k(x) dx = \frac{1}{\lambda_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Note que en este caso tenemos

$$\int_t^{\infty} P[V_k > x] dx = \int_t^{\infty} e^{-\lambda_{k-1}x} dx = \frac{1}{\lambda_{k-1}} e^{-\lambda_{k-1}t}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si los U_k son de clase HNBUE y se escoge $\lambda_{k-1} = 1/A_{k-1}$, equivalentemente, $A_{k-1} = 1/\lambda_{k-1}$, obtenemos

$$(5.12) \quad \int_t^{\infty} P[U_k > x] dx \leq \int_t^{\infty} P[V_k > x] dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Puesto que las U_k son además independientes, se seguirá del Teorema 4.1 que

$$(5.13) \quad \int_t^{\infty} P \left[\sum_{k=1}^{j+1} U_k > x \right] dx \leq \int_t^{\infty} P \left[\sum_{k=1}^{j+1} V_k > x \right] dx, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Lema 5.2. Si los tiempos entre choques $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ son independientes y de clase HNBUE, entonces las funciones de sobrevivencia $\bar{H}(t)$ y $\bar{S}(t)$ dadas por (5.6) y (5.9) satisfacen

$$(5.14) \quad \int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx \leq \int_t^{\infty} \bar{S}(x) dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \bar{H}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \bar{P}_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \sum_{j=k}^{\infty} (\bar{P}_j - \bar{P}_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j a_k(x) (\bar{P}_j - \bar{P}_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P \left[\sum_{k=1}^{j+1} U_k > x \right] (\bar{P}_j - \bar{P}_{j+1}) \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se obtiene de aplicar (5.8). Al integrar se obtiene

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx &= \int_t^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P \left[\sum_{k=1}^{j+1} U_k > x \right] (\bar{P}_j - \bar{P}_{j+1}) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_t^{\infty} P \left[\sum_{k=1}^{j+1} U_k > x \right] dx \right\} (\bar{P}_j - \bar{P}_{j+1}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_t^{\infty} P \left[\sum_{k=1}^{j+1} V_k > x \right] dx \right\} (\bar{P}_j - \bar{P}_{j+1}) \\ &= \int_t^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P \left[\sum_{k=1}^{j+1} V_k > x \right] (\bar{P}_j - \bar{P}_{j+1}) dx \\ &= \int_t^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x) \bar{P}_k dx \\ &= \int_t^{\infty} \bar{S}(x) dx \end{aligned}$$

donde la desigualdad se cumple por (5.13) y la penúltima igualdad se cumple por (5.11). ■

Invirtiendo las desigualdades obtenemos el resultado siguiente.

Lema 5.3. Si los tiempos entre choques $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ son independientes y de clase HNBUE, entonces las funciones de sobrevivencia $\overline{H}(t)$ y $\overline{S}(t)$ dadas por (5.6) y (5.9) satisfacen

$$\int_t^{\infty} \overline{H}(x) dx \geq \int_t^{\infty} \overline{S}(x) dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Por tanto, si los tiempos entre choques $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ son independientes y de clase HNBUE (HNWUE), se concluye a partir de los Lemas 5.2 y 5.3 que para probar que $\overline{H}(t)$ sea también de clase HNBUE (HNWUE) bastará probar que \overline{S} pertenece a la clase HNBUE (HNWUE). Este será el resultado principal de esta sección pero antes de presentarlo hará falta el siguiente lema, el cual puede encontrarse en A-Hammed and Proschan[8] pero cuya demostración completa se desarrolla a continuación.

Lema 5.4. Sea $z_k(t)$ definida en (5.10). Entonces se cumplen:

a)
$$\int_0^t z_k(u) du = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=k+1}^{\infty} z_j(t), \quad \forall t \geq 0.$$

b)
$$\int_t^{\infty} z_k(u) du = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=0}^k z_j(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Demostación. (a) La prueba se realizará por inducción. Notemos que para $k = 0$ se tiene

$$\int_0^t z_0(u) du = \int_0^t e^{-\lambda_0 u} du = \frac{1}{\lambda_0} (1 - e^{-\lambda_0 t}) = \frac{1}{\lambda_0} P[V_1 \leq t] = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)$$

por (5.11). Supongamos ahora que se cumple para $k = k_0 - 1$ y probémoslo para k_0 . Para un proceso de nacimiento puro se debe tener (vea p. ej., Karlin [10], pag. 178)

$$z'_{k_0}(t) = \lambda_{k_0-1} z_{k_0-1}(t) - \lambda_{k_0} z_{k_0}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Integrando, tenemos

$$z_{k_0}(t) = \lambda_{k_0-1} \int_0^t z_{k_0-1}(u) du - \lambda_{k_0} \int_0^t z_{k_0}(u) du$$

Despejando la segunda integral de esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t z_{k_0}(u) du &= \frac{1}{\lambda_{k_0}} \left[\lambda_{k_0-1} \int_0^t z_{k_0-1}(u) du - z_{k_0}(t) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_{k_0}} \left[\sum_{j=k_0}^{\infty} z_j(t) - z_{k_0}(t) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_{k_0}} \left[\sum_{j=k_0+1}^{\infty} z_j(t) \right] \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene después de aplicar la hipótesis inductiva. Por tanto se cumple para $k = k_0$ y termina la demostración de esta parte.

(b) Recuerde que $\int_0^{\infty} z_{k_0}(u) du = \frac{1}{\lambda_{k_0}}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} z_{k_0}(u) du &= \int_0^{\infty} z_{k_0}(u) du - \int_0^t z_{k_0}(u) du \\ &= \frac{1}{\lambda_{k_0}} - \frac{1}{\lambda_{k_0}} \left[\sum_{j=k_0+1}^{\infty} z_j(t) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_{k_0}} \left[1 - \sum_{j=k_0+1}^{\infty} z_j(t) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_{k_0}} \sum_{j=0}^{k_0} z_j(t) \blacksquare \end{aligned}$$

Se introduce la siguiente notación:

$$\alpha_k = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \bar{P}_j, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

$$B_0 = 1 \quad \text{y} \quad B_k = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda_j \alpha_0} \right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 5.4. *La función de supervivencia $\bar{H}(t)$ es HNBUE si los tiempos entre choques U_k son independientes, de clase HNBUE, con*

$$E[U_{k+1}] = \frac{1}{\lambda_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

y si además se cumple la desigualdad

$$(5.15) \quad \alpha_k \leq B_k \alpha_0.$$

Demostración. A partir de el Lema 5.2, para probar que $\bar{H}(t)$ es HNBUE, basta probar el resultado para el caso de un proceso de nacimiento puro, es decir para $\bar{S}(t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \bar{S}(x) dx &= \int_t^\infty \left[\sum_{j=0}^{\infty} z_j(x) \bar{P}_j \right] dx = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_t^\infty z_j(x) dx \right] \bar{P}_j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_j} \sum_{k=0}^j z_k(t) \right] \bar{P}_j = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \bar{P}_j \right] z_k(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_k(t), \end{aligned}$$

por el Lema 5.4.b. Por otro lado, la vida media asociada a \bar{S} , denotada por α_0 , está dada por

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \int_0^\infty \bar{S}(x) dx = \int_0^\infty \left[\sum_{j=0}^{\infty} z_j(x) \bar{P}_j \right] dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty z_j(x) dx \right] \bar{P}_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \bar{P}_j \end{aligned}$$

Así pues es suficiente con probar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_k(t) \leq \alpha_0 e^{-t/\alpha_0}, \quad \forall t \geq 0.$$

Por la hipótesis (5.15) tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_k(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} B_k \alpha_0 z_k(t) = \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} B_k z_k(t)$$

Resta pues probar que

$$(5.16) \quad \sum_{k=0}^{\infty} B_k z_k(t) = e^{t/\alpha_0}, \quad \forall t \geq 0,$$

pero esta igualdad viene probada en el Lema 2.2 en Klefsjö[12]. La hipótesis (5.15) implica que

$$\alpha_0 \geq \frac{1}{\lambda_k}$$

para cada k tal que $\bar{P}_k > 0$. Esto termina la demostración. ■

Invirtiendo las desigualdades se obtiene un resultado análogo al anterior para la clase HNWUE al agregar una condición adicional que no se tiene en forma natural.

Teorema 5.5. *La función de sobrevivencia $\bar{H}(t)$ es de clase HNWUE si los tiempos entre choques U_k son independientes, son de clase HNWUE con*

$$E[U_{k+1}] = \frac{1}{\lambda_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

se cumple

$$(5.17) \quad \alpha_k \geq B_k \alpha_0$$

y si además existe un k_0 tal que

$$\alpha_0 \geq \frac{1}{\lambda_k}$$

para cada $k \geq k_0$ para el cual $\bar{P}_k > 0$.

Cuando los tiempos entre choques U_k tienen la misma vida media obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1. *La distribución $\bar{H}(t)$ es de clase HNBUE (HNWUE) si los tiempos entre choques U_k son independientes y tales que*

$$E[U_k] = \frac{1}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

y si $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es HNBUE discreta (HNWUE discreta).

Demostración. Veamos el caso HNBUE. A partir de la condición (5.15) del Teorema 5.4 y sustituyendo los valores de α_0 y α_k , ésta puede ser reescrita como

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \bar{P}_j \leq B_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \bar{P}_j$$

Puesto que $1/\lambda_k = 1/\lambda, \forall k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j \leq \frac{1}{\lambda} B_k \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j$$

Cancelando términos semejantes y usando el hecho que $\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j$, se tiene

$$\sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j \leq \mu B_k.$$

Pero

$$B_k = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda \alpha_0}\right) = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^k$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j \leq \mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^k,$$

es decir, que $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es HNBUE Discreta. Así pues, $\bar{H}(t)$ es HNBUE. El caso HNWUE es análogo. ■

En la particular situación en que los tiempos entre choques U_k se encuentren distribuidos exponencialmente, el proceso de conteo es un proceso de Poisson y el Corolario 5.1 se reduce al Teorema 5.1 de la Sección 5.2.

Para el caso de un proceso de nacimiento puro no-estacionario, utilizando los Teoremas 5.4 y 5.5 deducimos el siguiente corolario. Considere la función de sobrevivencia:

$$(5.18) \quad \bar{H}(t) = \bar{S}(\Lambda(t))$$

donde $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$ y \bar{S} definida como antes.

Corolario 5.2. *La función de sobrevivencia $\bar{H}(t)$ definida en (5.18) es de clase HNBUE (HNWUE) si*

1. $\Lambda(t)$ es star shaped (anti-star shaped).
2. $\alpha_k \leq (\geq) B_k \alpha_0$.

Demostración. En el caso HNBUE, a partir del Teorema 5.4 tenemos que $\overline{S}(t)$ es HNBUE. Puesto que $\Lambda(t)$ es star shaped podemos aplicar el Teorema 5.3, se obtiene que $\overline{H}(t)$ es HNBUE. El caso HNWUE es análogo. ■

En el siguiente teorema se enuncian condiciones suficientes sobre $\{\overline{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ para que se cumpla (5.15) cuando la sucesión $\{1/\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ es decreciente.

Teorema 5.6. Si la sucesión $\{1/\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ es decreciente y si

$$(5.19) \quad \sum_{j=k}^{\infty} \overline{P}_j \leq B_k \sum_{j=0}^{\infty} \overline{P}_j, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

entonces se cumple (5.15), es decir

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \overline{P}_j \leq B_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \overline{P}_j, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Puesto que $\{1/\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ es decreciente entonces existe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{1}{\lambda}.$$

La condición (5.15) se cumple si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &\leq B_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \overline{P}_j - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \overline{P}_j \\ &= B_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \overline{P}_j - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \overline{P}_j + \left\{ B_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \overline{P}_j - B_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \overline{P}_j \right\} \\ &\quad + \left\{ \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \overline{P}_j - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \overline{P}_j \right\} \\ &= \left\{ B_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \overline{P}_j - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \overline{P}_j \right\} + B_k \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda} \right) \overline{P}_j \\ &\quad - \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda} \right) \overline{P}_j \end{aligned}$$

donde la expresión entre corchetes de la última igualdad es no negativa por (5.19). Entonces resta probar que

$$(5.20) \quad 0 \leq B_k \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda} \right) \bar{P}_j - \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda} \right) \bar{P}_j.$$

Pero tenemos que

$$\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda} \right) \bar{P}_j = \sum_{\nu=k}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{\nu}} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) \sum_{j=k}^{\nu} \bar{P}_j,$$

entonces en (5.20) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq B_k \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{\nu}} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j - \sum_{\nu=k}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{\nu}} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) \sum_{j=k}^{\nu} \bar{P}_j \\ &= \left\{ B_k \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\lambda_{\nu}} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j + B_k \sum_{\nu=k}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{\nu}} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j \right\} \\ &\quad - \sum_{\nu=k}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{\nu}} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) \sum_{j=k}^{\nu} \bar{P}_j \\ &= B_k \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\lambda_{\nu}} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j \\ &\quad + \sum_{\nu=k}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{\nu}} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \right) \left\{ B_k \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j - \sum_{j=k}^{\nu} \bar{P}_j \right\}. \end{aligned}$$

Ya que $\{1/\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ es decreciente, deducimos de esta última expresión que falta probar que el término entre corchetes sea no negativo, es decir,

$$0 \leq B_k \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j - \sum_{j=k}^{\nu} \bar{P}_j.$$

Sea

$$\phi_k(\nu) = B_k \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j - \sum_{j=k}^{\nu} \bar{P}_j.$$

Consideremos la diferencia

$$\begin{aligned}
 \phi_k(\nu) - \phi_k(\nu + 1) &= B_k \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j - \sum_{j=k}^{\nu} \bar{P}_j - \left(B_k \sum_{j=0}^{\nu+1} \bar{P}_j - \sum_{j=k}^{\nu+1} \bar{P}_j \right) \\
 &= \left(\sum_{j=k}^{\nu+1} \bar{P}_j - \sum_{j=k}^{\nu} \bar{P}_j \right) + \left(B_k \sum_{j=0}^{\nu} \bar{P}_j - B_k \sum_{j=0}^{\nu+1} \bar{P}_j \right) \\
 &= \bar{P}_{\nu+1} - B_k \bar{P}_{\nu+1} \\
 &= \bar{P}_{\nu+1}(1 - B_k).
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\phi_k(\nu) - \phi_k(\nu + 1) = \bar{P}_{\nu+1}(1 - B_k) \geq 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Luego, la sucesión $\{\phi_k(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ es decreciente. Así pues

$$\phi_k(\nu) \geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \phi_k(\nu) = B_k \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j - \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j.$$

Pero esto nos remite a la condición (5.19) la cual es no negativa por hipótesis. Entonces $\phi_k(\nu) \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$, y el teorema queda probado. ■

Capítulo 6

Modelos de Daño Acumulado

En este capítulo se estudian algunas relaciones existentes entre la clase de distribuciones HNBUE y los llamados modelos de daño acumulado. Un modelo de daño acumulado es un modelo de choque donde cada choque contribuye con una cantidad aleatoria de daño sobre el objeto. En esta forma, la probabilidad de que el objeto sobreviva a cierto número de choques depende de que el daño acumulado por los choques recibidos supere o no una capacidad de resistencia del objeto preestablecida que puede ser o no aleatoria. Se continúa con el estudio de la clase HNBUE discreta y se analiza su relación con estos modelos.

6.1. Descripción del modelo

Suponga que el i -ésimo choque causa un daño aleatorio al objeto determinado por la variable aleatoria X_i . El daño hacia el objeto es acumulado aditivamente y el objeto sobrevive al k -ésimo choque si

$$X_1 + \cdots + X_k < x,$$

donde el valor fijo x es el umbral de capacidad del objeto o límite de capacidad de resistencia del objeto.

El modelo de daño acumulado más simple es aquél en el que X_1, X_2, \dots son i.i.d. con distribución común K . En este caso, la probabilidad de que el objeto sobreviva a k choques está dada por

$$\bar{P}_k = K^{(k)}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

donde $K^{(k)}(x)$ denota la convolución de K consigo misma k -veces y $K^{(0)}$ denota la distribución degenerada en 0.

Un modelo de daño acumulado más general consiste en suponer que cada choque incrementa su efectividad de causar daño al objeto con respecto al choque anterior. Podemos pues pensar que el objeto va mermando su habilidad de resistencia a los choques aunque, nuevamente, el umbral x de la capacidad de resistencia del objeto es un valor fijo. En este caso, cada X_i tiene una función de distribución K_i , donde $K_i(z)$ es decreciente en i para todo $z \geq 0$. La probabilidad de que el objeto sobreviva a k choques está dada entonces por $\bar{P}_0 = 1$ y por la convolución

$$\bar{P}_k = K_1 * \dots * K_k(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alternativamente, otro modelo de daño acumulado más general que el primero consiste en suponer que el umbral x de capacidad de resistencia del objeto es también aleatorio, esto puede suceder porque en la realidad puede no haber manera de inspeccionar y determinar cual es la capacidad precisa x del objeto y entonces conviene considerar al umbral x como variable aleatoria. Centraremos nuestra atención en este último tipo de modelos.

Supondremos pues que el umbral de capacidad X del objeto es aleatorio con alguna distribución de vida F .

Bajo la suposición anterior, puede suceder que los daños X_1, X_2, \dots ocasionados por los choques sean i.i.d. con distribución en común K , e independientes del umbral de capacidad de resistencia F . En este caso se debe tener $\bar{P}_0 = 1$ y

$$(6.1) \quad \bar{P}_n = \int_0^\infty K^{(n)}(x) dF(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Integrando por partes la integral en (6.1), obtenemos la siguiente expresión de mayor utilidad

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K^{(n)}(x) dF(x) &= K^{(n)}(x)F(x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty k^{(n)}(x)F(x) dx \\ &= 1 - \int_0^\infty k^{(n)}(x)F(x) dx \\ &= \int_0^\infty k^{(n)}(x) dx - \int_0^\infty k^{(n)}(x)F(x) dx = \int_0^\infty k^{(n)}(x)\bar{F}(x) dx, \end{aligned}$$

donde $k^{(n)}$ es la función de densidad de $K^{(n)}$. Por lo tanto,

$$(6.2) \quad \bar{P}_n = \int_0^\infty k^{(n)}(x) \bar{F}(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bajo la misma suposición anterior, puede suceder, aún con mayor generalidad, que los daños ocasionados por los choques no sean idénticamente distribuidos aunque sí sean independientes. Denotemos por K_i la distribución del daño X_i , donde se supondrá que $K_i(z)$ es decreciente en i para todo $z \geq 0$. En este caso se debe tener $\bar{P}_0 = 1$ y

$$(6.3) \quad \bar{P}_n = \int_0^\infty K_1 \cdots * K_n(x) dF(x) = \int_0^\infty k_1 * \cdots * k_n(x) \bar{F}(x) dx$$

para $n = 1, 2, \dots$, donde k_i es la función de densidad de K_i , $\forall i \in \mathbb{N}$.

El resultado principal en esta sección consiste en probar que la sucesión de \bar{P}_k en (6.3) cumple la propiedad HNBUE discreta cuando F es de clase HNBUE y se cuenta con un tipo específico de distribuciones K_i , a saber, que cada K_i es una distribución gama (c_i, λ) , es decir,

$$K_i(x) = \int_0^x \frac{\lambda}{\Gamma(c_i)} (\lambda t)^{c_i-1} e^{-\lambda t} dt, \quad \forall t > 0.$$

Se sabe que la convolución de n distribuciones gama con parámetros $(c_1, \lambda), \dots, (c_n, \lambda)$, es una distribución gama con parámetros (C_n, λ) , donde $C_n = \sum_{j=1}^n c_j$. Por lo tanto, en (6.3) tenemos

$$(6.4) \quad \bar{P}_n = \lambda \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{C_n-1}}{\Gamma(C_n)} e^{-\lambda x} \bar{F}(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos el siguiente teorema, pero antes dos lemas.

Lema 6.1. *Si $k \geq 1$, entonces*

$$\sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} = \int_0^x \frac{\lambda^{k-1} t^{k-2} e^{-\lambda t}}{(k-2)!} dt.$$

Demostración. Recuerde que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$, $\forall \alpha > -1$, y que $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tenemos pues

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{\lambda^{k-1} t^{k-2} e^{-\lambda t}}{(k-2)!} dt &= \int_0^{\lambda x} \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} e^{-y} dy \\
 &= 1 - \int_{\lambda x}^{\infty} \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} e^{-y} dy \\
 &= 1 - \lambda \int_x^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda t} dt \\
 &= 1 - \sum_{j=0}^{k-2} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \\
 &= \sum_{j=k-1}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \\
 &= \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!},
 \end{aligned}$$

donde la primera y la tercera igualdad se obtienen realizando cambios de variable; la segunda, por propiedades de la función gama; la cuarta por el Lema 5.1; la quinta, por propiedades de las densidades de Poisson; y la sexta, por un rearrreglo de los índices. ■

Como consecuencia inmediata de la definición de la función gama tenemos el resultado siguiente.

Lema 6.2. Si $k \geq 2$, entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{k-2}}{(k-2)!} e^{-u} du = 1$$

Teorema 6.1. La sucesión $\{\bar{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en (6.4) es HNBUE discreta si $C_n = n$ y \bar{F} es de clase HNBUE.

Demostración. Bajo la hipótesis que $C_n = n$ en (6.4), entonces

$$\bar{P}_n = \lambda \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \bar{F}(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Debemos probar que

$$\sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j \leq \mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Primero calculemos μ . Recordando que $\bar{P}_0 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \mu &= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} \bar{F}(x) dx \right\} \\
 &= 1 + \lambda \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} \right\} \bar{F}(x) dx \\
 &= 1 + \lambda \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{\nu}}{(\nu)!} \right\} \bar{F}(x) dx \\
 &= 1 + \lambda \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \\
 &= 1 + \lambda \mu_F,
 \end{aligned}$$

por el Teorema de Convergencia Monótona, donde μ_F es la vida media de la distribución F . Para $k \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j &= \sum_{j=k}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} \bar{F}(x) dx \right\} \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda \left\{ \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} \right\} \bar{F}(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda \left\{ \int_0^x \frac{\lambda^{k-1} t^{k-2} e^{-\lambda t}}{(k-2)!} dt \right\} \bar{F}(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-2} e^{-\lambda t}}{(k-2)!} \left\{ \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \right\} dt,
 \end{aligned}$$

por el Teorema de Convergencia Monótona y el Teorema de Fubini, la tercer igualdad se debe al Lema 6.1. Ahora aplicando la hipótesis de que F es HNBUE, se tiene

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-2} e^{-\lambda t}}{(k-2)!} \left\{ \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \right\} dt \\
 &\leq \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-2} e^{-\lambda t}}{(k-2)!} \left\{ \mu_F e^{-t/\mu_F} \right\} dt \\
 &= \mu_F \lambda^k \int_0^{\infty} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} e^{-(1+\lambda\mu_F)t/\mu_F} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu_F \lambda^k \int_0^\infty \frac{\mu_F^{k-2} u^{k-2}}{(1 + \lambda \mu_F)^{k-2} (k-2)!} e^{-u} \frac{\mu_F}{(1 + \lambda \mu_F)} du \\
 &= \frac{\mu_F^k \lambda^k}{(1 + \lambda \mu_F)^{k-1}} \int_0^\infty \frac{u^{k-2}}{(k-2)!} e^{-u} du \\
 &= \frac{\mu_F^k \lambda^k}{(1 + \lambda \mu_F)^{k-1}} \\
 &= \frac{(\mu - 1)^k}{\mu^{k-1}} \\
 &= \mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^k,
 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene por el cambio de variable $u = (1 + \lambda \mu_F)t/\mu_F$ y la cuarta igualdad, por el Lema 6.2. Por lo tanto, $\{\overline{P}_n\}_{n=1}^\infty$ es de clase HNBUE discreta. ■

Invirtiendo las desigualdades, se obtiene un resultado análogo al Teorema 6.1 para el caso HNWUE.

6.2. La clase HNBUE y la transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una variable aleatoria con valores reales no negativos X , con función de distribución F , se define como

$$(6.5) \quad L(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \quad \forall s \geq 0.$$

Integrando por partes (6.5), obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-sx} dF(x) = e^{-sx} F(x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} + s \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx = s \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx.$$

Así pues, tenemos la siguiente representación análoga

$$(6.6) \quad L(s) = s \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx, \quad \forall s \geq 0.$$

Una relación entre la transformada de Laplace L y \overline{F} es la siguiente. Note que $s \int_0^\infty e^{-sx} dx = 1$, luego

$$\begin{aligned}
 1 - L(s) &= s \left[\int_0^\infty e^{-sx} dx - \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx \right] \\
 &= s \int_0^\infty e^{-sx} (1 - F(x)) dx \\
 &= s \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x) dx,
 \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1 - L(s)}{s} = \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x) dx.$$

Derivando con respecto a s , por un resultado sobre derivación de funciones definidas por integrales, se obtiene

$$\frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1 - L(s)}{s} \right) = (-1)^k \int_0^\infty x^k e^{-sx} \bar{F}(x) dx.$$

Se define las sucesiones $\{a_k(s)\}_{k=0}^\infty$ y $\{\alpha_k(s)\}_{k=0}^\infty$, para $s > 0$, como

$$(6.7) \quad a_k(s) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left[\frac{1 - L(s)}{s} \right] = \int_0^\infty \frac{x^k}{k!} e^{-sx} \bar{F}(x) dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

$$(6.8) \quad \alpha_{k+1}(s) = s^{k+1} a_k(s), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

y $\alpha_0(s) = 1$.

Tenemos el resultado siguiente que establece la relación existente entre la propiedad HNBUE de una distribución continua F y su transformada de Laplace.

Teorema 6.2. *Una distribución de vida continua F es HNBUE si y sólo si la sucesión $\{\alpha_k(s)\}_{k=0}^\infty$ es HNBUE discreta para todo $s > 0$.*

Demostración. Probaremos la parte "si". Notemos, por (6.7) y (6.8), que

$$(6.9) \quad \alpha_k(s) = s \int_0^\infty \frac{(sx)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-sx} \bar{F}(x) dx.$$

Realizando la suma de $k = n + 1$ en adelante, por el Teorema de Convergencia Monótona, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(s) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} s \int_0^{\infty} \frac{(sx)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-sx} \bar{F}(x) dx \\ &= s \int_0^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(sx)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-sx} \bar{F}(x) dx \\ &= s \int_0^{\infty} G_n(x) \bar{F}(x) dx, \end{aligned}$$

donde

$$G_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(sx)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-sx}$$

es una función de distribución gama con parámetros (n, s) . Por lo tanto,

$$(6.10) \quad \frac{1}{s} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(s) = \int_0^{\infty} G_n(x) \bar{F}(x) dx.$$

Recuerde que la función característica de G_n es

$$\varphi_n(u) = \left(\frac{s}{s - iu} \right)^n, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

En particular, para $s = n/t$, se debe tener

$$\varphi_n(u) = \left(\frac{n/t}{(n - iut)/t} \right)^n = \left(\frac{n}{n - iut} \right)^n = \left(\frac{n - iut}{n} \right)^{-n} = \left(1 - \frac{iut}{n} \right)^{-n}$$

A continuación vamos a aplicar el Teorema de Continuidad. Primero se calcula el límite de esta sucesión de funciones características. Se tiene

$$\varphi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{iut}{n} \right)^{-n} = e^{iut}$$

Por tanto, la sucesión de distribuciones $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a una distribución límite G cuya función característica es $\varphi(u) = e^{iut}$. G debe ser entonces la distribución siguiente:¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) \stackrel{w}{=} G(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < t, \\ 1 & \text{para } x \geq t. \end{cases}$$

¹Si X es una v.a. tal que $P[X = t] = 1$, entonces $\varphi(u) = E[e^{iuX}] = e^{iut}P[X = t] = e^{iut}$.

Por el Teorema de Continuidad,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} G_n(x) \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} G(x) \bar{F}(x) dx = \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx.$$

Entonces en la ecuación (6.10) obtenemos

$$(6.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(s) = \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx$$

Por hipótesis, $\{\alpha_k(s)\}_{k=0}^{\infty}$ es HNBUe discreta, luego

$$(6.12) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(s) \leq \alpha(s) \left[1 - \frac{1}{\alpha(s)}\right]^{n+1} = (\alpha(s) - 1) \left[1 - \frac{1}{\alpha(s)}\right]^n$$

Donde $\alpha(s)$ es la media asociada a la sucesión de $\{\alpha_k(s)\}_{k=0}^{\infty}$, dada por

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s) = \alpha_0(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(s) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s^k a_{k-1}(s) \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} s^{j+1} a_j(s) \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} s^{j+1} \int_0^{\infty} \frac{x^j}{j!} e^{-sx} \bar{F}(x) dx \\ &= 1 + s \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(sx)^j}{j!} e^{-sx} \bar{F}(x) dx \\ &= 1 + s \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx, \\ &= 1 + s\mu, \end{aligned}$$

por el Teorema de Convergencia Monótona, donde μ es la media de F . Sustituyendo en la ecuación (6.12), obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(s) \leq s\mu \left[1 - \frac{1}{1 + s\mu}\right]^n$$

Por tanto, en (6.11) se tiene

$$\int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left[1 - \frac{1}{1 + s\mu} \right]^n,$$

pero como $s = n/t$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left[1 - \frac{1}{1 + s\mu} \right]^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{n\mu}{t}} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left[1 - \frac{t/\mu}{n + t/\mu} \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n + t/\mu} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + t/\mu}{n} \right]^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{t/\mu}{n} \right]^{-n} = \mu e^{-t/\mu}, \end{aligned}$$

lo cual prueba que F es de clase HNBUE.

Para probar la parte "solo si", observe que si se toma $s = \lambda$ y $C_k = k$, entonces $\alpha_k(s) = \bar{P}_k$ en el Teorema 6.1 y utilizando este resultado se tiene que si F es de clase HNBUE, entonces la sucesión de $\{\alpha_k(s)\}_{k=0}^\infty$ es HNBUE discreta. ■

La aplicación a los modelos de choque es la siguiente. Sean ξ_j con $j = 1, 2, \dots, k$ variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial de parámetro s . Sea g_k que denota la función de densidad de $\sum_{j=1}^k \xi_j$, la cual es gama de parámetros (k, s) . Entonces $\alpha_k(s)$ en (6.9) puede ser reescrito como

$$\alpha_k(s) = \int_0^\infty g_k(x) \bar{F}(x) dx \quad k = 1, 2, \dots$$

Ahora supongamos que un aparato se encuentra sujeto a algún tipo de choques, donde la v.a. ξ_j representa el daño aleatorio ocasionado por el choque número j . Además supongamos que el daño se acumula aditivamente y que el aparato falla hasta que el daño acumulado excede una cantidad aleatoria con función de distribución F . Entonces $\alpha_k(s)$ representa a la probabilidad de que el aparato sobreviva los primeros k choques, en referencia a lo descrito en (6.2).

La diferencia en relación al modelo presentado en la sección anterior radica en que si bien en el primer modelo hay diversas formas de cubrir el requerimiento $C_n = n$ del Teorema 6.1, (por ejemplo un primer choque con distribución gama $(1/2, \lambda)$ y un segundo choque con distribución gama $(3/2, \lambda)$,

entonces $C_2 = 2$), en el modelo de esta sección solo existe una forma, y es mediante choques cuya distribución es exponencial y del mismo parámetro (de esta forma un primer choque con distribución gama $(1, \lambda)$ y un segundo choque con la misma distribución gama $(1, \lambda)$, entonces $C_2 = 2$).

6.3. Un modelo a tiempo discreto

Consideremos una variable aleatoria ξ con distribución geométrica de parámetro p , es decir, ξ toma valores $0, 1, 2, \dots$ con densidad

$$(6.13) \quad P(\xi = j) = p(1 - p)^j, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Sea ξ_ν con $\nu = 1, 2, \dots, k$, variables aleatorias i.i.d. como en (6.13), por el Teorema 1.7 sabemos que la suma de tales variables aleatorias tienen una distribución binomial negativa, con parámetros (k, p) ,

$$P\left(\sum_{\nu=1}^k \xi_\nu = j\right) = \binom{k+j-1}{j} p^k (1-p)^j, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Se define

$$(6.14) \quad \bar{Q}_k(p) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j} p^k q^j \bar{P}_j, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

y $\bar{Q}_0(p) = 1$, donde $q = 1 - p$. Tenemos pues el resultado siguiente.

Teorema 6.3. *Si $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es HNBUE discreta (HNWUE discreta), entonces $\{\bar{Q}_k(p)\}_{k=0}^{\infty}$ es HNBUE discreta (HNWUE discreta) para $0 < p < 1$.*

Demostración. Supongamos que η es una variable aleatoria cuya distribución proviene de una mezcla de distribuciones de Poisson η_x , con parámetros x , con respecto a una distribución Gama $(k, p/(1-p))$, es decir, con densidad

$$g(x) = \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-px/(1-p)}, \quad \forall x > 0.$$

Entonces la densidad de η debe estar dada por

$$\begin{aligned}
 P(\eta = j) &= \int_0^\infty P(\eta_x = j) dG(x) \\
 &= \int_0^\infty P(\eta_x = j) g(x) dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^j}{j!} g(x) dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^j}{j!} \left[\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-px/(1-p)} \right] dx \\
 &= \frac{p^k}{(j!)\Gamma(k)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-p}\right)^k x^{k+j-1} e^{-px/(1-p)} dx \\
 &= \frac{\Gamma(k+j)p^k(1-p)^j}{(j!)\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{1-p}\right)^{k+j}}{\Gamma(k+j)} x^{k+j-1} e^{-px/(1-p)} dx,
 \end{aligned}$$

donde la última integral es igual a 1 por ser una función de densidad gama con parámetros $(k+j, 1/(1-p))$. Así pues,

$$P(\eta = j) = \frac{\Gamma(k+j)}{(j!)\Gamma(k)} p^k (1-p)^j = \binom{k+j-1}{j} p^k q^j, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces η tiene una distribución binomial negativa de parámetros (k, p) . Sustituyendo en (6.14), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_k(p) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty e^{-x} \frac{x^j}{j!} g(x) dx \right] \bar{P}_j \\
 &= \int_0^\infty g(x) \left[\sum_{j=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^j}{j!} \bar{P}_j \right] dx \\
 &= \int_0^\infty g(x) \bar{H}(x) dx,
 \end{aligned}$$

donde

$$\bar{H}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^j}{j!} \bar{P}_j.$$

Aplicando el Teorema 5.1 (modelo de choques de Poisson), resulta que H es de clase HNBUE si $\{\bar{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es de clase HNBUE discreta. Por otra parte, sustituyendo $g(x)$ en la expresión anterior de $\bar{Q}_k(p)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{Q}_k(p) &= \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-px/(1-p)} \bar{H}(x) dx \\ &= \frac{p}{1-p} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{xp}{1-p}\right)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-px/(1-p)} \bar{H}(x) dx.\end{aligned}$$

Notemos que $\bar{Q}_k(p)$ tiene la misma forma que $\alpha_k(s)$ en (6.9) pero tomando $s = p/(1-p)$. Así pues, si H es HNBUE, se sigue del Teorema 6.2 que $\{\bar{Q}_k(p)\}_{k=0}^{\infty}$ es de clase HNBUE discreta. ■

Una situación real donde se aplican de manera natural las variables aleatorias ξ y las ξ_ν es la siguiente. Supongamos que un aparato se encuentra sujeto a choques de dos diferentes tipos, digamos de tipo A y de tipo B. Para cada punto de tiempo discreto un choque de tipo A ocurre con una probabilidad p , mientras un choque de tipo B ocurre con una probabilidad $q = 1 - p$. Sea ξ_ν la variable aleatoria que denota el número de choques de tipo B que ocurren entre los choques $\nu - 1$ y ν de tipo A. Como ξ_ν es una variable aleatoria con distribución geométrica dada por

$$P(\xi_\nu = j) = pq^j, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

entonces $\sum_{\nu=1}^k \xi_\nu$ representa el número de choques de tipo B que ocurren antes del choque número k de tipo A. En este caso, $\sum_{\nu=1}^k \xi_\nu$ tiene distribución binomial negativa dada por

$$P\left(\sum_{\nu=1}^k \xi_\nu = j\right) = \binom{k+j-1}{j} p^k q^j, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Si el aparato tiene una probabilidad \bar{P}_j de sobrevivir los primeros j choques de tipo B, entonces $\bar{Q}_k(p)$ en (6.14) representa la probabilidad de que el aparato sobreviva los primeros k choques de tipo A.

Conclusiones

En la realidad es prácticamente imposible conocer la forma específica de la distribución de vida de diversos componentes u objetos. Por otra parte, es razonable suponer que dicha distribución pudiera pertenecer a alguna de las clases de envejecimiento más comunes, como las clases IFR, NBU o NBUE, aunque esto no siempre es tan claro debido a la rigidez de sus definiciones. Partiendo de la necesidad de tener una clase menos restrictiva, y por ende más amplia que las clases de envejecimiento tradicionales, que incluya estas situaciones se introduce la clase de distribuciones de vida HNBUE.

Los resultados de mayor aplicación que hemos presentado se relacionan con las cotas superior e inferior obtenidas para componentes de clase HNBUE donde casi de la nada es posible saber parte de su comportamiento, de nueva cuenta, debido a la dificultad para conocer sus distribuciones de vida. Así como las cotas obtenidas para la vida media de sistemas en serie y en paralelo cuyas componentes sabemos ó suponemos que tienen la propiedad HNBUE.

El análisis sobre el problema de la preservación de la propiedad HNBUE bajo varias operaciones en Teoría de Fiabilidad, como la formación de sistemas coherentes, la convolución y las mezclas, confirma la pertinencia del modelo desde un punto de vista teórico, pues se demuestra que la clase HNBUE tiene un comportamiento similar a la de otras clases.

Los resultados presentados sobre las relaciones entre los modelos de choque y los modelos de daño acumulado con la propiedad HNBUE incluyen un montón de situaciones reales donde no se tiene idea de cómo los choques afectan realmente el tiempo de vida del objeto. El contar con resultados que concluyan que dicho tiempo de vida pertenece a la clase HNBUE al menos permite predecir el riesgo de fallar que tiene el objeto en algunos intervalos de tiempo mediante el uso de las cotas anteriormente mencionadas.

Bibliografía

- [1] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. To Begin With.
- [2] Block H.W. and Savits T.H. (1978), Shock Models with NBUE Survival, *Journal of Applied Probability*. **15**, 621-628.
- [3] Block H.W. and Savits T.H. (1980), Laplace Transform for Classes of Life Distributions, *The Annals of Probability*. **Vol. 8 No.3**,465-474.
- [4] Clarke L.E. (1975), *Random Variables*, Longman Mathematical Texts.
- [5] Esary J.D., Marshall A.W. and Proschan F. (1973), Shock Models and Wear Processes, *The Annals of Probability*. **Vol. 1 No.4**,627-649.
- [6] Haines A. and Singpurwalla N.D. (1974), Some Contributions to the Stochastic Characterization of Wear, *Reliability and Biometry*, 47-80.
- [7] A.Hammed M.S. and Proschan F. (1973), Nonstationary Shock Models, *Stochastic Processes and their Applications*. **1**, 383-404.
- [8] A.Hammed M.S. and Proschan F. (1975), Shock Models with underlying Birth Process, *Journal of Applied Probability*. **12**, 18-28.
- [9] Hoel P.G., Port S.C. and Stone C.J. (1971), *Introduction to Probability Theory*, Houghton Mifflin Company.
- [10] Karlin S. (1966), *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press.
- [11] Klefsjö B. (1981), HNBUE Survival under Some Shock Models, *Scandinavian Journal of Statistics*. **8**, 39-47.

-
- [12] Klefsjö B. (1981), Survival Under the Pure Birth Shock Model, *Journal of Applied Probability*. **18**, 554-560.
- [13] Klefsjö B. (1982), The HNBUE and HNWUE Classes of Life Distributions, *Naval Research Logistics Quarterly*. **Vol.29 No.2**, 331-344.
- [14] Klefsjö B. (1983), A Useful Ageing Property Based on the Laplace Transform, *Journal of Applied Probability*. **20**, 615-626.
- [15] Marshall A.W. and Proschan F. (1970), Mean Life of Series and Parallel Systems, *Journal of Applied Probability*. **7**, 165-174.
- [16] Marshall A.W. and Proschan F. (1972), Classes of Distributions Applicable in Replacement with Renewal Theory Implications, *In Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, 395-415.
- [17] Medhi J. (1982), *Stochastic Processes*, Halsted Press.
- [18] Mehrotra K.G. (1981), A note on the Mixture of New Worse than Used in Expectation, *Naval Research Logistics Quarterly*. **Vol.28**, 181-184.
- [19] Ross S.M (1983), *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons.
- [20] Shiriyayev A.N. (1984), *Probability*, Springer-Verlag.