INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMÍA
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

DIVERSAS METODOLOGÍAS PARA VALUAR BONOS CUPÓN CERO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS ECONÓMICAS

(ECONOMÍA FINANCIERA)

P R E S E N T A

ANGÉLICA PAREDES GÓMEZ

MÉXICO, D.F. MAYO DE 2010

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En México D.F., siendo las **10:00** horas del día miércoles **9** del mes de **diciembre** del año **2009**, se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la SEPI ESE-IPN, para examinar la tesis de grado titulada:

Diversas metodologias para valuar bonos cupón cero.

ANGÉLICA PAREDES GÓMEZ con registro: | B | 0 | 7 | 1 | 3 | 0 | 1 |

presentada por el alumno (a)

Maestría en Ciencias Económicas

aspirante al Grado de:

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifiestan SU APROBACIÓN DE LA TESIS, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Dr. Francisco Venegas Martínez
(Director de Tesis)

Dr. Gerardo Angeles Castro *Dr. Miguel Flores Ortega*

Dra. Ana Lilia Valderrama Santibañez *M.en C. Héctor Allier Campuzano*

S.E.P.
INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
E.S.E.
SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. Gerardo Angeles Castro

❖ *gmf.*

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En México D. F., siendo las **10:00** horas del día __del mes de **diciembre** del año **2009**, el (la) que suscribe **ANGÉLICA PAREDES GÓMEZ** alumno (a) del Programa de **Maestría en Ciencias Económicas** con número de registro **B071301** adscrito a la **SEPI ESE-IPN,** manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del **Dr. Francisco Venegas Martínez** y cede los derechos del trabajo intitulado **Diversas metodologías para valuar bonos cupón cero,** al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **Av. Volcanes Mz. 63 Lt. 793. Col. Lázaro Cárdenas Tlanepantla, Estado de México. (C.P. 54189)** Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

M.EN C. © ANGÉLICA PAREDES GÓMEZ
Nombre y firma

❖ *gmf.*

Agradecimientos.

A Dios por permitirme
vivir y realizar todos esos
sueños que hasta ahora
he logrado.

A mis padres y a mis
hermanos, por darme ese
gran apoyo incondicional y
por estar siempre a mi
lado.

A Ruth y
Alejandra por su
amistad y ayuda.

Al doctor Francisco
Venegas Martínez
por ser mi director
de tesis

Al Instituto Politécnico
Nacional por otorgarme
la beca y poder continuar
con mi educación.

Índice

Índice de tablas y gráficas.

Glosario.

Activo: Se refiere a un instrumento financiero tal como un bono, una acción, o un derivado.

Activo sin riesgo: Es un instrumento financiero que asegura al propietario una renta antes de su compra.

Activo subyacente: Es un activo que, en los mercados de productos derivados, que representa el objeto de intercambio de un contrato. Es decir, es aquel activo sobre el que se efectúa la negociación de un producto derivado.

Agencia de valores: Sociedad anónima que negocia en los mercados financieros por cuenta de terceros. Sus actividades principales consisten en recibir y ejecutar órdenes de compraventa de inversionistas, gestionar carteras de valores de terceros y actuar como depositarias de valores por cuenta de sus titulares.

Bolsa: Mercado organizado, reconocido por las autoridades financieras, en el que se negocian fundamentalmente títulos de renta variable. En muchos de estos mercados se negocian también instrumentos de renta fija y diversos activos.

Bono: Título de renta fija que emiten gobiernos y empresas para conseguir fondos directamente del mercado. El emisor se compromete a devolver el principal junto con un interés.

Bono convertible: Bono que se pueden canjear por acciones de nueva emisión de la empresa a un precio que ha sido fijado con anterioridad. Algunas entidades ofrecen este tipo de títulos con el fin de pagar intereses más bajos.

Bonos del estado: Títulos del que emiten los Ministerios del Tesoro o de Hacienda a distintitos plazo y con diferentes características: cupón cero y caponados con tasas cupón constante o fija.

Cupón: Proviene de los antiguos títulos físicos de donde había que recortar un cupón para cobrar los dividendos o derechos de suscripción. Hoy en día se denominan así los pagos o intereses que paga un título de renta fija.

Cupón cero: Característica de algunos títulos de renta fija que no pagan intereses durante la vida del título, suelen ser a corto plazo y se negocian a descuento.

Especulación: Comportamiento consistente de algunos agentes en asumir un riesgo superior al corriente con la finalidad de obtener beneficios aprovechando las discrepancias entre los precios actuales y los precios futuros esperados.

Liquidación: Proceso por el cual se hacen efectivas las pérdidas o ganancias resultantes de una inversión.

Nominal: Es el valor que paga un activo en el la fecha de vencimiento. Usualmente no coincide con el valor de mercado.

Renta fija: Conjunto de título cuyos flujos futuros son conocidos con certeza de antemano. Esta rentabilidad es independiente de los resultados obtenidos por la entidad emisora.

Riesgo sistemático: Es el riesgo inherente al propio mercado, que no puede eliminarse mediante diversificación.

Tasa de descuento: Coeficiente utilizado para obtener el valor presente de los flujos futuros.

Tendencia: Dirección que toma un mercado (alcista, bajista o lateral).

Tasa de interés: Precio del dinero. Precio que cobra un acreedor por prestar, y paga un deudor por recibir, una cierta cantidad monetaria durante un determinado periodo de tiempo. Generalmente se expresa en porcentaje y hace referencia a un periodo de tiempo.

Valor futuro: Es la cantidad de dinero que se tendría en una fecha futura si se invirtiese hoy una cantidad y se capitalizase a una tasa de interés.

Valores negociables: Son aquellos derechos que han sido transformados en documentos con el objetivo de facilitar su transmisión, algo muy útil cuando se trata de la propiedad de un bien inmueble, por ejemplo. Los valores mobiliarios tienen la capacidad de ser negociables y suelen estar agrupados en emisiones, los ejemplos más usuales de estos son las obligaciones y las letras de cambio.

Valor presente: También llamado valor actual. Es el valor actual de un flujo futuro, obtenido mediante la aplicación de una tasa de su descuento. En otras palabras, es la cantidad de dinero que se necesitaría invertir hoy para obtener dicho flujo futuro.

VPN (Valor presente neto): Diferencia entre el valor presente de los flujos de fondos que suministrará una inversión y el costo inicial necesario para llevarla a cabo. Se recomienda efectuar la inversión si el VAN es positivo.

Varianza: Es la media aritmética de la suma de los cuadrados de las desviaciones de una variable con respecto a su media.

Vencimiento: Es la fecha de pago de una obligación financiera.

Volumen negociado: Cantidad de títulos contratados en un mercado durante un periodo de tiempo determinado. Es un buen indicador de la actividad en el mercado

Resumen.

Una de las líneas de interés de las finanzas modernas es el estudio del financiamiento por medio del cual las empresas y los gobiernos se hacen de recursos para realizar proyectos de alto impacto económico o social, en el caso de las empresas la necesidad de crecer es imperativa para competir en un entorno dinámico, por lo tanto el costo que paga una empresa por el capital necesario puede ser la diferencia entre el éxito y al fracaso de los proyectos de inversión, el instrumento financiero que mayores beneficios otorga a las empresas es la emisión de deuda cuando su estructura de capital es óptima es por ello que en esta investigación se profundiza en los aspectos teóricos que permiten analizar la dinámica estocástica de la tasa de interés que se conoce como tasa corta.

En este trabajo se revisan los aspectos teóricos del modelo de Merton donde se puntualizan los puntos de interés de la teoría de tasas de interés y los factores de descuento dependiendo del tiempo de vencimiento del instrumento financiero y las consecuencias de los supuestos en que se sustenta el modelo, el análisis se extiende a la aportación del modelo de Vasicek y el efecto que tiene la difusión de la tasa de interés cuando presenta reversión a la media. También se incluye el marco teórico del modelo que desarrollaron Cox, Ingersoll y Ross que es un modelo generalizado del comportamiento de la tasa corta.

Se analiza la estructura temporal de los tipos de interés para explicar el comportamiento de los tipos de interés, como el paso previo a la valoración de los instrumentos de deuda, basados en los enfoques, el de no arbitraje o enfoque de equilibrio en donde se obtiene una ecuación en derivadas parciales y se resuelve sujeta a las correspondientes condiciones de frontera.

En el trabajo se ilustra la evidencia empírica del comportamiento de los modelos en estudio y se destacan sus diferencias.

Abstract.

One of the lines of interest of the modern finances is the study of the financing by means of which the companies and the governments are made of resources to realize projects of high economic or social impact, in the case of the companies the necessity to grow is prevailing to compete in dynamic surroundings, therefore the cost that pays a company by the necessary capital can be the difference between the success and failure of the investment projects, the financial instrument that majors benefits grants to the companies is the debt emission when its structure of capital is optimal is for that reason that in this research is deepened in the theoretical aspects that allow to analyze stochastic dynamics of the interest rate that is known like short rate.

In this work the theoretical aspects of the model of Merton are reviewed where interest rates are emphasized the points of theory of interest rate and the factors of discount following the time of instrument life and the consequences of the assumptions in that the model is sustained, the analysis extends to the contribution of the model of Vasicek and the effect that the diffusion of the interest rate has when it presents/ reversion to the average.

Also the theoretical frame of the model that developed Cox, Ingersoll and Ross are included that is a generalized model of the behavior of the short inters rate. The temporary structure of the types of interest is analyzed to explain the behavior of the types of interest, like the previous step to valuation of the debt instruments, based on the approaches, the one of arbitration or approach of derived balance does not obtain an equation in partial and it is solved holds to the corresponding conditions of border.

In the work the empirical evidence of the behavior of the models in study acquires knowledge and their differences stand out.

Introducción.

En un mundo globalizado la función de las finanzas en las empresas es fundamental para la creación de valor, para que una empresa crezca necesita de recursos que pueden provenir de los accionistas o del mercado de dinero, el instrumento más socorrido por las empresas corresponde a los bonos por que representan un crédito de menor costo, los bonos son instrumentos de deuda, que se pueden negociar en el mercado secundario, por lo tanto quien es propietario del bono tiene el derecho de recibir el valor nominal en la fecha de vencimiento y en su caso los intereses en forma de cupones. El precio del bono depende de la tasa de interés pactada y del riesgo de incumplimiento, mientras mayor es el riesgo crece la posibilidad de que el tenedor no reciba el pago acordado, por lo tanto la tasa de interés del mercado es mayor, por lo tanto la institución que emite el bono, debe ser consciente de su exposición al riesgo para que el bono sea aceptado por el mercado.

El valor de un bono depende de tres variables fundamentales, la primera es la tasa de rendimiento libre de riesgo del mercado que corresponde a la indiferencia a invertir sin riesgos, que corresponde a la tasa de interés de los bonos gubernamentales, la segunda variable corresponde a la tasa de interés correspondiente al riesgo intrínseco de la empresa y su estructura de capital y por último la fecha de término y la estructura de cupones del bono.

Desde el punto de vista financiero un bono es un instrumento de vida finita y de ingreso fijo que puede o no pagar cupones durante su vigencia. El problema clave que se desea estudiar es la forma de determinar el precio justo que se debe pagar por un bono, éste problema se complica cuando se acepta que el comportamiento de la tasa de interés corresponde a una variable aleatoria, por lo que el precio de un bono varía conforme se modifican las condiciones de incertidumbre. El objetivo del trabajo es analizar los modelos estocásticos que permiten determinar el precio del bono, cuando se incorporan las condiciones de incertidumbre. La hipótesis que se debe corroborar es que cuando se incorporan las restricciones del modelo de Cox, Ingersoll y Ross se mejoran los resultados del modelo de

Vasicek y esto se puede observar en forma empírica a partir de los datos históricos del rendimiento de los CETES en México

Esta investigación se encuentra organizado en tres capítulos a los que antecede una introducción que describe las características más relevantes del trabajo, y la metodología utilizada y se describe el objetivo que persigue y la hipótesis que se desea comprobar. En un primer capítulo se desarrolla el marco teórico determinista para la valuación de los instrumentos de renta fija más simples que existen en el mercado, se utiliza el precio del bono y se mide su rendimiento, se analiza la relación que existe entre el precio y la tasa de interés para un bono cupón cero, y se determinan, las ventajas y desventajas del enfoque utilizado.

El segundo capítulo se engloba el marco teórico del enfoque estocástico para la valuación de bonos cupón cero y se analiza el modelo de Cox, Ingersoll y Ross que es un trabajo seminal y tiene un enfoque de ecuaciones diferenciales parciales para determinar resultados adicionales a la valuación los bonos cupón cero, y representa una mejor alternativa al modelo convencional de valuación que propuso Vasicek, al corregir la posibilidad de obtener tasas de interés negativas.

En el tercer capítulo se presentan los resultados de la prueba empírica para la comparación de los modelos de tasa corta de Cox-Ingersoll-Ross, Merton y Vasicek, con información de los rendimientos de los precios de los CETES en el periodo 2007 al 2009, se adiciona la comparación de los resultados. Se adiciona un apartado de conclusiones donde se resumen los principales hallazgos del análisis comparativo destacando ventajas y desventajas observadas al comparar los métodos seleccionados, finalmente a partir de los resultados obtenidos se establecen los alcances y limitaciones para validar la hipótesis planteada y por último se establecen recomendaciones para futuros trabajos.

Capítulo 1: Bonos cupón cero.

1. 1 Introducción

Un bono cupón cero es una promesa de pago (impersonalizada) en la que el emisor se compromete a pagar incondicionalmente una cantidad preestablecida, el valor nominal (o principal), en una fecha futura, la cual será referida como vencimiento del título. El interesado, en adquirir este pagaré (o promesa de un pago en una fecha futura) entrega una cantidad inicial en una fecha previa al vencimiento; la fecha de colocación. En general, la cantidad inicial que se paga por este certificado es menor que la cantidad que se recibe al vencimiento, es decir, se compra a descuento.

Cabe destacar que el propietario de este tipo de instrumentos se encuentra expuesto al riesgo de incumplimiento por parte del emisor. Sin embargo, en todo lo que sigue del presente capítulo se supondrá que todos los bonos son libres de riesgo crédito. Asimismo, si el tenedor de un bono cupón cero requiere liquidez antes del vencimiento y desea vender este certificado, entonces estará sujeto al riesgo de mercado. Por supuesto, si se espera a la fecha de vencimiento para recibir la cantidad prometida, el riesgo de mercado será inexistente.

1.2 Características de los bonos cupón cero

Un bono cupón cero es un instrumento de deuda emitido por un tercero que adquiere la obligación de pago, en una fecha futura predeterminada, hacia sus prestamistas. El inversionista le otorga un préstamo al emisor del bono y dicho inversionista recibe a cambio pagarés o títulos. Una vez cumplido el plazo pactado, el emisor del bono devuelve el monto prestado más una cantidad; los intereses por dicho préstamo.

Las empresas y los gobiernos usualmente emiten bonos cupón cero para financiar sus planes de crecimiento y desarrollo. Cada emisión tiene sus propias condiciones, las cuales se detallan en un documento técnico llamado el “prospecto de la emisión". Allí se establece la moneda, la fecha de vencimiento y la tasa de interés.

En el caso de emisiones de empresas, éstas son llamadas obligaciones negociables, mientras que en el caso de emisiones de algún organismo del estado (usualmente el Ministerio del Tesoro) se refiere a títulos públicos.

De cualquier manera, el inversionista le presta su dinero al emisor a cambio de un bono y cuando se cumpla la fecha de vencimiento, el tenedor del bono recibirá el capital prestado más los intereses. Existen varias clases de bonos. Sus diferencias dependen del emisor, de su estructura, y del mercado donde fueron colocados.[1]

1. Emisor. Los bonos pueden ser emitidos por gobiernos en cuyo caso se llama deuda soberana, por provincias, municipios, u otros entes públicos o por empresas en cuyo caso recibe el nombre de bonos corporativos u obligaciones negociables. Cada emisor está sujeto a un marco regulatorio especial.

2. Estructura de plazos. Tiene que ver con la tasa de interés que paga el bono para diferentes plazos

3. Mercado. Los bonos se pueden emitir en el ámbito nacional o en el mercado internacional. Estos últimos pueden ser emitidos en moneda extranjera y colocados fuera del país emisor.

El valor de un bono se establece según la tasa de rendimiento (o de interés) ofrecida por el emisor, a un plazo y nivel de riesgo (de incumplimiento) determinados. Además de las características propias del bono, influyen diversos factores, como el riesgo país y el riesgo de crédito del emisor.

Evidentemente, el inversionista no tiene que esperar hasta el vencimiento para cobrar, puede decidir vender sus bonos en el mercado a un precio pactado entre comprador y vendedor (las

---

[1] Appleyard R, Dennis Fiel y Alfred j.; 2003, Economía Internacional, Colombia, Mc. Graw Hill, 4e.

libres fuerzas del mercado). Por último es importante destacar que cuando un inversionista selecciona el bono a comprar, debe tener en cuenta su liquidez, es decir, su capacidad de reventa.

Si el inversionista decide vender sus bonos antes del vencimiento, el retorno va a depender de los movimientos de las tasa de interés del mercado entre la fecha en que compró el bono y en la que decide venderlo, es decir, el inversionista está sujeto al riesgo de mercado (pérdidas potenciales por movimientos adversos en las tasas de interés). Si las tasas de interés suben es probable que pierda parte de su inversión inicial, pero si las tasas bajan podrá hacer una ganancia. Esto significa que, en ocasiones, además de cobrar los intereses mientras se mantiene el bono, se puede vender el bono más caro del precio al que se compró.

Cuando se compra un bono a descuento, es muy difícil que el precio del bono mantenga su valor después de ser emitido; dependen de la oferta y la demanda de dichas promesa de pago. La tasa de rendimiento al vencimiento se incrementa al aumentar la diferencia entre el valor nominal y el valor de reventa. Esto es de esperarse ya que, en general, las tasas de interés suben cuando los precios caen. ¿Que pasa si las tasas caen? En este caso, como el precio sube, el bono se apreciará. Pero si el inversionista desea quedarse con el bono hasta su vencimiento, no es necesario que se preocupe por fluctuaciones en su precio. Al final, el bono pagará su valor nominal.[2]

El mayor riesgo de los bonos es que el emisor incumpla con sus pagos. Sin embargo, si el emisor tiene capacidad de pago y el inversionista espera hasta el vencimiento del papel, entonces se recuperará lo prestado más el interés. En contraste, las acciones (títulos de capital) son afectadas por la situación de la empresa, el sector al que pertenecen, el entorno de negocios y el desempeño de la economía. Por esa razón, el inversionista nunca sabe con certeza si recuperará su dinero en el mercado accionario. Por otro lado,

[2] Álvarez González, Alfonso; 2005, Análisis bursátil con fines especulativos: un enfoque técnico moderno, México, LIMUSA Noriega Editores, 1e.

la volatilidad de los precios de los títulos de capital es mucho mayo con auges o caídas importantes.

1.3 Ventajas y limitaciones por invertir en bonos cupón cero.

Existen varios beneficios cuando se invierte en bonos cupón cero, entre los que destacan:

1. Variedad. A la hora de invertir, se puede elegir entre diversos bonos con diferentes vencimientos (cercanos o lejanos) emitidos por gobiernos o empresas.

2. Capacidad de reventa. A diferencia de otros instrumentos, los bonos se pueden vender y comprar diariamente en el mercado secundario, el cual usualmente es líquido y donde se puede encontrar diferentes cotizaciones.

3. Riesgo. A diferencia de las acciones, los bonos otorgan un retorno conocido a la inversión. Cuando la emisión la realiza un gobierno, usualmente el riesgo de incumplimiento es nulo. Sin embargo, si la emisión la realiza una empresa se requiere una sobretasa que cubra el posible riesgo de incumplimiento.

Ahora bien, los principales inconvenientes de este tipo de instrumento son:

1. Procedimiento. En muchas ocasiones, los bonos sólo pueden ser comprados y vendidos por un agente de bolsa.

2. Dificultades para diversificar. Al comprar bonos de un único emisor, se incrementa el nivel de riesgo de la inversión.

1.4 Valuación de bonos cupón cero: marco determinista

En esta sección se presenta el marco teórico determinista para la valuación de los bonos cupón cero (bonos que no pagan cupones). Los bonos cupón cero también son una promesa de pago (impersonalizada) en la que el emisor se compromete a pagar incondicionalmente a una cantidad preestablecida, el valor nominal (o principal), en una fecha futura, la cual será referida como vencimiento del título. Como se mencionó antes, el interesado en adquirir este pagaré entrega una cantidad inicial en una fecha previa al vencimiento; la fecha de colocación. En general, la cantidad inicial que se paga por este certificado es menor que la cantidad que se recibe al vencimiento, es decir se compra a descuento. [3]

1.4.1 Valuación con interés simple

El precio, al tiempo t, de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento T, será denotado por $B(t,T)$. el rendimiento al vencimiento, $L(t,T)$ por unidad de tiempo, se define como:

$$L(t,T) = \frac{1 - B(t,T)}{B(t,T)} \frac{1}{T-t}, \qquad t < T \,. \tag{1}$$

Esto es equivalentemente a escribir:

$$\text{io} \qquad t < T \,. \tag{2}$$

En este último caso $L(t,T)$ puede verse como la tasa (anualizada) de interés de plazo $T - t$ asociada a $B(t,T)$. la diferencia $T - t$, en (2), se interpreta como la proporción de año a la que se aplica la tasa anualizada $L(t,T)$. Por ultimo, observe que en la ecuación (2), la

[3] Venegas Martínez, Francisco; 2006, Riesgos financieros y económicos, Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, México, THOMSON, 1e.

tasa $L(t,T)$ actúa como una tasa de interés simple en el cálculo del valor presente de una unidad monetaria disponible hasta T.

Si se supone que el emisor cumplirá sus obligaciones y el tenedor del bono lo mantiene hasta la fecha de vencimiento, entonces $L(t,T)$ puede verse como una tasa de plazo $T - t$ anualizada y libre de riesgos de incumplimiento y de mercado. Por supuesto, si el tenedor del instrumento tiene necesidad de liquidez y recurre al mercado para vender el título de deuda en una fecha $\tau \in (t,T)$, entonces quedará expuesto al riesgo de mercado. Si muchos tenedores de bonos comparten la necesidad de liquidez y quieren deshacerse de su bono, en el tiempo τ, antes del vencimiento, T, entonces el precio $B(\tau,T)$, disminuirá (existe un exceso de oferta) y la tasa, $L(t,T)$, aumentará ya que

$$L(\tau,T) = \left(\frac{1}{B(\tau,T)} - 1\right)\frac{1}{\tau}, \qquad t \le \tau \le T$$

Recíprocamente, si pocos tenedores de bonos comparten la necesidad de liquidez y quieren mantener su bonos hasta el vencimiento (existe un exceso de demanda), entonces el precio, $B(\tau,T)$,aumentará y la tasa, $L(\tau,T)$ disminuirá.

(títulos de capital) son afectadas por la situación de la empresa, el sector al que pertenecen, el entorno de negocios y el desempeño de la economía. Por esa razón, el inversionista nunca sabe con certeza si recuperará su dinero en el mercado accionario. Por otro lado, la volatilidad de los precios de los títulos de capital es mucho mayo con auges o caídas importantes.[4]

[4] Hernández Hernández, Abraham; 2002, Matemáticas financieras, Teoría y práctica, México, THOMSON, 5e.

1.4.2 Valuación con interés continuamente capitalizable

El precio de un bono cupón cero, $B(t,T)$, que se coloca en t y se paga una unidad monetaria al vencimiento T, con tasa de interés continuamente capitalizable de vencimiento en T, $R(t,T)$, se define como:

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}, \qquad t \le T \,. \tag{3}$$

De esta manera, el rendimiento obtenido en el intervalo $[t,T]$ satisface:

$$R(t,T) = \frac{-\ln B(t,T)}{T-t}, \qquad t \le T \,.$$

En la ecuación (3) se puede justificar como límite de la aplicación $L(t,T)$ en intervalos de tiempo que cada vez se hacen más pequeños. En efecto, suponga primero que $T – t$ = 1 (vencimiento en un año), entonces la aplicación de la formula de interés compuesto en n subintervalos, de igual longitud, conduce a

$$\left(\frac{1}{1+\frac{L(t,T)}{n}} \right)^n \to e^{-L(t,T)}$$

cuando $n \to \infty$. Si el vencimiento $T – t$ es arbitrario y se denota $N = n(T-t)$, se sigue que

$$\left(\frac{1}{1+\frac{L(t,T)}{n}} \right)^{n(T-t)} = \left(\frac{1}{1+\frac{L(t,T)(T-t)}{N}} \right)^N \to e^{-L(t,T)(T-t)} \tag{4}$$

cuando $N \to \infty$. Lo anterior equivale a que se aplique $L(t,T)$ en $\left[t,T\right]$ y, posteriormente, se subdivida éste intervalo en un numero infinito de subintervalos de la misma longitud. Observe también que si se utiliza la aproximación $e^x \approx 1+x$, válida para que x suficientemente pequeña, se tiene que

$$\frac{1}{1+L(t,T)(T-t)} \approx e^{-L(t,T)(T-t)} \tag{5}$$

es válida cuando $L(t,T)(T-t)$ es suficientemente pequeña. Es importante hacer una aclaración esencial con respecto a la fórmula (4). Cuando se aplica interés simple durante $\left[t,T\right]$, se supone que no hay pagos intermedios durante dicho periodo. Mientras que si se utiliza interés continuamente capitalizable, se producen pagos instantáneos que se reinvierten de manera instantánea (cuando $N \to \infty$). Para descartar esta distinción, en lugar de escribir $L(t,T)$ en el exponente e, se utilizará $R(t,T)$ cuando se haga referencia a una tasa de interés continuamente capitalizable

1.4.3 Valuación de bonos con especificación de la tasa corta

Es importante destacar que muchos de los modelos que se encuentran en la literatura para valuar bonos utilizan la especificación exógena sobre el comportamiento de la tasa corta, es decir, especifican exógenamente una ecuación diferencial que determina la dinámica de r_t.

Si se supone que hay un mercado de crédito en el que los agentes pueden prestar y pedir préstamo a la tasa corta r_t, entonces si se presta una unidad monetaria en t, $M_t = 1$, el cambio en la cuenta de este mercado de dinero está dado por

$$\mathrm{d}M_S = M_S r_S \mathrm{d}s, \qquad t < s \ . \tag{6}$$

La cuenta acumulada en éste mercado de dinero hasta el tiempo s, denotada por M_S, es la solución a la ecuación diferencial anterior,

$$M_S = 1 \times \exp\left\{ \int_t^s r_u \, \mathrm{d}u \right\} \tag{7}$$

En otras palabras, la tasa r_S es aplicada en forma continua al principal, o alternativamente,

$$M_S = \exp\left\{ \left(\frac{1}{s-t} \int_t^s r_u \, \mathrm{d}u \right) (s-t) \right\}. \tag{8}$$

Es decir, el promedio de la tasa durante $[t,s]$ es aplicada al principal. Si no existen oportunidades de arbitraje en el mercado de crédito con tasa r_t y el mercado de títulos de deuda de plazo *T*, entonces el precio de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento, está dado por

$$B(t,T) = \exp\left\{ -\int_t^T r_S \, \mathrm{d}s \right\} . \tag{9}$$

Equivalentemente a:

$$B(t,T) = \exp\left\{ -\left(\frac{1}{T-t} \int_t^T r_S \, \mathrm{d}s \right) (T-t) \right\}. \tag{10}$$

De esta manera, el precio del bono $B(t,T)$ se descuenta a la tasa corta promedio durante $[t,T]$. Si se denota

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_S \, \mathrm{d}s .$$

Entonces (10) se puede reescribir como

$$B(t,T) = \exp\{-R(t,T)(T-t)\} \tag{11}$$

donde $B(t,t) = B(T,T) = 1$.

1.5 Precio de un bono cupón cero y medidas de rendimiento

El precio de cualquier bono cupón cero es igual al valor presente de su nominal. La tasa de interés (implícita) o tasa de descuento que se utiliza para calcular el valor presente se puede calcular a partir del precio a descuento del instrumento.[5]

El precio de un bono cupón cero al no pagar intereses estará compuesto por un único flujo de efectivo (representado por la devolución del capital al vencimiento del instrumento) descontado a una tasa apropiada. Esto es:

$$B = \frac{N}{1 + r(T-t)} \tag{12}$$

donde:

B = es el precio del bono cupón cero
N = es el valor nominal del bono
r = es el rendimiento requerido
$T-t$ = es el plazo

[5] Miner, Aranzábal, Javier; 2003, Curso de matemática financiera, Mc. Graw Hill, 1e España.

1.6 Relación entre retorno requerido y precio en un tiempo dado

El precio de un bono (option-free) cambia en dirección opuesta a la tasa de interés (rendimiento) pactada. La razón es porque el precio del bono es el valor presente de los flujos de efectivo. A medida que el retorno se incrementa, el valor presente de los flujos de efectivp disminuye y el precio disminuye también. Si se grafica una relación precio/retorno veremos que la forma es convexa, esto es importante dentro de las propiedades de inversión sobre un bono.[6]

Las razones de las variaciones en los precios de los bonos

1. Un cambio en las tasas de interés de la economía (Si las tasas de interés suben por una política monetaria, entonces los precios de los bonos bajarán y a la inversa)

3. Si los bonos que emite un gobierno para financiarse no cambian pero el spread con respecto a ellos sí, los precios de los bonos que no son emitidos por el gobierno cambiarán.

4. Un cambio en la calidad crediticia del emisor.

[6] Ortega Castro, Alfonso; 2002, Introducción a las finanzas, México, Mc. Graw Hill, 1e.

1.7 Ventajas y desventajas de los diferentes métodos para la valuación de bonos cupón cero.

A continuación se establecen las Ventajas y desventajas de los diferentes métodos para la valuación de bonos cupón cero:

	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Modelo de tasa corta de Merton	- Modela el comportamiento de la tasa corta, - Permite introducir de manera sencilla muchos de los conceptos fundamentales en el estudio de las tasas de interés y la valuación de bonos cupón cero.	- Existe una probabilidad positiva de que la tasa corta tome valores negativos. - La esperanza y la varianza condicionales de la tasa corta crecen sin límite al transcurrir el tiempo.
Modelo de tasa corta de Vasicek	- Este modelo es muy útil debido a sus propiedades para valuar productos derivados de tasas de interés. - Presenta reversión a la media - No existen oportunidades de arbitraje;	- Las tasas de interés, para algunos plazos, pueden ser negativas para algunos valores de los parámetros,
Modelo de tasa corta de Vasicek: enfoque de ecuaciones diferenciales parciales	- Obtiene el precio de un bono, a un plazo dado, como solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica.	- La ecuación ecuación diferencial parcial, de segundo orden y parabólica cuya solución es el precio de un bono cupón cero, no cuenta con derivadas parciales cruzadas
Modelo de tasa corta de Vasicek: enfoque probabilista	- Mediante argumentos de arbitraje se obtiene una ecuación diferencial parcial, cuya solución es el precio de un bono cupón cero	- La curva de rendimiento a distintos plazos no es muy realista, debido a que los datos no están sujetos a la realidad.

Tabla 1: Ventajas y desventajas de los diferentes métodos para la valuación de bonos cupón cero

Capítulo 2: Modelo de tasa corta de CIR.

2.1 Introducción

La Cox-Ingersoll-Ross en el modelo de financiación es un modelo matemático que describe la evolución de los tipos de interés. Es un tipo de "modelo de un factor" (tasa de corto modelo) se describe como los movimientos de los tipos de interés determinados por sólo una fuente de riesgo de mercado. El modelo puede ser utilizado en la valoración de derivados de tipo de interés. Se introdujo en 1985 por John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll y Stephen A. Ross como una extensión del movelo de Vasicek..

El modelo especifica el tipo de interés instantáneo en la siguiente ecuación diferencial estocástica, también llamado el proceso de CIR:

$$\mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t \qquad (13)$$

un proceso de Wiener al azar la elaboración de modelos factor de riesgo de mercado.

La desviación estándar de factor, $\sigma\sqrt{r_t}$ orrige el principal inconveniente de Vasicek del modelo, asegurándose de que la tasa de interés no puede convertirse en negativo. Así, en valores bajos de la tasa de interés, la desviación estándar tiende a convertirse en cero, anulando el efecto de la conmoción al azar en el tipo de interés. En consecuencia, cuando la tasa de interés es cercana a cero, su evolución se convierte en dominado por el factor de deriva, que empuja al alza la tasa (hacia el equilibrio).

Es importante observar que al considerar r_t en el término estocástico, el proceso de la tasa corta deja de tener una distribución normal. De hecho en este caso, la distribución corresponde a una χ^2 no central. Éste proceso presenta reversión a la media como en el modelo de Vasicek, pero la varianza es proporcional a $\sigma^2 r_t$ por unidad de tiempo. Esto significa que conforme la tasa de interés corta aumenta, la desviación estándar aumenta.

2.2 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono.

En cuanto al enfoque de ecuaciones diferenciales parciales, para establecer la ecuación diferencial parcial del comportamiento del precio de un bono cupón cero en el modelo de CIR, se supone que, en un mundo neutral al riesgo, el precio de un bono cupón cero denotado por $B(t,T)$ satisface a ecuación diferencial parcial parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^{\,2}}+a(b-r_t)\frac{\partial B}{\partial r_t}-rB_t=0 \qquad (14)$$

junto con la condición de frontera $B(T,T)=1$. La solución de la ecuación diferencial parcial anterior caracteriza el precio de un bono cupón cero en el modelo CIR. En esta sección se resolverá dicha ecuación diferencial parcial. En vista a la ecuación (14) y dado que no aparecen derivadas parciales cruzadas[7], se puede suponer una solución en variables separables, específicamente:

$$B(t,T)=e^{A(t,T)-r_t D(t,T)}$$

Claramente, $A(T,T)=D(T,T)=0$, ya que el valor nominal del bono está dado por:

$$B(T,T)=e^{A(T,T)-r_T D(T,T)}=1$$

En este caso, se tiene que:

---

[7] Venegas Martínez, Francisco; 2006, Riesgos financieros y económicos, Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, México, THOMSON, 1e.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B,$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = -DB,$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2{}_t} = D^2 B.$$

Si se sustituyen las derivadas parciales anteriores en (14), se obtiene:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t D^2 B - r_t B + (ar_t - ab) DB = 0.$$

Y esto es equivalentemente a:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t D^2 - r_t + (ar_t - ab) D = 0. \qquad (15)$$

Si se deriva (15) con respecto de r_t , se sigue que:

$$-\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 + aD - 1 = 0 \qquad (16)$$

Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left(D^2 + \frac{2aD}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2} \right) \qquad (17)$$

Observe que la ecuación anterior es un de primer orden. A continuación se resuelve (16) separando variables y utilizando fracciones parciales. Suponga que (17) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 (D - x_1)(D + x_2) \; .$$

Si se despeja a $\frac{1}{2}\sigma^2$, se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}D}{(D - x_1)(D + x_2)} = \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{d}t \; . \tag{18}$$

En este caso se encuentra que

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \tag{19}$$

y

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}. \tag{20}$$

En efecto, observe primero que:

$$\begin{aligned} &(D - x_1)(D + x_2) = D^2 + Dx_2 - Dx_1 - x_1x_2 \\ &= D^2 + D(x_2 - x_1) - x_1x_2 \end{aligned}$$

En virtud (18) se deben cumplir, simultáneamente, las siguientes dos condiciones:

$$x_1 x_2 = \frac{2}{\sigma^2}$$

y

$$x_1 - x_2 = \frac{2a}{\sigma^2} \tag{21}$$

Se observa en (21) que $x_1 x_2 > 0$, es decir, x_1 y x_2 tienen el mismo signo. Así mismo, de (19) y (20), se sigue que x_1 satisface la siguiente ecuación cuadrática:

$$x_1^2 + \frac{2a}{\sigma^2} x_1 - \frac{2}{\sigma^2} = 0$$

Las raíces están dadas por:

$$x_1 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

En consecuencia, se tiene que:

$$x_2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Dado que x_1 y x_2 deben tener el mismo signo, existen dos posibilidades:

$$\chi_1 : \begin{cases} x_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \\ x_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \end{cases}$$

cuando x_1 y x_2 son ambos positivos, o

$$\chi_2 : \begin{cases} x_1 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \\ x_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \end{cases}$$

cuando x_1 y x_2 son ambos negativos. En lo que sigue se considera el par χ_1. Así pues, con base en (18), se tiene que:

$$\int_{D(T,T)=0}^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}u}{(u - x_1)(u + x_2)} = \int_T^t q\mathrm{d}u = -q(T - t), \tag{22}$$

donde $q = \frac{1}{2}\sigma^2$. Observe que ahora que el integrando se puede expresar en términos de fracciones parciales como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(u - x_1)(u + x_2)} &= \frac{C_1}{u - x_1} + \frac{C_2}{u + x_2} \\ &= \frac{C_1(u + x_2) + C_2(u - x_1)}{(u - x_1)(u + x_2)} \\ &= \frac{(C_1 + C_2)u + C_1x_2 - C_2x_1}{(u - x_1)(u + x_2)}, \end{aligned}$$

Lo cual implica que $C_1 = -C_2$ y $C_1x_2 - C_2x_1 = 1$. Consecuentemente tenemos que:

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}.$$

Por lo tanto, la integral se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}u}{(u - x_1)(u + x_2)} &= \frac{1}{x_1 + x_2} \int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}u}{u - x_1} \\
&- \frac{1}{x_1 + x_2} \int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}u}{u + x_2} \\
&= \frac{1}{x_1 + x_2} \left[(\ln(x_1 - D(t,T)) - \ln(x_1) \right] \\
&- \frac{1}{x_1 + x_2} \left[(\ln(x_2 - D(t,T)) - \ln(x_2) \right] \\
&= -\frac{1}{x_1 + x_2} \ln\left(1 - \frac{D(t,T)}{x_1}\right) \\
&- \frac{1}{x_1 + x_2} \ln\left(1 + \frac{D(t,T)}{x_2}\right) \\
&= \frac{1}{x_1 + x_2} \ln\left[\left(1 - \frac{D(t,T)}{x_1}\right) \middle/ \left(1 + \frac{D(t,T)}{x_2}\right) \right]
\end{aligned}$$

donde se ha supuesto que $x_1 > D(t,T)$ y $D(t,T) > 0$. Si la solución $D(t,T)$ no satisface las condiciones anteriores, junto con $D(T,T) = 0$, entonces se deben modificar los supuestos y repetir todo el análisis subsecuentemente hasta que los supuestos sean congruentes con la solución. Así pues, la ecuación anterior produce:

$$\left(1+\frac{D(t,T)}{x_2}\right)=\left(1-\frac{D(t,T)}{x_1}\right)e^{(x_1+x_2)q(T-t)}.$$

lo cual conduce a:

$$x_1x_2 + x_1D(t,T) = ((x_1x_2 - x_2D(t,T))e^{(x_1+x_2)q(T-t)} \tag{23}$$

ó

$$D(t,T) = \frac{x_1x_2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1)}{x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1} > 0 \tag{24}$$

Claramente, $D(t,T) < x_1$ si y sólo si:

$$\frac{x_1x_2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1)}{x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1} < x_1$$

si y sólo si:

$$x_1x_2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} < x_1x_2 + x_1x_2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1{}^2.$$

Por lo que $\ln\left(\left|D(t,T)-x_1\right|\right)=\ln\left(x_1 - D(t,T)\right)$. Ahora bien, dado que $x_1x_2 = 1/q$, la función $D(t,T)$ se puede reescribir como:

$$D(t,T) = \frac{e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1}{qx_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + qx_1}.$$

Equivalentemente

$$D(t,T)=\frac{2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)}-1)}{2qx_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)}-1+2q(x_1+x_2)}\ .$$

Por lo tanto,

$$D(t,T)=\frac{2(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)}-1)}{\left(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}\right)(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)}-1)+2q(x_1+x_2)}$$

Por otro lado, la sustitución de la expresión anterior en la ecuación (15) produce:

$$\frac{\partial A}{\partial t}=abD\ . \tag{25}$$

Esta ecuación tiene como solución

$$A(t,T)-A(T,T)=abx_1x_2\int_T^t\frac{(e^{(x_1+x_2)q(T-s)}-1}{x_2\left((e^{(x_1+x_2)q(T-s)}-1\right)+x_1+x_2}\mathrm{d}s$$

Sea

$$\upsilon_s=e^{(x_1+x_2)q(T-s)}-1,$$

entonces

$$d\upsilon_s = -(x_1 + x_2)q \; e^{(x_1+x_2)q(T-s)} ds = -(x_1 + x_2)q(\upsilon + 1) ds \,,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= -abx_1x_2 \int_0^{\upsilon_t} \left(\frac{\upsilon_s}{x_2\upsilon_s + x_1 + x_2} \right) \left(\frac{1}{(x_1 + x_2)q(\upsilon_s + 1)} \right) d\upsilon_s \\
&= -\frac{abx_1x_2}{(x_1 + x_2)q} \int_0^{\upsilon_t} \frac{\upsilon_s}{\left[x_2\upsilon_s + x_1 + x_2 \right](\upsilon_s + 1)} d\upsilon_s \\
&= -\frac{abx_1}{(x_1 + x_2)q} \int_0^{\upsilon_t} \frac{\upsilon_s}{\left[\upsilon_s + 1 + x_1 / x_2 \right](\upsilon_s + 1)} d\upsilon_s
\end{aligned}$$

Defina, por el momento, $\alpha = 1 + (x_1 / x_2)$ y $\beta = 1$. Considere la integral en la ecuación anterior y su solución por fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\upsilon_t} \frac{\upsilon}{(\upsilon + \alpha)(\upsilon + \beta)} d\upsilon &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \int_0^{\upsilon_t} \frac{d\upsilon}{\upsilon + \alpha} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \int_0^{\upsilon_t} \frac{d\upsilon}{\upsilon + \beta} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \ln(\upsilon + \alpha) \Big|_0^{\upsilon_t} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \ln(\upsilon + \beta) \Big|_0^{\upsilon_t} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \ln\left(\frac{\upsilon_t + \alpha}{\alpha} \right) - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \ln(\upsilon_t + \beta) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha \ln\left(\frac{\upsilon_t + \alpha}{\alpha} \right) - \beta \ln(\upsilon_t + \beta) \right]
\end{aligned}$$

Por lo anterior, la función $A(t,T)$ satisface

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= \frac{abx_1x_2}{(x_1+x_2)q}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left[-\frac{x_1+x_2}{x_2}\ln\left(\frac{\upsilon_t+1+(x_1/x_2)}{1+(x_1/x_2)}\right)+\ln(\upsilon_t+1)\right] \\
&= \frac{ab}{q}\left[-\ln\left(\frac{x_2\upsilon_t+x_1+x_2}{x_1+x_2}\right)+\frac{x_2}{x_1+x_2}\ln(\upsilon_t+1)\right] \\
&= \frac{2ab}{\sigma^2}\left[-\ln\left(\frac{x_2\upsilon_t+x_1+x_2}{x_1+x_2}\right)+\ln\left[(\upsilon_t+1)^{x_2/x_1+x_2}\right]\right] \\
&= \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left[\frac{(x_1+x_2)(\upsilon_t+1)^{x_2/x_1+x_2}}{x_2\upsilon_t+x_1+x_2}\right] \\
&= \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left[\frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}\,e^{\left(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}\,(T-t)/2\right)}}{\left(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}\right)\left(e^{a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}\,(T-t)}-1\right)+2\sqrt{a^2+2\sigma^2}}\right]
\end{aligned}
$$

ó

$$
A(t,T) = \ln\left[\frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}\,e^{\left(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}\,(T-t)/2\right)}}{\left(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}\right)\left(e^{a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}\,(T-t)}-1\right)+2\sqrt{a^2+2\sigma^2}}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \qquad (27)
$$

Vale la pena señalar que la selección de un candidato de la forma $B(t,T)=e^{A(t,T)-r_tD(t,T)}$ ha permitido transformar la ecuación (11) en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden definido por (13) y (26)

Para el precio de un bono cupón cero con el modelo de CIR en términos de funciones trigonométricas hiperbólicas, es muy frecuente encontrar en la literatura expresiones equivalentes a $D(t,T)$ en (25) y a $A(t,T)$, en (27). Observe que si se definen

$$
\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+2\sigma^2} \quad \text{y} \quad \tau = T-t
$$

y se utilizan las identidades

$$\operatorname{senh}(\gamma\tau) = \frac{e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}}{2}$$

y

$$\cosh(\gamma\tau) = \frac{e^{\gamma\tau} + e^{-\gamma\tau}}{2},$$

entonces $D(t,T)$ y $A(t,T)$ pueden escribirse en una forma alternativa como:

$$\begin{aligned} D(t,t+\tau) &= \frac{\operatorname{senh}(\gamma\tau)}{\gamma\cosh(\gamma\tau) + \frac{1}{2}a\operatorname{senh}(\gamma\tau)} \\ A(t,T) &= \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left[\frac{\gamma e^{\frac{1}{2}a\tau}}{\gamma\cosh(\gamma\tau) + \frac{1}{2}a\operatorname{senh}(\gamma\tau)}\right] \end{aligned} \tag{28}$$

En cuanto a la curva de rendimiento del modelo CIR es posible obtener curvas de rendimiento con pendiente positiva, con pendiente negativa o con jorobas. La curva de rendimiento del modelo CIR se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} R(t,T) &= -\frac{\ln B(t,T)}{T-t} \\ &= \frac{r_t D(t,T) - A(t,T)}{T-t} \end{aligned}$$

la cual es una función lineal de r_t. En este caso, se puede demostrar que:

$$R(t,\infty) \equiv \lim_{T\to\infty} R(t,T) = \frac{2ab}{a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}}.$$

Al hacer un cambio en la variable en el modelo CIR para obtener volatilidad constante, lo haremos a través de una transformación al modelo CIR en otra ecuación diferencial estocástica con volatilidad constante. Si se define $y_t \equiv y(r_t) = 2\sqrt{r_t}$, se tiene que

$$\frac{\partial y_t}{\partial r_t} = \frac{1}{\sqrt{r_t}} = \frac{2}{y_t},$$
$$\frac{\partial^2 y_t}{\partial r_t^2} = \frac{1}{2\sqrt{r_t}} = \frac{1}{r_t y_t}.$$

Una aplicación simple del lema de Itô conduce a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y_t &= \left(\frac{\partial y_t}{\partial r_t} a(b-r_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y_t}{\partial r_t^2}\sigma^2 r_t\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial y_t}{\partial r_t}\sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}W_t \\
&= \left[\frac{2}{y_t} a\left(b - \frac{y_t^2}{4}\right) - \frac{1}{2r_t y_t}\sigma^2 r_t\right]\mathrm{d}t + \frac{2}{y_t}\sigma\sqrt{r_{tt}}\mathrm{d}W \\
&= \left[\left(2ab - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{y_t} - \frac{a}{2}y_t\right]\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t
\end{aligned}$$

2.3 Ventajas y desventajas del modelo de CIR.

Varias ventajas sobre el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) se discuten en el presente capítulo. En particular se muestra que la tasa corta del modelo CIR sigue una distribución χ^2 con parámetro de no centralidad. Se recuerda que en este modelo la dinámica de la tasa de interés corta es conocida por la ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$\mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}W_t$$

donde $a, b, \sigma, r_0 > 0$ y $\{W_t\}_{t>0}$ es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad (Ω, F, IP).

Para poder determinar la distribución de la tasa corta en el modelo CIR. Considere el proceso de Ornstein-Uhlenbeck

$$\mathrm{d}r_t = -ay_t\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}U_t$$

donde $a, b, \sigma, r_0 > 0$ y $\{U_t\}_{t>0}$ es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad (Ω, F, IP). Por lo tanto, y_t se distribuye normal con media y varianza (condicionales)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[y_t \middle| y_0 \right] = y_0 e^{-at} \\
&\mathrm{Var}\left[y_t \middle| y_0 \right] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)}\mathrm{d}s = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a})
\end{aligned}$$

Observe también que una simple aplicación del lema de Itô a $x_t = y_t^2$ conduce a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_t &= \left(-a\frac{\partial x_t}{\partial y_t} y_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 x_t}{\partial {y_t}^2} \right)\mathrm{d}t + \frac{\partial x_t}{\partial y_t}\sigma\mathrm{d}U_t \\
&= 2y_t(-ay_t\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}U_t) + \sigma^2\mathrm{d}t \\
&= 2y_t\mathrm{d}y_t + \sigma^2\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Suponga ahora que se tiene $U_{1t}, U_{2t}, \ldots U_{nt}$ son movimientos brownianos independientes definidos sobre (Ω, F, IP) y defina los siguientes n procesos Ornstein-Uhlenbeck:

$$\mathrm{d}y_{kt} = -\frac{1}{2} a y_{kt} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \sigma \mathrm{d}U_{kt} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

En cuyo caso se tiene que:

$$y_{kt} = e^{-at/2} \left(y_{k0} + \frac{1}{2} \sigma \int_0^t e^{as/2} dU_{ks} \right) \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

unto con

$$\mathrm{E}\left[y_{kt} \middle| y_{k0} \right] = y_{k0} e^{-at/2} = \mu_{k,t}$$

y

$$\mathrm{Var}\left[y_{kt} \middle| y_{k0} \right] = \frac{\sigma^2}{4} \int_0^t e^{-a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-at}) \equiv v_t^2 \ .$$

Considere ahora el proceso

$$r_t = \sum_{k=1}^{n} y_{kt}^2 \, ,$$

entonces,

$$\frac{r_t}{v_t^2} \approx \chi^2(n, \delta_t),$$

con parámetro de no centralidad

$$\delta_t = \frac{1}{v_t^2}\sum_{k=1}^{n}\mu_{k,t}^2$$

Es decir, r_t / v_t^2 sigue una distribución χ^2 no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad δ_t.

En ésta sección se muestra que la tasa corta del modelo CIR sigue una distribución Ji cuadrada no central. Observe primero que a partir de las ecuaciones anteriores se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r_t &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_{kt}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}2y_{kt}\left(-a\frac{1}{2}y_{kt}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma\mathrm{d}U_{kt}\right) + \frac{n\sigma^2}{4}\mathrm{d}t \\
&= -ar_t\mathrm{d}t + \sigma\sum_{k=1}^{n}y_{kt}\mathrm{d}U_{kt} + \frac{n\sigma^2}{4}\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{n\sigma^2}{4} - ar_t\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{kt}\mathrm{d}U_{kt}}{\sqrt{r_t}}.
\end{aligned}$$

Si se define

$$\mathrm{d}W_t \equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{y_{kt}\mathrm{d}U_{kt}}{\sqrt{r_t}},$$

claramente, W_t es una martingala, pues no tiene tendencia. Si se define

$$V_t = W_t^2$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V_t &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial W_t}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{kt}^2}{r_t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V_t}{\partial W_t}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{kt}\mathrm{d}U_{kt}}{\sqrt{r_t}} \\
&= \frac{1}{r_t}\sum_{k=1}^{n} y_{kt}^2\mathrm{d}t + 2W_t\mathrm{d}W_t \\
&= \mathrm{d}t + 2W_t\mathrm{d}W_t
\end{aligned}
$$

2.4 Aplicación del modelo de CIR

En esta sección se aplica la metodología de Cox, Ingersoll y Ross. La tasa corta se asoció con la tasa de interés de CETES de plazo 28 días. Se tomaron datos 14/10/09 al 19/06/09 para calcular el precio del bono

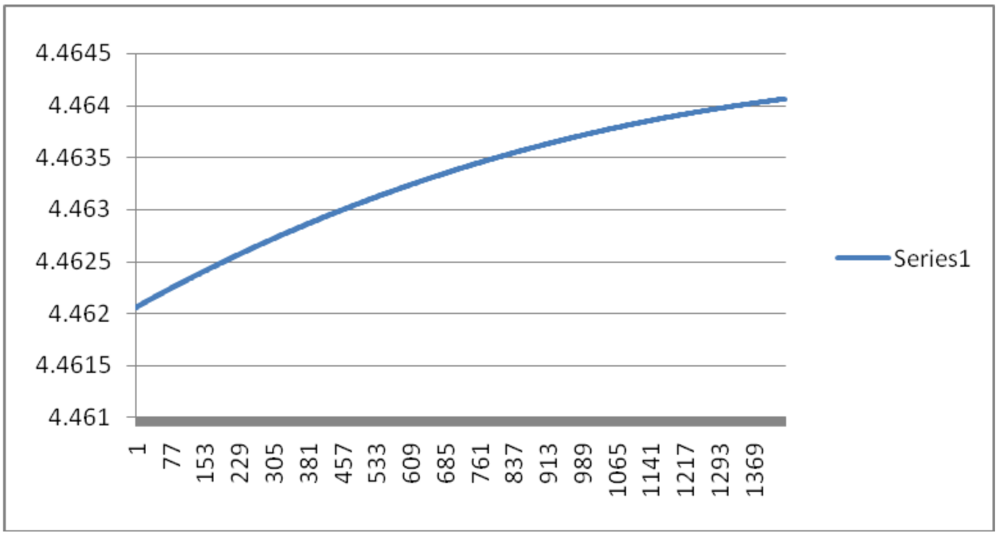
$$B(t,T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)}$$

donde son soluciones de (16) y (25). La estructura de plazos de la tasa de interés se calcula mediante

$$R(t,T) = \frac{r_t D(t,T) - A(t,T)}{T - t}$$

y se muestra en la siguiente gráfica. La estimación de los parámetros se muestra en el cuadro debajo de la gráfica 1:

GRÁFICA 1: ESTRUCTURA DE PLAZOS DE LA TASA DE INTERÉS



Fuente: Elaboración propia.

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*
Regresión	1	0.55905212	0.55905212	1037.560433
Residuos	80	0.04310512	0.00053881	
Total	81	0.60215725		

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Intercepción	0.32801971	0.13056915	2.51222977	0.014008255
Variable X 1	0.92687699	0.028775	32.2111849	1.4372E-47
	a=1-B1	**0.07312301**		
	b=B0/a	**4.48586147**		

Tabla 2: Análisis de la varianza de la estructura de plazos de la tasa de interés.

Capítulo 3: Análisis comparativo de modelos de tasas.

3.1 Introducción.

Robert Merton, economista estadounidense, premio Nobel de Ciencias Económicas en 1997, compartido con Myron S. Scholes y también junto con el economista estadounidense Fischer Black, Merton ideó una fórmula que determinaba el auténtico valor de los valores financieros (bonos, acciones, futuros). Desde mediados de la década de 1970, los mercados financieros y los bancos de todo el mundo han utilizado esta fórmula para calcular el riesgo que entrañan algunas inversiones, negocios y contratos.

Nacido en Nueva York, era hijo de Robert K. Merton, reconocido como uno de los más influyentes sociólogos estadounidenses de finales del siglo XX. Estudió Matemáticas en la Universidad de Columbia, centro por el cual se licenció en 1966. Un año después realizó un curso de posgrado de Matemática Aplicada en el Instituto Tecnológico de California. Se doctoró en Economía por el Instituto de Tecnología de Massachusetts en 1970 y fue profesor de Economía allí desde ese mismo año hasta 1988. En 1989 se incorporó a la Universidad de Harvard. En 1990 publicó *Continuous-Time Finance* (*Finanzas en tiempo continuo*), un libro que incluye algunos de sus ensayos más influyentes.

Comenzó sus más importantes investigaciones, relativas al análisis del tiempo continuo, a finales de la década de los 60´s. Dicha forma de análisis estudiaba las transacciones económicas individuales como parte de cadenas de transacciones más grandes y cercanas a la realidad que las representaciones efectuadas por modelos anteriores. En 1973 aplicó con éxito el análisis del tiempo continuo al modelo que fija el precio de los bienes de capital, que ilustra la relación entre el riesgo y el beneficio de las inversiones en seguros y bienes. También utilizó el análisis del tiempo continuo para determinar el valor de los derivados, cuestión que se había convertido en un problema para los economistas desde 1900. Los valores financieros, como acciones y futuros, son instrumentos financieros negociables cuyo valor se basa en el de los bienes que representan. Cuando se paga por los valores su precio real, los inversores pueden conocer el riesgo y el beneficio potencial que tienen sus inversiones. En 1973 Scholes y Black consultaron con Merton para desarrollar una fórmula que evaluara las acciones de capital. La que consiguieron fue denominada “fórmula Black-Scholes”. A finales de ese mismo año, Merton publicó un estudio elaborado con los detalles de la fórmula. En 1977 desarrolló otra aplicación de la fórmula y descubrió que podía utilizarla para establecer el valor de muchos otros contratos económicos y financieros, como las pólizas de seguros. Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel de Ciencias Económicas por su trabajo sobre los valores.

3.1 Modelo de valuación de tasa corta de bonos de Merton.

En 1973,Merton, en su artículo "Theory of Rational Option Pricing", propuso uno de los primeros modelos para explicar la dinámica estocástica de la tasa de interés instantánea, también llamada tasa corta. En esta nota se encuentran las bases de la teoría moderna de tasas de interés en tiempo continuo, la cual se fundamenta en el movimiento browniano. El trabajo de Merton es uno de los artículos más fascinantes sobre matemáticas financieras que deben ser leídos con gran atención en todos sus detalles, ya que en ellos se guardan muchos de los puntos finos de la teoría de tasas de interés en tiempo continuo. Cuatro años después, en 1977 aparece la segunda contribución más importante a esta teoría el llamado modelo de Vasicek, el cual se revisará en detalle en un capítulo posterior.

A partir del comportamiento del promedio de la tasa corta, en el modelo de Merton, se calculan los factores de descuento para valuar un bono cupón cero con diferentes vencimientos, de acuerdo con alguna hipótesis sobre las expectativas de los agentes en el proceso de valuación. Este primer intento de modelar el comportamiento de la tasa corta para valuar un bono cuenta con varias limitaciones. entre las que destacan: 1) existe una probabilidad positiva de que la tasa corta tome valores negativos: 2) no presenta reversión a la media, es decir, no existe un mecanismo que obligue a la tasa corta a regresar a un nivel de largo plazo conforme el tiempo transcurre; 3) la esperanza y la varianza condicionales de la tasa corta crecen sin límite al transcurrir el tiempo; y 4) la curva de rendimiento y la tasa forward decrecen sin cota conforme el tiempo aumenta ¿Cuál es entonces el beneficio o ventaja de estudiar este modelo? A pesar de sus limitaciones, el modelo de Merton permite introducir de manera sencilla muchos de los conceptos fundamentales en el estudio de las tasas de interés y la valuación de bonos cupón cero. En capítulos posteriores se discutirán varios modelos más realistas que en esencia corrigen las limitaciones antes mencionadas.

3.1.1 Dinámica estocástica de la tasa corta.

Considere un movimiento browniano $(W_t)_{t\geq 0}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, F, (F_t)_{t\in[0,T]}, \mathrm{IP})$ Como siempre, F_t es toda la información relevante disponible en el tiempo t. Suponga que el comportamiento de la tasa corta es conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = bdt + \sigma dW_t \tag{29}$$

Donde b y σ son cantidades positivas conocidas, entonces:

$$r_s = r_t + b(s-t) + \sigma\int_t^s dW_u, \quad s > t \tag{30}$$

Claramente r_t se distribuye normalmente con media (condicional)

$$E[r_s | F_t] = r_t + b(s-t) \tag{31}$$

Y varianza (condicional)

$$Var[r_s | F_t] = \sigma^2 (s-t) \tag{32}$$

Ya que $\int_t^s dW_u = W_s - W_t, E[W_s - W_t | F_t] = 0$ y $Var[W_s - W_t | F_t] = s - t$ observe también que a partir de (31), se tiene que si s>t,

$$E[r_s - b_s | F_t] = r_t - b_{t.}$$

En otras palabras, la tasa corta menos su tendencia es una martingala. En palabras más simples, el mejor pronóstico de $r_s - bs$, dada la información disponible hasta el tiempo $s > t$, es $r_t - bt$ Por ultimo note que $E[r_s | F_t]$ y $Var[r_t | F_t]$ crecen sin cota conforme s aumenta.

3.1.2 Determinación del precio de un bono cupón cero.

En esta sección se determina mediante el enfoque probabilista, el precio de un bono cupón cero asociado al modelo de tasa corta de Merton. El precio de un bono cupón cero que se emite en *t* y que paga una unidad monetaria en el tiempo T está dotado por:

$$B(t,T) = E\left\{ \exp\left(-\int_t^T r_s ds \right) \middle| F_t \right\} \tag{33}$$

Cuando sea necesario enfatizar la dependencia del precio del bono sobre la tasa de interés se utilizará la notación alternativa B= B (r_t, t;T). Considere, primero, la suma de las tasas cortas instantáneas durante [t, T]

$$I(t,T) = \int_t^T r_s ds$$

Y observe que, a partir de (30),

$$I(t,T) = r_t(T-t) + \frac{1}{2} b(T-t)^2 + \sigma \int_t^T \int_t^s dW_u ds$$

$$= r_t(T-t) + \frac{1}{2} b(T-t)^2 + \sigma \int_t^T (W_s - W_t) ds$$

$$= r_t(T-t) + \frac{1}{2} b(T-t)^2 + \sigma \int_t^T \left(W_s ds - W_t(T-t) \right) \tag{34}$$

Al integrar por partes la última integral de (33), se tiene que:

$$\int_t^T W_s ds = TW_T - tW_t - \int_t^T s dW_s \tag{35}$$

Por lo tanto, después de sustituir (34) y (33), se sigue que,

$$I(t,T) = r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma\left(TW_T - tW_t - \int_t^T sdW_s - W_t(T-t)\right)$$

$$= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma\left(TW_T - tW_t - \int_t^T sdW_s\right)$$

$$= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma\left(T\int_t^T dW_s - \int_t^T sdW_s\right)$$

$$= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma\left(\int_t^T (T-s)dW_s\right) \tag{36}$$

En consecuencia, $I(t,T) = \int_t^T r_s ds$ es normal con media y varianza

$$E\left[I(t,T)\middle| F_t\right] = r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 \tag{37}$$

y

$$Var\left[I(t,T)\middle| F_t\right] = \sigma^2\int_t^T (T-s)^2 ds = \frac{1}{3}\sigma^2(T-t)^3 \tag{38}$$

Por lo tanto podemos representar el precio de un bono cupón cero con la siguiente ecuación:

$$B(r_t, t; T) = \exp\left\{-r_t(T-t) - \frac{b}{2}(T-t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right\} \tag{39}$$

3.1.3Determinación del precio de un bono mediante ecuaciones diferenciales parciales.

En esta sección bajo el supuesto de tasa corta neutral al riesgo, se obtiene el precio del bono cupón cero mediante la solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica. Así pues, bajo el supuesto de tasa corta neutral al riesgo se tiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + b\frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0 \tag{40}$$

La condición final corresponde al pago en el vencimiento, $B(r_t, T; T) = 1$. Las condiciones de frontera dependen de b, σ y r_t.

Dado que la expresión anterior no cuenta con derivadas parciales cruzadas, se supone una solución en variables separables.

$$B = (r_t, t; T) = e^{A(t,T) - r_t(T-t)} \tag{41}$$

Observe que $A(T,T) = 0$. Al derivar parcialmente B en (40) con respecto de t y r_t, se sigue que

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} + r_t\right)B$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = -(T-t)B,$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = (T-t)^2 B.$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (39), se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)^2 \tag{42}$$

3.2 Modelo de tasa corta de Vacisek.

Existe en la literatura varios modelos estocásticos de tasas de interés. En particular, en esta sección nos concentramos en el modelo de Vasicek (1977). Éste modelo de equilibrio general es muy útil debido a sus propiedades para valuar productos derivados de tasas de interés. El modelo presenta reversión de la media a un valor constante lo cual es una propiedad deseable en el análisis de la dinámica de la tasa de interés. Específicamente el modelo de Vasicek tiene la forma:

$$dr_t = \lambda(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{43}$$

En esta sección se lleva a cabo una aplicación del modelo de Vasicek. Asimismo, se muestra como los parámetros pueden ser estimados utilizando un modelo de regresión lineal simple con el supuesto estándar de errores normales no correlacionados, o bien con un proceso autorregresivos de orden uno con tendencia.

Para fines prácticos, el modelo de Vasicek puede plantearse en términos discretos como una ecuación estocástica en diferencias. Si se escribe $\beta_0 = ab$ y $\beta_1 = 1 - a,$ una versión discreta es:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{44}$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza σ^2. La media (incondicional) de r_t es:

$$E[r_t] = \beta_0 / (1 - \beta_1) = b \tag{45}$$

y su varianza (incondicional) está dado por:

$$Var[r_t] = \sigma^2 /(1-\beta_1^2) = \sigma^2 /[1-(1-a)^2] \quad (46)$$

la varianza condicional de r_t, dado por r_{t-1}, es por supuesto σ^2. La gráfica 3 muestra el comportamiento de la tasa corta (rendimiento anualizado de CETES a 28 días). Los resultados de la estimación de los parámetros del modelo, con errores estándar entre paréntesis son los siguientes:

$$r_t = 0.0764 + 0.7067 r_{t-1}$$

en este caso se puede apreciar que las estimaciones son significativamente distintas de cero con un 95% de confianza.

3.3 Modelo de tasa corta de Vasicek para valuar bonos: enfoque probabilista.

Oldrich Alíans Vasicek, de nacionalidad checa fue fundador de la empresa KMV y actualmente es asesor de Moody’s KMV. También fue vicepresidente del Departamento de Ciencias Administrativas del banco "Wells Fargo". Vasicek ha sido profesor de finanzas en la Universidad de Rochester, la Universidad de Caliíornia en Berkeley y en la "Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciale " (ESSEC) en Francia. El profesor Vasicek se dedica a las matemáticas financieras, particularmente al desarrollo de modelos de evaluación de empresas, valuación de instrumentos financieros y análisis de mercados financieros, El profesor Vasicek ha publicado más de 30 artículos en "Journals" financieros y matemáticos y ha recibido varios premios y reconocimientos por su destacada labor académica. Su modelo de equilibrio para determinar la estructura de plazos de la tasa de interés ("An Equilibrium Characterization of the Term Structure"), publicado en 1977, es reconocido generalmente como pionero en la teoría de tasas de interés en tiempo continuo.

En el artículo original de Vasicek (1977) se obtiene una estructura de plazos de la tasa de interés bajo los siguientes supuestos:

1) la tasa instantánea de interés sigue un proceso de difusión

2) el precio de un bono cupón cero depende solamente de la tasa corta y de su vigencia (periodo entre colocación y vencimiento)

3) no hay costos de transacción. Asimismo, mediante argumentos de arbitraje se obtiene una ecuación diferencial cuya solución es el precio de un bono cupón cero.

Una de las contribuciones más importantes del trabajo de Vasicek es la determinación de una ecuación diferencial parcial parabólica que caracteriza el precio de un bono cupón cero en ausencia de oportunidades de arbitraje. Bajo el supuesto de que la tasa instantánea de interés es conducida por un proceso de difusión, el lema de Ito y argumentos de arbitraje desempeñan un papel fundamental en la obtención de dicha ecuación diferencial parcial.

3.3.1 Supuestos del modelo.

Considere un mercado en donde los inversionistas compran y emiten promesas del pago de una unidad en el futuro, libres de riesgo crédito, que se compran a descuento. Estas promesas serían llamadas bonos cupón cero.

Sea $B(t,T)$ el precio en el tiempo t de un bono que se compara a descuento con vencimiento en el tiempo $T, T > t,$ y que paga una unidad monetaria al vencimiento, es decir:

$$B(T,T) = 1 \tag{47}$$

El rendimiento al vencimiento o estructura de plazos o curva de rendimiento, simplemente curva de ceros, en el tiempo t de un bono con vencimiento T, está dada por

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln B(t,T) \qquad T > t \tag{48}$$

La tasa de interés instantánea o tasa de interés spot o, simplemente, tasa corta a la que los agentes pueden prestar o pedir prestado es :

$$r(t) = f(t,t) = \lim_{T\to t} f(t,T) \tag{49}$$

Un crédito de monto M_t a la tasa spot r_t, aumentará su valor durante el instante dt en

$$dM_t = M_t r_t dt \tag{50}$$

Esta ecuación es válida con toda certeza en t, ya que r_t es conocida en t. Sin embargo después de t el nivel de la tasa corta en incierto. En otras palabras, r (t) es un proceso estocástico, sujeto a dos requerimientos. Primero r_t es una función continua del tiempo. Segundo, se supone que r_t sigue un proceso markoviano, bajo este último supuesto, el comportamiento futuro de la tasa corta, dado su valor actual, es independiente del pasado. En otras palabras, la distribución de r_{t+u} dado r_s,s<$_{u.}$ solo depende de la información disponible en el tiempo $_u$ es decir, solo depende del valor r_u.

Los procesos que son continuos y markovianos son llamados procesos de difusión. Estos procesos pueden ser descritos a través de una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dr_t = \alpha(r_t, t)dt + \beta(r_t, t)dW_t \qquad (51)$$

Donde $\{W_t\}_{0 \le t \le T}$ es un movimiento browiano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\ge 0}, \mathrm{IP})$. Las funciones $\alpha(r,t)$ y $\beta^2(r,t)$ son conocidas como la tendencia y la varianza instantáneas respectivamente del proceso r_t.

Así mismo, se supone que no existen costos de transacción. La información está disponible para todos los agentes de forma simultanea. Todos los inversionistas actúan de forma racional (prefieren mas riqueza que menos y utilizan toda la información disponible), todos los inversionistas tienen expectativas homogéneas y el mercado está en equilibrio. Es decir, no hay oportunidades de arbitraje.

El precio del bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria se detonará mediante B=B (r_t,t:T), o en formas mas simples como B= (t.T) cuando no sea necesario destacar la dependencia con la tasa corta.

Así, la tasa corta es la única variable de estado de la estructura de plazos.

3.3.2 Representación estocástica del precio del bono.

La solución a la ecuación diferencial parcial puede ser representada en forma integral como:

$$B(t,T) = E\left[\exp\left\{-\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(r_s, s)ds - \int_t^T \lambda(r_s, s)dW_s\right\} \middle| F_t\right] \qquad (52)$$

Así, la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$B(r_t, t, T) = E\left[\frac{P_t}{P_T} \middle| F_t\right] \quad t \le T \qquad (53)$$

La ecuación establece que el precio de cualquier bono medido en unidades del valor del portafolio P_t sigue una martingala, es decir:

$$E\left[\frac{B(r_t,T;T)}{P_T}\middle| F_t\right]=\frac{B(r_t,t;T)}{P_t}. \tag{54}$$

En otras palabras, el mejor pronóstico de la razón entre el precio del bono y el portafolio es el valor actual de dicha razón.

3.4 Modelo de tasa corta de Vasicek. Enfoque de ecuaciones diferenciales parciales.

El artículo de Oldrich Alfons Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure" publicado en 1977, representa una de las contribuciones más importantes a la teoría de tasas de interés en tiempo continuo. En este capítulo se desarrolla una ecuación diferencial parabólica que caracteriza el precio de un bono cupón cero cuando la tasa corta es conducida por un proceso markoviano de difusión y el mundo es neutral al riesgo.

Un aspecto curioso relacionado con el artículo de Vasicek es que en la última sección de su trabajo se analiza un ejemplo específico para ilustrar cómo se obtiene el precio de un bono cupón cero mediante el uso de ecuaciones diferenciales parciales. Lo sorprendente es que el nombre de Vasicek ha sido asociado más con el ejemplo que presentó en su investigación que con toda la teoría desarrollada a lo largo del artículo. Este ejemplo particular describe la dinámica estocástica de una tasa de interés instantánea que presenta reversión a la media. En dicho ejemplo, el movimiento browniano desempeña un papel fundamental en el modelado del riesgo de mercado.

En el presente capítulo se obtiene el precio de un bono cupón cero como solución de una ecuación diferencial parcial parabólica. Posteriormente a partir de los precios del bono con diferentes vencimientos se genera la estructura de plazos de la tasa de interés, es decir, se determina la tasa de interés a todos los plazos. En este caso la curva de rendimiento es función de la tasa corta del periodo de maduración y de los parámetros del modelo.

3.4.1 Fundamentos del modelo de Vasicek.

En el modelo de Vasicek (1977), se estudia como caso particular la dinámica de una tasa corta que presenta reversión a la media hacia un valor constante. Este comportamiento se observa en muchos casos cuando se analizan series de tiempo de tasas a corto plazo. A continuación se formaliza la noción de reversión a la media a través de un proceso de Ornstein-Ulenbeck.

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad (Ω, F, P) y sea F = $\{F_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada, la cual representa la información del mercado disponible hasta el tiempo t. en donde el modelo de Vasicek, la tasa corta, r_t es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{55}$$

donde a, b y σ son constantes, conocidas y positivas. En este caso como puede observarse, W_t, es la única fuente de incertidumbre. En la especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa corta, expresada en (54), r_t es forzada a moverse en promedio, hacía un nivel de largo plazo b a una velocidad determinada, si la tasa corta está por arriba de b , ésta es forzada a moverse, en promedio, hacía arriba al nivel b.

Por último, vale la pena mencionar que la ecuación (54) es una notación simplificada de la integral estocástica:

$$\begin{aligned} r_t - r_s &= \int_s^t a(b - r_u)du + \int_s^t \sigma dW_u \\ &= ab(t-s) - a\int_s^t r_u du + \sigma \int_s^t dW_u \end{aligned} \tag{56}$$

El objeto principal de estudio del cálculo estocástico es, precisamente, la integral estocástica. Así pues, cuando se escribe (54), se debe estar pensando en (55).

3.4.2 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek.

El modelo de Vasicek forma parte de los llamados modelos de equilibrio general debido al uso de condiciones de no arbitraje para caracterizar el precio de un bono cupón cero de un plazo dado. En esta sección, bajo los supuestos de equilibrio general y tasa corta neutral al riesgo se resuelve la ecuación diferencial parcial parabólica del comportamiento del precio de un bono cupón cero.

En seguida, el precio de un bono cupón cero que se coloca en t y que eI vencimiento T paga una unidad monetaria se denotará mediante B = B (r_t. t: T), o en forma más simple como B = B (t. T). En el caso del modelo de Vasicek el precio B de un bono cupón cero satisface:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_2} + a(b - r_t)\frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0 \tag{57}$$

La condición final corresponde al pago en el vencimiento del bono.

$$B(T, T) = 1 \tag{58}$$

Las condiciones de frontera dependen de a, b,σ y por supuesto de r_t .Dado que la ecuación (56) no cuenta con derivadas parciales cruzadas se supone una solución en variables separables de la siguiente forma:

$$B(t, T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \tag{59}$$

Observe que en la fecha de vencimiento necesariamente A (T. T) = 0 Y D (T. T)=0 ya que B (T, T) = 1. Con base en (56) las derivadas parciales de B con respecto de t y r_t así como la segunda derivada parcial con respecto de r_t están dadas por:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t}\right)B,$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = -DB, \tag{60}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^{\ 2}} = D^2 B$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (56) se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D - abD + r_t\left(-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1\right) = 0 \tag{61}$$

Si se deriva con respecto a r_t se obtiene

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0 \tag{62}$$

Despejando tenemos que:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1 \tag{63}$$

De hecho, la ecuación diferencial anterior es ordinaria y el uso de derivadas parciales es un abuso de notación. La solución de la ecuación diferencial anterior con condición final D (T,T) = 0 está dada por:

$$\begin{aligned} D(t,T) &= D(T,T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)}\int_T^t e^{a(T-s)}ds \\ &= -e^{-a(T-t)}\int_T^t e^{a(T-s)}ds \\ &= \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \end{aligned} \tag{64}$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior, con condición de frontera A(T,T) = 0, está dada por:

$$A(t,T) = b(t-T) - b\int_T^t e^{-a(T-s)}ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t-T) + \frac{\sigma^2}{a^2}\int_T^t e^{-a(T-s)}ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_T^t e^{-2a(T-s)}ds$$

$$= b(t-T) - \frac{b}{a}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t-T) + \frac{\sigma^3}{a^3}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(e^{-2a(T-t)} - 1\right)$$

$$= b(t-T) - \frac{b}{a}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t-T) + \frac{\sigma^3}{2a^3}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right) + \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(e^{-2a(T-t)} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}(t-T)\left(a^2 b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{a^2}D\left(a^2 b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(e^{-2a(T-t)} - 1\right)$$

Obteniendo como resultado final:

$$A(t,T) = \frac{1}{a^2}(D(t,T) - T + t)\left(a^2 b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{\sigma^2 D^2(t,T)}{4a} \tag{65}$$

3.4.3 Precio de un bono cupón cero en el modelo de Vasicek.

A continuación se expresa el precio de un bono cupón cero en términos de r_t, R(t,∞) y D(t,T). Observando que

$$B(t,T) = e^{-R(t-T)(T-t)} \tag{66}$$

Asímismo, el precio de un bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria, asociado al modelo de Vasicek de la tasa corta, se puede reescribir como:

$$B(t,T) = exp\left\{-R(t,\infty)(T-t) - [\mathrm{r_t} - \mathrm{R}(t,\infty)]D(t,T) - \frac{\sigma^2}{4_a}D^2(t,T)\right\} \tag{67}$$

3.4.4 Distribución de la tasa corta en el modelo de Vasicek.

En esta sección se determina la distribución de la tasa corta en el modelo de Vasicek. Observe, primero que a partir de las ecuaciones anteriores, se tiene que:

$$ar_t - ab = (ar_0 - ab)e^{-\mathrm{at}} + a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\, \mathrm{d}W_s$$

ó

$$r_t = r_0 e^{-\mathrm{at}} + b(1 - e^{-\mathrm{at}}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\, \mathrm{d}W_s$$

Equivalentemente a:

$$r_{t+h} = r_t e^{-\mathrm{ah}} + b(1 - e^{-\mathrm{ah}}) + \sigma \int_0^{t+h} e^{-a(t+h-s)}\, \mathrm{d}W_s$$

$$= e^{-\mathrm{ah}} (r_t + b(e^{-\mathrm{ah}} - 1) + \sigma \int_0^{t+h} e^{-a(t-s)}\, \mathrm{d}W_s \qquad (68)$$

Para toda $h > 0$. Claramente, a partir de (68), r_t se distribuye normalmente con media (condicional)

$$\mathrm{E}[r_t \mid r_0] = r_0 e^{-at} + \mathrm{b}(1 - e^{-\mathrm{at}}) \qquad (69)$$

Y la varianza (condicional)

$$\mathrm{Var}\, [r_t \mid r_0] = \sigma^2 \int_0^{t+h} e^{-2a(t-s)}\, \mathrm{d}s = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right) \qquad (70)$$

En donde se ha utilizado la propiedad

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^t g(s)dW_s \middle| F_0\right] = E\left[\left(\int_0^t g(s)dW_s\right)^2 \middle| F_0\right] = \int_0^t \left[g(s)\right]^2 ds \qquad (71)$$

Válida cuando la última integral es finita. Aquí, F_0 es toda la información relevante disponible en el tiempo $t = 0$.

3.4.5 Determinación del precio de un bono cupón cero.

El precio de un bono cupón cero que se emite en t y que paga una unidad monetaria en el tiempo T se satisface

$$B(r_t, t, T) = E\left[\exp\left\{-\int_t^T r_s ds\right\} \middle| F_t\right] \tag{72}$$

Considere ahora la suma de las tasas cortas instantáneas durante [t, T]:

$$I(t,T) = \int_t^T r_s ds \tag{73}$$

A continuación se verá que $I(t,T)$ es normal. Del modelo de Vasicek se sigue que

$$\int_t^T dr_s = ab(T-t) - a\int_t^T r_s ds + \sigma\int_t^T dW_s \tag{74}$$

Equivalentemente a:

$$r_T - r_t = ab(T-t) - aI(t,T) + \sigma\int_t^T dW_s \tag{75}$$

En consecuencia

$$I(t,T) = -\frac{1}{a}(r_T - r_t) + b(T-t) + \frac{\sigma}{a}\int_t^T dW_s \tag{76}$$

Por otro lado, del mismo modelo de Vasicek se tiene que si en (68) se sustituye 0 por *t* y *t* por *T*, es decir, se cambia de solución inicial y valor final, entonces

$$r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b(1 - e^{-a(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \tag{77}$$

Por lo tanto

$$r_T - r_t = r_t\left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) + b(1 - e^{-a(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s$$

$$= (b - r_t)\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} d \quad {}_s \tag{78}$$

A partir de (77) y (78), se encuentra que

$$I(t,T) = -\frac{1}{2}[\ (b - r_t)\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} d \quad {}_s \,]\,] + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T d \quad W_s$$

$$= b(T-t) + (r_t - b)\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right) + \sigma \int_t^t \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right) dW_s \tag{79}$$

Es decir, *I (t,T)* sigue una distribución normal. Ahora bien, se sabe que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X ~ $N(\mu,\sigma)$ está dada por

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \exp\left\{ tE[X] + \frac{1}{2} t^2 Var[X] \right\} \tag{80}$$

En particular, si t = 1 y X ~ $N(\mu,\sigma)$, entonces:

$$E\left[e^{tX}\right] = \exp\left\{E\left[X\right] + \frac{1}{2}Var[X]\right\} \tag{81}$$

Por lo tanto, dado que $I\ (t,T) = \int_t^T r_s ds$ es normal, se tiene que el precio del bono, $B(r_t\,, t\ ;\ T)$, satisface

$$B(r_t\,, t\ ;\ T) = E\left\{\exp(-I(t,T))\middle|F_t\right\} = \exp\left\{-E\left[I(t,T)\middle|F_t\right] + \frac{1}{2}Var\left[I(t,T)\middle|F_t\right]\right\} \tag{82}$$

A partir de (80), se encuentra que

$$E[I(t,T)|F_t] = b(T-t) + (r_t - b)\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) \tag{83}$$

y

$$Var[I(t,T)|F_t] = \sigma^2 \int_t^T \left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)^2 ds$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\left(T - t - 2\int_t^T e^{-a(T-t)}ds + \int_t^T e^{-2a(T-s)}ds\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\left[T - t - \frac{2}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + \frac{1}{2a}\left(1 - e^{-2a(T-t)}\right)\right] \qquad (84)$$

Como puede observarse, la propiedad de normalidad de la tasa corta simplifica el cálculo del precio teórico del bono. Así pues, a partir de (81), (82) y (83), se puede verificar que

$$B(r_{t\,,}\, t\ ;\ T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \qquad (85)$$

Donde

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \qquad (86)$$

y

$$A(t,T) = \frac{1}{a^2}\left(D(t,T) - T + t\right)\left(a^2 b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{\sigma^2 D(t,T)^2}{4a} \qquad (87)$$

Por último, la curva de rendimiento, R(t,T), se calcula mediante (87), como

$$R(t,T) = \frac{r_t D(t,T) - A(t,T)}{T - t} \qquad (88)$$

Conclusiones.

Recientemente, en vista de la crisis financiera internacional, la determinación de la estructura temporal de las tasas de interés ha recibido una gran atención, tanto por profesionales de la industria financiera como por académicos. Es importante destacar que la determinación de las tasas de interés es el paso previo a la valuación de los instrumentos de deuda incluyendo los productos derivados.

En la presente investigación, con base en una visión neutral aunque crítica, se ha llevado a cabo un análisis comparativo de las metodologías existentes para la determinación de la estructura de plazos de la tasa de interés. Evidentemente contar con el vector de tasas de interés a todos los plazos con referencia a una fecha inicial es un insumo necesario tanto para la valuación de diversos instrumento financieros de renta fija como para la administración de riesgos con productos derivados que tienen como subyacente a la tasa de interés (más precisamente que tienen como activo subyacente un bono cupón cero). Al respecto, es importante resaltar que el modelo CIR (Cox-Ingersoll-Ross) presenta mayores ventajas técnicas que el modelo de Vasicek al proporcionar resultados más consistentes con los datos observados. Aunque desde el punto de vista econométrico el modelo de Vasicek es más fácil de instrumentar, éste puede producir tasas de interés negativas con probabilidad positiva; situación que queda corregida el modelo CIR.

El reconocimiento de las características y propiedades de los instrumentos financieros de renta fija, y particularmente los bonos, ha sido otro los objetivos del presente trabajo de tesis. Entender el funcionamiento y la aplicación de estos instrumentos financieros ha sido una tarea constante en este trabajo. En conclusión, el propósito de este documento ha sido encauzar la investigación hacia el mejor entendimiento de los modelos existentes en la literatura para valuar bonos cupón cero y para determinar su curva de rendimiento.

Bibliografia.

Arroyo, Antonio M. (2004), 200 ejercicios resueltos de dirección financiera, Mac Graw-Hill,1ed. México.

Brealey, Richard.(2006) Fundamentos de Finanzas Corporativas, 4ª e.

Cox, J. C., J. E, Ingersoll and S.A. Ross (1985), A theory of the term structure of interest rates econometrica, vol. 53, No. 2, pp. 363-384.

Gitman, L. J. (2000), Principios de administración financiera, editorial Pearson Educación, México.

González Velasco, Mª. del C.(2007), Análisis de las Operaciones Financieras, Editorial Aranzadi. Madrid.

González Catalá, V.(2003) Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles. Curso Práctico, Ediciones Ciencias Sociales.

K, Arthur J. y OTROS (1999), Introducción a las Finanzas: la práctica y la

lógica de la dirección financiera, Editorial. Prentice Halll 2ed.

López Dumrauf, Guillermo(2006), Cálculo Financiero Aplicado, un enfoque profesional, editorial la ley 2ed.

Merton R. C. (1973) “Theory of Rational Option Pricing” Bell Journal of Economics and Management Scince, Vol.4 No. 1, pp.141-183.

Scott Besley (2000), Fundamentos de admistración financiera, Mc. Graw Hill. México.

Stanley B. Block / Geoffrey A. Hirt (2005), Administración Financiera, Mc. Graw Hill, México.

Suarez Fanjul, J. L., (2000), Análisis de las operaciones financieras, Madrid, Ediciones Civitas, S. L., 2ed.España.

Vasicek, O. (1977), An equilibrium charaterization of the term structure, Journal of financial economics, vol. 5 No. 2, pp. 177-188.

Venegas Martínez, F. y B. González Arechiga;(2002), Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad. El trimestre económico, vol. 59, No. 274, pp. 227-250.

Venegas Martínez, Francisco;(2006), Riesgos Financieros y económicos, Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, México, Thompson.1e.