INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA
APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA

LAS ARGUMENTACIONES MATEMÁTICAS DESDE LA VISIÓN DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Tesis que para obtener el grado de
Doctora en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Cecilia Rita Crespo Crespo

Directores de Tesis:
Dra. Rosa María Farfán Márquez
Dr. Javier Lezama Andalón

México, D. F., Agosto de 2007

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 01 del mes de agosto del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología"

Presentada por la alumno:

Crespo	Crespo	Cecilia Rita
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | B | 0 | 5 | 1 | 5 | 7 | 7 |

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Apolo Castañeda Alonso

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 8 del mes Agosto del año 2007, la que suscribe Cecilia Rita Crespo Crespo alumna del Programa de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro B051577, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. Rosa María Farfán Márquez y el Dr. Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado "Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Cecilia Rita Crespo Crespo

Índice

Cuadros, diagramas e imágenes…………………………………………… viii

Resumen.. 1

Abstract... 3

Glosario... 5

Introducción... 9

Capítulo 1

Las demostraciones y argumentaciones: la realidad en el aula de matemática desde la perspectiva socioepistemológica.......................... 15

Acerca de la argumentación matemática en el aula.............................. 16

Las opiniones de los docentes frente a la demostración en el aula......... 18

El origen de esta investigación.. 21

Una visión socioepistemológica de la matemática................................ 22

La comunidad matemática como institución del saber.......................... 24

La matemática en su carácter social... 27

Las prácticas sociales en la matemática.. 29

Una caracterización de escenarios socioculturales desde la matemática educativa.. 32

Los escenarios para la psicología ecológica................................ 33

Los escenarios socioculturales.. 37

La matemática para la socioepistemología.. 39

Capítulo 2

Estado del arte: La evolución de las investigaciones sobre argumentaciones matemáticas.. 41

Evolución de la matemática educativa.. 42

Las investigaciones existentes acerca de las demostraciones................ 45

a. Las argumentaciones matemáticas en una didáctica sin alumnos... 46

i. Jean Piaget.. 46

ii. Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam............................. 48

Resumiendo.. 49

b. Las argumentaciones matemáticas en una didáctica sin escuela.. 49

i. Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele....................... 49

ii. Raymond Duval... 51

iv. Lourdes Valverde.. 54

Resumiendo.. 55

c. Las argumentaciones matemáticas en una didáctica en la escuela, pero sin escenarios.. 56

i. Nicolás Balacheff... 56

ii. Juan Godino y Ángel Recio.. 58

iii. Gila Hanna.. 60

iv. Marcelino Ibañes... 61

v. Michael de Villiers.. 62

vi. Arsac.. 63

Resumiendo.. 64

d. Las argumentaciones matemáticas en una didáctica en escenarios socioculturales... 64

Capítulo 3

Demostraciones y argumentaciones a través de la historia: los escenarios y características de su evolución.. 67

Una visión socioepistemológica de la historia de las demostraciones.. 68

Egipto y Mesopotamia: La matemática del cálculo y de las necesidades materiales.. 71

India: un escenario en el que es posible la contradicción........................ 74

China: el imperio de la tradición.. 77

Grecia: La matemática demostrativa... 81

La argumentación literaria y dialéctica en Grecia.................................. 83

La matemática del mundo de las ideas.. 85

Los sistemas deductivos en matemática... 87

La evolución de la deducción en matemática... 91

La ¿muerte de la demostración? o una revisión sobre su naturaleza... 96

La demostración matemática como práctica social................................ 100

Capítulo 4

La influencia aristotélica.... 103

Aristóteles y el escenario aristotélico... 104

La filosofía aristotélica... 106

La ciencia aristotélica, la lógica aristotélica.. 107

La adopción de la filosofía aristotélica.. 112

Influencia de Aristóteles en Occidente.. 116

Algunas reflexiones acerca de la influencia aristotélica.......................... 118

Capítulo 5

Las argumentaciones en los escenarios sin influencia aristotélica.. 121

El pensamiento lógico en Egipto antiguo.. 122

El tratamiento de algunos conceptos matemáticos que surgieron en el escenario de Egipto.. 123

a. El cero.. 123

El pensamiento lógico en la antigua India.. 124

El tratamiento de algunos conceptos matemáticos que surgieron en el escenario de la India.. 131

a. El cero.. 131

b. El infinito.. 135

El pensamiento lógico en la antigua China.. 137

El tratamiento de algunos conceptos matemáticos que surgieron en el escenario de la China.. 139

a. El cero.. 139

El pensamiento lógico precolombino.. 142

El tratamiento de algunos conceptos matemáticos que surgieron en el escenario americano.. 144

a. El cero.. 144

Reflexiones sobre algunas de las características del pensamiento no aristotélico.. 145

Los estudiantes y las formas de razonar no aristotélicas........................ 147

a. Una experiencia sobre la aparición de argumentaciones nyayas.. 147

b. Una experiencia sobre la resistencia a la utilización de argumentaciones aristotélicas.. 150

Algunos comentarios.. 157

Capítulo 6
Las argumentaciones por reducción al absurdo. Las contradicciones en la matemática.. 159
Descripción y explicación lógica... 160
Su aparición en la historia.. 161
El absurdo como concepción filosófica... 164
El absurdo como concepción filosófica en las culturas antiguas............. 166
El absurdo en el aula.. 168
La identificación de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios académicos desde la óptica de los estudiantes.................... 171
a. Objetivos, diseño de la secuencia, destinatarios de la experimentación.. 171
b. Resultados obtenidos en la experimentación realizada................ 172
c. Algunas conclusiones extraídas de esta etapa de experimentación.. 182
Las demostraciones por reducción al absurdo en la matemática. Objetos matemáticos y argumentaciones por reducción al absurdo....... 183
El absurdo como generador de conceptos matemáticos o la sensibilidad a la contradicción.. 185
Acerca de absurdos e imposibles: concepciones de los alumnos........... 190

Capítulo 7
La no aceptación del tercero excluido en la lógica desde la visión matemática... 197
Algunos conceptos básicos de la lógica clásica..................................... 198
El surgimiento de las lógicas no clásicas.. 200
Las lógicas polivalentes... 202
Los significados del tercer valor de verdad en las lógicas trivalentes.. 202
a. Lógica trivalente de Łukasiewicz... 202

b. Lógica trivalente de Bochvar.. 206
c. Lógica trivalente de Kleene... 209
d. Lógica trivalente de Gödel – Brouwer..................................... 210
e. Lógica trivalente de Mamdani.. 213
f. Lógica trivalente con aplicación computacional........................ 215
Acerca de la comparación de las lógicas trivalentes.............................. 216
Los principios aristotélicos y las lógicas trivalentes................................ 217
¿Una matemática en Occidente que utilice lógicas no aristotélicas?.. 218

Capítulo 8
Las argumentaciones en escenarios no académicos................................. 223
La influencia de la formación profesional en las argumentaciones fuera de escenarios académicos... 224
La identificación de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos desde la óptica de los estudiantes............. 226
a. Objetivos, diseño de la secuencia, destinatarios de la experimentación.. 226
b. Resultados obtenidos en la experimentación realizada............... 227
c. Algunas conclusiones extraídas de esta etapa de experimentación.. 239
Reflexiones acerca de la argumentación por reducción al absurdo en escenarios no académicos.. 240
En busca de las argumentaciones utilizadas fuera de escenarios escolares de la matemática.. 241
Reflexiones acerca la argumentación en escenarios no matemáticos... 251

Capítulo 9

Verdad: Concepciones, certeza y demostración.. 253

Concepciones de verdad en la filosofía.. 254

La verdad en matemática.. 255

Fuentes del conocimiento... 256

Certeza en el aula de matemática.. 257

Reflexiones sobre la verdad y el progreso en matemática...................... 260

Capítulo 10

Argumentaciones que no se enseñan en el aula.. 265

Argumentaciones abductivas.. 267

Argumentaciones inductivas... 269

Argumentaciones no monotónicas.. 271

Argumentaciones visuales.. 275

Argumentaciones a conocimiento cero... 277

Algunas reflexiones acerca de las argumentaciones de los estudiantes.. 277

Una escuela que no sólo enseña a argumentar, una escuela que debe comprender cómo argumentan los estudiantes...................................... 278

Capítulo 11

Consideraciones finales.. 281

Comentarios y conclusiones... 281

Posibles formas de continuar esta investigación.................................... 289

Referencias bibliográficas.. 291

Cuadros, diagramas e imágenes

Figura 1: Demostración del Teorema de Pitágoras según Bhaskara............ 76
Figura 2: Ch´ien-tu, Yang-ma, Pieh-nao 78
Figura 3: Aplicación del principio de complementariedad interna y externa.. 79
Figura 4: Demostración del Teorema de Gou Gu... 79
Figura 5: Número 821 en sistema standard.. 140
Figura 6: Número 821 en notación tradicional.. 140
Figura 7: Número 801 en notación tradicional.. 140
Figura 8: Dígitos en notación sangi... 141
Figura 9: 17 en notación maya... 144
Figura 10: 123126 en notación maya.. 145
Figura 11: Figura de análisis utilizando diagramas de Venn......................... 151
Figura 12: Figura de análisis para demostración por reducción al absurdo.. 179
Figura 13: Argumentación visual... 275

Cuadro 1: Resultados de la experimentación sobre identificación de aplicaciones de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios académicos.. 182
Cuadro 2: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Łukasiewicz.. 205
Cuadro 3: Tablas de verdad de la conjunción y disyunción según lógica trivalente de Łukasiewicz... 205

Cuadro 4: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Łukasiewicz........ 205
Cuadro 5: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Bochvar........ 207
Cuadro 6: Tablas de verdad de la conjunción y disyunción según lógica trivalente de Bochvar........ 207
Cuadro 7: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Bochvar........ 208
Cuadro 8: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Kleene........ 210
Cuadro 9: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Gödel-Brouwer........ 212
Cuadro 10: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Gödel-Brouwer........ 212
Cuadro 11: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Mamdani........ 214
Cuadro 12: Tabla de verdad de los conectivos and y cand según lógica trivalente con aplicación computacional........ 215
Cuadro 13: Principio del tercero excluido en lógicas trivalentes........ 217
Cuadro 14: Principio de no contradicción en lógicas trivalentes........ 218
Cuadro 15: Resultados de la experimentación sobre identificación de aplicaciones de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos........ 239

Resumen

Este trabajo presenta una investigación que analiza a las argumentaciones matemáticas desde la óptica de la socioepistemología. Muestra a la argumentación matemática como una construcción sociocultural dentro de la matemática que responde a la práctica social de la demostración.

El objetivo propuesto en esta investigación es comprender el carácter sociocultural de las argumentaciones matemáticas.

Las hipótesis planteadas consisten en afirmar que las argumentaciones matemáticas son construcciones que reflejan las características de escenarios socioculturales, y que existen formas de argumentación que se construyen fuera de escenarios académicos que no se basan en la lógica aristotélica y que llegan al aula de matemática, no coincidiendo sus características con las de las argumentaciones muchas veces esperadas en escenarios académicos.

En el caso de las argumentaciones fuertemente basadas en principios de la lógica aristotélica, son propias del pensamiento lógico de culturas con influencia de la lógica clásica y no se manifiestan en otros escenarios que no tuvieron esa influencia. De esta manera, se puede afirmar que no son innatas y por lo tanto inherentes de la forma de razonar del ser humano, sino que dependen del escenario en que actúa el individuo.

Por otra parte, la detección de la presencia en el aula de matemática de distintos tipos de argumentaciones que a veces no pueden explicarse desde la lógica aristotélica, y la no aparición de formas basadas en la lógica aristotélica en escenarios no matemáticos, permite comprender que en ese carácter de producto sociocultural, se construyen argumentaciones en escenarios no académicos que son transferidas por los estudiantes al escenario escolar.

Esta investigación se orienta a estudiar los procesos de construcción social del conocimiento matemático, fijando la atención en su fundamentación en la matemática. Básicamente esta investigación se llevó a cabo a partir del análisis de fuentes referidas al pensamiento lógico en distintos escenarios socioculturales, a fin de identificar las formas de argumentación utilizadas, y de experimentaciones realizadas con alumnos a través del análisis de sus producciones en el aula y de entrevistas y cuestionarios.

Abstract

This work presents an investigation that analyzes the mathematical argumentations from the optics of the socioepistemología. It shows mathematical argumentations like sociocultural constructions in mathematics that respond to the social practice of the demonstration.

The objective proposed in this investigation is to understand the sociocultural character of mathematical argumentations.

The raised hypothesis affirm that mathematical argumentations are constructions that reflect characteristics of sociocultural scenes, and that argumentation forms are also constructed outside academic scenes and these are not based on the aristotelian logic and they arrive to mathematical classroom, not agreeing their characteristics to the argumentations which are often waited in academic scenes.

In the case of the argumentations strongly based on principles of the aristotelian logic, they are characteristic from logical thought of cultures with influence of the classic logic and they are not present in other scenes without that influence. We can affirm that they are not innate and therefore not inherent of human reasoning, but that depend on the scene in which the individual acts.

On the other hand, we may detect the presence of different types of argumentations in mathematical classroom that sometimes cannot be explained

from the aristotelian logic. The absence of argumentations based on the aristotelian logic at nonmathematical scenes, also allows us to understand that in that sociocultural product character.

This investigation is oriented to study the processes of social construction of the mathematical knowledge, fixing the attention to its fundamentation. Basically this investigation was carried out from the analysis of sources referred to the logical thought in different sociocultural scenes, in order to identify the forms of argumentation used, and experimentations with students through analysis of its productions in the classroom and interviews and questionnaires.

Glosario

Argumentación: construcción sociocultural que se construye en el escenario sociocultural y que se manifiesta en la práctica social de la demostración.

Argumentación a conocimiento cero: prueba interactiva basada en protocolos de conocimiento cero. En ella, una persona trata de demostrar a otra que sabe algo, sin enseñarle o transmitírselo. Es una forma de presentar una propiedad matemática a un interlocutor, convenciéndolo de la veracidad del teorema correspondiente y de que el demostrador conoce la misma. Durante esta comunicación se busca el convencimiento y la aceptación del otro.

Argumentación abductiva: forma de argumentar en la que a partir de una implicación y de su consecuente, se afirma su antecedente. La abducción no es una forma de argumentación considerada lógicamente válida para la lógica aristotélica. El término abducción fue introducido por Pierce.

Argumentación deductiva: forma de argumentar sustentada por la lógica clásica, en la cual la conclusión se sigue necesariamente de las premisas. Su validez significa que siendo las premisas verdaderas, la conclusión también lo será.

Argumentación inductiva: forma de argumentar que parte de la observación y que si a partir de observar que cierto fenómeno se repite en todos los casos observados, infiere que se verifica siempre. La inducción no es una forma de argumentación considerada lógicamente válida para la lógica aristotélica.

Argumentación no monotónica: forma de argumentar en la que es posible que agregando nuevas proposiciones (premisas) a un razonamiento, se invalidan conclusiones obtenidas previamente. O sea que el conjunto de conclusiones o teoremas no crece monótonamente con el conjunto de premisas. Las argumentaciones no monotónicas no son formas de argumentación consideradas lógicamente válidas para la lógica aristotélica.

Argumentaciones por reducción al absurdo: forma de argumentación indirecta basada en la aplicación del siguiente esquema: A partir de un conjunto Γ de premisas, se pretende probar la validez de cierta conclusión T. Se agrega como una nueva premisa la negación de la tesis y de esta manera se tiene un nuevo conjunto de premisas constituido por las premisas originales y la negación de la tesis. A partir de él se aplican reglas de inferencia y se llega a una contradicción. De esto se infiere que el nuevo conjunto de premisas es contradictorio o no consistente, por lo que se admite la verdad de la tesis.

Argumentación visual: forma de razonar basada en la visualización. Se sustenta en la utilización de representaciones visuales, el uso de diagramas, gráficos y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades que se desea demostrar.

Demostración: Desde la perspectiva socioepistemológica, la demostración puede pensarse como una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. La demostración es, por lo tanto una práctica social característica de la comunidad matemática en cuanto a institución.

Escenario de conducta: unidad básica del tejido de las sociedades provista de identidad propia e indivisible y que en su acción construye, en gran medida la dotación psicológica de los individuos. Está formado por la conjunción de entidades ambientales, entidades sociales y objetos, que se relacionan dentro de un sistema integrado de fuerzas y controles, que mantienen las actividades en un equilibrio semiestable.

Escenario sociocultural: son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales. Están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos que constituyen las sociedades específicas. En estos escenarios se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico, o podemos decir más generalmente: culturales.

Identidad institucional: identidad institucional es una construcción, una representación en un doble sentido: de los miembros que generación tras generación han ido armando, modificando y conservando su texto y su trama y de quienes en un momento, siempre del presente, se interesan por conocerla, requiriendo un trabajo de rememoración personal, de reconstrucción de la memoria viva institucional y de hacer historia.

Institución: formas o estructuras fundamentales de la organización social tal como son establecidas por la ley o la costumbre de un grupo humano dado. Las instituciones corresponden entonces al orden social, a un sistema de normas o reglas sancionadas socialmente y organizan la vida de una comunidad**.**

Lógica: disciplina que estudia las formas correctas de razonar. Normalmente al referirnos a la lógica, hacemos referencia a la lógica clásica o aristotélica, cuyas bases fueron sentadas por Aristóteles. Fue elaborada por los pensadores medievales y enseñada durante siglos en la educación media y superior.

Práctica social: conjunto de acciones que surgen y permanecen en el ambiente social, afectando y conformando la psique de todo individuo. La práctica social es reconocida, como normativa de la actividad, no es lo que hace el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen, como acciones de grupos sociales que se dan en cierto escenario sociocultural, en las que se reflejan las características de ese escenario.

Principio de no contradicción: uno de los principios aristotélicos, cuyo significado consiste básicamente en que una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa. Simbólicamente: $\sim (A \wedge \sim A)$.

Principio del tercero excluido: uno de los principios aristotélicos, cuyo significado consiste básicamente en que una proposición debe ser verdadera o falsa. Simbólicamente: $A \vee \sim A$.

Socioepistemología: Acercamiento metodológico que plantea la necesidad de desarrollar investigación sistémica y situada. En una investigación socioepistemológica aparecen involucradas las componentes epistemológica, cognitiva y didáctica y, la dimensión sociocultural que interactúa con las anteriores permanentemente. Explica la construcción del conocimiento como resultado de prácticas asociadas y problemáticas.

Introducción

En este trabajo se presenta una investigación que muestra a la argumentación matemática como una construcción sociocultural.

Las argumentaciones lógicas y las demostraciones han desempeñado un papel importante tanto en el desarrollo de la matemática, como en su fundamentación y enseñanza, pudiendo afirmarse que es usual relacionar estrechamente el concepto de lógica con el de matemática. Durante siglos, la matemática ha sido considerada como la ciencia deductiva por excelencia, en la que la verdad de las afirmaciones se sustenta en el carácter deductivo de la lógica. El conocimiento matemático se sustenta básicamente en dos modos de comprensión y expresión: uno se realiza de forma directa, y corresponde a la intuición y el otro se lleva a cabo de forma reflexiva, es decir lógica. Sin embargo, a lo largo de la historia, las concepciones relacionadas con las demostraciones no se han mantenido estáticas, sino que han cambiado notablemente reflejando características de los escenarios socioculturales en los que se desenvolvieron.

En este sentido, la postura socioepistemológica considera que la matemática no es una ciencia que surge aislada de la sociedad, sino inmersa en ella y por lo tanto recibe influencias fuertemente basadas en el pensamiento, las necesidades y características del escenario en que se desarrolla. De esta manera, es que el contexto social, cultural e históricamente determinado actúa como parte indiscutible de este proceso de nacimiento, desarrollo y evolución de la ciencia, debiendo tenerse en cuenta que el conocimiento no surge en escenarios escolares, hecho que por lo tanto, debe tenerse en cuenta en la construcción del discurso matemático escolar.

Al centrarnos en el aula, el concepto de demostración suele ser considerado una de las nociones medulares en la matemática y es casi unánime la importancia de su presentación y transmisión en el aula a través de diversas investigaciones en el área de la enseñanza de la matemática (Balacheff, 1982; Godino & Recio, 2001; Ibañes, 2001). En el quehacer matemático surge la capacidad de razonar, como indispensable para lograr la comprensión. Sin embargo, también los especialistas realizan señalamientos acerca de las dificultades que involucra la adquisición de esta capacidad en los distintos niveles de la enseñanza. En el aula de matemática, las argumentaciones desempeñan distintas funciones en las que se ponen en juego habilidades propias del pensamiento racional. Estas habilidades se van construyendo a través de los diversos niveles de la enseñanza, a lo largo de un extenso proceso. En este proceso, como en todo aprendizaje, el alumno recibe influencias de factores diversos que varían según el escenario en el que se encuentre.

La presente investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica, que ofrece una visión incluyente de las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento, en particular de las argumentaciones matemáticas consideradas como una construcción cultural. Su principal antecedente lo constituye la tesis de maestría, *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo* (Crespo Crespo, 2005a). En ese trabajo se propuso comprender las argumentaciones por reducción al absurdo como recurso de validación de resultados en matemática que surgen con el carácter de producto cultural. La hipótesis formulada en esa investigación fue que las argumentaciones por reducción al absurdo, son propias del pensamiento lógico de ciertas culturas no hallándose presentes en otras, centrándose este carácter cultural en el aspecto profesional, por lo que nuestra atención se fijó en estudiantes de distintas carreras y formaciones. De esta manera, podemos afirmar que no son inherentes de la forma de razonar del ser humano, sino que dependen de la formación que ha recibido el individuo.

El objetivo propuesto en esta investigación es comprender el carácter sociocultural de las argumentaciones matemáticas.

Una hipótesis que se plantea en esta tesis es que las argumentaciones matemáticas deductivas, fuertemente basadas en los principios aristotélicos, son propias del pensamiento lógico de culturas con influencia de la lógica clásica. De esta manera, podemos afirmar que las estructuras argumentativas no son inherentes de la forma de razonar del ser humano, sino que dependen del escenario en el que actúa el individuo. A partir de esta hipótesis, fue posible realizar un análisis socioepistemológico de las argumentaciones matemáticas y plantear como otra hipótesis que existen formas de argumentación que se construyen fuera de escenarios académicos que no se basan en la lógica aristotélica y que llegan al aula de matemática, no coincidiendo sus características con las de las argumentaciones muchas veces esperadas. Las argumentaciones utilizadas por los alumnos en la escuela, tal como hemos podido detectar en esta investigación, a veces son construidas fuera de ella. El alumno, como actúa en escenarios académicos y no académicos, trae al aula argumentaciones construidas fuera de ella, hecho que deberá tener en cuenta la escuela para lograr una reconstrucción del discurso matemático escolar.

Este trabajo que estamos presentando, consta de once partes, organizadas en capítulos de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, que se ha llamado *Las demostraciones y argumentaciones: la realidad en el aula de matemática desde la perspectiva socioepistemológica,* se realiza una breve presentación de las demostraciones en el aula y la visión que de ellas tienen los docentes y alumnos de profesorado de matemática. Este análisis desemboca en el planteo de las preguntas que guían la presente investigación. A continuación se centra en reflejar cómo el marco teórico de la socioepistemología comprende al conocimiento como una construcción sociocultural dependiente del escenario sociocultural en el que se desarrolla.

En el Capítulo 2, *Estado del arte: La evolución de las investigaciones sobre argumentaciones matemáticas,* se presenta, como el nombre del capítulo lo indica, el estado del arte en las investigaciones relacionadas con las demostraciones y las argumentaciones en el aula de matemática.

El Capítulo 3, *Demostraciones y argumentaciones a través de la historia: los escenarios y características de su evolución,* presenta la evolución del pensamiento deductivo y las demostraciones a través de la historia de la matemática. Distintos momentos históricos y distintas culturas dieron a esta forma de pensamiento diferente importancia, no sólo en la matemática sino también en otras áreas y construyeron distintas formas de argumentar. La evolución de la demostración matemática muestra cómo esta forma de pensamiento se ha visto claramente influenciada por los escenarios socioculturales desde la antigüedad hasta nuestros días. Se hace hincapié en la descripción de estos escenarios y en el papel que desempeñan las demostraciones para la sociedad matemática de cada cultura y momento histórico.

En el Capítulo 4, *La lógica aristotélica,* se describen las principales características de la lógica aristotélica como reflejo de la filosofía de Aristóteles, la manera en la que estas ideas surgieron en la antigüedad, se desarrollaron y se transmitieron en Occidente llegando a marcar fuertemente el pensamiento científico desde entonces hasta nuestros días. En este capítulo se busca comprender no solo las características del pensamiento aristotélico en el que nuestra cultura se encuentra inmersa, sino las causas de su expansión y permanencia y mostrar que este pensamiento es también una construcción sociocultural, que marcó el rumbo de la ciencia occidental.

Por su parte, en el Capítulo 5, titulado *Las argumentaciones en los escenarios sin influencia aristotélica,* se analiza la existencia de argumentaciones matemáticas de naturaleza distinta de la deductiva, que se manifestaron en culturas que no tuvieron influencia del pensamiento aristotélico. En estas culturas, la matemática tuvo desarrollos importantes, abordando y construyendo objetos matemáticos cuya naturaleza difirió de la que tuvo en aquellos escenarios con influencia aristotélica; las formas de argumentar sobre la validez de propiedades tuvieron características no deductivas y se constituyeron en demostraciones aceptadas dentro de esos escenarios por la comunidad científica. Se presentan además ejemplos de argumentaciones no acordes con la deducción aristotélica, que se pusieron de evidencia en el aula.

El Capítulo 6, *Las argumentaciones por reducción al absurdo. Las contradicciones en la matemática*, se refiere a las argumentaciones deductivas que utilizan esta estrategia. Aparece en esta sección la descripción y los fundamentos lógicos que subyacen a las argumentaciones por reducción al absurdo, elegida entre las argumentaciones deductivas por no haber sido aceptada por todas las culturas. Asimismo se describen las concepciones filosóficas que dieron origen a su aparición y aquellas que existieron en culturas sin influencia aristotélica, en las que este tipo de demostraciones no tuvo cabida hasta tener contacto con la cultura de origen griego. Este capítulo presenta evidencia según la cual es posible reconocer argumentaciones deductivas como construcciones social para cuyo surgimiento y aceptación debieron darse visiones filosóficas con raíz en las leyes lógicas sentadas por Aristóteles. A continuación, se describe la presencia de las argumentaciones por reducción al absurdo en la matemática, a través del diseño e implementación de una secuencia de experimentación relacionada con su reconocimiento dentro de la matemática. Presentándose finalmente un panorama de cómo el absurdo y las contradicciones se han manifestado en la matemática, intentando identificar cuál ha sido su repercusión dentro de esta ciencia y en el aula de matemática.

En el Capítulo 7, *La no aceptación del tercero excluido en la lógica desde la visión matemática*, se analiza la existencia de posturas contemporáneas de lógicas no clásicas, desarrolladas en el seno de la matemática occidental. Este capítulo muestra la posibilidad de desarrollos matemáticos basados en lógicas no aristotélicas y su significación para la matemática actual y para los estudiantes de profesorado de matemática.

El Capítulo 8, llamado *Las argumentaciones en escenarios no académicos,* se orienta a reconocer la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo fuera de escenarios de investigación y de enseñanza y a reconocer cuáles son las características de argumentaciones utilizadas en escenarios no matemáticos.

En el Capítulo 9, *Verdad: concepciones, certeza y demostración*, se aborda la relación entre la verdad y la demostración, por medio de la descripción de diversos significados de la verdad y de los diversos esquemas de certeza que se hacen presentes en el aula de matemática.

El Capítulo 10, *Argumentaciones que no se enseñan en el aula,* reconoce la presencia de argumentaciones con base no deductiva en el aula. Ante la existencia e identificación de éstas que son construidas fuera de escenarios escolares, se plantea la importancia de su estudio para comprender la manera en la que se construyen las argumentaciones matemáticas en los escenarios de aprendizaje y de cómo la escuela debe observar y comprender la construcción de las mismas.

Finalmente, el Capítulo 11, *Consideraciones finales*, presenta brevemente las conclusiones obtenidas en la investigación realizada y plantea posibles caminos que se abren a partir de esta investigación para continuarla.

Capítulo 1

Las demostraciones y argumentaciones: la realidad en el aula de matemática desde la perspectiva socioepistemológica

La matemática se encuentra fuertemente unida al razonamiento lógico, pero la relación entre la lógica y la matemática no ha sido siempre pensada de la misma manera. En la visión de la matemática clásica, la lógica y la matemática son consideradas dominios disjuntos; para Russell, la matemática es parte de la lógica; para Hilbert, la lógica era parte de la matemática; para Piaget, ambas tienen una autonomía recíproca o una reducción recíproca parcial, o sea que son dominios no disjuntos, pero que no se incluyen. A pesar de estas visiones tan distintas y a veces encontradas, no es posible negar su relación. A lo largo de la historia de la matemática, los matemáticos tuvieron necesidad de la lógica. En la actualidad, se considera a la matemática como la ciencia deductiva por excelencia, ya que en ella se pueden obtener unos resultados a partir de otros mediante la aplicación de leyes lógicas. Esta visión no ha sido siempre compartida por la comunidad matemática, pero nunca se ha negado la existencia de un vínculo entre la matemática y la lógica, entre la estructura de la matemática y el pensamiento racional.

Es usual que se afirme que para entender la matemática es esencial ser capaz de razonar, que el desarrollo y construcción de los conocimientos matemáticos se basan en las argumentaciones y demostraciones matemáticas. Por otra parte, suele decirse que una característica fundamental y característica del ser humano es el razonamiento. Cabe preguntarse, entonces, por qué resulta tan complejo el aprendizaje de la matemática, por qué es que justamente esa visión asociada a la construcción racional de la matemática no se logra de manera natural en nuestras aulas...

En este capítulo se describe brevemente la realidad que dio origen a esta investigación a partir de encuestas y entrevistas realizadas a docentes y estudiantes de profesorado de matemática y el marco teórico desde el que se desarrolla la misma.

Acerca de la argumentación matemática en el aula

El concepto de demostración suele ser considerado en la actualidad como una de las nociones medulares en la matemática tanto por documentos curriculares como por opiniones de los docentes. La demostración se entiende en la escuela como una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y justificación, que se logra a partir de la capacidad de razonamiento con que los niños llegan a la escuela, proponiéndose lograr al final de la misma "*la capacidad para comprender y elaborar demostraciones matemáticas, es decir argumentos que consisten en deducciones o conclusiones lógicamente rigurosas a partir de hipótesis, y que deberían apreciar el valor de tales argumentos*" (NCTM, 2000). Esta visión lleva a considerar que la demostración debe formar parte de manera consistente de la enseñanza de la matemática. Sin embargo, también los especialistas realizan señalamientos acerca de las dificultades que involucra la adquisición de esta capacidad:

> *“El razonamiento y la demostración no pueden enseñarse, por ejemplo, en una simple unidad sobre lógica, o haciendo demostraciones en geometría”. [...] “El razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad. Razonar matemáticamente*

> *es un hábito mental y, como todo hábito, ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos".*
>
> (NCTM, 2000, p.59)

En Argentina, también se enfatiza sobre la importancia de la argumentación matemática y se sugiere su construcción en forma gradual y espiralada en la escuela y que se continuará posteriormente:

> *"La capacidad de razonar lógicamente crece con la edad y las experiencias de dentro y fuera de la escuela. En los distintos grados se han de ir ampliando los contextos de aplicación de la misma (numéricos, geométricos, de proporcionalidad, gráficos, etc.) y el rigor con que se la utilice".*
>
> (Ministerio de Cultura y Educación, 1995, p.91)

Sin embargo, muchas veces, en la tarea docente, hemos enfrentado situaciones en las cuales los alumnos no comprenden la necesidad de la demostración de propiedades en matemática. En ciertas oportunidades se contentan con una simple verificación, en otras "creen" la propiedad, pues les resulta evidente, o porque el docente o un libro lo ha dicho así. Aún cuando puedan llegar a comprender que en ciertos momentos es necesario demostrar una propiedad, la dificultad de asumir la exigencia de las demostraciones en las ciencias formales se complica más aún cuando ellos son quienes intentan realizar estas demostraciones. Las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente por los alumnos en la escuela, ni tampoco en oportunidades en niveles superiores.

Las opiniones de los docentes frente a la demostración en el aula

Con el fin de indagar acerca de la concepción que tienen los docentes de la noción de demostración tanto desde el punto de vista matemático, como su puesta en práctica dentro de la enseñanza de la matemática en los distintos niveles de la enseñanza, se han realizado investigaciones (Crespo Crespo & Ponteville, 2003a, 2004) que permitieron dar una visión de la manera en que los docentes reconocen la problemática de la demostración en el aula de matemática. En ellas se utilizaron cuestionarios y entrevistas a estudiantes y docentes en ejercicio tanto en el nivel medio como en el terciario y universitario. Las preguntas estuvieron orientadas a analizar las creencias y conocimientos acerca de la demostración, diferentes términos vinculados con ella (verdad, verificación, argumentación, etc.) y su importancia dentro de la matemática y su enseñanza. Estas investigaciones dieron evidencia de que la enseñanza de la demostración como contenido matemático no es siempre una problemática asumida por los docentes en forma sistemática; sino en algunos casos, de manera intuitiva, tomando como modelo aquel en el que han sido formados. Los docentes diferencian la idea de hacer demostraciones y la de enseñar a demostrar, siendo esto último algo que pocos reconocen llevar a cabo en el aula. Resulta de gran dificultad para los docentes y para los futuros docentes la identificación de la demostración como un contenido a enseñarse; se infiere de sus respuestas que ven a la demostración como un procedimiento propio de la matemática, indispensable para dar credibilidad a las afirmaciones de la matemática.

A partir de la experimentación que se acaba de mencionar y con el fin de comprender cuál es la finalidad con la que se presentan y trabajan las demostraciones matemáticas en el aula, se indagaron concepciones que poseen los docentes y los estudiantes de profesorado de matemática sobre las funciones de las demostraciones (Crespo Crespo & Ponteville, 2005). La investigación se focalizó no sólo en las funciones de la demostración en el aula, sino también en el ámbito de la investigación en matemática. En el análisis cualitativo realizado a partir de encuestas y entrevistas a docentes de nivel medio y superior y estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática, surge primeramente que para los encuestados no existen distintos niveles de demostraciones ni de argumentaciones, ambos términos fueron interpretados como sinónimos. Por otra parte, se evidencia una concepción de la matemática como única e atemporal, si bien se reconocen distintas maneras de realizar demostraciones para una propiedad dada. En ningún caso aparece la idea de la aceptación de las demostraciones dentro de una comunidad. No se puso en evidencia que reconozcan a la matemática como una construcción social, sino más bien que la consideran como una ciencia cuyos resultados son absolutos y que nace más allá de la sociedad. No hubo en estos aspectos diferencias significativas en las respuestas obtenidas según los interrogados tuvieran o no cursos a su cargo. La idea de argumentación en el aula apareció en estas investigaciones, unida a la presentación de teoremas en clase, evidenciándose algunas de las funciones de la demostración y reconociéndose la importancia de la demostración tanto en la investigación científica en matemática como en el aula, aunque sin manifestar explícitamente, a veces, las razones de dicha importancia. En algunos casos los docentes entrevistados identificaron que en el aula los alumnos no asumen la necesidad de demostrar, sino que creen que es suficiente el estudio de algunos casos particulares, manifestando la conciencia de la necesidad de crear en los estudiantes la noción de la necesidad e importancia de las demostraciones para que comprendan la esencia de las demostraciones como procedimientos que otorgan validez a los resultados en la matemática. Sobre la base de las ideas de de Villiers acerca de las funciones de la demostración (de Villiers, 1993), se analizaron las respuestas del grupo de docentes y estudiantes con el que se trabajó. Fue posible reconocer dentro de las respuestas que se referían a la importancia de la demostración en matemática y la demostración en el aula de matemática la presencia de algunas de las diferentes funciones atribuidas a la demostración por de Villiers. Algunos de los encuestados reconocen explícitamente varias de las funciones, otros, ninguna. Una conclusión interesante que pudo extraerse es que la función de verificación de las demostraciones es reconocida sobre todo en la matemática, mientras que en el aula la función que se reconoce como predominante es la de explicación. Esto muestra el énfasis de las explicaciones para lograr que los alumnos lleguen a comprender los conceptos y las propiedades que se están trabajando en el aula. Se denota el carácter didáctico de esta función. Según los resultados obtenidos en la investigación que se realizó, se observa, el papel y la función de la demostración en el aula, o ha sido totalmente ignorada o bien se presta como medio de certeza, y en menor medida de explicación. Estas dos funciones se pueden vislumbrar en gran número de las respuestas. Sin embargo, las de sistematización, descubrimiento y comunicación prácticamente no aparecen de manera explícita en el caso de los docentes en ejercicio, mientras que sí lo hacen, aunque con poca frecuencia, los estudiantes de profesorado de matemática, lo que lleva a la pregunta acerca de las causas de esta diferencia. Aunque se reconoce que el rol de sistematización puede y debe dejarse para niveles superiores por su grado de complejidad teórica, el desarrollo de los de descubrimiento y comunicación permiten la formación del concepto de demostración e incluso cobra importancia capital al hablar de argumentaciones, ya que se está desarrollando en los alumnos desde etapas tempranas como manifestación del pensamiento racional. El hecho de que los futuros docentes identifiquen estas funciones, tal vez signifique que ellos tienen muy reciente la vivencia de momentos en los que pusieron en juego esta función y lograron a través de la comprensión y utilización de sistemas formales la organización de conocimientos que habían ido adquiriendo de manera desordenada durante sus estudios y estén reflejando de esta manera experiencias propias. En conclusión, teniendo en cuenta que la enseñanza de la matemática debe reflejar la naturaleza de esta ciencia y su ejercicio profesional y que los alumnos requieren, como los matemáticos, de actividades significativas para su actividad, se concluyó que se requiere una mirada y un proceso más comprensivo de las funciones y del papel de la demostración y de las argumentaciones lógicas que el que se le da en forma tradicional en las aulas para lograr el aprovechamiento en el aula.

Estas investigaciones permitieron conocer posiciones, visiones y opiniones de los docentes frente a las demostraciones y su enseñanza en el aula de matemática e invitaron a continuar con la reflexión e investigación.

El origen de esta investigación

A partir de estas experimentaciones iniciales, fue posible comprender que el concepto de demostración y su enseñanza debía ser tenida en cuenta como una problemática de suma importancia en la formación docente para que este aspecto, que se considera tan central en la matemática actual como ciencia y cuyo valor formativo no es dudado por docentes y futuros docentes, no fuera dejado de lado en la enseñanza en los distintos niveles. Pero a su vez, era necesario tratar de comprender las causas de las dificultades que se presentan en el aula al requerir de los alumnos que argumenten matemáticamente resultados.

La investigación en este sentido, debería encararse abordando las argumentaciones matemáticas no sólo desde una perspectiva didáctica, sino intentando comprender su naturaleza desde una perspectiva múltiple y sistémica, tal como lo hace la socioepistemología.

Las preguntas que guían esta investigación son:

- ¿Es la forma deductiva de razonar realmente natural e innata en el ser humano? ¿O se trata una construcción sociocultural?

Esta pregunta puede traducirse desde una óptica socioepistemológica en:

- ¿Es la demostración matemática una práctica social?
- ¿Puede concebirse a la argumentación matemática como una construcción sociocultural?

Y la evidencia se buscará a través de interrogantes como:

- ¿Por qué algunas formas de argumentación, como la reducción al absurdo, se dieron en algunas culturas y en otras no?
- ¿A qué se debe que se manifiesten en el aula formas de argumentar no deductivas? ¿Cuáles son algunas de ellas?

Una visión socioepistemológica de la matemática

La postura de la matemática educativa, en la que se enmarca la investigación que realizamos, frente a la problemática de las demostraciones y argumentaciones en el aula, sustenta la consideración de que éstas se tratan de un elemento más que caracteriza la matemática presente en el aula.

> "*La matemática educativa no es la enseñanza de la matemática, ni la matemática escolar una simplificación de la matemática*". Su objeto de estudio son "*los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar." [...] "No nos reducimos a la búsqueda de una 'buena manera de enseñar' una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber".*
>
> (Cantoral, 1995, pp.2-3)

La línea de investigación que desarrolla la matemática educativa considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, o sea que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación se ha llamado formalmente el acercamiento socioepistemológico.

Puede decirse que la problemática de estudio de la matemática educativa es *"el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático,* *constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza*" (Farfán, 2003, p.5). Este proceso por el cual se incorporan los saberes matemáticos en el sistema educativo, plantea una serie de problemas de carácter tanto teórico como práctico que necesitan acercamientos teóricos y metodológicos adecuados. "*La socioepistemología se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y los diversos factores sociales*" (Lezama, 2005, pp.341).

El enfoque socioepistemológico a través del análisis integral desde las cuatro ópticas ya citadas anteriormente, permite comprender al conocimiento matemático como una construcción sociocultural. Por medio del reconocimiento de la naturaleza y construcción social del conocimiento matemático, se prioriza la actividad humana contrastando con los enfoques teóricos que giran alrededor del objeto matemático. La aproximación socioepistemológica de la matemática educativa, se ocupa de las problemáticas que plantean la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional.

En este caso, nuestro objeto de estudio son las argumentaciones matemáticas. Nos interesa, por lo tanto, hacer un análisis integral de ellas. A partir de este análisis surgirá la comprensión de las argumentaciones, como una construcción sociocultural, en la que cobra una importancia fundamental el escenario en el que se desenvuelven, y la posibilidad de analizar su construcción fuera de escenarios escolares y su incorporación en los mismos.

La comunidad matemática como institución del saber

En este momento intentamos presentar un análisis acerca de si es posible y bajo qué condiciones considerar a la comunidad matemática como una institución del saber, para comprender de qué manera se transmite éste.

Marta Souto, al caracterizar las distintas concepciones de institución afirma:

> *"Desde una aproximación etimológica que sitúa la utilización del término 'institución' en el siglo XIII, J. Beillerot desarrolla tres sentidos para este término. El más antiguo habla de 'establecer oficialmente' en un cargo o función y nombrar un heredero o sea que pone el acento en la sucesión y la legitimidad de algo que se establece. El segundo sentido es el más usual y se refiere a 'establecer de una manera durable'. Comenzar, erigir, crear, nombrar establecer, hacer, fundar formar instaurar, poner en pie expresan este sentido y son sinónimos posibles, dice Beillerot. El tercero, de uso corriente del siglo XVI al XVIII, dice que instituir es instruir. Ser la institución de alguien significa ser instruido por él, recayendo el sentido en aquel que es formado, instruido (sentido pasivo de instruir)".*

(Souto et al., 2004, p.19)

Sobre la base de estos significados la autora mencionada anteriormente define:

> *"Por institución se entienden las formas o estructuras fundamentales de la organización social tal como son establecidas por la ley o la costumbre de un grupo humano dado. Las instituciones corresponden entonces al orden social, a un sistema de normas o reglas sancionadas socialmente y organizan la vida de una comunidad."*

(Souto et al., 2004, p.19)

Bajo esta concepción es posible considerar a la comunidad científica como una institución guardiana y transmisora del saber de su ciencia, ya que si bien no posee un espacio geográfico concreto para su desempeño (excepto si consideramos como tal a las academias y universidades), sí posee un desempeño en el tiempo y una distribución de funciones, tareas y roles para cumplir su misión o función social. La ciencia como institución, es un "*sistema de producción de conocimiento cierto, riguroso y sistemático, basado en la recopilación de datos empíricos guiados por un sistema de racionalidad y obtenidos con una metodología objetiva*" (González Uceda, 1997). En el caso particular de la matemática, no hablamos de la recopilación de datos empíricos por tratarse de una ciencia formal, sino de resultados y propiedades de los objetos matemáticos. Se considera que la ciencia es establecida por consenso entre los científicos. La ciencia no es un fenómeno de hombres aislados, sino de grupos de investigadores en interacción. En esta concepción de ciencia, tiene indudable importancia el contexto social. *"La noción de institución da cuenta de la historia y de los valores fundacionales que estructuran el poder social y su distribución."* (Souto et al., 2004, p.20)

Para la comunidad científica, es preocupación fundamental el desarrollo de la coherencia interna de la ciencia y las maneras en las que se llega a un conocimiento fiable y comprobado. Las posturas relacionadas con estos mecanismos de validación han evolucionado dentro de la filosofía de la ciencia, reflejándose en la comunidad científica misma.

Otro concepto importante al referirnos a una institución es el de identidad institucional que se refiere en cierta manera a la existencia de una identidad colectiva, de aquello que permite a un individuo reconocerse como miembro de un grupo institucional. El sentido de identidad se vincula al de pertenencia y a la existencia de lazos sociales. Surge la necesidad de considerar el concepto de memoria colectiva. La identidad compartida es posible es posible porque hay una memoria que la construye, que se manifiesta en el presente recogiendo y resignificando el pasado y prolongándose en el futuro. “*La identidad institucional es una construcción, una representación en un doble sentido: de los miembros que generación tras generación han ido armando, modificando y conservando su texto y su trama y de quienes en un momento, siempre del presente, se interesan por conocerla, requiriendo un trabajo de rememoración personal, de reconstrucción de la memoria viva institucional y de hacer historia*” (Souto et al., 2004, p. 25).

Cabe preguntarnos, ¿qué constituye la identidad institucional de la comunidad científica matemática? Tal vez sea ésta, la concepción que tiene esa comunidad científica acerca de la matemática, y quizá de manera más general, su concepción de la ciencia. En esa concepción de la matemática cobra singular importancia la manera en la que se valida el conocimiento.

Una de las atribuciones de la comunidad científica, es cuidar las formas de validación del conocimiento, alejando de esta manera otras formas de conocimiento que no sea considerado científico. Los criterios de validación del conocimiento científico deben ser establecidos por la comunidad científica y se sustentan en su identidad institucional. Son, por lo tanto una construcción sociocultural que varía de una comunidad científica a otra, y que han ido evolucionando y modificándose a través del tiempo de una cultura a otra, de acuerdo con la visión de ciencia sustentada. En esta investigación, se centrará la atención en la comunidad matemática y en algunas de las actividades humanas y prácticas sociales que realiza como tal.

En los grupos humanos que se organizan en instituciones y comunidades, la transmisión generacional se orienta a la continuidad de la identidad institucional. El éxito de la transmisión supone la existencia de productores de la memoria reconocidos para llevar a cabo la transmisión, que son los depositarios de la memoria legítima.

El saber producido y aceptado por un grupo académico, se transmite a través de las publicaciones que realiza. Ya sea a través de la publicación de libros o de artículos en publicaciones periódicas, los miembros de la comunidad científica pueden hacer conocer sus investigaciones e ideas. Estas publicaciones favorecen la difusión de las ideas y abren el diálogo a otros investigadores que incluso pueden no pertenecer a ese grupo académico y que así les es posible acceder a resultados de investigaciones recientes.

Otro de los ámbitos de capital importancia para la difusión y enriquecimiento de saberes de un grupo académico en la actualidad son las reuniones y congresos, foros en los cuales se exponen y comparten las investigaciones realizadas con colegas, de manera presencial. En tiempos anteriores, es posible encontrar este tipo de comunicación puesto de manifiesto de a través de intercambios epistolares entre miembros de la comunidad: discípulos, colaboradores, colegas, amigos o enemigos... El análisis de las publicaciones de una comunidad científica permite conocer, entre otras cosas, cuáles son las formas de validación de sus conocimientos y de qué manera argumenta en favor de los resultados que acepta.

La matemática en su carácter social

Es básico en el enfoque socioepistemológico, el papel de los escenarios históricos, culturales e institucionales en las explicaciones del conocimiento desde la matemática educativa. El concepto de escenarios se afianzó a partir de la introducción del estudio de los contextos escolares e institucionales, comprendidos como fundamentales en la construcción y transmisión del conocimiento matemático (Martínez, 2005). En este marco, que parte de la consideración de que los saberes matemáticos son construcciones socioculturales, se comprende a los procesos de convención matemática como procesos sociales de construcción del conocimiento.

Desde la perspectiva socioepistemológica, la construcción del conocimiento es condicionada por circunstancias cognitivas (propias del funcionamiento mental), didácticas (propias de la conformación de los distintos sistemas didácticos), epistemológicas (propias de la naturaleza y significados del pensamiento matemático) y sociales (como proceso de síntesis de los objetos y herramientas de una sociedad). Estas circunstancias, de naturaleza diversa son las que originan que la matemática educativa enfoque desde las cuatro componentes correspondientes y de manera integral su estudio e investigación. En la perspectiva socioepistemológica, se identifican algunas unidades de análisis a tener en cuenta en una investigación (Martínez, 2005).

- La noción de ***actividad humana***, permite explicar el conocimiento en términos de herramientas usadas por el hombre para hacer matemática.
- La noción de ***resignificación*** se orienta a presentar el conocimiento con significados propios, contextos, historia e intención, contraponiéndolo a la idea platónica de preexistencia de los objetos y procesos matemáticos.
- La noción de ***práctica social***, medular en la socioepistemología, se refiere a las acciones intencionales de los grupos humanos para transformar la realidad social y material.

La matemática educativa, de esta manera se enfoca actualmente en ciertas nociones que en su carácter de práctica social logran una resignificación en el proceso de construcción del conocimiento. Por ejemplo, tal como lo presenta Gustavo Martínez, la noción de convención matemática, usualmente considerada como preestablecida e inmóvil, es entendida por la socioepistemología como un proceso de construcción del conocimiento, como una conveniencia para la matemática con el objeto de evitar contradicción o dar unidad. Esta visión permite cuestionar la idea de validez universal del conocimiento matemático, comprendiendo la condición social de las convenciones, que son de esta manera, entendidas como un proceso de búsqueda de consensos en el seno de la comunidad que trabaja para dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La sociedad matemática, de esta manera, en escenarios adecuados, construye conocimiento a partir de las prácticas sociales en ese escenario.

Para el enfoque socioepistemológico, al igual que para semiótica cultural, la actividad humana es central en la construcción del conocimiento, pero el énfasis socioepistemológico no está puesto en el objeto, sino en la práctica social, con el fin de modelar situaciones para la intervención didáctica (Cantoral et al., 2006). Analicemos más profundamente la concepción de práctica social tal como la ve la socioepistemología. Identificaremos posteriormente cuál es su relación con las argumentaciones y demostraciones matemáticas.

Las prácticas sociales en la matemática

Es importante que se indague acerca de las caracterizaciones existentes de las prácticas sociales, debido al papel que estas unidades de análisis cobran dentro del marco teórico socioepistemológico. En varias investigaciones de esta línea, han surgido caracterizaciones que con el tiempo han perfilado este concepto.

Se reconoce a las prácticas sociales como las influencias socioculturales que rodean a los fenómenos de construcción de conocimiento matemático y como el motor principal de la reorganización de la obra matemática, meta y objetivo de la matemática educativa, de esta manera, las investigaciones se orientan no hacia los conceptos en sí, sino hacia la manera en la que se construyen los conocimientos como producto de las prácticas sociales en los grupos humanos (Covián, 2005). Existe, entonces, una primacía de la práctica social sobre los objetos. Las prácticas sociales son reconocidas como acciones de grupos sociales que se dan en cierto escenario sociocultural, en las que se reflejan las características de ese escenario. Por ello se considera el carácter situado de las mismas, debiendo se estudiadas no de manera aislada, sino teniendo en cuenta al escenario en el que se dan y a la manera en la que éste influye de manera inseparable de él y del grupo humano.

Comprendiendo al aprendizaje como parte de la naturaleza humana, y por lo tanto como una actividad que se desarrolla en un escenario, no como una actividad separada de éste, sino como fundamental en él, se lo comprende como parte del proceso de participar en una práctica que siempre implica a toda la persona actuando y conociendo al mismo tiempo, poniendo en juego aspectos explícitos e implícitos del escenario. "*El concepto de “práctica” connota hacer algo pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido, la práctica es siempre una práctica social. […] En los contextos sociales, donde se ejercen prácticas sociales, se incluye todo, en ese sentido no es una realidad escindida, aunque a veces haya diferencia entre lo que decimos y lo que hacemos, aquello a lo que aspiramos, lo que nos conformamos, lo que sabemos y lo que podemos manifestar*" (Arrieta, 2003, pp.63).

Pero las prácticas sociales no se refieren únicamente al aprendizaje, involucran los conocimientos matemáticos eruditos, escolares, el uso, construcción y aplicación de conocimientos matemáticos, así como también las creencias, opiniones y actitudes que surgen en la sociedad relacionadas con la matemática.

Las prácticas sociales están presentes como una noción que forma parte del conocimiento mismo, es algo que está oculto, que no se puede tocar o nombrar porque no está manifestado materialmente pero sin embargo se siente (Covián, 2005).

> *"Entendemos pues, por prácticas sociales, el conjunto de acciones que surgen y permanecen en el ambiente social, afectando y conformando la psique de todo individuo. La práctica social no es estática es activa se está construyendo día a día y es producto del hombre mismo, su característica principal es que es vigente y genera consenso, no siempre se*

> *manifiesta o percibe con toda claridad, puede estar oculta, pero se intuye y se presiente, la práctica social puede estar constituida por actividades motrices o intelectuales, [...] otra característica de la práctica social en matemática educativa es que ésta no atañe a un solo individuo sino a comunidades de individuos".*
>
> (Mingüer, 2006, pp.8-9)

Olda Covián identifica en su investigación que el papel de la práctica social en la construcción del conocimiento ha transitado por tres niveles de evolución que denomina etapa inicial, etapa primaria y etapa teórica. La etapa inicial se caracteriza por la *identidad* entre la noción de actividad humana y práctica, en sentido genérico, refiriéndose a actividad humana y práctica de manera indistinta, y dando las características que posee una automáticamente a la otra. La etapa primaria muestra la relación *dialéctica* entre la noción de actividad humana y praxis, explicando las propiedades de uno en conexión con el otro e identificando las características de la actividad humana en conexión con las de la práctica. La etapa teórica introduce una relación compleja entre las nociones de actividad humana, praxis y práctica social. En este nivel aparece una nueva concepción en la que ya no se habla de práctica, sino de praxis, separando a la actividad humana de la práctica y reconociendo características en cada una. La actividad humana es representada por el verbo y caracterizada por una función pragmática; la praxis, por una función reflexiva que analiza la construcción correspondiente, la práctica social debe caracterizarse por la función normativa, concibiendo al proceso de institucionalización como el proceso que reconoce la evolución en las prácticas. La práctica social es reconocida, de esta manera como normativa de la actividad, no es lo que hace el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen (Cantoral et al., 2006).

Otra presentación de las prácticas sociales, es posible encontrarla en la tesis doctoral de Gisela Montiel:

> *“La **actividad** como aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos, **la práctica de referencia** como un conjunto articulado de actividades, también cómo aquella que permite la articulación de la actividad con la práctica social, la **práctica social** como reguladora (normativa) de la práctica de referencia y sus actividades relacionadas”*
>
> (Montiel, 2005)

En esta investigación, se retoma la concepción dada por Covián y se explicitan las diferencias entre los términos actividad, práctica de referencia y práctica social.

Una caracterización de los escenarios socioculturales desde la socioepistemología

Otro término cuya significación es preciso clarificar dentro del marco teórico de la socioepistemología es el de escenario sociocultural. Para lograr caracterizar los escenarios, resulta útil remontarse a la caracterización que se realiza de los escenarios desde la psicología ecológica. En este enfoque de la psicología comenzó a utilizarse el término escenario fuertemente unido a la idea de acción social.

Por reconocer nuestro interés por las construcciones socioculturales y las prácticas sociales, se considera indispensable en este trabajo, comprender la significación de los escenarios de conducta para posteriormente estar en condiciones de centrarse en la identificación de los elementos básicos que desde la matemática educativa se reconocen en los escenarios socioculturales y de ésta manera comprender la influencia fundamental que ejercen sobre la construcción y transmisión de los conocimientos matemáticos.

Los escenarios para la psicología ecológica

La psicología ecológica (Rojas, 2004) ha planteado un acercamiento contextual al estudio del desarrollo humano. Este enfoque se centra en un nuevo modo de abordar el análisis de los contextos educativos desde el punto de vista de su significación psicológica y sus resultados son considerados como fundamentales para la comprensión del hecho humano y del hecho escolar como escenario de desarrollo-educación. En este enfoque, toda conducta humana es concebida como un cambio de cierto estado de un campo en una unidad de tiempo dada. Los escenarios son comprendidos como espacio vital del individuo, en los que se desenvuelve la persona y el ambiente psicológico tal como existe para ella. Si se trata de un grupo, el espacio vital del mismo consiste en ese grupo y su ambiente tal como éste existe para el grupo.

El concepto escenario de conducta es un concepto clave de este enfoque.

> *"Un escenario de conducta es la unidad básica del tejido de las sociedades provista de identidad propia e indivisible y que en su acción construye, en gran medida la dotación psicológica de los individuos. El escenario de conducta está formado por la conjunción de entidades ambientales, entidades sociales y objetos, que se relacionan dentro de un sistema integrado de fuerzas y controles, que mantienen las actividades en un equilibrio semi-estable*".
>
> (Rojas, 2004 p.85)

En esta teoría se diferencian dos tipos fundamentales de propiedades que caracterizan a los escenarios: estructurales y dinámicas. Las primeras se refieren básicamente al armazón invariante de los escenarios, las segundas, a sus aspectos cambiantes.

Entre las propiedades estructurales de los escenarios se identifican los patrones fijos de conducta que se desarrollan de acuerdo con pautas programadas estables, que se encuentran insertos en ambientes y contextos determinados y que limitan en cierta manera las acciones. Algunas de las propiedades estructurales de los escenarios son, por ejemplo:

- las fuerzas físicas del escenario, dadas por características geográficas
- las fuerzas derivadas de aspectos sociales: rangos o status
- las fuerzas vinculadas a lo fisiológico que proceden del contexto; por ejemplo: temperatura ambiental que tiene efectos en la temperatura corporal o estados de ánimo
- la influencia coercitiva del ambiente sobre la conducta pues la organización de espacios u objetos que inciden en los patrones de relación

Estos aspectos se reconocen fácilmente a través de la percepción. Todos los escenarios tienen un soporte físico de alguna manera y, aún cuando puedan a veces parecer no determinantes, si se los analiza cuidadosamente, se percibe la influencia que tienen sobre las conductas de los individuos que habitan el escenario.

Las propiedades dinámicas de los escenarios son las que les dan singularidad a los escenarios, dando origen a distintas configuraciones que condicionan fuertemente los mismos. Entre ellas podemos citar:

- el locus geográfico: es el lugar físico concreto, por ejemplo un aula, un laboratorio
- el locus temporal: son singularidades temporales del escenario, que le dan características propias, como la hora, duración, el encadenamiento de hechos
- la población: en un escenario de conducta, las características de los habitantes (edad, sexo, clase social), son determinantes para determinadas conductas

- el tiempo de ocupación: el tiempo que invierten en el desempeño de las tareas relacionadas con el escenario
- la posición funcional de los habitantes: categorías y posiciones sociales en el escenario
- los mecanismos de conducta: patrones de conducta afectivos, motrices y verbales
- la presión: fuerzas que obligan a actuar o no de determinada manera, que pueden provenir del escenario en general o de individuos concretos
- la autonomía: independencia del escenario en relación a otros escenarios que constituyen su entorno
- los bienes: grado y manera en que el escenario cubre las necesidades de los individuos que lo componen

Estos aspectos no se reconocen a veces de manera sencilla, a veces, incluso, no son estables, ni son fáciles de delimitar, y pueden presentar entre sí vínculos ocultos, pero sin lugar a dudas su influencia en la conformación de un escenario es fundamental.

Además, los escenarios no se encuentran generalmente aislados unos de otros. Existen interrelaciones entre los escenarios, que determinan influencias entre ellos y por lo tanto, en las conductas que generan. Un escenario determinado puede estar recibiendo influencias de otros escenarios que existen simultáneamente con él o de escenarios del pasado. Esas influencias forman parte de los escenarios. Los escenarios influyen directamente sobre las conductas de los individuos que lo habitan. Por otra parte, si bien también en estas conductas se ponen de manifiesto maneras de pensar y de comprender la realidad propias del individuo.

Los patrones estándar de conducta son intransferibles, esto significa que muchas conductas no pueden exportarse de un escenario a otro, ya que son propias de un escenario dado y bajo ellas subyacen fuertemente las características de él que le dan sustento. Los patrones de conducta pueden ser clasificados de maneras diversas, teniendo en cuenta características de los individuos que lo conforman en cuanto a grupo social: duración, sexo de los habitantes, orientación hacia el juego o el trabajo, densidad de población, mecanismos de conducta, grado de autonomía, etc., sin embargo no se puede considerar las clasificaciones aisladas entre sí para estudiar las características de un escenario, ya que este es una totalidad producto de sus características.

Otro elemento a tener en cuenta en el análisis de escenarios y conductas es que todos los habitantes de un escenario son importantes para él, si bien se puede decir que cuanto más central es la posición de un individuo en un escenario, mayor será su influencia sobre él. El rol que desarrolla un individuo dentro de un escenario dado depende de muchos factores, pero este rol se refleja en la influencia que posee sobre los otros actores del escenario. Quienes participan de la dinámica de un escenario, lo hacen de diferentes modos, reflejando capacidades y grados de involucración y responsabilidad. Puede tratarse de observadores, audiencia o invitados, miembros o clientes, funcionarios activos o dirigentes. En esta enumeración que se acaba de hacer, se muestra un grado creciente de acción en el escenario y con distintos patrones de conducta. Por ejemplo, la influencia de las opiniones de los actores de un escenario en éste, varían según los roles que desempeña el actor mencionado, cuanto más central sea su rol, mayor será su influencia; sin embargo, aún actores no centrales pueden influir en las acciones de un grupo social que se encuentre en cierto escenario.

Los escenarios socioculturales

Cabe ahora preguntarse si la concepción de escenarios que maneja la socioepistemología coincide totalmente con la presentada por la psicología ecológica, y de qué manera las características de estos últimos pueden influir en la construcción del conocimiento matemático. Se intentará a continuación caracterizar los escenarios socioculturales sobre la base de la descripción que se acaba de presentar.

Toda persona se encuentra inmersa en una sociedad, se reconoce el individuo como un ser social. Vive rodeado de un contexto, que denominaremos lo sociocultural, que tiene ciertas significaciones colectivas. Estas tienen su origen en la cultura y en la sociedad, se vinculan con las características individuales cuyas fuentes son la personalidad y el carácter. En esa sociedad, se ha visto que se llevan a cabo prácticas sociales que se manifiestan como: ideas, opiniones, creencias, cultura, ideologías, modas, entre otras, que definen lo sociocultural (Mingüer, 2006). Lo sociocultural es un sistema que abarca todos los fenómenos sociales, que surgen de algún grupo social culturalmente situado.

Las características de los escenarios de acción de la psicología ecológica también son propias de los escenarios socioculturales. Pero es radical reconocer ciertos rasgos que les son propios y que permiten comprender su papel en este marco teórico. Los escenarios socioculturales son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales. Están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos que constituyen las sociedades específicas. En estos escenarios se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico, o podemos decir más generalmente: culturales.

El escenario sociocultural influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando, de cierta manera sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente. Todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural, y por lo tanto representativo de la sociedad en la que se gesta.

Es importante realizar ahora una diferenciación entre escenarios académicos y no académicos, ya que imprimirán ciertas características representativas al conocimiento matemático que en cada uno de ellos se construya. Algunos autores identifican tres tipos de escenarios socioculturales: cotidiano, escolar y científico (Rodrigo, 1997). Cada escenario asocia a la construcción del conocimiento una epistemología que guía el qué, el porqué y el cómo se construye el conocimiento. Consideramos escenarios académicos a los escolares y científicos, o sea a aquellos en los cuales el conocimiento científico es intencionalmente central, ya sea a través de actividades matemáticas de investigación o de enseñanza. En estos escenarios uno de los objetivos explícitamente planteados por sus actores es la construcción del conocimiento, en nuestro caso, el conocimiento matemático. Esta construcción se lleva a cabo de manera intencional, aunque en algunas oportunidades el conocimiento construido no sea el esperado inicialmente.

En los escenarios académicos, los actores poseen la intencionalidad manifiesta de construir y desarrollar el conocimiento científico. Podemos citar entre estos escenarios los ámbitos de investigación que edifica la comunidad matemática y los ámbitos educativos en los distintos niveles y modalidades, en los cuales el docente se propone transmitir el conocimiento al discípulo o al alumno. En los escenarios no académicos, el conocimiento científico no es central de manera intencional, pero eso no significa que en ellos no se pueda construir y manejar este tipo de conocimiento, e incluso influir en la construcción de conocimiento que se lleve a cabo en un escenario académico.

Es posible desde la socioepistemología analizar, por ejemplo de qué manera influyen los conocimientos adquiridos en un escenario no académico en la construcción que se realice posteriormente de un conocimiento en un escenario académico, como puede ser el aula.

La matemática para la socioepistemología

Puede decirse que la matemática es tan antigua como la organización social del ser humano. A lo largo de la historia, es posible encontrar muchas definiciones de la matemática. Cada cultura definió esta ciencia de acuerdo con el desarrollo que había heredado y realizado, de la aplicación que le daba a las mismas y de la concepción que tenían de ciencia.

Se la ha definido como la ciencia del orden y de la medida, como la ciencia en la que nunca se sabe de qué se habla ni si lo que se dice es cierto, como un juego con reglas muy sencillas que deja marcas sin significado en un papel, como la ciencia de las cosas evidentes e incontrovertibles, como un lenguaje, como el lenguaje del universo, como la ciencia que estudia las cantidades y las formas... y de innumerables maneras más. Cada una de estas definiciones o caracterizaciones denota claramente una posición epistemológica, una visión de la ciencia, de cuáles son los conceptos y nociones que estudia la matemática, de cuáles son sus métodos de estudio y de validación de resultados. En resumen, están denotando las características del escenario en el que se está dando la definición correspondiente.

Podríamos preguntarnos: pero, ¿qué es realmente la matemática? o bien, situándonos en nuestro marco teórico y haciendo desde allí la pregunta: ¿qué es la matemática para la socioepistemología? Suele afirmarse también que la matemática forma parte intrínseca de la cultura de los pueblos, se trata en realidad de una manifestación cultural de una sociedad. Se trata de un producto cultural de la sociedad y por lo tanto para cada escenario tendremos una definición de matemática que refleja las características de aquel.

La visión de la socioepistemología acerca de la matemática considera cada una de las caracterizaciones que surgen en cada escenario, y a partir de ellas, considera que matemática es cada una de ellas, es todas ellas. Cada una, como reflejo del escenario correspondiente, pues la ve como una ciencia que se aprende durante toda la existencia del ser humano de cada sociedad, como producto de las construcciones que realiza en relación con los objetos matemáticos que en ella se construyen socioculturalmente.

Capítulo 2

Estado del arte: La evolución de las investigaciones sobre argumentaciones matemáticas

A lo largo de la historia, muchos docentes e investigadores interesados en la matemática y su enseñanza, se han cuestionado y formulado preguntas diversas acerca del conocimiento matemático, su naturaleza, su construcción, su comprensión y su transmisión. Este interés ha existido desde tiempos remotos, pero ha ido creciendo y se ha organizado de manera sistemática más recientemente. En el siglo pasado se ha producido una importante evolución en los enfoques de las investigaciones encaradas en este área. Estas investigaciones se han dirigido hacia diversas temáticas de la matemática. Distintos objetos y conceptos matemáticos han sido abordados a lo largo de estas investigaciones en constante evolución. En particular, las argumentaciones y demostraciones como mecanismo de validación y avance de la matemática han sido estudiadas desde distintas ópticas en relación con los estudios didácticos que acontecen cuando los saberes matemáticos que han sido construidos socialmente fuera de ámbitos escolares, llegan al escenario escolar.

Se presenta este capítulo un breve análisis de los enfoques de algunos de los estudios que se han realizado en relación con las argumentaciones y su importancia en el aula de matemática. Se han elegido algunas investigaciones, pero esta selección no pretende ser exhaustiva; sino que se focaliza en algunas que por sus características son significativas. Se presentan primeramente de manera somera, algunas características de los enfoques con los que se ha abordado la matemática educativa desde su inicio hasta llegar a los estudios actuales, con el fin de poder enmarcar en ellas las investigaciones sobre las argumentaciones matemáticas.

Evolución de la matemática educativa

Para analizar la evolución de la matemática educativa se ha tomado como base la presentación de la misma realizada por Ricardo Cantoral y Rosa María Farfán (Cantoral & Farfán, 2003; Farfán, 2003).

El primer enfoque de la matemática educativa ha sido denominado una **didáctica sin alumnos**. Estas investigaciones se enfocan hacia los modelos teóricos centrando la atención en la actividad matemática. Esto condujo a la consideración del conocimiento matemático con carácter universal, ofreciendo esquemas explicativos de las construcciones a través de los objetos matemáticos. Los investigadores se ocuparon de la producción de diseños de presentaciones del contenido escolar orientadas a lograr una mejor comprensión por parte de los estudiantes, en comparación con las presentaciones tradicionales. No se tuvieron en cuenta en este enfoque cuestiones relacionadas con la naturaleza cognitiva o afectiva ni socioculturales.

Posteriormente, surgieron estudios acerca de la naturaleza cognitiva y se comenzó a considerar el aprendizaje del alumno como factor central del diseño de actividades. Se construyeron así epistemologías modelizadas por la actividad matemática que orientan el entendimiento del conocimiento matemático como producción hecha por el ser humano. Bajo esta visión, la matemática escolar es interpretada buscando en las representaciones escolares un reflejo de la actividad de los matemáticos: de su interpretación de la realidad o de la verbalización de nociones cognitivas y significados preexistentes (Cordero, 2001). Una **didáctica sin escuela** es la característica de lo que podría llamarse el segundo enfoque de la matemática educativa. En él se orientan las investigaciones hacia estudios de la naturaleza cognitiva, basada en la observación y descripción sistémica de los logros de los estudiantes y de las experiencias de aprendizaje. La idea conductora de estas investigaciones es que a partir de estos estudios es posible lograr una explicación de la manera en que se aprende la matemática que constituiría la base de diseños curriculares.

Pero además, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática deben ser reconocidas como actividades humanas, es con carácter de construcción social y cultural que se construye el conocimiento. Este hecho obligó a la incorporación de la escuela como institución en la que se reconocen categorías del conocimiento matemático relacionadas a las reconstrucciones de significados de la matemática considerada no ya con un carácter universal, sino sustentado por la actividad social del hombre. Surge de esta manera un enfoque caracterizado como **didáctica en la escuela pero sin escenarios**. La matemática educativa se ocupa entonces de la problemática de la enseñanza de la matemática identificando una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, distintas en naturaleza y función. Estas diferencias deben ser tenidas en cuenta al analizar mecanismos de construcción y reconstrucción dentro de la organización social. No se trata únicamente de secuenciar y temporalizar contenidos, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de elementos técnicos, tecnológicos y teóricos.

Se realizaron aproximaciones sistémicas tendientes a explicar fenómenos didácticos considerando distintos elementos en juego: el saber, el docente, el alumno y las relaciones entre ellos. Asimismo, se estudió la manera en la que se construye el conocimiento matemático, el significado que se le da en sus orígenes. A partir de entonces se comienza a poner mayor atención en las investigaciones en aspectos socioculturales, comprendiendo que debe reformularse la visión epistemológica centrándose en el ser humano más que en el conocimiento y viendo a su producción como una producción sociocultural. Esta línea de investigación no considera solamente las epistemologías modelizadas a través de la actividad matemática, sino a través de la actividad humana. La visión originada entonces, puede calificarse como una **didáctica en escenarios socioculturales**. La socioepistemología incorpora en su estructura cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento: las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Esta aproximación, intenta articular las componentes social y epistemológica, buscando explicaciones de la actividad humana, en este caso matemática, como resultado de la organización social. De esta manera es posible tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple e integral. La socioepistemología plantea una diferencia básica en relación con las aproximaciones epistemológicas, ya que mientras éstas asumen que el conocimiento es resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas no teniendo en cuenta los escenarios históricos, culturales e institucionales, el enfoque socioepistemológico reconoce el conocimiento situado, reflejo de circunstancias y escenarios socioculturales particulares, de la interacción de la epistemología que da una visión de la ciencia, con factores sociales.

Es importante hacer notar que la evolución que se ha presentado no implica la existencia de etapas sucesivas desde el punto de vista cronológico, sino que se trata de enfoques que coexisten temporalmente en muchas oportunidades tanto en el pasado como en la actualidad. Lo que están poniendo de manifiesto son posiciones de quienes las sustentan en cuanto a su visión y su posición epistemológica frente a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Las investigaciones existentes acerca de las demostraciones

Desde tiempos remotos se ha unido la matemática con el razonamiento, como se comentó con anterioridad. La lógica y la matemática se encuentran relacionadas. Diversos pensadores han mantenido posturas diferentes acerca de esta relación, aunque a veces con posiciones encontradas, pero siempre se coincide, sin embargo, en afirmar la afinidad indudable entre matemática y lógica. Cualquiera sea la postura adoptada, es inevitable al hacer referencia a la matemática, pensar en el razonamiento lógico para adquirir sus conceptos y para desarrollar y aplicar los mismos. Por ello al reflexionar sobre la matemática y su enseñanza, se hizo imprescindible plantear el análisis de su relación con las formas de razonamiento presentes en los conocimientos matemáticos.

Se acepta por lo general, que el conocimiento matemático se sustenta básicamente en dos modos de comprensión y expresión: uno que podríamos calificar como directo, que corresponde a la intuición y el otro se lleva a cabo de forma reflexiva, es decir lógica. Estos modos de conocimiento, aunque de naturaleza distinta, son complementarios e indispensables en las actividades matemáticas. El primero es creativo y subjetivo, mientras que el segundo es analítico y objetivo. Ambos se combinan en el proceso mediante el cual se describen los objetos matemáticos, sus relaciones y la manera en la que es posible operar o interactuar con ellos. El término “intuición” ha sido utilizado a través de la historia de la humanidad con diversos significados y en diversos contextos. Por otra parte, son innumerables las investigaciones llevadas a cabo acerca de la relación entre la matemática y las formas de razonar, intentando comprender la manera en la que se genera, se comprende, se transmite y se aprende la matemática a través de las formas lógicas de razonamiento. Muchas de estas investigaciones se centran en las demostraciones y argumentaciones matemáticas, su papel en el quehacer matemático en la escuela.

Analizaremos brevemente algunas de estas investigaciones intentando identificar en ellas bajo qué enfoque de los que se han presentado anteriormente de la matemática educativa es posible ubicarlas. Los investigadores que se han ocupado de las demostraciones en la matemática, o más generalmente del pensamiento racional en la matemática, son de formaciones y escuelas diversas y responden, por lo tanto, a enfoques muy distintos. Algunos se han centrado más en unos aspectos que en otros, y estas investigaciones reflejan en algunos casos enfoques claramente diferenciados y característicos. En otros casos, resulta difícil encuadrarlos dentro de alguna de las etapas de evolución de la matemática educativa que hemos descrito someramente con anterioridad. No obstante, intentaremos a continuación hacer una presentación de la evolución de las investigaciones en este área de la didáctica de la matemática y algunos de los resultados a los que se han llegado en ellas.

a. Las argumentaciones matemáticas en una didáctica sin alumnos

i. Jean Piaget

El investigador ginebrino Jean Piaget realizó estudios acerca de la lógica de los niños en el plano del lenguaje y del pensamiento verbal. En sus investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento infantil, analiza las características de las construcciones lógicas del niño y sus relaciones con el pensamiento formal.

Para Piaget, la argumentación surge junto con la socialización (Piaget, 1992). En un principio, al no necesitar socializar su pensamiento, no tiene la exigencia de convencer ni de dar pruebas de lo que afirma. El pensamiento infantil se diferencia del de los adultos por ser menos deductivo y riguroso. El razonamiento lógico para Piaget consiste en el "*encadenamiento de proposiciones de manera que cada una contenga la razón de la que le sigue y sea ella misma demostrada por la que le precede" [...] "El razonamiento lógico es siempre una demostración"* (Piaget, 1992, p.15). A partir de esta definición, se centra en el análisis de los nexos o conectivos que encadenan proposiciones en el discurso, haciendo hincapié en la causalidad y las conexiones lógicas. Los enlaces causales en los niños no siempre denotan una justificación lógica, siendo en un principio muchas veces una yuxtaposición de enunciados. A medida que el niño va aumentando la socialización de su pensamiento, incrementa la cantidad de "porqué" que utiliza, aunque no siempre les da una función de causalidad. El enlace de implicación no relaciona un hecho con otro independiente de él, sino una razón con su consecuencia. Es recién a partir de los 7-8 años que comienzan a diferenciarse los distintos tipos de enlaces y la relación de implicación se convierte en autónoma. La implicación lógica se origina psicológicamente en la justificación, en la motivación de un acto. Muchas veces se detecta en los niños la inversión de antecedentes y consecuentes. Una expresión propia de los razonamientos lógicos en los adultos es el "por lo tanto"; ésta no aparece en el lenguaje de los niños hasta los 11-12 años, "*edad en que aparece el pensamiento formal*" (Piaget, 1992, p.40). En los adultos sirve como suministro de prueba, en presencia de una deducción. El razonamiento infantil previo a los 11-12 años se encuentra ligado a lo concreto, a la observación directa. A partir de esa edad, se ponen en juego diversos planos de la realidad y cobra importancia desde la observación empírica, el pensamiento formal y la comunicación verbal. Se toma conciencia de las implicaciones y el razonamiento comienza a operar sobre creencias. La necesidad de verificación nace cuando nuestro pensamiento choca con el de los demás y nos enfrenta a la duda y a la necesidad de probar. La prueba nace de la discusión. Sólo a partir de entonces es posible construir deducciones. Ante un razonamiento que conduzca a un absurdo, el niño *"o bien acepta el dato y no ve su absurdidad, o bien lo rechaza como absurdo, pero sin ver la absurdidad formal del razonamiento propuesto"* (Piaget, 1992, p.225).

En relación a los estudios que realiza, Piaget afirma:

> *"Tal vez algún día sea la lógica del niño la que explique la lógica del adulto, si es que la historia debe iluminarnos sobre la*

> *naturaleza del pensamiento, como lo quiere el método histórico-crítico."*
>
> (Piaget, 1992, p.91).

La investigación psicológica, también llamada psicogénesis de la formación de los conceptos, permite para Piaget, comprender cómo evoluciona el conocimiento. La propuesta que surge a partir de los estudios de Piaget para comprender la lógica existente tras la matemática, es pensar que no nos regimos exactamente por la lógica aristotélica, sino por la lógica de la pertinencia y la necesidad y que, para construirla se basa el ser humano en las implicaciones causales entre significaciones y no en relaciones lingüísticas como el tratamiento que realiza la lógica proposicional. (Piaget & García, 1988)

ii. Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam

Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, realizan una presentación acerca de la matemática y su enseñanza en la que cabe destacar el tratamiento que hacen en relación con las demostraciones. (Rey Pastor & Puig Adam, 1948). La idea de esta obra es caracterizar la metodología de la matemática y su enseñanza, dando una serie de pautas que deberían seguirse para desarrollar la metodología en el aula. La reflexión didáctica que realizan no era usual a mediados del siglo XX, por lo que esta obra constituye un antecedente pionero que consideramos importante de mencionar.

Para ellos, la enseñanza de la matemática en el nivel primario tiene un carácter predominantemente instrumental; en el secundario, educativo y, en el superior, profesional. Si bien reconocen la importancia de la inducción en el descubrimiento matemático, sostienen que la escuela debe enseñar el carácter racional, siendo fundamental el salto de la enseñanza intuitiva a la racional, "*que sólo debe hacerse en su tiempo y sazón*" (Rey Pastor & Puig Adam, 1948, pp.23), estableciendo por vía experimental o intuitiva las relaciones más sencillas y una vez admitidas éstas, estableciendo por vía deductiva todo lo demás. Claramente se está haciendo referencia de esta manera a los sistemas axiomáticos dentro de la matemática.

Resumiendo

En los estudios de los autores que acabamos de presentar, se observa claramente que se trata de una didáctica sin alumnos, en la que se busca un modelo del pensamiento racional, sin tener en cuenta que los sujetos de estudio se encuentran en la escuela; su mirada se centra sólo en el sujeto. El modelo que se intenta construir está más allá de que el sujeto que razona sea un alumno, se intenta construir un modelo para el pensamiento racional que se reflejará en el pensamiento formal y por ello en la matemática. Si bien en el caso de Rey Pastor y Puig Adam se hace referencia a un cambio de la enseñanza intuitiva a la racional, no identificamos en ellos el desarrollo de una didáctica con alumnos, ya que en cierta manera se asume como natural que dicha transición se llevará a cabo *"a su tiempo"*, esperando que los estudiantes tengan la madurez suficiente para lograr construir ese contenido. Si bien en el caso de Piaget, se hace énfasis en la componente cognitiva, todos sus estudios se realizan sin considerar que se trata de alumnos.

b. Las argumentaciones matemáticas en una didáctica sin escuela

i. Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele

Las causas del fracaso de la enseñanza de la geometría tradicional fueron estudiadas por los investigadores holandeses Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele en sus tesis doctorales defendidas en la Universidad de Utrecht en 1957. Ellos atribuyeron al hecho de que los diferentes temas son presentados en un nivel más alto del que pueden acceder los alumnos. Para explicar esta idea la teoría plantea la existencia de cinco niveles de pensamiento vinculados con el desarrollo de los conocimientos geométricos y que han sido muy aplicados por investigadores para proponer innovaciones didácticas acordes con esta teoría (Camargo Uribe & Samper de Caicedo, 1999). Los alumnos recorren los siguientes niveles:

Nivel 1: *Nivel de reconocimiento o visualización. Se r*econocen visualmente figuras por su apariencia global, no hay diferenciación de componentes.

Nivel 2: *Nivel de análisis. Se e*mpiezan a percibir intuitivamente propiedades de las figuras y se aprende la terminología técnica apropiada para describirlas apareciendo, pero no se relacionan las figuras entre sí o las propiedades de las figuras.

Nivel 3: *Nivel de orden o deducción informal.* Se perciben lógicamente propiedades geométricas y entienden relaciones entre figuras. Pueden formularse y comprenderse definiciones, refutarse mediante contraejemplos. Estas ideas todavía no pueden ser organizadas en una teoría deductiva.

Nivel 4: *Nivel de deducción formal.* Se empiezan a desarrollar secuencias más largas de proposiciones y a entender el significado de la deducción, los axiomas, los teoremas y la demostración adquiriendo la comprensión de los sistemas formales. Pueden construirse demostraciones alternativas, diferenciar condiciones necesarias y suficientes, etc.

Nivel 5: *Nivel de rigor.* Se comprenden sistemas formales considerados como objetos de conocimiento: sus características, propiedades, construcción de sistemas alternativos. La geometría es captada en forma abstracta.

La investigación de Van Hiele continúa afirmando que el avance a través de los niveles depende más de la instrucción recibida que de la edad o madurez. Así, el método y organización de la enseñanza, además del contenido y los materiales empleados, son imprescindibles como referencia pedagógica. Para llevar a cabo esos principios, se proponen cinco fases secuenciales de aprendizaje: interrogación, orientación directa, explicación, orientación libre e integración afirmando que la instrucción desarrollada de acuerdo con esa secuencia promueve la adquisición de cada uno de los niveles. hagamos una descripción de cada una de estas fases:

> ***Fase 1***: *Interrogación/Información*. Se llevan a cabo conversaciones y actividades acerca de los objetivos de estudio, se hacen observaciones, se plantean preguntas y se introduce vocabulario específico de cada nivel. El docente comprende qué conocimiento previo tienen los estudiantes acerca del tema y los estudiantes aprenden en qué dirección se dará el estudio posterior del mismo.
>
> ***Fase 2***: *Orientación dirigida.* Los estudiantes exploran el tema de estudio mediante materiales que el docente ha seleccionado. La mayoría de las actividades son breves, diseñadas para lograr respuestas específicas.
>
> ***Fase 3****: Explicación.* Los estudiantes expresan e intercambian expresiones acerca de las estructuras que han estado observando teniendo en cuenta lo que han podido hacer anteriormente. El docente tiene un espacio muy pequeño dentro de esta fase pues debe auxiliarlos solamente en el uso del lenguaje específico y dejarlos expresar a través de sus propias palabras.
>
> ***Fase 4****: Orientación libre.* Los trabajos para los alumnos revisten mayor complejidad: varios pasos, diferentes opciones de resolución y pueden presentar resultado no único, surgen maneras propias de resolución.
>
> ***Fase 5:*** *Integración*. Integrar y resumir todos conocimientos desarrollados permite llegar a esta última fase. Esto permite hacer una revisión global de los objetos matemáticos estudiados y de sus vinculaciones.

Cumpliendo estas fases, el alumno alcanza un nuevo nivel de pensamiento. De esta manera irá trasladándose de uno a otro nivel hasta llegar al deseado para cada ciclo educativo.

ii. Raymond Duval

Raymond Duval se concentra en la problemática del pasaje de la argumentación al razonamiento matemático, desde una óptica cognitiva. Por una parte se recurre a registros de representación semiótica, algunos de los cuales son específicamente desarrollados para efectuar tratamientos matemáticos; y por otra, los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción, como ocurre con la mayoría de los objetos en las otras disciplinas. Sus investigaciones se centran en identificar la existencia de continuidades o rupturas cognitivas en los pasajes entre argumentaciones, explicaciones y demostraciones (Duval, 1999, 2000).

Duval diferencia claramente entre estos términos utilizados en el contexto de la matemática y su enseñanza:

- Una ***argumentación*** trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición
- Una ***explicación*** da una o más razones para volver comprensible un dato, fenómeno o resultado
- Una ***demostración*** es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas
- Un ***razonamiento*** es un proceso vinculado con la explicación en el que se dan razones con la finalidad de comunicar su fuerza de argumento a las afirmaciones que se deben justificar

Para este autor, el concepto de argumentación se encuentra estrechamente ligado al de justificación de una afirmación o una tesis, o bien en contra de una afirmación que se desea refutar. Sin embargo, en el proceso de justificación de una afirmación, es indispensable realizar la diferenciación entre dos operaciones: la producción de razonamientos o de argumentos y el examen de aceptabilidad de los argumentos producidos. Esta última operación cobra importancia en el momento de decidir su pertinencia y fuerza. La pertinencia de un argumento se asume en relación con los contenidos de la afirmación y del argumento que lo justifica. La fuerza de un argumento depende de que ningún otro argumento se le pueda oponer, o sea que resista a los intentos de hacerlo fracasar. También es básico en un argumento el valor epistémico que tiene éste para el sujeto al que se lo dirige, o sea el valor positivo relacionado con la evidencia, necesidad o autenticidad, y no negativo en el sentido del absurdo o imposible. Los argumentos fuertes y pertinentes generan convicción y adhesión a favor de la afirmación que justifican o en contra de la que refutan. En la argumentación, como se acaba de ver, se intenta mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la explicación los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento, contribuyen a presentar el sistema de relaciones de diversa naturaleza, en el seno del cual se produce dicho fenómeno, resultado o comportamiento. En muchas oportunidades, un discurso explicativo puede cerrarse con el enunciado del fenómeno que se está explicando.

Para Duval el objeto de una demostración es la verdad y, por lo tanto, obedece a criterios de validez, mientras que la argumentación se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo, obedeciendo a criterios de pertinencia. Una argumentación no es siempre una demostración, lo que permite que lo sea es la organización de los enunciados utilizados. Para que un razonamiento pueda ser considerado una demostración, es indispensable su validez del mismo. La argumentación no necesita responder a criterios de validez, ya que sólo busca lograr la credibilidad o el convencimiento del interlocutor o de sí mismo. Es posible argumentar sobre proposiciones falsas, buscando sólo convencer al otro. Las argumentaciones se encuentran más cerca de las prácticas discursivas espontáneas y su lógica busca la coherencia, más que la validez lógica. El concepto de razonamiento válido en matemática puede ser asociado al de razonamiento deductivo, o sea que atiende a leyes lógicas. Este proceso puede ser realizado tanto de manera directa como indirecta.

En investigaciones realizadas por Duval (Duval, 2000), se hace hincapié en el papel de la escritura en la actividad matemática y la manera en la que el lenguaje influye en la expresión de las demostraciones. Los tipos de lenguaje utilizado en el discurso: oral y escrito, influyen en las producciones de los alumnos y tienen sus particularidades en los pasos a seguir para aprender el concepto de demostración y en las características de las producciones de los estudiantes.

iii. Lourdes Valverde

La investigadora cubana Lourdes Valverde, en su tesis doctoral (Valverde, 1990), realiza una presentación en la que se centra en estudiantes de Álgebra 1 analizando sus habilidades para demostrar propiedades de esta rama de la matemática. En este trabajo, la demostración es comprendida como "*un sistema de acciones que realiza el sujeto para asegurar la veracidad de una proposición o para refutarla*", mientras que resolver "*un ejercicio de demostración es una actividad que tiene en sus estructura dos acciones básicas: fundamentar y demostrar*", siendo fundamentar, *"un sistema de acciones que realiza el sujeto cuando emite un juicio y determina el valor de verdad de una proposición matemática"* (Valverde, 1990, p. 13). Entre las acciones de fundamentación, esta autora menciona: identificar un concepto, aplicar una proposición, realizar un procedimiento, refutar una proposición a través de un contraejemplo, aplicar el contrarrecíproco de una proposición o una identidad lógica.

Al referirse a los estudiantes, afirma acerca de la lógica:

> *"Con relación a las identidades lógicas fundamentales, se debe tener en cuenta que en ocasiones en los ejercicios de demostración, un paso dentro de la cadena de inferencias lógicas es sólo justificable mediante el uso de una identidad lógica y es por ello que son consideradas como medios de demostración y utilizadas como formas de fundamentación. A todos debe quedar claro que sólo utilizando la lógica matemática es posible obtener una deducción adecuada de la demostración de un ejercicio matemático".*
>
> (Valverde, 1990, p. 13).

En este párrafo se observa la concepción de la construcción de la matemática sobre la lógica y de la unión indisoluble de ambas. En esta visión se infiere que para contribuir a desarrollar la capacidad para demostrar es necesario formar y desarrollar en los estudiantes determinadas habilidades, para lo que se hace indispensable trabajar sistemáticamente en las distintas disciplinas que se imparten. En su tesis, Valverde propone un método para contribuir al desarrollo de la habilidad específica para fundamentar y demostrar proposiciones matemáticas, en el que involucra un trabajo del docente de carácter científico-metodológico en el cual debe realizar un análisis de los objetivos de la enseñanza, un estudio de los contenidos orientado a identificar aquellos que tienen potencialidades en relación con la demostración, y la estructuración del proceso de enseñanza de acuerdo con los dos pasos anteriores. Según Valverde, se desprende de su investigación la importancia de ocuparse del perfeccionamiento de los métodos y formas de enseñanza que estimulen el trabajo creador de los que aprenden, con el consiguiente desarrollo de sus habilidades y capacidades generales y específicas, reviste importancia y actualidad.

Resumiendo

Las investigaciones que acabamos de presentar, incorporan en relación con las que consideramos en el primer enfoque, al alumno. De distintas maneras, el estudiante pasa a ser central en estos trabajos. Para van Hiele su pasaje por los niveles y fases se realiza en el aula, con la intervención del docente que selecciona las actividades apropiadamente; en su modelo hace un análisis cognitivo del proceso de aprendizaje. Para Duval, es la comunicación la que interviene en la problemática del pasaje de la argumentación al razonamiento matemático, vista desde una óptica cognitiva. Por su parte, en la presentación de Valverde, se identifica el interés por lograr que los alumnos desarrollen sus habilidades para demostrar propiedades matemáticas. Estas investigaciones acerca de las demostraciones, ponen de manifiesto la consideración del alumno como tal y su relación con el docente, sin embargo, en ellas no se percibe claramente la influencia de la escuela.

c. Las argumentaciones matemáticas en una didáctica en la escuela, pero sin escenarios

i. Nicolás Balacheff

Al abordar el concepto de demostración y relacionarlo con la enseñanza de la matemática, deben tenerse en cuenta las investigaciones que ha realizado Nicolás Balacheff, quien ha realizado valiosos aportes en temáticas relacionadas con pruebas y demostraciones desde el punto de vista didáctico. En sus investigaciones se abordan las concepciones de los estudiantes acerca de la prueba en matemática. El marco teórico que utilizó es la teoría de las situaciones didácticas y el modelo de Lakatos sobre la dialéctica de las pruebas y refutaciones (Balacheff, 1982, 2000). Este autor utiliza el término *explicación* como una idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración(Balacheff, 1982). En su obra realiza claras distinciones entre las concepciones involucradas.

- Una ***explicación*** es un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado
- Una ***prueba*** se compone de explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado
- Una ***demostración*** es una prueba que tiene una forma particular, dada por una serie de reglas determinadas de deducción
- Un ***razonamiento*** es la actividad intelectual de manipulación de informaciones para obtener nuevas informaciones a partir de otras dadas

O sea que, para que una explicación sea una prueba debe ser reconocida por alguien como razón suficiente en el correspondiente marco discursivo. Este reconocimiento puede ser objeto de un debate donde la significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores. En el ámbito de la matemática, las demostraciones son, por una parte, herramientas privilegiadas de prueba. Esta visión se pone de manifiesto al ver las demostraciones como una práctica dentro de la comunidad de los matemáticos que permite a la vez la comunicación y la evaluación. Estas no son, sin embargo las únicas funciones de las demostraciones. Por otra parte, es posible visualizar a las demostraciones como objetos matemáticos por parte de los lógicos. Esta visión se debe a que se ajustan de manera precisa a los requisitos de teorías formalizadas.

En relación con la introducción de las demostraciones en el aula, podría decirse que da origen a una ruptura entre la matemática práctica y la deductiva (Balacheff, 2000). La rama de la matemática donde esta introducción suele llevarse a cabo es la geometría. El enfoque práctico de la geometría está caracterizado por la producción y construcción de figuras con la utilización de regla y compás; el enfoque deductivo aparece induciendo un cambio de posición epistemológica, cuando el alumno comprende que cambia su papel frente a la matemática.

En los trabajos de investigación de Balacheff, se distinguen cuatro tipos principales de pruebas pragmáticas e intelectuales con un lugar privilegiado en la génesis cognitiva de la demostración, de acuerdo con el nivel de exigencia de generalidad y de conceptualización de los conocimientos que exige.

- *Empirismo ingenuo:* La validez de un enunciado es afirmada tras haber verificado algunos casos. A partir de evidencias de hechos y de la razón, los alumnos aceptan una afirmación. Se trata de un fenómeno esencial desde el punto de vista didáctico, basado en la utilización de ejemplos que permiten mostrar algunas propiedades, pudiendo constituirse en un obstáculo para desarrollar procesos de prueba más elevados.
- *Experiencia crucial:* Consiste en una experimentación orientada a elegir entre dos hipótesis, una sola de las cuales puede ser verdadera. Este tipo de prueba, originada en las ciencias experimentales, se orienta a la formalización de una generalización, ocasionando la toma de conciencia de la insuficiencia de que la verificación de una propiedad en ejemplos.

- *Ejemplo genérico:* Reside en la explicación de las razones por las cuales una proposición es válida. Se realiza por medio de la validación de operaciones o transformaciones de un objeto.
- *Experiencia mental:* Se basa en la acción y se desarrolla en el tiempo haciendo uso de relaciones y operaciones que anticipan la prueba y exigiendo la experimentación mental, ya que remite la demostración de una propiedad a las mismas.

La experiencia mental marca la transición de las pruebas pragmáticas a las intelectuales, en la medida en que se pasa de acciones efectivas a acciones interiorizadas. La elaboración de pruebas es, junto con el análisis crítico de las pruebas, uno de los aspectos del procedimiento de validación.

Tanto Balacheff como Duval utilizan el término *demostración* con significados similares. Para ellos, una demostración es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. El concepto de demostración también está muy ligado al de verdad.

ii. Juan Godino y Ángel Recio

Juan Godino y Ángel Recio centran sus investigaciones en relación con las argumentaciones matemáticas en torno a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. En el marco del Proyecto de investigación "*Significados personales e institucionales de los objetos matemáticos*", de la Universidad de Granada, se centraron inicialmente en sus investigaciones en el razonamiento matemático y posteriormente en la demostración matemática, por considerar que es en las situaciones de validación en las que más se evidencia el razonamiento matemático. En estas investigaciones se utilizó el marco teórico semiótico-antropológico y se realizaron estudios experimentales centrados en la exploración de esquemas personales de los que buscaron interpretaciones cognitivas y semánticas (Godino & Recio, 1997, 2001). En cuanto a los términos que utilizan, estos autores realizan diferenciaciones en relación con los conceptos caracterizados por Balacheff y Duval:

- Una ***demostración*** es el objeto emergente del sistema de *prácticas argumentativas* (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, o sea situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción
- Un ***razonamiento*** es la actividad intelectual que no puede reducirse meramente a la manipulación de informaciones, sino que da origen a las prácticas argumentativas personales o institucionales que constituyen su dimensión ostensiva y comunicacional

Un razonamiento se desarrolla a través de dichas prácticas argumentativas, y su estudio está por lo tanto ligado al estudio de la argumentación. La demostración es un objeto de notable interés matemático y didáctico. Si bien la capacidad de razonamiento matemático, y en particular la capacidad para efectuar demostraciones, son reconocidas como objetivos fundamentales de la educación matemática, existen dificultades reales de los estudiantes para comprender, asimilar y desarrollar demostraciones matemáticas (Recio, 1999). Investigaciones realizadas acuerdan que entre los numerosos factores que influyen en estas dificultades, existen en los estudiantes dificultades derivadas de significados personales que la demostración tiene para cada individuo, lo que es acorde con el modelo antropológico sustentado. Los significados de la demostración varían además en distintos contextos institucionales. Si bien Godino y Recio reconocen que el concepto de demostración es cultural, ya que se trata de una noción que varía de una cultura a otra, y de una época a otra, la perspectiva con la que se enfoca la problemática se caracteriza por el uso de recursos expresivos e instrumentales propios, por hábitos y normas específicas de comportamiento.

> "*En los distintos niveles de enseñanza se precisa articular de algún modo los distintos significados de la prueba, desarrollando progresivamente en los estudiantes los conocimientos, la*

capacidad discriminativa y la racionalidad que se debe poner en juego en cada caso. Los esquemas informales de prueba no pueden ser vistos simplemente como incorrecciones, errores o deficiencias, sino como etapas en la apropiación y dominio de las prácticas argumentativas matemáticas".

(Godino y Recio, 1997, p. 412)

Sus publicaciones denotan que bajo esta visión los esquemas de demostración no tienen un sentido exclusivamente cognitivo, sino que son alcanzados y utilizados por el sujeto con significaciones institucionales y en el caso de los alumnos es la escuela la que les otorga el significado institucional.

iii. Gila Hanna

La investigadora canadiense Gila Hanna, reconoce que en la escuela de hace unos años, el curriculum de matemática hacía un especial énfasis en la demostración formal, reflejando la posición formalista sustentada por la matemática moderna, ocasionando que muchos docentes ante la realidad de no lograr los resultados que esperaban, no la tuvieran en consideración. En sus investigaciones (Hanna, 1996, 1997, 2000), plantea su posición acerca del valor de las demostraciones en el aula de matemática, sosteniendo que su papel es de suma importancia por tratarse de una característica central de la matemática a través de su método de validación. Reconoce que los desarrollos matemáticos a lo largo de la historia han provocado en los matemáticos distintas posiciones frente a las demostraciones y al rigor lógico. Considera la presencia de demostraciones "autoritarias", a pesar de considerar que

- Una **demostración** es un razonamiento transparente en el que todas las afirmaciones usadas y todas las reglas de razonamiento son claramente expuestas y abiertas a las críticas

En una situación que Hanna considera contradictoria, se les pide a los alumnos que razonen según esas reglas, pero por otra parte que razonen por sí mismos.

Para ella, los docentes deben centrar su atención en la explicación de los conceptos matemáticos y los estudiantes deben poder justificar los resultados con sus propias afirmaciones, por lo que es necesario ayudar a los estudiantes a adquirir la habilidad de comprender demostraciones y de poder hacerlas por sí mismos. Aunque se parta de las ideas intuitivas que surgen en la experiencia cotidiana, estas ideas deben desarrollarse y hacerse explícitas.

iv. Marcelino Ibañes

Marcelino Ibañes observa en su tesis (Ibañes, 2001) dificultades por parte de los alumnos en tres aspectos: los esquemas de prueba, el reconocimiento de procesos y la utilización de determinadas expresiones. En relación con los esquemas de pruebas, destaca la falta de comprensión de lo que supone justificar una proposición, la ausencia de un esquema de prueba adecuado para comprender el significado de la demostración, y el enraizamiento en esquemas inductivos. Detecta además dificultades por parte de los estudiantes en el reconocimiento de demostraciones y sus consecuencias, puestas de manifiesto en que no siempre aplican las propiedades demostradas e incluso tienden a realizar comprobaciones posteriores. Por otra parte, considera que los alumnos de bachillerato se encuentran en un estado de transición entre los esquemas de prueba inductivos y los intuitivo axiomáticos, puesto de manifiesto por el tipo de esquemas de prueba que utilizan, hecho que puede evolucionar favorablemente mediante una secuencia didáctica adecuada e instrucciones adecuadas, por ejemplo en la redacción de enunciados.

Afirma en sus conclusiones:

> *"Pensamos que la didáctica de las matemáticas no debe elaborarse al margen de la práctica de su enseñanza, sino que tiene un obligado compromiso con ella."*
>
> (Ibáñez, 2001, p.533)

Posteriormente presenta una serie de recomendaciones para el diseño del curriculum y el análisis de libros de texto, poniendo de manifiesto su posición en relación a la didáctica, identificando en ella como indispensable la práctica docente y por lo tanto la escuela.

v. Michael de Villiers

Michael de Villiers ha realizado trabajos centrados en el papel de las demostraciones matemáticas en el aula y las posibles funciones que puede atribuírseles (de Villiers, 1993). Al referirnos a funciones de las demostraciones en el aula, está implícito que sus investigaciones tienen en cuenta la consideración de una didáctica con escuela, sin embargo no llegan a ponerse de manifiesto en ellas la presencia de escenarios socioculturales.

Tradicionalmente, las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, constituyendo el método de prueba de las afirmaciones de esta ciencia, en contraposición, por ejemplo de lo que ocurre en la física o en otras ciencias experimentales o sociales, en las que el método de verificación de las afirmaciones consiste en su contrastación con la realidad. Aunque existen otras posturas frente a la naturaleza de la matemática, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógico-formal. De esta manera, la demostración matemática es básicamente considerada como el proceso validativo seguido por los matemáticos para justificar las propiedades de sus teorías. Sin embargo ésta no es el único papel, ni el más importante que desempeña la demostración en la matemática, y mucho menos en el aula de matemática. Michael de Villiers presenta un modelo en el que se evidencian las siguientes funciones:

- ***Verificación o convicción***: se orienta a establecer la verdad de una afirmación
- ***Explicación***: exhibe los porqué de la verdad, profundizando en las causas correspondientes.

- ***Sistematización***: organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas.
- ***Descubrimiento o creación***: permite llegar a nuevos resultados.
- ***Comunicación***: transmite el conocimiento matemático.

Este modelo intenta exponer algunas de las funciones de la demostración dentro de la actividad matemática científica pues permite vislumbrar las posibilidades de modificar algunas prácticas vinculadas con la demostración en el aula evitando caer en la función formalista de verificación que se reconoce generalmente en la enseñanza de la matemática en las aulas. Esta posibilidad se sustenta en reconocer en las demostraciones funciones diversas, además de la verificación y de esta manera enriquecer el tratamiento que se dé a las demostraciones y más generalmente a las argumentaciones lógicas en el aula de matemática.

vi. Gilbert Arsac

Un enfoque interesante acerca de las demostraciones es realizado por Gilbert Arsac. En este trabajo (Arsac, 1987), se realiza un análisis epistemológico sobre el *sentido* de la demostración en distintas culturas, cuestionándose acerca de si su aparición se origina en el interior de la matemática o por influencia de la cultura griega. El abordaje acerca de pruebas y demostraciones que realiza este autor, se basa fundamentalmente en las componentes epistemológica y didáctica, dando importancia al marco histórico y subrayando la evolución de los procedimientos de validación y de los niveles de rigor, aunque sin llegar a considerar la influencia de los escenarios socioculturales en la historia. Al partir del problema como lo enuncia el análisis epistemológico, Arsac pone énfasis sobre el sentido de la demostración y se cuestiona acerca de la exigencia de demostraciones por parte del profesor, lo cual podría llegar a conducirle, aunque no lo hace en su trabajo, a la consideración de un escenario sociocultural en el aula.

Resumiendo

En estas investigaciones, cobra importancia la escuela como factor fundamental de la construcción de las demostraciones en el aula de matemática. Para Balacheff, las concepciones de los estudiantes acerca de la demostración en matemática se enmarcan en la teoría de las situaciones didácticas y el modelo de Lakatos sobre la dialéctica de las pruebas y refutaciones. Godino y Recio, desde la visión ontosemiótica intentan identificar los significados personales e institucionales de las demostraciones como objetos matemáticos; si bien reconocen a las demostraciones como conceptos culturales, no analizan en sus trabajos a las mismas desde la componente social. Hanna y de Villers, centran su atención a la utilización de razonamientos formales en el aula y a su construcción y utilización por parte de los estudiantes en el aula, situando esta en una institución en la que se apunta a un enfoque formalista de la matemática y cuestionándose acerca de la aplicabilidad de dicho enfoque y de las diversas funciones de las demostraciones. Ibáñes, a partir de la detección de dificultades en las demostraciones, realiza recomendaciones para el diseño del curriculum. Arsac, incorpora la componente epistemológica. Sin embargo en ninguna de estas investigaciones se pone de manifiesto la influencia del escenario sociocultural, aunque puede comenzar a esbozarse su presencia en los trabajos de Arsac.

d. Las argumentaciones matemáticas en una didáctica en escenarios socioculturales

En este trabajo proponemos mostrar las argumentaciones matemáticas como objeto de un análisis socioepistemológico que las muestra como construcciones socioculturales.

Podemos considerar como antecedente en esta línea de investigación la tesis de maestría, *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La* *estrategia de deducción por reducción al absurdo.* (Crespo Crespo, 2005a) En este trabajo se propuso comprender las argumentaciones por reducción al absurdo como recurso de validación de resultados en matemática que surgen con el carácter de producto cultural. La hipótesis formulada fue que las argumentaciones por reducción al absurdo, por estar fuertemente basadas en el principio del tercero excluido y en el principio de no contradicción, son propias del pensamiento lógico de culturas con influencia de la lógica clásica, no hallándose presentes en los razonamientos de culturas que no tuvieron esta influencia. De esta manera, podemos afirmar que no son inherentes de la forma de razonar del ser humano, sino que dependen de la formación que ha recibido el individuo. En esta primera etapa, se centró este carácter cultural en el aspecto profesional, por lo que nuestra atención se fijó en estudiantes de distintas carreras y formaciones.

En esta investigación que, como ya aclaramos restringía lo cultural a lo profesional, fue posible desde este ángulo corroborar la hipótesis planteada en cuanto a que las argumentaciones por reducción al absurdo son construcciones socioculturales. El objetivo de la investigación que se presenta actualmente es comprender el carácter sociocultural de las argumentaciones matemáticas, no restringiendo este carácter a un aspecto, como lo profesional, sino intentando mostrarlas como resultado de una comunidad en un escenario sociocultural.

Por lo tanto, se buscará identificar y buscar evidencia del papel que desempeñan las demostraciones matemáticas desde la óptica de la socioepistemología, para la comunidad matemática, y de cómo es posible fundamentar el carácter de construcción sociocultural para las argumentaciones matemáticas, ampliando la investigación que se realizó previamente al respecto (Crespo Crespo, 2005a), sin las restricciones que se realizaron en aquella oportunidad.

Con el fin de lograrlo, se buscarán las causas por las cuales algunas formas de argumentación deductivas, como la reducción al absurdo, se dieron en algunas culturas y en otras no. Por otra parte, se buscará identificar en el aula algunas formas de argumentar no deductivas, que por no ser construidas en el escenario escolar, deben provenir de escenarios exteriores a la escuela, pero que penetran en el aula y se ponen de manifiesto en el aula de matemática.

Capítulo 3

Demostraciones y argumentaciones a través de la historia: los escenarios y características de su evolución

Carlos Blaquier afirma al referirse a la filosofía:

> *"La filosofía, como toda obra humana es un producto histórico, de modo que para entenderla es necesario ubicar cada doctrina, aunque sea brevemente en la circunstancia en que surgió"*.

(Blaquier, 2003, p.iii).

Considerar la matemática como una actividad cultural y cada uno de sus conceptos e ideas como una construcción sociocultural, lleva de inmediato a realizar el análisis de su evolución a través de la historia, tratando de describir y comprender cada escenario cultural, para comprender de esta manera cómo, para qué y por qué surgió y se desarrolló cada concepto, así como qué significado tuvo en ese escenario. A lo que Blaquier se refiere en la frase que acabamos de transcribir al hablar de circunstancia es simplemente a la descripción del escenario en el que se gesta y desarrolla esa construcción.

Este capítulo presenta un recorrido por la historia de la matemática, analizando cuáles fueron las estrategias de validación de los resultados matemáticos que fueron utilizados por distintas culturas, en el que se hará un especial énfasis en la descripción de los escenarios correspondientes, en particular en los filosófico y epistemológico y en sus sistemas didácticos y sociales, buscando evidencias orientadas a comprender el carácter del papel que desempeñan las demostraciones para la sociedad matemática.

Una visión socioepistemológica de la historia de las demostraciones

La matemática educativa, a través del enfoque socioepistemológico de los conceptos permite un acercamiento múltiple a los aspectos que éstos poseen y a los escenarios socioculturales en los que los conocimientos matemáticos surgen, se desarrollan y se transmiten. A partir de esta comprensión, es posible proponer nuevos enfoques acordes con los escenarios en los que se realiza la construcción y transmisión y, permitir la reflexión permanentemente sobre su implementación en el aula. De esta manera, la matemática en la educación formal se convierte en un ejercicio permanente de elaboración científica. En una investigación socioepistemológica aparecen involucradas, como ya se ha dicho con anterioridad, las componentes epistemológica, cognitiva, didáctica y social.

Las ideas matemáticas, por su carácter sociocultural, son el reflejo y producto de un determinado escenario. La comprensión de las condiciones en que se generaron, la manera de pensar de los científicos que le dieron origen, la finalidad y la manera en que las desarrolló, cómo era la sociedad en la que se gestaron y qué problemáticas ocupaban a la sociedad, la manera de pensar, de ver el mundo, la ciencia y la sociedad son algunas de las cuestiones que hacen al escenario correspondiente. El análisis de esos escenarios da la posibilidad de conocer el contexto epistemológico en que se desarrolla y de esta manera proveer de un elemento más para buscar las mejores estrategias para diseñar actividades que lo lleven al aula.

Existe, en general, acuerdo entre los especialistas en que la matemática griega introdujo como elemento novedoso y que le imprimiría un sello imborrable a esta ciencia, el *método deductivo*. Los documentos de la época son escasos y generalmente no son textos matemáticos, por lo que no sabemos con exactitud la manera en la que surgió la demostración en esta ciencia. En este trabajo se intenta comprender cómo y por qué apareció en este escenario la idea de demostración y cuál fue el proceso por el que llega hasta la matemática actual con tal fuerza que, podría decirse, se convirtió en la característica capital de esta ciencia en nuestra sociedad actual.

En la época de los presocráticos, caracterizada por la búsqueda del *arjé* o principio de las cosas, se ponen de manifiesto argumentaciones diversas para defender cada postura y justificar el correspondiente principio. Estas ideas marcaron en la forma de pensamiento una ruptura, un cambio de la manera de ver el universo, suele decirse que se produjo un rompimiento con el mito como explicación de los fenómenos que ocurren en la naturaleza. La razón comenzó de esta manera a reemplazar a los mitos. La razón se convirtió a partir de esta época en Grecia en el centro y base de todo conocimiento. En estos escenarios, para la pregunta acerca de los fundamentos o del principio de las cosas, no hay una sola respuesta, sino tantas como filósofos. Y esta es una característica propia y reconocida para la filosofía; una constante a través de la historia de la humanidad: "*la pregunta por el fundamento de todas las cosas tiene respuestas diversas, contradictorias entre sí, prima facie, sin que ninguna parezca, por lo pronto, más verdadera que las otras*" (Carpio, 2003, p.11). Este autor, que se dedica a la historia de la filosofía, afirma que ésta es una diferencia profunda entre filosofía y ciencias, ya que la historia de las ciencias es progresiva y que cada etapa de las ciencias supera las anteriores. Esta visión de la ciencia se contrapone, en cierta manera, con la que sostiene la socioepistemología, ya que no se presenta en este enfoque a la ciencia con un carácter progresivo y único, sino sociocultural.

Pero antes de llegar al escenario griego en el que la razón se transforma en el centro del pensamiento humano y a los antecedentes directos del mismo, es preciso analizar otros escenarios en los cuales se comenzaron a construir conocimientos matemáticos, para comprender cuáles eran las maneras en las que la comunidad matemática los desarrollaba, validaba y transmitía. Es posible encontrar conocimientos matemáticos y formas de razonar ligadas a ellos en todas las culturas. En un recorrido por los escenarios, es posible hacer varias preguntas para comprender la esencia de la matemática (Klimovsky & Boido, 2005). Una de esas preguntas es sobre de qué hablan las proposiciones matemáticas del mismo, esto sería una pregunta ontológica, ya que nos ubica en la identificación de los objetos o entidades de estudio de esta disciplina. Otra pregunta se refiere a por qué creen los habitantes del escenario en las proposiciones de la matemática, esta es una pregunta de carácter epistemológico, pues se orienta a las concepciones de la ciencia. Otra se referiría a cómo se investiga en matemática, es una pregunta metodológica. Otra, a la relación entre la matemática y la realidad, se trata de una pregunta de índole práctico. Nosotros, al centrarnos en la matemática educativa, modificaremos un poco estas preguntas:

- *¿Cómo se comprenden las ideas matemáticas?* Se refiere a la componente cognitiva
- *¿Por qué tienen importancia esas ideas matemáticas en el escenario y en el individuo?* Se refiere a la componente epistemológica
- *¿Cómo se transmiten y enseñan los conceptos matemáticos?* Se refiere a la componente didáctica
- *¿Cómo se relaciona esta idea con la sociedad? ¿De qué manera la construye la sociedad?* Se refiere a la componente social

Estas preguntas podrán ser respondidas si logramos caracterizar los escenarios y las prácticas sociales.

Egipto y Mesopotamia: La matemática del cálculo y de las necesidades materiales

La cultura comenzó a surgir al asentarse las poblaciones, ya que al realizar asentamientos estables, las sucesivas generaciones no se limitaron a reproducir las prácticas de sus ancestros, sino que se originó una acumulación progresiva de adelantos técnicos que dieron origen a creencias y saberes. En un principio, en la mayoría de las civilizaciones, en matemática se fueron desarrollando algunos aspectos de la geometría puestos de manifiesto en el conocimiento de propiedades de triángulos, cuadriláteros, circunferencias, pirámides y otras figuras planas y tridimensionales, con carácter utilitario y empirista, con la finalidad de conocer el espacio físico y de realizar en él cálculos y estimaciones que resultaron necesarios para fines económicos. Estos conocimientos se reflejaron también en el arte a través de diseños y representaciones en las que se conjuga una concepción peculiar de espacio con el gusto y el atractivo de la armonía. Otro elemento de importancia en los escenarios en los que aparecen legados matemáticos es tener un soporte material a través de la escritura, que liberaba al hombre de las limitaciones de la memoria, permitiendo además guardar registros y hacer más sencilla la transmisión. Civilizaciones con estas características surgieron en Egipto y Mesopotamia. Sus escenarios, aunque diferentes, ostentan características comunes. Los conocimientos matemáticos desarrollados, tienen mucho en común aunque las técnicas utilizadas difieran en oportunidades.

En Egipto es la clase sacerdotal la que tiene la función de ser guardiana y depositaria de la ciencia. Los sacerdotes transmiten de manera oral y escrita los conocimientos acumulados. La ciencia tiene facetas sagradas y otras profanas: los sacerdotes se desempeñaban en un principio de escribas, médicos, embalsamadores, arquitectos e ingenieros. Luego va apareciendo la especialización. Las escuelas sacerdotales impartían una educación de carácter práctico y profesional. Los conocimientos científicos tenían carácter eminentemente práctico. Los métodos educativos que practicaban los egipcios se basaban en memorizaciones y azotes (Abbagnano & Visalberghi, 2005).

En Mesopotamia, la clase sacerdotal es aún más poderosa que en Egipto, encontrándose constituida por una casta casi cerrada. Los conocimientos de los sacerdotes babilónicos incluían astronomía, astrología, magia y adivinación. En matemática desarrollaron una elevada eficiencia práctica orientada al manejo del tiempo. Los métodos educativos eran esencialmente prácticos y combinaban aspectos científicos y literarios. La educación se reservaba a los sacerdotes, los comerciantes ricos y los guerreros.

Política y económicamente, ambas civilizaciones eran estados burocráticos centralizados, con comercio interior y exterior desarrollado. Las problemáticas que contribuyeron al desarrollo de su matemática fueron similares y de carácter práctico o empírico. Los documentos que llegaron a nuestros días a través de papiros egipcios y tablillas babilónicas, ofrecen rasgos comunes:

- presentación retórica de las problemáticas, en las que se realiza un planteo con palabras, no con símbolos
- planteo de cuestiones numéricas, con datos concretos, no abstracciones
- resolución algorítmica, a través de etapas y presentando un resultado concreto

Estos pueblos sabían manejar ciertas fracciones y aplicaban propiedades geométricas y reglas a casos particulares. En Egipto y en la Mesopotamia, la precisión de los cálculos efectuados se probaba por lo general por medio de la verificación de los resultados obtenidos. Este sigue siendo en la actualidad un método utilizado para la verificación de resultados de ecuaciones y otros problemas matemáticos. De los documentos que han llegado a la actualidad, puede inferirse que ninguno de estos pueblos estaba interesado en generalizar ni en abstraer u organizar sistemáticamente los conocimientos que poseían, sólo se interesaban por la resolución de problemas prácticos, tal como se pone de manifiesto en papiros y tablillas que han sido traducidos.

El desarrollo matemático en estos pueblos pone en evidencia la relación entre las necesidades materiales de una sociedad y la naturaleza de la matemática que desarrollaron. Algunos especialistas de la historia de la matemática afirman, sin embargo, que "*no se puede sostener que se trata en ambos casos de reglas empíricas a las que se llega mediante un penoso esfuerzo de ensayo y error para problemas específicos, sin ninguna conciencia de una aplicación general*" (Joseph, 1991, p.181). Lo que es claro es que no han llegado a nosotros rastros de demostraciones rigurosas, ni de argumentaciones lógicas que justifiquen los procedimientos presentados en las técnicas de cálculo ni en las aplicaciones a la resolución de problemas de origen práctico o estético. En ellas no aparecen razonamientos deductivos que consideraríamos válidos con la óptica actual, pero sí encontramos algunos intentos de explicación de la validez de los resultados, presentados después de obtenerse la solución numérica. Estos se manifiestan en la comprobación de la corrección del resultado obtenido. En cierta manera estas comprobaciones nos ponen frente a una etapa significativa en el desarrollo de la matemática, ya que una comprobación puede considerarse como un caso muy simple de demostración, en cierto sentido.

En los papiros egipcios hallados y descifrados, es posible identificar algunas características comunes en relación al tratamiento de los conceptos matemáticos. Por una parte, comienzan con la presentación de una fórmula para la que dan a posterioridad tres o cuatro ejemplos de su uso, por otra no explicitan la concepción de la matemática como una ciencia, ni de métodos para validar el conocimiento matemático. Para esta cultura, la geometría se restringe a aritmética aplicada; si bien suele plantearse que los griegos se basaron en fórmulas de origen egipcio para determinar áreas y volúmenes, no se tienen indicios de la manera en la que los egipcios llegaron a sus reglas y fórmulas. La consistencia de las mismas era verificada a través de ejemplos numéricos y puesta de manifiesto por medio de expresiones como: “la producción de lo mismo”, “el correcto procedimiento de este tipo de problemas”, “manera de trabajarlo”, “estos son los procedimientos correctos y propios”, “esta es la manera en la que usted lo hace”. Algunos autores se inclinan a sostener que el aporte egipcio a las argumentaciones puede ser considerado implícito (Gillings, 1972) y que esta cultura tuvo otra visión distinta de los griegos de lo que es el pensamiento y la razón: el fundamento del método encontrado es que funciona, no consideraron necesario establecerlo como una verdad universal por medio de la argumentación que mostrara el proceso del pensamiento lógico. En otras palabras:

> “*Un argumento o demostración no simbólicos, pueden ser rigurosos cuando se dan para un valor particular de la variable; las condiciones de dicho rigor son que el valor particular de la variable debe ser típico, y que una ulterior generalización de cualquier otro valor debe ser inmediata*”.
>
> (Gillings, 1972, p.233)

Lo que hicieron fue explicar y definir en una secuencia ordenada de pasos el propio procedimiento y como conclusión agregaron una verificación de que conduce a una solución correcta del problema. Esta era su visión de la ciencia, y por ello construyeron la matemática con las características que se acaban de describir.

India: un escenario en el que es posible la contradicción

El escenario de India es en la antigüedad completamente distinto del que tuvo lugar en Occidente y sus antecedentes. Se dedica en este trabajo un lugar particular a las características de los escenarios indios, y la manera en la que su filosofía se reflejó en la matemática, en particular en la argumentación matemática (Capítulo 5). En este momento, simplemente intentaremos una caracterización general de su escenario y de las formas de validación que empleó la comunidad matemática para sus resultados. Como se verá en el capítulo mencionado, la presentación que realizamos ahora puede ser considerada un tanto simplista. En esta sociedad impera un sistema de clases cerrado, estratificación establecida como consecuencia de conquistas sucesivas y resistencias autóctonas. Las clases son: *brahmanes* o sacerdotes, *vaisya* o pastores y comerciantes, *sudra* o esclavos y *parias* o intocables. La educación que recibe cada casta es completamente distinta. La ciencia se encuentra escrita en los Vedas, literatura reservada a las castas superiores.

En India, si bien se ha afirmado a veces que las contribuciones importantes son "*acontecimientos episódicos sin continuidad*" (Boyer, 1996, p.270), el desarrollo de la matemática india es notable, con características radicalmente distintas a las que encontramos en Occidente. Aparecen en algunos casos cierto grado de argumentaciones para explicar los resultados. Algunas de estas argumentaciones se encuentran en los Sulvasutras, textos en los que se describen las formas geométricas y orientaciones de los altares y la ubicación de los fuegos sagrados con las prescripciones establecidas por los libros sagrados védicos. Estos altares se construían ajustándose a ciertas formas básicas, con áreas y perímetros prescriptos. Se presentan en ellos las explicaciones de reglas de manera similar a algunos de los teoremas demostrados por Euclides en sus Elementos. Como las fechas en las que se han datado los Sulvasutras son diversas y aún discutidas, no ha podido determinarse con seguridad si estas reglas están relacionadas con las utilizadas por los egipcios o bien con conocimientos de origen griego. Según algunos historiadores datan de la época de Pitágoras. La matemática de esta etapa, se originó en la India al servicio de la religión. Las construcciones de altares, tanto de culto en las casas, como de cultos públicos, se lograban por medio de principios de disección y agrupación, algoritmos y aplicaciones del teorema de Pitágoras. El concepto de equivalencia fue vital en estas construcciones, además, los indios de la época de los Sulvasutras, se interesaron por el teorema de Pitágoras en la medida en que les era útil para sus necesidades. Sin embargo, los matemáticos indios posteriores a los Sulvasutras no hacen alusión a los contenidos matemáticos utilizados por éstos.

Por otra parte, en períodos posteriores la matemática india presenta desarrollos de fórmulas para realizar cálculos geométricos y trigonométricos a través de deducciones. En este periodo, algunas afirmaciones geométricas se prueban haciendo referencia a las figuras, siendo fundamental entonces en la matemática la exactitud en el trazado de los dibujos, ya que éstos se constituyen en argumentos. Tal es el caso de la conocida demostración del Teorema de Pitágoras que presenta Bhaskara en su libro Liláváti, en la que la demostración consiste en una invitación al lector para mirar, reflexionar y extraer la conclusión correspondiente, mediante la presentación de los gráficos que se presentan a continuación y un texto que dice simplemente:

“¡Mira!”

Figura 1: Demostración del Teorema de Pitágoras según Bhaskara

Las necesidades prácticas de estos pueblos los llevaron a optar por desarrollar generalmente conocimientos algorítmicos en lugar de buscar una fundamentación de los mismos, por lo que no se interesaron especialmente por las demostraciones. Muchas propiedades matemáticas, como por ejemplo el Teorema de Pitágoras que acabamos de citar, eran conocidos, por los babilonios, los egipcios y por pueblos de Oriente, con anterioridad a los griegos. Podemos hablar de esta manera de un teorema en dos sentidos: como resultado que se aplica y que se enuncia como una proposición, o bien integrado dentro del cuerpo sistémico de la matemática. En este segundo sentido, es recién con Euclides que se logra, casi un siglo después de Pitágoras y su escuela.

El pensamiento de la India, como se analizará posteriormente tiene características que le son propias y que hacen que las argumentaciones tengan estructuras lógicas muy distintas a las que utiliza la matemática occidental.

China: el imperio de la tradición

Al igual que en el caso de la India, nos ocuparemos más ampliamente de la filosofía, la lógica, la historia y la matemática de China en el capítulo 5.

La historia de la civilización china se desarrolla de manera continua a lo largo de cuatro mil quinientos años. El escenario de China, se caracterizó en la antigüedad por un ideal de inmovilidad institucional, con la preocupación reinante de conservar el orden familiar, político y social, a partir de las ideas de Confucio a fines del siglo VI a.C. Deben conservarse, entonces los privilegios hereditarios, las funciones y las instituciones. Esta filosofía conservadora surgió como reacción ante la anarquía que había reinado en milenios anteriores. El estado tiene, al igual que la familia, unidad indisoluble. El emperador es padre universal y goza de derechos ilimitados, pero con la obligación de cumplir con el propio deber. Los principios supremos son el respeto por los padres, los ancianos y las tradiciones. No existe casta sacerdotal, sino funcionaria, llamados mandarines, que son los hombres cultos de la sociedad. Se desarrolló un complicado sistema de exámenes estatales, única manera de acceder a los cargos de la administración pública. Estos exámenes eran teóricamente abiertos a todos, pero en la práctica sólo podían acceder a su aprobación quienes estudiaban en ciertas escuelas privadas en las que se impartía una preparación literario-formalista. La matemática era también una materia obligatoria en estos exámenes. *"La preparación de nuevos administradores condujo al planteamiento de problemas abstractos con fines de enseñanza, y esto empezó a adquirir ya la forma de un cultivo de las matemáticas por su propio valor"* (Struik, 1962, p.13).

El respeto por las tradiciones se puso de manifiesto en muchas facetas de esta sociedad:

> “*Toda ambición de originalidad era combatida e imperaba el tradicionalismo más cerrado, como lo demuestra el hecho mismo de que en China haya sobrevivido hasta nuestros días un sistema ideográfico de escritura muy complicado, mientras que egipcios y babilonios superaron la fase ideográfica pura en el segundo milenio antes de Cristo”*
>
> (Abbagnano & Visalberghi, 2005, pp.25-26)

La matemática china tuvo creciente aplicación a diversas disciplinas a través de los calendarios, la topografía, cronología, arquitectura, meteorología, comercio, pago de impuestos. Tuvo una marcada preferencia por lo concreto. Diseñaron cuadrados mágicos y círculos mágicos, los que no limitaban su interés a la matemática recreativa, sino que eran asociados al desafío, pero también con atractivo estético y asociados a la adivinación y el ocultismo, siendo utilizados como talismanes. Utilizaron en geometría figuras planas y cuerpos geométricos. La geometría china provee una amplia gama de problemas resueltos a través del principio de complementariedad interna y externa, en el que se trabajan las relaciones espaciales y la discriminación visual por medio de la organización de la información brindada por ciertos sólidos básicos. En el siguiente ejemplo, se pone de manifiesto claramente esto:

A partir de tres poliedros básicos definidos en un cubo, cuyos volúmenes se calculan fácilmente:

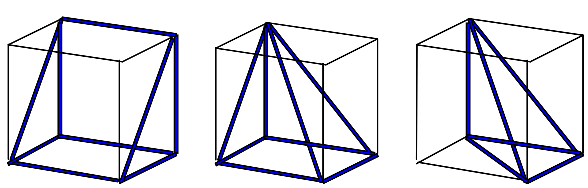


Figura 2: Ch´ien-tu Yang-ma Pieh-nao

se disecan otros poliedros y se trabajan equivalencias de volúmenes.

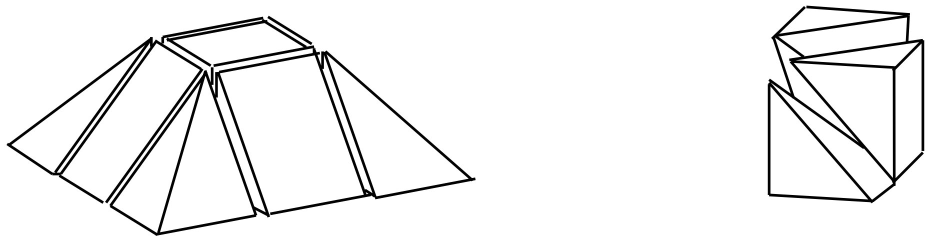


Figura 3: Aplicación del principio de complementariedad interna y externa

Basada en la disección en figuras sencillas y su reagrupamiento, el cálculo de volúmenes permite poner de manifiesto un tratamiento empírico de las demostraciones y deducciones en la geometría tridimensional en el que el proceso de visualización cobra un papel fundamental. El razonamiento realizado en este tipo de problemas es totalmente distinto al que realiza la geometría euclidiana y no sería aceptado desde la óptica griega.

El mismo método fue utilizado por los chinos para demostrar el Teorema de Gou Gu, que luego reconoceremos como Teorema de Pitágoras. El Jiu Zhang Suan Shu (*Nueve capítulos sobre el arte de las matemáticas*), cuyo origen se remonta más de once siglos antes de nuestra era, recopilado en el siglo II a.C. por Liu Hui, y utilizado para la preparación del examen estatal, le dedica un capítulo al teorema de Gou Gu:

> *"El cuadrado Gou es el cuadrado rojo, el cuadrado Gu es el cuadrado azul. Al ponerse las piezas dentro y fuera según su tipo se complementarán unas a otra y entonces el resto (de las piezas) no se moverá. Al formar el cuadrado Xian y tomar la raíz cuadrada se obtiene Xian (la hipotenusa)"*

(Dauben, 1991, p.284)

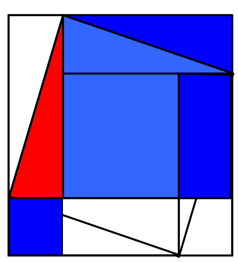


Figura 4: Demostración del Teorema de Gou Gu

La geometría china parece tener su origen en la tradición del estiramiento de cuerdas en la agrimensura. El teorema Gou Gu es utilizado en este área y su demostración china se basa en la manipulación directa de elementos físicos o visibles. El Principio de complementariedad interna y externa es considerado como prueba de la existencia de una matemática deductiva en China (Joseph, 1991), aunque se puede afirmar que sus características difieren de las de la deducción griega.

En el álgebra, desarrollaron reglas para operar con números naturales y racionales, resolvieron problemas de proporcionalidad y trabajaron con aproximaciones. Utilizaron en muchas oportunidades procedimientos por exceso y defecto, que aunque no explicitaron, se asemeja al utilizado por Arquímedes. Para la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, el método presentado en el Chiu Chang, consiste en sumar y restar secciones de una figura geométrica dada. Este procedimiento, también hace uso de la visualización, pero limita la resolución a ecuaciones de hasta tercer grado.

Los chinos se ocuparon de problemas prácticos y sus soluciones, no les interesó desarrollar matemática teórica. La filosofía confucionista no concedía valor al conocimiento teórico. Esto se reflejó, como se acaba de presentar en que su matemática no tuvo un desarrollo abstracto ni deductivo, pero en la que existe una rica tradición de observación empírica

Joseph Dauben, afirma:

> *"Algunas veces uno se pregunta: ¿por qué los chinos no llegaron a desarrollar una matemática axiomática como la de Euclides? ¿Por qué no formularon una prueba más abstracta, por ejemplo, del teorema Gou Gu? Pero seguramente estas son preguntas equivocadas. La verdadera cuestión es la siguiente: ¿por qué se apartaron los griegos de prácticamente todas las otras culturas en*

> *este aspecto, es decir en su preocupación por las pruebas axiomáticas y deductivas?"*
>
> *(Dauben, 1991, p.290)*

Grecia: La matemática demostrativa

La influencia de las ideas provenientes de Egipto y Babilonia fue seguramente muy apreciable en Mileto, ciudad jónica considerada cuna de la filosofía, la matemática y las demás ciencias griegas. Las fuentes escritas de los primeros tiempos de esta cultura no han llegado a nuestros días tanto como las fuentes provenientes de Babilonia y Egipto, a pesar de tratarse de épocas posteriores, en parte debido a la destrucción de importantes bibliotecas. Sin embargo, la concepción egipcia de ciencia y el desarrollo de la matemática, sería muy distinta a la que surgió en Grecia y algunos especialistas ven pocas evidencias de antecedentes orientales en la matemática griega, afirmando que *"el desarrollo de la matemática empírica no tiene, necesariamente que desembocar en una matemática teórica"* (Zhmud, 1996, p.141). Surgen en este escenario los primeros filósofos-científicos, que modifican la visión de ciencia a partir de la búsqueda de explicaciones racionales y no míticas.

Se considera que en la primera etapa de la "*matemática demostrativa*" de los griegos (Eggers Lan, 1995, p.27), éstos creyeron poder y deber demostrar todo, pero ¿qué significaba demostrar en este escenario? En esta etapa se ubica a Thales de Mileto (siglo V a.C.), empleando como procedimiento para demostrar empíricamente propiedades y construcciones, la utilización de regla y compás. Proclo hace referencia en su obra varias veces a propiedades demostradas por Thales. Otro tanto hace Eudemo. Como puede observarse se trata de una concepción de demostración diferente de la que predominaría posteriormente en la matemática. La idea de demostración a la que hacen referencia se encuentra más cerca de las de argumentaciones que de la de demostración deductiva.

Si bien Thales heredó las ideas epistemológicas egipcias, agregó a los aspectos empíricos de la geometría el carácter teórico, concibiendo la noción de punto como una idea límite (Klimovsky & Boido, 2005). A partir de entonces la realidad será comprendida no solo por medio de propiedades observables, sino de entidades teóricas surgidas del pensamiento de las ideas límite. La matemática será para este escenario, el estudio de los aspectos concretos de entidades concretas, o sea una parte de la realidad, pero también el estudio de las entidades no observables que derivan de aquellas. Referirse a que en tiempos de Thales, los griegos trataron de "demostrar todo", significa que su pretensión no se limitó, como en el caso de los babilonios o los egipcios a estudiar un caso particular, sino que tenían en vista la posibilidad de una fundamentación y generalización del legado de estos pueblos. Se está hablando genéricamente de lo ocurrido en casi dos siglos y medio.

Aristóteles propone como esquema del pensamiento de las ciencias el "*existir necesariamente a partir de ciertas cosas*". La aparición de la razón se hizo tangible a partir de entonces, y cobró cada vez más importancia en la construcción del conocimiento científico.

Pitágoras de Samos puede ser considerado el primer racionalista de la filosofía. Para él los objetos matemáticos no son empíricos, sino que tienen existencia por sí mismos. Los números son el principio de todas las cosas, el *arjé*, la raíz y esencia de la realidad. La realidad concreta es sólo parte de la realidad. Los enunciados matemáticos deben "verse" y comprenderse a través de la razón, el razonamiento comenzó a ser empleado intensivamente en los desarrollos matemáticos. En los desarrollos pitagóricos, se construyeron conocimientos aritméticos y geométricos, muchas veces combinando ambos.

La demostración atribuida a los pitagóricos para la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ con 1, procedía según Aristóteles por "reductio ad absurdum". Se trata de la conocida demostración que hacemos en la actualidad para la irracionalidad de $\sqrt{2}$

y que fuera incluida en algunas de las antiguas versiones de los Elementos de Euclides, como Proposición 117 del Libro X. Este tipo de argumentación era considerada válida en la Grecia clásica, el fundamento lógico básico de la misma consiste en que al no poder ser cierta la negación de la tesis, ya que conduce a una contradicción, a un absurdo, se infiere la necesidad de que la tesis sea verdadera. Más adelante abordaremos con mayor detalle las características y la fundamentación lógica de las argumentaciones por reducción al absurdo.

La argumentación literaria y dialéctica en Grecia

La sociedad griega estaba formada por una clase noble, compuesta por guerreros e hijos de guerreros, y el pueblo formado por campesinos y artesanos básicamente. La clase noble se dedica a consejos y asambleas en los que requiere del uso de la oratoria. En su educación combinaba deportes y ejercicios caballerescos (caza, equitación, jabalina), actividades artísticas (canto, tañimiento de lira) y oratoria. (Abbagnano & Visalberghi, 2005).

La argumentación literaria tiene características distintas del mecanismo deductivo, sin embargo influyó en su surgimiento y es interesante analizar ciertas similitudes, e incluso la aparición en ella de argumentaciones por reducción al absurdo. Como un ejemplo de argumentación de carácter literario, podemos citar la que aparece en el Canto IX de la Ilíada. En ella Fénix, noble exiliado a quien le fue confiada la educación de Aquiles, razona frente a él acerca de que no debe éste tener un corazón despiadado con Agamenón, siendo los dioses flexibles que se conmueven cuando los hombres que han cometido equivocaciones les ofrecen sacrificios y plegarias:

> *”Mucho padecí y trabajé por tu causa, y considerando que los dioses no me habían dado descendencia, te adopté por hijo para que un día me librases del cruel infortunio. Pero Aquileo, refrena tu ánimo fogoso, no conviene que tengas un corazón despiadado,*

> *cuando los dioses mismos se dejan aplacar, no obstante su mayor virtud, dignidad y poder. Con sacrificios, votos agradables, libaciones y vapor de grasa quemada, los desenojan cuantos infringieron su ley y pecaron”*

(Homero, 2003, p.121)

La lógica argumental se basa en la razonabilidad de la tesis sustentada, en este caso la defensa de la ética del honor, pero no podemos decir que este tipo de razonamientos conduzca necesariamente a una conclusión, sino que ésta es aceptada o no por el interlocutor.

Parménides compone un poema épico-didáctico destinado a persuadir, en él no pone en juego motivaciones que no surjan por sí solas y utiliza el esquema que Aristóteles menciona como “reducción a lo imposible”, o reducción al absurdo:

> *“Que el ser es, implica que no ha nacido, pero si hubiese nacido significa que previamente no existía el ser, y, en ese caso, tendría que haber nacido de la nada, pero, aparte de que solo puede hablarse de lo que es y no de la nada, ¿qué necesidad le haría pasar de no ser a ser?”*

(Citado por Eggers, 1995, p.33)

Esta argumentación utiliza además uno de los principios aristotélicos que es el Principio de necesidad.

Por otra parte, es Zenón de Elea, discípulo de Parménides, quien en el siglo V a.C. fue el primero en contrastar una hipótesis con otra y demostrar indirectamente la verdad de una de ellas, al poner de manifiesto el absurdo o imposibilidad de la otra. Zenón propuso una serie de paradojas, algunas de las cuales se referían al movimiento y demostraba que éste no existe. En su discurso, muestra la habilidad de sostener con igual rigor tesis contrarias.

El arte dialéctico regulaba en Grecia la forma de dialogar de forma racional, se utilizaba el término “dialéctica” para referirse a la situación de comunicación en la que se desarrolla una reflexión crítica sobre la forma de llegar a conclusiones válidas. En todo diálogo existen al menos dos interlocutores contrapuestos, y en la dialéctica se parte de que hay en ellos razones para argumentar. Existe una confrontación en la que se presupone también que existe un acuerdo sobre el estar en desacuerdo, pues sin ello ni tendría sentido hablar para convencerse mutuamente. Pero ciertamente no todo diálogo es dialéctico. En un sentido más técnico, el diálogo dialéctico fue comprendido en relación con una interacción en que los comunicantes intentaban, por ejemplo utilizando el argumento de la "reducción al absurdo", desencadenar en el contrario un proceso cognitivo en que se llegara a tener que admitir la tesis del comunicador. Al atender más y más a esos procesos y al abstraer no sólo de los contenidos concretos y observar sólo las relaciones entre esos contenidos a través de la estructura que tienen las proposiciones de los razonamientos (implicación, contradicción etc.), se llega a una concepción logicista de la dialéctica.

La matemática del mundo de las ideas

Hacia el siglo V a.C., en un escenario de luchas por mantener la hegemonía de Grecia, vivió Platón. Sus escritos fueron redactados en forma de diálogos y lo convirtieron en una figura de gran peso en la filosofía de Occidente.

La matemática tuvo para Platón un lugar preponderante. Compartió la idea pitagórica de la existencia de un mundo más allá del de los objetos concretos, pero que es en cierta forma un reflejo ideal de éste. Ese mundo está formado por entidades formales, de las que se ocupa la matemática. Las formas matemáticas son lo que tienen en común ciertos objetos concretos, por ejemplo: existen muchos objetos de forma triangular, la idea común de todos ellos es la “triangularidad” y de ella se ocupa la matemática. Los seres humanos tienen la posibilidad de llegar mediante la intuición a tales objetos ideales, entendiendo la intuición racional como el contacto directo con los objetos ideales.

Platón propuso a sus discípulos problemas geométricos en muchas oportunidades. De su escuela surgieron algunos de los matemáticos más importantes de la antigüedad, entre ellos Teetetos y Eudoxo. Entre la obra del primero, se encuentra el comienzo del estudio de los números irracionales y la teoría de que los poliedros regulares o platónicos corresponden a los elementos que constituyen el universo. Por su parte, a Eudoxo se debe el método de exhaución, forma de argumentación que posteriormente tendría aplicaciones en el análisis matemático. No se sabe con certeza hasta qué punto Platón y sus discípulos contribuyeron a la estructura deductiva de la matemática, pero sí que se interesaron por la demostración y la metodología del razonamiento. Algunos autores, como Proclo y Diógenes Laercio (Kline, 1972) les atribuyen la clarificación del método de análisis, en el que se considera conocido lo que se busca y se deducen entonces consecuencias hasta llegar a una verdad conocida o una contradicción; en este último caso se concluye que la propiedad buscada es falsa; si lo obtenido es una verdad conocida y el camino es reversible, lo que se obtiene es una demostración. Estos autores también les atribuyen las demostraciones por reducción al absurdo, aunque otros, como se presentaron anteriormente, consideran que este método había sido anteriormente utilizado en la matemática.

Los primeros ejemplos de matemática deductiva nos llegan a través de Platón, que en muchos de los pasajes de sus diálogos se refiere a la matemática, su desarrollo y la aparición de sus propiedades. Las temáticas que abordó fueron variadas, como la teoría de números, las figuras geométricas, los cuerpos geométricos luego denominados platónicos, la estereometría y la axiomática. Para Platón, tal como lo fuera para Thales, las únicas construcciones válidas en geometría eran aquellas efectuadas con regla y compás, ya que permiten asegurar la simetría de las configuraciones. En la República, se puede leer:

> *“Sabes bien que los estudiantes de geometría, aritmética y ciencias análogas, suponen lo par y lo impar y las figuras y tres tipos de*

> *ángulos y todo lo demás en las diversas ramas de la ciencia; éstas son sus hipótesis, que se supone ellos y todo el mundo conocen, por lo tanto no se dignan explicarlas ni a ellos mismos ni a otros, sino que comienzan por ellas y avanzan hasta que llegan al fin, y de esa manera consistente, a su conclusión"*
>
> (Citado por Kline, 1972, p.74)

En esta descripción se encuentra implícito el germen del método axiomático. Mientras la inducción se basa en la experiencia, y aunque la observación y la experiencia son fuente del conocimiento, es el razonamiento y la especulación teórica racional las que permiten llegar al verdadero conocimiento del mundo de las ideas.

Los sistemas deductivos en matemática

En la incorporación del método deductivo a la matemática resultó central la intención filosófica de construir una ciencia teórica cuya meta era el conocimiento de la verdad. El objetivo del método deductivo era explicar y explicar era demostrar. La intención filosófica de construir una ciencia a partir de ciertos principios tomados como base, se encuentra claramente descripta en la obra de Aristóteles. Da la clasificación de todos los conceptos o nociones y enuncia las reglas del razonamiento silogístico.

Es posible comprender a través de algunos hechos presentes en el escenario griego, el surgimiento de la demostración, en el sentido de un proceso deductivo. Por una parte, la necesidad de resolver la crisis generada por la prueba pitagórica de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado y el deseo de decidir si los resultados legados por anteriores civilizaciones eran ciertos o contradictorios. Por otra parte, la naturaleza de la sociedad griega, en la que se favoreció el desarrollo del saber especulativo, dando gran valor al arte de la argumentación y de la persuasión. También parece haber influido la aspiración de la filosofía griega de encontrar las últimas causas de los fenómenos. Finalmente se tiene el antecedente de la intención pedagógica de los recopiladores del saber geométrico anteriores a Euclides que les llevó a considerar los principios básicos de esta ciencia.

La obra de muchos de los matemáticos anteriores a Euclides, como se ha comentado anteriormente, se ha perdido, y por lo tanto no se conocen las características de sus argumentaciones, más que a través de lo que contaron historiadores de la época. De hecho los manuscritos de Euclides también se han perdido, pero su obra ha podido ser reconstruida a partir de notas y comentarios de otros autores.

Una de las principales contribuciones de los griegos a la matemática se refiere a que para ellos todo resultado debía ser establecido deductivamente a partir de un sistema de axiomas. Esta concepción de la manera en que se debían obtener las afirmaciones de la matemática permitía que mediante razonamientos válidos se obtuvieran proposiciones verdaderas al partir de nociones comunes y postulados verdaderos. Las formas válidas de razonar garantizaban de esta manera la veracidad de las afirmaciones de la matemática. La veracidad de los axiomas era garantizada por la evidencia de los mismos. Posteriormente estas concepciones cambiaron, pero debieron transcurrir varios siglos para que ese cambio se llevara a cabo.

Uno de los logros más importantes de Aristóteles fue la fundamentación de la lógica. Los griegos anteriormente habían realizado cierto grado de trabajo básico en lógica al producir razonamientos matemáticos correctos. Aristóteles sistematizó las leyes lógicas que siguen estos razonamientos abstrayéndolas de estos e identificándolas como objeto de estudio de una ciencia. Entre los principios o leyes que puso en evidencia, podemos mencionar:

- *Principio de no contradicción*: una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa

- *Principio del tercero excluido*: una proposición debe ser verdadera o falsa

Estas leyes se encuentran dentro del fundamento sobre el que se edifican las demostraciones indirectas, de las que nos ocuparemos especialmente en este trabajo. Aristóteles califica al Principio del tercero excluido como la "*verdad última a la que se remiten todos los que demuestran, pues es por naturaleza un principio, inclusive de todos los demás axiomas*" (Eggers Lan, 1995, p.38).

La matemática se transformó en la ciencia hipotético-deductiva por excelencia a partir del siglo III a.C., con la aparición de los Elementos de Euclides. Esta obra constituye una recopilación de gran parte de los conocimientos matemáticos existentes en los tiempos de Euclides. Su gran valor reside en la rigurosa organización deductiva. La demostración tomó a partir de ese momento el papel de explicación válida, a partir de ciertos primeros principios: los axiomas y los postulados. Aristóteles había descrito las características de una ciencia demostrativa, Euclides llevó a la práctica esas ideas en el cuerpo de la matemática. En su obra, acorde con las ideas aristotélicas sobre las características que debía tener una ciencia teórica en las que la lógica es previa, se identifican los elementos que componen una ciencia demostrativa:

- ***Definiciones***: con ayuda de axiomas, se definen los objetos ideales con los que se trabaja, independientemente de la experiencia sensible.
- ***Primeros principios***: postulan propiedades que se aceptan por su evidencia sin demostración como verdades. Hay primeros principios de dos clases: los específicos de cada ciencia, llamados *postulados,* y los comunes a todas: los *axiomas* o *nociones comunes*.
- ***Cuerpo deductivo***: compuesto por las proposiciones demostradas a través de la inferencia a partir de los primeros principios y de otras proposiciones demostradas previamente por el mismo método.

Euclides en su obra combinó magistralmente la deducción con la evidencia, la razón con la intuición. Partió de la elección de postulados y nociones comunes las que tal como se consideraba indispensable en la época debían tener la condición de ser evidentes. La intuición no debe entenderse como una iluminación repentina, sino más bien como el resultado de experiencias anteriores, las cuales en este caso se llevaron a cabo en su totalidad en un espacio euclidiano. Estas son las características básicas de los Elementos, a pesar de que se le han hecho algunas objeciones a la manera en que Euclides puso en la práctica las ideas aristotélicas, esta fue la manera de trabajar en matemática durante varios siglos, más de dos mil años.

Durante mucho tiempo, esta obra fue considerada como modelo para cualquier explicación racional. Los Elementos influyeron enormemente en el desarrollo de la matemática posterior. Requirió sin lugar a dudas de un inmenso trabajo intuitivo realizado durante siglos y la idea subyacente es que "*hay ciertos enunciados que es posible derivar de otros más sencillos; es más: es posible obtener nuevos enunciados a partir de los ya establecidos si se adoptan las mismas reglas que permitieron derivar los primeros*" (Campos, 1994a, p.xv). El estudio de estas reglas no tenía aún nombre en la época anterior a los estoicos. Ellos lo involucraron dentro de la dialéctica.

A partir de Aristóteles, la cultura occidental consideró a la demostración como una prueba lógicamente concluyente. El conjunto de pruebas de este tipo constituyen un cuerpo deductivo de conocimientos. Excepto en la obra de Euclides, la matemática desarrollada por la mayoría de los griegos, contemporáneos y posteriores a él, siguió teniendo las mismas características que los desarrollos pitagóricos y de sus sucesores.

La evolución de la deducción en matemática

Los silogismos introducidos por Aristóteles serían posteriormente adoptados por los escolásticos en la Edad Media, quienes enriquecieron la lógica con numerosos y detallados estudios e intentos de formalización. Los escolásticos, sin embargo, acabaron sobrecargando la teoría de los silogismos, lo que produjo su descrédito en el Renacimiento. Los lógicos de la Edad Moderna, procuraron simplificarla y hacia fines del siglo XIX y principios del XX lograron convertirla en un cálculo, al reducir la lógica a operaciones.

Desde el punto de vista de la deducción matemática, podemos pensar que tras el avance producido con los Elementos, poco se cambiaron las concepciones durante siglos. Quizá una de las actividades principales de los matemáticos en este sentido fueron los intentos infructuosos para demostrar el Quinto Postulado de Euclides, que fuera siempre visto como una proposición demasiado compleja para ser considerado en la categoría de postulado, por lo que intentaron demostrarlo a partir de los otros postulados.

En el siglo XIX, un suceso importante relacionado con un cambio en la evolución de las ideas de argumentaciones y deducciones matemáticas, fue el surgimiento de las geometrías no euclidianas. El concepto de sistema axiomático se modificó a partir de entonces en cuanto a la no exigencia de que los axiomas sean intuitivamente evidentes. Este hecho representó un hito histórico importante en la evolución del pensamiento matemático hacia posiciones formalistas, y constituyó un cambio de paradigma en la relación entre matemática y realidad. La búsqueda de un postulado que reemplazara al Quinto Postulado de Euclides, o bien de la demostración del mismo a partir de los otros cuatro postulados presentados en los Elementos, había preocupado a varias generaciones de matemáticos. La creación de las geometrías no euclidianas es atribuida a Nicolai Lobachevsky, Janos Boljai y Georg Riemann. Si bien los postulados enunciados por ellos, suele decirse que "*violan el sentido común*" (Datri, 1999, p.43), pueden comprenderse por medio de asignaciones apropiadas de interpretaciones a los términos primitivos de los sistemas axiomáticos correspondientes. Esto da origen al trabajo con modelos distintos del euclidiano, en los cuales es posible verificar la verdad de las proposiciones enunciadas.

El concepto de verdad cambió radicalmente en la matemática desde la aparición de las geometrías no euclidianas. La verdad dejó de ser absoluta, una propiedad matemática pasó a ser verdadera dentro de un sistema y falsa en otro. Hasta ese momento la verdadera geometría era la euclidiana. A partir de entonces, dependerá de cuáles son los axiomas de los que se parte cuáles sean las propiedades verdaderas y las que no lo son. El surgimiento de geometrías distintas a la propuesta por Euclides, amplió la concepción de la matemática poniendo en tela de juicio la necesidad de evidencia de los axiomas propuestos para una teoría. Si bien en un comienzo las aplicaciones de estas geometrías fueron vistas como una curiosidad lógica, posteriormente se conocieron aplicaciones de las mismas al espacio físico, cambiando la concepción euclidiana del mundo. Resulta curioso que algunos matemáticos se referían en un principio a las geometrías no euclidianas como “geometría imaginaria” (Klimovsky & Boido, 2005), en referencia a considerar a la geometría tradicional como real, y a sus objetos como legítimos.

Hasta el siglo XX, podría decirse que la demostración matemática fue un proceso supuestamente claro e indiscutible. Las demostraciones eran el alma de la matemática, la forma de justificar la validez de sus afirmaciones, de comprobar o refutar sus conjeturas. Los principios de la lógica habían sido sentados por Aristóteles y eran la base sobre la que se construyen los conocimientos matemáticos. A partir de la toma de conciencia de la aparición de paradojas a principios de este siglo, se produjo cierta inseguridad sobre cuáles y cómo son los principios sólidos.

Los logicistas sostuvieron que la matemática es una parte de la lógica y que como tal, puede construirse utilizando solamente procedimientos lógicos. Sus ideas pueden resumirse de la siguiente manera (Toranzos, 1943):

1. Todo concepto matemático es reductible a conceptos lógicos, no existiendo maneras originales de la matemática para formar conceptos.
2. Todo teorema matemático puede reducirse a principios lógicos, solamente con ayuda de procedimientos de fundamentación que pertenecen a la lógica. Luego la deducción matemática es un caso particular de la lógica.

De esta manera, la matemática se reduce a la lógica, es decir que la lógica es el lenguaje que reduce el conocimiento matemático al carácter formal y permite definir objetos y demostrar teoremas de forma que los únicos resultados matemáticos verdaderos son los que se demuestran mediante un proceso finito lógico-deductivo. La demostración matemática es una derivación lógica. Los objetos matemáticos son objetos puramente lógicos. Los principios matemáticos son leyes lógicas o derivados de estas leyes.

Para los logicistas, el razonamiento matemático es analítico y por lo tanto las propiedades matemáticas son tautologías, la matemática es una rama de la lógica. El razonamiento matemático consiste en reducir la verdad de la propiedad que se va a demostrar a otra propiedad ya demostrada. Como primer eslabón de estos razonamientos surgen los axiomas. Debieron introducir ciertos axiomas, como los de infinitud y de elección como postulados de la lógica. Sin embargo no entraremos en detalles acerca de estas vertientes en este momento. Entre los logicistas, cabe destacar la labor de Gottlob Frege, que sostuvo que junto a las leyes o principios lógicos se requiere el empleo de definiciones adecuadas para el quehacer matemático. Por su parte, Bertrand Russell afirmó que los principios lógicos son verdaderos por su forma lógica, sin afirmaciones existenciales o de contenido, y de estos principios puede derivarse la matemática en su totalidad.

Los intuicionistas adoptaron una posición completamente distinta. Desde el punto de vista conceptual, podría afirmarse que el intuicionismo en la matemática tiene su origen en Immanuel Kant, quien afirmó que la referencia inmediata entre un conocimiento y los objetos es la intuición. Si la intuición se refiere al objeto a través de los sentidos, se la llama empírica. Pero a las sensaciones percibidas se les impone un orden o forma “a priori”, se habla entonces de la intuición pura. Las dos formas fundamentales de la intuición pura son el espacio y el tiempo. Para los intuicionistas, la matemática tiene su origen en estas dos formas de la intuición pura. No pretenden que todo lo evidente deba aceptarse en la matemática, ni que lo que no lo sea deba rechazarse; los fundamentos de la matemática contienen una serie de intuiciones primarias que provienen de la intuición, pero el progreso de esta ciencia consiste en eliminar la intuición de sus razonamientos. “*Los postulados de la matemática representan en última instancia, una fijación por juicio de formaciones provenientes de la intuición*” (Toranzos, 1943, p.192).

Para comprender el intuicionismo, es necesario pensarlo como una corriente del pensamiento matemático surgida como reacción a las exageraciones del formalismo y el logicismo, que presentaban a los objetos matemáticos como algo sin significado en sí o bien proveniente del mundo de las ideas. Los intuicionistas se interesaron por el aspecto psicológico del trabajo de los matemáticos. Los seguidores de una vertiente del intuicionismo, denominada neointuicionismo, creyeron necesario restringir la aplicación de la ley del tercero excluido en las demostraciones por el absurdo y declararon aceptar únicamente en la categoría de objetos matemáticos aquellos que podían ser construidos y cuyas propiedades podían demostrarse de manera constructiva, por lo que todas aquellas propiedades en cuya demostración era necesaria la aplicación de reducciones al absurdo eran entonces rechazadas. Para estos matemáticos, probar que la negación de cierta afirmación no sea cierta no es equivalente a que la afirmación inicial sea verdadera.

Posteriormente desarrollaremos con mayor profundidad estas ideas y los fundamentos de las mismas. Resulta notable al respecto que algunas culturas, como los chinos y los hindúes no utilizaron en su matemática demostraciones por reducción al absurdo, y que en ambos casos desconocían e incluso negaban el Principio del tercero excluido. Para los griegos y en consecuencia para Occidente, sin lugar a dudas, la influencia de Zenón y Parménides fue decisiva para la aceptación de este principio lógico.

En 1900 David Hilbert, quien perfeccionó las ideas de Euclides en cuanto a la axiomatixación de la matemática, puso a consideración su famoso programa de investigación durante su discurso en la Conferencia Internacional de Matemáticas. Los dos objetivos principales del programa de Hilbert consistían en primero demostrar que la matemática es consistente y que la matemática es completa. Al hablar de demostraciones, método deductivo y sistemas axiomáticos, no puede dejar de mencionarse a Kurt Gödel, cuyo teorema demostró la futilidad de los intentos de reducir la matemática a un mero sistema formal, demostrando que cualquier teoría matemática suficientemente potente, que al menos contenga la aritmética, contiene proposiciones que no pueden ser probadas ni refutadas, es decir contiene afirmaciones indecidibles.

Las características principales del formalismo son (Toranzos, 1943):

1. Los postulados son arbitrarios, su única limitación consiste en que sean compatibles.
2. Los postulados son relaciones entre “no importa qué clase de entes”, que son caracterizados implícitamente a través de esas relaciones.
3. El sistema de postulados está destinado a fundamentar simultáneamente la lógica y la matemática.

La diferencia fundamental entre formalistas y logicistas consiste en que para los seguidores de Hilbert, la aceptación de los axiomas lógicos tiene la misma naturaleza que la de los axiomas matemáticos, éstos no son reductibles a los de la lógica. No se usan otras suposiciones que las contenidas en los axiomas. La matemática no es posterior a la lógica, no es reducible a ella, sino que ambas aparecen simultáneamente en el sistema formal.

La ¿muerte de la demostración? o una revisión sobre su naturaleza

En el siglo XX, las posiciones formalistas extremas han exagerado el aspecto sintáctico de los sistemas axiomáticos, poniendo el acento en aspectos sintácticos, en detrimento de los semánticos y de la intuición. Su propuesta consiste en despojar totalmente a los términos matemáticos de su significado y realizar una definición del sistema formal correspondiente desde la sintaxis, operando con ellos sin tener en cuenta su significado, sino simplemente las reglas de transformación definidas previamente. Con esta óptica, los términos matemáticos aparecen como meros elementos simbólicos de un sistema formal. La demostración se reduce de esta manera a un procedimiento algorítmico que podría desarrollarse de forma automatizada, incluso mediante el uso de computadoras.

En 1976 Kenneth Appel y Wolfgang Haken, matemáticos de la Universidad de Illinois, marcaron un nuevo hito en la historia de la evolución de las demostraciones en matemática, al presentar una demostración realizada con ayuda de una computadora de una conjetura que había ocupado a matemáticos durante más de un siglo: El problema de los cuatro colores, consistente en demostrar que todo mapa plano puede ser coloreado usando sólo cuatro colores, aceptando que dos regiones que tienen frontera no puntual común no deben tener el mismo color. Appel y Haken redujeron el problema a comprobar que casi 1800 mapas de tipos esencialmente diferentes se podían colorear con cuatro colores; si lo hacían ellos no terminarían en mucho tiempo, programado en una máquina el resultado se consiguió en varios días. No se ha encontrado aún ninguna demostración de este teorema hecha con lápiz y papel. Tras esta demostración, han aparecido otras del mismo estilo. La demostración de Appel y Haken provocó una polémica entre los matemáticos acerca de si era o no lícito aceptarla, ya que en ella había sido necesario utilizar otros elementos, aparte de la razón humana, argumentando que aunque se pueda repetir el experimento en varias máquinas no podemos estar seguros de que no se haya cometido un fallo en su diseño de modo que el resultado sea sólo aparentemente correcto. Aparecieron publicaciones como (Horgan, 1973), en las que se hablaba explícitamente de la posibilidad de "muerte de la demostración". Muchos matemáticos exteriorizaron su rotundo rechazo a las demostraciones hechas con ayuda de computadoras:

> *"La demostración con ordenador aparece como intrínsecamente inverificable y esencialmente falible: hay que admitir que la prueba con ordenador puede dar respuesta incorrecta sin que se tenga la posibilidad de determinar el lugar donde se produce el fallo. Como posibilidad de hacerla más plausible, elaborar otros programas que permitan obtener el mismo resultado, es decir, intentar la confirmación a través de otras demostraciones que también tendrán un error intrínseco..."*

(de Lorenzo, 2000, p.403)

El filósofo Stephen Tymoczko afirmó:

> *"Si aceptamos el teorema de los cuatro colores como un teorema, nos vemos forzados a cambiar el sentido de 'teorema', o más específicamente a cambiar el sentido subyacente de 'demostración'"*

(citado por Courant & Robbins, 2002, p.543)

Por su parte, Haken, en defensa de su demostración, afirmó:

> *"Cualquiera puede en cualquier parte del proceso llenar los detalles y verificarlos. El hecho de que una computadora pueda comprobar más detalles en pocas horas, de los que un humano podría llegar a esperar comprobar en una vida no cambia el concepto básico de*

demostración matemática. Lo que ha cambiado no es la teoría sino la práctica de las matemáticas".

(citado por Courant & Robbins, 2002, p.544)

Indudablemente, la matemática es mucho más que mero encadenamiento deductivo y formal. Aparece además relacionado con ella un proceso creativo, ligado a la formulación de conjeturas, a la presencia de ejemplos y contraejemplos. Durante las últimas décadas la concepción de demostración y de lenguaje para su comunicación, ha ido cambiando notablemente. Muchos son los matemáticos y educadores que consideran en la actualidad que el aspecto deductivo no es el único importante en la matemática, se ha reconocido la realidad de la práctica matemática y la demostración tiene distintos grados de validez formal.

Puede decirse que la actividad de los matemáticos actuales se centra en la resolución de nuevos problemas, en el acrecentamiento del cuerpo de conocimientos y en la organización y fundamentación del sistema de la matemática (Godino & Recio, 2001).

Luis Vega en un artículo acerca de la visión de las demostraciones en la matemática actual, aborda los conceptos de prueba y demostración diferenciando y caracterizando los mismos a través de un análisis epistemológico de estos conceptos dentro de la matemática (Vega, 1993). Es claro que la demostración ha sido un rasgo característico en la imagen tradicional de la matemática, considerada desde hace siglos como la ciencia demostrativa por excelencia. "*Sin embargo esta imagen parece amenazada de revisión en nuestros días*" (Vega, 1993, p. 156). Existen entre los matemáticos diversas posiciones en relación con el papel de las demostraciones. La posición maximalista liga no solo el establecimiento de las proposiciones matemáticas, sino su propio significado a la demostración sistemática estricta. Esta sería la posición de los formalistas llevada a su extremo. La posición minimalista frente al papel de las demostraciones, descarta la idea clásica de demostración y confía el desarrollo del conocimiento matemático a una dialéctica de conjeturas y refutaciones, atribuyendo a la demostración efectos retóricos o didácticos. Entre estas dos posiciones, es posible encontrar en la actualidad posiciones intermedias que atribuyen a las demostraciones mayor o menor importancia dentro del edificio matemático. Vega reconoce que desde cualquiera de las posiciones antes mencionadas, las demostraciones tienen virtudes como la organización de un cuerpo de conocimientos con la estructura de un sistema teórico deductivo. Brindan además la capacidad para seguir incorporando en este sistema nuevos conocimientos.

A partir de estas virtudes y capacidades, no es posible ignorar la existencia de las demostraciones en matemática, sino que además se infiere la peculiar afinidad existente entre este tipo de prueba y esta ciencia. Lo que no puede inferirse con claridad es que el conocimiento matemático sea única y exclusivamente demostrativo.

La matemática está conformada no solo de teoremas, sino de resultados obtenidos por aproximación, pruebas probabilísticas y procedimientos de verificación empírica. Entre estas últimas, Vega menciona las conjeturas que por más que resistan a las demostraciones no dejan de estimular su búsqueda, siendo abordadas por innumerables matemáticos y estudiantes con curiosidad e interés, en cuyos abordajes se desarrollan y construyen conocimientos matemáticos aún no llegando a resultados positivos desde el punto de vista de la deducción.

Sin embargo a pesar de esta revisión de la matemática, lo que aún se observa en esta ciencia es la concepción universalista de su naturaleza, los matemáticos suelen asumir aún a la matemática como una ciencia universal en sus resultados y métodos.

> *"En la actualidad la matemática se ha hecho universal desde la concepción occidental de tal forma que los matemáticos chinos,*

japoneses o hindúes trabajan con las concepciones y métodos de la matemática desarrollada desde siglos atrás en Occidente"

(Salazar de León, 2005, p.23)

La demostración matemática como práctica social

Las ideas que se acaban de presentar en este capítulo, muestran claramente una evolución en los mecanismos de validación que utiliza la comunidad matemática a lo largo de distintas culturas.

La comunidad científica matemática, tal como se ha afirmado anteriormente tiene como una de sus atribuciones cuidar las formas de validación del conocimiento de esta ciencia, determinando su legitimidad para esa sociedad. La actividad humana que caracteriza esta validación es demostrar.

Consideraremos, entonces, a la demostración como una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. La demostración es, por lo tanto una práctica social característica de la comunidad matemática en cuanto a institución.

Esta práctica social ha tenido en esencia siempre la misma finalidad, pero sus manifestaciones han sido distintas. No es la misma de una comunidad a otra, se ha modificado y evolucionado de una cultura a otra; no es la misma para distintas comunidades matemáticas. Esto es claramente comprensible desde la socioepistemología, ya que en cada escenario sociocultural, refleja las características de éste, pero su finalidad básica ha sido la legitimación del saber matemático, aunque no es esta su única función.

Pero, ¿cuál es el conocimiento matemático que se construye por medio de esta práctica social? En las actividades humanas de investigar y enseñar matemática, en la práctica social de demostrar, ¿qué hace que se demuestre como se demuestra? Nuestra hipótesis es que es la argumentación, la que se construye en el escenario sociocultural y que se manifiesta en la práctica social de la demostración. Es la argumentación matemática, la que se refleja en la práctica social de la demostración. Por ello esta investigación se encara indagando acerca de la construcción sociocultural de la argumentación matemática.

La presencia de comunidades matemáticas en escenarios muy distintos, lleva a comprender la presencia de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación. Esto también permite comprender la posibilidad de aceptar como válidas algunas y no otras de acuerdo con las características básicas de los escenarios en los que ocurren.

Como se ha afirmado en nuestra recorrida a través de la historia, durante siglos las argumentaciones utilizadas en la comunidad matemática han tenido ciertas características sustentadas en la lógica aristotélica. Estas son las argumentaciones que se construyen para demostrar una propiedad en la matemática occidental, y que se espera encontrar también en el aula de matemática. Por encontrarnos inmersos en esa comunidad matemática, cuando se utiliza el término demostración, se lo hace con ese significado absoluto, como si fueran las únicas demostraciones aceptadas, no viendo que se trata en realidad de un término que es relativo al escenario socioepistemológico.

Pero, ¿por qué la lógica aristotélica tuvo características tan fuertes que hicieron que se una de manera tan indisoluble el concepto de razón con el de lógica aristotélica?, ¿los principios que rigen el pensamiento humano, con los principios lógicos enunciados por Aristóteles?, ¿la demostración deductiva con la demostración matemática?, ¿de qué manera logró que las ideas que sustentara este filósofo se propagaran por todo Occidente y llegaran a nosotros a través de tantos siglos?

A continuación, se intentan dar desde el enfoque socioepistemológico, algunas respuestas a estos interrogantes, basadas en la reflexión sobre el escenario, la obra y la influencia de Aristóteles.

Capítulo 4

La influencia aristotélica

La influencia de Aristóteles a lo largo de la historia es indudable. Pocos pensadores han marcado una huella tan profunda y que sería seguida por tantos a lo largo de los tiempos. Sin embargo, la magnitud y profundidad de su influencia impide, de cierta manera, pensar cómo podría haber sido la evolución del pensamiento y de las ciencias si no hubiese tenido tal trascendencia en nuestra cultura...

La lógica ha sido vista durante siglos como una teoría que estudia las inferencias válidas. Sus principios han sido asumidos como leyes naturales, innatas del raciocinio humano. Las leyes de la lógica aristotélica, se identificaron como las leyes del pensamiento.

Este capítulo intentan dar desde el enfoque socioepistemológico, algunas respuestas a los interrogantes que se plantearon como consecuencia del recorrido por la evolución de las demostraciones a través de los tiempos y las culturas. Las preguntas se refieren a la influencia de la obra de Aristóteles, nuestras respuestas se basan en la reflexión sobre los escenarios en los que se desarrolló su obra y en los que permitieron y propiciaron su difusión e influencia.

Aristóteles y el escenario aristotélico

Aristóteles (384 a.C - 322 a.C.) fue discípulo de Platón, pero no se limitó a repetir las enseñanzas de su maestro, sino que desarrolló una obra cuya influencia se extiende hasta la actualidad, influyendo en el pensamiento humano durante siglos. Estudió en la Academia de Platón, mientras fue miembro de la Academia, obviamente Aristóteles fue teniendo discrepancias y criticando algunas ideas del platonismo. Tras la muerte de Platón y al ser confiada su dirección a Espeusipo, la abandonó, emprendiendo un viaje por Asia Menor. A su regreso a Macedonia, tuvo a su cargo la educación de quien sería luego Alejandro Magno. Posteriormente regresó a Atenas, donde fundó el Liceo, su propia escuela.

La obra aristotélica se centra en ciertas temáticas fundamentalmente: física, lógica y metafísica, ética y política y, biología. El legado de Aristóteles, consistió además, en una tradición de investigación organizada.

> *"El pensamiento de Aristóteles es considerado por muchos historiadores de la filosofía, de la ciencia y de la cultura como verdaderamente un eslabón clave entre las ideas un tanto asistemáticas o meramente animistas y una concepción del conocimiento científico y filosófico actual"*

(Klimovsky & Boido, 2005, p.86)

Históricamente, en Grecia se habían sucedido una serie de conflictos armados que terminaron con el dominio de Macedonia, cuyo rey Filipo II comenzó a expandir un imperio que alcanzaría su apogeo con su hijo Alejandro Magno. Aristóteles fue testigo del derrumbe de la democracia ateniense y la conformación del imperio alejandrino.

Normalmente se tiene de la sociedad de Grecia una visión casi idílica: es la cuna de la democracia, de la filosofía, del pensamiento científico, de la armonía y la perfección en el arte… Pero, ¿cómo era el escenario griego en el que vivió

Aristóteles? ¿Qué características de este escenario permitieron y propiciaron el surgimiento del pensamiento aristotélico?

En la mayoría de los textos que hablan del genio griego, se presenta una sociedad ideal. "*Pero, para Nietzsche, el genio trágico griego era posible solamente cuando las raíces del árbol admirable de la cultura y del arte nacían y se alimentaban de un humus de crueldad y de barbarie. La inhumanidad es para él el terreno fecundo del nacimiento de la humanidad, entendida como privilegio de los pocos elegidos. Era necesaria la esclavitud, el desprecio del trabajo, la férrea opresión de las masas; era necesaria la crueldad bestial que arrastraba a los vencedores a degollar a todos los hombres de las ciudades conquistadas y a reducir a la esclavitud a mujeres y a niños;); era necesario el instinto de lucha, que inspiraba tanto las pavorosas leyendas teogónicas como las escenas preferidas por los escultores; era necesaria la envidia, como característica esencial del alma griega, para despertar la emulación y la actividad, por las cuales se desarrollan la genialidad y la cultura*" (Mondolfo, 1956, pp.20-21). Este escenario llega a nosotros recreado en la mitología, pero también en la historia, a veces novelada, de sus gobernantes, como Alejandro Magno. En cierta manera, pareciera que para llegar a ideas altruistas, armónicas, raíces del raciocinio y la cultura, hubiera sido necesario conocer en contraposición el instinto de lucha, la envidia, la crueldad… Para llegar a comprender la razón, pareciera que debió haberse conocido la irracionalidad, así como para llegar a la democracia, la desigualdad y el despotismo… "*El ideal platónico-aristotélico del gobierno de la racionalidad y del predominio de las virtudes intelectuales no es por lo tanto reflejo o transfiguración de la realidad histórica, sino más bien reacción y antídoto contra sus vicios*" (Mondolfo, 1956, p.32).

El escenario griego de la época de Aristóteles fue un escenario de contrastes, en el que se combinaron la paz y la guerra, la democracia y la esclavitud, la belleza y el horror. "*El ideal platónico-aristotélico del gobierno de la racionalidad y del predominio de las virtudes intelectuales no es por lo tanto reflejo o transfiguración* *de la realidad histórica, sino más bien reacción y antídoto contra sus vicios"* (Mondolfo, 1956, p.32).

La filosofía aristotélica

Mientras Platón representa el idealismo, por medio de su concepción del hombre que mantiene el pensamiento dirigido a otro mundo perfecto y no sensible, Aristóteles representa el realismo presentando un mundo concreto y tangible. Mientras para Platón, las ideas tienen existencia real, y la única ciencia verdadera consiste en el conocimiento de las ideas, y los sentidos sólo informan de un mundo cambiante que nos rodea; para Aristóteles las ideas o formas no existen fuera de la otra existencia; la ciencia tiene por objeto determinar las formas permanentes, esencia de los fenómenos cambiantes de la naturaleza. Aristóteles tuvo la convicción de la necesidad de la observación, de la evidencia de los sentidos. Materia y forma surgen como dos aspectos de las ideas. La realidad no está en el mundo de las ideas, sino que la realidad es este mundo concreto que habitamos. La teoría idealista tiene sus aspectos religiosos pues sostiene la creencia de la inmortalidad del alma, que conoce los modelos eternos y verdaderos antes de encerrarse en el cuerpo del hombre. La teoría idealista, tuvo su aspecto social: fue una teoría de la clase ociosa, de "*hombres que pensaban en las cosas, pero no actuaban sobre ellas*" (Farrington, 1979, p.111). El anhelo de actuar sobre la materia en Aristóteles comienza a manifestarse en algunas de sus obras, aunque esta acción se restrinja al análisis y razonamiento sobre las mismas.

Al referirse al ser, Aristóteles introduce dos nuevos conceptos: potencia y acto. La potencia es entendida como la materia considerada dinámicamente, con sus posibilidades. El acto es la forma dinámicamente considerada, es la forma realizada y consumada. Estos conceptos permitieron abordar problemas que para aquel entonces no tenían solución: como el del movimiento, el del cambio. El pasaje del no ser al ser era considerado contradictorio para los griegos, tal como lo afirmara Parménides. Aristóteles lo puede explicar gracias a los conceptos de acto y potencia: el cambio consiste en el pasaje del no ser al ser, pero no se trata de un no ser y un ser absolutos, sino del ser en potencia y el ser en acto. Esta misma teoría se aplica al infinito.

En relación al infinito, es usual encontrar en la bibliografía referencias a la imposibilidad de la comprensión del infinito por parte de los griegos. Pero *"la fantasía y la mitología griegas no ignoran en realidad ni lo infinito ni lo desmesurado*" (Mondolfo, 1956, p.57), uniendo la idea de la ausencia de fuentes de donde pudiera derivarse la idea de lo infinito. Sin embargo, la incomprensión estética de lo infinito por parte de los griegos se convierte de esta manera en el de incomprensión intelectual: el griego, pregunta ¿qué hay más allá del horizonte?, ¿antes del tiempo?, ¿después del tiempo? *"Las nociones de la infinidad del tiempo y de la eternidad son comunes al pensamiento griego, por la misma razón que le son contradictorias las ideas del nacimiento de la nada y de la desaparición en la nada"* (Mondolfo, 1956, p.62); para los estoicos, el tiempo se extiende de manera infinita hacia el pasado y hacia el futuro, incluso manejan la idea de división hasta el infinito, de infinitesimal, de la existencia de lo infinito dentro de lo finito. La noción de la infinitud temporal y espacial surgen entre los griegos como exigencia lógica para evitar pasar del no ser al ser. Pero con Zenón, las ideas del infinito condujeron a la contradicción y nació de esta manera el temor griego al infinito. Aristóteles reconoce entonces, al infinito como perteneciente al primer motor y condición de la eternidad de su acción. Para cuidar la coherencia de las ideas, limita al infinito al caso potencial.

La ciencia aristotélica, la lógica aristotélica

Aristóteles creó una nueva ciencia o técnica, según cómo se la vea: la lógica. Su objetivo era determinar los límites de la validez del razonamiento, para poder llegar al conocimiento y a la expresión de la realidad. Su surgimiento debió realizarse al asumirse que la existencia de la forma no era independiente de la materia, cuando fue necesario estudiar lo particular para poder llegar a lo universal, y analizar cuáles son los procesos válidos para lograrlo. Las ideas de Aristóteles fueron el primer intento sistemático de construir una metateoría de las teorías científicas. De esta manera, sentó las bases de un concepto clave en el pensamiento occidental, como lo fue la concepción de ciencia como ciencia demostrativa, relacionada con la lógica, como propedéutica de toda ciencia, y con la metafísica, como fundamento último de toda ciencia (Gómez, sf).

La investigación científica, para Aristóteles tiene dos etapas. La primera, inductiva, obtiene datos de los sentidos y a partir de ellos, generaliza e intelectualizando accede a una forma universal llamada causa formal de los hechos. La segunda etapa es deductiva; se realiza con el auxilio de la lógica y apunta a mostrar que los efectos observados derivan de dichas causas (Boido, 1998).

Aristóteles distinguió seis formas de conocimiento: sensación, memoria, experiencia, arte, ciencia y sabiduría. El conocimiento racional puede ser teórico, práctico y productivo, sólo el conocimiento teórico es auténtica ciencia, aunque los tres modos de conocimiento son aceptados como ciencia en sentido amplio. La ciencia trata de un género determinado de objetos, consiste en las afirmaciones de los mismos, obtiene y reconoce como propias las consecuencias lógicas de sus afirmaciones.

Para Aristóteles, toda ciencia está compuesta por un sistema de enunciados S que verifican:

- *Supuesto de realidad*: Los enunciados de S se refieren a un tipo particular de objetos.
- *Supuesto de verdad*: Los enunciados de S son verdaderos.
- *Supuesto de lógica*: Las consecuencias lógicas de los enunciados de S, pertenecen también a S.
- *Ciertos términos de S se aceptan sin definición*, los restantes se definen.

- *Ciertos enunciados de S se aceptan sin demostración*, los restantes se demuestran.

Los enunciados de la ciencia deberán tener una forma lógica que reflejen la estructura de los hechos, estando dotados, por una parte de componentes que se refieran a objetos individuales, a propiedades esenciales de objetos individuales y que afirmen o nieguen las propiedades de cada objeto. Los enunciados de la ciencia son de la forma S es P, tienen un sujeto, un predicado y alguna variante del verbo ser que establece la inherencia del predicado al sujeto. Aristóteles identificó cuatro expresiones verbales: ser inherente a todos los objetos, no ser inherente a ningún objeto, ser inherente a algún objeto o no ser inherente a algún objeto. Esto da origen a las proposiciones categóricas:

Universal afirmativa: Todo S es P
Universal negativa: Todo S es no P
Existencial afirmativa: Algún S es P
Existencial negativa: Algún S es no P

Aristóteles sabía que el lenguaje contiene muchos tipos de expresiones distintos de éstas, por ejemplo, las proposiciones singulares (a es P, a es no P). Pero su lógica a describir el conocimiento científico y bajo este punto de partida, no consideró estas proposiciones pues predicaban de individuos o casos singulares, y en esta concepción, no es posible hacer ciencia de lo singular, y por lo tanto estas proposiciones no podían formar parte de razonamientos científicos.

En relación al supuesto de verdad, se debe tener en cuenta que para Aristóteles, las propiedades de verdad o falsedad son propias de las proposiciones y se definen como sigue:

> *"Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es falso, mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero"*

(Gómez, sf, p.11)

La concepción aristotélica de verdad es semántica, ya que debe recurrir a la realidad para determinarla. Para la lógica griega, un *enunciado* tiene una connotación lingüística: es una expresión del lenguaje. Con un *enunciado*, se afirma, se niega, se declara, se aserta. En distintos idiomas, los enunciados difieren, pero si lo que expresan es lo mismo, se trata de una misma proposición expresada por varios enunciados. Aristóteles define *afirmación* como "*un enunciado que expresa que algo está unido a algo*" y *negación* como "*un enunciado que expresa que algo está separado de algo"*. Por su parte, una *contradicción* es "*un enunciado compuesto por una proposición afirmativa y la negativa correspondiente*" (Campos, 1994a, p.363).

La lógica aristotélica se basa fundamentalmente en tres principios: identidad, no contradicción y tercero excluido, aunque en la obra de Aristóteles el primero y el tercero sólo aparecen esbozados, sólo el principio de no contradicción es explícitamente tratado por Aristóteles en la Metafísica:

> *"El mismo atributo no puede pertenecer y no pertenecer al mismo sujeto, al mismo tiempo y bajo la misma relación. Este es el más cierto de todos los principios [...] porque es imposible que alguien conciba que la misma cosa sea y no sea. [...] Todos los que hacen una demostración, la reducen, en definitiva, a este principio; es efectivamente el natural punto de partida de todos los otros axiomas. Hemos sentado que es imposible que una cosa sea y no sea al mismo tiempo, y hemos mostrado por este medio que, de todos los principios, éste es el menos sujeto a discusión. Algunos, sin embargo, piden que aún un principio como éste sea demostrado; lo cual hacen por ignorancia, porque no conocer de que cosas se pueda pedir una demostración y de cuáles no, es falta de instrucción"*

(citado por Campos, 1994a, p.469)

Claramente en este párrafo, Aristóteles declara la importancia que tiene para él, el principio de no contradicción, su supremacía por encima de los otros principios y la necesidad de existencia de principios en una ciencia, de axiomas que considera evidentes y cuya demostración no es necesaria, ni posible.

El supuesto de lógica, es el que fundamenta la manera de aumentar el conocimiento de la ciencia. Si bien Aristóteles es considerado el creador de la lógica, no empleó la palabra '*lógica'* en el sentido en el que actualmente nos es familiar. Para él un lógico era un hombre que sabe hablar, operar deducciones correctas a partir de las premisas (Scholz, 1968). El supuesto de lógica afirma que todos los enunciados de la ciencia deben estar conectados deductivamente y en sentido estricto, conectados a través de razonamientos en los cuales las premisas y conclusiones deben ser verdaderas. A partir de esta exigencia, sólo se entiende por ciencia a la ciencia deductiva.

El reconocimiento del supuesto de lógica, implica aceptar la existencia de premisas, de proposiciones aceptadas sin demostración. Aristóteles considera distintas clases de premisas en la ciencia. Una forma de inferencia que utilizó Aristóteles fue lo que después se llamó Modus Ponens. Aristóteles consideraba que la ciencia avanza a través de inferencias, y llamó razonamiento a un "*discurso en el que, sentadas ciertas cosas, resulta necesariamente, a través de lo establecido, algo distinto de lo establecido*" (Campos, 1994a, p.371). Existen para él distintos tipos de razonamientos:

- Una *demostración* es un razonamiento que parte de cosas verdaderas y primordiales o de cosas cuyo conocimiento se orifica a través de cosas verdaderas y primordiales. Se entiende por "cosas verdaderas y primordiales" aquellas que tienen credibilidad por sí mismas.
- Un *razonamiento dialéctico* está constituido a partir de cosas plausibles. Cosas plausibles son las que parecen bien a todos, o a la mayoría.
- Un *razonamiento erístico* parte de cosas que parecen plausibles, pero no lo son.
- Un *paralogismo* o *razonamiento desviado* es aquel que se construye a partir de cosas no verdaderas, aunque pertinentes, por ejemplo al partir de figuras falsas.

La lógica no se interesa en el contenido de los razonamientos, sino de su forma. Un silogismo está compuesto por proposiciones, es un esquema de razonamiento. Aristóteles y sus seguidores, clasificaron los silogismos y reconocieron métodos de reducción de razonamientos a ciertos tipos de silogismos.

Pueden considerarse dentro de la historia de la lógica, diversas etapas o enfoques de su desarrollo: La primera es la *dialéctica*, que si bien no puede denominarse aún lógica, sedimenta las bases sobre las cuales se levantará ésta; se considera que esta etapa se desenvuelve desde Zenón hasta Aristóteles. La segunda etapa es denominada *lógica tradicional*, se trata de la lógica de Aristóteles y sus cultivadores posteriores, los escolásticos. La tercera etapa, *lógica griega*, comprende la lógica aristotélica y la lógica estoica, que aunque fuera ignorada por los lógicos aristotélicos, actualmente es reconocida. Al referirnos a *lógica clásica*, se involucran los desarrollos desde Zenón hasta principios de siglo XX, pero bajo el enfoque dado por Boole. Finalmente la *lógica contemporánea*, comprende lógicas no clásicas y estudios metalógicos diversos.

La adopción de la filosofía aristotélica

El interés por lo religioso, se hizo cada vez más notorio en el mundo helenístico-romano, motivado por la aparición de nuevos cultos, entre ellos el cristianismo. En el área de educación, no hubo grandes modificaciones con respecto a la educación esencialmente aristocrática existente, aún no se habían puesto en práctica los principios de educación universalista que surgirían mucho después. El cristianismo comenzó su difusión y para sobreponerse a las religiones paganas, debió consolidar su doctrina. Retomó la filosofía griega y la patrística edificó una construcción sólida en defensa del paganismo, basada en principios platónicos. En ella se identificó la razón con el Verbo Divino.

San Agustín ocupó un lugar especial en la patrística, ocupándose de problemáticas como la naturaleza una y trina de Dios, el bien y el mal y el destino humano de salvación o perdición. En relación a las disciplinas que debían enseñarse, defiende la gramática, la dialéctica, la retórica, la música, la aritmética, la geometría y la astronomía, culminando con teología y filosofía.

Las obras de Aristóteles en las que se refiera a la lógica, fueron compiladas por Andrónico de Rodas en el siglo I antes de nuestra era con el nombre de *Organon*. Esta obra ha sido estudiada por los helenísticos, los escolásticos medievales, filósofos renacentistas y contemporáneos. A partir de estos estudios, surgieron diversos enfoques y ampliaciones, pero su esencia se mantuvo intacta.

A partir del siglo VII, se produjo en Occidente una discontinuidad en relación a la actividad cultural, causada por el predominio de los bárbaros. Sin embargo esto no impidió la existencia de ciertos centros de cultura ubicados en las regiones periféricas de Europa, hasta que por influencia de Carlomagno y con la finalidad de lograr funcionarios laicos y eclesiásticos para administrar el imperio, se produjo una preocupación por la fundación de escuelas y la difusión de la cultura. Las escuelas catedralicias permitieron la creación de las universidades. La Universidad pasó a ser una institución autónoma que nucleaba a profesores y estudiantes y se constituyó en núcleo de la actividad científica e intelectual. En esta época se generaron traducciones de obras del pensamiento platónico y de sus interpretaciones se generó el principio neoplatónico según el cual la superioridad y trascendencia de Dios resultan un impedimento para que la razón humana capte positivamente los atributos de Dios: sólo se puede decir de Dios lo que no es (Abbagnano y Visalberghi, 2005).

Tras la disolución del imperio de Carlomagno, y la consiguiente detención de la recuperación intelectual de Occidente, se reanuda esta recuperación al reestablecerse la unidad del imperio. Geberto de Aurillac, escribió comentarios de las obras de Aristóteles y de Boecio. Durante la Edad Media, fueron frecuentes los decretos que prescribían o autorizaban la apertura de escuelas, afirmando que las mismas debían servir principalmente para el entendimiento de la fe cristiana. (Abbagnano y Visalberghi, 2005). Esta fue considerada en aquella época la finalidad de la filosofía que se denominó escolástica. Con el nombre de *scholasticus* se designó en un principio a quien enseñaba las artes liberales, o sea las ciencias que forman el *trivio* (gramática, lógica o dialéctica y retórica) y el *cuadrivio* (geometría, aritmética, astronomía y música), y luego al profesor de filosofía o teología. El problema fundamental que centró la atención de la escolástica fue llevar al hombre a la inteligencia de las verdades reveladas, o sea hacer inteligible al hombre las verdades contenidas en los libros sacros y las definiciones dogmáticas de la Iglesia. La preocupación de los escolásticos no fue encontrar la verdad, sino entenderla. La verdad era dada por revelación, y en su entendimiento se utilizó la tradición filosófica basada fundamentalmente sobre la filosofía griega. Sin embargo debe tenerse en cuenta que el sentido de la filosofía cambió: la razón no es base de un auténtico interés científico por los fenómenos naturales, aún cuando a veces se ocupe de tales fenómenos su propósito es filosófico o teológico y los aborda no desde la observación sino desde documentos de la tradición antigua. El propósito de la escolástica es permitir al hombre entender la verdad revelada, conciliar la fe y la razón.

Si bien la filosofía medieval parece hallarse bajo al influencia aristotélica, también Platón tuvo influencia, aunque en menor proporción, pues su obra no fue totalmente traducida al árabe y al latín como la de Aristóteles (Koyré, 1997).

Surge en el siglo XII, una figura que influyó en el pensamiento de su época: Santo Tomás de Aquino. En su escenario, se debatían cinco posibilidades: eliminar la fe, eliminar la razón, separar por completo la fe y la razón, considerar a la fe como un supuesto de la razón, o armonizar ambas mediante una teoría en que se complementaran. Su obra se orientó a armonizar la razón y la fe, con las bases filosóficas dadas por Aristóteles y las bases religiosas proclamadas por el cristianismo. En su esfuerza por comprender la fe, recurrió a la razón y a la filosofía. La doctrina tomista propuso cinco vías racionales para la demostración de la existencia de Dios, y de ellas desprendió la naturaleza de Dios.

En la alta escolástica (mediados del siglo IX a fines del siglo XII), la fe y la razón se consideran en perfecta armonía. La tradición de la lógica aristotélica, se había conservado a través de traducciones y comentarios de Boecio. En estos siglos, el estudio de la lógica es tomado como problema de esta misma disciplina, que se cuestiona sobre su poder racional. El verdadero conocimiento tiene por objeto la realidad del ser, surgen los cuestionamientos acerca de las características de lo universal: en sentido platónico como sustancia separada o en sentido aristotélico como esencia en sí.

Posteriormente, con el florecimiento de la escolástica (hasta principios del siglo XIV), se admite la posibilidad de que la razón obtenga algunos resultados independientes de la fe, que incluso pueden contradecirla. Los dogmas fundamentales del cristianismo aún cuando no estuvieran sostenidos por la fe fueron declarados verdades racionales inteligibles para el hombre.

Finalmente a partir de entonces y hasta el Renacimiento, se produjo la disolución de la escolástica, caracterizándose este momento por admitir contrastes entre la fe y la razón. Mientras los escolásticos medievales elaboraron la teología cristiana sobre la base de la obra aristotélica, los hombres de ciencia renacentistas aceptaron o rechazaron los conceptos vertidos por Aristóteles.

Se desarrollaron durante la Edad Media, además de teorías de la inferencia esencialmente clásicas, otras en las que se torna central la forma y el significado. Una de ellas es la teoría de la suposición, que puede ser considerada como un intento de un análisis semántico de los términos y sus combinaciones en el lenguaje. En la actualidad, se mantiene, aún como vestigio de esta teoría, la distinción entre uso y mención de un término, que durante la escolástica fuera llamado *suppositio formalis* y *suppositio materialis* (Gamut, 2002). Durante esta época, la lingüística se centró principalmente en encontrar bases racionales para las reglas de la gramática, que reflejaran la naturaleza del pensamiento. Se intentó encontrar una gramática universal, sobre la base de que si el pensamiento humano es el mismo en todas las culturas, entonces la gramática ideal también debería serlo. La lógica se fue centrando cada vez más en aspectos lingüísticos del razonamiento.

La ciencia medieval se interpretó como un conjunto de proposiciones inferidas racionalmente de algunos principios que se consideraban evidentes en sí mismos. A partir de esta caracterización de ciencia, en el caso de las ciencias empíricas, se asumió una teoría como oficial y se calificó como herejía todo intento de desviarse de ella. El criterio privilegiado como fuente de conocimiento hasta principios del Renacimiento fue el criterio de autoridad, a través de textos, de los cuales en el ámbito de la filosofía, ocupó un lugar sobresaliente, Aristóteles. Recién a partir de Galileo Galilei, las ciencias comenzaron a separarse en ciencias formales, como la matemática, y ciencias fácticas o empíricas, que aunque no reniegan de la demostración, aceptan a la experiencia como una fuente de conocimiento.

Influencia de Aristóteles en Occidente

La influencia de la metodología de la ciencia propuesta por Aristóteles fue notable desde él en adelante, comenzando por Euclides, como se presentó anteriormente. La tradición aristotélico-euclidiana, marcó el desarrollo de la matemática durante siglos.

Con el transcurso de la Edad Media, el desarrollo de la lógica pareció estancarse. Immanuel Kant, afirmó en el siglo XVII que "*la lógica no había perdido terreno desde Aristóteles, pero tampoco lo había ganado y que había indicios de que ya no avanzaría más*" (citado por Gamut, 2002, p.13).

Gottfried Wilhelm Leibniz había propuesto en el siglo XVII, que la lógica se transformara en el lenguaje universal de las ciencias, basado en la idea de que toda ciencia se tradujera a lenguaje simbólico de la lógica para evitar ambigüedades y vaguedades propias de los lenguajes naturales. De esta manera, la manipulación de símbolos en la lógica, se debía corresponder con las operaciones del pensamiento. Su idea era lograr un método que redujera los conceptos humanos a conceptos primitivos, una especie de alfabeto a partir de cuya combinación se obtuvieran las proposiciones verdaderas de las ciencias.

Hacia medidos del siglo XIX, Boole y De Morgan elaboraron un álgebra de la lógica, comprendieron la estructura operatoria subyacente a la lógica y sobre la base de la analogía entre las operaciones lógicas y las matemáticas, se formularon las bases de un cálculo lógico.

El proyecto de construir una teoría de inferencia válida fue recuperado por Gottlob Frege que propuso un esquema de lógica bivalente en el que se expresaran las proposiciones matemáticas, con un proceso de inferencia controlado por leyes y en el que se eliminaran todas las expresiones implícitas en la exposición de las ideas. En ese siglo, Frege, desarrolló la lógica de predicados tal como se la conoce en la actualidad, combinando las ideas aristotélicas con los desarrollos estoicos y solucionando un problema que los escolásticos no habían podido abordar satisfactoriamente: la cuantificación múltiple. En el tratamiento de Frege, las nociones gramaticales perdieron su papel central, dando paso al concepto de componente (constante y variable), al referirse a entidades. Frege mostró gran interés en el lenguaje natural y su análisis lógico, al igual que otros lógicos del siglo XX, como Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein, Rudolf Carnap, Willard Quine y Hans Reichenbach. Russell y Witgenstein también propusieron controlar la validez de las inferencias clásicas. Quine reconoció un rol central en la teoría de la deducción para las tautologías que contiene implicaciones, por estar éstas presentes en reglas de inferencia como el Modus Ponens, y analizó la posibilidad de los casos falsos de las implicaciones. Esto mismo lo realizó Russell al abordar las implicaciones formales y materiales.

Si se desea analizar cómo se fueron transmitiendo las ideas aristotélicas, cómo evolucionaron e influyeron en la historia, se debería hacer un recorrido por la filosofía de Occidente hasta nuestros días. Esto excede los objetivos que nos hemos propuesto en este trabajo, por lo que nos hemos centrado sólo en la influencia de su pensamiento en relación a la lógica y al pensamiento científico.

Algunas reflexiones acerca de la influencia aristotélica

Si se intenta comprender cómo se desarrolló el pensamiento medieval, no es posible dejar de referirse al cristianismo, ya que es un factor de notable influencia en el escenario medieval. Es preciso, por lo tanto, analizar cómo se relacionó la religiosidad cristiana con la filosofía griega. La religión griega careció de un texto sagrado, como la Biblia, los Vedas o el Corán. Se transmitió a través de artistas y poetas, que construían y mostraban las imágenes de lo divino. Los dioses tenían características mundanas. El cristianismo es una religión revelada, se basa en lo que Dios revela a los hombres, su Palabra es la Verdad. Pero no es una filosofía.

Al analizar la difusión y aceptación que tuvo la filosofía aristotélica en la Edad Media, no es posible dejar de preguntarse sobre sus causas, sobre qué hizo que la iglesia de aquella época aceptara y defendiera esas ideas, sobre qué ocasionó que se eligieran esas ideas filosóficas por sobre otras existentes. No es una pregunta sencilla e intentar una respuesta implica entrar en las bases de poder que se desarrollaron sobre la base de creencias religiosas. Benjamin Parain ensaya una argumentación que nos puede hacer pensar al respecto:

> *“El pensamiento medieval cristiano sabía perfectamente por qué había dado con la filosofía griega (quizá la única filosofía especulativa antigua que se haya presentado como únicamente racional, sin presupuesto religioso), que había dos órdenes de conocimiento: el conocimiento de la fe, fundado sobre un dato revelado, parcialmente permeable al trabajo de la inteligencia humana, pero que ésta nunca hubiese podido descubrir, y el conocimiento natural, donde la razón se ejerce de modo soberano sobre la experiencia que ella tiene del mundo y construye su*

verdad sobre los criterios de validez interna que ella se da, sin otro límite que su poder actual de conocimiento".

(Parain, 2002, p.84)

Según estas ideas, se trata de una de las pocas teorías filosóficas que no entrarían en confrontación con la fe por haberse originado en otro ámbito. La sociedad medieval necesitaba una epistemología, una filosofía, una lógica que sustentara la ciencia, que le permitiera tener construcciones socioculturales que no chocaran con las ideas religiosas, y que incluso sirviera para sustentar el pensamiento religioso cuando trascendía la fe, como en el caso de las pruebas de la existencia de Dios. La sociedad medieval tenía que recurrir, entonces, a la filosofía griega, sólo en ella podía encontrar los conceptos, términos y procedimientos intelectuales que necesitaba, para poder conciliar la razón y la fe, para poder construir sobre ambas una cultura como la que reinó en Occidente desde entonces hasta nuestros días.

"La sociedad en que vivimos, especialmente sus centros de enseñanza y en general los centros de difusión cultural, se encuentran anclados en una vieja racionalidad: la que dimana de la lógica aristotélica, de las divisiones metodológicas cartesianas y del determinismo newtoniano [...]. Estos planteamientos, típicos del industrialismo, hoy resultan simplistas y rígidos, cuando hemos comenzado a construir la sociedad postindustrial: la sociedad de la información y del conocimiento [...]. Más que una reforma educativa, es necesaria una revolución en el pensamiento, en la elaboración de nuestras construcciones mentales y en su representación [...], es menester propiciar inteligencias estratégicas y estrategias inteligentes [...] transformando nuestras escuelas en "organizaciones que aprenden" en comunidades de innovación y aprendizaje."

(Picardo, 2003, p.5)

También es notable que la filosofía griega al negar el concepto de nada desde sus inicios, sumado esto al reconocimiento de los principios de no contradicción y del tercero excluido, colaboró inconscientemente a la fundamentación de la existencia de un creador. Tales y su escuela de Mileto, sostenían que algo no puede emanar de la nada, ni desaparecer en la nada. Por lo tanto, siguiendo esta teoría, se negaba la posibilidad de que el universo pudiera haber surgido a partir de la nada, concepción que sirvió para las ideas cristianas de Occidente. La síntesis de la filosofía aristotélica y el cristianismo medieval creó una "*compleja madeja de ideas filosóficas cuya consistencia teológica era más importante que la mera asimilación de hechos experimentales; no porque estos hechos se considerasen de poca relevancia, sino porque su significado era a veces ambiguo y podían ser incorporados en el modelo del mundo en una variedad de formas consistente con su visión del mundo global*" (Barrow, 2001, p.81).

Las reflexiones que se han realizado, constituyen una explicación de las causas de la influencia del pensamiento aristotélico en la sociedad y en particular en el pensamiento científico hasta nuestros días. Cabría, ahora que nos preguntemos si no se sumó a esas causas el que se trate de una teoría cuyas afirmaciones son verdaderas; si realmente es posible que existan formas de razonar no aristotélicas, o bien si se trata realmente ésta de la forma de razonar del ser humano, tal como se ha afirmado desde entonces; si esas formas de argumentar que pudieran construirse sin respetar los principios aristotélicos son capaces de validar conocimientos matemáticos.... Si las respuestas fueran negativas, tendríamos que aceptar que las argumentaciones son innatas para el ser humano; si no, podríamos pensar a las argumentaciones como construcciones socioculturales.

Capítulo 5

Las argumentaciones en los escenarios sin influencia aristotélica

Desde que Aristóteles sistematizara las argumentaciones lógicas a través de las leyes de la lógica clásica, estas leyes han sido identificadas como las leyes del pensamiento humano. Estas leyes han sido consideradas durante siglos como indiscutibles y en cierta manera, podría decirse que han regido el pensamiento científico de Occidente. Si realmente estas leyes son innatas de la razón humana, deberían haber estado presentes en todas las culturas y hubieran sido enunciadas y aceptadas por las distintas culturas en todos los tiempos.

Sin embargo, tal como veremos a continuación, esto no ocurrió y en algunos escenarios socioculturales surgieron manifestaciones de lógicas que no aceptan los principios aristotélicos como leyes. El principio de no contradicción y el principio del tercero excluido no aparecieron espontáneamente en todos los escenarios que no tuvieron influencia aristotélica. En algunas oportunidades fueron otros los principios fundamentales en la lógica del pensamiento de ciertas culturas. En esas culturas, obviamente no afloraron argumentaciones que se basan en estos principios, como la reducción al absurdo.

Para buscar las características del pensamiento lógico de culturas sin influencia aristotélica, será necesario analizar la forma de pensar, de validar propiedades matemáticas mediante demostraciones y los conceptos matemáticos que pudieron construir y de qué manera los trataron. Además en este capítulo, se presentan algunas formas de argumentación que no tienen características aristotélicas y que se pusieron en evidencia en el aula a través de experimentaciones realizadas.

El pensamiento lógico en Egipto antiguo

El nacimiento de la filosofía se ubica en Grecia, sin embargo es posible mencionar como prefilosófico al pensamiento del antiguo Egipto, en referencia a ciertas concepciones del universo y de la divinidad. Estas disquisiciones fueron realizadas por los sacerdotes y hierogramáticos que teorizaban al respecto.

El pensamiento religioso egipcio era físico y metafísico, fundamentando técnicas rituales e instrucciones laicas que perduraron a través de textos rituales y escritos de educación o propaganda y en asegurar la buena marcha del Cosmos, cuyo destino es garantizar el buen funcionamiento de las cosechas y la sociedad, sin proponerse explícitamente alentar la reflexión personal.

Los conocimientos matemáticos, tanto aritméticos como geométricos, se transmitieron en manuales de cálculo práctico. En los textos faraónicos, es posible encontrar "*balbuceos que prefiguran en mayor o menor medida, los primeros pasos de la filosofía griega*" (Parain, 2002, p.11).

En el Imperio Antiguo (2800-2300 a.C.), surgió la necesidad de coordinar las tradiciones que habían surgido previamente, en las que los mitos narran los mismos fenómenos bajo imágenes distintas, en las que los mismos dioses toman identidades distintas y contradictorias. Desde una postura aristotélica, esto hubiera desembocado en incoherencias y contradicciones, sobre la base de los principios de identidad y no contradicción. Hay quienes han dado la interpretación de que se trata de diferentes aproximaciones intentando salvar la incoherencia que surge bajo la visión occidental teñida por lógica clásica, pero aún esta diversidad de aproximaciones parece contradictoria. Sin embargo en Egipto, las leyes de la lógica fueron distintas: se dio sin problemas un polimorfismo de divinidades, sin que esto condujese a inconsistencias y contradicciones.

El tratamiento de algunos conceptos matemáticos que surgieron en el escenario de Egipto

De esta cultura, no han sobrevivido rastros de demostraciones rigurosas de resultados matemáticos, ni tampoco de argumentaciones lógicas que justifiquen los procedimientos presentados en las técnicas de cálculo. Se supone por lo general, que se arribaba a los resultados matemáticos no por demostración, sino por vías empíricas y tentativas, como en el caso de la existencia de ternas pitagóricas y su aplicación al trazado de perpendiculares.

El mismo sistema de numeración egipcio puede interpretarse como la traducción de su método de contar, alineando, acumulando y asociando elementos. El sistema utilizado para expresar fracciones constituye una supervivencia de los mitos de Osiris y su simbolismo ocupa un importante lugar en ritos mágicos y funerarios (Ifrah, 1997).

a. El Cero

A menudo, se ha dicho que el concepto de *cero* no puede encontrarse el Antiguo Egipto, sin embargo, algunos historiadores de la matemática creen ver un antecesor del concepto de cero en un símbolo:  Este símbolo era el mismo que el utilizado para expresar las de ideas de belleza, completitud y perfección, su gráfico se trata de la abstracción de una tráquea humana, corazón, y pulmones. Los sonidos consonantes de su nombre eran "*nfr*"; pero los sonidos vocales son aún desconocidos por los egiptólogos. En los planos para la construcción de los templos, palacios y grandes edificios aparecen líneas niveladoras horizontales para guiar la construcción. Estas construcciones, realizadas con grandes bloques de piedra maciza necesitaban profundos cimientos que le dieran estabilidad y garantía de durabilidad. Para guiar la construcción de los diferentes niveles que quedarían bajo tierra utilizaban líneas niveladoras como referencia nombradas a partir del *nfr.* En 1931 aún eran visibles en la Gran Pirámide de Gizeh los signos de *nfr* seguidos de uno o dos cubos que señalaban los niveles bajo la superficie o, lo que es lo mismo, el nivel sobre o bajo la superficie, siendo ésta representada por *"nfr"* o nivel cero. De la misma manera, es posible encontrar este símbolo en las cuentas contables mensuales de la dinastía 13 del Reino Medio (año 1770 a.C.). En estos registros contables aparecen cuentas con doble entrada con columnas separadas para cada tipo de género. Al final del mes, la cuenta era equilibrada. Para cada artículo, tras los ingresos habidos se indicaban los desembolsos realizados y se cerraba la cuenta mensual con un saldo igual a cero según puede verse en los símbolos *nfr* al final de varias columnas.

Recientes descubrimientos arqueológicos han mostrado la existencia de contactos regulares entre Egipto y Mesopotamia hacia el 3300 a.C y 3100 a.C. (Ifrah, 1997).

El pensamiento lógico en la antigua India

Los Vedas son la fuente de información más antigua del pensamiento de la India que llega a nuestros días. No es posible determinar con exactitud el tiempo en que fueron escritos, sólo que son anteriores a Buddha, que murió alrededor del 480 a.C., si bien se los data entre el 3000 a.C. o el 1200 a.C. No se trata de una única obra, sino de obras escritas en sanscrito correspondientes a varios períodos literarios que contienen parte de la poesía religiosa y popular existente durante el período ***védico***.

En este período, se personificaron las diversas fuerzas de la naturaleza como el fuego (*agni*), el viento (*vãyu*) y el sol (*sũrya*) que rodean e influyen al hombre y al orden cósmico y que se manifiestan a través de deidades que son adoradas. Sin embargo estas deidades en etapas posteriores fueron reconocidas como una energía común: “*lo que no es sino uno, los sabios lo llaman con nombres diferentes*” (Hiriyanna, 1960, p.16) en una concepción monoteísta manifestada a través de varios dioses. De manera análoga, los hombres son diferentes entre sí, pero el hombre no es la materia, sino que comparte una causa única primordial que se manifiesta como el universo en toda su diversidad. El objeto de la filosofía no fue meramente satisfacer la curiosidad teorética sino adaptar la conducta a las propias convicciones intelectuales. De esta manera la religión y la filosofía se entremezclaron. La verdad no es conocida en su totalidad: los demás pueden enseñarnos las verdades que han alcanzado y los métodos que han empleado para ello, pero a menos que repitamos satisfactoriamente este proceso y redescubramos aquellas verdades, no podremos lograr la convicción. Existen hechos que están más allá de la razón y por lo tanto no pueden ser demostrados de manera absoluta; la filosofía debe indicar la probabilidad de su verdad (*manana*), profundizándose e intensificándose la convicción por medio de la meditación.

A partir de esta corriente del pensamiento hindú, se generaron básicamente el naturalismo y otras dos escuelas del pensamiento consideradas no védicas: el jainismo y el budismo. La primera se limitó a la India, la segunda se difundió fuera de ella llegando a países como China y Japón.

Hacia el siglo III o IV a.C., se había acumulado gran cantidad de material filosófico heterogéneo, recopilado en los Sũtras, cuya función fue la de consolidar la doctrina de una escuela en particular y criticar las otras que divergen con ella. Se centran en la naturaleza y función del conocimiento, proponiendo una investigación del *pramã* o conocimiento válido. La lógica naturalista concebida en esta época en la India genera “*una ciencia tanto de prueba como de descubrimiento*” (Hiriyanna, 1960, p.52) y se lleva a cabo no por medio del razonamiento sino de los sentidos. La percepción puede revelar la existencia y la naturaleza de las cosas no conocidas hasta ahora, puede ser también medio de comprobación, sometiendo a la prueba de los sentidos o de la observación directa.

La mayor parte de los lógicos indios aceptan tres *pramãnas* o medios inmediatos para el conocimiento válido: la percepción, la inferencia y el testimonio verbal, aunque algunos sólo aceptan este último como tal si se encuentra presente en los dos anteriores.

Al hablar de la inferencia naturalista no debe pensarse en las formas silogísticas, sino en la búsqueda como la fuente de conocimiento en relación con la percepción de signos y su posible significado, y no en relación con la argumentación lógica. La lógica *nyaya* valora la especulación racional como base de una doctrina coherente del conocimiento. Si bien su base fue empírica, generó una teoría de razonamiento racional basada en la causalidad. Por ejemplo, por inferencia, en este sentido se diría que hay fuego al observar humo, donde el humo es tomado como signo de la existencia del fuego. La causalidad es creadora, por ello se conoce esta visión lógica como la "*teoría del efecto no preexistente*" (Hiriyanna, 1960, p.112). La legitimidad de la inferencia sólo se restringe a los casos en que la existencia de la causa se infiere de la presencia de algo que se puede demostrar que es su efecto. Por ejemplo para el caso de humo y el fuego, la existencia del humo está relacionada con la existencia del fuego ya que el fuego es la causa necesaria del humo. La inferencia se refiere a dos posibilidades: resolver la duda en la propia mente y resolverla en la mente de otro. En esa última, cobra importancia el lenguaje y es posible encontrar la siguiente forma de razonamiento:

1. En la colina hay fuego (Proposición, tesis)
2. Porque en ella hay humo (Razón)
3. Donde hay humo hay fuego, por ejemplo en la cocina (Proposición general seguida de ejemplificación)
4. En la colina hay humo, que va siempre acompañado de fuego (Generalización)
5. Por consiguiente en la colina hay fuego (Conclusión)

Debemos observar que la proposición universal se apoya en la ejemplificación obtenida de la observación, generalizándola. Este tipo de razonamiento no es totalmente deductivo, sino que contiene una componente inductiva.

Para la escuela nyaya, los medios del conocimiento son:

- el testimonio: es lo digno de fe, transmitido en forma oral o escrita
- la analogía: permite definir un objeto sobre la base de semejanzas con otros objetos
- la percepción: es la relación entre los objetos captables por medio de los sentidos y la imagen que tenemos del objeto
- la inferencia: el esquema del razonamiento *nyaya* se basa en cinco enunciados

Para los *nyayas*, los enemigos de la deducción son:

- la ambigüedad
- la no conclusión
- los argumentos absurdos

En relación al absurdo, afirmaron que recurrir a él, significa que no se tiene lógica y que se debe ser dialécticamente vencido por quien opere con lógica y con argumentos racionales (D´Amore, 2005a).

En sus estudios, identificaron también los casos en los cuales sus razonamientos llevan a sofismas, entre los que mencionan el absurdo intrínseco generado por la aparición de términos que dicen lo contrario de lo que debieran afirmar, y el absurdo explícito originado por la contraposición de dos términos del silogismo que se excluyen recíprocamente.

El ***jainismo*** es una de las formas más antiguas de religión no védica de la India. Uno de sus rasgos distintivos es su creencia de la existencia independiente y eterna del espíritu y la materia, de lo animado y lo inanimado. El conocimiento o la conciencia es la esencia del espíritu y el conocimiento empírico es una de sus manifestaciones bajo las limitaciones de la naturaleza inanimada; las percepciones verdaderas se llevan a cabo por medio de la intuición. Para los jainas, las verdades tienen su origen en la visión intuitiva de un santo (*yogin*). El conocimiento tiene dos manifestaciones: inmediato y mediato. El inmediato es obtenido por percepciones exteriores (sentidos) e interiores (sensaciones); el mediato, por la inferencia y el testimonio verbal.

Una de las escuelas principales de lógica que aparecieron en la India en la antigüedad es la de los filósofos y lógicos jainas. Los jainas se preocuparon por la relación entre racionalidad y consistencia del pensamiento. En la India clásica tuvo gran importancia la actividad filosófica. Algunas temáticas abordadas fueron la eternidad, la universalidad, la esencia del todo en las partes. Las argumentaciones a favor o en contra de cada posición, eran argumentadas por los filósofos de la época. El pensamiento de los jainas tuvo ciertas características que difirieron radicalmente del pensamiento griego. La aceptación del pluralismo fue una de ellas, la del escepticismo es otra. Aunque ambas características podrían parecer contrarias, tienen bastante en común (Ganeri, 2002): el escepticismo rechaza todas las proposiciones, mientras que el pluralismo las acepta todas, lo que tienen en común ambas posiciones es que niegan que sea posible resolver un problema privilegiando una única posición, o sea adoptando una posición dogmática. Para el escéptico, el problema está en el principio del tercero excluido, para el pluralista en el principio de no contradicción. La lógica de los jainas tiene un carácter conciliador, respetando la posibilidad del pluralismo. Para los jainas, la realidad no excluye los rasgos contradictorios, aceptando la posibilidad de la indeterminación. En sus afirmaciones conviven el "*siempre es*", el "*nunca es*" y el pensamiento de una realidad inescrutable que no admite la expresión de ninguno de los otros dos modos (Hiriyanna, 1960, p.84), cada concepción alude a un aspecto singular de la realidad, ninguna es absoluta y correcta. La verdad se logra al juntar las verdades parciales.

En este esquema de razonamiento surgen valores de verdad que van más allá de los aceptados por la lógica bivalente. Los posibles valores de verdad que aceptaron y utilizaron los jainas son:

- quizá una cosa es
- quizá no es

- quizá es y no es
- quizá es inexpresable
- quizá una cosa es y es inexpresable
- quizá una cosa no es y es inexpresable
- quizá una cosa es, no es y es inexpresable

Esta concepción de la verdad es relativista y se la designa como la "*doctrina del quizá*" (Hiriyanna, 1960). Sin embargo en esta visión del mundo, el fin de la vida es dar al alma un estado en el que se alcance la omnisciencia, en la que se obtienen todas las perfecciones por medio del conocimiento infinito, la paz infinita y el poder infinito, obtenidos a través de la concentración mental.

En la lógica jaina, durante el siglo I a.C. o incluso antes, se propone un silogismo, que se puede ejemplificar de la siguiente manera:

1. En esta colina hay fuego (Proposición, tesis):
2. En cuanto que algo perceptible (Condiciones de la proposición)
3. Porque hay humo (Razón)
4. Hay humo solo donde hay fuego (Condiciones de la razón)
5. Cabe que haya humo sin haber fuego, como con la niebla (Contra-proposición, antítesis)
6. La niebla es diferente, el humo se eleva, la niebla cae (Oposición a la contra-proposición)
7. El humo en una cocina de leña se produce por el fuego (Ejemplificación)
8. Si la madera está seca no se produce humo (Crítica del ejemplo)
9. Si se produce humo es porque hay fuego (Respuesta a la crítica)
10. En esta colina hay fuego (Conclusión)

Este esquema de razonamiento es totalmente distinto de los silogismos aristotélicos y en él se puede observar cómo coexisten en ciertos momentos posturas contradictorias, si bien al final concluye en la obtención de la tesis como conclusión.

La tercera etapa del pensamiento filosófico de la India antigua es la que corresponde al ***budismo***. El budismo comenzó como religión y posteriormente se vio obligado a convertirse en una filosofía para defender su posición frente a las escuelas del pensamiento hindú y jaina. El budismo primitivo se enraíza con el brahmanismo, presentando la doctrina de Buddha una reacción frente a las ceremonias rituales demasiado complejas y en defensa de la moralidad y del acercamiento de la religión a todos, permitiendo que el discípulo pensara por sí mismo, pudiendo de esa manera llegar a la verdad. Su objetivo es el hombre como aspirante a la perfección, más que el hombre que la ha logrado. Tiene en su principio una visión pesimista de la vida, considerándola un mal cuyo origen es la ignorancia y el desconocimiento de la verdadera naturaleza del hombre, pudiendo superar el mal por medio del desarrollo del yo superior por medio del conocimiento y la práctica de la meditación (*yoga*). La doctrina budista no solo se difundió más allá de los límites de la India, sino que derivó en numerosas sectas.

Filosóficamente, el budismo concibió a todas las cosas como inestables y cambiantes, viendo como ilusoria o ficción de la mente a la estabilidad. Para el jainismo, las distintas visiones del cambio colaboran en el conocimiento de un objeto; para el budismo los sentidos sólo dan sensaciones momentáneas, cada objeto es una serie de particularidades, aunque está desprovisto de ellas. Esta es la visión del budismo hĩmayãna. Para el budismo *yogãcãras*, el conocimiento no se refiere a los objetos exteriores, reduciendo la realidad al pensamiento: la mente asume formas que revive de impresiones anteriores. Niega de esta manera los objetos exteriores, e incluso las otras personas. En la teoría del budismo *mãdhyamika*, se llega incluso a negar el propio yo, constituyendo un nihilismo en el que la realidad última es el vacío (*śũnya*) o la vacuidad en sí. Esta última posición tan extremista, que no es aceptada por todos los budistas, es totalmente opuesta a la de los jainas, y afirma que la realidad ni “*es*” ni “*no es*”, tampoco “*tanto es como no es*”, tampoco “*deja de ser ni de no ser*”. *“Excluye todos los predicados concebibles, incluso el de inexistencia, y por lo tanto hay que considerar que la realidad última está más allá de toda concepción y no que sea la* *nada absoluta. En efecto, tal interpretación está lógicamente implícita en la doctrina, puesto que la negación de todo, sin un fundamento positivo es inconcebible. Según esta interpretación, en última instancia la doctrina deja de ser relativista, pues acepta un absoluto aunque lo considere completamente inefable*" (Hiriyanna, 1960, p.105).

Para los budistas, el vacío y la nada no son sinónimos. La naturaleza del vacío (*śhunya*) es el *akaśha*, el éter, el último y más sutil concepto de las filosofías hindú y budista, esencia de lo no creado y eterno. Cabe destacar que diferenciaron entre veinticinco especies de vacuidad: el vacío de la no existencia, del no ser, de lo no formado, de lo no nacido, de lo no producido, de lo no creado, de lo no presente, de la no sustancia, del no pensamiento, de la inmaterialidad, de la insustancialidad, del no valor, de lo ausente, de lo insignificante, del con poco valor, del sin valor, de lo nulo, de lo despreciable, de la nada, etc. (Ifrah, 1997, p.1158).

Una característica que debe tenerse en cuenta en cualquiera de los enfoques lógicos de la India es que la materia de la lógica en ellos es el pensamiento y no la forma lingüística en la que se lo puede expresar.

El tratamiento de algunos conceptos matemáticos que surgieron en el escenario de la India

a. El Cero

En los Vedas, existen referencias a conceptos matemáticos (de Mora & Jarocka, 2003), entre ellas la utilización de palabras-cifra propia de esta etapa del sánscrito:

0. Infinito = *ananta*; Cero = *bindú*; Vacío = *sunya*
1. Tierra = *urvara, ksiti, go, dhara* o bien Luna = *abja, indu, candra*
2. Parejas o gemelos = *asvin, dasra, yama*, etc. o bien Ojos = *caksus, netra, nayana*

3. Fuego = *agni*
4. Punto Cardinal = *dis* o bien las Cuatro Edades del mundo = *yuga*
5. Flecha = *bana, sara*
6. Sabores = *rasa* o bien Sistemas filosóficos = *darsana*
7. Sabios = *Rsi* o bien Corceles del sol = *asva*
8. Versos octosilábicos = *anustubh*
9. Números = a*nka* o bien Planetas = *grata*

En los Vedas se identifican cosas siempre que estén en grupos de cierto número de elementos, como realizando definiciones de los números por abstracción, siguiendo un procedimiento similar al que realizó Russell para los números naturales. No existe en el primer período ninguna palabra que se refiera a la resta (de Mora & Jarocka, 2003), aunque sí a "*contar hacia delante*" y "*contar hacia atrás*". En el Rg Veda, se hace referencia a la multiplicación, escribiéndose el número veintiuno como "*tres veces siete*"; la única referencia a división aparece en el concepto de "*tantas partes iguales*".

En relación a la nada, en el Rg Veda, encontramos:

> *"En la edad primera de los dioses,*
> *el Ser nació del No-Ser.*
> *Inmediatamente nacieron los orígenes.*
> *Y después la fuerza que se mueve hacia arriba"*
>
> (Rg Veda X.72.3; citado por de Mora & Jarocka, 2003, p.30)

En otro verso de este libro, se encuentra:

> *"Entonces no había Ser ni tampoco no-Ser*
> *ni espacio ni más allá cielo.*
> *¿Qué había en la envoltura? ¿Dónde estaba? ¿Quién lo cuidaba?*
> *¿Era algo el agua profunda que no tenía fondo?*
> *Ni la muerte ni la no muerte existía.*
> *Nada en la nada distinguía la noche del día.*

Sin aire, el Uno respiraba originando su propio movimiento
Nada más existía"

(Rg Veda X.129.1; citado por de Mora & Jarocka, 2003, p.30)

Es notoria la relación que se presenta en este texto entre la nada y el Ser, y la posibilidad de transformarse una en el otro, radicalmente distinta a la postura griega y de la concepción occidental de nada. En este contexto, la nada y el cero surgen desde una visión filosófica más que matemática: como ausencia de algo, no como resultado de una operación, más como el cardinal del conjunto vacío, del que tiene la propiedad de no tener elementos. Después se transformará en una cifra, como un número, como la representación de un lugar vacío en un número.

En los Vedas no aparece explícitamente ninguna referencia al cero como cifra, ninguna palabra para representarlo. *Sunya* representa la nada, el vacío, el lugar vacío, el sitio desocupado (de Mora & Jarocka, 2003).

Uno de los legados matemáticos de las culturas de la India a Occidente es el cero. El cero cumple tres funciones dentro de la matemática (Lizcano, 1993). La primera de ellas lo identifica como un número, con la misma jerarquía que cualquier otro número. La segunda función, lo identifica detrás de la unidad en un número, permitiendo multiplicar ése por la base, por ejemplo: el "*cero*" de 10 en un sistema de numeración de base 10. La tercera función permite u utilización en un número para identificar la ausencia de cierto orden de unidades, por ejemplo el "*cero*" de 205. La civilización occidental debe a los hindúes el invento del cero, con sus tres funciones, el lugar vacío en una columna de un número posicional, la nada como número y como elemento para operar.

Sunya es el nombre de la marca del vacío en lengua sánscrita: su primera representación fue un pequeño círculo. Este fue el nombre que adoptó el budismo para el vacío o la vacuidad en su doctrina de la nada. El cero cobró su valor como número significante de la nada y de esta manera pasó a cumplir las tres funciones con que lo conocemos nosotros. La traducción correspondiente realizada por los árabes fue *sifr*, posteriormente traducido al latín como *zephirum*, que derivó en *zephiro*: cero. La llegada de esta última cifra; el *sifr,* dio origen a la palabra cifra para designar a toda la colección. El vacío es una categoría muy especial: la creación del cero para ocupar el lugar vacío en un número expresado en notación posicional, permite *"significar una ausencia por medio de una presencia"* (Guedj, 1998). Participa de esta forma, el cero de la representación de la existencia de la ausencia, del paso del *"no hay"* al *"hay cero".*

El cero fue inventado por los hindúes e introducido en Occidente por los árabes. La invención del cero se encuentra unida a la aparición del concepto de la "*nada*". El hecho de que la aparición histórica del cero se llevara a cabo después de muchos siglos de que el hombre utilizara los números, se halla fuertemente unido a razones filosóficas. En la mente del hombre occidental el concepto de "*nada*" es difícil de asumir, pero esto no ocurrió en la India.

La aparición por escrito más antigua del símbolo que asociamos con el cero, una pequeña circunferencia, en la India data del año 876 a.C., por lo que se considera que lo conocían con anterioridad. Los grafismos utilizados para el cero indio fueron y aún siguen utilizándose, un pequeño círculo o un punto.

Una reflexión interesante sobre el pensamiento indio y el cero, se expresa en la obra de de Mora y Jarocka:

> *“Si el cero es la nada absoluta, es en cierto sentido, el infinito. Y si se responde que la nada es ausencia total, es decir el no-ser, cabe recordar que el infinito también es el no-ser para la dimensión humana. Además de que si el infinito, pese a todo, es finito, el no ser también contiene en sí mismo al ser”*
>
> (de Mora & Jarocka, 2003, p.36)

Esta reflexión, nos permite pasar a otro concepto matemático cuyo abordaje se dio en India de manera totalmente distinta a lo que pasó en Occidente.

b. El Infinito

Los jainas eran pensadores dedicados a la reflexión y al estudio de problemas de diversas áreas: místicas, metafísicas, religiosas y científicas. Se familiarizaron con las especulaciones numéricas puestas en juego por medio de grandes números, calificando a los números compuestos por ochenta o incluso cien cifras como pequeños. Para ellos, por ejemplo, la totalidad de los seres humanos de la creación son 2^{96}, definían distancias como la recorrida por un dios en seis meses si éste cubre una distancia de 100.000 *yojanna* (aproximadamente un 10 km) en cada parpadeo de sus ojos, o bien el tiempo que tardaría en vaciarse una vasija cúbica de un *yojanna* de lado lleva con lana de corderos recién nacidos si se quita una hebra de lana cada cien años. Al intentar situar los límites cada vez más lejos las cantidades, aparecieron conceptos como lo "*imposible de contar*", lo "*innumerable*", "el *número imposible de concebir*" y finalmente, el infinito. Para esta doctrina el universo es indestructible porque es infinito tanto en tiempo como en espacio (Ifrah, 1997). Los jainas clasificaron los números en: numerables, innumerables e infinitos. Los números numerables podían ser: mínimos, intermedios y máximos; los innumerables: casi innumerables, verdaderamente innumerables e innumerablemente innumerables; los infinitos: casi infinitos, verdaderamente infinitos e infinitamente infinitos (de Mora & Jarocka, 2003).

A su vez, reconocen cinco tipos de infinitos (Ifrah, 1997):

- infinito en un sentido
- infinito en dos sentidos
- infinito en volumen
- infinito en todas partes
- perpetuamente infinito

Los jainas fueron los primeros pensadores que al tratar el infinito desecharon la idea de que todos los infinitos eran iguales, aunque con distinta concepción que nosotros. La idea de igualdad de todo lo infinito fue aceptada en Occidente hasta muchos siglos después, con los trabajos de George Cantor a fines del siglo XIX.

Sin embargo desde la óptica de Cantor, lo que los jainas reconocieron como distintos tipos de infinito es en realidad un mismo tipo de infinito. Para los jainas las cantidades infinitas se corresponden con los cardinales numerables, con el $\aleph_0$ de Cantor.

La preocupación filosófica de los jainas en relación con el infinito radicó en analizar si el número de almas podría agotarse. Las especulaciones aritméticas permitieron además que en este escenario fuera posible descubrir de manera natural el cero en su función posicional, pero también con toda la connotación abstracta que lleva consigo este concepto. Mil años antes que en Occidente, los indios reconocían al cero y al infinito como conceptos inversos. Para ellos, dividir por cero equivalía a infinito. Definieron al infinito como la cantidad que no sufre modificación alguna si se le suman o restan números finitos.

La palabra sánscrita cuyo significado es infinito es *ananta.* Textualmente significa *"sin fin"*. Había sido empleada anteriormente para designar diez millones, y también curiosamente, con anterioridad para denominar al cero. Esta es una clara muestra de la relación existente entre dos conceptos tan distintos. En la mitología hindú designa una gigantesca serpiente que simboliza la eternidad y la inmensidad del espacio. Ananta, el señor de los infiernos, es representado como una serpiente enroscada sobre sí misma en una especie de "8" acostado o en la repetición de este símbolo, sobre la que muchas veces descansa Vishnú.

En 628, el matemático y astrónomo indio Brahmagupta habló del infinito matemático, al que llama *khachheda*, que definió como la "cantidad cuyo denominador es cero".

El cero y el infinito siguieron siendo manejados en la matemática de la India durante el medioevo. Hasta ese momento, consideraban que X/0 = X. Fue Baskara II quien "*probó que el resultado era infinito. Demostró matemáticamente lo que la teología hindú sabía desde por lo menos mil años antes, que el infinito,* *dividido, sigue siendo infinito, lo que se expresa con esta ecuación:* $\infty/X = \infty$*”* (de Mora & Jarocka, 2003, p.75)

Cabe destacar que desde la matemática, infinito e indefinido representaban conceptos distintos: indefinido significa vago, impreciso. El “error” cometido por los indios se basa claramente en la confusión de estos conceptos. Sin embargo, no puede decirse que desluzcan los descubrimientos de este pueblo. Como las concepciones indias de cero y de infinito no son operatorias, no les fue necesario establecer una diferenciación entre ambos términos, pudiendo utilizarlos de manera indistinta.

El pensamiento lógico en la antigua China

Los primitivos pobladores de la China adoraban las fuerzas de la naturaleza y les rendían culto. Tenían asimismo muy arraigado el culto a los antepasados, destinado a mantener comuniones entre el pasado y el presente. Su religiosidad estuvo dominada desde un principio en la valorización del orden humano y el orden natural, misión confiada por el cielo al soberano y reflejada en sus libros de rituales.

El Cielo es considerado como la realización de un principio de orden superior a las voluntades de los hombres y con potencia justiciera, guardiana de juramentos y de la providencia. Si bien la mitología china no tiene relaciones directas con su filosofía, algunas de sus creencias desempeñan un papel fundamental en la organización del pensamiento, como las ideas de totalidad, orden y responsabilidad (Parain, 2002).

A los símbolos se les concedía un papel central en la construcción del universo mental, la imagen no es un simple simulacro del objeto, sino que involucraba toda la realidad del objeto, conteniendo toda su fuerza y energía y manifestada en el lenguaje y la magia. El número, como símbolo, tenía un papel especial en combinaciones armónicas, correspondencias, secuencias y jerarquías que contribuyen al orden universal. El ying y el yang corresponden a los principios mayores que rigen los intercambios del devenir; son inseparables, complementarios, simbolizan las apariencias sensibles y las fuerzas que se oponen y se compensan en el cosmos. Todo está formado y regulado por la combinación del ying y el yang, dos modalidades primarias de un principio único; la ley que preside las mutaciones es el Tao, término con innumerables significaciones.

Las dos tendencias filosóficas principales de la China antigua fueron la de los "letrados", positiva y práctica, y el taoísmo, metafísica y mística, cuyos representantes fueron respectivamente Confucio y Lao-tsé.

Confucio (552-479 a.C.), aunque no escribió ninguna obra, renovó mediante sus interpretaciones y comentarios el sentido de los textos viejos. Partió del principio moral, humanista que debe regir la familia y la sociedad, el respeto a los mayores y la posición social. Creyó en la predestinación, "*el hombre superior debía tener como única preocupación, la de conocer la voluntad celeste*" (Parain, 2002, p.244), el maestro enseñaba a sus discípulos a discernir entre el bien y el mal, a través de ejemplos prácticos, desarrollando en ellos el razonamiento y la personalidad y preparándolos para seguir la vía (Tao) que el Cielo les ha marcado. La sabiduría es un legado sagrado, vehículo de la civilización.

El papel del Tao se volvió central en la filosofía de Lao-tsé, considerado contemporáneo a Confucio. Esta filosofía estaba dirigida a iniciados y les aportaba temas de meditación dispuestos sin orden lógico, por lo que algunos la interpretan como magia y naturalismo (Parain, 2002). En aquella época, en China existían técnicas de meditación semiespeculativas emparentadas con las de los yoguis de la India y los chamanes siberianos, basadas en que la respiración favorecía la concentración y contemplación estática. En este intento de fundamentar la concepción de la sabiduría en el pensamiento racional, se generó misticismo contemplativo de tendencias mágicas.

Los seguidores del confucionismo trataron de discernir lo verdadero de lo falso por métodos más seguros, basando sus razonamientos en comparar y concluir. No temieron al uso de paradojas, y las contradicciones no constituyeron un problema en su manera de pensar el cosmos:

> *"El pensamiento chino se ve impelido a no evadirse de lo concreto y a no contrastar las contradicciones: los aspectos contrarios sólo se oponen en apariencia, la unidad es lo único real y los reconcilia."*
>
> (Parain, 2002, p.296).

Una vez más, el ying y el yang, explicando la armonía del universo.

Su lógica tuvo características deductivas completamente distintas de la aristotélica, como lo muestra el siguiente ejemplo:

> *Un ladrón es un hombre, pero es esencial que sea un ladrón. Se puede odiar a un ladrón sin dejar de amar a los hombres. Matar a un ladrón no es lo mismo que matar a un hombre.*

El interés de los chinos por la lógica formal, según la concepción occidental tardó muchos siglos en despertarse, siendo recién asumida hacia fines del siglo XIX y principios del siglo XX. Hasta entonces, su ciencia y toda su sociedad se desarrolló sobre la base de la contemplación y las contradicciones, como ya se dijo, fueron consideradas sólo aparentes.

El tratamiento de algunos conceptos matemáticos que surgieron en el escenario de la China

a. El Cero

En China coexisten cuatro sistemas numéricos. Los números standard o modernos (utilizados desde el siglo III a.C.), los números oficiales (versión decorativa de los standard), los números comerciales (diseñados para escribir rápidamente, datan del siglo XVI) y los números con palitos (utilizados en la matemática y demás ciencias).

En el sistema standard, para representar números, los chinos utilizaron un sistema decimal con trece símbolos fundamentales: uno para cada uno de los dígitos no nulos, el 10, el 100 y el 1000. Estos símbolos aún son utilizados en la actualidad. Se trata de un sistema híbrido basado en reglas multiplicativas. Por ejemplo[1]:, para representar 821, se expresa:

8 x 100 + 2 x 10 + 1

Figura 5: Número 821 en sistema standard

En la notación tradicional, los símbolos se ordenan de arriba hacia abajo, en forma vertical (actualmente se escriben horizontalmente), por lo que 821 en notación tradicional sería como mostramos:

Figura 6: Número 821 en notación tradicional

Este sistema de numeración no necesita del cero, sin embargo a partir de la dinastía Ming se incorpora un ideograma para identificar ese hueco: el *ling*, que significa *gota de rocío* y que se conserva hasta la actualidad para significar que falta una potencia de 10 en un número. De esta manera si se quiere escribir 801, se encuentra:

en lugar de:

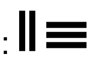
Figura 7: Número 801 en notación tradicional

[1] En los números que se han escrito, se utiliza a título ilustrativo estilizaciones de las cifras chinas que aparecen en (Ifrah, 1997).

Este, como hemos dicho, no fue el único sistema de numeración que se usó en China. Allí, como también en Japón en Corea, los matemáticos conocieron bajo el nombre chino *suan zi* y el japonés *sangi,* que significa "*cálculo por medio de fichas",* un sistema decimal en el que los números están dados por el lugar que ocupan las cifras.

Se trata de un sistema de características similares al nuestro en el cual se representan los números con palitos, pero con algunas diferencias notables. La fundamental es que se tienen 9 cifras:

Figura 8: Dígitos en notación sangi

Si se representaba 23, como:  se corría el riesgo de confundir dónde empieza el 3 y terminaba el 2 si no se separaban lo suficiente ambas cifras, por lo que comenzaron a intercalarse cifras en distinta posición (vertical y horizontal) para las cifras contiguas de un número. Queda entonces 23 como: . Pero aún faltaba solucionar el problema de la ausencia de una potencia de 10, pues simplemente durante mucho tiempo se dejó un hueco entre la cifra anterior y la siguiente 203 fue escrito como: 

Las operaciones con números así representados se realizan en un tablero en el cual la ausencia de una potencia de diez en un número corresponde a un hueco vacío, denominado *wu*, en el tablero. Ese hueco actúa como un cero. Hacia el siglo XII, se comienza a llenar el hueco con un punto y posteriormente con una pequeña circunferencia. A través de esta representación, algunos historiadores ven influencias de la matemática hindú, aunque algunos sostienen la hipótesis de la influencia china en India y otros consideran que ambas invenciones fueron autónomas.

El pensamiento lógico en América precolombino

Siglos antes de la llegada de Cristóbal Colón a América, existían en el continente americano áreas pobladas por gran variedad de pueblos, muchos de ellos con un alto grado de desarrollo cultural. Hemos recibido de ellos un legado artístico admirable, pero a pesar de ello, gran cantidad de sus conocimientos culturales han sido destruidos por el choque de culturas que se generó.

Los mayas fueron una de las culturas más antiguas del área mesoamericana. La cultura maya se desarrolló en tres períodos: Preclásico entre el 3000 a.C. y el 300 d.C., Clásico, entre el 300 y el 900 d.C. y el Posclásico, entre el 900 y 1546 d.C.

La sociedad maya estaba integrada por clases sociales: nobles, sacerdotes, pueblo y esclavos. La base de la economía maya era la agricultura. Sus principales dioses se vinculaban con la agricultura y el tiempo; concebían al hombre como dependiente de los dioses que dominaban al mundo. El creador del mundo era Hunab y se creía que su hijo Itzamná, señor de los cielos, de la noche y del día, había otorgado a los mayas la escritura, los códices y quizás el calendario. Se lo invocaba en las ceremonias propiciatorias del nuevo año, para evitar desastres. Poseían tres calendarios: el solar, el venusino y el litúrgico, expresiones de la importancia que los mayas dieron al tiempo, no sólo como ordenador de los acontecimientos sino como fenómeno sobrenatural que regía la creación. Las creaciones culturales de los mayas están basadas en una concepción religiosa del cosmos, que consideraba el universo ha nacido de las energías sagradas que se manifiestan de manera múltiple y por diversos seres naturales que provocan el acontecimiento según el ciclo temporal. Con esta concepción del cosmos, el pueblo maya hizo de la actividad religiosa el centro de su existencia. A partir de esa concepción del cosmos, desarrollaron conocimientos orientados a la construcción, el conteo, la observación de la bóveda celeste, la pintura y la escultura, pero también desarrollaban actividades cotidianas como la siembra y la confección de artesanías.

En cuanto a su manera de pensar,

> *"Algo que sí es característico de la cultura maya y que en occidente se ha ido perdiendo, es la importancia de las explicaciones dadas por los ancianos y las personas mayores, ya que estas explicaciones son consideradas con un fuerte contenido de espiritualidad y sabiduría."*
>
> (Salazar de León, 2005, p.84)

Por otra parte, en la mitad sur del México actual, fue habitada por diversos pueblos. Los aztecas fueron uno de estos pueblos que, mediante alianzas militares con otros grupos logró una rápida expansión y dominó el área central y sur del actual México entre los siglos XIV y XVI.

En el mundo Anáhuac, la educación iniciaba en la casa, donde los padres transmitían a los hijos valores para la vida y la convivencia, basados en el respeto, el amor y el recto criterio. Esta educación era continuada por los sacerdotes, encargados de las tres escuelas existentes: el Calmecac, Telpochcalli y el Cuicacalli, destinadas respectivamente a la formación de sacerdotes, guerreros o artistas, mediante las enseñanzas propias de cada actividad. *"El fin de la educación en estas tres escuelas, era para ser guerrero o sacerdote, es decir, trascender la personalidad de la persona. En estas escuelas, los maestros del conocimiento lograron formalizar y sistematizar diversos conocimientos, entre las que destacan los de tipo matemático, transmitidos de manera oral de generación en generación, a través del idioma Náhuatl"* (Espinoza Ocotlán, 2006, p.16).

En relación con la construcción del conocimiento, una de sus características principales era la contemplación de los hechos y los fenómenos que se suceden en la naturaleza y en las actividades humanas. La visualización y algoritmia en este caso, se desarrollan a través de la experiencia, la observación de la periodicidad y reproducibilidad de las actividades o fenómenos (Espinoza Ocotlán, 2006). Puede inferirse, por lo tanto que la manera de validar resultados matemáticos en estas culturas es por medio de la contemplación y concordancia con los fenómenos naturales y humanos.

El tratamiento de algunos conceptos matemáticos que surgieron en el escenario americano

a. El cero

Las culturas mesoamericanas, como los mayas y los aztecas, presentaron un rasgo en común en la construcción de conocimientos matemáticos con la cultura india: el desarrollo de la noción, el símbolo, el concepto, y uso del cero. Sin embargo, las bases sobre las que se desarrolló este concepto matemático son distintas de la consideración de la nada de la India. Se trata de un cero tangible y concreto, propio de las culturas basadas en la atenta observación de la naturaleza y sus manifestaciones concretas.

Los conocimientos aritméticos de los mayas se conocen a través de códices relacionados con la astronomía y la adivinación. Debido a influencias de otros pueblos americanos utilizaron un sistema de numeración mixto. El sistema de numeración maya, posee peculiaridades singulares y notables en América: es posicional y se caracteriza por la presencia y utilización del cero.

En sus sistema de numeración más sencillo, heredado de los zapotecas y los olmecas, los símbolos básicos son un punto que representa al 1 • y una barra que representa al 5 ▬ . Estos símbolos hacen alusión a un guijarro y a un cayado respectivamente. Con ellos representaban los números de 1 a 19 mediante adición, a través de la colocación de tantas barras y puntos como fuese necesario.

Por ejemplo: 17 se escribe como: 

Figura 9: 17 en notación maya

Los diecinueve símbolos así generados, forman a su vez parte de un sistema posicional en el cual se colocan las cifras una abajo de la otra, correspondiendo cada posición a valores veinte veces mayores que la inferior, salvo para la tercera posición, que en vez de corresponder a 20^2, multiplica al número correspondiente por 360. Esta anomalía, que impide hablar del sistema maya como vigesimal, dificultó enormemente su operatoria, pero se encontraba directamente relacionada con las unidades de medición de tiempo.

La incorporación de un tercer símbolo correspondiente al caparazón de caracola marina:  permitía indicar las unidades faltantes. Por ejemplo:

17
2
0 representa: $6 \times 20^0 + 0 \times 20^1 + 2 \times 360 + 17 \times 360 \times 20^1$
6

Figura 10: 123126 en notación maya

Se considera que este es uno de los sistemas más económicos en cuanto a la cantidad de símbolos y que además permite registrar cantidades que alcanzan millones de unidades, con las facilidades que brinda el sistema posicional de numeración. La función del cero en un número consiste en identificar la ausencia de cierto orden de unidades, no posee su valor cardinal.

Existe otra notación numérica maya en la que las veinte cifras se representaban a través de dibujos de cabezas. Esta era utilizada en los calendarios religiosos.

Reflexiones sobre algunas de las características del pensamiento no aristotélico

Hay que admitir que la lógica aristotélica no se presentó en escenarios como los que se acaban de describir. Las ideas lógicas que se presentaron en este capítulo son casi completamente irreducibles a la aristotélica. Los escenarios orientales y americanos fueron totalmente distintos de los que existieron en las culturas de influencia aristotélica.

El principio de contradicción y el principio del tercero excluido no poseen validez en estos escenarios. No sólo las antinomias no asustan a las filosofías no aristotélicas, sino que admiten que los extremos se complementan y permiten la aparición, la evolución y el desarrollo de ciertos conceptos matemáticos cuya aparición en occidente tardó siglos y fue terriblemente cuestionada.

La creencia en la existencia de una verdad objetiva en el mundo de los fenómenos está también poco extendida en los escenarios no aristotélicos, siendo la verdad muchas veces un concepto relativo que difiere según los planos de la conciencia.

> *"La ciencia occidental se encuentra también, y con derecho propio, en este mundo que se quiere sin fronteras y que forma una totalidad de manifestaciones; totalidad que unifica en un conjunto las diversas características de las variadas culturas, tanto en los aspectos filosóficos como en los científicos y en el conjunto de los modos del saber. No hay ninguna razón para pensar que la ciencia occidental sea la depositaria de un saber absoluto, ni para que no podamos suponer que las aportaciones de otros modos de entendimiento de la realidad no pudieran ser significativas para el encuentro con el conocimiento de la realidad y, por ende, de la verdad".*

(Salazar de León, 2005, p.34)

En China antigua, las ideas filosóficas se basaron en la coexistencia y equilibrio entre el ying y el yang. Todo ser es combinación de lo femenino y lo masculino, de la energía pasiva y de acción, nada es totalmente ying o totalmente yang. Esto da un sustento simbólico desde el que fue posible construir diferentes modos de oposiciones numéricas y dio también la posibilidad de surgimiento de objetos matemáticos como el cero.

La simetría en cuanto al equilibrio que preside el paradigma chino es radicalmente distinta de la filosofía de la Grecia clásica. Para los griegos no es posible pasar del ser al no ser, no es posible cambiar el género o la naturaleza de un objeto, no existe ningún elemento identificable que esté en el límite del ser y el no ser. De esta manera, en Grecia no apareció el cero con estas características.

Para los griegos, la visión del mundo y el uso de la lógica para develar su funcionamiento, en cierta manera, se constituyeron en un impedimento para la génesis de ciertos conceptos matemáticos, como es el caso del cero y del infinito. En su exigencia de consistencia de consistencia lógica y de bivalencia, estos conceptos matemáticos no pudieron ser construidos de manera natural, como vemos en otras culturas que no recibieron la influencia aristotélica. Los griegos "*carecían el hilo místico que podía entretejer el concepto de cero en un sistema práctico de explicación*" (Barrow, 2001, p.60). Sólo Parménides consideró al no ser como algo de lo cual era posible filosofar, aunque alejado de fines prácticos.

Los estudiantes y las formas de razonar no aristotélicas

a. Una experiencia sobre la aparición de argumentaciones nyayas

Bruno D´Amore introduce a partir de las características de la lógica nyaya (D´Amore, 2005a), o sea la que surge en la India en oposición al budismo, una experiencia en la que identifica en ejemplos extraídos de las clases de matemática de alumnos de entre 14 o 15 años, ciertos comportamientos argumentativos que se acercan a estructuras argumentativas nyayas. Estas argumentaciones se presentaron de manera espontánea, sin que hubieran sido producidas por el investigador. D´Amore afirma:

> *"Yo no creo, incluso después de esta investigación que estos estudiantes piensen en estricto acuerdo con a lógica nyaya. El recurrir a esta lógica en el análisis del razonamiento matemático de*

los estudiantes, evidencia sin embargo, el hecho que el análisis didáctico presupone, de una forma u otra, un marco de referencia y que existen diferentes lógicas posibles para dar explicación del comportamiento deductivo de los estudiantes"

(D´Amore, 2005a, p. 84)

Desde nuestra óptica, los resultados expuestos de la investigación anterior, estarían denotando que la forma de razonar aristotélica, que usualmente presuponemos como natural en el aula de matemática, no tiene tal carácter, sino que es una construcción sociocultural que a veces resulta para los alumnos con carácter artificial. La lógica, comprendida como lógica aristotélica, no es innata, sino que se trata de de una construcción sociocultural. Para la cultura occidental, ha parecido durante siglos que la aristotélica es la forma de razonar del ser humano, pero esto se debe simplemente a que hemos nacido en una sociedad que tiene sumamente arraigada tal cultura. Cabe preguntarse qué es entonces lo innato, qué es lo que tienen en común los integrantes de las distintas culturas en relación al pensamiento… Consideramos que lo que es innato es la necesidad de buscar una explicación ante un fenómeno o un hecho, la necesidad de justificar, de explicar, de fundamentar, de argumentar lo que se afirma. Cada cultura construyó esa forma de argumentación de acuerdo a las características de su escenario.

En la investigación que presenta D'Amore, pueden identificarse claramente las etapas del pensamiento lógico védico en el planteo e intentos de demostración de propiedades matemáticas por parte de los estudiantes.

Sobre la base de la publicación citada, se presentó a una maestra, participante de un curso de capacitación de geometría el siguiente enunciado:

Si un cuadrilátero tiene sus diagonales perpendiculares y se cortan mutuamente en su punto medio, entonces es un rombo:

Tras la lectura del enunciado, los pasos que siguió y reflexiones que realizó fueron los siguientes:

1. *AB=BC=CD=DA (dibuja un rombo y le da los nombres correspondientes a los vértices)*
2. *Yo sé que BD⊥AC, se cortan en O, y AO=OC y BO=OD*
3. *Pero si las diagonales son perpendiculares y se cortan en partes iguales, entonces los lados son iguales, o sea es un rombo (mientras habla va marcando en la figura que realizó).*
4. *Las diagonales son perpendiculares y se cortan en partes iguales.*
5. *Los cuatro lados son iguales, es un rombo.*

La propiedad no está demostrada, pero la actuación de esta estudiante frente al problema planteado es similar a la que reporta D'Amore. En ella se identifican las etapas de la argumentación nyaya. Cada uno de los pasos propuestos pueden hacerse corresponder a las fases de las argumentaciones nyayas:

1. Afirmación: P(A). La afirmación aún no probada es afirmada inicialmente
2. Razón: F(A) Se afirma la causa que se atribuye para que P(A) ocurra
3. Tesis: $(\forall x)$ $[F(x) \Rightarrow P(x)]$ Se enuncia la proposición general y ejemplifica la tesis en un caso particular: $F(B) \Rightarrow P(B)$, en este caso marcando en la figura de análisis realizada.
4. Aplicación: F(A) Se afirma la hipótesis del caso general se vuelve al caso en examen: una fuerza ejerce una acción sobre la figura analizada.
5. Afirmación: P(A). Se reafirma el consecuente que se quería probar.

Al llegar a este punto, la propiedad es asumida. Indudablemente, si se analiza la corrección del razonamiento, se dirá que no es correcto. Sin embargo, la maestra, participante del curso de capacitación que realizó este razonamiento, afirmó que lo había probado aunque no fuera de una manera formal. Era conciente de que no se le aceptaría matemáticamente su razonamiento, pero ella lo aceptaba como una prueba de la propiedad. Se acababa de poner en juego una estrategia de argumentación no aristotélica, pero que satisfacía a su autora.

b. Una experiencia sobre la resistencia a la utilización de argumentaciones aristotélicas

La siguiente experiencia que se presenta en este trabajo, ha sido realizada con una estudiante del Profesorado de Informática del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", durante la cursada de la asignatura Matemática 2 (cursada 2006), cuyos contenidos consisten en la presentación de los conceptos fundamentales de la lógica clásica (proposicional y de predicados), su mecanización mediante las álgebras de Boole y, finalmente de algunos rudimentos de las lógicas no clásicas (lógicas polivalentes y lógica difusa). Los estudiantes en el momento de la experimentación que reportamos habían adquirido los conocimientos de la lógica clásica, pero no han abordado ningún concepto de lógicas no clásicas aún. Por esta causa, no es posible considerar que la experiencia que se describe a continuación tenga influencias de estudios realizados por la alumna.

La siguiente actividad fue planteada a los alumnos durante una evaluación escrita. Este tipo de ejercicio había sido resuelto en clase en diversas oportunidades, discutiéndose su resolución y fundamentación.

Dado el siguiente razonamiento, se pide:

a. Formalizarlo en lógica de predicados de primer orden. Indicar los dominios de cada función proposicional.
b. Formalizarlo como proposiciones categóricas.
c. Determinar su validez.

d. Si es válido, demostrarlo por el método deductivo. Si no lo es, modifique una premisa para que lo sea.

Algunos físicos son matemáticos. Ningún químico es matemático. Por lo tanto, algún físico no es químico.

La solución esperada para la actividad era la siguiente:

a. $P(x)$ = x es físico

$Q(x)$ = x es matemático

$R(x)$ = x es químico

$Dom_P = Dom_Q = Dom_R$ = {personas}

$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$

$\underline{\forall x (R(x) \Rightarrow \sim Q(x))}$

$\exists x\ (P(x) \wedge \sim R(x))$

b. A = clase de los físicos

B = clase de los matemáticos

C = clase de los químicos

Algún A es B.

<u>Ningún C es B</u>

Algún A no es C.

c. Retomando la formalización como proposiciones categóricas, se representa cada una de las premisas en diagramas de Venn, con la convención de que una cruz marcada en un sector, significa la existencia de algún elemento en ese sector de los conjuntos, mientras que un sector rayado, significa que el mismo se encuentra vacío. Los diagramas de Venn así obtenidos serían, por ejemplo los siguientes:

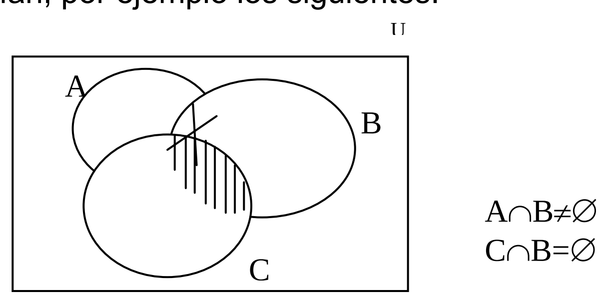


Figura 11: Figura de análisis utilizando diagram

A partir de la representación de las premisas, y observando el sector que corresponde a la conclusión: A\C, se observa la existencia de algún elemento en el mismo, de donde se infiere que el razonamiento es válido.

d. A partir de la determinación de que se trata de un razonamiento válido, se procede a la aplicación del método deductivo:

1.	$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$	Premisa
2.	$\forall x (R(x) \Rightarrow \sim Q(x))$	Premisa
3.	$P(s^*) \wedge Q(s^*)$	Regla de especialización existencial: 1
4.	$R(s^*) \Rightarrow \sim Q(s^*)$	Regla de especialización univesal: 2
5.	$P(s^*)$	Regla de simplificación: 3
6.	$Q(s^*)$	Regla de simplificación: 3
7.	$\sim\sim Q(s^*)$	Regla de doble negación: 6
8.	$\sim R(s^*)$	Modus Tollendo Tollens: 4,7
9.	$P(s^*) \wedge \sim R(s^*)$	Regla de conjunción: 5,8
10.	$\exists x\ (P(x) \wedge \sim R(x))$	Regla de generalización existencial: 9

Una de las estudiantes, presentó la siguiente resolución: los puntos a y b fueron realizados según lo esperado. Al llegar al punto c, en vez de aplicar el método de los diagramas de Venn, planteó una variante de la prueba de invalidez que se utiliza en la lógica proposicional. En este método, a partir de la verdad de las premisas, se supone la falsedad de la conclusión y se intenta asignar valores de verdad a las proposiciones simples; si esta asignación se logra se concluye que el razonamiento es no válido, si se llega a una contradicción, se concluye que es válido. Este método no es aplicable a la lógica de predicados pues debido a la presencia de cuantificadores, puede tratarse de dominios infinitos, y además no puede en general especializarse todas las proposiciones en el mismo elemento con seguridad.

La estudiante eliminó los cuantificadores, supuso la verdad de las premisas, pero también de la conclusión, presentando lo siguiente:

$(P(x) \wedge Q(x))$	$v(P(x) \wedge Q(x)) = V$
$\underline{(R(x) \Rightarrow \sim Q(x))}$	$v(R(x) \Rightarrow \sim Q(x)) = V$
$(P(x) \wedge \sim R(x))$	$v(P(x) \wedge \sim R(x)) = V$

"Si $v(P(x) \wedge Q(x)) = V$, entonces $v(P(x)) = V$, $v(Q(x)) = V$

Entonces $v(\sim Q(x)) = F$.

Pero para que $v(R(x) \Rightarrow \sim Q(x)) = V$, tiene que darse entonces $v(R(x)) = F$.

En ese caso, $v(\sim R(x)) = V$.

Haciendo la conjunción de $P(x)$ y $\sim R(x)$, se tiene que: $v(P(x) \wedge \sim R(x)) = V$.

Y por lo tanto el razonamiento es válido."

Esta manera de pensar desde la lógica aristotélica es incorrecta. No es posible inferir la validez del razonamiento de la secuencia utilizada por la alumna. Ella, a continuación realizó de manera correcta el ítem d de la actividad. Las preguntas que surgían de observar lo que había realizado son: ¿Por qué no aplicó el método de los diagramas de Venn? ¿Qué la llevó a intentar una estrategia parecida a la prueba de invalidez, pero realizando también de manera incorrecta las suposiciones originales? ¿Por qué eliminó los cuantificadores?

Las preguntas que surgían de observar lo que la alumna había realizado para resolver la problemática planteada son:

¿Por qué no aplicó el método de los diagramas de Venn?

¿Qué la llevó a intentar una estrategia parecida a la prueba de invalidez, pero realizando también de manera incorrecta las suposiciones originales?

¿Por qué eliminó los cuantificadores?

¿Conocía realmente lo que estaba haciendo o era producto de una construcción incompleta del conocimiento?

Con la finalidad de buscar respuesta a algunas de estas preguntas, se tuvo con ella una entrevista. Estas preguntas se le realizaron durante la mencionada entrevista, con la finalidad de clarificar cuáles eran los fundamentos sobre los que había presentado la resolución que hemos descrito: El extracto de la entrevista se transcribe a continuación:

- ¿Por qué eliminaste los cuantificadores?

- Los cuantificadores los eliminé por las regla de especialización.

- ¿En qué elemento especializaste?

- En cualquiera, en x.

- Pero hay un cuantificador existencial.

- Sí, pero yo quería un elemento cualquiera para poder demostrar que es válido. Esas reglas las usé en la parte d.

En relación a las causas por las que no había utilizado el método de los diagramas de Venn, que había sido visto en clase:

- ¿Por qué no utilizaste los diagramas de Venn?

- No me gusta demostrar con dibujos. Los matemáticos siempre dicen que los dibujos no son seguros, que es mejor escribirlo en matemática.

- ¿Escribirlo en matemática? ¿Qué es eso?

- Como lo hacen ustedes, que lo dicen con palabras y lo escriben con símbolos.

- De manera más formal, ¿quieres decir? ¿Usando formalismo?

- Sí. En clase utilizamos el método de los diagramas de Venn para este tipo de problemas, pero a mí no me gusta. Me parece más seguro este. Además, funciona bien, porque es válido, pude hacer el punto d y de esa manera me di cuenta de que estoy pensando bien.

La docente tenía evidencia obtenida en clases anteriores de que la alumna conocía el método de prueba que se le había solicitado, ya que en la clase anterior a la actividad planteada, los alumnos habían resuelto problemas aplicando el mismo, y esta alumna los había realizado correctamente. En este caso, lo que presentaba parecía inspirado en la prueba de invalidez, por lo que se le pregunto:

> *- El método que utilizaste ¿es similar a la prueba de invalidez?*
>
> *- Sí, pero no es igual. Eso de suponer que no es válido para ver que es válido no me convence. Si quiero ver que es válido, veo si es válido. Si quiero ver si es inválido, veo si es inválido. ¿Por qué voy a mezclar?*
>
> *- Pero, ¿hay otra posibilidad aparte de que sea válido o inválido?*
>
> *- No, creo o al menos no definimos nada más. Pero yo pienso para adelante. Me propongo lo que quiero ver y avanzo. Si no llego me propongo lo otro y avanzo. Eso de suponer que no para ver que luego es sí, me parece rebuscado.*

De esta entrevista se puede inferir que la alumna conoce las reglas de inferencia y los métodos de determinación de validez de razonamientos, sin embargo su uso no es el esperado. La no utilización de diagramas de Venn para la determinación de la validez del razonamiento es fundamentada en la no aplicación de recursos gráficos, se observa en la estudiante una clara inclinación a la aplicación de recursos analíticos por sobre los gráficos. Surgen de la explicación presentada la presencia de formas de argumentación inductivas, a través de formas de razonar abductivas.

En el caso del rechazo hacia las argumentaciones gráficas, se observa cómo se ha construido la no aceptación de este tipo de argumentaciones a partir de experiencias previas en el aula. Claramente no se ha asumido la importancia de las figuras de análisis y la diferencia de su utilización en relación al razonamiento sobre casos particulares. Sin embargo, los libros de texto enseñan la utilización de este tipo de métodos, que son enseñados en diversas asignaturas, Cabe entonces, la pregunta: ¿qué valor dan los estudiantes a este tipo de argumentaciones?

También se observa un rechazo a las argumentaciones indirectas, mediante el uso de la reducción al absurdo. Al igual que como ocurriera en experimentaciones que reportamos anteriormente (Crespo Crespo, 2005a, Crespo Crespo & Farfán, 2005, 2006), se evidencia en los estudiantes de carreras informáticas el rechazo de los métodos de argumentación indirectos, mostrando una clara inclinación a las argumentaciones directas.

Si se analizan las respuestas dadas por la alumna en la entrevista y la resolución presentada, podemos detectar ciertos rasgos de pensamiento no aristotélico:

- √ No aceptación del método de los diagramas de Venn, por considerarlo un método gráfico, y por ende poco fiable.
- √ No aceptación del principio del tercero excluido, deja abierta la posibilidad de existencia de otro tipo de razonamiento aparte de los válidos e inválidos.
- √ No aceptación de la prueba de invalidez, basándose en la poca fiabilidad de los métodos de demostración indirectos.
- √ Confusión entre formalismo y rigor. Como nos aclara (D´Amore, 2005b) refiriéndose a la interpretación de "contrato didáctico", en la escuela el alumno piensa que debe hacerlo con "rigor", de acuerdo a lo que supone espera el maestro. En segundo lugar el alumno estima que en matemática debe hacer "cálculos", por lo tanto lo que se les pedía no es matemática.
- √ Presentación de una forma de razonamiento no aristotélica, con gran similitud del pensamiento *nyaya*, tal como se reporta en la investigación mencionada (D'Amore, 2005a).

  La estudiante partió de la tesis, de suponer que el razonamiento era válido. Para ello debía exponer la razón: si las premisas son verdaderas, la conclusión también. En ese punto, recurrió a ejemplificar la proposición general: la ejemplificó eliminando los cuantificadores y llegando a realizar la asignación de los valores de verdad de las proposiciones simples. Finalmente, realizó la generalización correspondiente.
- √ Resulta notable y también interesante que de la entrevista se infiere que aquellas respuestas que podrían haber sido consideradas incorrectas en

una corrección, no provenían del hecho de que la alumna no tuviera los conocimientos necesarios, sino de que la construcción que había realizado en cuanto a las formas de razonamiento válidas, difieren de las que fueron enseñadas en clase, desde una visión aristotélica.

Algunos comentarios

Se acaban de presentar dos ejemplos de formas de argumentar presentes en el aula de matemática. Ambas argumentaciones difieren de lo que se esperaría para ser consideradas válidas y no podrían ser consideradas como demostraciones válidas desde la óptica aristotélica.

El primero de los casos presentado se trata de una estructura de argumentación que recuerda las que se utilizaban en la India en el período védico. Si bien no es posible pensar que esta forma de razonamiento sea conocida por quien la utilizó, nos pone frente a formas de argumentación que no tienen influencia aristotélica y que sin embargo producen convicción.

El otro ejemplo se presenta la que a través de las respuestas y explicaciones de una estudiante, que inicialmente da respuestas a una situación problemática escolar presentada dentro de un escenario académico, en la que si bien no resuelve aplicando argumentaciones lógicas aristotélicas, muestra en la entrevista posterior conocimiento de las mismas, aunque en algunos casos no las acepta y considera mejores las que realizó ella.

Se refuerza a través de estos ejemplos y mediante el análisis de las formas de pensamiento de culturas sin influencia aristotélica, la hipótesis de que las formas de argumentación tienen carácter de construcciones socioculturales, no son innatas: Se construyen y constituyen la base de las prácticas sociales de demostración que caracterizan a la comunidad matemática. Nuestra forma de argumentar, nuestra matemática, evidentemente se han construido en una cultura de base fuertemente aristotélica, lo que hace que se asuma esta lógica como innata. Sin embargo, a pesar de que hemos presentado sólo dos ejemplos de posición frente a ciertas argumentaciones presentes en el aula de matemática, estos no son ejemplos aislados, ya que representan opiniones que en muchos casos hemos detectado en nuestras clases y que consideramos deben ser analizadas cuidadosamente.

Las argumentaciones por reducción al absurdo se basan fuertemente en el cumplimiento de los principios del tercero excluido y de no contradicción. Estos principios son vitales para la lógica aristotélica, pero no, como se acaba de presentar, para otras formas de pensamiento lógico que se dieron en diversas culturas. Esta estrategia de argumentación, necesita, por lo tanto, para poder ser construida de un escenario que acepte la lógica aristotélica. Se trata de una forma de argumentación que no fue utilizada por varias culturas, no solo de la antigüedad, sino de siglos recientes, y cuya aceptación en el aula tampoco es uniforme (Crespo Crespo, 2005a). Cabe preguntarnos, ¿en qué escenarios se las encuentra?, la concepción de absurdo, ¿es única?, ¿tiene para el ser humano siempre la misma significación que para Aristóteles? Analizaremos en el capítulo siguiente las características de las argumentaciones por reducción al absurdo, así como la presencia de esta forma de argumentación en escenarios matemáticos y las concepciones acerca del absurdo presentes en esos escenarios socioculturales y en el aula.

Capítulo 6

Las argumentaciones por reducción al absurdo. Las contradicciones en la matemática

Las demostraciones por reducción al absurdo han sido durante siglos aceptadas y utilizadas dentro de la matemática tanto por investigadores como por docentes. Son muchos los casos en los que se aplica este tipo de argumentación dentro de la matemática; aparecen en la demostración de propiedades matemáticas en diversos temas y ramas de la matemática. Algunas de esas aplicaciones son reconocidas y recordadas a lo largo de la historia.

En el aula, también son presentadas en numerosas oportunidades sin una reflexión explícita acerca de su aceptación por parte de los alumnos., ni de su significación y consecuencias. Sin embargo su estructura y fundamento no son sencillos e involucran ideas que no son para nada triviales y aparecen en muchas oportunidades provocando dificultades y obstáculos. La aceptación de las mismas, implica la aprobación de los principios aristotélicos.

Se verá en este capítulo que las concepciones acerca del absurdo no coinciden siempre con la visión aristotélica del mismo, sino que permiten asumir que esta concepción se refleja en la manera en que se interpretan estas argumentaciones.

De esta manera se obtendrá nuevamente evidencia del carácter de construcción sociocultural de este concepto, reforzando y ampliando resultados obtenidos en (Crespo Crespo, 2005a).

Descripción y explicación lógica

Las argumentaciones por reducción al absurdo, también llamadas simplemente por el absurdo, se basan, en la aplicación del siguiente esquema:

> A partir de un conjunto Γ de premisas, que constituyen las hipótesis, se pretende probar la validez de cierta conclusión T, que en el caso de un teorema, se la suele denominar tesis. La implicación que se pretende probar es: $\Gamma \Rightarrow T$.
>
> Se agrega como una nueva premisa la negación de la tesis y de esta manera se tiene un nuevo conjunto de premisas Γ', o sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{ T \}$. A partir de Γ' se aplican reglas de inferencia y se llega a una contradicción. De esto se infiere que el nuevo conjunto de premisas es contradictorio o no consistente, por lo que se admite la verdad de la tesis.

Este esquema de razonamiento se identifica con un razonamiento hipotético, ya que se parte de la suposición de una hipótesis, que es justamente la negación de lo que se quiere demostrar. Se llega a una contradicción como resultado de haber incorporado al conjunto de hipótesis la negación de la tesis del teorema. Existen distintas variaciones de esta estrategia de argumentación, conocidas como el método de exhaución, el método del descenso infinito y el método de demostración por contraposición.

Otra de las formas particulares de ponerse de manifiesto argumentaciones por reducción al absurdo, puede lograrse considerando la proposición contrarrecíproca de una proposición dada.

Por ejemplo, dada *"Si A, entonces B",* significa que bajo las condiciones que afirma A, debe demostrarse que se cumplen las condiciones enunciadas por B. La proposición contrarrecíproca es: *"Si no B, entonces no A".* De esta manera, si se logra probar que la negación de B conduce a la negación de A, se estará llegando a un absurdo, pues A era hipótesis. Este tipo de reducción al absurdo, parte de la negación de la tesis y llega directamente a la negación de la hipótesis, lo que obliga a afirmar que la tesis debe ser verdadera, si la hipótesis lo es. Desde el punto de vista lógico existe una equivalencia entre una implicación y su contrarrecíproca.

Frecuentemente, la realización de una demostración por reducción al absurdo es más sencilla y corta que la demostración directa. Sin embargo los obstáculos que pueden generar en el aula, no son triviales. Las argumentaciones por reducción al absurdo presentan en la matemática, una alternativa a la demostración directa. A veces no es necesaria su aplicación y el razonamiento puede realizarse de manera directa. En algunos casos, sin embargo no es posible realizar demostraciones directas y es necesario recurrir a argumentaciones por el absurdo para determinar la verdad de un enunciado.

Su aparición en la historia

Como ya se dijo al referirnos a la evolución de las demostraciones y argumentaciones, Pitágoras de Samos puede ser considerado el primer racionalista de la filosofía. La demostración atribuida a los pitagóricos para la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ con 1, procedía según Aristóteles por "reductio ad absurdum". Se trata de la conocida demostración que hacemos en la actualidad para la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y que fuera incluida en algunas de las antiguas versiones de los Elementos de Euclides, como Proposición 117 del Libro X. Esta argumentación fue calificada por Hardy como *"una de las más sutiles armas matemáticas*" (Hardy, 1979, 421).

Este tipo de argumentación era considerada válida en la Grecia clásica, el fundamento lógico básico de la misma consiste en que al no poder ser cierta la negación de la tesis, ya que conduce a una contradicción, a un absurdo, se infiere la necesidad de que la tesis sea verdadera.

A partir de las ideas de Parménides, considerado por algunos historiadores discípulo de Pitágoras, se funda en Elea una escuela en la que sobresalió Zenón. En el siglo V a.C., Zenón utiliza argumentaciones de reducción al absurdo en los razonamientos que realizara para la explicación de sus famosas paradojas.

Parménides compone un poema épico-didáctico destinado a persuadir, en él no pone en juego motivaciones que no surjan por sí solas y utiliza el esquema que Aristóteles menciona como reducción a lo imposible, o reducción al absurdo:

> *"Que el ser es, implica que no ha nacido, pero si hubiese nacido significa que previamente no existía el ser, y, en ese caso, tendría que haber nacido de la nada, pero, aparte de que solo puede hablarse de lo que es y no de la nada, ¿qué necesidad le haría pasar de no ser a ser?"*

(Citado por Eggers Lan, 1995, p.33.)

Esta argumentación utiliza además uno de los principios aristotélicos que es el Principio de necesidad.

Eudoxo de Cnido que pasó algunos años junto a los discípulos de Platón, fue quien fundamentó la organización deductiva sobre un sistema explícito de axiomas. Otro mérito de Eudoxo fue la introducción del método de exhaución. Este método de demostración supone una doble reducción al absurdo: por ejemplo para probar que el área de cierto recinto es A, se demuestra, utilizando polígonos inscritos, que no puede ser menor que A; de la misma forma se demuestra, utilizando polígonos circunscritos, que no puede ser mayor que A.

En los Elementos de Euclides, es posible encontrar varias demostraciones que hacen uso del recurso de reducción al absurdo (Euclides, 1991). Euclides aplica esta estrategia en demostraciones correspondientes a diversas temáticas en su obra.

Por otra parte, Arquímedes, también hace uso de argumentaciones por reducción al absurdo. En algunos resultados matemáticos como la determinación del área de un círculo, o la de la superficie de una esfera, realiza argumentaciones en las que utiliza el método de exhaución. En otra área, al realizar su estudio acerca del equilibrio de los planos, establece un grupo de postulados a partir de los que deduce una serie de proposiciones y en tales deducciones presenta argumentaciones por reducción al absurdo (Farrington, 1979).

Nicolo Tartaglia, en La Nueva Ciencia, publicado en 1537, enuncia y demuestra propiedades referidas al estudio del movimiento. En su demostración de que "*Ningún cuerpo igualmente grave puede recorrer algún espacio de tiempo o de lugar con movimiento natural y movimiento violento en forma simultánea*", utiliza argumentaciones por reducción al absurdo postular la no existencia de un movimiento que verifica ciertas condiciones, en este caso, ser simultáneamente uniforme y uniformemente acelerado (Tartaglia, 1998, p.84).

Pierre Fermat empleó en el siglo XVII, el método de descenso infinito, que es una variante del método de demostración por reducción al absurdo en la que la contradicción consiste en definir una sucesión infinita estrictamente decreciente de números enteros positivos (Bell, 1996). Suponiendo que se desea demostrar una cierta afirmación A, entonces se supone que para un cierto n número natural se cumple su negación, ~A, y a partir de ahí se demuestra que entonces también se cumple su negación para un número natural menor que n. Continuando con el razonamiento se obtiene una sucesión infinita y decreciente de números naturales, lo cual es imposible. Por tanto, aplicando reducción al absurdo se afirma que A es verdadera. Fermat aplicó este método con el fin de demostrar algunos teoremas de la teoría de números.

El absurdo como concepción filosófica

Desde el punto de vista lógico, las argumentaciones por reducción al absurdo, se fundamentan en principios de la lógica aristotélica que surgieron de acuerdo con las necesidades de la concepción aristotélica del mundo y de la ciencia. A pesar de que la lógica aristotélica velaba por la coherencia dentro de la ciencia, y en particular de la matemática, que se constituyó a partir de la visión griega en la ciencia por antonomasia, dentro de esta ciencia surgieron contradicciones. Los principios aristotélicos del tercero excluido y de no contradicción, no pudieron evitar el surgimiento de paradojas dentro de la matemática. Este hecho produjo entre los matemáticos una crisis, con el consiguiente replanteo de cómo debía actuarse para salvar la misma.

Ante la crisis de las paradojas o antinomias, producida a fines del siglo XIX, Luitzen Brouwer y la escuela intuicionista afirmaron que la causa de ellas era el uso ilimitado que se hace del principio del tercero excluido. Por esta causa, propusieron la limitación o directamente la supresión del mismo. Para Brouwer, este principio sólo es aplicable a "*conjuntos finitos y bien determinados*". La base de estas ideas es que ante una paradoja, es el principio del tercero excluido el que lleva a afirmar la negación de la misma, para caer nuevamente en otra afirmación paradójica. Para los intuicionistas, es posible que mediante la aplicación del principio del tercero excluido a razonamientos matemáticos en los que se realiza una argumentación por reducción al absurdo, ocurra algo similar. El intuicionismo plantea esta duda y trata de darle solución sin postular nada al respecto (Toranzos, 1943).

Desde el punto de vista lógico, el neointuicionismo se destaca por el sentido que da a los términos afirmación y negación. Para la lógica subyacente al intuicionismo, lo *verdadero* es lo no contradictorio y lo *falso* es lo que no es verdadero. En esta postura verdad y falsedad son las únicas dos posibilidades, son opuestas y contradictorias, pero existe además una tercera posibilidad, se trata de aquellas proposiciones de las que no se ha demostrado ni su afirmación ni su negación. La negación y la afirmación brouwerianas son posibilidades contrarias que se excluyen, pero no son necesariamente opuestas contradictorias. Sobre la base de estas definiciones, no se puede inferir la negación de una proposición a partir de saber que la afirmación de una proposición conduce a un absurdo. Los intuicionistas se vieron en la necesidad de sentar las bases de una lógica que no utilice el principio del tercero excluido. Esta labor estuvo a cargo de Glivenko, sobre las ideas de Brouwer y Heyting.

Para los intuiocionistas, las argumentaciones por reducción al absurdo, no garantizan una demostración, sólo muestran la posibilidad de que la propiedad que se está demostrando sea cierta.

No se trata, por lo tanto de una estrategia de argumentación válida para estos matemáticos. Pero la no aceptación del Principio del tercero excluido, va más allá: se trata de un cambio radical en la concepción de la matemática. Esta ciencia solo puede referirse a aquellos objetos que ha construido; sólo esos objetos tienen existencia para la matemática intuicionista. Los únicos objetos matemáticos con existencia son aquellos que se construyen a partir de un procedimiento finito.

Una consecuencia importante de la lógica intuicionista para la lógica clásica, es que permite afirmar la independencia del principio del tercero excluido con respecto a los demás principios de la lógica clásica. Esta afirmación genera una ruptura epistemológica desde lo epistemológico.

La visión intuicionista de la matemática presenta esta ciencia como aquella que no va más allá de los objetos que ha construido en ella. La existencia de los objetos matemáticos y sus propiedades sólo es demostrable a través de la re-construcción de dichos objetos. En el estudio de las construcciones matemáticas mentales, existir es sinónimo de ser construido. De esta manera, para los intuicionistas, la lógica no puede decir nada sobre la existencia de un objeto matemático, si no es capaz de construirlo.

Resulta interesante que para los intuicionistas, las leyes de la lógica no son a priori ni eternas.

> "*Son hipótesis que el hombre formuló al estudiar el lenguaje, por medio del cual expresaba su conocimiento de conjuntos finitos de fenómenos. Por consiguiente, las leyes de la lógica no deben considerarse como principios reguladores inmutables, sino como hipótesis corregibles que pueden fallar en relación con nuevos tipos de objetos, por ejemplo las conjuntos infinitos*"

(Bunge, 1965, p.48)

Podríamos afirmar que esta visión de la lógica, la muestra, en cierta medida, como una práctica social, sujeta al uso que realice de ella la sociedad matemática en función de los objetos matemáticos que haya construido.

Para los intuicionistas, la validez de la lógica está de acuerdo con el buen funcionamiento de la ciencia, en particular de la matemática. Su reconocimiento de la matemática como una ciencia que estudia objetos construibles a través de ciertos métodos, la reconoce como un producto social.

El absurdo como concepción filosófica en las culturas antiguas

La posición de los intuicionistas de no aceptación del tercero excluido, no fue sin embargo nueva del siglo XX. Si buscamos antecedentes en culturas que no incluyeron las argumentaciones por el absurdo como ser las culturas china e hindú, resultan notables algunas aserciones filosóficas, basadas en las concepciones filosóficas y lógicas que se han presentado en el Capítulo 5 de esta tesis.

La India, cuna del cero con todas sus funciones, también se caracterizó por tener ideas filosóficas totalmente distintas a las griegas, en particular en relación con el principio del tercero excluido. Historiadores de la cultura hindú comentan:

> *"En todas las cuestiones los filósofos budistas llegan a responder desde luego por la afirmación, después por la negación, después de una manera que no es la negación ni la afirmación. A una pregunta como esta, por ejemplo: '¿Buda existe después de muerto?' responde: 'Buda existe después de muerto, Buda no existe después de muerto, Buda no es más existente que no existiendo después de la muerte' "*

(Le Bon, 1901, p.358)

Esta idea de que pudiera darse en Buda la posibilidad de ser y no ser simultáneamente no podría haber sido aceptada por los griegos. En lo expuesto por Parménides y que hicimos referencia anteriormente, ya encontramos esta discusión del ser y del no ser, aunque de características muy distintas. En la racionalidad clásica, "*que el ser es y no puede ser que no sea*", enunciado por Parménides, es algo que surge de las bases pre-racionales (Lizcano, 1993).

Para Aristóteles, el principio de no contradicción es básico e inviolable, mientras que para las filosofías china e india no lo es. Aristóteles afirma:

> *"El principio más firme de todos será aquel con respecto al cual es imposible padecer error. Tendrá que ser el mejor conocido, necesario y no hipotético. Ahora bien, un principio que es necesario aceptar para comprender cualquier ente, no es hipotético. Y lo que es necesario para conocer cualquier ente es necesario que se tenga conocido de antemano".*

(Aristóteles, citado por Lizcano, 1993, p.158)

Esta diferenciación del principio no contradicción por encima de los otros principios lógicos, como ya se observó con anterioridad, se pone en evidencia en la aceptación a priori de que las ciencias deben ser consistentes. En este principio se basa toda la filosofía y la lógica griegas, y a partir de ellos toda la ciencia de tradición griega.

Las bases lógicas de las argumentaciones por reducción al absurdo fueron descriptas por Aristóteles. Este tipo de argumentación se sustenta en dos principios enunciados por Aristóteles: el principio del tercero excluido y el principio de no contradicción. Por una parte, el tercero excluido afirma que vale A o no A, una cosa o su negación; por otra, el Principio de no contradicción dice que no pueden valer A y no A, no pueden ser ciertas simultáneamente una cosa y su negación. De allí que ante una implicación: $H \Rightarrow T$, sea lícito para los griegos suponer que pueda ser $\sim T$, pero al llegar a que $\sim T$ no es compatible con H, o sea que debería ser $\sim H$, como $H \wedge \sim H$ no pueden ser ciertas, entonces no puede ser $\sim T$, y si no es $\sim T$, deberá ser cierta T.

Claramente se observa en el párrafo anterior que si no se acepta el Principio del tercero excluido o el Principio de no contradicción, las argumentaciones por reducción al absurdo carecen de sustento lógico. La matemática occidental que se edificó sobre las bases sentadas por Aristóteles aceptó y utilizó este tipo de argumentación, durante siglos sin cuestionarse, pero estamos en presencia, sin lugar a dudas de una construcción cultural fuertemente cimentada en las ideas aristotélicas.

El absurdo en el aula

> *"La demostración por reducción al absurdo es un método de razonamiento deductivo de especial trascendencia en el quehacer matemático y presenta una problemática epistemológica, cognitiva y*

también didáctica de sumo interés para la investigación en educación matemática”

(Sáenz Castro, 2002, p.48)

La utilización de argumentaciones por el absurdo en el aula de matemática, según investigaciones realizadas (Sáenz Castro, 2002), genera en los alumnos una serie de obstáculos de distinto origen en el aprendizaje de este tipo de demostración. Estas investigaciones reconocen obstáculos en el aprendizaje de la demostración por reducción al absurdo de origen cognitivo, epistemológico y psicológico.

Epistemológicamente, hemos visto que no todas las ideas filosóficas desarrolladas por el hombre aceptan este tipo de argumentación. Desde el punto de vista cognitivo, en el método por reducción al absurdo hay que falsear la tesis como punto de partida y comprender en profundidad el significado de un enunciado condicional.

Desde el punto de vista psicológico, podría decirse que el método de argumentación por reducción al absurdo produce en los alumnos cierto desconcierto, ya que parte de negar lo que se quiere demostrar. Más adelante, en este capítulo se presenta a continuación la visión que tienen los alumnos de la aplicación de esta estrategia de demostración en escenarios académicos de la matemática. Posteriormente se realiza una recorrida en la cual encontramos cómo el absurdo se ha manifestado en la matemática, intentando identificar cuál ha sido su repercusión dentro de esta ciencia.

Es posible considerar a las demostraciones como una práctica social, y más generalmente a las argumentaciones matemáticas, en su visión de construcción sociocultural como una forma de comunicación humana. Ya que por medio de las argumentaciones se busca la fundamentación de los enunciados con el objetivo de que se acepte lo que se expone como válido. Se puede decir que, en general, una demostración está compuesta por argumentos a favor y en contra, o sea refutaciones cuando el interlocutor no solamente expone y comunica, sino que se defiende de posibles objeciones de su interlocutor. En este proceso, se hace uso de formas de discurso habituales en la enseñanza de la matemática se pueden organizar alrededor de tres tipos de representación fundamentales: oral, escrito y gráfico. Estas formas de discurso no siempre se presentan aisladamente en el aula, sino que se combinan para obtener una mejor transmisión del conocimiento matemático. El docente en muchas oportunidades comienza explicando oralmente la idea de lo que quiere demostrar, describiendo algunas estrategias que utilizará, luego cuando va escribiendo la demostración suele utilizar una figura de análisis donde va señalando lo que afirma y matiza en todo momento el lenguaje escrito con el oral. Esta es una típica manifestación de la forma en que se trabaja en el aula de matemática, aún en casos tradicionales, pero es posible observar estas combinaciones de lenguaje no sólo en situación de clase, sino en situaciones extraescolares.

Las figuras de análisis resultan de gran utilidad para la práctica social de la demostración, se recurre a ellas para lograr representaciones generales, pero con el apoyo de un caso, que podríamos decir, es particular. Sin lugar a dudas la ayuda y utilidad de las figuras de análisis se ponen de manifiesto en este y en muchos otros ejemplos de proposiciones en los que la visualización de las ideas puestas en juego permite comprender más rápidamente la demostración propuesta.

Sin embargo, las figuras de análisis dificultan en oportunidades la comprensión de los razonamientos cuando se utilizan argumentaciones por el absurdo, ya que en estos casos se hace difícil el aprovechamiento coherente de las figuras de análisis, pues al comenzar suponiendo que la tesis no se verifica, no es posible realizar una figura de análisis que verifique todas las condiciones impuestas por la hipótesis. Estas dificultades se han investigado en trabajos que fueron reportados (Crespo Crespo, 2005a, Crespo Crespo & Farfán, 2006), en los que se analiza el manejo que realizan un grupo de estudiantes en relación con argumentaciones por reducción al absurdo en escenario de clase y sus opiniones acerca de las figuras de análisis en este tipo de demostraciones matemáticas. En aquella investigación realizada, se puso en evidencia la totalidad de los estudiantes de profesorado de matemática que intervinieron de la misma era capaz de identificar tipo de argumentación al presentárseles demostraciones por el absurdo, y de explicar las bases lógicas que sustentan el uso de este tipo de argumentación en matemática, y más de la mitad del grupo se refirieron correctamente al Principio del tercero excluido y al Principio de no contradicción, siendo además capaces de identificar la aparición de una proposición contrarrecíproca de la dada en el enunciado a lo largo de la demostración.

Pero en relación con la utilización de figuras de análisis en demostraciones por reducción al absurdo, los alumnos que intervinieron de la experiencia, si bien fueron capaces de proponer figuras de análisis que podían responder a la situación planteada en una demostración de Euclides, manifestaron las dificultades del uso de las mismas ocasionada por la necesidad de graficar situaciones que implican inconsistencias debidas a la suposición de la negación de la tesis que se desea demostrar.

La identificación de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios académicos desde la óptica de los estudiantes

a. Objetivos, diseño de la secuencia, destinatarios de la experimentación

En este apartado se presentan los resultados de una experimentación llevada a cabo a partir de encuestas y entrevistas a 50 alumnos de la materia Fundamentos de la matemática de la carrera de Profesor de Matemática y Astronomía del Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González” de Buenos Aires, Argentina. Se trata de estudiantes del último año de la carrera (Cursada: 2005).

En esta etapa de la experimentación se les pidió la búsqueda y detección de situaciones en escenarios académicos (matemáticos y escolares) en las que se utilicen argumentaciones por reducción al absurdo. Por encontrarse en su último año de la carrera, han tenido la oportunidad de encontrar este tipo de demostración en viarias oportunidades a lo largo de sus estudios. Además han estudiado en la primera parte de la asignatura Fundamentos de la matemática, aspectos de la lógica que les dan la base para identificar y justificar los distintos tipos de demostraciones que se utilizan en matemática. Se buscó por medio de esta etapa de experimentación que los estudiantes identificaran algunas de esas situaciones en las que utilizaron argumentaciones indirectas, con el fin de observar en qué ramas de la matemática les resultaron más significativas. Si bien esta era la finalidad principal, se les pidió además que explicaran las características de las argumentaciones por reducción al absurdo para que pudieran enmarcar sus respuestas. Para la presentación de las respuestas, los estudiantes tuvieron un plazo de dos semanas, con la finalidad de que pudieran recurrir a consultas bibliográficas si lo consideraban necesario, pudiendo de esta manera enriquecer su búsqueda.

La pregunta planteada a los alumnos que participaron de esta etapa de la investigación fue la siguiente:

> *Describa y fundamente las características de las argumentaciones por reducción al absurdo. Ejemplifique su utilización.*

La experimentación se completaba con otra pregunta que se refiere a la búsqueda de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos, de cuyo análisis nos ocuparemos en el capítulo 8 de esta investigación.

b. Resultados obtenidos en la experimentación realizada

De las respuestas dadas por los alumnos, surge que los estudiantes entrevistados en su totalidad fueron capaces de describir las características y fundamentos lógicos de las argumentaciones por reducción al absurdo. No tuvieron, en general, dificultades en presentar como fundamentos de las mismas los principios aristotélicos del tercero excluido y no contradicción.

Analicemos algunas de las respuestas presentadas para explicar y fundamentar el método.

> *"La base de este método para establecer la validez de una proposición es la idea de contradicción: la forma de enunciado $p \wedge \sim p$ es contradictoria, pues en su tabla de verdad sólo aparecen 'F', lo cual significa que todos sus ejemplos de sustitución son falsos. Es decir, el método se inspira en la idea de que una contradicción es inadmisible. Si una proposición da lugar a una contradicción, debe ser rechazada.*
>
> *Los pasos para llevar a cabo una demostración con este procedimiento son los siguientes:*
>
> *1º) Se supone que lo que se intenta demostrar es, en realidad, falso. O sea, se supone la falsedad de la conclusión.*
>
> *2º) Se utiliza la hipótesis como una premisa adicional, para producir a partir del supuesto anterior, una contradicción de la forma $p \wedge \sim p$.*
>
> *3º) Se rechaza en vista de semejante resultado (imposible) dicho supuesto.*
>
> *4º) Se puede concluir entonces, luego de haber obtenido la contradicción, que la proposición dada es verdadera"*

Esta alumna describe con claridad los pasos de las demostraciones por reducción al absurdo. En su fundamentación hace hincapié en el Principio de no contradicción, pero no hace referencia al Principio del tercero excluido, aunque lo necesita para poder justificar la aplicación del cuarto paso que describe.

En la respuesta de otra alumna, se puede leer:

> *"Podemos decir que es un tipo de argumentación donde fundamentamos su validez a través de la lógica"*

En esta respuesta se infiere la existencia de una sola lógica, la que por medio de sus principios permite justificar este tipo de argumentación.

Otra respuesta obtenida fue:

> *"En las argumentaciones por el absurdo se comienza negando la tesis a quien se la toma junto con la hipótesis dada como hipótesis provisoria. A través de reglas de inferencia y razonamientos lógicos se llega a una contradicción. Esta se basa en la negación de la hipótesis o alguna parte de ella. Al llegar a esta contradicción se fundamenta el método como válido a través del tercero excluido y del principio de no contradicción".*

Aparece en esta explicación el concepto de hipótesis provisoria. El carácter provisorio de la hipótesis obtenida al agregar la negación de la tesis, no se explicitó en todas las respuestas dadas, aunque todos los estudiantes lo utilizaron en la explicación, ya que afirmaron que la negación de la tesis se asume como una hipótesis más y que una vez que se llega a un absurdo, se descarta la misma asumiendo su negación.

En relación con su fundamentación, resulta interesante la siguiente respuesta:

> *"Los principios lógicos están en el origen de la demostración como condiciones necesarias y verdades evidentes. No se discuten ni requieren demostración. Los principios que gobiernan la deducción lógica fueron establecidos por Aristóteles y en la lógica tradicional son tres: Identidad, no contradicción y Tercero excluido, formulado según la lógica tradicional: 'O A es B o A es no B'. Ahora lo leemos del siguiente modo: 'O p es verdadera o bien su negación'"*

En esta respuesta deben notarse algunos elementos presentes: por una parte aparece la idea aristotélica de la evidencia y no demostración de los principios lógicos, por otra, en la formulación que realiza esta alumna del Principio del tercero excluido (tanto lo que menciona como formulación en la lógica tradicional, como en la que describe como la formulación actual), hace uso de la disyunción excluyente. Con esta formulación está englobando en una sola proposición el Principio del tercero excluido y el de no contradicción.

Otra respuesta obtenida fue:

> *"Este método se inspira en la idea que es crucial para la lógica de que una contradicción es inadmisible. Si una proposición da lugar a una contradicción, entonces debe ser rechazada"*

En este caso la estudiante considera como base explícita de las argumentaciones por reducción al absurdo el principio de no contradicción. El Principio del tercero excluido se encuentra de manera implícita en la respuesta cuando afirma la necesidad de que sea rechazada la proposición que ocasionó la contradicción. La no aceptación de ella conduce para esta estudiante obligatoriamente a la aceptación de su negación.

Algunos de los estudiantes recurrieron aunque sin explicitarlo a la aplicación del Metateorema de la deducción, valiéndose de él para presentar argumentaciones del siguiente tenor:

> *"Una demostración por reducción al absurdo se construye agregando como premisa adicional, la negación de su conclusión y deduciendo entonces una contradicción explícita del conjunto aumentado de las premisas ('se llega a un absurdo'). O sea:*

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \\ \hline C \end{array} \qquad \textit{será válido si} \qquad \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \\ \sim C \\ \hline \text{Contradicción"} \end{array}$$

En algunos casos, tras describir las características de esta estrategia de argumentación, los estudiantes emiten algunos comentarios:

> *"El tipo de demostración razonablemente preferible en matemática es la demostración directa. En la demostración por reducción al absurdo, uno está trabajando gran parte del tiempo con afirmaciones que son falsas, como se va a poner en claro en el último momento de la demostración. Se podría pensar que a uno que no esté atento a la situación se le podría provocar a través de ello una gran confusión de ideas. Pero no siempre es sencillo obtener una demostración directa para un teorema tal como está propuesto."*
>
> *"A mí, personalmente, este valioso instrumento lo aplico cuando agoté todos mis recursos. Me resulta un tanto complejo poder aplicarlo en la demostración de diversos teoremas."*

En relación con los ejemplos de este tipo de argumentación en matemática, es notable que la mayor proporción corresponde a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Quince de los cincuenta estudiantes hicieron referencia a esta demostración que es atribuida a los pitagóricos, descripta por Aristóteles que describe este procedimiento como que procedía por "*reductio ad absurdum*". Se trata de la conocida demostración que hacemos en la actualidad y que fuera incluida en algunas de las antiguas versiones de los Elementos de Euclides, como Proposición 117 del Libro X. Algunos simplemente la nombraron, otros la incluyeron en las respuestas presentadas.

Se encuentran también entre las respuestas dadas otras propiedades aritméticas como, por ejemplo:

> *"El cuadrado de un número par es par"*
>
> *"El producto de dos impares es impar"*
>
> *"El producto de un entero par y un impar es un número entero par"*

> *"Si m y n son enteros tales que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$, entonces n es par"*

En todos estos casos, incluyen la demostración correspondiente y explican la aplicación en la misma de la reducción al absurdo. Ninguno de los estudiantes que propusieron las demostraciones de estas propiedades hace referencia a la posibilidad de demostrar las mismas de manera directa.

También trabajando con aritmética, pero a partir de un sistema axiomático, una alumna propuso como ejemplo la demostración de que a números naturales distintos corresponden siguientes distintos, enmarcada en la definición de Peano para los números naturales:

> *"Teorema: Si $x \neq y$ entonces $sg(x) \neq sg(y)$, $\forall x \in N$, $\forall y \in N$*
>
> *Hipótesis: $x \neq y$*
>
> *Tesis: $sg(x) \neq sg(y)$*
>
> *Demostración:*
>
> *Supongamos $sg(x) \neq sg(y)$, si así fuera, por el Axioma 3: $x = y$, lo cual es absurdo pues contradice la hipótesis.*
>
> *Dicho absurdo provino de suponer $sg(x) \neq sg(y)$, por lo tanto se verifica que son distintos"*

El trabajo en esta demostración dentro del sistema axiomático propuesto por Giuseppe Peano se justifica pues las distintas definiciones de los números son una de las temáticas trabajadas en la asignatura Fundamentos de la Matemática. Esta es una de las propiedades primeras que se demuestran dentro de este enfoque de los números naturales.

También trabajando dentro de la axiomática de Peano, otra propuesta fue la demostración de que si la suma de dos números naturales de nula, ambos deben se cero. Otro ejemplo presentado a partir de la misma axiomática es la unicidad de la suma de dos números naturales.

Aparecen algunas respuestas presentando propiedades algebraicas mediante demostraciones por el absurdo:

> *"Un conjunto de vectores es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal de ellos que da por resultado el vector nulo es la que tiene todos los escalares igual a cero"*
>
> *"En un especio vectorial todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente"*

Ambas propiedades provienen del álgebra lineal. La primera de ellas que involucra una demostración de unicidad.

También se refieren a la unicidad las demostraciones presentadas que provienen del análisis matemático. Los tres alumnos que ejemplificaron con propiedades provenientes del análisis, hicieron referencia a:

> *"El límite de una función es único"*

En las demostraciones de unicidad, es usual la aplicación de argumentaciones por reducción al absurdo, ya que la manera de demostrar que un elemento que verifica ciertas propiedades es único, consiste en suponer que no lo es, por medio de la existencia de otro elemento que tenga sus mismas propiedades y que sea distinto del anterior, para finalmente concluir que la existencia de éste es imposible ya que conduce a alguna contradicción.

En relación a demostraciones provenientes de la geometría, la única que aparece en los ejemplos presentados fue:

> *"Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí*

Hipótesis) m, n, r: rectas

m ⊥ r

n ⊥ r

(Estos son datos, son verdaderos. No se los puede negar)

Tesis) m // n

Demostración) Supongamos que la tesis no es cierta, es decir que m no es paralela a n.

Entonces m ∦ n.

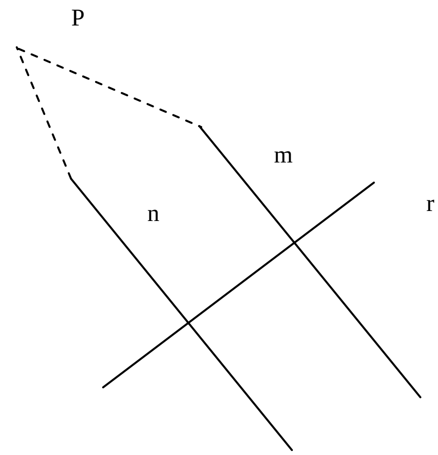


Figura 12: Figura de análisis para demostración por reducción al absurdo

Entonces m y n deben cortarse en un punto.

Supongamos que ese punto es P.

Entonces por P pasan m ⊥ r por hipótesis y *n* ⊥ r por hipótesis.

Esto es una evidente contradicción .pues por un punto P pasa una sola perpendicular a la recta r. Por el axioma de unicidad de la recta perpendicular. Esta contradicción surgió de suponer que m no es paralela a n. Entonces se debe admitir que la suposición fue falsa y que la tesis es cierta: m // n."

Al preguntar acerca de los alumnos acerca de la causa de que la mayor cantidad de las demostraciones por reducción al absurdo presentadas proviene de las áreas del álgebra y de la aritmética (58% de las respuestas obtenidas), en relación a las provenientes de la geometría, algunos de ellos afirmaron que era más clara su aplicación a la aritmética que a la geometría, ya que en esta última rama de la matemática se encuentran en estrecha relación las demostraciones con las figuras de análisis, en las que se presentan algunas dificultades (Crespo Crespo, 2005a, 2005b, Crespo Crespo y Farfán, 2005b).

También en algunas de las respuestas aparecen aplicaciones de argumentaciones por reducción al absurdo a propiedades que involucran el tratamiento del infinito. Por ejemplo:

> *"La unión de un conjunto numerable y un conjunto no numerable es un conjunto numerable"*
>
> *"El intervalo (0, 1) no es numerable".*
>
> *"No existe un número racional mínimo mayor que cero"*

El infinito es uno de los conceptos en la demostración de cuyas propiedades resulta usual encontrar argumentaciones por reducción al absurdo.

Una estudiante hizo referencia a la demostración propuesta por Euclides en Los Elementos para demostrar la existencia de infinitos números primos. Dos hicieron alusión a la demostración propuesta por Cantor para demostrar la existencia de una cantidad no numerable de números trascendentes.

Otra temática en la que aparecieron algunos ejemplos fue en la demostración de que ciertas proposiciones lógicas son paradójicas. En este tipo de argumentaciones, se parte de la suposición de cada valor de verdad para la misma y se demuestra que la proposición en análisis no puede ser ni verdadera ni falsa, pues ambas suposiciones conducen a un absurdo.

Algunos de los alumnos encuestados presentaron ejemplos de razonamientos de la lógica proposicional en los cuales para su demostración se aplican argumentaciones por reducción al absurdo. Estas formas de razonamiento fueron presentadas a través de razonamientos particulares que crearon mediante la interpretación de las proposiciones simples correspondientes. Por ejemplo:

> *"Hipótesis:*
>
> *Si llueve voy a lo de mi tía. (I)*
>
> *Ayer no fui a lo de mi tía. (II)*

Tesis:

Ayer no llovió.

Demostración:

Supongo: 'Ayer llovió' (que es lo mismo que negar la afirmación 'ayer no llovió'). Por lo tanto, puedo afirmar que si ayer llovió, ayer fui a lo de mi tía. Pero al afirmar esto estoy contradiciendo el supuesto (II). Esto no puede ser porque todos los supuestos de la hipótesis son verdaderos.

Como esta contradicción surgió al suponer que la tesis era falsa (o lo que es lo mismo, que no era verdadera), puedo afirmar que la tesis es verdadera, es decir que ayer no llovió, que era a dónde quería llegar".

La forma de razonar esta alumna, en realidad corresponde a realizar una prueba de invalidez del razonamiento que propone. Esta es una estrategia que es usual en nuestros estudiantes para determinar la validez de un razonamiento dado.

Como en el enunciado de la pregunta propuesta para esta etapa de la experimentación no se pidió explícitamente que los ejemplos dados provinieran del campo de la matemática, tanto estos ejemplos como los que mencionamos que analizaban el valor de verdad de paradojas, son correctos, ya que tanto los ejemplos de lógica como de matemática se encuentran dentro de escenarios académicos.

A continuación se presentan los resultados de la experimentación realizada resumida a través de un cuadro en el que se pueden visualizar las cantidades de cada uno de los tipos de ejemplos que se describen:

Ejemplo presentado	**Respuestas**	**Porcentaje**		**Respuestas**	**Porcentaje**
Irracionalidad de $\sqrt{2}$	15	30 %	Aritmética y álgebra	29	58%
Otras propiedades aritméticas	12	24 %			
Propiedades de espacios vectoriales	2	4 %			
Propiedades que involucran el infinito	6	12 %	Conjuntos infinitos	6	12 %
Propiedades geométricas	6	12 %	Geometría	6	12 %
Propiedades de análisis matemático	3	6 %	Análisis	3	6 %
Razonamientos con paradojas	2	4 %	Lógica	6	12 %
Razonamientos en lógica proposicional	4	8 %			

Cuadro 1: Resultados de la experimentación sobre identificación de aplicaciones de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios académicos

c. Algunas conclusiones extraídas de esta etapa de experimentación

A partir de las respuestas obtenidas, es posible, por una parte, identificar que existen algunas ramas de la matemática en las que se hace un mayor uso de las argumentaciones por reducción al absurdo.

La mayoría de los ejemplos presentados por los estudiantes provienen de la aritmética o el álgebra. Los ejemplos provenientes de la geometría fueron escasos. Tal vez influyó en este hecho que en las demostraciones geométricas en las figuras de análisis se pone en evidencia la contradicción de manera gráfica, lo que ocasiona una mayor evidencia del absurdo y la inconsistencia del razonamiento a partir del supuesto de la tesis negada.

Aparecieron varios ejemplos de demostraciones de unicidad. El infinito es un concepto en cuyas propiedades aparece fuertemente la estrategia de argumentación por reducción al absurdo.

Algunos de los estudiantes manifestaron su preferencia hacia las demostraciones directas por encima de las indirectas.

La presencia de ciertas temáticas en las que parece más usual la aplicación de argumentaciones por reducción al absurdo, conduce por una parte a orientar la investigación a la identificación de cuáles son los conceptos y propiedades para cuya demostración fue más usual su aplicación históricamente y por otro analizar cuáles son los conceptos matemáticos para los que se hace indispensable este tipo de demostración.

Las demostraciones por reducción al absurdo en la matemática. Objetos matemáticos y argumentación por reducción al absurdo

Sería imposible hacer referencia a todos los teoremas que se han demostrado en matemática mediante la aplicación de la reducción al absurdo. Sólo se presentarán brevemente algunos ejemplos de interés por sus características o por las repercusiones que han tenido.

Para argumentar acerca de las propiedades de ciertos objetos matemáticos, se hace necesaria la estrategia de argumentación por reducción al absurdo. Ciertas propiedades requieren de su aplicación. Los números irracionales son uno de estos objetos: para demostrar que un número es irracional, se supone que no lo es, por lo tanto es racional, lo que conduce a una contradicción y se concluye entonces que es irracional. Otro de los conceptos que requieren de argumentaciones por reducción al absurdo es la unicidad. Para demostrar que un objeto matemático es único, se supone que existe otro que tenga sus propiedades y es distinto de él, al seguir la argumentación, se arriba a una contradicción: o no tiene las propiedades deseadas o es el mismo elemento original, de donde se concluye la unicidad del mismo. El infinito es otro de los conceptos en cuyas argumentaciones se utiliza la reducción al absurdo. Son múltiples las propiedades para cuya demostración se parte de suponer que la cantidad de elementos que la verifican es finita y tras llegar a un absurdo en el razonamiento realizado, se concluye que no pueden ser finitos y por ende son infinitos los elementos buscados.

También se utilizan argumentaciones por reducción al absurdo para demostrar la no posibilidad de cierta proposición, como en el caso del teorema demostrado por Tartaglia que se presentó anteriormente.

La no aceptación de las argumentaciones por reducción al absurdo, conducen a que estas propiedades no puedan ser demostradas, ya que no existen para ellas demostraciones directas. Los intuicionistas sólo admiten la existencia de aquellos objetos matemáticos que puedan ser construidos de manera finita. Las únicas estrategias válidas de demostración de existencia son aquellas que muestran cuál es el objeto de cuya existencia se habla, aquellas que permiten verlo. Las demostraciones indirectas, sólo muestran para ellos la posibilidad de su existencia, no la garantizan. Las construcciones son posibles sólo cuando se realizan por medio de procedimientos finitistas, o sea por medio de un cálculo finito de signos u operaciones, o bien por medio del principio de inducción completa. La inclusión de este principio, permite las demostraciones de propiedades de los números naturales como objetos individuales. Quedan excluidas de la matemática, todas las propiedades que involucren clases infinitas consideradas en su totalidad. Por ejemplo, no se admiten como verdaderas propiedades que contengan expresiones como: “*Toda clase*”, “*La clase de todos los números primos*”, y menos aún: “*La clase de todas las clases*”. Esto hace que se evite la aparición de ciertas paradojas, como la de Russell. En relación a los números, sólo reconocen como tales a aquellos para los que existe una sucesión finita de operaciones que los genere, por más que dicha cantidad sea muy grande. De esta manera, se pierden los números irracionales, si bien es posible encontrar números racionales próximos a ellos. En cuanto a los enunciados de existencia, sólo aceptan aquellos que exhiben el elemento cuya existencia postulan. No son justificadas las pruebas de existencia por reducción al absurdo, ya que no permiten individualizar los objetos cuya existencia postulan, por no considerarlas efectivas.

El infinito es también concebido de manera distinta a cómo lo hace la matemática actual. Los intuicionistas se oponen a la existencia del infinito actual, considerándolo como algo inconcebible.

El absurdo como generador de conceptos matemáticos o la sensibilidad a la contradicción

En un texto de los Bourbaki, encontramos:

> *"La ausencia de contradicción ha sido siempre considerada como una condición 'sine qua non' de toda la matemática, y, ya en la época de Aristóteles, la lógica había avanzado lo suficiente para que se supiera perfectamente que dentro de una teoría contradictoria se puede deducir cualquier resultado"*

(Bourbaki, 1976, p.62)

A lo largo de la historia de la matemática la comunidad científica se ha encontrado en algunas oportunidades frente a contradicciones y absurdos provenientes de ciertas suposiciones realizadas. Ante ellos, las actitudes de la comunidad científica no han sido siempre iguales: una actitud posible es buscar de dónde proviene la contradicción, negar aquello y de esta manera impedir el surgimiento de la contradicción; esto es lo que se hace en una argumentación por reducción al absurdo. Otra actitud diferente consiste en comenzar la construcción de nuevos objetos matemáticos en los cuales esa contradicción no se genere, y que involucren los objetos anteriormente construidos.

Algunas investigaciones (Cantoral & Farfán, 2004) reportan una investigación relativa al tratamiento de la contradicción en matemática, referida en particular al origen del análisis complejo. Esta investigación fue realizada desde una perspectiva socioepistemológica en la que se reconoce claramente el conocimiento como fruto de la interacción entre epistemología y factores sociales. Este trabajo se centra en los orígenes de la variable compleja como dominio autónomo en el campo de la matemática, surgida como consecuencia de la pretensión de extender la definición clásica de logaritmo de números positivos a la de logaritmo de números negativos. Durante cuatro décadas del siglo XVIII, esta problemática generó una controversia en la que intervinieron Gottfried Leibniz, Jacob Bernoulli, Leonhard Euler y Jean D´Alambert. La controversia está documentada a partir del intercambio epistolar entre Leibniz y Bernoulli que inician la discusión en un momento en el cual la definición de logaritmo de números positivos y su operatoria se habían desarrollado satisfactoriamente. La posición de Leibniz se orienta en un principio a invalidar la posibilidad de existencia de logaritmos de números negativos, mientras que Bernoulli se orienta a detectar cuáles serían sus propiedades si existieran, intentando extender la definición a partir de la existente para números positivos. Por otra parte, a partir del intercambio entre Euler y Bernoulli, surge la necesidad de fijar la atención en ciertos puntos del edificio matemático, como el concepto de función, para que fuera posible la extensión de la teoría existente. La posición de Euler se orientó a facilitar el surgimiento de una teoría que si bien fuera capaz de extender ciertas ideas existentes, incluyera el tratamiento de otras como las infinitas soluciones de una ecuación algebraica de grado infinito. La posición de Bernoulli se orientaba más a la necesidad de conservar el cuerpo teórico clásico como sustento de una extensión teórica. A partir de estos debates se inició la construcción social de la variable compleja. Esta controversia muestra claramente la existencia de diversas reacciones de la comunidad científica frente a una contradicción. El análisis de la sensibilidad a la contradicción se muestra como una búsqueda de la coherencia interna del aparato matemático. Las distintas argumentaciones reflejan en el debate la influencia de diversas justificaciones, creencias y criterios de validez, y la manera en la que se construyen los conceptos matemáticos como parte de la actividad matemática en la que se conjugan distintas acciones sociales.

La definición de conceptos matemáticos es de esta manera presentada como resultado de un proceso de interacción social en el que se conjugan la reflexión y la crítica en aras de consolidar un saber establecido como construcción sociocultural y mantener la coherencia del aparato matemático existente en el cual la epistemología tuvo un papel fundamental.

> *"Criterios que han de surgir como base del debate, la justificación, la argumentación y contra argumentación son mecanismos para el consenso social, este es quizá el motivo de la construcción de verdaderas herramientas culturales para aceptar un resultado como válido al senos de una teoría"*
>
> (Cantoral & Farfán, 2003, p.15)

Existen otros ejemplos en los que puede observarse a lo largo de la historia, la manera en la que una contradicción o el hallazgo de un absurdo dentro de la matemática permite conducir a la construcción de un contenido matemático para lograr mantener la integridad de esta ciencia. Uno de ellos, quizá el más conocido es el descubrimiento de los segmentos inconmensurables.

Si nos remontamos a la matemática pitagórica, en la que se partía del pensamiento básico de que el número es el principio que rige el universo, se observa que la filosofía reinante en la sociedad matemática intenta explicar el mundo a través de la armonía de las proporciones. Los objetos concretos dependen de las propiedades de los objetos no empíricos. Por ejemplo, las longitudes de las cuerdas que se hallan en relación de números enteros y pequeños, dan lugar a sonidos armoniosos. En medio de este escenario surge un absurdo que ocasiona el desconcierto de la comunidad científica y desestabiliza el edificio matemático construido hasta ese momento. Lamentablemente no se tiene acceso a las discusiones e intercambios de ideas de la época para poder analizar las argumentaciones y fundamentos presentados en las mismas, como ocurre en el intercambio epistolar entre Leibniz, Bernoulli y Euler, presentado en (Cantoral & Farfán, 2004). Para Pitágoras y sus discípulos, los puntos no eran adimensionales, sino que tenían extensión (Klimovsky & Boido, 2005). A partir de esta idea y combinándola con la explicación de la armonía, dos segmentos cualesquiera deben ser conmensurables, o sea que si un segmento se divide en cierto número de partes, denominadas partes alícuotas, éste puede ser considerado como la acumulación o suma de esas partes alícuotas. Si se trata de n partes alícuotas, se está pensando en cada parte alícuota como una unidad, siendo n la medida de la longitud del segmento dado. La conmensurabilidad de dos segmentos significa que es posible encontrar alguna unidad de medida común a ambos, o sea alguna parte alícuota que es común a ambos. Pitágoras suponía que dados dos segmentos cualesquiera, siempre serían conmensurables. Sin embargo, descubrió que si se traza un cuadrado de lado 1, su diagonal que por la aplicación del teorema de Pitágoras es tal que el cuadrado de su longitud vale 2, no es conmensurable con el lado del cuadrado, o dicho de otra manera, ninguna fracción corresponde a un número cuyo cuadrado es 2. Esto se contradecía claramente con la teoría de la existencia de puntos con extensión. El descubrimiento de un segmento que no se puede escribir como cociente de dos segmentos dados, produjo una crisis en la sociedad matemática. Suele mencionarse ésta como la primera gran crisis de los fundamentos de la matemática. Según llega a nosotros, la contradicción inmovilizó a la sociedad matemática, se dice que intentaron ocultar el descubrimiento pues conspiraba en contra de la estabilidad de la teoría sustentada, contra una cosmovisión regida por la omnipotencia del número, esencia de todo el universo. Sin embargo, no todos los habitantes de este escenario deben haber actuado de la misma manera. Algunos deben haber seguido analizando tal contradicción intentando construir un concepto matemático que permitiera seguir dando sustento a la teoría desarrollada y que permitiera incorporar el emergente de esta contradicción como algo coherente dentro de la nueva teoría. De esta contradicción puesta de manifiesto en la escuela pitagórica, surge la teoría de los inconmensurables. Posteriormente, los inconmensurables darán paso a los números irracionales. Euclides dedica el libro X de los Elementos a los inconmensurables. Este libro se conoció a partir de Simón Stevin como "*la cruz de los matemáticos*" (Euclides I-V, 1991, p.88), debido a que durante mucho tiempo se lo vio como lleno de "*dificultades sin provecho*". Se concentra en el estudio de tipos y criterios de inconmensurabilidad y conmensurabilidad y de líneas recta (segmentos) racionales e irracionales en cuadrado. La presentación y tratamiento que realiza Euclides de los inconmensurables y los irracionales es a partir de objetos geométricos y con una perspectiva métrica, no operado con estos o describiendo estructuras generales del cálculo. Se supone que Euclides recoge en este capítulo investigaciones "relativamente recientes" de Teeteto, Eudoxo y Hermótimo. Frente a la aparición de un absurdo en la matemática, la reacción de los matemáticos puede ser diversa. Una opción es permanecer inactivo, aterrado ante la contradicción, como ocurriera a los pitagóricos al encontrar a $\sqrt{2}$. Esta reacción no conduce a construir conocimiento, sino a conservar la coherencia del edificio matemático que se ha construido con anterioridad.

Otras formas de reaccionar son activas: se construye una nueva teoría, un nuevo objeto matemático si fuera necesario. En esta construcción se intenta respetar la consistencia anterior e incorporar algo que permita manejar el objeto que ocasionó la contradicción. Eso ocurrió con los matemáticos posteriores a Pitágoras, al generar las teorías de los inconmensurables y posteriormente ser capaces de definir los números irracionales.

Sin embargo, cualquiera de las posibles reacciones frente a una contradicción, están conducidas por el deseo de que la ciencia mantenga su coherencia, o como lo expresara el lógico polaco Jan Łukasiewicz:

> *"Los griegos se asombraron al descubrir que la diagonal y el lado de un cuadrado eran inconmensurables. El asombro es un estado psicológico de naturaleza a la vez intelectual y emocional. Hay otros estados semejantes a él, como pueden ser la curiosidad, el temor a lo desconocido, la incredulidad, la incertidumbre. Hasta ahora no han sido estudiados de una manera completa, pero basta con un análisis sumario para percatarse de que todos ellos*

conllevan, junto a factores emocionales, un elemento intelectual que no es sino un deseo de conocimiento.”

(Łukasiewicz, 1912, p.6)

Acerca de absurdos e imposibles: concepciones de los alumnos

Los conceptos de absurdo e imposible, se encuentran relacionados, al menos en la visión aristotélica de la matemática. A lo largo de esta investigación, y a raíz de respuestas dadas por alumnos, surgió la pregunta acerca de si para la visión estudiantil, ambos conceptos se encontrarían o no relacionados y de qué manera. Por ello, se provocó un diálogo con dos estudiantes de segundo año de Profesorado de Informática. La idea de esta conversación fue indagar acerca de las concepciones acerca de estos conceptos. Intervinieron en esta conversación la profesora P del curso y dos de sus estudiantes, a quienes nos referiremos como A1 y A2. A1 ha cursado previamente algunos años de la carrera de ingeniería que abandonó al comenzar su carrera actual, A2 ingresó en el profesorado de informática al finalizar sus estudios secundarios.

P: ¿Es lo mismo absurdo e imposible en matemática?

A2 y A1: No

P: ¿Por qué?

A1: Un absurdo es algo que se contradice, que nos lleva a una contradicción, a firmar una cosa y su negación, como diríamos en lógica, a p y no p.

Claramente este estudiante está haciendo referencia al Principio del tercero excluido en la afirmación anterior.

El diálogo continúa de la siguiente manera:

P: Y un imposible, ¿qué es?

A1: Es algo que no se puede hacer.

P: ¿Por qué?

A1: Porque no se puede, porque está mal.

P: ¿Por ejemplo?

A1: Dividir por cero, hacer cero a la cero,...

A2: Sí, o sacar raíz a un negativo.

P: Vamos por partes: ¿Por qué no puedo dividir por cero?

A1: Porque no, el divisor debe ser distinto de cero.

P: ¿Por qué?

A2: Mirá (toma su calculadora y escribe: 2 % 0 =): ¿Ves? Da error, no se puede.

A1: Además siempre nos lo dijeron: no puedo hacer algo dividido cero.

P: ¿Y si pienso conceptualmente? ¿Qué problema traería dividir por cero?

A1: Da infinito. ¿Te acordás cuando vimos límite? Da infinito, pero infinito no es un número... por eso no se puede...

P: Dijeron también que es imposible cero a la cero. ¿Por qué?

A2: (Marca en la calculadora 0 ^ 0): ¿Ves? Da error también, no se puede.

A1: Además, ¿no era que daba dos resultados y entonces como no se pueden tener dos resultados, dicen que es imposible?

P: ¿A qué te estás refiriendo?

A1: Un número elevado a la cero da uno. Cero a cualquier cosa es cero. Entonces daría cero y uno y como no pueden estar bien las dos, los matemáticos dicen que ninguna.

P: ¿"Dicen"?

A1: Sí, dicen que es imposible hacer cero a la cero. Tal vez dentro de un tiempo descubran cuál está bien y digan que es eso.

En relación a los imposibles, surgieron algunas ideas que nos parece interesante comentar. El imposible es unido a la acción por estos estudiantes, el absurdo se había presentado a través de una concepción más pasiva, la de presencia de una contradicción, pero en este caso, se dice explícitamente que es algo que no se puede hacer, y se da como ejemplo la división por cero o elevar cero a la cero. Los argumentos acerca de por qué es imposible, son de orígenes variados: tecnológicos o matemáticos.

En particular, retomando el ejemplo de la potencia de exponente nulo para el cero, y ante la respuesta dada en relación a la no posibilidad de existencia de dos respuestas correctas, la docente decidió preguntar:

P: ¿Cómo podría verse cuál está bien?

A1: Harán un teorema y listo.

A2: Pero, ¿y las calculadoras? Habría que corregirlas.

A1: Sí, se hacen nuevas y se tiran las viejas.

A2: ¡No!

P: ¿Y en qué se podrán basar para ver cuál está bien?

A1: No sé, pero harán un teorema y listo.

La pregunta inicial de este fragmento apuntaba a ver la visión de ciencia que estaban manejando los alumnos y de esta manera cuáles identificaban como mecanismos de validación de resultados. Por una parte, surgió la idea de que en matemática los teoremas son los depositarios de la verdad, pero su surgimiento no es visto como algo natural, sino artificial y necesario para dar una respuesta de corrección. En el estudiante que transfiere a la tecnología la autoridad, la preocupación sigue siendo qué ocurrirá con las calculadoras, sin embargo el otro alumno al priorizar la ciencia a la tecnología, confía que ésta será la responsable de dar una respuesta al respecto.

A continuación, se retomó otro de los ejemplos de imposibles que habían mencionado los estudiantes, para analizar si era posible aprortar una ampliación de las ideas vertidas:

P: ¿Me dijeron ustedes también que es imposible extraer raíces cuadradas de números negativos?

A2 (Toma de nuevo su calculadora: - 4 √): ¿Ves? También da error, no se puede.

P: Pero, ¿no estudiaron ustedes que la raíz cuadrada de -4 es 2i?

A2: ¡Pero no es un número!

P: ¿Cómo?

A1: Es un número complejo.

P: ¿Y no es un número?

A1: Sí, pero no.

P: ¿?

A1: Los crearon para poder hacer cuentas, pero no son números.

P: Dijiste que era un "número complejo". Entonces, ¿es un número o no?

A1: Sí, perdón. No quise decir eso.

A2: Pero no son reales y por eso en la calculadora no se puede...

P: Entonces, ¿es imposible o no extraer raíces cuadradas de números negativos?

A1: No, no es imposible. Eso se puede, lo que pasa es que cuando éramos chicos, nos decían que era imposible porque no sabíamos complejos. Entonces era absurdo pensar que un número, de los que conocíamos, elevado al cuadrado diera negativo.

En las respuestas dadas, se puso de manifiesto, algo que ya se había esbozado anteriormente en el diálogo: una concepción dinámica de la ciencia. Indirectamente, es posible vislumbrar en el alumno A1, la visión de que con los conocimientos construidos en cierto momento, algo puede conducir a una contradicción, pero que posteriormente es posible construir conocimiento que dé una respuesta al respecto. Apareció de cierta manera la sensibilidad a la contradicción como generadora de conocimiento matemático.

La docente intentó retomar las ideas que habían dado origen a la conversación, para clarificar ciertas ideas:

P: Volvamos a lo que pregunté al principio: ¿Es lo mismo absurdo e imposible en matemática? ¿Qué relación hay entre ellos?

A1: No, hay absurdos que causan imposibles, pero hay imposibles que van más allá: hay cosas que no se pueden, que son imposibles por otras causas, a lo mejor porque no sabemos.

P: ¿Y todo lo absurdo conduce a un imposible?

A1: No, por ejemplo, en geometría o en lógica, los absurdos me dicen que la propiedad de la que partí no es cierta y entonces razonamos por el absurdo.

P: ¿Y eso no es que en cierta manera es imposible?

A1 (queda pensando en silencio...): Que es imposible que sea cierta, pero no me impide hacer algo, no me da una operación imposible, ahí no opero, sólo pienso.

Como resumen del diálogo anterior, es posible extraer algunas conclusiones acerca de la visión que tienen los alumnos no matemáticos, en este caso, estudiantes de la carrera de informática, acerca de los absurdos y los imposibles en matemática:

- √ Identifican el absurdo unido a la idea de contradicción lógica.
- √ Los imposibles son pensados como algo "que no se puede hacer".
- √ La concepción de absurdo es estática, unidad al pensamiento; mientras que la de imposible se une a la acción, a operar.
- √ En el caso de A2, con características y formación más tecnológica, une lo imposible con lo que la calculadora responde "error". Se trata de una visión operatoria de la matemática. El imposible se refuerza con un criterio de autoridad que podríamos considerar de carácter tecnológico: la calculadora es la autoridad para él. Le transfiere al recurso tecnológico la autoridad.
- √ Presentan tres ejemplos de imposibles: dividir por cero, elevar cero a la cero, extraer raíces cuadradas de números negativos.

  El primero es asumido como un imposible por definición, no se puede dividir por cero pues el resultado no sería numérico.

> En el segundo caso, resultan interesantes las dos posiciones: A2 se restringe a la respuesta de la calculadora, no amplia. A1, por el contrario, explica la imposibilidad de existencia de dos resultados y deja abierta la posibilidad de que estudios posteriores de matemáticos decidan qué resultado es correcto y generen un teorema. Su visión de la matemática es dinámica, tiene en cierta manera la visión de que puede haber construcciones a partir de un absurdo, de la sensibilidad a la contradicción. No le preocupa el hecho de que haya que diseñar nuevas calculadoras. Identifica a los recursos tecnológicos como generados a partir de las necesidades de la ciencia. La visión de A2, es totalmente distinta: para él la respuesta de la tecnología es científica.
>
> En relación a las raíces cuadradas de números negativos, A2 sigue manteniendo su respuesta sobre el resultado de la calculadora y no interviene en el resto de la discusión. A1, reconoce finalmente la construcción de los números complejos y sus características.

La visión de absurdos e imposibles dentro de la matemática, puesta en evidencia a partir del diálogo presentado, es que no son identificados por los estudiantes no matemáticos. No existe para ellos una identificación, como existiría desde el punto de vista de la lógica aristotélica: una contradicción genera en ella un absurdo, y deriva de inmediato en la imposibilidad de haber afirmado la proposición inicial. Se puede afirmar que esta visión del absurdo dista bastante de la asumida de la posición de Aristóteles. No se encuentra relacionada con los principios aristotélicos.

Sin embargo, parece como si dentro de la matemática construida por la comunidad matemática con influencia aristotélica, sólo tuviera cabida el respeto a esos principios y la construcción del edificio matemático sustentado en ellos. Esto conduciría a pensar que nuestra matemática deberá seguir avanzando, al menos por ahora, siempre en esa línea. El capítulo siguiente abrirá posibilidades al respecto; se propone mostrar cómo aún dentro de la comunidad matemática con influencia aristotélica, fue posible construir elementos básicos para lógicas que no concuerdan con la aristotélica.

Capítulo 7

La no aceptación del principio del tercero excluido en la lógica desde la visión matemática

El surgimiento de las lógicas no clásicas se ha debido a la necesidad de modelizar situaciones de la vida real que escapan al análisis de la lógica clásica. El pensamiento del ser humano no siempre está regido por las leyes y principios enunciados por Aristóteles.

La matemática actual se sustenta en la lógica clásica, ya que sus propiedades han sido demostradas bajo esta lógica. Sin embargo, no siempre ha sido la lógica clásica capaz de dar una respuesta a la modelización de algunas situaciones cuyo surgimiento se dio aún dentro de la matemática que podríamos denominar "clásica". En la vida cotidiana, las afirmaciones que se realizan no corresponden en muchas oportunidades a propiedades bivalentes, ni los razonamientos tienen características aristotélicas.

Uno de los tipos de lógica no clásica que surgieron son las lógicas polivalentes, y dentro de ellas las más sencillas, pero que sirven de sustento a otras son las lógicas trivalentes. Resulta interesante analizar el aspecto semántico de los distintos conectivos definidos en las lógicas trivalentes desde la óptica de la matemática. Surgieron para ofrecer alternativas a la semántica bivalente de la lógica clásica. Su aparición se originó desde la semántica y el tratamiento sintáctico fue posterior a su creación. Esta visión permite comprender que algunos aspectos de esta ciencia y su enseñanza pueden enfocarse desde el punto de vista de las lógicas no clásicas, tan utilizadas actualmente en campos de aplicación de la ciencia y la tecnología.

Algunos conceptos básicos de la lógica clásica

La lógica clásica se ha formalizado a través de muchos sistemas lógicos formales a lo largo de la historia. Desde la época de Aristóteles, el hombre ha tratado de estudiar y sistematizar las formas correctas de pensar, de razonar, de inferir resultados y afirmaciones en las ciencias. Tanto la lógica simbólica, como la lógica clásica se refieren a lo principios generales del razonamiento. La diferencia básica entre ellas es que la lógica clásica, sistematizada por Aristóteles, elaborada por los pensadores medievales y enseñada durante siglos en la educación media y superior, utiliza como símbolos, palabras; mientras que la lógica simbólica utiliza un conjunto de signos especiales. A causa de esta notación especial y precisa y del consiguiente cuerpo de reglas para operar con esta notación, se llama frecuentemente a la lógica simbólica: lógica matemática, pero uno de sus principios es la generalidad, sus principios no pertenecen de modo exclusivo a esta ciencia, sino que se los ha entendido como principios propios del pensamiento humano. Esta visión tiene indudable influencia de la visión aristotélica del hombre.

El tema medular de la lógica simbólica es la lógica misma, es decir, los principios que rigen la validez de la inferencia. La lógica ha sido siempre un intento de modelizar matemáticamente el comportamiento de ciertas clases de objetos y las leyes que rigen sus relaciones, para así seguir mejorando su conocimiento y el de las leyes que rigen sus relaciones.

La lógica clásica tiene ciertas propiedades representativas que la caracterizan y que fueron sustentadas por Aristóteles y sus seguidores y, que se han mantenido vigentes desde él hasta nuestros días en el pensamiento occidental. La lógica clásica es:

- *Apofántica*: Deja fuera enunciados de los que no quepa preguntar si son verdaderos o falsos.
- *Bivalente*: Sólo admite dos valores de verdad: verdadero y falso.
- *Asertórica*: Excluye la existencia de modalidades de verdad. No existen graduaciones de los valores, como podría ser: muy verdadero, algo verdadero, muy falso, casi falso, etc.
- *Extensional*: Opera sólo en términos de la verdad global de sus expresiones. Cada proposición mantiene en todo el discurso su valor de verdad, no es posible que por alguna causa ésta cambie de valor de verdad en medio del discurso.

Se dice que un sistema es *divergente* de otra si incorpora el vocabulario del primer, pero tiene un conjunto diferente de teoremas o inferencias válidas. Un sistema es *extensión* de otro si contiene nuevo vocabulario, además del compartido y tiene nuevas inferencias que esencialmente se refieren al nuevo vocabulario. A partir de estas definiciones, se considera que una lógica divergente es un sistema que difiere de la lógica clásica una lógica es una extensión si extiende a ésta.

Una lógica puede ser a la vez una extensión y una divergencia de la lógica clásica: puede añadir nuevo vocabulario y por lo tanto nuevos teoremas y al mismo tiempo diferir de la lógica clásica en lo que respecta a inferencias que contienen esencialmente sólo el vocabulario incorporado. Las lógicas polivalentes son divergentes: si bien incorporan nuevos términos e inferencias a la clásica, carecen de ciertos principios y teoremas de la misma, como es el caso del principio del tercero excluido.

El surgimiento de las lógicas no clásicas

Aristóteles en la *Metafísica* enunció el principio del tercero excluido de la siguiente manera:

> *"Tampoco puede haber un término medio entre afirmaciones contrarias, y respecto a una cosa debemos afirmar o negar algo, cualquiera que sea"*
>
> (Citado por Guétmanova, 1986, p.124.)

Este principio se basa claramente en que para Aristóteles cada proposición puede tener sólo uno de dos valores de verdad: verdadero o falso. A pesar de que todo el desarrollo de la lógica en Occidente se basa fuertemente en la afirmación de que toda proposición es verdadera o falsa, ya sustentada por Aristóteles, podría decirse que el primero en detectar la existencia de enunciados a los que es imposible asignar uno de estos dos valores, fue el mismo Aristóteles, que analiza, el enunciado:

"*Mañana habrá una batalla naval*"

Si se quiere determinar si se trata de una proposición verdadera o falsa, será necesario esperar al día de mañana. Sólo entonces y cotejando con la realidad, se podrá estar en condiciones de saber si se trató de una proposición verdadera o falsa. Sin embargo, se trata de una proposición pues tiene un valor de verdad: es verdadera o es falsa, lo que ocurre es que no se puede saber su valor de verdad hasta que pase el tiempo propuesto. Si es verdadera la proposición, sería necesaria la batalla naval, entonces el futuro está determinado. Lo mismo ocurre si es falsa. Aristóteles dio a este tipo de enunciados el nombre de *futuros contingentes*. Para salvar el escollo de determinar su valor de verdad, las excluyó del conjunto de enunciados con los que trabaja la lógica, no les dio el status de proposición. Se basó para hacerlo en la consideración de que como la lógica es para Aristóteles el sustento de las ciencias y los enunciados de las ciencias son verdaderos o falsos más allá del tiempo, las ciencias no trabajan con futuros contingentes y por ello la lógica no necesita dar una respuesta a su valor de verdad. Los epicúreos, que tenían una visión no determinista del mundo, en la que no tenía cabida la bivalencia y por lo tanto el principio del tercero excluido. Para ellos los futuros contingentes no debían ser descartados. Sin embargo, los estoicos mantuvieron una visión rígidamente determinista y apoyaron la posición de necesidad de la bivalencia.

La idea de otros valores de verdad, además de los dos valores verdadero y falso clásicos, es central para las lógicas polivalentes. El primer paso es la consideración de un valor de verdad de cierta manera intermedio entre el verdadero y el falso. Desde el punto de vista histórico, en la Edad Media el problema de los futuros contingentes y sus posibles valores de verdad fue abordado por tanto lógicos europeos como islámicos (Rescher, 1969). Guillermo de Occam (1298-1349), en la *Summa Teológica*, al comentar esta obra aristotélica, parece llegar a un sistema trivalente, en el que el valor de verdad de estos enunciados es tratado a través de un valor neutro al esbozar tablas de verdad.

La concepción de modalidad de valores de verdad para las proposiciones también dio origen a otro tipo de lógicas no clásicas denominadas lógicas modales, en las cuales algo no es sólo verdadero o falso, sino que aparecen modos de verdad o falsedad para cada proposición (necesariamente verdadero, posiblemente verdadero, necesariamente falso, posiblemente falso). Otras lógicas no clásicas que surgieron son las denominadas lógicas probabilísticas, en las que los valores de verdad toman valores que son regidos por las leyes de la teoría de las probabilidades.

Las lógicas polivalentes

Un sistema es n-valente si n es el menor número de valores que tiene cualquier tabla de verdad característica de dicho sistema. En las lógicas polivalentes se mantiene $n > 2$ por lo que las bivalentes no se designan como polivalentes, por lo general. Aunque solamente hay un sistema de lógica bivalente en el sentido amplio del término, surgen para las lógicas polivalentes, sistemas alternativos que llevan a valores distintos para las fórmulas compuestas. Esto significa que los conectivos en la lógica bivalente tienen una sola definición posible, mientras que en las lógicas polivalentes, hay distintas definiciones posibles, dependientes de la interpretación de los valores de verdad intermedios. Estas interpretaciones dependerán de los significados que se otorguen a los valores intermedios de verdad. Las lógicas polivalentes son divergentes; si bien incorporan el vocabulario de la lógica clásica, carecen de ciertos teoremas de la misma, tales como el principio del tercero excluido. Algunas añaden también nuevo vocabulario entrando entonces en la categoría de extensiones.

Los significados del tercer valor de verdad en las lógicas trivalentes

A continuación presentamos algunas de las lógicas trivalentes que surgieron dando algún fundamento epistemológico que sustenta la interpretación semántica del tercer valor de verdad.

a. Lógica trivalente de Łukasiewicz

Jan Łukasiewicz fue el primero en publicar su propuesta de tratamiento de una lógica trivalente (Rescher, 1969). Este matemático polaco centró su trabajo en la lógica matemática y reportó en 1920 una manifestación de supremacía de la lógica trivalente por encima de la lógica bivalente, proponiendo su generalización a lógicas polivalentes con incluso una cantidad infinita de valores de verdad, basada en trabajos suyos anteriore. Para Jan Łukasiewicz, la disputa acerca de la bivalencia de la lógica tiene un trasfondo metafísico: los que la afirman son decididos deterministas, los que no, tienen una visión indeterminista del mundo. En su escenario científico, tuvo influencia de las ideas de Russell, en cuanto a las contradicciones que introducía la lógica y a los estudios de las vaguedades del lenguaje.

La visión de ciencia de Łukasiewicz, difiere de la aristotélica:

> *"La creatividad poética no difiere de la creatividad científica en que encierre mayor cantidad de fantasía. Cualquiera que, como Copérnico, haya cambiado a la Tierra de posición y la haya enviado a hacer revoluciones en torno al Sol, o que, como Darwin, haya percibido en las nieblas del pasado las transformaciones genéticas de las especies, puede codearse con el mayor de los poetas. Pero el científico difiere del poeta en que, en todo tiempo y lugar, razona. No necesita ni puede justificarlo todo, pero todo lo que afirme tiene que ligarlo mediante lazos lógicos en un todo coherente. El fundamento de ese todo consiste en juicios acerca de hechos, y ello sostiene la teoría, que explica, organiza y predice hechos. Así es como se crea el poema de la ciencia."*

(Łukasiewicz, 1912, p.13)

Esta visión de ciencia, en la que se conjugan la creatividad y la razón, permitieron a Łukasiewicz imaginar más allá de la lógica clásica y dar una interpretación al valor de verdad de los futuros contingentes. Él mismo reconoce que en su intento de modificar el concepto de ciencia basado en la lógica aristotélica, se vio obligado a forjar armas más poderosas que esa misma lógica, para poder vencer la "coerción de la lógica" que había sido impuesta por Aristóteles y por Euclides. (Łukasiewicz, 1918).

Interpretó el tercer valor como ***"indeterminado"*** o ***"posible"***, atribuible a los enunciados futuros contingentes descriptos por Aristóteles, y obtuvo un "*sistema tan coherente y consistente como la lógica aristotélica, pero más rico en leyes y fórmulas*" (Łukasiewicz, 1918, p.16). Según el criterio aristotélico, los enunciados sobre el futuro no son verdaderos ni falsos, bajo pena de verse empujado hacia el fatalismo. El razonamiento de Łukasiewicz se puede esquematizar de la siguiente manera:

> *"Yo puedo asumir sin contradicción que mi presencia en Varsovia en un cierto momento en el año próximo, por ejemplo en la noche del 21 de diciembre, está en el presente determinado de manera ni positiva ni negativa. Ya que es posible pero no necesario que yo esté presente en Varsovia en el tiempo dado. Sobre esta afirmación, la proposición 'Yo estaré en Varsovia en la noche del 21 de diciembre el año próximo', no puedo en el presente decir que es ni verdadera ni falsa. Porque si fuera verdadera hoy, mi futura presencia en Varsovia debería ser necesaria, que es contradictorio con la afirmación asumida. Si fuese falsa ahora, por otra parte, mi futura presencia en Varsovia debería ser imposible, que también es contradictorio con la afirmación asumida"*
>
> (Łukasiewicz, citado por Rescher, 1969, p.23)

La única manera de evitar esta conclusión fatalista, argumenta Łukasiewicz es rechazar la bivalencia.

Para cada interpretación de los valores de verdad intermedios en una lógica trivalente, será necesario definir las tablas de verdad para poder determinar la manera en la que se evalúan las proposiciones compuestas en esa lógica. Las funciones de verdad correspondientes a las proposiciones compuestas en la lógica trivalente de Łukasiewicz, pueden explicitarse de la siguiente manera:

Negación:

$$v(\sim p) \quad = 1 - v(p)$$

p	**~p**
0	1
1/2	1/2
1	0

Cuadro 2: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Łukasiewicz

Conjunción:

$$v(p \wedge q) \quad = \text{mín}\ (v(p)\ ,\ v(q))$$

p	**q**	**p∧q**
0	0	0
0	1/2	0
0	1	0
1/2	0	0
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Disyunción

$$v(p \vee q) \quad = \text{máx}\ (v(p)\ ,\ v(q))$$

p	**q**	**p∨q**
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1
1	0	1
1	1/2	1
1	1	1

Cuadro 3: Tablas de verdad de la conjunción y disyunción según lógica trivalente de Łukasiewicz

Implicación

$$v(\ p \Rightarrow q\ ) \quad = \text{mín}\ (1,\ 1 - v(\ p\ ) + v(\ q\ ))$$

p	**q**	**p⇒q**
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 4: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Łukasiewicz

Ni el principio del tercero excluido ni el de no contradicción se cumplen, de forma que ninguna es una ley en esta lógica; "$p \vee \sim p$" y "$\sim(p \wedge \sim p)$" toman el valor 1/2 cuando p lo toma.

b. Lógica trivalente de Bochvar

El matemático ruso D. A. Bochvar propone en 1939 una lógica trivalente con el objeto de resolver el problema planteado por la existencia de paradojas semánticas, o sea de proposiciones que no tienen valor de verdad en la lógica clásica porque al ser verdaderas deben tomar el valor falso y por otra parte al suponérselas falsas, se conduce a tomar el valor verdadero. Un ejemplo de este tipo de proposiciones es la denominada Paradoja del mentiroso. Si se afirma "Yo miento" y se supone que esta es una proposición verdadera, entonces la persona que la afirma miente, o sea que no dice la verdad y si "Yo miento" no es verdad, entonces es falsa, o sea que la proposición no puede ser verdadera. Supongamos ahora que "Yo miento" es falsa, en ese caso no es cierto que mienta, por lo que debe ser verdadera la proposición considerada. Como conclusión, la proposición "Yo miento" no puede ser verdadera ni falsa. Este tipo de afirmaciones eran conocidas en la lógica y en la matemática durante siglos. De ellas por no ser posible asignarles un valor de verdad en la lógica clásica, se dijo que eran paradojas y se las exceptuó de los posibles abordajes lógicos.

La lógica trivalente de Bochvar fue propuesta originalmente como una solución a las paradojas semánticas, y la interpretación que él dio para el tercer valor fue ***"paradójico"*** o ***"carente de significado"***. Esta interpretación de carencia de significado es herencia de la concepción bivalente de que las afirmaciones paradójicas tenían esa propiedad.

En la definición de los conectivos de esta lógica, se sustentó el principio de que una oración compuesta que contiene un componente paradójico es asimismo paradójica, algo así como que una proposición simple "infectaría" la proposición compuesta con esa carencia de significado. Los valores de verdad de las proposiciones compuestas para Bochvar son definidos a través de las siguientes expresiones y tablas de verdad:

Negación:

$$v(\sim p) = 1 - v(p)$$

p	**~p**
0	1
1/2	1/2
1	0

Cuadro 5: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Bochvar

Conjunción:

$$v(p \wedge q) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } v(p) = 1/2 \text{ ó } v(q) = 1/2 \\ \text{mín } (v(p), v(q)) \end{cases}$$

Disyunción

$$v(p \vee q) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } v(p) = 1/2 \text{ ó } v(q) = 1/2 \\ \text{máx } (v(p), v(q)) \end{cases}$$

p	**q**	**p∧q**
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	0
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

p	**q**	**p∨q**
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	1
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 6: Tablas de verdad de la conjunción y disyunción según lógica trivalente de Bochvar

Implicación

$$v(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } v(p) = 1/2 \text{ ó } v(q) = 1/2 \\ \\ \text{máx } (1 - v(p), v(q)) \end{cases}$$

p	**q**	**p⇒q**
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 7: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Bochvar

Resulta importante hacer notar que con los conectivos definidos de esta manera no hay ninguna fórmula bien formada dentro de este cálculo que tome el valor verdadero para todas las asignaciones de sus componentes atómicas, o sea que en esta lógica no existen las tautologías y por lo tanto no hay leyes lógicas. Un 1/2 en la entrada siempre produce 1/2 a la salida. Este hecho trae un conflicto, por lo que Bochvar añade con la finalidad de solucionar este problema, un operador con el significado de ***"es verdadero que"*** al que se denota **Vx** definido como verdadero si y sólo si la proposición x es verdadera, y falso en cualquier otro caso (Haack, 1978). De esta manera se recuperan las leyes lógicas a través de proposiciones denominadas cuasitautologías, a las que se les da un significado similar al que tienen las tautologías en la lógica clásica (Rescher, 1969). Sin embargo estas leyes lógicas tienen distinta significación que las clásicas cuando intervienen en ellas proposiciones paradójicas. Esto le permite definir conectivos "externos" del siguiente modo:

$$v(p \wedge q) = V\, v(p) \wedge V\, v(q)$$
$$v(\sim p) = \sim V\, v(\, p\,)$$
$$v(p \vee q) = V\, v(p) \vee V\, v(q)$$
$$v(p \Rightarrow q) = V\, v(p) \Rightarrow V\, v(q)$$

Este conectivo externo actúa en cierta manera como un filtro; mediante la aplicación de este conectivo, sólo las tautologías bivalentes de la lógica se mantienen. El conectivo externo V actúa algo así como transformando tablas trivalentes para la lógica bivalente con 1/2 y 0 como tipo de falsedad.

c. Lógica trivalente de Kleene

Teniendo como antecedente el trabajo de Łukasiewicz, y otros realizados a partir de él acerca de la consideración de grados de verdad de las proposiciones, en 1938, Stephan Kleene introdujo una lógica trivalente diferente. La preocupación de Kleene no son las paradojas ni los futuros contingentes, sino ciertas proposiciones que se encuentran dentro de la matemática, cuyo valor de verdad es desconocido o indecidido. Por ejemplo, consideremos una proposición de la que no sabemos su valor de verdad pues recién la enunciamos y aún no hemos intentado demostrarla o refutarla. A ella se le aplicaría este valor de verdad al que Kleene denomina ***"indecidido",*** asignárselo a oraciones que, aunque verdaderas o falsas no son aún demostradas ni refutadas. Es decir que la asignación de este valor a una fórmula bien formada no se propone para indicar que no es ni verdadera ni falsa, sino solamente para indicar que no se puede decir qué es.

La lógica trivalente de Kleene difiere de la de Łukasiewicz con respecto a la implicación. La implicación de Kleene se construye de forma que, ahí donde la verdad o falsedad de un componente es suficiente para decidir la verdad o falsedad del compuesto, este toma el valor correspondiente, aunque el valor de otros componentes sea indecidible. En otro caso el compuesto en sí mismo es indecidible. Mientras Łukasiewicz preocupado por salvar la ley de identidad, asigna el valor de verdad 1 a: $v(p \Rightarrow q)$ para $v(p) = v(q) = 1/2$, Kleene asigna al mismo el valor: 1/2 quedando la explicitación funcional de la implicación de Kleene como:

Implicación

$v(p \Rightarrow q) = \text{máx}\,(1 - v(p), v(q))$

p	q	p⇒q
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 8: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Kleene

d. Lógica trivalente de Gödel - Brouwer

Suele considerarse que el primer intuicionista fue Krönecker, que expresó sus puntos de vista entre 1870 y 1890. Para él, el rigor impuesto en el análisis matemático por Weierstrass involucraba conceptos inaceptables y la obra de Cantor no era matemática sino misticismo. Estaba dispuesto a aceptar los números enteros porque eran claros a la intuición, obra de Dios, lo demás era obra del hombre y por lo tanto, sospechoso. Rechaza todas las demostraciones y criterios no constructivos que no puedan determinar en un número finito de pasos los objetos que manejan. Propone prescindir de los irracionales al no aceptar el Principio del tercero excluido y las argumentaciones por reducción al absurdo. Como consecuencia de perder los irracionales, y por lo tanto los reales, debe carecer de las funciones continuas, En su época no encontró partidarios de su filosofía hasta veinticinco años después con Henri Poincaré.

En 1907 Luitzen Brouwer funda la escuela intuicionista. La intuición fundamental, según él es la “presencia de percepciones en una sucesión temporal” Concibe el pensamiento matemático como un proceso de construcción que edifica su propio universo independientemente de nuestra experiencia. Las ideas matemáticas están en nuestra mente previamente al lenguaje, la lógica y la experiencia. Hacia 1930 Arend Heyting, formalizó las ideas de Brouwer al construir el cálculo proposicional intuicionista. En la lógica hay algunos principios y procedimientos claros, intuitivamente aceptables, pero no todos. Por ejemplo, se aplica demasiado libremente el principio del tercero excluido. Este principio afirma que toda proposición es verdadera o falsa, y es fundamental para el método de demostración indirecta. Históricamente surgió por la aplicación de razonamientos a subconjuntos de conjuntos finitos. Fue aceptado y se lo aplicó injustificadamente a conjuntos infinitos. La idea de infinito de Brouwer coincide con la del infinito potencial de Aristóteles. Para Brouwer, el dogma de la validez universal del principio del tercero excluido es un fenómeno de la historia de la civilización. El rechazo del principio del tercero excluido dio origen a una nueva posibilidad: la de las propiedades indecidibles: propiedades que no pueden ser refutadas ni demostradas. Por ejemplo: definamos k como el primer cero seguido de la secuencia 1, 2,... 9 en el desarrollo decimal de π . La lógica clásica dice que existe o no existe. Brouwer, en cambio rechaza este razonamiento: dice que hay afirmaciones matemáticas que pueden no ser decididas nunca a partir de los axiomas de la matemática, estas cuestiones son indecidibles.

Por otra parte, en 1933, Kurt Gödel demostró el Teorema de Incompletitud de la Aritmética. Esto significa que existen realmente algunas afirmaciones indecidibles en la aritmética. Esto significa que existen proposiciones matemáticas cuya que no podrán ser nunca demostradas ni refutadas.

Si bien las bases de ambas teorías (la propuesta por los intuicionistas y por Gödel) son sustancialmente distintas, en ambos casos es posible interpretar el tercer valor de verdad de la lógica trivalente que proponen como **“indecidible”.** No debe olvidarse en cada caso qué significa que algo sea indecidible.

Para los intuicionistas, por lo tanto, no es válida la ley del contrarrecíproco. Basado en esto Heyting elaboró su lógica proposicional trivalente. Es fundamental el concepto de implicación de los intuicionistas, así como el de la negación. Aunque en las que las definiciones de la implicación y de la negación se distinguen en un sólo caso de las de Łukasiewicz, estas son fundamentales para rechazar las pruebas por simple reducción al absurdo:

Negación:

$$v(\sim p) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(p) = 0 \\ 0 & \text{si } v(p) \neq 0 \end{cases}$$

p	**~p**
0	1
1/2	0
1	0

Cuadro 9: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Gödel-Brouwer

Implicación

$$v(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(p) \leq v(q) \\ v(q) & \text{si } v(p) > v(q) \end{cases}$$

p	**q**	**p⇒q**
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	0
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 10: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Gödel-Brouwer

En esta implicación si el valor de verdad del antecedente no supera al de consecuente, la implicación se considera verdadera, mientras que si lo supera resulta tan verdadera como lo sea el consecuente. La negación puede definirse como: $v(\sim p) = v(p \Rightarrow 0)$

La conjunción y la disyunción se definen respectivamente como el mínimo y el máximo de los valores de los argumentos, tal como en el caso de Łukasiewicz y de Kleene.

Pese a que los cambios en las evaluaciones son pequeños, los cambios de los resultados son de consideración. En esta lógica no son tautologías las leyes del tercero excluido ni su negación. En cambio si los son: la ley de no contradicción, los dos modos del silogismo condicional categórico, la ley del contrarrecíproco, las leyes de De Morgan y la ley del cuarto excluido.

En la lógica intuicionista, incoherencia implica contradicción, pero no al revés, tal como analizamos en el capítulo que corresponde a la descripción y fundamentación de las demostraciones por reducción al absurdo.

e. Lógica trivalente de Mamdani

Ebrahim Mamdani, ingeniero inglés que trabajó desde la década del 80 en el área de inteligencia artificial, refiriéndose a controladores, que periódicamente evalúan variables de estado y producen una variable de acción, propuso sobre la base de considerar el producto cartesiano de los universos del discurso del antecedente y del consecuente basado en la teoría de Lofti Zadeh para lógica difusa, la evaluación de la implicación como el mínimo entre los valores de verdad de ambas proposiciones. Por esta causa propuso la evaluación de la implicación como el mínimo de los valores de verdad de antecedente y consecuente. El escenario en el que realizó Mamdani sus desarrollos es radicalmente distinto de aquellos en los que se desempeñaron los matemáticos que anteriormente se han descrito; se trata de un ámbito característico de las aplicaciones de la ingeniería, correspondiente a una visión de la matemática en la que es fundamental el pragmatismo.

Para la evaluación de negaciones, conjunciones y disyunciones, la propuesta de Mamdani no difiere de la de Łukasiewicz, la diferencia fundamental se encuentra en la definición de la implicación:

Implicación

$v(p \Rightarrow q) \quad = \text{mín}\ (v(p)\ ,\ v(q))$

p	q	p⇒q
0	0	0
0	1/2	0
0	1	0
1/2	0	0
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 11: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Mamdani

La implicación de Mamdani no extiende los valores clásicos de la implicación, ya que si restringimos sus valores al caso bivalente, presenta diferencias en relación a la tabla de verdad de la implicación clásica.

Esta forma de evaluación no parece además en principio aceptable, ya que se trata de la misma utilizada en una conjunción. Restringiéndonos al caso trivalente diferiría solamente en la implicación respecto de la lógica de Łukasiewicz, en los casos en que el antecedente no es verdadero. Este autor sustenta lo anterior remarcando su fácil implementación computacional y que los casos en los que difiere de la lógica de Łukasiewicz son justamente aquellos en los que un sistema de control no debe actuar. Si se rastrea en el área de control, esta implicación es una de las más utilizadas por optimizar la cantidad de operaciones realizadas por el programa en su evaluación y por lo tanto la complejidad del algoritmo utilizado en la resolución del problema y por obtener resultados similares a los que corresponderían a la aplicación de los conectivos dl lógico polaco.

f. Lógica trivalente con aplicación computacional

En el ámbito computacional, es posible ver el valor intermedio de verdad bajo la interpretación de "**error computacional de evaluación"**. Esta interpretación, si bien no es explicitada muchas veces se encuentra implícita en las ideas que pone en juego un programador. Al evaluar un programa una expresión booleana, el resultado obtenido es verdadero o falso. Sin embargo, al producirse un error en la evaluación, el valor devuelto no es verdadero ni falso, sino un valor que, por ser un error, provoca un conflicto en el programa que conduce a terminación anormal. El estudio de cómo evitar si es posible este tipo de paradas anormales, hace que quienes se dedican a la compilación de programas, analicen los órdenes de evaluación de los valores booleanos de las proposiciones involucradas. Por ejemplo en el caso de la conjunción, la evaluación usual si se consideran los valores de ambas proposiciones en juego, dará error si al menos una de ellas es errónea. Si se evalúa el conectivo denominado *cand* o condicional and, en cuanto la primera proposición determina el resultado, no se sigue evaluando la segunda.

p	**q**	**p∧q**
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	0
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

p	**q**	**pcandq**
0	0	0
0	1/2	0
0	1	0
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 12: Tabla de verdad de los conectivos and y cand según lógica trivalente con aplicación computacional

Acerca de la comparación de las lógicas trivalentes

Resulta interesante la conclusión que surgió en una investigación que se encargó de analizar y comparar las propiedades que cumplen los operadores de implicación antes definidos (Alberti et al., 1995). De esta comparación surgió la comprensión de que ninguno es “mejor” o “peor” que otro, dependerá del contexto en el que se esté trabajando, de los significados que se le atribuyan a los valores de verdad intermedios de las proposiciones. La única que recibió para los autores una explicación distinta es la lógica de Bochvar, ya que no es posible considerar para esta interpretación una extensión continua de valores de verdad al intervalo [0, 1] para la interpretación de las proposiciones paradójicas: una proposición no puede ser más o menos paradójica. En el resto de los casos es posible extender las distintas maneras de evaluar cada conectivo al intervalo [0, 1], logrando distintos grados de veracidad de las proposiciones. La extensión cada uno de los conectivos de implicación da la posibilidad de obtener distintas maneras de evaluar las proposiciones en los sistemas que hacen uso de la lógica difusa y de definir los distintos valores de verdad en esta lógica (Klir et al., 1997). Se trata, sin duda de un esbozo de enfoque socioepistemológico de la temática, que fuera abordada en aquella investigación desde la óptica de la ingeniería con la finalidad de decidir cuál de las implicaciones se debía elegir para programar ciertos sistemas de inferencia aplicables a inteligencia artificial. Con la óptica de la socioepistemología, resulta claro que la interpretación de los valores de verdad intermedios de las lógicas polivalentes se halla fuertemente ligada al escenario en el que se definen y a la finalidad con el que se las va a aplicar. No será lo mismo pensar en proposiciones indecidibles, indecididas, que en paradojas o futuros contingentes. No es lo mismo pensar en un escenario matemático o en un escenario de control. Cada escenario determina la conveniencia de una interpretación y por lo tanto, según sean las características de las proposiciones que se estén abordando, será más o menos correcta una interpretación y con ella irán ligadas las leyes lógicas que en esa lógica se verifican.

Los principios aristotélicos y las lógicas trivalentes

Nos interesa analizar si en cada una de las lógicas trivalentes que se han presentado anteriormente, son válidos o no los principios aristotélicos, en particular el Principio del tercero excluido y el Principio de no contradicción, por ser ellos los que sustentan las argumentaciones por reducción al absurdo.

Para mostrar que el Principio del tercero excluido no es válido en ninguna de las lógicas polivalentes anteriores, evaluemos su tabla de verdad para cada interpretación semántica En todos los casos el Principio del tercero excluido falla para el caso en que el valor de verdad de la proposición en juego no es ni verdadero ni falso, cualquiera sea la interpretación semántica de los valores intermedios. Sólo podemos considerar que se trata de una seudo tautología en el caso de Bochvar si se considera el conectivo externo.

Łukasiewicz

p	**p∨~p**
0	1
1/2	1/2
1	1

Bochvar

p	**p∨~p**
0	1
1/2	1/2
1	1

p	**Vp∨~Vp**
0	1
1/2	1
1	1

Kleene

p	**p∨~p**
0	1
1/2	1/2
1	1

Gödel - Brouwer

p	**p∨~p**
0	1
1/2	1/2
1	1

Mamdani

p	**p∨~p**
0	1
1/2	1/2
1	1

Aplicación computacional

p	**p∨~p**
0	1
1/2	1/2
1	1

Cuadro 13: Principio del tercero excluido en lógicas trivalentes

En relación con el Principio de no contradicción, las tablas de verdad que se obtienen para esta ley aristotélica son:

Łukasiewicz

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Bochvar

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

p	Vp∧~Vp
0	1
1/2	1
1	1

Kleene

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Gödel - Brouwer

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Mamdani

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Aplicación computacional

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Cuadro 14: Principio de no contradicción en lógicas trivalentes

La situación presentada es la misma que en el caso del Principio del tercero excluido. El Principio de no contradicción tampoco es válido para estas lógicas no clásicas. Estas lógicas son divergentes en relación con la lógica clásica.

Estas no son las únicas leyes de la lógica clásica que no se verifican en estas lógicas polivalentes (Alberti et al., 1995). Algunas de ellas se verifican en algunas lógicas y no en otras. No entramos en este análisis pues no se trata de leyes en las que se base la estrategia de argumentación de la que nos estamos ocupando en esta investigación.

¿Una matemática en Occidente que utilice lógicas no aristotélicas?

Resulta notorio encontrar estas palabras en un texto de un lógico clásico:

> *"La lógica aristotélica es en realidad muy débil, y resulta insuficiente e ineficaz para las necesidades de la fundamentación matemática"*
>
> (Klimovsky & Boido, 2005, p.137)

En realidad, Klimovsky no se refiere a las lógicas que se acaban de presentar, sino a extensiones de la lógica aristotélica. Sin embargo, consideramos que valdría la pena pensar acerca de si es posible construir una matemática que tenga subyacente alguna de las lógicas que se describieron en este capítulo y cómo podrían influir en la matemática educativa.

¿O podemos considerar que en determinadas áreas de la matemática, como ser los fundamentos de la matemática ya las estamos utilizando? En realidad cada vez que se abordan paradojas, se está haciendo uso de la lógica de Bochvar. Al hablar de los fundamentos de la matemática y hacer referencia a proposiciones indecidibles o indecididas, se está utilizando la lógica de Kleene o de Gödel-Brouwer. Pero lo hacemos de manera inconsciente... nos cuesta manifestarlo y aceptarlo de manera explícita.

Pero, ¿los estudiantes aceptan estas lógicas? ¿Qué opinan de ellas? A continuación se transcriben algunas de las opiniones que han vertido en una clase de Fundamentos de la Matemática, del último año del profesorado de matemática, en la que se planteó el tema. Intervienen en el diálogo las alumnas A1, A2 y A3 y la profesora del curso (P):

> A1: "*Me parecen muy complicadas esas lógicas, no tienen la simplicidad de la lógica de Aristóteles*"
> P: *"¿Por qué 'complicadas'*?"
> Alumna 1: "*Las leyes son complicadas. No sé cómo podríamos tratar un razonamiento*."
> A2: "*Sí, ninguno de los métodos que vimos sirve, me parece*."
> P: "*Quizá haya que hallar otros métodos... No las trabajaríamos igual.*"
> A3: *"¿Más métodos? ¿No tenemos bastantes?"*
> P: "*Serían distintos. Por ejemplo cuando en inteligencia artificial se utilizan estos conectivos, y se trabaja con lógica difusa, las reglas de inferencia son distintas*."
> A1: *"¿Distintas? ¿Hay otro Modus Ponens?"*

Prof: "*Sí, existe un Modus Ponens generalizado que se aplica cuando existen etiquetas lingüísticas y se trabaja con lógica difusa.*"

A2: "*Eso es en inteligencia artificial. Pero, no en matemática. La matemática usa la lógica aristotélica*"

P: *"¿Y el Teorema de Gödel? ¿Qué hacemos con las proposiciones indemostrables? ¿Qué pasa si tengo que razonar con una de ellas?*"

A1: "*Las ignoramos, como se viene haciendo desde la década del '30*"

P: "*O sea: lo que no me gusta o no sé cómo manejar, ¿lo ignoro? Pero ¡existe! Y alguna vez tendremos que aprender a trabajar con esos valores de verdad... Además si en otras áreas usan este tipo de lógicas porque la lógica clásica no funciona como quisiéramos, ¿qué hacemos los matemáticos?*"

A2: "*Quizá existan, y como dijiste dentro de la matemática, pero no de la matemática que usamos en un aula*."

P: *"¿Estás segura? ¿Realmente en el aula todas las maneras de razonar que encontramos son aristotélicas? ¿Todas son deductivas?*"

A2: "*Sí, las que están bien son deductivas. Las otras para la matemática están mal."*

A1: "*Las podemos estudiar, si hace falta, para resolver un problema, para ver cómo funciona, pero no creo que en el aula las podamos trabajar*."

P: "*Y, ¿si encontraran que en el aula, en la escuela, los chicos usan formas de razonar no aristotélicas y pudiéramos ver cómo las aplican, por qué no llegan los alumnos a las conclusiones que queremos...? Y ¿si viéramos que hay patrones comunes de razonamiento, y que por eso les cuesta tanto la matemática que les enseñamos?"*

A1: "*Entonces quizá me parecería que las tenemos que estudiar..."*

De este diálogo es posible inferir algunas conclusiones que pueden ser de interés para la investigación que se está realizando:

- Los alumnos, futuros profesores, a pesar de que reconocen como correcta la posibilidad de existencia de lógicas no clásicas, no les reconocen su aplicabilidad en la matemática.
- Tienen una visión de la matemática como única y construida sobre la lógica aristotélica.
- Aunque aceptan la presencia de enunciados para los cuales no es válida la lógica bivalente, optan por la postura de negarlos, de ignorarlos a la hora de un razonamiento, o sea saben que existen, pero prefieren la posición de no considerarlos como proposiciones con las cuales pueden realizar un razonamiento.
- Ven a la matemática como una ciencia separada de sus aplicaciones.
- En primera instancia, rechazan la posibilidad de formas de razonamiento no deductivas en el aula, considerándolas incorrectas.
- Sólo aceptan la posibilidad de estudiar y analizar tales formas de razonamiento sobre la base de pensar que pueden resultar útiles para mejorar el aprendizaje de la matemática.

En estas conclusiones puede verse cómo la visión aristotélica se encuentra arraigada en la manera de ver la matemática de los futuros docentes de matemática, aún cuando hayan tenido acceso a la existencia y caracterización de lógicas no aristotélicas. Por momentos aplican estas lógicas y son conscientes de lo que significan para la matemática, sin embargo en el momento de reconocerlas, prefieren seguir asidos a la posición clásica.

Sin embargo, con la aparición de estas lógicas desde la matemática, que son consistentes dentro de ella misma, y con la posibilidad de extender los tres valores de verdad que hemos considerado, a una cantidad infinita de valores, se muestra que la lógica aristotélica, y en particular el Principio del tercero excluido, no están *“escritos en los cielos”* (Barrow, 1996, p.28).

Lo presentado en esta tesis hasta el momento, permite, comprender que la comunidad matemática ante la necesidad de validar sus resultados, generó una práctica social llamada demostración. A partir de la misma, construyó argumentaciones que en el caso de la matemática construida en las culturas con influencia aristotélica, se basaron fuertemente en formas acordes a los principios aristotélicos. La lógica de Aristóteles se constituyó en el paradigma del pensamiento en estas culturas. Otras culturas, sin influencia aristotélica, construyeron argumentaciones distintas que no respetan los principios mencionados. Sin embargo, aún en escenarios de la matemática occidental, en escenarios académicos nacidos dentro de la tradición aristotélica, fue posible construir otras lógicas que generan argumentaciones que no respetan los principios aristotélicos. Las aplicaciones de estas formas de argumentar en la ingeniería y en la técnica en general, son múltiples.

Una pregunta que surge es: la escuela ha intentado enseñar argumentaciones deductivas, hemos visto que los resultados no han sido satisfactorios pero, ¿es esa la forma de argumentar aplicada en la sociedad fuera de la escuela?, ¿realmente en escenarios no escolares se utilizan las argumentaciones que la escuela construye, o al menos intenta construir?

Capítulo 8

Las argumentaciones en escenarios no académicos

Esta etapa de la investigación se centra en la detección e identificación de argumentaciones en distintos escenarios no académicos (no matemáticos y ni escolares). En particular, nos centramos en las argumentaciones por reducción al absurdo, que como ya se explicó se basa en los principios de la lógica aristotélica, con la finalidad de analizar si las formas de argumentación que se conocen comúnmente como “racionales” e innatas y que han sido reconocidas como propias de la manera de pensar y razonar del ser humano, no se restringen en realidad a escenarios académicos.

Reunimos aquí dos experimentaciones llevadas a cabo.

La primera de estas experimentaciones tiene por finalidad el reconocimiento de la utilización de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos por parte de los estudiantes.

La segunda se orienta a determinar algunas características de las formas de argumentación presentes en escenarios no matemáticos. Para lo cual se realizaron entrevistas a personas cuyas actividades se encuentran alejadas de la matemática, pero en contacto con disciplinas en las que la argumentación posee un papel significativo.

La influencia de la formación profesional en las argumentaciones fuera de escenarios académicos

Como resultado de la investigación, que fuera descripta y reportada en (Crespo Crespo, 2005a; Crespo Crespo y Farfán, 2005), fue posible observar la influencia de la formación profesional, para la aplicación de ciertas estrategias de argumentación. Se indagaron en aquella oportunidad, las respuestas de tres grupos de estudiantes de distinta formación, frente a una situación problemática no académica para cuya resolución debían utilizarse argumentaciones por reducción al absurdo. Esta experimentación se orientó a determinar si la distinta formación era una variable que influía en la aceptación y utilización de esta estrategia de argumentación. Uno de los grupos, estaba formado por estudiantes de profesorado de matemática; otro, por estudiantes de profesorado de informática y, el tercero, por estudiantes de bachillerato con orientación Ciencias Sociales y Humanidades que tenían una asignatura denominada Introducción al Conocimiento Científico, en la que estudian los mecanismos de validación de los distintos tipos de ciencia: sociales, experimentales y formales. Los tres grupos tenían los conocimientos de lógica necesarios para la resolución de la situación problemática.

Si bien la totalidad de los alumnos estudiantes del último año de profesorado de matemática habían sido capaces de reconocen la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo en contextos matemáticos, y al encontrarse con este tipo de demostraciones en ese contexto, pudieron explicarlas correctamente e incluso indicar cuáles son las características y dificultades que este tipo de argumentaciones presentan, sólo menos de la mitad de los mismos alumnos argumentan por reducción al absurdo en situaciones fuera del contexto matemático. Esto permite concluir que las argumentaciones indirectas suelen ser reservadas para escenarios académicos y en pocas oportunidades son transferidas a escenarios no académicos.

Pocos alumnos con formación informática realizaron argumentaciones indirectas para resolver situaciones problemáticas, aunque las conocen desde el punto de vista formal, ya que las estudian en asignaturas relacionadas con la lógica. Los alumnos con formación informática prefieren realizar argumentaciones directas, no indirectas. La forma de razonar de los estudiantes de informática en condicionales está unida a la estructura “if...then...”, necesitando evaluar el antecedente antes del consecuente. Esta estructura ejerce sobre ellos una fuerte influencia y consideran más natural la realización de argumentaciones directas, o sea basadas en razonamientos hacia adelante o forward, que las argumentaciones indirectas, que estarían basadas en razonamientos hacia atrás o backward.

Ninguno de los alumnos de escuela media que colaboraron en esta experimentación, pudo argumentar correctamente por el contrarrecíproco. Para la mayoría de los alumnos de nivel medio la única manera de demostrar que una implicación es verdadera es probar todos los casos, lo que muestra que no tienen aún incorporada la idea de demostraciones generales que no impliquen razonar caso por caso. La experimentación con este grupo demostró que a pesar de haber estudiado explícitamente los métodos de validación de cada tipo de ciencia, no tienen asumida la importancia ni la necesidad de las demostraciones en la matemática.

A partir de esta experimentación, pudo observarse cómo una estructura de pensamiento propia de un escenario profesional determinado, como ser la estructura del condicional utilizado en programación, tiene influencia en la manera de resolver una situación problemática y de argumentar acerca de la misma. Por otra parte, la formación científica de los estudiantes de matemática, acostumbrados al reconocimiento y utilización de argumentaciones por reducción al absurdo, si bien aumenta la utilización de dicha estrategia de argumentación, no logra que los resultados sean los mismos que cuando se encuentran trabajando en escenarios académicos.

La pregunta que surgió a partir de esta investigación es si es posible encontrar argumentaciones por reducción al absurdo fuera de escenarios académicos. Para ello se realizó una experimentación en la que se proponía a estudiantes buscar ese tipo de argumentación fuera de escenarios académicos.

La identificación de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos desde la óptica de los estudiantes

a. Objetivos, diseño de la secuencia, destinatarios de la experimentación

A partir de los resultados anteriores, surgió, como se afirmó recién, la necesidad de ampliar la investigación al análisis de la utilización de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos. La decisión de centrarnos en un grupo de estudiantes del último año del Profesorado de Matemática y Astronomía se debe a que son ellos los que por tener mayor experiencia en la utilización de esta forma de argumentación en escenarios académicos, en particular de características matemáticas, por lo que están en mejores condiciones de identificar y estudiar la presencia de dicha forma de argumentación en distintos escenarios (Crespo Crespo, 2007).

En este apartado se presentan los resultados de una experimentación llevada a cabo a partir de encuestas y entrevistas a 50 estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática, en la que se les pidió la búsqueda y detección de situaciones en escenarios no académicos en las que se utilicen argumentaciones por reducción al absurdo. Se trata de la continuación de la experimentación que fue presentada en el capítulo 6 acerca de la identificación de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios académicos.

Las preguntas presentadas a los alumnos que participaron de esta investigación fueron:

a. Describa y fundamente las características de las argumentaciones por reducción al absurdo. Ejemplifique.

b. Dé ejemplos de aplicaciones de este tipo de argumentaciones fuera de escenarios académicos (escolares y científicos). Explíquelos.
(Si considera que este tipo de argumentaciones no es aplicado fuera de escenarios académicos, explique y justifique su respuesta).

El ítem a es el que fuera analizado anteriormente en el capítulo 6. Nos centraremos ahora en las respuestas obtenidas al ítem b. Así como el objetivo de la primera pregunta fue que los estudiantes enmarcaran las preguntas, describiendo las características de las argumentaciones por reducción al absurdo desde el punto de vista lógico y presenten ejemplos de su aplicación dentro de la matemática y se intentó determinar, a su vez dentro de la matemática, si existen contextos y ramas de la matemática en las que reconocen y aplican este tipo de demostraciones con mayor frecuencia, la segunda pregunta apuntó directamente a la búsqueda y descripción de estas argumentaciones fuera de escenarios académicos. Recordemos que estos estudiantes dispusieron de dos semanas de tiempo para entregar las respuestas, con la finalidad de que pudieran recurrir a consultas bibliográficas si lo consideraban necesario, pudiendo de esta manera enriquecer su búsqueda.

b. Resultados obtenidos en la experimentación realizada

En la fase de la experimentación que corresponde a la identificación de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos, algunos de los encuestados también recurrieron a la presentación de razonamientos lógicos aplicados a situaciones ad hoc por medio de la asignación de interpretaciones a las proposiciones simples en juego. La mayoría de estos ejemplos son presentados de manera informal, pero se ve claramente en ellos la influencia de los estudios de lógica realizados por los alumnos.

Por ejemplo, una de las estudiantes afirmó:

"Teniendo en cuenta las proposiciones: p = me recibo,
q = me regalan un viaje,
la forma simbólica sería $p \Rightarrow q$ quedaría traducida coloquialmente: 'Si me recibo, entonces me regalan un viaje'. Si pienso en $p \Rightarrow q$ y p, y quiero demostrar q.
La forma: $\sim q \Rightarrow \sim p$ es equivalente a la anterior, y se traduce: 'Si no me regalan un viaje entonces no me recibo'. Agrego entonces la negación de la conclusión: $\sim q$ y obtengo que me recibo y no me recibo.
Al traducir a lenguaje coloquial el contrarrecíproco, surge que el método de argumentación por el absurdo muestra un hecho injusto y lo que antes correspondía a una contradicción parece ahora una amenaza ante dicha injusticia.
Más aún se aprecia esta amenaza si se traduce la proposición como $\sim p \vee q$, 'Me regalan un viaje o no me recibo".

Esta alumna explica como injusticia lo que en realidad es un absurdo, algo que no es posible. Ve incluso como una amenaza la expresión del contrarrecíproco o la obtenida a través del condicional disyunción. Estas consideraciones semánticas, o quizá tendríamos que decir pragmáticas; exceden a lo que estamos estudiando, pero sería interesante investigar cuáles son las cargas semánticas que se otorgan en lo cotidiano a expresiones que lógicamente son equivalentes.

Otra estudiante presentó el siguiente ejemplo, formalizándolo:

"Supongamos que se puede viajar en coche a gas a Mar del Plata sin parar. Si esto fuera así tendría que tener un tanque con capacidad superior a 100 litros de gas. Los coches a gas tienen tanques con

capacidad para 100 litros o menos. Entonces no puedo viajar a Mar del Plata sin parar en un coche a gas.

p: se puede viajar en coche a gas a Mar del Plata sin parar

q: los coches a gas tienen capacidad superior a 100 litros

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\sim q \quad\quad} \\ \sim p \end{array}$$

Este ejemplo tiene una estructura lógica del tipo Modus Tollens, donde es la realidad que se niega la tesis. La aplicación de esta estructura permite decidir acerca de la veracidad del antecedente. La diferencia con el razonamiento lógico utilizado en las demostraciones matemáticas por reducción al absurdo es que allí se sabe que el antecedente es verdadero, entonces si al negar el consecuente se llega a negar el antecedente, se produce la contradicción (el absurdo) que conduce a considerar la verdad del consecuente. Porque no pueden ser verdaderos el antecedente y su negación. Luego, el consecuente es verdadero".

Debemos hacer notar que en el ejemplo presentado por esta estudiante, aplica claramente la estructura del Modus Tollens, tal como ella explica, sin embargo no está presentando un ejemplo de argumentación por reducción al absurdo, ya que como ella explica no se llega a una contradicción.

Otra respuesta presentada fue:

"A lo largo de esta semana, mi postura frente al uso cotidiano de este tipo de argumentación fue cambiando. En un principio estaba convencida de usar las argumentaciones por el absurdo, pero descubrí que muchas de estas argumentaciones las podía hacer por otro método.

Mi ejemplo será:

Cuando voy al supermercado pienso en la comida que mi hija no come y voy descartando para en definitiva comprar lo que sí come.

La formalización sería así:

Ana no come casi nada. Si compro carne puedo hacer empanadas y hamburguesas. A Ana le gustan las milanesas y las hamburguesas. Pienso: Hago milanesas o compro carne picada. Entonces sé que Ana va a comer".

Si bien la formalización de este razonamiento no es directa, es posible observar en él la presencia de estrategias indirectas para llegar a la conclusión.

Algunos encontraron ejemplos concretos reales de este tipo de razonamientos, pero al presentarlos se encuentran opiniones acerca de su aplicación:

"En el trato diario, mis hijos acostumbran a utilizar este tipo de argumentaciones. Un ejemplo lo encuentro en las ocasiones en que intento inducir a mi hijo Azul a darse cuenta de que está en un error. Luna tiene 11 años y Azul tiene 7. Luna es mayor que Azul, pero él sostenía que es al revés. Utilizando su afirmación como tesis lo ayudo a ver que cae en una contradicción.

'Supongamos que lo que decís es verdad y Luna es menor que vos'. Luna tendría menos edad que vos, para eso su edad debería ser menor que 7 años. Luna tiene 11 años y 11 es mayor que 7. Hay algo que está mal, ¿verdad? El problema está por haber pensado que Luna es menor que vos´

A pesar de este ejemplo, creo que las argumentaciones por el método de reducción al absurdo son más complejas que las directas y su utilización se restringe a aquellos casos en que todo otro método falla. Otro de los puntos que me plantea un problema es que en ámbitos académicos se utiliza para probar generalidades, mientras que en la vida cotidiana se utiliza para cuestiones particulares. Puede ser que esté relacionado con la naturaleza del pensamiento académico y la del pensamiento cotidiano".

Esta reflexión de esta estudiante muestra claramente una diferenciación entre los resultados de la ciencia y los que no pertenecen a ese ámbito. El razonamiento con que ella induce a su hijo a llegar a una contradicción, es indudablemente correcto y hace aplicación de la reducción al absurdo. Sin embargo la misma estudiante se cuestiona acerca de su simplicidad, sobre todo teniendo en cuenta la edad del hijo. Posiblemente en la manera de inducir esta alumna a que su hijo asuma su error, influya la formación matemática y lógica de la madre, ya que tal como ella comentó después, no sabe si todas las madres realizan este tipo de razonamientos en los diálogos con sus hijos.

Una temática acerca de la cual aparecieron varios de los ejemplos presentados por los estudiantes que intervinieron de la experimentación es la resolución de enigmas, acertijos y misterios, tanto a través del planteo de juegos de ingenio, como de la actuación de detectives. En el caso de los detectives, algunos de los alumnos presentaron casos extraídos de libros de ciencia ficción y otros recurrieron a entrevistar detectives y abogados para preguntarles al respecto. De las respuestas que obtuvieron de ellos, surge que en este ámbito se aplican argumentaciones indirectas para resolver situaciones que plantean un enigma.

> *"La prueba indirecta se aplica, por ejemplo a la resolución de juegos de lógica, los conocidos 'enigmas lógicos'. Los aficionados a este tipo de juegos usan esta prueba, sin reflexionar sobre ello, como estrategia para la resolución.*
>
> *En las novelas o cuentos policiales también es utilizada para resolver los crímenes".*
>
> *"Por ejemplo: Se quiere probar que: 'La habitación estaba oscura, hay ventanas, pero no hay iluminación artificial. Por lo tanto el asesinato se produjo de noche'*
>
> *Partimos de suponer que el asesinato se produjo de día, es decir la proposición contraria a la tesis. Luego la habitación debe estar iluminada pues tiene ventanas. Absurdo, pues la habitación estaba oscura. Debe afirmarse entonces que el asesinato se produjo de noche".*

En la respuesta de esta estudiante, lo que ella considera “contrario a la tesis” es la negación de la tesis. La expresión de contrariedad no es utilizada en lógica usualmente, pero deja traducir la presencia de una lógica bivalente en su razonamiento.

En relación al derecho, surgieron los siguientes comentarios:

> *“En el ámbito del derecho cuando no se puede demostrar directamente la culpabilidad del acusado porque no se tienen pruebas suficientes, es muy utilizado este procedimiento. En esos casos existen algunas pruebas irrefutables que constituyen los datos o hipótesis (son verdaderos y no pueden negarse).*
>
> *Supongamos que el fiscal del caso quiere probar que el acusado estuvo en el lugar del delito (tesis). El acusado niega que estuvo en el lugar del delito (niega la tesis), pero al querer mantener que la tesis es falsa entra en contradicción. Esta contradicción permite al juez deducir que la declaración del acusado es falsa y la tesis del fiscal es verdadera. En consecuencia el acusado es declarado culpable”.*

En algunos casos, la consulta con especialistas ayudó a dar una respuesta:

> *“Me llevó a pensar si sólo en las novelas policiales se llevaba a cabo esta forma de razonar y no también en la vida real. Por lo que investigué y llegué a la conclusión afirmativa. Consulté con el oficial Juan Osvaldo Ronelli, Licenciado en Balística, quien respondió a mis dudas. Me comentó que constantemente se utilizan este tipo de argumentaciones. Por ejemplo para detectar si un cadáver fue movido o no luego de un homicidio, se utilizan los famosos simulacros que ellos llaman ‘reconstrucción de la escena del crimen’. De esta manera se reconstruyen datos establecidos por los testigos y suposiciones de los peritos que por lo general responden a esta argumentación: ‘y si el cuerpo entonces no fue*

> *movido...' Si se invalida alguna hipótesis cierta, se llega a una contradicción.*
> *De todos modos, me declaró que las pruebas y las pericias van más allá de toda lógica y fundamento matemático, pero pueden ser recursos interesantes para el argumento de estos casos".*

Se presentaron algunas argumentaciones que utilizan la reducción al absurdo provenientes de discursos de políticos y noticias presentadas en diarios. Sin embargo, los alumnos que las mencionan, acuerdan en afirmar la debilidad y poca consistencia de estas argumentaciones.

> *"En política este método de argumentación es muy utilizado, sobre todo en las publicidades de campaña, tratando por este medio de convencer al futuro elector. También se hace extensivo su uso en publicidad en general para captar la atención de los consumidores.*
> *De todas maneras en estos casos es notoria la debilidad de los argumentos"*

Otra temática a la que se refieren varios de los ejemplos presentados se relaciona con creencias de tipo religioso, en las que se demuestra por medio de reducciones al absurdo la no existencia de Dios y la veracidad de la teoría de las reencarnaciones. Una alumna presenta una argumentación que atribuye a Hume para demostrar la no existencia de un Dios Creador, otra la argumentación atribuida a Kant para demostrar que el mundo tiene un principio en el tiempo:

> *"Supóngase que el mundo tiene un Creador tal como lo tiene una casa. Ahora bien cuando las casas no son perfectas, sabemos a quiénes culpar: a los carpinteros y albañiles que las crearon. Pero el mundo tampoco es absolutamente perfecto. Por lo tanto parecería seguirse que el Creador del mundo, Dios, ya no es perfecto. Pero se consideraría absurda esta conclusión, pues Dios no puede ser imperfecto. La única manera de evitar el absurdo consiste en rechazar la suposición que a él conduce. Por lo*

tanto el mundo no tiene un Creador de la manera en que las casa lo tienen”.

“Tesis: El mundo tiene un principio en el tiempo.

Supóngase que el mundo no tiene un principio en el tiempo. Entonces existe un momento en el tiempo, por ejemplo el actual, en el que puede decirse que se ha recorrido una eternidad, es decir una serie infinita de estados sucesivos del mundo.

Ahora es contradictorio y por lo tanto imposible que una serie infinita sea recorrida en el tiempo, de donde se concluye que no es cierto que el mundo no tiene principio en el tiempo”.

También entre las respuestas encontramos una crítica a la utilización de las argumentaciones por reducción al absurdo a temáticas como estas:

“Recordé la siguiente frase que a veces la gente usa: ‘Si hay tantas injusticias en la tierra, entonces Dios no existe’

Y aclaran: Si Dios existiera (teniendo en cuenta que posee las características populares) como él tiene poderes sobrenaturales tiene el don de sanar y hacer cualquier cosa. Además Dios es Amor y Bondad y jamás dañaría o haría mal a nadir, es perfecto. Con tales poderes y tanta bondad, evitaría que la gente haga cosas malas, que ocurran catástrofes, que la gente se equivoque, que se lastime, etc.

Por lo tanto no existirían las injusticias en la tierra. Pero como las injusticias existen, quiere decir que Dios no existe.

El primer punto a considerar sería: ¿qué es la injusticia? Quizá para alguna persona ir a la cárcel por robar es una injusticia. Pero hay gente que piensa que cuando a uno le ocurre un hecho dramático en su vida, crece y aprende y se fortalece a través de él. Así lo que parece una injusticia en el fondo podría ser un acontecimiento que hiciera mejor a alguien. Otro punto a discutir es qué características tiene Dios. Eso también podría modificar la demostración.

Al usar este razonamiento en la vida cotidiana nos encontramos con hipótesis cuyo valor de verdad puede ser imposible de determinar o con suposiciones cuyo valor de verdad no podemos determinar cuando intentamos llegar a una contradicción o a la negación de nuestra hipótesis".

Otra particularidad que aparece con frecuencia es la asociación incorrecta de esta forma de razonamiento con la aparición de situaciones de la vida real que contradicen lo que sería un pensamiento racional. Por ejemplo la presencia de propagandas de cigarrillos en las que se traduce felicidad y salud, las reacciones de alguien que se enamora pero huye del ser amado y es infeliz por temor a sufrir, o de alguien que no hace algo por miedo a fracasar y no lograrlo, sin darse cuenta que ya el hecho de no intentarlo es un fracaso. También surgieron planteos de problemas sin solución como encontrar 370 personas que cumplan años en distintos días del año, o mencionar 12 nombres de meses del año que terminen con vocal.

Algunos de los ejemplos presentados no se tratan en realidad de formas de razonamiento por reducción al absurdo, sino que aparecen en ellos formas de razonamiento no monotónico aplicados a temáticas como sentimientos o relaciones humanas.

"A raíz de la consigna planteada, salí a consultar muchos libros y a pensar en situaciones de la vida cotidiana o de otras disciplinas para ver en cuáles de todas ellas podía encontrar una situación que se demostrara por el absurdo. Intuitivamente, creí que el método se usaba mucho.

Primero pensé que se utilizaba en el derecho, por ejemplo: 'Juan cometió un crimen, entonces es culpable'. Parto de suponer que es inocente (porque todo el mundo es inocente hasta que se demuestre lo contrario) y presento todas las pruebas que tengo y llego a demostrar que no cometió el crimen, lo cual es absurdo porque contradice mi hipótesis. Entonces es *culpable. Pero para que todo esto se cumpla, las pruebas que presenté deben ser falsas (porque si cometió el crimen no puedo tener pruebas que digan que no es así): Por lo tanto el procedimiento es falso y no puedo utilizarlo.*

Seguí averiguando y pensando en diferentes situaciones, y me di cuenta de que siempre podemos encontrar alguna contradicción en una situación, pero ella no proviene de utilizar el método de reducción al absurdo, y que en la vida cotidiana hay muchas contradicciones, pero creo que el método sólo es utilizado en matemática".

En la presentación realizada por esta estudiante, el ejemplo de la culpabilidad es típico de los razonamientos no monotónicos. Sin embargo en el análisis que realiza, no termina de detectar la no monotonicidad de la secuencia, sino que la identifica como una contradicción, aunque finalmente reconoce que no se trata de una argumentación por reducción al absurdo.

"Las relaciones humanas están colmadas de subjetividades. Lo que para mí es verdadero, para otros puede ser falso. O, peor aún, lo que para mí hoy es verdadero, mañana puede dejar de serlo. También tengo que señalar que hay opiniones que no son ni verdaderas ni falsas, la vida está llena de matices. Creo que no basta una argumentación por reducción al absurdo para asegurar que mi razonamiento es incorrecto. Eso sólo sería posible si viviéramos en un mundo en el que existiera únicamente lo verdadero y lo falso. En el que además todos opinemos igual acerca de lo que es verdadero o falso".

En esta respuesta hay algunas ideas importantes que debemos recalcar: por una parte hace referencia a la no monotonicidad del pensamiento humano, teñida además de la subjetividad que tiene el pensamiento cuando nos referimos a cuestiones cotidianas en las que se conjuga lo social y lo emocional. Por otra aparece claramente que la lógica humana no es bivalente, podríamos decir que está afirmando la existencia de un continuo de valores de verdad entre el verdadero y el falso clásicos. Esto ocasiona el no cumplimiento del principio del tercero excluido y por lo tanto la no validez de las argumentaciones por reducción al absurdo fuera de escenarios académicos.

Fue bastante numerosa la proporción de quienes no identificaron la presencia de las argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos. Algunos de ellos lo declararon explícitamente a través de comentarios en los que ponen de manifiesto que no les había surgido la inquietud de reflexionar al respecto hasta que les fue planteada la pregunta en esta experimentación. Encontramos justificaciones como las siguientes:

> *"Si bien las relaciones humanas tienen contradicciones y reacciones absurdas, considero que no se utiliza el método de reducción al absurdo rigurosamente como en matemática. Es decir, podemos llegar a una conclusión luego de encontrar algo absurdo, pero de manera más intuitiva, sin pensar matemáticamente".*
>
> *"Desde mi punto de vista, este método no es aplicable fuera de escenarios académicos. Todos los ejemplos que pensé llegaban a una contradicción, pero sin embargo en ellos no se utilizaba el método. Esto se debe a que en los escenarios no académicos como ser en la vida cotidiana, en la política, el derecho, etc., la verdad no siempre es absoluta, o no tengo certeza total al declarar la hipótesis y la tesis, con lo cual no sería posible negar esto último para llegar a una contradicción".*

En las explicaciones de estas alumnas, se detecta claramente que ellas diferencian entre la lógica clásica que subyace a la matemática y la lógica que rige las relaciones humanas. Expresan la existencia de diferencias en la manera de argumentar en escenarios académicos y no académicos. Para ellas, la lógica clásica aristotélica es propia de escenarios académicos, no es la lógica del ser humano, sino que es una construcción sociocultural característica de ciertos escenarios académicos.

La misma idea aparece en la siguiente explicación dada por otra alumna:

> *“El método de demostración por reducción al absurdo es un método propio de la lógica clásica, pues este consiste en suponer la negación de lo que se desea demostrar, y en la lógica clásica al ser esta bivalente, la negación es verdadera o falsa y viceversa. Pero existen sistemas formales de lógicas no standard trivalentes o polivalentes, donde el principio del tercero excluido queda sin validez, por ende el método de reducción al absurdo no tiene un fundamento lógico en el cual basarse. Por lo mencionado, mi opinión es que en ciencias que se basan en la lógica clásica el método puede aplicarse, pero en las lógicas no clásicas no. De igual manera fuera del escenario académico, si un razonamiento tiene deducciones de lógica clásica podrá aplicarse el método de reducción al absurdo, si el razonamiento está fuera de ella, no”.*

Es notorio que en el comentario de esta estudiante, se explicita el único caso del grupo de estudiantes encuestados en el que se manifiesta la posibilidad de que existan escenarios académicos para los cuales es posible la no validez de las argumentaciones por reducción al absurdo. Este comentario se referiría por ejemplo a ciencias construidas sobre la base de lógicas divergentes de la clásica, como las que hemos presentado en el capítulo 7. La existencia de estas lógicas, no ha sido estudiada formalmente por este grupo de estudiantes en ninguna de las asignaturas de la carrera, si bien en algún momento de la asignatura Fundamentos de la matemática se ha deslizado algún comentario acerca de la existencia y aplicaciones de las mismas y de las implicaciones que pueden tener estas lógicas.

En el siguiente cuadro es posible visualizar de manera resumida los resultados de esta etapa de la experimentación:

Ejemplo presentado	**Respuestas**	**Porcentaje**		**Respuestas**	**Porcentaje**
Situaciones ad hoc	8	16 %	Situaciones ad hoc	8	16 %
Enigmas, detectives, ingenio	6	12 %	Enigmas	6	12 %
Política	4	8 %	Reconocimiento de debilidad	6	12 %
Noticias en diarios	2	4 %			
Creencias religiosas y metafísicas	4	8 %	Creencias	4	8 %
Razonamientos no monotónicos	10	20 %	No reconocimiento	26	52 %
Situaciones absurdas	7	14 %			
No existencia	9	18 %			

Cuadro 15: Resultados de la experimentación sobre identificación de aplicaciones de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos.

c. Algunas conclusiones extraídas de esta etapa de experimentación

Por una parte, en relación a los escenarios no académicos, se puede inferir que en muchos casos no son detectadas estas argumentaciones como una manera de razonar natural y que a veces son construidas por los entrevistados situaciones particulares para ejemplificarlas, aunque reconocen que no se trata de una manera usual de razonar en lo cotidiano. Otra idea que no aparece claramente manifestada en las respuestas obtenidas es la diferenciación entre absurdo e imposible en matemática y en situaciones cotidianas. Surgen además en los ejemplos presentados, otras formas de razonamiento no admitidos por la lógica clásica, como ser pensamientos no monotónicos o las lógicas polivalentes.

En algunos casos, al buscar ejemplos en escenarios no académicos, algunos alumnos debieron recurrir a situaciones en las que se conjugan creencias, relaciones humanas, política, juegos dialécticos o de ingenio. Sin embargo, muchos de los que presentan estas situaciones, las critican por la falta de solidez o la debilidad de sus argumentos o por intervenir en ellas alguna característica que no es propia de la lógica clásica.

Reflexiones acerca de la argumentación por reducción al absurdo en escenarios no académicos

Resumiendo, a través de los resultados obtenidos, puede concluirse que existe influencia de las prácticas profesionales en las argumentaciones que se realizan y reconocer a la argumentación por reducción al absurdo como una construcción sociocultural, no tratándose de una manera de argumentar innata en el pensamiento humano, sino que es adquirida y que su uso se suele restringir a escenarios académicos.

Se detecta de la presentación que hacen algunos de los alumnos que intervinieron en esta etapa de la experimentación, que la mayoría no presentaron ejemplos de aplicación de la estrategia de argumentación por reducción al absurdo en escenarios no académicos. Algunos, incluso defendieron posiciones que pusieron de manifiesto que la lógica clásica es una construcción sociocultural propia de determinados escenarios. Teniendo en cuenta esta afirmación, es inminente afirmar que las formas de argumentar son construcciones socioculturales que surgen dentro de determinados escenarios, y en el caso particular de la reducción al absurdo, el escenario en el que surgió y se mantuvo debe tener influencia aristotélica para permitir la validez de los principios del tercero excluido y de no contradicción que la fundamentan.

En busca de las argumentaciones utilizadas fuera de escenarios escolares de la matemática

Para investigar algunas características más acerca de las argumentaciones que se utilizan fuera del aula de matemática, se han realizado dos entrevistas. Una de ellas, a un estudiante de Licenciatura en Letras (J.), la otra a un psicoanalista que ejerce además la docencia (D.). Los perfiles de los entrevistados fueron elegidos por su formación alejada de la matemática, pero en contacto con disciplinas en las que la argumentación posee un papel significativo. De esta manera se intentó reconocer la importancia que tienen para disciplinas no matemáticas las formas de argumentación que se construyen en el aula de matemática. Se transcriben a continuación fragmentos y comentarios de ambas entrevistas. Para su realización, tuvieron un cuestionario básico, pero sobre el diálogo y teniendo en cuenta el curso que tomaban las respuestas, surgieron otras preguntas.

La primera pregunta planteada se refirió a las concepciones sobre la argumentación y su finalidad que tienen los entrevistados.

La respuesta del psicoanalista D., fue clara:

> *"Argumentar es darle sentido a algo. Es efectuar una proposición que describa, explique y fundamente la razón de ser de lo que se quiere demostrar. Se argumenta para disminuir aunque sea en parte, la distancia entre mi ignorancia y los fenómenos de la realidad (de cualquier realidad: fáctica, imaginaria, formal, conceptual, etc.).*
> *También se argumenta para ganar una batalla dialéctica. Convencer a otro sobre algo."*

En el caso de J., recurrió a ejemplos:

> *"A mí me parece que, si estás en la calle y dos tipos chocan, entonces uno dice 'Vos me pasaste mal', y el otro dice 'Sí, pero vos ibas demasiado rápido'. Entonces la argumentación en ese sentido sería*

> *buscar quién tiene la razón. En un plano completamente empírico: vos, fuiste el culpable o no. Puede ser una culpabilidad, puede ser una responsabilidad. Yo creo que la argumentación está enganchada siempre con establecer una jerarquía intelectual, a mí me parece. Jerarquía intelectual, porque si yo tengo razón, vos estás equivocada. Ahora, esto sería el plano más básico.”*

La primera visión, une la argumentación a la dialéctica, por una parte al referirse a una “batalla dialéctica”, pero también a dar sentido a las afirmaciones que se realizan, describiendo, explicando y fundamentando “la razón de ser de lo que se quiere demostrar”.

La visión del estudiante de letras, se orienta a la determinación de quién tiene la razón y quién está equivocado ante una afirmación. Al ser preguntado acerca de la unión que realiza entre la concepción de argumentación y la de verdad, prosigue identificando un esquema de argumentación y haciendo referencia a la verdad en las ciencias:

> *“También puede haber discusiones, pero una argumentación, a mí, por ejemplo, me enseñaron cómo funciona. Si yo tengo que describirte por qué el culpable del choque fuiste vos: introducción, tres partes: tesis, antitesis y después defender tu postura y llegar a una conclusión. Eso sería una argumentación.*
> *Y a nivel científico sí sería llegar a una verdad, ¿no? Por ejemplo, se me ocurre que cuando un científico está argumentando sobre algo, pongámoslo como una pelea. La argumentación es como una pelea entre dos fuerzas que una dice: A y otra dice no A, o una A y otra B.”*

En estas ideas vertidas, aparece una diferenciación entre la argumentación científica y la argumentación en escenarios no académicos. En la ciencia, se ve subyacente la bivalencia y el tercero excluido. En los escenarios no académicos, la discusión, la defensa de una postura; esta defensa no es unida fuertemente al tercero excluido. Pero en ambos casos, surge la argumentación como una construcción social, que cobra sentido en el intercambio con el otro, en demostrar algo a alguien:

> *"Cuando una persona sola está tratando de demostrar algo a nivel más científico, la especie de pelea sería justamente con las hipótesis. Entonces estaría peleando con él mismo y ahí parte el trabajo intelectual... Y después lo que pasa es que la argumentación está seguramente unida a otro, porque yo te puedo demostrar, por ejemplo, la relatividad, y la puedo demostrar en mi cuarto, solo, y llegar a la conclusión perfecta, pero después tengo que irme a un congreso de físicos a argumentar."*
>
> *"Argumentar es demostrar algo frente a una persona, que puede o no estar dispuesta a creerte, pero la idea es la convicción y demostrarle certeza. Tengo que argumentar frente a otro. Sé que no te estoy respondiendo sobre la argumentación en sí, sino sobre el hecho de argumentar, pero creo que está unido a demostrar algo".*

En la entrevista al psicoanalista, se intentó que caracterizara las argumentaciones presentes en tres escenarios distintos en los que él actúa: en el ejercicio de su profesión, en el aula y en escenarios cotidianos. En relación a la argumentación relacionada con el psicoanálisis, afirmó:

> *"A los tipos de argumentación en el acto psicoanalítico los llamamos intervenciones. En verdad no son argumentaciones propiamente dichas porque no tienen como fin convencer al otro. Las intervenciones a diferencia de las argumentaciones, no tienen como finalidad polemizar o convencer. La intervención en psicoanálisis tiene sentido en tanto movilice los recursos internos que de por sí tiene el paciente en tanto que en ellos aparece la verdad que no quiere saber, es decir, su propia verdad inconsciente. La intervención por excelencia en la práctica analítica es la interpretación. La misma consiste en darle sentido a las distintas formaciones que emergen del inconsciente, ellas pueden ser relatos de la vida cotidiana, mitos familiares, quejas del destino, lapsus*

linguales, actos fallidos, equivocaciones y contratiempos. Lo central en el argumento interpretativo es develar lo negado, reprimido o desplazado por el propio sujeto. Esta interpretación puede ser una palabra, un gesto, una exclamación, una relación analógica, una relación causal o una simple relación asociativa. Lo específico de la interpretación es que se dirige al sujeto del inconsciente, no al sujeto del conocimiento, en tanto que este último es el artífice del no saber que insiste en su repetición sintomática.

Otra clase de intervención en análisis son los señalamientos. Estos sí se dirigen al sujeto del conocimiento, en tanto que tratan te ubicar distintos señuelos, peligros, orientaciones e indicaciones preventivas que hagan posible la supervivencia de la situación analítica al mismo tiempo que resguarde al paciente de su insistencia repetitiva en procura de hacerse daño."

En relación a estas argumentaciones, se observa que se trata de construcciones de naturaleza totalmente distinta de la argumentación matemática, inmersas en prácticas sociales diferentes de la demostración. Las prácticas sociales serían en este caso las intervenciones y los análisis de señalamientos.

Sobre las argumentaciones cotidianas, la respuesta se centró en ejemplos en los que el fundamento de la argumentación puede no ser la lógica, sino ideas religiosas, científicas, mágicas o intuitivas, surgiendo la necesidad de la argumentación para mantener coherencia interna entre las creencias y los hechos:

"Permanentemente estamos rodeados de argumentaciones. En la familia, con amigos, prendiendo la tele, en la publicidad, en internet, en la calle y en la radio. Con mayor o menor grado todas estas argumentaciones tienen una lógica interna.

'No se debe usar preservativo porque se contraría la voluntad de Dios,' dice el obispo. 'Se debe usar preservativo porque es el mejor método de prevención contra el VIH', dice el médico epidemiólogo. Ambas

> *argumentaciones responden a lógicas diferentes, la primera religiosa, la segunda científica.*
> *También las hay de tipo mágico. 'No pases por debajo de una escalera porque tendrás mala suerte', dice la señora de la esquina.*
> *Otra que se escucha en de tipo intuitivo, aquel que te dice que si fulana sale con tal chico le va a ir mal, porque lo presiente.*
> *El carácter de argumentación en todos estos casos reside en que hay una coherencia interna de carácter lógico que le da sentido a dicha proposición."*

En el aula, identifica dos tipos de argumentaciones. Las de los alumnos, con bases similares a las de la vida cotidiana, y las que realiza el docente, unidas muchas veces a esquemas mayéuticos que combinan la inducción y la deducción:

> *"En mi práctica profesional como docente muchas veces aparecen argumentaciones similares a las de la vida cotidiana, son la periferia de las clases. 'No pude leer porque estuve enfermo o llegué tarde porque perdí el tren' son argumentaciones habituales que los alumnos realizan a lo largo de una cursada.*
> *Ahora bien, en lo específico del acto docente, la argumentación que uso es de tipo mayéutica (interrogar al texto o la "cosa") de tipo inductiva, por ejemplo a partir de la reflexión que los alumnos hacen de las entrevistas a profesores y estudiantes, y, deductivas y sintéticas, a partir de la elaboración de hipótesis sobre el adolescente escolarizado de hoy, el rol docente, el poder en las instituciones y la comunicación entre los distintos actores escolares. En el acto docente uno se dirige al sujeto del conocimiento. Es en esta dimensión donde se realizan las operaciones argumentativas que provocan un aprendizaje determinado.*
> *Y si bien no se parece en nada al acto psicoanalítico, hay algo que se transmite por fuera del poder argumentativo que sí se dirige al inconsciente de cada alumno, por más que ellos no se den cuenta (o sí) y uno no lo maneje conscientemente. Me refiero a la otra comunicación,*

a los gestos, a las posturas, al andar la clase y sobre todo al compromiso concreto con ellos, la institución y el saber que se quiere enseñar".

Sobre el final de la respuesta anterior, se ponen de manifiesto elementos de comunicación no verbales y que forman parte de las argumentaciones no académicas.

A continuación se preguntó a los entrevistados acerca de cuáles son los elementos que confieren fuerza a las argumentaciones. El estudiante de letras, concentró la fuerza de una argumentación en elementos relacionados con la comunicación:

"La fuerza de una argumentación la da la facilidad, la claridad con que hablás. La manera en que hablás. Por ejemplo, yo te puedo decir: 'El folículo piloso del felino se debilita en verano y cae; al unirse a la textura de los almohadones, ensució toda la superficie', o te puedo decir: 'Es que al gato, es verano y se le cayó todo el pelo'. Yo creo que la argumentación tiene que ir con una cierta facilidad, porque si digo folículo piloso, superficie, textura… Algo importante es no enmarañarse, creo que tiene que ser inteligible, que sea claro".

La característica que da fuerza, para él es la posibilidad de que el interlocutor comprenda lo que se está afirmando, la idea de claridad se une a la existencia de códigos comunes de los interlocutores.

Al hacer referencia a la fuerza de las argumentaciones en el teatro, las respuestas del estudiante fueron:

"¿Qué es lo que le da fuerza? Primero, los actores y, segundo, lo escrito, las palabras. De los actores, el ímpetu. La convicción con que argumentan. Para mí eso es importante y hay que crear. Eso es lo que tiene el teatro."

Para el estudiante en letras, la fuerza de una argumentación se sustenta básicamente en la manera en que se argumenta, se logra una argumentación fuerte cuando se entiende lo que se está afirmando y se lo afirma con convicción. El psicoanalista entrevistado se refiere no sólo a aspectos formales de la argumentación, también tiene para él importancia la semántica:

> *"Hay dos aspectos que le dan mayor o menor fuerza a una argumentación. Uno es en el plano de qué se argumenta, el otro en el plano de cómo se argumenta.*
>
> *Para que una argumentación tenga fuerza debe tener buenos fundamentos, un buen desarrollo y explicitación y por último una conclusión que a su vez le sea significativa al otro que me escucha. Sino, no convence. Ahora bien, la mejor argumentación pierde fuerza si se transmite sin ganas, sin convicción, sin pasión. Ahí es donde cobra mayor fuerza el cómo se argumenta, con que grado de coherencia interna mantengo mi posición. Si mi ser está jugado ahí".*

Otro aspecto abordado en las entrevistas, se refirió a si las formas de argumentar son innatas o construidas. Se buscaba indagar si los entrevistados reconocían su naturaleza de construcción sociocultural o tenían una visión aristotélica de la razón. Las respuestas del estudiante de letras, se orientaron en un comienzo a la influencia del medio familiar y social, pero identificó también influencias de la escuela:

> *Viste que a veces los colectiveros llevan a sus hijos en el colectivo, que oyen... y lo llevan al chico todos los veranos y lo oyen al padre, y el nene aprendió por ósmosis casi. Y es así, aprendió a argumentar y cuando está en el colegio... habla igual.*
>
> *Bueno, la herencia familiar es importante en un sentido. En el sentido científico, los libros podrían ser una especie de forma de aprender a argumentar… Con método. La forma de argumentar es con método que se adquiere con libros, o con profesores".*

Al preguntarle sobre las causas por las que se construye la argumentación, y cómo relacionaba lo que decía con las ideas aristotélicas, su opinión fue cambiando a lo largo de su respuesta:

> *Bueno, podemos agregar algo a todo lo que dijimos antes: argumentar es una necesidad. Es una necesidad del hombre, de su inteligencia, de su voluntad. Para Aristóteles, el hombre es un ser racional que tiene inteligencia y voluntad, aparte de espíritu. Está bueno esto, por ahí la argumentación reemplaza a la magia, en cierto sentido.*
>
> *Y sí, puede ser que la argumentación no sea innata. No, por ahí otras culturas pueden argumentar de otra manera. Es seguro. ¿Cómo hacen para llegar a demostraciones como las que nosotros llegamos? No es innato, es cultural.*
>
> *Lo innato sería la necesidad. La necesidad de estar en el otro. Porque cuando vos pudiste demostrar algo o crear algo, ya estás en el otro. Cuando yo escribo algo estoy en el otro y eso está bueno. Con eso pasa lo mismo. La gente que descubre cosas está en el otro. Los chinos que inventaron el dvd están en cada dvd que se prende. Por lo menos para ellos, aunque pasen al anonimato después. Eso es estar en el otro".*

En esta visión, la argumentación es comprendida como una construcción sociocultural, claramente se observa a través de las dudas y los cambios que presenta la respuesta, que J. no se había planteado nunca esta pregunta. En su planteo la argumentación es una construcción dada como respuesta a una práctica social: la necesidad de "estar en el otro", en este caso a través de la permanencia de las ideas.

D., el analista también entiende a la argumentación como una construcción sociocultural, pero el reconocimiento de lo innato es diferente:

> *"Lo innato es el aparato mental que permite argumentar. Sin neocortex no hay argumentación. Es decir, una mesa no puede argumentar, incluso un humano con un accidente cerebro-vascular, falla en la*

> *conexión lógica que requiere toda argumentación, sea de la clase que fuere.*
>
> *En la niñez se aprende la herramienta principal con la que se argumenta, me refiero al lenguaje. Sin un sistema de signos y símbolos compartidos es imposible argumentar. En ese proceso el mecanismo psíquico principal puesto en juego es la identificación. El niño suele argumentar con palabras prestadas. La interacción con la familia aquí juega un papel principal.*
>
> *Con el tiempo, la influencia de la escuela, los maestros, los amigos, la tele, los medios de comunicación, etc. ... le permiten al sujeto construir una trama de argumentos y contra-argumentos que le posibilitan negociar para vivir, sea en su trabajo, en su familia, y en toda relación interpersonal. Con lo cual el ejercicio de la argumentación está en un permanente proceso de deconstrucción y construcción."*

Ante la pregunta directa de si es posible que distintas culturas utilicen diversas formas de argumentación, respondió:

> *"Sí, absolutamente. La forma de argumentar tiene todo que ver con el contexto cultural y socio-histórico. Es más, se argumenta distinto en diferentes lenguas maternas. No somos iguales en ello los latinos que los sajones, por ejemplo.*
>
> *La razón de dicha diferencia es que el proceso mismo de argumentación se va construyendo desde la estructura misma del lenguaje hasta la interacción social cotidiana. Se negocia diferente de acuerdo a la cultura. Y allí, en el modo de negociar se ve el poder de la argumentación".*

Finalmente se les preguntó a los entrevistados si habían estudiado cursos de lógica y cuál había sido su utilidad. Esta pregunta se orientaba a detectar cuál es la importancia que le confieren a la lógica aristotélica para su aplicación en escenarios no matemáticos de diversa índole. El analista afirmó:

> *“Tuve lógica aristotélica en el secundario y simbólica en la facultad. Me sirvió de poco para mi práctica docente y de nada para mi práctica clínica”.*

El estudiante de letras en su respuesta acerca de la utilidad de la lógica aristotélica estudiada en su curso de lógica, no le confirió mayor utilidad:

> *“Sí, a veces cuando te estás comiendo un asado, por ejemplo, con mis amigos. Empezamos: “Si p entonces q, no p, no q”. Te juro que funciona. Pero nosotros lo decimos riendo, lo que pasa es que claro, es como que te ponés como una calculadora. A cada letra le ponés una frase, es gracioso, no sé, los filósofos son así, también. Me parece divertida. No le encuentro otra utilidad”.*

Ambas respuestas, muestran que para los entrevistados, la lógica aristotélica no es aplicada fuera de escenarios académicos de la matemática. Sus percepciones de la lógica se reducen al curso en el que la estudiaron o tiene perfiles lúdicos. En el caso del estudiante de letras, a pesar de que había afirmado anteriormente que los libros y los profesores brindan una manera de adquirir métodos para argumentar, restringió lo aprendido a la utilidad lúdica.

Reflexiones acerca la argumentación en escenarios no matemáticos

Las entrevistas que acabamos de reportar, muestran que las argumentaciones que se realizan en escenarios no matemáticos no se sustentan en principios aristotélicos. No son estos principios los que les dan fuerza, ni es el estudio formal de la lógica reconocido como base para la adquisición de formas de argumentación en escenarios no académicos ni correspondientes a disciplinas no matemáticas.

Sin embargo, las argumentaciones son reconocidas por ellos como construcciones culturales. Los entrevistados, al tener que responder sobre qué es lo innato acerca de las argumentaciones, no respondieron que fuera la manera de razonar, ni la lógica, sino que en un caso se consideró al "*aparato mental*" describiendo al mismo desde el punto de vista biológico y, en el otro, la necesidad de "*estar en el otro*" a través de la demostración o la creación de algo. Estas dos respuestas, una de base científica a través de la biología y, la otra de base filosófica, dan la posibilidad de mirar cómo la forma de razonar no es vista como algo innato en áreas no matemáticas.

Las argumentaciones son reconocidas con sentido en lo social, en la comunicación, en el intercambio con el otro, en demostrar algo a alguien. También se pusieron de manifiesto la existencia de elementos de comunicación no verbales y que forman parte de las argumentaciones no académicas. Estas influyen en la argumentación cotidiana, pero no son tenidas en cuenta en el aula.

En las entrevistas surge el reconocimiento de diferencias entre la argumentación científica y la argumentación en escenarios no académicos, y también en las formas de argumentación presentes en distintos escenarios.

Las experimentaciones presentadas en este capítulo, refuerzan las evidencias anteriores en el sentido de que la argumentación es una construcción sociocultural, pero agregan elementos importantes. En los escenarios no matemáticos se construyen formas de argumentación distintas a las que se construyen en el aula de matemática; estas no son aplicadas en aquellos. Las formas de argumentar que se construyen en cada escenario son distintas entre sí, se basan en fundamentos lógicos de distinta naturaleza, cobran vigencia en el consenso de la sociedad que actúa en ese escenario. La lógica aristotélica no es innata, como ya lo anticipáramos. Pero si la lógica no es innata, ¿qué es lo innato? La necesidad de convencer, de hacer que el otro creo en lo que se dice, de lograr que reconozca que lo que se dice es verdad.

Al llegar a este punto, nos preguntamos: ¿qué es la verdad? El término “verdad” se ha mencionado varias veces a lo largo de esta investigación. El interrogante acerca de si este término tiene el significado en todos los momentos en que se lo usa, lleva a investigar acerca de su significado y en particular de su significado en la matemática y en el aula.

Capítulo 9

Verdad: Concepciones, certeza y demostración

La concepción de verdad se encuentra relacionada con la significatividad, las estrategias de demostración y las argumentaciones que se construyen. Según qué se considera que es la verdad, surgen ideas acerca de cómo demostrar que algo es o no verdadero. La lógica que subyace a cierto escenario también influye en la concepción de verdad.

A lo largo de la historia del pensamiento, las concepciones de verdad se han modificado sensiblemente y no es posible realizar un análisis de las demostraciones sin detenernos al menos un momento a pensar desde la postura socioepistemológica en este concepto.

> *"Los matemáticos han estado siempre convencidos de que 'demostrar verdades' o 'proposiciones verdaderas', una convicción de este tipo no puede ser, evidentemente, más que de orden sentimental o metafísico, y no es precisamente colocándose en el terreno de la matemática cómo se la puede justificar, ni siquiera cómo puede dársele un sentido que no la convierta en una tautología".*

(Bourbaki, 1976, p.24)

Las concepciones de verdad en la filosofía

En filosofía, la verdad es un concepto que varía sustancialmente según cuál sea la posición filosófica a la que se adhiera. A modo de ejemplo, se presentan a continuación algunas de las concepciones de verdad que han sido sustentadas en la historia de la filosofía.

Para Aristóteles la verdad consiste en la adecuación entre el intelecto y lo real. Para saber si una proposición es o no verdadera, es necesario recurrir a la observación de la realidad y comprobar su cumplimiento o no. Se trata, por lo tanto, de una propiedad del juicio intelectual en cuanto a la adecuación a lo que la realidad es. Esta concepción es retomada por Santo Tomás de Aquino en el siglo XIII. En la concepción realista de verdad se distinguen dos tipos de verdad: la verdad gnoseológica o formal y, la verdad óntica o metafísica o trascendental. La verdad gnoseológica se obtiene cuando en entendimiento transforma la primera captación de la esencia. Este es el objeto formal de la inteligencia humana que en su primera captación suele ser confuso y luego debe elaborarse a través de un proceso racional que se denomina conocimiento. La verdad óntica es el fundamento de la verdad gnoseológica. Se refiere a una propiedad del ente en cuanto ente, o sea una propiedad que se identifica con el ente.

Existe también una concepción sociologizante de la verdad. Esta concepción, sustentada por Richard Rorty en el siglo XX, niega la clásica y concibe la verdad como una creencia colectiva, como un acuerdo interpersonal. La verdad se torna, entonces una cuestión de proposiciones del lenguaje, la objetividad reside en la intersubjetividad, no en la adecuación con la realidad. La verdad de una proposición depende del dominio del léxico empleado, del contexto de la comunidad lingüística. El lenguaje determina para esta teoría un modo de pensar, no es su vehículo.

Otra concepción de verdad es la pragmatista. Hacia fines del siglo XIX, William James, identificó la verdad de una idea con la capacidad de actuar. Para esta concepción, una idea es verdadera porque es útil para mejorar la vida del individuo. La verdad es propia de aquello que soluciona mejor los problemas, es lo ventajoso en el modo de pensar, verdadero es aquello que reporte una utilidad. Niega la correlación entre ideas y realidad y se ubica en un empirismo radical antimetafísico. Existe cierto sistema coherente de proposiciones que trae menos dificultades prácticas que otros menos útiles y por lo tanto menos verdaderos.

Por otra parte, Martin Heidegger sostuvo que la verdad surge como descubrimiento. El hombre no encuentra con una verdad contenida en las cosas, su descubrimiento es creador y constitutivo de lo verdadero.

La verdad matemática

Platón presentó a la matemática como la ciencia que daba acceso a la verdad en sí. La verdad es, para esta concepción la concordancia entre lo afirmado y lo que ocurre en el mundo de las ideas.

El concepto aristotélico de verdad es de carácter semántico y se refiere a la verdad o falsedad de las proposiciones. Una proposición científica es verdadera si existe correspondencia entre lo que expresa ella y lo que ocurre en la realidad. Si una proposición es verdadera debido a su estructura lógica, se dice que se trata de una verdad lógica, o sea es lo que se denomina una tautología. Una característica de las verdades lógicas es que son triviales y no informan acerca de lo que ocurre en la realidad.

La clarificación del concepto de verdad matemática, separada de la verdad en general, se remonta al Renacimiento. Hasta entonces no se distinguía entre los objetos matemáticos y los de otras ciencias; todos eran estudiados mediante la intuición y el razonamiento. Los axiomas no podían ser discutidos o puestos en duda, pues debían ser evidentes y por lo tanto entendibles a través de la razón. Las reglas de la lógica se consideraba que habían sido elaboradas por la razón a partir de la experiencia. Son consideradas como una certeza empírica. La concepción aristotélica de verdad matemática, es transmitida durante siglos con muy pocas modificaciones: la realidad es el control para la veracidad de una proposición, y por ende, determina una concepción de verdad absoluta. Recién en el siglo XIX, la visión de la verdad matemática es modificada bruscamente con la aparición de las geometrías no euclidianas. La concepción de verdad absoluta es abandonada: existen tantas verdades como sistemas axiomáticos. Se asume una concepción relativa de verdad. Los axiomas dejan de ser evidentes, simplemente son elegidos y asumidos sin demostración, son convenciones. La noción aristotélica de verdad pasa a carecer se sentido. La verdad matemática pasa a ser algo que se transmite a través de la deducción. La verdad aristotélica se inscribe dentro de una teoría de la correspondencia; la verdad matemática que surgió a partir del siglo XIX, dentro de una teoría de la coherencia.

Por su parte, para los matemáticos formalistas, la verdad adquiere un carácter sintáctico: una proposición es verdadera si y sólo si es un teorema, o sea que es demostrable a partir de axiomas. Para ellos, verdad significa deducibilidad a partir de axiomas, o sea demostrabilidad.

Las fuentes del conocimiento

El conocimiento científico se adquiere de distintas maneras, sus fuentes se correlacionan con la visión epistemológica que se tiene. Según qué se considera que es la verdad y qué características tiene la ciencia, puede ser distinta la manera en que se conoce y las fuentes que se consideran válidas.

Algunas de las fuentes del conocimiento son:

- *la experiencia*: se basa en los sentidos, es una de las fuentes básicas de conocimiento. Su confiabilidad puede no ser segura.

- *el razonamiento a partir de situaciones semejantes*: se puede basar en conocimientos empíricos previos, pero existe un método coordinado por la razón.
- *el razonamiento formal*: la experiencia no tiene cabida, sólo la razón.
- *el argumento de autoridad:* el conocimiento no ha sido elaborado por el interlocutor, sino que lo recibe de un tercero y lo asume como válido. Se puede hablar de una fuente derivada de conocimiento.
- *la intuición:* los filósofos se refieren a tres clases de intuición: la sensible, la intelectual y la emocional. Las dos últimas se constituyen en certidumbres a través de las cuales se contempla la realidad.
- *la fe:* es considerada como fuente de conocimiento que no requiere prueba, se transforma en creencia.

Cada una de estas fuentes de conocimiento, son esenciales para la obtención de conocimientos. Distintas disciplinas establecen sus bases en algunas de ellas. No todas las fuentes que se han mencionado son reconocidas como fuentes valederas de conocimiento por una comunidad científica.

El reconocimiento de las fuentes de conocimiento es social y depende de la comunidad que comparte el conocimiento el reconocimiento o no de tales fuentes y la manera en la que las manifiesta y utiliza.

La certeza en el aula de matemática

Desde el punto de vista cognitivo, es preciso reflexionar acerca de la certeza en los resultados matemáticos. La certeza de algo, permite afirmar que es verdad. En la visión clásica, es la razón la que otorga certeza a las afirmaciones de la matemática por medio de la deducción. Sin embargo, una situación que encontramos en el aula de matemática es la siguiente: se enuncia una propiedad y se la demuestra, a continuación los alumnos prueban en casos particulares para convencerse de que lo que dice la proposición es cierto. Entonces, la demostración deductiva no les ha dado certeza de que la propiedad se verifica... La verificación con ejemplos les da más certeza. Otras veces, al proponer el docente que se efectúe una demostración formal de la propiedad, los alumnos manifiestan que no es necesaria pues están convencidos de su validez, porque es evidente. Es posible preguntar entonces cuáles son sus criterios de validez, cuáles son las fuentes de conocimiento en las que confían.

En el escenario escolar, la aparición de dudas y certezas de los estudiantes se relacionan con sus concepciones y convicciones. Existen investigaciones acerca de los esquemas de convicción de los estudiantes (Harel & Sowder, 1998). Existen esquemas de convicción externos, empíricos o deductivos. Los externos validan las conjeturas basándose en una única fuente de conocimiento externa del estudiante. Pueden ser por autoridad, rituales o simbólicos. Un esquema ritual se refiere a la aparición de ciertas estructuras con aspecto de demostración, que repite argumentaciones similares desde el punto de vista formal a algunas que han sido aceptadas anteriormente. Un esquema por autoridad, consiste en adquirir la convicción de un resultado porque lo dice alguien, como el docente, o porque se encuentra en un libro. El criterio de autoridad refleja la confianza en la infalibilidad de la fuente. En el esquema simbólico, las conjeturas se validan porque la argumentación presentada tiene un estilo simbólico, o sea que se encuentra formalizada a través de símbolos matemáticos. En los esquemas empíricos, la certeza se adquiere a partir de la observación o de la experimentación concreta. Estos pueden ser perceptivos o inductivos, según la validación se realice por medio de imágenes mentales creadas a partir de la percepción o de la evaluación cuantitativa de uno a más casos concretos. Los esquemas de validación deductivos o analíticos, se basan en las deducciones lógicas y se dicen axiomáticos cuando parten de principios no definidos o axiomas, o transformativos cuando incluyen inferencias deductivas a partir de otras afirmaciones o imágenes. Cada uno de estos esquemas de convicción, da origen a argumentaciones que tienen cierto grado de aceptación como demostraciones dentro del aula, según sean los criterios con los que adhieren los estudiantes. Algunas afirmaciones les resultarán evidentes, otras requerirán de demostración.

En el aula, pueden reconocerse todos estos esquemas de convicción en distintos momentos. Los esquemas deductivos serían los que propondría una visión aristotélica como generadores de certeza, sin embargo en el aula de matemática también se encuentran presentes los otros esquemas. Se presentan a continuación algunos ejemplos en los que estos se ponen de manifiesto.

Ante una propiedad, puede ser creída y defendida "porque lo dijo el profesor", "porque me lo explicó mi hermano", "porque lo leí en un libro". Claramente, se trata de esquemas de autoridad.

En otras situaciones, los alumnos transfieren esquemas de un tema a otro e intentan aplicarlos en ese momento, por ejemplo "*para maximizar o minimizar algo, debo derivar e igualar la derivada primera a cero*", aplicando este razonamiento a un problema de teoría de grafos en el que se pide la cantidad mínima de aristas para realizar un camino entre dos vértices, tras obtener el resultado mediante algún algoritmo de teoría de grafos, intentan buscar una función para minimizar para validar la respuesta obtenida. Se pone de manifiesto en este ejemplo un esquema de convicción de carácter ritual, ya que intentan transferir la noción analítica de minimización a otra construcción matemática.

Los ejemplos de convicción por simbolismo, constituyen una consecuencia de pensar que todo pensamiento matemático debe ser expresado simbólicamente. Es habitual que si se pide a los alumnos una demostración la expresen con sus palabras y no la acepten sin embargo, como prueba de certeza para la matemática. Después de haber explicado y justificado cada paso, piden que se escriba simbólicamente la demostración. Les cuesta aceptar la corrección de una demostración matemática en la que no aparecen símbolos. Claramente se trata de una confusión entre los términos formalismo y rigor.

Los esquemas de convicción perceptivos se encuentran relacionados por lo general con la visualización. Como ejemplo de su presencia en el aula, podemos mencionar el uso de figuras de análisis, o bien la prueba de que una propiedad es cierta a través de verificarla en una figura trazada por el alumno. Es usual recibir como respuesta: *"¿por qué tengo que demostrarlo, si 'se ve'?"* También en esta categoría se encuentran las argumentaciones que utilizan material concreto o manipulativo, como trozos de papel, cubos, geoplano, etc. En la verificación de una propiedad en varios ejemplos, se manifiestan los esquemas inductivos. Este tipo de convicción obtenida a partir de la presentación de uno o varios ejemplos, es muy utilizada por los estudiantes.

Reflexiones sobre la verdad y el progreso en matemática

Al llegar a este punto, cabe preguntarse si es posible que una afirmación matemática que se considere demostrada en la actualidad, pueda ser considerada falsa en el futuro, es decir, si algún criterio de certeza que actualmente sea aceptado por la comunidad matemática puede ser modificado en el futuro. En la respuesta a esta pregunta consideramos necesario aclarar previamente algunos conceptos: ¿Qué significa que una afirmación esté demostrada en la actualidad para la matemática? ¿Qué significa que una afirmación sea falsa? ¿Qué puede llevar a una proposición a no ser cierta? ¿Es sinónimo que una proposición sea no cierta a que sea falsa? ¿Qué consecuencias podría tener la suposición de la pregunta formulada?

El paradigma de validación de la matemática actual es el deductivo. Esto significa que si se afirma que una proposición matemática ha sido demostrada, existe un encadenamiento deductivo que permite llegar a ella a partir de las hipótesis explícitas o implícitas que se han aceptado. Decir que una propiedad es falsa equivale a que su negación es verdadera, y por lo tanto ha sido demostrada. Se debe tener en cuenta en esta aseveración, que la matemática actual se ha construido sobre la lógica aristotélica.

Una propiedad que actualmente sea considerada como verdadera, habrá sido analizada por la comunidad científica y aceptada como tal. Esto significa que, teniendo en cuenta el paradigma de validación de la matemática actual, o sea el método deductivo, ha surgido una demostración que la comunidad científica aceptó como tal.

Si posteriormente se observara en dicha demostración un error, o sea un paso de la misma que no está correctamente deducido, esto implicaría que la propiedad no está bien demostrada y que a la comunidad se le pasó como aceptable un paso erróneo en la deducción. (Históricamente ha ocurrido, por falta de consideración de alguna hipótesis, o falta de contemplación de algún caso). Este tipo de error desde el punto de vista lógico se interpreta como que la demostración, a pesar de que fuera oportunamente aceptada por la comunidad científica, no es correcta.

Otra posibilidad para considerar que una propiedad demostrada y por lo tanto aceptada como verdadera deje de serlo es que ocurra en la matemática un cambio de paradigma de validación. La mayoría de los paradigmas de validación que han surgido en la historia de la matemática son extensiones. Un sistema es *extensión* de otro si contiene nuevo vocabulario, además del compartido y tiene nuevas inferencias que esencialmente se refieren al nuevo vocabulario. Esto significa que respetan como verdaderos los principios lógicos existentes y por lo tanto aquellas propiedades que lo eran con el paradigma anterior, aunque se modifiquen los métodos de validación. Por ejemplo con el nacimiento de la matemática demostrativa en Grecia, se analizan las propiedades matemáticas de aquella época; las que pasaron la prueba de ser demostradas siguieron siendo consideradas verdaderas, para las que no se encontró una demostración si se encontró un contraejemplo se las consideró falsas. La otra posibilidad es que hayan quedado sin demostrar y se haya encontrado contraejemplo; para esas propiedades su valor de verdad sería desconocido "momentáneamente". Según la visión previa a Gödel, toda proposición matemática es verdadera o falsa. Tras la demostración del teorema de incompletitud, la aceptación de la posibilidad de que una proposición matemática no sea verdadera ni falsa, o sea que no pueda probarse ni su verdad ni su falsedad, remite implícitamente a la consideración de un tercer valor de verdad (no aceptado por la lógica clásica). Hasta Gödel, los matemáticos estaban seguros de la completitud de la matemática, o sea que para cualquier proposición que se considerara, podría ser demostrada ella o su negación. El teorema de Gödel es muy fuerte en ese sentido pues admite la existencia de proposiciones que no podrán ser demostradas como verdaderas ni falsas dentro de la matemática y que aún si se admitieran como axiomas dentro de la teoría conducirían a la aparición de otras con las mismas características que tenían ellas.

Un paradigma de validación de la matemática que no es extensión del clásico es el intuicionista. Para los intuicionistas sólo son válidas las demostraciones constructivas, o sea aquellas que conducen a la construcción del objeto matemático deseado (o su propiedad) en una cantidad finita de pasos. La no aceptación de los métodos de demostración por reducción al absurdo por parte de los intuicionistas dejan sin demostración muchas propiedades matemáticas en cuyas demostraciones se utilizó fuertemente este modo de argumentación; más aún, algunos objetos matemáticos como los números irracionales no son aceptados con el status de tales por los intuicionistas.

Tanto la aparición del teorema de Gödel, como las ideas de los intuicionistas permiten ver posiciones actuales de no aceptación del principio aristotélico del tercero excluido, aunque con distintos fundamentos.

La concepción de verdad en la matemática del siglo XIX, cambió radicalmente en relación con la que predominó hasta ese siglo en Occidente. A partir de este momento, desaparece la concepción absoluta de verdad, tal como había sido concebida por Aristóteles. A partir de entonces no puede hablarse de *la* verdad. Aparece como consecuencia de las geometrías no euclidianas una concepción de verdad relativa, relativa al sistema en el que se esta trabajando, a la teoría correspondiente. Esta concepción está unida a la aparición de sistemas axiomáticos que difieren en algún axioma, como lo son los de las geometrías no euclidianas y la geometría euclidiana. La propiedad importante en los sistemas axiomáticos pasa a ser la consistencia a partir de entonces. El teorema de Gödel da otro golpe más a la concepción de verdad en la matemática: la idea de tener que aceptar la existencia de propiedades de las que no se puede demostrar su verdad o falsedad origina que si se detecta un error en una demostración, las tres posibilidades que se abran sean:

- se encuentra otra demostración (la propiedad es verdadera)
- se demuestra la negación de la propiedad original (la propiedad es falsa)
- no se encuentra la demostración ni de la propiedad ni de su negación (puede seguirse buscando, no se puede determinar si es verdadera o falsa, es indecidible, aunque tal vez en el futuro pase (o no) a alguna de las categorías anteriores)

Según esta posición, no es sinónimo que una propiedad sea no cierta a que sea falsa.

Ante la pregunta de si puede una afirmación matemática hoy demostrada ser falsa en el futuro, la respuesta sería:

- Si la demostración es correcta (o sea no contiene errores) dentro del paradigma de validación actual y no cambia el mismo, entonces no es posible que sea considerada falsa en el futuro.
- Si la demostración es correcta (o sea no contiene errores) dentro del paradigma de validación actual y nos situamos en el futuro en un paradigma de validación que sea extensión del actual, entonces no es posible que sea considerada falsa en el futuro.
- Si no ha habido cambio de paradigma de validación y la demostración contiene algún error, entonces no puede decirse que esté demostrada correctamente, aún cuando la comunidad científica ha hubiese aceptado en la actualidad.
- Si ocurre en el futuro un cambio de paradigma de validación de la matemática a uno que no fuese extensión del actual, entonces es posible que

> no sea cierta, aún si la demostración actual fuese correcta para el paradigma actual. Esto sin embargo no implicaría necesariamente que fuese falsa. Será falsa únicamente si para el nuevo paradigma de validación se demuestra la negación de la propiedad, si no puede ocurrir que la propiedad sea demostrada bajo las normas del nuevo paradigma o que no sea demostrado en él ni la propiedad ni su negación y por lo tanto no sea ni verdadera ni falsa en él.

Los esquemas de convicción analizados y ejemplificados en este capítulo, muestran que no siempre la argumentación deductiva es una “demostración” para nuestros estudiantes. No siempre el tipo de argumentación que caracteriza la práctica social de demostración para la comunidad matemática, cumple la finalidad de validación en el aula. La transferencia de las argumentaciones construidas en la comunidad matemática al aula no se realiza exitosamente. Pero ¿cuáles son las argumentaciones que construyen los estudiantes y llevan al aula? Las construyen fuera del aula, porque en el aula las argumentaciones que se intentan construir son deductivas y de carácter aristotélico, ¿qué ocurre cuando llegan al aula?

Capítulo 10

Argumentaciones que no se enseñan en el aula

A veces se encuentran en el aula ciertos modos de razonamiento que realizan los alumnos que no son acordes con la tradición aristotélica. Se trata en muchas oportunidades de la transferencia a escenarios académicos de formas de argumentar que son utilizados en escenarios cotidianos, que han sido construidos en escenarios no académicos. La visión socioepistemológica de la matemática debe tener en cuenta estas formas de razonamiento, la manera en las que son realizadas y cómo se reflejan en el aprendizaje y validación de resultados matemáticos, ya que denotan la transferencia de los mismos de unos escenarios a otros.

A continuación se presentan algunas de estas formas de argumentación. Junto con los ejemplos que se presentan de cada una de estas maneras de razonar, se abren preguntas, cuyas respuestas conducirán a nuevas investigaciones. La finalidad de este capítulo es mostrar que en los cursos de matemática, no todas las maneras de razonar que se ponen de manifiesto son deductivas. De esta manera, la argumentación deductiva de origen aristotélico vuelve a mostrarse como una construcción sociocultural, que convive con otras formas de argumentación que también han sido construidas socioculturalmente.

Argumentaciones abductivas

El término abducción fue introducido por Pierce (Panizza, 2005), para designar razonamientos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q\quad\quad} \\ p \end{array}$$

En la lógica clásica este es un razonamiento no válido. Esta falacia suele, sin embargo ser utilizada en diversos escenarios para la producción de conocimiento. En escenarios no académicos es utilizado en situaciones en las que se busca una explicación. Recordemos el ejemplo del humo y el fuego que se presentó en el capítulo dedicado a las argumentaciones sin influencia aristotélica al referirnos a las formas lógicas de la India antigua. También en la vida cotidiana, en múltiples oportunidades se razona a partir de evidencias y sobre la base de los conocimientos que se posee, se formula una hipótesis acerca de cuál puede ser la causa del hecho observado.

La obtención de la conclusión en una argumentación abductiva no se realiza a partir de los datos o premisas, sino que involucran una manera de mirar e interpretar las mismas, extrayendo de ellas informaciones significativas y poniéndolas en relación con otros hechos que las expliquen.

Mientras que en el caso de la lógica clásica, las conclusiones deducidas son siempre verdaderas y tienen todas el mismo valor de verdad, no todas las conclusiones obtenidas a través de argumentaciones abductivas poseen para cada uno la misma importancia y valor de verdad:

> *“Nuestras creencias y valores a menudo se expresan como condicionales (‘esto pasa porque...’, ‘si haces esto quiere decir que...’, etc.) los cuales se ponen en juego en tanto reglas de los procesos abductivos. El grado de convicción con que otorgamos valor de prueba a los razonamientos abductivos, y el nivel de apego a nuestras creencias y valores, condicionan nuestra capacidad de poner a prueba las conclusiones”.*
>
> (Panizza, 2005, p.48)

En algunos casos la conclusión inferida tiene mayor probabilidad de ser cierta que en otros. La conclusión se enuncia a veces por medio de un “tal vez” o un “quizá”. La fuerza de las creencias acerca de la manera en la que se desarrollan los hechos o el valor de las pruebas a las que se someten las conclusiones resultan fundamentales en el momento de afirmar la conclusión.

En el aula de matemática, los alumnos muchas veces buscan explicaciones de la verdad o la falsedad de una proposición. La explicación es una de las funciones de la demostración (de Villiers, 1993). Mediante ella, es posible exhibir los por qué de la verdad, profundizando en las causas correspondientes. Sin embargo no siempre recurren a la demostración como herramienta para explicar.

La concepción de los condicionales en los estudiantes suele ser causal y es común que al preguntarles la explicación de cierto proceso que hayan utilizado en la resolución de un problema, acudan a razonamientos abductivos. Esto quizá se deba a que confundan la estructura condicional con la bicondicional y de esta manera asignan a las argumentaciones abductivas carácter de válidas.

Si se considera la implicación de Diodoro, que tal como se recordó anteriormente no considera verdadera una proposición cuyo valor de verdad sea $F \Rightarrow V$, resulta que son válidas las formas de razonamiento siguientes:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{A \qquad\quad} \\ B \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \underline{B \qquad\quad} \\ A \end{array}$$

La primera es el Modus ponens. La segunda es la que justificaría la abducción. Esta última, para la lógica aristotélica sería una falacia.

Veamos un ejemplo de pensamiento abductivo, que se presentó en alumnos de primer año de ingeniería en sistemas. Se presentó a los estudiantes:

"Probar que si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par"

La demostración presentada por varios alumnos fue:

a es par, entonces se puede escribir a=2k

El cuadrado de a es:

$a^2=(2k)^2=4k^2$

que es par.

Al corregir este tipo de demostraciones, se suele afirmar que se trata de una confusión de la hipótesis y la tesis del teorema. Se trata, en realidad de un razonamiento abductivo.

En la vida cotidiana, los razonamientos abductivos son bastante utilizados. Esta forma de argumentación se le reconoce gran valor para lograr argumentos explicativos. Algunas preguntas que se abren ante las situaciones en que se los utiliza en escenarios académicos son: ¿Existe realmente una confusión entre la tesis y la hipótesis del teorema? o, ¿asumen como válidos los razonamientos abductivos, basándose en la implicación de Diodoro? ¿Consideran como válidos únicamente los razonamientos sólidos?

Argumentaciones inductivas

También es frecuente encontrar en el aula argumentaciones inductivas. Los alumnos a veces, ante un enunciado de una propiedad matemática, prueban una cantidad finita, e incluso no muy grande, de casos aislados, concretos, y de eso concluyen que cierta proposición.

Por ejemplo:
Preguntamos a un grupo de alumnos de segundo año de escuela media:

> *"¿De qué cuadrilátero se trata si tiene sus diagonales iguales, perpendiculares y que se corten mutuamente en partes iguales?"*
> Los alumnos comenzaron a trazar segmentos perpendiculares que verifican las condiciones solicitadas: perpendiculares, que se corten mutuamente en partes iguales y que sean iguales entre sí. Cada uno probó en uno o dos casos, compararon resultados, y respondieron: *'Se trata de un cuadrado' ".*

Esta situación se repite en distintos cursos y en distintas ramas de la matemática. Es muy usual que los alumnos extraigan conclusiones a partir de razonamientos inductivos.

Los razonamientos inductivos conducen a conclusiones más o menos probables. No otorgan garantía de la verdad de la proposición. Los razonamientos inductivos no dependen únicamente de la cantidad de casos ensayados y observados.

En matemática se trabaja en general con conjuntos infinitos, por lo tanto existen infinitos casos, lo cual muestra que por inducción al probar un número finito de casos, es posible que no se haya encontrado justo un caso que falsee la propiedad.

La inducción es aplicada en las ciencias sociales y también el las ciencias naturales. Su aplicación en matemática, para obtener un resultado o realizar una hipótesis, es indudable.

El esquema inductivo es uno de los más habituales entre los estudiantes. Además éstos no son conscientes de sus limitaciones, ya que no dan pruebas de su rechazo cuando se les presenta una argumentación inductiva. Sus pruebas inductivas consisten muchas veces en la presentación de un ejemplo o dos, rara vez muestran un contraejemplo, e incluso no expresan que éste invalide la prueba.

Los profesores, hemos intentado hacer evidente a los estudiantes la falibilidad de la inducción, sin embargo, muchos son los casos en los que este es uno de los métodos más utilizados por los alumnos, y que quedan satisfechos de las conclusiones que mediante él extraen.

Durante un diálogo con una alumna de carrera informática, ella afirmó: "*Ustedes los matemáticos también utilizan la inducción. La utilizan cuando comienzan a dar un tema, para que nos demos cuenta que lo que van a enseñar es cierto. Y también usan eso de probar ejemplos, para ver si encuentran uno falso*". De la afirmación anterior, podemos extraer dos observaciones acerca de por qué los estudiantes utilizan la inducción. Primeramente, es cierto que durante las motivaciones de las clases es usual que mostremos uno o dos ejemplos; quizá no comprenden que estamos motivando porque no se los hemos explicado y asumen que es una manera de probar. La segunda oportunidad en la que presentamos ejemplos es en la búsqueda de contraejemplos. Estamos asumiendo que los estudiantes comprenden el papel que desempeñan los contraejemplos pero, ¿Realmente diferencian entre un contraejemplo y un ejemplo? ¿Tienen interiorizada la función del ejemplo, del contraejemplo y de la deducción?

Argumentaciones no monotónicas

Una característica de las lógicas tradicionales es la monotonicidad. Esto significa que agregando nuevas proposiciones (premisas) a un razonamiento, nunca se invalidan viejas conclusiones. O sea que el conjunto de conclusiones o teoremas crece monótonamente con el conjunto de premisas.

Dicho de otra manera: si una proposición es posible que sea inferida a partir de cierto conjunto de premisas, por más que se agreguen nuevas premisas, la proposición seguirá siendo inferida. En la práctica, de hecho, no se utilizan muchas veces todas las premisas de las que se disponen para llegar a una conclusión. Por ejemplo cuando en matemática se demuestra un teorema, no se aplican todos los conocimientos y propiedades que ya han sido demostrados previamente para lograr dicha demostración.

Formalmente, una lógica es monotónica si y solo si:

$$S \subseteq S' \Leftrightarrow \{A: S \vdash A\} \subseteq \{A: S' \vdash A\}$$

Recientemente han aparecido sistemas lógicos que violan la propiedad de monotonicidad. En primera instancia, se tiende a afirmar que la monotonicidad es completamente natural en el pensamiento humano, pero esto no es cierto. Las primeras detecciones de pensamiento no monotónico se han realizado justamente en el contexto del sentido común humano, en escenarios cotidianos.

Lo que caracteriza esta manera de razonar en el ser humano es la habilidad para inferir de una información incompleta. En la vida cotidiana, estamos acostumbrados a no paralizar nuestros pensamientos ante una parcial ignorancia. Para actuar debemos ser capaces de “dibujar” conclusiones, aún sin tener la evidencia suficiente que garantice su corrección. Obviamente estas conclusiones pueden invalidarse a la luz de nuevas informaciones.

Por ejemplo: Es lunes por la mañana y debo contactarme con María. El único hecho establecido es que María trabaja de 8 a 16 en su oficina. Asumo que está allí y llamo por teléfono. Tengo la chance de encontrarla allí, pero es sólo la chance, aunque si me preguntan diré que estoy segura de que está en la oficina. Me atiende una de sus compañeras de trabajo y me informa que está con gripe. Esto cambia la situación. Debo llamar a su casa. La proposición "*María está en la oficina*", que era verdadera es ahora falsa.

Este es un caso en el que se puede apreciar claramente un razonamiento no monotónico. Este término fue introducido por Minsky en 1975 (Alberti et al, 1995). Por razonamiento no monotónico, se entiende la obtención de conclusiones que pueden no ser válidas a la luz de nueva información. Un sistema lógico se llama no monotónico si y sólo si es posible violar la propiedad de monotonicidad.

Podemos decir que el razonamiento no monotónico es la forma de razonar por sentido común. En la vida diaria no solemos esperar que nuestras conclusiones sean verdaderas para siempre, pero tampoco nos manejamos aleatoriamente. Para minimizar el riesgo de cometer errores en nuestros razonamientos, empleamos nuestro conocimiento y experiencia antes de decidir si una conclusión es aceptada y, aunque algunas inferencias de la vida real se tornen erróneas, siempre les demandamos que sean "racionales". La existencia de una justificación racional es el requerimiento fundamental para que cualquier conclusión sea aceptada.

La racionalidad es un concepto vago y difícil de definir. Sin embargo, podemos caracterizarlo; goza de dos propiedades específicas:

a. Es "agente-dependiente": diferentes agentes pueden tener distintas opiniones de qué es racional frente a una situación dada.

b. Es "propósito-dependiente": la aceptación de una proposición como una conclusión racional depende de para qué se la usa.

Para enfatizar la naturaleza subjetiva de las conclusiones del sentido común, se las llama creencias en la literatura de Inteligencia Artificial. Se dice que una proposición p es creída por un agente g (o sea que g ve a p como una conclusión racional), si g está preparado a usar p como si fuera verdadera.

Por patrón de inferencia no monotónica o regla de inferencia no monotónica, se entiende el siguiente esquema:

> *Dada la información A, en ausencia de la evidencia B, inferir la conclusión C.*

Este es el tipo de razonamiento que se aplica en un juicio, cuando se dice que una persona es inocente hasta que se pruebe lo contrario.

El problema de la formalización y revisión de este tipo de razonamiento es complejo. No sólo debemos poder expresar formalmente una idea, sino además saber hasta cuando es posible aceptar una conclusión y desde cuándo se ha tornado inconsistente nuestro sistema, lo que nos obliga a descartar la misma. Otro problema que aparece es el de cuantificación. Se refiere a los significados y aplicaciones de los diversos cuantificadores.

En contraste con otras formas de razonamiento no estándar, esta ha sido rara vez estudiada por los lógicos. En la última década, se han propuesto aproximaciones formales sofisticadas.

Con respecto a las lógicas no monotónicas, su creación fue sin duda alguna motivada por el deseo de emular el pensamiento humano. Las pocas formalizaciones desarrolladas constituyen por un lado, un escollo para su estudio, pero por otro suministran un campo abierto a la investigación y al estudio.

La lógica clásica permite realizar inferencias seguras y consistentes, no obstante, los razonamientos humanos no siempre son consistentes, por las inferencias que realizan los alumnos en el aula a veces tampoco lo son, ya que transfieren esta forma de razonar desde un escenario no académico a uno que sí lo es. El paradigma inferencial de la no-monotonicidad otorga una noción de "racionalidad útil" que no consiste solamente en razonar correctamente garantizando el proceso de deducción lógica, la *racionalidad útil* toma en cuenta no sólo los propósitos de un agente razonador determinado sino también el dominio en el cual éste opera. La inferencia clásica se explica a través de la noción de consecuencia lógica, mientras que la inferencia no-monotónica asume compromisos muy distintos respecto a su contraparte clásica, en especial abandona la noción de consistencia y de validez, asumiendo que el contexto de la información es importante para la representación de las inferencias racionales. El requisito de racionalidad que requieren las inferencias de sentido común parece centrarse en las propiedades formales que debe poseer la relación de consecuencia no-monotónica.

La no monotonicidad de las argumentaciones también aparece en oportunidades en las aulas. El uso de contraejemplos está relacionado con este tipo de argumentación. Volvamos al ejemplo que se presentó en el caso de las argumentaciones abductivas, pero enunciemos de distinta manera la propiedad:
"Probar que si el cuadrado de un número es par, dicho número es par"

Un alumno presentó la siguiente demostración:

> *Sea* $a^2=2k$
>
> *Entonces a tiene que ser par, pues como 2 es primo y la descomposición en números primos de a es única entonces a tiene un factor 2, entonces k tiene que tener un factor 2 para el otro a. Entonces a=2u (siendo u=k/2) y por lo tanto a es par.*
>
> *Pero 2 es par y* $\sqrt{2}$ *no es par pues no es entero. Entonces la propiedad es falsa.*

La demostración presentada tiene dos partes. En la primera utiliza una argumentación deductiva. En la segunda, descubre un contraejemplo y a partir de ahí afirma que la propiedad es falsa. Sin embargo, en el examen presenta ambas argumentaciones.

Cabe preguntar: ¿Qué papel desempeñan los contraejemplos para los alumnos? ¿Acaso ven a la matemática como una construcción no monotónica y no reconocen el carácter deductivo que le da la lógica aristotélica?

Argumentaciones visuales

Existen estudios actuales acerca de los aportes que pueden hacer las demostraciones visuales a la comprensión de la demostración matemática, basadas en la visualización (Hanna, 2000). Estas se sustentan en la utilización de representaciones visuales, el uso de diagramas y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades que se desea demostrar.

Son conocidas las demostraciones de propiedades aritméticas que provienen de la época de Pitágoras. En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto un procedimiento geométrico-analítico de generación de números poligonales, por ejemplo los números triangulares, en el cual cada número se obtiene añadiendo a la figura geométrica del número poligonal anterior, el número de unidades correspondiente al término correspondiente de la progresión aritmética en consideración.

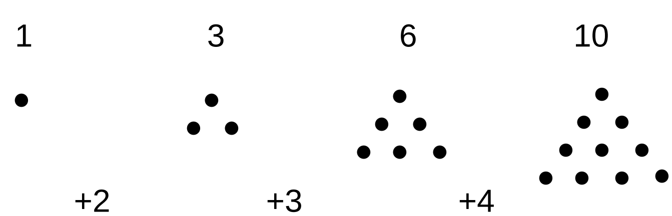


Figura 13: Argumentación visual

En este caso, la percepción de las formas da origen al reconocimiento de los números triangulares. Los recursos visuales permiten en este caso identificar y generar números poligonales. Si se continúa este proceso, en el cálculo del término n-ésimo de la sucesión de números poligonales, es posible transitar desde la fórmula recurrente para generar un número poligonal, obtenida como hemos visto a partir de la visualización, hasta su formulación explícita.

Otro tipo de argumentaciones visuales son las que utilizan recursos computacionales. Pueden mencionarse como ejemplos las construcciones en Cabri Geomètre de los puntos notables de un triángulo. Los alumnos utilizan estas construcciones para visualizar las propiedades correspondientes de las ubicaciones de estos puntos. Quienes utilizan estos recursos en el aula, defienden que en realidad al experimentar con los gráficos obtenidos, se están probando los mismos para una cantidad infinita de casos y que a partir de ellos, es posible referirse a demostraciones visuales. Sin embargo, se preguntan otros cómo extraer la información implícita de las representaciones visuales que permitan construir una demostración válida (Hanna, 2000).

Para los estudiantes, quizá esta sea la manera que menos aceptan de argumentación no deductiva, ya que como se presentó en el capítulo 9 de este trabajo, "no creen" en los gráficos debido a la cantidad de veces que han oído que los dibujos pueden engañar.

Preguntas que surgen son: ¿Qué tipos de argumentaciones gráficas pueden considerarse deductivas? ¿Cuáles son en realidad inductivas? ¿Creerían los estudiantes en ellas si no recibieran el continuo mensaje de que no son válidas?

Argumentaciones a conocimiento cero

Hace unos años, ha surgido la expresión "demostraciones a conocimiento cero" para identificar ciertas formas de argumentación (Hanna, 1997). Se trata de una prueba interactiva basada en protocolos de conocimiento cero. En ella, una persona trata de demostrar a otra que sabe algo, sin enseñarle o transmitírselo. Es una forma de presentar una propiedad matemática a un interlocutor, convenciéndolo de la veracidad del teorema correspondiente y de que el demostrador conoce la misma. Durante esta comunicación se busca el convencimiento y la aceptación del otro.

Esta forma de demostración es sustancialmente distinta a la que se aplica en la matemática clásica, sin embargo resulta interesante desde el punto de vista socioepistemológico en cuanto caracteriza una práctica social constituida por el intercambio de opiniones acerca de ideas matemáticas en escenarios académicos en los que no se presenta la demostración completa, pero que surge de ella la aceptación del resultado.

Su aplicación en el aula se realiza con gran frecuencia, incluso con fines didácticos. Por ejemplo cuando se desea que los estudiantes comprendan y acepten un resultado matemático, pero el docente no se focaliza en la presentación de la demostración en sí del resultado.

Algunas reflexiones acerca de las argumentaciones de los estudiantes

A veces en la tarea docente preocupa que los estudiantes no lleguen a los resultados que como profesores quisiéramos, no se entiende cómo no realizan argumentaciones deductivas correctas, es posible oír de algún docente, la expresión “no razonan”.

> *“Pero los alumnos razonan siempre. Dicho de otra manera, los alumnos no razonan solamente porque la tarea lo demanda [...]. Los alumnos establecen espontáneamente analogías, generalizan, se dan explicaciones, encuentran regularidades, etc*.”.
>
> (Panizza, 2005, p.94)

En efecto, lo que ocurre es que sus formas de razonar no coinciden con la manera deductiva clásica, fundamentada en la tradición aristotélica. Están transfiriendo al escenario del aula formas de argumentación que son propias de escenarios no académicos, de la manera que utilizamos con frecuencia en razonamientos cotidianos.

La comprensión de las demostraciones matemáticas como prácticas sociales, conduce de inmediato a analizar las maneras de argumentar que están presentes en el aula y a pensar acerca de las causas por las que surgen y de qué manera adquieren o no aceptación por parte de los alumnos. El análisis del valor social de estas formas de argumentar, puede dar luz acerca de la comprensión de los mecanismos de validación y explicación de las construcciones matemáticas en el aula.

Una escuela que no solo enseña a argumentar, una escuela que debe comprender cómo argumentan los estudiantes

Consideramos que resulta indispensable una mirada sobre la escuela actual en función de las argumentaciones. Las instituciones educativas se mantienen en la actualidad, o al menos intentan mantenerse, con características que les fueron propias hace años. Intenta mantener sus tareas de manera disciplinadamente racional, esto es "*que permitan distinguir con claridad los espacios del que sabe y del que aprende, del que manda y del que obedece, así como quién es el que evalúa al aprendiz, y cuándo y cómo*" (Barbero, 2006, p.2).

Sin embargo estas instituciones educativas están entrando en un período de crisis que deberá desembocar en un replanteo de sus actividades, de los roles que en ellas se desempeñan. Barbero plantea claramente que la causa de la crisis es que no es posible pensar un modelo escolar que marque los espacios y tiempos de aprendizaje en la sociedad actual. "*Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa*" (Barbero, 2006, p.3). Esta idea parece esencial, ya que llama la atención a buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. La escuela pasa a ser, bajo esta concepción, una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.

En el caso de las argumentaciones, nuestro esquema actual de escuela, ha intentado, siguiendo el esquema aristotélico de ciencia, enseñar formas de argumentar deductivas. Sin embargo, no ha logrado con los estudiantes actuales resultados satisfactorios. Acabamos de mostrar la presencia en el aula de algunas formas de argumentar no deductivas. Éstas en algunas oportunidades parecen incluso más convincentes para los estudiantes. Indudablemente han sido construidas en escenarios no académicos. Son utilizadas en la sociedad para comunicarse, justificar, inferir, defender ideas.

La escuela actual intenta ignorarlas, pero no podemos ignorar que el modelo de comunicación escolar actual es distinto de las dinámicas comunicativas de la sociedad actual, del escenario en el que los estudiantes se desenvuelven, en la que se utilizan recursos orales, gestuales, sonoros, visuales, musicales y escritos.

Estos recursos contribuyen a la construcción de argumentaciones fuera de la escuela, en escenarios no académicos. La escuela no puede ignorarlos. Con el reconocimiento de que nos hallamos en una sociedad educativa, los docentes deberemos prestar atención a estas formas de argumentación y a su construcción.

La socioepistemología al reconocer la construcción social del conocimiento y comprender que éste se lleva a cabo en un escenario determinado y a veces se transfiere a otros escenarios, estudia la manera en la que se produce esa transferencia. En el caso particular del objeto de nuestro estudio, las argumentaciones, hemos podido detectar que las argumentaciones utilizadas por los alumnos en la escuela a veces son construidas fuera de ella. El alumno actúa en escenarios académicos y no académicos, trae argumentaciones construidas en los segundos a los primeros. Si la escuela se mantiene con la convicción de que ella constituye el sistema educativo y no reconoce, según las palabras de Barbero que mencionamos anteriormente, la existencia de una sociedad educativa, no podrá repensarse en la reconstrucción del discurso matemático escolar.

Capítulo 11

Consideraciones finales

Comentarios y conclusiones

En esta investigación se ha presentado a la demostración matemática como una práctica social y a la argumentación matemática como una construcción sociocultural. El enfoque realizado corresponde al de la socioepistemología y el estudio, por lo tanto, se ha focalizado considerando centrales a las de prácticas sociales. Intentando comprender las características de la demostración matemática y las dificultades que se ponen de manifiesto en el aula cuando los estudiantes se encuentran frente a ciertos tipos de demostraciones, se ha reconocido a las argumentaciones como construcciones socioculturales.

Desde la visión socioepistemológica, se puede pensar que la comunidad científica matemática, como una sociedad, tiene como una de sus atribuciones cuidar las formas de validación del conocimiento de esta ciencia, determinando su legitimidad para ella. La actividad humana correspondiente sería hacer matemática, desarrollar actividades matemáticas (investigar, enseñar), su práctica de referencia es la validación de resultados, comprendida como una necesidad de esa comunidad. Consideraremos, entonces, a la demostración como una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. La demostración es, por lo tanto una práctica social característica de la comunidad matemática en cuanto a institución. El contexto natural en que se desarrolla la práctica social, en el caso de la comunidad matemática actual, sería el lógico.

La práctica social de la demostración, no es la misma de una comunidad a otra, se ha modificado y evolucionado de una cultura a otra; no es la misma para distintas comunidades matemáticas. Esto es claramente comprensible desde la socioepistemología, ya que en cada escenario sociocultural, refleja las características de éste, pero su finalidad básica ha sido la legitimación del saber matemático, aunque no es esta su única función. La demostración saca de la subjetividad, cuando se demuestra, se espera que el otro acepte que lo enunciado es verdad. La demostración debe unirse a la normativa, es la que establece cuáles serán las demostraciones aceptadas por esa comunidad. La normativa es distinta, pero la demostración es, para todas ellas, una práctica social tendiente a la validación de resultados.

Aceptar la demostración como una práctica social, nos lleva a utilizar la palabra demostración de una manera distinta a la utilizada normalmente: al ser una práctica social dentro de una comunidad, permite construir argumentaciones que estén de acuerdo con el escenario correspondiente. Al hablar de demostración, no nos restringimos a las demostraciones deductivas características de la comunidad matemática con influencia aristotélica. Esto sería no pensar en la concepción socioepstemológica de la matemática, que la reconoce como una ciencia que se construye en un escenario sociocultural. Si se piensa en otra comunidad, las argumentaciones utilizadas tienen, como se ha presentado en esta tesis, características distintas.

Sabemos que es en el ejercicio de prácticas sociales donde los actores construyen sus conocimientos como herramienta para su intervención. Esa herramienta es el lenguaje lógico. En las actividades humanas de investigar y enseñar matemática, en la práctica social de demostrar, es la argumentación, la que se construye en el escenario sociocultural y que se manifiesta en la práctica social de la demostración. Es la argumentación matemática, la que se refleja en la práctica social de la demostración y se pone en acción en ella. Por ello esta investigación se encara indagando acerca de la construcción sociocultural de la argumentación matemática.

La presencia de comunidades matemáticas en escenarios muy distintos, lleva a comprender la presencia de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación. Esto también permite comprender la posibilidad de aceptar como válidas algunas y no otras de acuerdo con las características básicas de los escenarios en los que ocurren.

Los esquemas de argumentación que actualmente son aceptados dentro de la matemática de nuestra comunidad tienen características que se originaron a través de un largo proceso por el que la lógica aristotélica se convirtió en el sello del comportamiento intelectual en la cultura occidental. Después de Aristóteles, la racionalidad se convirtió en una modalidad del pensar que obtiene su legitimidad de leyes o principios que se consideraron universalmente aceptados y propios del pensamiento humano.

Sin embargo, en esta investigación se ha puesto en evidencia que las formas de argumentación en su carácter de construcciones socioculturales, no son innatas, sino que se han construido y constituyen la base de las prácticas sociales de demostración que caracterizan a la comunidad matemática. Comprendemos que lo innato es la necesidad que tiene el ser humano de demostrar lo que afirma, de convencer al otro, o sea que acude a la argumentación para justificar, explicar o fundamentar lo que afirma. La argumentación es construida dentro de una sociedad, es el escenario sociocultural, por lo tanto, el que da a la argumentación características que le son propias, y que varían de un escenario a otro, impregnándola de sus pensamientos y creencias, de acuerdo con su epistemología.

En el caso particular de las argumentaciones matemáticas por reducción al absurdo, se hallan fuertemente basadas en el principio del tercero excluido y en el principio de no contradicción. Hemos visto cómo son propias del pensamiento lógico de culturas con influencia de la lógica clásica, pero no de culturas que no tuvieron influencia aristotélica. Esto dio evidencia de la naturaleza de construcción sociocultural para las argumentaciones.

El esquema actual de escuela, inmersa en la sociedad occidental, de base aristotélica, reproduce el esquema aristotélico de ciencia, e intenta que los estudiantes razonen utilizando formas de argumentar deductivas. Sin embargo, no ha logrado en la actualidad resultados satisfactorios. En esta investigación, hemos detectado la presencia en el aula de algunas formas de argumentar no deductivas, las que en algunas oportunidades parecen incluso más convincentes para los estudiantes que las deductivas. Muchas de ellas han sido construidas en escenarios no académicos y llegan luego al escenario escolar, donde por lo general, son rechazadas por los docentes. Son utilizadas en la sociedad para comunicarse, justificar, inferir, defender ideas. Las argumentaciones surgen en interacciones para convencer al otro de la verdad de lo que se está afirmando.

En el aula se ponen de manifiesto formas de argumentar que no son todas de carácter deductivo, o sea que no todas se rigen por la lógica aristotélica. En esta investigación hemos identificado algunas de ellas. El análisis de las mismas y las causas por las que se dan en determinados escenarios resultarán, sin lugar a dudas de gran interés para investigaciones futuras, que deberán abordarse desde la visión socioepistemológica para comprender la construcción del pensamiento matemático.

Algunas argumentaciones deductivas características de la matemática occidental, como la reducción al absurdo, por ejemplo, no son significativas para los estudiantes, que en muchas oportunidades las identifican como argumentaciones con características artificiales. En realidad se trata de un esquema de argumentación que es casi exclusivo de escenarios académicos de la matemática. En esta investigación, hemos presentado evidencia de que las formas de argumentar que se construyen y utilizan en escenarios socioculturales no matemáticos tienen características distintas de la argumentación deductiva. Asimismo, en entrevistas realizadas, se pudo observar que las argumentaciones deductivas no se transfieren de la escuela a otros escenarios, sino que en ellos se construyen formas de argumentación que les son propias.

Dentro de la matemática, también es posible identificar el surgimiento y la presencia subyacente de lógicas no aristotélicas. En estas lógicas, no son válidos los principios aristotélicos de no contradicción y del tercero excluido, base de argumentaciones como la reducción al absurdo. Sin embargo, por hallarnos inmersos en una cultura de gran influencia aristotélica, estas lógicas son en cierta manera ignoradas dentro de la matemática y abordadas sólo en aplicaciones.

Demostrar no es una tarea sencilla, y tal como hemos mostrado en este trabajo, su significado y características cambian de una sociedad a otra. Las maneras de argumentar en matemática no se han mantenido estáticas, ya que se trata de construcciones socioculturales.

Para que un resultado sea considerado válido en el aula de matemática, es preciso que los alumnos lo entiendan y crean en el mismo. Si no pueden argumentar por sí mismos para realizar una demostración que tenga sentido par ellos, transfieren el validación a criterios de autoridad.

Para lograr que los alumnos comprendan la necesidad de argumentar matemáticamente e incluso de demostrar propiedades matemáticas, resulta indispensable que construyan la significatividad de la argumentación.

La importancia de esta significatividad deberá ser comprendida por los docentes a partir de asumir a las demostraciones matemáticas como prácticas sociales, sólo de ésta manera es posible que los alumnos comprendan la importancia de la argumentación para justificar y dar validez a las propiedades matemáticas.

Si no se reconoce este status, en el aula se seguirán encontrando situaciones en las cuales las argumentaciones matemáticas no sirven para sustentar las propiedades matemáticas, pues aunque los alumnos repitan estructuras de argumentación aprendidas, éstas no tendrán para ellos significado y por lo tanto no podrán transferir ese conocimiento fuera del escenario del aula, ni a veces siquiera de una temática a otra, o de una asignatura a otra. Las formas de argumentar no deductivas que se encuentran presentes en el aula, pueden ayudar a resolver problemas nuevos; si bien es cierto que deberá estudiarse la manera de asegurar que estas resoluciones sean correctas.

En el proceso de argumentación matemática, visto desde el punto de vista social, surge la necesidad de interpretar enunciados y condiciones, de convencer por medio de las argumentaciones aceptadas como válidas dentro del grupo social, pero para ello es necesario estar convencido uno mismo de la necesidad y validez de las formas de argumentación que se utilizan.

Al modificarse las formas de argumentar son modificadas de un escenario a otro, se encuentran unidas no sólo a técnicas y estructuras aceptadas por la sociedad, sino que también reflejan la concepción de verdad que posee dicha sociedad y la lógica que sustenta su pensamiento. La valorización de los distintos procesos de argumentación, no debe llevar a pensar la no existencia de demostraciones, sino a la comprensión de éstas como una construcción sociocultural, que tienen validez dentro del consenso de una sociedad.

Desde la óptica de la socioepistemología, la demostración matemática no debe, entonces, pensarse como una estructura predeterminada, propia de la matemática, sino de cada escenario en el que se desarrolla la matemática. Es necesario realizar un estudio profundo de las formas de argumentación propias de nuestros escenarios académicos, para poder reconocer y valorar las formas de argumentación presentes en ellos, para determinar cuáles pueden ser aceptadas dentro de esos escenarios y cuáles deberán ser modificadas, mediante su previa interpretación y tras llegar a un consenso en el escenario correspondiente, acerca de las características que debe tener una argumentación para ser considerada válida en él.

Consideramos que en relación con las argumentaciones y con el enfoque socioepistemológico, la escuela actual debería prestar atención a las formas de argumentar que se construyen fuera de la escuela y que, penetran en ella a pesar de que los docentes de matemática las rechacen. Esa búsqueda fuera de la escuela puede dar claves acerca de los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. De esta manera, la escuela pasaría a ser una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.

En resumen, en esta investigación, se ha reconocido que:

- √ A partir de la consideración de la comunidad matemática como sociedad, es posible identificar:
    - o *Sociedad*: comunidad científica matemática
    - o *Actividad humana*: hacer matemática
    - o *Prácticas de referencia*: validación de resultados
    - o *Práctica social*: demostración
    - o *Contexto natural*: lógico
    - o *Herramienta*: lenguaje lógico
    - o *Construcción sociocultural*: argumentación
- √ La demostración como práctica social adquiere un significado distinto, que no se restringe a la demostración deductiva aceptada por la comunidad científica matemática actual
- √ En particular, la demostración como práctica social en el aula de matemática debe ser comprendida de manera distinta que en la comunidad matemática por tratarse de escenarios distintos, aunque en ambos casos se orienta a la validación de resultados
- √ Las argumentaciones son construcciones socioculturales cuya construcción está condicionada al escenario sociocultural en el que se las construye
- √ La forma de argumentar no es innata, lo innato es la necesidad de convencer al otro de la validez de las afirmaciones
- √ Las argumentaciones matemáticas deductivas, fuertemente basadas en los principios aristotélicos, son propias del pensamiento lógico de culturas con influencia de la lógica clásica

- √ Culturas sin influencia aristotélica construyeron argumentaciones distintas, no acordes con los principios aristotélicos. En ellas la matemática tuvo características distintas a la matemática occidental
- √ Aún en escenarios de la matemática occidental, se construyeron lógicas que permiten argumentaciones que no respetan los principios lógicos aristotélicos
- √ En escenarios no escolares, se construyen y utilizan formas de argumentación de características diferentes a la argumentación deductiva. Tales argumentaciones son introducidas en el aula por parte de los estudiantes, que las encuentran a veces más convincentes que las deductivas. La escuela no puede ignorarlas
- √ La visión socioepistemológica de las demostraciones y las argumentaciones lleva a comprender a la escuela inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento

Posibles formas de continuar esta investigación

A partir de la investigación realizada, es posible detectar algunos sentidos en las que podría continuarse investigando. Algunos de ellos serían:

- ➢ La identificación, caracterización y aplicación de formas de argumentar aristotélicas y no aristotélicas en el aula, y la consiguiente descripción de características los escenarios en los que se manifiestan, podrían generar investigaciones acerca de las formas de argumentación que se presentan en el aula de matemática de estudiantes de determinadas carreras.
- ➢ El análisis de los alcances de las formas de argumentar no aristotélicas presentes en el aula, identificando su aplicabilidad a la resolución de problemas matemáticos.

- El estudio más profundo de las formas de argumentación no aristotélicas que se presentan en el aula, pueden dar origen a la comprensión de cómo se realiza la cognición de las formas de argumentar en matemática y de esa manera de las construcciones matemáticas que realizan de los objetos a los que son aplicadas.
- A partir de las investigaciones propuestas en los puntos anteriores, sería posible el diseño de ingenierías didácticas para distintos destinatarios, para distintas temáticas, acordes con las formas de argumentar que les resulten más familiares.
- La detección de ciertos objetos matemáticos como el cero o el infinito que se construyeron en culturas sin influencia aristotélica de manera más natural de lo que ocurrió en la cultura occidental, el análisis de su construcción y su relación con la no aceptación del tercero excluido, podrá dar luz al mecanismo de construcción de los conceptos matemáticos.
- El estudio de los esquemas de convicción presentes en el aula de matemática desde una visión sociocultural, o sea identificando su construcción en escenarios determinados.

Referencias bibliográficas

Abbagnano, N. y Visalberghi, A. (2005). *Historia de la pedagogía*. México: Fondo de Cultura Económica.

Alberti, F.; Abeucci, E. y Crespo Crespo C. (1995). Comparación entre diversos operadores implicacionales. *Infocom 95*. (pp. 207-216). Buenos Aires.

Arellano Hoffmann, C.; Schmidt, P. y Noguez, X. (2002). *Libros y escritura de tradición indígena. Ensayos sobre códices prehispánicos y coloniales de México*. México: Colegio Mexiquense.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8(3), pp. 267-312.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado no publicada, Cinvestav, IPN, México.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(3), 261-304.

Balacheff, N. (2000). *Los procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

Barbero, J. (2006). Dinámicas urbanas de la cultura y cultura escolar. En *Nuevos tiempos y temas en la agenda de política educativa. La escuela vista desde afuera.* Buenos Aires, Argentina.

Barrow, J. (1996). *La trama oculta del universo.* Barcelona: Crítica.

Barrow, J. (2001). *El libro de la nada.* Barcelona: Crítica.

Bell, E. T. (1996). *Historia de las Matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Blaquier, C. (2003). *Apuntes para una introducción a la filosofía*. Buenos Aires: Lons.

Boido, G. (1998). *Noticias del Planeta Tierra. Galileo Galilei y la revolución científica*. Buenos Aires: AZ.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Bunge, M. (1965). *Intuición y ciencia.* Buenos Aires: EUDEBA.

Camargo Uribe, L. y Samper de Caicedo, C. (1999). Desarrollo del pensamiento deductivo a través de la geometría euclidiana. *Técnica, Episteme y Didaxis, 5.* (pp. 51-60). *Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional*.

Campos, A. (1994a). *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Campos, A. (1994b). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En R. M. Farfán (Ed.), *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. 1*. (pp.1-10). La Habana, Cuba.

Cantoral, R. (2001). *Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos.* En G. Beitía, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. (pp.64-75). México: Iberoamericana.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 6 (1), 27-40.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *24*(2.3), 137-168.

Cantoral, R. y Farfán, R. M.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Número especial*, 83-102.

Carpio, A. (2003). *Principios de Filosofía.* Buenos Aires: Glauco.

Chemla, K. (1998). *History of Mathematics in China. A factor in World history and a source for new questions*. En G. Fischer, y otros (Ed.) *Proceeding of the International Congress of Mathematics. 3,* (pp 789-798). Berlin.

Collette, J. P. (1973). *Historia de las matemáticas I y II*. México: Siglo XXI.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 4(2), 103-128.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México: Fondo de Cultura Económica.

Covián Chávez, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2002a). *La noción de infinito a través de la historia*. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 15(1).* (pp.529-534). México: Iberoamérica.

Crespo Crespo, C. (2002b). Algo más acerca del cero. *Elementos de Matemática*, *26*(45), 23-28.

Crespo Crespo, C. (2002c). El cero: la representación de la existencia de la ausencia*. Elementos de Matemática*. *26*(44), 14-20.

Crespo Crespo, C. (2003a). Las demostraciones como contenido matemático. En *VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Chilpancingo, Guerrero, México.

Crespo Crespo, C. (2003b). La representación de la ausencia por medio de una presencia: el Cero. En R. Delgado Rubí, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 16*(1). (pp.33-39). Santiago de Chile: Ediciones Lorena.

Crespo Crespo, C. (2004). Argumentar matemáticamente: su importancia en el aula. En *II Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática*, Guadalajara, México.

Crespo Crespo, C. (2005a). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada, CICATA, IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2005b). Las figuras de análisis en las demostraciones matemáticas por reducción al absurdo. En *III Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática CVEM 2005.* Guadalajara (México).

Crespo Crespo, C. (2005c). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa (Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática), 7*(23), 23-29.

Crespo Crespo, C. (2006). Las demostraciones matemáticas: pensando en el aula y buscando una respuesta en la historia. *Elementos de Matemática*, *20*(79), 18-28.

Crespo Crespo, C. (2007). El reconocimiento de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios académicos y no académicos*. En C. Crespo Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 20.* (pp.542-547). Clame, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán Márquez, R. (2005). Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 287-317.

Crespo Crespo, C. y Farfán Márquez, R. (2006). Las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. En G. Martínez-Sierra (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *19*. (pp.766-781). Clame, México.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, C. (2002). Pensar en matemática para enseñar matemática. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *15*(2). (pp. 1163-1168). México: Iberoamérica.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003a). Las demostraciones en el aula de matemática*.* En *III CAREM.* Salta.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003b). Las demostraciones como problema*.* En *XV Reunión de Educación matemática*. Unión Matemática Argentina. Río Cuarto, Córdoba.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17*(1). (pp. 39-44). México: Clame.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2005). Las funciones de la demostración en el aula de matemática. En J. Lezama (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 18*. (pp. 307-312). México: Clame.

Cromwell, P. (1997). *Poliedra.* Cambridge: Cambridge University Press.

D´Amore, B. (2005a). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (nyaya). *UNO.* 38, 83-99.

D´Amore, B. (2005b). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Editorial Reverté.

Datri, E. (1999). *Geometría y realidad física*. Buenos Aires: EUDEBA.

Dauben, J. (1991). El teorema pitagórico y las matemáticas chinas. Comentario de Liu Hui sobre el teorema Gou Gu en el capítulo nueve del Jiu Zhang Shu. *Mathesis, 7*(3), 279-301.

de Lorenzo, J. (1998). *La matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: Tecnos.

de Lorenzo, J. (2000). Demostración con ordenador. En A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del Siglo XX. Una mirada en 101 artículos*. Madrid: Nivola. (pp. 401-404).

de Mora, J. M. y Jarocka, M. L. (2003). *Apuntes para una historia de las matemáticas y astronomía en la India Antigua.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*. 26, 15-30.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva*? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2000). Écriture, raisonnement el découverte de la démostration en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. *20*(2), 135-170.

Eggers Lan, C. (1995). *El nacimiento de la matemática griega*. Buenos Aires: EUDEBA.

Espinoza Ocotlán, P. (2006). *La matemática náhuatl: Estudio del sistema de numeración náhuatl.* Tesis de Maestría no publicada, CICATA, IPN, México.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV, V-IX*. Madrid: Gredos.

Farfán, R. M. (2003). *Matemática Educativa: un camino de filiaciones y rupturas*. En J. R. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *16*(1). (pp.5-10). Santiago de Chile: Ediciones Lorena.

Farrington, B. (1979). *Ciencia griega*. Barcelona: Icaria.

Gamut, L. T. F. (2002). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: EUDEBA.

Ganeri, J. (2002). Jaina logic and the philosophical basis of pluralism. En *History and philosophy of logic*, 23 (pp. 267-281).

Gillings, R. (1972). *Mathematics in the time of the pharaons*. New York: Dover Publications.

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. En: E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th International Conference of PME*, *2*. (pp. 313-321). Lahti, Finland.

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*, *19* (3), 405-414.

Gómez, R. (sf). *Sobre la vigencia del concepto aristotélico de ciencia*. Cuaderno del Instituto Nacional para el mejoramiento de las ciencias. Serie Celeste n° 2. La Plata: Instituto de Lógica y Filosofía de las Ciencias. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata.

González Uceda, L. (1997). Teoría de la ciencia, Documentación y Bibliometría. *Revista general de información y documentación*. 7(2), 201-215.

Guétmanova, A. (1986). *Lógica*. Moscú: Editorial Progreso.

Guedj, Denis (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Grupo Zeta.

Haack S. (1991). *Filososfía de las lógicas.* Madrid*:* Cátedra.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof: arguments from physics. En M. de Villiers, (coord.), *Proofs and prooving: Why, when and how?* (pp. 1-14). The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA).

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. En A. Gutiérrez y L. Puig (Ed.), *Proceeding of PME 20*. *1* (pp.21-34). Valencia.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5–23.

Hardy, G. (1979). Apología del matemático. En J. Newman (Ed.), *Sigma. El mundo de las matemáticas*, *5*. (pp. 417-428). Barcelona: Grijalbo.

Harel, G., Sowder, L. (1998). Student,s proove schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in mathematicas education. 7*, 234–283.

Heilbron, J. L. (1998). *Geometry civilized. History, culture and technique*. Oxford: Clarendon Press.

Hiriyanna, M. (1960). *Introducción a la filosofía de la India*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Homero (2003). *La Ilíada*. México: Porrúa.

Horgan, J. (1973). La muerte de la demostración. En *Investigación y Ciencia*. *207*, 70-77.

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004). Textos argumentativos. *UNO. 35*, pp 39-52.

Ifrah, G. (1997). *Historia de las cifras*. Madrid: Espasa.

Joseph, G. (1991). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Pirámide.

Klimovsky, G. (sf). *El método hipotético deductivo y la lógica*. Cuaderno del Instituto Nacional para el mejoramiento de las ciencias. Serie Celeste n°1. La Plata: Instituto de Lógica y Filosofía de las Ciencias. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata.

Klimovsky, G.; Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: Una introducción*. Buenos Aires: AZ.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Vol I, II y III.* Madrid: Alianza Universidad.

Klir, G.; StChari, U. y Yuan, B. (1997). *Fuzzy Set Theory. Foundations and Applications.* Prentice Hall.

Koyré, A. (1997). *Estudios de historia del pensamiento científico.* México: Siglo XXI.

Le Bon, G. (1901). *Las civilizaciones de la India*. Tomos 1 y 2. Barcelona: Montaner y Simón Editores.

Lezama. J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 8 (3), 339-362.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Barcelona: Gedisa.

Łukasiewicz, J. (1912). *Elementos creativos en la ciencia.* Deaño, A*. (Ed.) Estudios de lógica y filosofía.* (pp.3-14). Disponible en: <www.philosophia.cl> [Fecha de consulta: 07/12/06].

Łukasiewicz, J. (1918). *Lección de despedida pronunciada por el profesor Jan Łukasiewicz en el aula magna de la universidad de Varsovia.* Deaño, A*. (Ed.) Estudios de lógica y filosofía.* (pp.15-17). Disponible en: <www.philosophia.cl> [Fecha de consulta: 07/12/06].

Mamdani E. H. (1981). Advances in linguistic synthesis of fuzzy controllers. En E. H.; Mamdani y B. R. Gaines (Ed.), *Fuzzy reasoning and its applications:* New York: Academic Press (pp.325-334).

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(2), 195-218.

Mingüer Allec, L. M. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Doctorado no publicada, CICATA. IPN, México.

Ministerio de Cultura y Educación (1995). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires.

Ministerio de Cultura y Educación (1997). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal*. Buenos Aires.

Mondolfo, R. (1956). *El genio helénico*. Buenos Aires: Columba.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Palacios, A. y Palacios, A. G. (2002). *La definición. Así en la matemática como en la filosofía*. Buenos Aires: Lumen.

Palau, G. (2004). *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. Barcelona: Gedisa.

Palau, G.; Oller, C.; Buaccar, N.; Lazzer, S. y Barry, E. (2004). *Lógicas convencionales y razonamiento de sentido común*. Barcelona: Gedisa.

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Parain, B. (Ed.) (2002). *El pensamiento prefilosófico y oriental*. México: Siglo XXI Editores.

Picardo, O. (2003). *El escenario actual de las ciencias sociales: la sociedad del conocimiento* UOC. Disponible en: <http://www.uoc.edu/dt/20318/index.html> [Fecha de consulta: 01/08/06].

Piaget, J. (1992). *El juicio y el razonamiento en el niño*. Buenos Aires: Editorial Guadalupe.

Piaget, J.; García R. (1988). *Hacia una lógica de significaciones*. Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.

Recio, Á. M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática.* Resumen de la tesis doctoral presentado en el III SIDM, El Escorial.

Rescher, N. (1969). *Many-valued Logic*. New York: McGrawHill.

Rey Pastor, J.; Babini, J. (2000). *Historia de la matemática. Vol.1 y 2*. Buenos Aires: Gedisa.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1948). *Metodología de la Matemática Elemental*. Buenos Aires: Ibero-Americana.

Rodrigo, M. J. (1997). Del escenario sociocultural al constructivismo episódico. Un viaje al conocimiento escolar de la mano de las teorías implícitas. En Rodrigo, M. J. y Arnay, J. (Comp.), *La construcción del conocimiento escolar*. Barcelona: Paidós.

Rojas, J. (2004). *Elementos para una psicoecología de la acción*. Tesis de doctorado no publicada, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Sáenz Castro, C. (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas*. En Moreno, M. F. y otros (Ed.), *Actas del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Almería. (pp. 47-62).

Salazar de León, E. (2005). *Análisis comparativo de los conceptos de matemática maya y kaxlan. El caso de las comunidades de Santa Isabel y La Unión, Municipio de Chisec, Departamento de Alta Verapaz.* Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad San Carlos de Guatemala, Guatemala.

Santaló, L. (1966). *La matemática en la escuela secundaria*. Buenos Aires: Eudeba.

Santaló, L. (1981). *La enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires: Proyecto Cinae.

Scholz, H. (1968). *Esquisse d´une histoire de la logique*. Paris: Aubier-Montaigne.

Sepich, J. (1940). *Lógica formal. Analítica de la forma lógica* Buenos Aires: Cursos de Cultura Católica.

Serrés, M. (Ed.) (1989). *Historia de las ciencias*. Madrid: Cátedra.

Souto, M.; Mastache, A.; Mazza, D. y Rodríguez, D. (2004). *La identidad institucional a través de la historia. Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”*. Buenos Aires: Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”.

Soto Rivera, R. (2003). *El argumento por reducción al absurdo en Parménides y Nagarjuna*. *La Torre* (Revista de la Universidad de Puerto Rico), 8 (27), 93-105.

Struik, D. (1962). *La matemática. Sus orígenes y su desarrollo.* Buenos Aires: Ediciones Siglo Veinte.

Tartaglia, N. (1998). *La nueva Ciencia*. México: Mathema.

Toranzos, F. I. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina.

Valverde, L. (1990). *Un método para contribuir a desarrollar la habilidad para fundamentar-demostrar una proposición matemática, tomando como base una asignatura de álgebra de primer año de los ISP.* Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", La Habana.

Vega, L. (1993). ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de demostración matemática. *Mathesis, 9*(2)*,* 155-177*.*

Vivekananda, S. (1930). *Filosofía Vedanta*. Barcelona: Antonio Roch.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

Zhmud, L. (1996). *Matemáticas griegas y el oriente*. En *Mathesis*, *12*, 116-145.