INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DEL ESTUDIANTE RELATIVO AL CAMPO CONCEPTUAL DE LA SERIE DE FOURIER EN EL CONTEXTO DE UN FENÓMENO DE TRANSFERENCIA DE MASA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

CLAUDIA ROSARIO MURO URISTA

ASESOR: DRA. PATRICIA CAMARENA GALLARDO

AGOSTO DEL 2004

CGPI-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 24 del mes de junio del 2004 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa"

Presentada por la alumna: Muro Urista Claudia Rosario

Con registro: 0 1 0 6 4 7

aspirante al grado de:

Doctor en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Patricia Camarena Gallardo

Dr. Francisco Cordero Osorio

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Juan Manuel Figueroa Estrada

Dra. Rosa del Carmen Flores Macias

Dra. Eréndira Valdez Coiro

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

'ORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el día 2 del mes agosto del año 2004, el (la) que suscribe Claudia Rosario Muro Urista alumno (a) del Programa de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro 010647 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Patricia Camarena Gallardo y cede los derechos del trabajo intitulado *Análisis del conocimiento del estudiante relativo a un campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa* al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: claudiamuro@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Claudia Rosario Muro Urista

Nombre y firma

RESUMEN

El análisis del conocimiento del estudiante relativo a un campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno de la transferencia de masa, es un trabajo de investigación que tiene como referencia la matemática en el contexto de las ciencias. El planteamiento comprende dos tipos de estudio: 1) Integración de un campo conceptual de una estructura matemática en un fenómeno de la ingeniería química, con el análisis de los elementos que lo conforman. 2) Análisis del conocimiento del estudiante referido a su acción en este campo.

En el primer estudio, se lleva a cabo una caracterización de la serie de Fourier en la transferencia de masa, a fin de determinar las situaciones y los conceptos que han de integrar un contenido conceptual sobre la relación entre estas dos nociones. El resultado del estudio, es un campo conceptual, integrado por cuatro situaciones acerca del secado de una sustancia. Y un conjunto de conceptos que derivan de las situaciones, fijando la correspondencia: serie de Fourier- contexto y situación-concepto.

En el segundo estudio, se describe la variación en las representaciones que tienen lugar en el análisis del esquema del estudiante al interactuar con el campo conceptual mencionado.

La recolección de datos se realiza a través de 5 sesiones en profundidad, bajo la conducción andamiada del investigador, de un grupo de enfoque integrado por dos estudiantes de Ingeniería Química del séptimo y octavo semestre del Instituto Tecnológico de Toluca.

Los resultados de la investigación, muestran las conceptuaciones del grupo cuyo indicador son las invariantes operatorias presentes en las representaciones.

SUMMARY

The analysis of the knowledge of the relative student to a conceptual field of the series of Fourier in the context of the transfer of mass, is an investigation work that is integrated by two study types: 1) integration of a conceptual field of a mathematical structure in a phenomenon of the chemical engineering, with the analysis of the elements that conform it. 2) Analysis of the students knowledge referred to their action in this field.

In the first study, it is carried out a characterization of the series of Fourier in the transfer of mass, in order to determine the situations and the concepts that must integrate a conceptual content on the relationship among these two notions. The result of the study, is a conceptual field, integrated by four situations about the drying of a substance. And a group of concepts that they derive of the situations, fixing the correspondence: series of Fourier – context and situation-concept.

In the second study, the variation is described in the representations that take place in the analysis of the outline from the student when to interact with the mentioned conceptual field.

The gathering of data is carried through five sessions in depth, under the investigator's conduction, of a focus group integrated by two students of Chemical Engineering of the seventh and eighth semester from the Technological Institute to Toluca.

The results of this study, show their concepts in the group, whose indicator are the operative invariants presents in their representations.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La formación matemática en una escuela de ingeniería, es un asunto de investigación acerca de cómo deben enseñarse los conceptos matemáticos para que esta área cumpla con ser un soporte para las ciencias de la especialidad y una herramienta para el desarrollo profesional del ingeniero. Dentro de la polémica que genera esta discusión, se tienen resultados que justifican la existencia de una problemática educacional en este ámbito, tales como la localización de conocimientos aislados y sin significado, con consecuencias que van desde dificultades en el aprendizaje de la misma disciplina, hasta dificultades de integración en la parte que corresponde a la competitividad en el medio.

En el terreno de la Matemática Educativa, este planteamiento ha sido motivo de cuestionamientos bajo diferentes aspectos. Uno de ellos, es la descontextualización que prevalece en el terreno de la Ingeniería. De entre los investigadores que han dado cuenta de esta problemática, se tiene a Camarena (1995) y Muro (2000). En sus trabajos se encuentra una manifestación de este hecho, el cual es enfatizado como una desvinculación de la matemática en este tipo de cultura. Como antítesis, la contextualización (Camarena, 1995) viene a tomar el carácter de estrategia didáctica. Esta, se establece como alternativa a dicha desvinculación, sugiriendo la enseñanza de la matemática en contexto, a fin de apoyar el aprendizaje.

Desde esta perspectiva, la propuesta de Camarena, compromete a analizar la actuación del estudiante en base a esta forma de presentación de la matemática, la cual supone el apoyo a la adquisición de un conocimiento que deriva del significado del contexto en que es desarrollado.

Bajo este argumento, es considerado pertinente un estudio cognitivo a partir del análisis del aprendizaje en un contenido conceptual generado por la matemática en contexto.

En estas circunstancias, un estudio del conocimiento de esta naturaleza, se plantea en esta investigación, dentro de dos quehaceres interrelacionados: En primer lugar, el establecimiento las relaciones que guardan dos estructuras diferentes; la matemática y la del contexto y el marco de situaciones en que se establecen estas relaciones, para obtener a su vez, el nuevo conjunto de conceptos contextualizados. En segundo lugar, en este mismo encuadre, la descripción del saber del estudiante, en su interacción con la clase de conceptos y en el tipo de situaciones establecidas en la primera parte.

Para el desarrollo del trabajo, se ha elegido como estructura matemática a relacionar, a la serie de Fourier. El contexto, el fenómeno de transferencia de masa y las situaciones donde tienen lugar este fenómeno; el proceso de secado de un coloide.

El procedimiento a seguir para relación de estas dos estructuras, parte de una vinculación establecida en Muro (2000), en la cual se contextualiza a la serie de Fourier en este mismo contexto. A partir de estos resultados, la propuesta ahora, es analizar el vínculo entre los conceptos que constituyen a la estructura matemática mencionada y los conceptos que provienen del fenómeno, en situaciones de la ingeniería química.

La diversidad de aspectos a considerar en este estudio, justifican la integración de un campo conceptual conformado por los conceptos que surgen de las relaciones que se producen entre un contexto y otro y, las situaciones que les dan principio. De tal suerte, que el campo conceptual de la serie de Fourier en un fenómeno de transferencia de masa, resulte un medio de interacción del estudiante para el estudio de su conocimiento a través del análisis de su conducta, al enfrentarse a este tipo determinado de conceptos y situaciones que son afines a su ambiente.

Por tanto, en el seguimiento de este planteamiento, el análisis cognitivo a realizar, tiene como objetivo el estudio del conocimiento del estudiante debido a su actuación en el campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa. El desarrollo del análisis, se conduce en dos facetas; 1) La integración del campo conceptual, con la interrelación de los conceptos que resultan como producto de la vinculación entre la serie de Fourier y el contexto referido en situaciones provenientes del secado de un coloide. 2) Un estudio descriptivo de la actividad del estudiante en este campo conceptual.

Estas dos facetas, se sustentan en la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1994). En dicha teoría, se considera al campo conceptual como un conjunto de situaciones que requieren ser analizadas para permitir su clasificación de acuerdo al análisis de las actividades cognitivas, de los procedimientos que pueden ser puestos en juego en cada una de ellas por el estudiante y el conjunto de conceptos que permiten analizar estas situaciones, dándole carácter a una estructura matemática, el de un campo conceptual en estudio.

De esta manera, se estipula que la variedad de situaciones en un campo conceptual, se puede generar de manera sistemática por el conjunto de clases posibles que a su vez se produce, por las variables que existen en cada situación. Y, es a través de estas, que los conocimientos del estudiante son modelados, debido a que las situaciones en que han trabajado progresivamente, son susceptibles de dar sentido a los conceptos y a los procedimientos que se les quiere enseñar.

Así se tiene, que el marco de la investigación en esta teoría, soporta por un lado, el análisis que se establece al conectar las relaciones, los conceptos y las situaciones que determinan la conformación del campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de transferencia de masa. Por el otro lado, el estudio de la actividad cognitiva del estudiante a través del análisis del desarrollo del conocimiento, acerca de la conceptuación de un concepto referido al campo y la descripción de los elementos cognitivos que favorecen esquematizarlo.

Retomando los puntos que propone Vergnaud en su teoría, los elementos cognitivos son referidos a la actividad del estudiante, basada en el análisis de su esquema mental, con el reconocimiento de invariantes operatorias implícitas en su conducta, como teoremas en acto y los conceptos en acto. La identificación de estos elementos cognitivos se realiza a través de las representaciones del sujeto sobre la conceptuación de la serie de Fourier en situaciones específicas del secado de un coloide dentro del contexto del fenómeno de la transferencia de masa.

En esta directriz, la descripción de dichas conceptuaciones, se presentan y se discuten de acuerdo a la situación y a los conceptos implícitos en la misma.

CAPITULO 1

ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una de las problemáticas localizada en el sector educativo dentro de la ingeniería, es la que se constituye por diversos problemas alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. De entre algunos problemas que se han detectado, se pueden mencionar problemas de conceptualización de conceptos matemáticos en relación con las ciencias de su especialidad y la ausencia de fundamentación y significado que esta área provee a los conceptos que son singulares en este medio.

Teóricamente se estipula que la matemática en la ingeniería, es una herramienta para las ciencias que la conforman. En atención a ello, la currícula exige un cierto conocimiento en este terreno y presenta un contenido matemático que no es acorde a lo que se busca. Con relación a la enseñanza y la forma en como se muestran los conceptos, la matemática se encuentra lejos de ser un instrumento y un soporte en la ingeniería. (Camarena 1984)

Estos factores por supuesto que afectan la percepción del objetivo de esta disciplina. La aridez con que se aborda, permite detectar dificultades para establecer vínculos de contexto a contexto, de tal suerte que el estudiante tiene problemas para adquirir un conocimiento basado en las relaciones que surgen entre ellos.

En el seguimiento de la problemática descrita, dentro del problema que acoge la enseñanza de la matemática en la ingeniería, se plantea una investigación centrada en un estudio cognitivo que busca analizar el efecto en el aprendizaje de la enseñanza de conceptos matemáticos vinculados con conceptos especializados en un contexto, que posibilite la reciprocidad entre estos dos tipos de nociones y el ambiente en que se mueve el estudiante para analizar su actuación.

En relación a esta idea, lo primero que demanda un estudio con este corte, es determinar cómo establecer el vínculo entre un concepto matemático y un concepto situado en un contexto de la ingeniería. Identificar, cuál es ese contexto para que sea él, el que permita que la parte matemática que engloba al concepto, se defina a través de un concepto determinado por la situación en que se presenta, de tal manera, que el mismo contexto y sus situaciones, adquieran un significado a través del concepto matemático, dando como resultado una regla de correspondencia entre las dos partes a relacionar.

Al respecto, se han analizado algunas investigaciones dentro de la Educación Matemática, encontrándose en Camarena (1995) una propuesta de enseñanza, mediante la estrategia de la matemática en contexto. Dicha estrategia corresponde a un proceso de vinculación entre conceptos matemáticos y conceptos de especialidad que da como resultado la contextualización de un concepto matemático en un contexto definido. En esta misma línea, en (Camarena, 1987) y (Camarena, 1993), se encuentra un modelo de contextualización en el contexto de la ingeniería electrónica, acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes en los circuitos eléctricos y el Análisis de Fourier en el análisis de señales eléctricas. El modelo comprende seis etapas a seguir: 1) Planteamiento del problema en un contexto. 2) Determinación de las constantes y variables del problema en un contexto. 3) Obtención del modelo matemático del problema en un contexto. 4) Solución matemática del modelo matemático. 5) Solución del modelo matemático en términos del contexto. 6) Interpretación de la solución en términos del problema en el contexto determinado.

Posteriormente, en el ejercicio de esta práctica en la enseñanza, en (Camarena, 1995), se muestra la posibilidad de incidencia de la matemática en contexto dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, en dos experimentos realizados dentro de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del I.P.N. Al enseñar la matemática bajo contenidos contextualizados de las ecuaciones diferenciales ordinarias en los circuitos eléctricos y el análisis de la serie Fourier en el contexto de las señales eléctricas. Los resultados que se obtuvieron de estas prácticas, se generalizan en respuestas motivantes por parte del estudiante hacia el contexto de la matemática.

En todos los trabajos de Camarena, se deja ver su propuesta, como una estrategia didáctica que ayuda a vincular el conocimiento de dos áreas diferentes, planteándose como una alternativa para apoyar en el estudiante la integración del conocimiento matemático en el conocimiento de la ingeniería. Específicamente en Camarena (2001), se establece que el uso de la matemática en contexto, en la enseñanza, ayuda a que el estudiante se vea motivado hacia el aprendizaje de las matemáticas. En este mismo trabajo, se concluye en la necesidad de que los docentes de matemáticas incursionen en las áreas del conocimiento de las carreras en donde laboran para presentar una matemática contextualizada con aplicaciones que sean de interés para el estudiante, logrando reunir así, la parte didáctica, la parte curricular y la parte epistemológica del concepto a tratar.

Entre algunas de las investigaciones que retoman esta misma línea de investigación, se encuentra el caso de la contextualización de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia, (Muro, 2000). Bajo la justificación de que la serie de Fourier se define mediante conceptos que presentan obstáculos para su aprendizaje; tal es el caso de los conceptos como el infinito, como la periodicidad, la convergencia y la suma de funciones trigonométricas entre otros. Por la complejidad que engloba dichos conceptos, el trabajo marca la necesidad de investigar la relación que posibilite el entendimiento de los mismos a través del vínculo con un contexto que los determine y viceversa. De esta manera, la investigación de Muro, refleja un trabajo de matematización de la serie de Fourier, referido a un contexto, precisando la acción de vinculación, para buscar implementar en la enseñanza el ejercicio de la contextualización y mediante ésta, la significación de este concepto matemático en la ingeniería.

Referente al aspecto cognitivo en conexión con la investigación de Muro, en Muro (2002), se trabaja sobre un análisis comparativo acerca del proceso de aprendizaje de este concepto, cuando un grupo de estudiantes se encuentra bajo un contenido matemático fuera de un contexto ingenieril y otro grupo de estudiantes que se encuentra bajo un contenido matemático que ha sido contextualizado. Algunos resultados, exponen que la contextualización favorece la acción del estudiante, al mostrar integración en el conocimiento sobre aspectos de la serie de Fourier en situaciones donde se puede vincular la matemática con un fenómeno de la ingeniería. En los resultados, el autor sugiere continuar dicho estudio, diseñando nuevas situaciones que puedan aportar resultados acerca del desarrollo de conocimiento y, recomienda realizar un estudio sobre las nociones que conforman la estructura de este concepto matemático en el contexto referido.

En base a estos resultados en Muro (2001, 2002, 2003), se manifiesta que una de las hipótesis de los trabajos, es que el incorporar esta acción en la didáctica, puede permitir el entendimiento de este concepto y así, apoyar en la superación de los obstáculos que lo constituyen. La hipótesis se basa en la correspondencia que se puede dar entre la matemática y el medio en que se precisa por la vinculación. De tal manera, que se establece que un contexto pertinente para contextualizar esta serie, es el del fenómeno de transferencia de masa, debido que permite una concreta significación del concepto matemático en las propiedades que contiene el contexto.

En el seguimiento del análisis de la enseñanza y aprendizaje de la serie de Fourier, el estado que guarda la investigación en referencia a los obstáculos que se mencionan en Muro (2000), se encuentran antecedentes acerca de la problemática que genera este concepto, entre ellos se puede citar en primera instancia, su origen. La Teoría analítica de calor, (Fourier, 1822). Esta teoría tiene una aportación singularmente importante, tanto para la ingeniería como para el análisis matemático mismo, ya que al realizarse un estudio, que es esencialmente un análisis cualitativo y empírico del fenómeno físico del calor, conlleva al análisis acerca de la convergencia ligada a la naturaleza propia de la conducción de calor. En su obra, Fourier deduce la ecuación diferencial parcial que rige el planteamiento del fenómeno y establece la ecuación del estado estable, encontrando que la solución del problema de conducción de calor en dicho estado, es una serie trigonométrica infinita, que ahora es llamada serie de Fourier. Posteriormente la convergencia de estas series, Fourier las traduce en encontrar el estado estable del fenómeno.

Referente al planteamiento de Fourier, se encuentran investigaciones como la de Ulín (1984). Donde se realiza un análisis histórico crítico de la difusión del calor acerca del trabajo de Fourier y se establece una relación entre las temperaturas finales que alcanza un cuerpo en la etapa estable de la difusión de calor y la convergencia que plantea Fourier en su Teoría.

Posteriormente Farfán (1995), lleva a cabo un estudio sobre la convergencia de series infinitas, para lo cual se retoma también la obra de Fourier, analizándose el ambiente fenomenológico en el que surge esta teoría. En dicho análisis, se resalta el estudio de Fourier sobre el estado estacionario de la conducción de calor ligado al estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita, sintetizando este resultado en la implicación que tiene encontrar el estado estacionario a la verificación de la convergencia. Lo anterior, permite a Farfán diseñar secuencias didácticas acerca de la convergencia de series infinitas, retomando cuestiones del fenómeno de conducción de calor, con el objeto de presentar una visión que de cuenta de las concepciones del profesor acerca del concepto de convergencia en este contexto físico.

En las investigaciones mostradas, se deja entrever la importancia que ha tenido el abordar problemáticas alrededor del concepto de la serie de Fourier, contándose entre sus objetivos; el de superar obstáculos para mejorar el aprendizaje, el de procurar secuencias didácticas para apoyar la enseñanza de la matemática, el de abordar la desvinculación entre conceptos, el de significar un concepto a través de establecer una vinculación y, con esto, él de facilitar al estudiante un análisis y comprensión de los conceptos que definen al concepto en estudio en un contexto determinado.

Todos estos aspectos, son rescatables en el interés de continuar con un trabajo cognitivo para analizar el aprendizaje, cuyo contenido matemático a reconocer bifurque en situaciones pertenecientes a la ingeniería y con un fin común: la matemática como parte importante en la formación del profesionista, jugando un rol preponderante en la relación que ésta tiene con situaciones propias de su cultura.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Sobre la base de la matemática en contexto en donde la matematización de las situaciones reales, representa una fase que debe integrarse en la educación del ingeniero y bajo la creencia de que el camino más eficaz, consiste en poner de manifiesto la vinculación que existe entre los conceptos matemáticos y este medio, se retoman algunos aspectos de los trabajos de Muro (2000, 2001 y 2002), en el seguimiento a las investigaciones expuestas sobre la serie de Fourier, acerca de la vinculación de este concepto matemático con el contexto de transferencia de masa, para investigar cuál es el conocimiento del estudiante al enfrentarse a un contenido conceptual de ésta naturaleza, ubicado dentro un marco situacional en el ámbito contextual de la ingeniería.

De acuerdo a este planteamiento, en la conformación de la investigación surgen preguntas tales como: ¿Cuál es el plano situacional sobre el que ha de interactuar el estudiante? ¿Cuáles son elementos matemáticos y de contexto a integrar en el contenido conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa, dentro de ese marco situacional como medio para el análisis del conocimiento que se espera realizar? ¿Qué aspectos de corte cognitivo habrá que considerar en el estudio del conocimiento del estudiante?

Siendo así, lo primero que habrá que esclarecer es el medio sobre el cual se llevará a cabo el análisis del conocimiento del estudiante. Para ello se inicia con las situaciones que permiten analizar los conceptos que entran en juego. Según los resultados dados en Muro (2000), se tiene que uno de los contextos que permite la significación de la serie de Fourier, es el fenómeno de transferencia de masa. Por tanto, a partir de estos resultados, el contexto es quien debe determinar las situaciones para que a su vez estás, posibiliten obtener las relaciones entre estos dos tipos diferentes de conceptos, al fijar en qué circunstancias se presentan. Una vez definido lo anterior, la segunda parte es establecer los términos en que ha de realizarse el un análisis cognitivo relativo a la interacción del estudiante con una noción que es el resultado de una contextualización en un fenómeno, bajo una

situación o situaciones determinadas.
Por tanto, la investigación representa una tarea con múltiples elementos. Por un lado, definir cuales son las situaciones pertenecientes al contexto de la transferencia de masa, estudiando las características matemáticas del concepto y las características especiales del fenómeno englobadas en dichas situaciones, continuando con el estudio de las relaciones que surgen entre los conceptos que integran la estructura matemática y el fenómeno por la vinculación de los mismos. Por el otro lado, analizar la acción del estudiante, estudiando con detalle, la actividad cognitiva y el desarrollo de su conocimiento a partir de las situaciones en que actúa y el tipo de conceptos con los que se enfrenta.

En forma general, lo anterior se puede resumir en el planteamiento de una investigación que obedece a la necesidad de reunir dos tipos de estudios y su relación entre ellos. Bajo esta perspectiva, los estudios a realizar son los siguientes:

1) La caracterización de la estructura matemática de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa a través de los conceptos que se generan a partir de la vinculación con el contexto físico, bajo la exploración de los siguientes aspectos:

1) Los elementos que habitan en el concepto matemático
2) Los elementos que engloban al fenómeno
3) La relación que se establece entre estos dos tipos de elementos
4) Las situaciones donde tiene lugar dicha relación.
5) Los conceptos que definen la estructura matemática en relación a las situaciones en el contexto

2) El estudio del conocimiento del estudiante en el contenido conceptual y situacional de la estructura de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia.

1) Análisis de la actividad del estudiante en situaciones definidas por el contexto
2) Análisis del conocimiento en relación a la conceptuación del estudiante

Un esquema de la relación entre estos estudios se presenta en la siguiente figura:

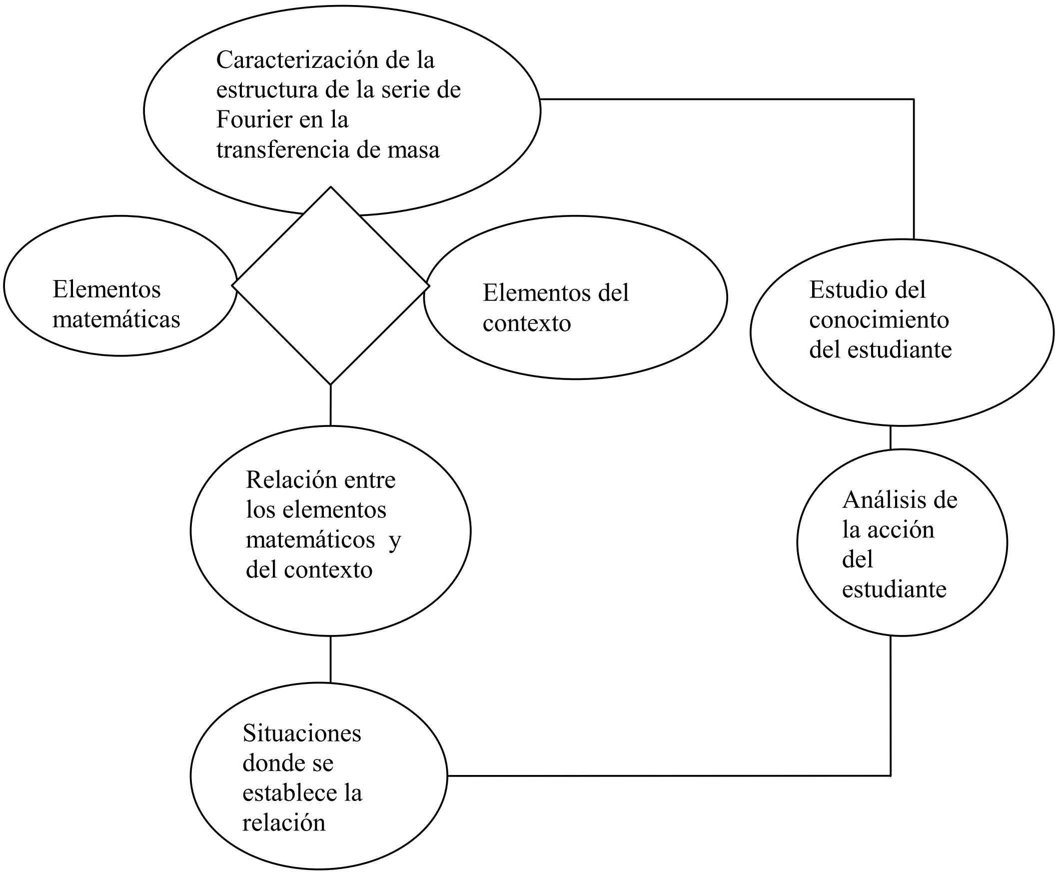


Fig. 1. Planteamiento de la conexión entre dos tipos de estudio para el análisis del conocimiento

La relación a determinar, entre los conceptos de la serie de Fourier y la transferencia de masa se extrae entre los elementos que los determinan. Algunos de estos elementos se dejan ver en el estudio de las características que presenta cada uno de estos conceptos y mediante el estudio de su vinculación.

Un bosquejo de dicha relación justifica el estudio de este concepto en el contexto referido, mencionándose enseguida. El concepto de la serie de Fourier es básico dentro de los cursos avanzados de matemáticas y es un concepto útil en la representación de funciones de la física e ingeniería. De algunos elementos matemáticos que determinan a este concepto, se pueden nombrar las sumas infinitas de funciones trigonométricas que lo constituyen, la convergencia de series infinitas y la función periódica. La serie de Fourier se puede definir como una suma infinita de funciones trigonométricas que representan una función periódica. Las condiciones bajo las cuales es posible dicha representación, tienen que ver con la convergencia. El analizar la evaluación de la serie de Fourier en un punto conduce a su convergencia, la cual se puede apreciar en el comportamiento gráfico, al sumar las componentes senusoidales y aproximarse a la función, teniendo como límite el valor de la propia función que representa, en todos los puntos de continuidad de la misma.

Ahora bien, el fenómeno de transferencia de masa se presenta en diversas operaciones de la ingeniería. Una de estas operaciones es el secado de materiales, que consiste en extraer la humedad parcial o total de un material que se expone a un medio secante, el cual puede ser aire caliente. Al circular el aire en la muestra a secar, tiene lugar el fenómeno de transferencia del líquido en el interior y en la superficie de dicha muestra hacia el exterior, de tal forma que la humedad del material cambia a través del tiempo, esta transferencia del líquido se mide mediante la cantidad de masa evaporada o la cantidad de líquido que permanece en la muestra, de allí su nombre; transferencia de masa.

Para el ingeniero, el medir o calcular la cantidad de humedad no representa problemas para un determinado tiempo de secado. Pero a medida que transcurre el tiempo llega un momento que la cantidad de humedad que contiene el material ya no es perceptible ni cuantificable. Una exposición posterior en el secado no registra ninguna disminución en el contenido de humedad, aún cuando es observable el agua que contiene, por tanto en ese punto se considera la humedad en equilibrio. No obstante, el proceso de transferencia del líquido continúa y resulta ser teóricamente infinito.

Por tanto, matemáticamente existe una función tal que represente el contenido de humedad en la teoricidad del infinito como un contenido de humedad límite para ciertas condiciones, o del equilibrio que alcanza este contenido de humedad en la muestra. Este concepto del contenido de humedad en equilibrio es un elemento del proceso que precisa la operación de secado en el fenómeno de transferencia de masa y se encuentra íntimamente ligada con el concepto matemático de la convergencia que determina el concepto de las series de Fourier. (Fourier, 1822), lo cual significa que el hallar la convergencia de la serie, aproxima a la función que representa el contenido de humedad en la etapa de equilibrio del material.

Lo anterior, permite acercarse a una interrelación o más interrelaciones que pueden existir entre este concepto matemático y este fenómeno para dar lugar a la primera parte del estudio que se pretende realizar en el cual deberán definirse los elementos que determinan a la serie de Fourier, los que determinan al fenómeno y las situaciones en que se establecen dichos conceptos.

De esta manera, la clase de conceptos que se originen en esta operación, serán el resultado y consecuencia del establecimiento de la contextualización de la serie de Fourier, ubicada en el contexto de la transferencia de masa en situaciones determinadas donde se presenta el fenómeno, como es el caso del secado de un material coloidal.

A partir del contenido conceptual que comprende este concepto matemático en dicho contexto y, mediante la interacción en situaciones, donde se hace alusión a los mismos, se busca aproximar la actividad cognitiva del estudiante. En la búsqueda de este acercamiento vuelve a surgir la pregunta: ¿Bajo qué aspectos de análisis del conocimiento se pretende aproximar el modelo cognitivo del estudiante y dar sustento al estudio planteado?

En correspondencia a este cuestionamiento, el planteamiento de Vergnaud (1996) ha enmarcado trabajos que hacen énfasis en el papel de los diferentes conocimientos como conceptos matemáticos que tienen lugar en las situaciones donde son empleados dichos conceptos. Estos trabajos son específicos de un campo conceptual que se compone por situaciones determinadas que contienen las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio y del álgebra; que involucran situaciones conformadas por problemas de adición y sustracción; multiplicación; números naturales, cardinalidad y las relaciones y ecuaciones algebraicas. (Vergnaud y Durán, 1976; Vargas y López, 1988 Guerrero, 1997; Vergnaud, 1997; Nunes y Bryant, 1998). Estas investigaciones convergen en el estudio de la relación con los procedimientos que los niños emplean para resolver las situaciones que conforman estos campos, enfatizando en el análisis de los procedimientos informales (no algorítmicos) para llegar a soluciones correctas. Así mismo, han brindado información acerca de la complejidad de la jerarquía entre problemas, sobre la diferencia en los procedimientos de su solución dependiendo del grado escolar y las demandas conceptuales que tienen lugar.

Los trabajos de Vergnaud acerca del campo conceptual de las estructuras aditivas, muestran la conformación de este campo por un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas, de tal forma que la definición del campo conceptual se hace en base a un conjunto de problemas, situaciones, conceptos, estructuras y operaciones de pensamiento que se encuentran relacionadas entre sí para un área de conocimiento en situaciones específicas. Este conjunto de factores que integran el campo conceptual, se establece a partir de la actividad de conceptuación del sujeto en diversas situaciones, por tanto el conocimiento que resulta de la actividad del estudiante es considerado pragmático. Esto es debido a que el planteamiento de la teoría de los campos conceptuales refiere la conducta del estudiante, mediante su conceptuación; que es dada a través de las invariantes operacionales que proporcionan generalidad a los conceptos en diferentes situaciones. Éstas se reflejan como conocimientos que surgen en la práctica y no se categorizan como conocimientos formales y explícitos, sino como conocimientos incipientes de los conceptos y teoremas matemáticos que se manifiestan en conceptos en acto y teoremas en acto. Acerca de los teoremas y conceptos en acto, Vergnaud (1990, 1996, 1997 b, 2000) hace alusión a ellos como proposiciones que son sostenidas como verdaderas por el sujeto en un cierto rango de situaciones y como categorías que posibilitan contar elementos para obtener una información adecuada a la situación.

Como elementos constitutivos de las estructuras aditivas, Vergnaud especifica los conceptos de cardinal y de medida de transformación temporal por aumento o disminución (perder o gastar monedas), de relación de comparación cuantificada (tener tres bombones o tres años o más), de comparación binaria de medidas (¿cuánto en total?) de composición de transformaciones y de relaciones de operación unaria, de inversión, de número natural y de número relativo, de abscisa, desplazamiento orientado y cantidad. Y establece, que dichos conceptos no van solos, ni serían tales si a los teoremas no se les da su función en el tratamiento de las situaciones.

Concretamente Nunes y Bryant (1998) a partir del análisis de varios trabajos acerca de este campo, establecen que las dificultades que un alumno encuentra en estos diferentes problemas dependen de la situación, de las invariantes planteadas en el problema y de la familiaridad con el contexto en el que se plantea el problema. También fijan, que el entendimiento de una situación depende de la vinculación que los alumnos establecen entre invariantes y simbolizaciones, por tanto, estipulan que el desarrollo del conocimiento implica el dominio gradual de un conjunto de conceptos y principios matemáticos que derivan su significado de una diversidad de situaciones.

Bonilla, Block y Waldegg, (1993) Plantean que en México las investigaciones relacionadas con los planteamientos de Vergnaud y abocadas al del desarrollo conceptual:

> Constituyen un esfuerzo importante pero aún incipiente que intenta no sólo describir, sino también llegar a explicar los procesos sicológicos

> involucrados en el aprendizaje de los contenidos matemáticos de la educación básica. (p. 21).

Otro estudio relevante, relacionado con el estudio del conocimiento del estudiante a través de la interacción con el campo conceptual de las estructuras aditivas, es el de (Flores, 2002). En su trabajo se destaca el interés en la comprensión de diversas transformaciones y transiciones que ocurren en el tránsito de una resolución no-canónica hacia una resolución canónica y algorítmica acerca de esta estructura matemática; considerando las características por un lado de la representación, tales como los esquemas y sus componentes que tiene lugar (propósitos, reglas de acción, inferencias y los teoremas en acto y conceptos en acto). Por otro lado, las formas de simbolización que forman parte de las resoluciones que los niños dan a los problemas. Los aspectos considerados en este trabajo, constituyen el eje del planteamiento conceptual de Vergnaud. El proceso que sigue este autor acerca de la identificación y entendimiento de dichos aspectos, conforma un modelo para realizar otras investigaciones cuyo objetivo sea similar al de su trabajo.

En lo que se refiere al nivel medio superior, se ha encontrado que Muñoz (1997, 2000 y 2002), aborda la problemática de separación entre los conceptual y algorítmico en la enseñanza del cálculo integral, apoyándose en la teoría de los campos conceptuales. Para lo cual busca elementos que propicien el enlace de ambos aspectos mediante el análisis y clasificación de diversas situaciones problema que permitan pensar en el concepto de la integración desde el punto de vista del estudio del movimiento de un cuerpo. Esto es, mediante la perspectiva de la estructura relacional que tiene lugar en estas clases de problemas, tratando de mostrar procedimientos de solución y algunas de las nociones involucradas con la identificación de procedimientos algorítmicos y no algorítmicos.

En resumen, en el interés de establecer las relaciones entre los conceptos que conforman a la serie de Fourier y el contexto de transferencia de masa, se buscan antecedentes de investigaciones al respecto, encontrándose trabajos acerca de la problemática conceptual que genera la serie de Fourier, desde su origen, a través de la obra de Fourier, para dar sentido a la conducción de calor que es donde proviene. Posteriormente, se muestran resultados de contextualización de la matemática en ingeniería, abordando un problema de desvinculación entre estas dos áreas, con trabajos específicos que exponen la vinculación de la misma serie en contextos de la ingeniería eléctrica y química, mediante la matemática en contexto. Finalmente, bajo la necesidad de realizar un estudio cognitivo referente al conocimiento del estudiante cuando actúa en un contenido conceptual que deriva de la naturaleza del contexto, es menester dar cuenta de los aportes de investigación, de acuerdo al estudio que se desea realizar. Así se encuentra, que algunos trabajos que presentan un análisis cognitivo en el nivel básico y medio superior, han utilizado como medio para realizarlo, un campo conceptual desde la perspectiva del conjunto de situaciones en el cual tiene lugar la interacción del estudiante.

Por tanto, como producto del resultado mostrado en los antecedentes anteriores, el cuestionamiento en el planteamiento de esta investigación, se restringe a una sola pregunta:

¿Cuál es la base del análisis del conocimiento con la que se puede obtener un acercamiento al modelo cognitivo del estudiante y dar sustento al estudio planteado?

Al respecto, se propone un estudio cognitivo sobre la base de análisis del conocimiento relativo a un campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa. Con el estudio previo de la integración del campo conceptual en relación a las nociones que intervienen, su interrelación y situaciones del contexto que implican su correspondencia.

Constituyendo de esta manera, el contenido conceptual como resultado de una vinculación y las situaciones que la propician.

La justificación al estudio del conocimiento en un campo conceptual obedece a realizar un análisis de aprendizaje de nociones interconectadas en la solución de problemas matemáticos en contexto, de acuerdo a la necesidad de la investigación y, no así en relación a un estudio de aprendizaje de conceptos aislados.

Así, dentro de la línea de investigación de la matemática en contexto, se establece como marco teórico a la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1982), proporcionando un marco de referencia en el sustento del estudio cognitivo de la actividad del estudiante mediante la interacción en el campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa, al enfocar el entendimiento del proceso de desarrollo del conocimiento alrededor de conceptos matemáticos en contexto, relativos al campo conceptual referido.

El argumento de análisis de acuerdo a Vergnaud, es el entendimiento del proceso de conceptuación del estudiante a través del reconocimiento de las invariantes operatorias en condiciones situacionales.

Según el planteamiento pasado, el objetivo de la investigación comprende:

La descripción del conocimiento del estudiante, en relación a las invariantes operatorias presentes en sus conceptuaciones, referentes al campo conceptual mencionado.

El esquema del esbozo del planteamiento de la investigación se muestra en la siguiente figura:

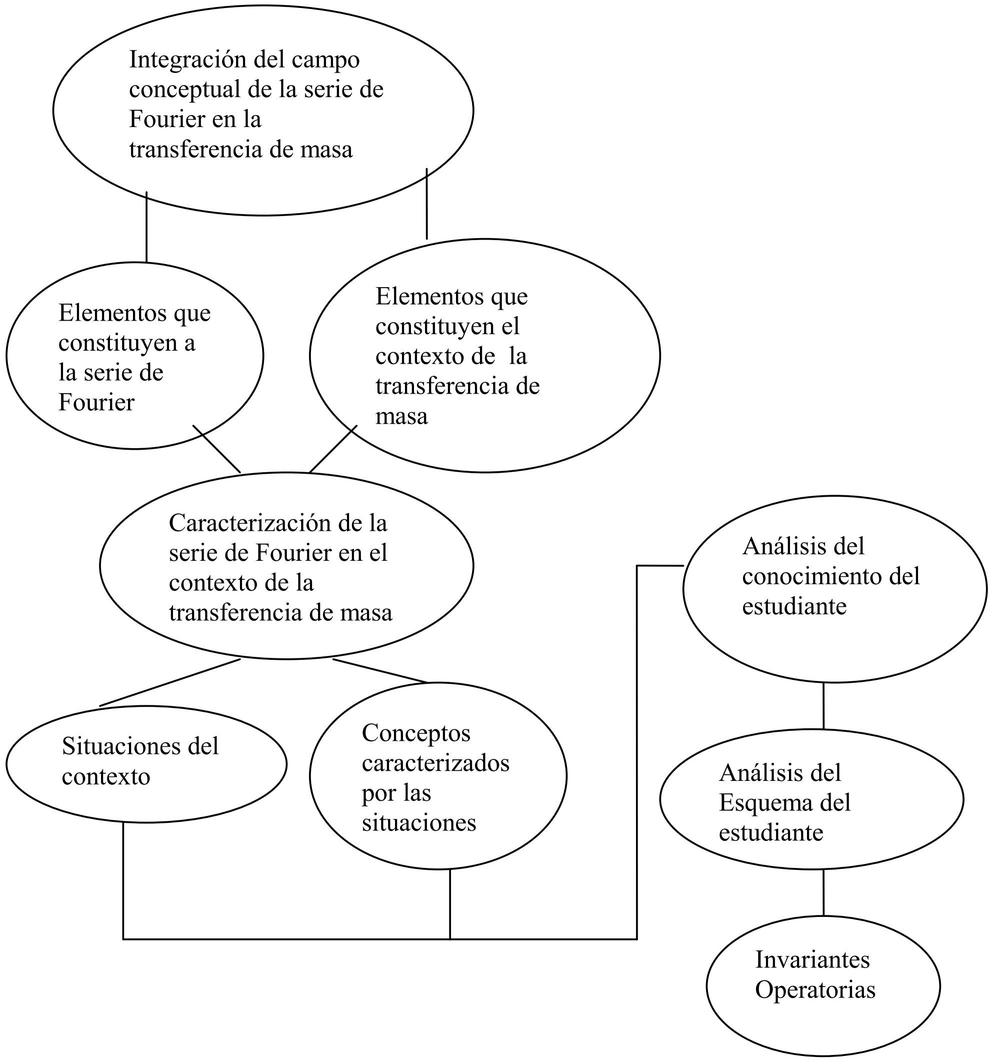


Fig. 2. Planteamiento del análisis del conocimiento relativo a un campo conceptual

CAPITULO 2

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Sobre qué es el conocimiento, cómo se adquiere, qué partes desempeña la acción cognitiva, la percepción, el lenguaje y los simbolismos en el desarrollo y el funcionamiento del conocimiento, la epistemología se ocupa de dar respuesta a estas preguntas. Específicamente en la matemática, las preguntas epistemológicas se refieren a la clase de objetos que trata la matemática, a la relación de la matemática con otras ciencias y con otros campos de la experiencia humana, al sentido de que la matemática es un conjunto de herramientas para una ciencia dada etc.

En el conocimiento de la matemática hay por lo menos tres niveles de cuestiones que intervienen en un debate epistemológico. La epistemología de las matemáticas, epistemología de la sicología y epistemología de la educación matemática.

La epistemología de las matemáticas consta tradicionalmente de varios enfoques: uno que proviene de la reflexión espontánea de los mismos matemáticos sobre la naturaleza del conocimiento y sobre la naturaleza de los procesos de descubrimiento e invención. Varios grandes matemáticos se han propuesto esclarecer la condición del pensamiento matemático, como Poincaré (1913, 1920) y Hadmard (1949) en Francia. Otro enfoque es histórico: su propósito es comprender el ambiente científico y social en que los nuevos conceptos de matemáticos han surgido y se han desarrollado. Este enfoque se puede encontrar en Davis y Hersh (1981). Por último el debate matemático-filosófico sobre los fundamentos de las matemáticas que han tenido lugar durante la primera mitad de este siglo alrededor del logicismo, el intuicionismo, el formalismo, el constructivismo, etc. (Benacerraf & Putnam, 1964) ha ocupado el campo de la epistemología de las matemáticas.

La epistemología de la sicología tiene raíces diferentes, un debate se refiere a los objetos de los que la sicología se ocupa como ciencia: conducta, conciencia, inconciencia, módulos elementales de acción, percepción y memoria, organizaciones complejas de conducta y representaciones complejas. Otro debate se ocupa del tipo de modelos que se pueden usar para explicar los fenómenos sicológicos como asociaciones, mecanismos innatos, procesos biológicos generales como adaptación, modelos neurofisiológicos, modelos linguísticos y modelos de la ciencia computacional. La epistemología de la educación matemática hereda cuestiones de ambos campos (matemática y sicología) e incluye otras nuevas, de acuerdo las necesidades que marca la sociedad. Esto es, la educación matemática tiene lugar en una sociedad determinada, en una cierta institución, en un cierto salón de clases, con fines diferentes, como lo es la educación de una clase específica de formación superior: matemáticos, físicos, ingenieros, o simplemente la formación de ciudadanos ordinarios que obedece a ciertas necesidades para su desarrollo. Estos constreñimientos sociales sobre la educación matemática, no modifica la naturaleza del conocimiento matemático pero tiene fuertes consecuencias en la forma en que los investigadores y los profesores consideran la enseñanza de las matemáticas y las matemáticas mismas.

Aún así , en esta diversidad de posturas en la enseñanza de las matemáticas, el conjunto restringido de cuestiones epistemológicas que son centrales tanto para el estudio del proceso de aprendizaje-redescubrimiento-reinvención en las mentes de los estudiantes y en la historia de las matemáticas, constituyen perspectivas importantes para el investigador tales como: ¿Cuales son la naturaleza y la función de un nuevo concepto, un nuevo procedimiento, un nuevo tipo de razonamiento, una nueva representación? ¿Cuál es la relación entre competencias y concepciones nuevas y los problemas teóricos o prácticos que los hacen útiles y significativos?

Desde el punto de vista sicológico, Piaget (1973) es probablemente el primero y más importante contribuyente a la epistemología de las matemáticas. Piaget hizo muchas contribuciones a la ontogénesis de las estructuras lógicas y matemáticas. Las siguientes ideas son esenciales en sus obras:

- ✓ El conocimiento deriva de la adaptación del individuo a su ambiente. Se considera el proceso de conocer como un proceso particular del proceso de asimilación y acomodación que caracteriza a todos los organismos vivos

- ✓ El conocimiento se puede rastrear en la forma individual de actuar con los objetos y de abordar las situaciones. La acción es el factor principal en el proceso de conocimiento

- ✓ Cuando se actúa sobre los objetos, el individuo desarrolla diferentes tipos de conocimiento dependiendo del tipo de abstracción que se hace. La abstracción empírica consiste en aislar las propiedades y las relaciones de los objetos externos, mientras que la abstracción reflexiva consiste en aislar las propiedades y las relaciones de las operaciones mismas del individuo.

- ✓ El conocimiento lógico-matemático se deriva de la abstracción reflexiva, mientras que el conocimiento físico o biológico proviene de la abstracción empírica

- ✓ La actividad simbólica es la contraparte interna de la actividad abierta y resulta del proceso de interiorización por el cual la actividad abierta (motora, perceptual, comunicativa, etc.) se borra progresivamente y se hace interna. Este punto es importante en la teoría Piagetana, ya que conduce a la tesis de que el pensamiento no es meramente percepción interiorizada, sino que es esencialmente acción interiorizada.

El entendimiento del desarrollo del conocimiento comienza con una idea central, la idea de una operación, conocer un objeto es actuar sobre él, modificar, transformar y entender el modo como el objeto esta construido, por tanto, una operación es la esencia del conocimiento, es una acción interiorizada que modifica el objeto del mismo. Una operación puede consistir en la reunión de objetos en una clase para construir una clasificación o consistirá en ordenar o colocar una serie, o bien puede consistir en contar y medir. En otras palabras, es un conjunto de acciones que modifican el objeto y capacitan al sujeto que conoce para llegar a las estructuras de la transformación.

Estas estructuras operacionales constituyen de acuerdo a Piaget, la base del conocimiento matemático, que se describe con ayuda de invariantes (categorías, relaciones y entidades de orden superior) mediante comportamiento matemático, que pueden revelar la existencia de conceptos construidos por el estudiante.

De esta forma, se puede decir que la construcción del conocimiento escolar es un proceso de elaboración en el sentido de que el estudiante selecciona, organiza y transforma la información que recibe de diversas fuentes estableciendo relaciones entre dicha información, sus ideas y conocimientos previos, en el cual aprender un contenido significa que el estudiante le atribuye un significado, construye una representación mental a través de imágenes o proposiciones verbales, pudiendo elaborando un modelo mental como marco explicativo de dicho conocimiento.

La concepción constructivista del aprendizaje escolar, se sustenta en la idea de que la finalidad de la educación que se imparte en las instituciones educativas es promover los procesos de crecimiento personal del estudiante en el marco de la cultura del grupo al que pertenece. Estos aprendizajes no se producirán de manera satisfactoria a no ser que se suministre una ayuda específica a través de la participación del estudiante en actividades intencionales planificadas y sistemáticas que logren propiciar en éste una actividad mental constructiva.

En Piaget (1970), también se expresa que el alumno debe razonar y actuar sobre un problema con respecto al todo, analizarlo y coordinar sus acciones físicas y mentales para obtener un resultado, y afirma, que las estructuras no se adquieren del exterior, las actividades intelectuales facilitan el análisis de los diversos aspectos de un problema, así como la construcción y utilización mental de varios sistemas. Para Piaget las acciones mentales o físicas son necesarias para el pensamiento; sosteniendo que la estructura cognitiva se refiere a cierta representación de la materia de estudio o situación problemática que involucra las relaciones de las partes del todo, misma que es construida activamente por el organismo humano. Entonces la sicología trata con un sistema que se va estructurando. La concepción de estructura, supone que el sistema cognitivo es dinámico flexible y capaz de cambiar con el tiempo. Por tanto el aprendizaje y la ejecución de las matemáticas serán asunto del pensamiento activo y de la operación sobre el medio ambiente más que memorización. El aprendizaje, postula el constructivismo, es un proceso activo y no una recepción pasiva del conocimiento para la construcción. La acción será así el origen de todo conocimiento, que va desde la manipulación del medio físico hasta aspectos sociales e internalizados (medio social). Actividades que involucran, una transformación del objeto (física o conceptual) y del sujeto (por la ampliación o modificación de sus esquemas cognitivos).

También se encuentra un análisis de los modos de conocimiento en la cual, se sostiene que todo modo de conocimiento, sin exceptuar el instinto, consta de informaciones acerca del medio exterior, supone también sin exceptuar el aprendizaje, una estructuración impuesta a título de condición previa y necesaria por el funcionamiento interno ligado a la organización del sujeto. Pero esta estructuración se presenta, en dos formas isomorfas: una forma hereditaria como lo es el caso del instinto que en lo que respecta a su lógica interna, las formas o esquemas de la inteligencia es sensorio-motriz.

La otra forma es no programada e interviene en calidad de mecanismo asimilador en todo aprendizaje y conduce por asimilaciones progresivas hasta la inteligencia sensorio-motriz. Estos modos de conocimiento adquiridos (construidos), serían la parte que es adquirida desde el exterior, del medio o de la experiencia y la parte que es debida a la actividad del sujeto considerado como funcionamiento endógeno. Este segundo aspecto es de naturaleza lógica-matemática, puesto que tiene que ver con las coordinaciones de las acciones del sujeto y con los objetos como tales. (Endógeno: elemento que nace en el interior del órgano que lo engendra)"

Este carácter lógico-matemático es muy visible en la percepción que lleva consigo un esquematismo y una geometrización que no dependen exclusivamente del objeto.

En todo aprendizaje ésta lógica de los esquemas es cada vez más importante y va acompañada de una geometría evidente, así pues nos vemos conducidos a suponer la existencia de tres grandes tipos de conocimientos: las formas hereditarias (instinto) las formas lógico-matemáticas progresivamente construidas (en los casos superiores que caracterizan a la inteligencia) y las formas adquiridas en función de la experiencia (desde el aprendizaje hasta el conocimiento físico). La formas 2 y 3 no están disociadas ni reducibles la una y la otra.

Se pueden distinguir tres formas de conocimiento que son resultado del ejercicio de las funciones cognoscitivas en el hombre: conocimientos adquiridos gracias a la experiencia física en todas sus formas. En segundo lugar la categoría de la programación hereditaria como es el caso de estructuras perceptivas. En tercer lugar la categoría de los conocimientos lógico-matemáticos que llegan a ser independientes de la experiencia y no se obtiene de los objetos como tales, sino de las coordinaciones de las acciones ejercidas por el sujeto sobre el objeto.

Entre los modos de conocimiento hereditario y los conocimientos debido a un aprendizaje, se aborda el problema de los conocimientos lógico-matemáticos debido a que no pertenece a ninguno aunque es necesario para el segundo.

I. Matemática Lógica. A primera vista las estructuras aritméticas y geométricas son adquiridas por la experiencia de los objetos por aprendizaje empírico. Las estructuras lógicas son hereditarias. Las estructuras espaciales constituyen el puente entre las estructuras lógico matemáticas y la estructura ya sea hereditaria o por aprendizaje.

II. Matemáticas y aprendizaje. Las estructuras lógicas matemáticas no pueden estructurarse por medio de los mecanismos comunes del aprendizaje, en el caso de la experiencia lógica matemática los conocimientos obtenidos no se sacan de los objetos como tales, sino de las acciones ejercidas sobre ellos. Desde este punto de vista la construcción es endógena.

III. Estructuras lógico-matemáticas. No son resultados de aprendizajes empíricos sino que constituyen la condición necesaria para la organización y registro de la experiencia El carácter necesario de las estructuras lógico matemáticas no prueba en nada su herencia, es el resultado de su equilibración progresiva por autorregulación.

IV. El hecho de que las estructuras lógico-matemáticas no se reducen ni a combinaciones hereditarias la manera de instinto, ni a aprendizajes. Se reconoce igualmente en el hecho de que las construcciones lógicas y matemáticas no consisten ni en invenciones ni en descubrimientos en los sentidos limitados y precisos de estos dos términos. La invención en matemáticas, una vez efectuada parece estar determinada, e incluso predeterminada por todo o que precede y se impone, por tanto con necesidad.

Para comprender la naturaleza del proceso de construcción hay que analizar ante todo las razones que retardan las combinaciones nuevas y las condiciones que las hacen posibles después. Estas condiciones por lo menos son dos: de naturaleza formal o lógica y la otra de naturaleza psicológica.
Desde el punto de vista de Psicología, se trata de descubrir el proceso desde la perspectiva del sujeto pensante y sobre todo actuante, este proceso de abstracción es característico del pensamiento lógico-matemático y difiere de la abstracción simple y aristotélica. Dado un objeto exterior por ejemplo un experimento, el sujeto se limita a disociar las cualidades ofrecidas y a retener una de ellas la forma por decir algo, desechando las demás. Por el contrario en el caso de la abstracción lógico matemáticas, lo dado es un conjunto de acciones o de operaciones previas del sujeto mismo con sus resultados. La abstracción consiste en tomar conciencia de la existencia de una de estas acciones u operaciones, es decir en subrayar su interés posible cuando había sido desdeñada. En segundo lugar se trata de reflejar la acción observada proyectándola sobre un nuevo plano, por ejemplo el del pensamiento por oposición a la acción práctica. En tercer lugar se trata de integrarla en una nueva estructura es decir de construir ésta, solamente es posible si se cumplen dos condiciones:

a) La estructura nueva debe ser una reconstrucción de la anterior, si no existe coherencia ni continuidad.

b) Debe de agrandar lo anterior, generalizándola por combinación. Las operaciones lógicas no han suministrado una ayuda adecuada para explicar la capacidad del niño para aprender los conceptos y destrezas matemáticas más básicas.

Algunos de los principios del aprendizaje que se asocia a una concepción constructivista del aprendizaje de acuerdo a Piaget, son los siguientes:

- ✓ El aprendizaje es un proceso constructivo interno, autoestructurante
- ✓ El grado de aprendizaje depende del nivel del desarrollo cognitivo
- ✓ El punto de partida de todo aprendizaje son los conocimientos previos
- ✓ El aprendizaje es un proceso de reconstrucción de saberes culturales
- ✓ El aprendizaje implica un proceso de reorganización interna de esquemas
- ✓ El aprendizaje se produce cuando entra en conflicto lo que el estudiante ya sabe con lo que debería saber

De esta forma el problema del desarrollo del conocimiento en general y el problema del aprendizaje, de acuerdo a Piaget (1964), se refiere al desarrollo del conocimiento como un proceso espontáneo, vinculado a todo un proceso de embriogénesis.

La embriogénesis se refiere al desarrollo de cuerpo, pero concierne, de igual manera al desarrollo del sistema nervioso y al desarrollo de las funciones mentales. Es un proceso de desarrollo que se debe localizar en su contexto general biológico y sicológico. El desarrollo es un proceso que relaciona con la totalidad de las estructuras del conocimiento.

El aprendizaje presenta el caso opuesto. En general el aprendizaje es provocado por situaciones, provocado por un experimentador psicológico o por un maestro de acuerdo a cierto aspecto didáctico, por una situación externa, siendo un proceso limitado a un solo problema o a una sola estructura. El desarrollo es el proceso esencial, en el que cada elemento del proceso aprendizaje se da como una función del desarrollo total, más como un elemento que explica el desarrollo.

Para entender el desarrollo del conocimiento, se debe partir de la idea de una operación. El conocimiento no es una copia de la realidad. Conocer un objetivo, conocer un evento, no es simplemente verlo y hacer una copia mental o imagen de él. Conocer es modificar, transformar, el objeto y entender el modo como el objeto está construido, así una operación es la esencial del conocimiento, es una acción interiorizada que modifica el objeto del mismo. Una operación es un conjunto de acciones que modifican al objeto y permiten al sujeto que conoce, a llegar a las estructuras de la transformación, es una acción reversible teniendo lugar en dos direcciones, nunca se encuentra aislada, esta siempre vinculada a otras operaciones y es parte de una estructura total. Estas estructuras operacionales, son las que constituyen la base del conocimiento, la realidad sicológica natural en términos de la cual se debe entender el desarrollo del conocimiento y el problema central del desarrollo es entender la formación, elaboración, organización y funcionamiento de estas estructuras. Las etapas de desarrollo de estas estructuras, principalmente son cuatro: la primera es sensorio-motriz, ésta tiene lugar en los primeros 18 meses de vida, en éstas se desarrolla el conocimiento práctico y existe una serie de estructuras que son indispensables para las posteriores estructuras del pensamiento representacional. En la segunda etapa se tiene la representación proporcional: los principios de lenguaje, de la función simbólica y por lo tanto de la representación. En la tercera etapa aparecen las primeras operaciones que operan sobre objetos pero aún sin hipótesis expresadas verbalmente. Finalmente en la cuarta etapa estas operaciones son sobrepasadas conforme el niño va alcanzando el nivel de operaciones hipotético-deductivas razonando de acuerdo a hipótesis y no sólo a objetos, construyendo nuevas operaciones. De tal forma que la etapa que nos ocupa de acuerdo a la dimensión, en esta investigación es la cuarta.

De lo anterior, se deduce uno de los supuestos básicos subyacentes de la investigación actual sobre aprendizaje, se basa en Piaget y consiste en aceptar que el sujeto construye de un modo activo el conocimiento, esto, a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales. Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el sujeto aprende, no determina tal aprendizaje. El sujeto no es un receptor pasivo del conocimiento, lo interpreta lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.

Así, la visión constructivista del conocimiento de Piaget, es una de las más aceptadas en investigación Educativa. De ella se derivan marcos teóricos y de referencia que se retoman en el seguimiento de las investigaciones en esta área. De la misma manera, las diferentes aproximaciones y líneas de investigación comparten el principio de la importancia de la actividad constructivista del estudiante en la realización de los aprendizajes escolares bajo la postura de la existencia y prevalencia de procesos activos en la construcción del conocimiento, tratando de explicar la génesis del comportamiento y el aprendizaje del estudiante al hacer énfasis en los mecanismos tales como el de la influencia sociocultural (v, gr. Vigotsky), socio afectivo (v. Gr. Wallon) o fundamentalmente intelectuales y endógenos (v. Gr. Piaget), que es el punto de partida de esta investigación, convergiendo en la intervención educativa a problemas educativos matemáticos como:

- El desarrollo sicológico del estudiante, particularmente en el plano intelectual y en su intersección con los aprendizajes escolares
- La identificación y atención a la diversidad de intereses, necesidades y motivaciones de los estudiantes en relación con la enseñanza y el aprendizaje
- El replanteamiento de los contenidos curriculares, orientados a que los estudiantes aprendan sobre contenidos significativos
- El reconocimiento de la existencia de diversos tipos y modalidades de aprendizaje escolar, dando una atención más integrada a los componentes intelectuales, afectivos y sociales
- La búsqueda de alternativas para la selección, organización y distribución de conocimiento escolar, asociadas al diseño y promoción de estrategias de aprendizaje e instrucción cognitivas
- La importancia de promover la interacción entre el profesor y el estudiante y entre los mismos estudiantes través del manejo del grupo mediante el empleo de estrategias de aprendizaje cooperativo

- La revalorización del papel del profesor, no sólo en función de transmisor del conocimiento, sino como mediador del mismo, enfatizando el papel de ayuda pedagógica que debe prestar al estudiante

2.1. MARCO TEÓRICO: TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

En Piaget (1973), se encuentra en conjunción una síntesis del aspecto individual y social, tanto del objeto y sujeto de conocimiento que sirve como un esquema explicativo en la interpretación del desarrollo del conocimiento conjuntamente en la escala individual y en la escala social. La síntesis como ya se mencionó anteriormente se refiere tanto al sujeto como al objeto del conocimiento, las componentes individual y sociedad expresan para la primera, que lo que hace el sujeto para asimilar un objeto depende del sujeto mismo, y para la segunda, lo que se asimila depende de la propia capacidad del individuo y de la sociedad que le provee de contextos y significados de los objetos.

Esta síntesis puede reinterpretarse alrededor de la noción de representación, cuando la sociedad la compone los estudiantes, los maestros, los contenidos matemáticos específicos y el tiempo preestablecido para su enseñanza, (Vergnaud, 19990a, 1990b). En esta concepción, se puede decir que la mente hace operaciones y estas operaciones son afectadas por la sociedad, que se refleja a través de representaciones, dando como resultado el funcionamiento cognitivo. Acerca de este funcionamiento cognitivo, la Psicología cognitiva nos da información del estudio de las diversas operaciones mentales que dependen del desarrollo de la mente, y ésta a su vez depende de la sociedad, el papel y la relación que guardan en la misma.

En la enseñanza de la matemática, el funcionamiento cognitivo requiere del individuo por conocer los procesos de pensamiento matemático, también requiere entender esos procesos de pensamiento en el plano educativo, es decir entender la situación escolar donde el individuo es un estudiante. Los procesos cognitivos del estudiante entonces dependerán de las actividades cognoscitivas fundamentales que se formulen en su situación escolar.

Una modelización del éste funcionamiento se ha organizado alrededor de la noción de conceptuación en la teoría de los campos conceptuales por Vergnaud (1990 b). La teoría de los campos conceptuales, se sustenta en el constructivismo de Piaget, resultando una teoría importante en la investigación en la enseñanza de la matemática, debido al cuestionamiento que se realiza acerca de lo que es un concepto, lo que es un comportamiento operativo en matemáticas, cómo se desarrolla, qué parte tiene la acción, la percepción, y el lenguaje en la formación de conceptos y finalmente, qué parte desempeña la interacción social.

El objetivo de la teoría de los campos conceptuales es proporcionar un encuadre teórico a las investigaciones sobre actividades cognitivas complejas especialmente referidas a los aprendizajes cinéticos y técnicos. Se trata de una teoría psicológica de la concepción de lo real: permite localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual. Esta teoría permite igualmente, analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y los invariantes operatarios implícitos en las conductas del estudiante en situación. De esta manera esta teoría ofrece también, un marco de referencia para el análisis del aprendizaje que tiene lugar, concediendo una parte central a la acción del sujeto en diversas situaciones, distinguiéndose dos clases de situaciones:

- Clases de situaciones para las cuales el estudiante dispone en su repertorio de su desarrollo, de las competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación
- Clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que obliga a un tiempo de reflexión y de exploración de dudas y le conduce eventualmente al éxito o al fracaso

Por tanto la idea de campo conceptual es considerada a partir de un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica variaciones de las situaciones y el conjunto de conceptos que permite analizar estas situaciones como tareas matemáticas. Donde el concepto de situación se entiende como el conjunto de eventos que dan significado a una relación entre invariantes y simbolización, involucrando objetos y su relación entre ellos. La idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propia.

Entonces el proceso cognitivo y las respuestas del estudiante son función de las situaciones a las cuales son confrontadas. A continuación se identifican dos tipos de situaciones:

- Las de variedad: existe una gran variedad de situaciones en un campo conceptual y las variables de situación son un medio para generar de manera sistemática el conjunto de las clases posibles
- Las de la historia: los conocimientos de los alumnos son modelados por las situaciones que han encontrado y dominado progresivamente, especialmente por las primeras situaciones susceptibles de dar sentido a los conceptos y a los procedimientos que se les quiere enseñar

La característica importante de la teoría de los campos conceptuales es la consideración de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje bajo el enfoque de la formulación de esquemas que se puede presentar para las dos clases de situaciones mencionadas. Vergnaud, llama esquema a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. En estos esquemas es donde se deben investigar los elementos cognitivos que permiten la acción del sujeto, ser operatoria, donde la sistematización es evidentemente una de las manifestaciones visibles del carácter invariante de la organización de la acción, pero una serie de decisiones concientes puede también constituir el objeto de la organización invariante para una clase de situaciones. Así mismo, la sistematización no impide que el estudiante conserve el control de las condiciones bajo las cuales tal operación es apropiada o no. De esta forma, la idea del funcionamiento cognitivo de un estudiante o de un grupo de estudiantes en situación, reposa sobre el repertorio de esquemas disponibles y cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas y el reconocimiento de invariantes es por tanto la clave de la generalización del esquema.

Así el esquema es una función temporalizada de argumentos que permite generar series de diferentes acciones y de recogida de información en función de los valores de las variables de la situación.

La interpretación del proceso de adquisición del conocimiento, relativo a un campo conceptual, (Vergnaud, 1985) aborda los siguientes aspectos:

1) Las Acciones. El estudiante acciona mediante una reacción a estímulos sobre el objeto matemático (la transformación se considera como una acción sobre el objeto matemático) estableciendo relaciones entre otros objetos

2) Las Representaciones. El estudiante transforma una acción sobre el objeto matemático, estableciendo control sobre el mismo por medio de las relaciones y clasificaciones en su realidad, de tal forma que se presentan invariantes operatorias en el desarrollo del conocimiento

3) Los Esquemas. Es el conjunto de representaciones sobre el objeto matemático en estrecha relación como una totalidad dinámica y funcional de realidad del sujeto, a través de un conjunto de invariantes operatorias. La definición de esquema se presenta como una totalidad dinámica y funcional. Primeramente como algo que funciona como una unidad y en segundo lugar como una organización invariable de la conducta por situaciones dadas. El esquema se compone en cuatro categorías:

1. Los objetivos de intención y anticipación

2. Reglas de acción
3. Invariaciones operatorias
4. Posibilidades de inferencia en situaciones

Las invariantes operatorias se clasifican en dos grandes categorías: los conceptos en acto y los teoremas en acto. Los conceptos en acto son categorías que permiten producir la información pertinente en una situación. Los teoremas en acto son proposiciones tenidas por verdaderas que le permiten al sujeto plantear la información de los conceptos en acto

4) Las Conceptuaciones. Son la relación entre las representaciones y la realidad, a través de la conceptuación de la noción matemática, cuyo medio es la invariante operatoria.

En esta perspectiva, se considera que un concepto matemático no puede ser reducido a su definición si se está interesado en su enseñanza y aprendizaje y es a través de situaciones problema por resolver que un concepto matemático puede adquirir sentido y significado para el estudiante. Por tanto, el conjunto de situaciones problema es lo que permite identificar los conceptos constitutivos del campo conceptual y a la vez, la identificación de los conceptos es lo que permite analizar estas situaciones.

Los diferentes conceptos enlazados en una estructura matemática, serán pertinentes de acuerdo a la información o referencia que se utilice es decir, dependiendo de la situación problema, de sus objetivos, de las reglas y de las acciones en cada situación, que se establecen de acuerdo a las invariantes operatorias que se identifiquen.

Los aspectos que entran en juego en la construcción del conocimiento y que son expuestos por Vergnaud en los párrafos anteriores, son interpretados en este trabajo de acuerdo a como se muestra en a la figura 3.

Interpretación de los proceso del conocimiento relativo a situaciones específicas de acuerdo a Vergnaud

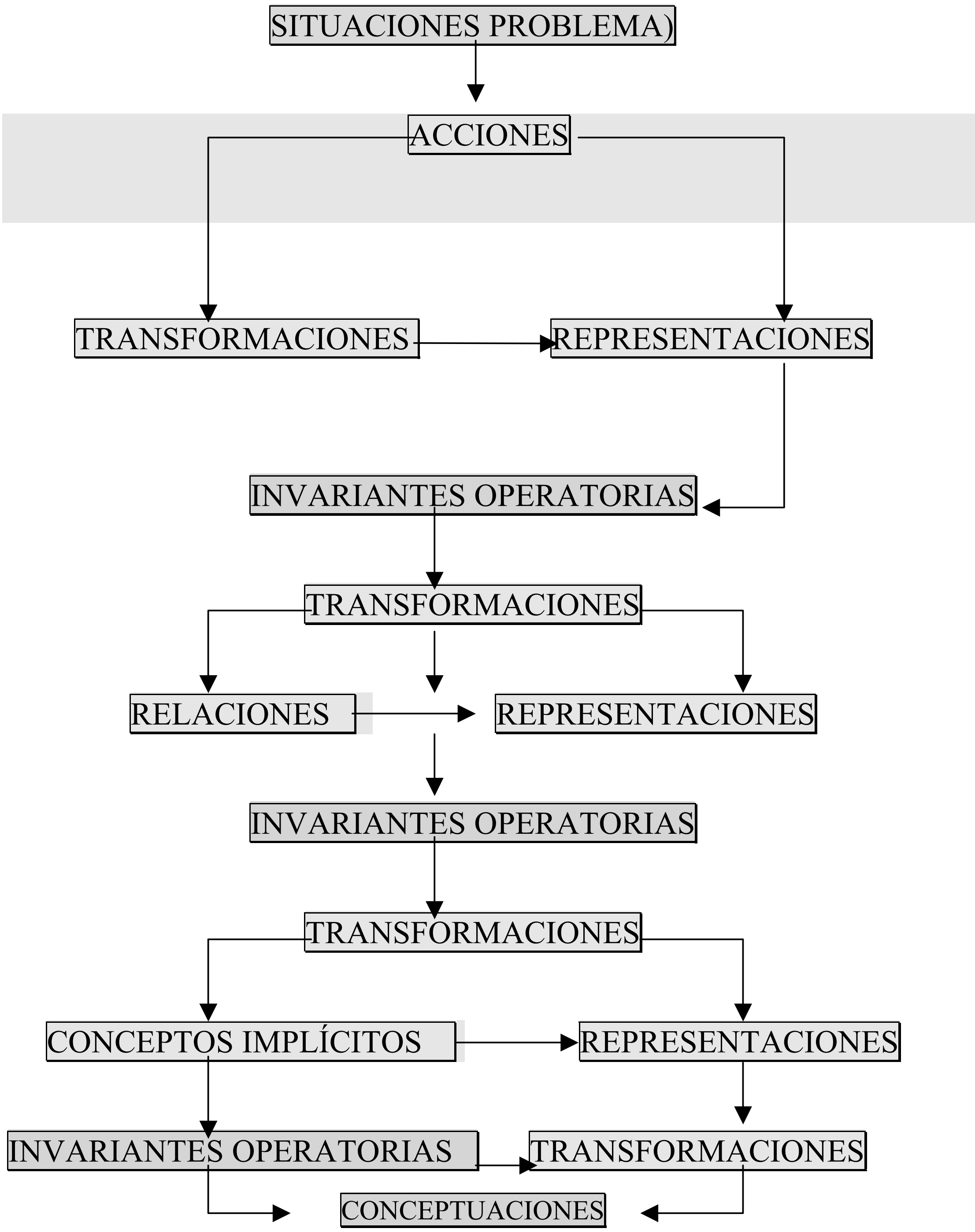


Fig. 3. Proceso de desarrollo del conocimiento del estudiante de acuerdo a Vergnaud

En referencia a los invariantes operatorios que menciona Vergnaud, se tiene que uno de los hechos mejor establecidos por la Psicología cognoscitiva es que el desarrollo del pensamiento se hace por etapas y que algunas grandes etapas se caracterizan por la construcción o adquisición de nuevos invariantes operatorios. Es Piaget (1973) quien ha hecho en éste terreno los descubrimientos más decisivos, mostrando a la invariante operacional como un esquema mental que es invariante de la conducta y se constituye por las diferentes relaciones que establecen la actividad del niño en diversas situaciones. Piaget expone, que durante el transcurso de los primeros años de vida, el niño adquiere numerosos invariantes que le permiten organizar el mundo en términos de objetos, clases y relaciones, dando lugar a la adquisición de invariantes relacionales y clasificatorias que integran su esquema mental, para dar paso a diferentes tipos de invariantes. Existen fundamentalmente tres tipos lógicos de invariantes operatorios:

-*Invariantes del tipo Proposiciones*. Son susceptibles de ser verdaderos o falsos, las teorías en acto son invariantes de este tipo
-*Invariantes del tipo Función proposicional*. No son susceptibles de ser verdaderos o falsos, pero constituyen las piezas indispensables para la construcción de proposiciones (conceptos en acto)
-*Invariantes del tipo Argumento*. Se compone por la función proposicional y las proposiciones.

Los tres tipos de invariantes, conforman los teoremas en acto y los conceptos en acto mencionados por Vergnaud (1996). Vergnaud, establece que los conocimientos conceptuales que surgen en la práctica y que no son ni conocimientos formales ni explícitos, son denominados concepto en acto y teoremas en acto.
Así, retomando el planteamiento de Piaget, Vergnaud establece, que el teorema en acto es una proposición que es sostenida como verdadera por un individuo en un cierto rango de situaciones y un concepto en acto es una categoría (objetos, propiedades, transformaciones procesos) que posibilita seccionar el mundo real en distintos elementos y aspectos para obtener la información más adecuada a la

situación, donde éstos, pueden ser relevantes o irrelevantes a la situación.
En consecuencia, la existencia de los teoremas y conceptos en acto en el conocimiento del individuo es probada por las diferencias observadas entre las conductas especialmente en las fallas que se presentan al interactuar en una determinada situación. Por tanto, los teoremas y conceptos en acto son inferidos de la observación de la actividad en una tarea y puede ser que no sean expresadas por el individuo. Estos aspectos centrales en la comprensión del desarrollo del conocimiento del niño, abre la posibilidad de entender porque las mismas estructuras de un conocimiento no se aplican por igual en diferentes situaciones para entender diferentes objetos o diferentes relaciones entre objetos.

De esta manera, bajo los lineamientos que marca Vergnaud en su teoría, el entendimiento de la acción del estudiante relativo al campo conceptual de la estructura de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa, esta orientado a estudiar algunos aspectos del esquema, mediante las invariantes operatorias que inciden directamente o indirectamente en el conocimiento acerca de esta estructura matemática en situaciones donde tiene lugar la vinculación de dos contextos: matemáticas e ingeniería. Siendo el análisis del esquema del estudiante, un estudio dirigido a analizar el conjunto de conceptos informales que se enmarcan en las invariantes operatorias presentes en su actividad mental en situaciones que conformaran el campo conceptual.
Es menester hacer notorio, que la situación que conformará al campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa y las posibles derivadas de ésta, intentan su demarcación según Vergnaud, ya que son referidas a una clase de objetos, a una clase de eventos, a una clase de problemas, teoremas o afirmaciones, cuyo origen es el contexto. Resguardando el que el presentar los conceptos en situación, constituyan el objeto del entendimiento matemático del estudiante. Así, las situaciones que conformen el campo conceptual buscado, como medio para analizar el esquema mental del estudiante, serán aquellas que propicien las relaciones entre una noción y otra por el contexto en donde tendrán lugar.

2. 2. MARCO DE REFERENCIA: LA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

La matemática en el contexto de las ciencias incluye una propuesta curricular y didáctica que reflexiona acerca de la vinculación que deber existir entre la matemática y las ciencias que la requieran (Camarena, 2001). En este marco se plantea el cómo debe ser la enseñanza de las matemáticas en una escuela que requiere de esta área y, específicamente en la ingeniería, la matemática en contexto se expone como un medio ideal para la enseñanza de las mismas, (Camarena, 1995).
El proceso de vinculación de la matemática con las ciencias, se conoce como contextualización y el producto obtenido es la matemática contextualizada en una cierta área. Dicho proceso se realiza mediante el seguimiento de seis etapas, que marca la matemática en contexto (Camarena, 1997):

1. Planteamiento de un problema
2. Determinación de las variables y de las constantes del problema
3. Determinación del modelo matemático
4. Solución matemática del problema
5. Determinación de la solución requerida por el problema
6. Interpretación de la solución en términos del problema

Siendo la etapa de la determinación del modelo matemático la etapa central de esta propuesta, el modelo constituye la representación matemática del problema real específico a tratar.
De esta forma, la contextualización de la matemática se proyecta como una propuesta didáctica en la ingeniería (Camarena, 1990), con miras a favorecer el proceso de enseñanza- aprendizaje de tal suerte que permita al estudiante:

- *Manejar el lenguaje de la ingeniería*
- *Minimizar errores*

- *Realizar cálculos teóricos en vez de cálculos prácticos, ahorrando tiempo y recursos*
- *Pronosticar comportamientos*
- *Tener mayor precisión en el análisis del problema*
- *Manejar un orden y disciplina mental dentro de la ingeniería y de su vida cotidiana*
- *Adquirir espíritu crítico*
- *Lograr un criterio científico*

El problema de la enseñanza de la matemática en la Ingeniería, ha llevado a Camarena a cuestionar la desvinculación que existe entre estas dos esferas culturales a través del divorcio que existe entre las matemáticas y sus aplicaciones o su uso en la ciencia que la sustenta, categorizándose como una de las grandes causas de la irregularidad escolar en esta área y el bajo nivel académico del egresado, ya que la realidad del ingeniero en ejercicio se presenta como el enlace entre la matemática y la ingeniería en cuestión. El problema de desvinculación se integra por dos aspectos: 1) El matemático resuelve problemas de la matemática que servirán a la ingeniería sin ser consciente de ello. 2) El ingeniero usa matemáticas que se presentan ante él como modelos ya elaborados y el paso que se tiene que dar entre la matemática y la ingeniería prácticamente se debe a unos pocos científicos o ingenieros con una fuerte formación en matemáticas, los cuales han desarrollado la ingeniería (Camarena 1995).

La desvinculación esbozada por Camarena y recreada posteriormente entre la serie de Fourier y el fenómeno de transferencia de masa, hacen posible, bajo la propuesta de Camarena, el trabajo de contextualización de esta estructura matemática en el contexto del fenómeno (Muro, 2000), lo cual posibilita, abrir el estudio de la integración del campo conceptual de la misma serie, en el contexto del mismo fenómeno, como primera parte del planteamiento de esta investigación a través de la búsqueda de las relaciones entre los conceptos que conforman estas dos nociones y la determinación de las situaciones que dan lugar a dicha relación.

Por tal motivo, la matemática en contexto constituye un marco de referencia en este trabajo de investigación:
Al pretender describir el entendimiento matemático del estudiante cuando este interactúa con un contenido conceptual matemático contextualizado en el fenómeno de transferencia de masa.

El estudio del conocimiento del estudiante relativo a los conceptos que conformarán el campo conceptual comprendido en situaciones generadas por el contexto, tiene como marco la teoría de Vergnaud, bajo dos aspectos:

1) *La integración del campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa, visto como un conjunto de situaciones y conceptos por la vinculación y relación entre ambos contextos. 2) El análisis de las conceptuaciones del estudiante mediante las invariantes operatorias identificadas en sus representaciones, dentro de situaciones referentes a dicho campo.*

2.3. METODOLOGÍA

A través de plantear el objetivo de investigación, como la descripción del análisis del conocimiento del estudiante en términos de la modelación del funcionamiento cognitivo relativo a un campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa, la metodología se compone de dos etapas:

1. Integración del campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia
    1.1 Estudio de los elementos matemáticos que habitan en el concepto de la serie de Fourier

1.2 Estudio de los elementos fenomenológicos que habitan en el proceso de transferencia de masa

1.3 Caracterización de la estructura de la serie de Fourier en el contexto de transferencia de masa.

1.3.1. Determinación de las situaciones que prevalecen en el contexto por contener los elementos matemáticos y del fenómeno

1.3.2. Identificación y establecimiento de las relaciones que guardan los conceptos que definen a la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa bajo el marco de las situaciones identificadas en la etapa anterior

2. Análisis de la actividad operacional del estudiante relativo al campo conceptual

2.1. Análisis del esquema del estudiante

2.3.1 Análisis de la variación en sus representaciones

2.3.2 Identificación de las invariantes operatorias en el análisis de la variación de sus representaciones

La etapa de caracterización de la serie de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa, comprende el análisis los elementos matemáticos que entran en juego y son referentes a la estructura de la serie de Fourier, estudiando los conceptos que definen dicha estructura, de entre los cuales se pueden nombrar: la periodicidad de una función, la suma de funciones senoidales, la convergencia de una función y la suma infinita de funciones. De la misma manera, se analizan los elementos del fenómeno que conforman el contexto de la transferencia de masa, como son los conceptos de concentración, evaporación, líquido transferido, características de una sustancia coloidal etc. Se identifican las situaciones que pueden posibilitar el establecer las relaciones entre estos dos tipos diferentes de conceptos. Y, finalmente, en el marco de estas situaciones, se retoma la vinculación de éstos dos tipos de nociones, para dar lugar a la relación entre los conceptos que constituyen dichas nociones, obteniendo un contenido conceptual definido por las relaciones establecidas entre un concepto y otro y por las situaciones que los definen.

A través de la obtención de este contenido conceptual, debido a la caracterización, es posible, la integración de estos elementos en un campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia, el cual es caracterizado por el establecimiento del conjunto de situaciones y conceptos que son específicos del contexto del fenómeno.

De esta manera, la variabilidad de las situaciones que integran el campo conceptual, deberá provenir del contexto que es propiamente el fenómeno, con situaciones que no se pueden desligar del mismo, de tal suerte, que la contextualización de la serie de Fourier en la transferencia de masa se encuentra presente como una estrategia de vinculación entre la matemática y el contexto, para establecer los conceptos resultantes de la misma y las situaciones que tienen lugar.

Bajo este esquema, de entre las situaciones donde se presenta el fenómeno de la transferencia de masa, resultan ser, el secado de materiales, como una operación de la ingeniería a través de la cual se extrae líquido de una sustancia en ciertas condiciones. Específicamente, es posible identificar situaciones de secado de materiales húmedos, tal es el caso de las sustancias coloidales.

Por tal motivo, se propone la integración del campo conceptual de la transferencia de masa, mediante situaciones que corresponden al secado de coloides por ser referentes a dicho fenómeno y además, como situaciones que pertenecen a problemas reales de la ingeniería y que son de suma importancia en esta área; considerando que este factor sea un factor motivante en la acción del estudiante.

Así, el análisis cognitivo se realiza mediante la interacción del estudiante con este campo conceptual al enfrentarse con actividades y tareas que pertenecen a este tipo de conceptos y a esta clase de situaciones. En el análisis, se estudian la conceptuaciones bajo el estudio del esquema, con la medición de las invariantes operatorias que se presentan en su conocimiento.

La medición representante de las invariantes operatorias, corresponden a un enfoque cualitativo, cuya recolección de datos se realiza a través de la observación y sesiones en profundidad o grupo de enfoque.

El grupo de enfoque, se compone por dos estudiantes de Ingeniería Química del séptimo y octavo semestre del Instituto Tecnológico de Toluca. El mismo grupo participa en cinco sesiones de dos y tres horas en las cuales conversan y acuerdan acerca de los problemas planteados relativos a situaciones de secado de coloides. Las sesiones se llevan a cabo en un laboratorio de la misma especialidad que pertenece a la misma institución y en donde ellos están habituados a trabajar.

En la primera sesión se le pide al grupo realizar la experimentación de secado de un coloide y recolectar información acerca del mismo. Por tanto el estudiante es posicionado en un ambiente situacional con la experimentación del secado de estas sustancias. A partir de la segunda hasta la quinta sesión, el grupo es enfrentado a actividades estructuradas que engloban conceptos acerca de las situaciones en que ellos se están desarrollando. La respuesta de los estudiantes se presenta algunas veces por escrito y otras verbalmente, en un marco del análisis de la variación se sus representaciones.

La recolección de información en las sesiones, se apoya en vídeo grabaciones, en los escritos del estudiante, en algunas discusiones grabadas entre ellos y en respuestas proporcionadas verbalmente.

Durante las sesiones también se recurre a la observación por parte del investigador, realizando un registro para describir el ambiente en el que se mueve el estudiante, la actitud del grupo, la actitud personal de los estudiantes que conforma el grupo y las actividades que desarrollan. La conducción de las sesiones es a través del investigador. Con participación parcial, cuando el investigador lo considera pertinente. En las sesiones, el grupo es informado de que será observado y video grabado.

El análisis cualitativo de la información obtenida acerca del conocimiento del estudiante, es interpretada y ordenada de acuerdo a los aspectos que marca Vergnaud en el estudio de la actividad del estudiante relativo a un campo conceptual, que para este caso, lo que se busca es tener una visión del conocimiento del estudiante referente al campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa.

Los aspectos a considerar en el proceso de análisis, son las invariantes operatorias que presenta el estudiante en sus conceptuaciones. Estos aspectos son organizados por el tipo de representaciones en cada una de las situaciones en que se desenvuelve dentro del grupo de enfoque.

Mediante los resultados elaborados en el análisis cualitativo, se pretende categorizar dichos resultados, como conceptuaciones formuladas por el estudiante, relativas a un campo conceptual, siguiendo el planteamiento de Vergnaud: las conceptuaciones, son producto de la actividad del sujeto referida a situaciones, no siendo referido a aspectos teóricos, formales ni explícitos, ni de conceptos aislados.

En esta medida, el análisis del aprendizaje del estudiante en base al campo conceptual expuesto, es descrito, bajo el panorama de su actuación en un grupo con el propósito de tener un acercamiento al entendimiento de su funcionamiento cognitivo de manera colectiva.

CAPITULO 3

INTEGRACIÓN DEL CAMPO CONCEPTUAL DE LA SERIE DE FOURIER EN LA TRANSFERENCIA DE MASA

El desarrollo de este capítulo, se realiza en base al análisis de los elementos que entran en juego en las estructuras tanto de la serie de Fourier como del fenómeno de transferencia de masa y bajo que situaciones es posible establecer una relación entre los mismos, de tal forma, que el resultado sea una correspondencia conceptual entre ambas estructuras.

Siendo los factores situacionales los que determinan el conjunto de conceptos que resultan de la relación de estos dos tipos de elementos, la caracterización de la serie de Fourier en el fenómeno, se constituye por el estudio de estos elementos y su relación, bajo la argumentación de que las situaciones y los conceptos a integrar un contenido conceptual de esta naturaleza, derivan de la estructura matemática en el contexto a usar.

Por tanto, la caracterización implica la búsqueda de relaciones entre conceptos y situaciones de contexto que su vez infieren tareas y actividades del mismo corte, de tal suerte que situaciones, conceptos y tareas, integran un campo conceptual sobre el cual el estudiante ha de interactuar y, sobre el cual el investigador puede analizar y describir el conocimiento del sujeto a través de su proceso de conceptuación; que de acuerdo a Vergnaud, (1990), se define por la forma en que el sujeto organiza su comportamiento en estas circunstancias.

3.1. ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS MATEMÁTICOS Y DEL CONTEXTO

El estudio se inicia con el reconocimiento de dos tipos de conceptos que pueden habitar en la estructura de la serie de Fourier en el contexto referido: 1) Conceptos relativos a la matemática de la serie de Fourier. 2) Conceptos relativos al fenómeno de transferencia de masa y que pertenecen a un contexto específico de la ingeniería.
A continuación se especifican estos dos tipos de conceptos.

3.1.1. Conceptos matemáticos que conforman la estructura de la serie de Fourier

Se puede usar una serie infinita para definir una función Y = f(t) cuyo dominio es el intervalo de convergencia de dicha serie. Explícitamente, para cada t en este intervalo se define a f igual a la suma de la serie, es decir: $f = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \ldots$ Si f(t) es una función definida de esta manera, se dice que la suma de las f_n es una representación en serie de funciones de f o bien que la serie de funciones representa a la función f.

Una representación en serie de funciones de la función y = f(t), permite establecer una relación entre una función y la suma de las funciones que la representa, así como encontrar el valor de la función, hallando o estimando en un punto, la suma de funciones que compone a la serie. Entonces, existen dos tipos de problemas alrededor de las series: 1) Dada una función f, hallar su representación en serie de funciones. 2) Dada una serie de funciones hallar a f a la cual representa. Por ejemplo dada la función $f = \frac{1}{1+t}$, su representación en serie de funciones sería:

$$f = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \ldots\ldots + (-1)^n\ t^n + \ldots \text{ para } |t| < 1.$$

La gráfica de la función y de la serie en este intervalo es como la que se muestra:

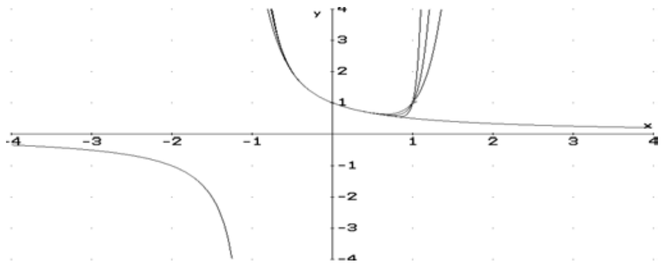


Fig. 4. Gráfica de la función $f = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \ldots\ldots + (-1)^n\ t^n + \ldots$ para $|t| < 1$.

Por tanto, una función continua se puede representar en serie de funciones para un cierto intervalo y la serie es convergente para ese mismo intervalo, tal y como se puede ver en la figura anterior.

Esto significa que: $\lim_{n \to \infty} S_n = y = f(t)$ donde S_n son las sumas parciales. Y la suma de la serie, no es otra cosa que la misma función que representa en un cierto intervalo de continuidad.

Una serie de Fourier es un tipo de serie infinita de funciones que se caracteriza por conformarse por funciones trigonométricas del tipo sinusoidales y que puede representar a una función f que es periódica, o bien una función f no periódica que esta definida en cierto intervalo (0, τ), para la cual, dicha serie de Fourier estará definida en ese mismo intervalo, de tal forma que f esta dada por:

$$f = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + ... + b_1 sen w_0 t + b_2 sen w_0 t + ..$$

Esta suma infinita de funciones se puede expresar mediante una suma de la siguiente manera:

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n w_0 t + b_n sen n w_0 t) \quad \text{con n = 0, 1, 2, 3…}$$

Para ambas expresiones $w_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ con T = periodo de la función f(t).

Una función periódica se puede definir como una función para la cual f = f(t+T) para todo valor de t. La constante mínima T que satisface la anterior relación se llama período de la función. Un ejemplo de una función periódica se muestra enseguida:

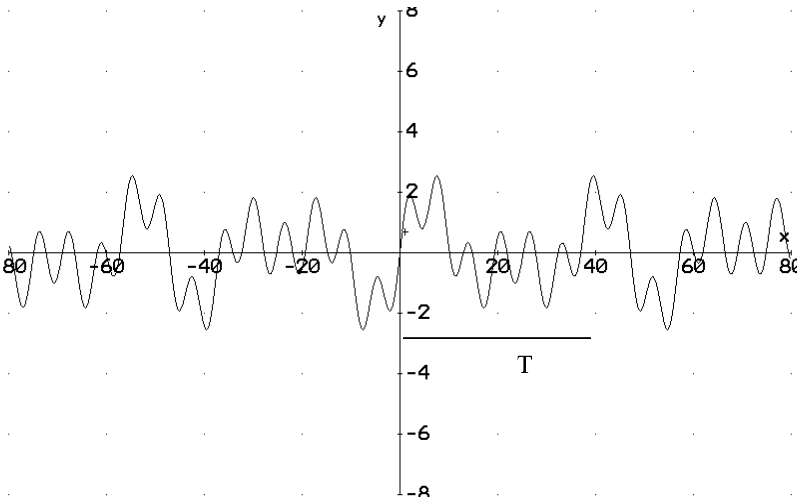


Fig. 5. Función periódica f con periodo T

De acuerdo a la expresión dada, la representación en serie de Fourier de una función periódica representa la función periódica como la suma de componentes senoidales que tienen diferentes frecuencias. La componente senusoidal de frecuencia $w_n = nw_0$ se le llama enésima armónica de la función periódica. La primera armónica es la componente fundamental debido a que tiene el mismo periodo de la función. $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, se conoce como la frecuencia angular fundamental, los coeficientes a_n y b_n se les conoce como amplitudes armónicas.

Una de las propiedades que caracteriza a las funciones senusoidales sen(nw_0) y cos(nw_0) que componen a la serie de Fourier, es la ortogonalidad, formando un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ de tal forma que: $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(nw_0 t)\cos(nw_0 t)dt = 0$ esta relación de ortogonalidad es útil en la evaluación de los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier. Obteniéndose las siguientes expresiones: $\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ o $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

Es necesario hacer notar que $\frac{a_0}{2}$ corresponde al valor promedio de f(t)= durante un periodo. Para b_n se tiene: $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sen(nw_0 t)dt$ con n = 1, 2 ….

De la misma forma a_n se puede expresar: $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(nw_0 t)dt$ con n = 0, 1, 2, 3……

Si la serie infinita de Fourier, puede representar a una función periódica, es posible que una serie finita de Fourier, aproxime la representación de la función periódica de tal forma que $S_k(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nw_0t + b_n sennw_0t)$ sea la suma de los primeros (2k+1) términos de la serie que representa a f(t) en el intervalo:

$-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, de tal forma que $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nw_0t + b_n sennw_0t) + \varepsilon_k(t)$

donde $\varepsilon_k(t) =$ f(t) - S_k(t) y $\varepsilon_k(t)$ es la diferencia o error entre f(t) y su aproximación, entonces el error E_k cuadrático medio esta definido por:

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}(\varepsilon_k(t))^2 dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}((f(t) - S_k(t))^2 dt$$

Esta expresión se puede reducir a:

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}(f(t))^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a^2{}_n + b^2{}_n)$$

Lo establecido anteriormente, supone que la función f se puede representar mediante una serie de Fourier. Sin embargo, existen condiciones conocidas como condiciones de Dirichlet, bajo las cuales es posible la representación en serie de una función f:

1. Si la función f tiene un número finito de discontinuidades en un período
2. Si la función f tiene un número finito de máximos y mínimos en un período
3. Si la integral del valor absoluto de f en un período es finita; es decir

$$\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt = finita < \infty$$

Uno de los conceptos que aparecen en estas condiciones es la continuidad por tramos. Una función f es continua por tramos en el intervalo finito [-$\frac{T}{2}$, $\frac{T}{2}$] si satisface las condiciones 1 y 2. Un ejemplo de este tipo de funciones es como la que se muestra en la figura:

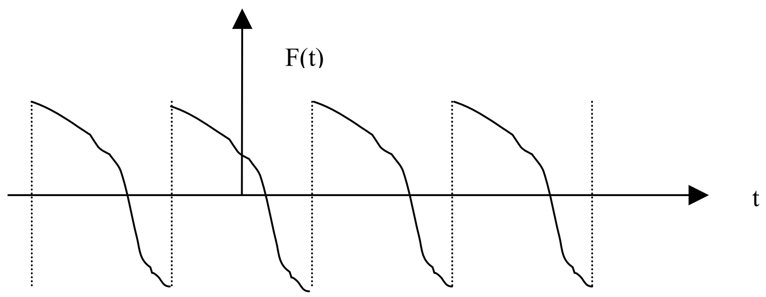
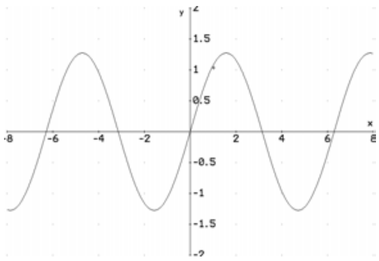


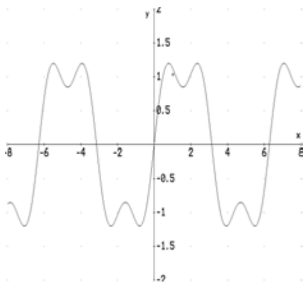
Fig. 6. Función continúa por tramos

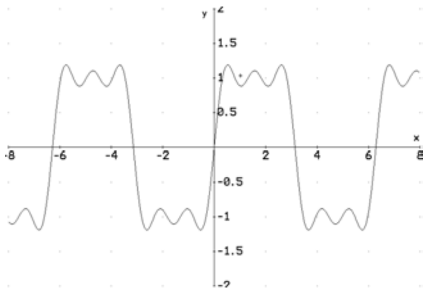
En un punto de discontinuidad t = t_1 de la función mostrada en la figura, la serie de Fourier converge a : $\frac{1}{2}[f(t_1-) + f(t_1+)]$ donde f(t_1-) es el límite de f cuando t se aproxima a t_1 por la izquierda y f(t_1+) es el límite de f cuando t se aproxima a t_1 por la derecha. Lo anterior índica que una serie de Fourier tiene límite siendo siempre convergente a la función f. Entonces al analizar la convergencia de la serie conduce a la evaluación de la serie al tener como límite a la función en donde esta definida.

De lo anterior se tiene como conclusión, que una caracterización de la serie de Fourier es que ésta es una serie infinita de funciones senoidales que es convergente a la representación de una función periódica f con período T que satisface las condiciones de Dirichlet, es decir, para una función que es continua por tramos e integrable sobre cualquier intervalo. Un ejemplo de ello se tiene en la siguiente figura:



a) $f_1 = \frac{4}{\pi} sen(t)$





b) $f_2 = \frac{4}{\pi}(sen(t) + \frac{sen(3t)}{3})$

c) $f_3 = \frac{4}{\pi}(sen(t) + \frac{sen(3t)}{3} + \frac{sen(5t)}{5})$

Fig. 7. Gráfica de las sumas parciales aproximándose a una función.

Es interesante ver cómo las sumas parciales de las funciones que conforman a una serie de Fourier se aproxima a una función f(t) definida por -1 y 1 en los intervalos: $-\pi < t < 0$ y $0 \leq t < \pi$ respectivamente. Tal y como se muestra en la siguiente figura:

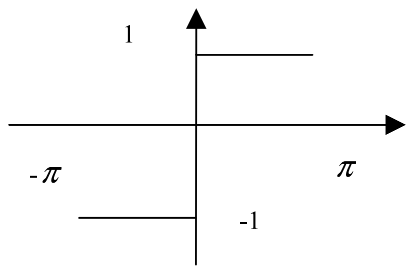


Fig. 8. Gráfica de una función, definida en -1 y 1 en los intervalos:- $\pi < t < 0$ y $0 \leq t < \pi$ respectivamente

Y cuya representación en serie de Fourier es: $f = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n} sen(nt)$

En el caso de la expansión en serie de Fourier de una función f no periódica definida en un intervalo finito (0, τ), el desarrollo se define solamente en el mismo intervalo y con la frecuencia fundamental deseada, construyendo una función periódica adecuada que sea idéntica a la f que se quiere representar y que satisfaga las condiciones de simetría que conduzcan a la forma deseada de la serie de Fourier. Por ejemplo para la siguiente función f que no es periódica:

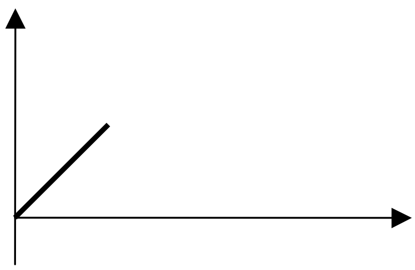


Fig. 9 Gráfica de una función no periódica

Se pueden tener representaciones de esta función por medio de diferentes series de Fourier según las simetrías. En las figuras siguientes se muestran algunas de ellas:

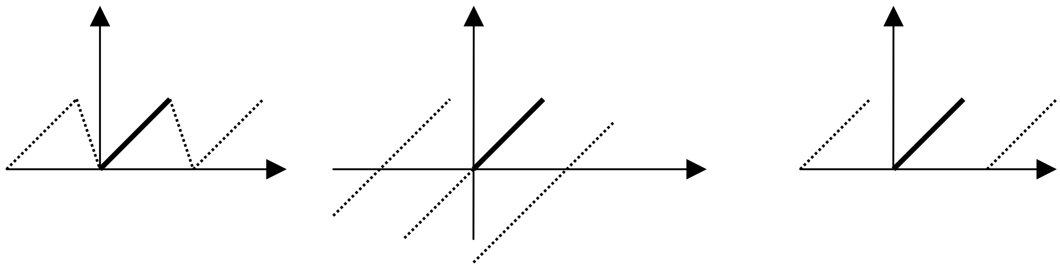


Fig. 10. Representaciones de una función no periódica en series de Fourier

Para la primera figura se tiene la simetría par en términos de coseno con $w_0 = \frac{\pi}{\tau}$, la segunda figura corresponde a la simetría impar en términos de seno con $w_0 = \frac{\pi}{\tau}$ y la última en términos del seno y del coseno con $w_0 = \frac{2\pi}{\tau}$.

De esta manera, dada la determinación del concepto de la serie de Fourier con los diferentes aspectos que predominan, se tiene como resultado, algunos elementos matemáticos que se han identificados en esta estructura y que dan origen a tres grupos diferentes:

- ✓ Conceptos acerca de la serie de Fourier: Suma de funciones, series infinitas y convergencia.
- ✓ Conceptos sobre los que generan la serie de Fourier: Funciones seccionalmente continuas, periodicidad y error de aproximación.

- ✓ Conceptos que determinan a la serie de Fourier: Funciones armónicas y ortogonalidad

3.1.2. Conceptos Referentes al contexto (fenómeno de transferencia de masa)

El fenómeno de transferencia de masa, es un fenómeno que se presenta en diversas situaciones de la ingeniería. Las situaciones se localizan en las operaciones unitarias difusionales. Este tipo de operaciones tienen una base teórica común. En cada una de ellas se transfiere masa de una fase fluida a otra a través de una interfase. Este fenómeno se encuentra asociado a la agitación térmica de las moléculas, en una región en la que están concentradas moléculas de una clase y esta diferencia es lo que provoca la tendencia a salir de esa región.

De entre las operaciones donde se presenta la transferencia, se tiene el secado de materiales húmedos. Esta operación consiste en eliminar líquidos de un material por procedimientos térmicos, las razones para desecar un material en ingeniería son varias, de entre las cuales se pueden nombrar; facilitar la manipulación del material para un tratamiento posterior, permitir la utilización satisfactoria del producto final, reducir costos de transporte, conservar el material durante su almacenamiento y aumentar el valor de la utilidad de los desperdicios o subproductos obtenidos en la industria del proceso.

El extraer la humedad parcial o total de un material que se expone a un medio secante, el cual puede ser aire caliente, provoca que a través de la circulación del aire en la muestra a secar, tenga lugar el fenómeno de transferencia del líquido en el interior y en la superficie de dicha muestra hacia el exterior, de tal forma que la humedad del material cambia de manera decreciente a través del tiempo, esta transferencia del líquido se mide mediante la cantidad de masa evaporada o la cantidad de liquido que permanece en la muestra, de allí su nombre; transferencia de masa.

En el análisis del proceso de transferencia de masa, se encuentran variables externas que influyen en el comportamiento de secado: las principales variables externas son la temperatura, la humedad, la ventilación, el estado de subdivisión de la sustancia, la agitación de la misma, y el contacto entre las superficies calientes y la sustancia húmeda. La transmisión de calor y de masa son fenómenos influenciados directamente por las variables externas; en el caso de la temperatura, esta influye directamente al provocar cambios en la superficie exterior y desde ella al interior de la sustancia para dar lugar a la transferencia del líquido hacia la superficie y su posterior evaporación.

El secar un material clasificado como una sustancia coloidal que debe conservar cierta propiedades, como los es la cantidad de líquido que debe contener, es un problema que corresponde analizar y resolver por el ingeniero. En dicho problema se contemplan factores que afectan el desarrollo del proceso permitiendo la complejidad del mismo debido a los múltiples problemas que se encuentran presentes; tales como, especificar la cantidad necesaria de la eliminación del líquido, la temperatura de secado, el tiempo de duración de secado, la concentración que requiere conservar de la sustancia a secar en un tiempo determinado y la calidad del producto que se desea obtener, considerando propiedades de textura, dispersión y punto de emulsión.

El estudio del secado de este tipo de sustancias conduce al análisis del mecanismo de transferencia de masa del líquido debida a esta operación. En dicho análisis se encuentra la siguiente información:

En la operación de secado se producen tres procesos fundamentales y simultáneos:

1. La transferencia de calor para evaporar el líquido del coloide
2. La transferencia de masa en humedad interna y líquido evaporado donde la masa se transfiere como líquido-vapor o como ambos dentro de la sustancia, o bien como vapor dentro de las superficies húmedas
3. La transferencia de movimiento de las moléculas del líquido transferido, que influye para que el gradiente de concentración de la sustancia dependa del mecanismo de circulación del líquido dentro de este coloide.

A su vez, la circulación interna del líquido a través de la sustancia a secar se produce por diversos mecanismos según la estructura de la sustancia coloidal, algunos de los mecanismos son:

a) La difusión en sustancias homogéneas continuas
b) La circulación capilar en sustancias granulares y porosas
c) La circulación producida por los gradientes de concentración y también de presión
d) La circulación causada por la gravedad
e) La circulación producida por una sucesión de vaporizaciones y condensaciones del líquido.

En general uno de estos mecanismos predominará en un momento dado del tipo del coloide a secar y del momento del análisis del proceso en estudio.
De los tres procesos que interviene en la operación del secado, predomina principalmente el de la transferencia de masa de la superficie continuamente reemplazada por el líquido procedente del interior de la sustancia coloidal y, el mecanismo de la circulación interior del líquido se plantea en función de su difusión a través de la sustancia y en la superficie de la misma.
Al someter a secado un coloide aparece un patrón general de comportamiento; a medida que transcurre el tiempo, la superficie de la muestra está cada vez más desprovista de líquido, en virtud de la proporción de su transferencia hacia la superficie. De tal forma que la humedad cambia en forma decreciente en el coloide. Así, la trayectoria para la difusión de masa se hace cada vez más largo y eventualmente el potencial de concentración disminuye, hasta que el contenido de humedad se considera en equilibrio. Esto es, al no haber registro de cambio en el contenido de humedad a pesar de un tiempo posterior de secado.
Sin embargo aún sin calentamiento alrededor de la muestra, el fenómeno de transferencia de masa de agua continúa en un tiempo que se puede apreciar como teóricamente infinito.
Siendo observable el agua que aún contiene el coloide, es considerable que el fenómeno tiene un comportamiento teóricamente infinito en un tiempo también teóricamente infinito.

Por las condiciones expuestas y debido a las propiedades de la sustancia y del interés en su estudio, las situaciones que favorecen el entablar las relaciones entre serie de Fourier y transferencia de masa son las situaciones del secado de sustancias coloidales.

Siendo la transferencia de masa el contexto y las situaciones provenientes de este contexto, la operación donde se lleva a cabo dicha transferencia, se tiene que los conceptos que prevalecen en el contexto y en la situación, derivan su significado precisamente por las situaciones en que se localizan.

Así, se identifican algunos conceptos del fenómeno bajo situaciones de secado y que son las que en este caso conforman el contexto de la transferencia de masa:

- ✓ Conceptos que determinan el comportamiento de la transferencia de masa en el secado de una sustancia: Cantidad de calor, temperatura, flujo de aire, humedad del aire, composición del la sustancia a secar y condiciones de humedad de entrada y de salida en le secador.

- ✓ Conceptos que determinan el mecanismo de difusión de la transferencia de masa en el secado de un material: Difusibilidad, humedad uniforme y la condición en la cual la superficie de la muestra se lleva a un estado de humedad constante durante un lapso de tiempo.

Los conceptos matemáticos y del fenómeno que se ha identificado, conducen a posibles relaciones entre los conceptos que definen a la serie de Fourier y los conceptos y variables que se encuentran presentes en el fenómeno de transferencia de masa.

Una vez identificado el fenómeno de difusión en la transferencia de masa en una situación de secado, se plantea establecer las relaciones entre esta estructura matemática con dicho contexto, concretando la caracterización planteada, en la búsqueda del reconocimiento del tipo de situaciones de secado en donde es posible

definir el comportamiento del fenómeno, el conjunto de los conceptos implicados por las circunstancias que favorecen establecer relaciones entre uno y otro, debido a la vinculación y la exploración de la clase de relaciones que permitan la conjunción entre los conceptos presentes en cada uno de los conjuntos para conformar un solo.
Analizados y establecidos estos elementos, será posible la integración del campo conceptual que precise a la serie de Fourier como estructura matemática que explica el comportamiento del fenómeno de la transferencia de masa.

3.2. CARACTERIZACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER EN EL CONTEXTO DE LA TRANSFERENCIA DE MASA

La caracterización de la serie de Fourier en la transferencia de masa consiste en realizar un estudio de la vinculación establecida en el trabajo de la contextualización de la serie de Fourier en este contexto (Muro, 2000), a fin de fijar las relaciones entre los conceptos de estas dos nociones y las situaciones donde emergen, como consecuencia de la vinculación. Para ello, se analiza el proceso de contextualización seguido por Muro y marcado por las etapas que marca la matemática en contexto. Dicho proceso es el siguiente:

1. Planteamiento de un problema referido al contexto a utilizar
2. Establecimiento de las constantes y variables presentes en el problema
3. Establecimiento del modelo matemático que gobierna al problema planteado
4. Obtención de la solución del modelo matemático
5. Obtención de la solución en términos del problema definido por el contexto
6. Interpretación de la solución en términos del problema definido por el contexto

El problema de contexto que se plantea, es un problema de transferencia de masa. Enseguida se menciona:

Un secador de charolas es un equipo de unidad de producción intermitente para pequeña capacidad. Consiste en una cámara en la cual se coloca el material que se va a secar sobre charolas distribuidas en soportes. El medio secante es aire caliente que circula en el interior de la cámara

El secador cuenta con un sistema de control sencillo para controlar de manera constante las condiciones externas de secado como son la temperatura y la cantidad de flujo de aire necesaria para secar la muestra.

El equipo cuenta con un termostato para regular la temperatura del aire. Con un medidor de volumen de aire para regular la cantidad que circula en el secador, dos medidores de temperatura y humedad del aire a la entrada y a la salida de la cámara: (Te) = temperatura de entrada y (Ts)= temperatura de salida, y una balanza para medir por diferencia de peso la pérdida de humedad del material.

De esta manera, la muestra a secar esta contenida en charolas rectangulares y la cara superior de la charola se expone a la corriente de aire caliente, provocando la transferencia del líquido del material hacia la superficie.

Un esquema del equipo y de la operación de secado se muestra enseguida

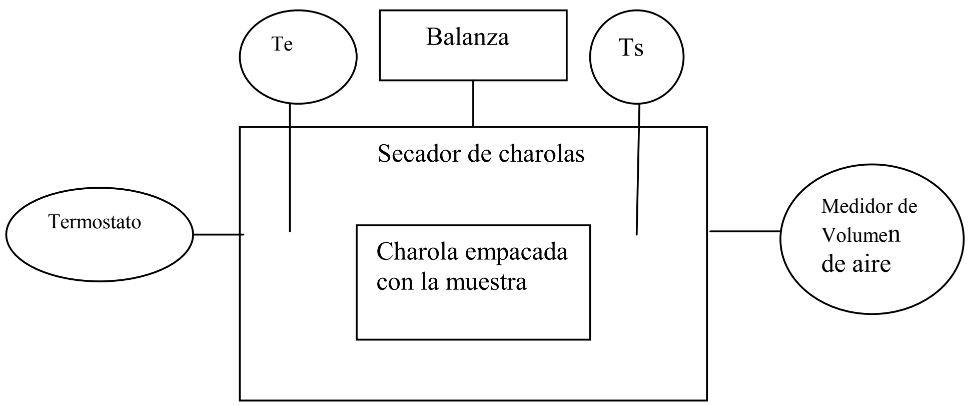


Fig.11. Esquema del equipo de secado

Las variables que determinan el fenómeno en el secado de sustancias coloidales mencionadas por Muro son:

- Espesor de la muestra durante el secado (x)
- Contenido de humedad en el coloide (X)
- Temperatura de la muestra durante el secado (T)
- Tiempo de secado (t)
- Estado de subdivisión del material a secar

Las constantes que se especifican en el secado son:

- Flujo de aire circulante en el secador (V_a)
- Temperatura constante del aire
- Constante de transferencia de masa (K_g) especifica del líquido que se transfiere del coloide al secarse

El modelo matemático que gobierna el fenómeno de transferencia de masa en la situación de secado, se mostró bajo una ecuación diferencial parcial en términos del tiempo y el espesor de la charola de la forma: $K_g \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \dfrac{\partial C}{\partial t}$

La solución a este modelo dio como resultado una serie de Fourier con coeficiente B_n por determinar:

$$C_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right]$$

La solución en términos del contexto, de acuerdo a la etapa 5 de la matemática en contexto, arrojó la serie de Fourier siguiente:

$$\frac{C'-C_{E'}}{C_c - C_{E'}} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K_g t}{4\ell^2}\right]$$

Finalmente en la última etapa, la interpretación de esta solución en términos del contexto, es expresada en términos de la disminución de concentración C en el coloide, generando a su vez, un cambio de concentración a través del tiempo "t" y del espesor "x". Con la posibilidad de obtener perfiles de cambio de concentración en un tiempo y un punto, mediante la serie de Fourier resultante de la expresión anterior.

En el análisis de los resultados de cada una de las etapas mostradas en Muro (2000), se encuentra aspectos importantes de ayuda a la caracterización buscada, tales aspectos se muestran enseguida:

-Se identifican las situaciones en donde tiene lugar el contexto:

Secado de sustancias coloidales.

-El problema de transferencia de masa implica conceptos tales como:

a) El cambio de masa del material coloidal, en cualquier punto de su superficie, tiempo después que una muestra de esta sustancia se somete al secado en un secador de charolas.
b) La humedad en equilibrio del material coloidal
c) El tiempo necesario para alcanzar la humedad en equilibrio

En explicación a estas deducciones, se tiene que en el proceso de secado, tiene lugar la transferencia de un líquido procedente de un sólido húmedo.

Al secar un sólido húmedo mediante aire con temperatura y humedad fijas, inmediatamente después del contacto entre la muestra y el aire, se presenta una etapa de secado inestable que dura hasta que la temperatura del sólido se ajusta para alcanzar un estado estable. La temperatura del sólido y la proporción de secado pueden aumentar o disminuir hasta alcanzar ese estado estable. Una medida de la temperatura muestra que la temperatura de la superficie húmeda del sólido es la

misma que la temperatura del aire, entonces, las temperaturas del sólido que se seca tenderán a igualar la temperatura del aire, manteniéndose también constante la proporción de secado. Esta etapa termina cuando la temperatura de la superficie aumenta y la proporción de secado disminuye rápidamente, aún cuando el retiro de humedad es menor, provocando que la proporción de secado se aproxime a cero para un cierto contenido de humedad en equilibrio del sólido, el cual es el contenido de humedad más bajo de humedad que se puede obtener bajo las condiciones de secado que se estén empleando.
De esta forma el comportamiento general de secado presenta cuatro etapas:

1) Inestabilidad, cuando la temperatura del sólido trata de alcanzar la temperatura del aire.
2) Estabilidad, cuando la temperatura del sólido es la misma que la del aire.
3) Instabilidad, cuando el potencial de humedad del sólido disminuye hasta alcanzar un contenido de humedad en equilibrio
4) Estabilidad, aunque se tenga una cantidad sustancial de líquido retenido en la estructura del sólido, ya no se registra ningún secado posterior y la humedad es la misma que la del equilibrio.

En sólidos relativamente homogéneos como en el caso de los coloides en las últimas etapas del secado, la humedad se mueve hacia la superficie de la muestra en función de una difusión molecular. Por tanto la modelización del fenómeno en el secado en estas etapas, considera que la difusión es el mecanismo que sigue la transferencia del líquido en el secado del sólido húmedo.
En consecuencia el determinar el flujo del líquido que se transfiere del sólido en el secador, implica encontrar la ecuación de difusión que representa el comportamiento del fenómeno, para ello se parte de la ecuación de balance de masa:

Entrada = Salida + Acumulación o bien:
Entrada –Salida = Acumulación.

Cada una de estas cantidades se puede expresar en términos generales considerando un elemento de volumen del fluido, el cual es representando en la figura que se presenta a continuación.

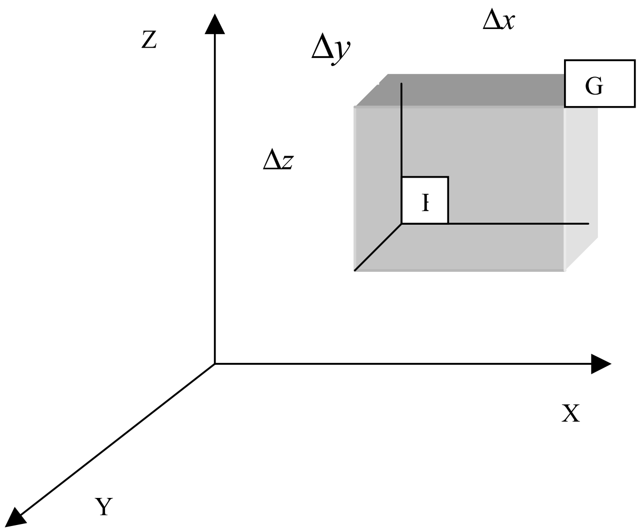


Fig. 12. Representación de un elemento de volumen de fluido

La rapidez de masa de flujo en las tres caras con un vértice común en E es:

$M\,[(N_x)_x\,\Delta y\Delta z + (N_y)_y\,\Delta x\Delta z + (N_z)_z\,\Delta x\Delta y]$

En donde N_x representa el flujo en la dirección x, y. Mientras que $(N_x)_x$ es su valor en la posición x.

El flujo de masa fuera de las tres caras con un vértice común en G es:

$M\,[(N_x)_{x+\Delta x}\,\Delta y\Delta z + (N_y)_{y+\Delta y}\,\Delta x\Delta z + (N_z)_{z+\Delta z}\,\Delta x\Delta y]$

El componente total en el elemento es $\Delta x \Delta y \Delta z\, \rho$, donde ρ es la densidad de la sustancia. Entonces la rapidez de acumulación es $\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$ y la ecuación general de balance de masa se puede sustituir de la siguiente forma:

$$\mathrm{M}\{\, [(\mathrm{N}_x)_{x+\Delta x} - (\mathrm{N}_x)_x]\, \Delta y \Delta z + [(\mathrm{N}_y)_{y+\Delta y} - (\mathrm{N}_y)_y]\, \Delta x \Delta z + [(\mathrm{N}_z)_{z+\Delta z} - (\mathrm{N}_z)_z]\, \Delta x \Delta y \} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Dividiendo entre $\Delta x \Delta y \Delta z$ y encontrando el límite cuando las tres distancias se vuelven cero, se tiene que:

$$\mathrm{M}\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Si la densidad de la sustancia es una constante, la ecuación anterior queda:

$$\mathrm{M}\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z}\right) = 0$$

Que es la ecuación de continuidad o un balance de masa, para la sustancia.
Ahora, si:

$\mathrm{MN}_x = \mathrm{u}_x\, \rho + \mathrm{MJ}_x$ en donde $\mathrm{MJ}_x = -\mathrm{MK}_g \frac{\partial C}{\partial x}$ y u_x es la velocidad promedio de masa, entonces:

$$M \frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} - \mathrm{MK}_g \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Que sería lo mismo para el flujo de masa en las otras direcciones.

Entonces se tiene que la ecuación de continuidad:

$$u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - MK_g\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En el caso en que la velocidad es cero y dividiendo entre M: $\frac{\partial C}{\partial t} = K_g\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$

Que es la ecuación que representa el fenómeno de transferencia dado a través del cambio de la propiedad transferente C en función del tiempo y de la posición.

Ahora bien, como la muestra esta contenida en una charola, la transferencia de masa toma el modelo de una lámina plana con un cierto espesor como se muestra en la figura:

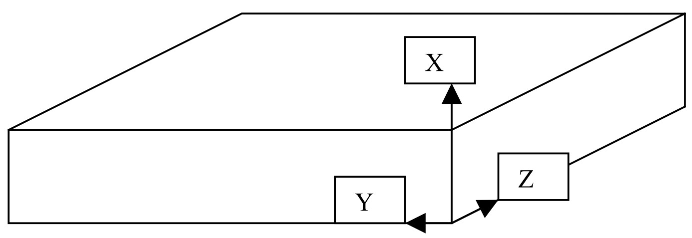


Fig. 13. Esquema de la charola que contiene al coloide

Así, se tiene que el área superficial en las dos caras, es mucho más grande que el área a lo largo del borde, por tanto es razonable suponer que la transferencia de masa se lleve a cabo principalmente en dirección perpendicular a las dos caras, de tal forma que la transferencia en la dirección "x" se puede describir como $K_g \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$

Esta ecuación representa el cambio de la propiedad transferente para un instante en cualquier punto "x" que también se pude escribir como:

$C_t = K_g\ C$xx, con K_g = coeficiente de difusividad de masa del líquido.

La solución de esta ecuación estará dada por C(x, t) que a su vez describirá el cambio de dicha propiedad transferente, bajo ciertas condiciones limitantes del fenómeno.

Sí se satisface la ecuación diferencial parcial lineal en "x", entonces, se considera que el método de separación de variables o método de Fourier, comienza con la hipótesis de que C(x, t) es de la forma Z(x)T(t). Lo anterior tiene el efecto de reemplazar a la ecuación diferencial parcial con dos ecuaciones diferenciales ordinarias Z(x) y T(t). La teoría del desarrollo de las funciones propias tiene aplicación en cualquiera de los aspectos del problema, sin olvidar que la ecuación diferencial parcial que proviene del problema de transferencia de masa debe tener los siguientes atributos:

- Por lo menos una de las variables independientes del problema debe estar restringido a un intervalo finito y el dominio del problema debe ser una región apropiada para el sistema de coordenadas en el que se expresa la ecuación diferencial parcial.

- La ecuación diferencial parcial debe ser separable

- En general las condiciones en la frontera se deben arreglar para por lo menos uno de los problemas separados sea del tipo Sturm-Liouville.

Por tanto C(x, t) debe satisfacer las condiciones limitantes siguientes:

1) El cambio de masa con respecto a la posición $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$ para $x = 0$ para todos los valores de t

2) La masa en un punto x y en un tiempo t es $C = 0$ en $x = \ell$ para $t > 0$

3) La masa $C = C_i = 1$ a $t = 0$ para $-\ell < x < \ell$ con C_i = cambio de masa inicial

Lo cual significa que las condiciones de frontera indican que el cambio en la propiedad transferente se mantiene en cero en el arranque de la operación del secado y después de un cierto espesor.

Así mismo se tiene condiciones de frontera que representan la cantidad de propiedad transferente C inicial en cualquier parte de la charola.

Entonces las condiciones limitantes y de frontera en el modelo que representa el cambio de la propiedad transferente con el espacio en el grosor de la muestra y el tiempo de secado representado por C(x, t) se ajustan al modelo para usar el método por separación de variables, de la forma:

$C_t(x, t) = Z(x)T(t)$

$C_{xx}(x, t) = Z''(x)T'(t)$

Debido a que se considera un espesor de la muestra $2x = \ell$, donde la transferencia se realiza por arriba y por abajo como se indica en la figura:

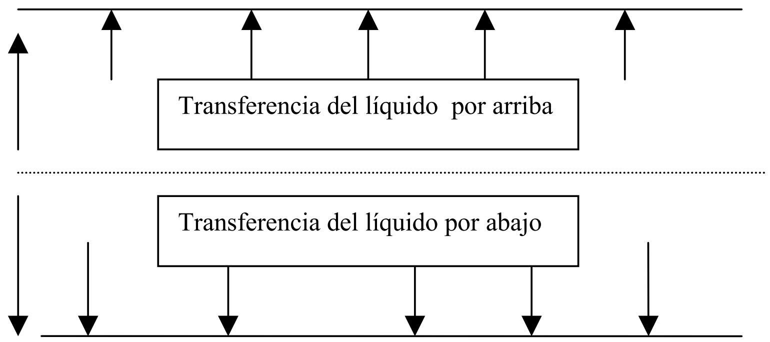


Fig. 14. Transferencia del líquido en la charola

En la figura se puede observar un eje de simetría que representa el fondo de la charola, siendo esta cara impermeable al líquido. El espesor sería equivalente a una lámina del doble del espesor que estuviera expuesta en sus dos caras al aire, cuando se somete al secado. Entonces el líquido se difunde por ambas caras pero no a través del plano central. Así, el líquido que se encuentra a menor profundidad se transfiere por la cara superior y la que se encuentra a mayor profundidad drena por la cara inferior.

Por tanto, para el modelo obtenido se obtendrá una curva diferente para cada tiempo, describiendo al fenómeno completo una familia de curvas que se obtienen cuando el tiempo se deja fijo. Ahora bien, si el fenómeno se sitúa a una profundad determinada, se tendrán cambios de masa para diferentes tiempos, de tal forma que para un tiempo constante se obtenga: $C = f(x)$ y para misma profundidad se obtenga: $C = f(t)$. Entonces si el cambio de masa es una función de x y de t, se puede escribir como el producto de dos funciones: una función de x y otra función de t, tal como se indica en $C(x, t) = Z(x)T(t)$

Sustituyendo en la ecuación diferencial parcial, para $0<x<\ell$ y $t>0$:

$T'(t)/ K_g \; T(t) = Z''(x)/X(x)$

Ya que el miembro izquierdo de esta ecuación es sólo función de t y el miembro derecho depende sólo de x, la igualdad es válida para toda $0<x<\ell$ y cualquier $t>0$ sí y sólo sí existe una constante $-\lambda$ tal que:

$T'(t)/ K_g \; T(t) = -\lambda = Z''(x)/X(x)$

Para $0<x<\ell$, $t>0$. Esto es equivalente a las dos ecuaciones separadas:

$T'(t) = -\lambda dT(t)$ y $-Z''(x) = \lambda Z(x)$

Donde λ es una constante que se toma con signo negativo, para comodidad de los razonamientos subsiguientes, sin hacer con esto ninguna suposición sobre su signo. De la relación anterior, se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias para la determinación de las funciones Z(x) y T(t):

$Z''(x) + \lambda Z(x) = 0$

$T'(t) + K_g \; \lambda T(t) = 0$

La solución de la ecuación diferencial: $T'(t) + K_g \; \lambda T(t) = 0$ quedaría:

$T(t) = K \exp(\lambda + K_g \; t)$.

Si λ fuera igual a cero la propiedad transferente dentro de la charola no cambiaría con el tiempo, por tanto, se rechaza esta posibilidad debido a que no es constante con las condiciones físicas del problema. En el segundo caso si λ fuera algún valor positivo, considerando esto, entonces tanto la función de t como la propiedad transferente C, dentro de la charola llegarían a ser infinitamente grandes, después de un muy largo período de tiempo. Aunque teóricamente esto puede ser posible, físicamente no. Entonces se tiene que λ debe ser un valor negativo porque la función del tiempo no cambiaría demasiado en tiempos grandes.

Si se reemplaza a λ por - λ^2, se tendría:

$Z''(x) + \lambda^2 Z(x) = 0$

$T'(t) + K_g\ \lambda^2\ T(t) = 0$ o bien $T'(t) = - K_g\ \lambda^2 T(t) = 0$

Donde las ecuaciones anteriores son ecuaciones diferenciales ordinarias con soluciones:

$Z(x) = K_1$ sen λx + K_2 cos λx

$T(t) = K_3\ \exp(-\lambda^2 K_g\ t)$

Sustituyendo las soluciones anteriores en la solución producto original: $C_t(x, t) = Z(x)T'(t)$ se tiene:

$C_t(x, t) = (K_1$ sen $\lambda x + K_2$ cos $\lambda x)\ K_3\ \exp(-\lambda^2 K_g\ t)$ o bien:

$C_t(x, t) =$ (A sen λx + B cos λx) $\exp(-\lambda^2 K_g\ t)$

Donde K_1 K_2 y K_3 son constantes arbitrarias y $A = K_1\ K_3$ y $B = K_2\ K_3$.

Los valores para A, B y λ se deben escoger para satisfacer las condiciones limitantes.

Con la condición limitante 1, se tiene que para todo momento:

sen(0) = 0 y cos(0) = 1. Entonces la primera condición limitante se satisface:

si A = 0, por lo tanto: B (cos λx) $\exp(-\lambda^2 K_g\ t)$

Para satisfacer la condición limitante 2, se tiene que B (cos $\lambda\ell$) = 0. si B = 0 entonces existe una solución trivial. En consecuencia si $B \neq 0$, cos $\lambda\ell = 0$, donde ésta función será cero para valores múltiples:

$$\lambda \ell = \frac{(2n+1)\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \lambda = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}$$

Como existe una solución particular para cada valor de λ la constante B se tiene que evaluar para cada solución. Entonces la solución general para n valores de λ es:

$$C_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp \left[- \frac{(2n+1)^2 \pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right]$$

Las constantes representadas por B_n se pueden evaluar usando la tercera condición limitante, la cual proporciona la propiedad transferente inicial $C_i = 1$ para t = 0.

En términos del secado del coloide, el cambio de la propiedad transferente C, esta en relación al cambio de humedad de la muestra a secar, de tal manera que C = X, por tanto el modelo obtenido que representa la transferencia de masa por la difusión de un líquido en el secado de un sólido húmedo, proporciona el cambio de humedad del sólido para cualquier posición x del espesor de la muestra a secar en cualquier instante de secado t, tal que: $K_g \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial t}$, tiene como solución la función X(x, t), cuyo desarrollo es:

$$X(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp \left[- \frac{(2n+1)^2 \pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right]$$

De acuerdo a las condiciones limitantes del problema, el contenido de humedad inicial $X_i = 1$ y que corresponde a la tercera condición de frontera, para t = 0 en ℓ -< x < ℓ.

Entonces la ecuación anterior quedaría:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right]$$

La función característica $\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right]$ es ortogonal con respecto a un factor de peso igual al contenido de humedad inicial de esta muestra X_i = 1 en la región de la charola en x = 0 hasta x = ℓ :

$$\int_0^\ell (\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2\ell})dx = 0$$ sí m≠n y además:

$$\int_0^\ell (\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2\ell})dx \neq 0$$ sí m = n

Por tanto multiplicando la ecuación: 1 = $\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right]$ por $\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right]$ y relacionando con la ortogonalidad establecida, queda:

$$\int_0^\ell (\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell})dx = \int_0^\ell B_n \cos^2\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}dx$$

Integrando y simplificando se obtiene a B_n :

$B_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)}$ y la solución para el modelo de transferencia de masa en términos del cambio de humedad con respecto al espesor de la muestra y el tiempo de secado a partir de: X (x, t) = $\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K_g t}{4\ell^2}\right]$ es:

$$X(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K_g t}{4\ell^2}\right]$$

En forma adimensional, considerando al cambio de contenido de humedad del coloide como un perfil del comportamiento del fenómeno de transferencia de masa de líquido del coloide cuando se somete al secado se tiene que:

$$X = \frac{X' - X_{E'}}{X_c - CX_{E'}}$$

Donde X´ es la concentración del coloide equivalente al contenido de humedad del agua en el tiempo t equivalente a libras de agua / libras de coloide seco. $X_{E'}$ es la humedad en equilibrio equivalente al contenido de agua en el coloide en equilibrio, equivalente a libras de agua/libras de coloide seco. X_c es la humedad en el período durante el cual el fenómeno del secado se controla por la difusión, equivalente libras de agua / libras de coloide seco.

Bajo lo anterior la solución queda en términos de la humedad inicial $X_i=1$ y esta dada por la serie de Fourier siguiente:

$$\frac{X' - X_{E'}}{X_c - X_{E'}} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp \left[- \frac{(2n+1)^2 \pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right]$$

De esta forma, la presencia de la serie de Fourier en la representación de la función que proyecta el comportamiento del cambio de humedad X(x, t) relacionado con la transferencia del líquido del coloide al secarse, guarda algún significado del proceso mismo en relación con la matemática establecida y viceversa.

Una disminución en la humedad del coloide genera un cambio de humedad también a través del tiempo, Así, se pueden obtener perfiles de cambio de humedad del coloide para un tiempo y un punto en el espesor, mediante una serie de Fourier correspondiente a la solución obtenida:

$$\frac{X' - X_{E'}}{X_c - X_{E'}} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp \left[- \frac{(2n+1)^2 \pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right]$$

La expresión anterior, proporciona la función X(x, t) a través de la siguiente figura en tres dimensiones, representando el contenido de la humedad del coloide para un instante de tiempo t y una posición x en espesor de la muestra dentro de la charola.

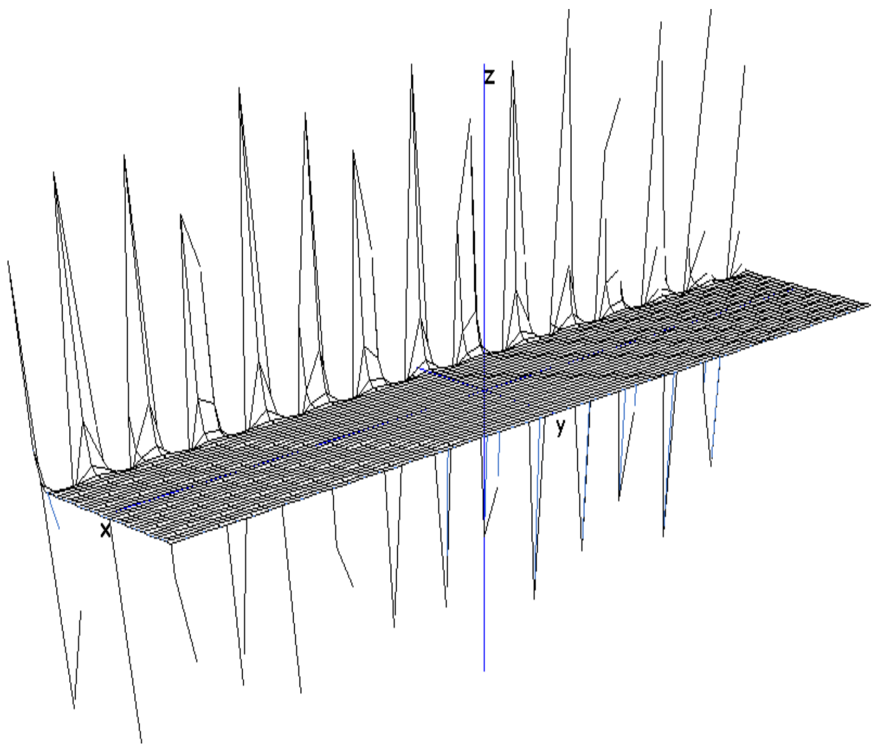


Fig. 15. Gráfica de la expresión en serie de Fourier que representa al fenómeno en función del tiempo y la posición

Con esta misma expresión, se puede determinar la cantidad de agua transferida (M) dentro de la charola en cualquier momento, de tal manera que se integra el contenido de humedad sobre el espesor, expresándose:

$$M = 2(X_c - X_E) \int_0^{\ell} 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right]$$

Después de la integración la ecuación anterior se convierte en:

$$M = 2(X_c - X_E)(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)}{(2n+1)^2} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right]$$

Donde x = distancia del centro de la charola a cualquier punto de las misma.

ℓ = distancia del centro de la charola hasta la superficie que se esta secando tomando en consideración ambas caras, o bien el espesor total de la muestra que se esta secando a partir de una sola cara de la charola.

Ahora bien si se toma como dato del espesor de la muestra $\ell = 1$, la misma constante de la difusividad de masa del líquido que para el caso de la muestra analizada es agua y corresponde al valor de K_g = 0.0096 pies^2/hora. Se puede determinar el contenido de humedad del coloide para una posición dada de la humedad en la sustancia para cualquier instante dado de tiempo, obteniéndose series de tipo exponencial que determinan curvas de contenido de humedad contra el tiempo de secado, tal y como se muestran en la siguiente figura.

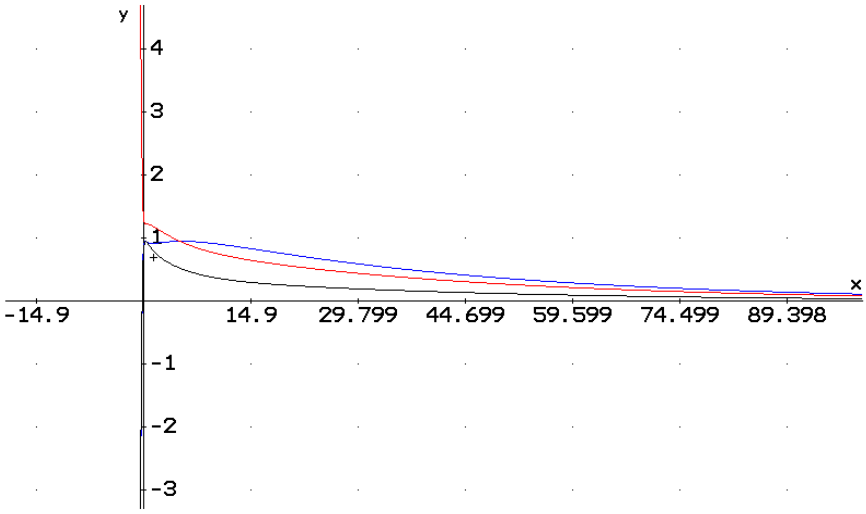


Fig. 16. Curvas de contenido de humedad con el tiempo para una posición dada de la humedad en la muestra

De la misma manera, si se toman incrementos de tiempo se pueden obtener series de Fourier que determina el cambio en el contenido de humedad en función de la posición para un instante dado de tiempo. Así se tiene que en dos horas, los incrementos a considera pueden ser: t =0.4, t = 0.8, t = 1.2, t = 1.6 y t = 2 horas…..

Entonces, a partir de estos datos se tendrán soluciones acerca del perfil de humedad del coloide para cada incremento de tiempo establecido.

Para t = 0.4 horas, el perfil de humedad esta dado a través de la serie:

$$\frac{X' - X_{E'}}{X_c - X_{E'}} = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2(0.0096)(0.4)}{4}\right]$$

Obteniendo la función que representa el cambio de humedad para un tiempo dado y para cualquier punto del espesor a través de las siguientes gráficas:

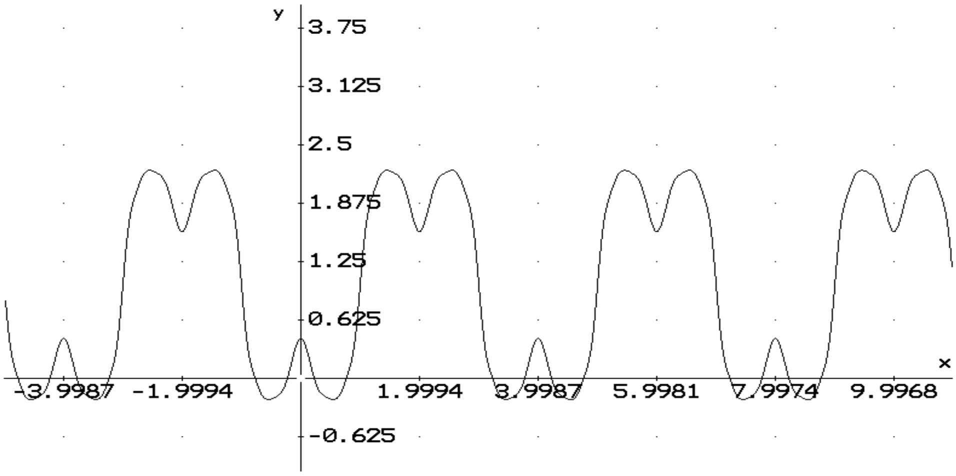


Fig. 17. Gráfica de la aproximación de la función que representa el cambio de humedad para 0.4 horas de tiempo y para cualquier punto del espesor, considerando 22 términos de la serie

Lo mismo se haría para cada uno de los incrementos, obteniéndose las siguientes gráficas para un tiempo determinado de secado y considerando un número finito de términos de la serie que representa el cambio de humedad en función de la posición.

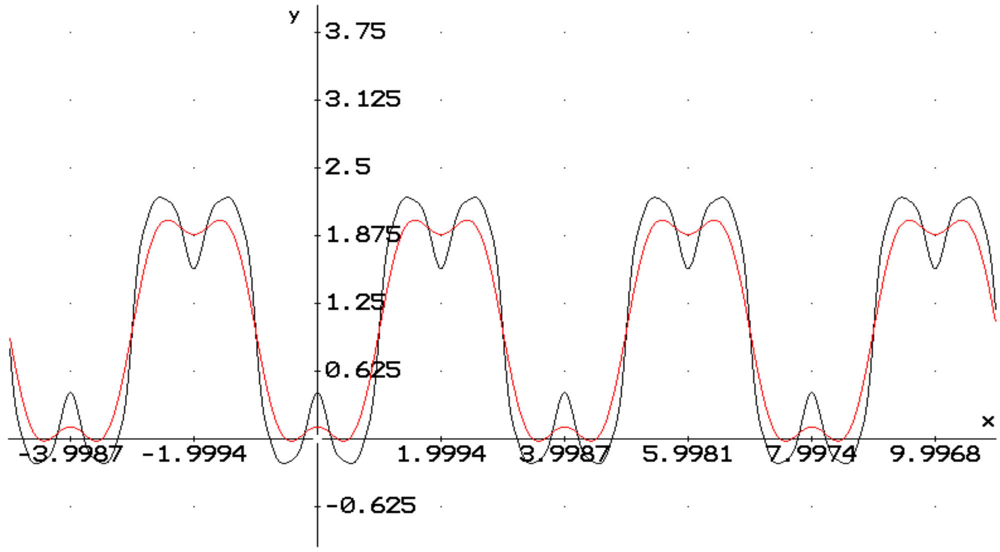


Fig. 18. Gráfica de la función que representa el cambio de humedad para 2 horas de tiempo y para cualquier punto del espesor, considerando 22 términos de la serie

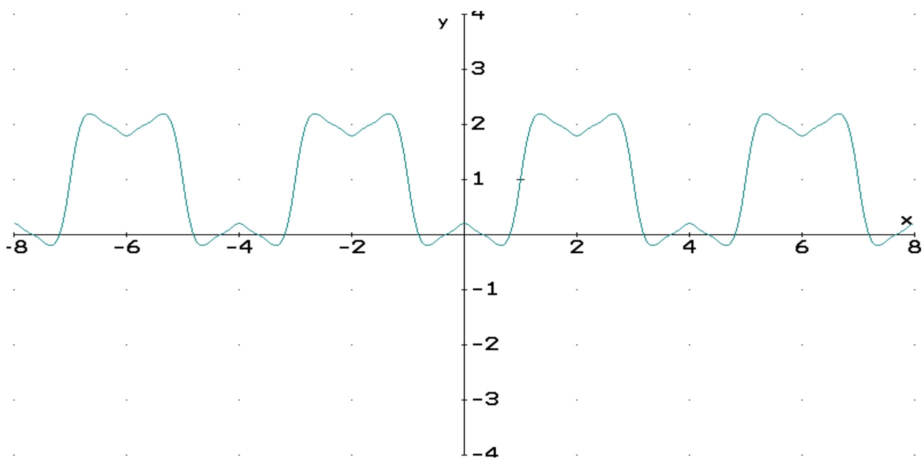


Fig. 19. Gráfica de la aproximación de la función que representa el cambio de humedad para 2 horas de tiempo y para cualquier punto del espesor, considerando 40 términos de la serie

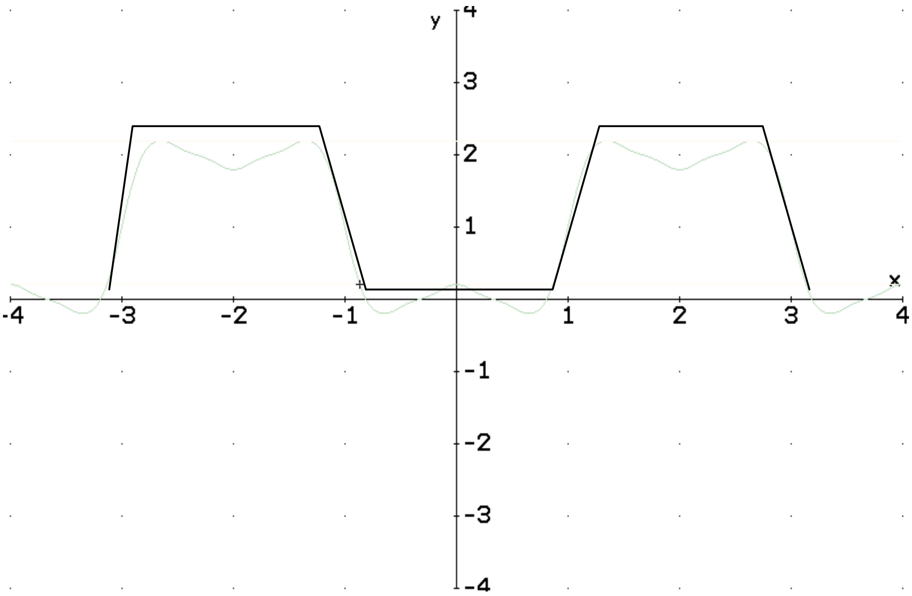


Fig. 20. Gráfica de la función que representa el cambio de humedad para 2 horas de tiempo y para cualquier punto del espesor, considerando un número infinito de términos de la serie

De esta manera, a través de la contextualización por la vinculación establecida entre la estructura de la serie de Fourier y el contexto del fenómeno de transferencia de masa, en circunstancias de la situación del secado de coloides, se obtiene un panorama sobre la importancia que la serie de Fourier tiene, como sustento matemático de este fenómeno y, cómo es que este fenómeno permite dar un significado a este concepto matemático, jugando un papel preponderante el contexto y la situación en que se muestra el fenómeno, para establecer la relación entre conceptos que pertenecen a dos áreas y la estrecha conexión que guardan.

De entre los conceptos que se han encontrado acerca del fenómeno se pueden nombrar: la transferencia de un líquido procedente de un sólido húmedo y la variación de la humedad con respecto al tiempo, dando como resultado el proceso de un estado inestable. La variación de la humedad con respecto a la posición, la constante de difusión en la transferencia, las dimensiones de la charola y el espesor total de la lámina que se seca. Estos límites determinan las condiciones de frontera y las condiciones iniciales del proceso y son particulares para el problema planteando en la situación del secado de coloides.

Alrededor de las nociones matemáticas, se encuentran las ecuaciones en derivadas parciales, en donde un tipo de ecuación, de acuerdo a las condiciones del problema de transferencia, es la que modela el fenómeno. Este tipo de ecuación pertenece a una ecuación que describe un fenómeno que se desarrolla en el tiempo como una operación de evolución que toma el estado inicial X(x, 0) (humedad del coloide para una posición x y donde aún no inicia la transferencia de líquido, por tanto la condición inicial se plantea para un tiempo de transferencia cero), del sistema y lo lleva al estado X(x, t) (humedad del coloide para una cierta posición y un cierto tiempo de transferencia). Donde la función X(x, t) que corresponde a dicho estado, es representada mediante una serie de Fourier.

Por tanto, la caracterización de la serie de Fourier en la transferencia de masa, conduce al siguiente planteamiento:

1. El modelo matemático que rige al proceso de transferencia de masa en la última etapa del secado de un coloide, esta dado a través del mecanismo de difusión del líquido procedente del coloide. por tanto, la ecuación que modela al fenómeno, es una ecuación de difusión.

2. El mecanismo de difusión del líquido establece un cambio de humedad en el coloide (X), dado por el cambio de contenido de agua en función del tiempo (t) y el espesor de la muestra (x) que se somete al secado. La representación matemática de dicho cambio es la función X(x, t).

3. La relación del cambio de humedad del coloide en función del tiempo y espesor de la muestra X(x, t) se establece mediante una serie de Fourier.

4. La pérdida de humedad del coloide, debida a la transferencia de agua, corresponde al comportamiento del cambio en la humedad de acuerdo a la posición en que se encuentra en la sustancia, es representable mediante una suma infinita de funciones periódicas o componentes armónicos que conforman a la serie de Fourier, cuyo comportamiento es un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que el cambio de humedad es uniforme en todo el coloide. Dicha suma da como resultado la función: f(t) = X(x, t) en un intervalo $-\ell < x < \ell$ correspondiente al espesor total de la muestra.

5. La difusión del líquido es teóricamente infinita para un tiempo teóricamente infinito de secado. A medida que transcurre el tiempo, la proporción de movimiento del líquido hacia la superficie es cada vez más lento, esto es, debido a la poca cantidad de líquido que se encuentra presente en el coloide, moviéndose en un espacio muy reducido por el estado de sequedad en la muestra. Este proceso de transferencia provoca la disminución en la humedad del coloide hasta llegar a un valor teóricamente al equilibrio y así, alcanzar una mínima humedad en el coloide para un tiempo dado de secado. El cambio de humedad en el equilibrio, corresponde a la convergencia de la de la serie de Fourier a una función constante dada a través de la expresión: $X(x, t) = f(t) = X^*$

Así, el pasado planteamiento, gobierna la conjunción intrínseca de dos estructuras que a su vez dan lugar a la caracterización que se ha proyectado.

La figura siguiente reduce la exposición de esta caracterización.

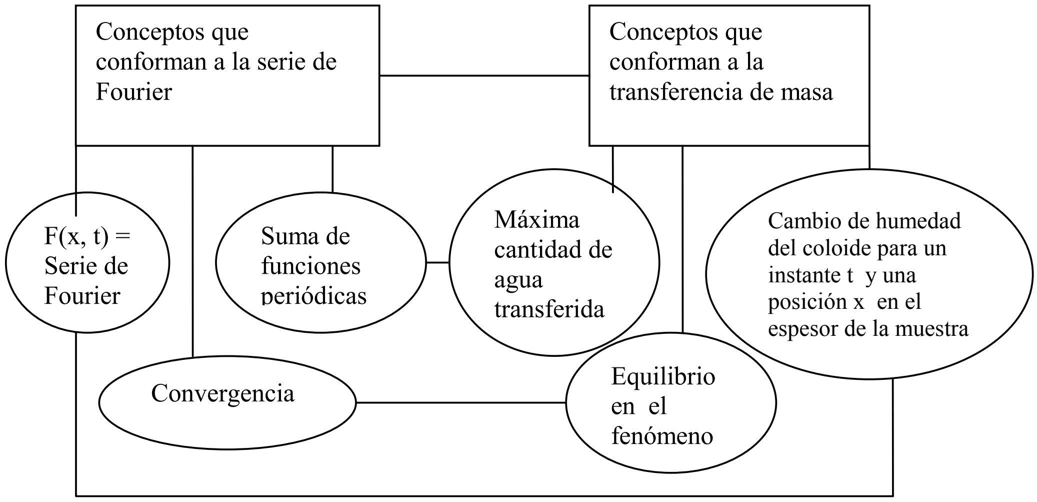


Fig. 21. Relación entre conceptos matemáticos y conceptos de la transferencia de masa en la situación de secado de coloides

3.3. DETERMINACIÓN DE LAS SITUACIONES

Desde la perspectiva de la teoría de los campos conceptuales, acerca de los conceptos que han de ponerse en juego en la enseñanza y el aprendizaje, se tiene que a través de las situaciones es como ese concepto adquirirá sentido para el estudiante (Vergnaud, 1990). De esta manera, la operacionalidad de un concepto debe ser experimentada por medio de situaciones diferentes, de tal forma, que el análisis de la variedad de conductas del sujeto ante estas situaciones proporcione un panorama cognitivo sobre el concepto. Esta definición pragmática, relaciona el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y el conjunto de las acciones de los estudiantes para el análisis de su aprendizaje.

En esta línea, de acuerdo a la caracterización de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa, las situaciones que propician la vinculación de la serie de Fourier con el fenómeno, son las que derivan del secado de sustancias coloidales. Estas situaciones se identifican a través del cambio que se produce en el contenido de humedad de la sustancia, al someterse al secado para un tiempo determinado y una cierta posición en el espesor de la muestra. Dicho cambio de humedad es proporcional al cambio de masa de esta sustancia por la transferencia del líquido debido a la acción del aire en el secador. Por tanto, el establecer el cambio de humedad que sufre el coloide al secarse, conduce al discernimiento de la transferencia de masa en situaciones de secado y como consecuencia, los conceptos y las relaciones caracterizadas de la serie de Fourier en el fenómeno

Siguiendo este planteamiento, el campo conceptual de la serie de Fourier quedaría conformado por un conjunto de situaciones cuyo marco es el secado, con tareas que implican a su vez el conjunto de conceptos específicos como base para analizar las situaciones. De tal manera, que la interrelación situación-conceptos, proporciona el carácter a la situación, bajo una correspondencia entre situaciones y concepto.

El producto de la correspondencia entre situación-conceptos, son las especificaciones de la estructura matemática en el fenómeno, tales como: La representación de una función no periódica sobre el comportamiento del cambio de humedad del coloide X(x, t), para un instante dado t y una posición x en el espesor de la muestra, por una suma infinita de funciones periódicas que integran a la serie de Fourier y que convergen a una función f(t) = X(x, t). Asimismo, en cierta región de la gráfica X(x, t), es posible su representación en una serie de Fourier, la cual converge a la función f = X^* perteneciente al cambio de humedad en el equilibrio o en el estado estable del fenómeno.

Así, según la caracterización de la serie de Fourier en el fenómeno, para determinar las situaciones de secado que integran el campo conceptual se toman los siguientes aspectos:

- Se propone experimentar con el secado de un coloide como el alginato de sodio por el hecho de poseer alta viscosidad que permite rápidamente la consistencia gelatinosa a alimentos y preparados industriales y que puede proporcionar datos importantes que apoyen al reconocimiento del fenómeno de transferencia de masa del líquido que contiene el coloide y a la matemátización del mismo.
- Al secar este tipo de sustancias coloidales, generalmente el régimen de secado se basa principalmente en la transferencia de masa de la superficie continuamente reemplazada por el líquido procedente del interior de la sustancia. Esta transferencia del líquido se realiza principalmente en función de la difusión a través del material a secar.
- Durante el tiempo de secado, la superficie de la muestra está cada vez más desprovista de líquido, esto es, en virtud de la proporción de su transferencia hacia la superficie. A mediada que la humedad va disminuyendo en el coloide, la trayectoria para la difusión de masa se hace cada vez más largo y eventualmente el potencial de humedad disminuye, hasta que esta alcanza el equilibrio y ya no se percibe ni se registra un secado posterior.
- A lo largo del proceso se pueden encontrar variables externas que influyen en el comportamiento de secado: Las principales variables externas son la temperatura, la humedad, la ventilación, el estado de subdivisión de la

sustancia coloidal, la agitación de la misma, y el contacto entre las superficies calientes y la sustancia húmeda. La transmisión de calor y de masa son fenómenos que influyen directamente en las variables externas, como la temperatura, cuyo proceso consiste en pasar a la superficie exterior y desde ella al interior de la sustancia coloidal, dando lugar a la transferencia del líquido hacia la superficie.

- Al secar la sustancia húmeda mediante aire seco, se puede considerar un patrón general de comportamiento: La superficie total expuesta de la sustancia en la charola está saturada de agua y la operación de secado se realiza como si se tratara de un estanque de agua sin que la sustancia ejerza una influencia directa sobre la velocidad de secado.
- La transferencia de masa del líquido en el secado del coloide, se debe al mecanismo interno de la circulación del líquido, producido por las condiciones internas que afectan el proceso y por las condiciones externas, tales como la temperatura de secado, la humedad del aire y las propiedades de la sustancia a secar.
- En el estudio del proceso de secado basado en el efecto que producen las variables externas, se han encontrado diferentes períodos de secado. Esto es, mediante los datos experimentales que se obtienen a lo largo del proceso como es la temperatura del aire caliente, la temperatura de bulbo húmedo del aire que circulan en el secador, el peso de la carga y la temperatura de la carga en el transcurso del tiempo del secado, se pueden establecer relaciones entre el contenido de humedad de la muestra y la intensidad de secado en función del tiempo a través de las funciones que describen las gráficas siguientes:

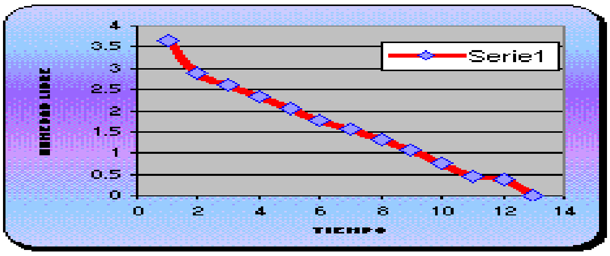


Fig. 22. Curva de cambio de humedad del coloide en función del tiempo

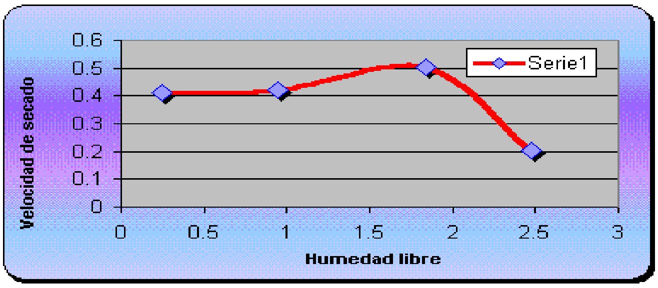


Fig. 23. Intensidad de secado con respecto al contenido de humedad en el coloide

- De la figura 22 se observa una disminución de humedad a medida que transcurre el tiempo. La relación entre estos dos tipos de datos es una función decreciente en el tiempo dada por X(t). Experimentalmente, esta figura reporta una transferencia de masa que es finita, debido a que ya no hay registro en el cambio de humedad en el coloide, sin embargo es observable la cantidad de agua que aún contiene la muestra reconociéndose un fenómeno de transferencia de líquido teóricamente infinito en un tiempo también teóricamente infinito. El registro de no cambio en la cantidad de humedad contenida en el coloide, es un indicativo del equilibrio que se establece en el fenómeno.
- La función de la curva del cambio de contenido de humedad en función del tiempo obtenida a partir de los datos experimentales, se puede representar por una serie exponencial, considerando que el secado tiene lugar desde una cara de la charola y que el lado y el fondo están aislados y además que el contenido de humedad esta distribuido en forma homogénea en la muestra, de tal forma que la serie que describe este comportamiento se conforma por una suma de funciones de tipo exponencial como la siguiente:

$$\frac{X'-X_{E'}}{X_c - X_{E'}} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K_g t}{\ell^2}\right]$$

La convergencia de esta serie, proporciona la curva de contenido de humedad que describe el cambio de humedad en función del tiempo en el intervalo de continuidad t≥ 1

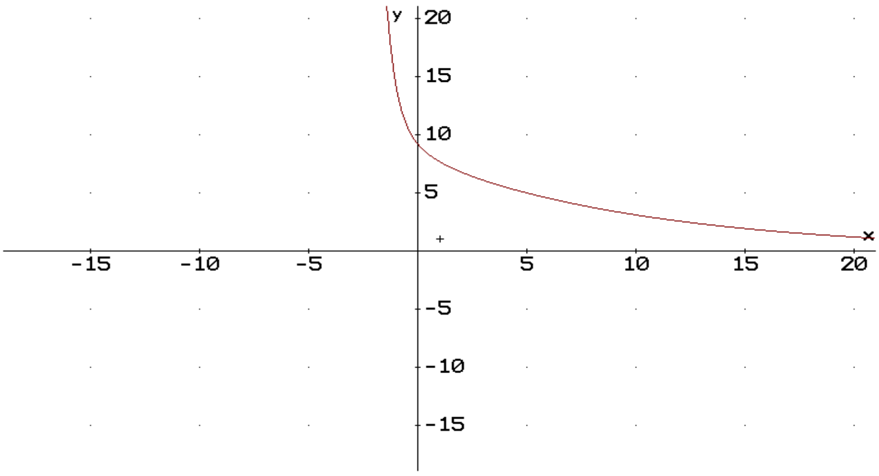


Fig. 24. Gráfica de la suma de una serie de potencias que converge a X(t)

- Para el mismo comportamiento, el cambio de humedad en función del tiempo, se puede describir a partir de una serie exponencial que proviene de una serie de Fourier que representa el perfil de humedad del coloide en función del tiempo y la posición del líquido en la sustancia. Esto es, para una posición dada, la serie se conforma por una suma de funciones de tipo exponencial como la siguiente:

$$\frac{X'-X_{E'}}{X_c - X_{E'}} =- \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K_g t}{4\ell^2}\right]$$

La convergencia de esta serie, proporciona la curva de contenido de humedad que describe el cambio de humedad en función del tiempo en el intervalo de continuidad $t \geq 1$. La figura que representa dicho comportamiento es la siguiente:

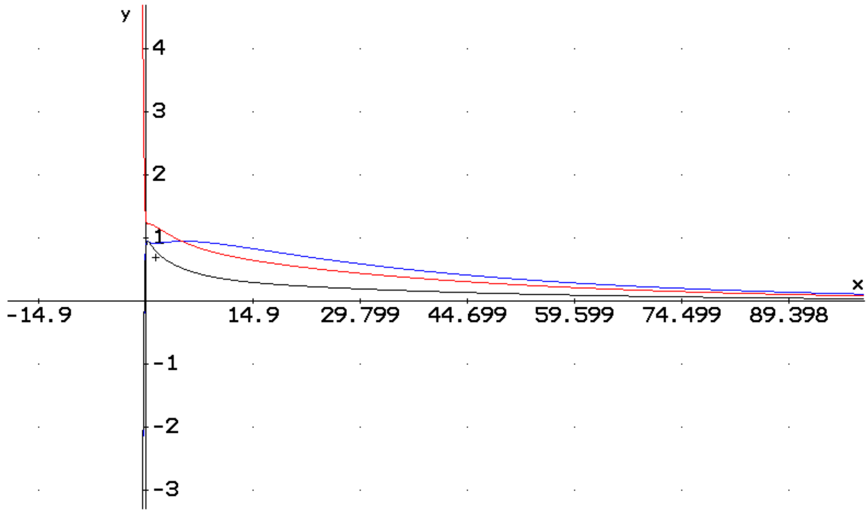


Fig. 25. Gráfica de series exponenciales que proviene de algunas series de Fourier y que convergen a X(t)

- Con respecto a la curva 23, correspondiente a la intensidad de secado en función del cambio de humedad, ésta reporta cambios de pendiente. Donde cada cambio representa un cambio en la intensidad de la operación que se esta llevando a cabo, dividiéndose en las secciones siguientes:

  - La primera sección representa el mecanismo donde predomina el calentamiento de la carga mediante el aire que circula en el secador.
  - La segunda sección representa un intervalo de intensidad constante de secado

- La tercera sección de la curva representa un intervalo de intensidad decreciente que varía con respecto al tiempo de desecación.

- En el punto en el cual termina el intervalo de la velocidad constante, empieza a disminuir la intensidad del secado y allí se localiza el contenido crítico de humedad. En este punto el movimiento del líquido hacia la superficie del sólido se hace insuficiente para reemplazar el líquido que esta siendo evaporado. Lo anterior significa que el contenido crítico de humedad depende de la facilidad de los movimientos de humedad dentro del coloide y el espesor de la muestra. Y, por ende de la estructura que presenta ese coloide a medida que continua el proceso de secado.

Después de exponer a detalle el comportamiento del fenómeno de transferencia de masa en función del cambio de humedad con respecto al tiempo y al posición en el espesor de la muestra, se comprende que el problema general para describir las situaciones de secado, consiste en encontrar una expresión matemática que describa la transferencia del líquido a través de la sustancia coloidal, mediante el establecimiento del cambio de humedad del coloide para las dos variables: tiempo (t) y un determinado espesor de la muestra (x), es decir una expresión $X(x, t)$ que describa el comportamiento del cambio de humedad de la sustancia a secar asociadas a cada tiempo y espacio en el espesor de la muestra.

La búsqueda de la expresión $X(x, t)$, implica la existencia de diferentes terminologías matemáticas y de contexto que realmente se relacionan y que existe una respuesta al porqué, la serie de Fourier puede representar la función del comportamiento de la transferencia de masa de agua en el coloide cuando se somete a la operación de secado. La respuesta es que la serie de Fourier representa al fenómeno en la última de secado a través de una suma infinita de funciones trigonométricas.

Con respecto al análisis del fenómeno desde el punto de vista del tiempo en que se lleva a cabo la transferencia de masa, se puede establecer que el fenómeno es teóricamente infinito, pero tiene un límite para un tiempo teóricamente infinito, este límite puede ser representado por una función constante dada mediante una serie de Fourier, relacionando la terminología de límite o convergencia de una suma de funciones, con el equilibrio del fenómeno o el estado estable que se alcanza en el proceso de secado para un tiempo muy grande.

En base a la relación establecida entre la serie de Fourier y el contexto del fenómeno de transferencia de masa, las situaciones son las siguientes:

SITUACIÓN 1. Reconocimiento del fenómeno

La parte central en el reconocimiento del fenómeno es la parte experimental que ha de llevarse a cabo en el laboratorio a través de la operación de secado en un secador de charolas. La realización de esta etapa es con la finalidad de que el estudiante se familiarice con el fenómeno de transferencia de masa y las situaciones específicas en donde se presenta. La interacción es a través de la experimentación, observación y registro datos.
Las tareas a desarrollar en la situación contienen problemas que se caracterizan por la relación entre conceptos derivados de contenidos matemáticos y del contexto que constituyen las situaciones.

La tarea desarrollar a desarrollar es la siguiente:

1. Preparar una muestra de alginato de sodio (coloide) cuyo contenido de humedad sea de 10 libras de agua por libras de sólido seco (W) y registrar el contendido de humedad inicial (X_1).

2. Con esta muestra, llenar una de las charolas del secador, registrar su espesor (x) y las dimensiones de la charola. Iniciar el secado y suspenderlo en dos horas. El secado debe realizarse bajo ciertas condiciones de operación durante este tiempo. Elegir las condiciones de temperatura y flujo de aire, registrando estos datos.
3. Cada 10 minutos pesar la muestra que se ha sometido al secado y registrar el contenido de humedad y el espesor de la muestra.
4. Después de las dos horas, observar e indicar si la muestra aún contiene humedad. Si es así, repetir el proceso de secado por media hora más cambiando las condiciones de temperatura y flujo de aire que se registraron en el punto 2. (debe tenerse cuidado que estas nuevas condiciones no dañen la parte superficial de la muestra). Registrar los datos durante esta media hora de secado.
5. Si aún contiene humedad repetir el proceso por 15 minutos más, cambiando nuevamente las condiciones de operación que se registraron en el punto 4. (debe tenerse cuidado que estas nuevas condiciones no dañen la parte superficial de la muestra). Registrar los datos. ¿Hay nuevos registros de humedad en la muestra, después de todo el tiempo que has utilizado en el secado? ¿Cuánto tiempo llevas de secado? Registra estos datos.

SITUACIÓN 2. Cambio de humedad en función del tiempo X(t) y espesor de la muestra X(x). Relación entre el cambio de humedad y la transferencia del líquido del coloide

Los problemas que se plantean en esta situación tienen el objetivo de apoyar al estudiante a relacionar los datos experimentales en la gráfica de una función que representa el comportamiento del cambio en contenido de humedad del coloide con el tiempo $y = X(t)$ en que dura el secado y el espesor de la muestra $u = X(x)$.

Asimismo, determinar la relación entre el cambio mencionado, en términos de las dos variables “t” y “x”, mediante un perfil de humedad.
Los conceptos que resaltan en esta situación giran en torno al comportamiento del fenómeno en términos de las dos funciones y = X(t) y u = X(x), como un fenómeno que presenta el mismo patrón de comportamiento en el secado bajo ciertas condiciones del proceso, a medida que transcurre el tiempo, el cual es dado a través de una curva de tipo decreciente. De tal manera que las características de la curva permitan percibir que el cambio en la humedad es teóricamente infinito en un tiempo también teóricamente infinito. Y que el cambio de humedad en función del tiempo proporciona el procesote en que se transfiere la cantidad de masa del líquido contenido en la sustancia.

La tarea a desarrollar en esta situación es la siguiente:

1. Con la información acerca del contenido de humedad de la muestra (X) y de tiempo de secado (t) que has obtenido en el secado, realiza la gráfica de y = X(t), considerando todos los datos hasta que ya no hubo registro de cambio de humedad.
2. Construye el perfil de humedad correspondiente, considerando una curva para tiempo dado: después de 10 minutos, 120 minutos y 150 minutos de secado.
3. Divide el intervalo de continuidad de “t” de la curva de X(t), en la gráfica, en “n” segmentos iguales de tal forma que Δt_n sea la longitud de una parte.
4. Levantar en estos segmentos las ordenadas correspondientes $X(t_0)$, $X(t_1)$, … $X(t_n)$.
5. Unir las extremidades de las ordenadas consecutivas por líneas rectas con los puntos $[t_0, X(t_0)]$, $[t_1, X(t_1)]$,……., $[t, X(t_n)]$, formando rectángulos, de tal forma que la grafica de la función X, sea la región limitada por la curva, el eje “t” y el intervalo de continuidad.

6. Encuentra el área de la región limitada por la curva de X(t), el eje t y el eje de continuidad, mediante la suma de las áreas de los n rectángulos que conforman dicha región.

SITUACIÓN 3. Determinación de la función que representa a la curva X(t) y la aproximación de esta función mediante una serie infinita de potencias

Una vez obtenidas las relaciones de los datos experimentales del cambio de la cantidad de humedad con respecto al tiempo mediante las gráficas que representan este cambio, en esta situación, se pretende que el estudiante determine la función matemática X(t) correspondiente a la gráfica a través de representar la ecuación diferencial que modela el cambio de humedad decreciente en el tiempo de secado. Posteriormente encontrar la representación de la función X(t) mediante una serie infinita de potencias.

La tarea desarrollar comprende las siguientes actividades:

1. Según el comportamiento de la curva que representa la cantidad de humedad del coloide en un tiempo t, dada por X(t). Determinar la expresión matemática que corresponde a dicha función.
2. Vincular el cambio de humedad con el cambio en el tiempo y el contenido de líquido en el coloide.
3. Expresar matemáticamente la relación anterior.
4. Relacionar la constante física K_g, especifica del líquido contenido en el coloide con la expresión que han escrito en el punto 3.
5. Expresar la ecuación diferencial que representa el comportamiento del cambio de humedad del coloide en función del tiempo en que es sometido al proceso de secado.

6. Encontrar la solución general que satisface a la ecuación diferencial
7. Encontrar la solución particular que satisface la ecuación diferencial. Utilizar el dato de la cantidad de humedad inicial del coloide en la muestra antes de someterse a secado.
8. Graficar la función particular hallada y describir sus características
9. Comparar la gráfica anterior con la curva correspondiente a X(t).
10. A partir de la función particular, hallar el contenido de humedad en equilibrio y comparar el valor obtenido experimentalmente y el que aparece en la curva de X(t).
11. A partir de la función particular, hallar el límite en el contenido de humedad en equilibrio.
12. Determinar la serie que representa a la función X, utilizando una serie de potencias como la siguiente:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (t-c)^n = f(c) + f'(c)(t-c) + \frac{f''(c)}{2!}(t-c)^2 + \ldots + \frac{f'^n(c)}{n!}!(t-c)^n$$

   + …considerar que t = c, correspondiente a un valor de t en el intervalo de continuidad de la función X(t).
13. Graficar la serie obtenida considerando 4 términos de la misma
14. Graficar la serie obtenida considerando 10 términos de la misma
15. Graficar la serie obtenida considerando n términos de la misma

SITUACIÓN 4. Comportamiento de la humedad en el coloide (para un instante t y una posición x representado por la serie de Fourier)

A través de las anteriores situaciones y el planteamiento de ésta, se tiene el objetivo de que tanto los problemas, como las actividades a realizar, apoyen al estudiante a relacionar la función que representa el comportamiento del cambio de humedad en función del tiempo y el espesor de la muestra dado por X(x, t), a través de una serie de Fourier, la cual permite representar y relacionar los dos cambios de humedad que ya se han encontrado en X(x) y X(t) como un cambio en función de "x" y "t" cuya relación es X(x, t). Asimismo, establecer la relación que tiene la serie de Fourier con el fenómeno, al describir una etapa la función mediante una suma infinita de funciones periódicas que siguen un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que la humedad es uniforme en el coloide.

Por tanto el problema radica en describir reconocer la suma infinita de las funciones que conforman a la serie de Fourier, al converger a la representación de la función X(x, t) en un cierto intervalo de continuidad de la misma función y además, determina el equilibrio en la transferencia de masa cuando la serie converge a una función constante, la cual representa la máxima cantidad de agua transferida o el mínimo cambio del contenido de humedad en la muestra bajo ciertas condiciones del proceso.

La tarea desarrollar comprende las siguientes actividades:

1. Buscar una ecuación diferencial que represente el cambio de humedad en el coloide que proporciona el perfil de humedad. Es decir, en términos de la posición del líquido en el espesor de la muestra "x" y del tiempo de secado "t".
2. A partir de esta ecuación diferencial, determinar la función general que representa la humedad del coloide para cual posición del líquido en el espesor de la muestra "x" y del tiempo de secado "t"
3. Determinar la función particular que representa la humedad del coloide para cual posición del líquido en el espesor de la muestra "x" y del tiempo de secado "t".
4. Describir la función particular en relación al cambio de humedad que se produce en el coloide durante el secado
5. Graficar la función particular dejando fijo la posición del líquido en el espesor de la muestra y variando al tiempo
6. Graficar la función particular dejando fijo el tiempo y variando la posición del líquido en le espesor de la muestra

7. Comparar las graficas resultantes con la curva de X(t) y el perfil de humedad
8. Describir estos resultados en relación al cambio de humedad que se produce en el coloide durante el secado

En este marco, la caracterización de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa con resultados sobre los conceptos que predominan en las dos estructuras presentes y las situaciones en que tienen lugar, facilita la integración del campo conceptual bajo los siguientes bases:

En el estudio de la integración del campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa, resultan conceptos que relacionan estos dos contextos en el ambiente situacional del secado de coloides. Específicamente el producto es el conjunto de conceptos alrededor de la función que describe el comportamiento del fenómeno en función X(x, t), dado por el cambio de humedad con respecto al tiempo X(t) y a la posición X(x) en el espesor de la muestra. Dicho cambio es representado mediante una serie de Fourier. De tal forma, que la serie de Fourier describe a la función característica X(t) en la última etapa de secado, proporcionando el equilibrio en el fenómeno. Esta representación se establece, a partir de seccionar el intervalo de continuidad de la función de acuerdo a los períodos que se presentan en el mecanismo de transferencia del líquido en el coloide, o bien de acuerdo a las condiciones limitantes que se manejen el problema de secado.

Así se tiene, que el campo conceptual queda integrado de la siguiente manera:

- ✓ Un conjunto de cuatro situaciones de secado, con actividades y tareas alusivas al contexto y la matemática que la soporte
- ✓ Un conjunto de conceptos como resultado de la relación entre los dos contextos y la interrelación situación-contexto.

La argumentación acerca del conjunto de conceptos que integran el campo conceptual y cuya relación es la serie de Fourier y la transferencia de masa, es referida al cambio de humedad en la sustancia, debido el fenómeno de difusión que se presenta en la última etapa de secado y su representación mediante una función F(x, t) que represente el mecanismo de la difusión del líquido del coloide en cualquier punto de la muestra que se somete al secado para instante de tiempo t.
Siendo el producto, una correspondencia entre los conceptos matemáticos que determinan a la serie de Fourier y los conceptos que determinan el comportamiento de la transferencia de masa por la difusión.

Un esquema de este planteamiento tiene lugar en el siguiente cuadro:

Conceptos que determinan el comportamiento del mecanismo de difusión de transferencia del líquido en el secado de materiales	F(x, t) = función que representa el cambio de humedad para un instante t y una posición x, en la última etapa de secado	F(x, t) = Serie de Fourier	F(x, t) = Suma de funciones periódicas que conforman a la serie de Fourier	Convergencia de la serie de Fourier a la función que representa al fenómeno: F(x, t) y que describe la difusión del líquido del coloide

Así mismo, una figura que trata de establecer la correspondencia obtenida de situación-concepto dentro del campo conceptual referido, se presenta en la figura 26.

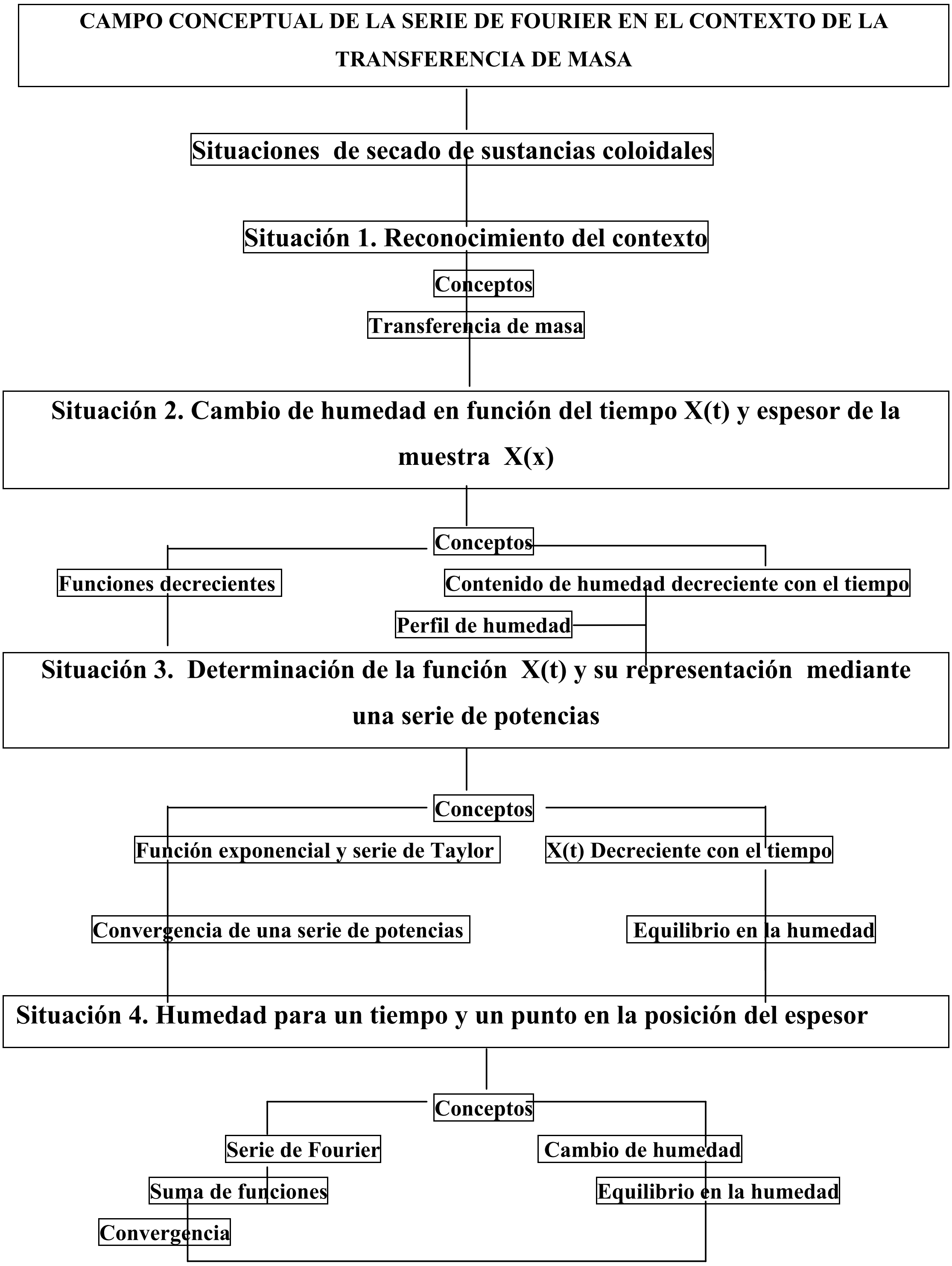


Fig. 26. Integración del campo conceptual

CAPITULO 4

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DEL ESTUDIANTE RELATIVO AL CAMPO CONCEPTUAL

Con el propósito de responder a la pregunta de investigación y cumplir con el objetivo del estudio, acerca del conocimiento del estudiante relativo a los conceptos que determinan a la serie de Fourier en el contexto de transferencia de masa, se retoma como diseño de investigación, al campo conceptual establecido en el capitulo anterior. Es decir, la estrategia a seguir para obtener información sobre el proceso cognitivo en base a la interacción del estudiante, es el campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa. La intención de la interacción con el campo conceptual, es que el sujeto se enfrente a tareas , conceptos y problemas bajo un tipo de situaciones, que son derivadas del secado de coloides.

En el entendimiento del proceso del desarrollo de los conceptos adquiridos por el estudiante a través de su localización en este campo, se adopta el planteamiento de Vergnaud, (1996), en su teoría de los campos conceptuales. Dicho planteamiento proporciona un marco para el análisis de la actividad del sujeto en términos de la conceptuación del mismo, como resultado de su acción en un área de conocimiento que contiene conceptos en situaciones específicas. En este sentido, se plantea que el conocimiento conceptual que marca Vergnaud, no se refiere a aspectos teóricos formales, si no a la acción que tiene lugar ante situaciones que exponen diferentes relaciones, que en este caso son relaciones implicadas en la estructura de la serie de Fourier con la transferencia de masa.

La teoría de los campos conceptuales que expone Vergnaud, es una teoría psicológica que se centra en la conceptuación de lo real bajo circunstancias situacionales; de cómo los conceptos adquieren significado para el sujeto al interactuar en diferentes situaciones, de tal manera, que al estudiar el conocimiento relativo a esta conceptuación, se provee la posibilidad de describir la representación del conocimiento matemático implícito en el esquema del sujeto en términos de las invariantes operacionales; entendiéndose en la explicación de Vergnaud, que el sujeto conceptúa una noción por su actuación en diferentes contextos. Y que además el campo de aplicación de los conceptos, se modifica conforme se vincula con otros y con los principios que determinan el campo de acción del sujeto.

Así, bajo el abrigo del marco de los campos conceptuales, el estudio cognitivo a realizar en esta etapa de la investigación, persigue analizar el conocimiento pragmático acerca de los conceptos que engloban a la serie de Fourier en términos del fenómeno, siendo el patrón de estudio, la conceptuación de los estudiantes bajo la descripción de su esquema, con la medición de las invariantes operatorias que se presentan en el conocimiento.

Vergnaud, (1996, 1997) expone que el inicio del desarrollo del conocimiento es incipiente y no puede ser llamado conceptual, pero constituye la base del conocimiento formal. Este conocimiento informal puede describirse en términos de las invariantes operacionales como teoremas y conceptos en acto. Los teoremas en acto se explican como proposiciones que son sostenidas como verdaderas por un sujeto en ciertas situaciones. El sujeto hace aplicaciones implícitas de los axiomas matemáticos mediante teoremas en acto. Los conceptos en acto se refieren a categorías (objetos, propiedades y transformaciones) que permiten al sujeto clasificar la realidad en distintos elementos y aspectos, seleccionando la información apropiada a la situación en la que se mueve. Los teoremas en acto y conceptos en acto son inferidos de la observación de la actividad en una tarea y, puede ser que no puedan ser expresadas por el sujeto, es decir que no sean explícitas por el mismo. Su existencia es probada por las diferencias observadas entre sus conductas.

Siguiendo el planteamiento antes expuesto, el estudio del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier, se resume en lo siguiente: 1) Se sustenta en el análisis de la conceptuación pragmática del estudiante. 2) Con el estudio de su esquema mental. 3) Este estudio se enmarca en la identificación de las invariantes operatorias.

Los elementos a considerar en este estudio se esquematizan en la siguiente figura.

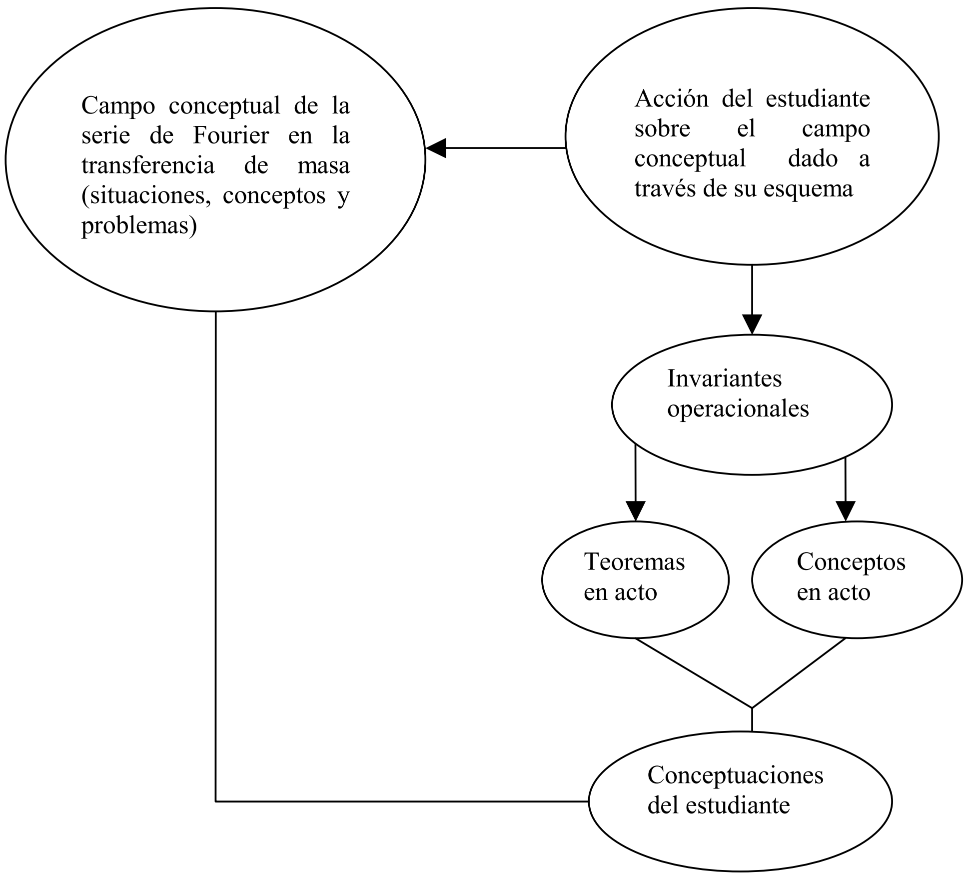


Fig. 27. proceso del análisis del conocimiento relativo a un campo conceptual

El enfoque de la investigación en el estudio cognitivo referido a la acción del estudiante sobre el campo conceptual, se encuadra en el método cualitativo. El proceso es el siguiente:

a) La recolección de datos en el estudio, se realiza a través de la observación y sesiones en profundidad con un grupo de enfoque.
b) El tipo de análisis de los datos es cualitativo y es referido a la representación del esquema del estudiante.
c) La interpretación de los datos se realiza en base a la descripción de las invariantes operatorias identificadas en el desarrollo del conocimiento al interactuar con el campo conceptual.
d) Los resultados obtenidos se muestran en la variación de las representaciones y las invariantes presentes en las conceptuaciones del estudiante acerca del campo conceptual sobre el que se interactúa.

La muestra sobre la cual se recolectan los datos del análisis, es un grupo de dos estudiantes: Nelly y Ubaldo. Los dos, son estudiantes del Instituto Tecnológico de Toluca del séptimo y octavo semestre de Ingeniería Química respectivamente. Nelly y Ubaldo, conforman un grupo de enfoque.
Por tanto, el método de recolección de datos acerca de la interacción en un medio situacional, es basado en sesiones de trabajo en profundidad con este grupo de enfoque bajo su actuación en este medio.
El grupo participa en 5 sesiones de trabajo de tres horas según la situación. Durante las sesiones se administran la tarea que integra la situación dentro del marco del secado de una sustancia coloidal en el contexto del fenómeno de transferencia de masa. Dichas tareas, son desarrolladas y andamiadas bajo la conducción del investigador. En la conducción de la sesión, es preponderante la intervención del investigador, para propiciar la participación del grupo, de tal manera, que se obtengan resultados de los participantes en su propio lenguaje y se alcance un alto nivel de profundización en la conducción de la sesión, con implementación incluso,

de preguntas y actividades improvisadas en relación con la situación específica con la que se encuentran trabajando en el campo conceptual sobre el cual se interactúa.

Las sesiones se llevan a cabo en el laboratorio de operaciones unitarias, perteneciente a la misma institución donde los estudiantes realizan pruebas y análisis correspondientes a su especialidad. En este lugar, los estudiantes están habituados a trabajar por largos períodos de tiempo desde que inician sus estudios superiores, por tanto, ellos se mueven en un espacio en el que se encuentran familiarizados.

El contexto donde son implementadas las sesiones de trabajo, es el de la transferencia de masa y las situaciones se derivan del secado de un coloide llamado alginato de sodio. En dichas sesiones, se abordan conceptos específicos de una situación, cuyo objetivo se describe de acuerdo a los lineamientos trazados para la obtención de resultados.

El desarrollo de la primera situación tiene lugar en la primera sesión de trabajo. La tarea a realizar, comprende actividades caracterizadas por la fase empírica del secado de este tipo de sustancias, a fin de que los estudiantes reconozcan el fenómeno a través de la interacción experimental.

En las sesiones subsecuentes, el grupo es enfrentado a diferentes actividades según la situación. El trabajo a desarrollar, busca resaltar conceptos relativos a la serie de Fourier y conceptos acerca de la transferencia de masa, de tal manera, que el investigador tenga oportunidad de describir la intervención de los estudiantes en el marco del campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno en estudio.

La recolección de información para el análisis del conocimiento en estas cinco sesiones de trabajo, se apoya en vídeo grabaciones y en las respuestas o escritos de los estudiantes. Durante las sesiones también se recurre a la observación por parte del investigador, realizando un registro para describir el ambiente en el que se desenvuelve el grupo de enfoque, la actitud personal de los estudiantes que lo conforman, la actitud grupal, las acciones que tienen lugar y las actividades que desarrollan. El grupo es informado de que será observado y vídeo grabado.

El material obtenido en la recolección de la información, es preparado y revisado para su análisis. Según los objetivos marcados en la investigación, los resultados son interpretados y ordenados de acuerdo a los aspectos que marca Vergnaud. Los aspectos a considerar, son las invariantes operatorias que se infieren por la actuación y conducción de los estudiantes según sus representaciones. Estas son identificadas y descritas de acuerdo a la variación que se presente en el entendimiento y solución de los problemas característicos a cada situación que conforma el campo conceptual sobre el cual se desenvuelven.

I. Aspectos de la teoría de los campos conceptuales que han de tomarse para el análisis de los resultados

Los aspectos conceptuales se adoptan de la teoría de los campos conceptuales, (Vergnaud, 2000). En esta teoría se expone que en el análisis del esquema del sujeto se explica el proceso de transformación del conocimiento mediante su actuación en situaciones, las cuales requieren de conceptos interconectados y que son propios de la misma situación. Asimismo, de las operaciones de pensamiento como conocimientos implícitos que se van adquiriendo gradualmente, a los que Vergnaud les llama invariantes operacionales y que son definidas a través de los teoremas en acto y conceptos en acto. Las invariantes operacionales son los componentes epistémicos en la solución y entendimiento de un problema. Su función es reconocer los objetos, sus propiedades, sus relaciones y las transformaciones que estos objetos experimentan. A partir de las invariantes operacionales se extrae y se selecciona la información pertinente, se infieren las consecuencias útiles para su acción y se controla la toma de información. Las invariantes operacionales no son expresadas explícitamente por los sujetos; se infieren a partir de lo que ellos hacen. Son expresadas en términos de los teoremas en acto y conceptos en acto.

Adoptando el planteamiento de Vergnaud, el estudiar el conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa, implica analizar su esquema mental para tratar de explicar el proceso de transformación del conocimiento acerca de este concepto matemático en vinculación con un concepto que pertenece a un contexto de especialidad como lo es la transferencia de masa, a través de las situaciones en las que se desarrolla; siendo estas situaciones específicas de dicho contexto, correspondientes al secado de coloides. Asimismo, a través de su interacción con conceptos y problemas acerca de la serie de Fourier en relación con la transferencia de masa, como conceptos y problemas que definen a las situaciones, por ser este fenómeno el que determina la transferencia de masa del líquido procedente de este tipo de sustancia debido a la acción del aire en el proceso, que es donde la serie de Fourier representa el comportamiento de dicho fenómeno.

Por tanto, los aspectos que constituyen el estudio del conocimiento del grupo de enfoque son de dos tipos:

1) Mediante la actuación sobre el campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa:

- ✓ Las situaciones que hacen el concepto útil y significativo. En esta investigación se consideran actividades y problemas correspondientes a los conceptos alrededor de la serie de Fourier en vinculación con la transferencia de masa en situaciones de secado de coloides.

2) El esquema mental como una forma de organización de la actividad que engendra la acción compuesto por los siguientes elementos:

- ✓ Propósitos: Anticipan de acuerdo a un entendimiento las metas del problema
- ✓ Invariantes operacionales: Son componentes epistémicos en la solución y entendimiento del problema, su función es reconocer los objetos, las propiedades las relaciones y las transformaciones que los objetos en estudio experimentan. Las invariantes operacionales no son expresadas explícitamente pero son determinadas a partir de la observación de las acciones de los estudiantes a través de su comportamiento en el grupo de enfoque y de sus argumentos para explicar y justificar sus acciones,

infiriéndose en los teoremas y conceptos en acto que sustentan su comprensión y solución de los problemas que integran el campo conceptual.

- ✓ Inferencias: A mediada que se resuelve el problema se hacen adaptaciones razonamientos y anticipaciones que llevan al entendimiento de las relaciones entre conceptos y teoremas en un problema.
- ✓ Reglas de acción: Son la parte generativa del esquema, guían la toma de información y la regulación de la actividad y son la puesta en práctica de los teoremas en acto.

II. Aspectos a considerar en la descripción de la acción del grupo de enfoque

Siguiendo el modelo de análisis de Flores (2002), para describir la acción del estudiante en el análisis del conocimiento, es necesario distinguir entre las acciones del estudiante para dar significado al problema y las acciones que tienen lugar para llegar a una solución, dichas acciones constituyen el estudio de la representación que se constituye por varios esquemas.

Según Flores (2002), la representación de un problema comprende varios esquemas, entre ellos los que dan lugar al entendimiento del problema y los que dan lugar a la solución. En el entendimiento del problema el propósito es atribuirle un significado, en el que el estudiante mediante reglas de acción e inferencias, identifica de qué situación se trata, cuáles son las variables conocidas y cuáles las desconocidas. Este esquema da lugar al segundo, que es el que lo conduce a la solución. En ambos esquemas están presentes invariantes operacionales específicas.

Esquema de entendimiento. En el esquema de entendimiento se identifican dos tipos:

-Entendimiento canónico. Los propósitos, reglas de acción, las inferencias y las invariantes operacionales corresponden a una comprensión del problema. Este

esquema se relaciona con un esquema de solución que dirige la acción a una solución verdadera.
-Entendimiento no canónico. Los propósitos, reglas de acción, inferencias e invariantes corresponden a una comprensión del problema conforme a un significado no canónico, dirigiéndose la solución, a una solución falsa.

Esquema de solución. En este esquema se describe el comportamiento y razonamientos observados, las adaptaciones y las modificaciones al plantear una situación del problema. Los esquemas de solución se clasifican en:
-Esquemas algorítmicos. Implican la simbolización y el procedimiento convencional del mecanismo a seguir para dar la solución al problema.
-Esquemas no algorítmicos. Implican el empleo de simbolización espontánea para dar la solución al problema.

La simbolización se refiere a los símbolos y signos que son herramientas en el proceso del pensamiento y en la comunicación de la experiencia y los conocimientos conceptuales. Se identifican dos formas de simbolización:
-Simbolización espontánea. Las invariantes operacionales se representan por símbolos genéricos (dibujos, trazos, objetos materiales etc.).
-Simbolización convencional. Las invariantes operacionales son simbolizadas mediante notaciones convencionales de un algoritmo.

Así, se tiene la siguiente categorización de las variaciones en la representación en la construcción del conocimiento:
-Representación no canónica. En el esquema de entendimiento, el estudiante aplica el conocimiento de una clase de problemas que no corresponde al que se plantea. En el esquema de solución, la simbolización es congruente con el significado no canónico atribuido.
-Representación canónica no- algorítmica. Esta representación refleja un conocimiento rudimentario. En el esquema de entendimiento se tiene un significado canónico congruente con el significado del problema, en el esquema de solución se

trata de encontrar una solución congruente con un entendimiento canónico pero con una simbolización espontánea. Este tipo de representación es un antecedente para la representación con simbolización convencional.

-Representación canónica-algorítmica, basada en un esquema de solución no algorítmica. Esta representación constituye un puente hacia la representación formal del problema. En la solución coexisten dos esquemas: primero se emplea un no algorítmico y luego un algoritmo para validar la congruencia del resultado

-Representación canónica algorítmica. Esta representación indica que el estudiante puede utilizar las herramientas de la matemática formal para solucionar el problema. En el esquema de solución se selecciona un algoritmo. Las invariantes operacionales siguen una simbolización convencional, teniéndose un conocimiento sólido de los mismos.

Los aspectos expuestos anteriormente, son considerados al estudiar y describir los resultados del análisis cognitivo. La descripción se resume por sesión, según las tareas que integran la situación en la cual se trabaja, resaltándose las actividades implementadas de las ya contempladas y que son andamiadas por el investigador y conductor de la sesión. El análisis del conocimiento del grupo de enfoque, se realiza en el marco del análisis de las variaciones en su representación y las invariantes operatorias debido a su actuación en el campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa.

4.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN DEL GRUPO DE ENFOQUE. Análisis de las variaciones en la representación

PRIMERA SESIÓN:

Situación 1. Reconocimiento del fenómeno

La sesión uno, comprende la primera situación. En ésta, se contempla que el grupo sea posicionado en el ambiente del secado de una sustancia coloidal dentro del laboratorio de Ingeniería Química a través de la tarea contenida en la situación y que ha de desarrollarse en esta sesión.

Las actividades que se plantean en dicha tarea, son referidas a la experimentación del secado del alginato de sodio, a fin de que los estudiantes reconozcan el proceso y recojan información acerca del fenómeno de transferencia de masa, el cual tiene lugar cuando el liquido que contiene este coloide es transferido hacia el exterior de la charola que se encuentra empacada con una muestra de este tipo de sustancia. La operación de secado y el proceso que conlleva, es conocido por los dos estudiantes que integran el grupo: Nelly y Ubaldo. Ambos manejan el equipo de secado (secador de charolas), y tienen antecedentes sobre los fenómenos de transporte.

Las actividades a desarrollar son las siguientes:

1. Preparar una muestra de alginato de sodio (coloide) cuyo contenido de humedad sea de 10 libras de agua por libras de sólido seco (W) y registrar el contendido de humedad inicial (X_1).
2. Con esta muestra, llenar una de las charolas del secador, registrar su espesor (x) y las dimensiones de la charola. Iniciar el secado y suspenderlo en dos horas. El secado debe realizarse bajo ciertas condiciones de operación durante este tiempo. Elegir las condiciones de temperatura y flujo de aire, registrando estos datos.
3. Cada 10 minutos pesar la muestra que se ha sometido al secado y registrar el contenido de humedad y el espesor de la muestra.

4. Después de las dos horas, observar e indicar si la muestra aún contiene humedad. Si es así, repetir el proceso de secado por media hora más cambiando las condiciones de temperatura y flujo de aire que se registraron en el punto 2. (debe tenerse cuidado que estas nuevas condiciones no dañen la parte superficial de la muestra). Registrar los datos durante esta media hora de secado.
5. Si aún contiene humedad repetir el proceso por 15 minutos más, cambiando nuevamente las condiciones de operación que se registraron en el punto 4. (debe tenerse cuidado que estas nuevas condiciones no dañen la parte superficial de la muestra). Registrar los datos. ¿Hay nuevos registros de humedad en la muestra, después de todo el tiempo que has utilizado en el secado? ¿Cuánto tiempo llevas de secado? Registra estos datos.

Los términos en que se lleva a cabo la sesión, son de identificación del fenómeno a través de conceptos específicos del mismo y que van desde la preparación de la sustancia, hasta el secado y el archivo de los datos que se piden en las actividades, ya que serán usados en las sesiones posteriores.

Los elementos que definen al fenómeno en esta situación, comprenden los siguientes conceptos:

- Peso de un coloide húmedo
- Contendido de humedad (X) de un coloide, dado como lb de líquido/ lb de sustancia seca
- Espesor de la muestra a secar
- Tiempo de secado
- Condiciones de operación de secado (temperatura, humedad y flujo de aire)

Esta tarea es expuesta al grupo, quien inmediatamente empieza a realizarla. En el transcurso de la misma, los estudiantes se dividieron el trabajo, de tal manera que mientras uno preparaba la muestra y tomaba mediciones de peso, el otro, encendía el equipo y registraba las condiciones de operación en el equipo. Nelly fue quien estuvo participando más, observando y midiendo los cambios que experimentó la muestra en el tiempo estipulado de secado.

Durante la sesión, hubo un solo intercambio de los estudiantes con el investigador, cuando el grupo decidió preguntar. En el tiempo siguiente el investigador solamente estuvo observando. De dicha observación se obtiene que en general, las actividades son llevadas a cabo por el grupo, con desenvoltura en la preparación de la muestra, conocimiento y manejo del secador y, el momento de registro de datos. La comunicación entre los dos estudiantes fue para intercambiarse la información que estaban obteniendo y para definir los cálculos necesarios para determinar los datos de humedad en el tiempo del proceso.

El tiempo estipulado de la sesión fue de tres horas. Sin embargo, esta se prolongó media hora más.

La sesión fue vídeo- grabada con el acuerdo del grupo, que aunque fue aceptado por ellos, el estar sometido a la video grabación y la observación, les causó incomodidad, volteando continuamente a la cámara, para depués desenvolverse con mayor confianza y desempeñar las actividades dentro de una situación que les fue familiar por su formación en la ingeniería química.

VARIACIONES EN LA REPRESENTACIÓN

Representación canónica algorítmica

En general, de acuerdo a las actividades que marca la tarea en la situación, el grupo prepara la sustancia a secar y calcula los contenidos de humedad de la muestra a partir del cambio de peso de la sustancia húmeda en diferentes tiempos. Los estudiantes entienden las indicaciones y no presentan problema para hacer los cálculos necesarios.

Nelly, preparó una muestra de alginato de sodio con un contenido de humedad de 10 libras de agua por libras de sólido seco (W) y registró el contendido de humedad inicial por (X_1).

Con esta muestra, llenó una de las charolas del secador, registrando su espesor (x) y las dimensiones de la charola.

Ubaldo, encendió el secador e inició el secado bajo ciertas condiciones de operación, suspendiéndolo alrededor de dos horas y tomando el registro de estos datos.

Nelly, cada 10 minutos pesó la muestra, mientras que Ubaldo calculaba y registraba el contenido de humedad, el cambio en el espesor de la muestra y la cantidad de agua perdida correspondiente a la información obtenida para cada tiempo durante esas dos horas.

Según las actividades, después de las dos horas, se dieron cuenta que la muestra aún contenía humedad, por tanto de acuerdo a las indicaciones, repitieron el proceso de secado por media hora más. Ubaldo cambió las condiciones de temperatura y flujo de aire que tenía inicialmente.

Nelly, registró cada 5 minutos, el peso y el espesor de la muestra. Ubaldo realizó los cálculos de contenido de humedad y los registró

Cuando Nelly detectaba por la medida del peso en la muestra, que ya no había cambio de humedad, se lo comunicaba a Ubaldo y juntos observaban si la muestra aún contenía líquido, entonces ellos decidían repetir el proceso de secado cambiando las condiciones de operación del secador de la misma manera que los secados anteriores.

La operación del secado de un material, no conlleva dificultad para los estudiantes que conforman el grupo, ni la obtención de la información a partir de la misma, sus representaciones son del tipo canónico algorítmico, entienden y calculan por medio de un algoritmo la humedad en el coloide y la relacionan con el tiempo.

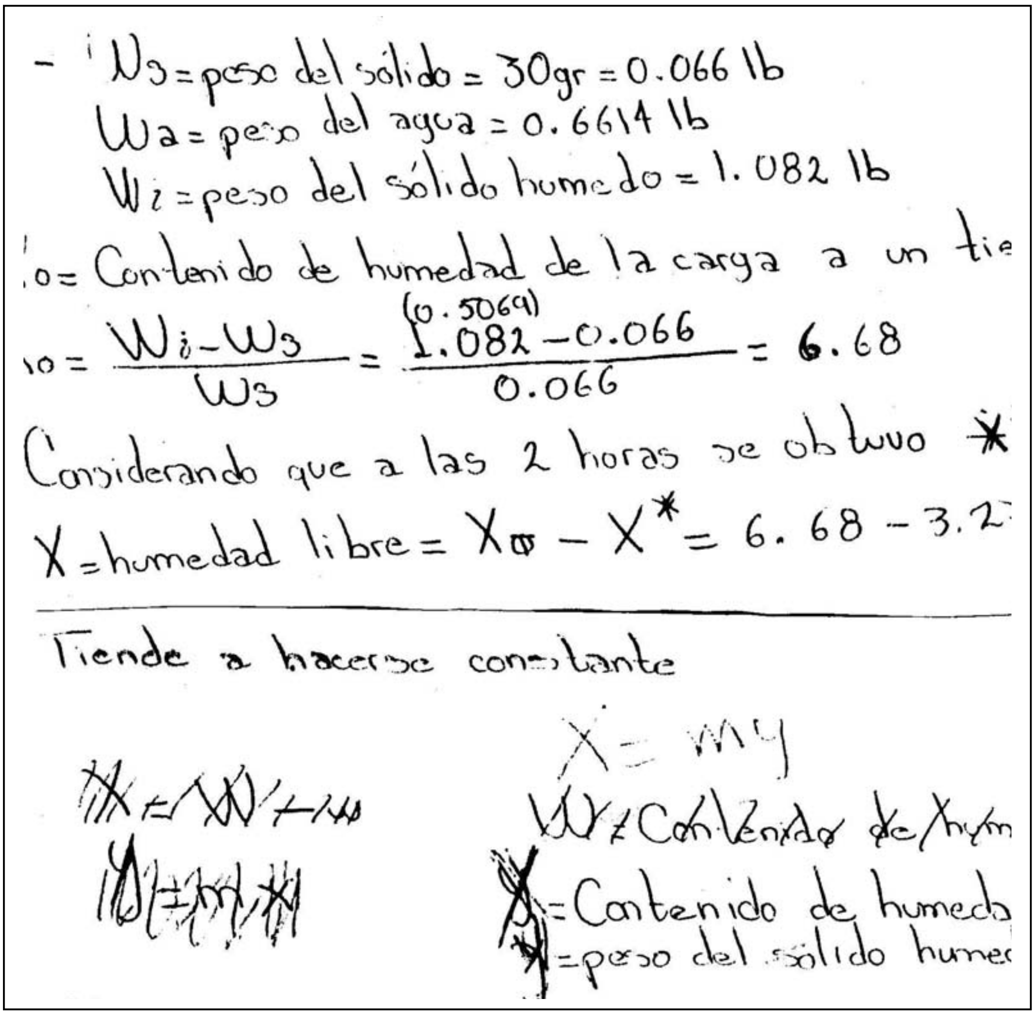


Fig. 28. Representación canónica algorítmica, basada en un esquema de solución algorítmico. Determinación de la humedad del coloide a partir del peso de la muestra

La realización de la tarea es algo rutinario en su quehacer, sin embargo, les hace pensar, la influencia de una de las variables presentes en el secado: el tiempo.

Este resultado se puede apreciar en la participación que tienen los estudiantes con el investigador. Una vez que terminaron la experimentación y estuvieron comentando en voz baja acerca de la información obtenida se acercan y comentan.

- Nosotros ya hemos secado el pet (material para obtener la celulosa que produce papel) y se seca de 90 a 100 minutos y ya no tiene humedad - comenta Ubaldo, continúa -pero en el coloide, todavía tiene líquido y ya llevamos 170 minutos y el cambio en la humedad que se registra ya es muy poco y queríamos preguntar si ya podemos dejar de secar o en cuánto tiempo se podría secar más, porque ya el cambio en el peso es muy poco, pero se ve que todavía contiene líquido.

El investigador explica, que de acuerdo a las condiciones en que opera el secador, es como se puede extraer el líquido del material.

- Cuando la muestra registra poco cambio en la humedad, es porque predomina la humedad del aire que circula en el secador. La humedad de la sustancia es menor en comparación con la del aire y esto trae como consecuencia que el cambio en la humedad se realice en menos tiempo, provocando que el secado sea cada vez más lento y además indetectable porque es muy poco el cambio en el peso, aún cuando se observa que la muestra conserva agua en el interior de la misma.

-Es que la humedad disminuye. Al tomar la mediada de peso del coloide húmedo en dos horas obtuvimos una humedad, pero después secamos nuevamente y obtuvimos otra humedad más baja, y por último otros 20 minutos y bajo un poco más, entonces sí hubo cambio en la humedad, poco pero hubo, yo creo que es cuestión de tiempo, porque la humedad aunque poca sigue disminuyendo - aclaró Nelly.

Nelly expone que si se aumentara la temperatura se podría haber secado más rápidamente y tener menos humedad.

-Si pero acuérdate que hicimos cambio en la temperatura del aire y la cantidad de flujo y más temperatura puede plastificar la primea capa de la muestra -dice Ubaldo

El investigador interviene -según las condiciones en que se trabaja, el proceso va a reportar un estado estable en donde ya el registro del cambio de humedad con respecto al tiempo es casi nulo y entonces el secado se detiene.

- Si a nosotros nos enseñaron que cuando se llega al estado estable el valor de la humedad es la del equilibrio (X^*) -comenta Ubaldo.

-Les propongo que dejen el coloide que tienen en la charola cerca de la ventana donde le del aire, cuando menos mientras este abierto el laboratorio y después pesen la muestra una vez al día. Hoy es miércoles y nuestra próxima sesión es el viernes, allí me van a decir cual es peso del material y a que humedad han llegado desde que iniciaron secando hasta el viernes y allí podemos dar respuesta a la inquietud de Ubaldo -la propuesta la hace el investigador.
Los estudiantes asientan, colocan la muestra en la ventana, recogen el material utilizado y se despiden

En la tarea que deja el investigador pendiente, se busca que los estudiantes observen y comprueben que el peso de la muestra sigue disminuyendo en menor proporción , ya que continúa actuando el aire en el secado, aún cuando no se encuentra en el secador y, de un día a otro tendrán un cambio en la humedad, hasta que su registro indique que ya no existe tal cambio.

De esta forma, el desglose en las representaciones en esta situación es la siguiente:

Representación canónica algorítmica
Esquema de entendimiento:

- Canónico: Se presenta un esquema entendimiento de los problemas de acuerdo al planteamiento de la situación y hacia el propósito de la misma, al mostrar entendimiento sobre la relación que existe entre la variación del peso y la variación en la humedad de la muestra y, la dependencia que tiene el secado con el tiempo.
- Propósitos: 1) Medir el peso de la muestra, el tiempo y las condiciones de operación del secado. 2) Calcular la humedad de la muestra a partir del peso. 3) Relacionar la humedad con el tiempo.

Esquema de solución:

- Algorítmico: Se determinan las humedades (X) de la muestra por medio de un algoritmo y la variación de dichas humedades se relacionan con la variación en el tiempo (t), mediante una tabulación de (X) y (t).

Invariantes:

- Diferencias de peso en el coloide y la relación con su contenido de humedad
- Cambio en el contenido de humedad en el transcurso del tiempo de secado.
- Identificación de la etapa de equilibrio en el secado

Conclusión

En el inicio de la sesión, al grupo se le notaba incomodo con la cámara y eso le producía inseguridad, pero a medida que se iba adentrando en la situación, fue mostrando mayor confianza. Los estudiantes tienen conocimiento de que las sesiones a las que se someterán le van a servir al investigador para tener información acerca del fenómeno de transferencia de masa en el coloide y en el cual ellos participan para su obtención. De tal forma que ellos son considerados participes de las sesiones, logrando finalmente un ambiente relajado e informal, que bien pudo motivarlos a continuar con las sesiones posteriores.

En el análisis de la actuación del grupo en esta situación, se reconocieron representaciones canónicas algorítmicas al calcular y relacionar el cambio de la humedad del coloide con el tiempo de secado, identificándose las invariantes de relación de peso con humedad en el coloide y su disminución en le transcurso de tiempo de secado.

SEGUNDA SESIÓN:

Situación 2. Reconocimiento del cambio de humedad con respecto al tiempo (t) y a la posición (x) en el espesor de la muestra

Las actividades que conforman la tarea en esta situación, comprenden el planteamiento del fenómeno de transferencia de masa en situaciones de secado de un coloide en relación con el cambio que sucede en humedad (X) de la sustancia, a mediada que transcurre el tiempo (t), mediante la gráfica que representa dicho cambio, dada por X(t) y el perfil de humedad que genera curvas de esta propiedad para cada tiempo.

El fenómeno ocurre por dos tipos de condiciones: externas e internas. Como ya se ha planteado antes, las condiciones externas, son condiciones controlables en el secador y son llamadas condiciones de operación. Estas son, la temperatura de secado, la cantidad de aire que se utiliza en el proceso y la humedad que circula en el secador.

Las condiciones internas, se deben al mecanismo interno de la circulación del líquido en la sustancia a secar. Y son estas condiciones, las que se busca resaltar a lo largo de las sesiones, ya que son precisamente estas condiciones las que generan las situaciones y los conceptos sobre los que se habrá de actuar en el campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno.

Considerando que los estudiantes, en la primera situación han llevado a cabo la parte experimental, reconociéndose la relación entre el cambio en el contenido de humedad de una muestra con el cambio en el tiempo de secado, ahora, en esta situación corresponde, investigar el tipo de curva que relaciona dicho cambio y las características del fenómeno que se analizan a través de esta curva, para finalmente establecer su la relación con el perfil de humedad y de esta manera, proporcionar el cambio en la propiedad transferente, no solo como una función del tiempo, sino también de la posición del líquido en la longitud del espesor de la muestra.

El procedimiento de conducción de la sesión es el mismo, primeramente al grupo se le proporciona las actividades que integran la tarea en la situación por escrito y, de acuerdo al desarrollo de la sesión, es posible que el investigador considere necesaria su participación con preguntas hacia los estudiantes que pueden ayudar en su actuación en la situación. Las preguntas y el tipo de las mismas, son formuladas según se mire y en el momento determinado. Esto es, de acuerdo al desempeño del grupo y a la habilidad y experiencia del conductor de la sesión. Así la actividad de los estudiantes se da, bajo la conducción andamiada del investigador.

En la descripción de las representaciones del trabajo del grupo en situación, se resaltan las preguntas y su participación en las mismas.

Las actividades que conforman la tarea en la situación, inician con la búsqueda de la representación de la relación entre la humedad y el tiempo mediante la curva X(t). Se continúa con la construcción de un perfil de humedad de la muestra en diferentes tiempos, con la relación de la posición del líquido en el espesor y el tiempo de secado, expresado por X(x, t). Para finalizar con la búsqueda de relaciones que bosquejen el comportamiento del fenómeno mediante las curvas obtenidas X(t) y X(x, t).

La tarea a desarrollar en esta situación es la siguiente:

1. Con la información acerca del contenido de humedad de la muestra (X) y de tiempo de secado (t) que has obtenido en el secado, realiza la gráfica de X(t), considerando todos los datos hasta que ya no hubo registro de cambio de humedad.
2. Construye el perfil de humedad correspondiente, después de 10 minutos, 120 minutos y 150 minutos de secado.
3. Divide el intervalo de continuidad t de la función X, en la gráfica de X(t), en n segmentos iguales de tal forma que Δt_n sea la longitud de una parte.
4. Levantar en estos segmentos las ordenadas correspondientes $X(t_0)$, $X(t_1)$, … $X(t_n)$.
5. Unir las extremidades de las ordenadas consecutivas por líneas rectas con los puntos $[t_0, X(t_0)]$, $[t_1, X(t_1)]$,……., $[t, X(t_n)]$, formando rectángulos, de tal forma que la grafica de la función X, sea la región limitada por la curva, el eje t y el intervalo de continuidad.
6. Encuentra el área de la región limitada por la curva de X(t), el eje t y el eje de continuidad, mediante la suma de las áreas de los n rectángulos que conforman dicha región.

Los aspectos que se abordan en la situación, contienen conceptos acerca del fenómeno, conceptos matemáticos y la relación entre ellos, bajo el siguiente entendimiento:

Una curva característica X(t) que representa el cambio de humedad en un tiempo determinado en el secado de un coloide, es la siguiente:

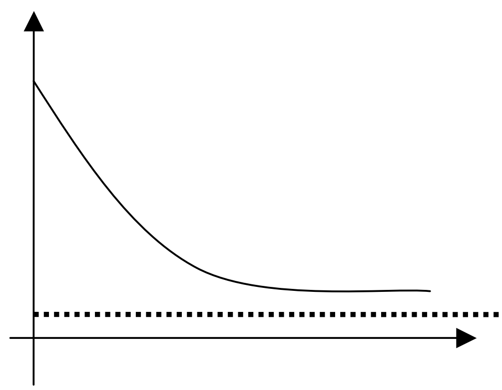


Fig. 29. Función del cambio de humedad para un tiempo t, dada por X(t)

Las propiedades de la curva, muestra una gráfica decreciente con el tiempo, la cual proporciona el comportamiento del fenómeno de transferencia de masa en relación con el cambio en la humedad del coloide, bajo un mismo patrón de comportamiento de forma decreciente, esto es, cualquiera que sean las condiciones externas del proceso a medida que transcurre el tiempo.

Este patrón se representa a través de una función particular X(t); humedad en el tiempo, que se encuentra determinada por una curva asintótica, cuya asíntota horizontal define el comportamiento asintótico de la humedad en el tiempo. El significado, aporta un comportamiento teóricamente infinito dado por un tiempo que es también teóricamente infinito, lo que produce, que teóricamente se requiera un tiempo infinito para que la transferencia de masa del líquido a través de la muestra de coloide alcance un mínimo en la cantidad de líquido contenido en la sustancia, en ciertas condiciones de operación. Esto determina, que para llevar la transferencia de masa a un estado de equilibrio, se necesita un tiempo muy grande, obteniendo así, la cantidad de humedad mínima y la cantidad de transferencia máxima, correspondiente a dicho estado. Esta deducción conlleva a concluir que para que la muestra alcance un valor de cero en el contenido de humedad, es decir, para que la sustancia se encuentre completamente seca, es necesario llevar el experimento hasta el último estado de equilibrio, en que debe haber transcurrido un tiempo también, teórico infinito.

De lo anterior se deriva, que el límite en la cantidad de masa transferida de líquido corresponde al límite en el contenido de humedad cuando $t \to \infty$, proporcionando dicho límite el contenido de humedad en equilibrio y el estado estable del proceso

Matemáticamente, en el caso de la humedad, el límite cuando $t \to \infty$, es expresado por: $\lim_{t \to \infty} X(t) = 0$

En la práctica del secado, se puede considerar que el comportamiento del fenómeno lo define este límite, el cual se alcanza cuando ya no se registra cambio en la humedad de la muestra en un lapso de tiempo determinado de secado.

Por tanto, bajo ciertas condiciones de operación, en X(t) se presenta un estado estable, cuya característica reporta que la cantidad de humedad en el coloide llega al equilibrio en un tiempo específico. El resultado del límite, es la cantidad de masa transferida de líquido contenido en la sustancia debido a la operación que se da en el secador.

Ahora bien, el cambio de X en t dado por X(t), genera a su vez, perfiles de humedad con curvas que relacionan el cambio a través de la posición del líquido en la longitud del espesor para un tiempo determinado. Los perfiles se pueden trazar con el dato de espesor de la muestra y la humedad para un tiempo especifico, resultando curvas que proporcionan la humedad para un posición (x) en la longitud del espesor y para un tiempo determinado, tal y como se muestra en la siguientes figuras.

En la primera figura, se ha trazado con la medida del espesor de la muestra y en la segunda se toma como referencia el doble del espesor de la misma. Ambas contienen un conjunto de curvas de humedad correspondiente una para cada tiempo.

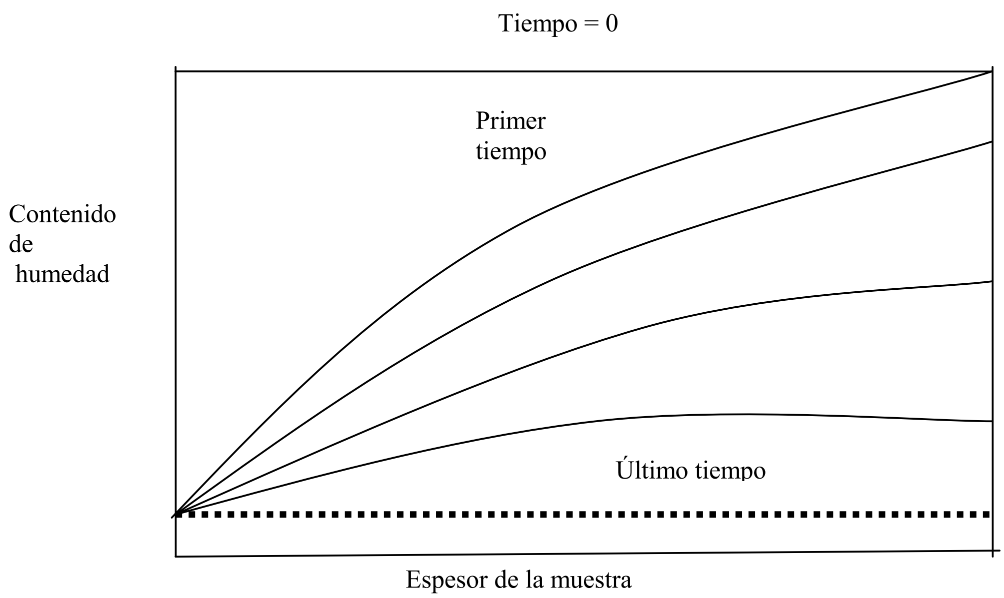


Fig. 30. Perfil de humedad, tomando el espesor de la muestra

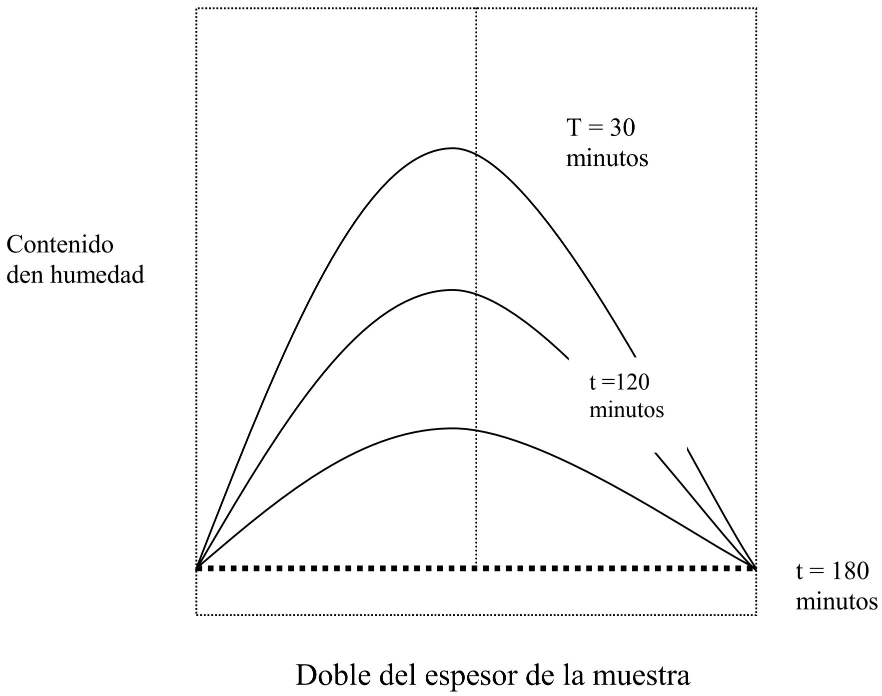


Fig. 31. Perfil de humedad, tomando el doble del espesor de la muestra

En las gráficas, la línea punteada representa el equilibrio del fenómeno, que en la práctica se considera que para una muestra determinada aparece en los 180 minutos de secado. Mientras que en la curva de X(t), esta misma línea representa la asíntota de la función y el límite de la curva para un tiempo muy grande de secado que teóricamente es infinito.

A partir de la curva X(t) se pueden identificar algunas relaciones entre el contenido de humedad del coloide y la transferencia del líquido proveniente de la misma sustancia. Una de ellas, es la relación referida al área bajo la curva de esta función, mediante la suma de las áreas de los rectángulos componentes que integran a la función en un intervalo de continuidad [a, b] contenido en t. La altura de estos rectángulos esta representada por las ordenadas de X(t) que corresponden a las funciones evaluadas en un punto de la gráfica como X(1) + X(2) + X(3) +….X(n) y la base esta dada por (b-a)/n. Entonces, la expresión del área bajo la función de X(t), en base a la suma de los n rectángulos que contiene es:

$$A = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} X(t_k - X(t_{k-1}))$$

En términos del fenómeno, la suma representa la cantidad de agua transferida en un lapso de tiempo (t) en que se da el cambio de humedad. Dicho cambio corresponde al tipo de funciones continúas y decrecientes que toman valores positivos para $t \geq 0$.

En resumen. Los elementos matemáticos y de contexto que prevalecen en la situación, engloban los siguientes teoremas y conceptos:

- Relaciones matemáticas: R = {(t, X) / t, X cumplen con un regla de orden = X(t)}
- Funciones decrecientes: Como funciones que determinan el cambio de humedad con el tiempo
- Funciones asintóticas: La asíntota representa el límite en el contenido de humedad en la sustancia que corresponde a un valor en el equilibrio en un tiempo determinado. Teóricamente correspondería a un valor límite para un tiempo teóricamente infinito.
- Intervalo de continuidad de una función decreciente $t \geq 0$
- El área bajo la curva de X(t), dada mediante la suma de las áreas de los rectángulos que integran X(t) en [a, b] por la expresión:

  $$A = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} X(t_k - X(t_{k-1}))$$

- Relación del cambio de humedad de la muestra en el secado con un tiempo determinado en que se realiza la operación experimentalmente: cambio de humedad decreciente cuyo límite es la humedad en equilibrio
- Relación del cambio de humedad en el tiempo y en la longitud del espesor de la muestra mediante el perfil de humedad

VARIACIONES EN LA REPRESENTACIÓN

Representación canónica-algorítmica

Una vez que el grupo entra al lugar donde se lleva a cabo la sesión, recoge la información obtenida en la pasada situación y la muestra con la cual estuvo experimentando. Enseguida se le da por escrito la nueva tarea. Su actitud se ve más relajada que la anterior y se disponen a trabajar.

En la primera actividad, los estudiantes relacionan los datos de humedad con el tiempo y representan mediante un bosquejo, la gráfica de X(t). En la obtención del perfil de humedad, utilizan y relacionan, la mediada del espesor de la muestra con el tiempo y la cantidad del líquido contenido en la misma, obteniendo curvas características de humedad en función de la posición del líquido en el espesor al suceder la transferencia del mismo, con curvas para cada tiempo.

Las representaciones muestran esquemas espaciales en el plano, del tipo canónicas algorítmicas al relacionar dos conjuntos en la obtención de X(t): valores de humedad y valores de tiempo, mientras que en la obtención de X(x, t); la relación de tres conjuntos: posición en el espesor (x), tiempo de secado (t), y humedad (X), determinando el perfil correspondiente a esta propiedad.

Las representaciones registradas son las siguientes:

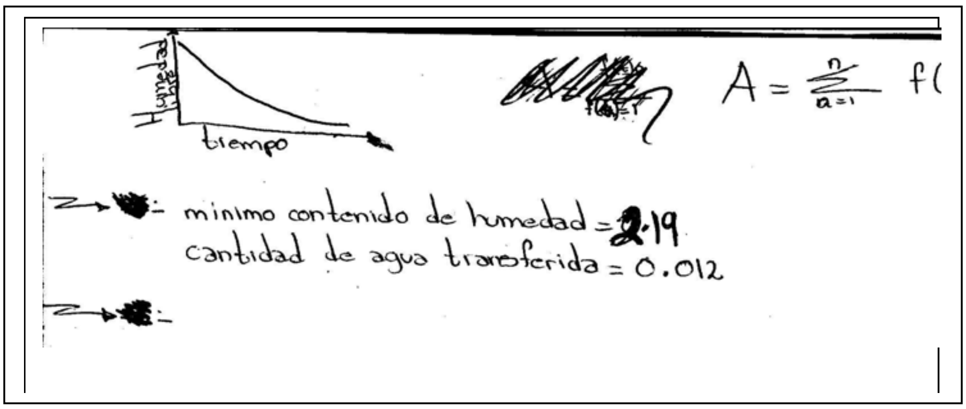


Fig. 32. Representaciones canónicas algorítmicas, basadas en un esquema de solución algorítmico. Determinación de la curva de humedad del coloide en relación con el tiempo de secado

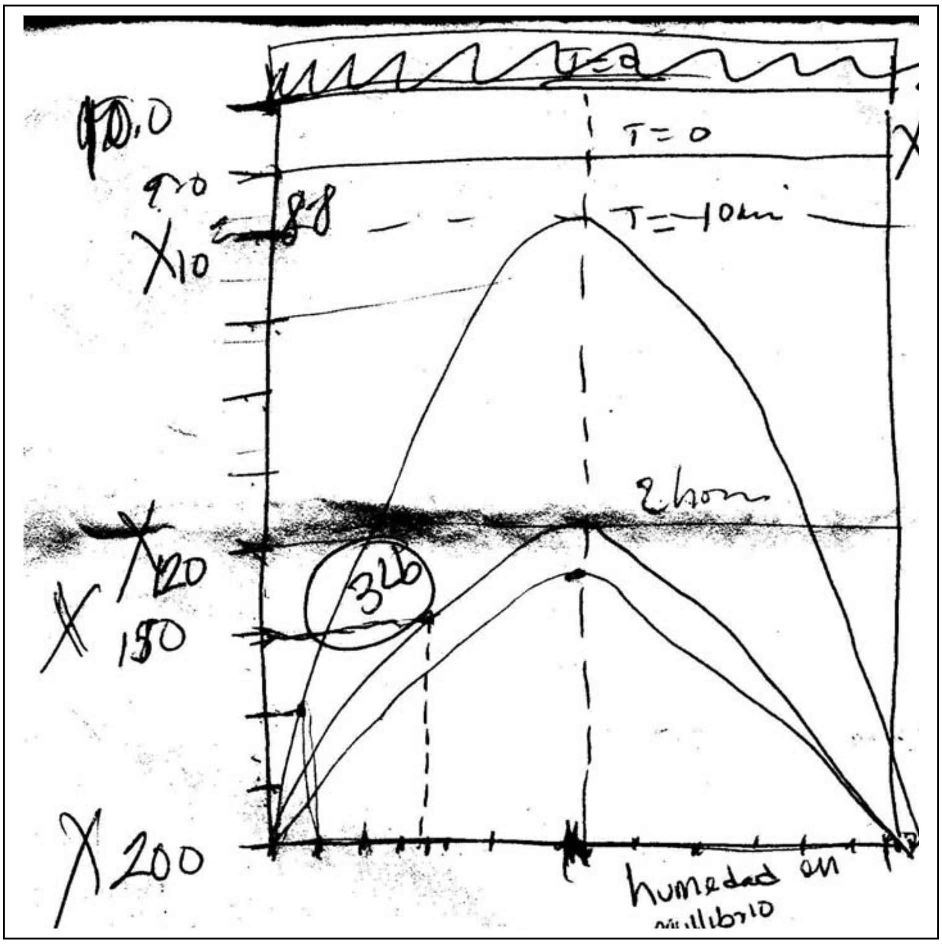

T=0
T=10 min
2 hora
326
88
X 10
X 120
X 150
X 200
humedad en equilibrio

Fig. 33. Representación canónica algorítmica, basada en un esquema de solución algorítmico. Determinación del perfil a humedad del coloide

Cuando el grupo ha terminado de representar las gráficas indicadas, el investigador considera pertinente formular las siguientes preguntas. Describiéndose enseguida en forma general la participación de los estudiantes.

¿Cuántas curvas de tiempo dibujaron en el perfil?

Los estudiantes contestan que cuatro: En la gráfica, ellos dibujaron una para 10 minutos, otra para los 120 minutos y después para 150 minutos y terminan en la que la humedad constante.

Para determinar un perfil aproximado, toman la medida del espesor de la muestra y consideran el doble, el primer registro de contenido de humedad, corresponde al inicial, el cual representan por X_0 para $t = 0$. Después toman uno a 10 minutos, otro a 120 minutos, uno más a 150 minutos y el último a 200 minutos; trazando las curvas para ese tiempo.

Cuantas curvas de tiempo pueden obtener en su perfil?

Ubaldo contesta que si dibujan una cada 10 minutos en 200 minutos son 20, señalan que pueden ser muchas; dependiendo de los intervalos de tiempo que registren. Mientras que Nelly dibuja algunas y comenta.

- Según el experimento, cada 20 minutos hubo un cambio considerable en la humedad, entonces se pueden construir curvas cada 20 minutos para que se obtenga el perfil en ese tiempo y se note el cambio.

¿Cuál es la humedad en la mitad de la longitud del espesor de algunas de las muestras en dos horas de secado?

Los estudiantes revisan el perfil en su gráfica y Nelly señala la cantidad de 3 lb de liquido/lb de sólido seco.

¿Cuál es la curva que representa el perfil de humedad cuando el contenido de humedad ya no cambia?

Nelly señala la línea horizontal que aparece en la última parte de la gráfica

¿Cuanto tiempo utilizaron para secar la muestra?

Ubaldo contesta que en el secador utilizaron hasta 170 minutos y que después de secarlo al aire, tal y como se les había encargado, ellos regresaron al siguiente día, después de 18 horas a medir el peso de la muestra y se dieron cuenta, que ya no se observaba agua, si acaso algunas burbujas atrapadas en el coloide y el peso había variado muy poco, desde que ellos lo tomaron por última vez hasta las 18 horas en lo que lo volvieron a tomar y después el registro marcó que ya no hubo ningún cambio.

Ubaldo comenta, que de acuerdo a la viscosidad de la sustancia, es el tiempo que se va a utilizar para secar, esto es, por la cantidad del líquido que se queda aprisionado en la sustancia. También aclara que haciendo cuentas con el tiempo, creen que el tiempo para secar esta muestra podía andar alrededor de 220 minutos.

¿Cuál fue el último valor de humedad que obtuvieron?

Los estudiantes indican el valor de 3.2773 para 150 minutos, después para otros 20 minutos más el valor es de 2.823 y la última cantidad fue de 2.19

¿En qué tiempo consideran que se terminó de secar la muestra?

Los estudiantes revisan su información, comentan entre ellos y finalmente contesta Nelly.

-Pensamos que desde los 150 minutos ya podemos decir que el secado se ha terminado porque después de este tiempo creemos que se puede decir que la humedad es la misma por la poca variación en el peso que se registró en esas condiciones. Aunque si lo vemos más exacto, podemos decir que a los 220 minutos o más, porque el último registro fue en 18 horas 170 minutos y ya no hubo más.

¿Cómo describen la gráfica de la humedad y tiempo, en relación al cambio que se produce?

La grafica es una curva que indica que la humedad se va haciendo menos entre mayor sea el tiempo en que se deja secar a la muestra – contesta Ubaldo, agregando:

-En una parte la curva tiende hacerse constante

¿En que tiempo se hace constante?

– En esta parte en que se ve una recta – Nelly señala un porción de la curva. Ella se refiere a la última parte de la curva. Después escribe tacha y vuelve escribir y dice: aquí es, X = my.

¿Qué significa que X = my

Nelly escribe que (X) es el contenido de humedad y que (y) es el peso de la muestra, y que al final de la gráfica, esta se comporta como una recta dada por

X = my

Ubaldo explica. - La recta se debe a que la humedad ya no cambia o cambia muy lentamente, en el secado obtuvimos al final, casi el mismo valor de humedad porque el peso cambió muy poco, entonces deducimos que como estos valores son casi iguales, la gráfica de humedad describe estos valores en una línea recta que esta en función del peso como X = my.

Según la gráfica, ¿en qué tiempo la muestra alcanza la última humedad que obtuvieron?

Nelly contesta. -En la gráfica marcamos los 170 minutos y los 220 minutos y partir de allí ya aparece la linera recta, que se refiere a que ya terminó el secado, porque ya no hay cambio aunque el tiempo sea más grande, que puede ser de 300 ó 350 minutos ó, hasta las 18 horas o bien más porque das igual, ya no se registra cambio en el valor de la humedad.

¿Hasta donde llega esa línea recta?

Nelly contesta que se pude extender hasta las 18 horas o más tiempo, que puede ser hasta mucho más grande aunque en la gráfica no le alcance el espacio, porque siempre va a ser una línea recta que no tenga fin.

¿En que tiempo consideran que la muestra se encuentre completamente seca?

-Si se refiere a que ya no haya nada de humedad, -responde Nelly. –Entonces se tendría que llegar a cero en la humedad y entonces se necesita un tiempo más grande.

-Pero la muestra ya casi no tiene líquido y se pude tomar como que ya es cero, aunque no sea de cero -Comenta Ubaldo.

Nelly y Ubaldo revisan su información y lo que han escrito y graficado. Ubaldo participa nuevamente. – No necesariamente tiene que ser cero la humedad, para que la sustancia se considere seca, en este caso no es cero y ya se ve seca. Ubaldo continúa – Si cambiáramos la cantidad del aire, su temperatura y humedad, tal vez pudiéramos secar más.

- Y que además tuviéramos una balanza que registrara los pesos pequeñísimos para notar que hay cambio en la humedad. -Dice Nelly.

-Si eso se pudiera, entonces podríamos hacer cambio en las condiciones de secado cuantas veces se pudiera y mediríamos el peso muchas veces para ver el cambio y necesitaríamos mucho tiempo –dice Ubaldo.

¿Cuánto tiempo más?

Nelly dice que debe ser muy grande, a lo cual responde Ubaldo.

-Si para cada tiempo que tomemos existen muchas mediciones de peso, entonces también se necesita que transcurra mucho tiempo.

Nelly dice. – Entonces ya estamos hablando del infinito porque podríamos hacer muchas mediciones de peso y para eso se necesita también mucho tiempo, así como lo marcamos en la gráfica con la recta que va descendiendo poco a poco hasta que pueda llegar a cero o aun valor límite en un tiempo que tampoco tiene fin.

Ubaldo le dice a Nelly que tal vez tenga razón y se queda pensando.

En esta intervención, los estudiantes describen la grafica que representa al fenómeno, en términos del cambio de humedad que tiene lugar con el tiempo mediante una curva X(t) en forma descendente. Mostrando un entendimiento acorde al representación de la gráfica que han obtenido. Asimismo, la representación del perfil de humedad es congruente con la relación que establecen entre el cambio de la humedad del coloide en el espesor de la muestra según el tiempo.

A través de las respuestas a las preguntas del investigador, se reconocen ideas acerca del concepto del infinito y el acercamiento de este concepto con el comportamiento del fenómeno, al referir que es necesario un tiempo muy grande para que la muestra transfiera todo el líquido de su interior o bien que alcance un límite en el contenido de humedad, provocando un límite en la sequedad de la muestra.

De esta forma, las representaciones de los estudiantes, reflejan un entendimiento canónico algorítmico al establecer condicionamientos que los conducen al comportamiento gráfico que presenta la humedad con el tiempo.

Representación canónica no-algorítmica

Para continuar con el cuestionamiento anterior, el investigador se dirige al grupo con más preguntas que pueden ayudar a los estudiantes a relacionar la humedad mínima que se obtiene en el coloide experimentalmente y la cantidad mínima de humedad que se podría obtener teóricamente mediante los límites de la curva que han graficado. En las respuestas a dicho cuestionamiento se puede esperar que representen estas relaciones a través del límite de la función X(t) cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to t^*$.

Si las condiciones de secado lo permitieran y el tiempo fuera mucho muy grande ¿Cuál sería valor límite al que llegaría la humedad de la muestra?

Los estudiantes indican que podrían llegar al cero, en condiciones ideales.

Para las condiciones que manejaron en el secador. ¿Cuál es valor límite en la humedad de la muestra?

Los estudiantes dan como respuesta 2.19 lb y lo escriben

¿Cuál sería el límite en el contenido de humedad de la muestra si t es infinito y el equipo operará en las mismas condiciones de secado?

Nelly contesta que sería el mismo. De 2.19 lb y sería cero si se pudieran cambiar las condiciones

Establezcan una o varias relaciones matemáticas que ayuden a expresar los límites que están reportando?

Los estudiantes hablan entre ellos y finalmente no realizan ninguna representación.

En las respuestas a estas preguntas, se reconocen representaciones canónicas, al mostrar entendimiento sobre los límites en la cantidad de humedad que presenta la muestra en un tiempo determinado experimentalmente y el límite ideal al que podría llegar la muestra si se tuvieran las condiciones para alcanzarlo, incluso lo escriben. Sin embargo no representan mediante expresiones matemáticas dicho entendimiento. De tal forma que las representaciones son categorizadas como canónicas no algorítmicas.

Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico

Este tipo de representación se presenta en las actividades dirigidas al calcular y relacionar el área bajo la curva de X(t) con la cantidad de agua transferida en el secado de la muestra.

Para calcular el área bajo la curva de X(t), los estudiantes representan la división de la línea del tiempo en intervalos de 10 minutos cada uno, formando rectángulos inscritos en la gráfica obtenida. La altura de los rectángulos la representan por $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_3)$…..$X(t_{11})$. La base de cada uno de ellos la establecen de 10 minutos. Asimismo, representa el área de cada rectángulo de acuerdo a la expresión convencional para calcular el área de un rectángulo: A = bxh.

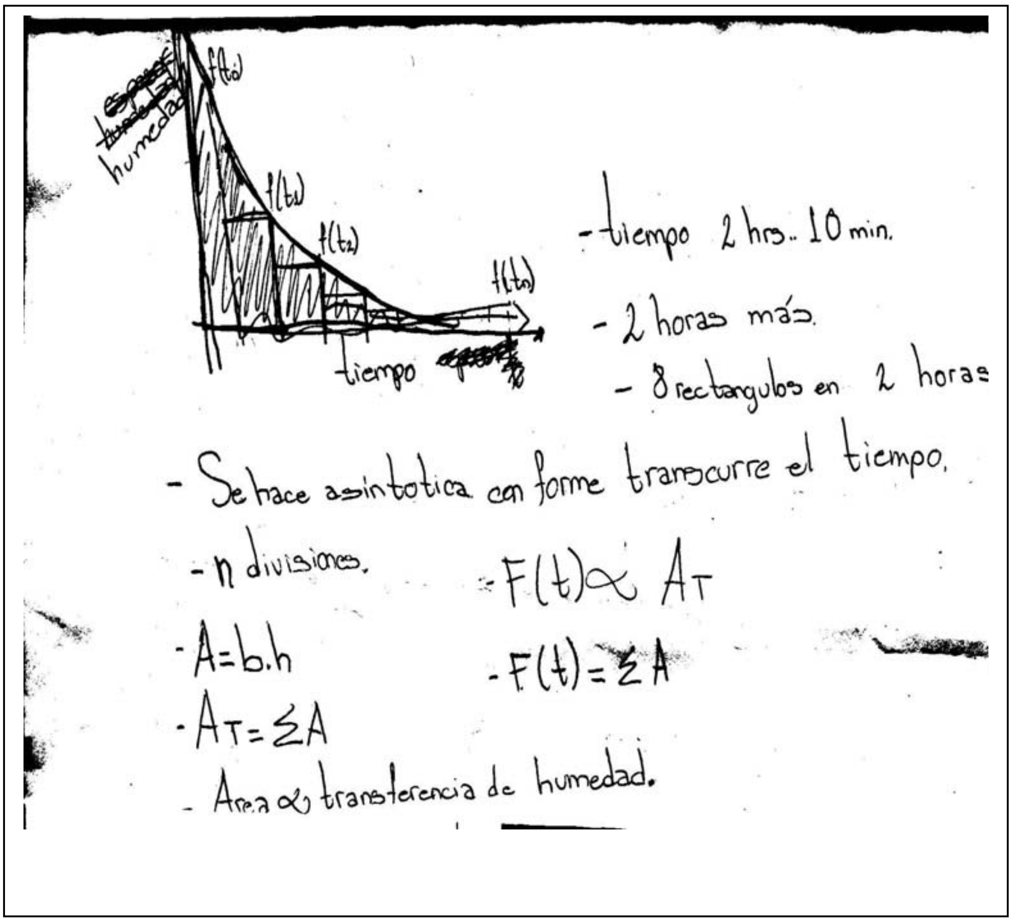


Fig. 34. Representación canónica algorítmica, basada en un esquema de solución no algorítmico. Determinación del área bajo la curva de humedad del coloide

En sus representaciones se deja ver un entendimiento canónico sobre que la curva es una función X que depende del tiempo y que al dividir el intervalo de este, están dividiendo el tiempo utilizado en el secado, para obtener incrementos el cual representan por Δt en el eje de las “x” en la gráfica. Así forman rectángulos inscritos en la curva para calcular el área de cada uno de ellos y después calcular el área total con la suma de estas áreas.

Al terminar de calcular el área, el investigador pregunta:

¿Qué relación tiene el área que han obtenido con el secado del coloide?

Ubaldo contesta que el área es proporcional a la cantidad de líquido transferido.

¿Cómo expresan matemáticamente esta relación?

Nelly escribe: $X(t) \propto A_t$, $X(t) = \sum A$ y $A \propto$ transferencia de la humedad.

¿Cuál es la cantidad de líquido transferido en 120 minutos, en 170 minutos y en un tiempo mucho mayor a 170 minutos?

Los estudiantes calculan las cantidad mediante diferencia de peso y Nelly contesta.

-Para 120 minutos es de 0.012 lb, después para 170 minutos fue de 0.022 lb y para un tiempo mayor es de 0.024 lb

Aunque los estudiantes han calculado el área bajo la curva y han relacionado dicha área con la cantidad de líquido transferido, cuando se les hace esta última pregunta, ellos responden en base al cálculo de la diferencia de peso de la muestra, sin relacionar una porción del área que comprende un intervalo de 120 minutos, para dar la respuesta, mostrando de esta manera, un entendimiento canónico al relacionar por un lado, el resultado del área con la cantidad de transferencia de líquido de la muestra en el secado, que refleja un esquema de entendimiento que corresponde a un significado congruente con las actividades que conforman la tarea en esta situación, incluso con la idea de la estabilidad del proceso y el equilibrio en el fenómeno. Por otro lado, el esquema de solución es no algorítmico, al calcular la cantidad de líquido transferido por diferencia de peso en la muestra, sin tomar en cuenta las áreas correspondientes que resultan en dichas condiciones.

Otro aspecto identificado en su representación, es la imitación de la simbolización formal de las relaciones implícitas en el cálculo del área y su relación con el fenómeno, indicando:

A = b.h, $A_t = \sum A$, entonces si: $X(t) \propto A_t$, $X(t) = \sum A$ y $A \propto$ transferencia de la humedad.

El desglose de las representaciones en esta situación es la siguiente

1. Representación canónica algorítmica

Esquema de entendimiento:

- Canónico: Se presenta un esquema entendimiento de los problemas de acuerdo al planteamiento de la situación y hacia el propósito de la misma, al mostrar entendimiento en la construcción tanto de la curva X(t), como del perfil de humedad y la relación que tienen con el comportamiento del fenómeno y el tiempo teóricamente infinito para estabilizar su proceso.
- Propósitos: 1) Construir gráficamente el perfil de humedad que representa el cambio de humedad en función del tiempo y espesor de una muestra, a partir de datos experimentales. 2) Construir gráficamente la curva X(t) a partir de datos experimentales. 3) Encontrar la cantidad de agua transferida en el proceso de secado, mediante el cálculo del área bajo la curva de X(t).

Esquema de solución:

- Algorítmico: 1) Relaciona los datos experimentales de secado para obtener las curvas de las funciones que representan el cambio de humedad de la muestra en función del tiempo y el perfil de humedad en función del espesor y del tiempo, mediante una pareja de ordenadas de la forma (t, X) cumpliendo con una regla de condición de orden = X(t). 2) Recurre a una expresión matemática para encontrar el área bajo la curva de la función X(t) y la relación que establece entre esta área y la cantidad de agua transferida en el proceso, es de proporcionalidad.

Invariantes:

- Concepto del infinito
- Relaciones matemáticas: R = {(t, X) / t, X cumplen con un regla de orden = X(t)
- Área de un rectángulo
- Área bajo la curva de una función mediante la suma de las área de los n rectángulos inscritos en esa curva.

2. Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico

Esquema de entendimiento

- Canónico: El esquema de entendimiento refleja, comprensión acerca de la cantidad de líquido transferido en el fenómeno de transferencia de masa
- Propósitos: Encontrar la cantidad de agua transferida en el proceso de secado, mediante el cálculo del área bajo la curva.

Esquema de solución

- No algorítmico: El grupo trata de resolver los problemas de acuerdo a la información que puede obtener experimentalmente, la cantidad de agua transferida en el secado la obtienen según la diferencia de pesos al iniciar y terminar el secado para un cierto intervalo de tiempo. La cantidad de humedad en equilibrio, la relacionan con el último valor de humedad obtenido en el proceso y lo que visualiza en la gráfica de la curva X(t) y el perfil de humedad
- Algorítmico: La cantidad de líquido transferido la calculan por la suma de las áreas de los rectángulos que conforman el área bajo la curva de X(t)

Invariantes:

- Área bajo la curva de una función mediante la suma de las áreas de los n rectángulos inscritos en esa curva.
- Transferencia del líquido proporcional al cambio de humedad del coloide,
- Estabilidad en el cambio de humedad con el tiempo

3. Representación canónica no algorítmica

Esquema de entendimiento

- Canónico: El esquema de entendimiento refleja, comprensión de los problemas acerca de la estabilidad que alcanza el fenómeno experimentalmente y en forma teórica
- Propósitos: Establecer el límite de la función cuando $t \to t^*$ y $t \to \infty$ para obtener la estabilidad en el fenómeno.

Esquema de solución

- No algorítmico: El grupo relaciona la cantidad mínima de humedad que presenta el coloide para ese experimento y la cantidad mínima de humedad que se podría obtener teóricamente. La relación entre este cambio de humedad y la cantidad máxima de agua transferida, las establecen mediante el comportamiento de la gráfica, la observación del fenómeno y la información experimental. Pero nada lo hace mediante los límites de la función X(t) cuando $t \to t^*$ y $t \to \infty$.

Invariantes:

- No algorítmicos: Límites que alcanza el fenómeno en la estabilidad del proceso.

Conclusión

Las relaciones necesarias para establecer la vinculación entre los datos obtenidos experimentalmente y el comportamiento del fenómeno en relación con el tiempo de secado y el cambio de espesor de la muestra de coloide en el perfil de humedad, requieren reconocer las curvas que describen el comportamiento del cambio de humedad de la sustancia y la transferencia del líquido que proviene del coloide. Al obtener la curva que representa a la función correspondiente a dicho comportamiento, se puede calcular el área bajo la curva, proporcionando así, la cantidad de líquido que se transfiere a través de la sustancia y los límites de esta función en términos de la estabilidad a la que llega el fenómeno.

Estas relaciones, el grupo, las entiende, las establece y las muestra en sus representaciones, que en su mayoría están dadas por respuestas que corresponden a su formación. Los estudiantes recurren a cálculos aritméticos y datos experimentales sin llegar completamente a la formalización matemática en las simbolizaciones y el lenguaje que utilizan para discutir y describir el fenómeno.

El desenvolvimiento del grupo se puede considerar bueno, ellos tienen disposición para interactuar, se encuentran motivados y con una actitud expectativa por conocer más, o con la incertidumbre de que es lo que sigue, de qué más se puede analizar en el fenómeno. Un fenómeno como este, con el que ellos están familiarizados pero no, muy claro en términos del significado que le da la matemática.

En conclusión, el conocimiento del grupo se engloba en los siguientes resultados:

1) Analizan un proceso de secado cuyo comportamiento lo describen por una curva de tipo decreciente en el tiempo, incluso cuando no estén utilizando el secador (ellos lo comprueban porque dejan una muestra secando varias horas más y registran datos para obtener una gráfica decreciente en el tiempo.

2) A partir de la curva obtenida, calculan la cantidad de líquido transferido en un intervalo de tiempo, mediante el cálculo del área bajo la curva de X en t, para ese intervalo de tiempo a través de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos en esa porción de la curva.

3) Construyen un perfil de humedad, relacionando el cambio de humedad en la sustancia con la posición en el espesor de la muestra y el tiempo de secado.

4) tienen conocimiento sobre los límites que alcanza el fenómeno y su relación con la estabilidad del proceso de secado en un tiempo que teóricamente es infinito.

5) La variación en sus representaciones, registran representaciones, todas canónicas algunas del tipo algorítmico y la mayoría no algorítmicas.

6) Las invariantes operatorias que se identifican son: construcción de gráficas $X(t)$ y $X(x, t)$, determinación del área bajo la curva mediante la suma de n rectángulos

inscritos en la curva, conceptuaciones del infinito y la estabilidad y equilibrio en el fenómeno.

TERCERA SESIÓN:

Situación 3. Determinación de la función que representa la curva del cambio de humedad con el tiempo dada por X(t) y su representación mediante una serie de potencias

La tarea en la situación 2, marca las actividades a realizar en la situación 3. Una vez que se cuenta con la curva X(t) que define el comportamiento del fenómeno de transferencia de masa con el tiempo de secado, las actividades en esta situación, tienen la finalidad de que el grupo determine primeramente la función matemática X(t) correspondiente a la curva, a través de solucionar la ecuación diferencial que modela el cambio de humedad decreciente en el tiempo de secado. Posteriormente, al tener la función X(t), se busca que el grupo construya la representación de esta función, mediante una serie infinita de potencias, con el propósito de introducir a los estudiantes en el terreno de las series y abrir el terreno para la actuación de los estudiantes en el campo conceptual de la serie de Fourier.

La tarea desarrollar comprende las siguientes actividades:

1. Según el comportamiento de la curva que representa la cantidad de humedad del coloide en un tiempo t, dada por X(t). Determinar la expresión matemática que corresponde a dicha función.
2. Vincular el cambio de humedad con el cambio en el tiempo y el contenido de líquido en el coloide.
3. Expresar matemáticamente la relación anterior.

4. Relacionar la constante física K_g, especifica del líquido contenido en el coloide con la expresión que han escrito en el punto 3.
5. Expresar la ecuación diferencial que representa el comportamiento del cambio de humedad del coloide en función del tiempo en que es sometido al proceso de secado.
6. Encontrar la función general que satisface a la ecuación diferencial
7. Encontrar la función particular que satisface la ecuación diferencial. Utilizar el dato de la cantidad de humedad inicial del coloide en la muestra antes de someterse a secado.
8. Graficar la función particular hallada y describir sus características
9. Comparar la gráfica anterior con la curva correspondiente a X(t).
10. A partir de la función particular, hallar el contenido de humedad en equilibrio y comparar el valor obtenido experimentalmente y el que aparece en la curva de X(t).
11. A partir de la función particular, hallar el límite en el contenido de humedad en equilibrio.
12. Determinar la serie que representa a la función X(t), utilizando una serie de potencias como la siguiente:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (t-c)^n = f(c) + f'(c)(t-c) + \frac{f''(c)}{2!}(t-c)^2 + \ldots + \frac{f^n(c)}{n!}(t-c)^n + $$

…considerar que t = c, correspondiente a un valor de t en el intervalo de continuidad de la función X(t).

13. Graficar la serie obtenida considerando 4 términos de la misma
14. Graficar la serie obtenida considerando 10 términos de la misma
15. Graficar la serie obtenida considerando n términos de la misma

La determinación de la función que corresponde a la curva X(t) y la serie de Taylor que la representa, implica el conocimiento de conceptos relativos a las ecuaciones diferenciales y a las series de potencias, en vinculación con la transferencia de masa. A través de relacionar estos términos matemáticos con el comportamiento del fenómeno en el secado de un coloide, se obtiene las características de condiciones de equilibrio que lo definen.

Para hallar la expresión de la función X, es necesario considerar que existe una curva X(t) cuya simbología matemática se desconoce. Sin embargo prevalece el comportamiento de la curva, aunado al fenómeno, de tal manera, que su descripción se puede realizar mediante el modelo matemático que representa dicho comportamiento. Es decir, la función que representa el cambio de humedad X en el coloide en un tiempo t, se expresa a través de una derivada de primer orden: dX/dt, este cambio a su vez, es proporcional a la cantidad de líquido contenida en la sustancia, que viene siendo la humedad que resulta de dicho cambio.

Así, dX/dt = cX. Donde c es una constante de proporcionalidad que en este caso esta dada por c = K_g siendo la constante física especifica del líquido contenido en el coloide y que es el que se transfiere. Como la humedad disminuye con el tiempo, entonces el cambio dX/dt es negativo y en consecuencia K_g también lo debe ser. Por tanto: dX/dt = K_g X es la ecuación diferencial lineal de primer orden que representa el comportamiento del cambio de humedad del coloide en función del tiempo en que se somete al secado. El dar solución a esta ecuación diferencial, implica una integración en términos de t y en términos de X con K_g constante.

La solución corresponde a la función exponencial: X(t) = $Ce^{K_g t}$, donde C es una constante arbitraria que le da el carácter de solución general a la ecuación diferencial. Para encontrar la solución particular que satisface la ecuación, se sabe que la cantidad de humedad en cierto tiempo t depende de la contenido de humedad inicial X(0) = X_0. Recordando que X_0 el valor inicial del contenido de humedad del coloide para un tiempo t = 0, que se puede expresar por X(0) = X_0. La expresión anterior es la condición inicial del proceso de secado y se utiliza para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial: X(0) = $Ce^{K_g(0)}$ = X_0 por tanto C = X_0 y la solución particular es X(t) = X_0 $e^{K_g t}$. Entonces, si para una de las muestras de coloide el contenido de humedad es de $X_0 = 8$ y $k_g = 0.0098$, correspondiente a la constante física del líquido contenido la muestra, se tiene que la gráfica que proviene de estos datos es:

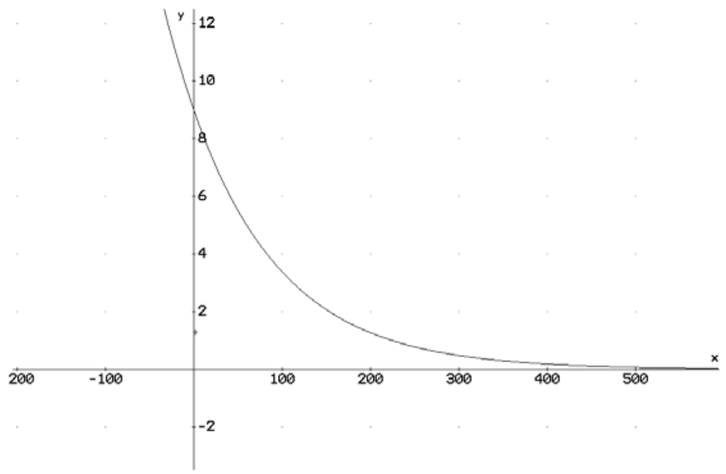


Fig. 35. Gráfica de la función $X(t) = X_0\, e^{K_g t}$.

Lo cual debe coincidir con la curva obtenida mediante de la relación de los datos experimentales.

Para hallar las condiciones de equilibrio en el secado a partir de esta función basta con establecer tiempos para determinar contenidos de humedad hasta que el cambio en esta propiedad ya no sea significativo y se establezca el valor de X para el cual el proceso ha llegado al estado estable y en el cual X ha llegado al equilibrio y es representando por X^*. Matemáticamente, las condiciones de equilibrio se pueden definir al conocerse la función que representa el cambio de X con el tiempo t dada por: $X_0\, e^{K_g t}$.

Bajo ciertas condiciones de secado con $t = 120$ minutos, el valor de X^* tiene un valor de 6.55034, Si las condiciones cambian, es posible obtener con $t = 300$ minutos: $X^* = 1.87$. Considerándose este último valor, como la humedad en equilibrio total, ya que a partir de un tiempo mayor el registro del cambio presenta poca variación. Teóricamente, el valor alcanzado en el contendido de humedad sería de cero quedando una sustancia completamente seca y, cuya expresión matemática estaría dada por: $\lim_{t \to \infty}(X_0\, e^{K_g t}) = 0$.

Ahora bien, en el caso de la determinación de la serie de Taylor que representa a la función obtenida $X(t) = X_0\, e^{K_g t}$ y que corresponde a una curva decreciente con el tiempo, se puede decir, que la suma de una serie de potencias cuya expresión matemática es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, puede definir una función f cuando su dominio es el intervalo de convergencia de dicha serie. Lo anterior significa , que el dominio de f es un intervalo abierto que contiene a c. Explícitamente, para cada x en ese intervalo se define f(x) igual a la suma de la serie:

$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots\ldots$ Entonces si f es una función definida de esta manera, se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ es una representación en serie de potencias de f(x) o bien que la serie de potencias representa a f.

Para hallar los valores de a_n, la función f debe ser derivable n veces y evaluable en c, de tal forma que $a_n = \frac{f^n(c)}{n!}$ y la función se represente por:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (t-c)^n = f(c) + f'(c)(t-c) + \frac{f''(c)}{2!}(t-c)^2 + \ldots + \frac{f^n(c)}{n!}(t-c)^n +$$

Este conocimiento, es relacionado con la serie de potencias que representa a la función $X(t) = X_0\, e^{K_g t}$ de la forma:

$$X(t) = X_0\, e^{K_g t} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n (t-c)^n = X(c) + X'(c)(t-c) + \frac{X''(c)}{2!}(t-c)^2 + \ldots\ldots + \frac{X^n(c)}{n!}(t-c)^n + \ldots\ldots\ldots$$

La serie anterior, corresponde a una serie de Taylor conformada por funciones que provienen de las derivadas sucesivas de X(t) y cuya suma infinita representa a esta función para un valor del tiempo t = c que esta contenido en el intervalo de continuidad de esta función.

Las derivadas n-ésimas para las condiciones manejadas en la curva de X(t) están dadas por:

$$X(t) = 8\ e^{-0.0098(t)} \qquad X'(t) = \frac{-49e^{\frac{-49t}{5000}}}{625} \qquad X''(t) = \frac{2401e^{\frac{-49t}{5000}}}{3125000}$$

$$X'''(t) = \frac{-117649e^{\frac{-49t}{5000}}}{156525000000} \qquad X''''(t) = \frac{5764808e^{\frac{-49t}{5000}}}{78125000000000} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Entonces, la serie de Taylor que representa a X(t) estaría dada por una suma infinita de funciones de potencias como la siguiente:

$$X(t) = 8\ e^{-0.0098(t)} - \frac{-49e^{\frac{-49t}{5000}}}{625}(x-c) + \frac{2401e^{\frac{-49t}{5000}}}{3125000}\frac{(x-c)^2}{2!} - \frac{-117649e^{\frac{-49t}{5000}}}{156525000000}\frac{(x-c)^3}{3!} + \frac{5764808e^{\frac{-49t}{5000}}}{78125000000000}\frac{(x-c)^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots$$

Para valores de c = 0, 10, 100 y 300 minutos (valores que corresponden al intervalo de continuidad de t en X(t) la gráfica correspondiente a esta serie es:

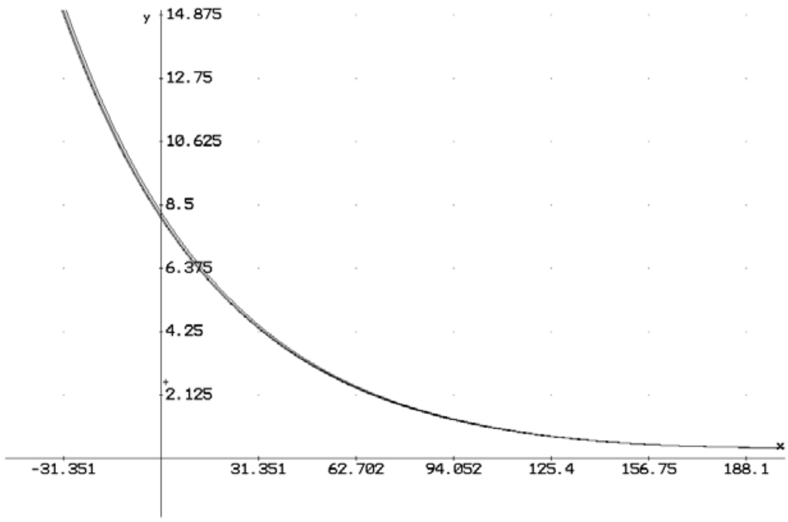


Fig. 36. Gráfica de la serie de Taylor que representa a X(t)

Las derivadas enésimas de X(t) y su evaluación para un valor de t, muestran que ésta es representada por una serie de potencias que converge a la función X(t). Por tanto, la suma de la serie de Taylor que corresponde a esa serie de potencias, converge a X(t) y es absolutamente convergente para todos los valores de t. En la gráfica se puede observar la aproximación de la serie a la función.

Así, dado un valor de t>c, se establece una serie numérica cuya suma da como resultado el valor en el contenido de humedad X para ese tiempo t. Con esto, es posible determinar las condiciones de equilibrio del fenómeno. Obteniendo que por ejemplo, para cuatro horas de secado, la suma de la serie reporta un valor de 5.8351

Entonces, bajo estos resultados, se puede decir que existe una serie de Taylor cuya suma representa a la función $X(t) = X_0 \, e^{K_g t}$ y que describe el cambio de humedad del coloide en el tiempo de secado.

De esta manera, los elementos matemáticos y de contexto que prevalecen en esta situación, engloban los siguientes teoremas y conceptos:

- Cambio de humedad del coloide para un tiempo t

- El concepto de derivada como un cambio de humedad para un tiempo t: dX/dt
- Ecuación diferencial lineal de primer orden que representa el comportamiento del cambio de humedad del coloide en función del tiempo en que se somete al secado: $dX/dt = K_g\ X$
- Solución general de la ecuación diferencial, dada por:
- Solución particular de la ecuación diferencial, dada por
- Condiciones de equilibrio en el fenómeno
- Límite de la función X(t) cuando $t \to \infty$
- Derivadas sucesivas de la función X(t)
- Evaluación de funciones en t = c
- Determinación de una serie de Taylor, dada la función X(t)
- Representación de X(t) mediante una serie de potencias dada por: $X(t) = X(c) + X'(c)(x-c) + X''(c)/2!\,(t-c)^2 + \ldots + X^n(c)/n!(x-c)^n + \ldots\ \ldots$
- Definición de X(t) igual a la suma infinita de funciones
- Relación de la suma de la serie de Taylor con el comportamiento del fenómeno
- Convergencia de una serie de Taylor a l función X(t)

Variaciones en la representación

Representación canónica no-algorítmica

Según los resultados obtenidos en las pasadas sesiones, el grupo cuenta con dos gráficas como resultado de la relación de los datos experimentales que se obtienen en el proceso de secado de un coloide; una que representa el cambio de humedad en función del tiempo X(t) y un perfil de esta propiedad X(x, t), en función del tiempo y de la posición de la humedad en el espesor de la muestra. Las representaciones de los estudiantes se han identificado como entendimientos canónicos en su mayoría y en muy pocas veces se han reconocen del tipo algorítmico.

Ahora, en la primera etapa de la sesión, la tarea es referida a la búsqueda de la función o expresión matemática que representa a la curva X(t) a través de la función que satisface la ecuación diferencial que describe al cambio de humedad en la sustancia en función del tiempo. En la representación de este comportamiento, se busca resaltar el concepto de equilibrio, mediante el límite que alcanza el contenido de humedad después de un tiempo en que el coloide ha sido sometido al secado. En el primer acercamiento en esta etapa, los estudiantes se preguntan sobre cuál es la expresión matemática correspondiente a la curva que han representado como X(t). El inicio de su actuación, se caracteriza por la especulación acerca de la función buscada, realizando varios cálculos y poniéndose de acuerdo entre ellos para encontrar dicha función. El seguimiento es, la propuesta de una expresión, hacer su gráfica y posteriormente hacer la comparación de la gráfica resultante con la curva X(t), para hallar posibles semejanzas.

Después de transcurridos 25 minutos de la sesión, los estudiantes saben que no han encontrado la función correspondiente a X(t), a pesar de que han hecho varios intentos. Así deciden dirigirse al investigador para mostrar y describir lo que han realizado hasta ese momento.

-Creemos que la función es algo así como 1/t ó 1/(t+1) ó 1/(t+2) o posiblemente 3/(t + 4), o algo parecido por son funciones decrecientes, pero al graficar nos queda la que la gráfica se da en dos partes, en dos cuadrantes, por eso creemos que es de otro tipo, porque el dominio es diferente . -Dice Ubaldo, mostrando sus resultados.

Los estudiantes plantean, que la expresión que representa a la función X(t) puede ser del tipo A/x+B, por la semejanza que tiene su gráfica. Considerando esa posibilidad, el grupo decide buscar A y B y lo hace por tanteos. Bajo esa idea realizan la gráfica y con ella se dan cuenta que la función X(t) esta definida en $t \geq 0$, mientras que la que ellos proponen, esta formada por dos partes: según dicen, primer cuadrante y tercer cuadrante o segundo cuadrante y cuarto cuadrante, dependiendo de signo del numerador que es A. La representación es la siguiente.

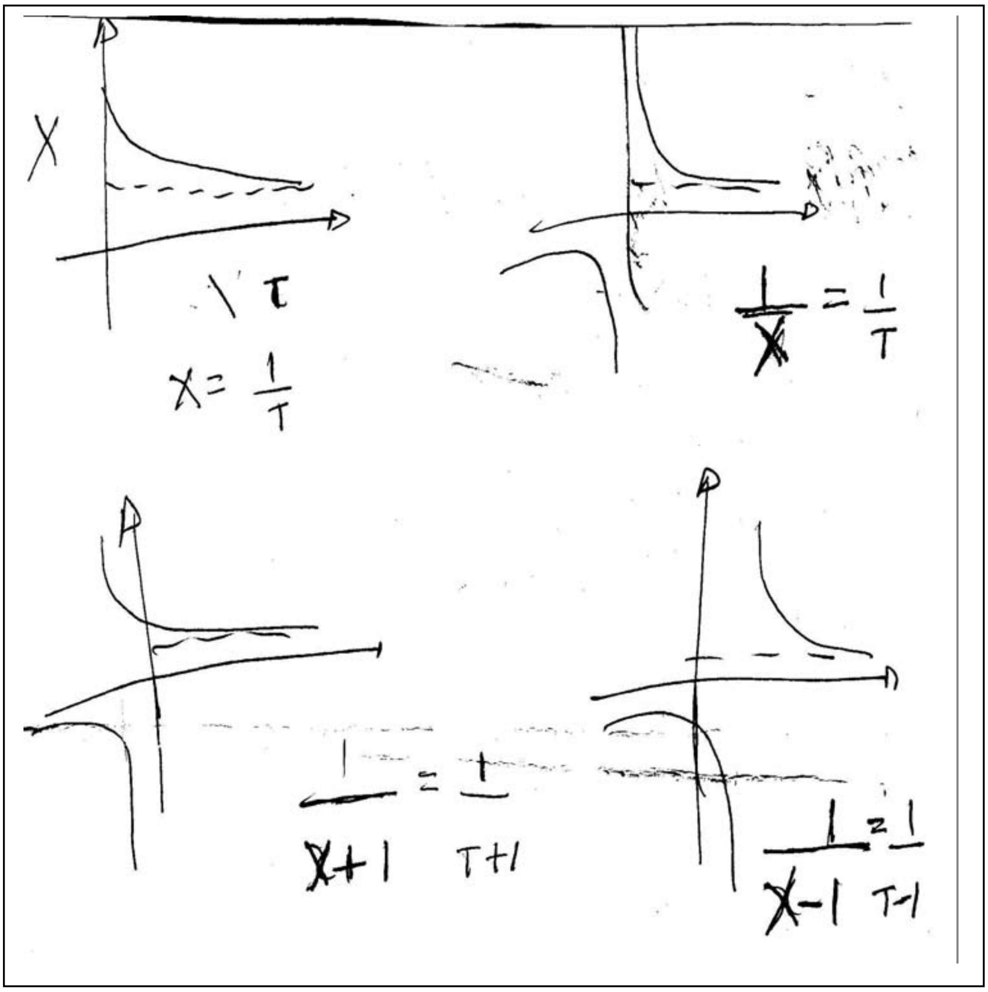


Fig. 37. Representación canónica no algorítmica, basada en un esquema de solución no algorítmico. Determinación de la función que representa a la curva de humedad del coloide

En medio de la inseguridad que muestra el grupo el investigador interviene con preguntas que, bajo su consideración pueden apoyar a los estudiantes en el desarrollo de esta actividad. Produciéndose una sesión andamiada por la conducción del investigador.

La preguntas y la descripción de la respuesta de los estudiantes en esta etapa, se muestra a continuación.

¿Qué intervalo de continuidad tienen las funciones que proponen? y ¿Cuál es el intervalo de continuidad para X(t)?

Ubaldo contesta que la de 1/t es de 0 hasta infinito para la parte de la curva del primer cuadrante y de 0 hasta menos infinito para la parte de la curva que esta en el tercer cuadrante. Mientras que la de 1/t+1 esta entre el -1 y el infinito y el -1 y el menos infinito. Para X(t) es solamente la curva del primer cuadrante y es de 0 hasta infinito. Además en el secado no podemos tomar tiempo negativos ni obtener humedades negativas.

¿Cuál es la diferencia entre la gráfica de estas funciones y la de X(t)?

Los estudiantes discuten entre ellos acerca de la respuesta que deben dar y finalmente, Nelly responde. -Es el intervalo de continuidad, porque para X(t) debe ser t mayor que cero, solamente que nada más se tome una parte de la función 1/t donde t debe ser mayor que cero. Y si no, no tenemos idea que función cumple con estos valores.

La representaciones y planteamiento del grupo se puede considerar congruente con la gráfica de X(t) bajo la perspectiva de que una función del tipo que ellos plantean, es decreciente y se encuentra definida en el intervalo $t \geq 0$ bajo ciertas restricciones. Y se dan cuenta de eso porque, el saber que no corresponde completamente al comportamiento de X(t) desechan la idea de que una función como 1/t no puede representar a X(t) ya que no es posible tener tiempos negativos ni humedades negativas. Sin embargo, el grupo no alcanza a percibir otra posibilidad para encontrar la función correspondiente.

Algo de los que ellos no se percatan y que les pude servir de argumento para desechar completamente la idea, es que la función A/(x+B), tampoco esta definida en $x = 0$ para $B = 0$, presentando una asíntota vertical en ese valor de x y para $B \neq 0$, una asíntota también vertical en $x = -B$ si $B > 0$ ó en $x = B$ para $B < 0$.

De esta manera, las representaciones que se identifican en esta etapa de la tarea son canónicas no algorítmicas.

Representación canónica-algorítmica

En esta incertidumbre y especulación para saber de que manera obtener o conocer cuál es la función que representa a X(t), se le pide al grupo que continúen con la actividad siguiente. En dicha actividad, las indicaciones son establecer la relación entre el cambio de humedad con el tiempo y el contenido de líquido en la sustancia. Los estudiantes representan el cambio de humedad con el tiempo mediante la diferencia de humedades con respecto a la diferencia de tiempos expresado como $\frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$, ubicando el cambio en un primer tiempo, el cual expresan mediante una derivada: dX/dt, incluso representan la gráfica de velocidad de secado R con el contenido de humedad X, donde R es obtenido a partir del cambio en la humedad, dado por las diferencias de humedades con el tiempo.

La vinculación entre el cambio y el contenido de humedad, la expresan por medio de un símbolo de proporcionalidad.

La representación se localiza en la figura 36.

Al buscar relacionar la constante K_g con el cambio de humedad, Nelly pregunta que si K_g es la constante de transferencia del líquido y que si pueden consultar cuanto vale. El conductor responde que sí. Entonces ellos buscan en una tabla que contiene estos valores y anotan que K_g= -0.0098 si el líquido que se transfiere es agua.

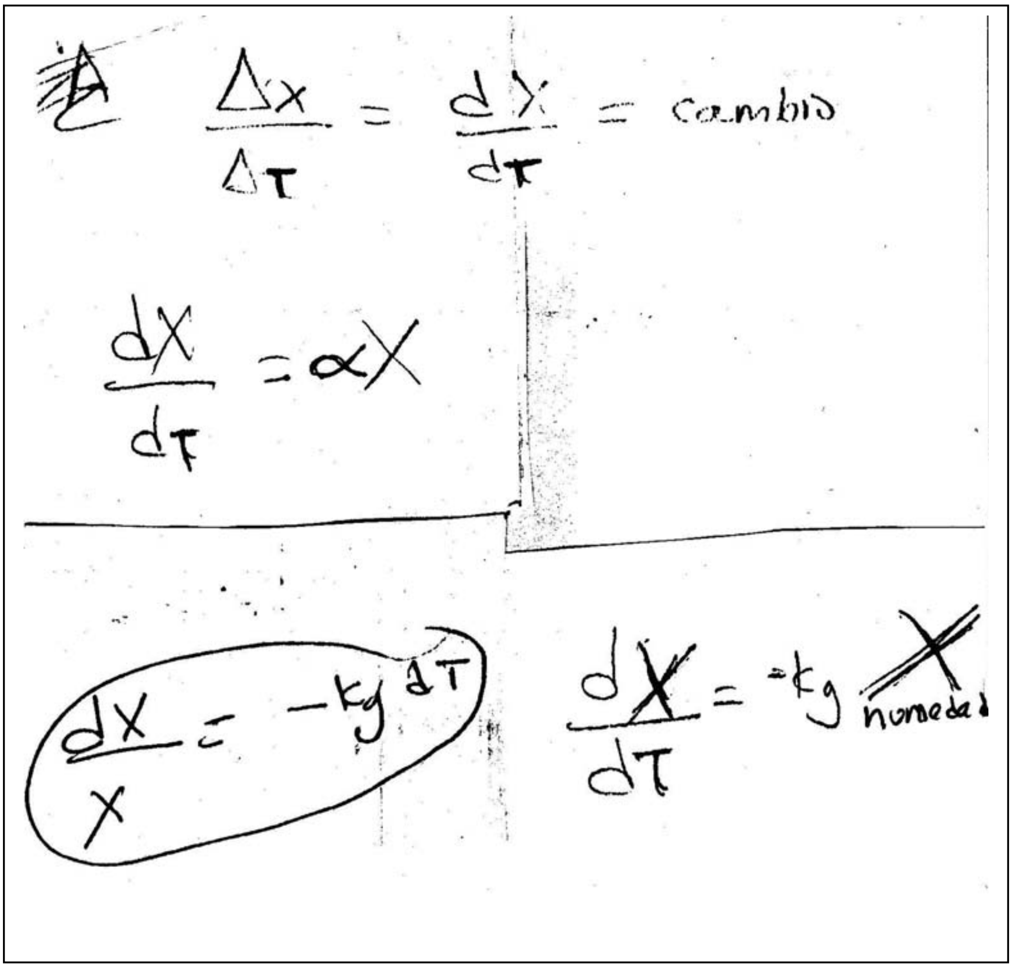


Fig. 38. Representación canónica algorítmica, basada en un esquema de solución algorítmico. Determinación de la ecuación diferencial que representa el cambio de humedad con el tiempo

Nelly le comenta al investigador que no saben como relacionar esta constante con el cambio de humedad y Ubaldo dice que el cree que esa constante es para compensar la constante de proporcionalidad.

A este comentario, el investigador responde.

El cambio de humedad dado por sus diferencias con respecto al tiempo, efectivamente, es proporcional al contenido de humedad X. La proporcionalidad, origina una expresión que relaciona estas dos partes. La constante que permite que el cambio y el contenido sean iguales, es precisamente la constante de difusión del líquido dada por K_g, que en el caso de que el líquido sea agua como sucede en el experimento, entonces su valor es K_g =- 0.0098.

A través de esta intervención, el grupo forma una ecuación a través de relacionar la derivada dX/dt, la constante K_g y el contenido de humedad X. Y reconoce que la ecuación que ha formado, corresponde a una ecuación diferencial y la expresa como tal

$$\frac{dX}{dt} = -K_g X$$

El desarrollo de la sesión continúa con la realización de las actividades para resolver la ecuación diferencial que han encontrado.
La tarea es encontrar la función general y particular que satisface a esta ecuación diferencial y graficar dicha solución.

Los resultados de estas representaciones, muestran que el grupo resuelve la ecuación diferencial por integración y encuentra la solución general en términos de una constante de integración. Después con los datos proporcionados, establecen la solución particular de la ecuación y mediante el uso de la calculadora graficadora representan la curva resultante. Finalmente a un lado, representan la curva que representa a X(t).

Las representaciones que llevan a cabo en esta parte son las siguientes:

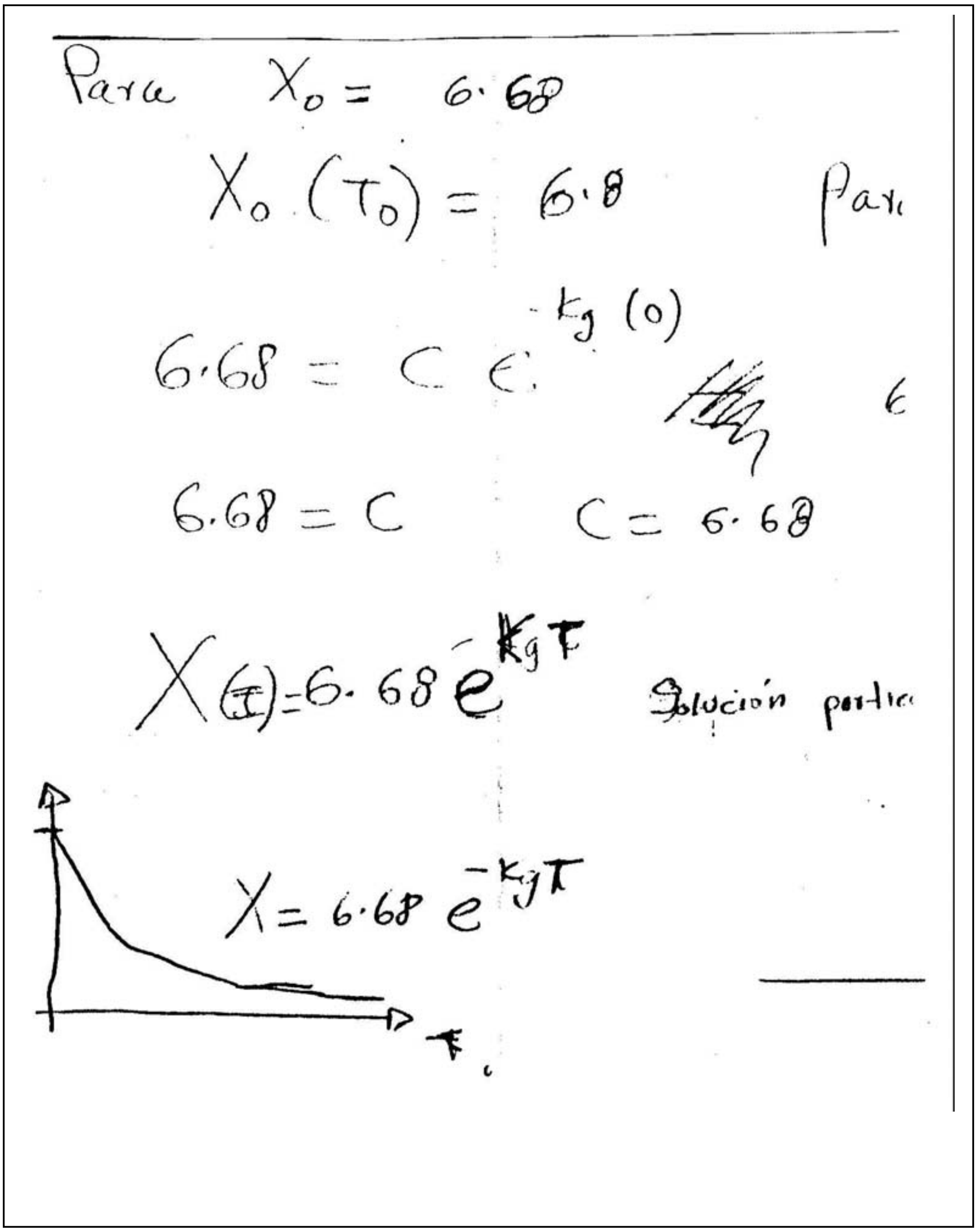


Fig. 39. Representación canónica algorítmica, basada en un esquema de solución algorítmico. Determinación de la solución de la ecuación diferencial que representa el cambio de humedad del coloide en el tiempo

En esta parte, el investigador les pregunta a los estudiantes lo siguiente:

¿Cuales son las características que encuentran en la gráfica de la función particular de la ecuación diferencial?

Ubaldo contesta que es una gráfica decreciente con asíntota y Nelly completa al comentario diciendo que es decreciente con el tiempo y que la curva presenta un etapa constante con el tiempo, que es donde se presenta la asíntota.

¿Existe alguna relación entre la gráfica de la función particular y la que ya habían obtenido de X(t)?

Después de que Nelly y Ubaldo las observan y mueven algunas teclas para observar con más detalle el inicio y terminación de la curva, Nelly contesta que se parece mucho que seguramente es la misma ya que solamente difieren en algunos valores pero es muy poco. El grupo acuerda el expresar mediante la función:

$X(t) = 6.68e^{-K_g t}$.

Para hallar el contenido de humedad en equilibrio, los estudiantes sustituyen el valor de t = 60 minutos = 1 hora y representan ese valor como $X(60) = 6.68e^{-K_g(1)}$.

Las representaciones del grupo en esta etapa de la situación, son representaciones del tipo canónicas algorítmicas. Los estudiantes aprovechan la información proporcionada en las indicaciones de las actividades y en la intervención del investigador para identificar y entender que el cambio en la humedad del coloide y su relación con el contenido de humedad en la sustancia, es representado a través de una ecuación diferencial de primer orden que depende del tiempo. Para hallar la solución de la ecuación diferencial, los estudiantes se valen del planteamiento de la misma, y realizan la separación de variables para utilizar la integración y determinar la función cuyo contenido de líquido X depende del cambio en la humedad que se da por el cambio en el tiempo t durante la operación de secado.

La igualdad entre la función encontrada por la integración de la ecuación diferencial y la función que representa a la curva X(t) es el resultado del reconocimiento de haber encontrado que X(t) esta expresada matemáticamente como $X(t) = 6.68e^{-K_g t}$ y que a partir de esta expresión ellos pueden calcular el valor de la humedad X para cualquier tiempo, incluso el tiempo en que se considera que la humedad de la muestra ha llegado al equilibrio.

Por tanto, los resultados en las representaciones arrojan entendimientos canónicos hacia el entendimiento del problema, acerca de que el cambio de una propiedad transferente con el tiempo, es representado por una ecuación diferencial y cuya solución proporciona la función sobre la cual se da el cambio. Así la solución representada por los estudiantes es congruente con su planteamiento al relacionar la solución o el resultado de la ecuación con la función X(t) obtenida experimentalmente.

Una vez que el grupo halla la expresión para la función X(t), las siguientes actividades, son un preámbulo para que encuentren una relación entre la representación anterior y la representación de la misma en una serie de potencias, esto es, considerando la posibilidad de que a partir de la expresión de la función X(t), se encuentre la serie infinita de potencias, cuya suma de funciones represente dicha expresión para un intervalo de continuidad de la misma, o bien dada la gráfica de una función, ésta puede aproximarse mediante la búsqueda de los coeficientes de la serie de infinita compuesta por funciones de potencias n.

En la primera parte de esta interacción, el grupo sigue el esquema indicado para conformar una serie de potencias, utiliza el algoritmo para derivar la expresión correspondiente a X(t) y posteriormente evalúan cada derivada para un dominio de X(t) en t = 10, 40, 100 y 200 minutos.

En la realización de las actividades que conforman el desarrollo en serie de la función X(t), los estudiantes utilizan la calculadora y representan una series con las derivadas obtenidas y evaluadas para t = 10 minutos

Las representaciones son las siguientes:

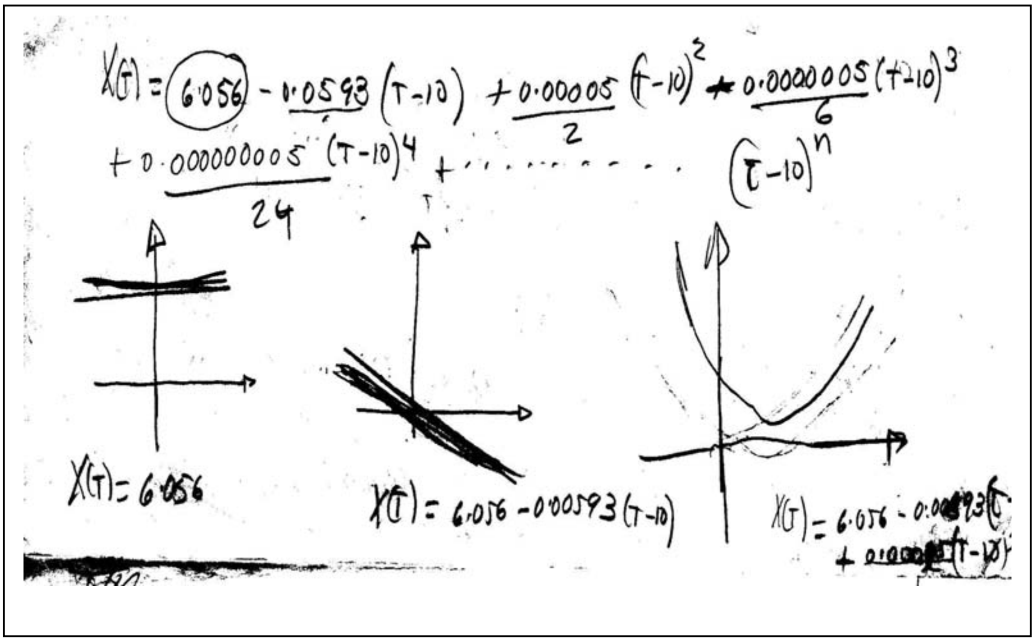


Fig. 40. Representación canónica algorítmica, basada en un esquema de solución algorítmico. Determinación de la serie de potencias que representa a la humedad del coloide en el tiempo

Las representaciones son canónicas algorítmicas por mostrar un entendimiento acerca la construcción de la serie correspondiente a un tiempo de 10 minutos, como valor contenido en el intervalo de continuidad, acorde a la expresión que representa a la función X(t) y el comportamiento del fenómeno estudiado.

Representación no canónica

Cuando se ha establecido la serie de potencias, derivada de la función X(t), lo importante, es que los estudiantes visualicen las curvas resultantes de la suma de la serie que han obtenido y comparen dichas curvas con la gráfica de la función X(t), de tal manera, que se pueda observar gráficamente que la suma de las funciones que conforman a la serie convergen a la función que representa a la curva correspondiente a X(t). Sin embargo, cuando la actividades indican graficar la serie con cuatro y más términos de la misma, los estudiantes a pesar de que ya cuentan con una serie, no saben como utilizar esa información y, vuelven a formar otra expresión donde cada término de la serie, es el resultado de utilizar un valor diferente de t = c. Igualmente para realizar la gráfica de la misma, representan una figura que no hace que se percaten de que la serie representa a X(t) o converge a X(t).

Las representaciones de la serie y su gráfica son categorizadas como no canónicas, al no mostrar un entendimiento acerca de la convergencia de la serie. Estas representaciones se localizan en la figura 41.

Aún con estos resultados el investigador pregunta a los estudiantes:

¿Para que valores de t, la serie representa a la función X(t)?

Nelly contesta que para ninguno ya que la gráfica no se parece a la de X(t). Ubaldo no contesta y pareciera que busca la respuesta en la calculadora porque continúa graficando.

¿Qué relaciones establecerían respecto a la gráfica de X(t), la función correspondiente a la solución de la ecuación diferencial lineal. Y, finalmente con la serie obtenida a partir de la función que representa a X(t)?

Ubaldo dice que la relación es $X(t) = 6.68e^{-k_g t}$ = curva X(t).

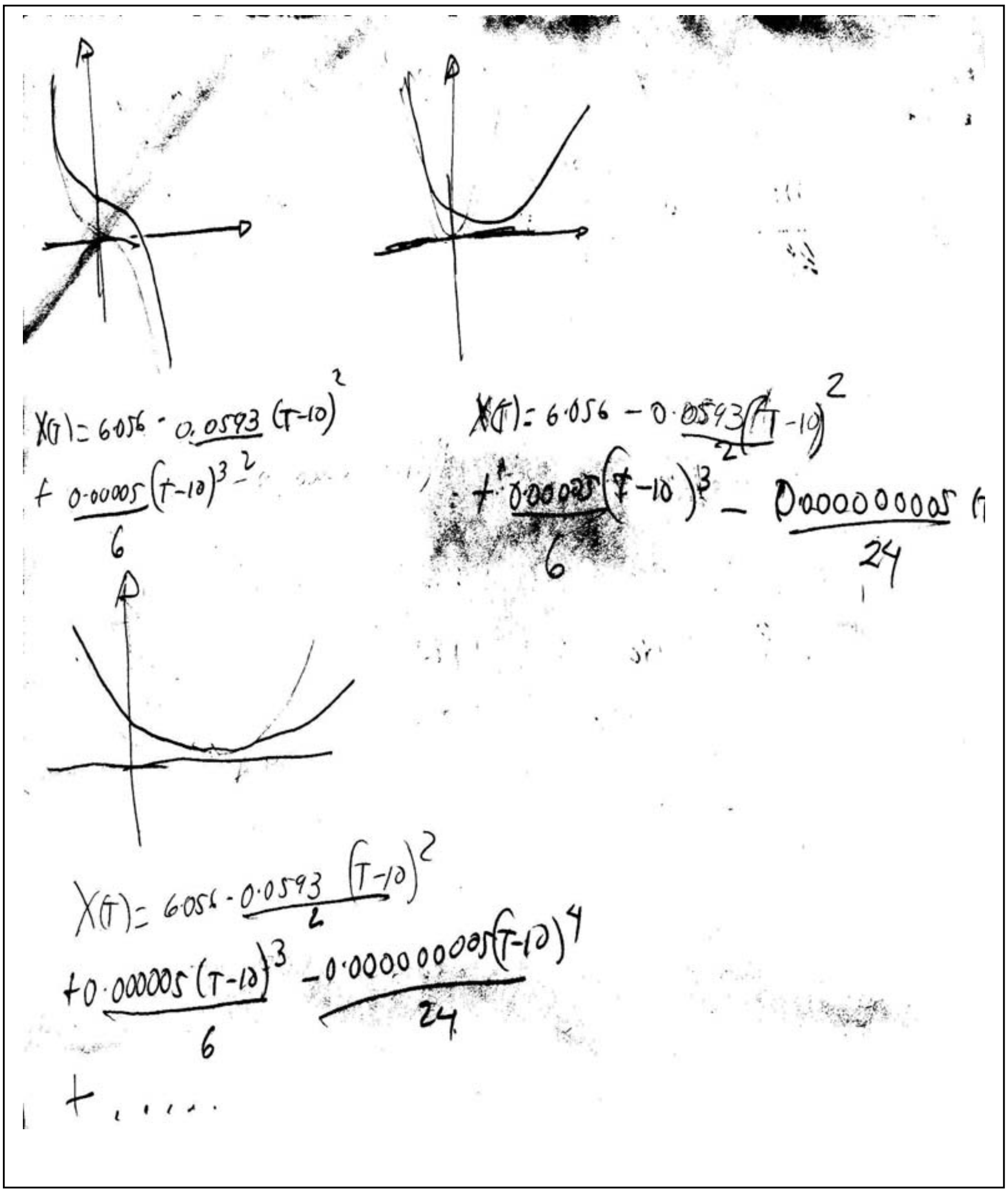


Fig. 41. Representación no canónica algorítmica, basada en un esquema de solución no algorítmico. Determinación de la curvas que representan a la suma de la serie de potencias

En el desarrollo de las actividades se puede identificar un predominio algebraico mostrado por los estudiantes cuando conforman la expresión de X(t) mediante una serie. A pesar de que ellos escriben que la función es igual a una serie, no representan gráficamente a la misma y no relacionan este desenlace, con que la representación de X(t) se pude realizar mediante una serie de potencias. Presentándose así, representaciones no canónicas por no corresponder a un entendimiento sobre el concepto de la suma infinita de la serie que converge a X(t) en todo el intervalo de continuidad de la misma función.

Sin perder de vista el objetivo de la situación, el investigador vuelve a intervenir con otras preguntas que pueden apoyar al estudiante en la construcción del concepto de convergencia de una serie de potencias y su relación con el fenómeno estudiado.

Las preguntas y la descripción de las representaciones de los estudiantes referidas a las mismas son las siguientes:

Hallar la suma de los dos primeros términos de la serie, después de los cuatro primeros, de los diez primeros y finalmente de los n términos de la serie utilizando un solo valor de c en todos los términos de la serie. Graficar cada suma.

Los estudiantes escriben c = 10 y t= 120 minutos, sustituyen en la serie y obtienen por medio de la calculadora, un valor numérico como resultado de la suma de los cuatro primeros términos y grafican este resultado, el cual representan por una línea recta de acuerdo a lo mostrado en la calculadora. Posteriormente, repiten los mismo para 60 minutos, 180 minutos, 600, con 1200 y finalmente representan que para $t = \infty$, entonces X(t) = 0. De tal forma que la representación gráfica muestra una línea recta para cada suma.

Las representaciones son las siguientes:

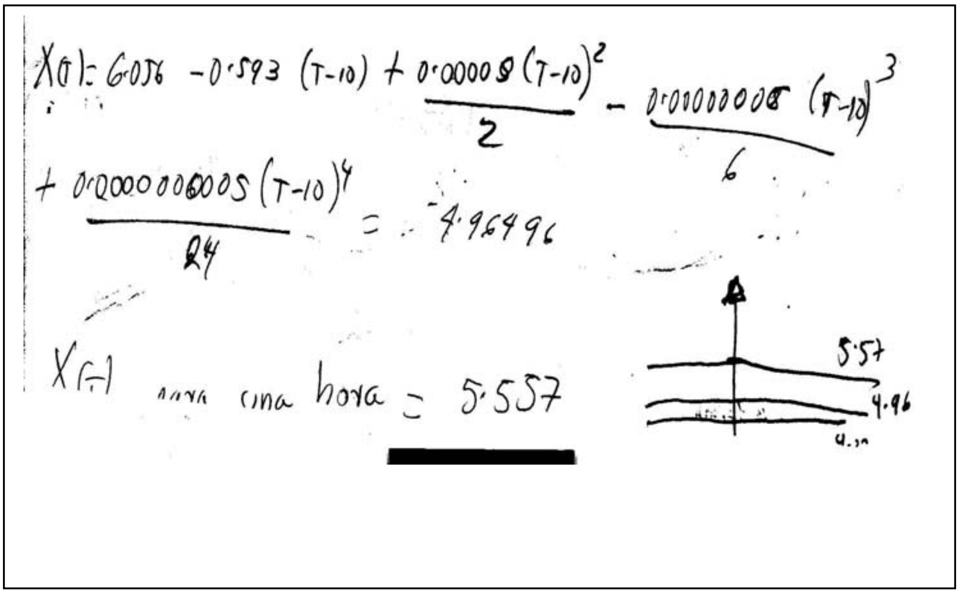


Fig. 42. Representación no canónica algorítmica, basada en un esquema de solución no algorítmico. Determinación de la curva que representa la suma de una serie de potencias

La respuesta del grupo, se da en base a relacionar la suma de la serie de funciones con la suma de una serie numérica sin percatarse nuevamente que la suma infinita de una serie constituye el conceptos de convergencia de una serie de potencias a una función que en este caso sería X(t).

Cuál es la convergencia de la serie cuando $t \rightarrow \infty$

Ubaldo contesta que la convergencia es la humedad para un tiempo muy grande y que puede ser de X = 0, si es que fuera posible extraer completamente el líquido de la muestra.

En esta respuesta se encuentra contenido el entendimiento acerca de que la serie puede representara la función X(t) y que su suma esta relacionando con la misma función, pero no vinculan la suma con la función sino con un valor límite de la función. La concepción que tienen acerca de la convergencia y la suma, es un valor numérico.

Establecer alguna relación entre la suma de los n términos de la serie, con la gráfica de los n términos de la serie .

Ubaldo señala que la suma de los 10 términos de la serie para t= 120 minutos y c = 10 minutos da como resultado 4.9648. Para 20 términos es de 4.9636 y las gráficas resultantes son rectas muy juntas. Por su parte, dice Nelly, que al sumar más términos van a encontrar el valor exacto al que llega la humedad, porque al utilizar 15 términos, el valor solamente varía en las últimas cifras.

Encontrar alguna relación entre la suma de la serie y la gráfica de la función que corresponde a X(t)

Los estudiantes dicen que la suma de la serie les da como resultado un valor contenido en X(t)

A partir de la serie, hallar el mínimo contenido de humedad en equilibrio de X(t para t = 180 minutos

Los estudiantes utilizan un tiempo de 180 minutos y encuentran el valor de la misma manera que lo hicieron cuando representaron la suma de la serie. Representando que el valor en equilibrio para ese tiempo, corresponde a 4.325 lb

¿Cuál es la diferencia entre este valor, y el que podrían encontrar al utilizar la expresión de la función que corresponde a X(t)?

Los estudiantes utilizan la función y evalúan y contestan que es casi igual, mostrando el resultado de 4.289 lb.

Si han contestado que el valor es casi igual, de qué manera me pueden decir que la función $X(t) = 6.68e^{-k_g t}$ que representa a la curva X(t) que obtuvieron experimentalmente, es igual a la suma de alguna de la serie que han encontrado?

Nelly se adelanta a contestar que son iguales solamente cuando se llega al equilibrio. Ubaldo no contesta.

Con esta última pregunta se da por terminada la sesión.

Aunque los estudiantes han dado respuestas a las preguntas, son notorias las dudas e informidad hacia la mismas. En su actitud se pude reflejar un entendimiento que no termina de concluir y que existe una relación que no han establecido y les impide tener la gráfica correspondiente a X(t). Los resultados reflejan una falta de entendimiento hacia el conocimiento de la suma de una serie de funciones y la relación que tiene esta con la función X(t), pero tal parece que los que detiene este entendimiento es revisar la simbología de la sumatoria que representa a la función dada por:

f(t) = $\sum_{n=0}^{\infty} f_n (t-c)^n$ en donde la variación la da n en cada término de la serie para un mismo valor de t, sin embargo ellos varían a t y a n para representar a la serie en términos de una suma de funciones. Otro aspecto que sobresale, es la falta de conocimiento acerca de la convergencia de una serie de potencias a la misma función que representan, encontrándose limitaciones para entender los resultados graficados.

De esta manera, el desglose de las representaciones en esta situación es la siguiente:

1. Representación canónica no algorítmica

Esquema de entendimiento

- Canónico: El esquema de entendimiento refleja, la comprensión acerca de que existe expresión asintótica y decreciente que representa a la función X(t) de acuerdo a su gráfica
- Propósitos: 1) Encontrar una expresión para la función X(t) dada su gráfica.

Esquema de solución

- No algorítmico: El grupo busca por tanteos una expresión cuya gráfica sea semejante a la de X(t). La semejanza la relaciona con funciones del tipo asintótico. Para ello, propone un clase de funciones, de acuerdo a esta característica y nota la diferencias entre las propuestas y la de X(t), pero no logra representar matemáticamente las diferencias y semejanzas para aceptar o descartar su idea

Invariantes:

- Dominio de una función, continuidad de una función, función decreciente y asíntotas.

2. Representación canónica algorítmica

Esquema de entendimiento:

- Canónico: Se presenta un esquema entendimiento acerca de la relación entre el cambio de humedad del coloide y la ecuación diferencial que representa dicho cambio, cuya solución proporciona la función correspondiente a X(t).
- Propósitos: 1) Establecer la ecuación diferencial que relaciona el cambio de humedad del coloide en función del tiempo de secado. 2) Hallar la expresión correspondiente a la función X(t) a partir de la solución particular de la ecuación diferencial establecida y comparar con la grafica de X(t)

Esquema de solución:

- Algorítmico: 1) En el establecimiento de la ecuación diferencial, el grupo utiliza el concepto de derivada como el cambio de humedad que sucede en un intervalo de tiempo. 2) Utiliza el algoritmo de la integración para dar una solución general a la ecuación diferencial. 3) Utiliza una condición inicial perteneciente al proceso de secado, para obtener una solución particular de la ecuación diferencial, siendo esta una función de tipo exponencial la cual representa a la función X(t)

Invariantes:

- El concepto de derivada como una razón de cambio, la relación entre esta razón de cambio y el cambio de humedad del coloide en función del tiempo para establecer una ecuación diferencial, el reconocimiento del tipo de ecuación diferencial para hallar su solución general, el uso de una condición inicial para obtener la solución particular de la ecuación diferencial y finalmente, la relación entre la solución de la ecuación diferencial con la expresión correspondiente a la función X(t)

3. Representación canónica-algorítmica

Esquema de entendimiento

- Canónico: El esquema de entendimiento refleja, la construcción de una serie infinita de funciones mediante la derivación de la expresión correspondiente a la función X(t)
- Propósitos: Establecer series de potencias que representen a la función X(t) como el cambio de humedad en función del tiempo, alrededor de algunos valores de t.

Esquema de solución

- Algorítmico: El grupo aplica el algoritmo de la derivación sucesiva para derivar a la función X(t) y evalúa dichas derivadas alrededor de un valor de t correspondiente al intervalo de la grafica de X(t). Finalmente con la evolución obtenida establece los coeficientes de la serie de potencias para formar una serie.

Invariantes:

- Relación entre la representación de una función f(x) mediante una serie de potencias y la posibilidad de representación de X(t) mediante una serie de potencias para X(t) en c = t, un valor del dominio correspondiente al tiempo de secado. Derivadas sucesivas, evaluación de una función dado un valor del dominio, obtención de los coeficientes de los términos que conforman a la serie de potencias.

4. Representación no canónica

Esquema de entendimiento:

- No canónico. El grupo no relaciona la suma de la serie con la convergencia de la misma a la función X(t). Los estudiantes presentan problemas para graficar la serie. Consideran que la variación en los términos de la serie es debida al valor de c y n. La relación que establecen entre la función y la serie, es a través de la suma de una serie numérica y cuya suma la relacionan con el equilibrio en el fenómeno. Consideran que la representación de X(t) mediante una serie tiene lugar únicamente en el valor en el equilibrio del fenómeno sin llegar a entender que la representación es en intervalo $t \geq 0$.
- Propósitos: La gráfica de una serie

Esquema de solución:

- El esquema de solución corresponde al significado no canónico atribuido a la relación que guarda la función X(t) con una serie de potencias. Al obtener la serie, el grupo no identifica, ni visualiza que esa serie representa a X(t) y por la tanto no establece la representación de una función mediante una serie de potencias y el intervalo en donde tiene lugar dicha representación

Invariantes:

- La suma numérica de una serie atribuida a la convergencia d la misma y a su vez al equilibrio en el fenómeno.

Conclusión

Esta situación comprende diferentes actividades que tratan de regular la acción del grupo hacia la representación del fenómeno de transferencia de masa del líquido que proviene del coloide, mediante el cambio en el contenido de humedad que la sustancia experimenta en cierto tiempo de secado, para continuar con la búsqueda de la expresión que representa a la curva X(t) y finalizar con la investigación de la serie de potencias que represente dicho cambio. En respuesta, a partir de la gráfica de la curva X(t) y las características que se presentan en la misma, los estudiantes modelan el fenómeno a través de una ecuación diferencial que contempla el cambio en el contenido de humedad X del coloide en un tiempo t y cuya solución es relacionada con la función correspondiente a la expresión buscada.

La relación se establece con el reconocimiento de la curva correspondiente a X(t) como una función cuyo dominio es el intervalo de tiempo y a la cual le corresponde un valor de humedad. Este comportamiento, es visualizado en una gráfica de tipo decreciente en la que se observa que la curva presenta una asíntota horizontal que es identificada como un aspecto característico del estado del equilibrio en el fenómeno cuando $t \to \infty$.

Con la información sobre la función X(t), el grupo lleva a cabo la etapa de las actividades dirigidas a buscar la relación entre la función y su representación mediante una serie. Sus representaciones muestran la obtención de una serie. La relación que establecen entre esta serie y la función se restringe a un valor numérico ligado al contenido de humedad en equilibrio.

Estos resultados marcan el desarrollo de los estudiantes en situación, cuya interacción permite analizar esquemas de entendimiento y solución a los problemas presentes en la tarea, resumiéndose en lo siguiente: 1) El grupo tiene información secuencial que le permite discutir y responder en su mayoría a las preguntas planteadas, bajo esquemas de entendimiento canónicos algorítmicos que reflejan la comprensión del problema sobre la existencia de una función que representa a la curva X(t) obtenida experimentalmente y establecer a su vez, la solución de la ecuación diferencial que representa el comportamiento del fenómeno conjuntamente con la relación con la función buscada. El mismo entendimiento se refleja en la obtención de una serie de potencias a partir de la función correspondiente a X(t), al derivar la función y evaluar dicha derivada para conformar los coeficientes de la serie. 2) No canónicos, al identificarse que el grupo en sus representaciones no relacionan la suma de la serie con la función que representa a X(t), determinándose en esta tarea, que los estudiantes conciben la convergencia de una serie, como un valor en el contenido de humedad al cual se llega en el equilibrio y que en la curva que representa a X(t) se manifiesta como una constante. De acuerdo al desempeño del grupo se puede observar, que aún así cuando los estudiantes representan que X(t) es igual a una serie, sus representaciones obedecen a una simbolización convencional ya que son capaces de entender que la función X(t) se puede simbolizar mediante una serie, pero no le atribuyen a este concepto, la posibilidad de describir completamente a dicha función mediante la convergencia de su suma. De este esquema no canónico se extrae dos esquemas canónicos: unos al reconocer que se puede conformar una serie numérica cuya suma converge al valor del contenido de humedad en equilibrio que aunque el conocimiento es restringido a una serie numérica, se llega a relacionar, serie y función o serie y curva correspondiente X(t). Y otro, al representar a ese contenido de humedad, como el valor que se alcanza a través de una suma infinita de términos de la serie.

En general la actividad del grupo deja entrever que existen relaciones entre la gráfica de X(t), la solución particular de la ecuación diferencial que representa el cambio de X en el proceso de secado y además la suma de una serie de potencias cuando el proceso ha llegado al estado estable y se alcanza un contenido de humedad que representa el equilibrio.

CUARTA Y QUINTA SESIÓN:

Situación 4. Comportamiento de la humedad en el coloide (Para un instante t y una posición x representado por la serie de Fourier)

La interacción del grupo en esta situación, tiene como antecedente su actuación en las anteriores sesiones de trabajo, en las que a lo largo de su desarrollo se les ha expuesto determinar y analizar en primer lugar, el comportamiento del fenómeno de transferencia de masa del líquido de un coloide a partir de las gráficas del cambio de humedad de esta sustancia en función del tiempo de secado y el espesor de la muestra a secar mediante los datos que ellos han obtenido experimentalmente en esta operación. En segundo lugar, determinar la función que corresponde a la gráfica que representa el cambio de humedad en el tiempo, dada por X(t), y nuevamente analizar aspectos del comportamiento del fenómeno, para continuar, a partir de esta función del cambio de humedad, con su representación en una serie de potencias. Todo esto, a fin de que los estudiantes visualicen esta representación a través de una suma infinita de funciones que conforman a la serie y que converge a la función establecida X(t), como antecedente a la tarea que el grupo se habría de enfrentar en éstas últimas sesiones.

Las actividades a realizar en la cuarta situación son divididas en dos reuniones de trabajo debido a que contiene diversas tareas referidas a conceptos del fenómeno en vinculación con la serie de Fourier. En general, la tarea planteada, contiene problemas que derivan de su actuación en las anteriores situaciones y buscan el reconocimiento del vínculo entre este concepto matemático y el cambio de humedad de un coloide.

El vínculo a medir, es dado a través de la representación mediante una serie de Fourier, de la función X(x, t) que satisface la variación de humedad en el tiempo y en la posición del espesor de la muestra de esta sustancia, de acuerdo a los dos cambios X(x) y X(t) que se producen. A su vez, dicha representación conlleva a establecer aspectos que definan al fenómeno en estudio.

Así, la situación se presenta en tres partes: En la primera, conocer la ecuación que modela el fenómeno de transferencia de masa al relacionar los dos cambios que suceden en el contenido de humedad de la muestra de coloide. En la segunda parte, establecer la solución a partir de las condiciones establecidas en la parte experimental. En la tercera, relacionar los conceptos matemáticos que definen a la serie de Fourier y al fenómeno conjuntamente, los cuales habrán de determinar el comportamiento de la transferencia de masa.

Con estas dos sesiones, se concluye la interacción de un grupo de enfoque en su acción en un campo conceptual integrado por cuatro situaciones que provienen del secado de un coloide, como medio para analizar su conocimiento, acerca del fenómeno de transferencia de masa mediante su representación en serie de Fourier.

El desglose de las actividades que conforman las tres partes de la tarea en esta situación es la siguiente:

Sesión 4

1. Buscar una ecuación diferencial que represente el cambio de humedad en el coloide que proporciona el perfil de humedad. Es decir, en términos de la posición del líquido en el espesor de la muestra “x” y del tiempo de secado “t”.
2. A partir de esta ecuación diferencial, determinar la función general que representa la humedad del coloide para cual posición del líquido en el espesor de la muestra “x” y del tiempo de secado “t”
3. Determinar la función particular que representa la humedad del coloide para cual posición del líquido en el espesor de la muestra “x” y del tiempo de secado “t”.
4. Describir la función particular en relación al cambio de humedad que se produce en el coloide durante el secado

Sesión 5

5. Graficar la función particular dejando fijo la posición del líquido en el espesor de la muestra y variando al tiempo

6. Graficar la función particular dejando fijo el tiempo y variando la posición del líquido en le espesor de la muestra
7. Comparar las graficas resultantes con la curva de X(t) y el perfil de humedad
8. Describir estos resultados en relación al cambio de humedad que se produce en el coloide durante el secado

Los problemas implícitos en las actividades a realizar, requieren desde conocimientos en ecuaciones diferenciales parciales, hasta conocimientos sobre la serie de Fourier como representación de la función que satisface a dicha ecuación.

En el estado inestable, la variación de la humedad en el coloide depende tanto de su posición x en el espesor como del tiempo de secado. Esta variación es representada a través de una ecuación diferencial parcial lineal: $\frac{\partial X}{\partial t} = K_g \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ que describe el proceso de transferencia de masa por difusión a través del cambio de humedad que sufre el coloide por la operación del secado.

Para obtener la solución de la ecuación es necesario plantear que la variación en la humedad obedece a la transferencia del líquido contenido en la muestra, bajo las siguientes condiciones: a) La transferencia del líquido se lleva a cabo por difusión a través del coloide, la constante de difusión se representa por K_g la cual es especifica del líquido que se difunde en el coloide y que se toma como constante en todo el secado = 0.0098pie^2/hora. b) Que la muestra tiene inicialmente un contenido de humedad uniforme, dado por X_0. c) Que al someterse la muestra de coloide a secado para un tiempo dado, esta se lleva a una nueva condición de contenido de humedad, la cual es constante durante todo el tiempo. Este contenido de humedad viene a representar el contenido de humedad en equilibrio X^*, indicando que bajo esas condiciones de secado, ya no habrá un secado posterior. Estas condiciones constituyen, las condiciones limitantes del fenómeno de transferencia de masa por difusión del líquido, que expresadas matemáticamente son:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{para todo t}$$

$$X_0 = X_{0_1} \quad \text{en} \quad x = \ell \quad \text{para t>0}$$

$$X_0 = X_{0_0} = 0 \quad \text{en} \quad t = 0 \quad \text{para} \quad -\ell < x < \ell$$

Las condiciones establecidas, permiten utilizar el método de separación de variables para encontrar la solución de la ecuación diferencial parcial. El método consiste en separar la función X(x, t) que representa la solución de la ecuación, en un producto de las dos funciones que conforma a X(x, t) dado por: X(x, t) = Z(x)T(t). Considerando que las dos formas de las funciones Z y T no se conocen, entonces, estas se pueden determinar a partir de las condiciones limitantes, llegando a establecer a Z(x)T(t) en términos de una serie de Fourier. Por tanto, se tiene que:

$$X(x, t) = Z(x)T(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left[\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K_g t}{4\ell^2} \right]$$

La función particular resultante esta dada mediante una serie de Fourier. Dicha solución, describe al fenómeno en estudio a través de conceptos matemáticos y de contexto definiendo a la serie de Fourier y al fenómeno de la transferencia de masa que tiene lugar en el proceso, bajo los siguientes aspectos:

La serie de Fourier se compone de una suma infinita de funciones trigonométricas que representan a la función X(x, t), correspondiente a la función que determina el comportamiento de la transferencia de masa del líquido del coloide cuando se somete a secado. Mediante la suma de dicha serie se obtiene que:

1. Para un tiempo dado t, la gráfica de la suma de las funciones que conforman a la serie de Fourier, da como resultado una función periódica como se muestra en la siguiente figura:

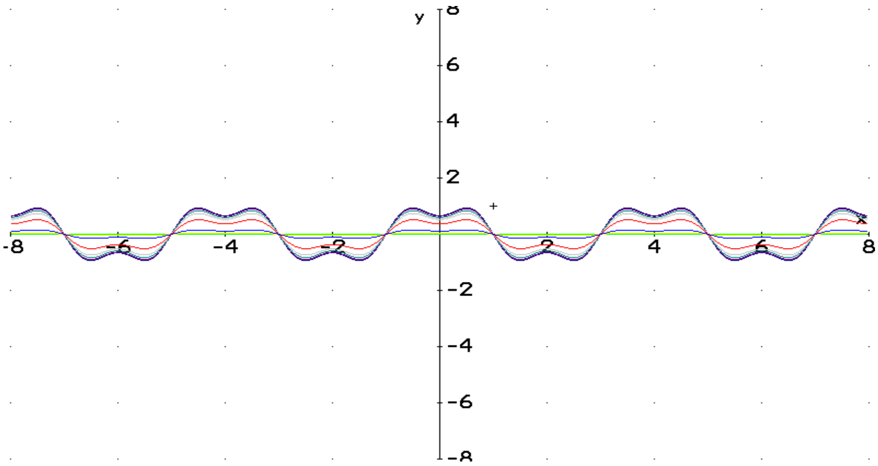


Fig. 43. Grafica de la serie de Fourier cuya variación la da la posición del líquido en el espesor de la muestra

Teóricamente, si se establecen diferentes tiempos de secado se puede visualizar el desplazamiento de las grafica sobre el eje de las “y” indicando que el contenido de humedad disminuye hasta llegar a cero para un tiempo teóricamente infinito. También se puede establecer que teóricamente es necesario un tiempo infinito para que se alcance un contenido de humedad en equilibrio. Sin embargo, en la práctica, los resultados experimentales proporcionan contenidos de humedad que proporcionan estabilidad al proceso aproximadamente entre las dos y tres horas de secado, dependiendo de la muestra del coloide. Asimismo aunque la muestra de coloide sea sometida a un tiempo de secado posterior en las mismas condiciones, en la práctica, no se puede obtener un contenido de humedad de cero debido a la humedad ligada que se encuentra en el coloide.

2. Para una posición x correspondiente a una distancia en el espesor ℓ, la gráfica de la suma de las funciones que conforman a la serie de Fourier, da como resultado una función que se visualiza en la siguiente figura:

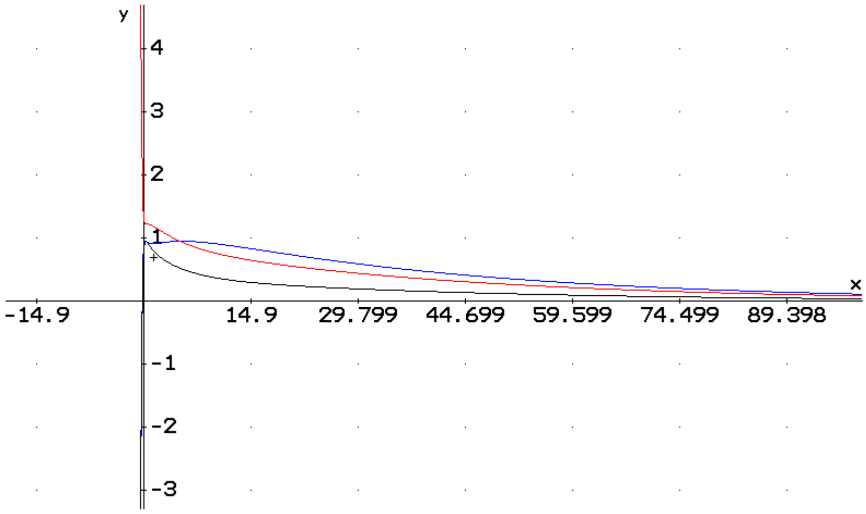


Fig. 44. Grafica de la serie de Fourier cuya variación la da el tiempo

Al establecer diferentes posiciones de la humedad en el espesor de la muestra, se tienen curvas del cambio de humedad en función del tiempo.

Teóricamente, se tendrá un contenido de humedad de cero en el interior del espesor de la muestra cuando la humedad ha recorrido todo el espesor hasta llegar a la superficie de la misma. En la práctica los resultados muestran contenido de humedad en el interior del espesor de la muestra

3. Considerando el tiempo y la posición en el espesor de la muestra, el cambio de humedad con respecto a estas dos variables representado por la suma infinita de las funciones trigonométricas que conforman a la serie de Fourier, cuando t y x son iguales, arrojan una gráfica como la siguiente:

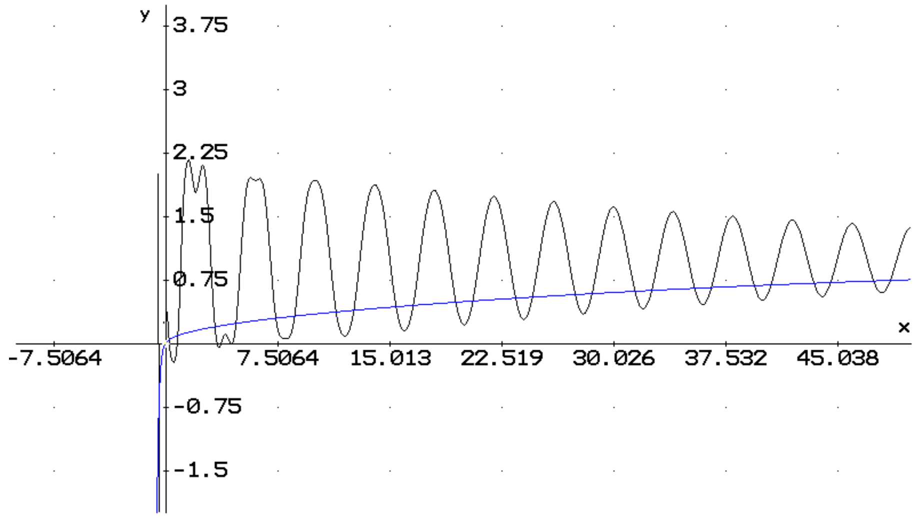


Fig. 45. Grafica de la serie de Fourier cuya variación la da el tiempo y la posición del líquido en el espesor de la muestra

En los resultados de la gráfica se puede apreciar, que la suma infinita de los términos de la serie de Fourier converge a las funciones X(t) y X(x).

El análisis de estos aspectos, determinan que la serie de Fourier, representa el fenómeno, mediante la función X(x, t) que es característica de la transferencia de masa, evidenciando y relacionando los dos cambios que se presentan en el proceso de secado, X(x) y X(t).

La misma suma de funciones que conforman a la serie de Fourier, vislumbra la etapa en que se alcanza el equilibrio en el fenómeno, mediante el concepto matemático de la convergencia de la serie. Esto es, debido a que en la última parte del secado de la sustancia, el cambio en el contendido de humedad, se debe a la transferencia de masa del líquido contenido por difusión a través de la sustancia. Este hecho se sustenta en la representación de X(x, t) en la última etapa de secado, mediante una serie de Fourier, cuya suma de infinita de funciones sigue un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que el contenido de humedad es uniforme en toda la muestra del coloide, es decir cuando el contenido de humedad ha llegado al equilibrio, que en el vocablo matemático corresponde a la convergencia de la serie de Fourier a $X(x, t)$ en un intervalo que en el fenómeno incumbe al intervalo del tiempo en que la muestra alcanza un contenido de humedad uniforme y constante, produciendo que para las mismas condiciones de secado, ya no exista un secado posterior.

Por tanto, más que teoremas, esta situación comprende conceptos matemáticos y del fenómeno que son importantes para su descripción.

Los teoremas y conceptos presentes en esta situación son los siguientes:

- Función de dos variables
- Ecuaciones lineales en derivadas parciales
- Método de separación de variables para resolver una ecuación diferencial parcial lineal
- Condiciones limitantes para resolver una ecuación diferencial parcial lineal
- Serie de Fourier
- Serie infinita de términos con funciones trigonométricas
- Suma de una serie de Fourier
- Convergencia de una serie de Fourier
- Definición de una función no periódica definida en un intervalo finito, mediante una serie de Fourier
- Representación de una función no periódica mediante una función periódica que proviene de una serie de Fourier
- Equilibrio en el fenómeno de transferencia de masa
- Cambio de humedad en el coloide en función del tiempo y posición en el espesor de la muestra

CUARTA SESIÓN

Variaciones en la representación

Representación canónica no algorítmica

La representación canónica no algorítmica se presenta en las respuestas de los estudiantes a la primera actividad que esta dirigida hacia el reconocimiento de la variación de la humedad del coloide, en el tiempo en que la sustancia se somete a secado y el espesor por el cual se transfiere el líquido, a través de una ecuación que modela dicha variación.

En la pasadas sesiones, el grupo ha identificado y establecido que una ecuación diferencial lineal representa el cambio de humedad en el tiempo. Trasladando parcialmente este conocimiento, ahora los estudiantes buscan obtener la ecuación que exprese el cambio en las dos variables, a través de una ecuación semejante a la que ya han encontrado. Así, representan la ecuación en términos de diferenciales tanto para el espesor como para el tiempo.

Las representaciones se pueden localizar en las figura 46. En éstas, se pude observar que los estudiantes escriben la ecuación diferencial como una ecuación diferencial ordinaria que resulta de la operación de las diferenciales que representan el cambio de humedad con el tiempo t dado por dX/dt y el cambio de humedad con la posición x dado por dX/dx.

El entendimiento que muestran los estudiantes en este tipo de representaciones es canónico no algorítmico, ya que basándose en el perfil de humedad que han construido anteriormente; son capaces de identificar que la humedad en el coloide, resulta por el cambio en una cierta posición en la longitud del espesor de la muestra para un tiempo determinado de secado y cuya causa se atribuye a la transferencia del líquido en el secador. Su intuición los lleva a representar que la función que definiría esa humedad sería algo como una función $X(x)$ y $X(t)$ que con alguna operación entre ellas resultara $X(t, x)$, bajo la simbología convencional de las ecuaciones ordinarias. Esto es, sin reconocer que el cambio de humedad se presenta por la influencia de dos variables independientes.

En consecuencia, una ecuación diferencial parcial será la que represente dicho cambio en términos de esas dos variables: t y x .

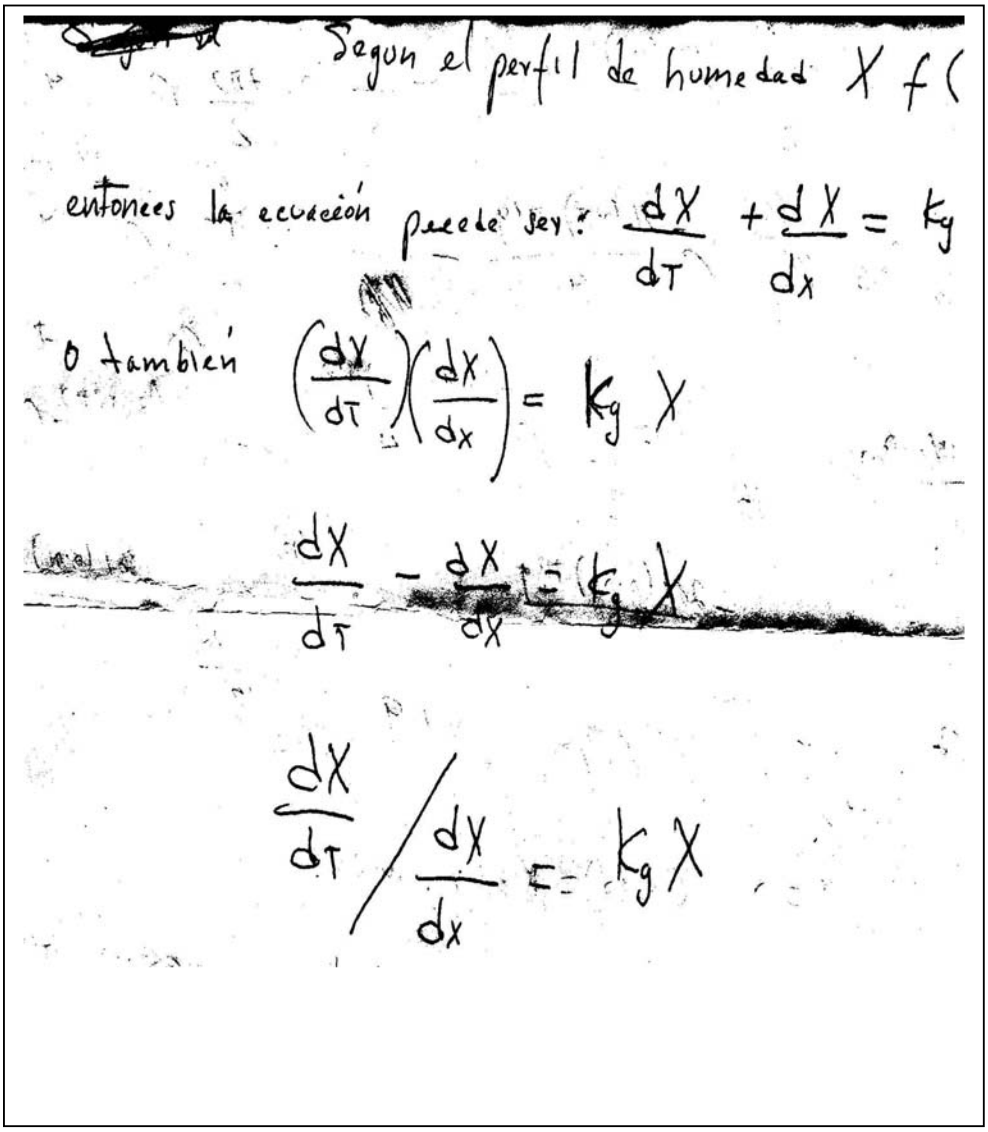


Fig. 46. Representación canónica no algorítmica, basada en un esquema de solución no algorítmico. Determinación de la ecuación parcial que representa el cambio de humedad en función del tiempo y la posición

De esta manera, las representaciones del estudiante acerca de la relación del fenómeno con una ecuación diferencial parcial lineal, son categorizadas como representaciones que son congruentes al fenómeno y su variación, por lo tanto canónicas, en el logro de relacionar un conocimiento anterior, con el problema del cambio en dos variables que permite identificar que las representación en estas circunstancias, adquieren carácter de algorítmicas y, carácter de representaciones canónicas no algorítmicas por la expresión errónea que representa el cambio de humedad del fenómeno que se encuentra definido por la humedad en términos del tiempo de secado y la posición del líquido en el espesor.

En referencia a este resultado, el investigador decide intervenir con nuevas actividades que pueden apoyar al grupo en sus deducciones acerca de la ecuación que representa al fenómeno. La descripción de la interacción entre el investigador y los estudiantes es la siguiente:

Establecer las condiciones internas de la variación en el contenido de humedad del coloide a lo largo de su secado

Nelly contesta que por el tiempo, varía la humedad. Posteriormente señala que en el perfil de humedad, se pude leer la humedad de acuerdo a un valor en el espesor de la muestra para una tiempo de secado, recalcando que es a partir del perfil que se puede observar la variación en la humedad en un tiempo determinado, después de que el líquido ha recorrido una cierta parte del espesor de la muestra

Expresar matemáticamente el contendido de humedad de la muestra cuando el líquido esta ½ pulgada del espesor y han transcurrido 10 minutos de secado? Y después para cualquier valor del espesor x y para cualquier instante t de secado

Nelly responde: -Según el perfil de humedad que tenemos, en un tiempo de 10 minutos y con 0.5 de pulgada, la humedad es de 8.8 lb de líquido por lb de coloide seco y es de: $X_0 = 9$ y $X_{10} = 8.8$, que quiere decir que para $t = 0$, tenemos la humedad inicial de 9 y después de 10 minutos ya bajó a 8.8.

Ubaldo continúa: -El cambio de la humedad con el tiempo ya lo tenemos, lo obtuvimos con la ecuación diferencial $dX/dt = K_g X$ donde X(t), es una función exponencial con t como variable. En el perfil de humedad podemos leer el cambio con el tiempo y el espesor pero no sabemos cual sería la ecuación diferencial. Según como le hicimos con X(t), pensamos que pueden ser dos funciones: una con cada variable para x y t y que deben estar juntas haciendo alguna operación entre funciones, porque para un tiempo podemos ver el cambio bajo cierta medida del espesor. Lo mismo, para cierto espesor y un cambio de humedad dado, se puede ver qué curva de tiempo corresponde.

Entonces, pensamos que para tener el cambio de X(t, x), se necesita una ecuación diferencial como esta: dX/dt +dX/dx = función o algo así pero no sabemos.

La ley de Fick es una ley que en ingeniería se utiliza para definir la transferencia de masa en estado inestable a través de una expresión general para el transporte molecular por difusión, correspondiente a una ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_g \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Establecer la relación entre esta ecuación y el cambio que se produce en la humedad de la sustancia

Lo primero que ven los estudiantes es la constante K_g que es la misma constante que aparece en la ecuación diferencial que representa el cambio de humedad con el tiempo. Ante este reconocimiento, Ubaldo dice:

-Esta debe ser la ecuación que andamos buscando, porque aparece la constante de difusión K_g, además aparecen las derivadas con respecto a t y a x. –Entonces la relación, puede ser que el cambio en C en el tiempo, es ahora el cambio en X también en el tiempo. Ubaldo escribe $\frac{\partial X}{\partial t}$.

Lo mismo dice para el cambio de C en la posición del espesor: $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$.

Así el grupo recurre y relaciona un conocimiento sobre la transferencia de masa: la ley de Fick. La ecuación que rige esta ley, es la ecuación diferencial parcial que establece el cambio de una propiedad transferente C en función del tiempo t y de la posición x en la longitud del espesor de una placa, que viene siendo la misma que representa el cambio de humedad, como un cambio de propiedad transferente en "t" y en "x".

Por tanto, el problema esta resuelto al proporcionarle al grupo la información que proporciona este ley y relacionarla con la expresión del cambio que estaban buscando, mostrando nuevamente un entendimiento canónico. Pero, si bien es cierto, el significado matemático que la ecuación diferencial parcial expresa en el fenómeno, pasa desapercibido por los estudiantes. El cambio en la humedad para el tiempo y la posición en la longitud del espesor de la muestra, es una función del cambio de humedad X que es algebraicamente lineal en cada una de sus variables y con derivadas también como funciones de estas mismas variables "t" y "x" y la constante de difusión K_g.

El desempeño de los estudiantes en la segunda actividad correspondiente a esta situación, presenta reincidencia en entendimientos canónicos no algorítmicos. El diálogo que tiene lugar entre los estudiantes es el siguiente:

Ubaldo le dice a Nelly: -Si probamos a seguir el mismo procedimientos que hicimos antes, llegáremos a una función X (t, x)…………….pero……… para llegar a esto…………. deben ser dos funciones que se suman o se igualan o hacen alguna operación de X(t) con una de X(x) que sea la del espesor como en el perfil de humedad para llegar a una función X(x, t)

Nelly le contesta: -Yo no se resolver las ecuaciones parciales, pero la función si debe ser X con t y con x como variables, porqué cuando resolvimos la ecuación dX/dt = X, encontramos a X(t) en términos de t……… -¡Ah! entonces si es así, al encontrar la solución de la ecuación de la ley de Fick podría ser que encontráramos a X(t) y a X(x) y esa sería la manera de tener los dos cambios. Comenta Nelly.

Después de este diálogo los estudiantes se dirigen al investigador y le Nelly: -No sabemos resolver la ecuación…………es parcial y no sabemos como se resuelve………….ninguno de los dos hemos visto el método para resolverla……creo que no lo vimos……………. (Los puntos suspensivos indican silencios o pausas que hacen los estudiantes)

Efectivamente, los estudiantes están en lo cierto. Para poder llegar a la expresión que proporciona la humedad en el tiempo y en la posición de la longitud del espesor, se requiere encontrar la función que corresponde a la solución de la ecuación diferencial parcial dada por la ley de Fick. Y, es aquí donde los estudiantes nuevamente tienen dificultades para continuar desarrollando la tarea. El problema es la carencia de algoritmo para solucionar la ecuación. Los estudiantes manifiestan desconocimiento del método a utilizar para darle solución a dicha ecuación. Sin embargo sus representaciones conducen al entendimientote de que la solución corresponde a una función de dos variables dada por X(t, x), deducción que ellos plantean al obtener la función X(t) cuando resuelven la ecuación diferencial que contiene únicamente la variable t en las anteriores sesiones:
Por tanto, en esta etapa de la situación, se identifican escasos recursos matemáticos en el grupo. Sus representaciones son limitadas y se restringen a entendimientos canónicos que se refleja únicamente en el entendimiento del comportamiento del fenómeno.

Representación canónica algorítmica

En el progreso de la tarea, los estudiantes han presentado problemas para continuar con las actividades planteadas en la situación. El no contar con argumentos matemáticos para encontrar la función X(t, x) mediante la solución de la ecuación diferencial parcial, impide de alguna manera que el grupo relacione dicha función con la serie de Fourier, de tal forma que el investigador tenía que buscar en esos momentos la manera de implementar una nueva tarea que pudiera apoyar a los estudiantes a desenvolverse en la situación de trabajo.

Así, a través de las actividades a desarrollar, se le proporciona al grupo la expresión que representa a la función buscada $X(t, x)$ y que contiene a la serie de Fourier, sin indicarles que así es.

La expresión proporcionada corresponde a la solución en términos de la serie de Fourier. La justificación del investigador a proporcionar dicha expresión, es que a partir de la misma, cabría la posibilidad de que los estudiantes establecieran primeramente las relaciones matemáticas alrededor de la misma, por tanto, sobre la serie de Fourier y posteriormente en vinculación con el fenómeno. Esto es, relaciones tales como, que la serie se define por una suma infinita de funciones cuya suma converge por un lado a la función $X(t)$, dado el valor de "x" y por el otro, que converge a una función $X(x)$, dado el valor de "t". Además, que ambas convergencias se presentan en un intervalo de continuidad de la mismas funciones a las que converge. Otra relación matemática conveniente a resaltar es la periodicidad de la función que genera la serie de Fourier y que representa a la función de la humedad en la etapa de equilibrio del fenómeno.

Estas relaciones, en la siguiente tarea, a consideración del investigador, podrían vislumbrar a su vez su relación con el contexto del fenómeno, para alcanzar a establecer su comportamiento, de tal forma que la transferencia de masa del líquido del coloide en el secado, es reconocible por el cambio de humedad que sufre esta sustancia en términos de una serie de Fourier.

Bajo este marco, la intervención del investigador, se centra en destacar conceptos que provienen de la serie como representativa de la función solución y el significado que aporta esta. Así, la primera tarea se dirige a buscar el reconocimiento de la función solución $X(t, x)$ como una serie de funciones trigonométricas que constituyen los términos de una serie de Fourier, que se irá conformando al desarrollar la sumatoria correspondiente, primero para un tiempo t dado y después para una posición dada x . Las siguientes tarea, esta dirigida hacia la búsqueda de la suma de dichas funciones, al ir incorporando función tras función a fin de identificar que dicha suma corresponde a la función $X(t)$ para una posición x, o bien para la función X(x) para un tiempo determinado t, de tal manera que se obtienen funciones X(t) y X(x) de la misma serie ya que esta contiene la relación de las dos variables que influyen en el cambio de humedad. Posteriormente, si se grafica la suma de las series, es posible visualizar gráficamente que la suma de la serie de Fourier converge a X(t) en un intervalo de t y converge a una función X(x) en el mismo intervalo de t. Finalmente, la última tarea tiene el propósito de identificar la función periódica que representa al fenómeno en la última etapa de secado, estableciendo así el comportamiento del fenómeno.

La respuesta de los estudiantes ante este intervención se sintetiza enseguida:

En la siguiente expresión. Describir el símbolo de $\sum_{n=0}^{\infty}$ ***?***

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2(0.01)\pi^2 y}{4}\right]$$

Nelly contesta que el símbolo indica una sumatoria que inicia en n = 0 y termina con n = ∞.

Dar la expresión que se obtienen cuando n = 0

Los estudiantes sustituyen el valor de n = 0 y escriben: $\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\exp(\frac{-(0.01)\pi^2 y}{4}$

Dar la expresión que se obtiene cuando se tiene un valor de x

Ubaldo comenta que será una serie con variable “y. Nelly pregunta que si pueden dar cualquier valor a x. Se le contesta que sí. Ella escribe como ejemplo que si x = 0, entonces coseno de cero es 1 y entonces solo queda “y” como variable. Nelly hace sustituciones y vuelve a escribir que la expresión es: $\frac{4}{\pi}\exp(\frac{-(0.01)\pi^2 y}{4}$

Proporcionar la gráfica que resulta de la expresión anterior: $\frac{4}{\pi}\exp(\frac{-(0.01)\pi^2 y}{4}$

Los estudiantes grafican en su calculadora y representan la gráfica.

Dar la expresión que se obtiene cuando n va de 0 hasta 10. Utilizando un valor de x

Los estudiantes utilizan x = 0. Sustituyen el valor de n= 0 y forman el primer término. Después sustituyen el valor de n = 1 y escriben dos primeros términos. La misma secuencia realizan hasta llegar a 10. Cada término lo escriben dependiendo el valor de n.

Proporcionar la gráfica que resulta de la expresión anterior

Los estudiantes introducen la expresión en la calculadora y representan la gráfica

Dar la expresión que se obtiene cuando ahora n va de 0 hasta ∞

Ubaldo dice que será igual pero con infinitos términos y Nelly le comenta que por eso la sumatoria indica de 0 hasta ∞.

Proporcionar la gráfica que resulta de la expresiones anterior

Los estudiantes introducen una expresión con 20 términos y representan la gráfica

Dar la expresión que se obtiene cuando n va de 0 hasta ∞***, utilizando un valor de x = 0.5 y proporcionar la gráfica que resulta de esta expresión***

Los estudiantes sustituyen el valor de x, repiten el mismo procedimiento, obtienen la expresión y vuelven a introducirla en la calculadora la expresión con 20 términos. Posteriormente representan la curva resultante.

Ubaldo y Nelly comentan entre ellos que la forma de la curva es la misma para un término, para 10 términos y para 20 términos.

-Solamente cambia un poco la abertura de la curva. Comenta Ubaldo y continúa.

-Si fueran más términos de los 20 términos que ya tenemos, sería igual.

Entonces, dice Nelly:

- Si “n” va de 0 hasta ∞, la gráfica es la misma. Además aunque se cambie el valor de x, sigue siendo igual, teniendo la misma forma.
Los estudiantes repiten el proceso para x = 0.8, para x = 1 y también obtienen la gráfica.

Dar la expresión que se obtiene cuando n = 0, utilizando un valor de y>0 y proporcionar la gráfica que resulta de esta expresión.

Los estudiantes sustituyen ahora el valor de “y = 1” y el valor de “n= 0” para escribir la expresión resultante como: $\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\exp(\frac{-(0.01)\pi^2}{4}$

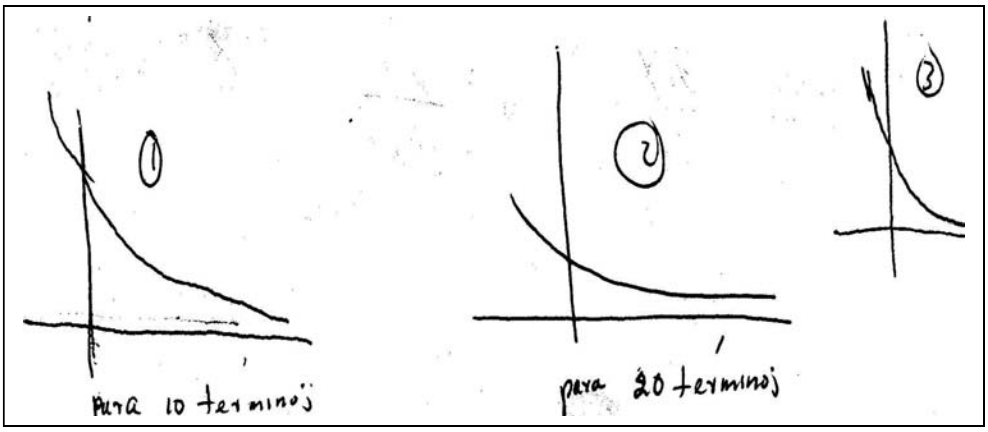
Y después grafican, representando la curva resultante.
Los estudiantes comentan entre ellos que ahora es otro tipo de gráfica, la que resulta cuando le dan un valor a “y” y dicen que es la gráfica del coseno.

Dar la expresión que se obtiene cuando n va de 0 hasta 20, utilizando un valor de y>0 y proporcionar la gráfica que resulta de esta expresión.

El grupo sigue el procedimiento anterior. Utiliza el mismo valor de y = 1 y realiza la gráfica para 10 términos y después para 20 términos.
Los estudiantes comentan entre ellos, que la gráfica el coseno se esta deformando cada vez que ya no parece onda sino que parece que se esta achatando.

Bajo la dirección del investigador, las representaciones de los estudiantes tienen un desarrollo algorítmico en el marco de un entendimiento canónico en la obtención de sumatorias con valores de “n” que va desde cero hasta 20, resultando diferentes expresiones que han sido diferenciadas de acuerdo a la variable que se esta manejando. Cabe resaltar la deducción de los estudiantes al referirse a la curva que tiene lugar cuando utilizan 20 términos o más, indicando que se pude obtener la misma curva o, bien que el cambio es muy poco significativo para un número mayor de términos porque la forma de la gráfica es la misma. Con esta deducción los estudiantes están próximos al entendimiento acerca de la convergencia de la serie infinita que están obteniendo al desarrollar la sumatoria de n hasta ∞.

Las representaciones son las siguientes:



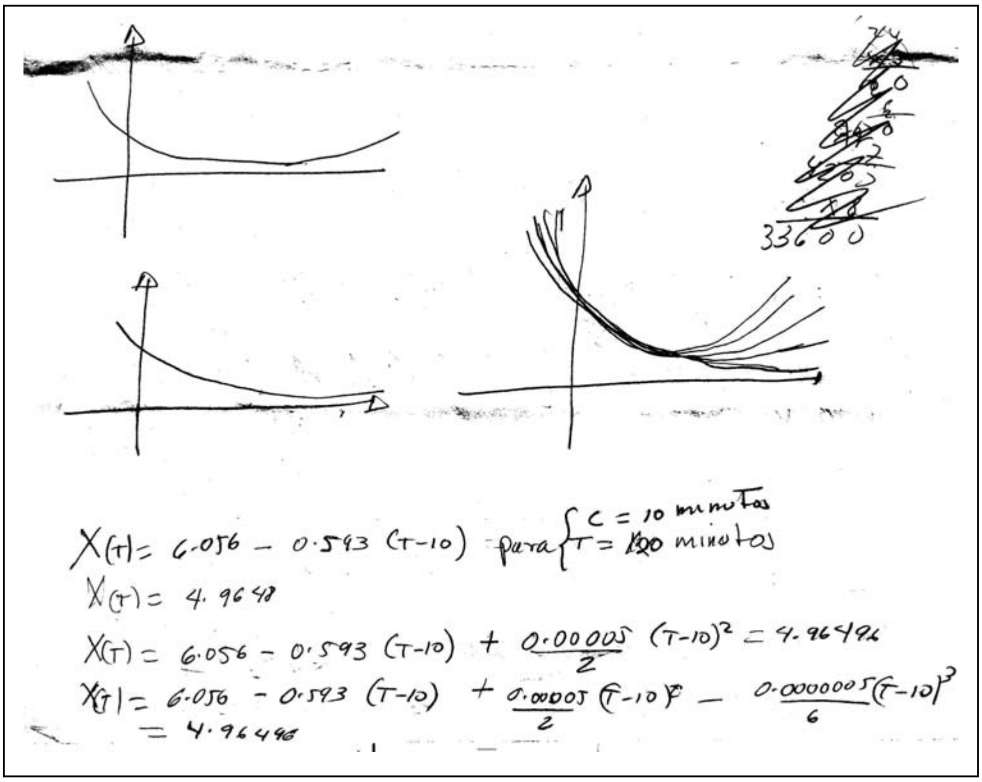


Fig. 47. Representación canónica algorítmica, basada en un esquema de solución algorítmico. Determinación de la curva de humedad con el tiempo, que representa la suma de la serie de Fourier

Para graficar, el grupo cuenta con una calculadora graficadora, de tal manera que es posible visualizar el comportamiento de las graficas resultantes en la misma.

QUINTA SESIÓN

Etapa 2 de la situación 4

En esta última sesión se continúa con la situación 4, para dar por terminada la interacción del grupo en el campo conceptual integrado por estas cuatro situaciones.

Representaciones canónicas, asociadas al entendimiento de la serie de Fourier

El reconocimiento de la sumatoria, de las expresiones que generan su desarrollo, y de las curvas resultantes de estas expresiones, alrededor de la serie de Fourier; por parte del grupo, son indicativos que promueven al investigador a continuar con su intervención, implementando nuevas tareas.

Ahora, con estos antecedentes, la idea del investigador es plantear el camino a seguir, a través de una conducción andamiada que apoye a resaltar conceptos propios de la serie, que próximamente pudieran ser usados por los estudiantes, para su vinculación con el fenómeno.

La tarea está dirigida hacia actividades que conduzcan a la visualización de la convergencia de la serie Fourier, a través de trabajar con la formación de series conformadas por un número finito de funciones que probablemente ayuden a deducir al grupo a entender dicha convergencia a la misma función que representan cuando se tiene una suma infinita de funciones.

Las actividades en esta parte de la situación se muestran a continuación:

Citar las características matemáticas de la gráfica que resulta de la suma de los primeros cinco términos de la expresión siguiente cuando x = 0.5

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2(0.01)\pi^2 y}{4}\right]$$

Nelly escribe la expresión y le comenta a Ubaldo que la suma no se pude realizar porque son términos diferentes. Ubaldo le contesta que entonces se deja expresado como suma e introduce los datos y grafica. Observando la gráfica, mencionan las siguientes características: Es una curva decreciente que antes de cruzar al eje “y” tiene ondas y después de cruzar al eje y decrece si “y” aumenta. -También el decrecimiento esta marcado por una asíntota. Comenta Nelly.

Citar las características de la gráfica que resulta de la suma de las primeras diez funciones que resultan de la expresión siguiente cuando x = 0.5

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2(0.01)\pi^2 y}{4}\right]$$

La indicación de las diez primeras funciones hace dudar a los estudiantes, acerca de que si es lo mismo hablar de términos que de funciones.

Nelly y Ubaldo comentan entre sí, que creen que se les dijo funciones porque se les llama así ya que cada uno de los términos lleva la variable “y” y la suma viene siendo la suma de todos los 10 primeros términos o que es los mismo funciones.

Nelly escribe la expresión resultante para introducirla en la calculadora y obtener la gráfica correspondiente.

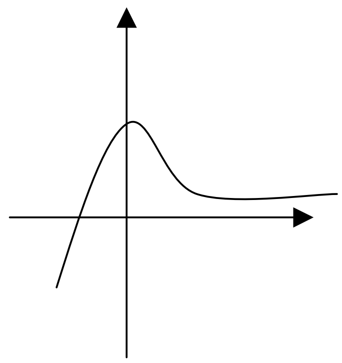
Nelly menciona que la gráfica se parece a la anterior. –También es una curva decreciente. Ubaldo responde:

-La diferencia es que se acuesta más o menos la curva a partir del cruce con el eje “y”.

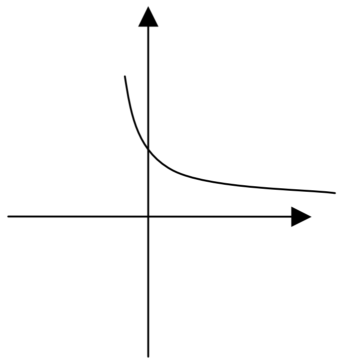
A partir de la expresión: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2(0.01)\pi^2 y}{4}\right]$

y utilizando el valor de x = 0.5. Establecer la suma de las funciones que

corresponde a la curva 1. Posteriormente, indicar cuantas funciones se necesitan sumar para obtener la curva 2.
Las curvas 1 y 2 se muestran enseguida.



Curva 1



Curva 2

Los estudiantes hacen ensayos en la calculadora para ver que resultado de los datos que introducen, les puede dar la curva 1.

Finalmente ellos responden que puede ser la suma que resulta con n = 0, n = 1, n = 2, n = 3 ó que también resultaba con n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, n = 4 y n = 5.
Para dar la respuesta correspondiente a la curva 2, repiten el mismo procedimiento al ir sumando funciones hasta que llegan a una curva parecida a la curva indicada. El resultado que ellos muestran en la calculadora es de la suma de funciones que se tienen cuando n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, 11, 12, 13 y 14.

Las representaciones de los estudiantes son las siguientes:

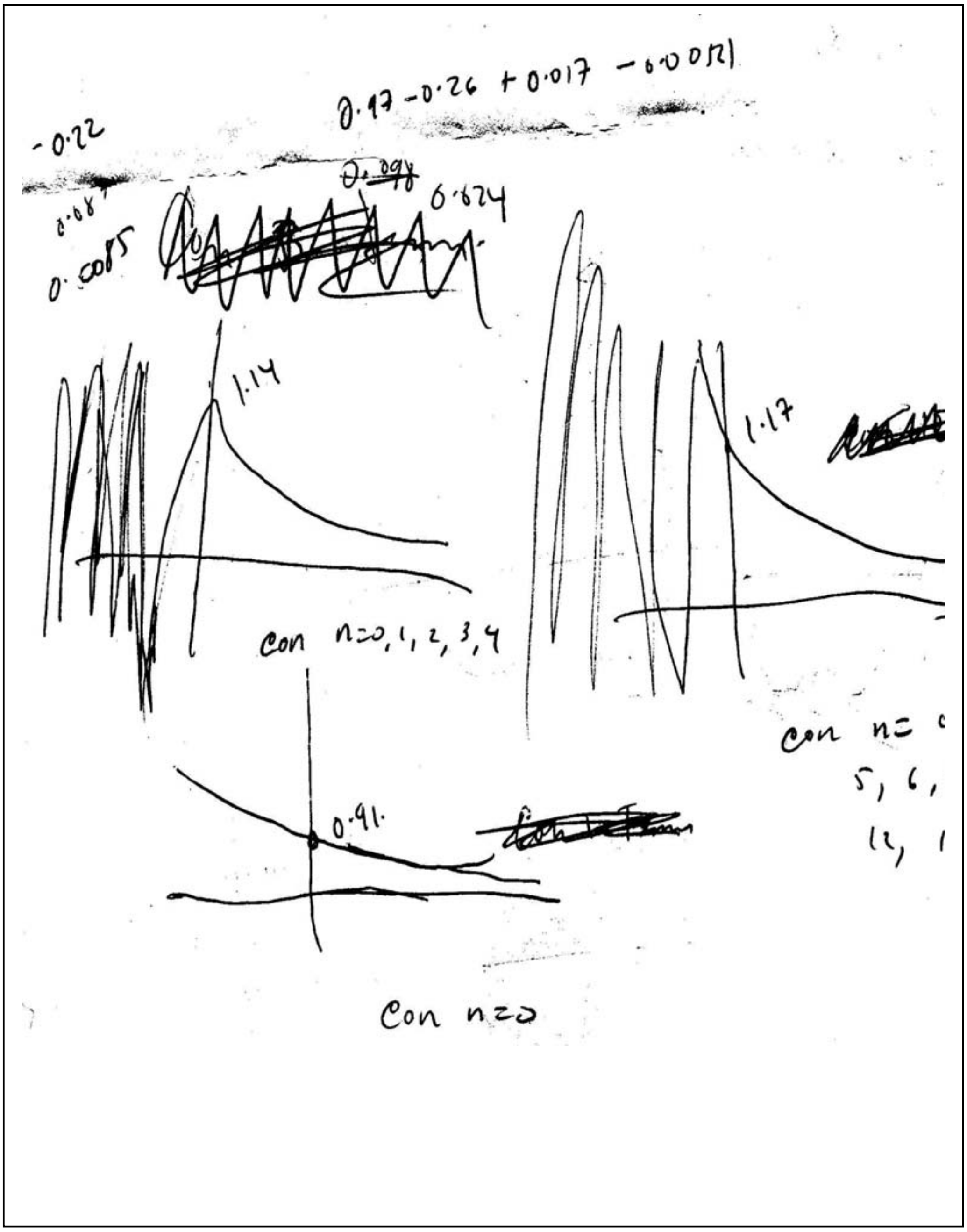
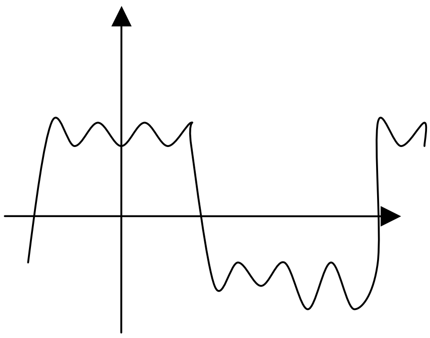


Fig. 48. Representación canónica algorítmica. Determinación de las curvas que representa las suma parciales de la serie de Fourier

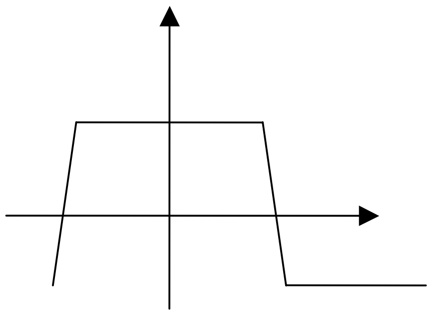
A partir de la expresión: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2(0.01)\pi^2 y}{4}\right]$

Establecer la suma de los términos que corresponde a la curva 3. Posteriormente, indicar cuantas funciones se necesitan sumar para obtener la curva 4.

Las gráficas correspondientes a las curvas 3 y 4 se muestran enseguida.



Curva 3



Curva 4

La tarea de buscar la suma de funciones que representan a las curvas dadas en las gráficas 3 y 4, requiere que los estudiantes ahora manipulen no solamente el número de términos que debe contener la serie sino que también cual de las variables habrá que manipular para lograrlo. ¿ "x" ó "y"?

Antes de empezar a ensayar con la calculadora, Ubaldo comenta que ya tenían una gráfica parecida estas. Nelly y Ubaldo buscan la información y encuentran que dando un valor a "y" obtienen un tipo de gráfica parecida a la que andan buscando. Para empezar a buscar, deciden dar el mismo valor a y = 1 y analizar a través de la observación de la gráfica, cuantos valores de "n" son necesarios para obtener las curvas 3 y 4. Después de varios intentos, los estudiantes escriben que para la curva 3, utilizando el valor de y = 1 y n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 , 6 y 7 se llega a la gráfica.

Con respecto a la curva 4, Ubaldo comenta que parece la misma curva que la 3, pero en lugar de tener ondas estas se achatan para formar como un cuadro. Y entonces Nelly y Ubaldo deciden continuar haciendo los mismo. Empiezan con sumas que van de n = 0 hasta n =30 y después hasta 40. Ubaldo le comenta a Nelly que se necesitan más valores de "n" y ella le dice que sí, pero que ya se va viendo como se van haciendo más chicas las ondas, entonces si la sumatoria indica que va de n = 0 hasta ∞, entonces para ya no seguir haciendo más sumas, que deben de indicar: de n = 0 hasta ∞.

Las representaciones en este caso son las siguientes:

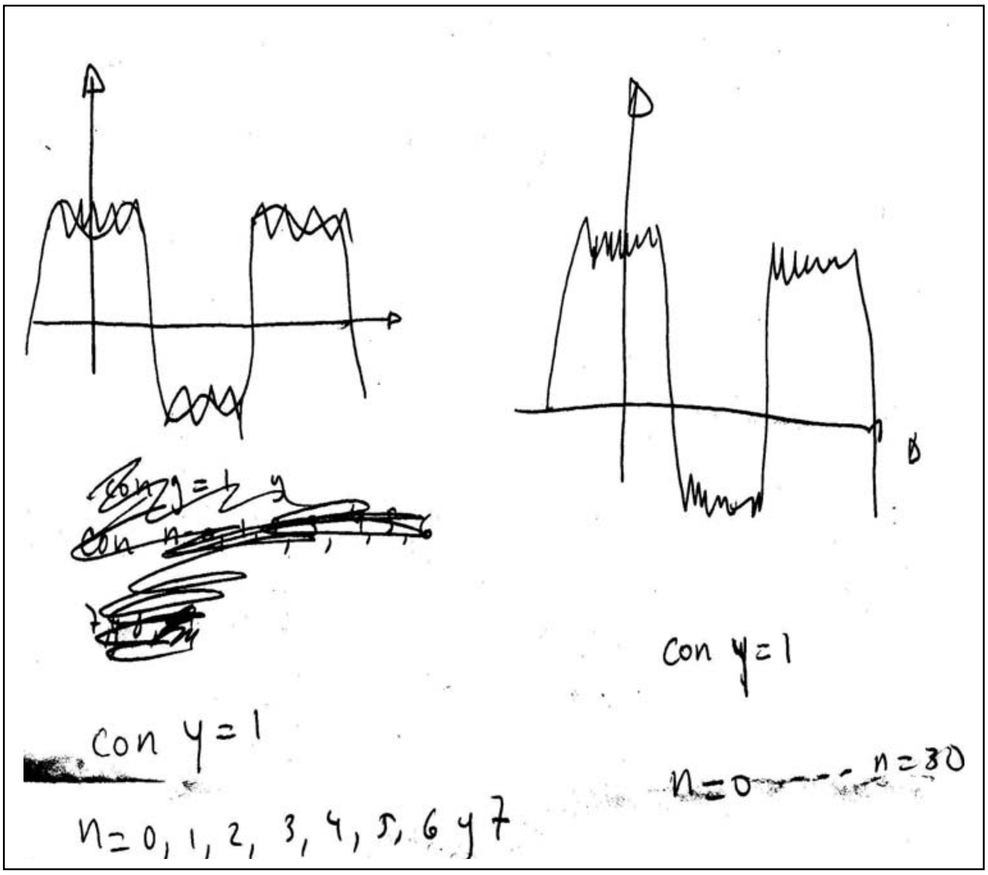


Fig. 49. Representación canónica algorítmica. Determinación de las curvas que representan las sumas parciales de la serie de Fourier

Citar las características de las curvas 3 y 4

Nelly responde que es la gráfica del coseno pero que cada vez que se le suma términos esta se va deformando más y más apara volverse como un cuadrado en lugar de la onda del coseno y dibuja su deformación.

Identificar, de las cuatro curvas cual o cuales son periódicas y establecer su período.

Los estudiantes se ponen de acuerdo para responder y que es lo que van a responder, finalmente vuelve a hablar Nelly. Nelly dice que no recuerdan como dar una expresión periódica, pero que se acuerdan que es algo que se repite continuamente en la misma gráfica y que según su deducción, creen que son las curvas 3 y 4, porque si vienen del coseno, el coseno tiene repeticiones.

En esta etapa, el reconocimiento de la serie de Fourier a través de los conceptos que la definen se abre a través de tareas propias para resaltar dichos conceptos. En este caso el investigador ha considerado pertinente que los estudiantes interactúen con actividades que dejan de manifiesto su conocimiento canónico algorítmico acerca de los siguientes aspectos: 1) Que la serie contiene dos variables, lo cual genera dos expresiones diferentes y por lo tanto, dos tipos de curvas diferentes de acuerdo a la variable que se considere independiente. 2) Que las expresiones resultantes se conforma por términos, los cuales son funciones que al ser sumadas una a una, el resultado es una función que se pude visualizar desde el primer término que ellos grafican, dándole carácter de función a los términos de la expresión y a su suma través de su gráfica. 3) Que la expresión pude integrarse por un número infinito de funciones, cuya suma le proporciona que una porción de la gráfica es la misma aunque en la suma se integren más términos de la serie. 4) Que una de las expresiones genera una función que es periódica.

Los anteriores puntos en la formalidad matemática, constituyen el conocimiento sobre la conformación de una serie de Fourier por una suma infinita de funciones trigonométricas y el concepto de convergencia de la serie de Fourier: a) Al converger a aun función en un intervalo de continuidad de la misma, en funciones que no son periódicas, como en el caso de de la serie cuya curva es decreciente y que el intervalo de convergencia es la porción constante de la curva. b) Al converger a una función en un intervalo de continuidad de la misma, en funciones que son periódicas, como en el caso de de la serie cuya curva corresponde a una función trigonométrica que converge a una onda cuadrada.

Representaciones canónicas, asociadas al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno y su variación con el tiempo

Cuando los estudiantes han identificado que la serie con la que han trabajado contiene dos variables, se encuentran prestos a relacionar "x" y "y" con los aspectos que también definen al fenómeno, mediante la correspondencia que existe entre las funciones: f(x, y) que ya han representado y la función de humedad en términos del tiempo y la posición dada por X(x, t).

Por tanto lo que resta, es dejar al descubierto esta correspondencia con la finalidad de que los estudiantes establezcan relaciones entre una función y otra, de tal manera que reconozcan que el comportamiento del fenómeno de transferencia de masa en el secado de un coloide esta definido mediante una función X(x, t) que a su vez, es representable por una serie de Fourier bajo los siguientes aspectos:

a) Una serie de Fourier determina el cambio de humedad que la sustancia sufre con el tiempo X(t) en la última etapa de secado.

b) El cambio de humedad debido a la posición del líquido en el espesor de la muestra X(x) en la última etapa de secado, se encuentra determinado por una función periódica generada por una serie de Fourier.

c) Dicha función periódica sigue un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que el contenido de humedad es uniforme en toda la muestra del coloide, determinando así, el contenido de humedad en equilibrio.

d) La serie de Fourier se conforma por una suma infinita de funciones

e) La suma de la serie de Fourier, converge a la función que representa al fenómeno en la última etapa de secado.

En el marco conceptual anterior, la intervención del investigador y la participación del grupo se sintetizan con algunos diálogos.
Los puntos suspensivos indican lapsos en silencio.

¿Encuentran alguna relación entre las curvas anteriores y el comportamiento del fenómeno de transferencia de masa?
Ubaldo: -Sí………… la curva 2 se parece a la curva de la función X(t)………….cuando graficamos los datos de humedad y tiempo que obtuvimos en el secado…………….. También una curva parecida obtuvimos cuando dimos el valor a x = 0.5 en la sumatoria……
Nelly: - También la misma curva se parece a al curva de la función exponencial que hallamos de la ecuación diferencial.

¿Y las curvas 1, 3 y 4?
Los estudiantes, observan las curvas por unos momentos y tanto Nelly como Ubaldo, contestan que no saben, que no encuentran parecido.

¿Cómo describirían el comportamiento del fenómeno de transferencia con estas curvas?
Los integrantes del grupo comentan entre ellos que la respuesta debe de estar en la curva 2. Se ponen a revisar la información que tienen hasta ese momento y Nelly es la primera que habla:
-Es que estamos pensando que X(t) es una función exponencial……………donde podemos encontrar la humedad……….en el tiempo………esta función la encontramos cuando resolvimos la ecuación diferencial que da el cambio de humedad que sucede con el tiempo…………………….ahora vemos que esta misma gráfica…… vuelve a aparecer……………
Ubaldo: -Desde que empezamos graficar los primeros términos de la sumatoria cuando dimos el valor de x = 0, 0.5 y 0.8, encontramos unas parecidas……..pero no sabemos cual de todas las curvas es la misma que la de X(t)……. pero …………………entonces pensamos que la sumatoria nos da una curva………

parecida o igual a la de la función X(t)……………y entonces……….con esto….estamos pensando que también la expresión de la sumatoria (ellos señalan la expresión:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2(0.01)\pi^2 y}{4}\right]$$

puede darnos la humedad para un tiempo t………………

¿Como podrían probar lo que están diciendo?

El grupo empieza a graficar en su calculadora, los estudiantes revisan sus datos y finalmente Nelly comenta:

-Sí sucede los mismo. Cada vez que le damos un valor a "x" en la expresión de la sumatoria, más o menos a partir de los diez términos, la gráfica se parece a la curva de X(t).

Ubaldo: - Eso quiere decir que "y" puede es el tiempo en el secado, pero no sabemos quién es "x".

Ubaldo re-escribe la expresión, cambiando a "y" por "t" y poniendo un signo de interrogación a la "x" en la misma expresión:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x?}{2}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2(0.01)\pi^2 t}{4}\right]$$

……………………………………………………………………………………………..

Después de un largo silencio, el investigador le hace al grupo una pregunta para ayudar a los estudiantes a buscar alguna relación entre la expresión con la que están trabajando y la solución de la ecuación parcial que representa el cambio en la humedad con respecto al tiempo y la posición.

¿Encuentran alguna relación con la serie y la ley de Fick?

Ubaldo: La ley de Fick……… es la ecuación parcial que no pudimos resolver. Tanto Nelly como Ubaldo revisan la ecuación de esta ley………………….. Ubaldo, le dice a Nelly: -¿te acuerdas que la ecuación de Fick es para dar el cambio de humedad en el tiempo y el espesor?...............................-Fíjate que la sumatoria tiene dos variables también………….. -entonces “t” si puede ser la “y” .. ……... -entonces no queda más que la “x” sea la misma “x”………. -¿te refieres al espesor? Le pregunta Nelly a Ubaldo. –Sí. Contesta Ubaldo…..………………..-Lo que no entiendo es ¿de donde salió la sumatoria? -¿Qué tiene que ver esta sumatoria con la ecuación? Sigue preguntando Nelly a Ubaldo. Ubaldo le dice que nos sabe , que tiene que revisar de lo que han hecho para ver si se dan un idea de donde sale la sumatoria…………….Después del silencio, Ubaldo le dice al investigador:

-No estamos seguros si la relación entre la ecuación de Fick y la sumatoria es que las dos tienen dos variables…….. que si comparamos una con otra entonces se tendría el tiempo y el espesor…..cuando damos un valor de “x” en la sumatoria, estamos dando un valor en el espesor y obtenemos la humedad en el tiempo……por eso nos da la curva X(t).

A pesar de que ninguno de los dos estudiantes tiene idea de donde proviene la expresión que contiene la sumatoria, ya han relacionado dicha expresión con el comportamiento del fenómeno por la similitud de las curvas que definen el cambio en la humedad del coloide.

El investigador continúa con su intervención.

Considerando que la expresión de la sumatoria, sí representa el cambio en la humedad de la sustancia dado por la curva X(t). Determinar la curva de humedad para el tiempo “t”, para la posición del líquido en 0.5 del espesor de la muestra, graficando la suma: a) de las primeros 10 términos de la sumatoria. b) de las 20 primeras funciones de la sumatoria. c) desde n = 0 hasta ∞.

Al indicar en esta tarea, la determinación de la curva de humedad para un tiempo “t”, los estudiantes entienden que la curva pedida es la que proviene de la sumatoria, dado un valor de “x” que corresponde a la posición de la humedad en el espesor de la muestra. Así mismo, las señalaciones de graficar, los primeros términos de la sumatoria, de las 20 funciones de la misma y la suma que va desde n = 0 hasta ∞, conllevan el entendimiento de conceptos de que la suma es el resultado de la sumatoria, que la suma esta integrada por términos que son funciones y que el desarrollo de $n = 0$ hasta ∞ corresponde a realizar la suma infinita de funciones.

El esbozo de éste entendimiento canónico sobre la serie de Fourier, se vislumbra en el comentario de Ubaldo al investigador, al preguntar que si las curvas que tienen que hacer, son el resultado de la expresión de la sumatoria, el investigador contesta que sí. Ubaldo vuelve a preguntar que si la posición del líquido, se refiere a que en la expresión se sustituya un valor de $x = 0.5$. A esta pregunta se le contesta afirmativamente.

Nelly le dice a Ubaldo que esas curvas ya las tienen, que ya las hicieron, que solamente ahora es ver a "y" como "t" y expresan $y = t$. Posteriormente, revisan su información y utilizan las mismas expresiones para graficar y observar. Los estudiantes representan las curvas vistas en la calculadora, comentan entre ellos que son curvas semejantes que ya lo habían notado en el otro ejercicio.

Para realizar la gráfica, sobre la indicación de $n = 0$ hasta ∞, los estudiantes la grafican, considerando 20 términos de la sumatoria, bajo el entendimiento de que la curva va ser casi la misma con 40 ó 50 hasta infinitos términos más.

Los resultados de sus representaciones se localizan en la figura 51. El investigador continúa preguntando.

Comparar las tres curvas resultantes entre sí.

Nelly dice que empiezan más o menos igual que antes de cruzar el eje "y" se abren o se cierran más. Pasando el eje "y".

-Terminan casi iguales, es en final cuando ya casi son iguales. Comenta Nelly.

¿Aún así que sumen más funciones?

Ubaldo dice que sí y Nelly también lo afirma

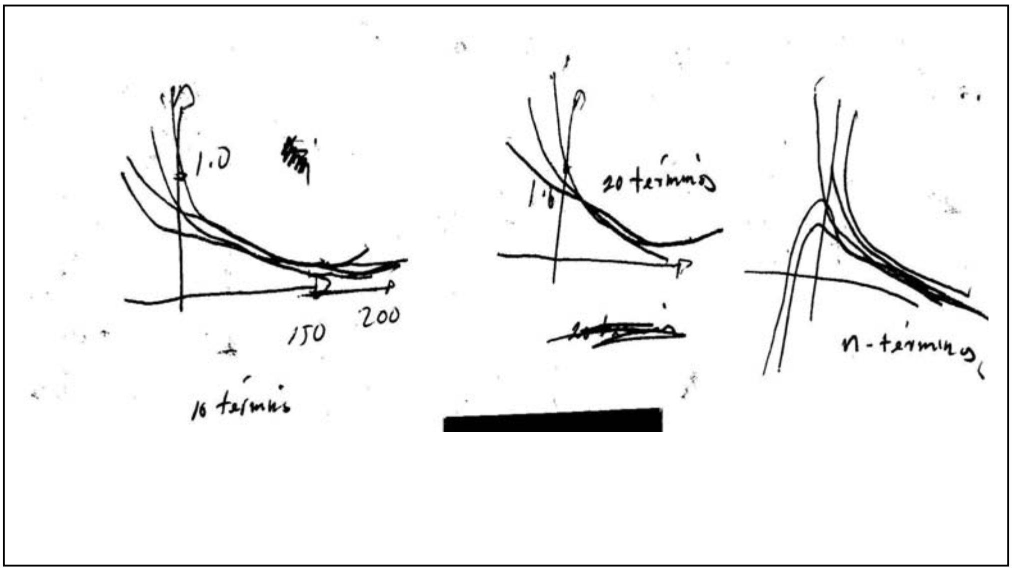


Fig. 50. Representación canónica algorítmica. Determinación de las curvas que representan la sumas parciales de la serie exponencial proveniente de la serie de Fourier

Explíquenme porqué dicen que sí

Ubaldo: -La gráfica es la misma. –Es decreciente dice Nelly. – Si le demos un término, tres, cinco, diez , 20 ……..hasta infinito la curva es decreciente.

Ubaldo: - Son decrecientes y son iguales más o menos a partir de las cuatro horas

Comparen estas curvas con la curva X(t)

Después de que los estudiantes observan sus resultados y hacen algunos cálculos. Nelly comenta:

-Lo que vemos es que las gráficas se parecen a X(t) y que a lo mejor……. no importa cuantos términos de la serie se tengan porque todas las gráficas que hicimos llegan a ser la misma a partir de cuatro horas aproximadamente, pero no sabemos como explicar eso…….. …………….. Lo que hemos estado haciendo es calcular para t = cuatro horas, cuánto nos da la suma de los términos de la serie………………

¿Y cuánto les dio?

Ubaldo dice que 1.13716

Y ¿qué piensan que significa ese número?

Ubaldo:- Pues……………como la gráfica se parece ó es la misma de X(t), entonces ese valor puede ser la humedad en cuatro horas, pero de acuerdo a la gráfica que teníamos con los datos experimentales, el secado se fue en tres a lo máximo con X = 4.77………………-Entonces estamos calculando que casi todas las gráficas coinciden en cuatro horas para el tiempo y alrededor de ese valor de humedad, x = 1.13716.

- En esas cuatro horas es donde se alcanza más o menos el equilibrio. Agrega Nelly.

Las respuestas de los estudiantes es un indicativo de su entendimiento canónico algorítmico acerca de la convergencia de la serie de Fourier a la función X(t) en el intervalo del tiempo en que la humedad, efectivamente, alcanza un estado estable de variación, considerándose el equilibrio en el secado del coloide. Aún así, que ni Ubaldo ni Nelly reconocen este concepto matemático .

¿Qué característica presentan las curvas resultantes cuando utilizan el valor de x entre 0 y 0.98? (espesor total de la muestra)

Después de que los estudiantes manipulan la calculadora por un lapso de tiempo, Ubaldo comenta:

-Como “x” es la posición en el espesor y el espesor casi 1, entonces nosotros formamos una serie con X = 0.5 y después a 0.8 y después con 1. Las curvas fueron bajando, hasta llegar al eje “x” cuando el espesor es el total. Ellos lo explican con un dibujo que corresponde a la figura. 53.

¿Qué relación tiene esto “de que fueron bajando” con el fenómeno en el secado?

Nelly contesta: -Creemos que sucede cuando ya no hay humedad …..y que ya se salió toda el líquido al haber recorrido todo el espesor de la muestra……………. Entonces es posible que ya no se tenga nada de humedad por eso nos da una recta en “x”……………….porque….. ya es cero……. Bueno eso creo yo.

En estas últimas respuestas, los estudiantes reafirman su conocimiento sobre la convergencia de la serie y el comportamiento de la humedad en el coloide, al deducir la convergencia y el comportamiento teórico del fenómeno al avanzar el líquido hacia la superficie de la muestra y que teóricamente la transferencia de dicho líquido sea completa, presentando un contenido de humedad de cero.

El concepto de convergencia en los estudiantes tiene lugar, desde el seguimiento de las indicaciones y obtención de la grafica correspondiente a una suma de funciones que representan el cambio de humedad para una cierta posición en el espesor, dada por “x” y para cualquier tiempo “t”, obteniendo funciones X(t), las cuales son identificadas por las características de la curva, al referirse al decrecimiento de la misma con el tiempo.

Así el análisis de sus respuestas indican un entendimiento canónico hacia la relación entre la serie y la humedad del coloide cuyo cambio es dado mediante el tiempo.

En referencia al convergencia de la serie y su relación con el equilibrio en el fenómeno, el grupo visualiza a través de las graficas de X(t) que únicamente converge en la última etapa del secado, al indicar que todas las sumas le dan una curva decreciente cuya característica común es la coincidencia que presentan en la última parte de la cuerva, y que es en esta parte donde se alcanza el equilibrio en la humedad del coloide. Esta deducción conforma el concepto de convergencia de la serie de Fourier y la relación con el estado de equilibrio en la transferencia de masa a través de la función X(t) en la que únicamente la serie converge en un intervalo de continuidad de la misma.

En el caso de la humedad en cualquier posición de la longitud del espesor, para un tiempo determinado; la suma de la serie también proporciona esta información a través de la función trigonométrica X(x) donde la suma converge en la última etapa del secado, sin embargo, el grupo presenta problema en su entendimiento.

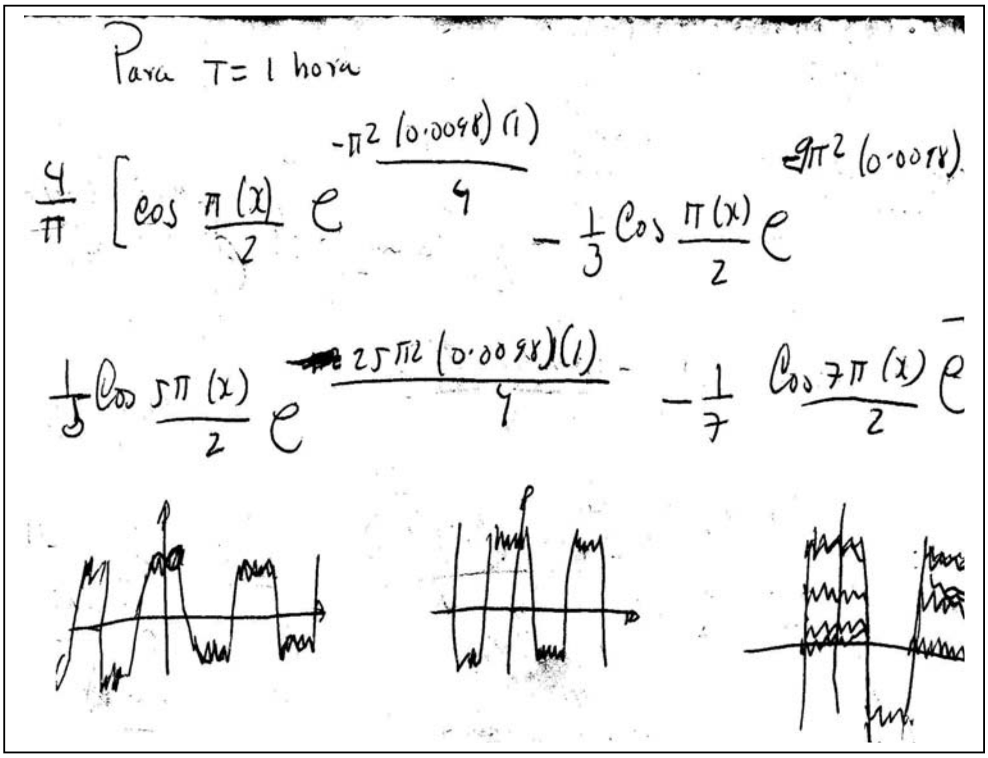


Fig. 51. Representación canónica algorítmica. Determinación de las curvas que representan la sumas parciales que integran a la serie de Fourier

De esta manera, en la obtención de las series, en las graficas correspondientes a las mismas y en su relación con la humedad dada por X(x, t), se reconocen en general representaciones canónicas tales como: la visualización de la suma de la serie, en términos de la convergencia de la misma, al indicar que la suma corresponde a X(t) en un intervalo de la misma función.

Representaciones no canónicas, asociadas al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno y su variación con la posición

A lo largo de las sesiones el despeño de los estudiantes ha estado limitado en lo que se refiere al entendimiento del cambio de humedad con respecto a la posición “x”. En la mayoría de las preguntas con respecto a esta relación, los estudiantes muestran entendimientos no canónicos. Cuando se habla de de este tipo de cambio, ellos son capaces de referirse a las curvas de perfil de humedad que construyeron en la primera sesión, pero han sido incapaces de relacionar dicho perfil con una función X(x) que es representada por una serie de Fourier.
Nuevamente este tipo e entendimiento se muestra en la acción del estudiante ante la actividad siguiente:

Ahora, utilizando la misma expresión de la sumatoria. ¿Cuál es el cambio de humedad en = 1 hora para cualquier posición del líquido en el espesor de la muestra?
Los estudiantes se quedan pensando y comentan entre ellos que es lo que van hacer. Ubaldo le dice a Nelly que solo hay que sustituir el tiempo y obtener la suma. Otra vez igual como lo hicieron pero ahora con t = 1 y dejando a la “x” como variable.
Sustituyen y forman la expresión de la suma con 10 términos y grafican, el resultado lo muestran y vuelven a comentar que el resultado es una gráfica del coseno pero que no saben que quiere decir con respecto al fenómeno.
Ubaldo comenta: - Nos da una grafica del coseno deformada. –Nos da coseno. Dice Nelly y continúa, porque en la parte de la sumatoria donde esta el coseno está la variable y al graficar sale esa curva, pero no sabemos que pasa con el fenómeno.

Tanto Nelly como Ubaldo siguen mostrando un entendimiento no canónico en lo que se refiere al cambio que se produce en la humedad del coloide con respecto a la posición del líquido en el espesor de la muestra.
En esta parte se nota a los estudiantes cansados; ellos llevan dos y media trabajando, por tanto, el investigador decide hacer la siguiente última intervención para dar por terminada la sesión, obteniendo las últimas representaciones.

Representaciones canónicas, no algorítmicas asociadas al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno

En este intervención el investigador busca el reconocimiento de la serie de Fourier como tal, por parte de los estudiantes. Sin embargo los resultados de su entendimiento muestran que la relación entre la serie y el fenómeno existe, pero ellos no saben como expresar matemáticamente dicha relación

Cuando desglosan la sumatoria, es decir le dan valores a n de 0 hasta ∞, ¿qué tipo de expresión obtienen?

Ubaldo pregunta: -¿No entiendo que tipo de expresión?

El investigador le contesta que analice las características que encuentre en la expresión resultante para así mismo la describa. Después de unos minutos, Ubaldo responde y dice lo siguiente:

-La sumatoria como ya lo había dicho Nelly, nos da una serie, entonces esta es una serie que se puede graficar y nos da curvas iguales muy parecidas a X(t)……….

-También nos da otras de coseno pero no sabemos a cual se parece.

Nelly intervienen y dice: -Si, pero acuérdate que se parece a X(t)… pero es igual en la etapa donde la curva es constante.

En esta respuesta que da Nelly, se puede apreciar que ella lo tiene muy claro, la sumatoria converge a la función X(t) en la última etapa de secado que corresponde al equilibrio en el fenómeno.

¿Cómo expresan matemáticamente que la sumatoria es igual a la función X(t) en esa etapa del secado en el comportamiento del fenómeno?

Ubaldo dice que no sabe cómo. Nelly dice que ella tampoco.

Con estas respuestas los estudiantes muestran un entendimiento canónico no algorítmico. Ellos saben la relación que tienen la sumatoria con el fenómeno pero no saben como expresarlo matemáticamente.

Reconocen ¿qué tipo de serie es?

Nelly y Ubaldo, se quedan pensando y después revisan lo que llevan hecho hasta ese momento. Ubaldo interviene y dice que la otra serie que habían hecho era una serie de Taylor, pero que esta no sabían cual era.

Nelly, comenta: -íbamos a decir que también una de Taylor, pero yo creo que no es porque no obtuvimos ninguna derivada como la de Taylor y además, esta otra tiene dos variables.

En esta respuesta, se puede ver que los estudiantes han trabajado con la serie de Fourier, pero que no la reconocen como tal, saben que es una serie infinita de funciones cuya suma proporciona la etapa de equilibrio, sin saber que la serie que representa este comportamiento en el equilibrio.

Para finalizar con la sesión, coméntenme acerca la historia del fenómeno de transferencia de masa en el secado del coloide desde la primera sesión. Con respecto a la forma matemática de hallar el comportamiento del mismo, enfatizando su explicación en la etapa de equilibrio

Los estudiantes empiezan a recordar cuál fue su trabajo en cada una de las sesiones.

Ubaldo dice: -Lo primero que hicimos fue el experimento de secado, de allí, tomamos datos de tiempo y calculamos la humedad de la muestra……………Después graficamos y nos dio una curva X(t) de forma decreciente…. con una recta constante al final. ……. También hallamos el valor del equilibrio con la curva X(t)

¿Y después Nelly?

Nelly reacciona para contestar………Sacamos una ecuación exponencial del cambio de humedad en “t” ……………… Luego derivamos y obtuvimos una serie que nos ayudó a encontrar el valor de humedad en equilibrio.

¿Qué más Ubaldo?

-Los de ahora…..que desarrollamos una sumatoria y nos dio una serie que en la gráfica nos da una curva como la de X(t)…………

¿Es todo?

Los estudiantes contestan que sí, que es todo y Nelly comenta que falta lo del equilibrio.

¿Qué vas a decir del equilibrio Nelly?

-Que el equilibrio se da en la última etapa de secado y que se puede hacer un límite cuando t es infinito para hallar el último valor de humedad…….. También que esas dos series las pueden usar para encontrare ese límite o ese valor.......Ubaldo dice que ya recordó otra cosa, y dice: -También que en la práctica con las condiciones de secado no podemos obtener una humedad de cero, pero sí a partir de la serie cuando la posición del líquido en el espesor es el total de él…….. sólo así da cero.

La última intervención del investigador y las respuestas del grupo, vislumbran aún más que en general, que el entendimiento acerca del fenómeno y su representación a través de la serie de Fourier que presentan los estudiantes son del tipo canónicos. El recuento que se hace de su interacción mediante las preguntas del investigador en esta parte, indican que los estudiantes tienen claro que el fenómeno de transferencia de masa en el secado de un coloide, es medido por el cambio de humedad en el tiempo y que el comportamiento en la etapa en que el secado alcanza el estado estable puede determinarse a partir de una serie que a su vez proporciona el equilibrio en la humedad. Sin embargo el reconocimiento del fenómeno sobre estas bases carece de formalidad matemática.

Por otro lado, a lo largo de las sesiones, el grupo continúa mostrando entendimientos no canónicos en lo que se refiere al fenómeno en términos del cambio de humedad con respecto al recorrido que el líquido teóricamente hace en la muestra. En este mismo recuento el grupo, no recuerda el perfil de humedad, el cual proporciona el cambio en función de la posición para curvas correspondientes a cada tiempo, que pudiera ser un indicativo de las dos variables de las que depende el fenómeno. Tampoco recuerda la ecuación diferencial parcial que expresa dicho cambio y no alcanza a relacionar la serie de Fourier como una función que es el resultado de esa ecuación parcial. Por tanto, la serie, es una representación del fenómeno.

Es así como con esta intervención, termina la quinta sesión y con ésta, la última de ellas, dando por terminado la interacción del estudiante con cuatro situaciones que integran el campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa.

El desglose de las representaciones en esta situación, se dan enseguida:

1. Representación canónica no algorítmica

Esquema de entendimiento

- Canónico: El esquema de entendimiento refleja la comprensión acerca de que existe ecuación que relaciona el cambio de humedad con el tiempo y la posición en el espesor de la muestra y cuya solución proporciona la función que satisface dicho cambio
- Propósitos: 1) Encontrar una expresión matemática que represente el cambio de humedad en términos de dos variables "t" y "x" y su solución

Esquema de solución

- No algorítmico: El grupo establece el cambio de humedad en el tiempo y al longitud del espesor de la muestra mediante una ecuación diferencial que no corresponde a dicho cambio. Asimismo, no presenta herramientas para darle solución

Invariantes:

- Relación del cambio de la humedad que lo define con respecto a dos variables a la ecuación diferencial parcial y de esa manera encontrar la función de humedad X en términos de "x" y de "t"

3. Representación canónica-algorítmica

Esquema de entendimiento

- Canónico: El esquema de entendimiento refleja, la obtención de diferentes series a través del desarrollo de una sumatoria para obtener a X(t) y la representación gráfica de dichas series
- Propósitos: Obtener series y su representación gráfica para identificar a la función X(t) como la humedad en función del tiempo

Esquema de solución

- Algorítmico: El grupo sustituye valores de "x" para encontrar a X(t) a través de conformar la serie, cuyo términos resultan al desarrollar la sumatoria con valores de $n = 0$ hasta $n = 25$ y de esa manera hallar su suma, considerando que la suma es aproximadamente igual o igual cuando "n" va de 0 hasta ∞.

Invariantes:

- Desarrollo de una sumatoria, conformación de una serie de funciones, suma de funciones, grafica de una suma de funciones y obtención de una suma infinita de funciones

4. Representación canónica asociada a la serie de Fourier

Esquema de entendimiento:

- Canónico: El grupo muestra un entendimiento canónico al representar a la serie como una suma de funciones cuyo resultado es una grafica que corresponde en una cierta porción de la curva X(t)

- Propósitos: Obtención de la suma de la serie, su gráfica y la relación correspondiente a la curva X(t)

Esquema de solución:

- No algorítmico. Este esquema se presenta cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con su suma, aunque es congruente con el esquema de entendimiento canónico

Invariantes:

- Suma de una serie de funciones y la convergencia de una suma de funciones

5. Representación canónica de la serie de Fourier asociada al fenómeno de transferencia de masa

Esquema de entendimiento:

- Canónico: El grupo atribuye el comportamiento de la suma de la serie al fenómeno, al representar la humedad X(t) en la última etapa de secado en la que se llega al equilibrio

- Propósitos: Identificación de la suma de la serie en la última etapa del secado correspondiente al equilibrio en el fenómeno

Esquema de solución:

- No algorítmico. Este esquema se presenta cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con el equilibrio del fenómeno, aunque es congruente con el esquema de entendimiento en el comportamiento del fenómeno en esta etapa, desconociendo el término matemático y su relación con el fenómeno

Invariantes:

- Suma de una serie de funciones

- Equilibrio en el fenómeno

Conclusión

Desde las primeras sesiones, los estudiantes han mostrado entendimiento del fenómeno al identificar que el cambio de humedad se puede analizar por el tiempo en que dura la operación y por la posición en que se encuentra la humedad en la longitud del espesor que tiene la muestra, esta última por el perfil de humedad que han construido. De estas dos relaciones, la primera relación ha sido más fácil de identificar para el grupo, que la segunda. Esto es, debido a que la humedad puede ser calculada en base al peso que se tiene en un cierto tiempo y además es visible el líquido contenido en la muestra y el cambio que sufre a medida que el tiempo pasa, mientras que en la segunda, se tendrían que hacer cortes en la longitud del espesor para analizar la posición en la cual se encuentra la humedad en un cierto tiempo. Y con respecto al perfil de humedad este proporciona el cambio de esta propiedad, dado un espesor y una curva de tiempo, sin proporcionar el comportamiento del mismo. Por tanto en esta última situación el grupo ha presentado problemas y dificultades para relacionar la serie con el cambio de humedad en cualquier posición del espesor de la muestra en un tiempo determinado.

La actuación de los estudiantes, arroja resultados que en general se pueden identificar como representaciones canónicas provenientes de un entendimiento sobre la relación que guarda una serie con el fenómeno de transferencia de masa. El seguimiento del grupo, comprende conceptos de la serie de Fourier que son atribuidos al comportamiento del fenómeno, sin que se haya reconocido que se trata de este concepto matemático, ni los aspectos que lo definen; tal es el caso del reconocimiento que tiene lugar acerca de la suma de funciones que proviene de la serie y que representa a la función X(t) y que converge a la misma.

Por tanto, lo rescatable en el desenvolvimiento del grupo en estas dos sesiones, es el entendimiento y la relación que establecen sobre el comportamiento de la humedad del coloide en función del tiempo y su especificación por una función X(t), mediante la suma de funciones de una serie que es desconocida y que los estudiantes la describen, en términos de una suma que representa la humedad en el tiempo en la última etapa de secado, dando información del comportamiento del fenómeno al alcanzar el equilibrio. Esta conceptuación del grupo, en matemáticas, conforma el concepto de convergencia de la serie de Fourier.

En el marco de estos resultados, se concluye la interacción del estudiante en el campo conceptual de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa.

4.2. RESULTADOS GENERALES DEL ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO. Conceptuaciones del grupo de enfoque

Las conceptuaciones, son referidas a un conocimiento pragmático como resultado de la actividad de dos estudiantes que conforman un grupo de enfoque, en situaciones que integran el campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa, durante cinco sesiones de trabajo. Por tanto, las conceptuaciones referidas, son expresadas como conocimientos que surgen de la práctica sobre el contexto en el que se actúa.

La determinación de las invariantes operatorias en el análisis del conocimiento, conduce a la especificación de estas conceptuaciones. Estas se basan en los estudios de la variación en las representaciones que surgen en el entendimiento y solución de problemas característicos de la tarea en la situación.

Los resultados de dichas conceptuaciones, se presentan en una tabla, de acuerdo a la descripción de la tarea que comprende la situación, los conceptos implícitos en cada una de ellas, las invariantes operatorias que se identifican en las representaciones del grupo y a partir de estas, las conceptuaciones que tiene lugar.

S I T U A C I Ó N 1: Reconocimiento del fenómeno

Tarea	Conceptos	Invariantes operacionales del grupo	Conceptuaciones del grupo
El reconocimiento experimental del fenómeno. Las actividades se centran en la determinación del cambio de humedad en la sustancia a través del tiempo y la identificación de la transferencia de masa del líquido que contiene un coloide a secar, dada en términos del cambio de humedad que sufre la sustancia a través del tiempo.. Teóricamente el cambio es infinito, lo cual origina que exista un límite en el contenido de humedad de la sustancia y en la cantidad de líquido transferido, proporcionando la etapa del estado estable del secado y el punto en el cual se considera el equilibrio en el fenómeno.	1) Transferencia de masa en un proceso de secado 2) Cambio de humedad de la sustancia a secar en el tiempo 3) Condiciones externas de secado que influyen en el proceso y condiciones internas que rigen el comportamiento del fenómeno de transferencia de masa 4) Equilibrio en el fenómeno	1) El contenido de humedad de la sustancia mediante el concepto de la diferencia de peso 2) El cambio en el contenido humedad de la sustancia para diferentes tiempos de secado. 3) Reconocimiento de la etapa de equilibrio en el secado	La relación del peso de la muestra húmeda y el peso de la muestra seca proporciona el contenido de humedad de la muestra El contenido de humedad disminuye con el tiempo de secado En el transcurso del tiempo, la humedad va disminuyendo hasta que ya no se puede tener más transferencia de líquido, en esta parte se llega al equilibrio.

S I T U A C I Ó N 2. Determinación de la curva de humedad X(t)

Tarea	Conceptos	Invariantes operacionales del grupo	Conceptuaciones del grupo
Establecer una relación entre el contenido de humedad en la sustancia y el tiempo, mediante una curva cuyo identificación conduce a X(t): el comportamiento de la humedad en función del tiempo. Construcción de un perfil de humedad, cuya identificación conduce al comportamiento de la humedad de la sustancia en función del tiempo y de un punto en el espesor de la muestra de la sustancia a secar. Determinación del área bajo la curva de X(t) mediante la suma de los n-rectángulos que la conforman. El área proporciona la cantidad de líquido transferido. Las características de las curvas X(t) y el perfil de humedad, destacan la etapa donde el secado alcanza el equilibrio.	1) Relaciones matemáticas: R = {(t, X) / t, X cumplen con un regla de orden = X(t)} 2) Funciones decrecientes 3) El área bajo la curva de X(t), dada mediante la suma de las áreas de los rectángulos que integran X(t) en [a, b] por la expresión: A= $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} X(t_k - X(t_{k-1})$ 4) Relación del cambio de humedad de la muestra en el secado con un tiempo ilimitado en que teóricamente se realizaría la operación: cambio de humedad decreciente cuyo límite es la humedad en equilibrio: lim X(t) = X* cuando t tiende a infinito 5) Relación del cambio de humedad en el tiempo y en la longitud del espesor de la muestra mediante el perfil de humedad	1) Concepto del infinito 2)Relaciones: R = {(t, X) / t, X cumplen con un regla de orden = X(t) 3) Área de un rectángulo 4) Área bajo la curva de una función mediante la suma de las área de los n rectángulos inscritos en esa curva 5) Área bajo la curva de una función mediante la suma de las áreas de los n rectángulos inscritos en esa curva. 6) Transferencia del líquido proporcional al cambio de humedad del coloide, 7) Estabilidad en el cambio de humedad con el tiempo 8) Límites que alcanza el fenómeno en la estabilidad del proceso	La relación entre la humedad y el tiempo dan una curva de humedad en función del tiempo, expresada por X(t). La curva que representa a X(t), es decreciente y a través de ella se pude saber la disminución de la humedad en el transcurso del tiempo y el límite en el contenido de humedad cuando el tiempo tiende a ser infinito. Con el perfil de humedad se puede conocer la humedad para una curva determinada de tiempo y un punto en el espesor de la muestra. El área bajo la curva de X(t), determina la transferencia del líquido del coloide.

S I T U A C I Ó N 3. Determinación de la función característica de X(t) y su representación en serie de potencias: Taylor

Tarea	Conceptos	Invariantes operacionales del grupo	Conceptuaciones del grupo
Determinar la expresión matemática que representa la curva del contenido de humedad en función del tiempo, correspondiente a X(t) Dado el patrón de una serie de potencias, representar la expresión matemática hallada, mediante una serie de potencias. (serie de Taylor) Identificación de la función exponencial como la solución de la ecuación diferencial que describe el cambio en la humedad de forma decreciente con el tiempo. Identificación de la serie de potencias como la representación de la función exponencial. Identificación de la convergencia de la serie a la función X(t) y la posibilidad de representar dicha función mediante una suma infinita de funciones. Nuevamente se destaca el equilibrio en el fenómeno.	1) Relación del cambio de humedad en el tiempo y en la longitud del espesor de la muestra mediante el perfil de humedad 2) El concepto de derivada como un cambio de humedad para un tiempo t: dX/dt 3) Ecuación diferencial lineal de primer orden que representa el comportamiento del cambio de humedad del coloide en función del tiempo en que se somete al secado: $dX/dt = K_g X$ 4) Solución general y particular de la ecuación diferencial, dada por una función exponencial 5) Límite de la función X(t) cuando t $\rightarrow \infty$ 6) Derivadas sucesivas de la función X(t) 7) Representación de X(t) mediante una serie de potencias dada por: X(t) = X(c) + X´(c)(x-c) +X´´(c) /2! $(t\text{-}c)^2$ +…..+X^n (c)/n!$(x\text{-}c)^n$ + … …. 8) Relación de la suma de la serie de Taylor con el comportamiento del fenómeno 9) Convergencia de una serie de Taylor a la función X(t)	1)Dominio y continuidad de una función que representa la humedad en el tiempo de secado. Función decreciente que describe la humedad en el tiempo. 2) La derivada como una razón de cambio. para establecer una ecuación diferencial. Solución general y particular de la ecuación diferencial 3) Derivadas sucesivas, evaluación de una función dado un valor del dominio, obtención de los coeficientes de los términos que conforman a la serie de potencias. 4) La suma numérica de una serie atribuida a la convergencia d la misma y a su vez al equilibrio en el fenómeno.	La expresión que describe el cambio en el contenido de humedad en función del tiempo, es una función exponencial bajo un cierto dominio. La serie de potencias hallada a partir de la expresión exponencial, no describe el cambio en el contenido de humedad en función del tiempo. La suma infinita de las funciones que conforman una serie de potencias no describe el cambio en el contenido de humedad en función del tiempo. La suma infinita de una serie numérica proveniente de una serie de potencias, representa el valor al cual la humedad del coloide llega al equilibrio.

S I T U A C I Ó N 4: Determinación de la serie de Fourier que representa el comportamiento del fenómeno en el equilibrio

Tarea	Conceptos	Invariantes operacionales del grupo	Conceptuaciones del grupo
Determinación de la ecuación diferencial parcial que describe el cambio de humedad en función del tiempo y de la posición en el espesor . Determinación de la solución del ecuación parcial. Identificación de la serie de Fourier como la solución de la ecuación Identificación de la serie de Fourier como la función que describe el comportamiento del cambio de humedad del coloide en función del tiempo y de la posición en el espesor. Identificación de la convergencia de la serie de Fourier a la función X(t) en la última etapa del secado correspondiente al estado estable del fenómeno y en el cual se llega al equilibrio.	1) Ecuaciones lineales en derivadas parciales 2)Método de separación de variables para resolver una ecuación diferencial parcial lineal 3)Condiciones limitantes para resolver una ecuación diferencial parcial lineal 4)Serie infinita de unciones trigonométricas 5)Suma de una serie de Fourier 6)Convergencia de una serie de Fourier 7)Definición de una función no periódica definida en un intervalo finito, mediante una serie de Fourier 8)Representación de una función no periódica mediante una función periódica que proviene de una serie de Fourier 9)Equilibrio en el fenómeno de transferencia de masa 10)Cambio de humedad en el coloide en función del tiempo y posición en el espesor de la muestra	1) Relación del cambio de la humedad con respecto a dos variables a través del perfil de humedad. 2) Desarrollo de una sumatoria de funciones con el reconocimiento de los límites que la determinan. 3) Conformación de una serie de funciones 4) Suma infinita de funciones 5) Grafica de una suma infinita de funciones 6) Suma de una serie de funciones asociada al fenómeno 7) Suma de una serie de funciones, correspondiente al equilibrio en el fenómeno	La ecuación que representa el cambio de humedad en función del tiempo y de la posición en el espesor, es una ecuación diferencial ordinaria que contiene dos variables: tiempo y posición. La solución de dicha ecuación, es el resultado de la operación dos funciones que contienen al tiempo y a la posición como variables. Una serie desconocida representa al cambio de humedad en función del tiempo. Esto es, porque la gráfica de la suma infinita de funciones que conforman a al serie se parece a la curva de X(t).

CONCLUSIONES

Con el propósito de entender el conocimiento que surge en la interacción con un contenido conceptual que conlleva la relación entre dos contextos diferentes: matemáticas e ingeniería, el trabajo de investigación expuesto, describe el conocimiento de un grupo de dos estudiantes de Ingeniería Química, relativo a un campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa.
El análisis realizado comprende dos planteamientos: La integración de un campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa, tomando como referencia el estudio de los elementos que intervienen en la relación de una estructura matemática en un contexto determinado. Y el estudio del conocimiento de un grupo de estudiantes al interactuar con un campo conceptual de esta naturaleza.
Ambos planteamientos, se encuentran enmarcados en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. La integración del campo conceptual, se establece en términos de un conjunto de situaciones y un conjunto de conceptos interrelacionados que constituyen un medio de análisis sobre el cual se describe el conocimiento que se presenta durante la actividad de realizar tareas circunscritas en el campo conceptual referido.
El estudio del conocimiento se entiende en términos del análisis de la forma invariante de organización de la actividad y de la conducta para esta clase de situaciones, bajo esquemas de entendimiento y solución a problemas implícitos en dichas situaciones. Este aspecto constituye el fundamento de Vergnaud, para explicar de qué manera se produce y se organiza la actividad del niño en la resolución de problemas como producto de sus esquemas mostrados en sus representaciones.

El planteamiento de Vergnaud, resalta la integración del conocimiento como un proceso de conceptuación en relación a las múltiples nociones que aparecen conectadas en la resolución de problemas. Sus investigaciones son dirigidas a los campos conceptuales de estructuras aditivas y multiplicativas.

Este modelo teórico de Vergnaud, es trasladado en esta investigación, en el nivel superior en el área de la ingeniería, teniendo como producto un campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa, que ha sido conformado por un conjunto de cuatro situaciones, con problemas que provienen del contexto y son alusivos al secado de un cierto tipo de sustancia y, un conjunto de conceptos determinados por la relación contextual entre las dos estructuras que subyacen en el campo conceptual.

El estudio del conocimiento describe el desenlace del análisis de la variación en las representaciones en el entendimiento y solución de los problemas planteados en las situaciones, de acuerdo a Flores (2000), posibilitando la identificación de invariantes operatorias en las conceptuaciones de los estudiantes.

La información de dichas representaciones, se establece en base a la actividad de dos estudiantes, en un grupo de enfoque que es conducido por el investigador durante cinco sesiones de trabajo, ubicadas en el medio situacional y conceptual descrito. Los resultados de este trabajo dejan ver, entendimientos categorizados como canónicos, acerca de la representación del comportamiento de la transferencia de masa en términos del cambio de humedad en función del tiempo, mediante la suma de una serie trigonométrica infinita. Y de representaciones no algorítmicas en la solución correspondiente a los problemas que generan dicho entendimiento. Asimismo de representaciones no canónicas sobre el entendimiento y solución en problemas relativos a la representación, mediante la serie de Fourier, de el cambio de humedad que tiene lugar en la última etapa de secado y que está en función del espesor de la muestra a secar. Con invariantes operatorias que corresponden a dichas representaciones y que generan conceptuaciones de la transferencia de masa alrededor de una serie trigonométrica infinita que no es identificada como una serie de Fourier.

BIBLIOGRAFÍA

Albert, A. (1996). *La convergencia de Series en el Nivel Superior. Una Aproximación Sistemática.* Tesis Doctoral. CINVESTAV-IPN, México.

Bonilla, R. E., Block, D., Waldegg, G. (1993). *La investigación Educativa en los ochenta, perspectiva para los noventa: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* México: Segundo Congreso Nacional de Investigación Educativa Estados del conocimiento, cuaderno 10

Camarena, P. (1984). *El currículo de las matemáticas en Ingeniería*. Mesas Redondas sobre la definición de las líneas de investigación. IPN, México.

Camarena, P. (1987). *Diseño de un Curso de Ecuaciones Diferenciales en el Contexto de los Circuitos Eléctricos*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena, P. (1993). *Curso de Análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas.* Editorial. ESIME-IPN, México

Camarena, P. (1995). *El contexto de las Ecuaciones Diferenciales Lineales*. 6° Coloquio Académico. ESIME-IPN, México.

Camarena, P. (1997). *La Matemática en Contexto.* Novena reunión Centroamericana del Caribe Sobre formación de profesores e Investigación en Matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional, México.

Camarena, P. (1999). *Hacia la Integración del Conocimiento: Matemáticas e Ingeniería.* 2° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas.

ESIME-Zacatengo-IPN, México.

Camarena, P. (2001). *Los motivadores en la clase de matemáticas en carreras de Ingeniería.* Memorias del IX Congreso Internacional de Investigación y Desarrollo Educativo en Educación Superior Tecnológica. CIIDET, Querétaro, Querétaro.

Farfán R. (1995). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C. V.

Flores, R. C. (2002). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación.* Tesis de Doctorado en Educación. Aguascalientes. Ags. México.

Fourier J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur.* Chez Firmin Didot. Pere et fils Librairers pur les Mathématiques L´architecture hydraulique et lamarine. Rue Jacob. No. 24. París. Reimpressions Editions Jaques Gabay (1988).

Guerrero A. (1997). *El proceso de enseñanza de aprendizaje de las operaciones elementales* (desde una perspectiva de la psicogenética). Tesis de Doctorado en Pedagogía. Facultad de filosofía y Letras. UNAM.

Muro, C. (2000). *La significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa.* Tesis de Maestría en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de las Matemáticas. México.

Muro, C. (2001). *Las representaciones del estudiante sobre la noción de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa.* Ponencia. XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Buenos Aires Argentina.

Muro, C. (2002). *Estudio de las concepciones del estudiante sobre la noción de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa*. Ponencia. XVI Reunión

Latinoamericana de Matemática Educativa. La Habana, Cuba.

Muñoz, G. (1998). *Las relaciones entre lo Conceptual y lo algorítmico: El caso de la Integración.* Serie Antologías No. 3. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Muñoz, G. (2000). *Elementos de enlace entre lo Conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 3, num. 2. pp. 131-170. Internacional Thomson Editores.

Muñoz, G. (2002). *Génesis Didáctica del cálculo Integral: El caso de la relación entre lo Conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral.* Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. La Habana, Cuba.

Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Las matemáticas y su aplicación la perspectiva del niño. México: Siglo XXI editores. (Traducido del inglés 1996).

Piaget J. (1970). *Structuralism.* New York, harpet & Row.

Piaget J. (1973). *Teoría del pensamiento como Estructuras Cognitivas.* New York.

Piaget J. (1964). *Biología Y Conocimiento (ensayo sobre las relaciones entre las Regulaciones Orgánicas y los Procesos Cognoscitivos.* New York, harpet & Row

Ulín, C. (1984). *Análisis Histórico critico de la Difusión del calor: El trabajo de Fourier.* Tesis de Maestría CINVESTAV-IPN, México.

Vargas, S. J., López, L. A. (1988). *La adquisición de las operaciones aritméticas mentales en los niños de primaria.* México: DGEE, SEP/OEA

Vergnaud, G. (1985). *Quelquel orientations theoriques et methodologiques des recherches trancaises en didactique des mathematiques.* Conferencia plenaria o proceeding PME 5. París.

Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales.* CNRS y Université René Descartes. París.

Vergnaud, G. (1990). *Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In P. Nesher and J. Kilpatrick. (Ed.). Mathematics and Cognition:* A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. pp.(14-30). Cambridge University Press.

Vergnaud, G. 1994. *El Papel del Enseñante a la Luz de los Conceptos de esquema y del Campo Conceptual"(*Le role de I´enseignant á la lumiére des concepts de schéme et de champ conceptuel). París.

Verganud, G. (1996). *The Theory of conceptual fields*. En: L. Steffe; P. Nesher, P. Cobb, G. a: Goldín, B. Greer. (EDS) Theories of mathematical learning (219-240). Mahwah NJ: Lawrence Eribaum Associates, Publishers.

Verganud, G. (1997). *El niño las matemáticas y la realidad*. México Trillas. (traducido del francés, 1985).

Verganud, G. (2000). *Constructivism et apprentissage des mathematiques*. Trabajo presentado en la Conferencia sobre constructivismo en Ginebra Suiza.

Verganud, G., Durand, C. (1976). *Structures additives et complexité psychogénétique.* Revue Francaise, de Pédagogie, 36, 28-43.