



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD ZACATENCO

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias
en Ingeniería Mecánica

Por: M. en C. Manuel Mauricio Galán Vera

Análisis cinemático de sistema mecánico con
control giroscópico para ascenso y descenso
de escaleras en una silla de ruedas para
pacientes hemipléjicos con lesiones torácicas
en t4 y menores

Directores de tesis:

Doctor en ciencias
en Ing. mecánica:

Dr. Luís Héctor Hernández Gómez
Profesor titular de la SEPI-ESIME Zacatenco

Doctor en ciencias
en física:

Dr. Juan José Godina Nava
Profesor titular del Depto. de física del CINVESTAV

2010

RESUMEN

Las lesiones de la médula espinal se derivan generalmente en complicaciones graves e irreversibles para la persona que sufre un traumatismo de esta naturaleza, uno de los más grandes temores después de un evento de esta naturaleza es la pérdida de la movilidad. Nuestro cuerpo fue diseñado para estar en movimiento, su configuración tan sofisticada nos permite desplazarnos a grandes distancias con poca energía, somos los únicos seres sobre el planeta capaces de poder desplazarse a casi cualquier punto de la Tierra y en ocasiones solo caminando largas distancias a paso constante, esta característica nos permite ser activos y desarrollarnos en los diferentes ámbitos y espacios a los que nos trasladamos a diario, el carecer de esta posibilidad nos frustraría a menos que encontremos alternativas factibles que nos permitan ampliar las posibilidades de movilidad; el modelo de la silla de ruedas para subir y bajar escaleras que se desarrolló en esta investigación es el producto de una idea novedosa basada en el análisis de otras opciones similares y fundamentada en los conocimientos de la mecánica de LaGrange, la teoría de los giroscopios y los elementos fundamentales que tiene que ver con los aspectos ergonómicos como son los estudios antropométricos, así como la biomecánica que nos brinda parámetros para determinar la movilidad relativa de un paciente que ha sufrido alguna lesión medular que se ha traducido en parálisis de extremidades. El conjunto de estos conocimientos destaca la intención de conocer a fondo los elementos que intervienen en el desarrollo de un sistema que pueda brindar autonomía pero con seguridad.

El trabajo está dividido en cinco capítulos, en el capítulo uno se da una descripción general de las características de la columna vertebral y las lesiones comunes que en ocasiones repercuten en lesión medular, también se enmarcan los tipos de sillas de ruedas que regularmente se encuentran en el mercado para finalizar con una descripción general del problema a resolver. El capítulo dos que se refiere al Marco teórico, contiene el resumen de la teoría empleada para el análisis del sistema mecánico, desde una perspectiva matemática, se incluye la mecánica de LaGrange, la teoría del cuerpo rígido, los giróscopos y la teoría de control. El capítulo tres comienza con el resumen de un estudio antropométrico realizado en los estados de Sonora y Sinaloa, estos datos son de gran importancia para la definición de las dimensiones de la silla, también se hace una reseña de los aspectos relevantes de la norma ISO/DIS 7176-28 que describe los requerimientos y métodos de prueba de los dispositivos para subir escaleras; también se proporcionan algunas referencias de patentes desarrolladas para conseguir este fin de subir y bajar escaleras, finalmente se concluye con una idea del concepto de diseño propuesto para atacar el problema del ascenso y descenso de escaleras por medio de una silla de ruedas autónoma. En el capítulo cuatro titulado Metodología y análisis preliminares, se desarrolla todo el análisis matemático y las simulaciones con los modelos matemáticos para caracterizar el sistema cinemático y dinámico. El capítulo cinco resume los resultados obtenidos de las simulaciones, la interpretación de los gráficos de estabilidad y la evaluación de las diferentes configuraciones. Finalmente se describen las conclusiones a las que se llegó en esta investigación y se dan las directrices para continuarla.

ABSTRACT

Is very common that the spinal cord injuries finishing in serious and irreversible complications for the person who suffers a trauma of this nature, one of the greatest fears after an event of this nature is the loss of mobility. Our body was designed to be moving, its sophisticated architecture allows us to move great distances with few energy, we are the only beings on the planet able to travel to almost any point on Earth and sometimes just walking long distances by constant step, this feature allows us to be active and develop in different areas and spaces to which we moved daily, the lack of this option would defeat us unless we find feasible alternatives that help us to increase the mobility opportunities, the wheelchair model developed to up and down stairs in this research is the product of a novel idea based on the analysis of other similar options and on mechanics of LaGrange knowledge, the gyroscopes theory and the key ergonomic aspects such as anthropometric surveys, as well as the biomechanics that gives us parameters to determine the relative mobility of a patient who has suffered a spinal cord injury which resulted in limbs paralysis. All this knowledge underlines the intention to understand better the involved elements to develop a system that would provide safety autonomy.

The work is divided into five chapters, Chapter One gives an overview of the spine characteristics and common injuries that sometimes affect spinal cord injury, also a general information about the typical and commercial wheelchairs that was found in the market to finish with a general description of the problem definition. Chapter two concerns the theoretical framework, including the summary of the theory used for the analysis of the mechanical system, from a mathematical perspective, it includes the mechanics of LaGrange, the theory of rigid body, the gyroscopes and control theory. Chapter three begins with a summary of an anthropometric study conducted in the states of Sonora and Sinaloa, these data are important for defining the dimensions of the chair, also provides an overview of relevant aspects of ISO / DIS 7176-28 that describes the requirements and test methods for devices to climb stairs; also provides some references to patents developed to achieve this so up and down stairs, finally concluded with an idea of the concept design proposed to attack the problem of ascent and descent of stairs by an autonomous wheelchair. In chapter four entitled Methodology and preliminary analysis; it develops all the mathematical analysis and simulations with mathematical models to characterize the kinematics and dynamic. Chapter five summarizes the results of the simulations, the charts interpretation of stability and the evaluation of different configurations. Finally we describe the conclusions reached in this investigation and are given guidelines to continue.

OBJETIVO

El presente trabajo tiene por objeto desarrollar y caracterizar el diseño cinemático de un sistema mecánico que permita el ascenso y descenso de escaleras implementado a una silla de ruedas para pacientes hemipléjicos, cuya discapacidad se deba a una lesión de la medula espinal al nivel torácico T4 o menor, lo cual implica que se conservará la movilidad de las extremidades superiores y el control parcial del tórax, esto será un requisito fundamental para ser un candidato viable para el uso de un sistema autónomo como este. El interés fundamental de este trabajo de investigación consiste en el desarrollo de un modelo matemático y el análisis cinemático y dinámico de un sistema mecánico que sea capaz de ascender y descender escaleras rectas convencionales; la intención es contribuir en el desarrollo de un medio de transporte que aumente la calidad de vida de las personas hemipléjicas de nuestro país, auxiliándolos con un vehículo autónomo, seguro y económico, que les permita tener mayores posibilidades que las que presta una silla de ruedas convencional, al facilitarles el ascenso y descenso de escaleras que se encuentran comúnmente en lugares públicos como museos, bibliotecas, escuelas, restaurantes, etc.

JUSTIFICACIÓN

El problema de la autonomía en las personas hemipléjicas es un tema complicado, principalmente por que las ciudades no están diseñadas para facilitar el tránsito en silla de ruedas. Actualmente existen sistemas que facilitan la autonomía, sin embargo son muy costosos y diseñados para tareas muy específicas, como son el conducir un auto modificado, subir a un transporte público, transitar en un supermercado, etc. Además ya existen sistemas que ayudan en la tarea de subir o bajar escaleras sobre una silla de ruedas, aunque por el alto riesgo que la tarea implica, los sistemas requieren de un control muy fino y algoritmos complejos, así como de mecanismos muy sofisticados, lo cual incrementa significativamente los costos y hace de estos equipos algo inalcanzable para la mayoría de las personas con este problema.

En este trabajo doctoral se pretende proponer un sistema novedoso con base en el análisis del problema desde una perspectiva cinemática y dinámica, aprovechar los recursos y los conocimientos para diseñar un sistema que sea idóneo para la tarea propuesta, el análisis del desempeño cinemático y dinámico se desarrollará empleando herramientas como son los software de simulación, la teoría newtoniana, el análisis de mecanismos y la matemática Lagrangiana, con el objeto de validar y/o encontrar los puntos clave en el diseño del dispositivo para esta aplicación.

Los resultados de esta investigación contribuirán significativamente a la solución de este problema. Los trabajos recientemente publicados al respecto marcan la pauta sobre lo que hasta el momento se ha realizado, los factores más relevantes a considerar en este tipo de dispositivos son la seguridad y la economía, por lo que uno de los objetivos primordiales de esta investigación consiste en abarcar ambos criterios de diseño, en relación a la seguridad se ha considerado ampliamente la normatividad publicada para equipos de esta índole, contenidos en la norma ISO/DIS 7176-28, otro de los factores de diseño son los aspectos dimensionales que se derivan de las características antropométricas de los mexicanos.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	i
Abstract	ii
Objetivo	iii
Justificación	iii
Índice general	iv
Índice de cuadros y gráficas	viii
Índice de Figuras	ix
Introducción	xii
Capítulo 1 Estado del arte	1
1.1 La columna vertebral	1
1.1.1 Características de las vértebras	2
1.1.2 Caracteres peculiares de las vértebras de cada región	5
1.1.3 Formas de lesión de la columna vertebral	10
1.2 Médula espinal	13
1.2.1 Características de la médula espinal	13
1.2.2 Traumatismos de la médula espinal	15
1.2.3 Conceptos de lesión medular	15
1.2.4 Síntomas de la lesión medular	16
1.3 Cifras de la discapacidad en México	17
1.4 Sillas de ruedas	18
1.4.1 Sillas manuales	19
1.4.2 Sillas de ruedas bimanuales impulsadas por las ruedas traseras	20
1.4.3 Sillas de ruedas manejadas por un acompañante	21
1.4.4 Sillas de ruedas eléctricas	22
1.4.5 Sillas de ruedas eléctricas comerciales	22
1.5 Sillas especiales	23
1.5.1 Silla de ruedas híbrida robótica	24
1.5.2 Robot con piernas	25
1.5.3 Sistema independiente de movilidad “ibot”	25
1.5.4 Sistema de elevación “bounder plus h-frame”	28
1.6 Planteamiento del problema	29
1.7 Referencias	31
Capítulo 2 Marco teórico	33
2.1 Ecuaciones de Euler Lagrange, constricciones holonómicas y no holonómicas	33

2.1.1	Definiciones básicas y notación	33
2.1.2	Principio de los trabajos virtuales (D' Alembert)	34
2.1.3	Ecuaciones de LaGrange	35
2.1.4	Invariancia de las ecuaciones de LaGrange y simetrías	41
2.2	Cuerpo rígido	45
2.2.1	Cinemática	45
2.2.1.1	Matrices de rotación	47
2.2.1.2	Ángulos de Euler	48
2.2.2	Dinámica	51
2.2.2.1	Energía cinética	51
2.2.2.2	Teorema de Steiner	53
2.2.2.3	Momento angular	54
2.2.2.4	Ejes principales del tensor de inercia	55
2.2.3	Ecuaciones de Euler	57
2.2.4	Movimiento del cuerpo solido libre	59
2.2.4.1	Construcción de Poinsot	59
2.3	Giroscopio	61
2.4	Teoría de control	68
2.4.1	Estabilidad de los puntos de equilibrio	69
2.4.2	Estabilidad en el sentido de Lyapunov	71
2.4.2.1	Segundo método o método directo de Lyapunov	72
2.5	Bibliografía	74
Capítulo 3 Diseño Conceptual		
3.1	Antropometría para discapacitados	75
3.1.1	Antropometría	75
3.1.2	Antropometría de discapacitados en México	76
3.2	Resultados de los datos característicos de las personas estudiadas	80
3.2.1	Sexo	80
3.2.2	Edad	81
3.2.3	Tiempo de uso de la silla de ruedas	81
3.2.4	Observaciones de los resultados de la muestra	81
3.3	Aspectos relevantes de la norma ISO/dis 7176-28 requerimientos y métodos de prueba de los dispositivos para subir escaleras	82
3.3.1	Introducción	82
3.3.2	Alcance	83
3.3.3	Equipo para la prueba	83
3.3.3.1	Escalera recta	83

3.3.3.2	Descanso de la parte superior	85
3.3.3.3	Plano horizontal de la prueba	85
3.3.3.4	Bolsa sustituto	85
3.3.4	Estabilidad estática	85
3.3.4.1	Estabilidad en el terreno plano	85
3.3.4.2	Estabilidad en las escaleras	86
3.3.5	Estabilidad dinámica	87
3.3.5.1	Prueba ascendente en transición superior	88
3.3.5.2	Prueba descendente en transición superior	88
3.3.5.3	Prueba ascendente en transición inferior	88
3.3.5.4	Prueba descendente en transición inferior	89
3.4	Referencia de patentes	89
3.4.1	Chasis para vehículo capaz de atravesar sobre obstáculos (patente us 4,061,199)	89
3.4.2	Control de balanceo de un vehículo personal (patente us 6,799,649 b2)	90
3.4.3	Transportador para elevar sillas de ruedas en escaleras (patente us 4,771,839)	91
3.5	Introducción al concepto mecánico de la silla	92
3.6	Antecedentes del diseño	94
3.7	Concepto de diseño	97
3.8	Referencias	100
Capítulo 4 Metodología y análisis		101
4.1	Caso generalizado	101
4.1.1	Movimiento de un carro de 4 ruedas guiables en un plano horizontal	101
4.1.1.1	Definición de las velocidades vectoriales	102
4.1.1.2	Restricciones no holonómicas	106
4.1.1.3	Descripción de la dinámica	109
4.1.1.4	Ecuaciones de movimiento	111
4.1.1.5	Control para el movimiento en el plano	116
4.2	Descripción del movimiento del sistema de seis ruedas en el plano	118
4.2.1	Determinación de las velocidades	119
4.2.2	Restricciones no holonómicas caso particular	121
4.2.3	Descripción de la dinámica caso particular	122
4.3	Análisis cinemático	123
4.4	Referencias	127
Capítulo 5 Evaluación de resultados		128

5.1	Simulación del modelo 3d del sistema de seis ruedas	128
5.2	Implicaciones del tamaño de las ruedas y la separación entre ejes sobre la estabilidad y la energía consumida	131
5.3	Referencia	137
	Conclusiones y trabajo a futuro	138
	Anexos	140

ÍNDICE DE CUADROS Y GRAFICAS

Tabla 3.1	Primera parte de la carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.	77
Tabla 3.2	Segunda parte de la carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.	77
Tabla 3.3	Primera parte de la carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.	78
Tabla 3.4	Segunda parte de la carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.	79
Gráfica 3.1	Orientación del centro de gravedad de la silla al descender por una escalera.	96
Gráfica 3.2	Posición del centro de gravedad de la silla al descender por una escalera.	96
Gráfica 3.3	Velocidad del centro de gravedad de la silla al descender por una escalera.	97
Gráfica 5.1	Orientación del centro de gravedad del sistema de tres ruedas al descender por una escalera.	123
Gráfica 5.2	Posición del centro de gravedad del sistema de tres ruedas al descender por una escalera.	123
Gráfica 5.3	Velocidad del centro de gravedad del sistema de tres ruedas al descender por una escalera.	124

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Elementos de la articulación en la columna vertebral	1
Figura 1.2	Arquitectura general de la columna vertebral	2
Figura 1.3	Caracteres comunes de una vertebra	3
Figura 1.4	Rx Cervical de frente	5
Figura 1.5	Rx Cervical lateral	6
Figura 1.6	Rx Dorsal de frente	7
Figura 1.7	Rx Dorsal lateral	8
Figura 1.8	Rx Lumbar de frente	9
Figura 1.9	Rx Lumbar lateral	9
Figura 1.10	Daño de la medula espinal por fractura en vertebra circundantes	11
Figura 1.11	Luxaciones de cuello	12
Figura 1.12	Sistema nervios central	13
Figura 1.13	Caracteres comunes de una vertebra	13
Figura 1.14	Sección lateral de la columna vertebral	14
Figura 1.15	Terminal inferior de la médula espinal	15
Figura 1.16	Tipos de sillas de ruedas bimanuales	21
Figura 1.17	Sillas de ruedas manejadas por un acompañante	21
Figura 1.18	Silla de ruedas eléctrica marca Permobil, modelo:C300 Canto	22
Figura 1.19	Tipos de silla de ruedas eléctricas	23
Figura 1.20	Vista lateral del diseño de la silla de ruedas híbrida	24
Figura 1.21	Operación del ascenso de escaleras	24
Figura 1.22	Robot con piernas de la Waseda University de Tokio	25
Figura 1.23	El inventor y su silla iBOT balanceada sobre dos ruedas	26
Figura 1.24	Sistema iBOT en operación de ascenso de escaleras	26
Figura 1.25	Sistema iBOT 4000 en posición de silla estándar	27
Figura 1.26	Sistema BOUNDER PLUS H-FRAME (a) en posición de silla estándar y (b) en posición erguida	28
Figura 2.1	Proyección del vector r sobre los ejes del sistema en rotación.	49
Figura 2.2	Grafica del los ángulos de Euler	50
Figura 2.3	Giroscopio (peonza simétrica) con el vértice fijo. E indican los ángulos de Euler	61
Figura 2.4	Potencial efectivo en función del ángulo θ . El mínimo corresponde a un movimiento con nutación nula. Se indican los ángulos de retorno para un valor arbitrario de E	66
Figura 2.5	Puntos de equilibrio en $x = 0$ con trayectorias solución representativas para un caso: (a) estable, (b) inestable y (c) asintóticamente estable.	70
Figura 2.6	Interpretación geométrica de las superficies de Lyapunov para el caso de \mathcal{R}^2	72
Figura 3.1	Vista frontal de la carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa	77
Figura 3.2	Vista lateral de la carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y	78

	Sinaloa	
Figura 3.3	Vista frontal de la carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa	79
Figura 3.4	Vista lateral de la carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa	80
Figura 3.5	Escalera recta para prueba	84
Figura 3.6	Prueba de estabilidad en escalera recta	87
Figura 3.7	Esquema de silla escaladora patentada 4061199 en función de ascenso	90
Figura 3.8	Esquema de silla escaladora patentada 4061199 en terreno plano	90
Figura 3.9	Esquema de silla escaladora patentada 6799649 en función de equilibrio	90
Figura 3.10	Esquema de silla escaladora patentada 6799649 ascendiendo escalera	90
Figura 3.11	Esquema del transportador de silla de ruedas patente 4771839, en la posición para asentar la silla sobre el transportador	91
Figura 3.12	Ajuste del ángulo de inclinación del transportador	91
Figura 3.13	Perspectiva del transportador en el ascenso de una silla de ruedas	92
Figura 3.14	Perspectiva de la propuesta del sistema para el ascenso y descenso de escaleras para la silla de ruedas	93
Figura 3.15	Secuencia de la simulación de una silla convencional bajando una escalera	95
Figura 3.16	Descripción del modelo cinemático del sistema de tres ruedas para la elevación y descenso de una silla de ruedas en una escalera	98
Figura 3.17	Descripción de las fases de ascenso del modelo cinemático del sistema de tres ruedas	99
Figura 4.1	Carro de cuatro ruedas y sus vectores de posición	102
Figura 4.2	Vista superior del carro de cuatro ruedas y sus respectivos grados de libertad θ y γ	103
Figura 4.3	Perspectiva del carro de cuatro ruedas con los sistemas de referencia en las ruedas	104
Figura 4.4	Representación de las posiciones relativas del sistema de coordenadas θ fijo con respecto al sistema de coordenadas móvil ν	105
Figura 4.5	Representación esquemática del mecanismo para elevación de la silla de ruedas trepadora.	112
Figura 4.6	Representación esquemática de los sistemas de referencia y sus vectores directores.	113
Figura 4.7	Secuencia de movimientos en el ascenso de escaleras con el sistema de tres ruedas.	117
Figura 4.8	Representación de las variables del sistema de tres ruedas en el inicio del ascenso de la escalera	117
Figura 4.9	Representación de las variables del sistema de tres ruedas en el instante en que la segunda rueda toco el primer escalón	118
Figura 5.1	Secuencia de movimientos en el ascenso de escaleras con el sistema de tres ruedas	
Figura 5.2	Trayectoria del centro del sistema de seis ruedas con cinco combinaciones diferentes entre diámetro de rueda y diámetro entre ejes de ruedas	125
Figura 5.3	Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda-	125

Figura 5.4	circulo de ejes 210x390 Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda- circulo de ejes 210x340	126
Figura 5.5	Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda- circulo de ejes 210x300	127
Figura 5.6	Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda- circulo de ejes 150x340	128
Figura 5.7	Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda- circulo de ejes 250x340	129

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de investigación se presentan los fundamentos teóricos y técnicos necesarios para comprender y establecer el diseño de un medio de transporte autónomo que le brinde a las personas hemipléjicas independencia en un medio pensado fundamentalmente en personas sin ningún tipo de discapacidad, la iniciativa de trabajar en este proyecto obedece a la comprensión de la necesidad de mejorar la calidad de vida de las personas que por razones coincidentes se ven en la necesidad de emplear una silla de ruedas. En nuestro país el número de individuos que están bajo estas circunstancias crece dramáticamente, lamentablemente en jóvenes que generalmente tienen proyectos de vida que se ven severamente trastornados por una eventualidad como esta. Generalmente los pacientes que requieren del uso de una silla de ruedas, se debe a lesiones neurológicas de la columna vertebral. Cuando la médula espinal es afectada, se produce una complicación que se deriva en la pérdida del movimiento y de la sensibilidad, dependiendo de la zona y agudeza de la lesión. Sin embargo las lesiones de la columna vertebral no son la única razón por la que un paciente requiera el uso de una silla de ruedas, existen otras como son la edad, la parálisis cerebral, pérdida de la masa muscular, etc

La ingeniería mecánica como parte de los conocimientos que se mantienen en evolución, permiten hacer vínculos interdisciplinarios que coadyuvan en la generación de dispositivos sofisticados útiles para la sociedad. Un sistema apto para subir a una persona a través de una escalera recta convencional que normalmente está diseñada para personas parlantes, es el fruto de la integración de un cúmulo de conocimientos que bien definidos y enfocados resultan en un bien comunitario.

Los temas que se consideraron en esta investigación enlazan disciplinas tales como la traumatología, la biomecánica, la antropometría, el control, la electrónica, la ingeniería mecánica particularmente la dinámica, la cinemática y la mecánica Lagrange, aunado a esto los conocimientos generados en otras investigaciones relativas a la anatomía, los giróscopos y la ergonomía; uno de los factores que hacen novedosos los conocimientos generados en este trabajo son la consideración de las pruebas que validan la seguridad de los sistemas fabricados para este fin y la integración de los datos relativos a la antropometría y la biomecánica del cuerpo de un paciente con las cualidades que tienen que ver con la agudeza del traumatismo del paciente, su edad, tamaño y peso, etc.

Se pretende diseñar una silla para pacientes con lesiones en las cuales la actividad motriz de las extremidades superiores no está afectada, es decir los usuarios serán capaces de manipular la silla con sus manos, tronco y brazos.

CAPÍTULO 1

Estado del Arte

1.1 LA COLUMNA VERTEBRAL

La columna vertebral es el soporte principal de la parte superior del cuerpo. Permite mantener erecto el esqueleto, también cubre y protege la médula espinal y los nervios que se ramifican al resto del cuerpo.

En la columna vertebral se encuentra la unidad motora que está constituida de la siguiente forma: dos vértebras con su disco correspondiente y que están inmovilizadas por los ligamentos (ver figura 1.1): vertebral común anterior y posterior, el ligamento interespinoso y el supraespinoso. Se le llaman articulaciones facetarias al conjunto de dos vértebras con su disco, este último le provee amortiguamiento a la unión, todas estas estructuras conforman un doble marco para la médula espinal (agujero vertebral) y sus raíces periféricas (agujeros de conjunción) [1.1].

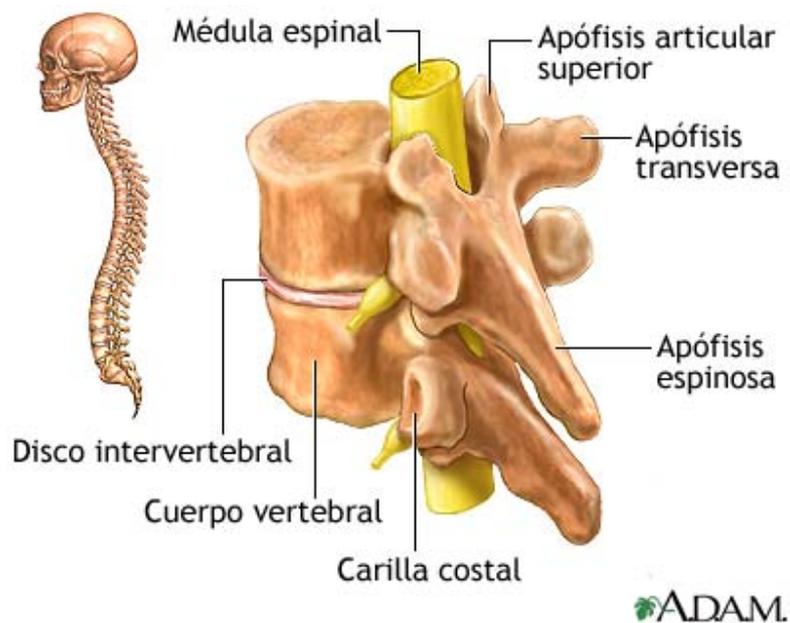


Figura 1.1 Elementos de la articulación en la columna vertebral.

La columna vertebral está compuesta por vértebras. En la parte superior se encuentran las vértebras cervicales. Son 7 y se enumeran del C1 al C7 comenzando desde arriba. La séptima vértebra se une con la primera de la vértebra torácica. Estas son 12, que corren en la espalda y proveen un lugar para que las costillas se conecten. A estas vértebras se les enumera del T1 al T12 de nuevo de arriba hacia abajo. La parte curva inferior de la espalda está compuesta de cinco vértebras lumbares. Estas son enumeradas de la L1 a la L5. Abajo de éstas, sigue un grupo de 5 vértebras fusionadas llamadas el sacro que se localizan entre los huesos situados en la extremidad inferior de la columna. Y por último viene el cóccix o rabadilla, otro grupo de la vértebra fusionada (ver figura 1.2).

Si se observa la columna vista de perfil, se definen las siguientes curvaturas anatómicas:

- LORDOSIS CERVICAL: curvatura cóncava hacia atrás
- CIFOSIS DORSAL: curvatura convexa hacia atrás
- LORDOSIS LUMBAR: curvatura cóncava hacia atrás

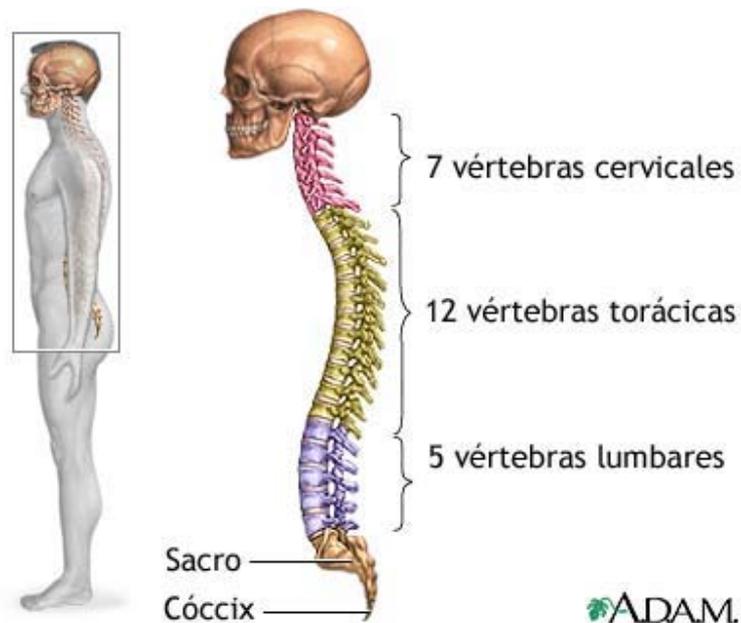


Figura 1.2. Arquitectura general de la columna vertebral.

1.1.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS VÉRTEBRAS

Las vértebras son estructuras óseas sólidas. Están separadas por discos suaves, los cuáles permiten que la columna vertebral se doble y gire. Los caracteres comunes que todas las vértebras tienen son (ver figura 1.3):

- 1.º un cuerpo
- 2.º un agujero vertebral
- 3.º una apófisis espinosa
- 4.º dos apófisis transversas
- 5.º cuatro apófisis articulares
- 6.º dos láminas vertebrales
- 7.º dos pedículos

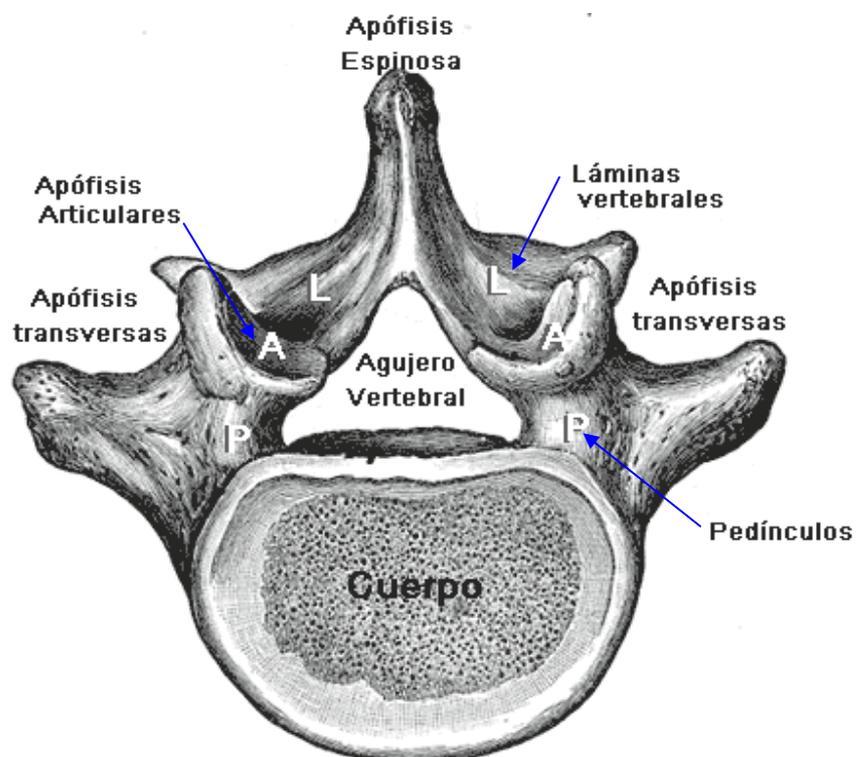


Figura 1.3. Caracteres comunes de una vértebra.

1.º Cuerpo

El cuerpo ocupa la parte anterior y tiene la forma de un cilindro con dos caras planas y horizontales, superior e inferior y una circunferencia. Una y otra presentan en su centro una superficie acribillada de agujeritos, circunscrita por una zona anular ligeramente prominente y formada de tejido compacto. La circunferencia, cóncava en sentido vertical por delante y por los lados, presenta un canal horizontal, dirigido de uno al otro lado. Por detrás es plana o hasta excavada en sentido transversal, para constituir la pared anterior de agujero vertebral.

En su parte media se ven numerosos orificios destinados a conductos venosos, que proceden del cuerpo vertebral.

2.º Agujero Vertebral

Está comprendido entre la cara posterior del cuerpo vertebral y la apófisis espinosa. Tiene la forma de un triángulo de ángulos más o menos redondeados.

3.º Apófisis Espinosa

Impar y media, se dirige hacia atrás bajo la forma de una larga espina, de la cual recibe el nombre. Se distinguen en ella la base, que la une a la vértebra; el vértice, a veces ligeramente desviado a derecha o a izquierda; dos caras laterales izquierda y derecha, en relación con los músculos espinales; un borde superior, más o menos cortante; un borde inferior, generalmente más grueso que el precedente y también mucho más corto.

4.º Apófisis transversas

En par, una derecha y otra izquierda, se dirigen transversalmente hacia fuera, y de ahí el nombre que llevan. En ambas se tienen: la base, que la une a la vértebra; el vértice, que es libre; dos caras, anterior y posterior, y dos bordes, superior e inferior.

5.º Apófisis articulares

Son dos eminencias destinadas a la articulación de las vértebras entre sí. Son en número de cuatro: dos ascendentes y dos descendentes. Colocadas simétricamente a cada lado del agujero vertebral, unas y otras sobresalen hacia arriba o hacia abajo del nivel del arco óseo que limita este orificio.

6.º Láminas vertebrales

En par: derecha e izquierda. Aplanadas y cuadriláteras, forman la mayor parte de la pared posterolateral del agujero raquídeo. Sus características son: la cara anterior, que mira a la médula; la cara posterior, cubierta por los músculos espinales; dos bordes, superior e inferior; la extremidad interna, que se confunde con la base de la apófisis espinosa, y la extremidad externa, que se suelda con la apófisis transversa, y con las apófisis articulares. Las láminas vertebrales son ligeramente oblicuas hacia abajo y atrás.

7.º Pedículos

Son dos porciones óseas delgadas y estrechas que a uno y a otro lado, unen la base de la apófisis transversa y las dos apófisis articulares correspondientes a la parte posterior y lateral del cuerpo vertebral. Los bordes inferior y superior son curvos, lo que hace que cada pedículo presente dos escotaduras una superior y una inferior. Estas escotaduras,

superponiéndose regularmente con las vértebras vecinas, forman a cada lado de la columna vertebral una serie de agujeros, llamados agujeros de conjunción, por los que salen los nervios raquídeos [1.2].

1.1.2 CARACTERÍSTICAS PECULIARES DE LAS VÉRTEBRAS DE CADA REGIÓN

Cada elemento de la vértebra trae consigo un carácter morfológico que permite reconocer la región a que pertenece la vértebra.

Las vértebras cervicales, las dorsales y las lumbares se distinguen, respectivamente, por los siguientes aspectos.

A – Vértebras Cervicales:

La característica peculiar de estas vértebras es su cuerpo alargado transversalmente. En la figura 1.4 se muestra una proyección en la que se pueden reconocer las estructuras anatómicas a partir de la 3ª vértebra cervical. La 1ª y la 2ª vértebra no son visibles en esta posición ya que se hallan ocultas por la superposición de imágenes del maxilar inferior y del hueso occipital [1.3].

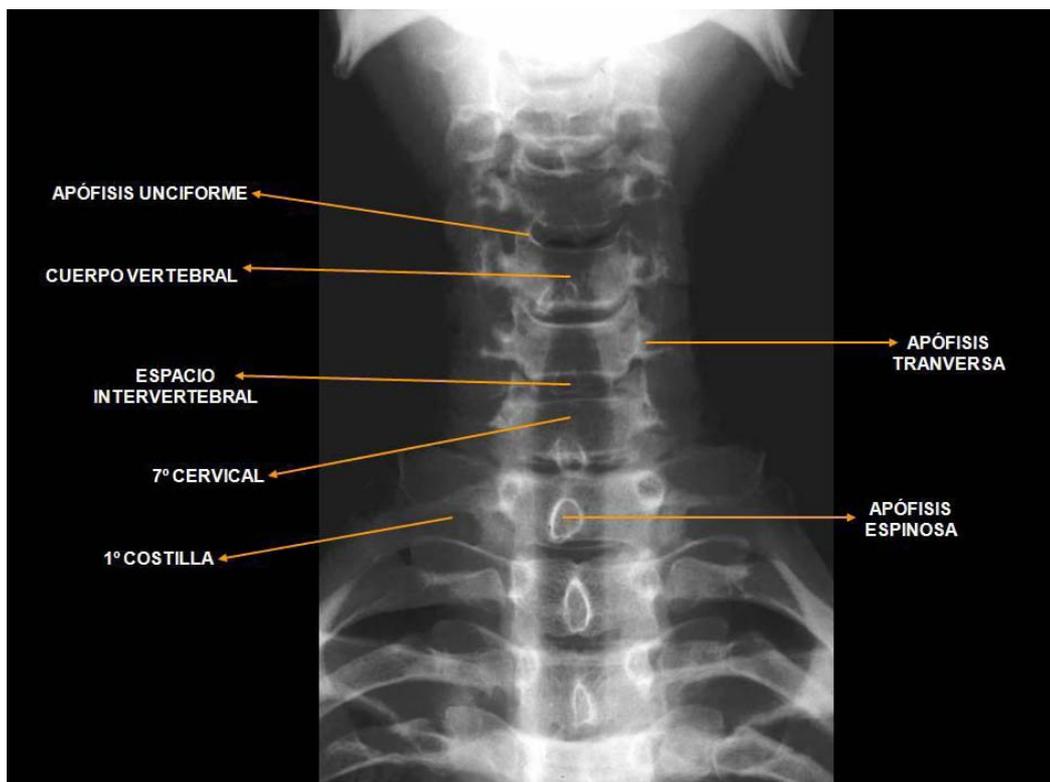


Figura 1.4. Rx Cervical de frente.

En la proyección de la figura 1.5 es posible observar las 7 vértebras cervicales y sus respectivos elementos constitutivos:

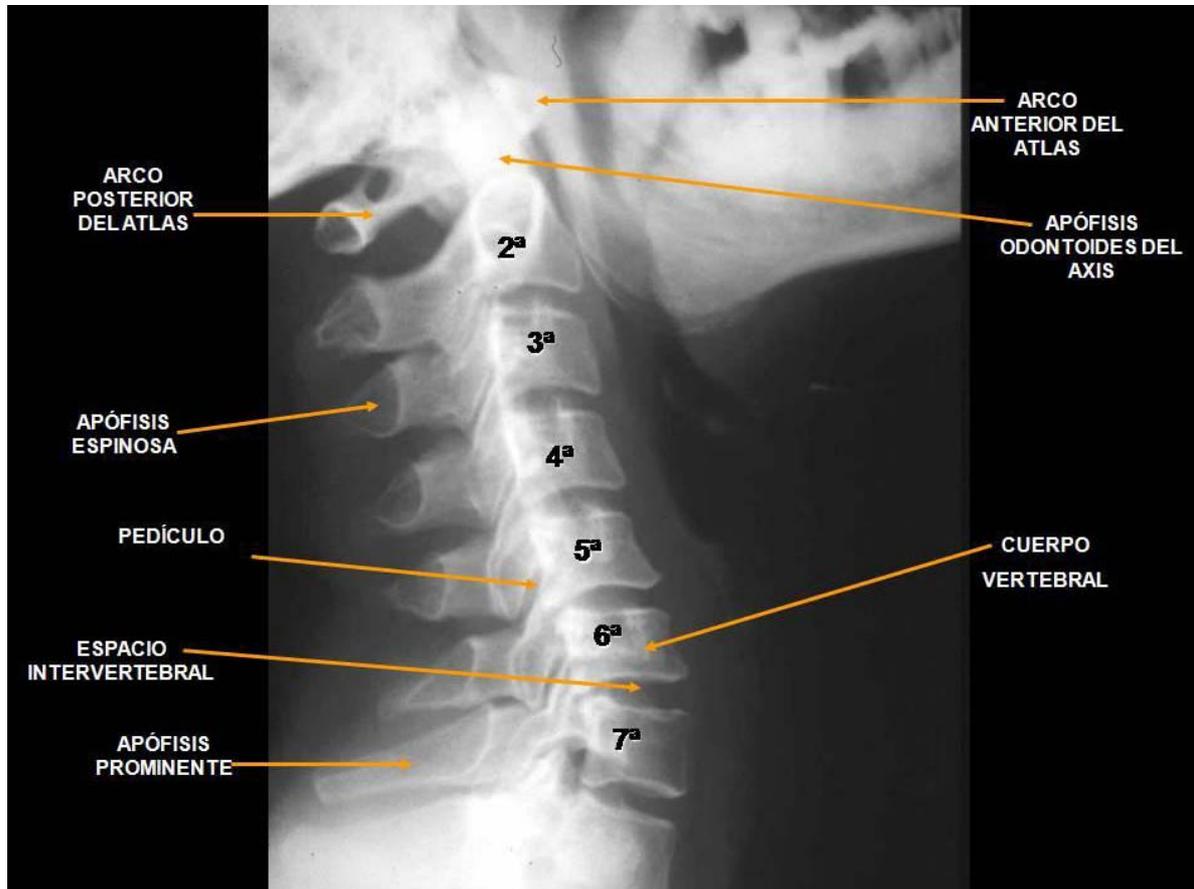


Figura 1.5. Rx Cervical lateral.

Las dos primeras: atlas y axis tienen características morfológicas propias.

La apófisis espinosa del axis se reconoce por su gran tamaño y altura. Esta característica es bien visible en una Rx de perfil. Las 5 vértebras restantes tienen manifestaciones semejantes, como son el aumento progresivo del tamaño de los cuerpos vertebrales y el de las apófisis espinosas. La apófisis espinosa de mayor volumen es la 7ª cervical, llamada "apófisis prominente".

B – Vértebras Dorsales:

El cuerpo vertebral presenta en cada lado y cerca de la extremidad anterior del pedículo, dos semicarrillas articulares, superior e inferior, para la cabeza de las costillas. El agujero raquídeo es relativamente pequeño e irregularmente circular. La apófisis es muy larga, prismática, triangular y fuertemente inclinada hacia atrás. Las apófisis transversas nacen por detrás del pedículo. Su vértice es más o menos redondeado, y en su cara anterior

se ve una pequeña carilla articular para la tuberosidad de la costilla correspondiente. Las apófisis articulares superiores, muy marcadas, se dirigen verticalmente por encima de la base de las apófisis transversas; sus carillas miran hacia atrás y un poco hacia fuera. Las inferiores quedan reducidas a simples carillas articulares situadas en la cara anterior de las láminas; miran hacia delante y un poco hacia dentro. Las láminas son cuadriláteras, tan altas como anchas. Los pedículos unen el cuerpo vertebral a las apófisis transversas y a las articulaciones.

En la figura 1.6 se ve una Rx de la columna dorsal tomada de frente que abarca las 12 vértebras del tórax, las cuales están separadas por los discos intervertebrales; en la figura 1.7 se aprecia la misma columna pero tomada de perfil.

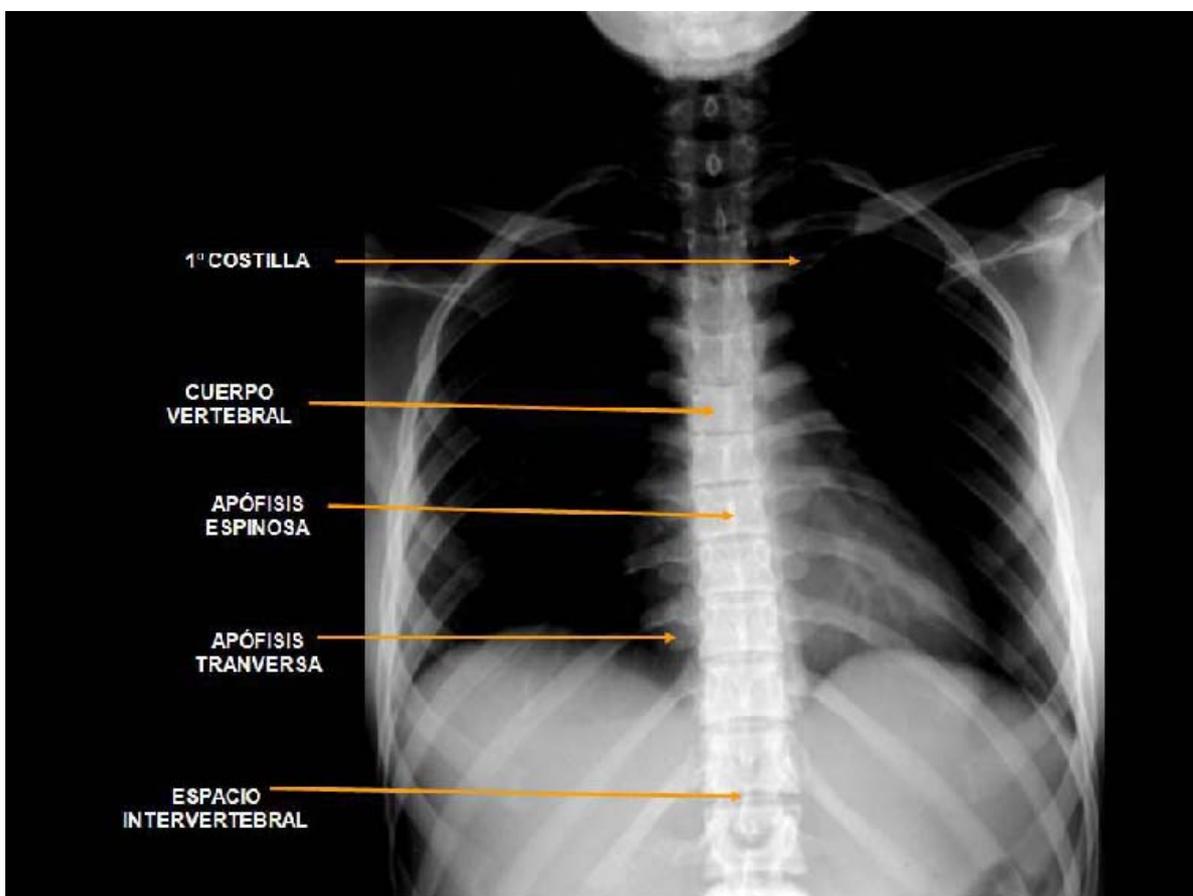


Figura 1.6. Rx Dorsal de frente.

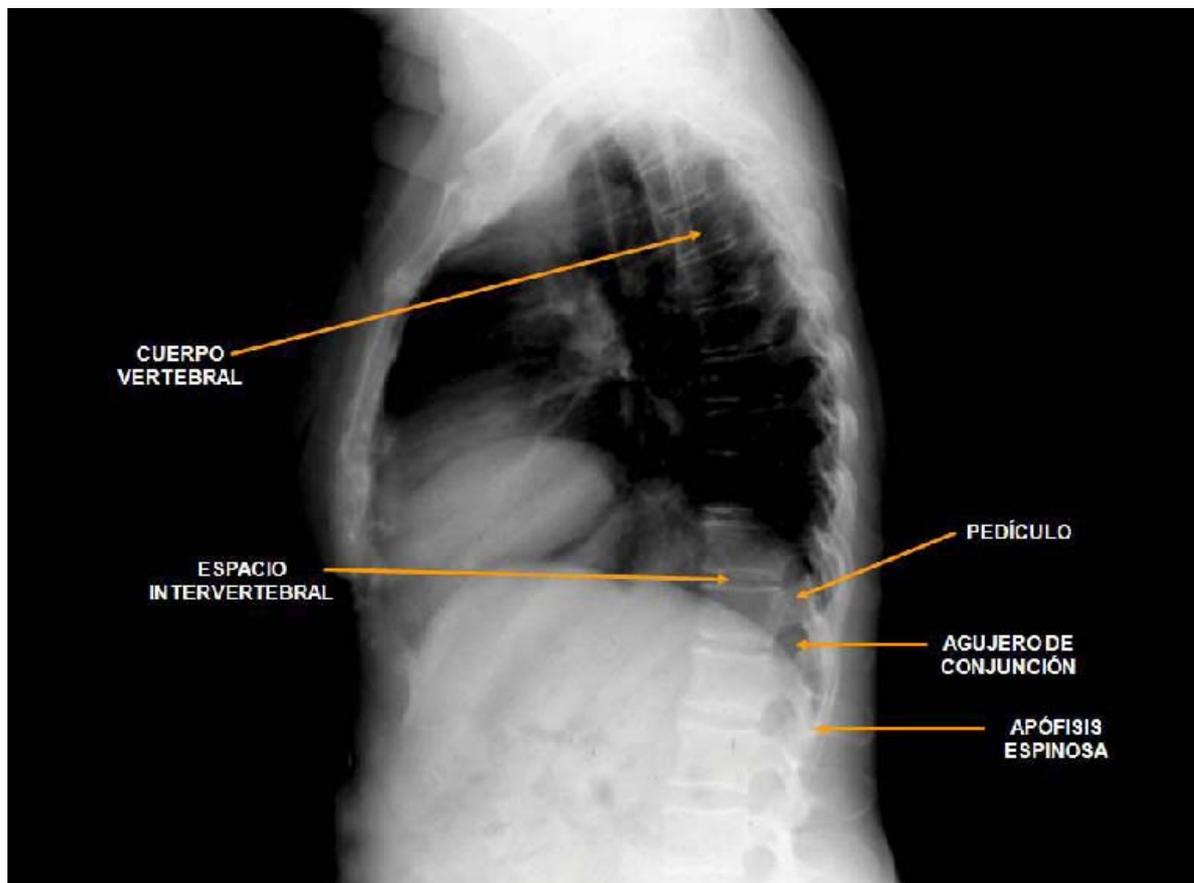


Figura 1.7. Rx Dorsal lateral.

C – Vértebras Lumbares:

La morfología de estas vértebras es de un cuerpo voluminoso. El diámetro transversal es mayor que el antero posterior. El agujero es triangular. La apófisis espinosa es cuadrilátera, y muy desarrollada de posición horizontal. Las apófisis transversas (apófisis costiformes) están relativamente poco desarrolladas. Se desprenden de la parte media del pedículo. Las apófisis articulares tienen una dirección vertical. Las carillas articulares superiores tienen forma de canales verticales, mirando hacia atrás y adentro y las inferiores, la forma de eminencias verticales, representando porciones de un cuerpo cilindroide y mirando hacia delante y afuera. En la parte posteroexterna de las apófisis articulares superiores se ve un tubérculo más o menos desarrollado, el tubérculo mamilar. Las láminas son cuadrilateras, más altas que anchas. Los pedículos tienen una dirección anteroposterior. Las escotaduras son muy desiguales, las inferiores son tres o cuatro veces más considerables que las superiores.

En las figuras 1.8 y 1.9 se aprecian las partes que constituyen esta sección de la columna.

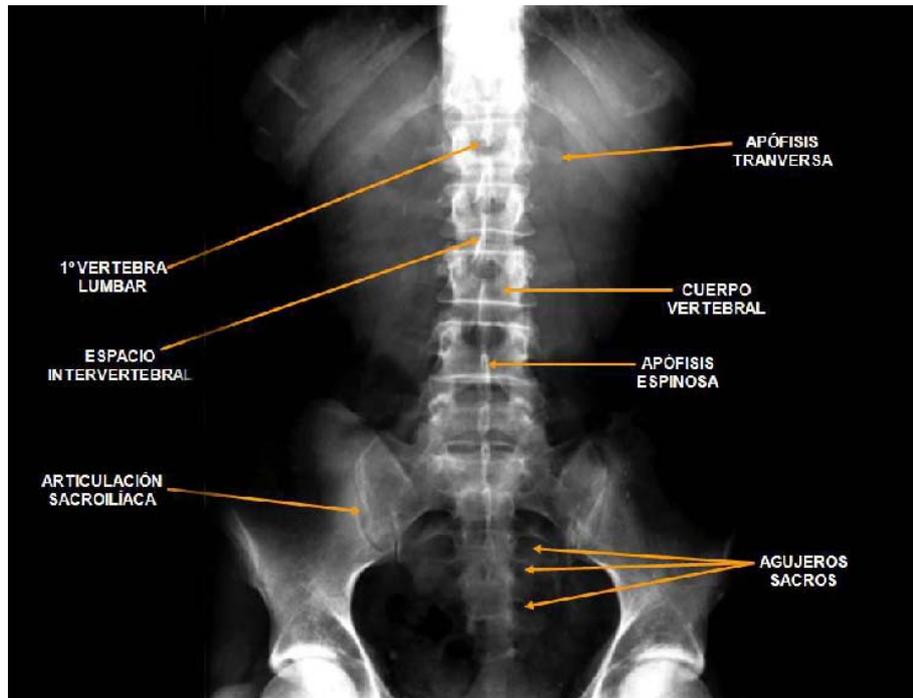


Figura 1.8. Rx Lumbar de frente.

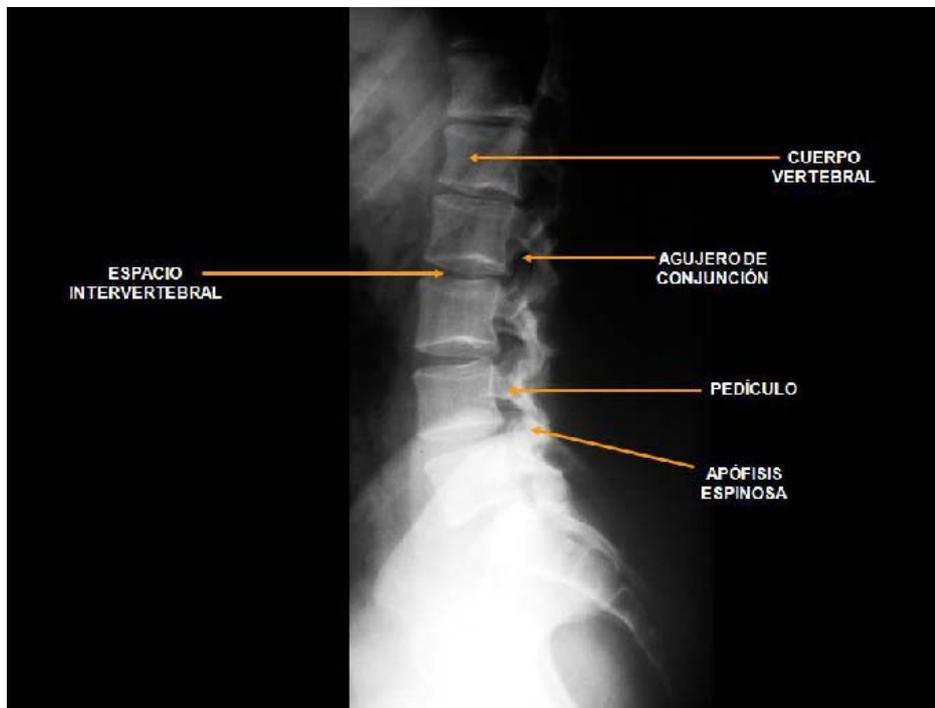


Figura 1.9. Rx Lumbar lateral.

1.1.3 FORMAS DE LESIÓN DE LA COLUMNA VERTEBRAL

El trauma raquimedular es un concepto que incluye las lesiones traumáticas por liberación de energía mecánica sobre la médula espinal y las raíces nerviosas con lesión concomitante de la espina dorsal de grado variable.

Generalmente, las lesiones graves de la espina dorsal suelen causar un daño medular grave, con déficit neurológico, aunque no siempre se relaciona el grado de fracturas (luxación, angulación o inestabilidad del raquis y sus combinaciones) con el daño medular resultante. Lesiones menores de columna a menudo no causan déficit neurológico, pero a veces pueden verse con grave daño medular.

De acuerdo con un estudio realizado por el *Departamento de Neurocirugía de la Escuela de Medicina, Pontificia de la Universidad Católica de Chile*, se reconoce una incidencia de trauma de columna vertebral de 2 a 5 por 100,000 habitantes. La mayor parte de ellas no afectan la médula, pero alrededor del 10% dejan secuela de pérdida funcional medular al nivel de lesión. [1.4]. Los adultos jóvenes y los adolescentes masculinos son los más afectados, por accidentes de tránsito, por deportes o por caídas de altura.

El trauma daña a la médula por compresión directa por hueso, ligamento, disco o por interrumpir su irrigación o por tracción. Las radiografías muestran el alineamiento vertebral al tomarlas, pero no señalan la ruptura ocurrida al momento del impacto. Por eso son muy importantes los mecanismos de lesión y el nivel.

Las lesiones de columna ocurren predominantemente en los segmentos móviles cervical y lumbar. En región lumbar baja las lesiones traumáticas preferentemente rompen discos; en la unión toraco-lumbar predominantemente causan fracturas. Sin embargo las fracturas de columna torácica son raras por la protección que significa la caja torácica, pero de ocurrir son particularmente graves por incluir traumatismos del tronco y a menudo daño irreversible en la médula. Por otra parte las fracturas cervicales ocurren por angulación aguda del cuello en sacudidas de flexo-extensión como en accidentes automovilísticos o en flexión marcada por caídas de altura o zambullidas en aguas poco profundas. También se observan fracturas en región toraco-lumbar en personas que caen de altura aún con impacto en glúteos o de pie. Todas estas fracturas pueden ser simple aplastamiento de cuerpo vertebral, fractura conminuta o luxofractura. La extrusión masiva de disco hacia el canal raquídeo puede ocurrir en región lumbar o en región cervical y dando déficit de función medular, o radicular, suele ser reversible luego de algún tratamiento quirúrgico.

Por otra parte, la luxofractura incluye el desplazamiento de los fragmentos fracturados con pérdida del alineamiento de los cuerpos vertebrales, esto genera una marcada reducción del calibre en el canal raquídeo y la consiguiente compresión medular. También existe la luxación o sub-luxación por ruptura de la articulación facetaria sin fractura, que puede ser uni o bilateral.

Fracturas Conminutas

Tienen alta posibilidad de desplazar fragmentos óseos o de disco o discos completos que (junto a fragmentos de hueso desplazados) desde el cuerpo vertebral hacia atrás, comprimen la médula.

Luxofracturas

En estos casos, la articulación facetaria intervertebral se luxa y se pueden romper los pedículos. El desplazamiento de vértebras es máximo al momento del impacto y puede reducirse espontáneamente total o parcialmente. A veces una faceta articular se desliza completamente por encima de la de abajo y no vuelve a su lugar. Puede existir además extrusión del disco asociado. Casi todos estos pacientes tienen lesiones graves de médula (ver figura 1.10).

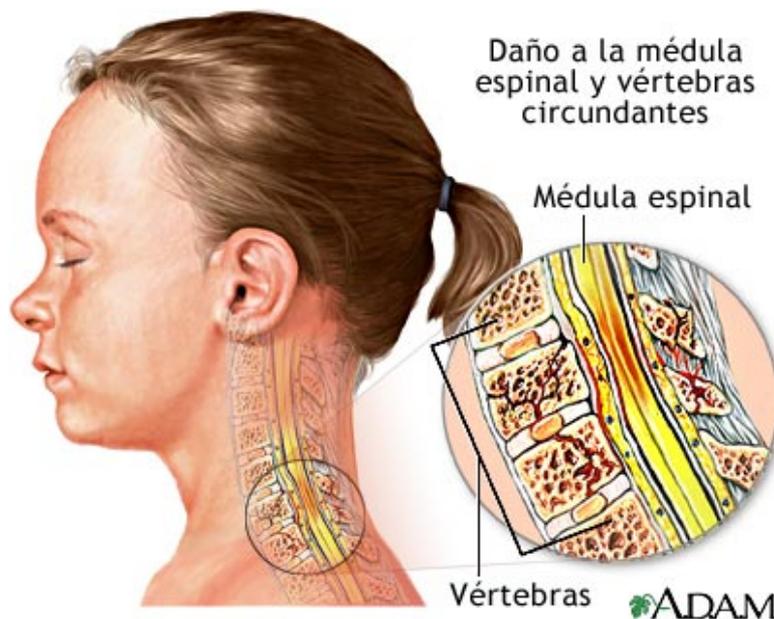


Figura 1.10. Daño de la médula espinal por fractura en vértebras circundantes.

Las fracturas y luxofracturas son en general más benignas en la región de la cola de caballo (cauda equina) debido a que tolera mejor algún grado de compresión que la médula. El cuello tiene mayor movilidad espontánea, tolerando una cantidad moderada de angulación. La peor área en cuanto a traumatismos es la región torácica alta, donde hay un mínimo espacio virtual intrarraquídeo en torno a la médula y la movilidad natural del segmento es menor.

Subluxación sin fractura

Puede ser de grado variable, pudiendo reducirse espontáneamente en los grados menores y al momento de hacer radiografías no observar desplazamientos, pero lo inestable de la lesión puede ser demostrada con radiografías dinámicas en flexión y extensión. Aunque las sub-luxaciones leves pueden no causar grave lesión medular, las luxaciones pueden ser tan desastrosas para la médula como la luxofractura. La médula puede haber sido aplastada causándole lesión irreversible al momento de máxima luxación, aunque las estructuras óseas hayan vuelto espontáneamente a su posición normal.

Fracturas altas del cuello

Fracturas y luxaciones en la región del Atlas y Axis son muy peligrosas. La Luxi-fractura de Atlas y Axis con odontoides intacto es más peligrosa que la fractura de odontoides, puesto que la apófisis odontoides se puede desplazar, comprimiendo la parte anterior de la médula (ver figura 1.11) [1.4].

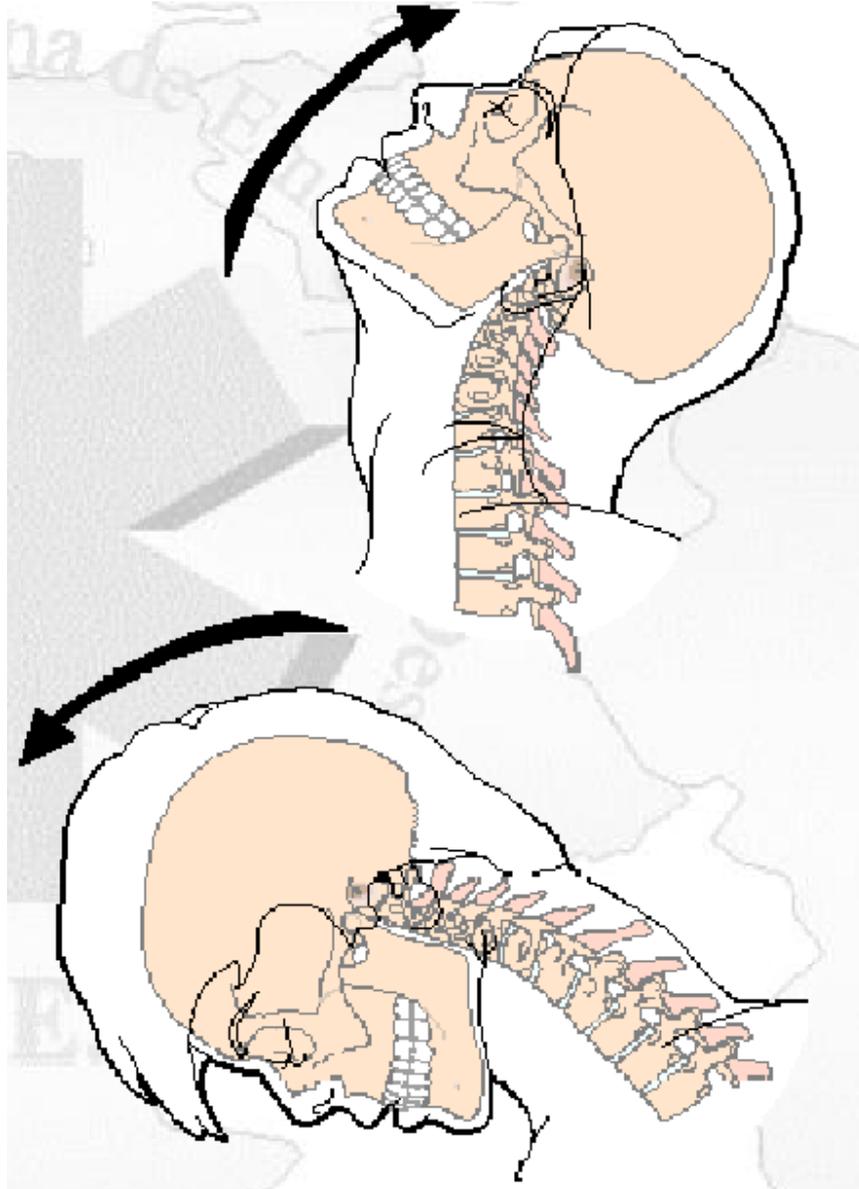


Figura 1.11. Luxaciones de cuello.

1.2 MÉDULA ESPINAL

1.2.1 CARACTERÍSTICAS DE LA MÉDULA ESPINAL

La médula espinal es la conexión principal entre el cerebro y el resto del cuerpo. Se encarga de recoger la información de los brazos, las piernas, el pecho y la espalda y la envía al cerebro (ver figura 1.12). Esto permite la función del sentido del tacto y locomotriz.

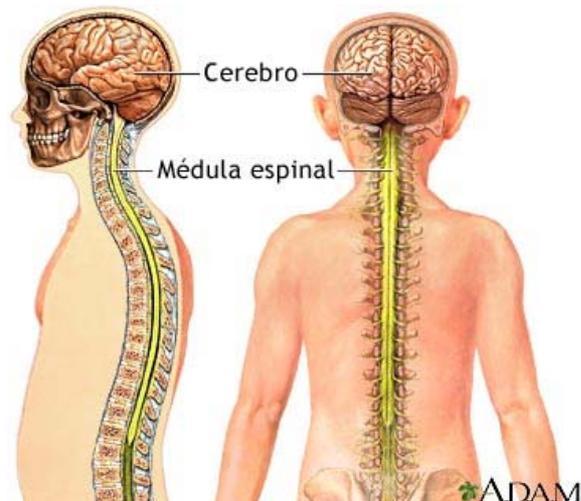


Figura 1.12. Sistema nervios central.

La médula espinal también le permite al cerebro enviar órdenes y mensajes a los músculos del cuerpo. Estos mensajes asisten la respiración, la locomoción incluyendo la marcha. Los nervios que van desde la médula espinal hasta los brazos, las piernas, el pecho y el abdomen se llaman nervios periféricos. La médula espinal se encuentra en la columna vertebral y es protegida por las vértebras (ver figura 1.13).

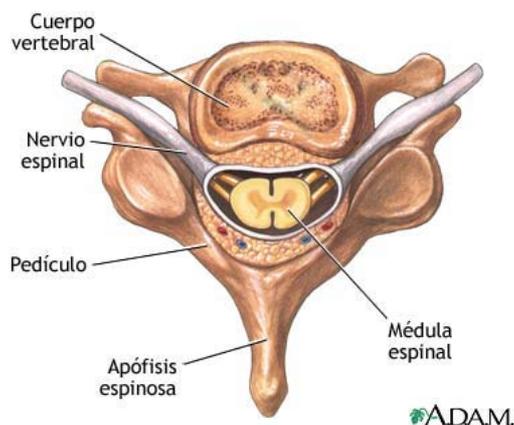


Figura 1.13. Caracteres comunes de una vértebra.

Los nervios periféricos conectan la médula espinal a otras partes del cuerpo. Dichos nervios van a los brazos que se ligan a la columna vertebral en el área del cuello. Los que van al pecho y abdomen se conectan a la columna vertebral en el área dorsal. Los que van a las piernas y los órganos sexuales se enlazan a la columna vertebral en las áreas lumbar y sacra.

La médula espinal se extiende desde la base del cráneo, hasta el área lumbar superior. Desde la vértebra L1 hacia abajo, todos los nervios van a las piernas y de la cintura hacia abajo (ver figura 1.14).

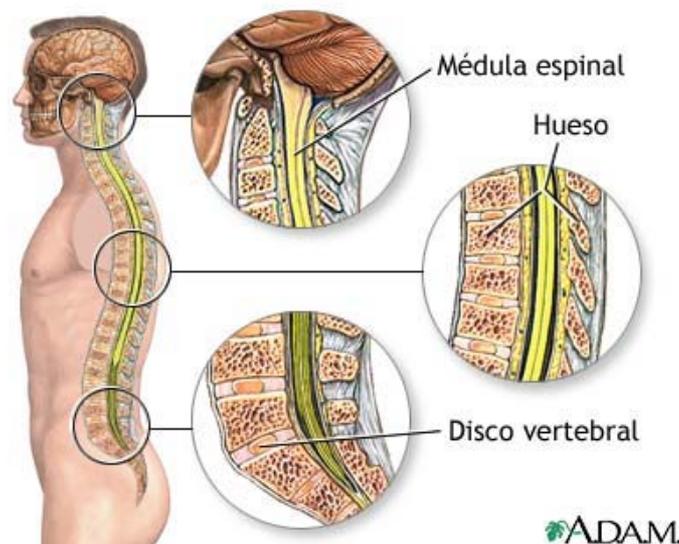


Figura 1.14. Sección lateral de la columna vertebral.

Si los nervios periféricos se lesionan, pueden sanar y regenerarse por sí solos. Es decir, si una persona pierde un dedo en un accidente y luego se lo reconecta con cirugía, los nervios pueden crecer nuevamente y el dedo puede volver a tener sensación.

A diferencia de los nervios periféricos, si se lesiona la médula espinal, ésta no se regenera. Esto significa que si los nervios dentro de la médula espinal sufren daño, no pueden sanarse, ni reconectarse. Por esta razón, las lesiones en la médula espinal suelen resultar en parálisis permanente

La médula espinal termina en el área lumbar y continúa a través del canal vertebral como nervios espinales. Debido a la semejanza con la cola de un caballo, la agrupación de estos nervios en el extremo de la médula espinal se denomina cauda equina (cola de caballo, ver figura 1.15). Estos nervios envían y reciben mensajes hacia y desde las extremidades inferiores y los órganos pélvicos [1.5].

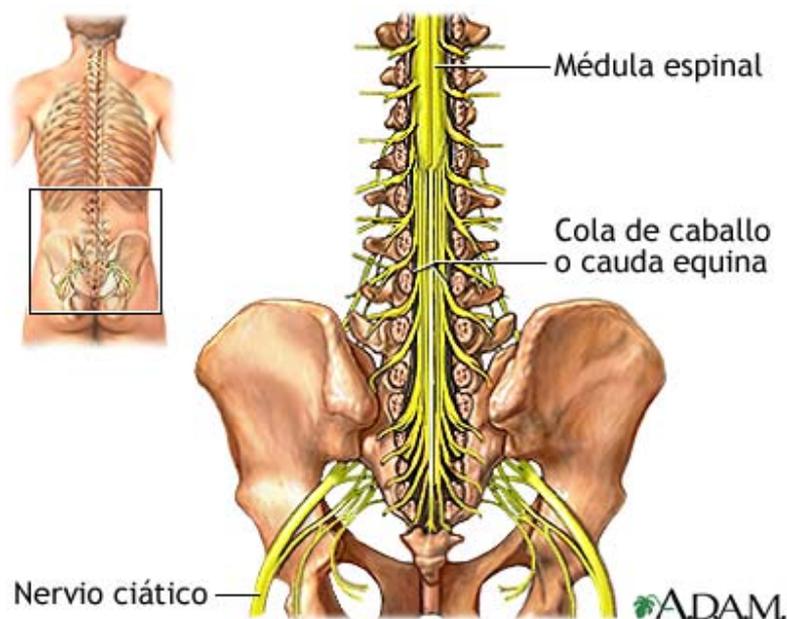


Figura 1.15. Terminal inferior de la medula espinal.

1.2.2 TRAUMATISMOS DE LA MÉDULA ESPINAL

El paciente que sufre un traumatismo de médula espinal (TME), es con frecuencia joven (15 a 35 años) y en 82% de los casos son de sexo masculino. Las causas más comunes de TME son: *accidentes automovilísticos, caídas y daños relacionados con el deporte, heridas por arma de fuego o por arma blanca*. La mayoría de las lesiones de la médula espinal se caracterizan por síndromes clínicos severos, en los que se puede presentar un síndrome completo o incompleto. El primero se presenta con pérdida de la función motora y sensitiva distal a la lesión. El segundo nivel de lesión se define como el nivel más bajo (identificado por examen neurológico), en el cual las funciones motoras y sensitiva aún están intactas [1.6].

1.2.3 CONCEPTOS DE LESIÓN MEDULAR

Generalizando, se pueden distinguir tres tipos de lesión medular traumática:

1.- Contusión medular debido a trauma leve moderado instantáneo, en el cual hay una pérdida incompleta y transitoria de funciones medulares por plazo de 24 a 48 horas, llegando a la recuperación completa en plazos mayores pero de días.

2.- Compresión medular mínima por fragmento de disco o desplazamiento de vértebra, ocurren con baja frecuencia, pero son en general reversibles si se descomprimen.

3.- Compresión grave de la médula por un fragmento óseo o discal muy desplazado o ruptura de la médula, destrozada por luxofractura o grave luxación. En este caso el daño sobre la médula no es reversible pudiendo haber sección física de la médula o infarto de ella por la compresión. En ambos casos no hay recuperación, por no existir regeneración en la médula y sólo puede haber recuperación funcional en tejido nervioso comprimido pero vivo. Esta circunstancia de sección de la médula o infarto se llama síndrome de transección medular.

4.- Lesión completa o incompleta. Es un concepto clínico, en que la lesión es "completa" cuando no hay función motora o sensitiva ninguna bajo el nivel de lesión. Un 3% de pacientes "completos" al primer examen pueden tener alguna recuperación en las primeras 24 horas, pasado ese plazo las lesiones completas no recuperarán.

En el caso de las lesiones "incompletas" se preservan algunas funciones motoras o sensitivas bajo el nivel de lesión: movimientos voluntarios de extremidades inferiores o sensación sea sólo postural o en área perineal. Hay 3 tipos de lesión incompleta más conocidos:

a.- Síndrome de Brown-Sequard o de hemisección medular, este caso se presenta muy rara vez. Se preserva movilidad y sensibilidad postural en un hemicuerpo y extremidades de uno de los lados de la lesión en el que hay anestesia al dolor y en el lado opuesto que permanece paralizado se preserva sensación de dolor. Esta es la lesión incompleta de mejor pronóstico, recuperarían marcha y control esfinteriano el 90% de los pacientes.

b.- Síndrome medular central, similar a la siringomielia, debilidad motora de extremidades superiores, preservada relativamente en inferiores, con variadas formas de disminución de sensibilidad y retención urinaria. Si se debe a contusión medular, puede irse recuperando. Si la causa fue hemorragia intramedular se agrava en horas, a pesar de lo cual se recomienda no operarlo.

c.- Síndrome medular anterior, atribuido a infarto en territorio medular de la arteria espinal anterior. Da paraplejía motora con disociación sensitiva, preserva propiocepción con pérdida de sensación de dolor y temperatura. Es de mal pronóstico.

5.- Shock medular. En caso de pérdida aguda de funciones medulares por trauma, la forma clínica inicial de la parálisis y anestesia distal a la lesión es de flaccidez muscular con atonía y pérdida de reflejos osteotendíneos. Esta etapa, que se prolonga por días a semanas, se denomina shock medular y da lugar más tarde a la aparición de reflejos osteotendíneos que posteriormente se hacen exaltados con reaparición de respuestas reflejas medulares e hipertonia con espasticidad de grado variable y clonus. En caso de una lesión masiva de raíces nerviosas en cola de caballo, la forma clínica de shock medular evoluciona a la parálisis flácida permanente por lesión de las motoneuronas periféricas.

1.2.4 SÍNTOMAS DE LA LESIÓN MEDULAR

Los síntomas de las lesiones en la médula espinal dependen de la ubicación y la gravedad de la lesión. Una lesión completa de la médula espinal significa que la médula espinal no tiene funcionamiento alguno desde el área afectada hacia abajo.

Una lesión parcial de la médula espinal significa que la médula espinal tiene algún funcionamiento desde el área afectada hacia abajo. Se ha observado que mientras más arriba ocurra la lesión en la médula espinal, más se afecta la persona.

Una lesión completa en el área dorsal de la columna vertebral produce parálisis completa en las piernas, pero no afecta a los brazos. Esto se llama *paraplejía*.

Una lesión completa entre C4 y C7 produce debilidad grave en los brazos y parálisis completa en las piernas. Esto se llama *tetraplejía*.

Una lesión completa de la médula espinal entre las vértebras C1 y C3 deja al paciente incapacitado para respirar por sí solo y no puede mover sus brazos o piernas. Un paciente con una lesión C1 necesitará un respirador.

Por otro lado, un paciente con una lesión en la sección dorsal todavía puede respirar por sí solo. El o ella también podrían usar una silla de ruedas porque sus brazos no estarían afectados [1.5].

Otros síntomas que a veces acompañan a las lesiones de la médula espinal incluyen:

- dolor en el área de la lesión, lo que suele mejorar con el tiempo
- rigidez en los brazos o las piernas afectados, llamada *espasticidad*.
- úlceras que se forman en la piel al no poder mover el cuerpo
- pérdida de control para poder orinar o evacuar
- disfunción sexual

1.3 CIFRAS DE LA DISCAPACIDAD EN MÉXICO

El número de personas que sufren algún tipo de discapacidad física se ha estimado, según la OMS, la Organización de Rehabilitación Internacional (RI) y la Oficina Panamericana de la Salud (OPS), entre el 7 y el 10% de la población mundial total.

Específicamente en México, la OMS ha calculado una población discapacitada del 14%, es decir, aproximadamente 14 millones de mexicanos padecen alguna discapacidad física o mental. De acuerdo al INEGI, se considera en promedio 4.5 miembros por familia. Si se permite un margen de error optimista a la cifra de la OMS y se acepta una población de 10 millones de discapacitados, la estimación conjunta de estos discapacitados con sus familiares, resulta en una población directamente involucrada de 45%, esta cifra estratosférica corresponde casi a la mitad de la población de México.

Según la Confederación Mexicana de Asociaciones en Favor de la Persona con Deficiencia Mental, A.C., las cifras en nuestro país son alarmantes: 5 millones de personas con deficiencia mental y 6 a 7 millones con otras discapacidades (ceguera, diversos tipos de parálisis, sordera, parálisis cerebral infantil, secuelas de accidentes, etc.)

Según la Oficina de Representación para la Promoción e Integración Social para Personas con Discapacidad de la Presidencia de la República, cada año se suman en México, a las más de 10 millones de personas con alguna discapacidad [1.7], alrededor de:

125,000 discapacitados por secuelas de Fracturas
67,000 por Malformaciones Congénitas
43,000 por secuelas de Enfermedad Vascular Cerebral
20,000 como consecuencia de Trauma Cráneo-encefálico
12,000 por Parálisis Cerebral Infantil
2,400 por Sordera Congénita

1.4 SILLAS DE RUEDAS

A lo largo de la historia se han inventado centenares de sillas de ruedas y diferentes dispositivos que han sido diseñados para permitir a los discapacitados moverse libremente en ambientes normales y con obstáculos reales de su entorno. En términos de sillas de ruedas, las soluciones se extienden al uso de ruedas. La rueda está diseñada para las pistas o variantes de las mismas. Mientras que las sillas de ruedas cumplen una función y propósito específicos con la limitación de requerir en muchas ocasiones de otros medios que deben estar disponibles (un ayudante), para abordar la silla o resolver los problemas inherentes de la tarea de descender escaleras que no se adecuan a las sillas de ruedas. También se requiere en el uso ordinario al enfrentarse a subidas como ocurre al abordar a un vehículo (típicamente una furgoneta), o como en Japón donde a la entrada de las casas típicas se tiene un escalón que deberá ser remontado. Así se concibe la necesidad de una nueva mirada radical en el problema, o más exacto, el uso de avances en robótica, hidráulica, servomotores y tecnología que resuelva este viejo problema. El propósito debe ser en primer lugar proporcionar mayor autonomía al discapacitado y en segundo lugar reducir la cantidad de maniobras requeridas del paciente [1.8].

Varios estudios han demostrado que los niños y los adultos se benefician substancialmente al tener acceso a medios de movilidad, incluyendo las sillas de ruedas energizadas, las sillas de ruedas manuales, los scooters, y los "walkers" independientes [1.9-1.10]. La movilidad independiente aumenta oportunidades vocacionales y educativas, reduce la dependencia de encargados y de miembros de la familia, y promueve sensaciones de independencia. Para los niños y jóvenes, la movilidad independiente sirve como fundamento para la temprana adaptación [1.10]. Los niños que carecen de la capacidad de ambular, pierden el acceso a la abundancia y el estímulo que produce el mismo ambulante. Esta carencia de exploración y de control, produce a menudo un ciclo de privación y la motivación es reducida lo cual conduce al desamparo [1.11]. Para los adultos, la movilidad independiente es un aspecto importante de la autoestima y desempeña un papel importante en el "envejecimiento." Por ejemplo, para una persona avanzada en edad le es cada vez más difícil caminar e ir al baño, por lo que a menudo tienden a hacer menos cosas y a beber menos líquidos para reducir la frecuencia de orinar. Las limitaciones de la movilidad son la causa principal de limitaciones funcionales en adultos, con un promedio estimado de 40% en edades de 18 a 44 años [1.12]. Las dificultades de la movilidad son también factores fuertes que reducen las actividades de la vida del diario y de las inhabilidades instrumentales debido a la necesidad de moverse para lograr muchas de estas actividades. Además, la movilidad deteriorada da lugar a menudo a oportunidades disminuidas de socializar, que conduce al aislamiento, a la ansiedad, y a la depresión. Por ejemplo, el 31% de personas con dificultades importantes de movilidad, divulgaron ser presionados con frecuencia o tener

mucha ansiedad, comparado con solamente el 4% de personas sin las dificultades de movilidad [1.13].

Mientras que las necesidades de muchos individuos con inhabilidades se pueden satisfacer con las sillas de ruedas manuales o accionadas tradicionalmente, un segmento de la comunidad lisiada encuentra difícil o imposible el utilizar las sillas de ruedas independientemente. Estos individuos carecen de movilidad independiente y confían a menudo en un acompañante para empujarlos en una silla de ruedas manual. Para acomodar a esta población, varios investigadores han utilizado las tecnologías desarrolladas originalmente para los autos robustos, para crear las "sillas de ruedas selectas". Una silla de ruedas selecta consiste típicamente en cualquier silla de ruedas estándar energizada, a la cual se le adiciona una computadora y una colección de sensores. Se han diseñado las sillas de ruedas selectas para proporcionar ayuda en la navegación del usuario en diversos medios y circunstancias, tales como asegurar el recorrido libre de colisión y ayudar en tareas específicas [1.14].

1.4.1 SILLAS MANUALES

La silla de ruedas es una ayuda técnica consistente en una silla adaptada con al menos tres ruedas, aunque lo normal es que disponga de cuatro. Estos dispositivos están pensados para permitir el desplazamiento de aquellas personas con problemas de locomoción o movilidad reducida, como por ejemplo los que tienen paraplejía.

Básicamente existen dos clases de sillas de ruedas manuales:

- Las autopropulsadas, con ruedas traseras grandes para facilitar el traslado autónomo.
- Las guiadas, con ruedas traseras más pequeñas que precisan la ayuda de un cuidador.

Dentro de estas dos categorías entran todos los tipos de sillas de ruedas que se encuentran en el mercado. Existen desde las más sencillas, hasta las más sofisticadas dotadas de alta tecnología, como lo son las sillas ultraligeras, que están diseñadas para aquellos usuarios que demandan un producto extremadamente ligero (desde 5 a 12 kg). Conservando una alta durabilidad y una rigidez del chasis que permita un nivel alto de actividad diaria. También aparecen las sillas para deportistas, las sillas para aplicaciones específicas como son el traslado, la higiene, la rehabilitación, etc.

Generalmente estas sillas son plegables (para ahorrar espacio y poder ser transportadas en maleteros y otros habitáculos similares) y suelen estar construidas con elementos ligeros y resistentes, ya que su usuario debería ser capaz de levantarla y guardarla, consiguiendo así cierto grado de autonomía y autosuficiencia. Las sillas de ruedas están recogidas en la categoría 12/21 de la norma ISO 9999:1998 [1.15].

Una silla de ruedas se debe considerar como una prolongación del usuario, un sustituto de la potencia muscular perdida, que ahorra energía, concede independencia, y permite ocupar una posición en el mundo que lo rodea, estos son elementos clave para personas con ausencia de movilidad en las piernas, que facilitan su traslado por un cuidador

o su autonomía y el desarrollo de una vida activa cuando las condiciones personales lo permiten.

Cuando se va a seleccionar una silla de ruedas como elemento de transporte, es de vital importancia tener en cuenta la posición que ocupará el discapacitado en el elemento, ya que una posición correcta ayudará a prevenir deformidades y contracturas asociadas al decúbito. Además, una buena posición estimula el mantenimiento de la salud y se contribuye a prevenir futuras discapacidades.

Principales beneficios de una posición correcta en un elemento de transporte:

- Máximo nivel de comodidad
- Mayor seguridad y menor riesgo de limitaciones
- Mejor movilidad
- Máximas funciones de independencia
- Mejor condición médica
- Buena integridad de la piel
- Mejor control muscular y de la postura
- Deformidades físicas y dolores minimizados o retardados
- Mejor orientación del cuerpo

1.4.2 SILLAS DE RUEDAS BIMANUALES IMPULSADAS POR LAS RUEDAS TRASERAS

Son las sillas de ruedas más utilizadas (ver figura 1.16), también conocidas como sillas de ruedas estándar. Indicadas para personas que conservan, al menos de modo parcial, la movilidad en las extremidades superiores. Los modelos más ligeros están indicados para personas con poca fuerza en los brazos y a usuarios capaces de desarrollar una vida activa y que busquen una silla con buenas prestaciones dinámicas. Para emplearlas en todas sus posibilidades, se requiere un buen control de tronco y fuerza suficiente en miembros superiores. Se utilizan con frecuencia como sillas de acompañante en hospitales, centros geriátricos y para uso particular.

Elementos constructivos específicos:

- Chasis construido normalmente en acero cromado o lacado. Existen modelos de materiales ligeros.
- Suelen ser plegables por medio de barras de cruceta y poseen un asiento flexible tipo "hamaca" acabado en nylon o tejido similar.
- Están disponibles en varias tallas.
- El diámetro de las ruedas delanteras es de 130-200 mm y el de las ruedas traseras de 600 mm. En los modelos ligeros los diámetros son más reducidos.



Silla médica, marca Everest & Jennings mod. 2302 0110



Silla para Básquetbol con estructura de fibra de carbono.



Silla reclinable, marca Breezy mod. 321-TMM1006.

Figura 1.16. Tipos de sillas de ruedas bimanuales.

1.4.3 SILLAS DE RUEDAS MANEJADAS POR UN ACOMPAÑANTE

Destinadas a personas que no son capaces de impulsarse por sus propios medios con una silla convencional, a causa de una discapacidad severa, y a personas con trastornos cognitivos que les impidan controlar con seguridad un medio de locomoción autónomo. Son manejadas por el acompañante, permiten un transporte seguro y confortable del ocupante y suelen estar preparadas para facilitar las transferencias. Sus elementos constructivos específicos:

- Ruedas traseras de diámetro medio o reducido (menos de 300 mm) y sin aros propulsores.
- Ruedas delanteras fijas o giratorias, de un tamaño igual o menor al de las ruedas traseras.
- Empuñaduras, ubicadas habitualmente en la estructura del respaldo.

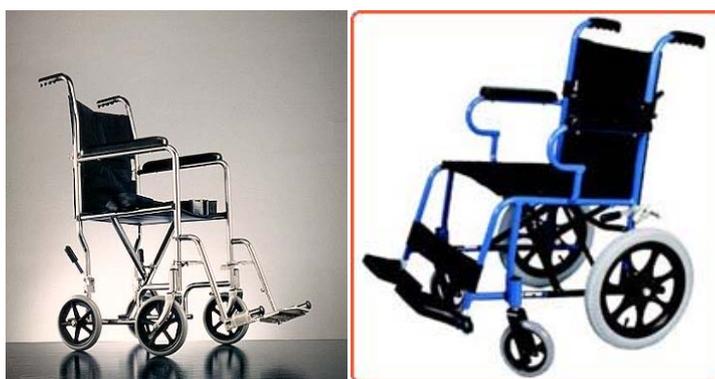


Figura 1.17. Sillas de ruedas manejadas por un acompañante.

1.4.4 SILLAS DE RUEDAS ELÉCTRICAS

Las sillas de ruedas eléctricas (SRE) proporcionan la movilidad funcional para la gente de debilitaciones de extremidades inferiores o superiores (ver figura 1.18). Más de 200,000 personas en los Estados Unidos utilizan SRE como sus medios primarios de la movilidad [1.16]. Las SRE están llegando a ser cada vez más importantes por la transición de los usuarios de la movilidad manual a la movilidad accionada. Este cambio se refleja especialmente en los individuos con condiciones progresivas y en gente con altos niveles de debilidad [1.17]. Los avances que se han hecho en el diseño de SRE en los últimos 20 años, gracias a los algoritmos del control para estas sillas de ruedas, no han mejorado substancialmente desde principios de los años 80s. El estado actual de la tecnología de control de SRE no proporciona movilidad y comodidad adecuadas para muchos usuarios, especialmente bajo condiciones adversas. Las mejoras en técnicas de control y los algoritmos para SRE son necesarios para ampliar el rango de la población que pueda conducir independientemente y con seguridad. El propósito de toda investigación relacionada a las sillas de ruedas, deberá ser el accionar la tecnología contemporánea, con la finalidad de aumentar la movilidad funcional de la gente que usa SRE.



Figura 1.18. Silla de ruedas eléctrica marca Permobil, modelo: C300 Canto.

1.4.5 SILLAS DE RUEDAS ELÉCTRICAS COMERCIALES

Los orígenes de SREs comerciales se puede remontar a los años 50 [1.18]. En particular, la SER con motores internos y control de “joystick” se convirtió en el modelo para la producción comercial [1.19]. La llegada de microprocesadores single-board en los mediados de los años setenta permitió que los controladores fueran mejorados para aumentar la capacidad de procesamiento y la seguridad [1.20]. Para proporcionar la información sobre las características del funcionamiento y de seguridad de sillas de ruedas, el *Instituto Nacional Americano de Estándares* y *La Sociedad de Ingenieros en Rehabilitación*

y *Asistencia Tecnológica de Norteamérica* (ANSI/RESNA) desarrollaron los estándares para sillas de ruedas, con base en una batería de pruebas, tales como ángulos de inclinación estáticos, distancias de frenado, consumo de energía, capacidad de superar obstáculos, y de otras características de funcionamiento [1.21]. Los resultados de estas pruebas se pueden utilizar para comparar SREs y ayudar a los usuarios a determinar qué dispositivo satisface sus necesidades [1.22, 1.23]. Los requisitos y los métodos de prueba para el funcionamiento del sistema de control de SREs se discuten específicamente en los estándares de la ISO 7176-14 y 7176-21 [1.24].

Existe un sin número de modelos de sillas de ruedas eléctricas en el mercado, dependiendo de su aplicación y forma (ver figura 1.19), se pueden encontrar como *sillas eléctricas convencionales*, *scooters*, *walkers* y *especiales*. Estas últimas se han desarrollado para una aplicación particular como podrían ser: sillas escaladoras, sillas todo terreno y robóticas.



Silla de ruedas eléctrica convencional de tracción trasera.



Scooter eléctrico marca Allegro Medical.

Figura 1.19. Tipos de silla de ruedas eléctricas.

1.5 SILLAS ESPECIALES

Actualmente se han desarrollado diferentes sillas de ruedas eléctricas para operar en condiciones de la vida real, en donde el usuario se enfrenta a diversos obstáculos y caminos como son: baches, charcos, superficies inclinadas, escaleras, superficies con piso arenoso o de césped, etc. que no ha sido diseñados para ser transitados por medios de transporte como son las sillas de ruedas, es por ello que los investigadores y fabricantes interesados en este campo, han invertido en el desarrollo de nuevas alternativas en el transporte de discapacitados. El objetivo primordial es conferirle al usuario mayor autonomía y así brindarle mejores condiciones de vida que le ayuden a superar sus debilidades. Algunos de estos equipos ya están en la fase comercial y están disponibles para el público en general, algunos

otros son prototipos y están en fase de experimentación. Ciertos equipos de esta índole se mencionan a continuación.

1.5.1 SILLA DE RUEDAS HÍBRIDA ROBÓTICA

El propósito de esta silla es establecer un acercamiento radical hacia el abastecimiento de movilidad del paciente lisiado. Una silla de ruedas híbrida robótica se diseñó para la operación en los ambientes naturales, con obstáculos reales (el mundo verdadero) por el *Instituto de la Ciencia de Nagasaki* (Japón). Esta silla de ruedas apunta hacia el abastecimiento de la independencia creciente que requieren los usuarios de sillas de ruedas, o proporcionar una ayuda muy necesaria en el campo de trabajo para facilitar la movilidad a los que no puedan ser independientemente móviles. La silla de ruedas incorpora un híbrido de 4 piernas robóticas (ver figuras 1.20 y 1.21) que se asemejan a las piernas humanas con ruedas interconectadas para su operación. Cada pierna proporciona tres grados de libertad que se actúan hidráulicamente, dos grados para la elevación y un grado para la anchura de pista dinámicamente variable. Cada pie se equipa de motores independientemente accionados e impulsores. La silla de ruedas resultante se estima para ser capaz de negociar escaleras y elevarse de un solo paso hasta 70 centímetros para tener acceso directo a un vehículo. El control propuesto es vía radio-control para que lo active el usuario o el ayudante en el caso de movilidad asistida. La clave del diseño se basa en aspectos de la seguridad, de la estética y de no exceder el tamaño de una silla de ruedas motorizada estándar [1.8].

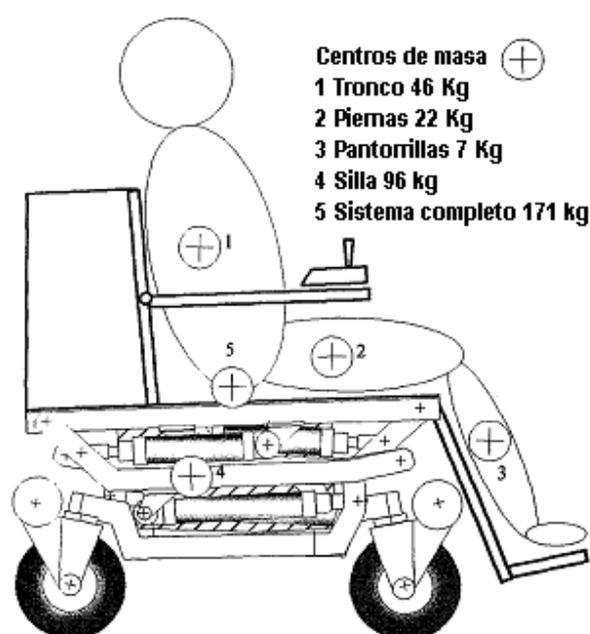


Figura 1.20. Vista lateral del diseño de la silla de ruedas híbrida.

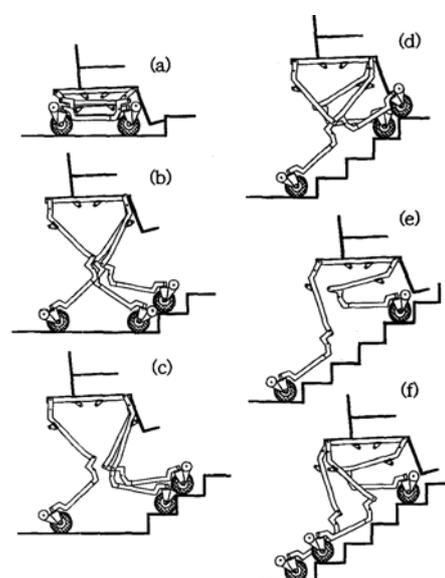


Figura 1.21. Operación del ascenso de escaleras.

1.5.2 ROBOT CON PIERNAS

Es un robot con dos piernas que está siendo desarrollado por científicos japoneses y que podría dentro de unos años trasladar ancianos y discapacitados físicos, permitiéndoles subir escaleras o inclinarse. Con una altura de 1.28 metros, el robot consiste básicamente en un asiento que camina con dos piernas mecánicas. Las personas con dificultades de movilidad podrían colocarse en el asiento y controlar sus movimientos utilizando dos palancas de mando.

Los investigadores aseguraron que podrían pasar otros cinco años antes de que el robot pueda ser utilizado por los ancianos y los minusválidos, ya que actualmente el dispositivo es lento y requiere modificaciones para llevar cargas pesadas (ver figura 1.22) [1.25].



Figura 1.22. Robot con piernas de la Waseda University de Tokio.

1.5.3 SISTEMA INDEPENDIENTE DE MOVILIDAD “iBOT”

Los consejeros de la Administración de Alimentos y Drogas (FDA) dieron unánimemente su aprobación a la silla de ruedas escaladora, llamada *Sistema Independiente de Movilidad iBOT 3000* en noviembre del 2002. Algunos de ellos llamaron a la iBOT, que utiliza sensores y giroscopios para balancear las dos ruedas y para subir las escaleras, potencialmente revolucionaria. Pero el panel impulsó algunas recomendaciones para asegurar que el usuario pueda utilizar esta compleja tecnología con seguridad. Por ejemplo, el usuario requiere de la prescripción por parte de un doctor, así como de un entrenamiento especial para conducir la silla con seguridad.

Después de décadas de trabajo del inventor de la iBOT Dean Kamen, ve consumado el resultado de su esfuerzo al patentar la silla bajo la firma Johnson & Johnson.

La mayoría de las sillas de ruedas tienen dos ruedas posteriores grandes y dos ruedas delanteras más pequeñas. La iBOT tiene cuatro ruedas del mismo tamaño que rotan y se interponen una sobre otra para subir y bajar escalones. La silla también se levanta sobre dos ruedas para elevar su ángulo de inclinación, para que el usuario pueda alcanzar estantes en un librero o pueda sostener conversaciones cara a cara con las personas que estén paradas cerca de él/ella (ver figuras 1.23 y 1.24).

La silla no es para todo el mundo, advirtieron los consejeros de la FDA. Los usuarios deben tener funcionalidad por lo menos en uno de sus brazos y hasta ahora la silla solamente es construida para adultos y adolescentes. La silla además requiere de un cierto esfuerzo, por ejemplo, los usuarios se deben inclinar hacia adelante o hacia atrás para dirigir la silla hacia arriba o hacia abajo. Así mismo, la persona debe ser capaz de sostenerse de la baranda mientras que se dirige hacia arriba o hacia abajo de las escaleras.



Figura 1.23. El inventor y su Silla iBOT balanceada sobre dos ruedas.



Figura 1.24. Sistema iBOT en operación de ascenso de escaleras.

El *Independence 3000 iBot Transporter* utiliza computadoras para resolver el problema de la accesibilidad. El iBot puede rodar suavemente sobre 4 o 2 ruedas. En la posición sobre dos ruedas, el usuario se eleva hasta la altura de una persona de pie.

Usa unos sensores y giróscopos integrados que le permiten reajustarse a los cambios del terreno y al centro de gravedad del usuario. El computador incorporado evalúa todos los parámetros y realiza todos los controles necesarios sobre las ruedas para efectuar movimientos complejos como subir escaleras, rampas empinadas, o desplazarse sin esfuerzo y con seguridad sobre casi cualquier superficie tal como hierba alta, arena, piedras, o una alfombra gruesa.

La mayoría de las sillas de ruedas modernas tienen tracción trasera, pero cada vez son más frecuentes sillas de tracción delantera o de tracción con ruedas intermedias. Las sillas con tracción trasera se mueven en línea recta y son rápidas, pero son pesadas y no muy ágiles, haciendo difícil su manejo en terrenos irregulares.

La silla iBot compensa estos problemas mediante el uso de giróscopios que le permiten equilibrarse automáticamente.

La silla pesa cerca de cien kilos y dispone de sensores y microprocesadores que garantizan su estabilidad, actualmente ya está en el mercado la versión iBOT 4000 (ver figura 1.25). Cuenta con cuatro ruedas del mismo tamaño que rotan sobre un mismo eje, lo que le permite salvar obstáculos. Su precio aproximado es de unos 25.000 dólares y es comercializada en EEUU y Europa bajo la firma de Johnson & Johnson [1.26].



Figura 1.25. Sistema iBOT 4000 en posición de silla estándar.

1.5.4 SISTEMA DE ELEVACIÓN “BOUNDER PLUS H-FRAME”

Es una silla de ruedas eléctrica fabricada por 21st Century Scientific, Inc., que permite que el usuario adquiera la postura de pie y también el modo de uso de una silla eléctrica convencional (ver figura 1.26).

El estar parado facilita independencia y da libertad. La capacidad de estar parado es esencial para hacer sentir bien a un hemipléjico activo en la sociedad de hoy. En el hogar y en el trabajo, hay muchas actividades que no se pueden realizar al nivel asentado. Esta silla de ruedas ayuda a las personas discapacitadas a realizar las actividades diarias hechas normalmente por una persona al estar erguida, inclusive puede facilitar el conseguir la reincorporación al trabajo. Puede también ahorrar dinero reduciendo modificaciones al hogar y ambientes laborales. En la posición asentada el *BOUNDER plus* es la silla de ruedas más rápida en el mercado con un tope de velocidad de 11.6 mph [1.27].



(a)

Figura 1.26. Sistema BOUNDER PLUS H-FRAME (a) en posición de silla estándar y (b) en posición erguida.



(b)

1.6 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este trabajo de doctorado se plantea una alternativa para la solución a la dificultad que presentan las personas que usan una silla de ruedas cuando se ven en la necesidad de subir o bajar una escalera, actualmente se han hecho diversos estudios al respecto, cada uno de ellos lo ha abordado desde su perspectiva y en base a sus necesidades, por lo que se han dado soluciones aisladas que resuelven parcialmente el problema. El hecho es que existe un gran número de gente discapacitada en el mundo que requiere de un medio de transporte adecuado y versátil, que les permita tener una calidad de vida elevada para poder desarrollarse, disminuyendo las limitantes que su discapacidad les confiere, el objetivo esencial es definir las bases del diseño desde una perspectiva de análisis cinemático y dinámico, para desarrollar un medio de transporte autónomo para las personas hemipléjicas, que tenga la capacidad de subir y bajar escaleras.

Se plantea comenzar por el análisis de los elementos cinemáticos y dinámicos que intervienen en el movimiento que describe un silla convencional, ya que en la mayoría de los casos, los usuarios de estos medios se ven obligados a subir o bajar escaleras con o sin la ayuda de otra persona, lo cual, aparte de inapropiado, es muy riesgoso dadas las características de una silla de ruedas convencional, por lo que resulta interesante analizar los factores de diseño que la hacen inapropiada para esta tarea; de este estudio se pueden identificar las razones por las cuales resulta inapropiado el diseño actual y pensar en las posibles alternativas de rediseño que favorezcan al ascenso y descenso de escaleras; en principio encubando la idea de poder modificar una silla convencional en un sistema que adquiriera dicha facultad.

El análisis cinemático y dinámico de un sistema mecánico como lo es una silla de ruedas, puede volverse ampliamente complejo si se toman en cuenta la mayoría de las condiciones reales de operación (restricciones no holonómicas entre otras), adicionalmente al incorporar la facultad de subir y bajar escaleras implica más grados de libertad y condiciones de estabilidad que deberán considerarse para que el resultado sea favorable y confiable. La mecánica clásica a través de sus herramientas como son las ecuaciones de LaGrange permite analizar modelos cinemáticos complejos, resumiéndolo a operaciones con cantidades escalares como son la energía cinética y potencial.

El análisis, partirá de una **propuesta de diseño** en la que se tomarán como base los resultados del análisis cinemático de la silla convencional, realizados en un simulador (Visual Nastram), y el análisis de algunas sillas que se han diseñado para cubrir esta necesidad; se desarrollarán las ecuaciones de movimiento de la propuesta de diseño y con ello se identificarán las variables cinemáticas que intervienen en el movimiento del vehículo tanto en el plano como en el ascenso y descenso de escaleras rectas; esto permitirá evaluar la estabilidad del sistema en diferentes puntos con la teoría de control mediante simulaciones en computadora, los resultados obtenidos permitirá evaluar si la propuesta de diseño es viable o si requiere cambios o adecuaciones. Una vez concretada esta etapa, se tendrán los conocimientos y bases necesarias para abordar la concepción de un prototipo, el tiempo y los recursos requeridos para la fabricación del prototipo son considerables, por lo que no formará parte de este trabajo de tesis, sin embargo en el trabajo a futuro estará considerado el sentar las bases para las etapas subsecuentes a esta investigación; se pretende que la fabricación del dispositivo sea de bajo costo pensando en la población de nuestro país; como una etapa terminal se deberá evaluar el desempeño del sistema en el campo real

auxiliándose de las normas internacionales vigentes para este tipo de dispositivos, con el fin de certificar el diseño.

Como en todo trabajo de investigación, estas son las directrices que se proponen para el estudio de este particular problema, es claro que en el camino la investigación pudiera tomar otros rumbos pero con la firme intención de preparar un terreno confiable para futuras investigaciones que retomen y culminen en una solución viable para este problema, ya que por el momento no es posible definir el alcance que se podrá lograr con los medios y los recursos disponibles.

1.7 REFERENCIAS

- 1.1 Dr. Fernández Teodoro Romero (Lima Perú, 2000), Traumatismos de la columna vertebral y pelvis, fracturas y luxaciones: clínica, clasificación y tratamiento, uso de la resonancia magnética. Tratamiento Tomo II, cap.9, pp. 99-101.
http://sisbib.unmsm.edu.pe/BibVirtualData/Libros/Medicina/cirugia/Tomo_II/pdfs/clase09.pdf
- 1.2 http://www.anatomia.tripod.com/columna_vertebral.htm
- 1.3 Edición: Martín E. Ferrazzuolo, imágenes en multimedia guía de estudio n°2, 2007, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Ciencias Médicas, Instituto Anatómico de Córdoba, cátedra de anatomía normal.
- 1.4 S. Del Villar, Trauma Raquimedular, Revisiones de Temas Neuroquirúrgicos, Departamento de Neurocirugía de la Escuela de Medicina, Pontificia Universidad Católica de Chile.
<http://escuela.med.puc.cl/Departamentos/Neurocirugia/publtrim.htm#intr#intr>
- 1.5 1995-2005, The Patient Education Institute, Inc. (www.x-plain.com), nr2501s2.
- 1.6 Dr. Scope (2005), Trauma de médula espinal, Anestesia en neurocirugía, Programa de actualización continua para anestesia (PAC Anestesia-1).
http://www.drscope.com/pac/anestesia-1/c3/an1c3_p33.htm
- 1.7 Centro de cirugía especial de México CCEM(2006), Discapacidad en México, Cifras y Costos de la Discapacidad. <http://www.ccem.org.mx/costos.htm>
- 1.8 Lawn, M.; Takeda, T. (1998), Design of a robotic-hybrid wheelchair for operation in barrier present environments. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Volume 5, 29 Oct.-1 Nov, pp. 2678
- 1.9 Tefft D, Guerette P, Furumasu J (1999). Cognitive predictors of young children's readiness for powered mobility. Dev Med Child Neurol; 41(10), pp. 665-670
- 1.10 Trefler E, Fitzgerald SG, Hobson DA, Bursick T, Joseph R (2004). Outcomes of wheelchair systems intervention with residents of long-term care facilities. Assist Technol.; 16(1), pp. 18-27
- 1.11 Gignac MA, Cotta C, Badley EM (2000). Adaptation to chronic illness and disability and its relationship to perceptions of independence and dependence. J Gerontol B Psychol Sci Soc Sci.; 55(6), pp. 362-372
- 1.12 Pope A, Tarlov A, editors (1991). Disability in America: Toward a national agenda for prevention. Washington (DC): National Academies Press; pp. 58

- 1.13 Iezzoni L, McCarthy E, Davis R, Siebens H (2001). Mobility difficulties are not only a problem of old age. *J Gen Intern Med.*; 16(4), pp. 235–243
- 1.14 Simpson R. C.(2005). Smart wheelchairs: A literature review. *Journal of Rehabilitation Research & Development (JRRD)*. Vol. 42, No. 4, Julio/Agosto, pp. 424
- 1.15 ISO 9999:1998, Technical aids for disabled persons – Classification. International Organization for Standardization.
- 1.16 M.L. Jones, J.A. Sanford (1996), People with mobility impairment in the United States today and in 2010, *Assist. Technol.*, vol. 8, no. 1, pp. 43–53
- 1.17 R.A. Cooper (1998), *Wheelchairs Selection and Configuration*. New York: Demos Medical.
- 1.18 B. Woods and N. Watson, “A short history of powered wheelchairs,” *Assist. Technol.*, vol. 15, no. 2, pp. 164–180, 2003
- 1.19 G.J. Klein, “A wheelchair electric drive designed for the use of quadriplegics,” *Division of Mech. Eng., National Research Council of Canada*, 1953.
- 1.20 X. Attali and F. Pelisse, “Looking back on the evolution of electric wheelchairs,” *Med. Eng. Phys.*, vol. 23, no. 10, pp. 735–743, 2001.
- 1.21 American National Standard for Wheelchairs-Volumenes 1, 2: Requirements and Test Methods for Wheelchairs (including scooters). Arlington, VA: RESNA press, 1998.
- 1.22 M.V. Fass, R.A. Cooper, S.G. Fitzgerald, M. Schmeler, M.L. Boninger, S.D. Algood, W.A. Ammer, A.J. Rentschler, and J. Duncan, “Durability, value, and reliability of selected electric powered wheelchairs,” *Arch. Phys. Med. Rehab.*, vol. 85, no. 5, pp. 805–814, 2004.
- 1.23 A.J. Rentschler, R.A. Cooper, S.G. Fitzgerald, M.L. Boninger, S.F. Guo, W. Ammer, M. Vitek, and S.D. Algood, “Evaluation of selected electric powered wheelchairs using the ANSI/RESNA Standards,” *Arch. Phys. Med. Rehab.*, vol. 85, no. 4, pp. 611–619, 2004.
- 1.24 *Wheelchairs—Part 14: Power and Control Systems for Electric Wheelchairs — Requirements and Test Methods*, ISO 7176-14, 1997.
- 1.25 *La flecha, tu diario de ciencia y tecnología* (2006). Un robot con piernas podría dar movilidad a los ancianos en Japón. Sección: ciencia, 26/04/2006.
- 1.26 <http://www.ibotnow.com/specs/ibot-technology.html>
- 1.27 21st Century Scientific, Inc., Marzo 2003, BOUNDER MOBILITY EQUIPMENT.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

Este capítulo resume las consideraciones teóricas para el análisis y desarrollo de las ecuaciones de movimiento de la silla de ruedas en función de sus grados de libertad y las restricciones que se impondrán al sistema mecánico para que funcione de la manera esperada. Las ecuaciones de Euler Lagrange que son parte de la mecánica clásica describen los sistemas mecánicos a partir de cantidades escalares como la energía cinética y el trabajo, a diferencia de la mecánica de Newton o vectorial. La ventaja de las magnitudes escalares es su manipulación y su definición en términos de ecuaciones diferenciales, lo que aplica directamente en la formulación de Euler Lagrange. Esencialmente esta formulación toma como fundamentos los primeros principios generales (diferenciales e integrales), y a partir de estos principios se obtienen analíticamente las ecuaciones de movimiento; la definición del cuerpo rígido es esencial para el análisis de las fuerzas que interactúan durante la evolución del movimiento, las restricciones que forman parte de todo sistema dinámico físico, también serán consideradas, finalmente el control se basará en el uso del principio de funcionamiento de los giróscopos y la teoría de control de Lyapunov.

2.1 ECUACIONES DE EULER LAGRANGE, CONSTRICCIONES HOLONÓMICAS Y NO HOLONÓMICAS

2.1.1 DEFINICIONES BÁSICAS Y NOTACIÓN

En muchos casos los vectores de posición no son lo más apropiado para describir el movimiento de las partículas de un sistema mecánico. Un ejemplo claro es la posición de un planeta con respecto al sol, es más simple dar la ubicación del planeta con la distancia de este al sol y un par de ángulos apropiados, en todo sistema mecánico es más apropiado emplear las **coordenadas generalizadas** ya que estas resultan más manejables. Se define a q_1, q_2, \dots, q_{3N} a las $3N$ variables que sirven para determinar en forma completa el estado de un sistema mecánico formado por N partículas. Determinar el estado de un sistema mecánico se entiende como dar las posiciones (en un instante dado) de todas las partículas dotadas de masa que lo conforman. Expresado en ecuaciones, para cada partícula i ($1 \leq i \leq N$), se puede expresar su vector posición como una función $x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N})$.

Las q_k se denominan **coordenadas generalizadas** y el espacio que determinan se llama **espacio de configuración**. Al evolucionar el sistema en el tiempo, las coordenadas generalizadas describen trayectorias $q_k(t)$ en el espacio de configuración, por lo que se definen las **velocidades generalizadas** como $\dot{q}_k(t)$. Las ecuaciones dinámicas permiten la

determinación (al menos en principio) de las trayectorias $q_k(t)$ e involucran funciones que dependen de las coordenadas y velocidades generalizadas y del tiempo.

Cuando existen vínculos (como las articulaciones esféricas, rotacionales, etc.) que ligan algunas o todas las partículas entre sí o con cuerpos externos, el sistema de N partículas sigue siendo representado por $3N$ coordenadas generalizadas, pero éstas no son independientes; se dice entonces que se hallan ligaduras o vínculos entre las variables. Si existen m ligaduras independientes entre las n variables se denomina **número de grados de libertad**, al valor $n = 3N - m$. Este número es una propiedad del sistema y no de las variables que se utilizan.

Al usar las ecuaciones de vínculo, si es posible escribir m de las variables en términos de las $3N - m$ restantes, se dice que los vínculos son **holónomos**, en el caso contrario cuando los vínculos no lo permiten, se denominan **no holónomos**. Finalmente, los vínculos holónomos o no, pueden depender del tiempo. Los vínculos dependientes del tiempo se denominan **reónomos** y los no dependientes del tiempo **esclerónomos**.

2.1.2 PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES (D' ALEMBERT)

La introducción de ligaduras en el sistema mecánico lleva al concepto de **fuerza de vínculo**, que es justamente la que se ejerce sobre la partícula para forzar el cumplimiento de la ligadura. Esta fuerza de vínculo se diferencia de la denominada **fuerza aplicada** que es aquella determinada independientemente de cualquier otra fuerza, dando sólo las posiciones (y a veces también las velocidades) de las partículas (ley de Newton). Así, si dos partículas están ligadas por un resorte, la fuerza que ejerce el resorte sobre una de ellas es una fuerza aplicada, que depende de la posición de ambas partículas; también son fuerzas aplicadas el peso, la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada, la fuerza magnética (que depende de la velocidad), etc. Por otro lado, la fuerza que ejerce un riel que guía el movimiento de una partícula es una fuerza de vínculo, que no puede ser determinada sin conocer las otras fuerzas que actúan.

Una restricción adicional que se impone a las fuerzas de vínculo es que puedan ser tan grandes en magnitud como fuera necesario para mantener la ligadura, lo que es una idealización de los vínculos reales (los hilos se estiran, las varillas se doblan o se quiebran, pero se trabaja dentro de los límites en los que esto no pasa o su efecto puede despreciarse).

Un problema peculiar de la condición anterior lo dan las fuerzas de rozamiento (inminentes en el problema de la silla de ruedas). Si las condiciones del problema son tales que el rozamiento es suficiente para impedir que haya deslizamiento (rozamiento estático), la fuerza de rozamiento se considera entonces de vínculo. Si pudiera haber deslizamiento (rozamiento dinámico) se debe considerar al rozamiento como una fuerza aplicada anómala (ya que no cumple con ser independiente de otras fuerzas dado que su magnitud depende de la fuerza de vínculo normal), pero ya no puede ser considerada fuerza de vínculo.

Otro concepto fundamental es el de **desplazamiento virtual**, que es un desplazamiento infinitesimal de la posición de una dada partícula, realizado **instantáneamente** (de aquí la condición de virtual, ya que no es posible realizarlo efectivamente); es decir, a velocidad infinita, sin que transcurra el tiempo durante el

desplazamiento. Aparte de ser instantáneo, el desplazamiento es arbitrario, no relacionado con el movimiento real de la partícula en el instante considerado. Sin embargo, los desplazamientos virtuales más útiles son los que respetan los vínculos; esto es, no violan las condiciones de ligadura del sistema (no sacan la partícula del riel que la guía, no deforman los cuerpos rígidos, no estiran los hilos, etc.; sin embargo, aun así no corresponden necesariamente al movimiento real). Estos desplazamientos se denominan **compatibles con los vínculos**.

Se advierte que si los vínculos fueran dependientes del tiempo, al ser instantáneo el desplazamiento virtual, los vínculos permanecen en el estado en que se encuentran en el instante del desplazamiento, por lo que los desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos deben respetar la condición impuesta por éstos en ese dado instante.

El **trabajo virtual** de una fuerza es el trabajo que ella realiza para el desplazamiento virtual.

De lo anterior se resume que el **principio de los trabajos virtuales** de D'Alembert **postula** que la suma de los trabajos virtuales de todas las **fuerzas** de vínculo de un sistema es nula, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales, compatibles con los vínculos de las partículas del sistema. Es vital incluir todas las fuerzas de vínculo en la suma, ya que el trabajo virtual de una determinada fuerza de vínculo es en general no nulo; la cancelación se da entre todos los sumandos. Se debe resaltar que las fuerzas aplicadas (no de vínculo) producen un trabajo total no nulo en general; el principio se aplica sólo a las fuerzas de vínculo.

Se define a R_i como la fuerza de vínculo (total o neta) que actúa sobre la partícula i , y F_i a la fuerza aplicada (también total o neta) que actúa sobre esta partícula. Si δx_i es el desplazamiento virtual de la partícula i , el principio de D'Alembert asegura que (el punto simboliza el producto escalar de vectores)

$$\delta W_R = \sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta x_i = 0$$

para todos los δx_i compatibles con los vínculos.

2.1.3 ECUACIONES DE LAGRANGE

Considerando los conceptos anteriores, si se escribe la ecuación de movimiento de la partícula i e incorporando la fuerza del vínculo y la fuerza aplicada, la ecuación resulta de la siguiente forma

$$m_i \ddot{x}_i = R_i + F_i, \quad (2.1)$$

al multiplicar escalarmente la ecuación anterior por el desplazamiento virtual δx_i de la partícula y sumando para todas las partículas, el principio de D'Alembert conlleva a

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \cdot \delta x_i - \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta x_i = 0 \quad (2.2)$$

Como existen vínculos, los desplazamientos x_i de las distintas partículas no son independientes entre sí (anotando que los desplazamientos virtuales deben respetar los vínculos). Si se tiene un número de m vínculos holónomos entre las partículas, que pueden escribirse como m relaciones entre las posiciones de las partículas, entonces

$$G_r(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = 0, 1 \leq r \leq m, \quad (2.3)$$

Donde G es una función que depende de los desplazamientos x_i y r es el número de relaciones posibles que van de 1 a m , también se manifiesta que las relaciones de vínculo pueden depender explícitamente del tiempo. La condición de que los desplazamientos respeten los vínculos se escribe entonces

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i G_r \cdot \delta x_i = 0, 1 \leq r \leq m \quad (2.4)$$

donde ∇_i representa el gradiente respecto de las coordenadas de partícula i . Si los vínculos no son holónomos, de cualquier manera pueden expresarse en general de forma diferencial como en (2.4), sólo que en lugar de $\nabla_i G_r$ aparecerá una cantidad vectorial $A_{ir}(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$ que no puede ser expresada como el gradiente de una función respecto de las coordenadas x_i . Se escribe entonces en general para vínculos holónomos o no las m condiciones sobre los desplazamientos como $1 \leq r \leq m$

$$\sum_{i=1}^N A_{ir} \cdot \delta x_i = 0 \quad (2.5)$$

cada una de las relaciones (2.5) se multiplicará por una función escalar desconocida $\lambda_r(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$ (**multiplicador de Lagrange**) y sumando todas ellas se obtiene (cambiando el orden de las sumatorias)

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{r=1}^m \lambda_r A_{ir} \right) \cdot \delta x_i = 0$$

adicionado (2.2) y agrupando todo se tiene

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{r=1}^m \lambda_r A_{ir} \right) \cdot \delta x_i = 0 \quad (2.6)$$

Como existen las m relaciones (2.5) entre las $3N$ componentes de los desplazamientos δx_i , se eligen $3N - m$ de éstas en forma arbitraria, y las m restantes estarán dadas como función de las anteriores (que son independientes). De aquí se eligen entonces los λ_r para que se satisfagan las ecuaciones

$$m_i \ddot{x}_i - F_i + \sum_{r=1}^m \lambda_r A_{ir} = 0 \quad (2.7)$$

para los m componentes no independientes de los desplazamientos δx_i . De esta manera, en (2.6) sólo sobreviven las $3N - m$ componentes independientes que por ser arbitrarias, indica que debe ser nulo cada uno de los factores que las multiplica. Así, para todas las partículas se debe satisfacer la ecuación (2.7) que se reescribe como

$$m_i \ddot{x}_i = F_i - \sum_{r=1}^m \lambda_r A_{ir}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.8)$$

que se denominan ecuaciones de Lagrange de primera especie

Comparando las ecuaciones (2.8) con la ecuación (2.1) se observa que las fuerzas de vínculo están dadas por

$$R_i = - \sum_{r=1}^m \lambda_r A_{ir},$$

Por supuesto, como se tienen m funciones con incógnita λ_r adicionales a las N coordenadas x_i , se requieren m ecuaciones adicionales. Si los m vínculos son holónomos, las ecuaciones adicionales son las (2.3). Si algunos vínculos son no holónomos éstos están dados por una expresión de la forma (2.5) que no es posible integrar para obtener una expresión que relacione a las x_i ; sin embargo, las ligaduras no holónomas son debidas en general a que se tiene una relación entre las velocidades de la forma genérica

$$\sum_{i=1}^N A_{ir} \cdot \dot{x}_i = a_r,$$

que sirven entonces como las ecuaciones auxiliares (las ecuaciones (2.5) fueron deducidas de estas expresiones al multiplicar por δt y luego tomar $\delta t = 0$ considerando que, por ser virtual el desplazamiento $|\dot{x}_i| \rightarrow \infty$ de manera que $\delta x_i = \dot{x}_i \delta t$ es no nulo, pero $a_r \delta t = 0$).

Una forma mucho más útil de las ecuaciones de Lagrange se obtiene usando coordenadas generalizadas y si, además, los m vínculos son holónomos, de manera que pueden emplearse las relaciones de ligadura para eliminar m variables y trabajar con

$n = 3N - m$ variables independientes. De este modo se expresan las posiciones de cada partícula por una función de n coordenadas generalizadas **independientes**

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (2.9)$$

donde se ha incluido la posibilidad de que la relación dependa explícitamente del tiempo. Así, para los desplazamientos virtuales se tiene (el tiempo se mantiene fijo, $\delta t = 0$)

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (2.10)$$

que al sustituir en (2.2) da

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0, \quad (2.11)$$

se tiene también

$$\ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - \dot{x}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right), \quad (2.12)$$

notando que

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k,$$

donde \dot{x}_i es una función lineal de las velocidades generalizadas \dot{q}_k que cumple

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad (2.13)$$

Por otro lado se tiene,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k} + \sum_{p=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_p \partial q_k} \dot{q}_p = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \quad (2.14)$$

Usando las ecuaciones (2.13) y (2.14), se reescribe la ecuación (2.12) como

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial |\dot{x}_i|^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial |\dot{x}_i|^2}{\partial q_k}\end{aligned}$$

La energía cinética del sistema de partículas es

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{x}_i|^2,$$

y definiendo la fuerza generalizada

$$Q_k \equiv \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k},$$

ahora se puede escribir la ecuación (2.11) como

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0 \quad (2.15)$$

Notando que el ser las variaciones δq_k arbitrarias e independientes, debe anularse el corchete para cada k , con lo que resulta la forma útil de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0 \quad (2.16)$$

Si las fuerzas aplicadas se derivan de un potencial independiente de las velocidades, $F_i = -\nabla_i V$, entonces

$$Q_k = -\sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (2.17)$$

por lo que, usando que $\partial V / \partial \dot{q}_k = 0$, se reescribe (2.16) como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (2.18)$$

donde se ha definido el Lagrangiano $L = T - V$. Las (2.18) se denominan ecuaciones de Lagrange de segunda especie, o simplemente ecuaciones de Lagrange.

Si algunos de los vínculos son no holónomos no es posible reducir el número de coordenadas generalizadas hasta el número de grados de libertad n . Suponiendo que se han usado algunas de las ligaduras holónomas (pero no necesariamente todas) para reducir en algo el número de coordenadas q_k y se tienen ahora s de ellas, con $3N \geq s > n$. Todas las deducciones involucradas desde (2.9) hasta (2.15) siguen siendo válidas con s en lugar de n , sólo que ahora las variaciones δq_k no son independientes entre sí, sino que están ligadas por las $s - n$ ligaduras no usadas para reducir el número de variables (sea porque no se ha querido usarlas o porque las ligaduras son no holónomas y no es posible hacerlo). Las relaciones entre las ligaduras estarán dadas por $s - n$ expresiones del tipo

$$\sum_{k=1}^s B_{kr} \delta q_k = 0, 1 \leq r \leq s - n, \quad (2.19)$$

donde las B_{kr} son de la forma $\delta G_r / \delta q_k$ sólo si la ligadura r es holónoma. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, se multiplican estas expresiones por funciones desconocidas λ_r y sumando las $s - n$ expresiones a la (2.15) (en la que se ha reemplazado n por s) para obtener

$$\sum_{k=1}^s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k + \sum_{r=1}^{s-n} \lambda_r B_{kr} \right] \delta q_k = 0$$

Realizando el mismo procedimiento como en (2.6) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \sum_{r=1}^{s-n} \lambda_r B_{kr}, \quad (2.20)$$

las que se completaran con las ecuaciones de vinculo no usadas

$$G_r(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = 0,$$

para el caso de vínculos holónomos, o

$$\sum_{k=1}^s B_{kr} \dot{q}_k = b_r,$$

en el caso de vínculos no holónomos

Si las fuerzas se derivan de un potencial (2.17), entonces se puede reescribir (2.20) como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \sum_{r=1}^{s-n} \lambda_r B_{kr}. \quad (2.21)$$

2.1.4 INVARIANCIA DE LAS ECUACIONES DE LAGRANGE Y SIMETRÍAS

Una de las características importantes de las ecuaciones de LaGrange es que la forma de las ecuaciones es la misma en cualquier sistema de referencia. En efecto, si se realiza una transformación de las coordenadas generalizadas, incluso dependiente del tiempo, y se escriben las coordenadas q_k en términos de otras coordenadas Q_k (estas últimas no son las fuerzas generalizadas que se mencionan con anterioridad)

$$q_k = f_k(Q_1, \dots, Q_n, t) \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2.22)$$

al reemplazar las variables originales por las variables nuevas en el lagrangiano se obtiene éste en función de las nuevas variables; evidentemente se reemplazan también las velocidades generalizadas

$$\dot{q}_k = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \equiv g_k(Q_1, \dot{Q}_1, \dots, Q_n, \dot{Q}_n, t),$$

para obtener $\tilde{L}(Q_1, \dot{Q}_1, \dots, Q_n, \dot{Q}_n, t)$. Las transformaciones del tipo (2.22) se denominan **de punto** o **de contacto**. Sin embargo, el **valor** de L y de \tilde{L} es el mismo en cada instante dado (sólo que expresado en coordenadas transformadas unas de otras).

El principio variacional de Hamilton o principio de mínima acción,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t) dt \quad (2.23)$$

También se puede expresa de igual manera en las nuevas coordenadas

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(Q_1, \dot{Q}_1, \dots, Q_n, \dot{Q}_n, t) dt,$$

y las ecuaciones de LaGrange correspondientes obtenidas al extremar la acción tienen la misma **forma**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = 0 \quad (2.24)$$

Las nuevas coordenadas pueden ser, por ejemplo, coordenadas del sistema mecánico en un sistema de referencia no inercial y, sin embargo, no hay necesidad de incluir ninguna fuerza de inercia o algo equivalente (esta es la ventaja de la formulación variacional; en el principio de D'Alembert se tendrían que calcular la aceleración de cada partícula y el trabajo virtual de las fuerzas de inercia para deducir (2.24) en un sistema no inercial).

Por otro lado, la covarianza de las ecuaciones de LaGrange permite usar las coordenadas más aptas al problema, siempre y cuando se pueda expresar la función lagrangiana L en términos de ellas.

Otro punto importante es que si a L se le suma una derivada total del tiempo

$$L \rightarrow L + \frac{d}{dt} M(q_1, \dots, q_n, t), \quad (2.25)$$

la acción cambia a

$$S \rightarrow S + M|_{t=t_2} - M|_{t=t_1}$$

pero como en la variación de S se mantienen fijos los valores de las coordenadas en los extremos, las ecuaciones obtenidas son exactamente las mismas; ambos lagrangianos llevan a las mismas ecuaciones de movimiento. Así, por ejemplo, términos como $C_1 \dot{q}_1 = d(C_1 q_1)/dt$, o $C_1 q_1 \dot{q}_1 = d(C_1 q_1^2/2)/dt$, con C_1 constante, sumados a L no aportan a las ecuaciones de movimiento. Las transformaciones del tipo dado por (2.25) son denominadas de **gauge**.

Las transformaciones continuas a las variables q'_k , son muy importantes y se pueden escribir de la forma

$$q_k = f_k(q'_1, \dots, q'_n, s, t), \quad (2.26)$$

donde s es un parámetro que puede variarse continuamente desde, s_0 tal que cuando $s = s_0$ es $f_k = q'_k$, de manera que $q'_k = q_k$ en $s = s_0$. De las (2.26) se deduce la transformación de las velocidades generalizadas (para un s dado)

$$\dot{q}_k = \dot{f}_k = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q'_j} \dot{q}'_j,$$

al sustituirlo en el lagrangiano $L(q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t)$ se obtiene un $\tilde{L}(q'_1, \dot{q}'_1, \dots, q'_n, \dot{q}'_n, t)$, que en $s = s_0$ coincide con el lagrangiano original. Considerando ahora una variación infinitesimal δs en el entorno de $s = s_0$, que (a valores fijos de las q'_k) induce una variación infinitesimal en el lagrangiano que se puede escribir como

$$\delta L = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial f_k}{\partial s} \Big|_{s=s_0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{f}_k}{\partial s} \Big|_{s=s_0} \right) \delta s, \quad (2.27)$$

donde se aprecia que en $s = s_0$ es $\tilde{L} = L$, $q'_k = q_k$ y $\dot{q}'_k = \dot{q}_k$. El lagrangiano \tilde{L} varía en general al variar s porque las q_k varían como lo especifica (2.26) aun manteniendo fijas las q'_k .

empleando

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{f}_k}{\partial s} \Big|_{s=s_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial f_k}{\partial s} \Big|_{s=s_0} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial f_k}{\partial s} \Big|_{s=s_0} \quad (2.28)$$

y tomando en cuenta las ecuaciones de Lagrange, se puede escribir a δL como

$$\delta L = \delta s \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial f_k}{\partial s} \Big|_{s=s_0} \right)$$

De esta expresión se obtiene un resultado muy importante: si para alguna transformación continua de la forma (2.26) el lagrangiano es **invariante** ($\delta L = 0$), por lo tanto la magnitud

$$C = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial f_k}{\partial s} \Big|_{s=s_0} \quad (2.29)$$

es una constante de movimiento. Este resultado corresponde a una versión simplificada del teorema de Noether. Cuando el lagrangiano es invariante ante una transformación continua se dice que posee una **simetría continua**.

Suponiendo que el lagrangiano no varía si alguna coordenada q_r se incrementa en una cantidad arbitraria $q_r \rightarrow q_r + s = q'_r$, por lo que se puede escribir la transformación como $f_r = q'_r - s$ (aquí es $s_0 = 0$).

La cantidad conservada será entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = cte$$

El que L no varíe ante cambios arbitrarios de q_r significa que es independiente de esta coordenada, $\partial L / \partial q_r = 0$, por lo que las ecuaciones de Lagrange dan inmediatamente la misma información (el teorema de Noether es mucho más general).

La derivada de L respecto de una velocidad generalizada $\partial L/\partial \dot{q}_r$ se denomina **impulso generalizado** p_r , y si el lagrangiano es independiente de una coordenada generalizada se dice que ésta es **cíclica**. Así, el impulso generalizado correspondiente a una coordenada cíclica es constante durante la evolución del sistema.

la derivada temporal total de L es:

$$\frac{dL}{dt} \equiv \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right),$$

usando

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \dot{q}_k + \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right);$$

se reescribe como

$$\frac{dL}{dt} \equiv \frac{\partial L}{\partial t} + \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \dot{q}_k + \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right);$$

empleando las ecuaciones de Lagrange, (y escribiendo p_k por $\partial L/\partial \dot{q}_k$) se tiene

$$\frac{dL}{dt} \equiv \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k \right),$$

por lo que que si L no depende explícitamente del tiempo, $\partial L/\partial t = 0$, resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L \right) = 0$$

Así, la magnitud entre paréntesis es constante durante la evolución del sistema, y se identifica con la energía de éste,

$$E = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L.$$

(2.30)

2.2 CUERPO RÍGIDO

2.2.1 CINEMÁTICA

Se le llama cuerpo rígido a un sólido continuo indeformable, donde la distancia entre cada par de partículas que lo componen es constante, independiente de las fuerzas a las que esté sometido el cuerpo. Una forma de describir al sólido es dar las posiciones de sus (infinitas) partículas referidas a un sistema fijo S' al cuerpo; teóricamente estas posiciones serán siempre las mismas. La posición de cualquiera de las partículas del sólido respecto de un sistema externo S se podrá determinar conociendo la posición y orientación del sistema móvil S' que está anclado al cuerpo. La posición estará dada por la del origen de S' y la orientación por la de los ejes de S' respecto de los de S .

Tomando un punto cualquiera del cuerpo, su posición puede ser definida por la coordenada x con respecto al sistema externo S y también con respecto al sistema anclado al cuerpo S' . El sistema de referencia fijo al cuerpo S' tiene origen en el punto x_0 (no necesariamente dentro del cuerpo); y cada uno de los puntos del cuerpo está caracterizado por un vector de componentes constantes en este sistema; en particular, se denomina x' al vector posición del punto x en S' . De lo anterior se define la siguiente relación

$$x = x_0 + x',$$

por lo tanto la velocidad de x en el sistema S' será

$$v = \left(\frac{dx}{dt} \right)_s = \left(\frac{dx_0}{dt} \right)_s + \left(\frac{dx'}{dt} \right)_s,$$

Esta ecuación describe la variación en el tiempo del vector con respecto al sistema externo S , por otro lado se sabe que la evolución en el tiempo de un punto x' con respecto a un sistema externo es

$$\left(\frac{dx'}{dt} \right)_s = \left(\frac{dx'}{dt} \right)_{s'} + \Omega_0 \times x',$$

En el lado derecho de la ecuación se consideran posibles variaciones del vector x' en S' y las variaciones debidas a la rotación del sistema S' alrededor de su origen O . Como el vector x' no varía en S' , se tiene

$$v = \left(\frac{dx_0}{dt} \right)_s + \Omega_0 \times x',$$

que escrito de otro modo

$$v = v_0 + \Omega_0 \times (x - x_0). \quad (2.31)$$

si se cambia el origen del sistema S' en O por el punto O' , la velocidad de x se describe como

$$v = v_0' + \Omega_0' \times (x - x_0') \quad (2.32)$$

por otro lado también es posible escribir

$$v_0' = v_0 + \Omega_0 \times (x_0' - x_0),$$

si se suma y resta x dentro del paréntesis, se tiene

$$v_0' = v_0 + \Omega_0 \times (x - x_0) + \Omega_0 \times (x_0' - x),$$

Sustituyendo v_0' en (2.32), se obtiene

$$v = v_0 + \Omega_0 \times (x - x_0) + (\Omega_0' - \Omega_0) \times (x - x_0'),$$

y comparando con (2.31) se deduce que

$$(\Omega_0' - \Omega_0) \times (x - x_0') = 0$$

Lo cual indica que

$$\Omega_0' = \Omega_0$$

De este modo se comprueba que cualquier origen que se elija para el sistema S' , la velocidad de rotación de los ejes alrededor de este origen (y con ello la orientación a cada instante de los ejes de S' respecto de S) será la misma. Por lo tanto la rotación de cualquier sólido se puede definir en términos de cualquier sistema de referencia unido a él. Se define entonces simplemente Ω como la velocidad que interviene en (2.31)

$$v = v_0 + \Omega \times (x - x_0) \quad (2.33)$$

de la ecuación (2.33) se deduce que no es necesario que el origen O de S' este contenido dentro del cuerpo; lo único que se requiere es que S' este fijo al sólido.

Al multiplicar escalarmente (2.33) por Ω se obtiene

$$\Omega \cdot v = \Omega \cdot v_0 \quad (2.34)$$

dado que la velocidad que resulta de la rotación es perpendicular a Ω misma, de la ecuación (2.34) se deduce que si en un instante dado por las rotaciones y traslaciones propias del cuerpo rígido se consigue que $v \perp \Omega$ este producto punto se hace cero por el coseno del ángulo de 90° lo que indica que en ese instante también $v_0 \perp \Omega$, esto significa que como el origen O' puede ser arbitrario, el eje paralelo a Ω que pasa por O' en ese instante se convierte en eje instantáneo de rotación. De la misma ecuación se deduce que si la velocidad de v no es perpendicular a Ω , tampoco v_0 será perpendicular a Ω , lo que significa que en un instante dado la rotación se puede aislar de la traslación y el cuerpo rígido se puede analizar instantáneamente como un cuerpo que está en rotación pura, o en una rotación mas una traslación a lo largo del eje de rotación (movimiento de tirabuzón).

2.2.1.1 MATRICES DE ROTACIÓN

Si se tiene dos sistemas de coordenadas S y S' cuyos orígenes coinciden, pero la orientación de sus ejes es diferente, un mismo vector x tendrá distintas componentes en cada uno de ellos. Se denomina (x, y, z) a las componentes de x en S , y (x', y', z') a sus componentes en S' . Definiendo los vectores columna de estas componentes se tiene

$$x \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad x' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

Y se define una matriz de rotación R que relaciona ambos conjuntos de componentes como

$$x' = R_x x.$$

Como el modulo del vector es el mismo independientemente del sistema que se tome, se tiene que

$$x^T x = x'^T x'$$

y de manera análoga

$$x^T x = x'^T x' = (R_x)^T R_x x^T R_x^T R_x x,$$

lo que indica que

$$R^T R = 1,$$

por lo que se concluye que la transpuesta de R es su inversa; esto significa que R es ortogonal y su determinante siempre valdrá 1

$$\det(R^T R) = \det(R^T) \det(R) = [\det(R)]^2 = \det(1) = 1,$$

Del cuadrado del determinante de la matriz R se deduce que este vale ± 1 . El signo + corresponde a rotaciones puras y el signo - a rotaciones más inversión de ejes.

Se define la ecuación para calcular los autovectores u de R

$$R u = \lambda u,$$

así como su transpuesta conjugada

$$u^u R^u = \lambda^* u^u.$$

El superíndice u indica una transposición matricial seguida por una conjugación con números complejos; el superíndice $*$ indica conjugación compleja.

Como \mathbf{R} es una matriz de números reales, la $\mathbf{R}^u = \mathbf{R}^T$, por lo que si se multiplican las dos ecuaciones anteriores miembro a miembro, y considerando la ortogonalidad de \mathbf{R} se obtiene

$$u^u \mathbf{R}^u \mathbf{R} u = u^u u = \lambda^* \lambda u^u u = |\lambda|^2 u^u u,$$

de donde se observa que $|\lambda|^2 = 1$, esto significa que los valores de una matriz ortogonal tienen modulo 1, las raíces de λ pueden ser reales o complejas y como se aplicará a un problema tridimensional habrá al menos una raíz real y por lo tanto su valor será ± 1 , para rotaciones puras el signo deberá ser +. Consecuentemente para una matriz de rotación, existe al menos un vector cuyas componentes no cambian al aplicarle la matriz; la dirección de este vector invariante corresponde al eje de rotación.

También es posible tener una matriz \mathbf{A} generada por el producto de dos matrices de rotación \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 , $\mathbf{A} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$, de lo cual se tiene que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^T \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 = \mathbf{1},$$

Lo que significa que el producto de dos matrices ortogonales también es una matriz ortogonal; en particular si ambas son de rotación pura. Se debe recordar que en algebra matricial ($\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$) salvo que ambas matrices correspondan a rotaciones alrededor del mismo eje.

2.2.1.2 ÁNGULOS DE EULER

Se tiene que la orientación de un cuerpo rígido está dada por la de los ejes del sistema S' fijo al cuerpo, y su posición por la del origen x_o de tal sistema. Considerando que en $t = 0$ el sistema S' coincide con S que esta fijo al espacio. Al transcurrir el tiempo la translación se describe por la posición del origen de S' , $x_o(t)$, lo que ya se había señalado.

Por otro lado con respecto a las rotaciones; es sabido que si $x(t)$ es el vector posición de un punto del cuerpo en el instante t , el vector $x(t) - x_o(t)$ tiene siempre las mismas componentes en S' ; la rotación se describirá por cómo cambian estas componentes en el sistema S . Si el cuerpo tiene en t una velocidad angular $\Omega(t)$, el cambio del vector $x(t) - x_o(t)$ en un dt es

$$d[x(t) - x_o(t)] = \Omega(t) \times [x(t) - x_o(t)] dt;$$

Integrando esta ecuación desde $t = 0$, resulta

$$x(t) - x_o(t) = x(0) - x_o(0) + \int_0^t \Omega(t') \times [x(t') - x_o(t')] dt'.$$

Cada $\Omega(t') \times [x(t') - x_o(t')] dt'$ corresponde a una rotación infinitesimal (de eje definido por la dirección de $\Omega(t')$ y ángulo $|\Omega(t')| dt'$), y el valor de $x(t) - x_o(t)$ es la composición de todas estas rotaciones, que por la propiedad de grupo es también una rotación. Esto significa que, por complicada que haya sido la sucesión de rotaciones del sólido, el estado resultante en un tiempo cualquiera es el de una rotación equivalente, con su matriz correspondiente, con un dado eje de rotación (dado por el autovector de autovalor 1 de la matriz), tal que un

único giro de ángulo apropiado alrededor de este eje lleva la orientación del sólido del estado inicial al actual. Esto se conoce como teorema de Euler. Dado que, obviamente, el origen del sistema S' puede llevarse de su estado inicial al actual a través de una única translación, se puede decir que el estado genérico de un sólido puede ser descrito en cada instante por una dada translación y una dada rotación desde su estado inicial, lo que se denomina teorema de Chasles.

Así, una posible descripción del movimiento del sólido podría consistir en la posición instantánea del origen de S' , el $x_0(t)$, junto con el eje de la rotación equivalente, dado por el versor $\mathbf{n}(t)$, y el ángulo equivalente $\Phi(t)$ girado alrededor de éste; un total de seis parámetros.

La determinación de $\mathbf{n}(t)$ y $\Phi(t)$ es complicado, y resulta en la práctica más conveniente usar otra parametrización de la rotación equivalente, que es la dada por los ángulos de Euler.

Para definir los ángulos de Euler se definirá a (x, y, z) , como los ejes del sistema S y (x_1, x_2, x_3) a los de S' . Si un vector \mathbf{r} tiene componentes (x, y, z) en S , y componentes (x_1, x_2, x_3) en S' , se sabe que en cada instante una única rotación, de matriz A , relaciona a ambas:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Se analiza cómo sería A si los ejes z y x_3 coincidieran y S' estuviese girado un ángulo ϕ alrededor de este eje común (en la figura 7.1 se representa la proyección de \mathbf{r} sobre el plano x, y)

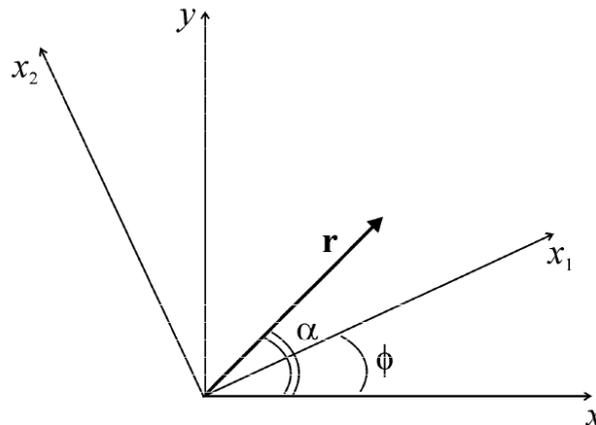


Figura 2.1 Proyección del vector \mathbf{r} sobre los ejes del sistema en rotación.

De la figura se observa que

$$x_1 = r \cos(\alpha - \phi) = r \cos \alpha \cos \phi + r \sin \alpha \sin \phi = x \cos \phi + y \sin \phi,$$

$$x_2 = r \sin(\alpha - \phi) = r \sin \alpha \cos \phi - r \cos \alpha \sin \phi = y \cos \phi - x \sin \phi,$$

Que matricialmente se puede escribir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La parametrización de los ángulos de Euler corresponde a escribir la matriz A como el producto de tres rotaciones de S' similares, parametrizada cada una por un solo ángulo:

$$A = B(\psi)C(\theta)D(\phi). \quad (2.36)$$

En la figura 2.2 se aprecian cada uno de los ángulos de rotación; ψ que gira alrededor de x_3 , θ que gira alrededor de ξ y ϕ que gira alrededor del eje z , con sus respectivas matrices de rotación

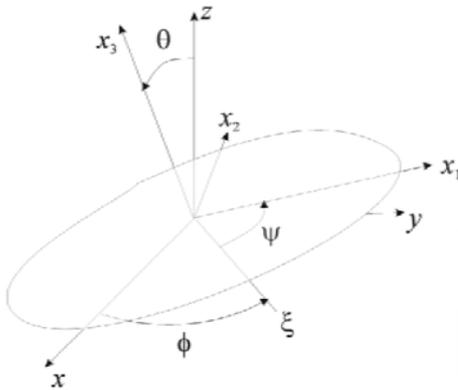


Figura 2.2 Grafica del los ángulos de Euler.

$$D(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.37)$$

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

$$B(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

De la figura 2.2 se observa que el eje denominado ξ es simultáneamente perpendicular a z y a x_3 , y determina la llamada línea de nodos. El giro arbitrario de S' se parametriza entonces como un giro alrededor de z , seguido de uno alrededor de la línea de nodos ξ , seguido a su vez por otro alrededor de x_3 .

Esta parametrización es conceptualmente sencilla y, además, la velocidad instantánea de rotación Ω es más simple de escribir en términos de las velocidades de variación de ϕ , θ y ψ . En efecto, si la orientación de S' pasa de estar descrita en t por ϕ, θ y ψ , a serlo en $t + dt$ por $\phi + d\phi, \theta + d\theta$ y $\psi + d\psi$, para calcular Ω cada una de estas variaciones puede considerarse que ocurre alrededor del eje correspondiente tal como se

encuentra en t , y la velocidad es simplemente la suma vectorial de cada una de estas velocidades.

Así, $\dot{\psi}$ tiene la dirección del eje x_3 ; $\dot{\theta}$ tiene la dirección de la línea de nodos, es decir, $\dot{\theta} \cos \psi$ en x_1 y $-\dot{\theta} \sin \psi$ en x_2 ; finalmente, $\dot{\phi}$ tiene la dirección de z , con lo que es $\dot{\phi} \cos \theta$ en x_3 , $\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$ en x_1 , y $\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$ en x_2 . Reuniendo todo lo anterior, las componentes en S' de la velocidad angular Ω son

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.40}$$

De manera similar, las componentes en S se obtienen. $\dot{\phi}$ tiene la dirección de z ; $\dot{\theta}$ tiene la dirección de la línea de nodos, o sea, $\dot{\theta} \cos \phi$ en x y $\dot{\theta} \sin \phi$ en y ; finalmente, $\dot{\psi}$ tiene la dirección del eje x_3 , con lo que es $\dot{\psi} \cos \theta$ en z , $\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi$ en x , y $-\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi$ en y . Reuniendo esto se tiene

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi, \\ \Omega_y &= \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi, \\ \Omega_z &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.41}$$

2.2.2 DINÁMICA

2.2.2.1 ENERGÍA CINÉTICA

Se establece en principio que la energía cinética del sólido, depende de la energía cinética de cada una de sus partículas, para esto se denomina con un subíndice i a cada una de las que lo componen. Se considera también el sólido como un continuo de materia, pero la notación es menos pesada y más clara si se tratamos al cuerpo como un conjunto discreto de partículas; y de aquí pasar al concepto continuo. Por lo tanto la velocidad de cada partícula del cuerpo usando (2.33) se expresa como

$$v_i = v_0 + \Omega \times r_i,\tag{2.42}$$

Donde se ha definido

$$r_i \equiv x_i - x_0,$$

Con lo que

$$|v_i|^2 = (v_0 + \Omega \times r_i) \cdot (v_0 + \Omega \times r_i) = |v_0|^2 + 2v_0 \cdot (\Omega \times r_i) + |\Omega \times r_i|^2$$

Usando la propiedad conmutativa cíclica del producto mixto, los últimos dos términos resultan

$$2v_0 \cdot (\Omega \times r_i) = 2r_i \cdot (v_0 \times \Omega),$$

y

$$|\Omega \times r_i|^2 = (\Omega \times r_i) \cdot (\Omega \times r_i) = r_i \cdot [(\Omega \times r_i) \times \Omega], \quad (2.43)$$

respectivamente, y aplicando la identidad vectorial

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B), \quad (2.44)$$

para reescribir lo correspondiente del último paréntesis de la 2.43,

$$(\Omega \times r_i) \times \Omega = -\Omega \times (\Omega \times r_i) = r_i |\Omega|^2 - \Omega (\Omega \cdot r_i),$$

con lo que 2.43 resulta

$$|\Omega \times r_i|^2 = |r_i|^2 |\Omega|^2 - (\Omega \cdot r_i)^2.$$

Por lo tanto la energía cinética del sólido estará dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i |v_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |v_0|^2 + \sum_i m_i r_i \cdot (v_0 \times \Omega) + \frac{1}{2} \sum_i m_i [|r_i|^2 |\Omega|^2 - (\Omega \cdot r_i)^2].$$

Llamando $M = \sum_i m_i$ a la masa total del cuerpo, y teniendo en cuenta que la posición del centro de masas X_{CM} cumple con $\sum_i m_i x_i = M X_{CM}$, se reescribe a T como

$$T = \frac{1}{2} M |v_0|^2 + M (X_{CM} - x_0) \cdot (v_0 \times \Omega) + \frac{1}{2} \sum_i m_i [|r_i|^2 |\Omega|^2 - (\Omega \cdot r_i)^2].$$

En el primer término se identifica la contribución del movimiento de translación puro, un término mixto, y una contribución de la rotación pura (último término). El último término se puede reescribir de manera más útil considerándolo en términos de las componentes cartesianas de los vectores intervinientes

$$\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3),$$

$$r_i = (r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, r_3^{(i)}),$$

Los subíndices 1,2 y 3 se pueden sustituir por subíndices alfabéticos para escribir

$$|r_i|^2 |\Omega|^2 = |r_i|^2 \Omega_k \Omega_l \delta_{lk},$$

$$(\Omega \cdot r_i)^2 = \Omega_k \Omega_l r_k^{(i)} r_l^{(i)},$$

en donde se ha utilizado la delta de Kronecker δ_{lk} , y la convención de Einstein de sumar sobre los índices vectoriales repetidos. De modo que se tiene

$$\sum_i m_i [|r_i|^2 |\Omega|^2 - (\Omega \cdot r_i)^2] = \Omega_k \Omega_l \sum_i m_i [|r_i|^2 \delta_{lk} - r_k^{(i)} r_l^{(i)}],$$

de esta última se define el tensor de inercia, referido al origen x_0 (por ser $r_i = x_i - x_0$)

$$I^0_{kl} \equiv \sum_i m_i [|r_i|^2 \delta_{lk} - r_k^{(i)} r_l^{(i)}], \quad (2.45)$$

Que para el caso de distribución continua de materia se escribe como

$$I^0_{kl} \equiv \int \rho(r) [|r|^2 \delta_{lk} - r_k r_l] d^3r, \quad (2.46)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad de masa local del cuerpo, y la integral está extendida a todo su volumen. Este tensor depende del origen x_0 respecto del cual se miden los r de cada punto del cuerpo, y que es una propiedad del cuerpo mismo (no de su estado de movimiento) que se requiere calcular para cada sólido estudiado.

La energía cinética se escribe entonces de manera compacta como

$$T = \frac{1}{2} M |v_0|^2 + M (X_{CM} - x_0) \cdot (v_0 \times \Omega) + \frac{1}{2} I^0_{kl} \Omega_k \Omega_l. \quad (2.47)$$

Un punto útil es que si se elige el origen x_0 coincidiendo con el centro de masas el término mixto se anula y la energía cinética se descompone en dos términos, uno de translación y otro de rotación (también sucede esto, para cualquier x_0 , si $v_0 \parallel \Omega$). Es conveniente entonces elegir $x_0 = X_{CM}$, con lo que se eliminan los supraíndice en el tensor de inercia al referirse al CM)

$$T = \frac{1}{2} M |v_{CM}|^2 + \frac{1}{2} I_{kl} \Omega_k \Omega_l. \quad (2.48)$$

Si se representa al tensor de inercia I de forma matricial

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix},$$

Y el vector columna de la velocidad angular Ω

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix},$$

Se puede escribir en forma matricial la energía de rotación como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega.$$

2.2.2.2 TEOREMA DE STEINER

Este teorema es útil cuando se conoce el tensor de inercia respecto del CM y se pretende calcular respecto de un origen x_0 genérico. Suponiendo que $x_0 = X_{CM} + a$, con lo

que si r es la posición de un punto genérico del cuerpo respecto del CM, o sea, $x = X_{CM} + r$, se tiene que la posición respecto de x_0 es

$$r' = x - x_0 = r - a;$$

De la definición 2.46

$$\begin{aligned} |r'|^2 &= |r|^2 - 2r \cdot a + |a|^2, \\ r'_k r'_l &= r_k r_l - r_k a_l - a_k r_l + a_k a_l. \end{aligned}$$

De los términos que están a la derecha de estas ecuaciones, los que son lineales en r no dan ninguna contribución a la integral 2.46 por ser posiciones referidas al CM:

$$\int \rho(r) r d^3r = 0,$$

Con lo que

$$\begin{aligned} I^0_{kl} &= \int \rho(r') [|r'|^2 \delta_{lk} - r'_k r'_l] d^3r' \\ &= \int \rho(r) [|r|^2 \delta_{lk} - r_k r_l] d^3r + [|a|^2 \delta_{lk} - a_k a_l] \int \rho(r) d^3r \\ &= I_{kl} + M[|a|^2 \delta_{lk} - a_k a_l]. \end{aligned}$$

Igualdad que es conocida como el teorema de Steiner.

2.2.2.3 MOMENTO ANGULAR

Como se reviso en el capítulo 2 el momento angular L_o' respecto de un sistema cuyo origen x_o se traslada respecto de un sistema fijo, estará relacionado al momento angular L del sistema fijo por

$$L = L_o' + x_0 \times P + M X_{CM} \times \dot{x}_0 - M x_0 \times \dot{x}_0.$$

Donde P es la cantidad de movimiento total del sistema, en particular si $x_0 = X_{CM}$, esta relación se simplifica a

$$L = L'_{CM} + X_{CM} \times P \tag{2.49}$$

Por lo que se aprecia que es muy conveniente calcular el momento angular respecto del centro de masas

$$L'_{CM} = \sum_i m_i r_i \times v'_i,$$

en la que v'_i es la velocidad de la partícula del cuerpo respecto del centro de masas. Tomando en cuenta que se considero un sistema que se traslada con el centro de masas, pero que no rota, de manera que v'_i contiene sólo la contribución de la rotación del cuerpo:

$$v'_i = \Omega \times r_i,$$

con lo que se tiene

$$L' = \sum_i m_i r_i \times (\Omega \times r_i).$$

y aplicando la identidad 2.44, se tiene

$$r_i \times (\Omega \times r_i) = \Omega |r_i|^2 - r_i (\Omega \cdot r_i),$$

que en componentes cartesianas es

$$\begin{aligned} [r_i \times (\Omega \times r_i)]_k &= \Omega_k |r_i|^2 - r_k^{(i)} \Omega_l r_l^{(i)} \\ &= \Omega_l [|r_i|^2 \delta_{kl} - r_k^{(i)} r_l^{(i)}], \end{aligned}$$

Con lo que finalmente se obtiene

$$L'_k = \sum_i m_i [|r_i|^2 \delta_{kl} - r_k^{(i)} r_l^{(i)}] \Omega_l = I_{kl} \Omega_l \quad (2.50)$$

Que en representacion matricial es

$$L' = I \Omega$$

2.2.2.4 EJES PRINCIPALES DEL TENSOR DE INERCIA

El tensor de inercia es fundamental para determinar la energía cinética y el momento angular del sólido. De la definición (2.45) o (2.46) se observa que es un tensor simétrico; y también puede ser siempre diagonalizable; esto es, existen tres ejes ortogonales, tal que si es calculado respecto de ellos su expresión es una matriz diagonal (los elementos de la diagonal son en general distintos); estos ejes se denominan ejes principales. Tomando los ejes principales como los del sistema fijo al cuerpo, S' , respecto de los cuales se puede escribir en notación matricial

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Para un cuerpo genérico los ejes principales se obtienen calculando el tensor de inercia en un sistema ortogonal dado y luego buscando sus autovectores. Éstos definen entonces la matriz ortogonal que representa la transformación desde los ejes originales usados a los ejes principales.

Si el cuerpo tiene una distribución de masa que es simétrica respecto de un plano, dos de los ejes principales están contenidos en este plano y el tercero es perpendicular a él. En efecto, si se escoge al eje x_3 perpendicular al plano de simetría de la distribución de masa del cuerpo, y su origen en él, se tiene que, para $l \neq 3$,

$$I_{3l} = - \int \rho(r) r_3 r_l d^3 r = 0,$$

ya que para cada valor de r_l existen valores simétricos de $\rho(r)$ por encima y por debajo del plano de simetría, en los cuales r_3 toma valores de igual módulo y signo distinto. La forma del tensor en este sistema de ejes es entonces

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

por lo que basta con diagonalizar la submatriz correspondiente al plano de simetría.

Un subcaso particular importante corresponde a distribución de masa con simetría de revolución. En tal caso cualquier plano que contiene al eje de revolución es un plano de simetría, lo que indica que este eje es un eje principal y, además, que cualesquiera dos ejes perpendiculares a éste (y por lo tanto contenidos cada uno de ellos en alguno de los infinitos planos de simetría) son también ejes principales.

Expresados el tensor de inercia y la velocidad angular en componentes sobre los ejes principales, las expresiones de la energía cinética y del momento angular son muy sencillas:

$$T = \frac{1}{2}M|v_{CM}|^2 + \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2), \quad (2.51)$$

y

$$L' = I_1\Omega_1 e_1 + I_2\Omega_2 e_2 + I_3\Omega_3 e_3. \quad (2.52)$$

La siguiente es una lista de los tensores de inercia correspondientes a sólidos con densidad de masa uniforme y diferentes formas, referidos a sus ejes principales; el origen siempre se ubica en el centro de masas y la masa se denomina como M :

1) Varilla fina de longitud l , eje x_3 a lo largo de ella:

$$I_1 = I_2 = \frac{Ml^2}{12}, \\ I_3 = 0.$$

2) Disco delgado de radio R , eje x_3 perpendicular al disco:

$$I_1 = I_2 = \frac{MR^2}{4}, \\ I_3 = \frac{MR^2}{2}.$$

3) Cilindro de radio R y longitud l , eje x_3 a lo largo de él:

$$I_1 = I_2 = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{l^2}{3} \right),$$

$$I_3 = \frac{MR^2}{2}.$$

4) Esfera de radio R :

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}MR^2.$$

5) Paralelepípedo de lado a en la dirección de x_1 , lado b en la de x_2 , y lado c en la de x_3 :

$$I_1 = \frac{M}{12}(b^2 + c^2),$$

$$I_2 = \frac{M}{12}(a^2 + c^2),$$

$$I_3 = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

6) Elipsoide de semieje a en la dirección de x_1 , semieje b en la de x_2 , y semieje c en la de x_3 :

$$I_1 = \frac{M}{5}(b^2 + c^2),$$

$$I_2 = \frac{M}{5}(a^2 + c^2),$$

$$I_3 = \frac{M}{5}(a^2 + b^2).$$

7) Cono circular de altura h y radio de base R , eje x_3 a lo largo de su eje. El centro de masas está sobre el eje a $h/4$ de la base.

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{20}M \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right),$$

$$I_3 = \frac{3}{10}MR^2.$$

2.2.3 ECUACIONES DE EULER

Las ecuaciones de Euler representan la ley de la variación del momento angular. Si \mathbf{K} es el par de fuerzas aplicado a un sólido, referenciado con respecto al origen S , se define como

$$\frac{dL}{dt} = K, \quad (2.53)$$

que aplicando la ecuación 2.49 se obtiene

$$\frac{dL'}{dt} + \dot{\mathbf{X}}_{CM} \times \mathbf{P} \times \mathbf{X}_{CM} \times \dot{\mathbf{P}} = K.$$

En dicha ecuación, el segundo término del lado izquierdo es nulo y $\dot{\mathbf{P}}$ es igual a la fuerza F aplicada al sólido, por lo que se tiene

$$\frac{dL'}{dt} = K - \mathbf{X}_{CM} \times F \equiv K'.$$

La derivada con respecto al tiempo de la variación del momento angular, referida al sistema S , de L' en el tiempo, se puede escribir en términos de la variación referida a S'

$$\left(\frac{dL'}{dt} \right)_S = \left(\frac{dL'}{dt} \right)_{S'} + \Omega \times L',$$

que permite escribir

$$\left(\frac{dL'}{dt} \right)_{S'} + \Omega \times L' = K'.$$

Si el sistema S' es el de los ejes principales de inercia, las ecuaciones anteriores adquieren una representación muy simple, para estos ejes, con relación a 2.52 son

$$\begin{aligned} L'_1 &= I_1 \Omega_1, \\ L'_2 &= I_2 \Omega_2, \\ L'_3 &= I_3 \Omega_3, \end{aligned}$$

la variación de estas componentes corresponde a la variación de L' respecto de S' ; es decir,

$$\left(\frac{dL'}{dt} \right)_{S'} = I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} e_1 + I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} e_2 + I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} e_3,$$

con lo que haciendo el producto vectorial de $\Omega \times L$ se pueden escribir las componentes de K' sobre los ejes principales

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_2 \Omega_3 (I_3 - I_2) &= K'_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + \Omega_1 \Omega_3 (I_1 - I_3) &= K'_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + \Omega_1 \Omega_2 (I_2 - I_1) &= K'_3, \end{aligned} \quad (2.54)$$

estas últimas corresponden a las ecuaciones de Euler.

Resaltando que en estas ecuaciones se están usando los ejes móviles (fijos al cuerpo) para escribir sobre ellos las componentes de una ecuación vectorial válida en un sistema de referencia de ejes fijos al espacio S .

Si en estas ecuaciones se introducen las expresiones (2.40) y se representa de forma explícita la variación del momento angular K'_i , la solución de las mismas dará la orientación del cuerpo al transcurrir el tiempo. Por supuesto, siempre se podrá escribir las ecuaciones de Lagrange usando la expresión (2.51) para la energía cinética junto con las (2.40) y se obtendrán ecuaciones equivalentes. Sin embargo, las ecuaciones de Euler son en sí mismas de primer orden de derivación y pueden muchas veces integrarse para obtener las componentes de Ω , lo que lleva a que las (2.40) resulten ecuaciones de primer orden para los ángulos de Euler. Asimismo sólo la determinación de Ω proporciona información útil por sí misma.

2.2.4 MOVIMIENTO DEL CUERPO SOLIDO LIBRE

2.2.4.1 CONSTRUCCIÓN DE POINROT

Considerando el movimiento general de un sólido arbitrario no sometido a fuerzas ni torques externos, con el centro de masas moviéndose con velocidad constante para describir el movimiento desde un sistema en el que el centro de masas está quieto. La energía cinética, que es constante, tiene en este sistema la contribución rotacional solamente, que usando ejes principales se puede escribir como

$$T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2). \quad (2.55)$$

Asimismo, el momento angular, también constante, corresponde al L'_{CM} :

$$L = I_1\Omega_1e_1 + I_2\Omega_2e_2 + I_3\Omega_3e_3. \quad (2.56)$$

de las anteriores se obtiene

$$T = \frac{1}{2}L \cdot \Omega. \quad (2.57)$$

La constancia de (2.55) y (2.56) permite hacer una descripción geométrica del movimiento a partir de la llamada construcción de Poinrot. Para ello se escribe (2.55) como

$$\frac{\Omega_1^2}{I_1} + \frac{\Omega_2^2}{I_2} + \frac{\Omega_3^2}{I_3} = 1,$$

que corresponde en un espacio de ejes $(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3)$, a un elipsoide de semiejes $\sqrt{2T/I_1}$, $\sqrt{2T/I_2}$ y $\sqrt{2T/I_3}$, denominado **elipsoide de inercia**.

Si se considera la función

$$F(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3) \equiv \frac{\tilde{\Omega}_1^2}{\frac{2T}{I_1}} + \frac{\tilde{\Omega}_2^2}{\frac{2T}{I_2}} + \frac{\tilde{\Omega}_3^2}{\frac{2T}{I_3}},$$

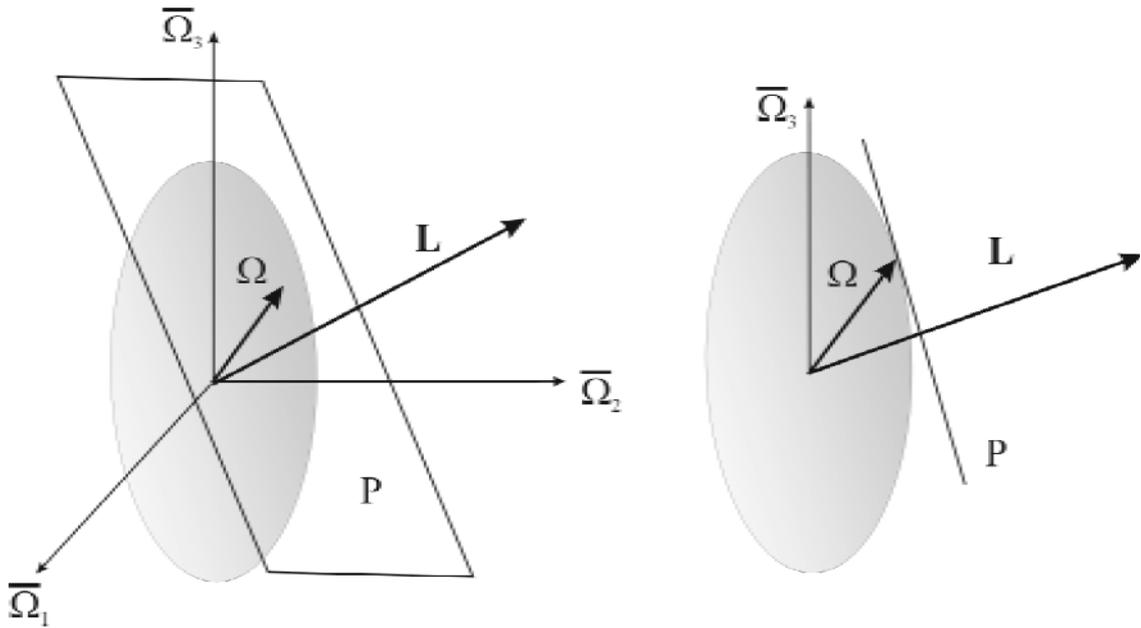
Se tiene que $F(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = 1$ y que

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{\Omega}_1} = \frac{I_1 \tilde{\Omega}_1}{T};$$

como $I_1 \Omega_1 = L_1$ y el gradiente de F evaluado en $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ es paralelo a L . Así, el plano tangente al elipsoide de inercia en el punto $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ del espacio $(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3)$ es perpendicular a L . Como L es constante, este plano es fijo y el elipsoide se mueve teniendo un punto de contacto sobre él. Más aun, como el punto de contacto pasa por el eje de giro instantáneo (Ω une el centro del elipsoide con el punto de contacto) este punto está instantáneamente en reposo, por lo que el elipsoide de inercia rueda sin deslizar sobre el plano invariante. Finalmente, la “distancia” del centro del elipsoide al plano está dada por

$$\Omega \cdot \frac{L}{|L|} = \frac{2T}{|L|},$$

que es constante



Esta construcción geométrica de Poincaré dice que el elipsoide de inercia se mueve sobre el plano invariante perpendicular a L , rodando por él sin deslizar y manteniendo fija la distancia de su centro al plano. Como el elipsoide de inercia está asociado unívocamente al cuerpo (el eje $\tilde{\Omega}_1$ es paralelo al x_1 , etc.), el movimiento del elipsoide determina el movimiento del cuerpo.

La curva que “pinta” el punto de contacto sobre el elipsoide se denominada **polodia** y la que pinta sobre el plano **herpolodia**.

2.3 GIROSCOPIO

El giroscopio es un instrumento que permite montar una rueda giratoria de modo que su eje de giro pueda cambiar libremente de dirección, desplazándose tanto alrededor de un eje vertical (movimiento de precesión) como en uno horizontal (movimiento de nutación). Un ejemplo sencillo de giroscopio es una peonza con su vértice fijo (figura 2.3).

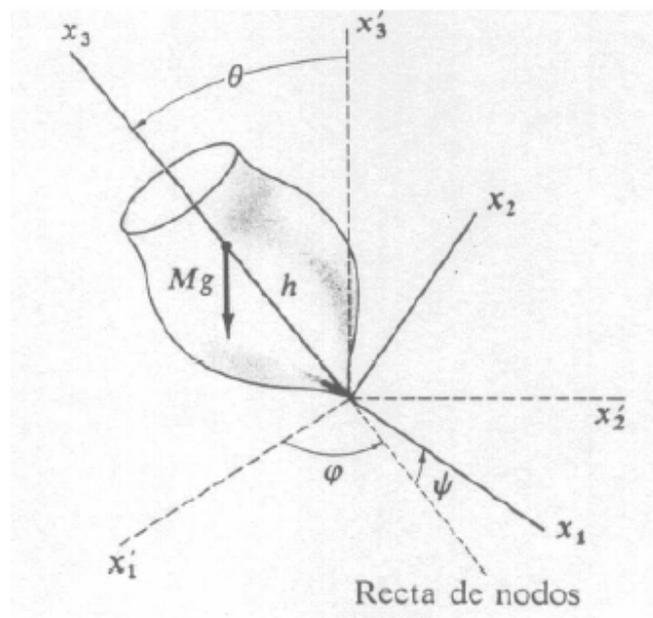


Figura 2.3 Giroscopio (peonza simétrica) con el vértice fijo. E indican los ángulos de Euler.

El giroscopio tiene dos importantes características:

- Inercia giroscópica: El eje de un giroscopio equilibrado (con su centro de gravedad en el punto fijo) tiende a mantenerse siempre en la misma dirección.
- Precesión giroscópica: Si se aplica una fuerza sobre el giroscopio que dé lugar a un par de fuerzas, su eje tiende a moverse en una dirección perpendicular a la fuerza aplicada.

Estas dos propiedades se explican tomando en cuenta la ecuación de Newton para un sólido rígido en rotación:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

donde \vec{L} es el momento angular del sólido y $\vec{\tau}$ el momento de las fuerzas aplicadas.

Si el giroscopio está equilibrado, es decir, si su centro de gravedad coincide con el punto fijo, el momento de la fuerza de gravedad respecto al punto fijo es nulo. En estas condiciones, si el disco del giroscopio se pone en rotación, la dirección del momento angular coincidirá con la de su eje. Debido a la ley de conservación del momento angular, este eje permanecerá fijo en el espacio siempre que no se aplique de alguna forma un par de fuerzas ($\vec{\tau} = 0$) (inercia giroscópica).

La inercia giroscópica es la base de la utilización del giroscopio como estabilizador de barcos y en los pilotos automáticos de los aviones, así como en la medida de velocidad angular en vehículos en movimiento. Si sobre una plataforma se montan dos giroscopios con sus ejes formando un ángulo recto entre sí, y se monta la plataforma sobre unos soportes, la plataforma permanecerá completamente rígida a pesar de que los soportes se desplacen o giren. Esta es la base de los sistemas inerciales de navegación (INS, del inglés Inertial Navigation System). En un INS un sensor situado en el eje de los soportes detecta cuándo rota el soporte respecto a la plataforma del giroscopio. Si además se añaden a la plataforma tres acelerómetros, es posible decir exactamente hacia dónde apunta el vehículo y cómo cambia su movimiento en las tres direcciones. Con esta información, el piloto automático de un avión puede mantenerlo en curso, y los sistemas de guiado de cohetes y misiles pueden mantenerlos en su trayectoria.

Cuando el giroscopio no está equilibrado, la fuerza de la gravedad aplica sobre él un momento $\vec{\tau}$ perpendicular al eje de rotación y a la vertical. En ese caso, el momento angular experimentará un cambio en el tiempo dado por:

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt$$

El cambio en el momento angular tendrá siempre la dirección del momento de las fuerzas aplicadas. Si el momento de las fuerzas es perpendicular a \vec{L} , el cambio $d\vec{L}$ será también perpendicular a \vec{L} , con lo que el momento angular cambiará de dirección pero no de magnitud. Esto significa que el eje de rotación cambiará de dirección, pero el disco seguirá rotando a velocidad constante. El movimiento que realiza el eje se llama de precesión.

Otra aplicación del movimiento giroscópico, asociada al movimiento de la tierra, es la brújula giroscópica. La brújula se diseña de forma que el eje de giro del giroscopio apunte siempre al norte geográfico. Esto se consigue igualando su movimiento de precesión al de la tierra. La brújula giroscópica tiene la ventaja especial de señalar hacia el norte geográfico verdadero, ya que no está sujeta a anomalías magnéticas locales.

Se puede analizar la precesión giroscópica utilizando la mecánica de Newton. Suponiendo que el momento de las fuerzas es debido a la gravedad se obtiene una expresión para la velocidad de precesión del giroscopio.

Se define como l a la posición del centro de masas del giroscopio respecto al punto de apoyo y M_T a la masa total, el par de fuerzas debido a la gravedad es:

$$\tau = M_T g l \sin \theta$$

donde θ es el ángulo que el eje forma con la vertical.

La velocidad angular de precesión se define como la velocidad a la cual el eje rota alrededor de la vertical,

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$$

El cambio producido en el momento angular debido al momento de las fuerzas será:

$$dL = \tau dt = M_T g l \sin \theta dt$$

Por otra parte, este cambio puede relacionarse con el ángulo $d\phi$ barrido por el eje en su movimiento:

$$dL = L \sin \theta d\phi$$

puesto que L forma un ángulo θ con la vertical. Despejando, se tiene:

$$d\phi = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{M_T g l}{L} dt$$

La velocidad angular de precesión será por tanto:

$$\dot{\phi} = \frac{M_T g l}{L} = \frac{M_T g l}{\omega_3 I_3}$$

donde I_3 es el momento de inercia del giroscopio alrededor de su propio eje y ω_3 la velocidad angular de rotación alrededor de este mismo eje.

La velocidad de precesión aumentará si la velocidad de rotación del giroscopio es pequeña, o si la distancia del centro de gravedad al punto de apoyo es grande. Sin embargo, la expresión obtenida es válida únicamente cuando la velocidad de rotación ω_3 es grande comparada con la de precesión. En realidad, cuando el cuerpo tiene movimiento de precesión, su momento angular ya no es $I_3 \omega_3$, sino que tendrá una componente debida a la velocidad de precesión $\dot{\phi}$. En esta derivación teórica se ha despreciado esta pequeña componente del momento angular. Un análisis más detallado, indica que en general el ángulo θ no permanece constante, sino que oscila entre dos valores fijos produciendo un movimiento denominado nutación.

Desde el punto de vista dinámico, el giroscopio es un sólido rígido simétrico en un campo gravitatorio con un punto de su eje de simetría fijo en el espacio. Para describir el movimiento del giroscopio se elige su eje de giro como eje x_3 del sistema de coordenadas fijo al cuerpo. Como se tiene un punto fijo, la posición del cuerpo queda completamente determinada por los tres ángulos de Euler: θ da la inclinación del eje respecto a la vertical, ϕ mide el acimut de giroscopio alrededor de la vertical y ψ es su ángulo de giro alrededor de su propio eje.

Para obtener la solución del movimiento del giroscopio se emplea el método de Lagrange, calculando la energía cinética, la energía potencial y la lagrangiana. Como el cuerpo es simétrico respecto al eje de giro (eje x_3), el tensor de momento de inercia del giroscopio respecto a los ejes principales tiene sus componentes correspondientes a los ejes x_1 y x_2 iguales ($I_1 = I_2$). Por lo tanto la energía cinética se define como:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \quad (2.58)$$

Esta expresión puede escribirse en función de los ángulos de Euler como:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos^2 \theta) \quad (2.59)$$

La energía potencial es simplemente:

$$V = M_T g l \cos \theta \quad (2.60)$$

y la lagrangiana será:

$$L = T - V = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos^2 \theta) - M_T g l \cos \theta \quad (2.61)$$

Se puede observar que en la lagrangiana no aparecen explícitamente los ángulos ϕ y ψ , por lo que los momentos generalizados correspondientes serán constantes en el tiempo:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos^2 \theta) = I_3\omega_3 = cte$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi} \cos^2 \theta = cte \quad (2.62, 2.63)$$

Por lo tanto, los momentos angulares respecto al eje vertical y al eje de simetría del cuerpo son constantes del movimiento. De estas dos ecuaciones es posible despejar $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ en función de θ , obteniendo las expresiones:

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - I_3\dot{\phi} \cos^2 \theta}{I_3} = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos^2 \theta) \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos^2 \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

Una tercera constante del movimiento viene dada por la energía del sistema, puesto que es un sistema conservativo

$$E = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + M_T g l \cos \theta \quad (2.64)$$

Teniendo en cuenta que el momento conjugado $p_\psi = I_3\omega_3$ es también una constante del movimiento, la magnitud

$$I_3 \omega_3^2 = \frac{P_\psi^2}{I_3} = cte \quad (2.65)$$

es también constante del movimiento, al igual que la expresión:

$$E' = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + M_T g l \cos \theta$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $\dot{\phi}$, se obtiene finalmente:

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + M_T g l \cos \theta$$

que puede escribirse como:

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V(\theta) \quad (2.66)$$

donde $V(\theta)$ es un potencial efectivo que viene dado por:

$$V(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + M_T g l \cos \theta \quad (2.67)$$

De la definición de E' se puede despejar el tiempo en función del ángulo, $t(\theta)$, obteniendo:

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1} [E' - V(\theta)]}} \quad (2.68)$$

Esta integral puede invertirse (al menos formalmente) para obtener $\theta(t)$ donde se obtendrán también $\varphi(t)$ y $\psi(t)$. Los ángulos de Euler θ , $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ definen por completo la orientación del sólido.

Una forma más gráfica de estudiar el comportamiento del giróscopo es por medio del potencial efectivo $V(\theta)$ (Figura 2.4).

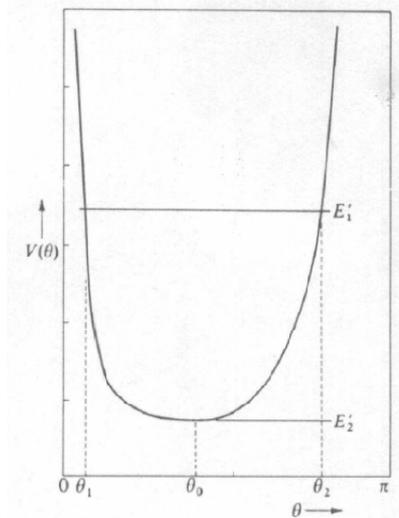


Figura 2.4 Potencial efectivo en función del ángulo θ . El mínimo corresponde a un movimiento con nutación nula. Se indican los ángulos de retorno para un valor arbitrario de E' .

De la figura 2.4 se encuentra que, para un valor cualquiera de E' el movimiento está limitado por dos valores extremos de θ (θ_1 y θ_2), que son raíces del denominador de la integral de la ecuación 2.68. Esto indica que la inclinación del giroscopio (su movimiento de nutación) se encuentra comprendido entre θ_1 y θ_2 . Cuando la energía coincide con el valor mínimo de V , el ángulo θ adquiere un valor único, y el movimiento de nutación se anulará. El giroscopio girará entonces con una precesión estacionaria bajo un ángulo de inclinación constante.

Es posible hacer algunas predicciones cuantitativas sobre el movimiento del giroscopio si se establecen determinadas condiciones iniciales. Suponiendo que inicialmente el giroscopio gira alrededor de su eje de simetría, fijo en una determinada posición θ . En el instante $t = 0$ se deja en libertad este eje, y el problema consiste en describir su movimiento posterior. Se tiene entonces que, para $t = 0$, $\theta = \theta_1$ y $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. El ángulo θ_1 será uno de los ángulos que limiten el movimiento de nutación. Si inicialmente el centro de gravedad del giroscopio se encuentra por encima de su punto de apoyo, el giroscopio tenderá a caer hasta alcanzar el otro ángulo límite. A partir de este instante el eje vuelve a elevarse hasta alcanzar de nuevo el ángulo inicial (salvo pérdidas de energía por rozamiento).

De la condición de que $\dot{\phi} = 0$ cuando $\theta = \theta_1$ y utilizando las ecuaciones 2.62 y 2.63, se deduce la relación:

$$p_\phi = I_3 \omega_3 \cos \theta_1 = p_\psi \cos \theta_1 \quad (2.69)$$

Esta relación permite escribir el potencial efectivo en función de magnitudes fácilmente medibles:

$$V(\theta) = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1} \frac{(\cos \theta_1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} + M_T g l \cos \theta \quad (2.70)$$

y además,

$$E' = M_T g l \cos \theta_1 \quad (2.71)$$

En el caso en que la energía cinética de rotación del giróscopo sea grande comparada con la variación máxima de energía potencial, es decir:

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \gg 2 M_T g l, \quad (2.72)$$

los movimientos de precesión y nutación serán solo pequeñas perturbaciones de la rotación dominante alrededor del eje de simetría (caso del trompo rápido). En este caso es posible obtener expresiones sencillas para el movimiento de nutación, frecuencia de nutación y frecuencia media de precesión. Buscando las raíces del denominador de la ecuación 2.68 y utilizando las ecuaciones 2.70 y 2.71, puede demostrarse que, cuando θ es pequeño, el intervalo de variación del ángulo de nutación viene dado aproximadamente por:

$$\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = \frac{I_1}{I_3} \frac{2 M_T g l}{I_3 \omega_3^2} \sin^2 \theta_1 \quad (2.73)$$

La velocidad de precesión puede escribirse en función del ángulo de nutación como:

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1} \frac{(\cos \theta_1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \approx \frac{I_3 \omega_3}{I_1} \frac{(\cos \theta_1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta_1} \quad (2.74)$$

Esta aproximación es válida para el trompo rápido. El problema quedará resuelto si se encuentra la dependencia de $\cos \theta_1 - \cos \theta$ con el tiempo. Partiendo de la definición de E' , se obtiene la siguiente expresión para la velocidad de precesión:

$$\dot{\phi} \sin \theta \approx \frac{2 M_T g l}{I_1} (\cos \theta_1 - \cos \theta) \sin^2 \theta_1 - \frac{I_3^2 \omega_3^2}{I_1} (\cos \theta_1 - \cos \theta)^2$$

Haciendo el cambio de variable $x = \cos \theta_1 - \cos \theta$ la ecuación anterior se transforma en una ecuación fácilmente integrable:

$$\dot{x}^2 = \frac{2 M_T g l}{I_1} x \sin^2 \theta_1 - \frac{I_3^2 \omega_3^2}{I_1} x^2$$

Que integrando de como resultado:

$$\cos \theta_1 - \cos \theta \approx \frac{I_1}{I_3} \frac{2 M_T g l}{I_3 \omega_3^2} \sin^2 \theta_1 (1 - \cos \omega_N t) \quad (2.75)$$

donde ω_N es la frecuencia de nutación, y está dada por:

$$\boxed{\omega_N = \frac{I_3}{I_1} \omega_3} \quad (2.76)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación 2.74 se obtiene la velocidad angular de precesión en función del tiempo:

$$\dot{\phi} = \frac{M_T g l}{I_3 \omega_3} (1 - \cos \omega_N t) \quad (2.77)$$

cuya frecuencia de oscilación coincide con la frecuencia de nutación, ω_N .

A partir de esta expresión se obtiene la velocidad media de precesión:

$$\boxed{\bar{\dot{\phi}} = \frac{M_T g l}{I_3 \omega_3}} \quad (2.78)$$

Ahora se tiene una descripción completa del movimiento del giroscopio cuando su eje tiene velocidad inicial nula. Inmediatamente después de soltarlo, su centro de masas caerá bajo la acción de la gravedad. Al caer, el giroscopio va adquiriendo velocidad de precesión, proporcional a la magnitud de la velocidad de caída. Esto hace que el eje se desplace lateralmente respecto a la vertical. En el caso de un giroscopio suficientemente rápido, la nutación es pequeña, puesto que la amplitud de nutación es inversamente proporcional a la velocidad de giro al cuadrado. Además, la nutación se amortigua debido al rozamiento del pivote, por lo que a veces resulta inobservable.

2.4 TEORÍA DE CONTROL

Los conceptos de estabilidad e inestabilidad están presentes en la vida cotidiana. Es común escuchar que el franco suizo es estable, el peso mexicano es inestable, el estado de salud de algún paciente es estable, etc. Incluso, en muchas áreas del conocimiento, se maneja dicho concepto de manera intuitiva, es común oír a un ingeniero decir que una estructura es estable o no lo es, un químico dice que una reacción se ha estabilizado, un economista suele decir que el precio de determinado producto es estable, un físico diría que el movimiento de una partícula es estable, etc. Sin embargo este concepto que aparece frecuentemente en todas las ciencias, debe ser definido en términos precisos.

En 1892 Lyapunov formuló de manera precisa el concepto de estabilidad. Y ese ha sido el punto de partida para establecer otras variantes de tan importante concepto. De hecho, no hay concepto en la Matemática que admita tantas acepciones distintas como el de

estabilidad y por este motivo, cuando se habla de estabilidad, se debe aclarar a cuál de ellas se refiere, para evitar ambigüedades.

La estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. Al analizar la estabilidad de dichos sistemas, surgen diferentes problemas según la manera de caracterizar a los sistemas en consideración. Por ejemplo, considerando sistemas lineales y estacionarios, existen métodos para poder determinar su BIBO-estabilidad (*Bounded-Input Bounded-Output*), como el criterio de la respuesta al impulso, el criterio de Routh y el de Nyquist. Sin embargo cuando se tratan sistemas no lineales, estos métodos no tienen validez.

La riqueza dinámica de los sistemas no lineales presenta ciertos fenómenos que no se evidencian al estudiar los sistemas lineales. Uno de estos fenómenos es la existencia de múltiples puntos de equilibrio aislados. Un sistema lineal puede tener un solo punto de equilibrio aislado, y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario que –si el punto es asintóticamente estable– atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial. Debido a esto, resulta importante estudiar la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales para poder entender mejor el comportamiento del mismo.

Una forma de analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales es mediante el estudio del comportamiento del estado en un entorno de los mismos.

2.4.1 ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si todas las soluciones que nacen en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dichas cercanías; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio además es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer en las cercanías del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo.

Considerando un sistema autónomo como:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.79)$$

donde las componentes del vector n -dimensional $f(x)$ son continuas y además son funciones Lipschitzianas¹ en forma local de x , definidas para toda x en el dominio $D \in \mathfrak{R}^n$. La condición de Lipschitz garantiza la existencia y unicidad de la solución de la ecuación 2.79 que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$.

Suponiendo que $\bar{x} \in D$ es un punto de equilibrio de la ecuación 2.79; o sea $f(\bar{x}) = 0$, se pretende caracterizar y analizar la estabilidad de x . Por conveniencia se considera $\bar{x} = 0$ lo cual no representa una pérdida de generalización ya que cualquier punto de equilibrio

¹ Una función $f(x)$ se denomina Lipschitziana en forma local en un punto x_0 si satisface la condición de Lipschitz: $\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$ para x, y en un entorno de x_0 , donde L es una constante positiva y $\|\bullet\|$ denota la norma Euclídea en \mathfrak{R}^n , i.e., $\|x\| = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

$x \neq 0$ puede ser trasladado al origen mediante el cambio de variable $y := x - \bar{x}$ con lo que se tiene:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) := g(y), \quad \text{con } g(0) = 0 \quad (2.80)$$

En esta nueva variable y , el sistema $\dot{y} = g(y)$ tiene como punto de equilibrio al origen del espacio de estados. En consecuencia, ahora se considerará que $f(x)$ satisface $f(0) = 0$ y se analiza la estabilidad del origen del espacio de estados $x = 0$ como punto de equilibrio.

Si $\varphi(t; t_0, x_0)$ representa la solución de la ecuación 2.79 dada a partir de la condición inicial $x(t_0) = x_0$ a partir del instante inicial $t = t_0$, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de la ecuación 2.79 es:

• **Lyapunov estable**

Si para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

• **Inestable si no es estable**

• **Asintóticamente estable**

Si es estable y δ se puede elegir de modo que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0$$

En la figura 2.5 se muestra una representación gráfica de los tres casos de estabilidad definidos.

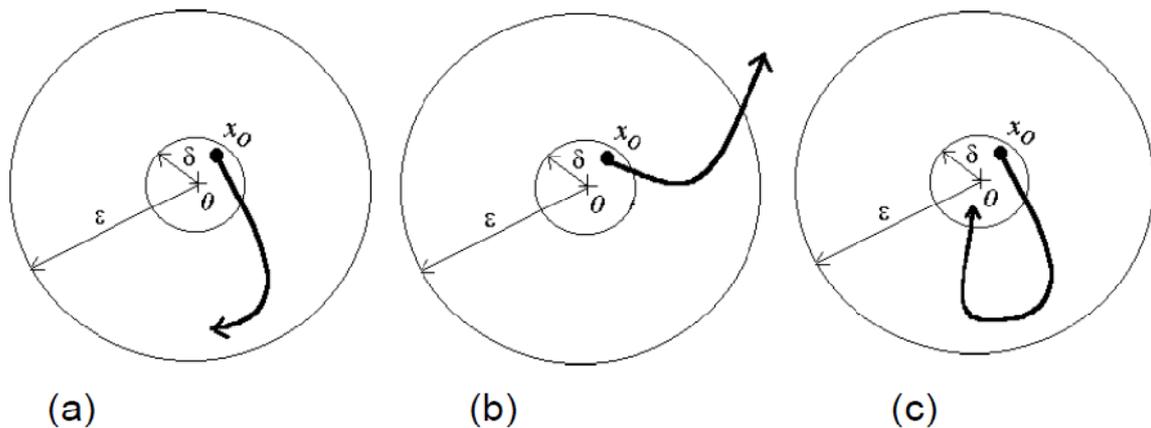


Figura 2.5 Puntos de equilibrio en $x = 0$ con trayectorias solución representativas para un caso:

(a) estable, (b) inestable y (c) asintóticamente estable.

Una vez definidos los diferentes tipos de estabilidad de los puntos de equilibrio, es necesario encontrar métodos para determinar la misma.

2.4.2 ESTABILIDAD EN EL SENTIDO DE LYAPUNOV

De la teoría clásica de la Mecánica, es sabido que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente, o sea tiene derivada negativa, hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio. El segundo método de Lyapunov es una generalización de este hecho. Lyapunov demostró que ciertas otras funciones aparte de la función energía pueden ser usadas para la determinación de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema. A continuación se presentarán algunos conceptos.

Sea $V: D \rightarrow \mathfrak{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathfrak{R}^n$ que contiene al origen, entonces:

- $V(x)$ se dice que es una función **definida positiva** si $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ en $D - \{0\}$.
- $V(x)$ se dice que es una función **semidefinida positiva** si $V(0) = 0$ y $V(x) \geq 0$ en D .
- $V(x)$ se dice que es una función **definida negativa** si $-V(x)$ es definida positiva.
- $V(x)$ se dice que es una función **semidefinida negativa** si $-V(x)$ es semidefinida positiva.
- La derivada temporal de V sobre las trayectorias de la ecuación 2.79 se denomina **derivada orbital**, se denota $\dot{V}(x)$, y esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \nabla V(x) \bullet f(x) \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.81)$$

La derivada de V sobre las trayectorias del sistema depende de la ecuación vectorial de estado del sistema. De este modo, $\dot{V}(x)$ será diferente para diferentes sistemas.

Si $\phi(t; t_0, x_0)$ representa la solución de la ecuación 2.79 dada a partir de la condición inicial $x(0) = x_0$ a partir del instante inicial $t = t_0$, entonces

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi(t; t_0, x_0))$$

Consecuentemente, si $\dot{V}(x)$ es negativa, V será decreciente sobre las trayectorias solución de la ecuación 2.79.

2.4.2.1 SEGUNDO MÉTODO O MÉTODO DIRECTO DE LYAPUNOV

Teorema: Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ y sea $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathfrak{R}^n$ que contiene al origen, entonces

- Si $V(x)$ es **definida positiva** y $\dot{V}(x)$ es **semidefinida negativa**, el origen es un punto de equilibrio **estable**.
- Si $V(x)$ es **definida positiva** y $\dot{V}(x)$ es **definida negativa**, el origen es un punto de equilibrio **asintóticamente estable**.

Una función $V(x)$ que cumple con las condiciones impuestas en el teorema anterior se denomina **función de Lyapunov**. Este método es una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov por lo tanto hay que proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda es que el teorema solo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que el origen es inestable o no asintóticamente estable.

Se puede demostrar que si $V(x)$ es una función de Lyapunov, el conjunto de los x tal que $V(x) = c$, para alguna constante $c > 0$ es una hypersuperficie cerrada (denominada **superficie de Lyapunov** o superficie de nivel) en el espacio de estados que encierra al origen. El uso de las superficies de Lyapunov hace que el teorema sea fácilmente interpretable. Las superficies que corresponden a constantes decrecientes $0 < c_2 < c_1$, se encuentran íntegramente contenidas como lo muestra la figura 2.6 para el caso de \mathfrak{R}^2 .

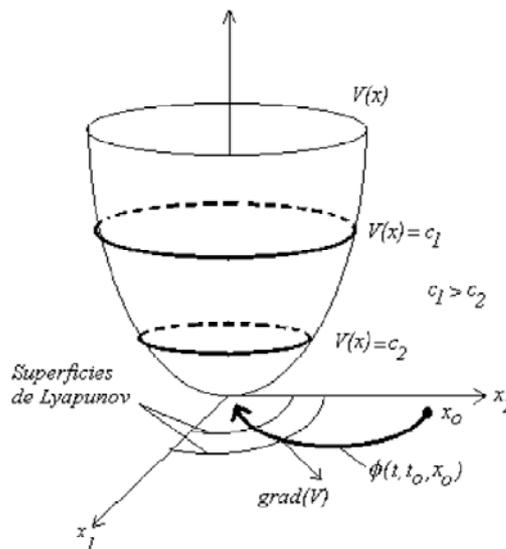


Figura 2.6 Interpretación geométrica de las superficies de Lyapunov para el caso de \mathfrak{R}^2

La condición $\dot{V}(x) \leq 0$ se puede interpretar geoméricamente a través de las ecuaciones 2.81 ya que la misma significa que el producto escalar entre el gradiente de V y el campo vectorial f es negativo:

$$\nabla V(x) \bullet f(x) \leq 0$$

Teniendo en cuenta que f es un vector tangente a la trayectoria solución, la condición $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \bullet f(x) \leq 0$ significa que cuando una trayectoria cruza una superficie de Lyapunov, esta trayectoria lo hace hacia adentro y nunca vuelve a salir. Además cuando $\dot{V}(x) < 0$ las trayectorias se mueven desde una superficie hacia otra interior correspondiente a un c menor. Cuando c decrece, las superficies de Lyapunov correspondientes se achican hacia el origen mostrando que las trayectorias se aproximan al origen a medida que transcurre el tiempo. En cambio, si $\dot{V}(x) \leq 0$ no se puede asegurar que las trayectorias converjan al origen, pero se puede concluir que el origen es estable ya que las trayectorias quedarán contenidas en algún entorno ε del origen si la condición inicial x_0 está dentro de alguna superficie de Lyapunov contenida en dicho entorno ε .

2.5 BIBLIOGRAFÍA

- 2.1 Jhon Roa, Juan Giraldo, Carlos Jacome; Vectores, Pseudovectores y Reflexiones; Revista Colombiana de Física, vol. 35, no. 2, 2003
- 2.2 H. Goldstein, Classical Mechanics, 2da ed., Addison-Wesley, Reading (1980).
- 2.3 E. T. Whittaker; A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies; Cambridge university press, 1917.
- 2.4 Fernando O. Minotti; Apuntes de Mecánica clásica, 2004.
- 2.5 Walter Hauser, traducción por Ing Carlos Ordoñez, Introducción a los principios de mecánica, primera edición, Ed. UTEHA, 1969, México.
- 2.6 H. Karnopp Bruce, Introducción a la dinámica, Universidad de Michigan, Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., 1980, México.
- 2.7 P. Beer Ferdinand, Johnston E. Russell, Mecánica Vectorial para Ingenieros, Estática, 5ta Edición, Mc.Graw-Hill, 1990, México.
- 2.8 P. Beer Ferdinand, Johnston E. Russell, Mecánica Vectorial para Ingenieros, Dinámica, 5ta Edición, Mc.Graw-Hill, 1990, México.
- 2.9 Dare A. Wells, Dinámica de Langrange, Editorial Schaum, Mc.Graw-Hill, 1967
- 2.10 Charles Kittel, Walter D. Knight, and Malvin A. Ruderman, Mechanics (Berkeley physics course; McGraw-Hill, 1965), Vol. 1.
- 2.11 J.B. Marion, Dinámica clásica de las partículas y sistemas". Ed Reverté, 1975.
- 2.12 Ketsuhiko Ogata, "Modern control engineering". Ed Prentice Hall, 1990.

CAPÍTULO 3

Diseño conceptual

3.1 ANTROPOMETRÍA PARA DISCAPACITADOS

3.1.1 ANTROPOMETRÍA

La Ergonomía busca la armonía entre el individuo y el medio que le rodea, considerando al hombre como parte central, hace necesario la presencia de medidas con carácter estadístico que determinen al individuo. Aunque a simple vista puedan apreciarse diferencias entre las personas, la inmensa mayoría presenta unos parámetros que desde el punto de vista estadístico podrían considerarse semejantes, porcentaje mínimo de individuos se escaparían a unos valores considerados como medidas promedio de las características de la persona.

La antropometría es la ciencia que estudia la dimensión, se recurre a la estadística determinando aquellos valores que son considerados como promedio en el hombre. Desde luego no todas las personas ajustarán sus parámetros a los tomados como modelo, apareciendo medidas que bien por exceso o bien por defecto se alejarán de los valores promedio determinados con anterioridad. Estos valores que no corresponden con los valores promedio, no deben ser tomados en cuenta. Desde el punto de vista ergonómico es necesario determinar patrones que afecten al mayor número posible de personas. *McCormick* indica: “en los dominios de la antropometría humana hay muy pocas personas, si es que las hay, a las que realmente podríamos considerar como medios, medios en todo y cada uno de sus aspectos”. De igual forma *Croney*, establece: “muy pocas personas en una población son representativas de un amplio número de medidas específicas del cuerpo humano o de capacidades examinables en un estudio antropométrico.”

Lo indicado por estos autores viene confirmado por los estudios de *Panero* y *Zelnick* sobre una muestra de 4000 personas. Solamente un 25% tenían una dimensión que podía considerarse como media; puede concluirse por tanto que “el hombre medio no existe” (*Panero* y *Zelnick*). De lo se hace necesario establecer parámetros promedio e intentar englobar el mayor número de individuos dentro de unos intervalos de confianza considerados adecuado para satisfacer al mayor número de ellos. Es necesario, para alcanzar el éxito, considerar a un gran número de elementos de la población, cuanto mayor sea el tamaño muestral, menor será el sesgo que se cometa en las proporciones. Igualmente es necesario establecer técnicas estándar a la hora de las mediciones, igualdad de patrones. Una vez recogidos los datos de la muestra ya solo queda tratarlos estadísticamente, intervalos, frecuencia relativa y acumulada, percentiles, y finalmente diagramas, todo esto permite diferenciar a los individuos en base a los datos obtenidos,

pudiendo clasificarlos en percentiles. Esta clasificación en percentiles permite conocer cuántos individuos se encuentran entre unos porcentajes determinados.

En este sentido, es importante diferenciar entre frecuencia y percentil, para *Roebuck*, el percentil “expresa el porcentaje de personas pertenecientes a una población que tiene una dimensión de cierta medida (o menor)” y, por tanto según *Cronney*, “los percentiles extremos, ya sean máximo o mínimo, indican pequeñas posibilidades de incidencia. Todo esto nos lleva a que no es necesario tener en cuenta los 100 percentiles, ya que tanto los primeros como los últimos se corresponden con un pequeño número de individuos de la población, no representan la idea global de la población objeto de estudio. *McCormick* en este sentido establece “que a la hora de calcular tales máximos y mínimos es frecuente la práctica de utilizar los valores de los porcentajes 95 y 5, puesto que una acomodación del 100% podría incurrir en costes extras en proporción a los beneficios adicionales que debería obtener”. Al momento de tomar en cuenta un percentil alto o bajo, es necesario conocer si será aplicado a una dimensión máxima o mínima. En este sentido es correcto aplicar un percentil alto (95) para las dimensiones mínimas de los objetos, Se asegura que al menos el 95 % de la población será capaz de atravesar ese espacio sin molestia, y aplicaría percentiles bajos (5%) para las dimensiones máximas.

La antropometría no solo es el estudio de los diferentes parámetros que puedan interesar. Sino llevar a la práctica estos datos que se han obtenido y relacionarlos con su entorno. *Panero y Zelnick* en este sentido indican “las dimensiones que influyen en el diseño de espacios interiores son de dos tipos esenciales: estructurales y funcionales. Las dimensiones estructurales, denominadas estadísticas, son las de la cabeza, tronco y extremidades en posiciones estándar. Las dimensiones funcionales, llamadas a veces dinámicas, tal como sugiere el término, incluyen medidas formadas en posiciones de trabajo o durante el movimiento que se asocia a ciertas actividades”. Por lo que la antropometría no es solamente un cálculo de datos bien estructurales o bien funcionales sino que también estudia la biomecánica del movimiento. Para *Taboada y Napoli*, la antropometría es el estudio de las medidas del hombre, el alcance de sus miembros, análisis posicional y características de sus movimientos [3.1].

3.1.2 ANTROPOMETRÍA DE DISCAPACITADOS EN MÉXICO

Los datos antropométricos que se presentan a continuación son el resultado de un trabajo compartido entre la *Sociedad de Ergonomistas de México* y la *Universidad de Guanajuato*. Estos datos, al ser tomados de una muestra significativa de la gente de el país, permitirá diseñar un equipo que realmente cuente con las consideraciones ergonómicas necesarias para su aplicación en la población nacional.

Las tablas 3.1 y 3.2 presentan la Carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren de paraplejía crucial en los estados de Sonora y Sinaloa.

PER CEN TIL	MEDIDAS CORPORALES						
	Alcance hacia arriba		Del piso a la	Altura al	Altura al	Alcance abajo	
	Dedo	Puño	Cabeza	ojo	hombro	Dedo	Puño
5	158.55	146.95	117.28	106.83	93.10	68.25	58.73
50	175.30	164.60	128.95	118.75	103.10	75.20	65.45
95	188.30	176.75	136.45	126.35	110.43	85.68	76.15
D.E.	9.11	9.58	6.02	5.79	5.25	5.83	5.53
PROM	174.36	164.08	128.25	118.28	102.64	75.96	66.30

Tabla 3.1 Primera parte de la carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.

PER CEN TIL	MEDIDAS CORPORALES						
	Alcance al frente		Longitud antebrazo		Alcance lateral		Profundidad del tronco
	Dedo	Puño	Dedo	Puño	Dedo	Puño	
5	80.73	71.30	27.45	19.40	81.08	70.80	27.33
50	89.60	79.25	37.80	27.45	88.65	79.85	35.45
95	98.10	87.93	51.33	41.30	97.13	88.03	43.28
D.E.	5.47	5.19	7.78	9.68	5.32	5.15	4.81
PROM	89.33	79.59	38.56	29.93	89.30	79.93	35.33

Tabla 3.2 Segunda parte de la carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.

De manera esquemática, los resultados presentados en las tablas 3.1 y 3.2 se aprecian visualmente en las figuras 3.1 y 3.2 que son las vistas frontal y lateral respectivamente de la postura en la silla de ruedas, las acotaciones están en cm.

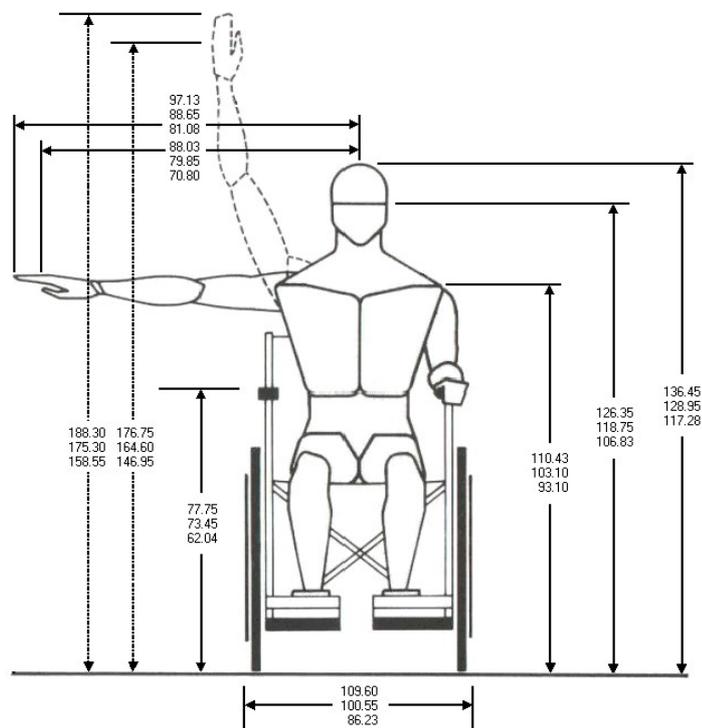


Figura 3.1 Vista frontal de la carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.

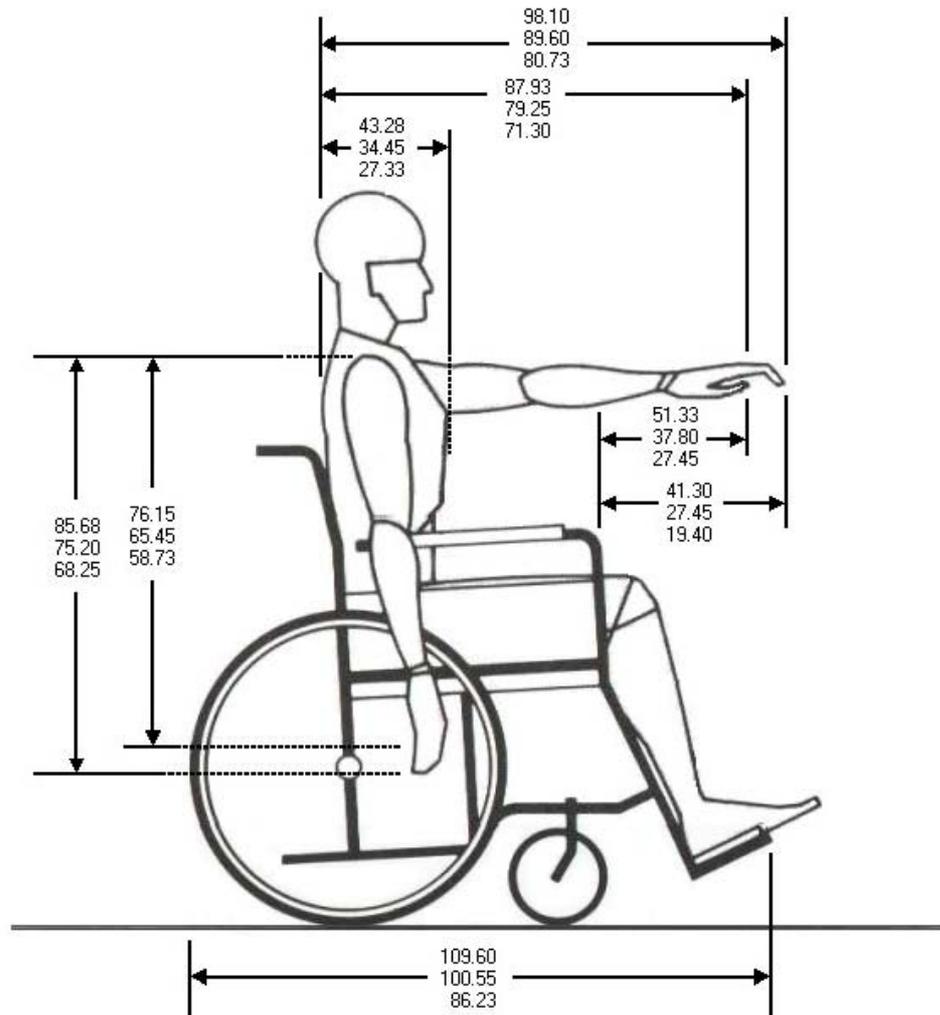


Figura 3.2 Vista lateral de la carta antropométrica de personas de sexo masculino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.

El mismo estudio antropométrico fue practicado en pacientes de sexo femenino y los resultados aparecen en las tablas 3.3 y 3.4, los cuales presentan la Carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren de paraplejia crucial en los estados de Sonora y Sinaloa.

PER CEN TIL	MEDIDAS CORPORALES						
	Alcance hacia arriba		Del piso a la cabeza	Altura al ojo	Altura al hombro	Alcance abajo	
	Dedo	Puño				Dedo	Puño
5	141.84	132.32	111.04	99.58	89.18	59.14	49.64
50	162.60	152.10	122.75	112.55	99.20	66.75	58.40
95	173.05	163.61	132.12	119.86	105.43	74.81	65.46
D.E.	9.77	9.75	10.45	6.94	5.98	5.13	5.17
PROM	160.77	150.60	122.65	111.34	97.82	66.50	57.61

Tabla 3.3 Primera parte de la carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.

PER CEN	MEDIDAS CORPORALES						
	Alcance al frente		Longitud antebrazo		Alcance lateral		Profundidad del tronco
TIL	Dedo	Puño	Dedo	Puño	Dedo	Puño	
5	74.76	65.66	21.61	13.00	72.26	62.92	28.06
50	81.10	72.10	29.75	21.10	82.00	73.55	35.75
95	88.96	79.69	43.32	34.79	88.91	80.74	48.59
D.E.	4.34	4.59	7.17	7.46	5.45	5.71	6.60
PROM	81.22	72.25	30.60	22.24	81.12	72.65	36.43

Tabla 3.4 Segunda parte de la carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.

Los resultados de estas tablas están representados esquemáticamente en las figuras 3.3 y 3.4 que son las vistas frontal y lateral respectivamente de la postura en la silla de ruedas, las acotaciones están en cm.

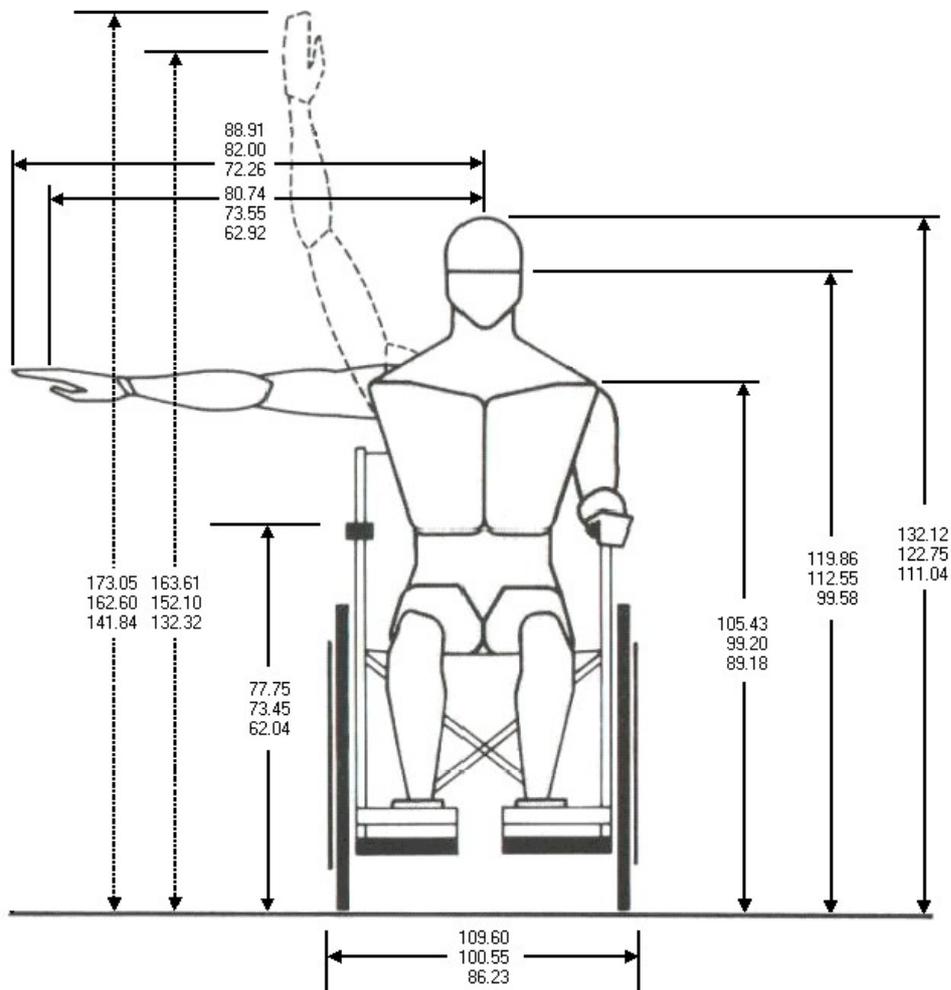


Figura 3.3 Vista frontal de la carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.

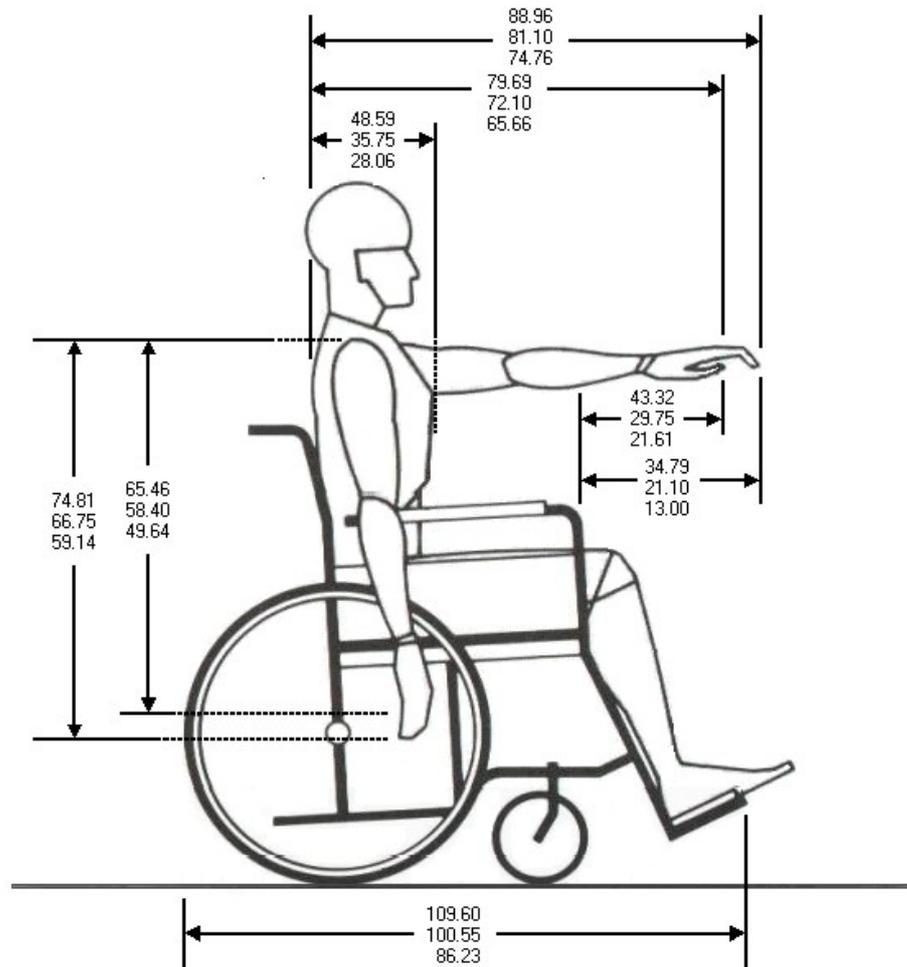


Figura 3.4 Vista lateral de la carta antropométrica de personas de sexo femenino que sufren paraplejia en los estados de Sonora y Sinaloa.

3.2 RESULTADOS DE LOS DATOS CARACTERÍSTICOS DE LAS PERSONAS ESTUDIADAS

En este estudio antropométrico, no solamente se tomaron las medidas de las personas estudiadas, sino que también se les tomaron ciertos datos que tal vez pueden influir en las dimensiones de su cuerpo. Dichos datos son la edad, el lugar de origen, el sexo y el tiempo que tienen usando la silla de ruedas.

3.2.1 SEXO

Este estudio pretendía tomar aproximadamente el mismo número de datos tanto de hombres como de mujeres, esto para poder apreciar las diferencias entre las características de ambos sexos. Aunque, evidentemente, eso depende de la cantidad de personas que sean localizadas y que den su consentimiento para ser medidas. Los resultados que se obtuvieron mostraron que, de una muestra de 108 personas, el 51.85% de las personas son hombres y el 48.15 restantes son mujeres.

3.2.2 EDAD

Uno de los datos que se tomaron a las personas, antes de tomarles las medidas, fue el de la edad de las mismas, ya que este estudio está dirigido a personas adultas que sufren de paraplejia crucial. Es por eso que solamente se contempló a las personas que se encuentran entre las edades de 18 y 60. Para la determinación del rango de edad, se tomo en cuenta que las personas en cuestión están en edad de trabajar.

Analizando los resultados, se observó, en el caso de los hombres, que la tendencia al uso de la silla, se presenta más marcada entre las personas entre los 21 y 30 años, con un porcentaje un poco menor se encuentran las personas cuyas edades oscilan entre los 51 y 60 años. Las personas que presentaron un índice mucho menor en el uso de la silla fueron las que tienen de 18 a 21 años de edad. Aunque cabe señalar que este rango es considerablemente menor que los demás.

Con relación a las mujeres, se encontró también que las personas que hacen uso de la silla de ruedas tienen de 51 a 60 años; sin embargo el porcentaje es menor que el que presentaron los hombres. El segundo segmento de la muestra que presentó mayor tendencia fue el de las personas cuyas edades se encuentran entre los 41 a 50 años de edad. Finalmente, al igual que en el caso de los hombres, el segmento que presentó un porcentaje más pequeño fue el de las personas que tienen de 18 a 20 años de edad.

3.2.3 TIEMPO DE USO DE LA SILLA DE RUEDAS

Otro de los datos que se pidieron a las personas estudiadas fue el del tiempo que tienen usando la silla de ruedas. En esta medida se tiene un especial interés, ya que, según el estudio de Nowak, el alcance de las personas parapléjicas es menor al de una persona que goza de salud en ese sentido. Es por eso que se desea saber si el alcance menor de las personas tiene relación directa con el periodo de tiempo en que las personas han usado la silla.

Se observó, que el periodo de tiempo de uso de la silla que presenta mayor frecuencia es el que va de 1 a 5 años, en los hombres. En el caso de las mujeres, este periodo va de 11 años en adelante. Enseguida encontramos el que abarca de 11 años en adelante, en los hombres, por el contrario, en este caso, las mujeres presentaron de 1 a 5 años de uso. Con un porcentaje considerablemente menor que el anterior está el periodo que incluye de 6 a 10 años, para los hombres y el periodo menor a un año correspondía a las mujeres. Finalmente, en los hombres, el segmento que presentó menos frecuencia es el periodo de tiempo menor a un año y en las mujeres fue el de 6 a 10 años.

3.2.4 OBSERVACIONES DE LOS RESULTADOS DE LA MUESTRA

Las cartas antropométricas, presentadas anteriormente, muestran ciertas características en el comportamiento de los datos correspondientes a cada una de las medidas tomadas. En el caso de los hombres, las mujeres y todas las personas en conjunto, una de las medidas que presentó más variación en los datos fue la de el alcance hacia arriba, tanto al dedo, como al puño.

Solamente en el caso de las mujeres, se presentó aún más variación de la medida correspondiente a la altura del piso a la cabeza. De hecho, esta variación fue la más grande de las tablas. Otra medida que también presentó variación considerable es la de la longitud del antebrazo. El resto de las medidas, en los 3 casos, presentan una variación mucho menor que éstas.

Un dato que se observó al estudiar las tres cartas antropométricas es que la diferencia entre las medidas de alcance hasta el dedo y las de alcance hasta el puño es, aproximadamente, diez centímetros.

De todas las tablas en general, es posible afirmar que, en cada una de las medidas tomadas, se observó que los hombres tienen dimensiones más grandes que las mujeres, excepto por el caso de la profundidad del cuerpo, en la cual las mujeres presentaron una diferencia levemente mayor.

Por otro lado, en el caso de la silla, se nota claramente que la medida que presenta más variación es la de la longitud total, considerando que ello se debe a que gran cantidad de las personas que se midieron no gusta de usar el descansapiés, así que deciden quitárselo. En esos casos, se consideró como longitud total al espacio horizontal existente entre la parte más saliente de la parte trasera de las llantas grandes, hasta la parte delantera más saliente de las llantas pequeñas.

Respecto al efecto que pudiera tener el tiempo de uso de una silla de ruedas sobre la longitud del alcance de las personas, en algunos casos se encontró que, efectivamente, mientras mayor fue el tiempo de uso, más pequeño era su alcance. Sin embargo, esto no se presentó como regla general, ya que, en otras medidas, el comportamiento de los datos fue distinto [3.2].

3.3 ASPECTOS RELEVANTES DE LA NORMA ISO/DIS 7176-28 REQUERIMIENTOS Y MÉTODOS DE PRUEBA DE LOS DISPOSITIVOS PARA SUBIR ESCALERAS.

3.3.1 INTRODUCCIÓN

La sección 28 de la norma ISO 7176 fue escrita como una respuesta a la necesidad de manejar un lenguaje común en el ámbito de subir escaleras con dispositivos, para dar criterios de evaluación de las cuestiones importantes de seguridad y establecer un medio de calificación y cuantificar el desempeño de los dispositivos para subir escaleras en condiciones y ambientes diversos encontrados en la operación cotidiana. Otras normas pertinentes para sillas de ruedas de la serie ISO 7176 podría ser la de los dispositivos empleados para subir escaleras, que también pueden ser utilizados como silla de ruedas. Esto permite a los ocupantes y los fabricantes comparar cuestiones de seguridad y utilidad pertinentes de todas las funciones y características de un determinado dispositivo diseñado para subir escaleras.

Las pruebas que se presentan en esta parte de la norma ISO 7176 se utilizan para recolectar información comparativa acerca de los factores relacionados con la seguridad y el desempeño de un dispositivo al subir una escalera, mientras el dispositivo se encuentra sobre una escalera en el modo de escalar y en el modo de arrastre y escalar al descender, así como en el modo de conducción en terreno plano. La intención es identificar los entornos de operación adecuados para cada dispositivo al subir escaleras y dar indicaciones de los criterios de desempeño en modo de escalar para el caso de escaleras y en terreno plano [3.3].

Esta parte de la norma ISO 7176 especifica los ensayos para "la configuración de referencia" del dispositivo para subir escaleras. Dado que algunos dispositivos para subir escaleras tienen componentes ajustables y/o alternativos, la prueba en diferentes

configuraciones puede ser necesaria para determinar si una modificación se ajusta a esta parte de la norma ISO 7176.

3.3.2 ALCANCE

Esta Norma Internacional es aplicable para sillas trepadoras de escaleras y sillas de ruedas trepadoras de escaleras donde el dispositivo para subir escaleras sube la silla por la parte posterior, con el ocupante frente al fondo de la escalera y desciende también con el ocupante frente a la planta baja.

Esta Norma Internacional es aplicable para dispositivos diseñados para subir escaleras y que están destinados para el transporte de adultos como para niños. No es aplicable para dispositivos que están destinados a ser accionados por niños como ocupantes o asistentes.

Esta Norma Internacional especifica los requisitos y métodos de ensayo para dispositivos de propulsión eléctrica diseñados para trepar escaleras. También incluye la ergonomía, el etiquetado y los requisitos de divulgación.

Esta Norma Internacional especifica los ensayos para demostrar la capacidad de los dispositivos para trepar escaleras en forma segura para escaleras con una pendiente de 35 ° o más si lo declara el fabricante.

3.3.3 EQUIPO PARA LA PRUEBA

3.3.3.1 ESCALERA RECTA

Consiste de ocho escalones, cada uno con una altura de (180 ± 5) mm. La pendiente total será 35° con una tolerancia de $+1^\circ/0^\circ$ (ver figura 3.5). Los escalones serán numerados de abajo hacia arriba. Una vertical cerrará la cara delantera de cada escalón. Todas las salientes de los escalones estarán dentro de una región contenida entre dos planos imaginarios paralelos a 10 mm de separación e inclinados con respecto a la pendiente de las escaleras.

Las salientes de cada escalón serán de un material rígido, liso y redondeado a un radio de (8 ± 1) mm. Cada escalón de la escalera recta será nivelado cuando la escalera recta se asiente sobre un plano horizontal (ver 3.3.3.3). Cada escalón tendrá un coeficiente de fricción conforme a ISO 7176-13. Las escaleras serán suficientemente anchas para acomodar el dispositivo que será probado con ocupante y asistente. Se recomienda que el ancho sea 500 mm más que el ancho del dispositivo que se probará.

Las escaleras rectas para la prueba deberán considerar el descanso en el parte superior. Cuando las escaleras rectas para la prueba se colocan en el plano horizontal, este plano representa su descanso inferior.

El conjunto de toda la escalera deberá ser rígido para ser capaz de inclinarse hacia a arriba y hacia abajo por medio de un mecanismo elevador.

El pasamanos será montado en la escalera. El pasamanos será capaz de soportar las fuerzas de la prueba, será de un perfil circular con un diámetro de (35 ± 5) mm y tener una distancia vertical a la saliente del escalón de (900 ± 25) mm.

La escalera recta para la prueba deberá ser rígida y segura de modo que ningún movimiento o desviación de la escalera afecte materialmente los resultados de la prueba.

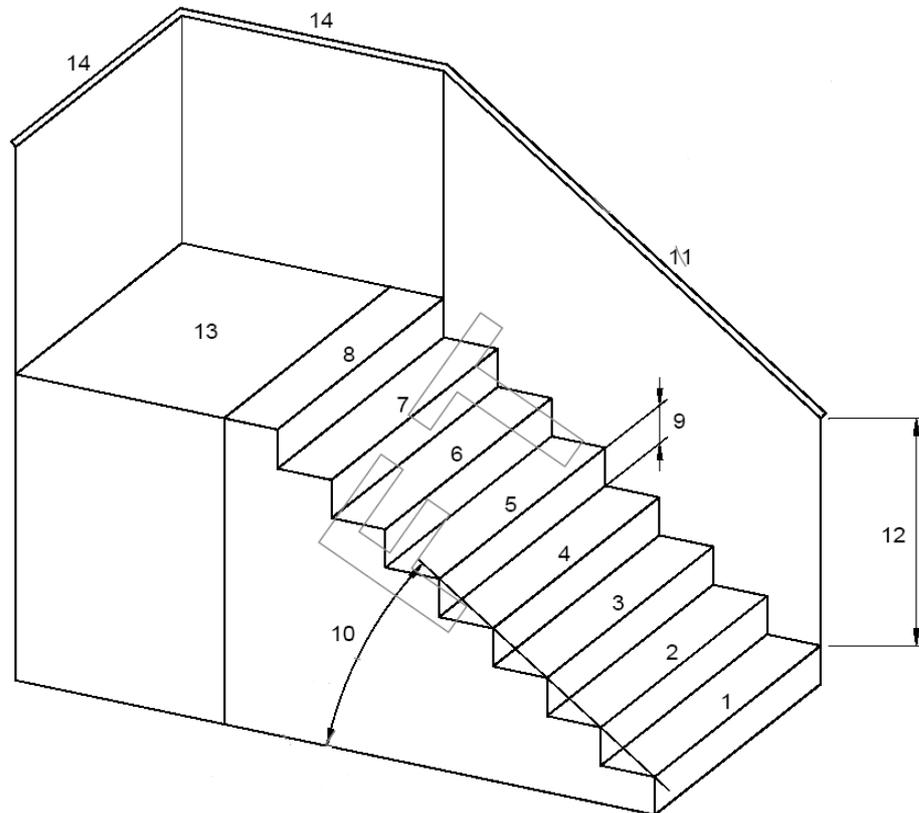


Figura 3.5 Escalera recta para prueba.

De la figura 3.5

- 1 a 8 Números de escalones
- 9 Altura, igual a (180 ± 5) mm
- 10 Pendiente, igual a $(35 + 1/0)^\circ$
- 11 Pasamanos
- 12 Distancia vertical entre la saliente de escalón y el pasamanos, igual a (900 ± 25) mm
- 13 Descanso de la parte superior
- 14 Pasamanos del descanso

3.3.3.2 DESCANSO DE LA PARTE SUPERIOR

Consiste de una plataforma plana con una altura igual a la altura del último escalón de la escalera recta para la prueba, con una tolerancia de ± 5 mm. La superficie superior tendrá un coeficiente de fricción que se ajusta a la ISO 7176-13. El descanso será capaz de hacer una conexión firme con la escalera. Se deberán montar pasamanos en el descanso. El pasamanos deberá ser capaz de soportar las fuerzas de la prueba y tendrán una distancia vertical a la superficie superior (900 ± 25) mm (ver figura 3.5). El área mínima recomendada es de 2000 x 2000 mm.

3.3.3.3 PLANO HORIZONTAL DE PRUEBA

Deberá ser rígido y horizontal, de suficiente tamaño para acomodar el dispositivo que subirá la escalera y la escalera recta para la prueba. El plano deberá estar formado por una superficie contenida dentro de dos planos imaginarios separado 5 mm por cada 1000 mm de distancia en cualquier dirección y 25 mm por cada 6000 mm de distancia en cualquier dirección. La superficie del plano tendrá un coeficiente de fricción conforme a ISO 7176-13.

3.3.3.4 BOLSA SUSTITUTO

Podrá ser una mochila atada al dispositivo que subirá la escalera con el fin de realizar la prueba en condición exagerada. El bolso sustituto tendrá una masa y dimensiones según lo recomendado por las instrucciones del fabricante, si no hay recomendación, una masa de (7 ± 0.25) kg, y que esté dentro de las dimensiones ($35 \times 42 \times 20$) cm de medición.

3.3.4 ESTABILIDAD ESTÁTICA

La metodología de la prueba para determinar la estabilidad estática de dispositivos para trepar escaleras consiste en someter el dispositivo a varias pruebas de estabilidad en terreno plano y en las escaleras al mismo tiempo que se observa su funcionamiento.

Las pruebas se realizarán colocando el dispositivo en la silla de prueba y el maniquí apropiado para estas experimentaciones, no se podrá utilizar la ayuda de un ocupante humano.

Las pruebas pueden ser peligrosas. Es esencial tomar todas las precauciones apropiadas (ej. Dispositivos de seguridad en caso de volcaduras).

3.3.4.1 ESTABILIDAD EN TERRENO PLANO

La estabilidad del sistema se debe lograr en cualquier modo de operación del dispositivo, generalmente los modos de operación son el modo de arrastre normal y el

modo para trepar, en cualquiera de los casos se tienen que realizar las pruebas en las condiciones extremas donde se encuentre la menor estabilidad.

Tanto para el modo de arrastre como para el modo de trepar, realizar las pruebas de estabilidad estática hacia el frente, hacia atrás y en direcciones oblicuas con el dispositivo sobre el plano de pruebas en la posición y configuración menos estable, también realizar las pruebas en circunstancias exageradas.

3.3.4.2 ESTABILIDAD EN LAS ESCALERAS

Inclinadas hacia abajo

Colocar el dispositivo en las escaleras rectas de la prueba. Si el dispositivo tiene diferentes configuraciones para ascender y descender, fijarlo en ascender.

Realizar la prueba en circunstancias exageradas.

Si un dispositivo sube de manera continua y tiene elementos dentados, se verificará que la esquina del escalón 4 este entre dos dientes.

Con el mecanismo permaneciendo en contacto con el escalón 4, fijar el dispositivo hacia abajo en la posición menos estable con el sistema en operación.

En caso de que sea una cualidad de la posición menos estable que el dispositivo pueda inclinarse hacia abajo en el rango $(3 \pm 1)^\circ$, observar que esta facultad permanece a lo largo de toda la prueba.

Inclinar la escalera rectas de la prueba hacia abajo a un ángulo $(7 + 1/0)^\circ$ de la horizontal, o, si el fabricante declaran en las instrucciones de uso que el dispositivo es capaz de subir las escaleras con un peralte mayor que 35° , inclinar la escalera a un ángulo que sea $(7 + 1/0)^\circ$ mayor que el que declara el fabricante. (Ver figura 3.6 A).

Observar si el dispositivo pierde contacto con el escalón 5 mientras se inclina o si cualquier otra situación peligrosa ocurre.

Inclinadas hacia arriba

Colocar el dispositivo en las escaleras rectas de la prueba. Si el dispositivo tiene diferentes configuraciones para ascender y descender, fijarlo en ascender.

Realizar la prueba en circunstancias exageradas.

Si un dispositivo sube de manera continua y tiene elementos dentados, se verificará que la esquina del escalón 4 este entre dos dientes.

Con el mecanismo permaneciendo en contacto con el escalón 4, fijar el dispositivo hacia abajo en la posición menos estable con el sistema en operación.

En caso de que sea una cualidad de la posición menos estable que el dispositivo pueda inclinarse hacia abajo en el rango $(3 \pm 1)^\circ$, observar que esta facultad permanece a lo largo de toda la prueba.

Inclinar la escalera rectas de la prueba a un ángulo $(7 + 1/0)^\circ$ de la horizontal. (Ver figura 3.6 B).

Observar si el dispositivo pierde contacto con el escalón 3 mientras se inclina o si cualquier otra situación peligrosa ocurre.

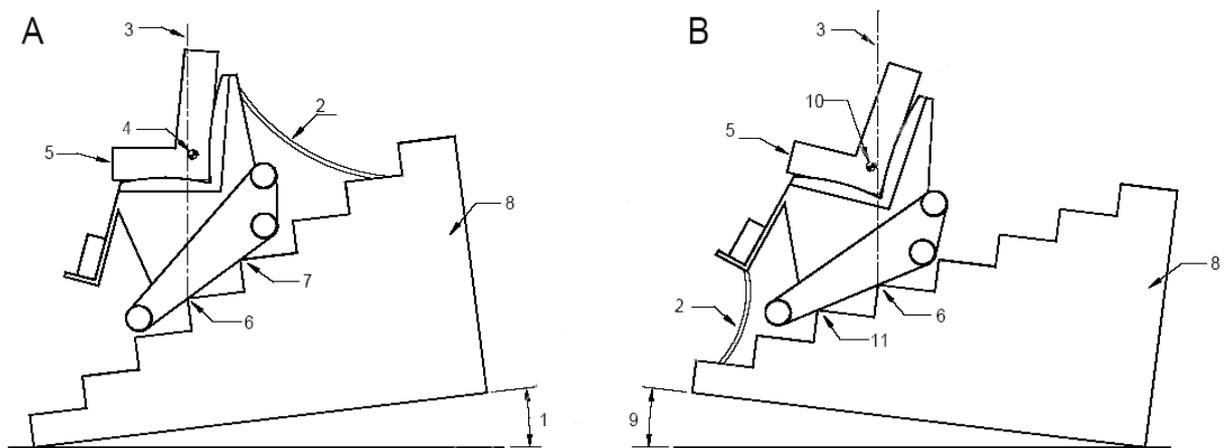


Figura 3.6 Prueba de estabilidad en escalera recta.

De la figura 3.6

- A Hacia abajo
- B Hacia arriba
- 1 Ángulo de inclinación hacia el frente
- 2 Galga recargada
- 3 Vertical a través del eje de inclinación
- 4 Centro de gravedad detrás de la vertical
- 5 Carga del dispositivo
- 6 Escalón 4 que actúa como eje de la extremidad
- 7 Escalón 5, posición para detectar la pérdida de contacto
- 8 Escalera recta de la prueba
- 9 Ángulo de inclinación hacia atrás
- 10 Centro de gravedad delante de la vertical
- 11 Escalón 3, posición para detectar la pérdida de contacto

3.3.5 ESTABILIDAD DINÁMICA

La metodología de la prueba para determinar la estabilidad dinámica de dispositivos que suben escaleras consiste en someter el dispositivo a varias pruebas estabilidad en cada una de sus funciones y evaluar los resultados obtenidos. La estabilidad dinámica se prueba bajo condiciones que puedan reducir la estabilidad. Tales condiciones se encuentran a menudo durante el uso normal del dispositivo.

A menos que el manual del operador del dispositivo declare que para el funcionamiento se requiere que el ocupante ejerza las fuerzas directas de funcionamiento directas al subir las escaleras o al hacer la transición entre escalera y descanso, realizar la prueba sin el uso de pasamanos.

Para algunas pruebas se requerirá la distancia de frenado hacia arriba y hacia abajo, todas las pruebas se deberán realizar a la velocidad máxima a menos que el fabricante de otra indicación.

3.3.5.1 PRUEBA ASCENDENTE EN TRANSICIÓN SUPERIOR

Realizar la prueba como sigue.

- a) Fijar el dispositivo en la posición hacia el frente en la configuración menos estable y en el modo de circunstancias extremas.
- b) Colocar el dispositivo en el escalón 3.
- c) Subir el dispositivo a la transición superior hasta que todas las piezas entren en contacto con el descanso superior, continuar en movimiento hasta que el dispositivo este acomodado completamente en el descanso, entonces frenar. Realizar este procedimiento en un sólo movimiento sin interrupciones.
- d) Repetir la prueba dos veces y registrar los resultados.
- e) Fijar el dispositivo en la posición hacia atrás en la configuración menos estable y repetir todos los puntos anteriores.

3.3.5.2 PRUEBA DESCENDENTE EN TRANSICIÓN SUPERIOR

Realizar la prueba como sigue.

- a) Fijar el dispositivo en la posición hacia el frente en la configuración menos estable y en el modo de circunstancias extremas.
- b) Colocar el dispositivo en el descanso superior de la escalera de prueba de modo que este perfectamente acomodado.
- c) Mover el dispositivo hacia los escalones sobre el descanso superior y descender hasta el escalón 3, entonces frenar. Realizar este procedimiento en un sólo movimiento sin interrupciones.
- d) Repetir la prueba dos veces y registrar los resultados.
- e) Fijar el dispositivo en la posición hacia atrás en la configuración menos estable y repetir todos los puntos anteriores.

3.3.5.3 PRUEBA ASCENDENTE EN TRANSICIÓN INFERIOR

Realizar la prueba como sigue:

- a) Fijar el dispositivo en la posición hacia el frente en la configuración menos estable y en el modo de circunstancias extremas.
- b) Colocar el dispositivo en el escalón 5.
- c) Mover el dispositivo hacia los escalones sobre el descanso inferior y ascender hasta el escalón 5, entonces frenar. Realizar este procedimiento en un sólo movimiento sin interrupciones.

- d) Repetir la prueba dos veces y registrar los resultados.
- e) Fijar el dispositivo en la posición hacia atrás en la configuración menos estable y repetir todos los puntos anteriores.

3.3.5.4 PRUEBA DESCENDENTE EN TRANSICIÓN INFERIOR

Realizar la prueba como sigue.

- a) Fijar el dispositivo en la posición hacia el frente en la configuración menos estable y en el modo de circunstancias extremas.
- b) Colocar el dispositivo en el descanso superior de la escalera de prueba de modo que este perfectamente acomodado.
- c) Bajar el dispositivo a la transición inferior hasta que todas las piezas entren en contacto con el descanso inferior, continuar en movimiento hasta que el dispositivo este acomodado completamente en el descanso, entonces frenar. Realizar este procedimiento en un sólo movimiento sin interrupciones.
- d) Repetir la prueba dos veces y registrar los resultados.
- e) Fijar el dispositivo en la posición hacia atrás en la configuración menos estable y repetir todos los puntos anteriores.

3.4 REFERENCIA DE PATENTES

Numerosos sistemas y mecanismos han sido desarrollados en muchas partes del mundo con el objetivo de crear un dispositivo capaz de trepar escaleras o librar obstáculos para ser implementado en las sillas de ruedas, como se ha señalado en capítulos anteriores la necesidad de contar con una silla de ruedas multifuncional permitirá incorporar a los usuarios a la sociedad en las diversas actividades diarias, principalmente aquellas personas que están en la edad y tienen el ímpetu de seguir adelante aún con sus limitaciones, en realidad lo único que se requiere es un medio de transporte seguro, versátil y económico que les permita arribar a cada uno de los lugares donde requieran realizar alguna actividad.

Algunos ejemplos de sistemas que han sido diseñados y patentados en la búsqueda de solucionar este problema se presentan como un antecedente que contribuirá para definir lo que será el concepto de diseño de este trabajo de investigación.

3.4.1 CHASÍS PARA VEHÍCULO CAPAZ DE ATRAVESAR SOBRE OBSTÁCULOS (PATENTE US 4,061,199)

La invención se refiere a un chasis para vehículos capaz de pasar sobre obstáculos. Cuenta con ruedas convencionales, una estrella de ruedas pequeñas, y una banda elástica; una sección de la banda elástica se acopla a las periferias del obstáculo. La banda elástica es acoplada a un propulsor y esta a su vez impulsa la estrella de ruedas. El mecanismo se puede implementar en sillas de ruedas, camiones y vehículos todo terreno.

La figura 3.7 muestra el sistema mecánico acoplado a una silla de ruedas, el sistema permite un ascenso y descenso de la escalera en un modo más seguro y

manipulable, una cremallera le permite ajustar el ángulo de inclinación de la silla. En la figura 3.8 se observa la silla en modo de operación para terreno plano, el sistema se retrae y se aloja en un espacio compacto que facilita la operación normal de la silla [3.4].

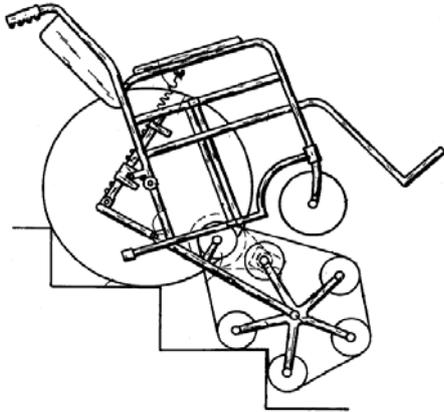


Figura 3.7 Esquema de silla escaladora patentada 4061199 en

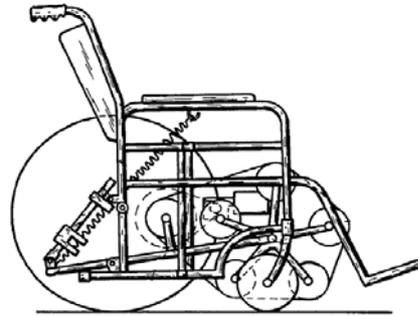


Figura 3.8 Esquema de silla escaladora patentada 4061199 en

3.4.2 CONTROL DE BALANCEO DE UN VEHÍCULO PERSONAL (PATENTE US 6,799,649 B2)

El invento se refiere a un vehículo para transportar una persona sobre una superficie que puede ser irregular e incluir escalones. El vehículo cuenta con un soporte para el ocupante y una base de contacto móvil con respecto a un eje local, donde el eje local puede desplazarse con respecto a otros ejes que están definidos en relación al soporte. El vehículo también cuenta con un motor para controlar el movimiento de la base de contacto así como operar en condiciones que son inestables con respecto a superficies inclinadas. El vehículo también tiene una entrada para recibir la indicación de un asistente para darle una determinada dirección al vehículo. El sistema permite que el ocupante pueda estar equilibrado en dos ruedas para que el usuario alcance una altura similar a la de una persona en pie, ver figura 3.9, otra función del sistema de control se selecciona para asistir en el ascenso y descenso de escaleras, ver figura 3.10 [3.5].

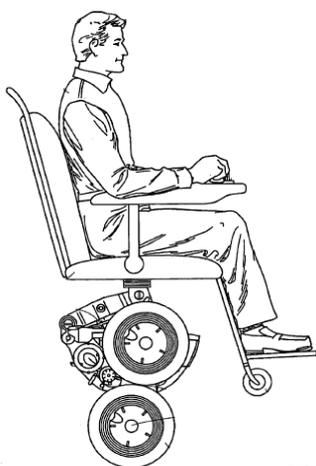


Figura 3.9 Esquema de silla escaladora patentada 6799649 en función de



Figura 3.10 Esquema de silla escaladora patentada 6799649 ascendiendo escalera.

3.4.3 TRANSPORTADOR PARA ELEVAR SILLAS DE RUEDAS EN ESCALERAS (PATENTE US 4,771,839)

El transportador está compuesto de un par de orugas y una plataforma giratoria para sujetar la silla de ruedas. La plataforma giratoria permite pasar de la posición de operación a la posición normal de la silla. Las orugas tiene una forma oblicua en uno de sus extremos que es más alto que la altura típica de los escalones. La plataforma está provista de unas guías para un montaje y sujeción seguros de la silla al operar la plataforma giratoria, las figuras 3.11 y 3.12 esquematizan el mecanismo al ajustar la inclinación de la silla y la figura 3.13 es una perspectiva del ascenso [3.6].

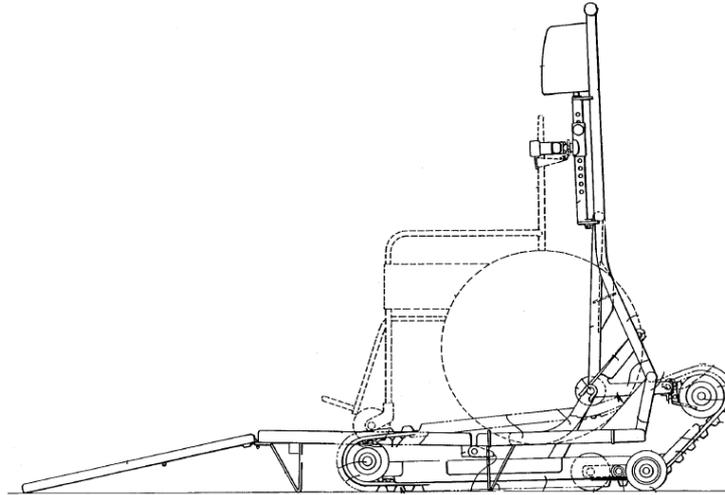


Figura 3.11 Esquema del transportador de silla de ruedas patente 4771839, en la posición para asentar la silla sobre el transportador.

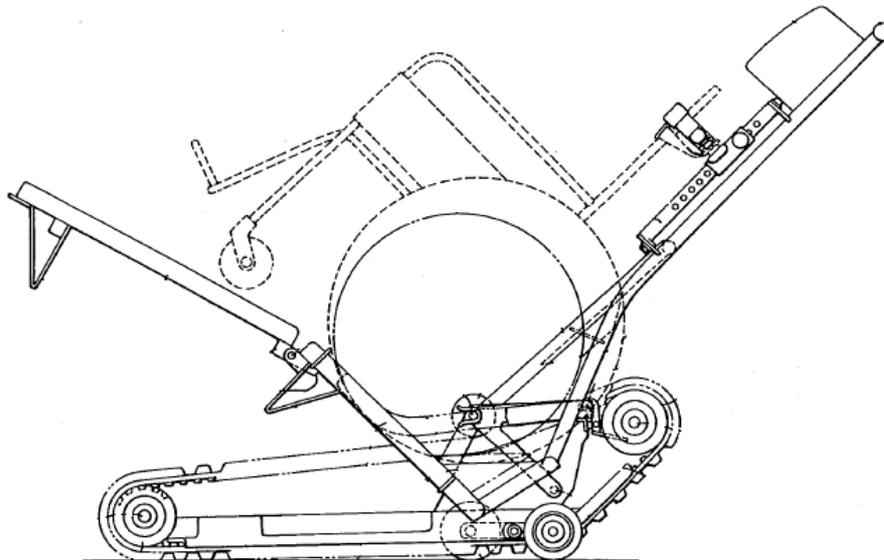


Figura 3.12 Ajuste del ángulo de inclinación del transportador.

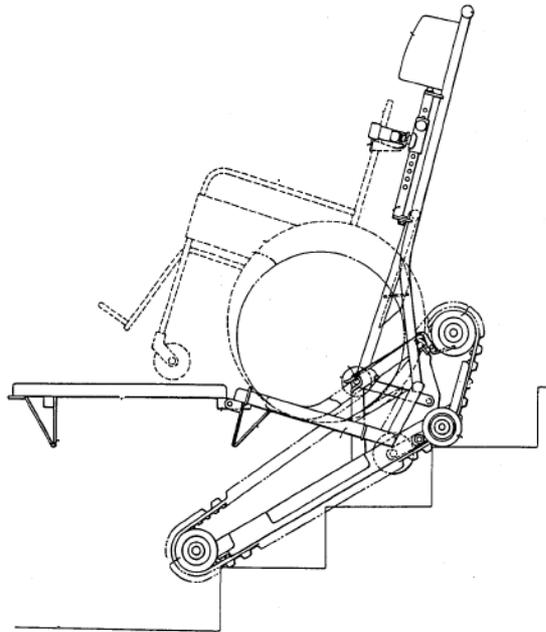


Figura 3.13 Perspectiva del transportador en el ascenso de una silla de ruedas.

3.5 INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO MECÁNICO DE LA SILLA

El sistema de la silla de ruedas para subir y bajar escaleras desde el punto de vista cinemático y dinámico es un sistema complejo, independientemente del diseño del dispositivo mecánico que se emplee para realizar dicha tarea, ya que las escaleras han sido diseñadas pensando en la antropometría humana [3.7] y su locomoción natural para alcanzar distancias verticales considerables. Por ello, para visualizar el problema desde una perspectiva matemática, se realizó el análisis cinemático y dinámico, empleando herramientas tales como: la *Mecánica de Newton* y la *Mecánica de Lagrange*, así como la teoría general del *Cuerpo Rígido*, con el fin de describir de forma generalizada, los acontecimientos del movimiento y caracterizar el sistema inercial en base a la forma y disposición de las masas que interactúan dinámicamente en el sistema de la silla de ruedas.

Después de analizar varias propuestas tanto de patentes como de sistemas comerciales que se han desarrollado como un medio de transporte útil y que han sido enfocados en la tarea de resolver la difícil travesía de subir o bajar una escalera recta convencional, se pensó en el sistema mecánico mostrado en la figura 3.14, el análisis cinemático y dinámico se realizó tomando como base esta propuesta que se considera simple pero con un amplio criterio de factibilidad desde el punto de vista mecánico, de control y económico, es una propuesta que podrá ser optimizada con los resultados que arroje el análisis matemático, las diferentes componentes revelan de manera general el principio de funcionamiento de la silla. Esta propuesta se diseñó con la intención de no emplear sistemas muy complejos o robustos que ocuparan gran espacio o que por sus dimensiones y pesos se tradujeran en un alto consumo de energía para su operación.

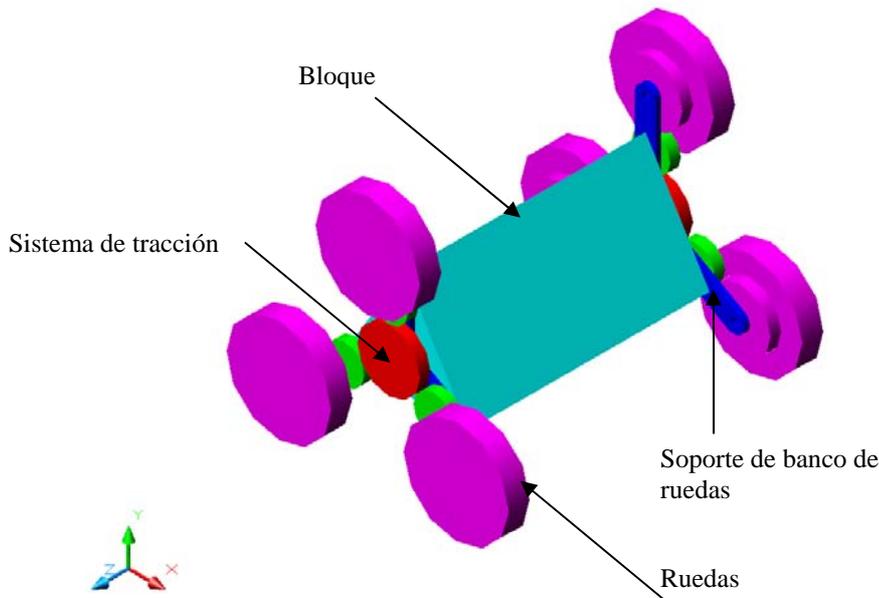


Figura 3.14 Perspectiva de la propuesta del sistema para el ascenso y descenso de escaleras para la silla de ruedas.

El concepto general del funcionamiento del sistema representado en la figura 3.14 es como sigue: el bloque representa solo una masa que corresponderá físicamente a la estructura de la silla donde se acomodara al ocupante, para fines de cálculo, es suficiente considerar que esta masa representa en conjunto una sola que involucra a la estructura de la silla y al ocupante con características de peso y centro de gravedad, este conjunto se tiene que equilibrar sobre el eje que une a los dos bancos de ruedas y transportarlo por medio de un sistema de transmisión que impulsa a las ruedas de cada banco, el sistema de tracción es independiente para cada banco y controlado por un giróscopo; este sistema es la parte medular del diseño de la silla, es elemental para acoplar el sistema de tracción al perfil de la escalera, los demás subterfugios mecánicos son elementos que le brindaran funcionalidad al mismo. El sistema debe ser capaz de transportar en terreno plano, terreno sinuoso, subir y bajar escaleras. Las características cinemáticas y dinámicas a considerar para los cálculos serán la rugosidad, dimensiones, masas, distancia entre ejes, ancho, etc; algunas de estas como resultado del estudio antropométrico y la ergonomía y otros que tienen que ver con las propiedades de los materiales y accesorios empleados.

Una silla de ruedas como cualquier otro sistema dinámico se caracteriza empleando el concepto de cuerpo rígido, con volumen y forma definidos. Estos cuerpos están unidos por medio de articulaciones que al formar parte de un conjunto se desplazan por la acción de fuerzas y describen trayectorias acotadas por los grados de libertad del sistema.

La *Mecánica de Lagrange* parte del análisis *Newtoniano* o vectorial que se rige por sus tres leyes, una vez descritas las variables dinámicas del sistema se procede a implementarlas en las *Ecuaciones de la Lagrange*, esta transformación facilita la manipulación de los fenómenos cinemáticos y dinámicos ya que se pasa de cantidades vectoriales a cantidades escalares como son la energía cinética y la energía potencial que son el fundamento de la ecuación de Lagrange.

3.6 ANTECEDENTES DEL DISEÑO

Una vez analizadas las características de las lesiones medulares y sus repercusiones en la capacidad motriz, se estableció un criterio de búsqueda en la que el resultado fuera obtener información sobre el razonamiento en la solución de utilizar un medio de transporte autónomo que sirva para transportar a un paciente con discapacidad motriz en sus extremidades inferiores, pero con control parcial del tórax y control absoluto de las extremidades superiores. Se encontró información publicada al respecto y el criterio de diseño fue muy versátil, desde sillas con sistemas mecánicos complejos, hasta sillas muy simples, pero con riesgos de estabilidad inminentes; para poder definir un concepto de diseño propio que cumpliera con el objetivo de subir y bajar escaleras de manera autónoma, se revisaron las propuestas hechas en varios artículos y se recalcularon los resultados para identificar los criterios de diseño.

Se encontró que uno de los factores principales es la altura y la posición del centro de gravedad (cg) en toda la evolución del movimiento para subir o bajar escaleras. En algunos casos, para evitar el riesgo de volcadura, se llevó al cg a una distancia mínima del piso, lo que implicaba un sistema de tracción complejo que requería de varios motores. En otros casos se evitaba ocupar varios motores para restarle peso al sistema y alargar el tiempo de recarga de las pilas, en estos casos el costo por el control se elevaba, por la implementación de algoritmos muy complejos que encarecen el producto y lo dejan fuera del alcance de muchos con este padecimiento.

Con la finalidad de alcanzar un modelo innovador y que cumpliera con los requisitos de seguridad que amerita la aplicación, se propusieron diferentes alternativas para el concepto de diseño de la silla, después de algunas pruebas y cálculos, se llegó al concepto que se presenta en esta tesis.

Es interesante considerar que la tarea de subir o bajar escaleras en una silla de ruedas implica para los usuarios de estos medios de transporte una imperante necesidad, en ocasiones no hay gente cerca que pueda auxiliarlos y en tales casos se toma el riesgo de hacerlo sin ayuda. En México existen asociaciones que capacitan a gente en silla de ruedas para adquirir habilidad en tareas como esta, se les capacita para subir y bajar escaleras, subir o bajar banquetas, esquivar obstáculos, formas de protegerse en caso de volcaduras, etc. con una silla convencional, al observar el entrenamiento de estas personas se aprecia el gran esfuerzo que realizan para conseguir la hazaña de subir o bajar una escalera y salir bien librados. Entrevistando a los médicos del Centro Nacional de Rehabilitación y a los alumnos de estas academias de entrenamiento se encontró que en la mayoría de los casos que se ha intentado subir o bajar una escalera ha sido inevitable una caída severa; por lo anterior se hizo un modelo (ver figura 3.15) para evaluar de manera muy general el por qué es tan riesgoso utilizar una silla de ruedas convencional para subir o bajar una escalera, los resultados se muestran en las gráficas 3.1, 3.2 y 3.3.

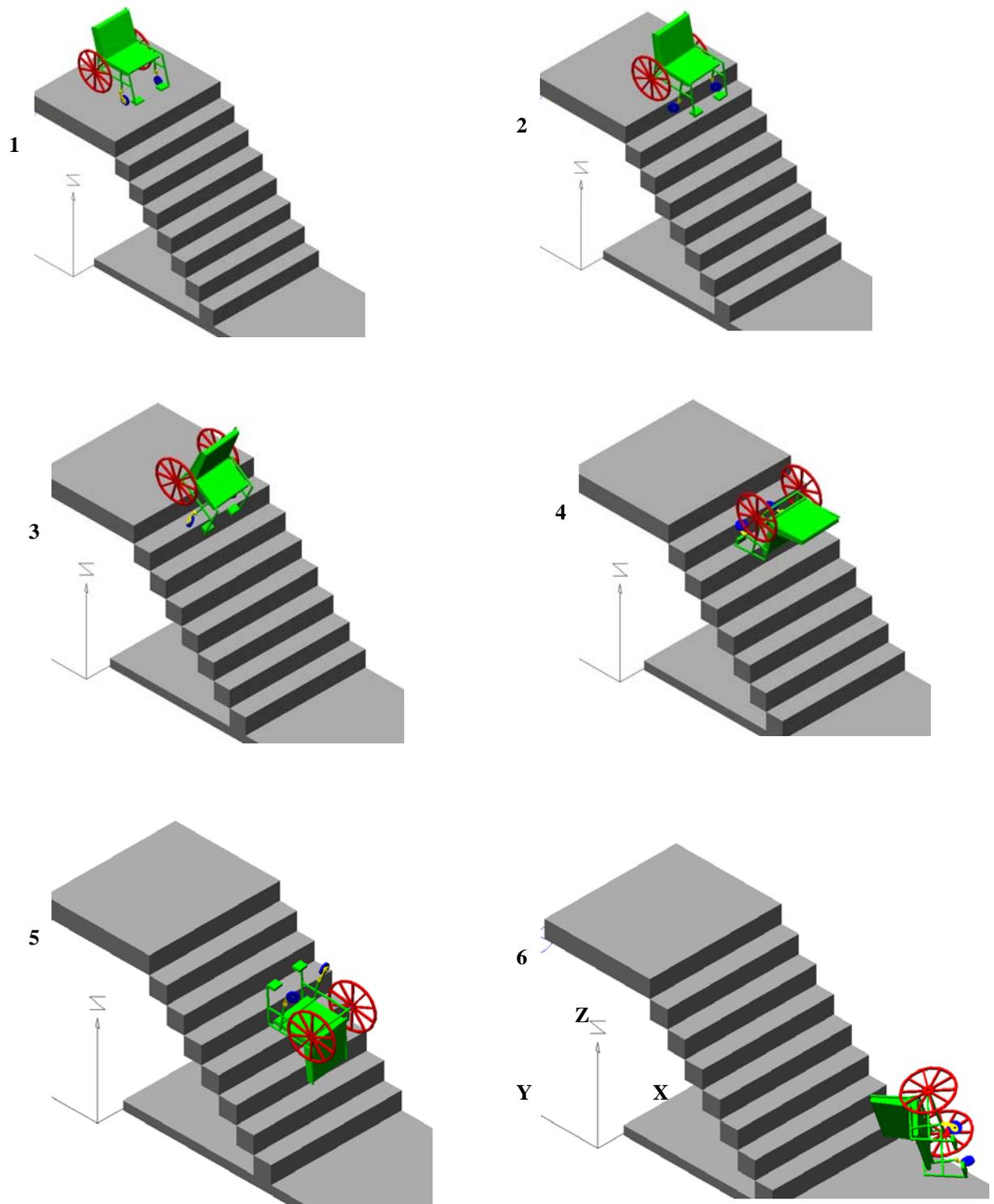
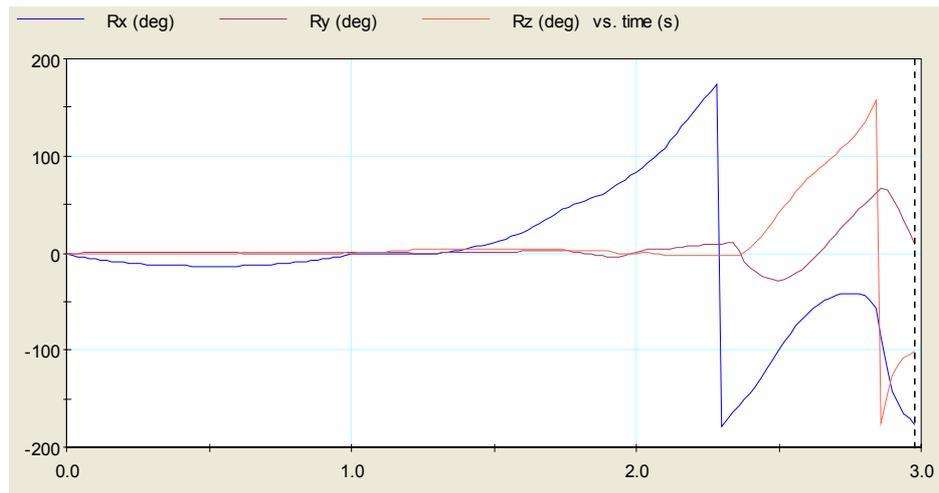


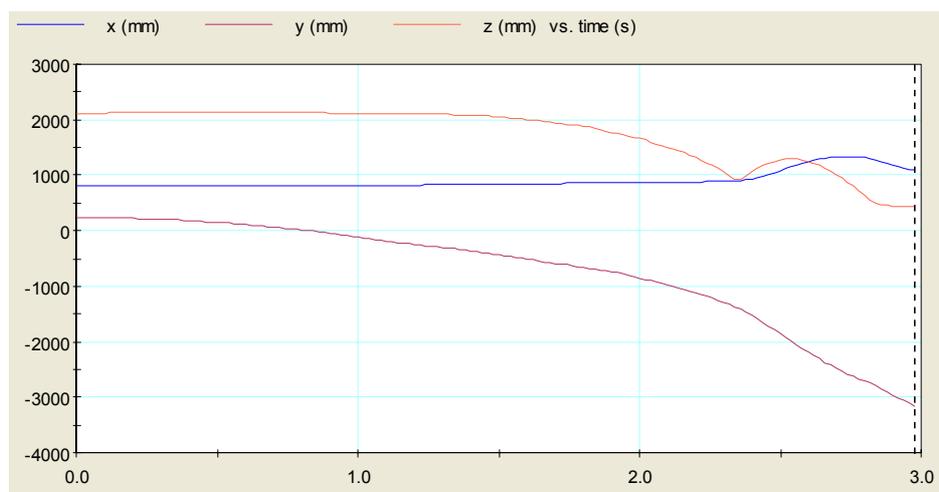
Figura 3.15 Secuencia de la simulación de una silla convencional bajando una escalera.



Gráfica 3.1 Orientación del centro de gravedad de la silla al descender por una escalera.

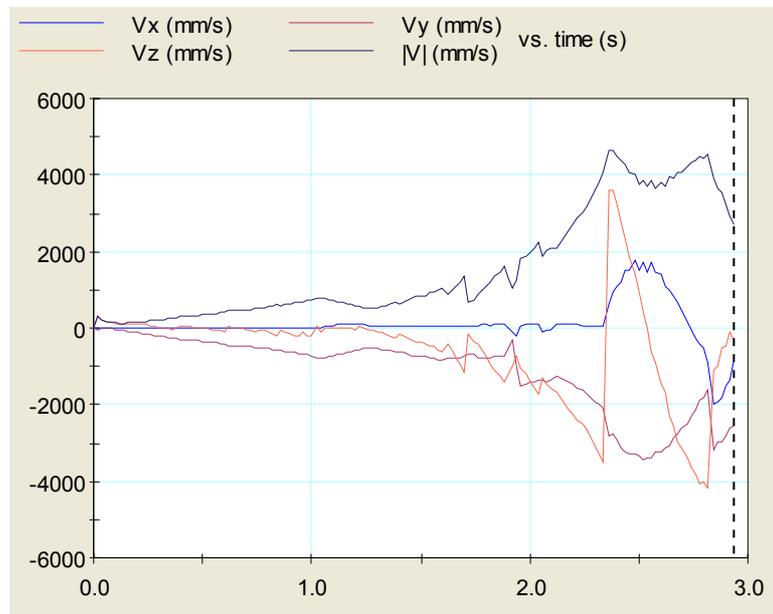
La silla descendió un altura de 1.6 metros en 8 escalones con una altura de 20 cm cada uno, y el tiempo total del recorrido fue de 3 segundos, lo que indica que el tiempo para poder reaccionar ante una situación así es casi nulo y más aún cuando no se cuenta con la capacidad motriz de todas las articulaciones.

En la gráfica 3.1 se observa que la silla presenta rotaciones abruptas de su centro de gravedad con respecto a los tres ejes de giro, cuando se supone que un recorrido seguro indicaría no tener spin en ninguno de ellos. Se aprecia que el primer giro es con respecto al eje X, que de acuerdo con la figura 3.15(6) este eje está a lo largo de los escalones, esto indica que la silla se va de frente por el giro con respecto a X, consecuentemente y casi instantáneamente la silla gira con respecto a Y y Z, lo que provoca una descomposición completa del descenso que se aprecia en las etapas 4 y 5 de la figura 3.15, hasta que al llegar a los 3 segundos desde el inicio del descenso la silla casi toca el piso del nivel inferior; los picos en la gráfica revelan los instantes en que la silla colisiona con la escalera, lo que propicia cambios en la orientación de la silla.



Gráfica 3.2 Posición del centro de gravedad de la silla al descender por una escalera.

La gráfica 3.2 describe la posición del centro de gravedad de la silla con respecto al sistema de referencia anclado al piso que se muestra en la figura 3.15(6); el desplazamiento en Y parece normal aunque lo ideal sería una línea recta con una inclinación uniforme, así mismo los desplazamientos en Z; los desplazamientos en X son indeseables.



Gráfica 3.3 Velocidad del centro de gravedad de la silla al descender por una escalera.

Al igual que en la grafica 3.3 el sistema debería presentar velocidades uniformes aunque no necesariamente constantes, para asegurar que el sistema está bajo control; en este caso la velocidad en X también es un factor indeseable, ya que representa la existencia de desplazamientos a lo largo del ancho de la escalera, lo indica un riesgo aún mayor cuando se trata de escaleras que no cuentan con pasamanos o pared.

3.7 CONCEPTO DE DISEÑO

Un sistema mecánico con control electrónico e intervención del usuario aplicado a una silla de ruedas podría ser un medio confiable para realizar la tarea de subir o bajar escaleras de forma autónoma, cada uno de estos elementos debe ser analizado por separado y el primero en definir es el que tiene que ver con el diseño mecánico, que a su vez involucra un análisis cinemático y dinámico, una vez definido lo anterior, se tienen los elementos para poder diseñar el control y sus elementos y así precisar la participación del usuario en la manipulación del mismo; conceptualmente desde el diseño mecánico, se deben considerar los factores de control así como los impulsores y mecanismos que le darán movimiento al sistema, por lo que desde esta etapa se reconoce si el sistema resultará costoso en la medida que se complique su control; el sistema mecánico que se propone tiene su base en la idea de minimizar los controles que requerirá el sistema para su óptima manipulación; se partió de la concepción que la silla es un elemento que será anclado al sistema que le permitirá ascender o descender escaleras, por lo que basta considerar al sistema mecánico como un dispositivo que tendrá la tarea de soportar y equilibrar una carga que equivale al peso de la silla y el usuario; dado lo anterior se analiza cinemáticamente el sistema mecánico y se evalúa su desempeño en simuladores

para posteriormente hacer pruebas experimentales, tanto el análisis cinemático como el modelado pueden llegar a ser tan profundos como herramientas y conocimientos se tengan disponibles.

En el desarrollo de esta investigación se revisaron y propusieron diferentes configuraciones para llegar al sistema que se describe en la figura 3.16. Se descubrió que el ascenso resulta menos complicado que el descenso, por lo que se pensó en un sistema que pudiera responder ante una situación crítica y proteger lo mayor posible al ocupante de la silla; con el sistema propuesto el individuo debe quedar a espaldas de la escalera al iniciar el ascenso. El centro de gravedad se grafica indicando un sistema de referencia virtual en la esquina inferior del primer escalón como se muestra en la figura 3.16.

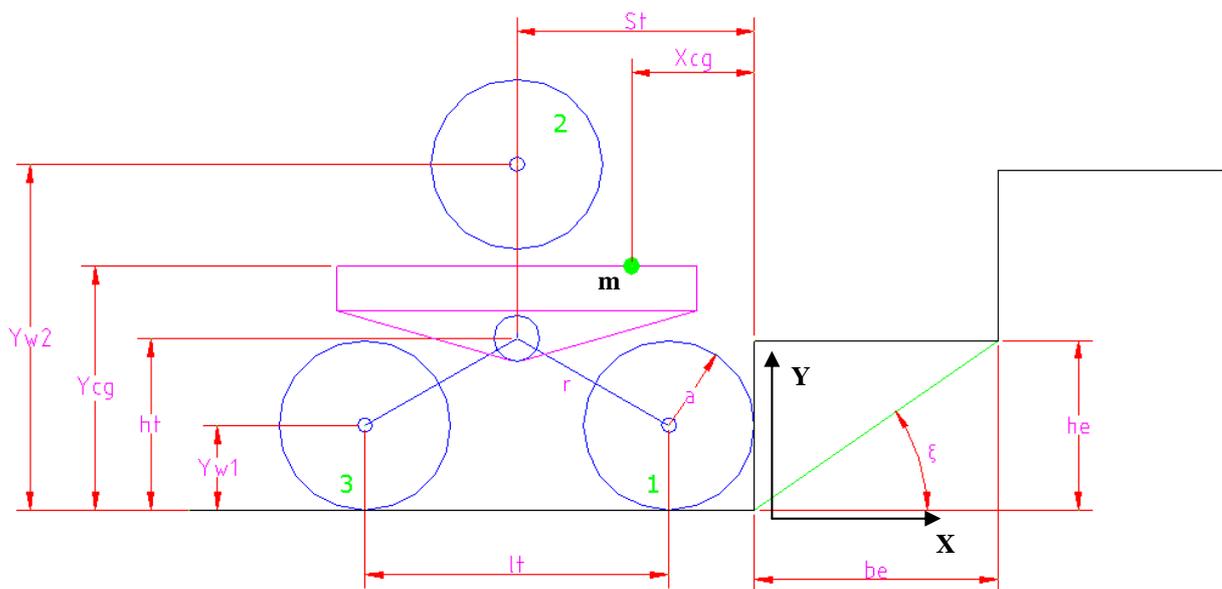


Figura 3.16 Descripción del modelo cinemático del sistema de tres ruedas para la elevación y descenso de una silla de ruedas en una escalera.

El sistema consta de tres ruedas dispuestas equidistantemente formando un triángulo como se aprecia en la figura 3.16. Las ruedas están numeradas en el orden en que harán contacto con los escalones, se tienen dos bancos de ruedas idénticos por cada lado de la silla, estos bancos de ruedas giran independientemente controlados por un giroscopio, las ruedas de cada banco giran entre sí a la misma velocidad angular, tanto para el ascenso como el descenso. La velocidad en ambos bancos deberá ser la misma en escaleras rectas, aunque el sistema podría ser escalado en el módulo de control para poder negociar el ascenso de una escalera de caracol; con respecto al sistema de referencia cada uno de los ejes de las ruedas se localizan con sus coordenadas en X y Y en esta posición de inicio el $Yw1$ es igual que $Yw3$, por otro lado $Yw2$ se ubica en su punto máximo, la distancia entre ejes de las ruedas se define por lt y la distancia del centro del triángulo a cada eje por la letra r , la letra a representa el radio de las ruedas, el punto marcado en el bloque m que soporta el sistema representa el centro de gravedad de la carga que equivale a la masa de estructura de la silla y el usuario y se ubica a Xcg y Ycg del sistema de referencia. La masa m será equilibrada en el ascenso y descenso por el giroscopio. La geometría de los escalones la determinan be , que es el ancho del escalón y he que corresponde a la altura del escalón, que combinadas nos dan ϵ que es el ángulo del peralte de la escalera.

En la figura 3.17 se esquematiza la evolución del movimiento del sistema en el ascenso de la escalera, la intención es verificar los desplazamientos del centro del triángulo que forman las ruedas y se observa claramente que el punto que representa al centro de gravedad lo acompaña paralelamente gracias a la implementación del control giroscópico cuya función es mantener permanentemente en forma horizontal al bloque m que se aprecia en la figura 3.16 y que representa a la carga de la silla. En esta representación se consideraron un ancho de escalón de 270mm, una altura de 190mm, un diámetro de rueda de 190mm y una separación entre ejes de 338mm.

La marcha del sistema involucra un mecanismo de propulsión que le otorga el par necesario a las ruedas para elevar la carga a través de la escalera, ambos bancos de ruedas deberán trabajar uniformemente para que la silla no se ladee; en el instante en que las ruedas tocan el primer escalón, el par de esas ruedas se transmite al centro del triángulo y comienza la elevación para pasar de $ht1$ a $ht2$; se alcanza un punto máximo y después viene un pequeño descenso, siempre y cuando la altura del escalón así lo permita; en este caso con los parámetros descritos anteriormente, se consigue llegar a un punto máximo y enseguida un descenso; en la práctica y con una infinidad de geometrías diferentes en los escalones, es preciso acomodar estas variables para así optimizar el sistema, sin embargo es claro que la silla se enfrentará a escaleras que por sus proporciones no podrán ser transitadas con este medio; se observa también que una vez que la segunda rueda toca el primer nivel, se tienen dos puntos de apoyo por cada banco de ruedas (derecho e izquierdo). Ello le confiere estabilidad al sistema, lo que ayudará pasar a la siguiente fase en la que el mecanismo consumirá mayor cantidad de energía, dado que la diferencia en alturas entre $ht4$ y $ht5$ es mayor y como se aprecia en la figura 3.17, ésta casi se describe en forma vertical.

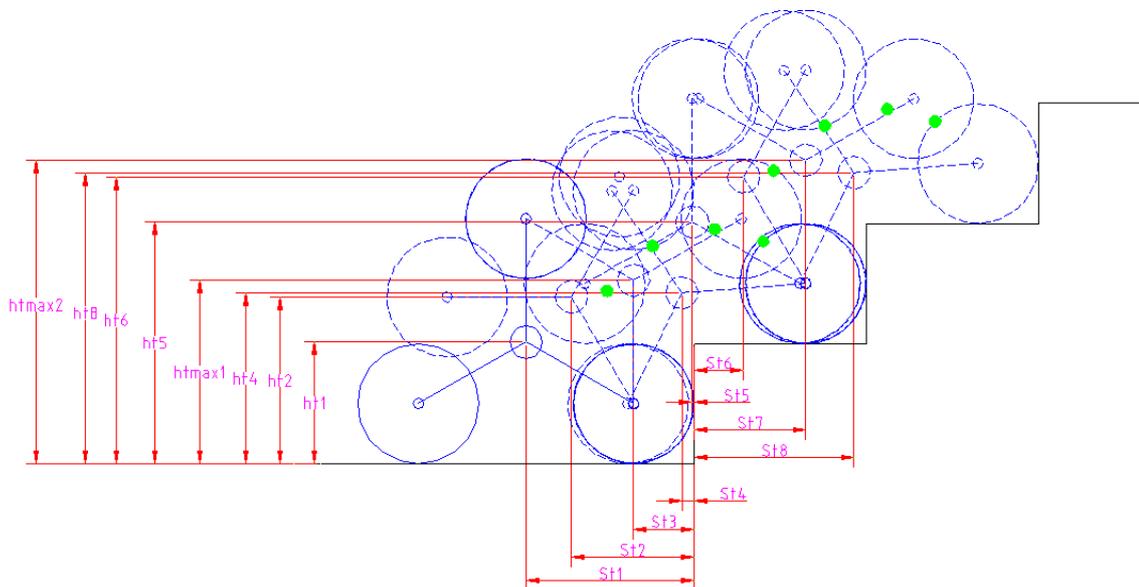


Figura 3.17 Descripción de las fases de ascenso del modelo cinemático del sistema de tres ruedas.

3.8 REFERENCIAS

- 3.1 Página web: www.elergonomista.com,
©2005 Comunidades de divulgación científico técnica. Elergonomista.com, Galicia España, información obtenida en enero de 2009,
jmrodriguez@elergonomista.com; webmaster@elergonomista.com
- 3.2 Enrique Javier de la Vega Bustillos, Francisco Octavio Lopez Millan, Selene Soto, Instituto Tecnológico de Hermosillo, Sociedad de Ergonomistas de México, A.C., *Memorias del Vi Congreso Internacional de Ergonomía*, Universidad de Guanajuato, 26 al 29 de mayo del 2004, pp. 236-248.
- 3.3 ISO/DIS 7176-28, Wheelchairs -- Part 28: Requirements and test methods for stair-climbing devices.
- 3.4 Werner Last; Chassis for a vehicle capable of travelling over obstruct; United States Patent No. 4061199.
- 3.5 L. Kamen Dean; Control of a balancing personal vehicle; United States Patent No. 6799649.
- 3.6 Misawa Rintaro; Stair climbing wheelchair carrier; United States Patent No. 4771839.
- 3.7 Panero Julius; Las dimensiones humanas en los espacios interiores, Editorial Gustavo Gill, 2007, 320 Págs, España.
- 3.8 Bustamante Antonio (2009), *Ergonomía para Diseñadores*, 1ra Edición, Madrid España.
- 3.9 Mondelo R. Pedro, Gregori Torada Enrique (2001), *Ergonomía I Fundamentos*, sección: El diseño ergonómico y la antropometría, Ediciones UPC, Barcelona España, pp. 192.
- 3.9 Rosa Hueso Calvo (2008), *El laboratorio de Biomecánica como ayuda en el diseño del puesto de trabajo*, Área de Biomecánica del Instituto Ergonomía MAPFRE, Zaragoza España.

CAPÍTULO 4

Metodología y análisis preliminares

4.1 CASO GENERALIZADO

Los datos obtenidos en los capítulos precedentes ofrecen la información necesaria para desarrollar los cálculos matemáticos con la noción del sistema que se desea caracterizar, el sistema mostrado en la figura 3.14 del tercer capítulo es una versión del sistema que se pretende implementar en la silla de ruedas para que esta consiga subir y bajar escaleras de manera autónoma, aunque una de las consideraciones primordiales es el hecho de que este vehículo será mayormente utilizado para transportarse en el plano y eventualmente se requerirá que suba o baje escaleras o que libere algún obstáculo, por ello es indispensable entender y analizar el modelo en un desplazamiento dentro de un espacio confinado por un terreno plano, el cual puede adoptar cualquier forma, es decir, puede ser un terreno nivelado o inclinado, con rugosidades del área de contacto piso-ruedas variables, con irregularidades como las de un piso de concreto o en diferentes terrenos como pueden ser terracería, pasto, pisos de madera, pisos resbalosos, etc., por ello el análisis del sistema en su desplazamiento normal sobre un plano será el punto de partida para valorar si el sistema es viable o no. Para ello se ha considerado un sistema generalizado de cuatro ruedas con mayores grados de libertad, para que una vez identificadas las variables dinámicas, estas se puedan manipular con mayor certidumbre en un caso particular como el sistema de seis ruedas que se propone en este estudio y cuya concepción se explicó ampliamente en el capítulo que antecede.

4.1.1 MOVIMIENTO DE UN CARRO DE 4 RUEDAS GUIABLES EN UN PLANO HORIZONTAL.

El carro consta de cuatro ruedas, dos en el eje delantero y dos en el eje trasero. Supongamos que la velocidad angular de las ruedas en torno de su eje se controla separadamente. Se tienen dos mecanismos uno en las ruedas traseras y otro en las delanteras, provistos para girarlas en forma tal que los planos de estos siempre sean paralelos.

Se requieren 6 torques para manejar el carro, T_1 y T_2 en las ruedas 1 y 2 y T_3 y T_4 en las ruedas 3 y 4, para que las ruedas giren sobre su eje y un torque $T_{\delta 1}$ sobre las ruedas traseras para generar el direccionamiento del par de ruedas 1 y 2 y un $T_{\delta 2}$ para las frontales. Consideraciones generales:

- Supongamos que los dos motores que rotan a las ruedas 1 y 2 en sus ejes y el mecanismo que genera la torca $T_{\delta 1}$ se acomodan en el eje trasero.
- De manera similar suponer que los 2 motores que hacen rotar el par de ruedas 3 y 4 y el mecanismo generador de $T_{\delta 2}$ se mantienen en el eje delantero.
- Supongamos q todas las ruedas rotan sin deslizar sobre el plano horizontal.
- La dirección del vehículo así como su dinámica, dependerán en mucho de la interacción rueda-piso y esto es lo que se va a considerar en el análisis.
- Para simplificar se supondrá que las ruedas y el piso son rígidos y que el contacto entre ellos es un punto.
- Se aplicará el método de Lagrange para el modelado del movimiento con varios cuerpos rígidos.

4.1.1.1 DEFINICIÓN DE LAS VELOCIDADES VECTORIALES.

La figura 4.1 describe los vectores de posición del sistema de cuatro ruedas, así como el sistema de referencia inercial y el sistema de referencia en movimiento.

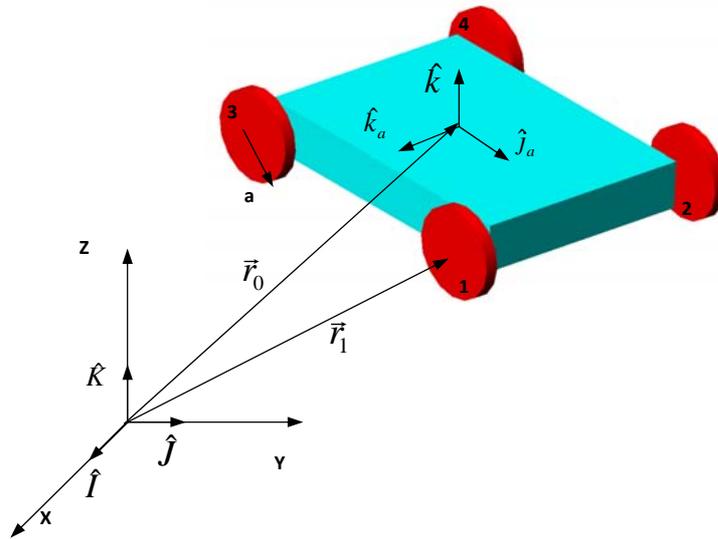
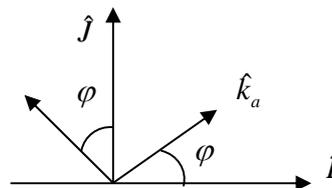


Figura 4.1. Carro de cuatro ruedas y sus vectores de posición.

Se definen a los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{K}$ en un sistema de coordenadas inercial y a los vectores unitarios $\hat{K}_a, \hat{j}_a, \hat{k}$ en un sistema en movimiento anclado al vehículo, de donde se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned}\hat{K}_a &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{j}_a &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_a \\ \hat{j}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix}$$



El vector que une el sistema de referencia inercial con el sistema de referencia móvil es:

$$\vec{r}_0 = x\hat{I} + y\hat{J} + a\hat{K}$$

donde a es el radio de las ruedas.

Se definen a los vectores \vec{r}_i , $i = 1,2,3,4$ como las posiciones de las ruedas y como largo y ancho del carro las distancias L_1 y L_2 .

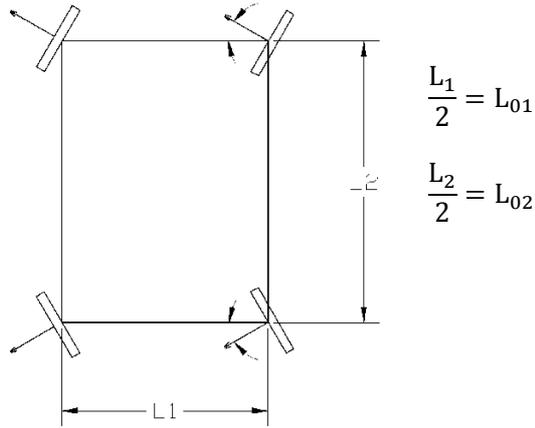


Figura 4.2. Vista superior del carro de cuatro ruedas y sus respectivos grados de libertad ϕ_i y γ_i

De donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + L_1\hat{K}_a \\ \vec{r}_4 &= \vec{r}_3 + L_1\hat{K}_a \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 &= \vec{r}_4 - \vec{r}_3 = L_1\hat{K}_a \\ \vec{r}_3 - \vec{r}_1 &= \vec{r}_4 - \vec{r}_2 = L_2\hat{K}_a\end{aligned}$$

Por lo que los vectores de posición de cada una de las ruedas estará dado por:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_0 - L_{02}\hat{J}_a - L_{01}\hat{K}_a \\ \vec{r}_1 &= x\hat{I} + y\hat{J} + a\hat{K} - L_{02}\hat{J}_a - L_{01}\hat{K}_a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= \vec{r}_0 - L_{02}\hat{J}_a + L_{01}\hat{K}_a \\ \vec{r}_2 &= x\hat{I} + y\hat{J} + a\hat{K} - L_{02}\hat{J}_a + L_{01}\hat{K}_a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_3 &= \vec{r}_0 + L_{02}\hat{J}_a - L_{01}\hat{K}_a \\ \vec{r}_3 &= x\hat{I} + y\hat{J} + a\hat{K} + L_{02}\hat{J}_a - L_{01}\hat{K}_a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_4 &= \vec{r}_0 + L_{02}\hat{J}_a + L_{01}\hat{K}_a \\ \vec{r}_4 &= x\hat{I} + y\hat{J} + a\hat{K} + L_{02}\hat{J}_a + L_{01}\hat{K}_a\end{aligned}$$

Ahora derivando con respecto del tiempo las \hat{r}_i se obtienen las \vec{r}_i que son las velocidades de cada una de las ruedas \vec{v}_i

$$\vec{V}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = \vec{r}_0$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{V}_0 - L_{02}\dot{\hat{J}}_a - L_{01}\dot{\hat{K}}_a \\ \vec{V}_1 &= \vec{V}_0 + L_{02}\dot{\varphi}\hat{K}_a - L_{01}\dot{\varphi}\hat{J}_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 &= \vec{V}_0 - L_{02}\dot{\hat{J}}_a + L_{01}\dot{\hat{K}}_a \\ \vec{V}_2 &= \vec{V}_0 + L_{02}\dot{\varphi}\hat{K}_a + L_{01}\dot{\varphi}\hat{J}_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_3 &= \vec{V}_0 + L_{02}\dot{\hat{J}}_a - L_{01}\dot{\hat{K}}_a \\ \vec{V}_3 &= \vec{V}_0 - L_{02}\dot{\varphi}\hat{K}_a - L_{01}\dot{\varphi}\hat{J}_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_4 &= \vec{V}_0 + L_{02}\dot{\hat{J}}_a + L_{01}\dot{\hat{K}}_a \\ \vec{V}_4 &= \vec{V}_0 - L_{02}\dot{\varphi}\hat{K}_a + L_{01}\dot{\varphi}\hat{J}_a \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{J}}_a &= -\dot{\varphi} \cos \varphi \hat{I} - \dot{\varphi} \sin \varphi \hat{J} = -\dot{\varphi}(\cos \varphi \hat{I} + \sin \varphi \hat{J}) = -\dot{\varphi}\hat{K}_a \\ \dot{\hat{K}}_a &= -\dot{\varphi} \sin \varphi \hat{I} + \dot{\varphi} \cos \varphi \hat{J} = \dot{\varphi}(-\sin \varphi \hat{I} + \cos \varphi \hat{J}) = \dot{\varphi}\hat{J}_a \end{aligned}$$

Como las ruedas delanteras y traseras giran direccionalmente por medio del eje que las une de forma independiente se tiene ahora la relación que guardan estos grados de libertad con respecto al sistema de referencia inercial. La figura 4.3 esquematiza estos vectores de posición.

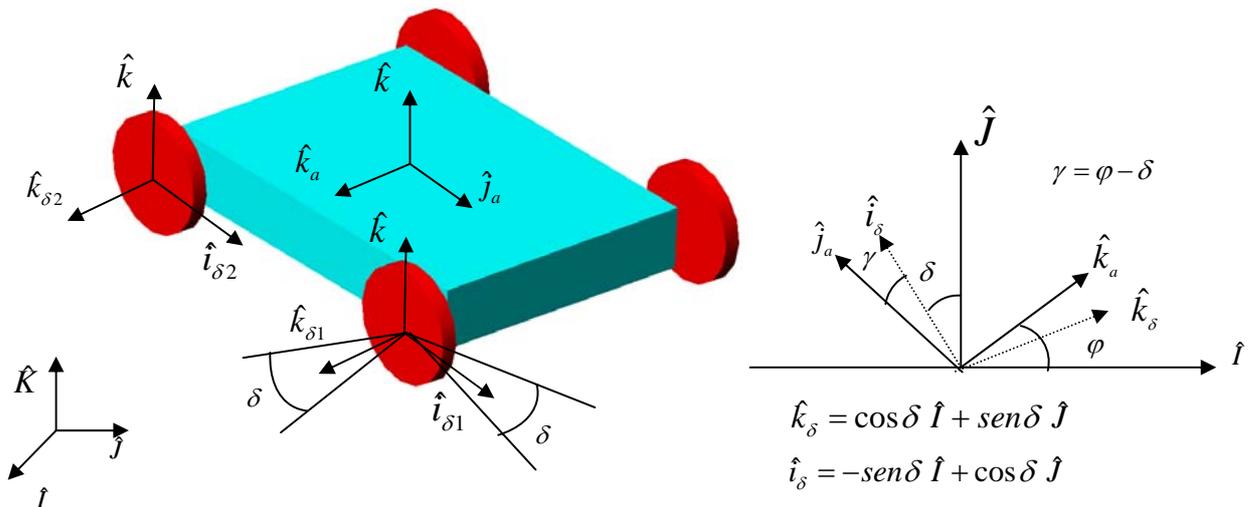


Figura 4.3. Perspectiva del carro de cuatro ruedas con los sistemas de referencia en las ruedas.

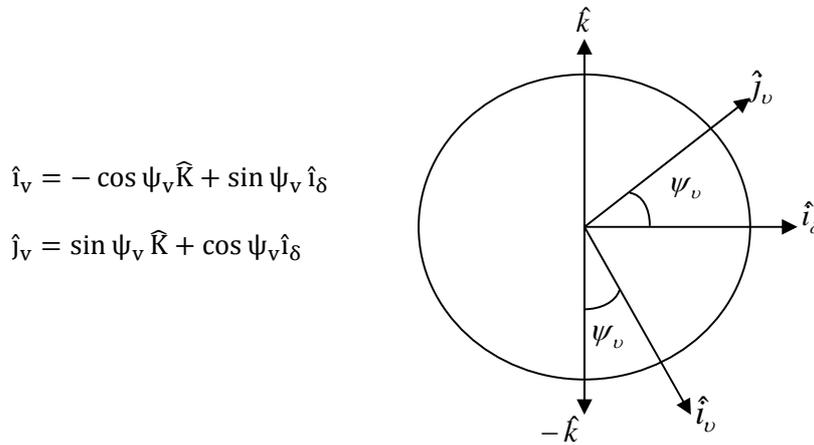
De manera general para las ruedas delanteras y raseras los vectores de posición de cada una quedará relacionado al sistema inercial por la siguiente matriz de transformación:

$$\begin{pmatrix} \hat{k}_{\delta i} \\ \hat{i}_{\delta i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta i & \sin \delta i \\ -\sin \delta i & \cos \delta i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \end{pmatrix}$$

Si se realiza el producto punto entre \hat{k}_a y \hat{k}_δ se encuentra la magnitud de la contribución de ambos componentes.

$$\begin{aligned} \langle \hat{k}_a, \hat{k}_{\delta i} \rangle &= (\cos \varphi \hat{I} + \sin \varphi \hat{J}) \cdot (\cos \delta i \hat{I} + \sin \delta i \hat{J}) = (\cos \varphi \cos \delta i) \hat{I} \cdot \hat{I} + (\sin \varphi \sin \delta i) \hat{J} \cdot \hat{J} \\ &= \cos \varphi \cos \delta i + \sin \varphi \sin \delta i = \cos(\varphi - \delta i) = \cos \gamma \end{aligned}$$

Ahora bien el sistema de referencia $\hat{i}_\delta, \hat{k}_\delta, \hat{k}$ se considerará como el sistema de referencia fijo anclado a la rueda, otro sistema $\hat{i}_v, \hat{k}_v, \hat{k}$ será el sistema de referencia anclado al eje de las ruedas y que estará en movimiento debido a ψ_v .



$$\hat{i}_v = -\cos \psi_v \hat{K} + \sin \psi_v \hat{i}_\delta$$

$$\hat{j}_v = \sin \psi_v \hat{K} + \cos \psi_v \hat{i}_\delta$$

Figura 4.4. Representación de las posiciones relativas del sistema de coordenadas δ fijo con respecto al sistema de coordenadas móvil v .

Aplicando el teorema:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \dot{\hat{A}} = \frac{d(A)}{dt} \hat{e}_A + \vec{\omega}_D \times \hat{A}$$

Se obtienen las ecuaciones de los vectores en la base v con respecto a las δ .

$$\begin{aligned} \dot{\hat{i}}_v &= \sin \psi_v \dot{\psi}_v \hat{k} - \cos \psi_v \dot{\psi}_v \hat{k} + \cos \psi_v \dot{\psi}_v (\hat{i}_\delta) + \sin \psi_v (\dot{\hat{i}}_\delta) = \dot{\psi}_v (\sin \psi_v \hat{k} + \cos \psi_v \hat{i}_\delta) \\ &\quad + \sin \psi_v (-\dot{\delta} \hat{k}_\delta) = \dot{\psi}_v \hat{j}_v - \sin \psi_v \dot{\delta} \hat{k}_\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{j}}_v &= \cos \psi_v \dot{\psi}_v \hat{k} + \sin \psi_v \dot{\psi}_v \hat{k} - \sin \psi_v \dot{\psi}_v \hat{i}_\delta + \cos \psi_v (\dot{\hat{i}}_\delta) = \dot{\psi}_v (\cos \psi_v - \sin \psi_v) \\ &\quad + \cos \psi_v (-\dot{\delta} \hat{k}_\delta) = -\dot{\psi}_v \hat{i}_v - \cos \psi_v \dot{\delta} \hat{k}_\delta \end{aligned}$$

$$\dot{\hat{i}}_\delta = -\cos \delta \dot{\delta} \hat{I} - \sin \delta \dot{\delta} \hat{I} - \sin \delta \dot{\delta} \hat{J} + \cos \delta \dot{\delta} \hat{J} = -\dot{\delta} (\cos \delta \hat{I} + \sin \delta \hat{J}) = -\dot{\delta} \hat{k}_\delta$$

$$\hat{i}_v = \vec{\omega} \times \hat{i}_v = (\omega_{e1}\hat{i}_v + \omega_{e2}\hat{j}_v + \omega_{e3}\hat{k}_\delta) \times \hat{i}_v = -\omega_{e2}\hat{k}_\delta + \omega_{e3}\hat{j}_v$$

$$\hat{j}_v = \vec{\omega} \times \hat{j}_v = (\omega_{e1}\hat{i}_v + \omega_{e2}\hat{j}_v + \omega_{e3}\hat{k}_\delta) \times \hat{j}_v = \omega_{e1}\hat{k}_\delta - \omega_{e3}\hat{i}_v$$

Igualando términos se tiene que:

$$\omega_{e1} = \cos \psi_r \dot{\delta}$$

$$\omega_{e2} = \sin \psi_r \dot{\delta}$$

$$\omega_{e3} = \dot{\psi}_v$$

Las cuáles son las componentes de las velocidades angulares en el punto de contacto en la base $\hat{i}_v, \hat{j}_v, \hat{k}_\delta$.

$$\vec{\omega}_v = -\dot{\delta} \cos \psi_v \hat{i}_v + \dot{\delta} \sin \psi_v \hat{j}_v + \dot{\psi}_v \hat{k}_\delta$$

4.1.1.2 RESTRICCIONES NO HOLONÓMICAS.

Para que la silla se desplace sobre el plano horizontal se tiene que considerar que las ruedas al girar no deben patinar, para permitir que el carro avance, a esta condición se le conoce como rodar sin deslizar y en términos matemáticos se define por la ecuación:

$$\vec{V}_i + \hat{\omega}_i \times a\hat{k} = 0 \quad i = 1,2,3,4$$

Se espera que las cuatro ruedas estén en contacto con el piso, por lo tanto se tienen cuatro ecuaciones de restricción.

$$\vec{V}_1 + \hat{\omega}_1 \times a\hat{k} = 0$$

$$\vec{V}_2 + \hat{\omega}_2 \times a\hat{k} = 0$$

$$\vec{V}_3 + \hat{\omega}_3 \times a\hat{k} = 0$$

$$\vec{V}_4 + \hat{\omega}_4 \times a\hat{k} = 0$$

Donde:

$\vec{V}_i \rightarrow$ Son las velocidades lineales del centro de cada rueda con respecto al sistema $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$.

$\hat{\omega}_i \rightarrow$ Son las velocidades angulares de cada una de las ruedas con respecto al sistema $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$.

$a \rightarrow$ Es el radio de las ruedas.

Las \vec{V}_i ya se calcularon y las $\vec{\omega}_i$ se definen considerando la velocidad angular general que está definida en términos de los ángulos de Euler, en su forma general como:

$$\vec{\omega} = \hat{I}(-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta) + \hat{J}(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) + \hat{K}(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)$$

Para el caso particular del carro de cuatro ruedas se tienen los grados de libertad como sigue:

$$\begin{aligned}\theta_i &= 90^\circ, \quad \dot{\theta}_i = 0 \\ \psi_i &= \psi_i, \quad \dot{\psi}_i = \dot{\psi}_i \\ \varphi &= \delta, \quad \dot{\varphi} = \dot{\delta}\end{aligned}$$

Por lo que las velocidades angulares en cada una de las ruedas son:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_1 &= \hat{I}(\dot{\psi}_1 \cos \delta_1) + \hat{J}(\dot{\psi}_1 \sin \delta_1) + \hat{K}\dot{\delta}_1 \\ \vec{\omega}_2 &= \hat{I}(\dot{\psi}_2 \cos \delta_1) + \hat{J}(\dot{\psi}_2 \sin \delta_1) + \hat{K}\dot{\delta}_1 \\ \vec{\omega}_3 &= \hat{I}(\dot{\psi}_3 \cos \delta_2) + \hat{J}(\dot{\psi}_3 \sin \delta_2) + \hat{K}\dot{\delta}_2 \\ \vec{\omega}_4 &= \hat{I}(\dot{\psi}_4 \cos \delta_2) + \hat{J}(\dot{\psi}_4 \sin \delta_2) + \hat{K}\dot{\delta}_2\end{aligned}$$

Se define ahora el vector $a\hat{k}$ que es el vector que va del centro de la rueda al punto de contacto entre la rueda y el piso

$$a\hat{k} = a(\cos \theta \cos \varphi \hat{I} + \cos \theta \sin \varphi \hat{J} - \sin \theta \hat{K})$$

Para $\theta = 90^\circ$

$$a\hat{k} = -\hat{k}a$$

Con lo que se puede obtener el producto vectorial $\hat{\omega}_i \times a\hat{k}$

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_1 \times a\hat{k} &= \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \dot{\psi}_1 \cos \delta_1 & \dot{\psi}_1 \sin \delta_1 & \dot{\delta}_1 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = \hat{I} - a\dot{\psi}_1 \sin \delta_1 + \hat{J}a\dot{\psi}_1 \cos \delta_1 \\ \hat{\omega}_2 \times a\hat{k} &= \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \dot{\psi}_2 \cos \delta_1 & \dot{\psi}_2 \sin \delta_1 & \dot{\delta}_1 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = \hat{I} - a\dot{\psi}_2 \sin \delta_1 + \hat{J}a\dot{\psi}_2 \cos \delta_1 \\ \hat{\omega}_3 \times a\hat{k} &= \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \dot{\psi}_3 \cos \delta_2 & \dot{\psi}_3 \sin \delta_2 & \dot{\delta}_2 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = \hat{I} - a\dot{\psi}_3 \sin \delta_2 + \hat{J}a\dot{\psi}_3 \cos \delta_2 \\ \hat{\omega}_4 \times a\hat{k} &= \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \dot{\psi}_4 \cos \delta_2 & \dot{\psi}_4 \sin \delta_2 & \dot{\delta}_2 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = \hat{I} - a\dot{\psi}_4 \sin \delta_2 + \hat{J}a\dot{\psi}_4 \cos \delta_2\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de \vec{V}_i y $\vec{\omega}_i$ en la ecuación $\vec{V}_i + \vec{\omega}_i \times a\hat{k} = 0$ y considerando que:

$$\vec{V}_0 = \dot{x}\hat{I} + \dot{y}\hat{J}$$

$$\hat{k}_a = \cos \varphi \hat{I} + \sin \varphi \hat{J}$$

$$\hat{J}_a = -\sin \varphi \hat{I} + \cos \varphi \hat{J}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \hat{I}(\dot{x} + L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi + L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi) + \hat{J}(\dot{y} + L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi - L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi) \\ \vec{V}_2 &= \hat{I}(\dot{x} + L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi - L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi) + \hat{J}(\dot{y} + L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi + L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi) \\ \vec{V}_3 &= \hat{I}(\dot{x} - L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi + L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi) + \hat{J}(\dot{y} - L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi - L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi) \\ \vec{V}_4 &= \hat{I}(\dot{x} - L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi - L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi) + \hat{J}(\dot{y} - L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi + L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi)\end{aligned}$$

Finalmente las ecuaciones de restricción no holonómicas son:

Para la rueda 1

$$\begin{aligned}\dot{x} + L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi + L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\psi}_1 \sin \delta_1 &= 0 \\ \dot{y} + L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi - L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\psi}_1 \cos \delta_1 &= 0\end{aligned}$$

Para la rueda 2

$$\begin{aligned}\dot{x} + L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi - L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\psi}_2 \sin \delta_1 &= 0 \\ \dot{y} + L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi + L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\psi}_2 \cos \delta_1 &= 0\end{aligned}$$

Para la rueda 3

$$\begin{aligned}\dot{x} - L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi + L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\psi}_3 \sin \delta_2 &= 0 \\ \dot{y} - L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi - L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\psi}_3 \cos \delta_2 &= 0\end{aligned}$$

Para la rueda 4

$$\begin{aligned}\dot{x} - L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi - L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\psi}_4 \sin \delta_2 &= 0 \\ \dot{y} - L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi + L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\psi}_4 \cos \delta_2 &= 0\end{aligned}$$

Para simplificar se definen los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned}A_{11}(\varphi) &= L_{01} \sin \varphi + L_{02} \cos \varphi, & A_{12}(\varphi) &= -L_{01} \cos \varphi + L_{02} \sin \varphi \\ A_{21}(\varphi) &= -L_{01} \sin \varphi + L_{02} \cos \varphi, & A_{22}(\varphi) &= L_{01} \cos \varphi + L_{02} \sin \varphi \\ A_{31}(\varphi) &= L_{01} \sin \varphi - L_{02} \cos \varphi, & A_{32}(\varphi) &= -L_{01} \cos \varphi - L_{02} \sin \varphi \\ A_{41}(\varphi) &= -L_{01} \sin \varphi - L_{02} \cos \varphi, & A_{42}(\varphi) &= L_{01} \cos \varphi - L_{02} \sin \varphi\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de A_{ij} y aplicando la siguiente condición se reducen términos:

$$\sin \delta_i(\hat{I}_j) - \cos \delta_i(\hat{J}_j) = 0$$

$$\begin{aligned}\dot{x} \sin \delta_1 - \dot{y} \cos \delta_1 + (L_{01} \cos \gamma_1 - L_{02} \sin \gamma_1)\dot{\varphi} - a\dot{\psi}_1 &= 0 \\ \dot{x} \sin \delta_1 - \dot{y} \cos \delta_1 - (L_{01} \cos \gamma_1 + L_{02} \sin \gamma_1)\dot{\varphi} - a\dot{\psi}_2 &= 0 \\ \dot{x} \sin \delta_2 - \dot{y} \cos \delta_2 + (L_{01} \cos \gamma_2 + L_{02} \sin \gamma_2)\dot{\varphi} - a\dot{\psi}_3 &= 0 \\ \dot{x} \sin \delta_2 - \dot{y} \cos \delta_2 - (L_{01} \cos \gamma_2 - L_{02} \sin \gamma_2)\dot{\varphi} - a\dot{\psi}_4 &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

4.1.1.3 DESCRIPCIÓN DE LA DINÁMICA

El carro está compuesto por siete cuerpos rígidos, 4 ruedas, una plataforma o base y dos ejes uno para las ruedas delanteras y otro para las traseras, la dinámica se definirá a partir de la Lagrangiana que se define como la energía potencial menos la energía cinética.

$$\mathcal{L} = T - V$$

En este caso la energía potencial es cero, por lo que la Lagrangiana será igual a la energía cinética del sistema

$$\begin{aligned} L = & I_{wR} \dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{wR3} (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) + m_{wR} (v_o^2 + L_0^2 \dot{\phi}^2 + 2L_0 \dot{\phi} v_o) + I_{wF1} \dot{\delta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{wF3} (\dot{\psi}_3^2 + \dot{\psi}_4^2) + \\ & m_{wF} (v_o^2 + L_0^2 \dot{\phi}^2 - 2L_0 \dot{\phi} v_o) + \frac{1}{2} [m_{FR} v_o^2 + I_{FR} \dot{\phi}^2] + m_{ax} (v_o^2 + L_{02}^2 \dot{\phi}^2) + I_{ax} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{\delta 1} (\dot{\phi} - \dot{\delta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_{\delta 2} (\dot{\phi} - \dot{\delta}_2)^2 \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$v_o = \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi$$

$$v_o^2 = \langle v_o, v_o \rangle = \vec{v}_o \cdot \vec{v}_o$$

I_{wR1} : momento de inercia de la rueda al rededor de \hat{i}_{v_i} , $i = 1, 2$

I_{wF1} : momento de inercia de la rueda al rededor de \hat{i}_{v_i} , $i = 3, 4$

I_{wR3} : momento de inercia de la rueda 1 y 2 al rededor de $\hat{k}_{\delta 1}$

I_{wF3} : momento de inercia de la rueda 3 y 4 al rededor de $\hat{k}_{\delta 2}$

I_{wR2} : momento de inercia de la rueda al rededor de \hat{j}_{v_i} , $i = 1, 2$

$$I_{wR1} = I_{wR2}$$

I_{wF2} : momento de inercia de la rueda al rededor de \hat{j}_{v_i} , $i = 3, 4$

$$I_{wF1} = I_{wF2}$$

I_{ax} : momento de inercia del eje al rededor de \hat{k}

I_{FR} : momento de inercia del cuadro al rededor de \hat{k}

m_{wR} : masa rueda trasera

m_{wF} : masa rueda delantera

m_{ax} : masa de eje

m_{FR} : masa del cuadro

En las ruedas traseras se aplica una torca

$$I_{\delta 1} (\ddot{\phi} - \ddot{\delta}_1)$$

En las ruedas delanteras se aplica una torca

$$I_{\delta 2} (\ddot{\phi} - \ddot{\delta}_2)$$

$$I_{\delta i} > 0 \quad \tau_1, \tau_2 \text{ generados por } \Gamma_{\delta i}, i = 1, 2$$

las variables cinemáticas del sistema están dadas por

$$\vec{q}_i = (x, y, \varphi, \delta_1, \delta_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$$

Dadas las variables cinemáticas y la lagrangiana se pueden definir las ecuaciones de movimiento se en base a la formulación de Lagrange con constrictiones, de la ecuación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i^{apl} + \Gamma_i^{cte} \quad i = 1 \dots 9 \quad (4.3)$$

Donde

Γ_i^{apl} son las fuerzas generalizadas

Γ_i^{cte} son las fuerzas de restricción

Derivando parcialmente con respecto a cada una de las \dot{q}_i las ecuaciones de restricción no holonómicas se obtienen las contribuciones de las fuerzas de restricción y sus correspondientes multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{cte} &= (\lambda_1 + \lambda_2) \text{sen} \delta_1 + (\lambda_3 + \lambda_4) \text{sen} \delta_2 \\ \Gamma_2^{cte} &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \cos \delta_1 - (\lambda_3 + \lambda_4) \cos \delta_2 \\ \Gamma_3^{cte} &= \lambda_1 B_1(\gamma_1) + \lambda_2 B_2(\gamma_1) + \lambda_3 B_3(\gamma_2) + \lambda_4 B_4(\gamma_2) \\ \Gamma_4^{cte} &= 0 \\ \Gamma_5^{cte} &= 0 \\ \Gamma_6^{cte} &= -\lambda_1 a \\ \Gamma_7^{cte} &= -\lambda_2 a \\ \Gamma_8^{cte} &= -\lambda_3 a \\ \Gamma_9^{cte} &= -\lambda_4 a \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones de Lagrange para cada q_i y tomando las últimas cuatro, se encuentran las siguientes relaciones para los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{a} [\Gamma_1 - I_{wR3} \dot{\psi}_1] & \lambda_3 &= \frac{1}{a} [\Gamma_3 - I_{wF3} \dot{\psi}_3] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{a} [\Gamma_2 - I_{wR3} \dot{\psi}_2] & \lambda_4 &= \frac{1}{a} [\Gamma_4 - I_{wF3} \dot{\psi}_4] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Derivando con respecto del tiempo las ecuaciones de restricción, despejando las $\dot{\psi}_i$ y sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores, se determinan los valores de los multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_1 = \frac{1}{a} \left\{ \Gamma_1 - I_{wR3} \left[\frac{1}{a} (\dot{x}S\delta_1 - \dot{y}C\delta_1 + \delta_1(\dot{x}C\delta_1 + \dot{y}S\delta_1) + \dot{B}_1(\gamma_1)\dot{\varphi} + B_1(\gamma_1)\dot{\varphi}) \right] \right\}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{a} \left\{ \Gamma_2 - I_{wR3} \left[\frac{1}{a} (\dot{x}S\delta_1 - \dot{y}C\delta_1 + \delta_1(\dot{x}C\delta_1 + \dot{y}S\delta_1) + \dot{B}_2(\gamma_1)\dot{\varphi} + B_2(\gamma_1)\dot{\varphi}) \right] \right\}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{a} \left\{ \Gamma_3 - I_{wF3} \left[\frac{1}{a} (\dot{x}S\delta_2 - \dot{y}C\delta_2 + \delta_2(\dot{x}C\delta_2 + \dot{y}S\delta_2) + \dot{B}_3(\gamma_2)\dot{\varphi} + B_3(\gamma_2)\dot{\varphi}) \right] \right\}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{a} \left\{ \Gamma_4 - I_{wF3} \left[\frac{1}{a} (\dot{x}S\delta_2 - \dot{y}C\delta_2 + \delta_2(\dot{x}C\delta_2 + \dot{y}S\delta_2) + \dot{B}_4(\gamma_2)\dot{\varphi} + B_4(\gamma_2)\dot{\varphi}) \right] \right\}$$

4.1.1.4 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento se derivan al sustituir los valores de los multiplicadores de Lagrange en las ecuaciones de restricción, las ecuaciones resultantes se pueden expresar de forma matricial de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & m_{53} & 0 & m_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= C^2\varphi m_0 + 2a^{-2}(I_{wR3}S^2\delta_1 + I_{wF3}S^2\delta_2) \\ m_{12} &= C\varphi S\varphi m_0 - 2a^{-2}(I_{wR3}S\delta_1C\delta_1 + I_{wF3}S\delta_2C\delta_2) \\ m_{13} &= 2L_{02}(m_{wR} - m_{wF})C\varphi - 2L_{02}a^{-2}(I_{wR3}S\delta_1S\gamma_1 - I_{wF3}S\delta_2S\gamma_2) \\ m_{22} &= m_0S^2\varphi + 2a^{-2}(I_{wR3}C^2\delta_1 + I_{wF3}C^2\delta_2) \\ m_{23} &= 2L_{02}(m_{wR} - m_{wF})S\varphi + 2L_{02}a^{-2}(I_{wR3}C\delta_1S\gamma_1 - I_{wF3}C\delta_2S\gamma_2) \\ m_{33} &= 2m_{wR}L_0^2 + 2m_{wF}L_0^2 + I_{FR} + 2I_{ax} + 2m_{ax}L_{02}^2 + I_{wR3}a^{-2}[B_1^2(\gamma_1) + B_2^2(\gamma_1)] \\ &\quad + I_{wF3}a^{-2}[B_3^2(\gamma_2) + B_4^2(\gamma_2)] + I\delta_1 + I\delta_2 \\ m_{34} &= -I\delta_1 \end{aligned}$$

$$m_{35} = -I\delta_2$$

$$m_{44} = 2I_{wR1} + I\delta_1$$

$$m_{55} = 2I_{wF1} + I\delta_2$$

$$h_1 = -2L_{02}(m_{wR} - m_{wF})\phi^2 S\phi + I_{wR3}a^{-2}(h_{61} + h_{71})S\delta_1 + I_{wF3}a^{-2}(h_{81} + h_{91})S\delta_2$$

$$h_2 = 2L_{02}(m_{wR} - m_{wF})\phi^2 C\phi - I_{wR3}a^{-2}(h_{61} + h_{71})C\delta_1 - I_{wF3}a^{-2}(h_{81} + h_{91})C\delta_2$$

$$h_3 = I_{wR3}a^{-2}[B_1(\gamma_1)h_{61} + B_2(\gamma_1)h_{71}] + I_{wF3}a^{-2}[B_3(\gamma_2)h_{81} + B_4(\gamma_2)h_{91}]$$

$$h_4 = 0$$

$$h_5 = 0$$

$$\tau_1 = a^{-1}(\Gamma_1 + \Gamma_2)S\delta_1 + a^{-1}(\Gamma_3 + \Gamma_4)S\delta_2$$

$$\tau_2 = a^{-1}(\Gamma_1 + \Gamma_2)C\delta_1 - a^{-1}(\Gamma_3 + \Gamma_4)C\delta_2$$

$$\tau_3 = a^{-1}[B_1(\gamma_1)\Gamma_1 + B_2(\gamma_1)\Gamma_2 + B_3(\gamma_2)\Gamma_3 + B_4(\gamma_2)\Gamma_4]$$

$$\tau_4 = \tau_{\delta_1} = I_{\delta_1}(\phi - \delta_1^*)$$

$$\tau_5 = \tau_{\delta_2} = I_{\delta_2}(\phi - \delta_2^*)$$

El carro está sujeto a constricciones no holonómicas que se pueden definir de la siguiente manera

$$\vec{q} = [\vec{q}_a^T, \vec{q}_b^T]^T, \quad \vec{q}_a = [x, y, \phi, \delta_1, \delta_2]^T, \quad \vec{q}_b = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]^T$$

$$\vec{p} = [\vec{p}_a^T, \vec{p}_b^T]^T$$

$$\vec{p}_a = \frac{d\vec{q}_a}{dt} = \frac{d}{dt}[x, y, \phi, \delta_1, \delta_2]^T = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2]^T$$

$$\vec{p}_b = \frac{d\vec{q}_b}{dt} = \frac{d}{dt}[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]^T = [\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3, \dot{\psi}_4]^T$$

Que al comparar con las ecuaciones 4.1, se tiene

$$\begin{pmatrix} \text{sen}\delta_1 & -\text{cos}\delta_1 & L_{02}\text{sen}\gamma_1 + L_{01}\text{cos}\gamma_1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\delta_1 & -\text{cos}\delta_1 & L_{02}\text{sen}\gamma_1 - L_{01}\text{cos}\gamma_1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\delta_2 & -\text{cos}\delta_2 & -L_{02}\text{sen}\gamma_2 + L_{01}\text{cos}\gamma_2 & 0 & 0 \\ \text{sen}\delta_2 & -\text{cos}\delta_2 & -L_{02}\text{sen}\gamma_2 - L_{01}\text{cos}\gamma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{Q}_a$$

$$\hat{Q}_b = -\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix} = -a\mathbb{I}_{4 \times 4}, \quad \hat{Q}_b^{-1} = -a^{-1}\mathbb{I}_{4 \times 4}, \quad \det Q_b = a^4$$

$$\hat{Q}_T = \hat{Q}_a\vec{p}_a + \hat{Q}_b\vec{p}_b = \vec{0} \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = T_{Aj} + T_{Cj}, \quad j = 1, 2, \dots, 9 \quad (4.7)$$

T_{Aj} : son las torcas aplicadas

$$T_{Aj} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3$$

$$T_{A4} = \Gamma_{\delta 1}$$

$$T_{A5} = \Gamma_{\delta 2}$$

$$T_{A6} = \Gamma_1$$

$$T_{A7} = \Gamma_2$$

$$T_{A8} = \Gamma_3$$

$$T_{A9} = \Gamma_4$$

T_{Cj} : son las torcas de constricciones asociadas a 4.1

$$T_C = [T_{C1}, T_{C2}, \dots, T_{C9}]^T$$

$$\hat{T}_C = Q^T \Lambda = \begin{bmatrix} \hat{Q}_a^T \\ \hat{Q}_b^T \end{bmatrix} \Lambda \quad \text{donde } \Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]^T$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden reescribir después de derivar la Lagrangiana de la ecuación 4.7 de la forma

$$\hat{M} \frac{(d^2 \hat{q})}{dt^2} + \hat{H} = \hat{D} \hat{T} + Q^T \vec{\Lambda} \quad (4.8)$$

donde

$$\hat{M} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}, \quad \hat{M} = \hat{M}^T = [m_{ij}], \quad i, j = 1, 2, 3 \dots 9$$

$$\hat{H} = [h_1, h_2, \dots, h_9]^T$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 6} \\ \mathbb{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix}$$

$$\hat{T} = [\Gamma_{\delta 1}, \Gamma_{\delta 2}, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4]^T \in \mathbb{R}^6$$

Las $[m_{ij}]$ quedan definidas como

$$m_{11} = 2m_{ax} + 2m_{wR} + 2m_{wF} + m_{FR}$$

$$m_{22} = 2m_{ax} + 2m_{wR} + 2m_{wF} + m_{FR}$$

$$m_{13} = -2L_{02} \cos \varphi (-m_{wR} + m_{wF})$$

$$m_{23} = -2L_{02} \sin \varphi (-m_{wR} + m_{wF})$$

$$m_{2i} = 0 \quad \text{para } i = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$m_{33} = 2m_{wF} L_{02}^2 + 2I_{ax} + I_{\delta 1} + I_{FR} + I_{\delta 2} + 2m_{wR} L_{02}^2 + 2m_{wR} L_{01}^2 + 2m_{ax} L_{02}^2 + 2m_{wF} L_{01}^2$$

$$m_{34} = -I_{\delta 1}$$

$$m_{35} = -I_{\delta 2}$$

$$\begin{aligned}
 m_{3i} &= 0 \text{ para } i = 6,7,8,9 \\
 m_{44} &= 2I_{WR1} + I_{\delta 1} \\
 m_{4i} &= 0 \text{ para } i = 5,6,7,8,9 \\
 m_{55} &= 2I_{WF1} + I_{\delta 2} \\
 m_{5i} &= 0 \text{ para } i = 6,7,8,9 \\
 m_{66} &= I_{WR3} \\
 m_{6i} &= 0 \text{ para } i = 7,8,9 \\
 m_{77} &= I_{WR3} \\
 m_{7i} &= 0 \text{ para } i = 8,9 \\
 m_{88} &= I_{WF3} \\
 m_{89} &= 0 \\
 m_{99} &= I_{WF3}
 \end{aligned}$$

Las h_i quedan definidas como

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 2L_{02} \text{sen}\varphi(\dot{\varphi})^2(-m_{WR} + m_{WF}) \\
 h_2 &= -2L_{02} \text{cos}\varphi(\dot{\varphi})^2(-m_{WR} + m_{WF}) \\
 h_i &= 0 \text{ para } i = 3,4,5,6,7,8,9
 \end{aligned}$$

Siguiendo la partición de la ecuación 4.8

$$\hat{M}_{11} \frac{d^2 \vec{q}_a}{dt^2} + \hat{M}_{12} \frac{d^2 \vec{q}_b}{dt^2} + \hat{H}_1 = \hat{D}_1 \hat{T} + Q_a^T \Lambda \quad (4.9)$$

$$\hat{M}_{21} \frac{d^2 \vec{q}_a}{dt^2} + \hat{M}_{22} \frac{d^2 \vec{q}_b}{dt^2} + \hat{H}_2 = \hat{D}_2 \hat{T} + Q_b^T \Lambda \quad (4.10)$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Así mismo

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_{3 \times 6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M}_{11} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, \quad \hat{M}_{12} \in \mathbb{R}^{5 \times 4}, \quad \hat{M}_{21} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}, \quad \hat{M}_{22} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\hat{H}_1 \in \mathbb{R}^5, \quad \hat{H}_2 \in \mathbb{R}^4$$

$$\hat{D}_1 \in \mathbb{R}^{5 \times 6}, \quad \hat{D}_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$$

Diferenciando la ecuación 4.6 con respecto del tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{dQ_a}{dt} p_a + Q_a \frac{dp_a}{dt} + Q_b \frac{dp_b}{dt} + \frac{dQ_b}{dt} p_b \\ & Q_b \frac{dp_b}{dt} = - \left(\frac{dQ_a}{dt} p_a + Q_a \frac{dp_a}{dt} + \frac{dQ_b}{dt} p_b \right) \\ & \frac{dp_b}{dt} = -Q_b^{-1} \left(\frac{dQ_a}{dt} p_a + Q_a \frac{dp_a}{dt} + \frac{dQ_b}{dt} p_b \right) \\ & \frac{dp_b}{dt} = -Q_b^{-1} Q_a \frac{d^2 q_a}{dt^2} - Q_b^{-1} \left(\frac{dQ_a}{dt} p_a + \frac{dQ_b}{dt} p_b \right) \\ & \frac{dp_b}{dt} = A_f \frac{d^2 q_a}{dt^2} + B_f \end{aligned} \quad (4.12)$$

Despejando de la ecuación 4.8 a Λ , se tiene

$$\Lambda = (Q^T)^{-1} \left(M \frac{d^2 q}{dt^2} + H - DT \right)$$

Escogiendo la partición correspondiente a la ecuación 4.10, se tiene que

$$M_{21} \frac{d^2 q_a}{dt^2} + M_{22} \frac{d^2 q_b}{dt^2} + H_2 = D_2 T + Q_b^T \Lambda$$

Despejando a Λ

$$\Lambda = (Q_b^T)^{-1} \left[M_{21} \frac{d^2 q_a}{dt^2} + M_{22} \frac{d^2 q_b}{dt^2} + H_2 - D_2 T \right] \quad (4.13)$$

Y sabiendo que $\frac{d^2 q_b}{dt^2} = \frac{dp_b}{dt}$ cuyo valor esta dado por la ecuación 4.12

$$\Lambda = (Q_b^T)^{-1} \left[M_{21} \frac{d^2 q_a}{dt^2} + M_{22} \left(A_f \frac{d^2 q_a}{dt^2} + B_f \right) + H_2 - D_2 T \right] \quad (4.14)$$

Sustituyendo 4.14 en 4.10 se tiene

$$\mathbf{M}_s \frac{d^2 q_a}{dt^2} + \mathbf{H}_s = \mathbf{D}_s T \quad (4.15)$$

Donde:

$$M_s \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, H_s \in \mathbb{R}^5, D_s \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$$

$$\det M_s > 0$$

$$M_s = M_{11} - Q_a^T (Q_b^T)^{-1} [M_{21} + M_{22} A_f] + M_{12} A_f$$

$$H_s = H_1 + B_f (M_{12} - Q_a^T (Q_b^T)^{-1} M_{22}) - Q_a^T (Q_b^T)^{-1} H_2$$

$$D_s = D_1 - Q_a^T (Q_b^T)^{-1} D_2$$

4.1.1.5 CONTROL PARA EL MOVIMIENTO EN EL PLNO

La ecuación 4.15 representa el modelo dinámico del objeto en estudio, a partir de este modelo se harán diferentes arreglos para el control, utilizando primero 6 torques, posteriormente el mismo análisis pero con 5 y 4 torques.

Control empleando 6 torcas $\Gamma_{\delta 1}, \Gamma_{\delta 2}, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$

De la ecuación 4.15 se tiene que

$$T = D_s^{-1} (M_s \mathcal{U} + H_s)$$

$$\text{Si } E_s = D_s D_s^T \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, E_s^{-1} = (D_s D_s^T)^{-1}, D_s^{-1} = D_s^T (E_s)^{-1}$$

$$T = D_s^T (E_s)^{-1} (M_s \mathcal{U} + H_s) \quad (4.16)$$

$\vec{u} = [u_1, \dots, u_5]^T \in \mathbb{R}^5$ es un vector auxiliar que se usara par el control

$$D_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_{3 \times 6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} S\delta_1 & S\delta_1 & S\delta_2 & S\delta_2 \\ -C\delta_1 & -C\delta_1 & -C\delta_2 & -C\delta_2 \\ L_{02}S\gamma_1 + L_{01}C\gamma_1 & L_{02}S\gamma_1 - L_{01}C\gamma_1 & -L_{02}S\gamma_2 + L_{01}C\gamma_2 & -L_{02}S\gamma_2 - L_{01}C\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cdot (-a\mathbb{I}_{4 \times 4})^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Donde

$$\begin{aligned} S\delta_1 &= \text{sen}\delta_1 \\ S\delta_2 &= \text{sen}\delta_2 \\ C\delta_1 &= \text{cos}\delta_1 \\ C\delta_2 &= \text{cos}\delta_2 \\ C\gamma_1 &= \text{cos}\gamma_1 \\ S\gamma_1 &= \text{sen}\gamma_1 \end{aligned}$$

Calculando la transpuesta de la ecuación 4.17 y considerando que $E_s = D_s D_s^T$ se calcula su determinante

$$\det E_s = \frac{8L_{01}^2}{a^6} \text{sen}^2(\delta_1 - \delta_2) (\text{cos}^2(\delta_2 - \varphi) + \text{cos}^2(\delta_1 - \varphi))$$

$$\text{rango}[E_s] = 5$$

Para el primer modo el interés es encontrar un ε_1 que es un conjunto cuyo dominio se define como $\varepsilon_1 = \{\vec{q} \in \mathbb{R}^9 \ \& \ \det(E_s) \neq 0, \ \det(M_s) \neq 0\}$.

Sustituyendo 4.16 en 4.15

$$M_s \left(\frac{d^2 q_a}{dt^2} - u \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q_a}{dt^2} = u \quad \vec{q} \in \varepsilon_1$$

Que se puede reescribir como

$$\frac{d\mathcal{L}_i}{dt} = \hat{A}\mathcal{L}_i + \hat{B}u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \vec{q} \in \varepsilon_1$$

$$\vec{q}_a = [x, y, \varphi, \delta_1, \delta_2]^T$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_3 = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_4 = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \dot{\delta}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_5 = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \dot{\delta}_2 \end{pmatrix},$$

Se supone ahora un vector $Z_{oi} \in \mathbb{R}^2$ con $i = 1, \dots, 5$ en cierto tiempo final $t_f > 0$, se desea que todos los Z_{oi} sean

$$\vec{\mathcal{L}}_i(t_f) = Z_{fi}, \quad i = 1, \dots, 5$$

$$u_i(t) = \left(e^{(t_f-t)\hat{A}} \hat{B} \right)^T C^{-1} (Z_{fi} - e^{t_f \hat{A}} Z_{oi})$$

$$i = 1, \dots, 5, \ t \in [0, t_f]$$

$$C = \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)\hat{A}B} \left(e^{(t_f-t)\hat{A}B} \right)^T dt$$

Suponiendo que $\vec{q}(t)$, $t \in [0, t_f]$, es generado por $\vec{u}(t)$, también con $t \in [0, t_f]$ cumple la condición de que $\vec{q}(t) \in \varepsilon_1 \forall t \in [0, t_f]$

4.2 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO DEL SISTEMA DE SEIS RUEDAS EN EL PLANO

Para hacer el análisis cinemático del movimiento en el plano del sistema con seis ruedas, se tomará como base el caso general anterior y se harán los cambios pertinentes en cada formulación para particularizar el sistema de seis ruedas, este sistema tiene menos grados de libertad y las ecuaciones resultantes por lo tanto son más simples comparadas con las del caso general. El sistema se ilustra en la figura 4.5 y consta de seis ruedas idénticas, 3 por lado, cada banco de ruedas gira a su respectiva velocidad angular ψ_1, ψ_2 . Las ruedas de cada banco están fijadas a un soporte en forma de estrella y mantienen una relación de separación entre ejes idéntica. Cada banco de ruedas se une al bloque por medio de una articulación rotativa.

Se requieren dos Torcas τ_1, τ_2 para manejar el carro. Cuando las velocidades angulares ψ_1, ψ_2 no sean de la misma magnitud, el carro dará vuelta en el sentido del banco de menor velocidad.

Para el análisis cinemático y dinámico se toman las siguientes consideraciones:

- a) Los motores y los mecanismos que se requieren para darle movimiento al sistema se considera que son parte de los cuerpos rígidos involucrados.
- b) El carro se desplazará en el plano XY del sistema de referencia inercial con origen en "0" y coordenadas X,Y
- c) Se supondrá que todas las ruedas en contacto con el piso ruedan sin deslizar.
- d) Se considera a cada rueda como un cuerpo rígido lo que implica que el contacto rueda-piso es un punto.
- e) La cinemática y la dinámica del vehículo dependerá en mucho de la interacción rueda-piso.
- f) Se usará el método de Lagrange para el modelado.
- g) El sistema constará de 9 cuerpos rígidos, 6 ruedas, 1 bloque y 2 bancos en forma de estrella.

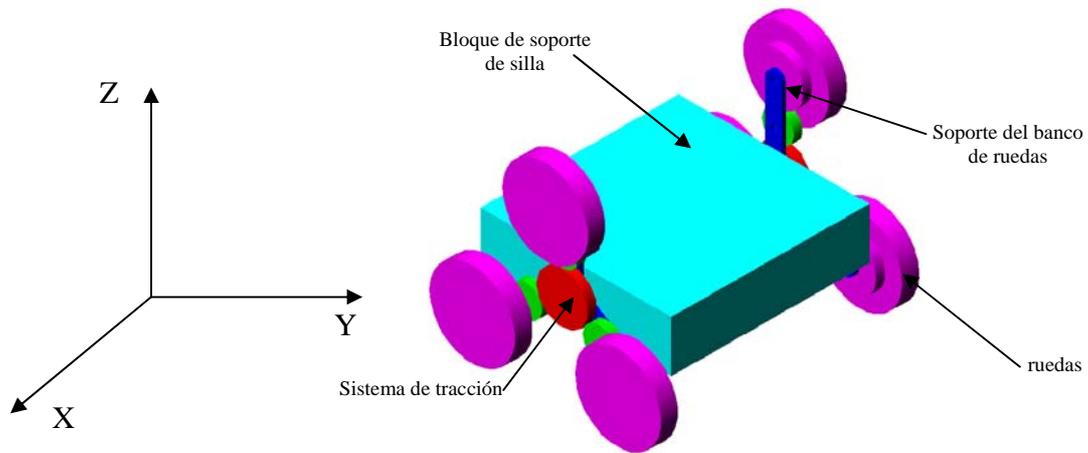


Figura 4.5 Representación esquemática del mecanismo para elevación de la silla de ruedas trepadora.

4.2.1 DETERMINACIÓN DE LAS VELOCIDADES

En la figura 4.6 se aprecia el esquema general del sistema de seis ruedas con sus vectores directores y las respectivas distancias entre sus elementos.

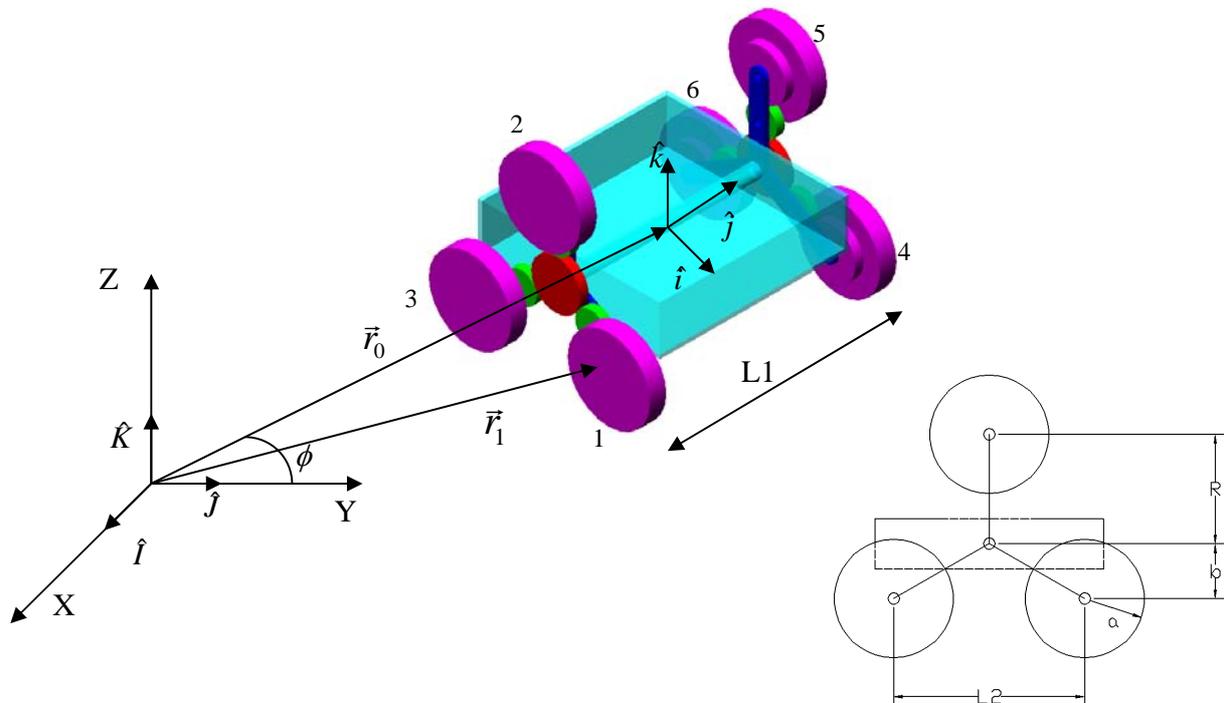


Figura 4.6 Representación esquemática de los sistemas de referencia y sus vectores directores.

Los vectores de posición de cada una de las ruedas estará dado por:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 - L_{01}\hat{j} - b\hat{k} + L_{02}\hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_0 - L_{01}\hat{j} + R\hat{k}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_0 - L_{01}\hat{j} - b\hat{k} - L_{02}\hat{i}$$

$$\vec{r}_4 = \vec{r}_0 + L_{01}\hat{j} - b\hat{k} + L_{02}\hat{i}$$

$$\vec{r}_5 = \vec{r}_0 + L_{01}\hat{j} + R\hat{k}$$

$$\vec{r}_6 = \vec{r}_0 + L_{01}\hat{j} - b\hat{k} - L_{02}\hat{i}$$

Ahora derivando con respecto del tiempo las \hat{r}_i se obtienen las $\dot{\vec{r}}_i$ que son las velocidades de cada una de las ruedas \vec{v}_i

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{X}\hat{i} + \dot{Y}\hat{j} = \dot{\vec{r}}_0$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + L_{01}\dot{\phi}\hat{i} + L_{02}\dot{\phi}\hat{j}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + L_{01}\dot{\phi}\hat{i}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_0 + L_{01}\dot{\phi}\hat{i} - L_{02}\dot{\phi}\hat{j}$$

$$\vec{v}_4 = \vec{v}_0 - L_{01}\dot{\phi}\hat{i} + L_{02}\dot{\phi}\hat{j}$$

$$\vec{v}_5 = \vec{v}_0 - L_{01}\dot{\phi}\hat{i}$$

$$\vec{v}_6 = \vec{v}_0 - L_{01}\dot{\phi}\hat{i} - L_{02}\dot{\phi}\hat{j}$$

4.2.2 RESTRICCIONES NO HOLONÓMICAS CASO PARTICULAR

Son cuatro las ruedas que tendrán contacto con el piso, las ruedas 1,3,4,6; por lo tanto se tienen las siguientes ecuaciones de restricción:

$$\vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times a\hat{k} = 0$$

$$\vec{v}_3 + \vec{\omega}_3 \times a\hat{k} = 0$$

$$\vec{v}_4 + \vec{\omega}_4 \times a\hat{k} = 0$$

$$\vec{v}_6 + \vec{\omega}_6 \times a\hat{k} = 0$$

y las velocidades angulares correspondientes serán:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_3 = \hat{I}(\dot{\psi}_1 \cos \varphi) + \hat{J}(\dot{\psi}_1 \sin \varphi) + \hat{K}(\dot{\varphi})$$

$$\vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_6 = \hat{I}(\dot{\psi}_2 \cos \varphi) + \hat{J}(\dot{\psi}_2 \sin \varphi) + \hat{K}(\dot{\varphi})$$

Con lo que se puede obtener el producto vectorial $\hat{\omega}_i \times a\hat{k}$

$$\vec{\omega}_{1,3} \times a\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \dot{\psi}_1 \cos \varphi & \dot{\psi}_1 \sin \varphi & \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = \hat{I}a(-\dot{\psi}_1 \sin \varphi) + \hat{J}(\dot{\psi}_1 \cos \varphi)a$$

$$\vec{\omega}_{4,6} \times a\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \dot{\psi}_2 \cos \varphi & \dot{\psi}_2 \sin \varphi & \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = \hat{I}a(-\dot{\psi}_2 \sin \varphi) + \hat{J}(\dot{\psi}_2 \cos \varphi)a$$

Finalmente las ecuaciones de restricción no holonómicas son:

Para la rueda 1

$$\dot{X} + L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi - L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\psi}_1 \sin \varphi = 0$$

$$\dot{Y} + L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi + L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\psi}_1 \cos \varphi = 0$$

Para la rueda 3

$$\dot{X} + L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi + L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\psi}_1 \sin \varphi = 0$$

$$\dot{Y} + L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi - L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\psi}_1 \cos \varphi = 0$$

Para la rueda 4

$$\dot{X} - L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi - L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\psi}_2 \sin \varphi = 0$$

$$\dot{Y} - L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi + L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\psi}_2 \cos \varphi = 0$$

Para la rueda 6

$$\dot{X} - L_{01}\dot{\varphi} \cos \varphi + L_{02}\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\psi}_2 \sin \varphi = 0$$

$$\dot{Y} - L_{01}\dot{\varphi} \sin \varphi - L_{02}\dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\psi}_2 \cos \varphi = 0$$

4.2.3 DESCRIPCIÓN DE LA DINÁMICA CASO PARTICULAR

De manera análoga al caso general la dinámica estará dada por la contribución de la lagrangiana que está definida en términos de energía

$$\mathcal{L} = T - V$$

La lagrangiana para el sistema de seis ruedas queda definida como:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2}I_{\omega_1}(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) + 2m_{\omega}(v_0^2 + 2v_0L_0\dot{\varphi} + L_0^2\dot{\varphi}^2) + m_{\omega}(v_0^2 + L_{01}^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}(m_{FR}v_0^2 + I_{FR}\dot{\varphi}^2) + m_{sp}(v_0^2 + L_{01}^2\dot{\varphi}^2) - 2m_{\omega}gh$$

donde:

I_{ω_1} : Momento de inercia de la rueda alrededor de \hat{i} .

I_{FR} : Momento de inercia del bloque alrededor de \hat{k} .

m_{ω} : Masa de la rueda

m_{FR} : Masa del bloque

m_{sp} : Masa del soporte

$\dot{\psi}_1$: Velocidad angular de las ruedas del banco derecho

$\dot{\psi}_2$: Velocidad angular de las ruedas del banco izquierdo

$\dot{\varphi}$: Velocidad angular de todo el sistema alrededor de \hat{k}

v_0 : Velocidad lineal de todo el sistema

$$v_0 = \dot{X} \cos \varphi + \dot{Y} \sin \varphi$$

$$L_0^2 = L_{01}^2 + L_{02}^2$$

Las ecuaciones de movimiento estarán dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \ell}{\partial q_i} = \Gamma_i^{\text{aplicada}} + \Gamma_i^{\text{cte}} \quad i = 1 \dots 5$$

$\Gamma_i^{\text{aplicada}}$: son las fuerzas generalizadas

$\Gamma_i^{\text{aplicada}} = 0$ para $i = 1, 2, 3$ es decir x, y, φ

$\Gamma_{i+3}^{\text{aplicada}}$ es la torca aplicada en las ruedas para los bancos uno y dos $i = 1, 2 \therefore$

$\Gamma_{i+3}^{\text{aplicada}} = \Gamma_i^{\text{aplicada}}$ (porque estas torcas son las que hacen que \dot{x} y \dot{y} cambian)

$\Gamma_i^{\text{cte}}, i = 1 \dots 5 =$ Fuerzas de restricción actuando sobre el carro por las restricciones no holonómicas.

Las fuerzas de restricción actuando sobre el carro por las restricciones no holonómicas quedan definidas en términos de los multiplicadores de Lagrange como:

$$\Gamma_1^{\text{cte}} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \sin \varphi$$

$$\Gamma_2^{\text{cte}} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cos \varphi$$

$$\Gamma_3^{cte} = \lambda_1 B_1(\varphi) + \lambda_2 B_2(\varphi) + \lambda_3 B_3(\varphi) + \lambda_4 B_4(\varphi)$$

$$\Gamma_4^{cte} = -(\lambda_1 + \lambda_2)a$$

$$\Gamma_5^{cte} = -(\lambda_3 + \lambda_4)a$$

4.3 ANÁLISIS CINEMÁTICO

Tanto el análisis cinemático, como el modelado, tienen por objeto caracterizar el sistema para poder manipular sus parámetros y así conseguir su optimización. Los factores predominantes para el diseño son la estabilidad y el aspecto económico como se mencionó al principio de este capítulo; el análisis cinemático se complementa y divide en dos partes, una que se enfoca al movimiento del vehículo en el plano y la otra que tiene que ver propiamente con el ascenso y descenso de las escaleras. Las variables que interviene en el análisis cinemático del sistema en el ascenso y descenso de escaleras son las magnitudes representadas en la figura 4.8; conforme el sistema evoluciona en el movimiento (ver figura 4.7) existe una relación entre las variables propias del mecanismo y la escalera, los aspectos relacionados a las características físicas de los elementos en contacto se tomarán en cuenta en la simulación.

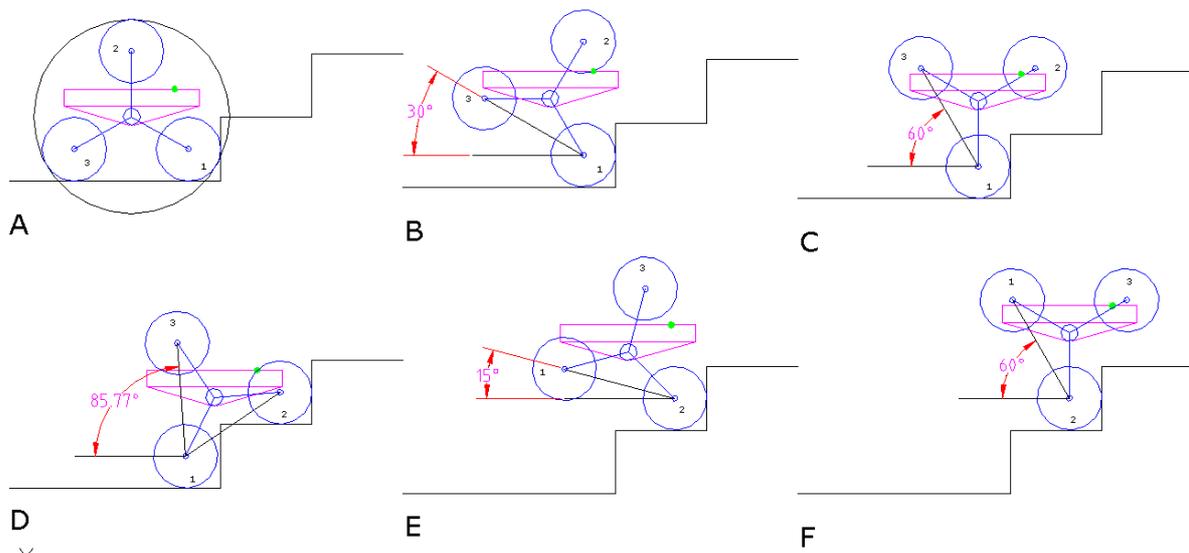


Figura 4.7 Secuencia de movimientos en el ascenso de escaleras con el sistema de tres ruedas.

Conforme el sistema avanza escalón tras escalón, se ven relacionadas determinadas variables que se describen en las figuras 4.8 y 4.9. El resultado de este estudio permitirá encontrar los parámetros que se acoplen a la mayoría de las dimensiones de las escaleras que se podrían encontrar en la vida real, en ocasiones se tienen escaleras con un peralte muy pronunciado y en otras todo lo contrario, los escalones no siempre son uniformes y las

formas de los perfiles son variables, también los materiales y las dimensiones generales de las escaleras cambian, poseen o omiten un pasamanos; otro factor a considerar son los descansos que comúnmente son muy estrechos y resulta imposible acomodar una silla de ruedas de dimensiones convencionales.

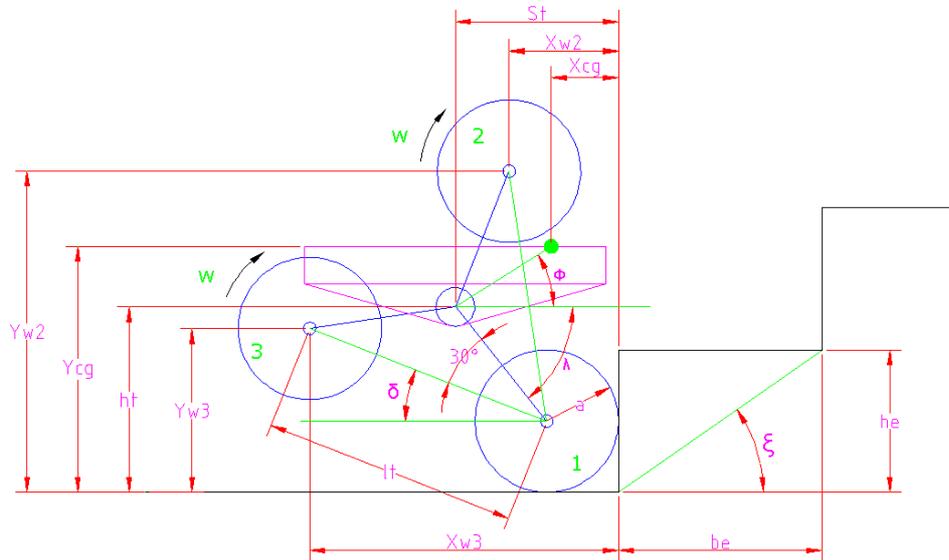


Figura 4.8 Representación de las variables del sistema de tres ruedas en el inicio del ascenso de la escalera.

De la figura 4.8 tenemos que

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{Yw3 - a}{Xw3 - a}\right)$$

que representa el ángulo de elevación del sistema. Éste aumentará y se desea sea uniformemente hasta que la segunda rueda haga contacto con el primer escalón. Durante toda la evolución de δ el ángulo Φ permanecerá constante por la acción del control giroscópico, el ángulo λ es complementario de δ y su valor es $\delta + 30^\circ$. Si la altura del escalón he es tal que la segunda rueda no alcanza a hacer contacto con el plano horizontal del primer escalón, se tendría un sistema muy inestable para pasar a la siguiente etapa, por lo que si se diera este caso, no sería operable subir con este sistema.

La figura 4.9 presenta un caso en el que las condiciones son favorables y el sistema puede hacer el movimiento secuencial de sus articulaciones para realizar el ascenso de la escalera. En este caso particular, el ancho be del escalón hace que la *rueda 1* se separe del escalón y la *rueda 2* se amolda al perfil del primer escalón, este ejemplo es parte de un caso típico que se daría en condiciones reales.

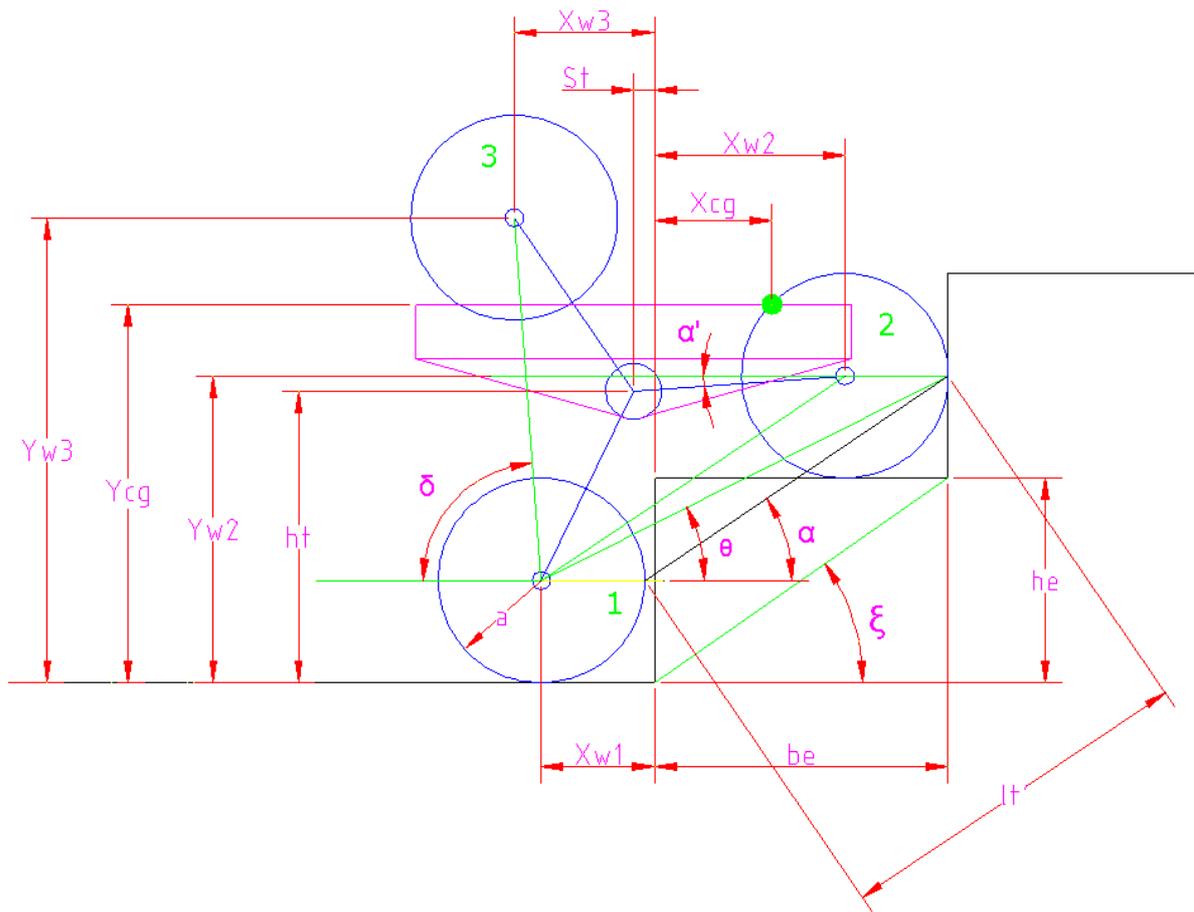


Figura 4.9 Representación de las variables del sistema de tres ruedas en el instante en que la segunda rueda toco el primer escalón.

En esta etapa del movimiento de ascenso es importante definir la relación que guardan las variables del mecanismo con respecto a las de la escalera, por lo que se obtuvieron ecuaciones que relacionan al ángulo ε con el ángulo δ o sus complementarios como son el ancho del escalón be , la altura he las distancias entre los ejes lt o las distancias a los ejes de las ruedas Xw y Yw .

De la figura 4.6 se tiene que el ángulo de avance δ está dado por

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{Yw3 - a}{Xw3 - Xw1} \right)$$

Así mismo el ángulo α está dado por

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{Yw2 - a}{be + (Xw1 - a)} \right)$$

El ángulo α también guarda relación con otras variables

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{Yw2 - a}{lt'}$$

En este caso lt' es una variación de lt ; cuando lt' y lt son iguales, esto significa que ambas ruedas 1 y 2 mantienen contacto en dos puntos con la escalera, ésta condición en la vida real sería muy difícil de conseguir. El ángulo α' es complementario de α y su valor es $\alpha - 30^\circ$.

De lo anterior se tiene que

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{Yw2 - ht}{r}$$

Cuando $Yw2 = ht$, $\alpha' = 0$, mientras más alto sea el valor de α' , menor será el torque requerido para pasar a la siguiente etapa del movimiento.

De la figura 4.9 también se obtiene las siguientes relaciones

$$\frac{\tan \theta}{\tan \alpha} = \frac{be + (Xw1 - a)}{Xw1 + be}$$

Así mismo

$$he = Yw2 - a$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{he}{be + (Xw1 - a)} \right)$$

4.4 REFERENCIAS

- 4.1 Cunjun Huang, Pradip Sheth, Derivation of the 2-D model of walker dynamics with 3-D forces and moments measured at the handles
- 4.2 Murray Lawn, Takashi Takeda; Desing of a robotic-hybrid wheelchair for operation in barrier present environments; IEEE Engineering in medicin and biology society, vol.20, No. 5, 1998
- 4.3 Glend Howard Jorgensen, Joseph L. Garbini; Stabilizing wheeled passenger carrier capable of traversing stairs, United States Patent, No.6, 003, 624
- 4.4 Murray J. Lawn, Toshihide Sakaid; Development and practical application of a stairclimbing wheelchair in Nagasaki.
- 4.5 Dan Ding, Rory A. Cooper; Analysis of driving backward in an electric-powered wheelchair; IEEE Transactions on control systems technologyc, vol. 12, No.6, Nov 2004

CAPÍTULO 5

Evaluación de resultados

Desde al planteamiento del problema hasta la interpretación de los resultados de este estudio, se han abordado diferentes temas relacionados al análisis del cuerpo rígido y su comportamiento cinemático y dinámico gobernado por leyes de control, ello ha permitido cuantificar que tan estable o inestable es un sistema mecánico durante su evolución en un medio físico definido, el objetivo esencial de este análisis es entender y manipular las variables cinemáticas y así proponer en base a los medios disponibles un modelo confiable que pueda ser considerado para su implementación en una silla de ruedas trepadora de escaleras rectas, este capítulo resume de manera específica los hallazgos resultantes de este estudio y se dan las interpretaciones correspondientes de los resultados obtenidos.

5.1 SIMULACIÓN DEL MODELO 3D DEL SISTEMA DE SEIS RUEDAS

Si se retoma al análisis de la figura 3.15 del capítulo 3, se encuentra que la *silla de ruedas convencional* es totalmente inoperable para trepar o descender escaleras. La figura 5.1 representa la secuencia de una simulación en el paquete *Visual Nastran*TM del modelo del *sistema de seis ruedas* en el descenso de una escalera, en este caso, aunque el sistema carece de algún algoritmo de control, se observa que la misma arquitectura del sistema le permite adaptarse al contorno de los escalones y así evitar una volcadura severa como en el caso de la silla de ruedas convencional, esta es una de las consideraciones fundamentales por las que se escogió trabajar con este modelo.

En la secuencia se observa que las ruedas frontales se acercan al borde de la escalera, bajan y hacen contacto con el primer escalón. En éste instante el sistema de control tendría que frenar el par de ruedas que descendieron y transmitir la torca al centro del triángulo para que inicie la rotación del bloque de ruedas, sin embargo en este caso se omitió el control para apreciar el descenso sin el mismo; se observa que el sistema se adapta al perfil de la escalera y aunque el descenso es no uniforme, se mantiene estable y llega al final del nivel más bajo sin volcarse.

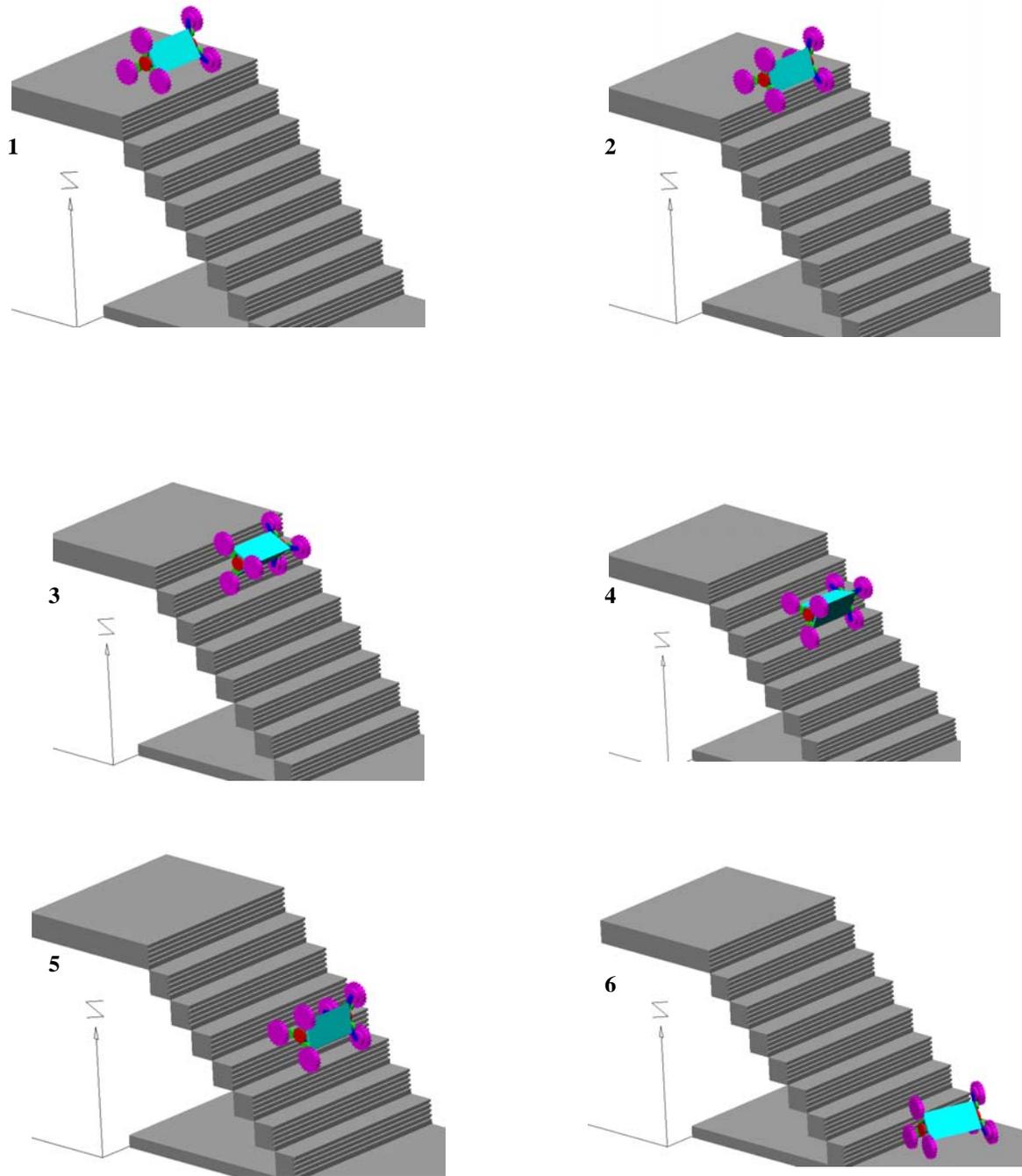
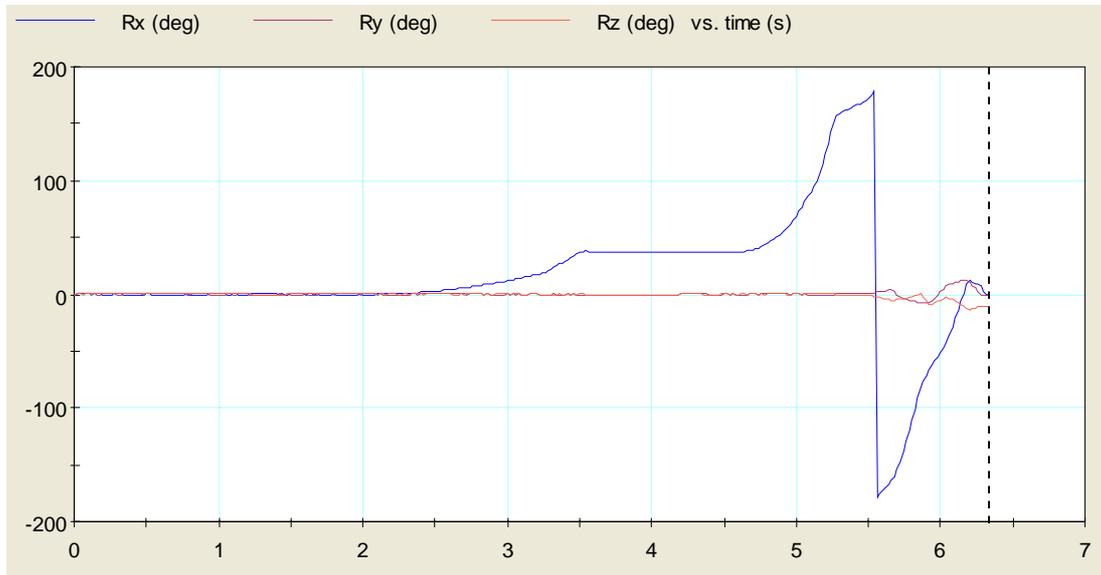


Figura 5.1 Secuencia de la simulación del sistema de seis ruedas en Visual Nastran descendiendo por una escalera.

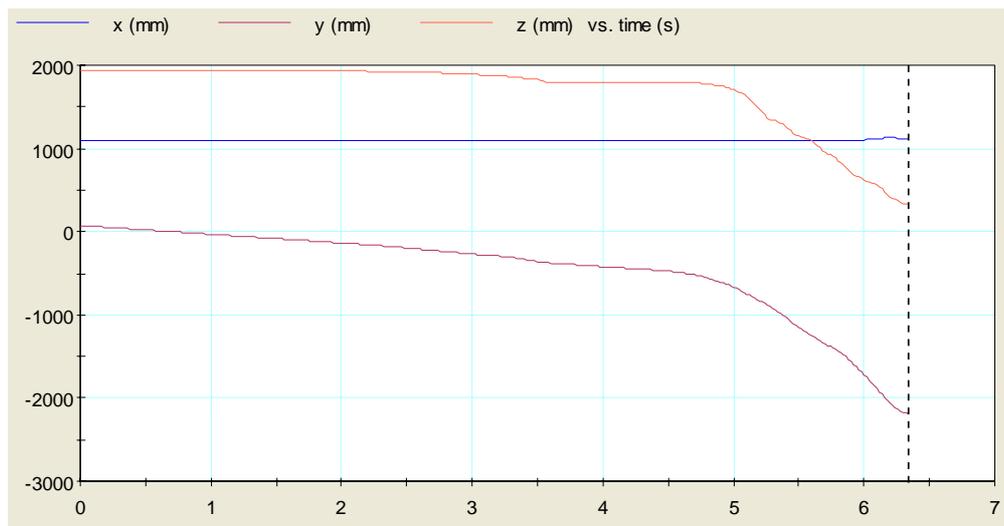
5. Evaluación de resultados

En la grafica 5.1 se observa que el sistema se mantiene casi constante en las rotaciones con respecto a Y y Z , la rotación con respecto al eje X es evidente, por que representa el giro del soporte triangular conforme descende el mecanismo, idealmente ésta curva debería tener un cambio continuo y homogéneo.



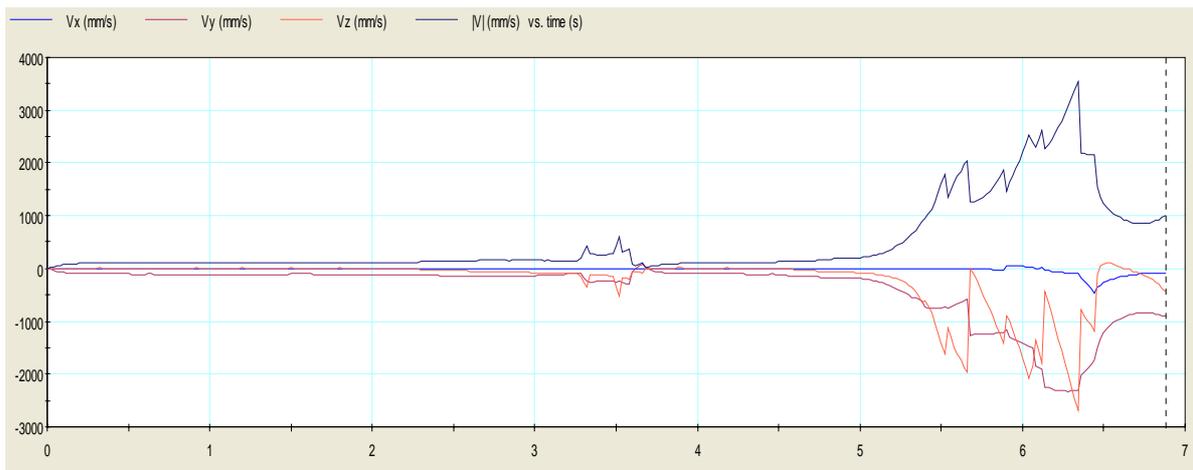
Gráfica 5.1 Orientación del centro de gravedad del sistema de seis ruedas al descender por una escalera.

La posición del vehículo (ver gráfica 5.2), conforme avanza en el descenso, es limpia. Los desplazamientos en el eje X casi son nulos, lo cual se desea ampliamente y los desplazamientos en los otros dos ejes son muy uniformes, lo que se interpreta como un descenso aceptable.



Gráfica 5.2 Posición del centro de gravedad del sistema de seis ruedas al descender por una escalera.

La grafica 5.3 describe variaciones muy abruptas como la grafica 3.3 del capítulo 3 pero en este caso se atribuye más a la ausencia del control, aun así el sistema se mantiene constante hasta los 3 segundos del recorrido, en este momento el sistema se encuentra en el frame número 4 de la figura 5.1, después una pequeña alteración y los cambios más alterados casi al final del recorrido en los últimos dos escalones, que es una zona ya de menor riesgo, curiosamente la velocidad con respecto al eje X se mantiene casi constante en toda la trayectoria, lo que indica que los desplazamientos a lo largo de éste eje son mínimos, esto resulta muy favorable ya que indica que el sistema no se saldrá del carril confinado por la escalera.



Gráfica 5.3 Velocidad del centro de gravedad del sistema de seis ruedas al descender por una escalera.

5.2 IMPLICACIONES DEL TAMAÑO DE LAS RUEDAS Y LA SEPARACIÓN ENTRE EJES SOBRE LA ESTABILIDAD Y LA ENERGÍA CONSUMIDA

Se realizaron diferentes simulaciones con cinco combinaciones diferentes de diámetro de ruedas (a) y diámetro entre ejes (D) sobre una escalera normalizada según lo descrito en el punto 3.3.3.1 del capítulo 3, la gráfica de la figura 5.2 es la representación de las trayectorias descritas por el centro de la estrella formada por los ejes que unen a las ruedas; se analizaron cinco combinaciones diferentes entre diámetro de rueda y diámetro entre ejes del sistema de seis ruedas, las dimensiones están dadas en milímetros y a cada combinación le corresponde un color diferente, el eje de las x representa el avance lineal sobre la escalera y en de las y la altura ganada en cada etapa.

Los diámetros de las ruedas utilizados en el experimento son medidas comerciales de llantas para este tipo de aplicaciones de sillas de ruedas, la separación entre ejes es un parámetro de diseño que se desea optimizar de acuerdo al rango de dimensiones típicas de escaleras y las dimensiones de las ruedas seleccionadas, la interpretación de los resultados ofrece un panorama sobre las implicaciones en términos de la energía consumida por el sistema y la estabilidad en la dinámica del ascenso o descenso de la escalera. Evidentemente al modificar las dimensiones de los escalones se obtendrán gráficas diferentes, pero la escalera normalizada ofrece un solvente punto de referencia para el análisis.

a x D

Figura 5.2 Trayectoria del centro del sistema de seis ruedas con cinco combinaciones diferentes entre diámetro de rueda y diámetro entre ejes de ruedas.

La figura 5.3 representa la combinación de la rueda mediana 210mm con el círculo de ejes mayor 390mm, en términos de estabilidad y control se aprecia que la recta que representa el peralte de la escalera toca cada una de las crestas en los puntos 1, 2 y 3 de los arcos formados por el centro del círculo de ejes en la transición escalón a escalón, el hecho de que se de esta concurrencia determina la factibilidad de conseguir un control más estable y homogéneo desde el arranque hasta el fin con esta combinación, claro está considerando que los escalones sean uniformes; uno de los factores desfavorables de esta combinación es la pérdida de energía potencial, cada vez que la rueda en elevación desciende y toca el siguiente escalón en los puntos a, b y c, se aprecia una pérdida de altura, esto se vera reflejado en un consumo mayor de energía.

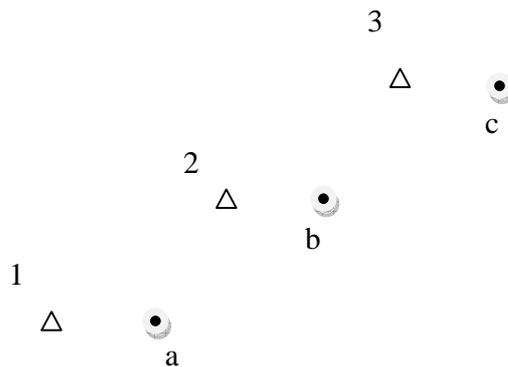


Figura 5.3 Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda-círculo de ejes 210x390.

La figura 5.4 representa la combinación de la rueda mediana 210mm con el círculo de ejes mediano 340mm, en este caso se aprecia que la recta que representa el peralte de la escalera toca sólo dos puntos 1, 2 de los tres arcos formados por el centro del círculo de ejes en la transición escalón a escalón, con esta combinación se tendrían que considerar ciertos ajustes de parámetros para que una vez superando el primer escalón, el evento del ascenso a los siguientes escalones se considere constante con escalones de dimensiones uniformes; en este caso se aprecia que en términos de energía, esta combinación resulta ser más conservadora, ya que los puntos a, b y c, descienden menos que en el caso anterior, lo que se traduce en un ahorro de energía.

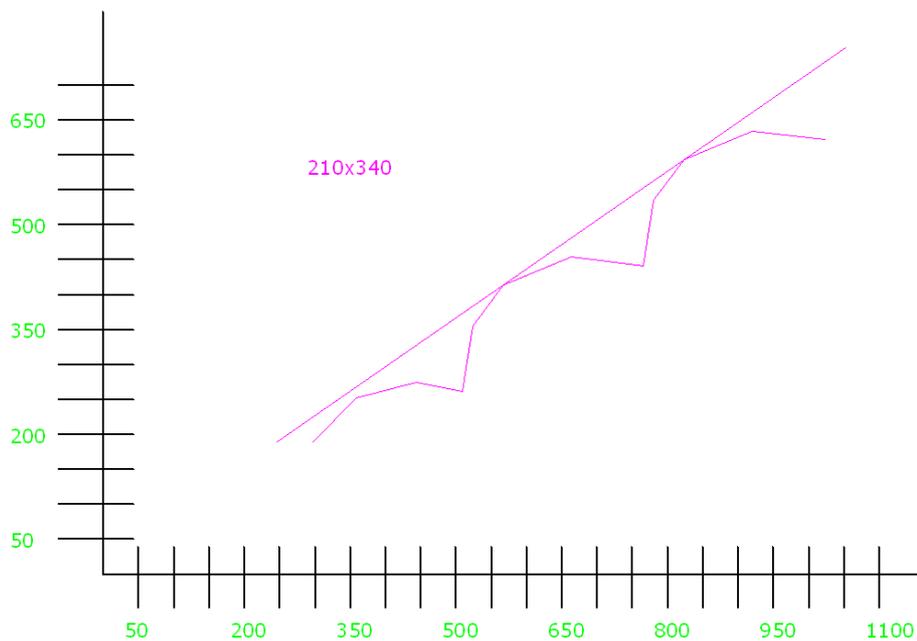


Figura 5.4 Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda-círculo de ejes 210x340.

En la figura 5.5 se esquematiza la combinación de la rueda mediana 210mm con el círculo de ejes menor 300mm, en este caso se aprecia que la recta que representa el peralte de la escalera toca al igual que el caso anterior sólo dos puntos 1, 2 de los tres arcos formados por el centro del círculo de ejes en la transición escalón a escalón, en esta combinación la primera curva se aleja más de la tangente, esto indica que la transición al primer escalón es muy suave y que requiere menor energía que las anteriores, pero la consecuencia es en los siguientes escalones, las curvas sucesivas se aprecian más pronunciadas y si los escalones se conservan de dimensiones constantes, el efecto será el mismo hasta llegar a la transición superior; en términos de energía se observa que las curvas no caen al llegar al final de su carrera, pero cada ascenso describe una curva muy cuadrada que le exigirá a los motores un gran par para elevarse casi verticalmente a diferencia de las curvas anteriores.

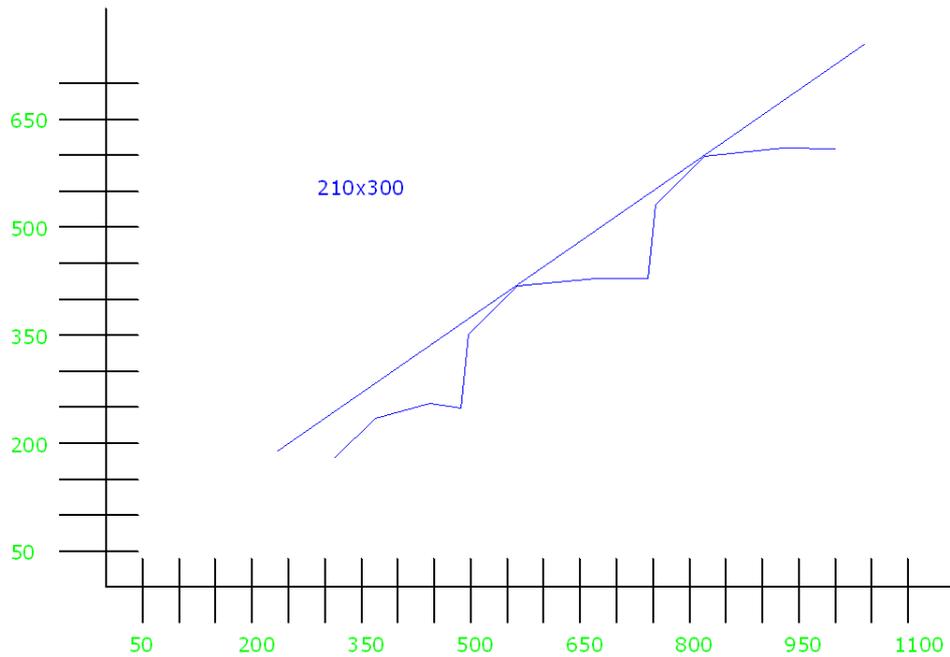


Figura 5.5 Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda-círculo de ejes 210x300.

En la figura 5.6 se esquematiza la combinación de la rueda menor 150mm con el círculo de ejes mediano 340mm, en este caso se aprecia que la recta que representa el peralte de la escalera toca al igual que el caso de la figura 5.4 sólo dos puntos 1, 2 de hecho las curvas son muy similares, se observa que la descripción de la trayectoria es más homogénea y apegada a una forma circunferencial, en esta combinación la primera curva se aleja ligeramente de la tangente, y posteriormente el avance es homogéneo, los puntos de contacto están bien definidos, esto indica que la transición en cada escalón es equilibrada, un dato adicional es que los puntos de esta curva (1,2,a,b,c) coinciden casi idénticamente con los de la figura 5.5.

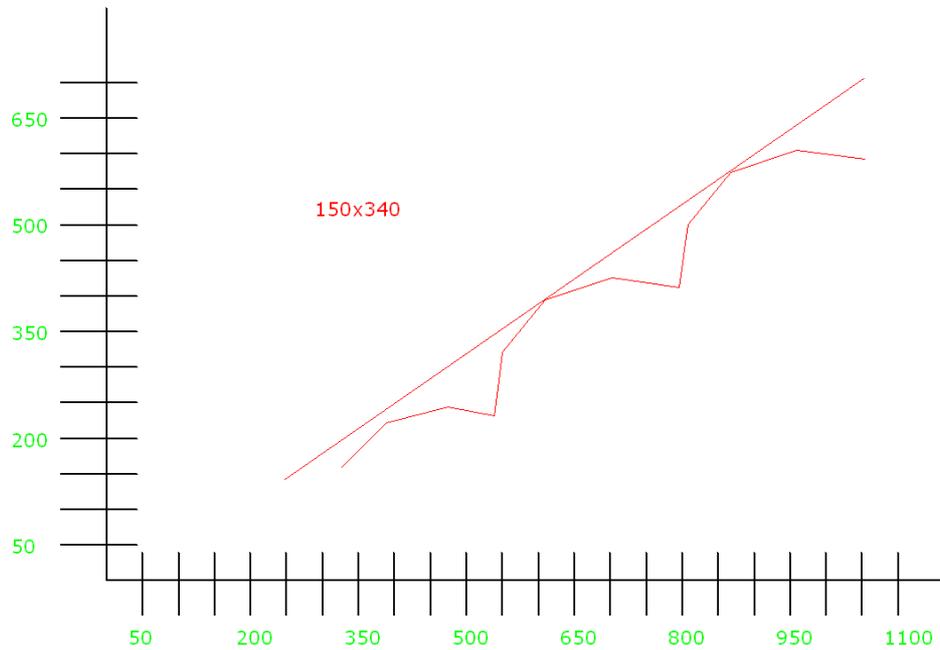


Figura 5.6 Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda-círculo de ejes 150x340.

La trayectoria de la figura 5.7 se aprecia muy similar a las curvas 5.6 y 5.4, sin embargo en la figura 5.2 se puede verificar que esta curva coincide en varios puntos con la curva de la figura 5.3, de hecho comienzan y terminan casi en el mismo punto, tanto la energía como la estabilidad será muy semejante a la de las curvas 5.6 y 5.4, el impacto en este sentido será casi el mismo, aunque para otros fines el hecho de tener en esta combinación las ruedas de mayor diámetro podría o no favorecer.

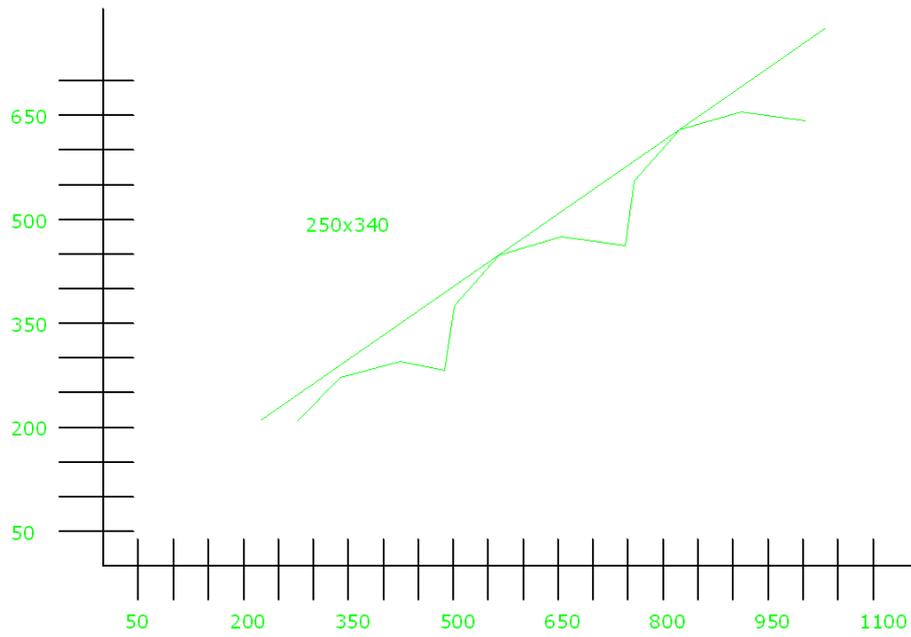


Figura 5.7 Trayectoria del ascenso de la escalera con la combinación rueda-circulo de ejes 250x340.

5.3 REFERENCIAS

- 5.1 Murray Lawn, Takashi Takeda; Design of a robotic-hybrid wheelchair for operation in barrier present environments.
- 5.2 Dan Ding, Rory A. Cooper, Songfeng Guo, and Thomas A. Corfman; Analysis of Driving Backward in an Electric-Powered Wheelchair

Conclusiones y trabajo a futuro

Los datos obtenidos sobre los índices de discapacidad en nuestro país son preocupantes, principalmente porque es gente joven la que incide en estas cifras y mayoritariamente hombres, lo cual afecta drásticamente a las familias, porque aunque actualmente las mujeres trabajan a la par de los hombres, en muchos casos las familias solo dependen económicamente del salario del jefe de familia y cuando un evento de esta naturaleza se presenta cambia por completo la vida no solo del afectado sino de todos los que dependen de él y el problema se extiende a la sociedad misma, porque nuestro país no está preparado para enfrentar estas necesidades, nuestra educación en cuanto a discapacidad es mínima, por ello el brindarles a este grupo de personas una alternativa económica de movilidad resultaría en un gran beneficio, inmediatamente la calidad de vida mejora y las posibilidades de continuar desempeñándose en el campo laboral también aumentan significativamente.

El nivel de la lesión medular es un factor determinante en este estudio, ya que en la mayoría de los casos ésta determina el grado de movilidad que logra conservar la persona después de la lesión, en este estudio se considero que las personas candidatas para ser asistidas por un sistema que les permita subir o bajar escales son aquellas cuya lesión haya sido en la vertebra T4 o menores, esto presume que se tendrá movilidad total de las extremidades superiores y control parcial del tronco, lo cual es ampliamente favorable para contribuir con la estabilidad del sistema.

Con los resultados obtenidos en las simulaciones se verificó que el sistema propuesto de seis ruedas es viable y que su control es factible, las ecuaciones de control de Lyapunov en el estado asintótico demostró que existen puntos donde el cambio de energía es súbito, pero muy corto entre un estado A y B que son los cambios de energía potencial cuando la rueda en ascenso alcanza un punto máximo y empieza a descender, gracias a la implementación de los giróscopos, se puede determinar en todo momento la posición del centro de gravedad del sistema, lo que inmediatamente producirá un cambio en las condiciones de los actuadores, aunque las condiciones no sean las optimas, es decir que se tenga una superficie lo suficientemente rugosa, a pesar de ello se puede conseguir una evaluación por las posiciones del centro de gravedad y las variaciones de la energía cinética y potencial para que el algoritmo de control resuelva si se tiene las condiciones mínimas para realizar los movimientos de ascenso y descenso.

Las diferentes configuraciones de tamaños de ruedas disponibles así como los datos antropométricos permitirán hacer configuraciones diferentes de los marcos de la silla de ruedas que abarquen cierto rango que estar definido por las especificaciones de diseño de la silla como son peso máximo que podrá transportar, peralte máximo de la escalera, ancho mínimo de escalón y ancho mínimo de escalera.

El trabajo a futuro consiste en implementar el algoritmo de control con los resultados

de la estabilidad y ecuaciones de control desarrolladas en esta tesis, también se deberá realizar toda la ingeniería de diseño mecánico para la fabricación de un prototipo que pueda ser empleado para verificar la eficiencia del sistema y el control, siguiendo los protocolos indicados en la norma ISO/dis 7176-28.

Anexo A

Producción científica

Device to Provide Intuitive Assistance in Laparoscope Holding

A. MINOR,¹ R. ORDORICA,² J. VILLALOBOS,³ and M. GALAN¹

¹Bioelectronics Department, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Av. IPN 2508, C.P. 07300 Mexico, D.F., Mexico; ²Hospital Infantil Federico Gómez, Mexico, D.F., Mexico; and ³Hospital Veterinario del Valle, Mexico, D.F., Mexico

(Received 9 March 2007; accepted 15 December 2008; published online 6 January 2009)

Abstract—This work proposes a new navigation device which autonomously handles the laparoscope, with a view to reducing latency and adjusting optics in real time. The system designed is an intuitive mechatronic device with three degrees of freedom and a sole active articulation. The device uses the point of insertion as the invariant point for navigation and has a work space that closely resembles an inverted cone.

Keywords—Solo surgery, Assisted surgery. Mechatronic assistance, Laparoscopic training, Laparoscope holder.

INTRODUCTION

Laparoscopic surgery, which is at the vanguard of technology, has encompassed various technological fields. Given its characteristics, this type of surgery demands that the specialty surgeon acquire new abilities and quickly adapt to new technology. One such technology provides assistance for holding and handling the laparoscope during surgery, enabling the surgeon to perform the surgery solo, that is, without any human assistance. At present, in addition to “passive” electromechanical devices, such as Tiska,¹¹ Endofreeze,¹ and Passist,⁵ there are various “active” robotic positioning systems, such as Aesop,¹⁰ Endoassist,³ Fips,² Tonatiuh,^{6,7} Zeus⁴ and DaVinci,⁴ for performing solo laparoscopic surgery. The work space of all these systems is an inverted cone. However, depending on the application or subspecialty, the real work space is limited to half of an inverted cone, which is normally located in front of the surgeon.

A tool such as a robotic assistant is very advantageous if it can be used in all laparoscopic specialties. However, considering transportation, installation and maintenance costs, the tool becomes very expensive if

its use is limited to a few specialties or for laparoscopic training. In addition, downtime due to manual or voice-activated repositioning of the laparoscope is cumulative and generally not taken into account during the evaluation process. Nevertheless, downtime can be reduced if the laparoscope is handled intuitively and, preferably, in real time.

MATERIALS AND METHODS

Technology

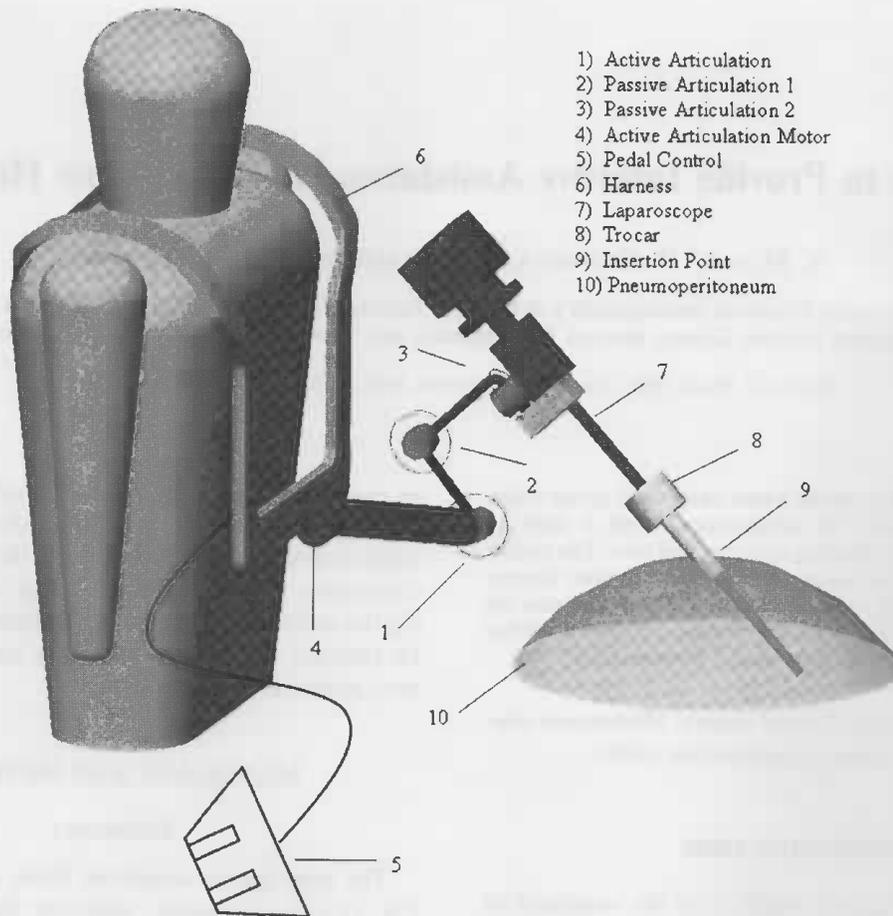
The new device comprises three articulations (see Fig. 1); two are passive, while the third is active. The first articulation (1) is active and rotates; it is activated by a motor (4) and controlled by pedals (5). The second articulation (2) is passive and rotates; it operates in the same plane as the first articulation. The third articulation (3) is passive and rotates; it operates in the plane perpendicular to that of the first two articulations.

The system uses the entry point as the fixed and invariant point for exploration and navigation. Laparoscopic navigation with zero-degree optics requires six basic movements: right, left, up, down, in and out, all together makes the work space (see Fig. 4). To horizontally pan right or left, the surgeon turns his/her torso right or left. The third articulation (see Fig. 1) and the point of insertion complete this movement (see Fig. 2).

To establish the entry angle, which corresponds to the change in optical orientation above and below the laparoscope, the system uses the first articulation, which is active and in rotation, together with the second articulation, which is passive. The displacement of this mechanism is quasi-linear (see Fig. 3). The surgeon activates this articulation by means of two pedals.

To move the laparoscope in or out, the surgeon moves his/her body toward or away from the patient. The trajectory is almost linear, so there is no visual loss when moving in or out from tissues and organs during the procedure (Fig. 4).

Address correspondence to A. Minor, Bioelectronics Department, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Av. IPN 2508, C.P. 07300 Mexico, D.F., Mexico. Electronic mail: aminor@cinvestav.mx



- 1) Active Articulation
- 2) Passive Articulation 1
- 3) Passive Articulation 2
- 4) Active Articulation Motor
- 5) Pedal Control
- 6) Harness
- 7) Laparoscope
- 8) Trocar
- 9) Insertion Point
- 10) Pneumoperitoneum

FIGURE 1. Concept design of the mechatronic assistant.

Once the mechatronic system had been modeled, a multidisciplinary group met to establish the following criteria:

The system should be mountable in modules, so setup in the operating room is quick and trans-operative sterilization is maintained.

The system should allow quick disconnection of the laparoscope, so the surgeon can perform unforeseen explorations of anatomic spaces and maneuvers during any standard surgery.

The system should be manufactured from a material that can be sterilized.

The system weight should be kept to a minimum.

The system was manufactured from medical-grade steel, together with some Teflon-steel parts, for sterilization purposes. The system, which weighs half a kilogram, is set up in a three-step procedure. Step one is to fit the harness onto the surgeon, under his/her surgical coveralls. Step two is to place on the harness, but over the coveralls, the motor which drives the active articulation and is wrapped in sterile plastic. Step three is to connect to the motor the passive

articulations, which are sterilized by normal procedures. The mechatronic system is fitted onto the surgeon in half a minute. The laparoscope connects to and disconnects from the mechatronic system with ease. The degree of freedom is activated by means of the floor pedals.

Test

The prototype was evaluated by four experienced surgeons, two veterinarians, and two pediatricians, who initially performed dissections, sutures and cuts on chicken part models, using zero-degree optics (see Fig. 5). During this stage, the surgeons became familiar with harness placement, postural movements and visual feedback. Measurements were taken of the time elapsed between when the surgeons began working on the chicken part models and the moment their movements became totally intuitive. The following stage was carried out by the two veterinarians, who performed three ovariectomies (see Fig. 6) on mongrel bitches with an average weight of 40 kg. All surgeries were performed using zero-degree optics. The equipment placement time and surgery durations were measured.

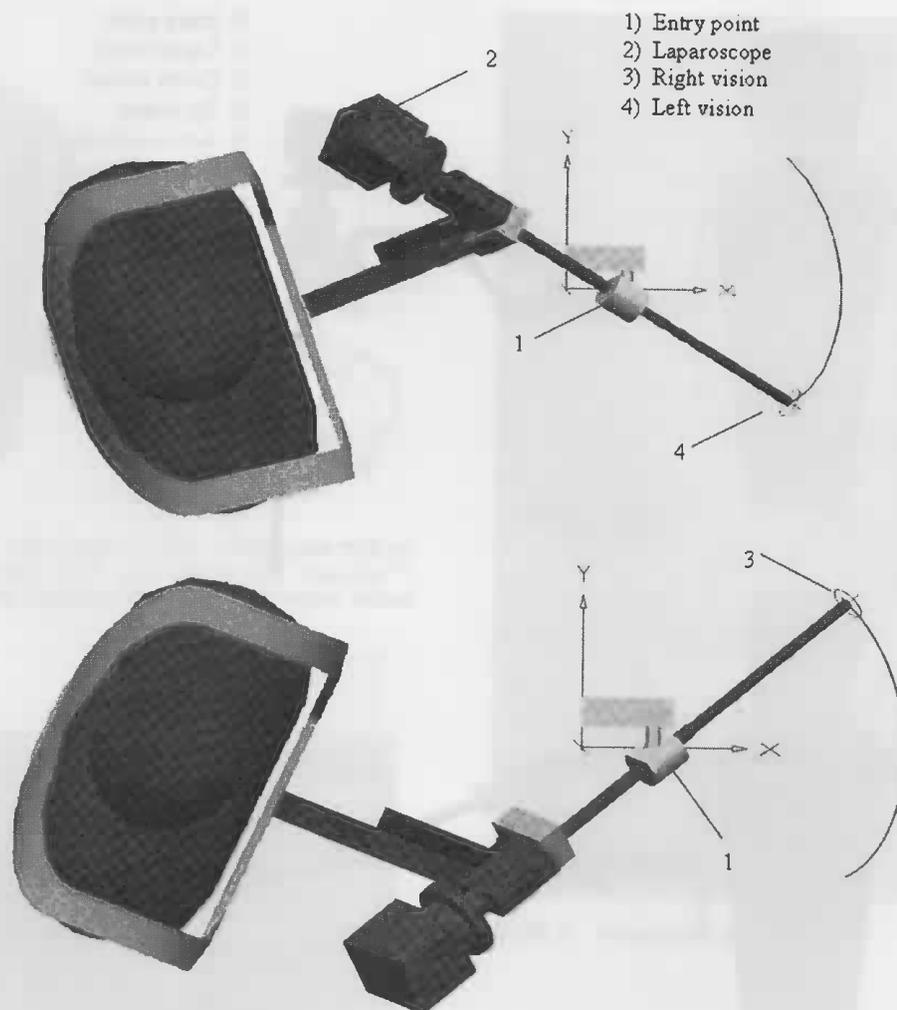


FIGURE 2. Model of system for right-left perspective change.

The final evaluation consisted of two pediatric surgeries for which the selected procedure was a Nissen fundoplication to correct gastroesophageal reflux disease, not corrected by pharmacological treatment and with persistent esophagitis and alimentary tract bleeding. The surgeries were performed on two year-old patients, whose cases were fully studied prior to the surgery and for whom, in accordance with the Helsinki Treaty, there was informed parental consent. These surgeries were performed solo, using a brand new mechatronic system and zero and thirty-degree optics (Fig. 7).

Surgeons used postural movements and visual feedback to achieve the required positions while keeping both hands free to perform their procedures.

At the end, the participating surgeons were given a questionnaire to record their experiences with respect to comfort, ease of use and difficulties in handling the system, as well as with the precision achieved with the mechatronic device.

RESULTS

The mechatronic system was installed on the surgeons, without the sterilization protocol, in an average time of half a minute (see Graph 1). The maximum times recorded in the operating room were those for surgery in children, for which the initial protocols are always stricter. Total surgery duration was taken to be the time elapsed between placement of the mechatronic system and the end of the surgery (see Graph 2). During the use of phantom models, the surgeons initially required an average of 5 min to establish hand-eye feedback with the system. Expert surgeons acquire intuitive control of the system without subsequent delays (see Graph 3). Optics showed no sign of tremor, and exploration, while moving in and out, was intuitive and took place in real time. It was also observed that the system worked equally well whether the surgeon stood or sat, and that postural changes did not limit visual perception and the ergonomics.

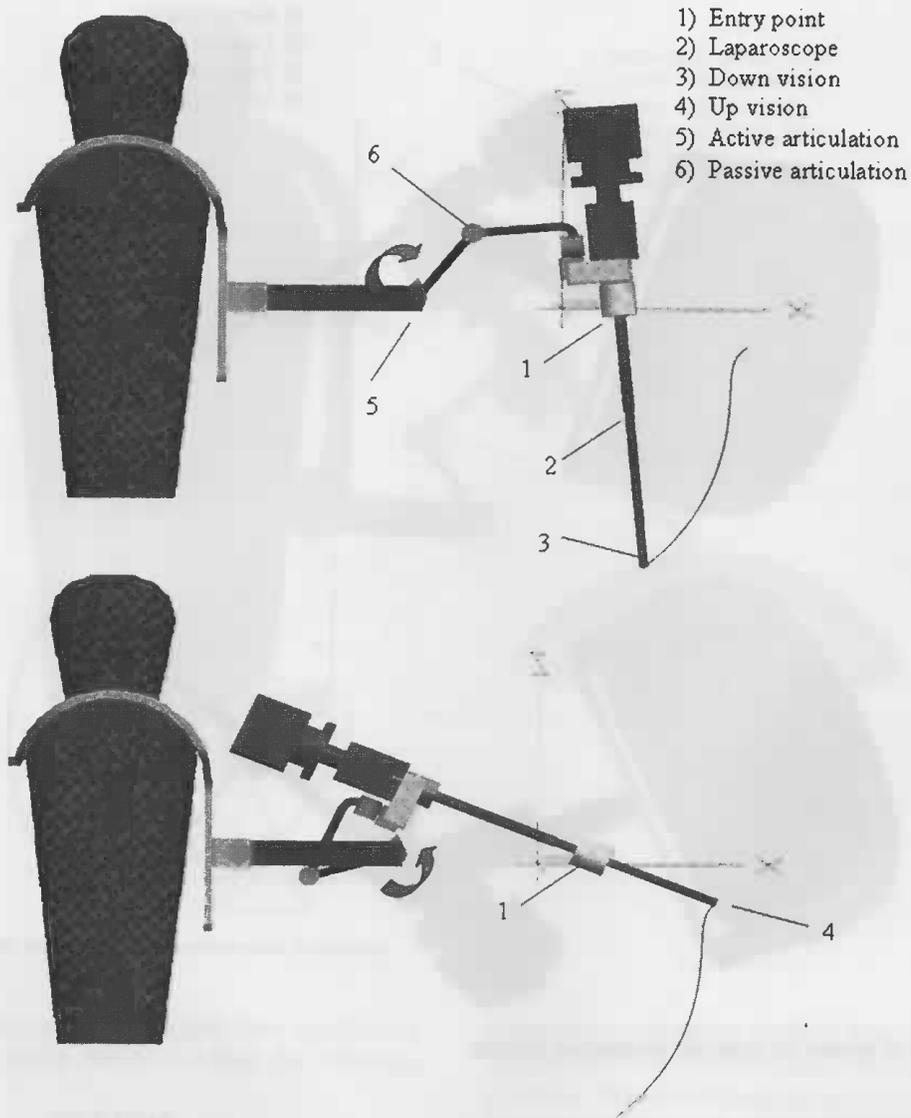


FIGURE 3. Model of system for above-below perspective change.

The mechatronic system does not allow a view of the roof of the pneumoperitoneum when using zero-degree optics, so some surgeries, such as the Nissen surgery, are better performed using 30-degree optics. The results of the post-surgical questionnaire focused on three parameters: comfort, precision and equipment handling, with scores from 1 to 5, where five is the optimum value (see Graph 4). On average, the highest scores were achieved for precision, followed by handling and comfort. The lowest comfort score was assigned by the second pediatrician, whose surgery took 1 h and 45 min, compared to the average of 30 min required for the ovariectomies. After 75 min, the surgeon sat down to continue the surgery. It is concluded that, after 45 min, the equipment becomes uncomfortable due to the joint factors of tiredness and stress.

In order to clean the laparoscope, the surgeon steps back from the patient, cleans the device, and then returns to optics that have naturally taken up their last visual position. Cleaning time is similar to that required when the laparoscope is handled with the aid of a human assistant.

DISCUSSION

The use of new technology in surgery is enabling surgeons to operate solo in some procedures. The advantages are adequate work space on the operating table and maneuverability. However, although active and passive systems offer these advantages, the time required to relocate or re-accommodate optics and



FIGURE 4. Virtual work space of the mechatronic system using Visual Nastram 4D™ and Mechanical Desktop™. The point of entry is invariant throughout the entire virtual navigation.



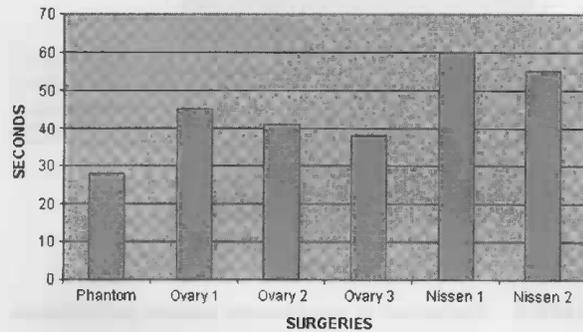
FIGURE 5. Design and explicit handling of the mechatronic assistant.



FIGURE 6. Laparoscopic ovariectomy solo surgery in a dog.

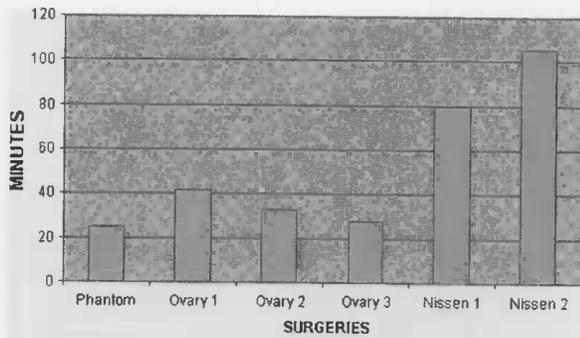


FIGURE 7. Nissen solo surgery.

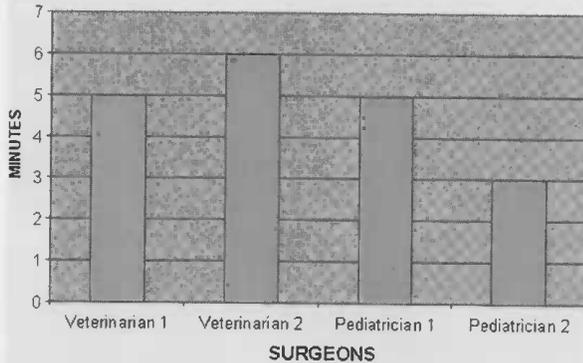


GRAPH 1. Mechatronic system placement times.

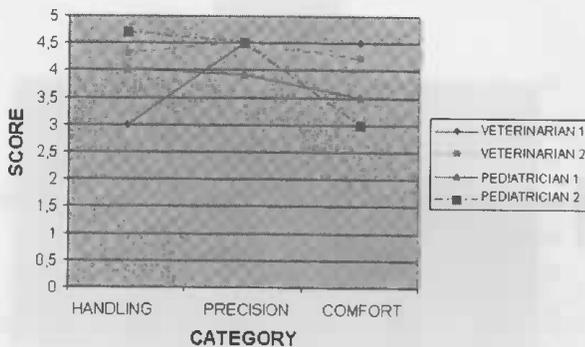
clean the laparoscope between operations has not been reduced. In addition, there is a perceptual difference between what the surgeon wishes to see and the proximity he/she achieves with the active or passive system via the robot. There will always be the feeling that there exists a greater visual perspective to perform the procedure. The new mechatronic system shows it is possible to have solo surgery in which the surgeon auto-manipulates the laparoscope to obtain the best



GRAPH 2. Surgery duration.



GRAPH 3. Hand-eye adaptation time with chicken parts.



GRAPH 4. Evaluation of mechatronic system performance.

optical perspective and has both hands free to perform the procedure. Simulations using the prototype show that its in and out movements are not exactly linear. However, when operated with visual feedback, the mechatronic system does not have this limitation. Optics other than zero-degree optics can be used with this design; the changes have to be made manually.

This assistant facilitates work on the operating table, as do active and passive assistants, but offers certain advantages over active assistants and the methods

used to activate the approach of the laparoscope. Robots approach objects successively and, if the approach is voice-activated,⁸ there is a delay, while the command is sent, recognized and executed. The time of such delays accumulates during the procedure. Cephalic activation of a robot⁸ is faster and more intuitive than voice activation, however the technological cost is higher and laparoscope cleaning time is similar to that for voice-activated laparoscopes. Gestural activation⁹ of a robot is about as fast as cephalic activation and intuitive, but also technologically expensive. Robots with cephalic or gestural activation require that the surgeon press a button to access the image recognition system. This is an additional distraction for the surgeon. In the mechatronic system, only two pedals are required; any movements are postural, intuitive and performed in real time. There are no delays caused by complex electronic systems.

The surgical limitation of the mechatronic system is dependent on the approach of the surgeon, which must be frontal with respect to the organ on which he/she is to operate. Initially, therefore, the system has shown to be a good option for Nissen funduplications, colecistectomies and appendectomies. The system still requires additional statistical testing.

CONCLUSIONS

A mechatronic system with three degrees of freedom and a sole active articulation has been designed. It is a low-cost system (approximately US\$ 2000) that can be held and positioned for training in and performance of solo laparoscopic surgery. The mechatronic system allows for the use of zero and thirty-degree optics in frontal surgical approaches, such as in Nissen surgeries. Laparoscope movement is intuitive and takes place in real-time.

ACKNOWLEDGMENT

The authors want to express their Acknowledgment to CONACYT México for their support.

REFERENCES

- Arezzo, A., M. O. Schurr, A. Braun, and G. F. Buess. Experimental assessment of a new mechanical endoscopic solosurgery system: endofreeze. *Surg. Endosc.* 19:581-588, 2005. doi:10.1007/s00464-003-9132-7.
- Buess, G. F., A. Arezzo, M. O. Schurr, F. Ulmer, H. de Pescador, L. Gumb, T. Testa, and C. Nobman.

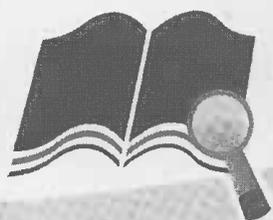
- A new remote-controlled endoscope positioning system for endoscopic solo surgery. The FIPS endoarm. *Surg. Endosc.* 14(4):395-399, 2000. doi:10.1007/s004640020066.
- ³Dagan, J., and L. Bat. Endoassist, a mechanical device to support an endoscope. *Gastrointest. Endosc.* 28(2):97-98, 1982.
- ⁴Dakin, G. F., and M. Gagner. Comparison of laparoscopic skills performance between standard instruments and two surgical robotic systems. *Surg. Endosc.* 17(4):574-579, 2003.
- ⁵Jaspers, J. E., K. T. Den Boer, W. Sjoerdsma, M. Bruijn, and C. A. Grimbergen. Design and feasibility of PASSIST, a passive instrument positioner. *J. Laparoendosc. Adv. Surg. Tech. A* 10(6):331-5, 2000.
- ⁶Martinez, A. M., R. O. Flores, M. G. Vera, R. C. Salazar, J. L. Mosso, and D. Lorias. Tonatiuh II: assisting manipulator for laparoscopic surgery. *Minim. Invasive Ther.* 16(5):310-313, 2007.
- ⁷Minor A., J. L. Mosso, A. Domínguez, R. C. Martínez, R. Muñoz, and V. Lara. Robot para cirugía laparoscópica. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica* XXIII(1):27-32, 2002.
- ⁸Nebot, P. B., Y. Jain, K. Haylett, R. Stone, and R. McCloy. Comparison of task performance of the camera-holder robots EndoAssist and Aesop. *Surg. Laparosc. Endosc. Percutan. Tech.* 13(5):334-338, 2003.
- ⁹Nishikawa, A., T. Hosoi, K. Koara, D. Negoro, A. Hikita, S. Asano, H. Kakutani, F. Miyazaki, M. Sekimoto, M. Yasui, Y. Miyake, S. Takiguchi, and M. Monden. Face mouse: a novel human-machine interface for controlling the position of a laparoscope. *IEEE Trans. Rob. Autom.* 19(5), 2003.
- ¹⁰Sackier, J. M., and Y. Wang. Robotically assisted laparoscopic surgery from concept to development. *Surg. Endosc.* 8:63-66, 1994. doi:10.1007/BF02909496.
- ¹¹Schurr, M. O., A. Arezzo, B. Neisius, H. Rininsland, H. U. Hilzinger, J. Dorn, K. Roth, and G. F. Buess. Trocar and instrument positioning system TISKA. An assist device for endoscopic solo surgery. *Surg. Endosc.* 13:528-531, 1999. doi:10.1007/s004649901029.

GACETA DE LA PROPIEDAD INDUSTRIAL

MÉXICO

SOLICITUDES DE PATENTE

ENERO · 2010

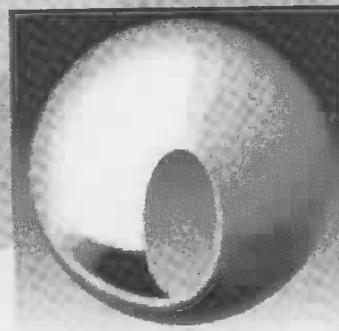


SIGA
gaceta

Disponible para su consulta electrónica en:

<http://sigaz.mmp.gob.mx>

Sitio que fomenta y promueve la sustentabilidad ambiental.



GACETA DE LA PROPIEDAD INDUSTRIAL

 SOLICITUDES DE PATENTE
 Solicitudes normales

[21] Número de solicitud: MX/a/2008/009026 [22] Fecha de presentación: 11/07/2008
 [71] Solicitante(s): ERNESTO ELIZONDO VERA; Cajero 21-101, Col. Alvaro Obregón, 15990, VENUSTIANO CARRANZA, Distrito Federal
 [72] Inventor(es): ERNESTO ELIZONDO VERA; Cajero 21-101, Col. Alvaro Obregón, 15990, VENUSTIANO CARRANZA, Distrito Federal
 [74] Agente: LORENZO PEREZ PEREZ; Bosques de Duraznos Num. 61 Piso 4, Col. Bosques de las Lomas, 11700, Distrito Federal
 [30] Prioridad (es):
 [51] Clasificación: A61L2/03 (2006-01)
 [54] Título: UN SISTEMA PARA ESTERILIZAR ALIMENTOS MEDIANTE UN HAZ DE RAYOS DE ELECTRONES.
 [57] Resumen: La presente invención describe un sistema para esterilizar alimentos mediante un haz de rayos de electrones, el cual permite esterilizar las moscas de la fruta y otras plagas o patógenos como son la E. Coli, Salmonera y la Listeria, para prevenir su reproducción, y así hacerlas inofensivas, también aumenta la vida de anaquel al eliminar los niveles microbianos que causan su deterioro. Demostrando que la irradiación permite extender la vida de anaquel hasta dos y tres veces más en algunos casos.

[21] Número de solicitud: MX/a/2008/009027 [22] Fecha de presentación: 14/07/2008
 [71] Solicitante(s): MANUEL MAURICIO GALÁN VERA; CARMEN ROCIO BAHENA PEDROZA; Privada Arges #36, Col. Fracc. Real del Cid, 55770, Tecamac, Estado de México
 [72] Inventor(es): MANUEL MAURICIO GALÁN VERA; CARMEN ROCIO BAHENA PEDROZA; Privada Arges #36, Col. Fracc. Real del Cid, 55770, Tecamac, Estado de México
 [74] Agente: MANUEL MAURICIO GALÁN VERA; Norte 88 A No. 5227, Col. Gertrudis Sanchez, 07839, Distrito Federal
 [30] Prioridad (es):
 [51] Clasificación: A61B1/00 (2006-01) A61B1/008 (2006-01) A61B1/012 (2006-01)
 [54] Título: SUJETADOR PASIVO MECANICAMENTE AJUSTABLE PARA INSTRUMENTAL LAPAROSCOPICO. La invención es pasiva por que no utiliza motores eléctricos, neumáticos o hidráulicos para su accionamiento; un arreglo mecánico en cada una de sus articulaciones y su arquitectura ayudan para asistir y mantener la posición del instrumental laparoscópico y reubicar la posición y orientación dentro de la cavidad de trabajo. El sujetador pasivo tiene un sistema de aproximación rápido por rotulas mecánicamente pretensadas, el efector final tiene ajustes que se pueden modificar a criterio del usuario, una vez que el sujetador ha sido aproximado al punto de ingreso, este recibe por medio del efector final al instrumento laparoscópico, el cual puede ser manipulado por el usuario para darle la posición, la longitud y la orientación requerida.

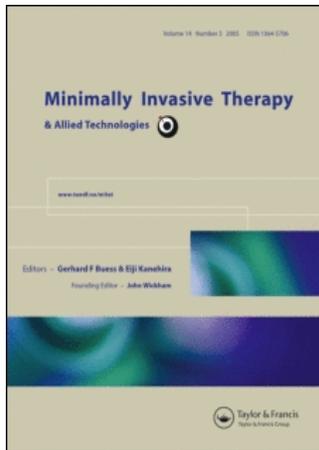
[21] Número de solicitud: MX/a/2008/009049 [22] Fecha de presentación: 14/07/2008
 [71] Solicitante(s): UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON; Pedro de Alba S/N, Col. Ciudad Universitaria, 66451, SAN NICOLAS DE LOS GARZA, Nuevo León
 [72] Inventor(es): VIRGILIO ANGEL GONZALEZ GONZALEZ; MARCO ANTONIO GARZA NAVARRO; ALEJANDRO TORRES CASTRO; Laredo #419, Col. Mitras Norte, 64320, MONTERREY, Nuevo León
 [74] Agente: JUAN ANGEL GARZA VITE; Av. Pedro de Alba S/N, Torre de Rectoría, Piso 4, Col. Ciudad Universitaria, 66455, SAN NICOLAS DE LOS GARZA, Nuevo León
 [30] Prioridad (es):
 [51] Clasificación: C08F210/00 (2006-01) C08K9/04 (2006-01)
 [54] Título: PROCESO DE ELABORACIÓN DE NANOCOMPUESTOS DE QUITOSÁN CON NANOPARTÍCULAS NÚCLEO-CORAZA DE MAGNETITA-PLATA
 [57] Resumen: La presente invención se refiere a la preparación mediante co-precipitación con álcalis y reducción, en estado sólido, de nanopartículas con morfología núcleo-coraza de óxidos de hierro y plata en una matriz de quitosán, los materiales resultantes pueden ser desde sólidos grisáceos y opacos hasta rojos transparentes, teniendo propiedades paramagnéticas o superparamagnéticas. Estas propiedades aunadas a la biocompatibilidad y biodegradabilidad del quitosán, permiten que además de los usos potenciales en electricidad y electrónica, puedan ser usados en aplicaciones medicas y biológicas.

[21] Número de solicitud: MX/a/2008/009100 [22] Fecha de presentación: 14/07/2008
 [71] Solicitante(s): SISTEMAS INTEGRALES DE MEDICIÓN Y CONTROL STELLUM, S.A. DE C.V.; Paseo de la Reforma No. 2608-PH, Col. Lomas Altas, 11950, Distrito Federal
 [72] Inventor(es): EDUARDO AGUSTIN NERI BADILLO; Km. 109 Carretera Panamericana México-Querétaro, Col. Pesteje, 50700, Jicotitlán, Estado de México
 [74] Agente: SERGIO E. GUTIERREZ MARTINEZ; Río Tiber 87, Piso 3, Col. Cuauhtémoc, 06500, Distrito Federal
 [30] Prioridad (es):
 [51] Clasificación: G01D4/14 (2006-01)
 [54] Título: SISTEMA DE PREPAGO PARA SUMINISTRAR AGUA O GAS MEDIANTE TARJETA INTELIGENTE INALAMBICA Y MEDIDOR PARA DICHO SISTEMA.
 [57] Resumen: Se describe un sistema de prepago para suministrar agua o gas mediante tarjeta inteligente inalámbrica. La invención se refiere también a un medidor bidireccional especialmente diseñado para registrar electrónicamente el consumo de agua o gas.

[21] Número de solicitud: MX/a/2008/009150 [22] Fecha de presentación: 16/07/2008
 [71] Solicitante(s): CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN QUÍMICA APLICADA; Blvd. Enrique Reyna Hermosillo No. 140, 25100, Saltillo, Coahuila
 [72] Inventor(es): RAMIRO GUERRERO SANTOS; HORTENSIA MALDONADO TEXTLE; CARLOS JOSÉ ESPINOZA GONZÁLEZ; CLAUDIA CECILIA RIVERA VALLEJO; ENRIQUE JAVIER JIMÉNEZ REGALADO; FEDERICO CERDA RAMÍREZ; Paseo Gardenias No. 158, Col. Fraccionamiento Bugambillas, 25310, Saltillo, Coahuila
 [74] Agente: JOSE ANTONIO ROMERO MIRANDA; Thiers 251 Piso 10, Col. Anzures, 11590, MIGUEL HIDALGO, Distrito Federal
 [30] Prioridad (es):
 [51] Clasificación: A01N59/16 (2006-01)
 [54] Título: COMPOSICION ANTIMICROBIANA BASADA EN POLIMEROS ASOCIATIVOS Y METODO DE OBTENCION.
 [57] Resumen: Se describe una composición con acción antimicrobiana, conteniendo nanopartículas de plata homogéneamente dispersas y estables dinámicamente adsorbidas a un polímero asociativo obtenido mediante polimerización micelar. La formulación antimicrobiana, puede preferentemente ser utilizada como recubrimiento antimicrobiano de diversos sustratos, en el tratamiento de quemaduras, en artículos absorbentes, productos cosméticos y pinturas. Adicionalmente se describe el método de obtención de la composición antimicrobiana.

[21] Número de solicitud: MX/a/2008/009227 [22] Fecha de presentación: 17/07/2008
 [71] Solicitante(s): FOOD MACHINERY ESPAÑOLA, S.A.; C/Jesús Morante Borrás, 24, 46012, Valencia, ESPAÑA
 [72] Inventor(es): JUAN ANTONIO SÁNCHEZ DE LEON RODRÍGUEZ RODA; C/Jesús Morante Borrás, 24, 46012, Valencia, ESPAÑA
 [74] Agente: MIGUEL A. ESTEVA; Av. Revolución No. 1392, Segundo Piso, Col. Guadalupe Inn, 01020, Distrito Federal
 [30] Prioridad (es):
 [51] Clasificación: A47J17/00 (2006-01)
 [54] Título: CORTADOR SUPERIOR DE LA CORTEZA DE CITRICOS PARA LA REDUCCION DEL ACEITE ESENCIAL EN EL ZUMO DURANTE SU EXTRACCION.
 [57] Resumen: "Cortador superior de la corteza de cítricos para la reducción del aceite esencial en el zumo durante su extracción", al cual se le ha practicado un orificio axial en toda su longitud conectado con orificios radiales situados en la parte inferior del cortador y en coincidencia con la zona de corte, de manera que, por dicho orificio axial se introduce agua a presión que es expulsada por los orificios radiales, limpiando la zona de corte y siendo expulsada el agua conjuntamente con las impurezas del cítrico a través de los conductos de salida laterales. Además, para el cambio del cortador no es necesario desajustar las copas que sujetan el cítrico, ya que el cortador está sujeto al portacopas mediante un tornillo lateral, fijador, pasador o medio similar gracias a un orificio practicado en el portacopas en coincidencia con un rebaje perimetral que a tal fin presenta en su zona superior el cortador, evitándose de esta manera el tener que desmontar el portacopas para la sustitución del cortador.

This article was downloaded by:[Martínez, Arturo Minor]
On: 20 November 2007
Access Details: [subscription number 786634509]
Publisher: Informa Healthcare
Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954
Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



Minimally Invasive Therapy and Allied Technologies

Publication details, including instructions for authors and subscription information:
<http://www.informaworld.com/smpp/title-content=t713683124>

Laparoscopic Nissen solo surgery using PMAT (first experience)

Ricardo Ordorica Flores ^a; Jaime Nieto Zermeño ^a; Arturo Minor Martínez ^b;
Mauricio Galan Vera ^b; J. Jesus Nieto Miranda ^b; Daniel Lorias Espinoza ^b

^a Department of General Pediatric Surgery, Hospital Infantil de México Federico Gómez, México City, México

^b Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica Sección de Bioelectrónica, México City, México

First Published on: 17 October 2007

To cite this Article: Flores, Ricardo Ordorica, Zermeño, Jaime Nieto, Martínez, Arturo Minor, Vera, Mauricio Galan, Miranda, J. Jesus Nieto and Espinoza, Daniel Lorias (2007) 'Laparoscopic Nissen solo surgery using PMAT (first experience)', *Minimally Invasive Therapy and Allied Technologies*, 16:6, 347 - 349

To link to this article: DOI: 10.1080/13645700701699323

URL: <http://dx.doi.org/10.1080/13645700701699323>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Full terms and conditions of use: <http://www.informaworld.com/terms-and-conditions-of-access.pdf>

This article maybe used for research, teaching and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, re-distribution, re-selling, loan or sub-licensing, systematic supply or distribution in any form to anyone is expressly forbidden.

The publisher does not give any warranty express or implied or make any representation that the contents will be complete or accurate or up to date. The accuracy of any instructions, formulae and drug doses should be independently verified with primary sources. The publisher shall not be liable for any loss, actions, claims, proceedings, demand or costs or damages whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with or arising out of the use of this material.

SHORT COMMUNICATION

Laparoscopic Nissen solo surgery using PMAT (first experience)

RICARDO ORDORICA FLORES¹, JAIME NIETO ZERMEÑO¹,
ARTURO MINOR MARTÍNEZ², MAURICIO GALAN VERA², J. JESUS NIETO MIRANDA² &
DANIEL LORIAS ESPINOZA²

¹Department of General Pediatric Surgery, Hospital Infantil de México Federico Gómez, México City, México, and ²Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica Sección de Bioelectrónica, México City, México

Abstract

This article describes the use of a Postural Mechatronic Assistant Trainer (PMAT) in pediatric Nissen surgery. This mechatronic system enables users to establish the logistical considerations for solo surgery and determine the advantages this new tool offers for the autonomous handling of optics.

Key words: *Assisted laparoscopy, assisted surgery, solo surgery, Nissen solo surgery*

Introduction

Technological advances in laparoscopic surgery have enabled surgeons of this specialty to perform increasingly complex procedures. Improved tools have made procedures easier and faster to perform. Robotic assistants have shown (1–4) that they can perfect the surgeon's movements during procedures by eliminating minor technique defects, caused mainly by tremor. The use of the robotic assistants Aesop (Computer Motion, Goleta, CA, USA) (5), Endoassist (Armstrong Healthcare, High Wycombe, UK) (6), Fips (Storz, Tuttlingen, Germany) (7) and Tonatiuh (8) is limited principally to third-level hospitals given the high cost of the equipment. Passive assistants, such as Tiska (Karlsruhe Research Center, Karlsruhe, Germany) (9), Passist (10), and Endofreeze (Tuebingen Scientific, Tuebingen, Germany) (11), are less expensive, but are slower in repositioning the optics. The use of robotic assistants to handle the optics is desirable in our country, but the high costs involved limit the application of such equipment. We therefore propose the use of the postural mechatronic assistant trainer (PMAT) (12), which was initially conceived for solo training. The objective sought with this new tool is to establish the

surgical logistics for the autonomous handling of optics in the solo mode of common surgeries such as those for treating gastrointestinal reflux.

Material and methods

The selected procedure was that of Nissen surgery in pediatric patients, since the workspace is smaller than in adults, but navigable with the mechatronic system. The PMAT was chosen to handle the optics. Before performing the procedure, the PMAT workspace and the navigation and exploration trajectories of the mechatronic system were assessed for their suitability to the procedure.

Once the laparoscope is inside the workspace, exploration is carried out with traditional movements. The right-left movement is effected by the surgeon moving laterally; this movement describes a semi-circle within the workspace. The up-down movement is effected by using the PMAT linear guide. The in-out movement is effected by the surgeon moving towards or away from the optics entry port. The in-out movement describes an almost linear entry, so the target is never lost from view. The PMAT dimensions are such that it can navigate a geometric space of

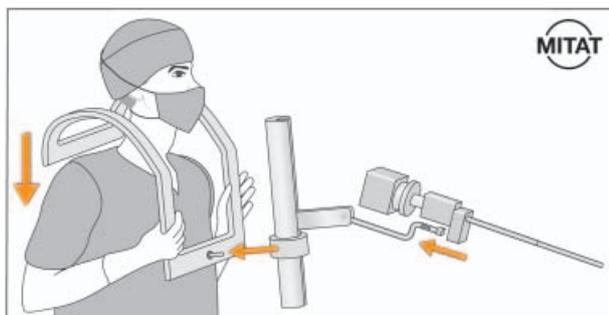
approximately 1 dm³. Based on multidisciplinary criteria, it was decided that the PMAT should be modular (Figure 1), so as to facilitate sterilization and coupling in the operating room.

Procedure

The PMAT comprises a harness, an electrically activated linear guide and a pair of passive articulations to which the laparoscope is coupled. Before the surgeon scrubs his/her hands, he/she places the harness on his/her body (Figure 2 a). The passive articulations are sterilized in a solution before the procedure and the linear guide is covered in sterile plastic.

The surgeon, having scrubbed his/her hands and assisted by the nurse, places the surgical dress over the harness. Port positions are located and a manual visual exploration is carried out. Once the entry ports are in place, the linear guide of the mechatronic system is coupled to the harness, with a quick push over the surgical dress, and secured (Figure 2 b). Lastly, the passive module of the mechatronic assistant is secured to the linear guide and the 30° laparoscope is attached. Once the optical system is coupled to the mechatronic system, it is introduced into the cavity to carry out the exploration and begin the procedure.

For this particular procedure, general inhaled anesthesia using oro-tracheal intubation was applied. Two work ports of 5 and 3 mm were placed on both medioclavicular lines at the navel level. The first blunt-tipped trocar was placed under direct vision through an 11 mm vertical incision at the navel level. The pneumoperitoneum was kept at a constant pressure of 10 mm Hg. The 10 mm, 30° optics was connected to the PMAT via an endoscopic camera coupler, to carry out the first exploration and then identify the esophago-gastric junction. In order to separate the liver, a stitch was made through the skin, first towards the abdominal cavity at the level of the xyphoides appendix, then to a point on the diaphragm



(a)



(b)

Figure 2. (a) Harness, (b) mechatronic system coupling.

identified as the anterior crural, and then back to the wall of the left hypochondrium, including the round ligament of the liver. By applying external traction to both threads, adequate separation of the liver was achieved without the need for an additional trocar. Dissection began at the left pillar with proximal sectioning of the short gastric vessels up to the superior pole of the spleen. This maneuver allows for complete mobilization of the gastric fundus, to reduce post-surgical dysphasia. The peritoneum was further divided, as was the phrenoesophageal ligament in the anterior face of the hiatus, respecting Latarjet's nerve, until the right pillar was revealed. The esophagus was further dissected in the cephalic direction, approximately 3 cm from its original position, and a suitably sized window was opened between the esophagus and the diaphragmatic pillars. A small penrose was then passed around the cardio-gastric junction for traction. The plasty of the pillars, from the posterior union of the right and left pillars (posterior crural), was performed, and two simple loose stitches were made with non-absorbable material from one



Figure 3. Nissen solo surgery.

pillar to the other. Having finished the plasty, the major curvature was mobilized behind the esophagus with a catheter acting as a splint. A 360° valve was built with a fundus-esophagus-fundus stitch and a lower fundus-fundus stitch.

The surgeon performed the surgery using the PMAT and corporal movements. The optics was rotated manually. At the end of the procedure (Figure 3), the passive articulations and the laparoscope were uncoupled and the ports closed.

Results

Use of the PMAT in this procedure achieved the following objectives without any complications. The surgeon performed the entire surgery solo, with autonomous and intuitive optical navigation. The procedure was performed in 60 minutes, without any perioperative or postoperative complications. There was no visual tremor while using the PMAT. In order to clean the laparoscope during the perioperative phase, the surgeon moved away from the entry point. Once cleaned, the laparoscope was reinserted at its latest position, thus eliminating repositioning downtime. Optical tracking took place in real time.

Discussion

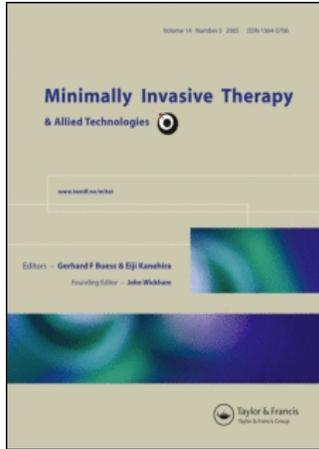
Solo Nissen surgery was performed with autonomous handling of optics on a mechatronic system. Although robotic assistance is desirable for improving surgical quality and reducing patient morbidity, its high cost limits application in countries with fewer economic resources. This first surgical experience using the PMAT shows the capability to perform solo surgery. PMAT enlarges the workspace on the operating table, a feature similarly offered by

a robotic or passive system, and allows for intuitive navigation within the workspace. It also reduces optics cleaning time, unlike robotic and passive systems. The surgeon navigates the cavity intuitively and in real time, and the visual feedback prevents him/her from colliding with tissues or organs. In addition, it is observed that the surgeon has a better visual perspective, since he/she is in control of the optics. In robotic systems, visual approximation is successive, leading to accumulated downtime. The modular PMAT concept allows the system to be coupled or uncoupled in two minutes, thus offering functionality and ease of sterilization. A robotic system requires at least eight minutes to set up. Some PMAT deficiencies were observed; they will be addressed in the next application. The linear guide should be lengthened to increase the up-down range. This, however, constrains the design, since such an extension increases the weight borne by the surgeon, as well as the risk of tearing the sterile plastic sleeve of the guide. A speedy resolution of these issues will lead to a low-cost tool with big advantages for surgeons. The design logistics have shown that it is possible to make the mechatronic assistant functional for this procedure.

References

- Walsh DJ, Chantapukul M, Daniell JE. Laparoscopic assistance: A comparison of human and robotic camera control, ISGE Meeting, Singapore, April 1997.
- Birkett DH. Electromechanical instruments for endoscopic surgery, *Min Invas Ther & Allied Technol.* 2001;10:271-4.
- Gage Parr K, Talamini MA. Anesthetic implications of the addition of an operative robot for endoscopic surgery: a case report. *Journal of Clinical Anesthesia.* 2002;14:228-33.
- Heemskerck J, Zandbergen R, Maessen JG, Greve JWM, et al. Advantages of advanced laparoscopic systems, *Journal Surgical Endoscopy.* 2006;5:730-3.
- Sackier J. M, Wang Y. Robotically Assisted Laparoscopic Surgery. *Surgery Endosc.* 1994;8:63-6.
- Dagan J, Bat L. Endoassist, a mechanical device to support an endoscope. *Gastrointest Endosc.* 1982;28:97-8.
- Buess GF, Arezzo A, Schurr MO, Ulmer F, et al. A new remote-controlled endoscope positioning system for endoscopic solo surgery. *The FIPS endoarm. Surg Endosc.* 2000;14:395-9.
- Minor A, Mosso JL, Domínguez A, Martínez RC, et al. "Robot para cirugía laparoscópica", *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica.* 2002;23:27-32.
- Schurr MO, Arezzo A, Neisius B, Rininsland H, et al. Trocar and instrument positioning system TISKA. An assist device for endoscopic solo surgery. *Surg Endosc.* 1999;13:528-31.
- Jaspers JE, Den Boer KT, Sjoerdsma W, Bruijn M, et al. Design and feasibility of PASSIST, a passive instrument positioner. *J. Laparoendosc & Adv Surg Tech A.* 2000;10:331-5.
- Arezzo A, Schurr MO, Braun A, Bues GF. Experimental assessment of a new mechanical endoscopic solosurgery system: Endofreeze. *Surg Endosc.* 2005;19:581-8.
- Minor Martínez A, Muñoz Guerrero R, Nieto J, Ordorica Flores R. Postural Mechatronic assistant for laparoscopic training. *Min Invas Ther & Allied Technol.* 2005;14:357-9.

This article was downloaded by:[Martínez, Arturo Minor]
On: 26 November 2007
Access Details: [subscription number 787265543]
Publisher: Informa Healthcare
Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954
Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



Minimally Invasive Therapy and Allied Technologies

Publication details, including instructions for authors and subscription information:
<http://www.informaworld.com/smpp/title-content=t713683124>

Tonatiuh II: Assisting manipulator for laparoscopic surgery

Arturo Minor Martínez ^a; Ricardo Ordórica Flores ^b; Mauricio Galán Vera ^a; Raúl Cruz Salazar ^a; Mosso Jose Luis ^c; Lorias Daniel ^a

^a Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica Sección de Bioelectrónica, Mexico City, Mexico

^b Hospital Infantil Federico Gómez, Mexico City, Mexico

^c Instituto Mexicano del Seguro Social, Mexico City, Mexico

Online Publication Date: 01 January 2007

To cite this Article: Martínez, Arturo Minor, Flores, Ricardo Ordórica, Vera, Mauricio Galán, Salazar, Raúl Cruz, Luis, Mosso Jose and Daniel, Lorias (2007) 'Tonatiuh II: Assisting manipulator for laparoscopic surgery', *Minimally Invasive Therapy and Allied Technologies*, 16:5, 310 - 313

To link to this article: DOI: 10.1080/13645700701384132

URL: <http://dx.doi.org/10.1080/13645700701384132>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Full terms and conditions of use: <http://www.informaworld.com/terms-and-conditions-of-access.pdf>

This article maybe used for research, teaching and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, re-distribution, re-selling, loan or sub-licensing, systematic supply or distribution in any form to anyone is expressly forbidden.

The publisher does not give any warranty express or implied or make any representation that the contents will be complete or accurate or up to date. The accuracy of any instructions, formulae and drug doses should be independently verified with primary sources. The publisher shall not be liable for any loss, actions, claims, proceedings, demand or costs or damages whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with or arising out of the use of this material.

ORIGINAL ARTICLE

Tonatiuh II: Assisting manipulator for laparoscopic surgery

ARTURO MINOR MARTÍNEZ¹, RICARDO ORDÓRICA FLORES², MAURICIO GALÁN VERA¹, RAÚL CRUZ SALAZAR¹, MOSSO JOSE LUIS³ & LORIAS DANIEL¹

¹Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica Sección de Bioelectrónica, Mexico City, Mexico, ²Hospital Infantil Federico Gómez, Mexico City, Mexico, and ³Instituto Mexicano del Seguro Social, Mexico City, Mexico

Abstract

In this article we show the design of the Tonatiuh II robotic manipulator. This robotic assistant has an original electromechanical configuration and respects the laparoscope center of insertion as an invariant point for navigation in the work space. The manipulator went through several stages before reaching its final version. Surgical trials have shown the robot to be useful in the operating room and as a training assistant in specialty microsurgery.

Key words: *Robotic assistance, laparoscopic holder, laparoscopically assisted*

Introduction

Robotic assistants have proven their indisputable value as operating room tools, improving on the precision and quality of optics positioning performed by human assistants. Additional advantages of using this technology are that it frees up working space on the operating table and surgeons can operate alone. The robots with the most reported procedures and an evaluation of their performance are AESOP (Animated Endoscopic System for Optimal Positioning; Computer Motion, Goleta, CA, USA) (1) and ENDOASSIST (ProSurgics, Loudwater, High Wycombe, UK) (2,3). Other robotic configurations, such as LARS (Laparoscopic Assisted Robot System) (4), HISAR (5), kaLAR (6), etc., did not reach this stage, but did allow to establish new design criteria, such as TISKA (7) and FLIPS (8), or opened the possibility of proposing new technologies, such as EndoFreeze (9) or PMAT(10). The trend towards using this technology is driven by the quality standards achieved both in surgical procedures(11,12) and individual training methods, which no doubt allow the surgeon to make quick

hand-eye adjustments based on dynamic changes in optics perspectives. When we tried to apply PMAT to gynecological surgeries, we found that the PMAT design, and the very nature of the surgery, made it impossible to reach the laparoscope entry position, let alone do exploration. For this reason, we decided to develop, with our own criteria, an assistant manipulator robot for laparoscopic surgery. The objective of this design is to offer an easy-to-install, low-cost assistant to help in surgeries and training. In this first phase, we show the functional development of the robot, without optimization of the interactive system. The project was backed by the Consejo Mexicano de Ciencia y Tecnología (Mexican Science and Technology Council) with a view to producing a self-training technology for laparoscopic surgery, and was successful thanks to support from institutions such as the Instituto Mexicano del Seguro Social (Mexican Social Security Institute), the Hospital Infantil Federico Gómez (Federico Gómez Children's Hospital) and the Escuela Superior de Medicina (Higher School of Medicine) of the Instituto Politécnico Nacional (National Polytechnic Institute).

Material and methods

Technology

The initial design principles were that the robot work space in the pneumoperitoneum be an inverted virtual cone and that the laparoscope point of insertion be invariant. Design and manufacture were carried out at our institute; operating room functionality and electrical safety were the fundamental criteria applied. The Tonatiuh II robot consists of four articulations and a linear effector (see Figure 1 a and b). The degree of rotational freedom at the base (1) is to position the manipulator over the laparoscope insertion port; the other three degrees of freedom are for navigation. Of these three articulations, two are active (2,3), while the third is passive (4). The passive degree of freedom (4) works together with the linear articulation (2). When this articulation rises or falls, the passive degree of freedom (4) allows the laparoscope to swing, taking as point of support the trocar-skin intersection, which is unaffected since, as shown in Figure 1, the tension produced by the pneumoperitoneum in the abdomen confers support to that point. This displacement corresponds to the up-down move-

ment of the laparoscope, which relates to the length change of a virtual cylindrical work space, as shown in Figure 1. Articulation (3) enables rotation of the laparoscope over the point of insertion, thus generating the wall of the virtual cylindrical work space. Finally, the linear effector (5) makes it possible to put in or pull out the laparoscope linearly in the direction in which the device points. This degree of freedom allows for a radius change of the virtual cylindrical work space. Electronic control was maintained with the microcontroller. A biomedical power source was used to guarantee electrical safety and the laparoscope holder placed in the final effector was made of medical grade Teflon to allow for sterilization.

Experimental evaluation

The experimental testing allowed us to reconsider and optimize the main design criteria. Initially, training boxes were used as test work spaces. The main error in doing this is that the trainer's upper wall is rigid and, therefore, robot performance is only partially on target. The robot performed as required when we migrated from the training boxes to dogs or pigs.

The hypothesis that an inverted cone work space is sufficient for any experimental surgery is only partially true, because in surgeries such as Nissen's, the laparoscope is very close to the abdominal wall. It is therefore necessary that the robot practically describes a cylindrical work space of variable radius with entry through the centre, as shown in Figure 1. The Tonatiuh II robot describes such a work space.

An important test was to evaluate system behavior in raising or lowering laparoscope orientation. During the experimental evaluation in training boxes and animals, it was observed that at no time does the robot exert pressure on the point of insertion. The point of insertion is used solely as a balance point for laparoscope orientation. When the vertical articulation (2) raises or lowers the device, the inertia and weight of the laparoscope itself modify its orientation. The spatial limitations of this joint mechanism appear in Figures 2 and 3, which show the behavior of the laparoscope when up-down motion is activated and the effect on the tip of the device.

The mechanism and visual feedback work together as follows. When the laparoscope is in the almost vertical position, the robot "carries" the laparoscope and no stress is exerted on the point of insertion. When the laparoscope is in the horizontal position, there is visualization of the abdominal wall. The assistant is not used beyond this visual frontier, so in none of the working positions does the

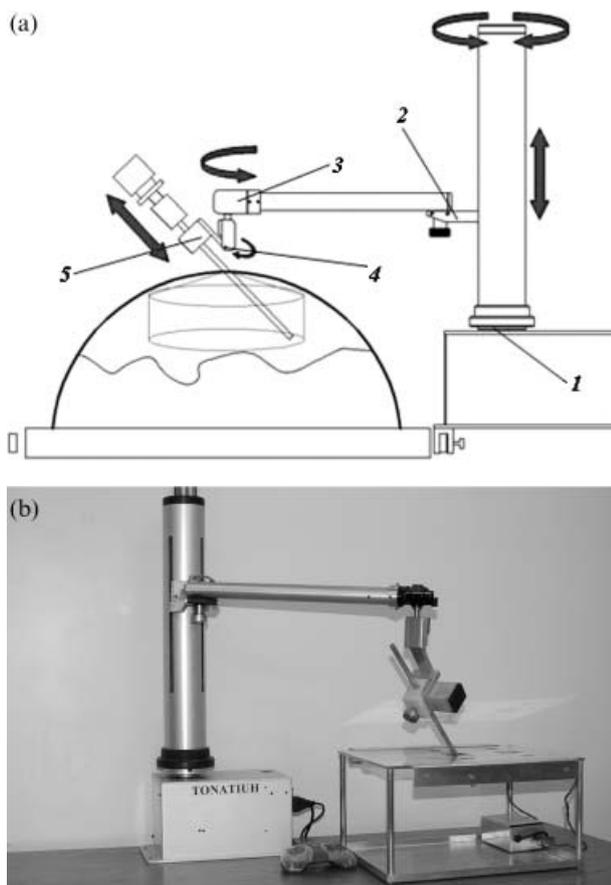


Figure 1 a and b. Tonatiuh II: Concept and Design.

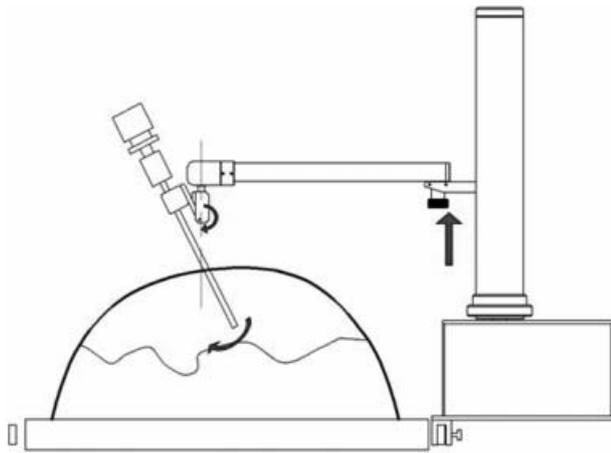


Figure 2. Vertical position limit of the navigation system of the Tonatiuh assistant.

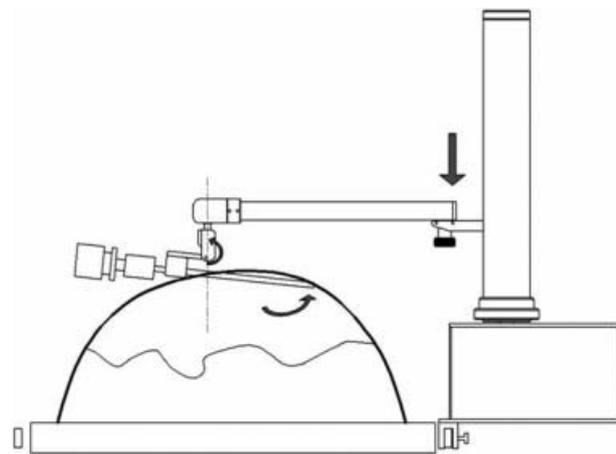


Figure 3. Horizontal position limit of the navigation system of the Tonatiuh assistant.

electromechanical assembly exert stress on the point of insertion. Once the laparoscope has been oriented, it can be put in or pulled out linearly using effector 5. When this mechanism is activated, the laparoscope position firms up, so that again no stress is exerted on the point of insertion. The electronic control system can change the speed of the articulation motors to produce the millimetric displacements required for microsurgery.

Discussion

The formal and informal comments we have received from surgeons who have used the equipment are very positive. Their participation has allowed us to explore the various undeniable functional features the robot must offer in the operating room. Such requirements include: Reliable sterilization, operator adaptability, and an

ergonomic design that saves time and economizes movement in the operating room. The tests carried out with the robot, such as vaginal hysterectomy, cholecystectomy, seromiectomy, fundoplication, gastrostomy, pyloroplasty, and esplenectomy, have shown that the robot can be used in all laparoscopic surgeries. In our control group, the robotic assistant was used by surgeons who had experience with the AESOP robot, as well as by surgeons who had no experience with this technology. The first group made observations with respect to the activation system, which is distal, and was not entirely to their satisfaction. However, these surgeons did like the ease of adaptability to the system and the fact that the system is functionally the same as the AESOP robot. The second group of surgeons made no comments to this respect, but, importantly, surgeons and their lead assistant were able to adapt to the robot in less than one hour. This was because each movement required on the monitor is directly related to each button on the joystick of the robotic assistant. The last test performed on a Winstar rat showed that the robot's speed control allows for easy use at that geometric level. Both groups of surgeons agreed that having the robotic assistant on the operating table is not obstructive.

Conclusions

A robot with only four degrees of freedom, which can be assembled in the operating room in five minutes and has a total weight of 15 kg, has been designed. The robot is mounted onto the rails of the operating table and requires only two electrical connections: The power outlet and the robot control connection. The installation and start-up procedure is practical and quick. The robot cover is sterile and the final effector sterilization is done by the traditional methods. Clinical experience has shown the robot to be functional in the operating room as an easily adaptable tool for holding and positioning the laparoscope. Following the surgical experiences without any peri- or postoperative complications, we have decided to analyze the ergonomic adaptation of the robot to microsurgical training, as well as the need to change the current activation interface. Experience has shown that the interface helps residents to better adapt to surgical exploration, distally assisting surgeries.

References

1. Sackier JM, Wang Y. Robotically Assisted Laparoscopic Surgery. *Surg Endosc.* 1994;8:63-6.
2. Dagan J, Bat L. Endoassist, a mechanical device to support an endoscope. *Gastrointest Endosc.* 1982;28:97-8.

3. Aiono S, Gilbert JM, Soin B, Finlay PA, et al. Controlled trial of the introduction of a robotic camera assistant (EndoAssist) for laparoscopic cholecystectomy. *Surg Endosc.* 2002;16: 1267–70.
4. Taylor R, Funda J, Eldridge B, Gomory S, et al. A telerobotic Assistant for laparoscopic surgery. *IEEE Eng. Med.* 1995;14:279–88.
5. Funda J, Gruben K, Eldridge B, Gomory S, et al. Control and evaluation of a 7-axis surgical robot for laparoscopy. *IEEE International Conference on Robotics and Automation Proceedings.* 1995;vol.2:1477–84.
6. Yun-Ju L, Jonathan K, Seong-Young K. Design of a compact laparoscopic assistant Robot: Kalar ICCAS 2003 Gyeongju Korea.
7. Schurr MO, Arezzo A, Neisius B, Rininsland H, et al. Trocar and instrument positioning system TISKA. An assist device for endoscopic solo surgery. *Surg Endosc.* 1999;13: 528–31.
8. Buess GF, Arezzo A, Schurr MO, Ulmer F, H de Pescador , et al. A new remote-controlled endoscope positioning system for endoscopic solo surgery. The FIPS endoarm. *Surg Endosc.* 2000;14:395–9.
9. Arezzo A, Schurr MO, Braun A, Buess GF. Experimental assessment of a new mechanical endoscopic solosurgery system: Endofreeze. *Surg Endosc.* 2005;19:581–8.
10. Minor A, Muñoz R, Nieto J, Ondorica R. Postural Mechatronic Assistant for Laparoscopic Training. *Min Invas Ther & Allied Technol.* 2005;14:357–9.
11. Nebot PB, Jain Y, Haylett K, Stone R, et al. Comparison of Task Performance of the Camera-Holder Robots EndoAssist and Aesop Surgical Laparoscopy. *Endoscopy & Percutaneous Techniques.* 2003;13:334–8.
12. Proske JM, Dagher I, Franco D. Comparative Study of Human and Robotic Camera Control in Laparoscopic Biliary and Colon Surgery. *Journal of Laparoendoscopic & Advanced Surgical Techniques.* 2004;14:345–8.