



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA, UNIDAD
ZACATENCO**

**UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN.**

**PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO
ESTRATIFICADO, UTILIZANDO EL MÉTODO
DE DIFERENCIAS FINITAS.**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN ESTRUCTURAS.

PRESENTA

REYNALDO SOLÍS ORTIZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. ESTEBAN FLORES MÉNDEZ

MÉXICO, D.F. ENERO DE 2012.





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D. F., siendo las 18:00 horas del día 01 del mes de junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A. – U. Z. para examinar la tesis titulada:
Propagación de ondas en un medio estratificado utilizando el método de diferencias finitas.

Presentada por el alumno:

Solís
Apellido paterno

Ortiz
Apellido materno

Reynaldo
Nombre(s)

Con registro:

B	0	5	0	8	7	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Esteban Flores Méndez

Dr. Héctor Aureliano Sánchez Sánchez

Dr. Ernesto Pineda León

Dr. Jorge Luis Alamilla López

Dr. Sergio Cruz León

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

M. en C. Pino Durán Escamilla



SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 01 del mes de Junio del año 2011, el (la) que suscribe Reynaldo Solís Ortiz alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Estructuras con número de registro B050876, adscrito a la E.S.I.A.-U.Z., manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Esteban Flores Méndez y cede los derechos del trabajo intitulado "*Propagación de ondas en un medio estratificado, utilizando el método de diferencias finitas*", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección rey_dre@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Reynaldo Solís Ortiz

Dedicatoria

A mis padres: Reynaldo y Teresa, Por ser guía en mi vida y por confiar en mí.

A mi abuela Petrona (q.e.p.d.+) por todas sus enseñanzas de vida y amor, que me brindo para salir adelante.

A don librado por su esfuerzo y confianza brindada.

A mis hermanos: Francisca, Dulce, Freddy, Gloria y Pedro por su apoyo incondicional.

A mi esposa Agustina y a mi hijo Fernando por ser mi inspiración y motivo para superarme.

A mi director de tesis Dr. Esteban Flores Méndez, por su ejemplo, apoyo, motivación, paciencia y tiempo brindado.

A mis primos (as), sobrinos (as) y tíos (as) por su apoyo moral.

Agradecimientos

Al instituto politécnico nacional, por medio de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad “Adolfo López Mateos” por mi formación académica.

Al Dr. Héctor Aureliano Sánchez Sánchez, Dr. Sergio Cruz León, Dr. Ernesto Pineda León Dr. Jorge Luis Alamilla López por sus valiosos comentarios durante el desarrollo de la tesis y puntuales observaciones para el mejoramiento del trabajo.

RESUMEN

Se estudia la propagación de ondas elásticas en un medio estratificado en una configuración 2D. Las ondas P y S son producidas por una fuente en un medio elástico sólido. Se realiza las soluciones de las ecuaciones de elasticidad, las ecuaciones de Navier, así como las soluciones de las ecuaciones de onda en términos potenciales, y el análisis de reflexión y transmisión de las ondas planas P y S. La solución de las ecuaciones de movimiento se obtiene vectorialmente y en el dominio del tiempo, utilizando el método pseudo –espectral de diferencias finitas. La formulación se basa en las ecuaciones constitutivas y de equilibrio, en términos de velocidades y esfuerzos para reducir el grado de las ecuaciones diferenciales.

En el método pseudo-espectral las derivadas con respecto a las variables espaciales se realizan con el formalismo de la transformada rápida de Fourier. Con el objetivo de optimar la precisión de dichas derivadas, se utilizan mallas alternadas.

En el presente trabajo se enfoca el estudio de la propagación de ondas de medios estratificados sólidos-líquidos, utilizando las ondas P y S modeladas mediante las ecuaciones constitutivas y el método de diferencias finitas.

Se hizo la simulación de dos casos: Para un sistema de un medio estratificado Sólido-sólido y Líquido-sólido Simétrico. Para establecer los cálculos, los resultados se compararon con soluciones por medios de graficas.

Los experimentos numéricos muestran una gran estabilidad del método de diferencias finitas, por lo que se plantean y discuten posibles extensiones a casos más complejos en geometría y materiales.

ABSTRACT

Is study the propagation of elastic waves in a stratified medium in a configuration 2D. The waves P and S are produced by a source in an medium elastic solid. There are realized the solutions of the equations of elasticity, the equations of Navier, as well as the solutions of the wave equations in terms of potential, and analysis of reflection and transmission of plane waves P and S. The solution of the equations of motion is obtained vectorially and in time domain, using the pseudo-spectral method of finite differences. The formulation is based on the constitutive and equilibrium equations in terms of speed and efforts to reduce the degree of differential equations

In the pseudo-espetral method the derivatives with respect to the spatial variables are performed with the formalism of the fast Fourier transform. With the optimize objective the accuracy of these derivatives, staggered grids are used.

In the present work focuses the study of wave propagation solid-liquid stratified media using the P and S waves modeled by the constitutive equations and the finite difference method.

It was the simulation of two cases: For a system in a stratified medium solid-solid and liquid-solid symmetrical. To establish the calculations, the results were compared with solutions by means of graphs.

The numerical experiments show a great stability of finite difference method, for what they appear and discuss possible extensions to more complex cases of geometry and materials.

Contenido general

	Página
Resumen.....	ii
Abstract.....	iii
Lista de figuras.....	vi
Lista de cuadros.....	x
Simbología.....	xi
CAPITULO 1.	
1.1 Introducción.....	2
1.2 Estado del arte.....	3
1.3 Objetivo.....	4
1.4 Metas.....	5
1.5 Justificación.....	5
1.6 Planteamiento del problema.....	5
1.7 Sinopsis.....	6
CAPITULO 2. Ecuaciones de la elasticidad y onda.	
2.1 Introducción.....	9
2.2 Descripción de las ecuaciones de elasticidad.....	9
2.2.1 Tensor de esfuerzos y deformación.....	9
2.2.2 Ecuación de movimiento.....	11
2.2.3 Ecuación de Navier.....	12
2.2.4 Ecuaciones de equilibrio.....	13
2.3 Ecuación de Onda.....	14
2.4 Reflexión y Transmisión de las Onda S, P y SV.....	16
2.5 Reflexión de Ondas SH,P y SV en superficie libre de un semiespacio elástico.....	17
CAPITULO 3. Método de solución.	
3.1 Método de diferencias finitas.....	25
3.2 Análisis de Fourier.....	25
3.3 Pulso de Ricker.....	28
3.4 Distribución de fuerzas para representar una fuente.....	29
3.5 Formulación 2D del método de diferencias finitas.....	30
3.6 Esquema en desplazamiento para el problema SH.....	33
3.7 Esquema en desplazamiento para el problema P-SV.....	37
3.8 Condiciones de frontera.....	41
3.9 El problema de la superficie libre de ondas SH, P-SV.....	43
CAPITULO 4. Propagación de ondas en un medio estratificado.	
4.1 Ejemplos estudiados.....	48
4.2 Programas de cómputo.....	49
4.3 Prueba de estabilidad.....	51
4.4 Soluciones de los ejemplos estudiados.....	54

4.5 Resultados del ejemplo 1.....	56
4.6 Resultados del ejemplo 2.....	64
4.7 Resultados del ejemplo 3.....	71
4.8 Resultados del ejemplo 4.....	80
Conclusiones y trabajos a futuro.....	87
Referencias.....	89
Anexo 1.....	93
Anexos 2.....	99
Anexos 3.....	105
Glosario.....	108

Lista de figuras

	Capítulo 1.	Página
1.1	Sistema de múltiples estratos sólidos, con diferentes propiedades mecánicas.	6
Capítulo 2. Ecuaciones de la elasticidad y onda.		
2.1	Reflexión y transmisión de una onda plana incidente SH en la interface de dos estratos con propiedades diferentes.	17
2.2	Reflexión y Transmisión de una onda plana incidente P y de una SV en la interface de dos estratos con propiedades diferentes, se aprecian los ángulos de incidencia, de reflexión y de transmisión.	17
2.3	Onda SH incidente.	19
2.4	(a) Incidencia de ondas P.	22
2.4	(b) Incidencia de ondas SV.	22
Capítulo 3. Método de solución.		
3.1	Representación del pulso de Ricker en el dominio del tiempo.	28
3.2	Representación del pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia.	29
3.3	(a) Distribución de fuerzas correspondiente a una explosión que genera una onda P.	30
3.3	(b) Distribución de fuerzas correspondiente a una explosión que genera una onda S.	30
3.4	Esquema de malla alternada en espacio y tiempo.	32
3.5	Esquema de discretización para el caso SH en 2D mediante el método de diferencias finitas.	34
3.6	Discretización del medio con una malla alternada para el problema SH.	34
3.7	Esquema de discretización para el caso P-SV en 2D mediante el método de diferencias finitas.	38
3.8	Discretización del medio con una malla alternada para el problema P-SV.	39
3.9	Bordes absorbentes de anchura n.	42
3.10	Detalle de las reflexiones en la superficie libre, tras la incidencia de onda P y S.	43
3.11	Matriz de unos, ceros y puntos de las fronteras absorbentes.	45
3.12	Matriz en la que se observa una clasificación de los	45

diferentes puntos que definen el modelo.

Capítulo 4. Propagación de ondas en un medio estratificado.

4.1	Programa elastic_cyl.	49
4.2	Programa MovieCyl.	50
4.3	Representación del método de diferencias finitas frente al método de ondas discreta para diferentes valores.	53
4.4	Sistema de estratos sólidos, con diferentes propiedades mecánicas.	54
4.5	Propagación de una onda, en una instantánea de un tiempo 0.00013 y 0.00016 segundos.	56
4.6	Propagación de una onda, en una instantánea de un tiempo de 0.00033 segundos.	57
4.7	Propagación de una onda P, en un instante de un tiempo de 0.00038 segundos.	57
4.8	Propagación de una onda P transmitida, en un instante de un tiempo de 0.00041 segundos. Propagación de una onda en estratos Sólidos.	58
4.9	Propagación de ondas P transmitida y reflejada, en una instantánea de un tiempo de 0.00049 y 0.00052 segundos.	59
4.10	Propagación de una P transmitida y reflejada, en una instantánea de un tiempo de 0.00058 y 0.00061 segundos.	60
4.11	Propagación de ondas de Interfase , en un instante de tiempo 0.00074 segundos.	60
4.12	Propagación de ondas P y S en un medio estratificado sólido, en una instantánea de un tiempo de 0.00080 segundos.	61
4.13	Sistemas de multi-estrato sólido y simétrico, con distintas propiedades mecánicas.	62
4.14	Inicio de la propagación de una onda P, en una instantánea de un tiempo 0.00013 y 0.00016 segundos.	64
4.15	Propagación de una onda P transmitida, en una instantánea de un tiempo de 0.00019 y 0.00024 segundos.	65
4.16	Propagación de ondas P transmitidas y reflejadas en un medio sólido, en una instantánea de tiempo de 0.00033 y 0.00041 segundos.	66
4.17	Propagación de las ondas P, en un multi-estrato sólido en una instantánea de un tiempo de 0.00058 segundos.	67
4.18	Propagación de ondas de Interfase o stoneley en un multi-estrato sólido en una instantánea de un tiempo de 0.00097 segundos.	68
4.19	Sistemas de un medio estratificado líquido-sólido y simétrico, con distintas propiedades mecánicas.	69
4.20	Inicio de una Propagación de la onda P en un estrato	71

	líquido, en una instantánea de un Tiempo de 0.000055 y 0.00013 segundos.	
4.21	Propagacion de una Onda P en un estrato líquido, en una instantánea de un tiempo de 0.00016 y 0.00033 segundos.	72
4.22	Propagacion de una onda P transmitida en un estrato sólido, en una instantánea de un tiempo 0.00038 y 0.00041 segundos.	73
4.23	propagacion de una onda P en un medio liquido confinados en dos medios solidos, en una instantánea de un tiempo de 0.00047 y 0.00052 segundos.	73
4.24	Propagacion de las ondas de Interfase, en un medio liquido confinados con dos medios solidos, en un instante de un tiempo de 0.00058 segundos.	74
4.25	Propagacion de las ondas P reflejadas y transmitidas, en una instantánea de un tiempo de 0.00063 segundos.	75
4.26	Propagación de ondas transmitidas y reflejadas en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de tiempo de 0.00077 segundos.	75
4.27	Propagación de las ondas P Transmitidas y Reflejadas en un multi-estrato Líquido-sólido, en una instantánea de un tiempo de 0.00091 segundos.	76
4.28	Propagación de las ondas S Transmitida en un multi-estrato líquido-sólido, con una instantánea de un tiempo de 0.0010 segundos.	77
4.29	Sistemas de multi-estrato líquido-sólido y simétrico, con distintas propiedades mecánicas.	78
4.30	Propagación de una P en un estrato líquido, en una instantánea de un tiempo 0.00013 y 0.00016 segundos.	80
4.31	Propagacion de una P transmitida en un estrato líquido confinado a un medio sólido, en una instantánea de un tiempo de 0.00022 y 0.00027 segundos.	81
4.32	Propagación de una onda P incidente Transmitida, con una instantánea de un tiempo de 0.00030 y 0.00033 segundos.	82
4.33	Propagacion de ondas P transmitida y reflejada en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de un tiempo de 0.00036 y 0.00044 segundos.	83
4.34	Propagación de las ondas P y S transmitida en un multi-estrato líquido-sólido, con una instantánea de un tiempo de 0.00052 y 0.00058 segundos.	84
4.35	Propagación de las ondas de Interfase, en un multi-estrato líquido –sólido, en un instante de un tiempo de 0.00066 segundos.	84
4.36	Propagación de ondas de Interfase en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de un tiempo de 0.00077 segundos.	85

4.37	Propagación de las ondas de Interfase en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de un tiempo de 0.00097 seg	86
------	--	----

Anexo 1

1.1	Frentes de onda propagándose hacia fuera de la fuente.	93
1.2	Ondas de cuerpo.	94
1.3	La onda S y sus componentes SV y SH.	95
1.4	Definición del ángulo azimutal.	96
1.5	Forma de las ondas Superficiales.	97

Anexo 2

2.1	a) Cuerpo sometido a un estado de fuerzas.	99
2.1	b) Diagrama de cuerpo libre de la porción B.	99
2.2	Representación de esfuerzos en un volumen elemental.	99
2.3	Representación de la Ecuación de Movimiento.	101

Lista de cuadros

		Página
Capítulo 4	Propagación de ondas en un medio estratificado	
4.1	Propiedades mecánicas para un sistema de múltiples de estratos sólidos simétricos.	55
4.2	Propiedades mecánicas de un multi-estrato sólido simétrico.	63
4.3	Propiedades de un medio Estratificado líquido-sólido simétrico.	70
4.4	Propiedades mecánicas para un sistema de multi-estratos líquido-sólido dispuestos simétricamente.	79

Lista de simbolos

δ_{ij}	Delta de Kronecker.
e_{ij}	Tensor de deformaciones infinitesimales de cauchy.
Δ	Operador Laplaciano.
$\Delta \cdot \vec{u}$	Divergencia de u .
Δ^2	Operador Laplaciano
$\Delta \times \vec{u}$	Rotacional de u .
$\Delta \Phi$	Componentes de ondas P.
$\Delta \times \vec{\Psi}$	Componentes de ondas S.
α	Velocidad de propagación de las ondas P.
β	Velocidad de propagación de las ondas S.
m_{xx}, m_{yy} y m_{xy}	Derivadas de esfuerzo con respecto al tiempo.
π	Pi (3.1416).
t	Tiempo.
t_s	Centro del pulso Ricker.
t_p	Periodo característico del pulso Ricker.
f_p	Frecuencia característica.
ε	Deformación.
E	Modulo de elasticidad de Young.
σ_{xx}	Esfuerzo en el lado x y dirección x.
ν	Modulo de Poisson.
Δt	Incremento de tiempo.
Σ	Sumatoria.
G	Modulo de Rigidez.
T	Tensor de deformación.
L_f	Longitud final.

L_i	Longitud inicial.
n_x	Vector normal dirección x.
f_x, f_y y f_z	Fuerzas en las tres direcciones x, y, z .
Δx	Incremento en el eje x.
$a_i b_i$	Sumatoria de índices repetidos.
$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$	Divergencia del tensor de esfuerzo.
ρ	Densidad.
x_i	Coordenadas espaciales.
f_i	Fuerza de cuerpo.
u_1, u_2 y u_3	Desplazamiento en el eje x, y, z .
λ y μ	Constantes de Lamé.
σ_{ij}	Esfuerzos normales.
ϕ y ψ	Ángulos de fase, potencial.
ψ_n	N-ésimo ángulo de fase de la n-ésima armónica de una función periódica.
ω	Frecuencia radial.
ω_{ij}	Tensor rotacional.
ω_c	Frecuencia de corte.
$n\omega$	Enésima armónica de una función periódica.
AB	amplitudes de ondas o funciones del potencial de desplazamientos
A_0	Amplitud de la onda incidente
a_n	Coeficiente de la serie de Fourier que denota la amplitud de ondas seno.
b_n	Coeficiente de la serie de Fourier que denota la amplitud de ondas coseno.
a_0	Coeficiente de la serie de Fourier que denota la posición de la función en y.
c	Velocidad de fase
c_{ijkl}	Tensor de constantes elásticas
c_n	enésima amplitud armónica de una función periódica.

dt	Diferencia de tiempo
e	Base de los logaritmos, naturales.
ε	Energía asociada a un ciclo de oscilación.
E_{ij}	Tensor de deformación de Green.
$F\omega$	Transformada de Fourier de la función $F(t)$
fN	Frecuencia de Nyquist
H	profundidad de la frontera entre el medio estratificado y el semi-espacio.
h_n	Espesor del n-ésimo estrato.
i, j, k	Vectores unitarios en las direcciones x, y, z .
n	Valor entero positivo
P	Onda compresional, presión.
Q	Factor de calidad.
v^{inc}	Onda plana incidente.
SH	Onda de cortante horizontal.
SV	Onda de cortante vertical.
u_1, u_2, u_3	Campos de desplazamientos en x, y, z .
FFT	Transformada rápida de Fourier
IFFT	Transformada rápida inversa de Fourier.
DNW	Número de onda discreta.

CAPÍTULO 1

Introducción.

1. 1 INTRODUCCIÓN

El problema del fenómeno de la propagación de ondas es muy amplio y general. Se pueden abordar distintos niveles de dificultad, aunque aparece lógico empezar desde el punto básico, para que posteriormente se vayan tratando niveles más complejos y su medición aporta elementos para entender los secretos de la naturaleza. Una onda es una perturbación que se propaga desde el punto en que se produjo hacia el medio que rodea el mismo y se transmite en todas las direcciones por las que se extiende el medio con una velocidad constante (siempre que el medio sea isótropo), o variable si el medio es anisótropo o inhomogéneo.

Estos fenómenos implican interacciones y por ello las observaciones pueden complicarse. Una manera de entender una amplia variedad de fenómenos en distintas escalas es por medio del estudio de la propagación de ondas elásticas.

En la naturaleza existen diversos fenómenos de propagación de las perturbaciones mecánicas. Las ondas mecánicas se originan por el movimiento forzado de una porción de un medio deformable. Así, las perturbaciones, en una parte del medio se transmiten a las partículas vecinas propagando el movimiento, a esto se le conoce como propagación de ondas.

Una deformación de un cuerpo sólido que viaja a través de un medio elástico se llama onda elástica; Cuando se produce un sismo, el suelo experimenta un movimiento violento; la perturbación ocasionada por el sismo se propaga por la superficie terrestre en todas direcciones con velocidades que dependen de la naturaleza del terreno y de las propiedades elásticas de los materiales se denomina onda sísmica; la energía que origina estas perturbaciones se transmite por el terreno en forma de ondas elásticas de compresión, dilatación y torsión. También se dice que el conjunto de todos los puntos en el espacio que son alcanzados simultáneamente por una onda se le llama frente de onda. Por tanto, las características de estas ondas están directamente influenciadas por la fuente sísmica que las genera y por las propiedades del medio por el que viajan.

En este tipo de medios elásticos existen dos tipos de ondas; (Anexo 1) aquellas que se denominan ondas P y las ondas S. Las ondas P son las llamadas ondas primarias y viajan a una velocidad mayor que la onda S, también denominadas secundarias. Cuando una onda se transmite en un medio, y este presenta una superficie en la cual la onda incide, estas ondas interactúan con ella y se producirán reflexiones. Si un medio presenta estratos con propiedades diferentes, y una onda que se propaga incide sobre él, producirán reflexiones y refracciones entre un estrato y otro. Estos tipos de ondas pertenecen a las llamadas ondas internas, puesto que viajan por el interior de la superficie terrestre.

1.2 Estado del arte

El estudio de la propagación de ondas en un medio estratificado a través del método de diferencias finitas, se ha analizado desde la segunda mitad del siglo XX, entre los investigadores que han trabajado en ello se destaca David G. Harkrider (1964), planteo la continuidad de las deformaciones constantes, en lugar de la de los esfuerzos cortantes, para posteriormente intentar modelar un estrato fluido-intermedio reduciendo a cero el modulo de cortante de un estrato liquido.

Alterman y Karal (1968), resuelven el problema de una capa sobre un semiespacio directamente aplicando las ecuaciones de contorno (continuidad de esfuerzos y desplazamientos en la interfaz entre ambos medios, y la nulidad de los esfuerzos en la superficie libre), de manera que generaban un esquema implícito el cual les obligaba a resolver un sistema de ecuaciones. Ellos emplearon un esquema convencional en desplazamientos y desarrollaron su algoritmo para medios homogéneos.

Madariaga.R., (1976), desarrollo el esquema alternado de diferencias finitas esquema basado en las ecuaciones elásticas acopladas de movimiento de primer orden y las leyes constitutivas expresadas en velocidades y esfuerzos de la partícula, las cuales utilizo para modelar la propagación de una fractura circular en un medio elástico.

Alford, R.M.,K.R.Kelly, *et al.* (1974), utilizaron un esquema centrado de desplazamiento, donde obtuvieron resultados que fueron alentadores para esquemas sin dispersión y para llegar a ello utilizaron intervalos espaciales de mallado lo suficientemente pequeños para evitar obtener interpretaciones erróneas de sismogramas. El esquema centrado fue práctico ya que se pudo modelar adecuadamente la propagación de distintas ondas como las ondas superficiales.

Boore (1972) y Kelly *et al.* (1976), hacen evolucionar un algoritmo para medios heterogéneos e introducen la idea de promediar los parámetros del medio para problemas SH en 2D, donde los parámetros de Lamé y la densidad se igualan a cero para simular la superficie libre.

Aki y Richards (1980), estudiaron la propagación de ondas en medios verticalmente heterogéneos y abordan conceptos como el vector desplazamientos-esfuerzos y el de matriz propagadora, bases del método de Haskell. El análisis lo presenta para la incidencia de ondas P, SV y SH. Kosloff y Baysal (1982), y Ávila, Suarez y Sánchez Sesma (1993), simularon la propagación de ondas sísmicas en configuraciones geológicas irregulares, por medio del método de diferencias finitas utilizando la transformada fourier.

Capítulo 1

Rong-Song *et al.* (1988), quienes usaron el método de diferencias finitas para simular la propagación de ondas P-SV en un medio elástico con superficie libre poligonal. Estos esquemas requerían mallas no uniformes e introdujeron algunas complejidades y redujeron la exactitud de la solución. Levander (1988), desarrolló la técnica de imágenes para los esfuerzos, en la cual era necesario conocer los valores de las componentes del tensor de esfuerzos sobre la superficie libre. Posteriormente Levander (1988) trabaja con un esquema de cuarto orden de error.

El desarrollo del método de diferencias finitas, aplicado a los de propagación de ondas ha progresado en la última década, entre los que están Ohminato y Chouet (1997), quienes discretizaron la topografía de un problema 3D realizando la superposición de celdas unitarias en un esquema en velocidad-esfuerzos mediante una malla desplazada. Moczo, P.E. Bystricky, *et al.* (1997) utilizaron el método de diferencias finitas alternadas con un muestreo no uniforme. Después Kristek *et al.* (2002), usaron una técnica diferente para modelar la superficie libre, llamada técnica ajuste de la aproximación en diferencias finitas, puesto que no necesita desplazamientos ni esfuerzos virtuales sobre la superficie libre. Moczo *et al.* (2004). empleo esta técnica para calcular el movimiento del suelo en modelos con discontinuidades laterales del material y superficie libre horizontal. Sin embargo Kristek *et al.* (2002) y Moczo *et al.* (2004), emplearon esquemas en velocidad-esfuerzos con mallas desplazadas de cuarto orden de aproximación. Finalmente, Min *et al.* (2004), trabajo en el dominio de la frecuencia con un esquema en desplazamientos y propuso el llamado “esquema basado en celdas”, donde los parámetros de Lamé (ver el capítulo 2), son tomados en las celdas de la malla en lugar de tomarlos en los puntos nodales.

En este trabajo, se va a desarrollar el estudio de la propagación de ondas de un medio estratificado Sólido-Sólido y Sólido-Líquido, utilizando las ondas P y S que son producidas por una fuente en un medio elástico sólido, modeladas mediante las ecuaciones de elasticidad y el método de diferencias finitas, considerando la técnica pseudo-espectral

1.3 Objetivo

Determinar la propagación de ondas en medios estratificados, considerando sus distintas propiedades mecánicas las cuales son: densidad, velocidad de propagación de las ondas de cortante y longitudinales, a través de la realización de un modelo numérico basado en el método diferencias finitas.

Capítulo 1

1.4 Metas

Plantear las ecuaciones de la elasticidad dinámica, (ecuaciones de Navier), en términos de funciones que satisfacen la ecuación de onda.

Formular las ecuaciones de la elasticidad dinámica en términos del método de diferencias finitas, e implementar un esquema de solución.

Realizar un programa computacional donde se resuelvan el campo de desplazamientos y de esfuerzos de las ecuaciones de la elasticidad dinámica mediante el esquema de solución de diferencias finitas debidamente codificado.

Resolver distintos ejemplos del fenómeno de la propagación de onda en un medio estratificado.

1.5 Justificación

Debido a los problemas que se pueden dar en un medio continuo elástico, al aplicar una señal en éste, a través de una fuerza en un punto dado, se provoca una liberación de energía que se propaga en forma de ondas. y su difracción son centrales en el mundo que nos rodea y su medición aporta elementos para desentrañar los secretos de la naturaleza. Estos fenómenos implican muchas interacciones y por ello las observaciones suelen complicarse. Por lo que es útil e importante desarrollar un método que permita encontrar las características de la propagación de la onda.

El estudio de la propagación de ondas es importante, ya que el fenómeno depende de las características mecánicas del medio en que se transmite. La determinación de los tiempos de arribo de ondas disparadas en diferentes lugares del medio, permite la determinación de propiedades tales como las velocidades de onda, permeabilidad y discontinuidades del mismo, lo cual tiene gran aplicación en la ingeniería.

1.6 Planteamiento del problema.

El problema en estudio consta para un sistema de múltiples de estratos sólido simétrico, con diferentes propiedades mecánicas, con una fuente dada en el mismo estrato. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente (Pulso de Ricker), H_i es el espesor del estrato, α_1 y α_2 es la velocidad de la onda P en el sólido, β_1 y β_2 es la velocidad de la onda S en el sólido, ρ_1 y ρ_2 es la densidad del medio sólido, como se muestra en la figura 1.1 Determinar su respuesta.

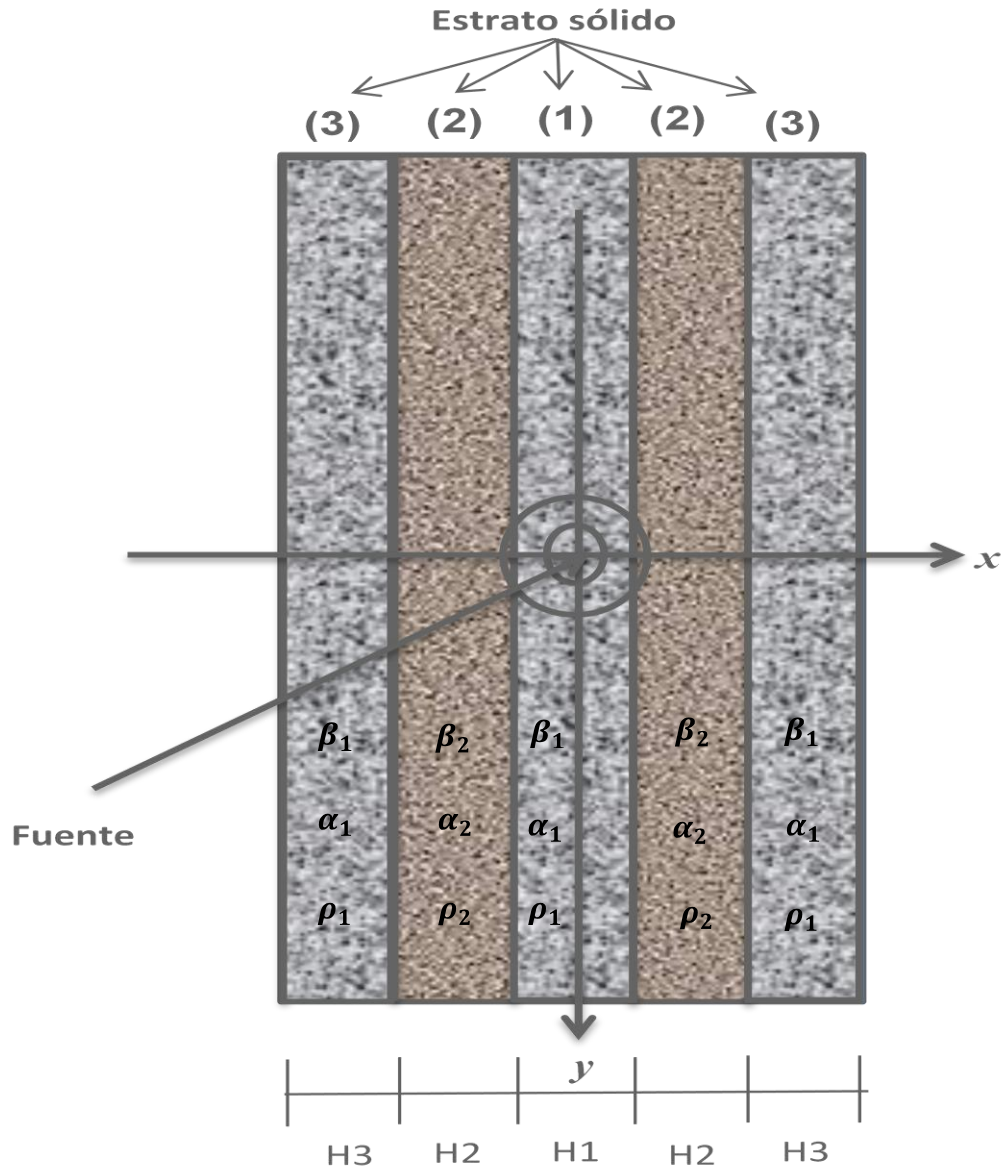


Figura 1.1. Sistema de múltiples estratos sólidos, con diferentes propiedades mecánicas.

1.7 Sinopsis.

El trabajo de esta tesis está formado por 4 capítulos y se describen a continuación:

En el capítulo 1 se presenta la introducción al tema a desarrollar, también el estado del arte donde se mencionan los trabajos de propagación de ondas a través del método de diferencias finitas, por último se implementa el objetivo,

Capítulo 1

metas y justificación que son fundamentales para la elaboración del presente trabajo de tesis

En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones de elasticidad, la ecuación de movimiento y las ecuaciones de las ondas P y S.

En el capítulo 3 se presenta el método de solución de la propagación de ondas, de acuerdo a las ecuaciones de la elastodinámica. Se utiliza el método de diferencias finitas para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que modelan el fenómeno, considerando la técnica pseudo espectral.

En el capítulo 4, por último, se presenta ejemplos de aplicación entorno al problema de la propagación de ondas en un medio estratificado, así como los resultados obtenidos.

Al final, se presentan las conclusiones, recomendaciones, trabajos a futuros, anexos y glosario de este trabajo.

CAPÍTULO 2

Ecuaciones de la elasticidad y onda.

Capítulo 2

2.1 Introducción

El tamaño y la forma de un cuerpo sólido se puede cambiar aplicando fuerzas a su superficie externa, a estas fuerzas externas se oponen fuerzas internas que resisten los cambios de tamaño y forma. Debido a esto, el cuerpo tiende a regresar a su condición original cuando las fuerzas externas se “retiran”. Esta propiedad de un sólido a resistir cambios de tamaño o forma y regresar a la condición original, antes de la deformación, se llama elasticidad. Un cuerpo perfectamente elástico es aquel que recupera perfectamente su forma y tamaño original después de ser deformado.

El medio continuo es un conjunto de partículas que forman parte de un cuerpo, ya sea sólido, gas, o fluido, que es estudiado, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico (molecular). Por lo tanto, se puede decir que hay discontinuidades entre partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar con funciones continuas.

La descripción más elemental del movimiento en un medio continuo puede llevarse a cabo mediante funciones matemáticas que describan la posición de cada partícula a lo largo del tiempo. En general, se requiere que estas funciones y sus derivadas sean continuas. En este capítulo se presenta las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas en un medio estratificado.

2.2 Descripción de las ecuaciones de la elasticidad.

2.2.1 Tensor de esfuerzos y deformación.

En el tensor de esfuerzos (Fung, 1977), los esfuerzos normales están contenidos en la diagonal principal, mientras que en la triangular superior e inferior se localizan los esfuerzos de cortante así, se tiene:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

En la literatura de la mecánica de los medios continuos es común encontrar a los esfuerzos tangenciales denominados con la letra τ .

Capítulo 2

A los esfuerzos que actúan donde los esfuerzos cortantes son nulos se les denominan esfuerzos principales estos son esfuerzos normales y los planos donde actúan se les denomina planos principales.

El tensor de deformación de orden 2 es una matriz que al igual que el tensor esfuerzo sus elementos representan las deformaciones unitarias tanto lineales como angulares de un cuerpo referido a un sistema de ejes coordenados. Que describe las deformaciones internas del medio y puede expresarse usando los componentes de los vectores de desplazamiento (u_x, u_y, u_z) .

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

El tensor de deformación se define como:

$$e_{ij} = E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Así los esfuerzos en términos de los desplazamientos están dados por:

$$\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu e_{xx} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu e_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (2.6)$$

Capítulo 2

2.2.2. Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento también puede ser expresada o resuelta en términos de los desplazamientos, ya que los esfuerzos están relacionados con las deformaciones y los esfuerzos se pueden obtener derivando los desplazamientos (Fung, 1977).

Se consideran medios homogéneos, isótropos y elásticos. Durante la propagación de las ondas a través del medio, la relación entre los esfuerzos y los desplazamientos está dada por la ecuación de movimiento, así que la segunda ley de Newton establece que Fuerza = masa x aceleración. Al expresarse de manera vectorial por unidad de volumen se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

Donde $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ representa la divergencia del tensor de esfuerzos, ρ = densidad de masa, x_i = coordenadas espaciales, F_i = fuerza de cuerpo, u_i = desplazamiento (generalmente se emplea u_1 para referirse al movimiento en el eje x , u_2 para el movimiento en el eje y , y u_3 para el movimiento en el eje z).

La ecuación de movimiento también puede ser expresada y resuelta en términos de los desplazamientos, ya que los esfuerzos están relacionados con las deformaciones, y los esfuerzos se pueden obtener derivando los desplazamientos. la ecuación de movimiento relaciona las derivadas espaciales del tensor de esfuerzos con la derivada temporal del vector de desplazamientos, expresando la ecuación en coordenadas cartesianas (x, y, z) , y simplificando nos queda la componente x se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \vec{F}_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

Para expresar la ecuación anterior (y las correspondientes a las direcciones y y z). Se utiliza la ecuación (2.13) en términos de desplazamientos se aplica la ley de Hooke para un medio homogéneo, isótropo y elástico que está en función de las constantes de Lamé $(\lambda \text{ y } \mu)$.

Capítulo 2

2.2.3 Ecuación de Navier

Ley de Hooke

La segunda ley de Newton puede ser escrita en términos de los desplazamientos utilizando la ley de Hooke que establece que las deformaciones son proporcionales a los esfuerzos que las producen y esto se define como (Aki y Richards, 1980):

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{kl} \quad (2.9)$$

$$\sigma'_{mn} = c_{mnpq}e'_{pq} \quad (2.10)$$

Por lo que:

$$c_{mnpq} = \beta_{mi}\beta_{nj}\beta_{pk}\beta_{ql}c_{ijkl} \quad (2.11)$$

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.12)$$

Se dice que:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{ll}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.13)$$

Donde λ y μ son las constantes de Lamé, específicamente μ es el módulo de rigidez cortante del suelo (en la literatura geotécnica se le denomina con la letra G), δ_{ij} es la delta de Kronecker y vale 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$; e_{ij} es el tensor de deformaciones infinitesimales.

Al sustituir el tensor de deformaciones en la ley de Hooke se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

ó

$$\sigma_{ki} = \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ki} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (2.15)$$

Al sustituir la ecuación (2.13) en la ecuación (2.7) se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda e_{ij} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ij} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_m} \right) \delta_{ij} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

Se simplifica y nos queda de la siguiente manera:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.20)$$

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \bar{f} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

$$\nabla^2 \bar{u} = \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) \quad (2.22)$$

Al sustituir la ecuación (2.21), en la ecuación (2.22) se obtiene:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) + \bar{f} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

Donde la ecuación (2.23) rige la propagación de las ondas y nos representa el equilibrio dinámico de un sólido elástico, homogéneo en términos de los desplazamientos, donde $\bar{u} = (u, v, w)$ es un vector que representa el desplazamiento en las tres direcciones del espacio x, y, z , respectivamente, y t es el tiempo. Por otro lado, λ y μ son los denominados parámetros de Lamé y caracterizan al medio, junto con ρ que representa la densidad. ∇^2 es el laplaciano, y ∇ el operador naba. Esta es la denominada **Ecuación de Navier**.

2.2.4 Ecuaciones de equilibrio.

La ecuación (2.23) expresada de manera no vectorial corresponde a tres ecuaciones, que representan el equilibrio en las tres direcciones:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Capítulo 2

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

A partir de estas expresiones pueden encontrarse ecuaciones que describan el movimiento en diferentes direcciones, para ello habrá que establecer algunas condiciones iniciales sobre la física del problema tales como esfuerzos ó desplazamientos conocidos en alguna sección del medio, dichas condiciones se conocen como condiciones de frontera.

2.3 Ecuaciones de onda

Con el fin de dar solución a la ecuación (2.23) y obtener el campo de desplazamientos \vec{u} , se emplearan las funciones ϕ y $\vec{\psi}$, conocidas como potenciales de Helmholtz, por lo que finalmente \vec{u} queda expresada como (Aki y Richards, 1980):

$$\vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (2.25)$$

En la ecuación anterior $\nabla \phi$ y $\nabla \times \vec{\psi}$ son llamados componentes de onda P y de onda S, respectivamente, del campo de desplazamiento.

En esta representación, el desplazamiento \vec{u} es la suma del gradiente del potencial escalar ϕ y el de rotacional del potencial vectorial $\vec{\psi}$. La parte asociada con el potencial escalar no tiene rotacional $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ por lo que representa las ondas compresionales P. Y la parte asociada con el potencial vectorial tiene divergencia igual a cero $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\psi}) = 0$, esto significa que no hay cambio de volumen y representa a las ondas de corte S.

$$\alpha^2 \nabla^2 \phi + \frac{\phi}{\rho} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \right) \quad (2.26)$$

$$\beta^2 \nabla^2 \vec{\psi} + \frac{\vec{\psi}}{\rho} = \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad \left(\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \right) \quad (2.27)$$

Sustituyendo los potenciales de la ecuación (2.25) en la ecuación (2.23) y ordenando los términos y en ausencia de fuerzas de cuerpo ($\vec{f} = 0$) se tendrá que:

$$\vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (2.28)$$

Capítulo 2

$$\vec{f} = 0$$

Considerando que el movimiento se produce sin rotación de partículas, de manera que el rotacional que aparece en la ecuación se anula, se obtiene que:

Cuando $\nabla \times \vec{u} = 0$, $\vec{f} = 0$ se dice que:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{u} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

Donde:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla \nabla \cdot \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

Al despejar $\nabla^2 \vec{u}$ de la ecuación (2.31) y nos queda de la manera siguiente:

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{u}}{(\lambda + 2\mu) \partial t^2} \quad (2.32)$$

Se sustituye $\left(\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}\right)$; en la ecuación (2.32) donde α es la velocidad de propagación de las ondas compresional y son las llamadas ondas P. estas viajan con mayor velocidad y por ello se suelen denominar primarias.

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

En la ecuación anterior el campo de desplazamientos es paralelo a la dirección en la que se propaga la onda (Aki y Richards, 1980).

Sustituyendo los potenciales de la ecuación (2.25) en la ecuación (2.23) y ordenando los términos y en ausencia de fuerzas de cuerpo ($\vec{f} = 0$) se tendrá que:

Cuando $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{f} = 0$ se dice que ::

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{u} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

Capítulo 2

Y la ecuación (2.34) se deduce a:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

Al despejar $\nabla^2 \vec{u}$ se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.36)$$

Al introducir el término ($\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$). Donde β es la velocidad con la que se van a propagar las ondas equivolúmetricas o de cortante y son las denominadas ondas s, también llamadas ondas secundarias.

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \vec{\psi} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad (2.37)$$

En la ecuación (2.37) el vector de desplazamiento es normal a la dirección de propagación. Las direcciones de polarización de la onda de corte son definidas como SV para ondas de corte con desplazamientos en el plano vertical ($x - z$), y las SH, para las ondas de corte polarizadas horizontalmente con desplazamiento en la dirección (y), que es paralela a la superficie terrestre.

2.4 Reflexión y transmisión de las ondas SH, P y SV.

Cuando se estudia el problema de la propagación de ondas en dos dimensiones, se suele separar el problema en dos diferentes. Por un lado se trabaja con las SH, y por otro lado con las ondas P y SV. El problema escalar en el que el desplazamiento de la partícula es perpendicular al sentido de propagación de la onda y al plano 2D. Sin embargo, el problema P-SV es un problema vectorial, en el que el desplazamiento se produce en el plano considerado. En este caso el desplazamiento de la partícula y la dirección de propagación de la onda se encuentran en el mismo plano (Aki y Richards, 1980) y (Knopoff, L., 1964).

En la figura 2.2 se presenta un ejemplo de un esquema de dos estratos unidos entre sí y se aprecian las ondas reflejadas y transmitidas (refractadas) por la presencia de la interface entre dos medios. El ángulo de reflexión de una onda SH es igual al de la incidencia, sin embargo el ángulo de la onda dependerá de las velocidades de propagación de ambos medios y del ángulo con que incide la onda. La lentitud horizontal de la onda incidente se preserva en las ondas

Capítulo 2

convertidas. A esta condición se le llama la “Ley de Snell” y se expresa mediante la siguiente expresión $\sin \frac{\theta}{\alpha} = \sin \frac{\gamma}{\beta}$. Esta expresión es aplicable de igual forma en las ondas P y SV con sus respectivas velocidades de propagación, la figura 2.3 muestra la reflexión y la transmisión generadas por la incidencia de ondas P y SV.

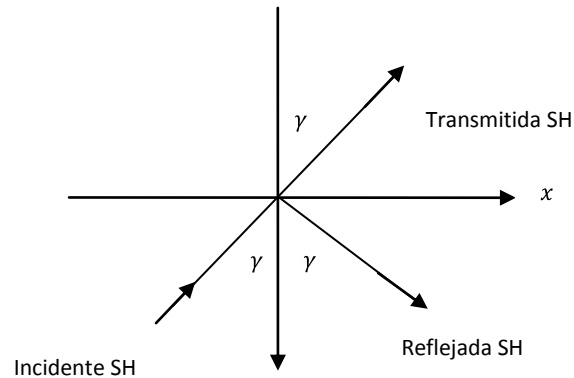


Figura 2.1. Reflexión y transmisión de una onda plana incidente SH en la interfaz de dos estratos con propiedades diferentes.

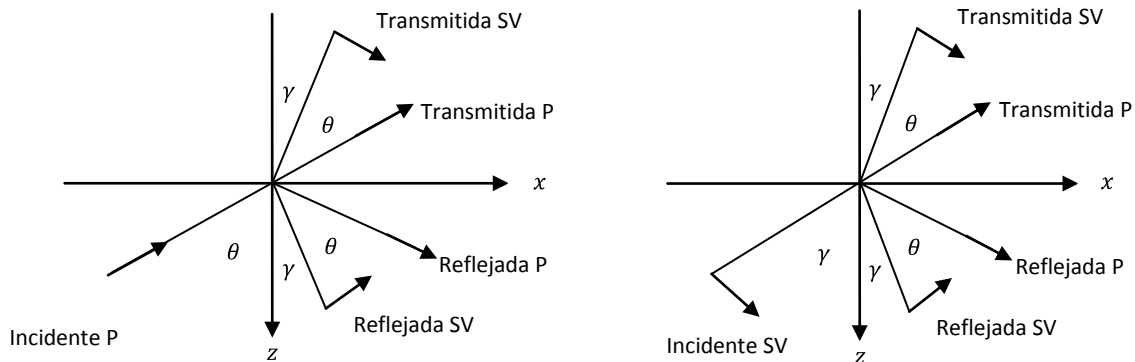


Figura 2.2. Reflexión y Transmisión de una onda plana incidente P y de una SV en la interfaz de dos estratos con propiedades diferentes, se aprecian los ángulos de incidencia, de reflexión y de transmisión.

2.5 Reflexión de Ondas SH, P-SV en superficie libre de un semiespacio elástico.

Ondas SH.

Se considera en primer lugar el caso de ondas SH, por lo que el plano de propagación de estas ondas será x, z . Por otro lado, tan solo habrá desplazamiento en la dirección y , es decir el desplazamiento v . La representación en desplazamiento queda en lo siguiente (Aki y Richards, 1980) y (Graff, K.F., 1975):

Capítulo 2

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + f_y \quad (2.38)$$

En este caso se trata de una ecuación en la que aparecen tres derivadas parciales de orden 2. Estas derivadas pueden ser aproximadas mediante esquemas de diferencias finitas. No obstante, existen otras representaciones, como es la representación en desplazamientos-esfuerzos, que para este caso SH se expresa como:

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y \quad (2.39)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (2.40)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad (2.41)$$

Representación velocidad-esfuerzos, queda como:

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial z} \quad (2.44)$$

Donde \dot{u}_2 representa la velocidad del desplazamiento en la dirección y , es decir $\dot{u}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t}$.

La propagación de ondas de cortante polarizadas horizontalmente, o SH, están gobernadas por la ecuación de onda en dos dimensiones:

$$u_3 = u_1 = 0, \text{ y } u_2 = u_2(x, z, t),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (2.45)$$

En este caso no es necesario recurrir a las potenciales de desplazamiento, es posible hacer el análisis directamente en términos del desplazamiento.

Considérese la onda incidente dada por la siguiente ecuación:

Capítulo 2

$$v^{(i)} = f \left[t - \frac{1}{\beta} (-x \cos \gamma + z \operatorname{sen} \gamma) \right] \quad (2.46)$$

Donde γ = ángulo de incidencia como se muestra en la figura 2.4.

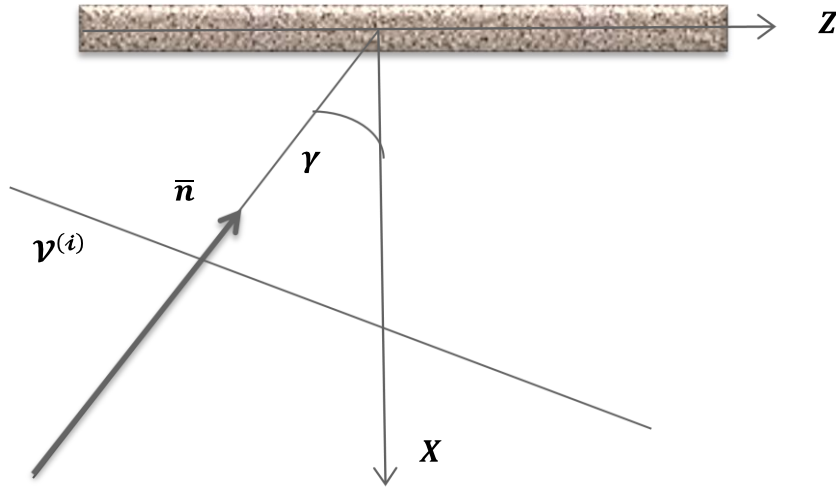


Figura 2.3. Onda SH incidente

Es claro que el vector normal tiene componentes $(-\cos \gamma, \operatorname{sen} \gamma)$. En $x = 0$ el argumento de f está dado por:

$$t - \frac{1}{\beta} z \operatorname{sen} \gamma \quad (2.47)$$

De donde se observa que la velocidad horizontal aparente es:

$$c = \frac{\beta}{\operatorname{sen} \gamma} \quad (2.48)$$

La solución de la onda reflejada deberá tener la misma velocidad aparente en la dirección horizontal. En este problema $u = w = 0$ y los únicos esfuerzos, en coordenadas rectangulares están dadas por:

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (2.49)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad (2.50)$$

La condición de frontera libre implica que el vector de tracción sea nulo. En este caso basta que $\sigma_{xy} = 0$ en $x = 0$, o bien:

Capítulo 2

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \quad (2.51)$$

Sea $\mathcal{V}^{(r)}$ la onda reflejada que debe satisfacer la ecuación (2.38) y tener la misma velocidad horizontal aparente c . Donde la condición está dada por la ecuación (2.51) y se expresa:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(i)} + \mathcal{V}^{(r)}$$

La solución para $\mathcal{V}^{(r)}$ queda:

$$\mathcal{V}^{(r)} = f \left[t - \frac{1}{\beta} (x \cos \gamma + z \operatorname{sen} \gamma) \right] \quad (2.52)$$

De donde puede verificarse que se satisface la ecuación (2.51). La solución en $x=0$ está dada por:

$$\mathcal{V} = 2f \left(t - \frac{z}{\beta} \operatorname{sen} \gamma \right) \quad (2.53)$$

Que indica que el factor de amplificación es dos. Debe notarse también que la forma de la onda reflejada es la misma que la de la onda incidente, lo que significa que no hay cambio de fase, además el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Ondas P - SV

El caso P-SV consiste en un problema vectorial. Como en el caso anterior, el movimiento se desarrolla en el plano $x - z$, mientras no existe desplazamiento en la dirección y . teniendo presente estas premisas, se pueden escribir las ecuaciones que rigen el problema P-SV en la representación de desplazamientos en coordenadas cartesianas, como (Aki y Richards, 1980) y (Graff, K.F., 1975)::

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} + f_x \quad (2.54)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial x} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + f_z \quad (2.55)$$

A modo de ilustración se muestra a continuación la representación de esta ecuación en desplazamientos- esfuerzos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_z \quad (2.56)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z \quad (2.57)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial z} \quad (2.58)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} \quad (2.59)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \quad (2.60)$$

Por último se muestra la representación velocidad-esfuerzos, la cual queda como:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_z \quad (2.61)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial z} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial z} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x} \right) \quad (2.65)$$

Donde \dot{u}_1 y \dot{u}_3 representan la velocidad en las direcciones del espacio x y z respectivamente, esto es: $\dot{u}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}$ y $\dot{u}_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t}$

En este caso el movimiento está en el plano xz , es decir $u_1 = u_1(x, z, t)$, $u_3 = u_3(x, z, t)$, y $u_2 = 0$. Las ecuaciones de onda que deben ser satisfechas por las potenciales son:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.66)$$

Y para las ondas P se obtiene:

Capítulo 2

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.67)$$

Para las ondas S, (en este caso $\psi = \psi_y$ pues $\psi_z = \psi_x = 0$). Se tiene que:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \quad (2.68)$$

$$u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad (2.69)$$

Los componentes del tensor de esfuerzos que al evaluarse en la superficie libre deben anularse y son:

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.70)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right) \quad (2.71)$$

Dado que $\sigma_{xy} = 0$. Considérese los casos mostrados en las figuras 2.5 (a) y (b) y que correspondan a incidencia de ondas planas P y SV, respectivamente.

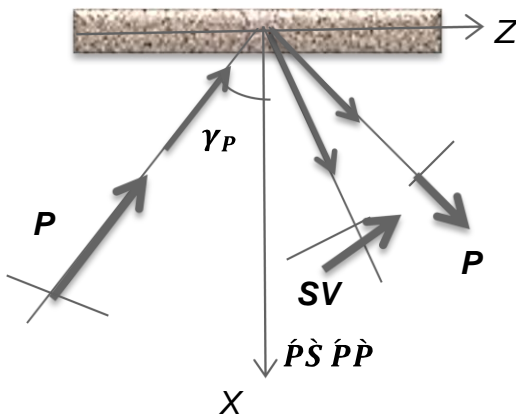


Figura 2.4(a). Incidencia de ondas P

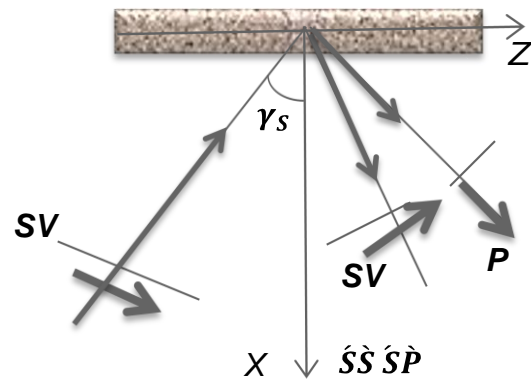


Figura 2.4(b). Incidencia de ondas SV

Capítulo 2

En este capítulo, la teoría de la elasticidad muestra que la solución de la ecuación de movimiento describe dos tipos de ondas elásticas, las compresionales (ondas P) y las de cortantes (ondas S). Por un lado se presentó el planteamiento de las ecuaciones elastodinámicas y de las ondas P y S, luego se planteó la ecuación de Navier y la ecuación de onda en términos potenciales, donde nos facilita que se pueda desarrollar un esquema explícito e iterativo.

En el siguiente capítulo, se va a desarrollar un método para aproximar expresiones diferenciales mediante diferencias finitas, el cual es un método numérico que aporta una gran versatilidad a las ecuaciones elastodinámicas y que además resuelve el problema del fenómeno de propagación de ondas, donde se ha sistematizado a través de las ecuaciones diferenciales, en términos desplazamientos y esfuerzos.

CAPÍTULO 3

Método de solución.

CAPITULO 3. Método de solución.

3.1 Método de diferencias finitas

Introducción.

El Método de diferencias finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos. Es de una gran sencillez conceptual y constituye un procedimiento muy adecuado para la resolución de una ecuación bidimensional.

El proceso general de aplicación de este método es el siguiente:

- 1). Aproximación de las derivadas de las ecuaciones que rigen el comportamiento del problema mediante esquemas de diferencias finitas.
- 2). Discretización del dominio del problema mediante una malla, teniendo en cuenta las condiciones de estabilidad, consistencia y convergencia.

3.2 Análisis de fourier.

En sismología se utilizan varias técnicas para estudiar el campo de desplazamientos como una función de la posición y del tiempo, asociada a las ondas sísmicas en la tierra así como para darnos una idea de la naturaleza de las fuentes sísmicas en ella.

Aunque algunas técnicas dependen de aspectos específicos de las ondas sísmicas, otras se basan en las propiedades generales de las funciones del espacio y el tiempo.

El análisis de Fourier permite descomponer la señal, originalmente en el dominio del tiempo, en una serie de ondas armónicas, considerar cada onda armónica por separado y luego recombinarlas. Esta metodología se usa para analizar los casos donde los efectos de la tierra o de un sismograma pueden ser explicados al filtrar los datos. Este análisis se utiliza también para filtrar una señal cuando la parte que nos interesa, en el dominio del tiempo o el espacio, se traslapa con otra parte que no interesa.

- Transformada de Fourier

La transformada de fourier (Abramowitz e Stegun, 1964) de una señal temporal permite expresar a la señal como una superposición continua de señales

Capítulo 3

armónicas de frecuencias variables con amplitud dependiente de cada frecuencia. Matemáticamente se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.1)$$

Donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función $f(t)$. La transformada inversa se define como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3.2)$$

Para comprender mejor la importancia de la transformada de Fourier al analizar las ondas conviene examinar los argumentos de ambas funciones, $F(\omega)$ y $f(t)$.

Se había señalado que la ecuación de onda plana admite soluciones de la forma $f(t - x/c)$, si aplicamos este corrimiento en el tiempo a la definición de la transformada inversa de Fourier se tiene

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} d\omega \quad (3.3)$$

Como $\exp(i\omega[t - x/c]) = \exp(-i\omega x/c)\exp(i\omega t)$ se suele llamar al primer término propagador o función de transferencia. Si además se considera la velocidad compleja este término puede tener un factor de atenuación. La función de transferencia es un ente matemático que propaga la solución a través del medio. La función $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal que perturba el medio.

Generalmente, la función de transferencia se ve afectada por factores que contienen información sobre las amplitudes que sufre la onda cuando viaja en el medio. La función de transferencia es un operador que permite conocer la solución en la posición de interés. Suele representarse comparando su módulo contra la frecuencia.

Si bien no existe un método de solución universal para resolver el problema de propagación de ondas planas en medios elásticos, si existe una metodología que seguir para encontrar el campo de desplazamientos o esfuerzos en el medio a partir de soluciones en el dominio de la frecuencia. Una vez que se tiene la función de transferencia, ésta debe convolucionarse con la excitación (representada en el

$$h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - \tau)d\tau \quad (3.4)$$

Capítulo 3

dominio de la frecuencia). La convolución de funciones es un concepto matemático que se define como

Al aplicar este teorema a la definición de la transformada de Fourier, se encuentra que si $F(\omega)$ y $H(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $f(t)$ y $h(t)$ respectivamente, entonces la convolución de ambas funciones tiene como transformada de Fourier al producto $F(\omega) H(\omega)$, es decir, la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo se transforma en una multiplicación (en números complejos) punto a punto en el dominio de la frecuencia.

Una vez hecha la convolución entre la función de transferencia y la señal de excitación, basta con aplicar a dicho producto la transformada inversa de Fourier, la función que se obtenga será la respuesta del medio en el punto de estudio, a este resultado se le conoce como *sismograma sintético* y representa la respuesta del medio en el dominio del tiempo.

- Transformada discreta de Fourier

Debido a que en la práctica los cálculos numéricos se hacen a través de programas que se escriben, es necesario discretizar las expresiones de la transformada de Fourier y de la transformada inversa. Así, se definen respectivamente a la transformada discreta de Fourier como

$$F(\omega_j) = F_j = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \exp(-i\omega_j n\Delta t) \quad (3.5)$$

Donde Δt es la tasa de muestreo y N es el número de puntos que tiene la señal de interés. La transformada inversa discreta de Fourier se define como

$$f(t_n) = f(n\Delta t) = f_n = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \exp(i\omega_j n\Delta t) \quad (3.6)$$

La representación gráfica de la transformada de Fourier suele hacerse como el módulo de cada uno de los valores de la función $F(\omega)$ en función de la frecuencia.

- Transformada Rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) es un algoritmo desarrollado en 1965 por Cooley y Tukey. Para su uso, es necesario que el

Capítulo 3

número de puntos de nuestra señal sea potencia de 2, es decir $N = 2^m$, donde m es entero.

La ventaja de la transformada rápida de fourier es el de reducir el tiempo de cómputo de manera radical en comparación a usar la transformada discreta. Para más información, (Aki y Richards).

3.3 Pulso de ricker

Se pueden ver algunos de los pulsos que se emplean a la hora de propagar ondas. Estas fuerzas pueden tener una dependencia temporal que se puede expresar como pulso de Ricker. Cuando se calcula la respuesta dinámica de sistemas, se utilizan como excitación, funciones analíticas que dependen del tiempo, generalmente dichas funciones son de forma sencilla y requieren de pocos parámetros para su graficación. En conclusión, el *Pulso de Ricker* es de utilidad pues permite un control directo sobre la eficiencia del muestreo y además, se puede identificar de manera sencilla el pulso apropiado para excitar un modelo con énfasis en una determinada frecuencia.

El pulso de Ricker está definido matemáticamente en función del tiempo mediante la expresión:

$$r(t) = (a^2 - 1/2)e^{-a^2} \quad (3.7)$$

Donde $a = \pi(t - t_s)/t_p$, t_p = es el *periodo característico* del pulso y t_s es el tiempo en el que se ubica el pulso. La duración de la parte central o el intervalo entre los dos máximos del pulso es igual a $\sqrt{6} t_p / \pi$ como se muestra en la figura 3.1.

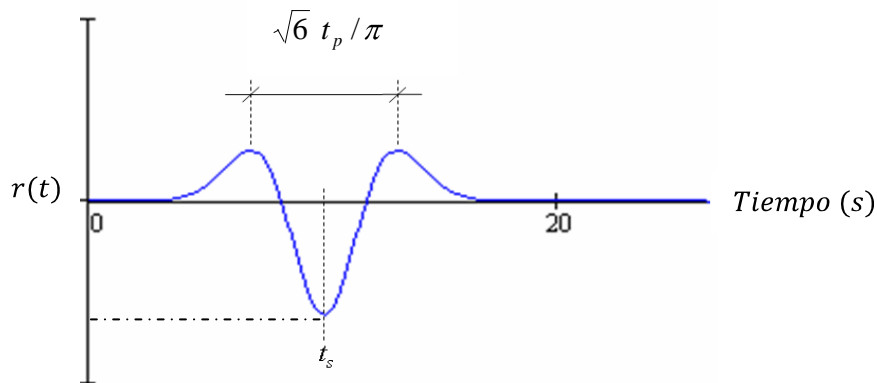


Fig. 3.1. Representación del Pulso de Ricker en el dominio del tiempo.

Capítulo 3

En el dominio de la frecuencia, el pulso de Ricker, está definido matemáticamente mediante la expresión:

$$R(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-b^2} e^{-i\omega t_p} \quad (3.8)$$

Donde $b = \omega / \omega_p$, $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi / t_p$ y f_p es la frecuencia de energía máxima conocida como frecuencia característica, ω_p como se muestra en la figura 3.2.

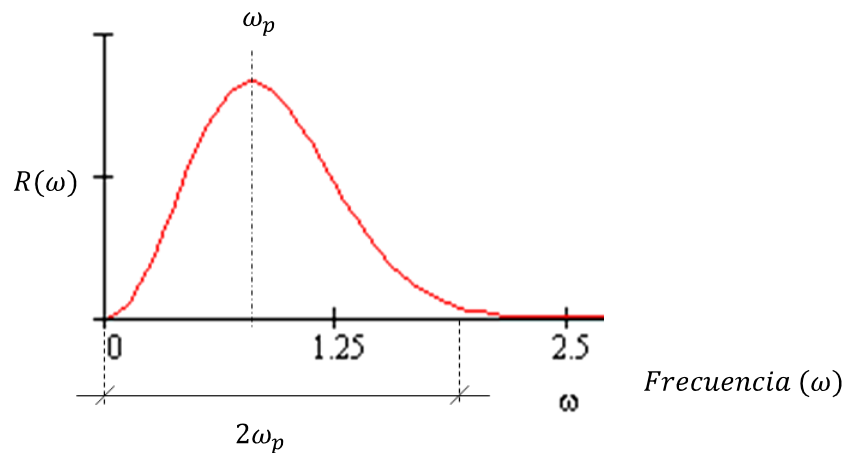


Fig. 3.2. Representación del Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia, el pulso tiene energía significativa hasta dos veces.

Para que la respuesta de un sistema sea significativa, es necesario que la función de transferencia del modelo y el pulso que lo excita presenten energía en el mismo intervalo de frecuencias.

3.4 Distribución de fuerzas para representar una fuente

Se muestra en la figura 3.3. (a) y (b), como se puede simular una fuente explosiva, mediante el uso de 4 fuerzas distribuidas como se indica.

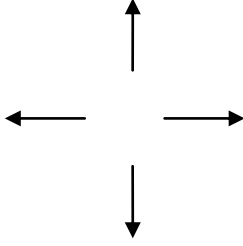


Fig. 3.3 (a). Distribución de fuerzas correspondiente a una explosión que genera una onda P

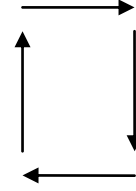


Fig. 3.3 (b). Distribución de fuerzas correspondiente a una explosión que genera una onda S

3.5 Formulación 2D del método diferencias finitas

Es una formulación que forma parte de los llamados métodos directos como las diferencias finitas o los elementos finitos. Para la ecuación de propagación de ondas elásticas, lo importante del método es efectuar la derivación temporal por un método de diferencias finitas centradas y la derivación espacial utilizando la transformada de Fourier en el dominio del número de onda.

Para en este caso se menciona la formulación en 2D y se utiliza las siguientes ecuaciones de equilibrio en términos de velocidades:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho \dot{v}_1 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \dot{v}_2 \quad (3.10)$$

Se toma la derivada con respecto al tiempo de la ley de Hooke, y se obtiene la relación constitutiva en términos de velocidades y esfuerzos.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dot{m}_{xx} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_1}{\partial y} + \dot{m}_{yy} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial v_2}{\partial x} + \dot{m}_{xy} \quad (3.13)$$

Donde \dot{m}_{xx} , \dot{m}_{yy} y \dot{m}_{xy} son derivadas de esfuerzo con respecto al tiempo y las derivadas en el tiempo pueden desarrollarse en un esquema centrado de diferencias finitas y nos queda de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^k = \frac{v_1^{k+\frac{1}{2}} - v_1^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)^k = \frac{v_2^{k+\frac{1}{2}} - v_2^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t}\right)^{k+1/2} = \frac{\sigma_{xx}^{k+1} - \sigma_{xx}^{k-1}}{\Delta t} \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t}\right)^{k+1/2} = \frac{\sigma_{yy}^{k+1} - \sigma_{yy}^{k-1}}{\Delta t} \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t}\right)^{k+1/2} = \frac{\sigma_{xy}^{k+1} - \sigma_{xy}^{k-1}}{\Delta t} \quad (3.18)$$

Se sustituye las ecuaciones (3.14) y (3.15) en (3.9) y (3.10) respectivamente, planteadas estas últimas en el tiempo k , pueden expresarse explícitamente las velocidades en el tiempo $k+\frac{1}{2}$ en términos de cantidades en tiempos anteriores. Se indica la posición en el espacio sólo en el símbolo a la izquierda de cada ecuación. Debe entenderse que todas las cantidades de la ecuación se plantean en el mismo punto en el espacio, incluyendo el material.

$$(v_1)_{i,j}^{k+1/2} = \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)^k + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)^k + \frac{\Delta t}{\rho} (f_x)^k + v_1^{k-\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

$$(v_2)_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} = \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}\right)^k + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right)^k + \frac{\Delta t}{\rho} (f_y)^k + v_2^{k-\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

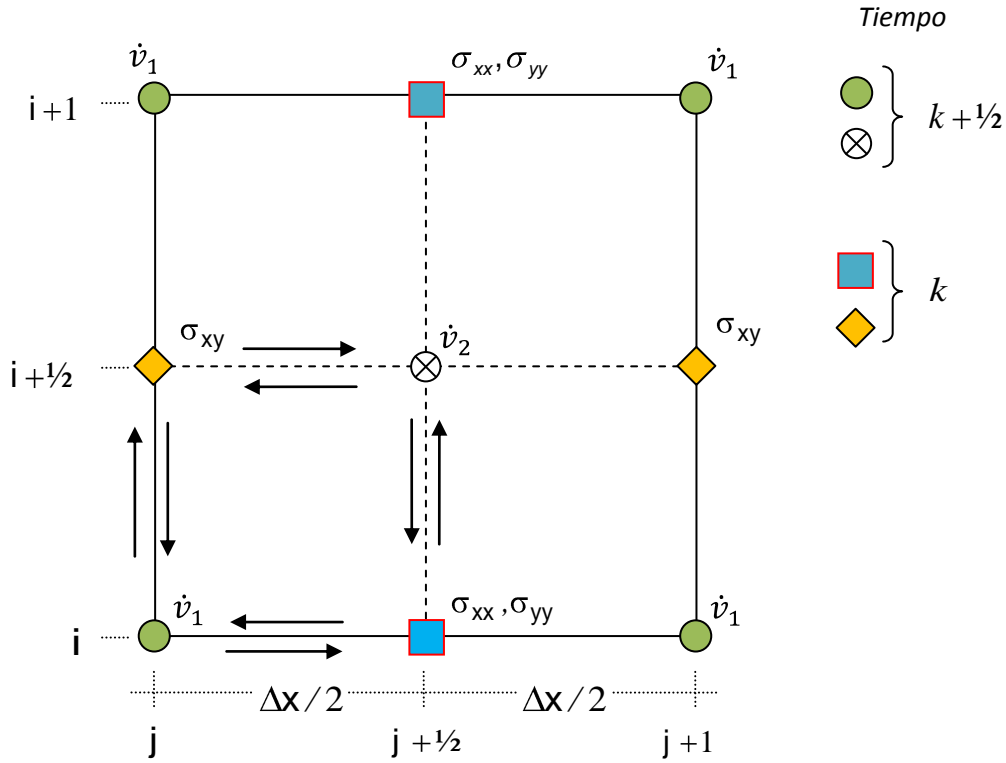


Figura 3.4. Esquema de malla alternada en espacio y tiempo.

El esquema de la figura 3.4 muestra la posición espacial solamente, la posición en el tiempo de cada elemento de la malla se indique en la parte derecha del esquema. Por lo que sustituyendo (3.16), (3.17) y (3.18) en (3.12) y (3.13), en el tiempo $k+1/2$ se pueden obtener ecuaciones explícitas para los esfuerzos en el tiempo $k+1$ en términos de cantidades en tiempos previos así

$$(\sigma_{xx})_{i,j+1}^{k+1} = \Delta t \rho \alpha^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^{k+1/2} + \Delta t \rho (\alpha^2 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^{k+1/2} + \Delta t \dot{m}_{xx} + (\sigma_{xx})^{k-1} \quad (3.21)$$

$$(\sigma_{yy})_{i,j+1}^{k+1} = \Delta t \rho \alpha^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^{k+1/2} + \Delta t \rho (\alpha^2 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^{k+1/2} + \Delta t \dot{m}_{yy} + (\sigma_{yy})^{k-1} \quad (3.22)$$

$$(\sigma_{xy})_{i+1,j}^{k+1} = \Delta t \rho \beta^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^{k+1/2} + \Delta t \rho \beta^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^{k+1/2} + \Delta t \dot{m}_{xy} + (\sigma_{xy})^{k-1} \quad (3.23)$$

Capítulo 3

Para obtener las derivadas espaciales, se utiliza la transformada de Fourier

$$\frac{\partial f}{\partial t} \left(x \pm \frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) i k e^{i k (x \pm \Delta x / 2)} dk \quad (3.24)$$

$$\text{Donde: } F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i k x} dx$$

3.6 Esquema en desplazamientos para el problema SH.

Para el problema SH en 2D, la ecuación de Navier se expresa en la ecuación (2.38), para la cual debemos buscar un esquema de diferencias finitas. Para ello se va a emplear esquemas de segundo orden. Se tiene que aproximar varias derivadas parciales: temporales y espaciales. En principio se emplea el mismo esquema para todas ellas. Usando el esquema centrado de orden dos se obtiene:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{(u_2)_{i,j}^{k+1} - 2(u_2)_{i,j}^k + (u_2)_{i,j}^{k-1}}{(\Delta t)^2} \\ &= \mu \frac{(u_2)_{i,j+1}^k - 2(u_2)_{i,j}^k + (u_2)_{i,j-1}^k}{(\Delta x)^2} + \mu \frac{(u_2)_{i+1,j}^k - 2(u_2)_{i,j}^k + (u_2)_{i-1,j}^k}{(\Delta y)^2} \\ &+ f_y \end{aligned} \quad (3.25)$$

Y reordenando se obtiene:

$$\begin{aligned} & (u_2)_{i,j}^{k+1} - 2(u_2)_{i,j}^k + (u_2)_{i,j}^{k-1} \\ &= \left(\frac{(\Delta t)^2 \mu}{\rho} \right) \cdot \frac{(u_2)_{i,j+1}^k - 2(u_2)_{i,j}^k + (u_2)_{i,j-1}^k}{(\Delta x)^2} \\ &+ \left(\frac{(\Delta t)^2 \mu}{\rho} \right) \cdot \frac{(u_2)_{i+1,j}^k - 2(u_2)_{i,j}^k + (u_2)_{i-1,j}^k}{(\Delta y)^2} + f_y \end{aligned} \quad (3.26)$$

De manera que se puede despejar el desplazamiento $(u_2)_{i,j}^{k+1}$ en función de desplazamientos de tiempos previos:

$$\begin{aligned} (u_2)_{i,j}^{k+1} &= \left(\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2 \rho_{i,j}} \right) \mu_{i,j} \cdot [(u_2)_{i,j+1}^k - 2(u_2)_{i,j}^k + (u_2)_{i,j-1}^k] \\ &+ \left(\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2 \rho_{i,j}} \right) \mu_{i,j} \cdot [(u_2)_{i+1,j}^k - 2(u_2)_{i,j}^k + (u_2)_{i-1,j}^k] + 2(u_2)_{i,j}^k - (u_2)_{i,j}^{k-1} \\ &+ f_y \end{aligned} \quad (3.27)$$

Se puede observar que se ha llegado a una expresión explícita que posibilita el cálculo del desplazamiento u_2 en el punto de la malla (i,j) en un tiempo $k+1$ a partir

Capítulo 3

de puntos de dos tiempos previos k y $k-1$. Se observa gráficamente en la figura 3.5 los esquemas y configuración espacial para las ondas SH.

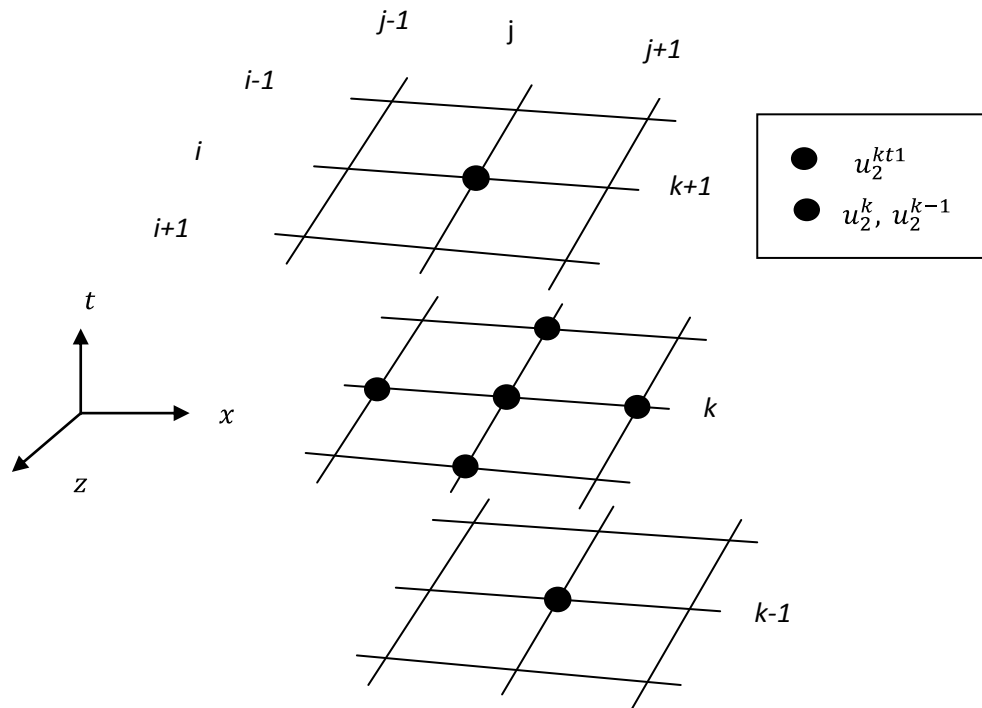


Figura 3.5. Esquema de discretización para el caso SH en 2D mediante el método de diferencias finitas.

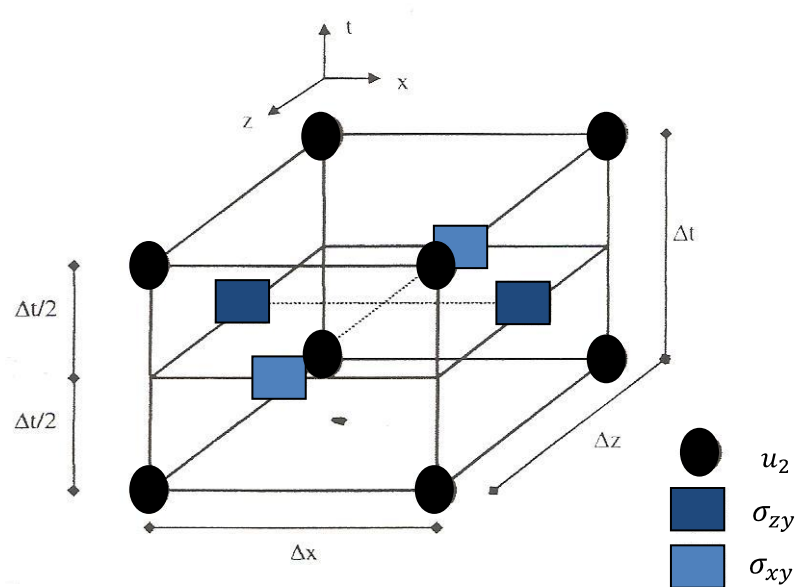


Figura 3.6. Discretización del medio con una malla alternada para el problema SH.

Capítulo 3

Como se muestra en la figura 3.6, los valores de desplazamiento u_2 se encuentran en valores enteros en espacio y tiempo, sin embargo los esfuerzos σ_{zy} están ubicados a $\frac{1}{2}\Delta z$ en la dirección z . Y los esfuerzos σ_{xy} están recorridos $\frac{1}{2}\Delta x$ en la dirección x y además ambos esfuerzos están ubicados a un $\frac{1}{2}\Delta t$ de los desplazamientos.

Se empieza a aproximar una derivada de segundo orden tal como la siguiente:

$$\left(a\psi_x\right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, z) \frac{a\psi(x, z)}{\partial x} \right] \quad (3.28)$$

Se empieza con la primera derivada. Para ello se procederá por partes en primer lugar se define una función $\phi = a\psi_x$, lo que permite escribir que $\phi = \left(a\psi_x\right)_x$. Se aproxima ϕ_x mediante un esquema de diferencias finitas centrado de orden 1, esto es:

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (3.29)$$

Este es el esquema general que va a usar, aunque antes se va a buscar aproximaciones para $\phi_{i,j+1/2}$ y para $\phi_{i,j-1/2}$, para ello se dice que $\phi = a\psi_x$, por lo tanto $\frac{\phi}{a} = \psi_x$, de manera que si se integra en ambos miembros de la igualdad, nos queda

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\phi(x, z_i)}{a(x, z_i)} \cdot dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi_x(x, z_i) \cdot dx \quad (3.30)$$

Se va a denotar el miembro de la izquierda por I y el miembro de la derecha por D, de manera que se obtiene,

$$D = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi_x(x, z_i) \cdot dx = \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j} \quad (3.31)$$

$$I = \phi_{i,j+\frac{1}{2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{a(x, z_i)} \quad (3.32)$$

Capítulo 3

Se puede definir el parámetro efectivo medio, como $a_{i,j}^{x^+} = \Delta x \cdot \left[\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{a(x,z_i)} \right]^{-1}$. Se fija para poder definir el término I, se ha supuesto que el valor medio se encuentra en la posición $x_{i,j+1/2}$, entonces el término I queda

$$I = \frac{\Delta x}{a_{i,j}^{x^+}} \phi_{i,j+1/2} \quad (3.33)$$

Se despeja el valor de $\phi_{i,j+1/2}$ mediante la siguiente aproximación,

$$\phi_{i,j+1/2} = \frac{a_{i,j}^{x^+}}{\Delta x} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) \quad (3.34)$$

De forma similar se dice que,

$$\phi_{i,j-1/2} = \frac{a_{i,j}^{x^-}}{\Delta x} (\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}) \quad (3.35)$$

Y con estas dos aproximaciones se puede expresar la ecuación (3.28) como:

$$\begin{aligned} (a\psi_x)_x \Big|_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x,z) \frac{a\psi(x,z)}{\partial x} \right] \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [a_{i,j}^{x^+} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) - a_{i,j}^{x^-} (\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1})] \end{aligned} \quad (3.36)$$

De forma análoga se puede una expresión para

$$\begin{aligned} (a\psi_z)_z \Big|_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[a(x,z) \frac{a\psi(x,z)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{(\Delta z)^2} [a_{i,j}^{z^+} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) - a_{i,j}^{z^-} (\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j})] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Donde

$$a_{i,j}^{z^+} = \Delta z \cdot \left[\int_{z_i}^{z_{j+1}} \frac{dz}{a(x,z_i)} \right]^{-1} \quad (3.38)$$

En principio cuando los parámetros efectivos medios $a_{i,j}^{x^+}$ y $a_{i,j}^{x^-}$ sean iguales, los esquemas usados para aproximar las derivadas no cambiarían conforme al esquema que se presenta inicialmente, pero cuando esta sean diferentes, debido a que se encuentra en una zona de contacto entre dos medios distintos, los nuevos esquemas tendrán en cuenta de una forma natural las condiciones de contorno entre ambos medios, asegurando la continuidad de los desplazamientos

Capítulo 3

y de los esfuerzos. Se puede introducir los valores medios de tales parámetros, modificando en cierta medida la manera de expresar tales esquemas, esto es,

$$\begin{aligned}
 (u_2)_{i,j}^{k+1} = & \left[\frac{(\Delta t)^2}{\rho_{i,j}} \right] \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \left[\left(\frac{\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j}}{2} \right) \cdot \frac{((u_2)_{i,j+1}^k - (u_2)_{i,j}^k)}{\Delta x} \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\mu_{i,j} + \mu_{i,j-1}}{2} \right) \cdot \frac{((u_2)_{i,j}^k - (u_2)_{i,j-1}^k)}{\Delta x} \right] \\
 & + \left[\frac{(\Delta t)^2}{\rho_{i,j}} \right] \left(\frac{1}{\Delta z} \right) \left[\left(\frac{\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j}}{2} \right) \cdot \frac{((u_2)_{i+1,j}^k - (u_2)_{i,j}^k)}{\Delta z} \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j}}{2} \right) \cdot \frac{((u_2)_{i,j}^k - (u_2)_{i-1,j}^k)}{\Delta z} \right] + (2u_2)_{i,j}^k - (u_2)_{i,j}^{k-1} + f_y \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

3.7 Esquema en desplazamientos para el problema P-SV.

El caso P-SV consiste en un problema que presenta cierto grado de dificultad debido de un problema vectorial. Para este proceso se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} + f_x \quad (3.40)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial x} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + f_z \quad (3.41)$$

Se observa dos ecuaciones diferenciales que están relacionadas entre si, mediante los desplazamientos u_1 y u_3 , con derivadas de segundo orden, tanto en el tiempo como en el espacio, aparecen unas nuevas derivadas mixtas. Estas derivadas tendrán que ser aproximadas igualmente mediante el esquema de diferencias finitas:

$$\left(a \psi_x \right)_z \frac{\partial}{\partial z} \left[a(x,z) \frac{\partial \psi(x,z)}{\partial x} \right] \quad (3.42)$$

Se define una función $\phi = a \psi_x$, la cual facilita escribir, $\phi_z = (a \psi_x)_z$. Aproximando ϕ_z por medio un esquema de diferencias finitas centrado de orden 1, se dice:

$$\phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2},j} - \phi_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta z} \quad (3.43)$$

Se encuentran aproximaciones para $\phi_{i+\frac{1}{2},j}$ y para $\phi_{i-\frac{1}{2},j}$. Por lo que se integra en ambos miembros de la igualdad, la componente z, nos queda lo siguiente:

Capítulo 3

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\phi(x_j, z)}{a(x_j, z)} \cdot dz = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \psi_x(x_j, z) \cdot dz \quad (3.44)$$

Se vuelve a denotar el miembro de la izquierda I y el miembro de la derecha por D, de manera que nos queda:

$$D = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \psi_x(x_j, z) \cdot dz = \Delta z \cdot \psi_x \Big|_{i+\frac{1}{2}j} \quad (3.45)$$

$$I = \frac{\Delta z}{a_{i,j}^{z+}} \phi_{i+\frac{1}{2}j} \quad (3.46)$$

Las figuras 3.7 y 3.8 muestran el esquema y configuración espacial para las ondas P-SV :

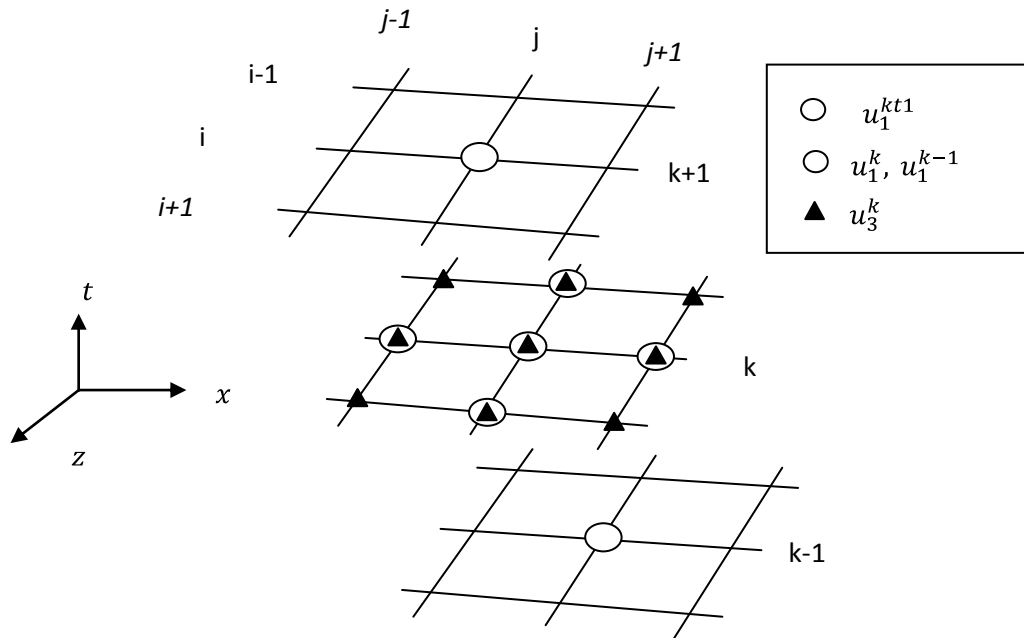


Figura 3.7. Esquema de discretización para el caso P-SV en 2D mediante diferencias finitas. Donde se emplean desplazamientos tanto horizontales u_1 , como verticales u_3 , en el tiempo k .

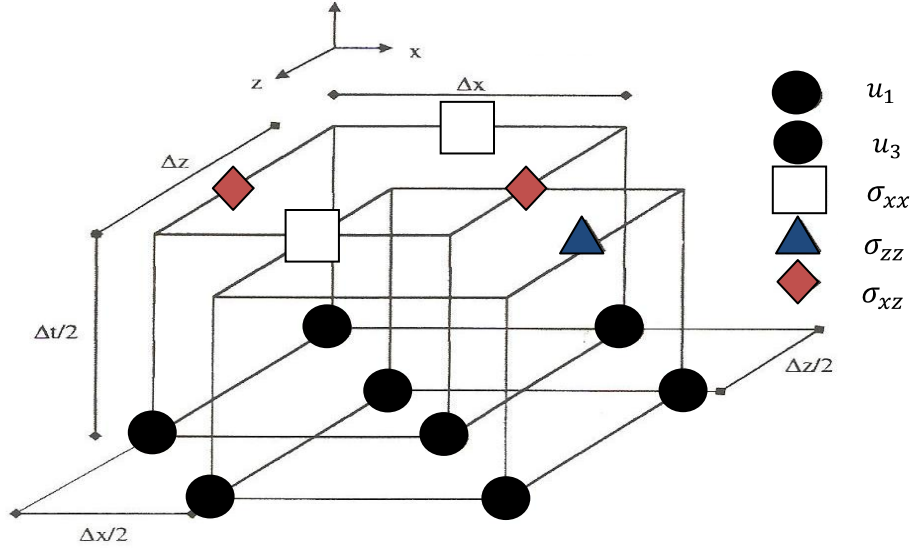


Figura.3.8. Discretización del medio con una malla alternada para el problema P-SV.

Este esquema es más complejo ya que la ubicación de los desplazamientos u_1 y u_3 está desfasados $\frac{1}{2}\Delta x$ en la dirección x y $\frac{1}{2}\Delta z$ en la dirección z pero ambos desplazamientos se encuentran en el mismo tiempo. Con respecto a los esfuerzos, σ_{xx} se recorre $\frac{1}{2}\Delta x$ con respecto a los desplazamientos u_1 . σ_{zz} se recorre $\frac{1}{2}\Delta z$ con relación los desplazamientos u_3 y σ_{xz} a $\frac{1}{2}\Delta z$ de los desplazamientos u_1 , todos los esfuerzos están desfasados a $\frac{1}{2}\Delta t$ de los desplazamientos.

Se procede a aproximar esa derivada por medio un esquema de diferencias finitas centrado de orden 2, se obtiene que:

$$\psi_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\psi_{i+\frac{1}{2},j+1} - \psi_{i+\frac{1}{2},j-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.47)$$

Pero se observa que:

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j+1} = \frac{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i,j+1}}{2} \quad (3.48)$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j-1} = \frac{\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j-1}}{2} \quad (3.49)$$

Capítulo 3

El término de la derecha se expresa que:

$$D = \frac{1}{4} \frac{\Delta z}{\Delta x} \left(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} \right) \quad (3.50)$$

Se dice que,

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4} \frac{\Delta z}{\Delta x} a_{i,j}^{z+} \left(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} \right) \quad (3.51)$$

De manera simple

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4} \frac{\Delta z}{\Delta x} a_{i,j}^{z-} \left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1} \right) \quad (3.52)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.43) se obtiene el esquema general en diferencias finitas para la derivada mixta como,

$$\left(a\psi_x \right)_z \Big|_{i,j} = \frac{1}{4\Delta z\Delta x} \left\{ \frac{a_{i,j}^{z+} \left(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} \right)}{-a_{i,j}^{z-} \left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1} \right)} \right\} \quad (3.53)$$

Se realiza un cambio de subíndices, se obtienen la aproximación para la otra derivada mixta, de la manera:

$$\left(a\psi_x \right)_z \Big|_{i,j} = \frac{1}{4\Delta z\Delta x} \left\{ \frac{a_{i,j}^{x+} \left(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} \right)}{-a_{i,j}^{x-} \left(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1} \right)} \right\} \quad (3.54)$$

De esta, manera se expresa el esquema de diferencias finitas para el problema de las ondas P-SV: Para la componente horizontal u_1 ,

$$\begin{aligned} (u_1)_{i,j}^{k+1} = & \frac{(\Delta t)^2}{\rho_{i,j}} \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} [(\lambda + 2\mu)_{i,j}^{x+} ((u_1)_{i,j+1}^k - (u_1)_{i,j}^k) - (\lambda + 2\mu)_{i,j}^{x-} ((u_1)_{i,j}^k \right. \\ & \left. - (u_1)_{i,j-1}^k)] + \frac{1}{(\Delta x)^2} [\mu_{i,j}^{z+} ((u_1)_{i+1,j}^k - (u_1)_{i,j}^k) - \mu_{i,j}^{z-} ((u_1)_{i,j}^k - (u_1)_{i-1,j}^k)] \right. \\ & + \frac{1}{4\Delta z\Delta x} [\lambda_{i,j}^{x+} ((u_3)_{i+1,j+1}^k - (u_3)_{i-1,j+1}^k + (u_3)_{i+1,j}^k - (u_3)_{i-1,j}^k) \\ & \left. - \lambda_{i,j}^{x-} ((u_3)_{i+1,j}^k - (u_3)_{i-1,j}^k + (u_3)_{i+1,j-1}^k - (u_3)_{i-1,j-1}^k)] \right. \\ & + \frac{1}{4\Delta x\Delta z} [\mu_{i,j}^{z+} ((u_3)_{i+1,j+1}^k - (u_3)_{i+1,j-1}^k + (u_3)_{i,j+1}^k - (u_3)_{i,j-1}^k) \\ & \left. - \mu_{i,j}^{z-} ((u_3)_{i,j+1}^k - (u_3)_{i,j-1}^k + (u_3)_{i-1,j+1}^k - (u_3)_{i-1,j-1}^k)] \right\} \\ & + (2u_1)_{i,j}^k - (u_1)_{i,j}^{k-1} + f_x \end{aligned} \quad (3.55)$$

Para la componente vertical: u_3

$$\begin{aligned}
 (u_3)_{i,j}^{k+1} = & \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} [\mu_{i,j}^{x+} ((u_3)_{i,j+1}^k - (u_3)_{i,j}^k) - \mu_{i,j}^{x-} ((u_3)_{i,j}^k - (u_3)_{i,j-1}^k)] \right. \\
 & + \frac{1}{(\Delta x)^2} [(\lambda + 2\mu)_{i,j}^{z+} ((u_3)_{i+1,j}^k - (u_3)_{i,j}^k) - (\lambda + 2\mu)_{i,j}^{z-} ((u_3)_{i,j}^k \\
 & - (u_3)_{i-1,j}^k)] \\
 & + \frac{1}{4\Delta z \Delta x} [\mu_{i,j}^{x+} ((u_1)_{i+1,j+1}^k - (u_1)_{i-1,j+1}^k + (u_1)_{i+1,j}^k - (u_1)_{i-1,j}^k) \\
 & - \mu_{i,j}^{x-} ((u_1)_{i+1,j}^k - (u_1)_{i-1,j}^k + (u_1)_{i+1,j-1}^k - (u_1)_{i-1,j-1}^k)] \\
 & + \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [\lambda_{i,j}^{z+} ((u_1)_{i+1,j+1}^k - (u_1)_{i+1,j-1}^k + (u_1)_{i,j+1}^k - (u_1)_{i,j-1}^k) \\
 & - \lambda_{i,j}^{z-} ((u_1)_{i,j+1}^k - (u_1)_{i,j-1}^k + (u_1)_{i-1,j+1}^k - (u_1)_{i-1,j-1}^k)] \left. \right\} \\
 & + (2u_3)_{i,j}^k - (u_3)_{i,j}^{k-1} + f_z
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Donde los parámetros de Lamé (ver capítulo 2), serán introducidos mediante medias geométricas, Por ello se define a modo de ejemplo alguno de estas medias:

$$(\lambda + 2\mu)_{i,j}^{x+} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)_{i,j+1}} \cdot (\lambda + 2\mu)_{i,j} \tag{3.57}$$

$$(\lambda + 2\mu)_{i,j}^{x-} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)_{i,j}} \cdot (\lambda + 2\mu)_{i,j-1} \tag{3.58}$$

$$\lambda_{i,j}^{x+} = \sqrt[4]{\lambda_{i+1,j+1} \cdot \lambda_{i-1,j+1} \cdot \lambda_{i+1,j} \cdot \lambda_{i-1,j}} \tag{3.59}$$

$$\mu_{i,j}^{x-} = \sqrt[4]{\mu_{i,j+1} \cdot \mu_{i,j-1} \cdot \mu_{i-1,j+1} \cdot \mu_{i-1,j-1}} \tag{3.60}$$

3.8 Condiciones de fronteras

Las bordes absorbentes son usadas en ingeniería sísmica, sismología y en otras disciplinas cuando se busca simular la irradiación de energía hacia el exterior de un dominio que se trata numéricamente. Esta región se denomina aquí dominio interior del problema. Primero se obtiene que discretizar este modelo mediante una malla, la cual viene representada por una matriz. Por lo que en la práctica consiste en una serie de matrices de datos que albergan los parámetros que caracterizan al modelo en cada punto.

Se tienen esquemas tanto para el problema SH como para el problema $P-SV$. En este caso, los bordes de nuestro dominio deben actuar de una manera especial, puesto que las dimensiones de las matrices son finitas.

Capítulo 3

El caso ideal sería que cuando las ondas incidían en los bordes, estos actúen absorbiendo en su totalidad tales ondas, de manera que simulen la continuidad del modelo. En caso contrario, aparecerían ondas reflejadas irreales que aparecerían en la solución. Por lo que se pueden plantear dos maneras de afrontar el problema. Se puede ver una representación gráfica de estos procedimientos en la figura 3.9. La metodología que se va a implementar se basa en un desarrollo que tiene en cuenta ciertos ángulos de incidencia, Higdon (1991).

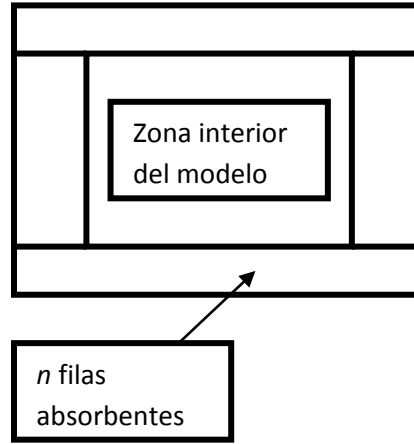


Figura 3.9. Bordes absorbentes de anchura n .

Se puede plantear la representación de algunas de estas condiciones absorbentes de tal forma. Para el problema en 2D, el desplazamiento horizontal u_1 a lo largo del borde superior absorbente se dice;

$$\begin{aligned}
 u_{o,j}^{k+1} &= \gamma_{00} \cdot u_{0,j}^{k+1} + \gamma_{01} \cdot u_{i,j}^{k+1} + \gamma_{02} \cdot u_{2,j}^{k+1} \\
 &+ \gamma_{10} \cdot u_{0,j}^k + \gamma_{11} \cdot u_{i,j}^k + \gamma_{12} \cdot u_{2,j}^k \\
 &+ \gamma_{20} \cdot u_{0,j}^{k-1} + \gamma_{21} \cdot u_{i,j}^{k-1} + \gamma_{22} \cdot u_{2,j}^{k-1}
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Donde la variable u_1 representa el desplazamiento en cada caso, el superíndice indica el tiempo, y los subíndices indican la posición espacial en la malla y γ_{ij} son una serie de parámetros.

Para evitar las reflexiones debidas a fronteras ficticias se utiliza el método de D. Kosloff. En el método de Kosloff (Kosloff y Kosloff, 1986), se busca que la solución al problema sea de la forma $u = f(t - x/\beta)e^{-\gamma t}$ donde γ es un parámetro que determina que tan rápido se disipa la respuesta. No es difícil ver que la expresión anterior es solución a la ecuación diferencial.

$$\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial u_1}{\partial t} - \gamma^2 u_1 \quad (3.62)$$

Que equivale a que, en la ecuación de onda, la derivada con respecto al tiempo se reemplace por un nuevo operador de la forma

$$\frac{\check{\partial}}{\partial t} \leftarrow \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \quad \text{i.e.} \quad \beta^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\check{\partial}^2 u_1}{\partial t^2} \quad (3.63)$$

Se toma esta nueva definición de derivada, la ecuación (3.14) queda

$$\frac{\check{\partial}}{\partial t} \dot{u}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \dot{u}_1 + \gamma \dot{u}_1 \quad (3.64)$$

En diferencias finitas

$$\left(\frac{\check{\partial}}{\partial t} \dot{u}_1 \right)^k = \frac{\dot{u}_1^{k+\frac{1}{2}} - \dot{u}_1^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \gamma \frac{\dot{u}_1^{k+\frac{1}{2}} + \dot{u}_1^{k-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{Q^+ \dot{u}_1^{k+\frac{1}{2}} - Q^- \dot{u}_1^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.65)$$

Donde:

$$Q^+ = \left(1 + \frac{\Delta t \gamma}{2} \right) \quad (3.66)$$

$$Q^- = \left(1 - \frac{\Delta t \gamma}{2} \right) \quad (3.67)$$

3.9 El problema de la superficie libre de ondas SH, P-SV.

Se pueden determinar los valores de desplazamiento y de tracción para ondas incidentes P y S en un medio estratificado. Cuando se produce la incidencia de las ondas sobre la superficie libre, se llegan a producir efectos importantes. Entre ellos se dice que cuando llega una onda P, se va reflejar onda P, pero también onda S, también a la viceversa cuando la onda incidente es onda S, se refleja onda P y onda S, como se ilustra en la figura 3.10 (Pérez-Ruiz y Luzón, 2005).

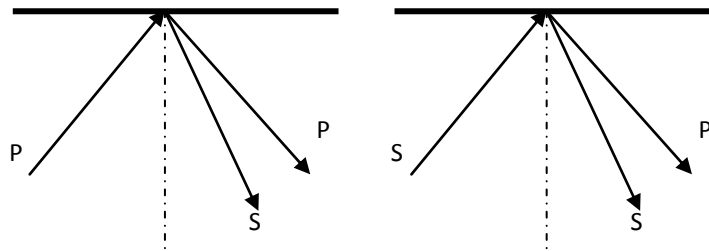


Figura 3.10. Detalle de las reflexiones en la superficie libre, tras la incidencia de onda P y S.

Capítulo 3

La existencia de la superficie libre originan las llamadas ondas superficiales. La condición de superficie libre viene impuesta por la nulidad de los esfuerzos normales a la superficie. y viene dada por la siguiente ecuación:

$$T_j(\bar{u}, \bar{n}) = \sigma_{ij}n_i = 0 \quad (3.68)$$

Donde la superficie libre $z=0$, con \bar{n} vector unitario normal a la superficie.

Para problemas P-SV, se pueden considerar cuatro casos generales que gobiernan el comportamiento de la superficie libre. y se mencionan a continuación:

a). Superficie libre horizontal:

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (3.69)$$

$$\sigma_{zx} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \quad (3.70)$$

b). Superficie libre vertical:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (3.71)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (3.72)$$

c). Esquinas externas:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{xz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial z} - \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} - \mu \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (3.73)$$

$$-\sigma_{zz} + \sigma_{zx} = -\lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} \quad (3.74)$$

d). Esquinas internas:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{xz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial z} - \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} - \mu \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (3.75)$$

$$-\sigma_{zz} + \sigma_{zx} = -\lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} \quad (3.76)$$

En orden se implementa este esquema a diferencias finitas en una topografía arbitraria, definiendo una matriz rellena de unos (1), ceros (0) y los contornos absorbentes (B), como se muestra en la siguiente figura 3.11.

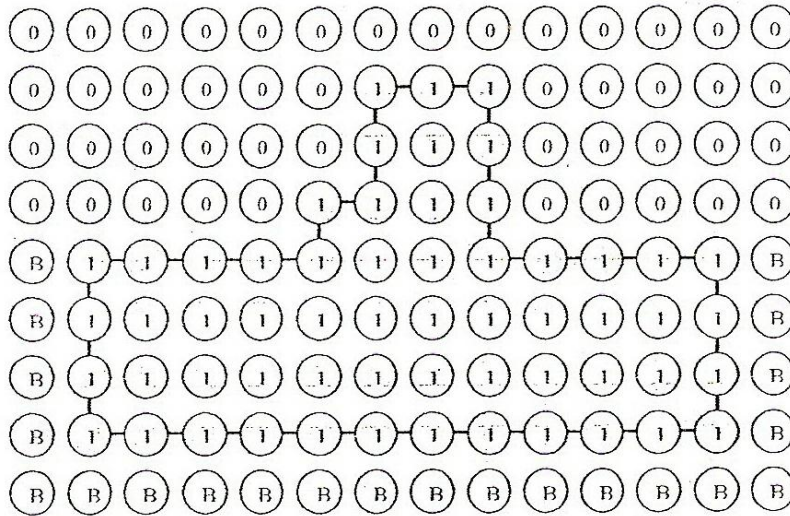


Figura 3.11. Matriz de unos (1), ceros (0) y puntos de las fronteras absorbentes la cual define el modelo, junto con los bordes absorbentes.

Se dice que la condición de superficie libre es la misma para todos los casos, diferentes esquemas de diferencias finitas serán necesarios para asegurar que el método sea explícito. Por lo que se muestra esta clasificación en la figura 3.12.

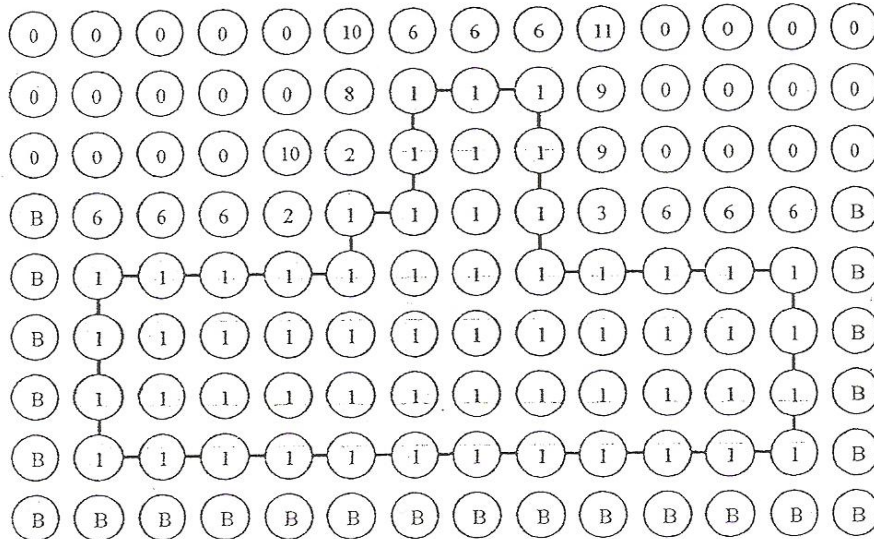


Figura 3.12. Matriz en la que se observa una clasificación de los diferentes puntos que definen el modelo y son clasificados de acuerdo a la forma de la superficie libre.

Capítulo 3

Para tratar un esquema explícito es necesario seguir orden de cálculo concreto. Primero se calcula los puntos interiores ① porque los desplazamientos en estos puntos se aproximan con los esquemas generales de diferencias finita

Una vez que se tiene estos puntos, se calcularan en el orden que se indica, por lo que primero será las esquinas interiores ②, ③, ④ y ⑤, después, los puntos que pertenecen a superficie horizontales y verticales, ⑥, ⑦, ⑧ y ⑨, después las esquinas exteriores, ⑩, ⑪, ⑫, ⑬. Es importante tomar en cuenta que los puntos que conforman la línea ficticia deben tener los mismos parámetros que los puntos del interior del modelo.

CAPÍTULO 4

Propagación de ondas en un medio estratificado.

4.1 Ejemplos estudiados.

En este capítulo se hizo la implementación de resultados de pruebas de estabilidad numérica y varios casos que se modelaron numéricamente por el programa de cómputo fortran 6.6. y que se graficaron por el programa matlab 7.0, del problema de la propagación de ondas en un medio estratificado, mediante el método de diferencias finitas.

Con la teoría presentada anteriormente y con el programa de cómputo desarrollado se hizo la simulación de varios casos:

Ejemplos 1.-

Para un sistema de múltiples de estratos sólido-sólido simétrico, con diferentes propiedades mecánicas, con una fuente dada en el mismo estrato. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente y H_i es el espesor del estrato. Determinar su respuesta

Ejemplos 2.-

Para un sistema de multi-estrato sólido-sólido simétrico, con diferentes propiedades mecánicas, con una fuente dada en el mismo estrato. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente y H_i es el espesor del estrato. Determinar su respuesta

Ejemplos 3.-

Para un sistema de múltiples de estratos líquido-sólido simétrico, con diferentes propiedades mecánicas, con una fuente dada en el mismo estrato. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente y H_i es el espesor del estrato. Determinar su respuesta

Ejemplos 4.-

Para un sistema multi-estrato líquido-sólido simétrico, con diferentes propiedades mecánicas, con una fuente dada en el mismo estrato. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente y H_i es el espesor del estrato. Determinar su respuesta

4.2 Programas de cómputo.

Se utilizó para la modelación de la propagación de ondas para un sistema de múltiples de estratos (sólido y líquido) el programa de computo hecho en el lenguaje FORTRAN denominado “ elastic_cyl”, realizado por el personal de modelación sísmica de la UNAM, encabezado por el Dr. Sánchez-Sesma y a su vez modificado por el Dr. Esteban Flores Méndez y el Ing. Reynaldo Solís Ortiz, donde se resuelven el campo de desplazamientos y de esfuerzos de las ecuaciones de la elasticidad dinámica mediante el esquema de solución de diferencias finitas debidamente codificado. Como se muestra en la figura 4.1.

```
c
c  program elastic_cyl
c
c  metodo pseudoespectral con formulacion velocidad-esfuerzo
c  se agregaron fronteras absorbentes de tipo kosloff
c
c  Fuente: linea dilatacional en un espacio elastico
c  variacion triangular en tiempo con momento maximo
c  dado por Mo = factor * pi * ro * alf**2
c      [F*L]/[L]=[L**2]*[F/L**2]
c
c  por F J Sanchez-Sesma, R Madariaga
c  Modificado para su uso por Esteban Flores Méndez y Reynaldo Solis Ortiz (2009)
c  fronteras absorbentes j j Perez Gavilan (nov 2006)
c  se quitó la normalización para usar unidades (dic 2006)
c  se asume que la frontera del liquido coincide con la malla
c  se el promedio del mu en un punto solo se calcula si todos
c  los vecinos son de material sólido, de lo contrario se toma = 0
c
parameter(ndimx=512)
parameter(ndimy=512)
dimension u(ndimx,ndimy), v(ndimx,ndimy)           !VELS
dimension uint(ndimx,ndimy), vint(ndimx,ndimy)    !DESPLS
dimension dxu(ndimx,ndimy), dxv(ndimx,ndimy)      !DERIVADAS
dimension dyu(ndimx,ndimy), dyv(ndimx,ndimy)      !DERIVADAS
dimension sxx(ndimx,ndimy), sxy(ndimx,ndimy)       !ESFUERZOS
dimension syy(ndimx,ndimy), srr(ndimx,ndimy)       !ESFUERZOS
dimension sxxint(ndimx,ndimy),sxyint(ndimx,ndimy)
dimension syyint(ndimx,ndimy)                       !ESFS INTEG
dimension dxsxx(ndimx,ndimy), dxsxy(ndimx,ndimy)  !DERIVADAS
dimension dysyy(ndimx,ndimy), dysxy(ndimx,ndimy)  !DERIVADAS
dimension facly(ndimx,ndimy), faclay(ndimx,ndimy)
dimension fac1(ndimx,ndimy), fac2(ndimx,ndimy)
dimension fac3(ndimx,ndimy), fac4(ndimx,ndimy)
dimension fac1a(ndimx,ndimy), fac2a(ndimx,ndimy)
dimension fac3a(ndimx,ndimy), fac4a(ndimx,ndimy)
dimension gu(ndimx,ndimy), gs(ndimx,ndimy)
dimension iesx(50), iesy(50)                       !estaciones
integer rx
logical ieqc
```

Figura 4.1. Programa elastic_cyl

Capítulo 4

Se presenta el programa de cómputo de lenguaje MATLAB llamado “MovieCyl”. Donde se grafica el problema del fenómeno de la propagación de ondas para un sistema de múltiples de estratos (sólido y líquido), con diferentes propiedades mecánicas. Donde se muestra en la figura 4.2.

```
1 %Load data files
2 clear
3 load lenta3.PRE;
4 data=lenta3;
5 N=length(data);
6 %NX=21;
7 Nz=256;
8 %IT=256;
9 IT=70;
10 %Af=373.54;
11 %N=2^8;
12 %MN=24;
13 %At=1/2/N/Af;
14 %DT=At;
15 mi=min(min(data));
16 ma=max(max(data));
17
18 %assing the different frames to the array frame
19 for k=1:IT-1
20     frame(:, :, k)=data((k-1)*Nz+1:1:k*Nz, :);
21 end
22
23 %Normalization
24 for k=1:IT-1
25     frame(:, :, k)=(frame(:, :, k)-mi);
26 end
27 %axis tight
28 %set(gca,'nextplot','replacechildren');
29 for k=1:1:64
30     surf(frame(:, :, k));
31     view(0,90);
32     shading interp;
33     F(k) = getframe;
34 end
35 %Play the movie
36 movie(F,1);
37
```

Figura 4.2. Programa MovieCyl.

4.3 Prueba de estabilidad.

Para la prueba de estabilidad se dice que el Numero de Courant-Friedrich-Levy(CFL), marca el límite superior del intervalo de tiempo interno utilizado por ciertos algoritmos. Es una condición de convergencia de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales solucionadas mediante ciertos algoritmos. Como consecuencia de esta condición, el paso de tiempo debe ser inferior a un cierto valor sino la simulación producirá resultados incorrectos (R. Courant, K. Friedrichs, 1967).

Por lo que una onda está cruzando una malla discreta, entonces el intervalo de tiempo debe ser inferior que el tiempo necesario para que la onda atraviese los puntos de la malla adyacentes, cuando la separación entre los puntos de la malla se reduce, el límite superior para el intervalo de tiempo es inferior. La condición CFL es el cociente entre el intervalo de tiempo y el tiempo de residencia en un volumen finito se presenta a continuación:

$$\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2} \text{ ó } C$$

Donde:

C Es el número de Courant.

Δt Es el intervalo de tiempo.

Δx Es el intervalo de tiempo.

U Es la velocidad.

Considérese los valores tomados del programa, decimos:

1.- ejemplo:

$$\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{alf} \cdot dt}{dx} < \frac{1}{2}$$

Donde:

dt = es el intervalo del tiempo, $dt = 0.1111e^{-5}$

dx = es el intervalo de espacio, $dx = 0.01$

alf = es la velocidad de la onda, alf = 3000

Sustituyendo nos da:

$$\frac{3000 \times 0.1111e^{-5}}{0.01} < \frac{1}{2}$$

$$0.333 < 0.5$$

Si cumple es estable

Capítulo 4

2.- ejemplo:

$$\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{alf. } dt}{dx} < \frac{1}{2}$$

Donde:

dt = es el intervalo del tiempo, $dt = 0.1111e^{-5}$

dx = es el intervalo de espacio, $dx = 0.01$

vf = es la velocidad de la onda, $vf = 1500$

Sustituyendo nos da:

$$\frac{1500 \times 0.1111e^{-5}}{0.01} < \frac{1}{2}$$

$$0.1666 < 0.5$$

Si cumple es estable.

Este es un resultado muy importante. Se acaba de encontrar una relación entre los distintos parámetros tanto del modelo como de la malla que hace que el método se mantenga estable y por tanto exista convergencia hacia la solución correcta.

La condición de Courant significa que el dominio de dependencia de un punto en un esquema en diferencias explícitas (que está formado por los puntos del espacio que intervienen en el esquema) debe comprender al dominio de dependencia para la ecuación diferencial, ya que precisamente $u \pm c$ es la velocidad de propagación de una onda, o velocidad de transmisión de la información, que limita el dominio de dependencia para la solución exacta.

Se procede para obtener alguno de estos criterios de estabilidad. Para ello se va a seguir el llamado análisis de Fourier, lo que nos facilita una herramienta para controlar el error de una iteración a otra, y lo que es más, esta expresión nos aporta una condición para que dicho error no crezca en las sucesivas iteraciones del método, según $|\mathcal{E}| \leq 1.0$, esto se le conoce como condición de Von Neumann. A partir de esta condición podremos obtener criterios que nos permita asegurar que nuestro método va a converger a la solución correcta de una forma estable.

Capítulo 4

A continuación se presenta la siguiente grafica (ver figura 4.1) en el programa matlab versión 7.0 (elaborada por el Dr. Esteban Flores Méndez), se observa que la línea azul representa el método del numero de onda discreta, mientras la línea negra representa el método de diferencias finitas. Se puede ver gráficamente que la zona entre 0 y 1 partir del número de ondas discreta asegura la estabilidad (mencionado anteriormente por la condición de análisis de Fourier), mientras que el método de diferencias finitas (FD) es mayor que 1. entonces, se puede decir que este método de ondas discreta (DWN) converger a la solución de una forma estable. Esta técnica de (DWN) se utilizo y se mostro eficientemente en el cálculo computacional y expresa correctamente el campo de desplazamiento.

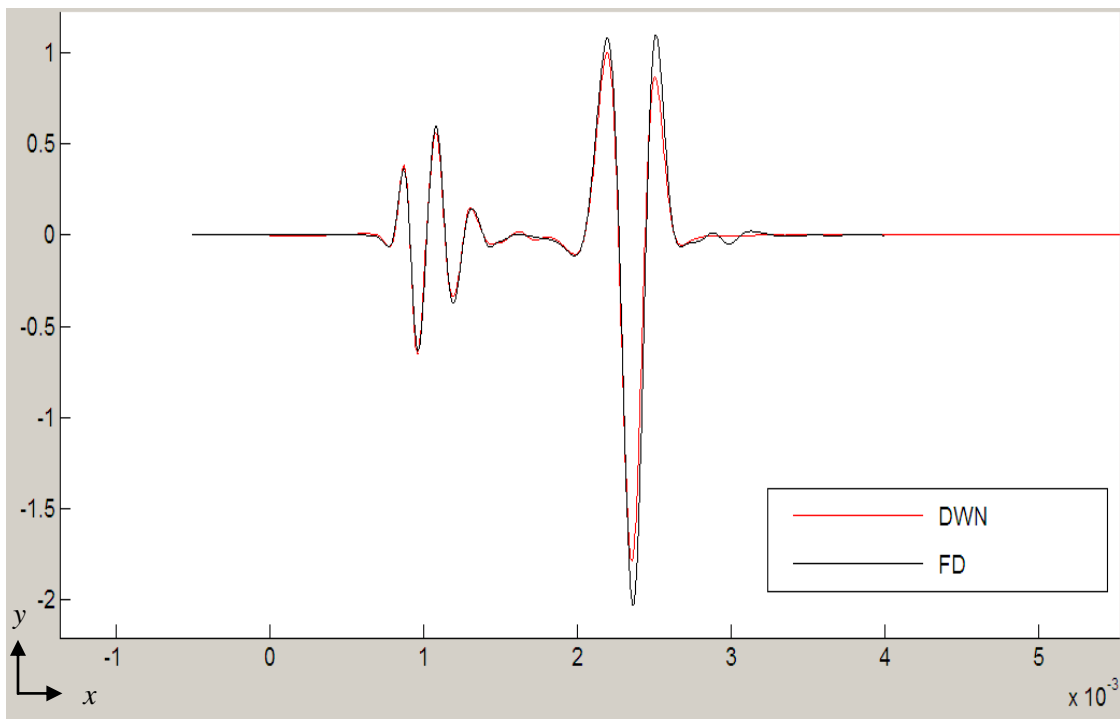


Figura 4.3. Representación del método diferencias finitas frente al método de ondas de discreta para diferentes valores.

Esta técnica del método de ondas discreta (Aki y Lamer, 1970) se expresa como una superposición de ondas planas, incluyendo las ondas inhomogeneas, propagándose en todas las direcciones desde la frontera del espacio elástico.

4.4 Soluciones de los ejemplos estudiados.

Ejemplo 1.- Se analizará el caso de propagación de ondas en un sistema con múltiples estratos sólidos y simétricos, con propiedades mecánicas diferentes, con una fuente que se localiza en el estrato intermedio. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente y H_i es el espesor del estrato como se muestra en la figura 4.4. Determinar su respuesta:

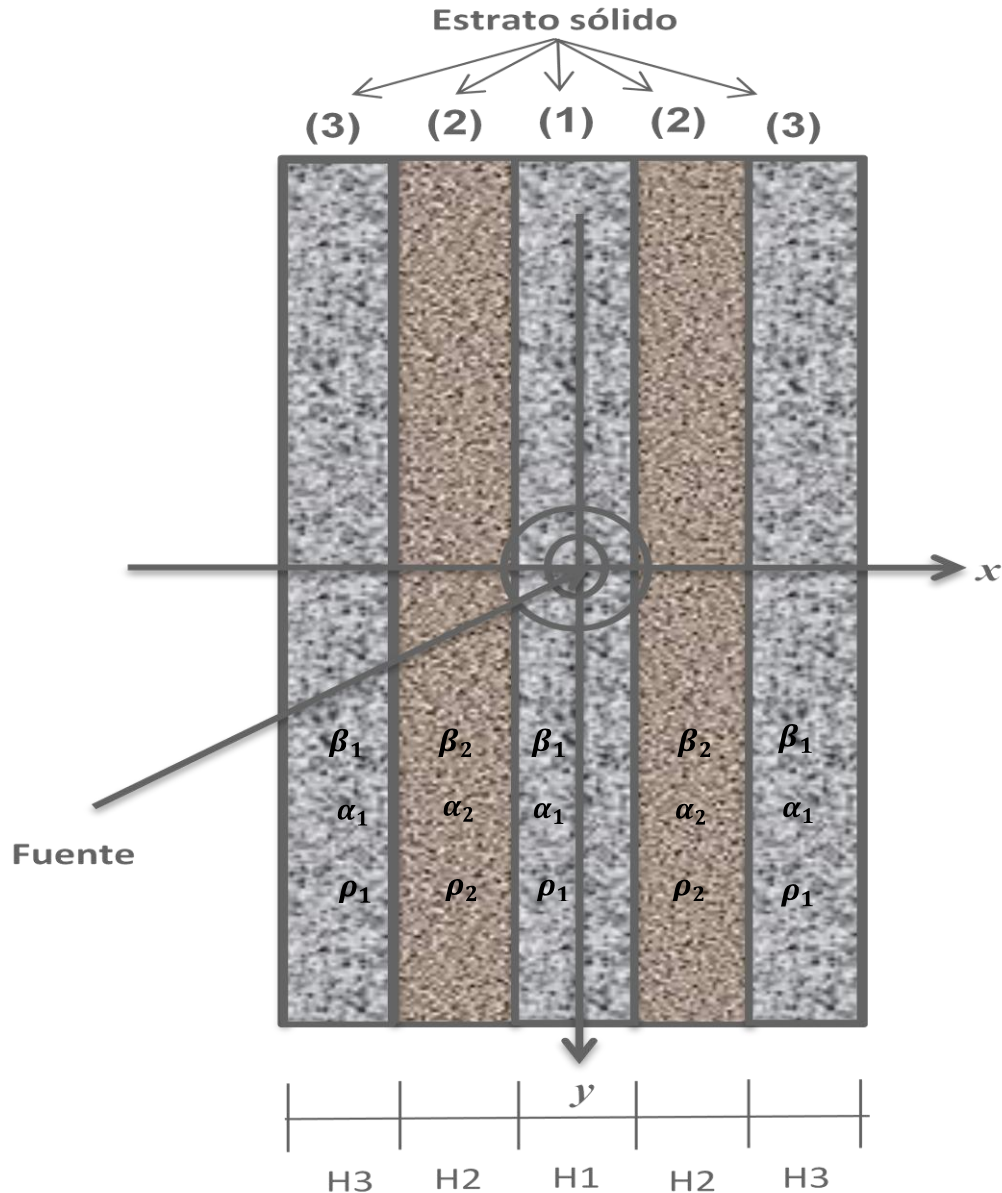


Figura 4.4. Sistema de estratos sólidos, con diferentes propiedades mecánicas.

Capítulo 4

Tabla 4.1. Propiedades mecánicas para un sistema de múltiples de estratos sólidos simétricos.

números de estratos	nt	dt	α_2	β_2	β_1	ρ_2	α_1	ρ_1	dx	t_p	t_s	factor
5	1750	.1E-5	3000	1200	1000	2.5	1500	2.7	0.01	0.0001	0.0001	1
Estaciones (nr)	nx	nx_1	nx_s	nx_2	ny	ny_1	nys	ny_2	nr	radio	dy	
128 100	256	1	128	256	256	1	50	256	0	0.5	0	
128 115												
128 130												
128 145												
128 160												
128 175												
128 190												
128 205												
<i>nshot</i> (1 a 60)												

En la Tabla 4.1 se presentan las propiedades para un sistema con múltiples estratos sólidos y simétricos, con propiedades mecánicas diferentes, donde nt es el número de intervalo del tiempo, dt es el incremento del tiempo, α_2 es la velocidad de onda P en un sólido, β_2 es la velocidad de la onda S en el sólido, ρ_2 es la densidad del medio sólido, α_1 es la velocidad de la onda P en el fluido, ρ_1 es la densidad del medio fluido, dx es el ancho de la malla en x , (ver capítulo 3), t_s es el retraso del pulso del ricker, t_p es el ancho del pulso de ricker (ver capítulo 3), nx es el número de intervalo de la malla en x , por lo cual se discretiza en el espacio, nx_1 es el número de intervalo de la malla en x_1 , nx_2 es el número de intervalo de la malla en x_2 , nr es el número de registro de receptores, radio es la longitud de la apertura, dy es el ancho de la malla en y , ny es el número de intervalo de la malla en y , ny_1 es el número de intervalo de la malla en y_1 , ny_2 es el número de intervalo de la malla en y_2 , nys es el número de fotos del disparo, $N.est.$ es el número de estaciones.

4.5 Resultados del ejemplo 1.

En la Figura 4.5 se presenta la propagación de una onda en un medio sólido. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos 0.00013 y 0.00016 segundos, después del disparo.

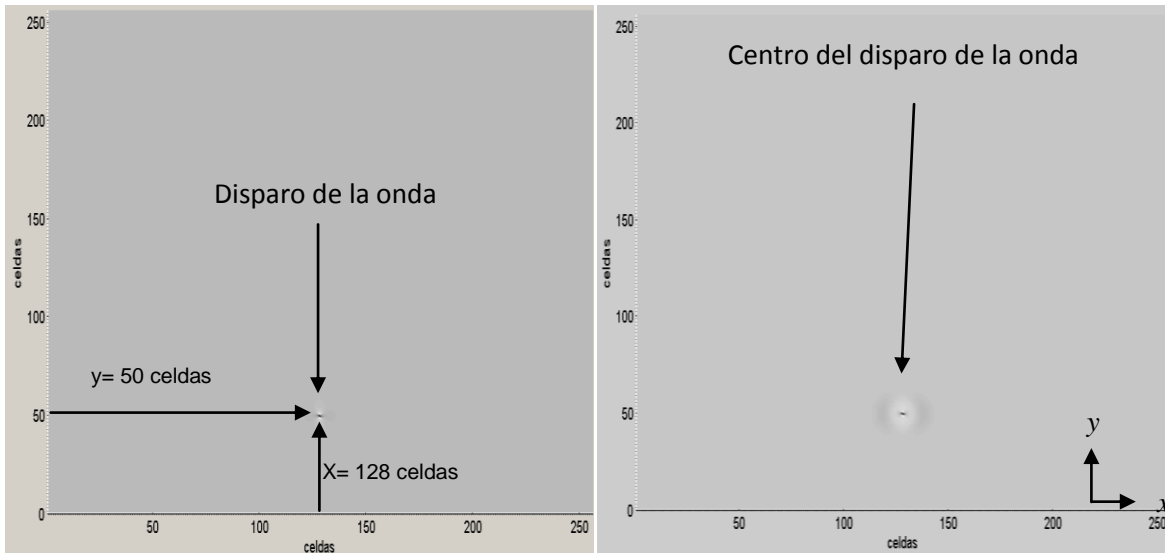


Figura 4.5. Propagación de una onda, en una instantánea de un tiempo 0.00013 y 0.00016 segundos.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la frontera, como se muestra en la figura 4.6.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = 0.5 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 0.00033 \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111e-5 \text{ s} = 2.7775e-005 \text{ s}$$

No. Cuadros = 12 Número de cuadros desde el disparo a la primera reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 12 * 2.7775e-005 \text{ s} = 3.3330e-004 \text{ s}$$

Capítulo 4

En las Figuras 4.6 y 4.7 se muestra la propagación de una onda P que incide en un medio sólido con diferentes propiedades. En las figuras se observa que la velocidad de onda P transmitida es mayor. Se presenta una instantánea de la propagación que corresponde a los tiempos 0.00033 y 0.00038 segundos para las figuras mencionadas.

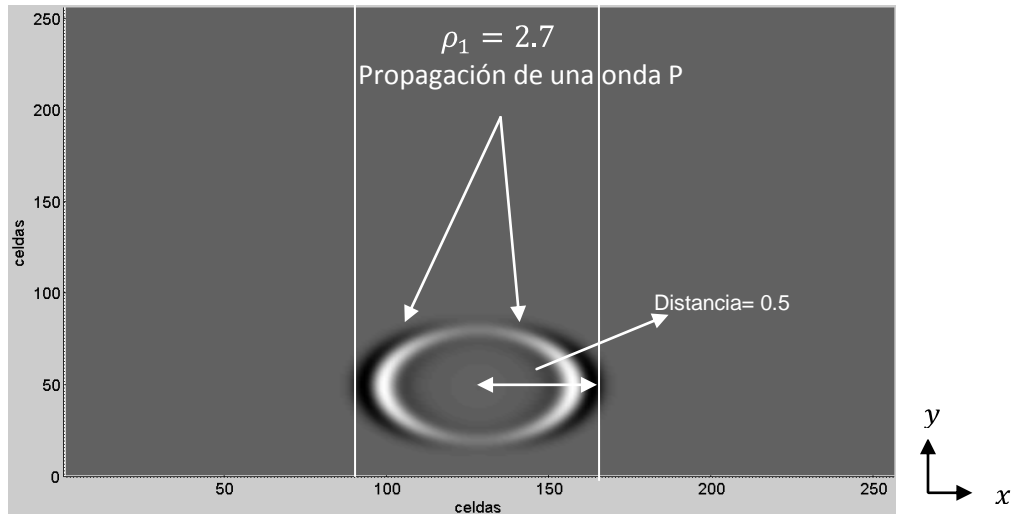


Figura 4.6. Propagación de una onda, en una instantánea de un tiempo de 0.00033 segundos.

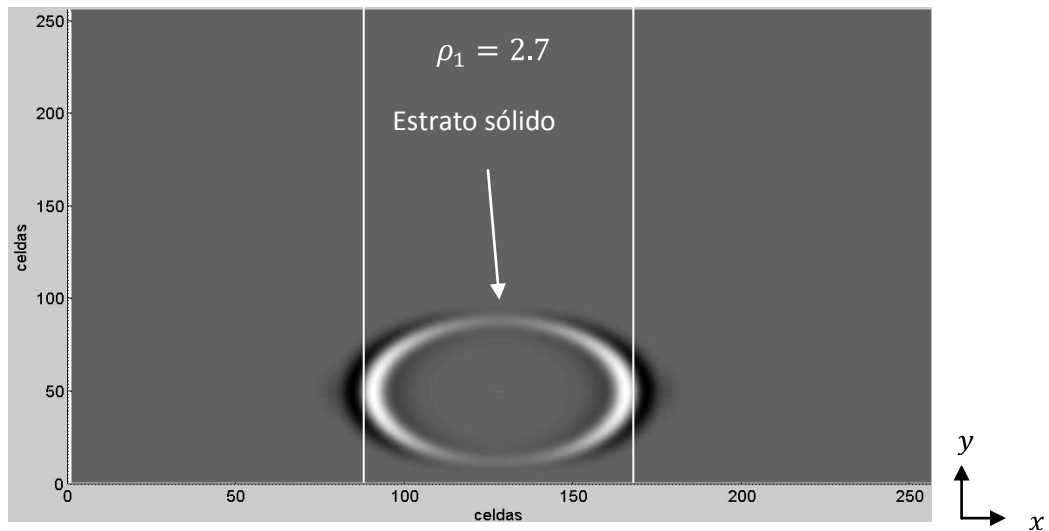


Figura 4.7. Propagación de una onda P, en un instante de un tiempo de 0.00038 segundos.

Capítulo 4

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la segunda frontera, como se muestra en la figura 4.8.

$$\alpha_2 = 3000 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_2 = 0.25 \text{ m} / 3000 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 8.3333e-005 \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111e-5 \text{ s} = 2.7775e-005 \text{ s}$$

No. Cuadros = 3 Número de cuadros desde el disparo a la segunda reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 3 * 2.7775e-005 \text{ s} = 8.3325e-005 \text{ s}$$

En la Figura 4.8, se presenta la propagación de las ondas P que incide en un medio sólido. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00041 segundos. Donde parte de la onda se transmite con la velocidad del estrato sólido con diferentes propiedades mecánicas.

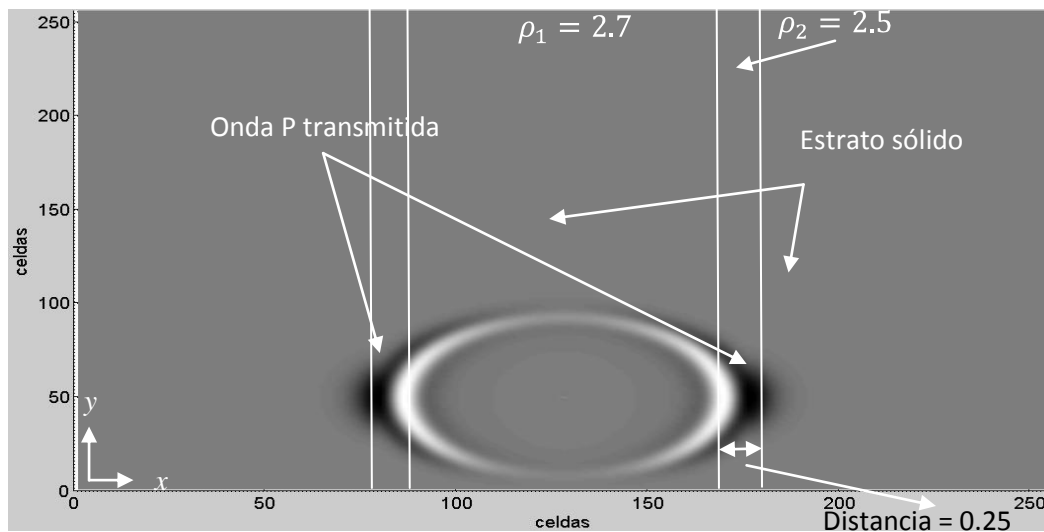


Figura 4.8. Propagación de una onda P transmitida, en un instante de un tiempo de 0.00041 segundos.

Capítulo 4

En la Figura 4.9, se muestra la propagación de las ondas P en dos estratos sólidos. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos 0.00049 y 0.00052 segundos. Donde se observa que las ondas P se reflejan y se transmiten a través los estratos sólidos con diferentes propiedades.

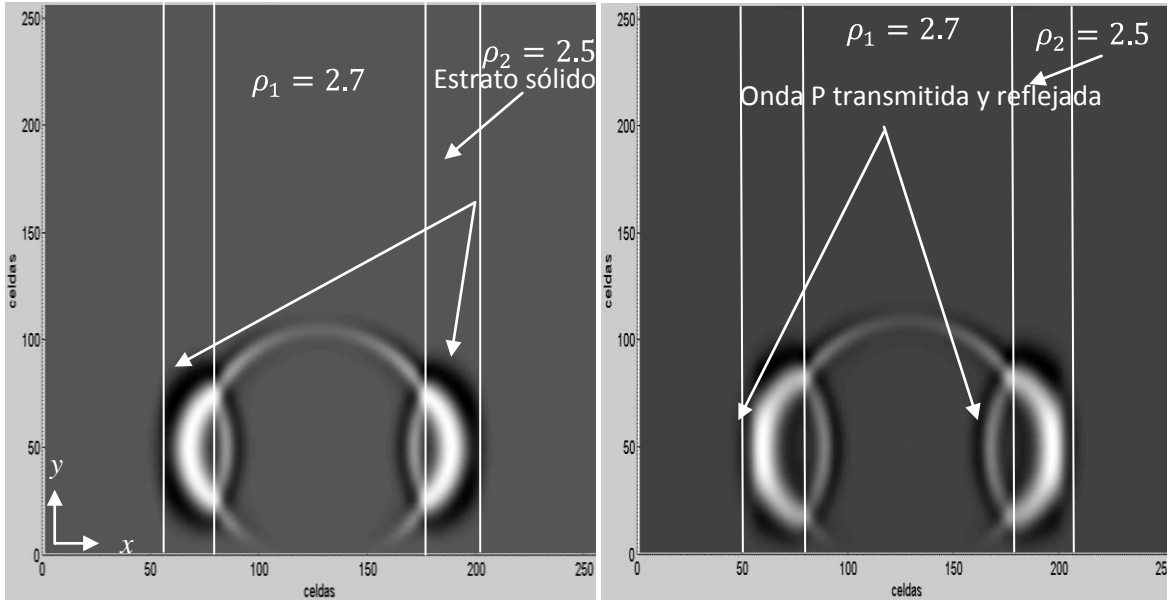


Figura 4.9. Propagación de ondas P transmitida y reflejada, en una instantánea de un tiempo de 0.00049 y 0.00052 segundos.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la tercera frontera, como se muestra en la figura 4.10.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = .25 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 1.6667e-004 \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111e-5 \text{ s} = 2.7775e-005 \text{ s}$$

No. Cuadros = 6 Número de cuadros desde el disparo a la tercera reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 6 * 2.7775e-005 \text{ s} = 1.6665e-004 \text{ s}$$

Capítulo 4

En la Figura 4.10, se presenta la propagación de las ondas P, en tres estratos sólidos. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos 0.00058 y 0.00061 segundos. Se presenta ondas reflejadas y transmitidas, de acuerdo con la velocidad de los estratos con diferentes propiedades mecánicas.

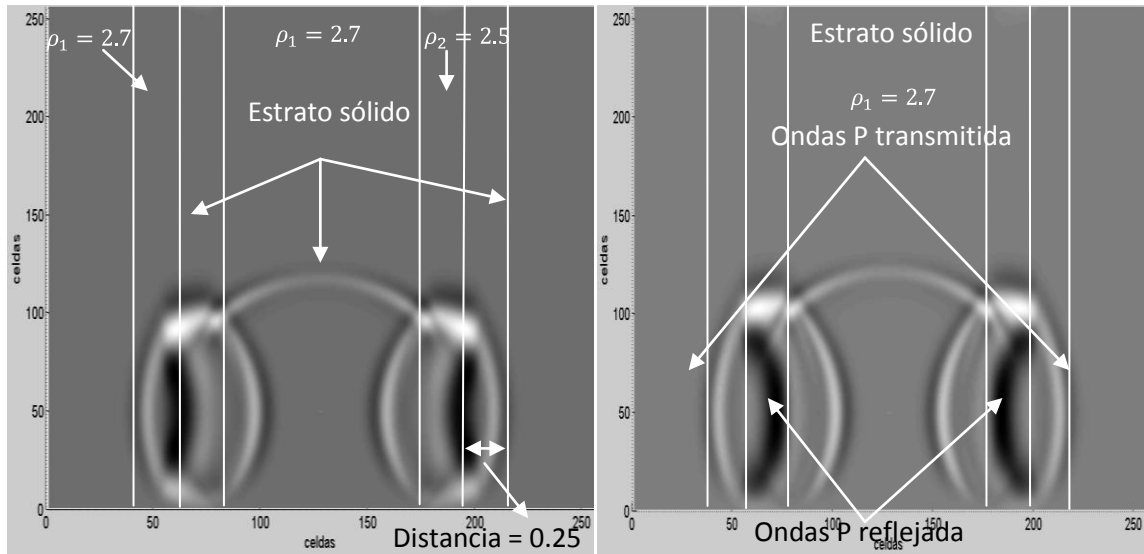


Figura 4.10. Propagación de una P transmitida y reflejada, en una instantánea de un tiempo de 0.00058 y 0.00061 segundos.

En la Figura 4.11, se muestra la propagación de ondas en un medio estratificado sólido con diferentes propiedades. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00074 segundos. Donde se puede ver la presencia de las ondas de interfase, lo cual se llegan a ver cuando las ondas se propagan entre dos estratos sólidos.

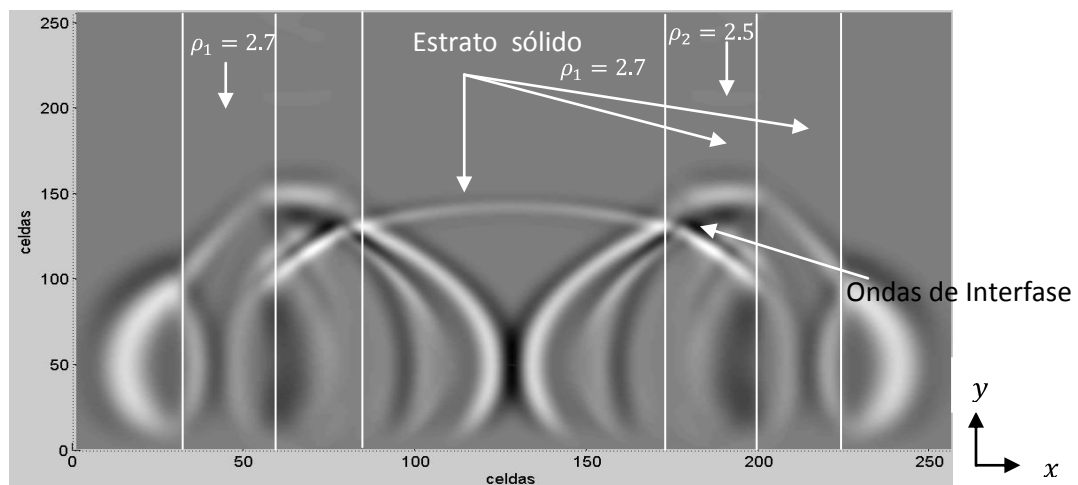


Figura 4.11. Propagación de ondas de Interfase, en un instante de tiempo 0.00074 segundos

Capítulo 4

En la Figura 4.12, se presenta la propagación de las ondas P y S en un medio con estratos sólidos. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00080 segundos. Donde parte de las ondas se reflejan y se transmiten de acuerdo a los estratos que están señaladas con líneas negras.

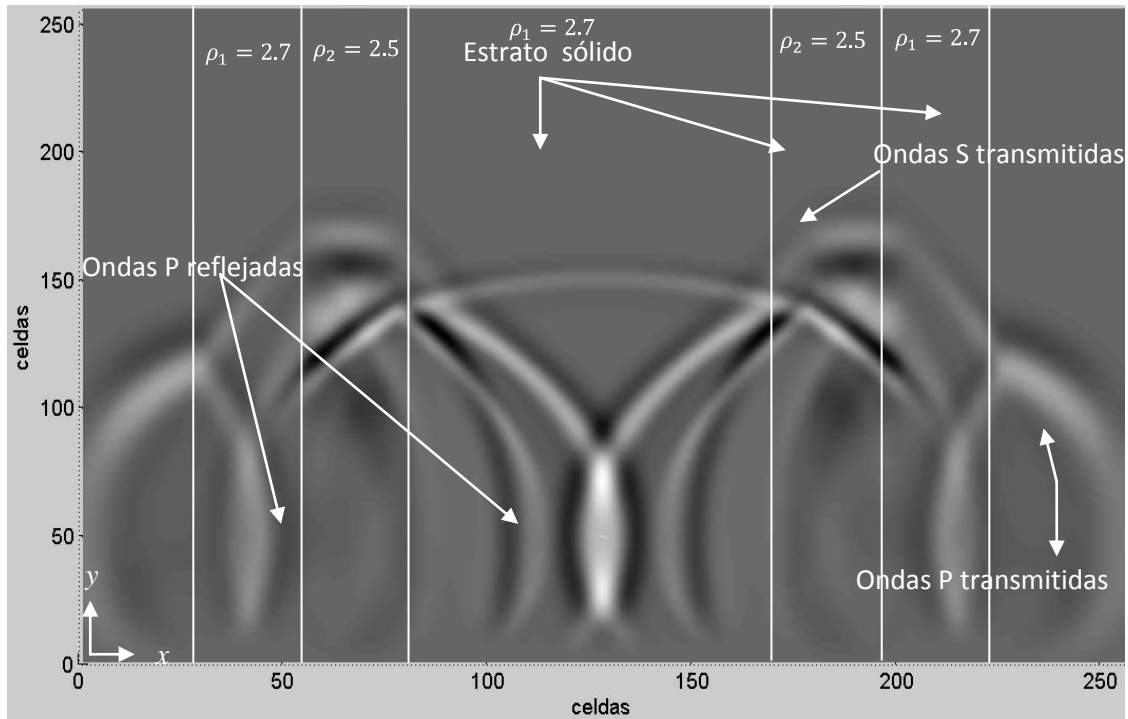


Figura 4.12. Propagación de ondas P y S en un medio estratificado sólido, en una instantánea de un tiempo de 0.00080 segundos.

Ejemplo 2.- Se analizará el caso de propagación de ondas en un sistema con múltiples estratos sólidos y simétricos, con propiedades mecánicas diferentes, con una fuente que se localiza en el estrato intermedio. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente y H_i es el espesor del estrato como se muestra en la figura 4.13. Determinar su respuesta:

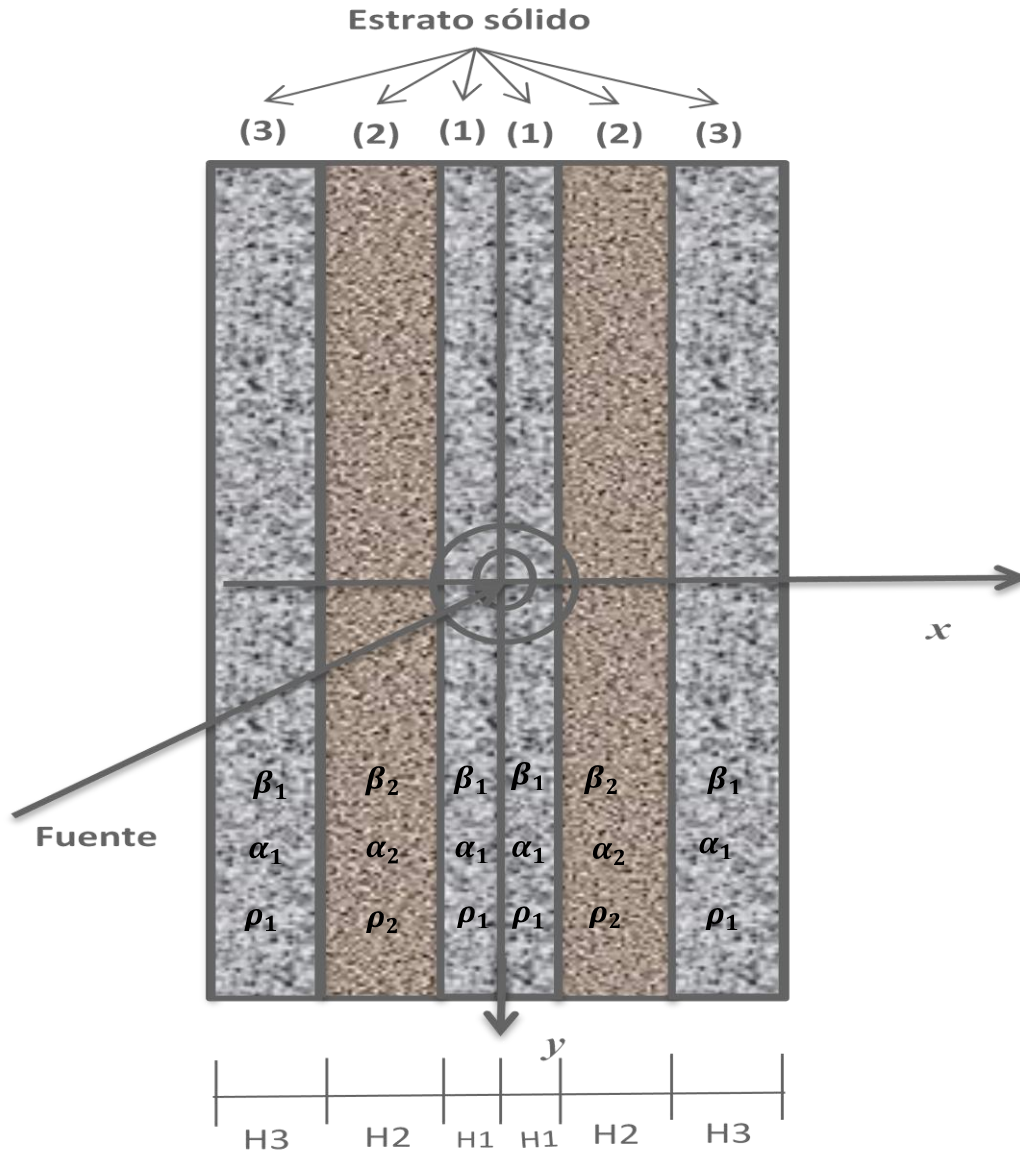


Figura 4.13. Sistemas de multi-estrato sólido y simétrico, con distintas propiedades mecánicas.

Capítulo 4

Tabla 4.2. Propiedades mecánicas de un multi-estrato sólido simétrico.

números de estratos	nt	dt	α_2	β_2	β_1	ρ_2	α_1	ρ_1	dx	t_s	t_p	factor
5	1750	.1E-5	3000	1200	1000	2.5	1500	2.7	0.01	0.0001	0.0001	1
Estaciones (nr)	nx	nx_2	nxs	nx_2	ny	ny_1	nys	ny_2	nr	radio	dy	
128 100	256	1	128	256	256	1	50	256	0	0.5	0	
128 115												
128 130												
128 145												
128 160												
128 175												
128 190												
128 205												
<i>nshot</i> (1 a 60)												

En la Tabla 4.2 se presentan las propiedades para un sistema con múltiples estratos sólidos y simétricos, con propiedades mecánicas diferentes, donde nt es el número de intervalo del tiempo, dt es el incremento del tiempo, α_2 es la velocidad de onda P en un sólido, β_2 es la velocidad de la onda S en el sólido, ρ_2 es la densidad del medio sólido, α_1 es la velocidad de la onda P en el fluido, ρ_1 es la densidad del medio fluido, dx es el ancho de la malla en x , (ver capítulo 3), t_s es el retraso del pulso del ricker, t_p es el ancho del pulso de ricker (ver capítulo 3), nx es el número de intervalo de la malla en x , por lo cual se discretiza en el espacio, nx_1 es el número de intervalo de la malla en x_1 , nx_2 es el número de intervalo de la malla en x_2 , nr es el número de registro de receptores, radio es la longitud de la apertura, dy es el ancho de la malla en y , ny es el número de intervalo de la malla en y , ny_1 es el número de intervalo de la malla en y_1 , ny_2 es el número de intervalo de la malla en y_2 , nys es el número de fotos del disparo, $N.est.$ es el número de estaciones.

4.6 Resultados del ejemplo 2.

En la Figura 4.14, se presenta la propagación de una onda en un estrato sólido. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00013 y 0.00016 segundos, después del disparo

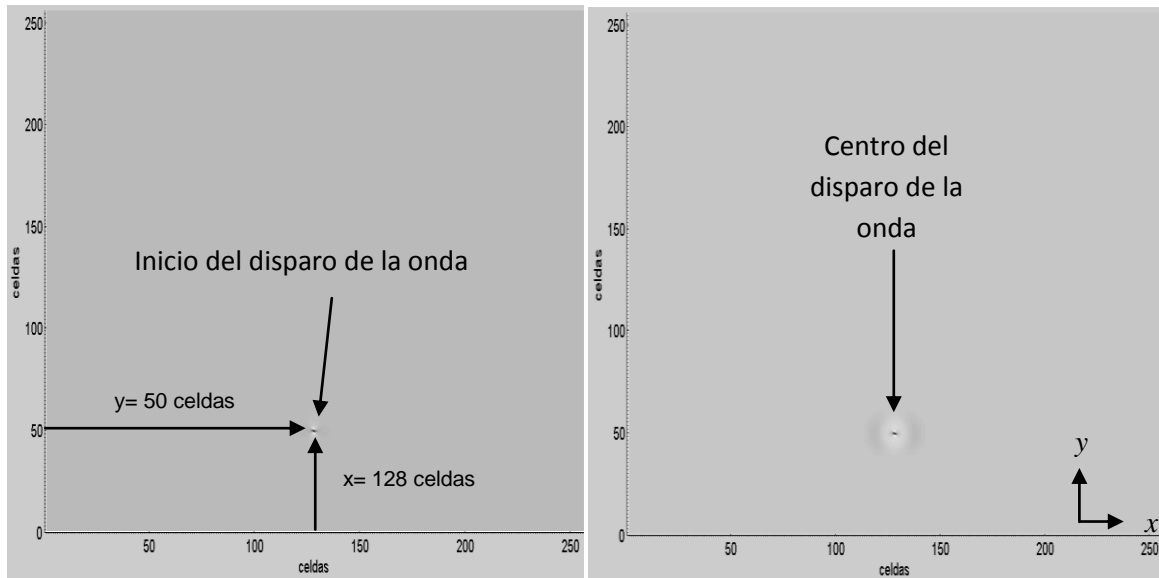


Figura 4.14. Inicio de la propagación de una onda P, en una instantánea de un tiempo 0.00013 y 0.00016 segundos

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la frontera, como se muestra en la figura 4.15.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = 0.25 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 1.6667 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$n. \text{ shot} * \Delta t = 25 * 0.1111 \times 10^{-5} \text{ s} = 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No. Cuadros = 6 Número de cuadros desde el disparo a la primera reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 6 * 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Capítulo 4

En la Figura 4.15, se muestra la propagación de una onda P que incide en un estrato sólido con diferentes propiedades. Donde parte de la onda se empieza a transmitir mediante el medio sólido. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos de 0.00016 y 0.00024 segundos.

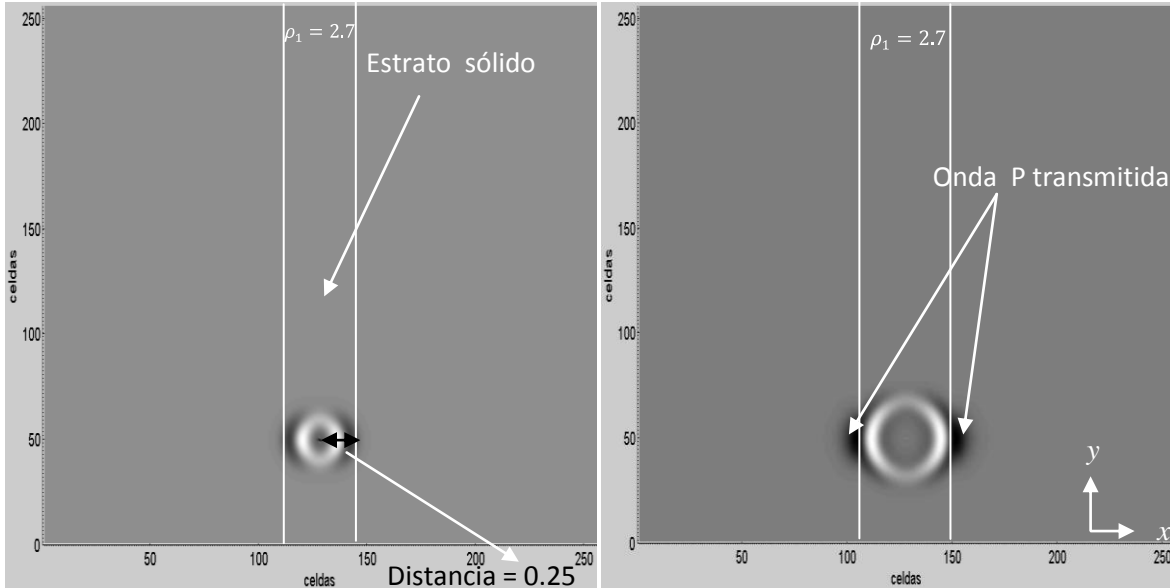


Figura 4.15. Propagación de una onda P transmitida, en una instantánea de un tiempo de 0.00019 y 0.00024 segundos.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la segunda frontera, como se muestra en la figura 4.16.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$t_{D-F} = r / \alpha_1 = 0.25 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$t_{D-F} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111 \times 10^{-5} \text{ s} = 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No. Cuadros = 6 Número de cuadros desde el disparo a la segunda reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 6 * 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Capítulo 4

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la tercera frontera, como se muestra en la figura 4.16.

$$\alpha_2 = 3000 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_2 = 0.25 \text{ m} / 3000 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 8.3333e-005 \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111e-5 \text{ s} = 2.7775e-005 \text{ s}$$

No. Cuadros = 3 Número de cuadros desde el disparo a la segunda reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 3 * 2.7775e-005 \text{ s} = 8.3325e-005 \text{ s}$$

En la Figura 4.16, se muestra la propagación de las ondas P a través de 3 estratos sólidos. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos de 0.00030 y 0.00041 segundos. Donde se observa que las ondas P se reflejan y se transmiten de acuerdo a las velocidades de los estratos sólidos con diferentes propiedades.

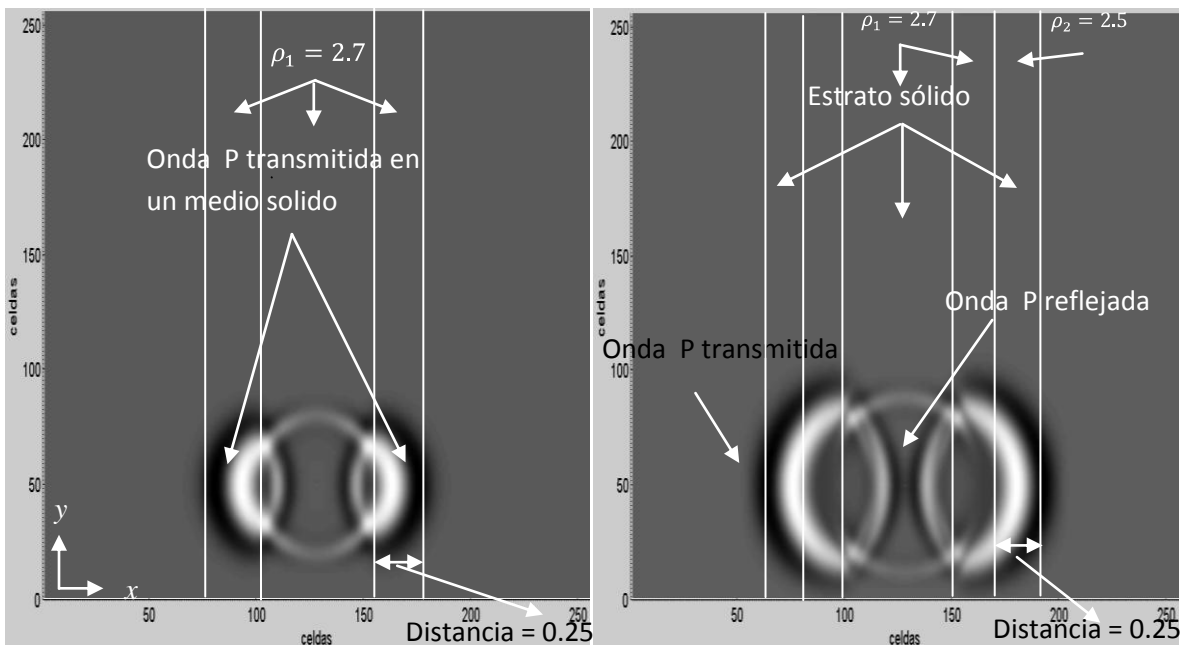


Figura 4.16. Propagación de ondas P transmitidas y reflejadas en un medio sólido, en una instantánea de tiempo de 0.00033 y 0.00038 segundos.

Capítulo 4

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la cuarta frontera, como se muestra en la figura 4.17.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = .25 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 1.6667 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111 \times 10^{-5} \text{ s} = 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No. Cuadros = 6 Número de cuadros desde el disparo a la tercera reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 6 * 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

En la Figura 4.17, se presenta la propagación de ondas P en un multi-estrato sólido. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00055 segundos. Donde parte de las ondas se reflejan y se transmiten mediante los estratos sólidos con diferentes propiedades, como se muestran señaladas con líneas negras.

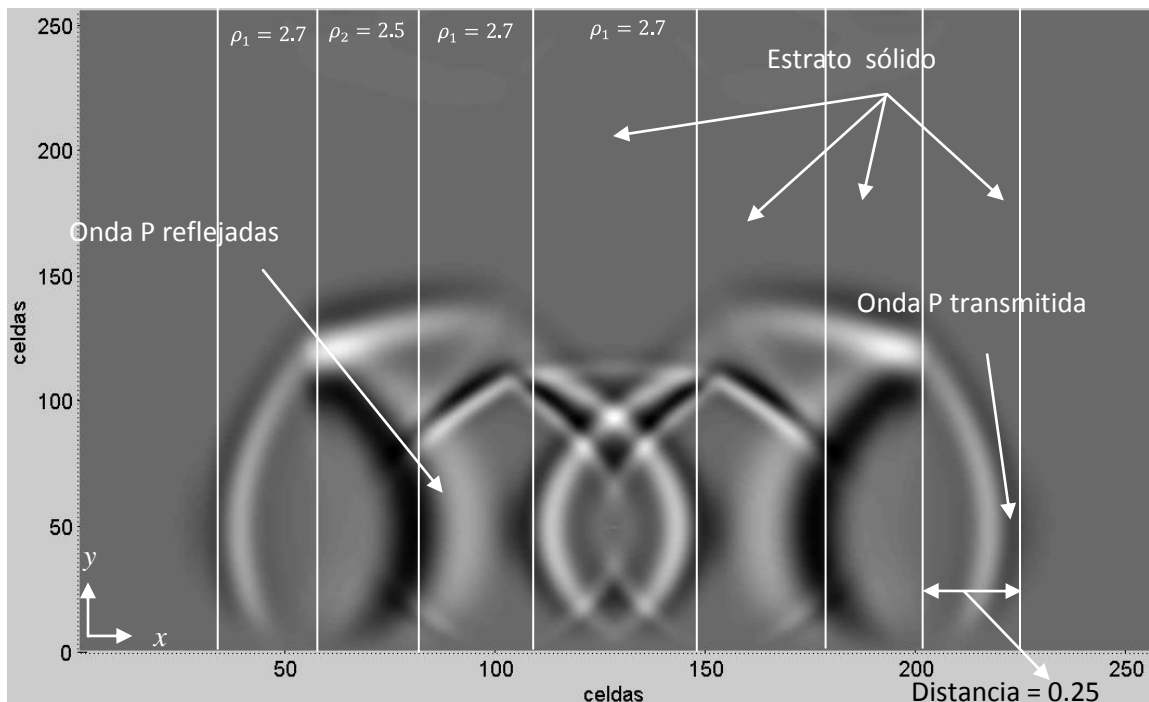


Figura 4.17. Propagación de las ondas P, en un multi-estrato sólido en una instantánea de un tiempo de 0.00058 segundos.

Capítulo 4

En la Figura 4.18, se muestra la propagación de ondas P y S en un multi-estrato sólidos con diferentes propiedades. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00097 segundos. Donde parte de las ondas se reflejan y se transmiten mediante los estratos sólidos. Donde también se llega a ver la presencia de las ondas de interface, lo cual se llega a ver cuando las ondas se propagan entre dos estratos sólidos. La velocidad de estas ondas de interface es menor a la propagación de las ondas P y S.

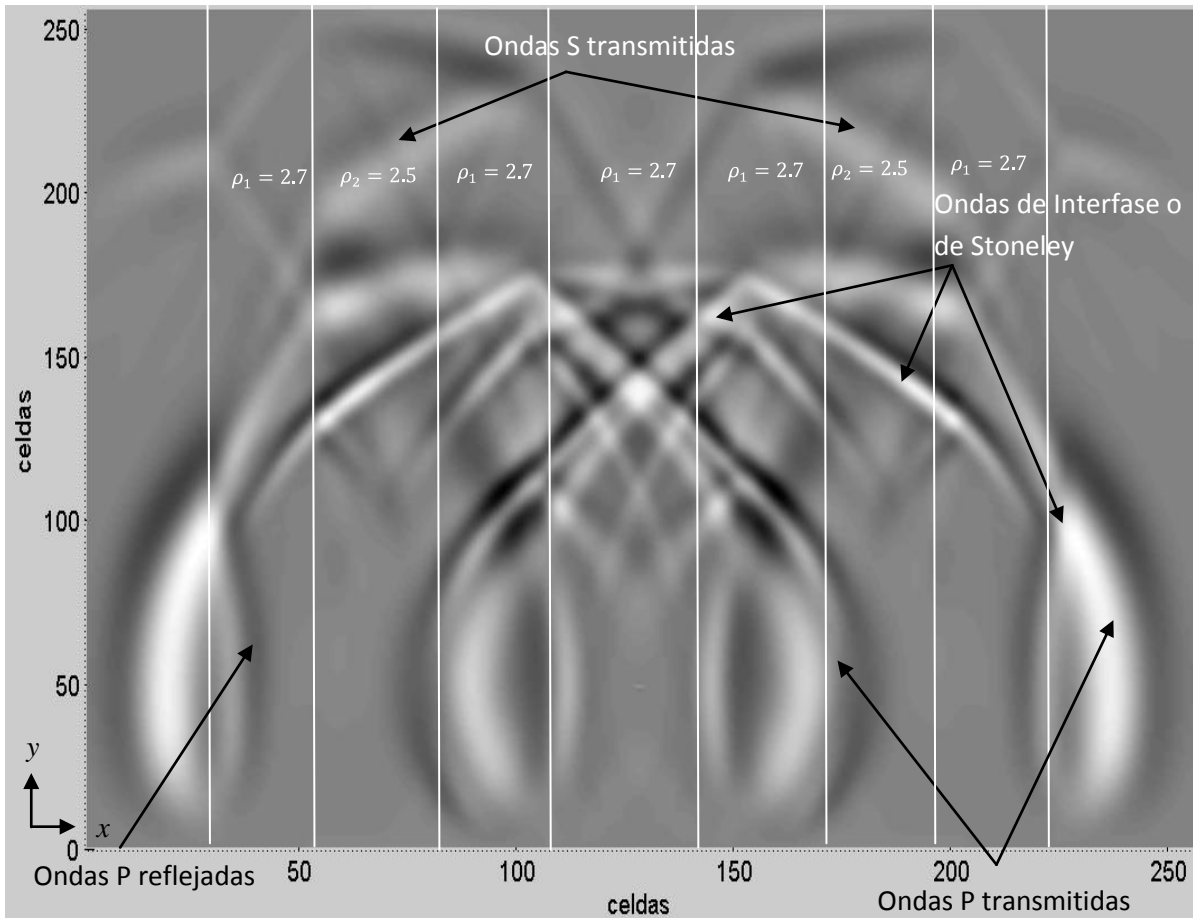


Figura 4.18. Propagación de ondas de Interfase o Stoneley en un multi-estrato sólido en una instantánea de un tiempo de 0.00097 segundos.

Ejemplo 3.- Se analizará el caso de propagación de ondas para un sistema de estratos líquidos y sólidos dispuestos simétricamente, con propiedades mecánicas diferentes, con una fuente que se localiza en el estrato intermedio. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente y H_i es el espesor del estrato como se muestra en la figura 4.19. Determinar su respuesta:

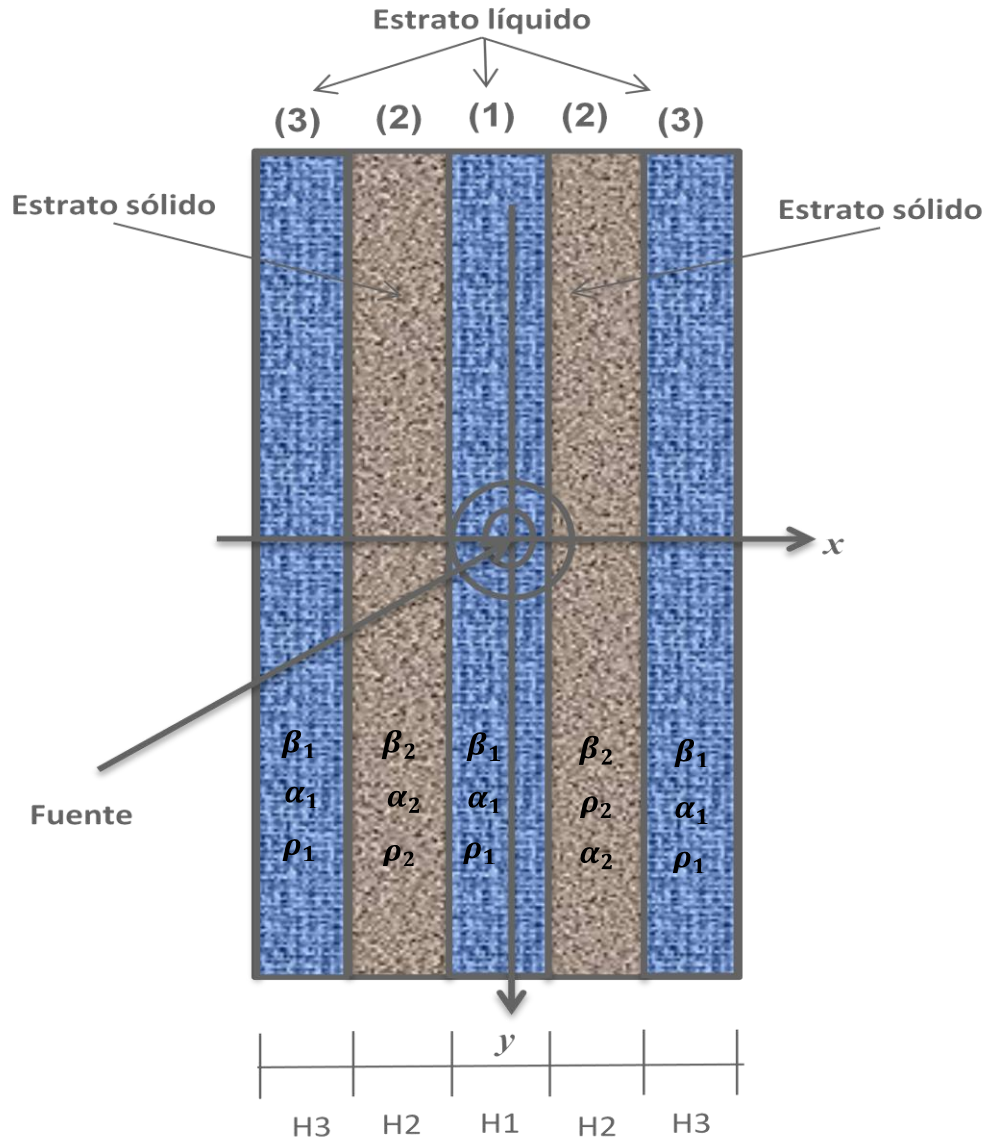


Figura 4.19. Sistemas de un medio estratificado líquido-sólido y simétrico, con distintas propiedades mecánicas.

Capítulo 4

Tabla 4.3. Propiedades de un medio Estratificado líquido-sólido simétrico.

números de estratos	dt	dt	α_2	β_2	β_1	ρ_2	α_1	ρ_1	dx	t_s	t_p	factor
5	1750	.1E-5	3000	1200	0.00	2.5	1500	1	0.01	0.0001	0.0001	1
Estaciones (nr)	nx	nx_1	nx_s	nx_2	ny	ny_1	nys	ny_2	nr	radio	dy	
128 100	256	1	128	256	256	1	50	256	0	0.5	0	
128 115												
128 130												
128 145												
128 160												
128 175												
128 190												
128 205												
<i>nshot</i> (1 a 60)												

En la Tabla 4.3 se presentan las propiedades para un sistema con estratos líquidos y sólidos dispuestos simétricamente, con propiedades mecánicas diferentes, donde dt es el número de intervalo del tiempo, dt es el incremento del tiempo, α_2 es la velocidad de onda P en un sólido, β_2 es la velocidad de la onda S en el sólido, ρ_2 es la densidad del medio sólido, α_1 es la velocidad de la onda P en el fluido, ρ_1 es la densidad del medio fluido, dx es el ancho de la malla en x , (ver capítulo 3), t_s es el retraso del pulso del ricker, t_p es el ancho del pulso de ricker (ver capítulo 3), nx es el número de intervalo de la malla en x , por lo cual se discretiza en el espacio, nx_1 es el número de intervalo de la malla en x_1 , nx_2 es el número de intervalo de la malla en x_2 , nr es el número de registro de receptores, radio es la longitud de la apertura, dy es el ancho de la malla en y , ny es el número de intervalo de la malla en y , ny_1 es el número de intervalo de la malla en y_1 , ny_2 es el número de intervalo de la malla en y_2 , nys es el número de fotos del disparo, $N.est.$ es el número de estaciones.

4.7 Resultados del ejemplo 3.

En la Figura 4.20, se presenta la propagación de una onda P en un medio estratificado líquido-sólido con diferentes propiedades. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos de 0.000055 y 0.00013 segundos. Donde es generado el disparo por una fuente denominada pulso de Ricker.

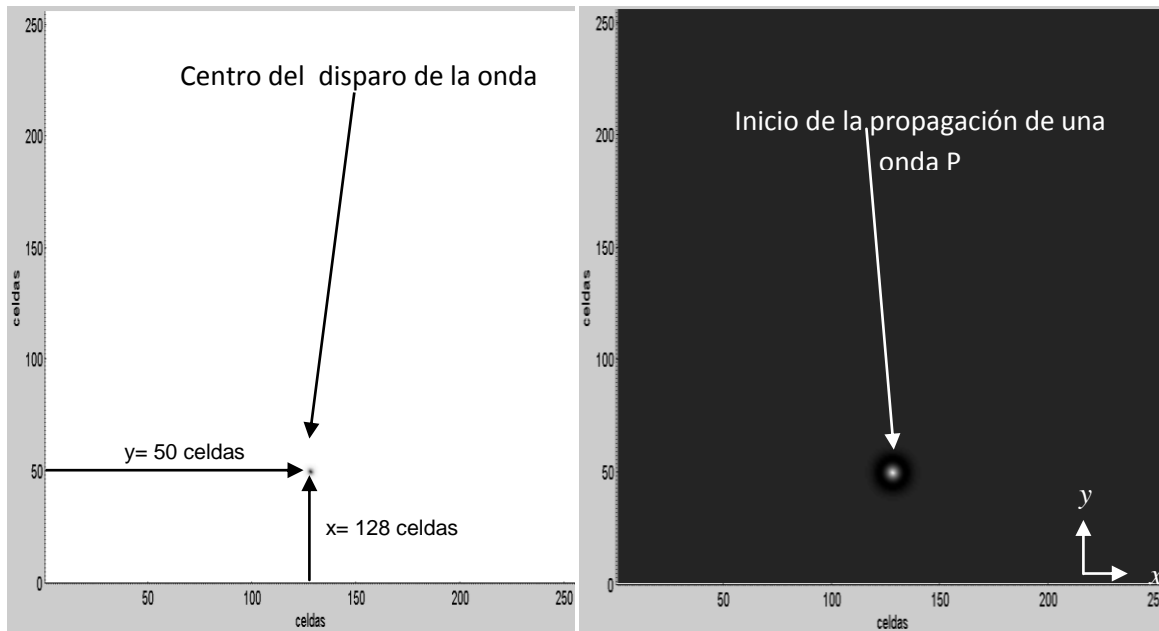


Figura 4.20. Inicio de una Propagación de la onda P en un estrato líquido, en una instantánea de un Tiempo de 0.000055 y 0.00013 segundos.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la frontera, como se muestra en la figura 4.21.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = 0.5 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 0.00033 \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111e-5 \text{ s} = 2.7775e-005 \text{ s}$$

No. Cuadros = 12 Número de cuadros desde el disparo a la primera reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 12 * 2.7775e-005 \text{ s} = 3.3330e-004 \text{ s}$$

Capítulo 4

En la Figura 4.21, se muestra la propagación de una onda P en un estrato líquido. Se presenta una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos de 0.00016 y 0.00033 segundos. Donde más tarde la onda P se transmitirá con un estrato sólido.

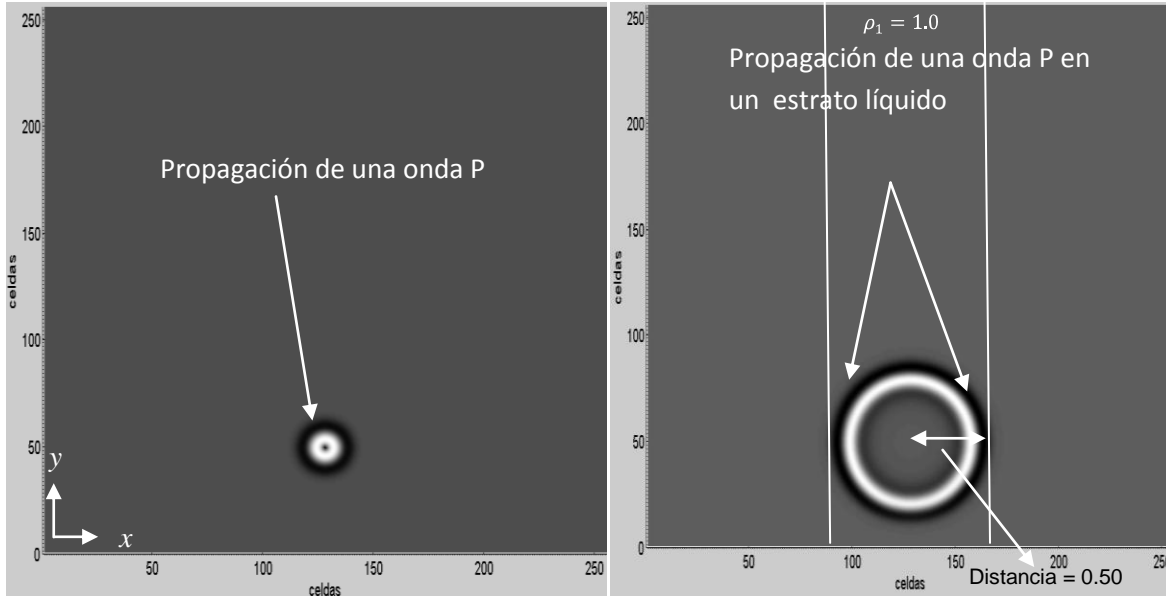


Figura 4.21. Propagación de una onda P en un estrato líquido, en una instantánea de un tiempo de 0.00016 y 0.00033 segundos.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la segunda frontera, como se muestra en la figura 4.22.

$$\alpha_2 = 3000 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_2 = 0.25 \text{ m} / 3000 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 8.3333e-005 \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111e-5 \text{ s} = 2.7775e-005 \text{ s}$$

No. Cuadros = 3 Número de cuadros desde el disparo a la segunda reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 3 * 2.7775e-005 \text{ s} = 8.3325e-005 \text{ s}$$

Capítulo 4

En la Figura 4.22, se presenta la propagación de una onda P que incide en un estrato sólido con diferentes propiedades. En la figura se observa que la onda P se encuentra en la interface de dos estratos y parte de la onda se transmite con la velocidad del estrato respectivo. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos de 0.00038 y 0.00041 segundos.

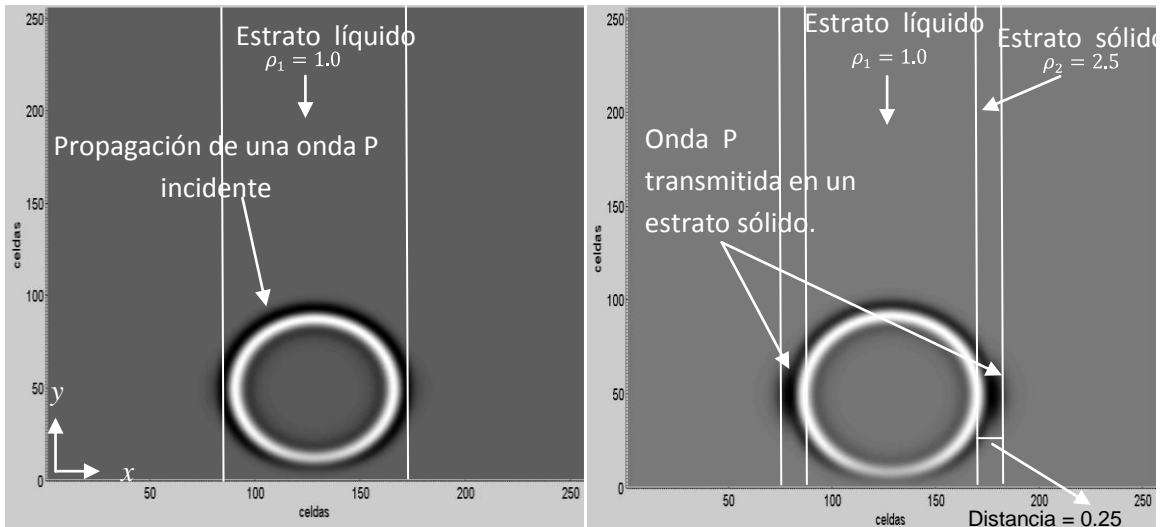


Figura 4.22. Propagación de una onda P transmitida en un estrato sólido, en una instantánea de un tiempo 0.00038 y 0.00041 segundos.

En la Figura 4.23, se observa la propagación de una onda P en un estrato líquido confinada con dos estratos sólidos. Donde se muestra que la onda P se encuentra con la interface de dos estratos. Parte de la onda P se refleja y se transmite mediante los estratos sólidos. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos de 0.00047 y 0.00052 segundos.

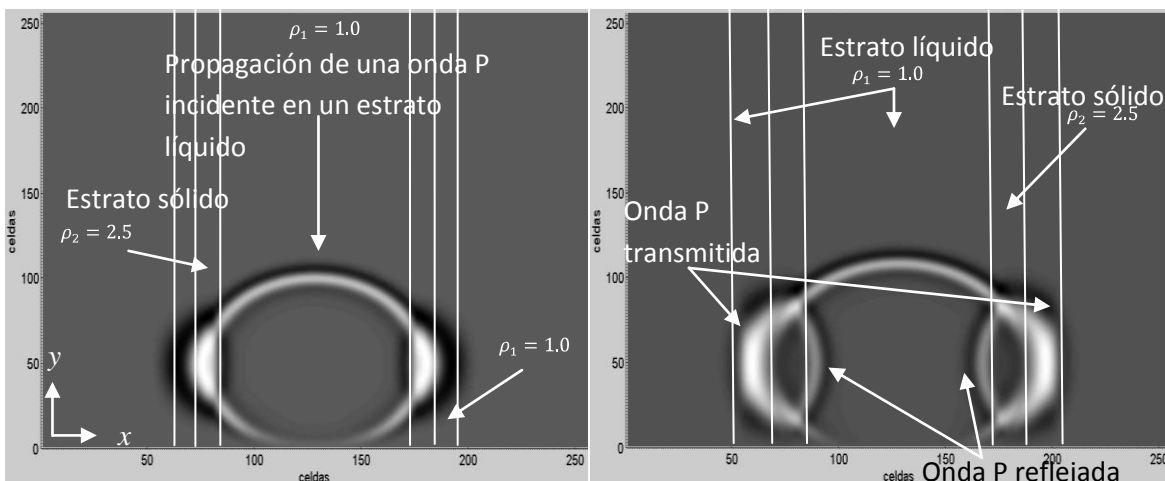


Figura 4.23, propagación de una onda P en un medio líquido confinados en dos medios solidos, en una instantánea de un tiempo de 0.00047 y 0.00052 segundos.

Capítulo 4

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la tercera frontera, como se muestra en la figura 4.24.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = .25 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 1.6667 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111 \times 10^{-5} \text{ s} = 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No. Cuadros = 6 Número de cuadros desde el disparo a la tercera reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 6 * 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

En la Figura 4.24, se muestra la propagación de las ondas Sholte-Stoneley. Donde se presenta a través de tres medio líquido confinados con dos medio sólido. También se observa la propagación de las ondas P encuentra la interface de los dos estratos. Parte de las ondas se reflejan y se transmiten con la velocidad del estrato respectivo. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00058 segundos.

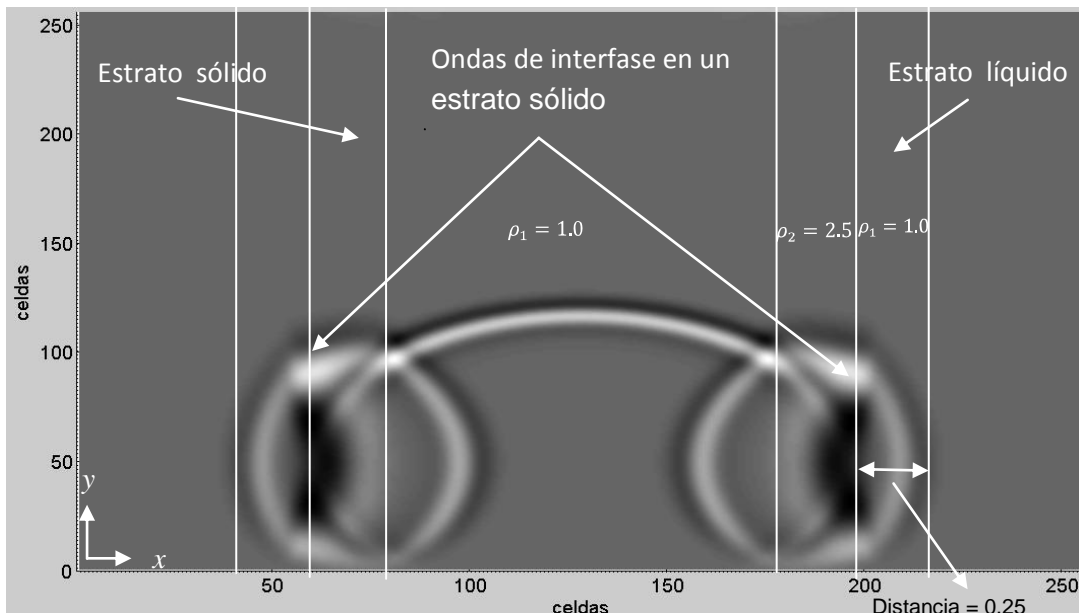


Figura 4.24. Propagación de las ondas de Interfase, en un medio líquido confinados con dos medios solidos, en un instante de un tiempo de 0.00058 segundos.

Capítulo 4

En la Figura 4.25 se presenta la propagación de las ondas P en un medio líquido confinado con un medio sólido. Donde se observa que las ondas P encuentran la interface de dos estratos líquidos y dos estratos sólidos. Parte de las ondas P se reflejan y se transmiten con la velocidad de los estratos respectivos. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00063 segundos.

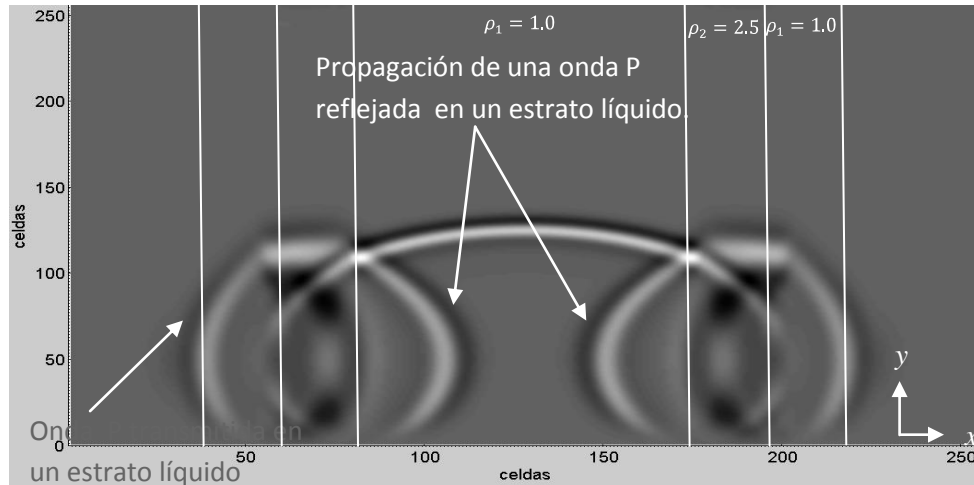


Figura 4.25. Propagación de las ondas P reflejadas y transmitidas, en una instantánea de un tiempo de 0.00063 segundos.

En la Figura 4.26, se muestra la propagación de las ondas P y S en un medio sólido confinado con otro medio líquido. Donde se presenta una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00077 segundos. Parte de las ondas P y S se reflejan y se transmiten a través del medio líquido y el medio sólido con diferentes propiedades.

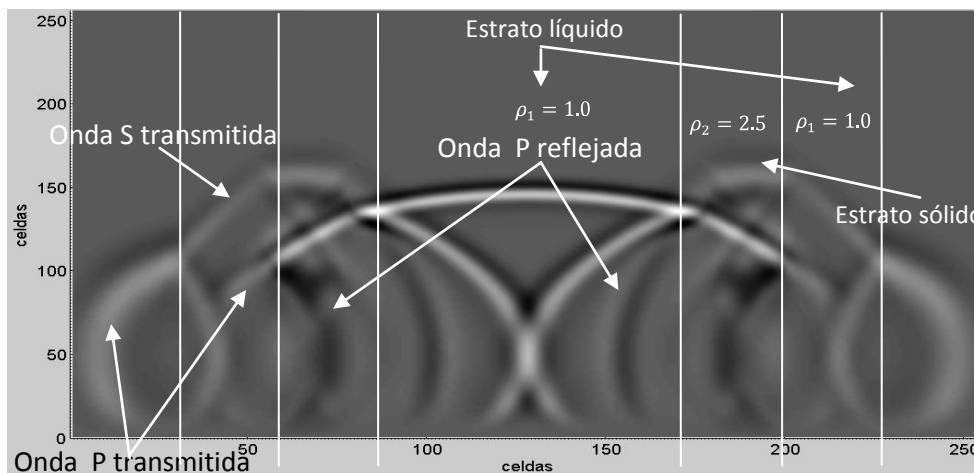


Figura 4.26. Propagación de ondas transmitidas y reflejadas en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de tiempo de 0.00077 segundos.

Capítulo 4

En la Figura 4.27, se presenta la propagación de las ondas en un multi-estrato líquido-sólido. Se muestra que las ondas P y S encuentran la interfaces de medios líquidos confinados con los medios sólidos con propiedades diferentes. Partes de las ondas P y S se reflejan y se transmiten a través del medio líquido y el medio sólido. Donde se presenta una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00091 segundos.

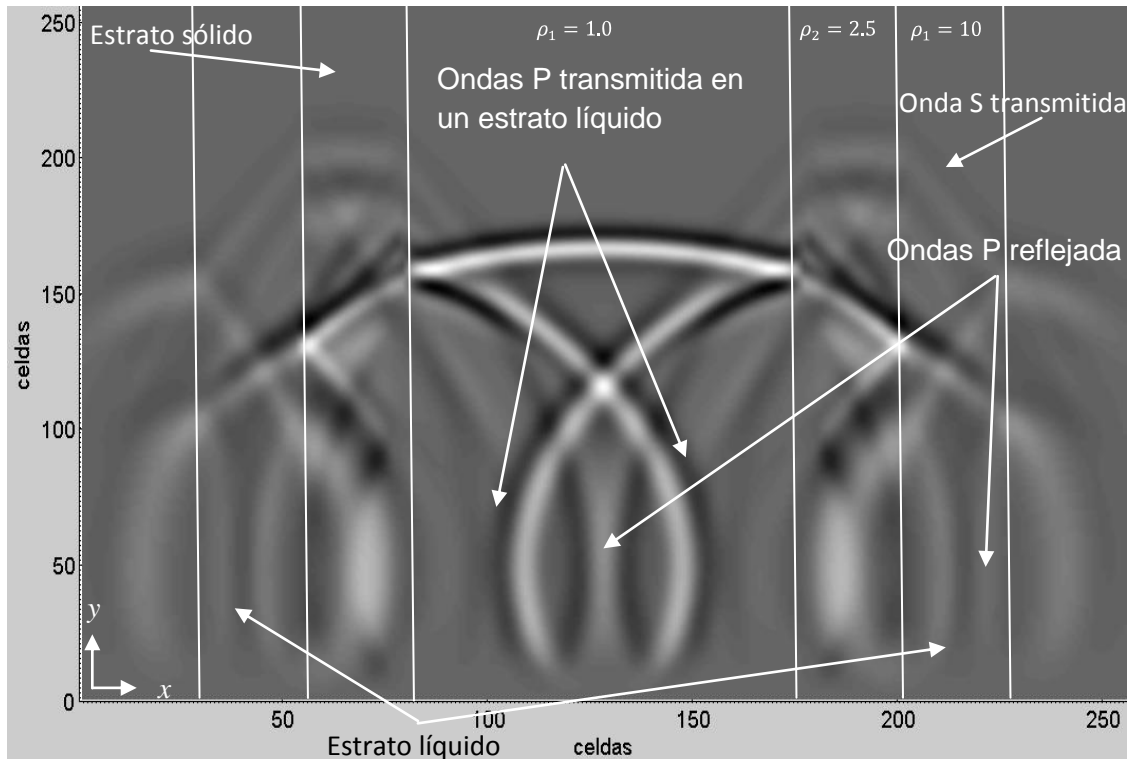


Figura 4.27. Propagación de las ondas P Transmitidas y Reflejadas en un multi-estrato Líquido-sólido, en una instantánea de un tiempo de 0.00091 segundos.

Capítulo 4

En la Figura 4.28, se muestra la propagación de las ondas S en un multi-estrato líquido-sólido. Se observa que las ondas S encuentran la interfaces de los medios líquidos confinados con los medios sólidos con propiedades diferentes. Partes de las ondas S se transmiten a través de los estratos líquidos y estratos sólidos. Donde se presenta una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.0010 segundos.

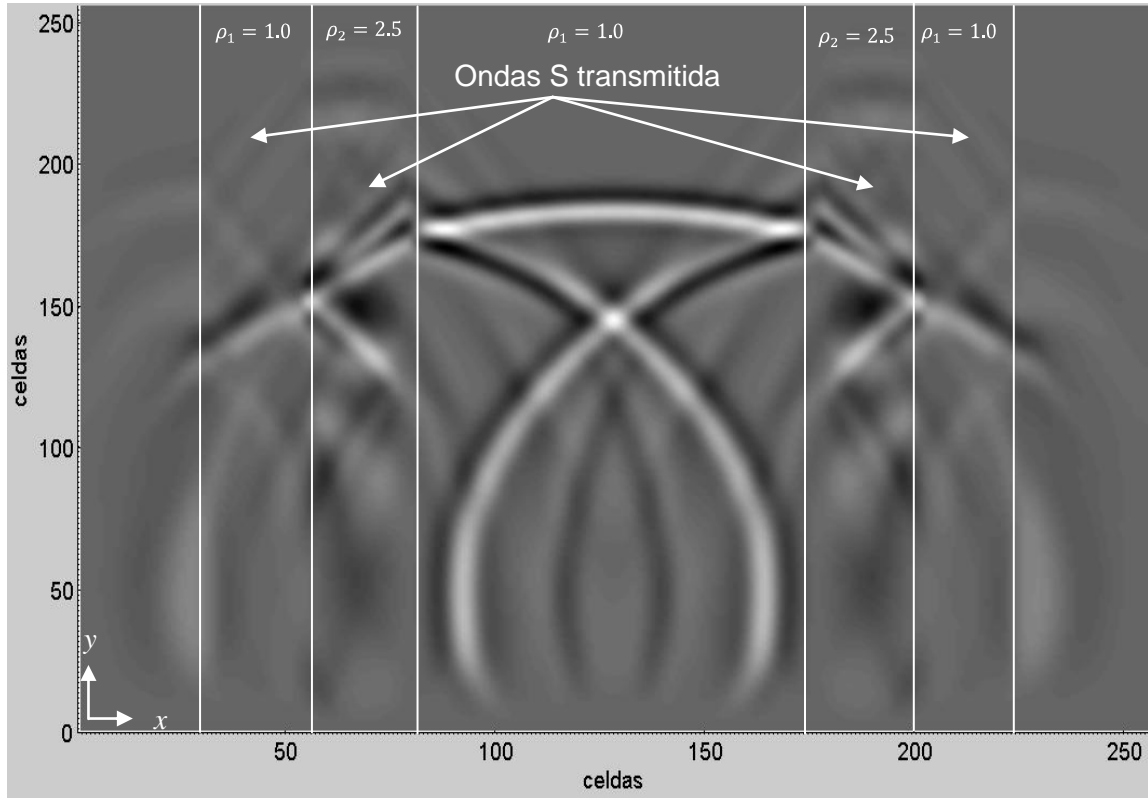


Figura 4.28. Propagación de las ondas S Transmitida en un multi-estrato líquido-sólido, con una instantánea de un tiempo de 0.0010 segundos.

Ejemplo 4.- Se analizará el caso de propagación de ondas para un sistema de estratos líquidos y sólidos dispuestos simétricamente, con propiedades mecánicas diferentes, con una fuente que se localiza en el estrato intermedio. Donde x y y son el sistema de referencia, (x_s, y_s) es la coordenada de la fuente y H_i es el espesor del estrato como se muestra en la figura 4.29. Determinar su respuesta:

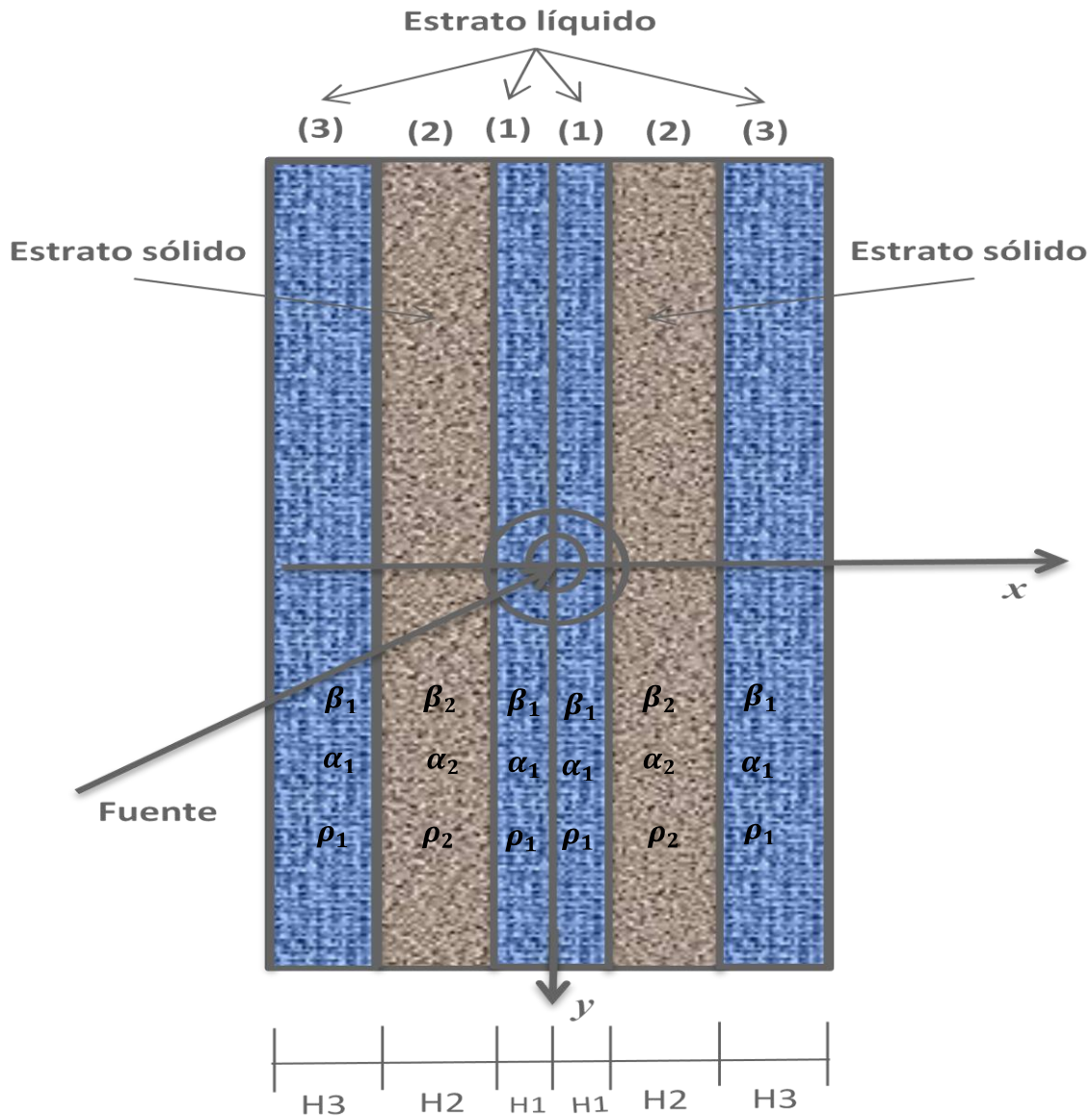


Figura 4.29. Sistemas de multi-estrato líquido-sólido y simétrico, con distintas propiedades mecánicas.

Capítulo 4

Tabla 4.4. Propiedades mecánicas para un sistema de multi-estratos líquido-sólido dispuestos simétricamente.

números de estratos	nt	dt	α_2	β_2	β_1	ρ_2	α_1	ρ_1	dx	T_s	T_p	factor
5	1750	.1E-5	3000	1200	0.00	2.5	1500	1	0.01	0.0001	0.0001	1
Estaciones (nr)	nx	nx_1	nx_s	nx_2	ny	ny_1	nys	ny_2	nr	radio	dy	
128 100	256	1	128	256	256	1	50	256	0	0.5	0	
128 115												
128 130												
128 145												
128 160												
128 175												
128 190												
128 205												
<i>nshot</i> (1 a 60)												

En la Tabla 4.4 se presentan las propiedades para un sistema con estratos líquidos y sólidos dispuestos simétricamente, con propiedades mecánicas diferentes, donde nt es el número de intervalo del tiempo, dt es el incremento del tiempo, α_2 es la velocidad de onda P en un sólido, β_2 es la velocidad de la onda S en el sólido, ρ_2 es la densidad del medio sólido, α_1 es la velocidad de la onda P en el fluido, ρ_1 es la densidad del medio fluido, dx es el ancho de la malla en x , (ver capítulo 3), t_s es el retraso del pulso del ricker, t_p es el ancho del pulso de ricker (ver capítulo 3), nx es el número de intervalo de la malla en x , por lo cual se discretiza en el espacio, nx_1 es el número de intervalo de la malla en x_1 , nx_2 es el número de intervalo de la malla en x_2 , nr es el número de registro de receptores, radio es la longitud de la apertura, dy es el ancho de la malla en y , ny es el número de intervalo de la malla en y , ny_1 es el número de intervalo de la malla en y_1 , ny_2 es el número de intervalo de la malla en y_2 , nys es el número de fotos del disparo, $N.est.$ es el número de estaciones.

4.8 Resultados del ejemplo 4.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la frontera, como se muestra en la figura 4.30.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = 0.25 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 1.6667 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111 \times 10^{-5} \text{ s} = 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No. Cuadros = 6 Número de cuadros desde el disparo a la primera reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 6 * 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

En la Figura 4.30, se presenta la propagación de una onda P en un estrato líquido. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos 0.00013 y 0.00016 segundos, después del disparo.

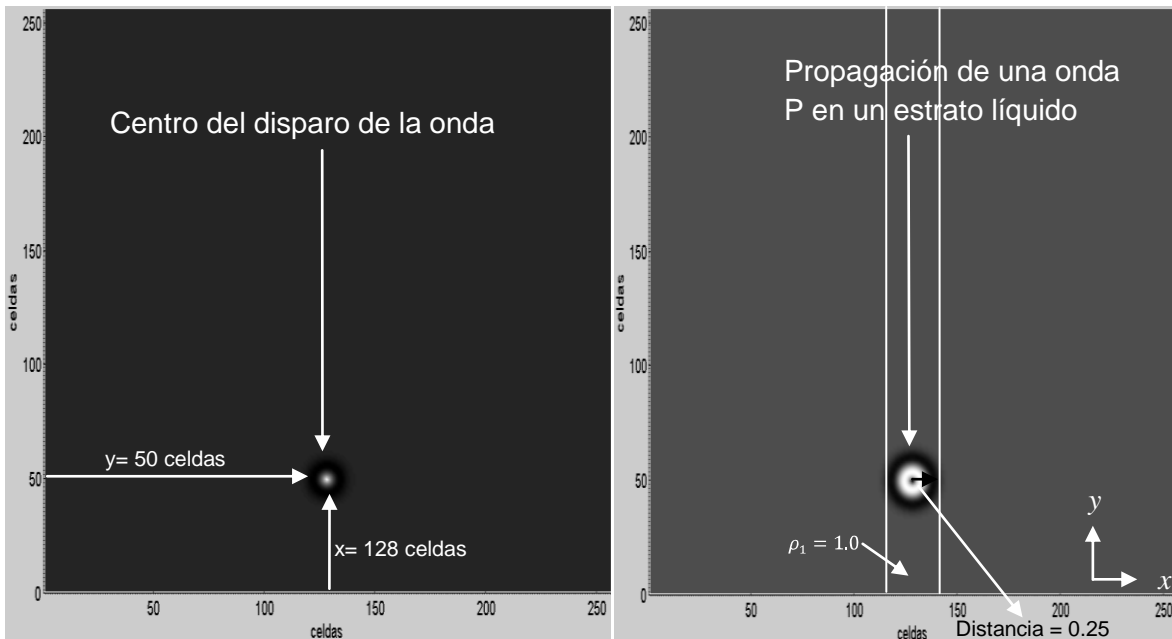


Figura 4.30. Propagación de una onda P en un estrato líquido, en una instantánea de un tiempo 0.00013 y 0.00016 segundos.

Capítulo 4

En la Figura 4.31, se muestra la propagación de una onda P que incide en un estrato líquido confinado a un medio sólido con diferentes propiedades mecánicas. Donde parte de la onda S se transmite al medio sólido. Se presenta una instantánea de la propagación que corresponde a los tiempos 0.00022 y 0.00027 segundos.

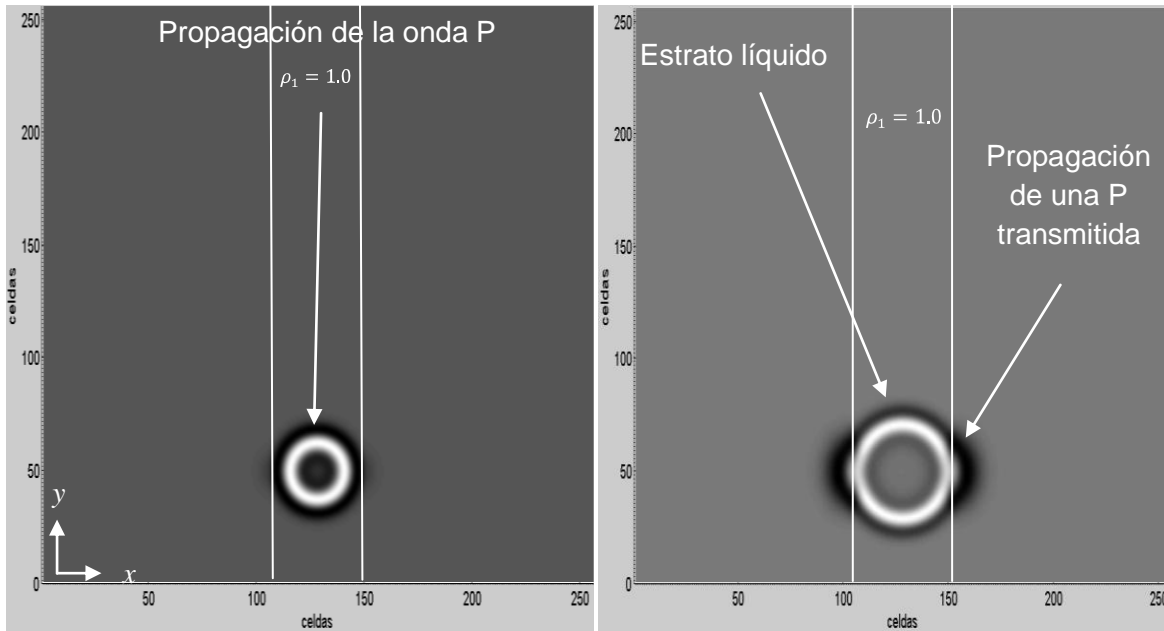


Figura 4.31. Propagación de una onda P transmitida en un estrato líquido confinado a un medio sólido, en una instantánea de un tiempo de 0.00022 y 0.00027 segundos.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la segunda frontera, como se muestra en la figura 4.32.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = 0.25 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111 \times 10^{-5} \text{ s} = 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No. Cuadros = 6 Número de cuadros desde el disparo a la segunda reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 6 * 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Capítulo 4

En la Figura 4.32, se presenta la propagación de las ondas P en un medio líquido confinados con dos medios sólidos. Se observa que las ondas P encuentran la interface de los dos medios sólidos con diferentes propiedades. Donde parte de la onda se transmite con la velocidad del estrato sólido. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos 0.00030 y 0.00033 segundos.

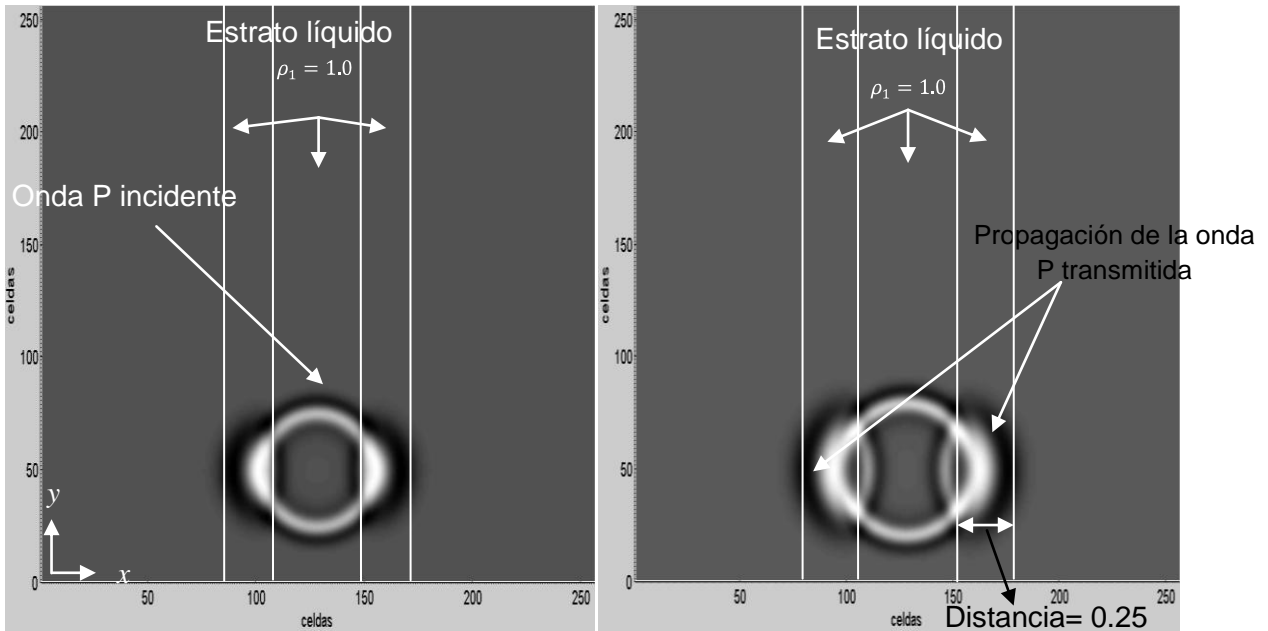


Figura 4.32. Propagación de una onda P incidente Transmitida, con una instantánea de un tiempo de 0.00030 y 0.00033 segundos.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la tercera frontera, como se muestra en la figura 4.33.

$$\alpha_2 = 3000 \text{ m/s}$$

$$t_{D-F} = r / \alpha_2 = 0.25 \text{ m} / 3000 \text{ m/s}$$

$$t_{D-F} = 8.3333 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111 \times 10^{-5} \text{ s} = 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No. Cuadros = 3 Número de cuadros desde el disparo a la segunda reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 3 * 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s} = 8.3325 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Capítulo 4

En la Figura 4.33, se muestra la propagación de las ondas P en dos medios líquidos confinados con dos medios sólidos con diferentes propiedades mecánicas. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos 0.00036 y 0.00044 segundos. Donde se observa que las ondas P se reflejan y se transmiten con la velocidad de los estratos respectivos.

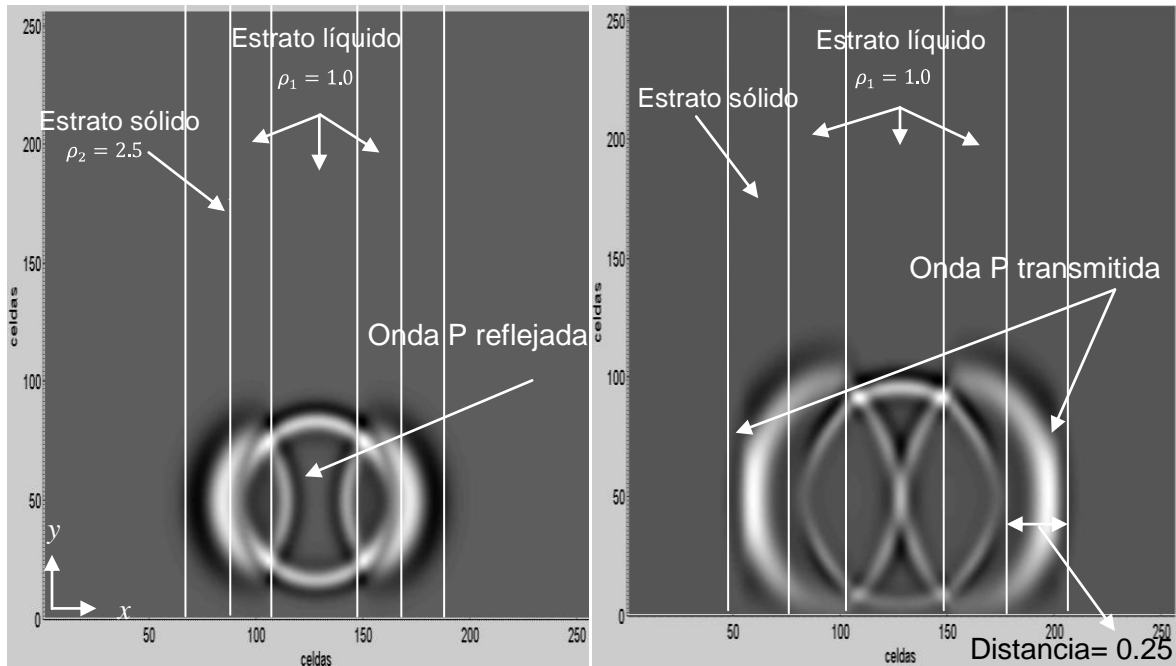


Figura 4.33. Propagación de ondas P transmitida y reflejada en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de un tiempo de 0.00036 y 0.00044 segundos.

Análisis del tiempo que se tarda la onda en pasar del punto de disparo a la cuarta frontera, como se muestra en la figura 4.34.

$$\alpha_1 = 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = r / \alpha_1 = .25 \text{ m} / 1500 \text{ m/s}$$

$$tv_{D-F} = 1.6667 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Análisis de tiempo según el resultado de la visualización en Matlab

Como snapshot = 25

$$d \Delta t = 25 * 0.1111 \times 10^{-5} \text{ s} = 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No. Cuadros = 6 Número de cuadros desde el disparo a la tercera reflexión.

$$\text{Tiempo D-F} = 6 * 2.7775 \times 10^{-5} \text{ s} = 1.6665 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Capítulo 4

En la Figura 4.34, Se presenta la propagación de las ondas P y S, en un multi-estrato líquido-sólido simétrico con diferentes propiedades mecánicas. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente a los tiempos 0.00052 y 0.00058 segundos. Se observa que las ondas P y S encuentran la interface de los estratos líquidos confinados con los estratos sólidos. Parte de las ondas se reflejan y se transmiten, de acuerdo con la velocidad de los estratos respectivos.

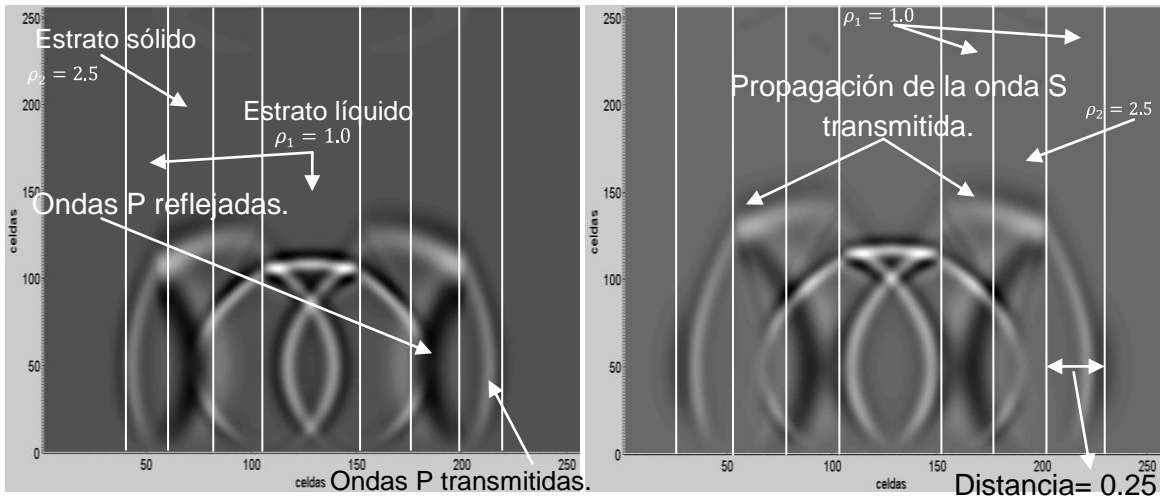


Figura 4.34. Propagación de las ondas P y S transmitida en un multi-estrato líquido-sólido, con una instantánea de un tiempo de 0.00052 y 0.00058 segundos.

En la Figura 4.35, se muestra la propagación de ondas en un medio estratificado sólido con diferentes propiedades. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00066 segundos. Donde se puede ver la presencia de las ondas de interfase o Sholte-Stoney, lo cual se llegan a ver cuando las ondas se propagan entre un estrato líquido y un estrato sólido.

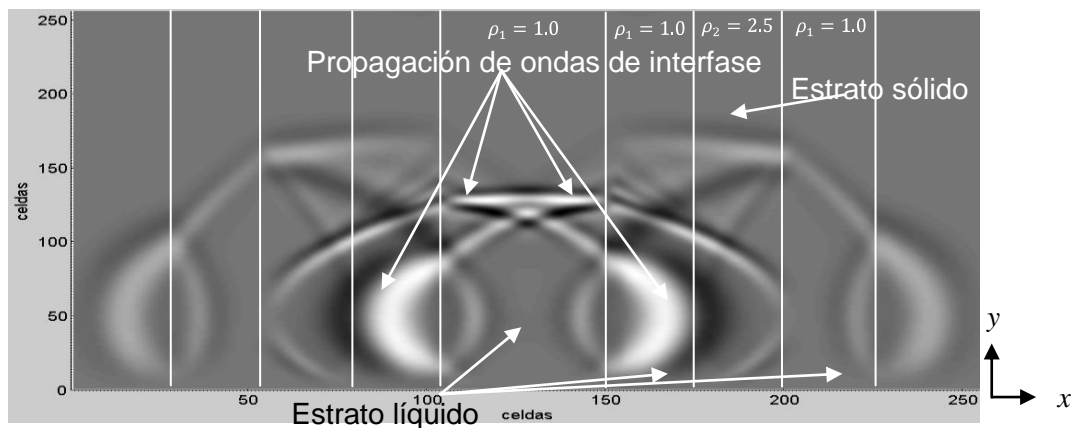


Figura 4.35. Propagación de las ondas de Interfase, en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de un tiempo de 0.00066 segundos.

Capítulo 4

En la Figura 4.36, se presenta la propagación de ondas S transmitidas en un multi-estrato líquido-sólido con diferentes propiedades mecánicas. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00077 segundos. Donde parte de las ondas se reflejan y se transmiten de acuerdo con la velocidad de los estratos que están señaladas con líneas negras. También se presenta la presencia de las ondas de Interfase o Sholte-Stoneley, lo cual se llegan a ver cuando las ondas se propagan entre dos estratos.

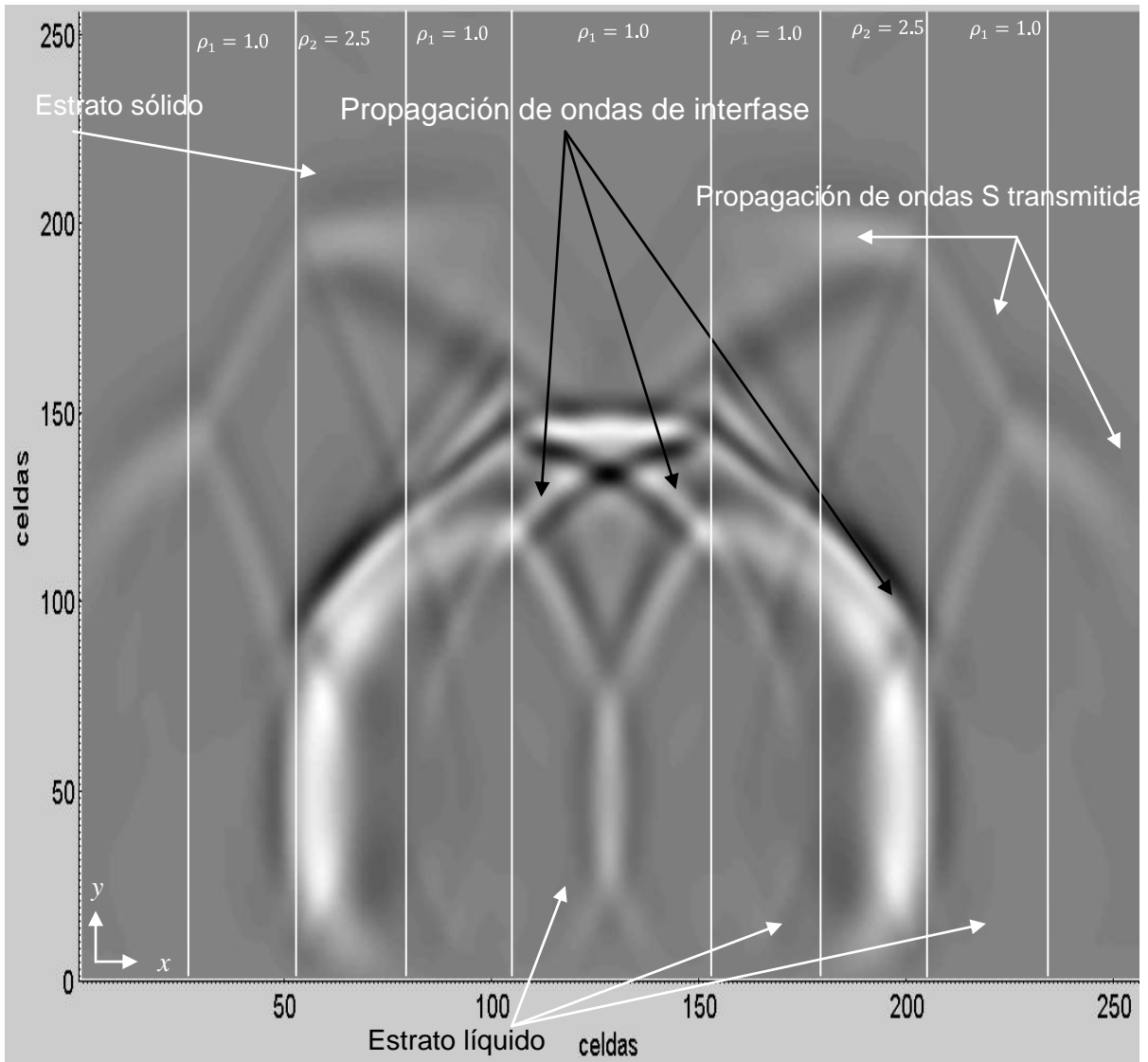


Figura 4.36. Propagación de ondas de Interfase en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de un tiempo de 0.00077 segundos.

Capítulo 4

En la Figura 4.37, se muestra la propagación de las ondas Sholte-Stoneley. Donde se presenta a través de un medio líquido confinado con un medio sólido. Se muestra una instantánea de la propagación correspondiente en un tiempo de 0.00097 segundos.

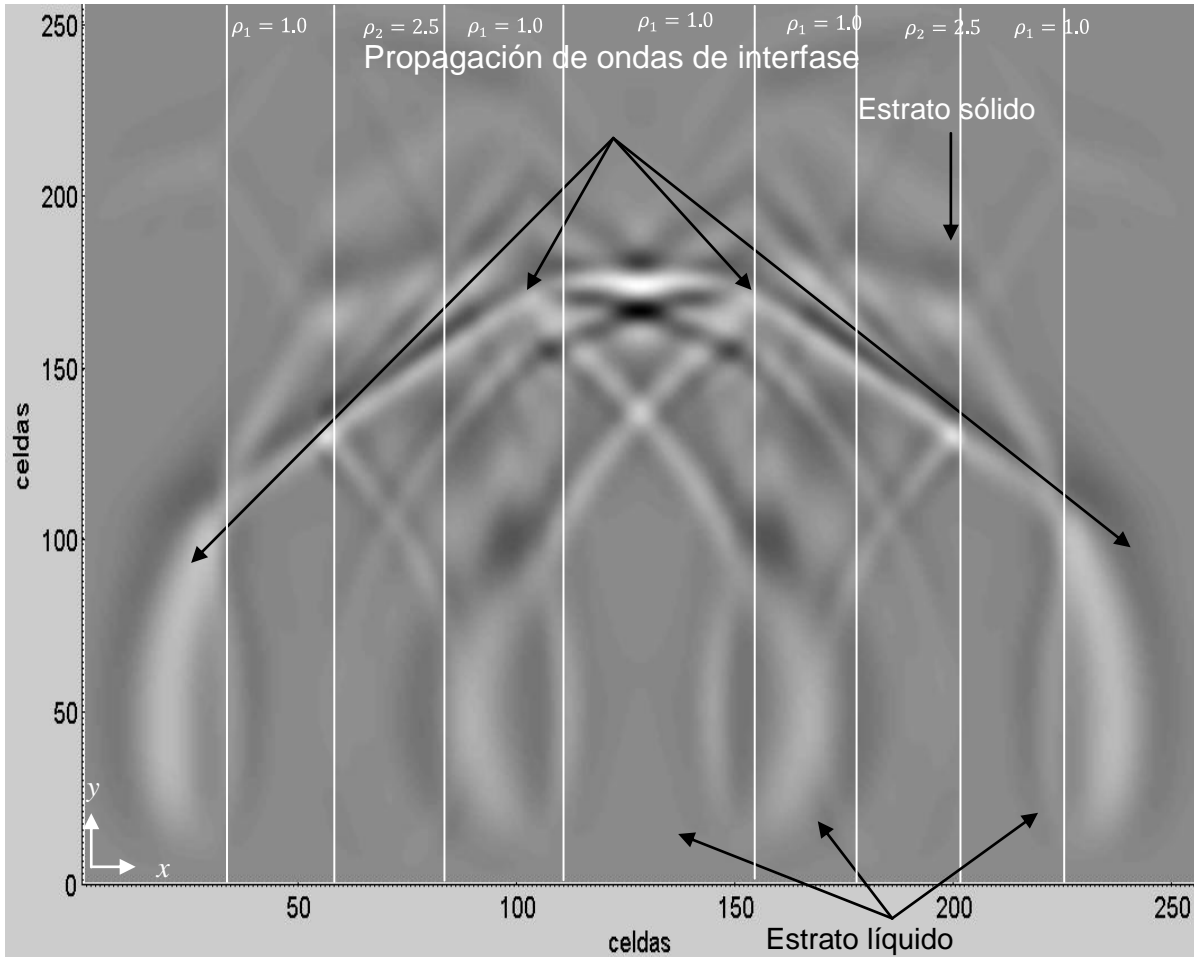


Figura 4.37. Propagación de las ondas de Interfase en un multi-estrato líquido-sólido, en un instante de un tiempo de 0.00097 segundos.

Conclusiones

El objetivo de la tesis consistió en determinar la propagación de ondas en medios estratificados considerando sus distintas propiedades mecánicas las cuales son: densidad, velocidad de propagación de las ondas de cortante y longitudinales, a través de la realización de un modelo numérico basado en el método diferencias finitas. El objetivo se alcanzó ya que se implementó en un programa (Sánchez Sesma y Madariaga, ver Fig. 4.1) que originalmente no determinaba la propagación de ondas en medios estratificados. Con el programa se realizaron distintos casos examinados en el Capítulo 4, en donde se estudió la propagación de ondas en medios que podían ser fluidos o sólidos.

La solución de las ecuaciones de la elastodinámica (ecuación 2.7) que involucran al campo de desplazamientos y esfuerzos, se realizó considerando un esquema centrado del método de diferencias finitas. La solución se obtuvo en el espacio y tiempo discretos en una malla alternada de velocidades y esfuerzos (ver capítulo 3). Los resultados obtenidos se verificaron y fueron estables. Se observaron diversos fenómenos que no se tenían presentes, como el fenómeno de la propagación de ondas Sholte-Stoneley y su atenuación (ver Figs. 4.11, 4.18, 4.24, 4.35, 4.36 y 4.37.) en la interfase de sólido-líquido y sólido-sólido. Las ondas de interface tienen una velocidad menor que las velocidades de las ondas P y S (B.U. Haldorsen Jakob, Linton Johnson David, *et al*, 2006), y se utilizan en la geofísica de exploración para determinar las zonas fracturadas y estimar la permeabilidad de la formación (B.U. Haldorsen Jakob, Linton Johnson David, *et al*, 2006).

Los 4 casos que se estudiaron tuvieron una geometría simétrica con el fin de determinar que la propagación es adecuada, ya que al ser simétrica la geometría, las propiedades mecánicas y la posición de la fuente, su propagación fueron igualmente.

Los ejemplos que se estudiaron fueron:

1.- Medio estratificado simétrico sólido, (ver Fig. 4.4 y 4.13). Estos casos fueron propuestos para determinar la adecuada propagación de ondas en medios de múltiples estratos sólidos. La propagación se verificó porque de antemano se conocían las propiedades mecánicas de los medios, con las cuales fue posible determinar la velocidad de las ondas que se transmitían en su seno. Estas velocidades, igualmente fueron determinadas a partir de las posiciones de ciertos puntos de la malla como la posición de la fuente y las fronteras de los sólidos y determinando el tiempo que se tardaba la onda en viajar de un punto al otro, se verificó la velocidad. Estas velocidades fueron iguales a las evaluadas teóricamente. La diferencia de los casos correspondientes a las Figs. 4.4 y 4.13,

consistió en que el diámetro del estrato donde se encontraba la fuente era distinto, siendo el segundo la mitad del primero. Los tiempos de viaje de las ondas del primer caso fueron el doble de las del segundo en este estrato.

2.-Medio estratificado líquido-sólido (ver Fig. 4.19 y 4.29). Se propuso este caso con la finalidad de determinar la propagación de ondas en un medio estratificado donde los estratos líquidos se encontraban separados por estratos sólidos. La propagación se verificó igual que en los casos anteriores y se presentaron ondas de interfase (ver Figs. 4.35, 4.36 y 4.37). Debido a que la velocidad de la onda de corte en el sólido tenía menor velocidad que la onda del estrato fluido, este caso correspondió a una formación lenta, típica de pozos realizados en medios arenosos o “suaves” (B.U. Haldorsen Jakob, Linton Johnson David, *et al*, 2006). Las ondas que viajan en un fluido inmerso en una formación lenta, radian su energía en términos de ondas de corte en el sólido, disipándola. En contraste, para tener una formación rápida la velocidad de la onda de cortante en el medio sólido, debe ser mayor a la velocidad de la onda P en el medio líquido, entonces, las ondas de compresión que viajan en el fluido inmerso en una formación rápida, activan modos normales de vibración de interfase, quedando la energía atrapada en la misma (ver anexo 1). La diferencia de los casos correspondientes a las Figs. 4.19 y 4.29, consistió en que el diámetro del estrato donde se encontraba la fuente era distinto, siendo el segundo la mitad del primero. Los tiempos de viaje de las ondas del primer caso fueron el doble de las del segundo en este estrato.

Las soluciones de la propagación de ondas, obtenidas con el método de diferencias finitas, fueron estables ya que el número de Courant utilizado en los diversos ejemplos estudiados en este trabajo, fueron menor que 1/2.

Recomendaciones y Trabajos a Futuro

Como trabajo futuro se recomienda considerar varias configuraciones de estratigrafía no simétricas tanto en 2D como en 3D, así como estudiar el análisis de la amplitud de las ondas Sholte-Stoneley y estimar la permeabilidad de la formación de donde se lleve a cabo la propagación.

Referencias

Alford, R. M., Kelly, K. R. y Boore, D. M., (1974). Accuracy of finite-difference modelling of the acoustic wave equation, *Geophysics*, 39, 834-842.

Aki, K y Richards P.G. (1980). *Quantitative Seismology: Theory and Methods*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, California.

Alterman, Z. S. y Karal, F. C. (1968). Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 58, 367-398.

Aki, K. y Larner, K.L. (1970). Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves, *J. Geoph. Res.*, 75, 933-945.

Ávila carrera R., F.J. Sánchez sesma y R. Madariaga, (1995). Introducción al Métodos Pseudo- espectral para la simulación de la propagación de ondas elásticas. Unión Geofísica Mexicana, Monografía 2, pp 76-88.

Abramowitz, M. e Stegun I. A., (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. National Bureau of Standards, Applied mathematics series 55.

Ávila C. R., Suarez M. y Sánchez-Sesma F. J. (1993). Simulación de la propagación de ondas sísmicas en configuraciones irregulares con un método pseudoespectral. Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Puerta Vallarta, Jal. México.

Achenbach, J. D., (1976). *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland Publishing Company, New York, N. Y. 10012.

Boore, D. M. (1972). Finite differences methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, *Methods in Computational Physics*, B. A. Bolt (Editor), Vol 11, Academic Press, New York, 1-37.

Bouchon, M., Campillo, M. y Gaffet, S. (1989). A boundary integral equation-discrete wavenumber representation method to study wave propagation in multilayered media having irregular interfaces, 1134-1140.

B.U. Haldorsen Jakob, Linton Johnson David, *et al.* (2006). Borehole acoustic waves, *Ridgefield Connecticut, USA*. 34-46

Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R. y Reshef, M. (1985). A non-reflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, 705-708.

Chen, P-L (1992). The local effects of curved and parallel soil medium to seismic waves, Madrid, Spain, Vol 2, 917-922.

Dablain, M. (1986). The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics*, 51,54-66.

D.M. (1972). Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, Vol 11, Academic Press, New York, pags. 1-37.

Dravinski, M. y Mossessian, T. K. (1987). Scattering of harmonic P, SV and Rayleigh waves by dipping layers of arbitrary shape, *Bull. Seismics. Soc.*, 212-235.

David G. Harkrider (1964), *Seismic time-invariant convolutional model*. *Geophysics*, 50, 2742-2752. *Geophysical signal analysis*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.

Fung, Y. C. (1977). A first course in continuum mechanics. Second Edition, Prentice Hall, INC., Englewood Cilffs, New Jersey 07632.

Graff, K.F. (1975) *Wave motion in elastic solids* (1st ed.). Dover.

George, T., Virieux, J. Madariaga, R. (1987). Seismic wave synthesis by gaussian beams summation : A comparison with finite differences, 1065-1073.

Graves, R. W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences, *Bull. Seism. Soc. Am.* 86. 1091-1106.

Higdon, R. L (1992). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media, *J. Comput. Phys.*, 101, 386-418.

Horike, M., Uebayashi, (1990). Seismic Response in three-dimensional sedimentary basin due to plane S wave incidence, 261-284.

Higdon, R. L (1991). Absorbing boundary conditions for elastic waves, *Geophysics*, 56, 231-241.

Hayashi, K., Burns, D. R., y Toksöz., N. (2001). Discontinuous-Grid Finite-difference Seismic Modeling Including Surface Topography, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 91, 1750-1764.

Iturrarán, U., F.J. Sánchez-Sesma, y F. Janod (2004). Scattering of elastic waves in heterogeneous media using the direct solution method. *Geophys. J. Int.* 156, 222-236.

Kosloff D. y Baysal E. (1982). Foreward modeling by a Fourier method. *Geophysics Res. Vol.* 47, pags. 1402-1412.

Kosloff R. y Kosloff D. (1986). Absorbing boundaries for wave propagation problems. *J. Comp. Phos.* , Vol. 63, pags. 363-376.

Kreeis H. O. y Oliger J. (1972). Comparison of achúrate methods for the integration of hyperbolic equations. *Tellus*, Vol. 24, pags. 199-215.

Kristek, J., Moczo, P. y Archuleta R. J., (2002). Efficient methods to simulate planar free surface in the 3D4, order.

Kelly, Ward, *et al* (1976). Synthetic seismograms: A finite-difference approach. *Geophysics* 41, 2-27.

Knopoff, L. (1964). *Q. Reviews of Geophysics* 2, 625-660.

Levander, A.R. (1988). Fourth-Order finite-difference P-SV seismograms, 1425-1436.

Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66, 639-666.

Moczo, P., Bystricky, E., Kristek, J., Carcione, J. M. y Bouchon, M., (1997). Hybrid Modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bull Seism. Soc. Am.*, 87, 1305-1323.

Moczo, P., Kristek, J. y Halada, L.(2004). The finite-difference method for seismologists. An introduction Comenius University, Bratislava staggered-grid finite-difference schemes, *Stud, Geophys. Geod.*, 46, 355-381..

Marfurt, K.J.(1984). Accuracy of finite-difference and finite-element modelling of the scalar and elastic wave equations, *Geophys*, 49, 533-549.

Min, D. J., Shin, Ch. y Yoo, (2004). Free-Surface boundary condition in finite-difference elastic wave modelling, *Bull. Seism. Soc. Am.*,94, 237-250.

Moczo, P., Kristek, J. y Halada, L., (2000). 3D Fourth-Order Staggered-grid Finite-Difference schemes: Stability and grid dispersion, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 90, 587-603.

Moczo, P., Kristek, J. y Halada, L., (2004). The finite-difference method for seismologists. An introduction. Comenius University, Bratislava.

Olsen, K.B. (2000). Site Amplification in the Los Angeles Basin from 3D Modelling of Ground Motion, *Bull. Seis. Soc. Am.*, 90, 77-94.

Ohminato, T. y Bernard A. Chouet, (1997). A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite difference method, *Bull Seism. Soc. Am.*, 87, 494-515.

Moczo, P., M. Lucká, *et al* (1999). 3D displacement finite differences and a combined memory optimization. *Bulletin of the Seismological Society of America* 89, 69-79.

Pérez Ruiz A. y Luzón Martínez F. (2005). Modelado de la propagación de ondas sísmicas mediante un método de diferencias finitas. Instituto de Geofísica UNAM. PP. 10-23

Pérez-Ruiz., J.A. y Luzón, F., (2005). Simulation of an irregular free surface with a displacement finite difference scheme, *Geophysical Reserch Abstracts*, Vol. 7.

Pitarka, A. (1999). 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing. *Bull of the Seismological Society of America* 89, 54-68.

R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy, (1928). Dado de Über partiellen el der de Differenzengleichungen mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, el vol. 100, no 1, pagina 32-74.

R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy, (1967). "en las ecuaciones de diferencia parciales de la física matemática", *Diario de IBM*, pp. 215-234.

Randall, C. J. (1988). Absorbing boundary condition for the elastic wave equation, *Geophysics*, 53, 611-624.

Rong-Song, Jih, McLaughlin, K. L., y Zoltan, A. D., (1988). Free-boundary conditions of arbitrary topography in a two-dimensional explicit elastic finite-difference scheme, *Geophysics*, 53, 1045-1055.

Ricker, N. (1945). The computation of output disturbances from amplifiers for true wavelet inputs, *Geophysics*, 43, 1099-1110.

Sanchez-Sesma. F.J. (1983). Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 73, 1621-1636.

Sanchez-Sesma. F.J, Chavez Pérez, S. y Avilés, J.(1984). Scattering of elastic waves by three dimensional topographies, *Proc. World Conf. Earthq. Eng. San Francisco, Cal.*. Vol. 2 729-738.

Sanchez-Sesma. F.J, Herrera, I. y Avilés, J.(1982). A boundary method for elastic wave diffraction: aplicacion to scattering *SH* waves by surface irregularities, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 72, 473-490.

Sanchez-Sesma. F.J. y Iturrarán-Viveros, U. (2001). Scattering and diffraction of *SH* waves by a finite crack: an analytical solution, *Geophys. J. Int.*, 145, 749-758.

Virieux, J. (1984). *SH*-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* 49, 1933-1942.

Virieux, J. (1986). *P-SV* wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* 51, 889-901.

X. M. Tang, A. Cheng. (2004). *Quantitative Borehole Acoustic Methods*, Elsevier, Seismic Exploration series Vol 24.

ANEXO 1

Ondas

Una onda es una señal reconocible que puede ser transferida de un lugar a otro de un medio con una velocidad de propagación reconocible. También podemos decir que una onda es una perturbación que se propaga en el espacio y en el tiempo manteniendo ciertas características discernibles. Esto es vital ya que en el caso de las ondas electromagnéticas no hace falta ningún medio para la propagación ya que las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío.

Si se sujeta una barra de algún material elástico (metal, madera, piedra, etc.) por un extremo y se golpea en el otro extremo, se sentirá que la energía del golpe se transmite a través del material. Esto sucede porque cada parte de la barra se deforma y luego vuelve a su forma original; al deformarse “jala” o “empuja” a las partes vecinas, las cuales, a su vez, mueven a sus propias partes vecinas, y así sucesivamente, lo que hace que la deformación viaje a lo largo de la barra. Nótese que es la deformación la que viaja y no las partículas o pedazos de la barra, los cuales sólo se desplazan un poco de su posición original y luego vuelven a ella. Así sucede con el sonido en el aire y los fluidos.

Si trazamos líneas imaginarias perpendiculares a los frentes de onda, veremos que indican la dirección en la que viajan las ondas. Estas líneas son llamadas rayos, y describen las trayectorias de la energía sísmica (trayectoria de propagación).

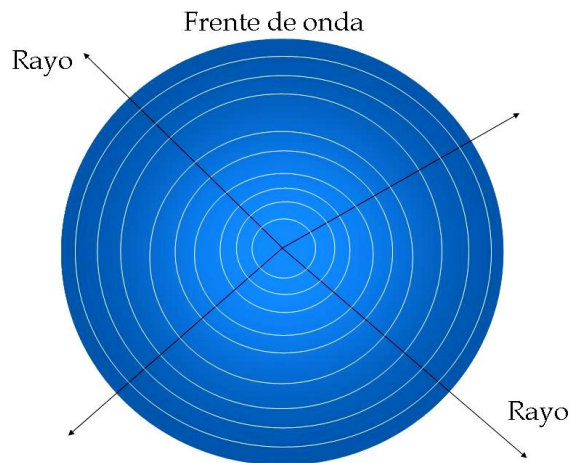


Fig. 1.1 Frentes de onda propagándose hacia fuera. Las líneas perpendiculares a los frentes de onda se denominan Rayos, e indican la trayectoria de propagación.

La onda sísmica deforma el medio a través del cual pasa, lo cual indica que puede hacer trabajo, y, por lo tanto, corresponde a energía elástica que se desplaza. En el caso de ondas generadas por explosiones, el movimiento es producto de las reacciones químicas o nucleares que causaron la explosión; en el caso de ondas generadas por sismos, el movimiento es consecuencia de la energía que estaba almacenada como deformación en las rocas.

Existen tres casos principales de propagación de ondas: planas, cilíndricas y esféricas; cada caso requiere soluciones específicas de las ecuaciones que representen su propagación, con el objeto de conocer la respuesta dinámica en la superficie de un medio. En sismología por lo general se estudian ondas planas ya que la onda se encuentra a una distancia muy grande de la fuente que la genera, y la curvatura de la tierra puede considerarse mínima.

Tipos de ondas sísmicas

En un medio elástico con extensión ilimitada pueden propagarse dos tipos de ondas elásticas: las de cuerpo o de volumen, y las ondas superficiales las cuales se describen a continuación:.

Conocidas como ondas de cuerpo u ondas internas, las cuales pueden ser ondas P primarias o de compresión y las ondas S secundarias o de cortante. Las primeras se propagan con mayor velocidad en el medio (de ahí su nombre de primarias), presentando además la característica de poder propagarse por cualquier tipo de material, sea sólido o líquido. Las ondas S viajan a una velocidad algo menor (secundarias) y no se propagan por los líquidos ya que estos no soportan esfuerzos de cortante. Usualmente la onda S tiene mayor amplitud que la onda P.

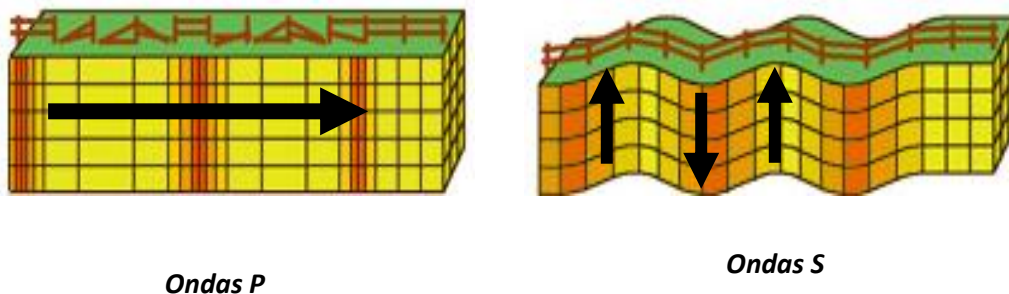


Fig. 1.2. Ondas de cuerpo.

El desplazamiento de las partículas en el terreno durante el paso de la onda puede ser en cualquier dirección perpendicular a la de propagación; sin embargo, en la práctica la onda S se descompone en dos direcciones normales entre sí, estudiando así los movimientos en una sola dirección, en este caso se dice que las ondas están polarizadas.

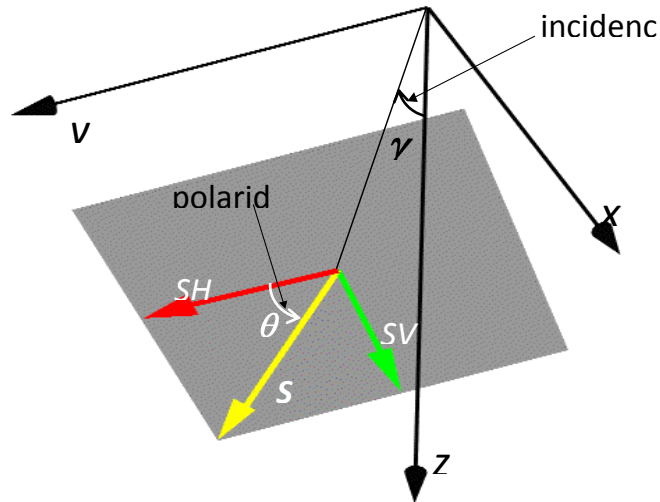


Fig. 1.3. La onda S y sus componentes SV y SH, el ángulo γ es el ángulo de incidencia y está definido en el plano x-z, el ángulo θ queda comprendido entre la componente SH y la onda plana S

El componente vertical de la onda S que está alojado en un plano vertical se le llama componente SV, mientras que el componente horizontal se le conoce como componente SH, además, la onda S se aloja en un plano que forma un cierto ángulo respecto al plano horizontal, este ángulo se conoce como ángulo de incidencia y se define en el plano x-z. En la Fig. 3 se ilustra el concepto de polarización de la onda S. Esto es importante pues cuando se presenta anisotropía de una formación. Esta separa naturalmente las ondas y se separan los diferentes componentes al viajar a diferentes velocidades.

Aunado a esto la onda S y sus planos de polarización pueden estar referidos a un sistema de coordenadas diferente al que hemos elegido para conocer la respuesta del medio, en este caso se define el ángulo azimutal o azimut, que es el ángulo que forma la dirección x del sistema de referencia geográfico (por ejemplo la dirección N) con la dirección x' (o radial) del sistema de referencia de la onda con el sistema de referencia natural de la onda medido en dirección positiva de giro del eje z .

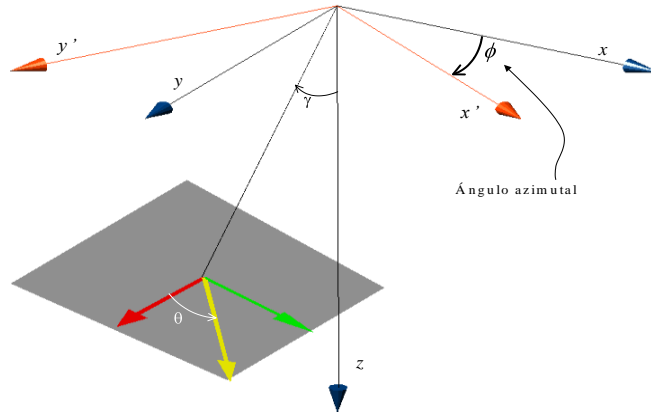


Fig. 1.4. Definición del ángulo azimutal.

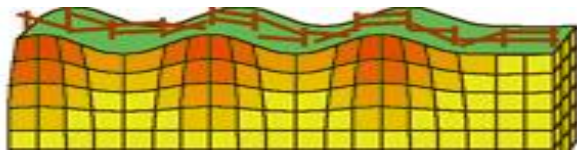
Además de las ondas que viajan a través del terreno, existen otras denominadas superficiales que lo hacen por la superficie. Estas ondas tienen amplitudes máximas en la superficie del terreno y decrecen con la profundidad en función de la frecuencia (la atenuación con la profundidad es mayor para altas frecuencias).

Las ondas superficiales pueden explicarse como producto de la interferencia de las ondas de cuerpo (ondas P y S), además de que su velocidad es más lenta que éstas. En el caso de los telesismos (los que ocurren a más de 1000 km de distancia del observador), las ondas superficiales llegan mucho después que las de cuerpo, y presentan dispersión; esto es, las ondas viajan con diferentes velocidades que dependen de la frecuencia.

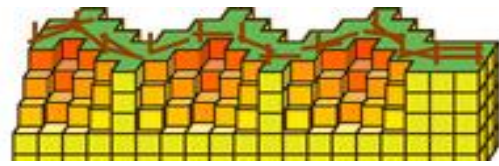
Estas de ondas pueden agruparse en dos tipos principales: ondas de Rayleigh y ondas de Love (Aki y Richards, 1980).

Las ondas de Rayleigh, denotadas usualmente por R, o LR cuando son de periodo muy largo, se deben a la interacción entre las ondas P y las SV, el movimiento de cada partícula de la superficie del terreno al paso de la onda se da en forma de elipse retrógrada. Son las ondas más lentas con velocidades de grupo (la velocidad con que viaja la energía).

Las ondas de Love se denotan usualmente por L, o G o LG si son de periodo muy largo. Se comportan de manera muy parecida a la descrita para las ondas de Rayleigh, pero se deben a la interferencia constructiva de ondas SH solamente, por lo que no pueden existir en un semiespacio, sino que requieren al menos una capa sobre un semiespacio, donde pueda quedar atrapada parte de la energía sísmica. Estas son polarizadas horizontalmente (como las SH) y, por lo tanto, no se registran en los sensores verticales.



Ondas de Rayleigh



Ondas de Love

Fig. 1.5. Forma de las ondas Superficiales.

Guías de ondas

Una guía de ondas es una porción del medio delimitada por superficies reflejantes que permiten cierto tipo de modos ondulatorios propagarse en su interior sin una pérdida significativa de energía por radiación al medio que la rodea.

Ondas de Scholte

Las ondas de superficie fueron propuestas por primera vez por Lord Rayleigh en 1885, Lord investigo la respuesta de un material elástico en contacto con un vacío en la superficie laminar y observo que una onda se propagaba a lo largo de la superficie con un movimiento de partículas, cuya amplitud se reducía con la distancia a la superficie, propiedad conocida como evanescencia. Los resultados de Rayleigh predijo la existencia de ondas que se propagan a lo largo de la superficie terrestre y dan origen a los temblores devastadores causados por los terremotos, el mismo efecto, en una escala mucho menor, genera el ruido de superficie en los levantamientos sísmicos de superficie.

En 1924, Stoneley observo las ondas que se propagaban en la interfaz existente entre dos sólidos y noto un tipo similar de onda superficie. El caso particular correspondiente a un pozo lleno de fluido, es decir la interfaz entre un sólido y un líquido fue descrito no por Stoneley si no por Scholte. Sin embargo, las ondas que viajan en la interfaz fluido-pozo, se conocen como ondas de Stoneley. En otras áreas de la geofísica, las ondas que viajan en una interfaz Fluido-Sólido se denominan ondas de Scholte o de scholte-Stoneley.

ANEXO 2

Elementos de elasticidad dinámica

La sismología es una ciencia basada en datos llamados sismogramas que son registros del movimiento o de otras manifestaciones que revelan la generación y la propagación de ondas sísmicas. Éstas son producidas en la tierra por la acción de fuerzas externas aplicadas a una porción limitada (por ejemplo una explosión), o como resultado de un cambio repentino en los esfuerzos (como el caso de un sismo). Para simplificar el problema, suele considerarse a la tierra como un medio elástico continuo. En algunas aplicaciones se supondrá que los medios son homogéneos pero en muchas circunstancias debe considerarse la heterogeneidad y las discontinuidades de los materiales reales.

En este contexto, la estructura granular así como las naturalezas tanto atómica como molecular de los materiales de la tierra no se consideran y el término “partícula” se utiliza de manera geométrica para referirse a un punto sin dimensiones. La densidad y propiedades mecánicas se suponen funciones continuas del espacio y el tiempo. Se supondrán invariables en el tiempo en la mayoría de los problemas que aquí se abordarán.

Los principios para estudiar el movimiento producido en un medio elástico se remontan a las matemáticas comprendidas entre el siglo XVII y XIX, a las teorías de Newton, Hooke, Kelvin, Cauchy, Lamé, entre otros.

Deformación y Esfuerzo.

- Estado de esfuerzo

Las fuerzas que actúan en un instante en una cierta porción de cuerpo libre dentro de un medio continuo se clasifican en dos clases: fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Las primeras actúan sobre elementos de masa o de volumen dentro del cuerpo (por ejemplo, la acción de la gravedad). Estas son fuerzas de acción a distancia, usualmente se consideran por unidad de masa o por unidad de volumen. Las fuerzas de superficie son fuerzas de contacto. Estas fuerzas suelen estudiarse empleando un diagrama de cuerpo libre, sobre superficies (por ejemplo las cargas distribuidas). Usualmente se consideran por unidad de área de la región sobre la cual actúan (Fung, 1977).

- Tensor de esfuerzo

Considérese un cuerpo elástico cualquiera acotado por una superficie cerrada S , sometido a un sistema de fuerzas, si se desea conocer la interacción de fuerzas entre la parte exterior e interior de S debemos saber que dicha interacción está compuesta por fuerzas de cuerpo y de superficie.

Sepárese una porción del cuerpo y mediante un diagrama de cuerpo libre defínase una fuerza F que es la resultante de las fuerzas exteriores que actúan en la otra porción. Dividiendo la fuerza F entre la magnitud del área “expuesta” se obtiene el esfuerzo promedio en el área A .

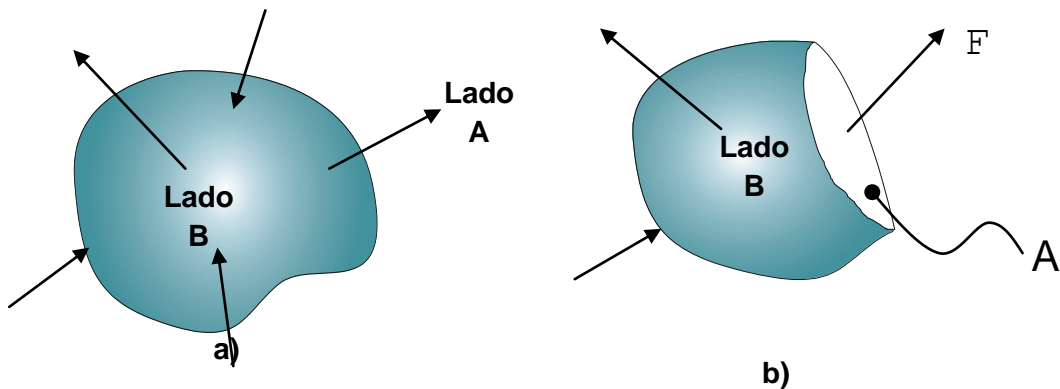


Fig. 2.1 a) Cuerpo sometido a un estado de fuerzas,
b) Diagrama de cuerpo libre de la porción B

De la definición anterior puede concluirse que (1) la magnitud del esfuerzo depende de la magnitud del área donde actúa la fuerza y (2) que el esfuerzo es un vector dado definido como el cociente de un vector (Fuerza) entre un escalar (Área). Si la fuerza F se descompone en una componente normal al plano de corte (N) y una componente paralela (T). Puede definirse entonces al esfuerzo normal medio como el cociente de N entre A . El esfuerzo cortante medio se define como el cociente de T entre A .

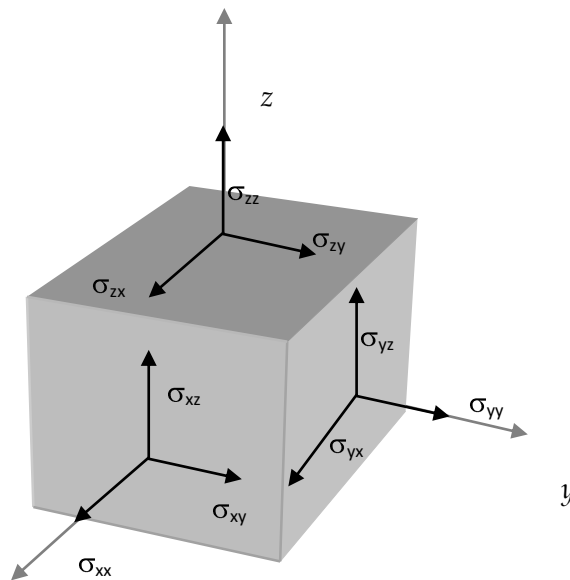


Fig. 2.2. Representación de esfuerzos en un volumen elemental. El primer subíndice indica la cara del paralelepípedo rectangular en la que actúa el esfuerzo y el segundo la dirección de dicho esfuerzo. Las caras indicadas son positivas y los esfuerzos representados tienen direcciones positivas. En las caras negativas, los esfuerzos positivos tendrán direcciones contrarias.

Estas definiciones de esfuerzos son aplicables a un plano, sin embargo, es posible extender el estado de esfuerzo a todos los puntos de un cuerpo, llevando la definición al límite y representar así dichos estados de esfuerzos en una diferencial de volumen. Así, se tienen esfuerzos normales en tres direcciones perpendiculares entre sí así como seis esfuerzos tangenciales.

- Estado de Deformación

Los cuerpos se pueden clasificar en cuanto a su deformabilidad en cuerpo rígido y cuerpo deformable. El análisis de cuerpo rígido trata los efectos exteriores de las fuerzas sobre el cuerpo, al mismo tiempo que estudia el cambio de lugar de este. El análisis de cuerpo deformable trata los efectos internos de las fuerzas al actuar sobre el cuerpo (Fung, 1977).

Cuando a un cuerpo real se le somete a la acción de un sistema de fuerzas

Puede sufrir un cambio de forma, de volumen o de posición. Si la intensidad de fuerzas aumenta puede ocurrir la ruptura total o parcial del cuerpo y por lo tanto el desequilibrio del sistema de fuerzas que actúan en él, produciéndose un nuevo sistema en equilibrio dinámico; estas deformaciones dependen de las características del sistema de fuerzas, y de las propiedades del cuerpo mismo.

Normalmente, se le llama deformación al cambio de longitud entre dos puntos (ΔL) de un cuerpo cuando se somete a un estado de esfuerzos, sin embargo, este cambio de longitud no es una medida propia de la deformación, ya que es dependiente de la longitud misma. Para eliminar esta dependencia debe normalizarse a ΔL en función de la longitud inicial, es decir

$$e = \frac{L_f - L_i}{L_i} \quad (2.1)$$

Donde L_f es la longitud final, L_i es la longitud inicial y e es la deformación unitaria. Esta última es una medida de la deformación independiente de la magnitud de la recta que une a los dos puntos en estudio, es adimensional y generalmente se expresa en %.

Ecuaciones de equilibrio

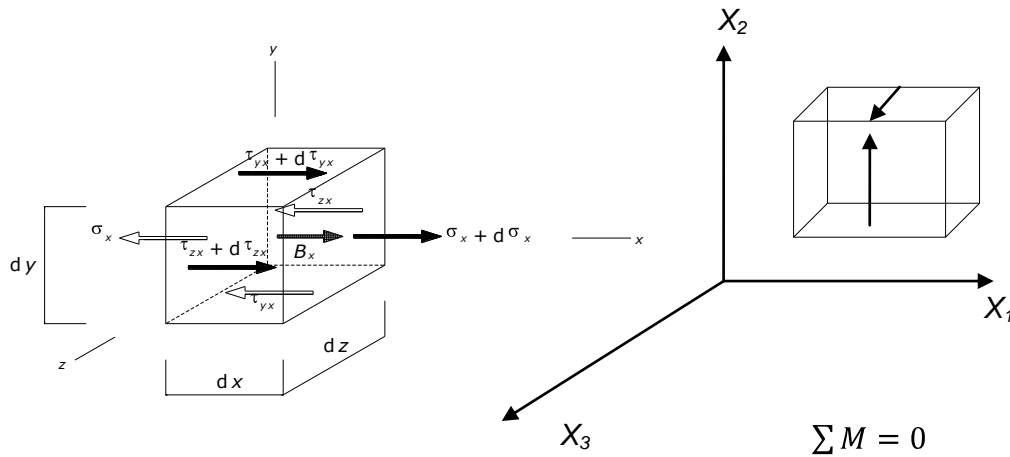


Figura 2.3. Representación de la Ecuación de Movimiento

Sobre una partícula o molécula de un cuerpo se presentan dos tipos de fuerzas.

1ª. Fuerzas de cuerpo: son debidas a la acción de campos vectoriales como pueden ser los campos eléctricos, los magnéticos o los gravitacionales. Generalmente se tratan como densidades de fuerza, es decir, fuerzas por unidad de volumen.

2ª. Fuerzas de superficie: son generadas por la acción directa de otros cuerpos. Generalmente se tratan como intensidades de fuerzas por unidad de área, es decir como esfuerzos (Fung, 1977).

Considérense una partícula sometida a un estado general de esfuerzos y en la cual, la resultante de densidad de fuerzas de cuerpo está dada por el vector $F = (F_x, F_y, F_z)$ a cual se supone que pasa por el centroide de la partícula. Supóngase además que la molécula se encuentra en equilibrio estático (es decir, su velocidad es nula), esto significa que $\sum F = 0, \sum M = 0$, es decir, $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$, etc.

Tomando primero $\sum F_x = 0$, (ver figura 2.3), se tiene

$$-\sigma_x dydz + (\sigma_x + d\sigma_x) dydz - \tau_{zx} dx dy + (\tau_{zx} + d\tau_{zx}) dx dy - \tau_{yx} dx dy + (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) dx dy + F_x dx dy dz = 0 \quad (2.2)$$

Simplificando,

$$d\sigma_x dydz + d\tau_{zx} dx dy + d\tau_{yx} dx dy + F_x dx dy dz = 0 \quad (2.3)$$

Como los esfuerzos son función solo de la posición (ya que no habiendo aceleración ni velocidad, no dependen del tiempo), es decir, $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z)$, etc., entonces, sus derivadas son las de las funciones de varias variables, es decir,

$$d\sigma_x = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} dy + \frac{\partial\sigma_x}{\partial z} dz,$$

$$d\tau_{xy} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z} dz, \text{ ect} \quad (2.4)$$

Sustituyendo estas derivadas en la última ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} (dy)^2 dz + \frac{\partial\sigma_x}{\partial z} (dz)^2 dy + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} (dx)^2 dy + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} dy dx dz \\ & + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z} dx (dz)^2 + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} (dx)^2 dz + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y} dx (dy)^2 + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz \\ & + F_x dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Despreciando las diferenciales al cuadrado,

$$(dx)^2 \approx 0, (dy)^2 \approx 0, (dz)^2 \approx 0 \quad (2.6)$$

, Esta ecuación se simplifica a

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + F_x dx dy dz = 0 \quad (2.7)$$

Dado que $dv = dx dy dz = 0$, entonces:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (2.8)$$

En forma análoga, aplicando $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$, se obtienen

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \quad (2.10)$$

Se les denominan las *ecuaciones diferenciales de equilibrio* (9) y (10).

ANEXO 3

Método de diferencias finitas de órdenes superiores

El procedimiento fundamental de los cálculos numéricos de las diferencias finitas está basado en aproximaciones polinomiales de una función $f(x)$. Una primera aproximación a la función $F(x)$ puede estar dada por su tangente siendo una aproximación lineal (polinomio de primer orden).

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} \frac{df(x_0)}{dx} \quad (3.1)$$

También puede considerarse una aproximación cuadrática,

$$f(x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} \quad (3.2)$$

Entre mayor sea el orden de las aproximaciones a la función $f(x)$, mayor será la exactitud de dicha aproximación. Estas aproximaciones polinomiales son las conocidas como la serie de Taylor (Haberman, R., 2004).

Con el uso de la serie de Taylor es posible aproximar las derivadas de una función f varias maneras, las más utilizadas se indican a continuación.

1.- Aproximación hacia adelante:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.3)$$

2.- Aproximación hacia atrás:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.4)$$

3.- Aproximación centrada:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.5)$$

La aproximación hacia adelante es llamada así debido a que se necesita uno o varios puntos delante de la posición de $f(x)$, en el caso hacia atrás los puntos están atrás de $f(x)$ y la aproximación centrada es aquella que tiene igual número de puntos hacia adelante que hacia atrás de $f(x)$. Es posible obtener las derivadas de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en un punto, considerando los puntos posteriores y anteriores a dicho punto, para ello se puede utilizar una expansión de series de Taylor o una expansión de polinomios (un sistema de ecuaciones lineales).

Atenuación

En los materiales reales existen procesos de fricción interna que disipan parte de la energía ligada al movimiento (Achenbach, 1976). Para tomar en cuenta este fenómeno, se modela el comportamiento visco elástico del medio introduciendo un término correctivo en los parámetros elásticos. El modelo más sencillo para modelar un sistema dinámico es el cuerpo de Hooke que consiste en una masa sujeta a un resorte. Si a este sistema le agregamos un elemento amortiguante, tenemos lo que se conoce como cuerpo de Kelvin. Este modelo es el más común en el análisis de la respuesta sísmica en medios; comúnmente se usan valores complejos de las velocidades de propagación

$$\alpha^* = \alpha \left(1 + \frac{i}{2Q_p} \right)$$
$$\beta^* = \beta \left(1 + \frac{i}{2Q_s} \right)$$
(3.6)

Donde Q_p y Q_s son los factores de calidad para las ondas P y S respectivamente. Este parámetro de Q, se ha determinado mediante trabajos experimentales como constante en un amplio rango de frecuencias.

Hasta ahora, se ha definido la ecuación de onda como una función que depende del espacio y el tiempo, sin embargo en ocasiones resulta práctico cambiar de variable y trabajar en el dominio espacio-frecuencia, para ello, se basa en la hipótesis de que cualquier serie en el tiempo puede descomponerse en la suma o la integral de ondas armónicas con diferentes frecuencias, se dice entonces que se aplicará el análisis de Fourier.

GLOSARIO

Refracción: es el cambio de dirección que experimenta una onda al pasar de un medio material a otro. Solo se produce si la onda incide oblicuamente sobre la superficie de separación de los dos medios y si estos tienen índices de refracción distintos. La refracción se origina en el cambio de velocidad de propagación de la onda.

Reflexión: se refiere al fenómeno por el cual se refleja una onda.

Difracción: es un fenómeno característico de las ondas, éste se basa en el curvado y esparcido de las ondas cuando encuentran un obstáculo

Elasticidad: designa la propiedad mecánica de ciertos materiales de sufrir deformaciones reversibles cuando se encuentran sujetos a la acción de fuerzas exteriores y de recuperar la forma original si estas fuerzas exteriores se eliminan.

Transmisión: es el traspaso de energía, ondas o información desde un punto de inicio hacia un punto de llegada diferente, pudiendo alterarse o no aquello que es transmitido en el recorrido.

Ecuaciones de Lamé-Hooke: son las ecuaciones constitutivas de un sólido elástico lineal, homogéneo e isótropo..

Ecuaciones de Equilibrio: relacionan los esfuerzos internos con las fuerzas exteriores aplicadas. Las ecuaciones de equilibrio para elementos lineales y elementos bidimensionales son el resultado de escribir las ecuaciones de equilibrio elástico en términos de los esfuerzos en lugar de las tensiones.

Pseudo-espectrales: emplean modos netamente senosoidales, cosenosoidales o una combinación de ambos, mediante la identidad de *Euler*. Esto puede traducirse en aproximaciones menos exactas y también en un procedimiento para encontrar la respuesta mucho más simple.

Método de ondas discreta (DWN): se expresa como una superposición de ondas planas, incluyendo las ondas inhomogeneas, propagándose en todas las direcciones desde la frontera del espacio elástico.

Delta de Kronecker: es una función de dos variables, que vale 1 si son iguales, y 0 si son diferentes. Se escribe con el símbolo δ_{ij} y se usa como una taquigrafía notacional.

Ley de Snell: Es una fórmula simple utilizada para calcular el ángulo de refracción de la luz al atravesar la superficie de separación entre dos medios de índice de refracción distinto y fue formulada para explicar los fenómenos de refracción de la luz, es aplicable a todo tipo de ondas que atraviesan una superficie de separación, entre dos medios en los que la velocidad de propagación de la onda varía.