



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

UNIDAD ZACATENCO

DOCTORADO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA

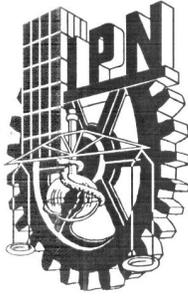
**EXTENDIBILIDAD DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS  
Y ESPINORIALES Y APLICACIONES**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA  
PRESENTA

**RAÚL CASTILLO PÉREZ**

DIRECTOR DE TESIS: DR. VLADISLAV KRAVCHENKO

MÉXICO, D. F., DICIEMBRE DE 2004.



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
**COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION**

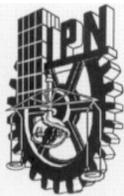
**CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, Distrito Federal el día 31 del mes enero del año 2005, el (la) que suscribe Raúl Castillo Pérez alumno (a) del Programa de Doctorado en Comunicaciones y Electrónica con número de registro B010772, adscrito a la SEPI, ESIME Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección de Dr. Vladislav Kravchenko Ch. y cede los derechos del trabajo intitulado “Extendibilidad de los campos electromagnéticos y espinoriales y aplicaciones”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección raulcastillop@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Raúl Castillo Pérez

Nombre y Firma



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
**COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION**

*ACTA DE REVISION DE TESIS*

En la Ciudad de México, D. F., siendo las 13:15 horas del día 09 del mes de diciembre del 2004 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de SEPI-ESIME-CULHUACAN para examinar la tesis de grado titulada:

"EXTENDIBILIDAD DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS Y ESPINORIALES Y APLICACIONES"

Presentada por el alumno:

**CASTILLO**

Apellido paterno

**PÉREZ**

materno

**RAÚL**

nombre(s)

Con registro: 

B0	1	0	7	7	2
----	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISION REVISORA**

Director de tesis

DR. VLADISLAV KRAVCHENKO CHERKASSKI

DR. VLADIMIR RABINOVICH SAMUILOVICH

DR. GROUDSKI SERGUEI MIKHAILOVITCH

DR. MIGUEL CRUZ IRISSON

DR. SALVADOR PÉREZ ESTEVA

**EL PRESIDENTE DEL COLEGIO**

DR. HÉCTOR MANUEL PÉREZ MEANA

# Resumen

Iniciamos introduciendo los elementos básicos del análisis cuaterniónico cuyas técnicas y herramientas usamos para estudiar los operadores que incluye esta tesis. El primero de ellos, el operador de Moisil-Theodoresco, nos ayuda a definir un par de operadores –denotados aquí como  $D_{\pm v}$ – que nos permiten factorizar la ecuación de Helmholtz.

Usando unas versiones modificadas de estos operadores, reformulamos cuaterniónicamente las ecuaciones de Maxwell armónicas en tiempo y el operador de Dirac. Para éste último, mostramos a detalle el proceso que parte de la representación matricial de los cuaterniones y que pasa a través de un par de transformaciones para llevarnos a su representación cuaterniónica. Una vez reformuladas, se muestra de forma sencilla la relación entre las ecuaciones de Maxwell y de Dirac.

Después llevamos a cabo la descomposición del kernel del operador de Klein-Gordon (éste y el de Dirac son los dos operadores más importantes de la física de partículas) lo cual nos permite mostrar que cualquier solución de la ecuación de Klein-Gordon puede ser representada a través de dos soluciones de la ecuación de Dirac con la misma masa. De igual manera descomponemos el kernel del operador de onda – después de establecer su relación con las ecuaciones de Maxwell– lo cual hace evidente la relación entre su teoría y la de un par de operadores cuaterniónicos con muchas aplicaciones en electrodinámica y mecánica cuántica.

A continuación mostramos un problema de extendibilidad para un campo electromagnético en un dominio acotado, mismo que es reformulado cuaterniónicamente y resuelto. Después, como para el estudio de problemas con valores de frontera en los dominios no acotados es necesario contar con una condición de radiación en el infinito, presentamos al operador de Helmholtz y el procedimiento que lleva a la obtención de su condición de radiación: la condición de radiación de Sommerfeld. Basándonos en esta condición y en la relación del operador de Helmholtz con los operadores  $D_{\pm v}$ , encontramos para éstos sus condiciones de

radiación en el infinito. Entonces procedemos al estudio del problema de extendibilidad para el dominio no acotado. Determinando la equivalencia de las condiciones de radiación para los operadores  $D_{\pm v}$  con las condiciones de radiación de Silver-Müller –condiciones para las ecuaciones de Maxwell en su forma tradicional– cuando se está considerando la reformulación cuaterniónica de las ecuaciones de Maxwell, podemos reformular completamente el problema y determinar el criterio para la existencia de sus soluciones.

Por último obtenemos la condición de radiación en el infinito para el operador de Dirac tanto en su forma cuaterniónica como en la clásica, lo cual aprovechamos para obtener sus representaciones integrales. Dichas representaciones nos permiten estudiar una gran cantidad de problemas con valores de frontera, como es el caso del modelo de bolsa MIT, cuya representación cuaterniónica mostramos aquí. De esta manera aprovechamos que el modelo del efecto Casimir fermiónico se reduce a un problema con valores de frontera para la ecuación de Dirac como el mostrado en el modelo de bolsa MIT para encontrar su solución general y las condiciones de compatibilidad que garantizarán la existencia de soluciones no triviales para dicho efecto.

Los resultados nuevos son la descomposición de los kérneles de los operadores de Klein-Gordon (Sección 4.1) y de onda (Sección 4.3), la obtención de la condición de radiación para los operadores  $D_{\pm v}$  basados en el operador de Moisil-Theodoresco (Sección 5.3), la determinación del criterio para la existencia de una solución para problemas de extendibilidad del campo electromagnético en los dominios no acotados (Sección 5.5), la determinación de la condición de radiación en el infinito y las representaciones integrales en los dominios no acotados para el operador de Dirac, y tanto la solución general como la condición de compatibilidad que permiten obtener el conjunto completo de eigenvalores para el efecto Casimir fermiónico (resultados que prácticamente abarcan la totalidad del Capítulo 6).

# Abstract

We start introducing the basic elements of quaternionic analysis whose technics and tools we will use in order to study the operators included in this thesis. The first of them, –the Moisil-Theodoresco operator– let us define a pair of operators –denoted here as  $D_{\pm v}$ – which let us factorize the Helmholtz operator.

Using some modified versions of these operators the quaternionic reformulations of the time harmonic Maxwell equations as well as the Dirac operator are obtained. For the latter, the detailed process starting in the matrix representation of quaternions and passing through a pair of transforms leading to its quaternionic reformulation is showed. Once reformulated the Maxwell and the Dirac equations the relation between these two equations is very easily showed.

Then we decompose the kernel of the Klein-Gordon operator (the Klein-Gordon and the Dirac operators are the two most important operators of particle physics) and we show that any solution of the Klein-Gordon equation can be represented via two solutions of the Dirac equation with the same mass. In a similar way, we decompose the kernel of the wave operator –after exposing its relation to Maxwell equations– and this makes evident the connection between its theory and the theory of a pair of quaternionic operators with a lot of applications in electrodynamics and quantum mechanics.

After that we show an extendibility problem for the electromagnetic field in an unbounded domain, we reformulate it to quaternionic terms and solve it. Then, as the study of boundary value problems in unbounded domains requires the use of a radiation condition at infinity, we present the Helmholtz operator and the procedure which let us obtain its radiation condition: Sommerfeld’s radiation condition. On the basis of this condition and the relation between the Helmholtz and the  $D_{\pm v}$  operators, the radiation conditions at infinity are found for the latter. We continue with the study of the extendibility problem for the unbounded domain. Determining the equivalence of the radiation conditions for the operators  $D_{\pm v}$  to the Silver-Müller radiation conditions –the conditions for the Maxwell equations in their traditional form– when

the quaternionic reformulation of Maxwell's equations is being considered, allows us to completely reformulate the problem and to determine the criterion for the existence of solutions.

Finally we obtain the radiation condition at infinity for the Dirac operator both in its classical form and in its quaternionic form. With the aid of such radiation conditions we obtain the respective integral representations. These representations allow us to study a big amount of boundary value problems, as the MIT bag model, for example, whose quaternionic representation we show here. This way, we take advantage of the Casimir effect model reducing to a boundary value problem for the Dirac equation –as the one shown in the MIT bag model– in order to find its general solution and the compatibility conditions which grant the existence of nontrivial solutions for such effect.

The new results are the decomposition of the kernel of the Klein-Gordon (Section 4.1) and wave (Section 4.3) operators, the radiation condition at infinity obtained for the operators  $D_{\pm v}$  based on the Moisil-Theodoresco operator (Section 5.3), the determination of the criterion for the existence of solutions for extendibility problems for the electromagnetic field in unbounded domains (Section 5.5), the determination of the radiation condition at infinity and the integral representations in unbounded domains for the Dirac operator, and both the general solution and the compatibility condition which allow us to obtain the complete set of eigenvalues for the fermionic Casimir effect (these results cover almost all of Chapter 6).

# Contenido

0.1	Objetivos . . . . .	4
0.2	Justificación . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Elementos del análisis cuaterniónico y operador de Moisil-Theodoresco</b>	<b>16</b>
2.1	Álgebra de cuaterniones complejos . . . . .	16
2.2	Operador de Moisil-Theodoresco . . . . .	19
2.2.1	Factorización del operador de Helmholtz . . . . .	22
2.3	Elementos del análisis cuaterniónico . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Sobre las ecuaciones de Maxwell y de Dirac</b>	<b>27</b>
3.1	Ecuaciones de Maxwell . . . . .	27
3.1.1	Ecuaciones de Maxwell armónicas en tiempo . . . . .	29
3.1.2	Ecuaciones de Maxwell cuaterniónicas . . . . .	30
3.2	Ecuación de Dirac . . . . .	36
3.2.1	Representación matricial de los cuaterniones . . . . .	38
3.2.2	Reformulación cuaterniónica del operador de Dirac . . . . .	43
3.3	Relación entre las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Dirac . . . . .	51

<b>4</b>	<b>Descomposición del kernel del operador de Klein-Gordon</b>	<b>53</b>
4.1	Descomposición del kernel del operador de Klein-Gordon . . . . .	55
4.2	Las ecuaciones de Maxwell y el operador de onda . . . . .	57
4.3	Descomposición del kernel del operador de onda . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Problema de la extendibilidad para las ecuaciones de Maxwell</b>	<b>66</b>
5.1	Problema de extendibilidad en los dominios acotados . . . . .	70
5.2	El operador de Helmholtz y la condición de radiación de Sommerfeld .	74
5.2.1	Difracción acústica armónica en tiempo . . . . .	77
5.2.2	Condición de radiación de Sommerfeld . . . . .	78
5.3	Condición de radiación para los operadores $D_{\pm\nu}$ . . . . .	85
5.4	Condiciones de radiación de Silver-Müller . . . . .	90
5.4.1	Teoremas de representación y condiciones de radiación . . . . .	92
5.5	El problema de la extendibilidad en los dominios no acotados . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Problema de extendibilidad para la ecuación de Dirac</b>	<b>106</b>
6.1	Representaciones integrales en los dominios no acotados . . . . .	106
6.2	Condición de radiación para el operador de Dirac . . . . .	111
6.3	Representaciones integrales para el operador de Dirac . . . . .	112
6.3.1	Modelo de bolsa del MIT . . . . .	113
6.4	Efecto Casimir fermiónico . . . . .	115
6.4.1	Reformulación cuaterniónica y solución general . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>132</b>
<b>A</b>	<b>Algunas definiciones del análisis funcional</b>	<b>135</b>
<b>B</b>	<b>Espacios funcionales y clase de superficies consideradas</b>	<b>139</b>

# Lista de Figuras

1.1	Exclusión de algunos modos que da lugar al efecto Casimir. . . . .	11
2.1	Dominio acotado y su frontera. . . . .	24
5.1	El dominio acotado se cubre con una esfera para probar la fórmula integral de Cauchy en el dominio exterior. . . . .	103
6.1	Dominio considerado para el efecto Casimir. . . . .	116

## 0.1 Objetivos

El primer objetivo de la presente tesis es obtener las condiciones de radiación en el infinito para las ecuaciones de Maxwell en forma cuaterniónica y para el operador de Dirac tanto en su forma cuaterniónica como en su forma clásica. La importancia de dichas ecuaciones en la física-matemática hace que tales condiciones sean muy valiosas en el estudio de una gran cantidad de problemas con valores de frontera que impliquen un dominio no acotado —como complemento de un dominio acotado—. Se usarán las condiciones de radiación para buscar definir el criterio de extendibilidad de los campos electromagnético y espinorial en los dominios no acotados. Un problema con valores de frontera que se reduce al operador de Dirac es el efecto Casimir fermiónico, para el cual se buscará encontrar la condición necesaria y suficiente para la existencia de sus soluciones y su solución general. También se llevará a cabo la descomposición del kernel del operador de Klein-Gordon y del kernel del operador de onda, relacionado el primero con el operador de Dirac y el segundo con las ecuaciones de Maxwell.

## 0.2 Justificación

A lo largo de esta tesis trataremos ciertos problemas que involucran a las ecuaciones de Maxwell y a los operadores de Helmholtz, Dirac, Klein-Gordon y de onda, entre otros, además de las diversas relaciones que existen entre ellos (ver, e.g., [20], [44], [38], [74] y [41]).

La enorme diversidad de los fenómenos que surgen en la física-matemática que pueden ser estudiados con el uso de estos operadores (además de todos aquellos que tienen una estrecha relación con éstos) incluye entre otros cualquiera del gran número de fenómenos electromagnéticos que existe, la propagación de ondas acústicas, la descripción de partículas elementales de spin  $1/2$  —entre ellas el electrón—, etcétera. La

importancia central que tienen se refleja claramente en la gran cantidad de investigadores, de libros y de artículos dedicados a su estudio y en la diversidad de técnicas que han sido utilizadas para tal propósito: el análisis complejo, el análisis vectorial, el uso de álgebras de Clifford, el análisis cuaterniónico, etcétera. Las ecuaciones de Maxwell —axiomas de la teoría electromagnética y resultado de más de un siglo de observaciones científicas—, por ejemplo, han sido tratadas con la ayuda de las álgebras de Clifford ([26], [58]), o mediante el análisis cuaterniónico (ver, e.g., [33], [51]) —el cual ha permitido obtener importantes avances en la comprensión de los fenómenos electromagnéticos— y, sin embargo, aún deben hacerse profundos análisis matemáticos que garanticen la posibilidad de describir al campo electromagnético en muy diversas situaciones. En general, para estos operadores, muchas explicaciones están todavía fuera de nuestro alcance y hay aún muchos problemas por resolver.

Entre estos encontramos problemas con valores de frontera. Estos problemas consisten, en pocas palabras, en una ecuación diferencial —con frecuencia de segundo grado— y un conjunto apropiado de valores de frontera. Muchos problemas de ingeniería o científicos pueden ser formulados como problemas de valores de frontera. Los ejemplos incluyen: la transferencia de calor en un alambre delgado cuando es calentado, el potencial eléctrico dentro de un conductor delgado, el estiramiento de una fibra elástica delgada bajo cierta carga, la determinación de patrones de radiación de antenas, el desarrollo de modelos de confinamiento de partículas y muchos más. Sin embargo, en contraste con los problemas con valores iniciales, los problemas con valores de frontera frecuentemente tienen varias soluciones —a veces un número infinito de ellas— o no tienen solución, y sólo en algunos casos tienen una solución única.

No obstante, la solución de tales problemas en los dominios no acotados requiere que se garanticen la unicidad y la existencia de la solución. De entre las diversas maneras de lograr esto, las principales son el principio de absorción límite (LAP, por

sus siglas en Inglés) [75] y la imposición de una condición de radiación en el infinito ([65], [72], [73], [20], [13], [46]). Con ambos métodos se busca, imponiendo ciertas condiciones, prohibir dentro de un grupo de posibles soluciones algunas de ellas que no son útiles por la naturaleza física del problema, para tener una solución única.

La obtención de tales condiciones garantiza, por tanto, la posibilidad de dar solución a un gran número de problemas con valores de frontera, incluyendo, por supuesto, los problemas de extendibilidad. En éstos se busca, por ejemplo, reconstruir las soluciones  $f$  de cierta ecuación  $Af = 0$  ya sea en el interior o en el exterior de cierto dominio  $\Omega$  cuando se conocen los valores de la función  $f$  a lo largo de toda la frontera  $\partial\Omega$ .

Por otra parte, como ya mencionamos, existen diversas técnicas que permiten el estudio de estos problemas. Aquí se usará el análisis cuaterniónico ya que proporciona elementos aplicables a una rica clase de modelos físicos, lo que le proporciona numerosas y profundas relaciones con varias áreas de la física, electrodinámica (ver e.g. [39]), teoría de espinores, etcétera. Las herramientas de este análisis en muchos casos permiten simplificar la estructura de los problemas y el estudio de las soluciones, e incluso, a veces, obtener resultados que no está claro cómo obtener con otras técnicas. Acerca de sus aplicaciones a numerosos modelos físicos referimos a los libros [31], [51].

A manera de ejemplo, mencionaremos que es posible, usando el análisis cuaterniónico, transformar un problema con valores de frontera para el dominio no acotado (es ahí donde se ubican la mayoría de los problemas prácticos) para los vectores de intensidad del campo eléctrico y magnético  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , que deben satisfacer la condición de radiación de Silver-Müller en el infinito, en un problema de Dirichlet exterior cuya forma es bastante conocida y cuya solución no es difícil de encontrar [45].

Por esta razón se busca obtener la condición de radiación para las ecuaciones de Maxwell en su forma cuaterniónica y para el operador de Dirac tanto en su forma

cuaterniónica como clásica. Cabe mencionar que a diferencia de las ecuaciones de Maxwell, para las cuales ya se contaba con una condición de radiación, para el operador de Dirac no se tenía una condición de radiación en el infinito. Esto hacía imposible tratar problemas que involucraran dominios no acotados (como complementos de un dominio acotado) para aquel operador. Algunos problemas de extendibilidad asociados a él son, por ejemplo, el modelo de bolsa del MIT (propuesto en [18] y [19]) o el muy interesante efecto Casimir [10] (ver también, e.g., [2], [59], [60], [64], [69]).

También gracias al análisis cuaterniónico es posible realizar la descomposición del kernel del operador de Klein-Gordon [44] (el cual junto con el operador de Dirac constituyen los dos más importantes operadores de la física de partículas) y del operador de onda [12], de donde se muestra la relación que existe entre la teoría de la ecuación de onda y las soluciones de ciertos operadores cuaterniónicos, los cuales tienen muchas aplicaciones en electrodinámica y mecánica cuántica (véase [51]).

Tal vez el papel más importante en esta tesis lo juega el operador de Moisil-Theodoresco, el cual aplicado a funciones bicuaterniónicas incluye a los tres principales operadores del cálculo vectorial y además nos permite obtener generalizaciones apropiadas para la mayoría de los hechos básicos del análisis complejo. Tal operador da lugar al sistema de Moisil-Theodoresco, estudiado en cientos de trabajos (por citar sólo algunos [6], [24], [30], [31], [51], [66]), el cual, aparte de las aplicaciones físicas que pueden dársele, poseía propiedades tan importantes que fue considerado como la generalización más natural del sistema de Cauchy-Riemann en el espacio de tres dimensiones. El primer uso que le damos a este operador es el de factorizar el operador de Helmholtz. Tal factorización no es nueva, pero al obtenerse mediante un operador cuaterniónico basado en el de Moisil-Theodoresco permitió establecer de forma clara relaciones con las ecuaciones de Maxwell y Dirac (entre otras) reformuladas cuaterniónicamente mediante el uso de operadores muy similares (ver, e. g., [43]). Tales

reformulaciones, junto con el análisis cuaterniónico, nos permitieron encontrar gran cantidad de los resultados aquí expuestos.

Por último deseamos comentar que algunos de los resultados obtenidos ya se usan activamente y como muestra mencionaremos los trabajos [1], [5], [29], [35], [40], [43], [47], [68] y [70].

# Capítulo 1

## Introducción

Como puede apreciarse en el título, el principal tema de estudio son los problemas de extendibilidad, en particular para las ecuaciones de Maxwell y de Dirac. Tales problemas implican la determinación, a partir de los valores de la frontera, de los valores de una función en el interior o en el exterior de un dominio acotado. Además debe garantizarse la existencia y unicidad de la solución y, en su caso, su comportamiento en el infinito.

Es cuando se consideran los problemas de valores de frontera en el dominio no acotado (como complemento de un dominio acotado) —en particular las extensiones al dominio no acotado— cuando surgen las condiciones de radiación en el infinito. La imposición de tales condiciones tiene por objeto prohibir la presencia de algunas soluciones que por la naturaleza física del problema no son útiles para tener una solución única. La unicidad de la solución fundamental es crucial para tener la unicidad de las representaciones integrales, para las soluciones de la ecuación homogénea. Además tal solución debe concordar matemática y físicamente con el modelo representado y la condición de radiación debe garantizar cierto comportamiento de aquella en el infinito.

Para las ecuaciones que analizamos, la ecuación de Helmholtz, las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Dirac, los problemas de extensión al dominio interior ya se

conocían y resolvían. Además para los dos primeros operadores ya se contaba con condiciones de radiación —la condición de radiación de Sommerfeld y las de Silver-Müller respectivamente— así que también los problemas de extendibilidad al dominio exterior ya eran estudiados. El beneficio que nuestro trabajo aportó fue encontrar los equivalentes cuaterniónicos de las condiciones de radiación para las reformulaciones cuaterniónicas de las ecuaciones citadas [45]. Tales reformulaciones permitieron obtener no solamente las condiciones de radiación apropiadas, sino también completar el criterio que garantiza la existencia y unicidad de solución para las ecuaciones de Maxwell, obtener la condición de radiación en el infinito para el operador de Dirac tanto en forma cuaterniónica como en su forma clásica, y con ella hacer posible el estudio del problema de extendibilidad al dominio exterior para este operador [13], [46].

Este último resultado a su vez permite utilizar una reformulación cuaterniónica del modelo de bolsa del MIT (MIT bag model) para estudiar el efecto Casimir, predicho por el físico holandés Hendrick Casimir [10] en 1948 (ver también [2], [59], [63], [69]), el cual consiste en una pequeña fuerza atractiva que actúa entre dos placas conductoras paralelas, sin carga y cercanas. De acuerdo a la teoría cuántica, el vacío contiene partículas virtuales que están en un continuo estado de fluctuación. Casimir se dio cuenta de que entre dos placas, sólo aquellos fotones virtuales cuyas longitudes de onda cupieran un número entero de veces en el espacio deberían ser contados cuando se calculara la energía del vacío. Las placas están tan cerca que sólo pequeñas fluctuaciones caben entre ellas y los modos más grandes son excluidos, como se muestra en la Figura 1.1.

La densidad de energía decrece conforme las placas se acercan lo cual implica que hay una pequeña fuerza atrayéndolas. Esa pequeña fuerza fue medida en 1996 por Steven Lamoreaux usando un péndulo de torsión [54]. Sus resultados concordaban

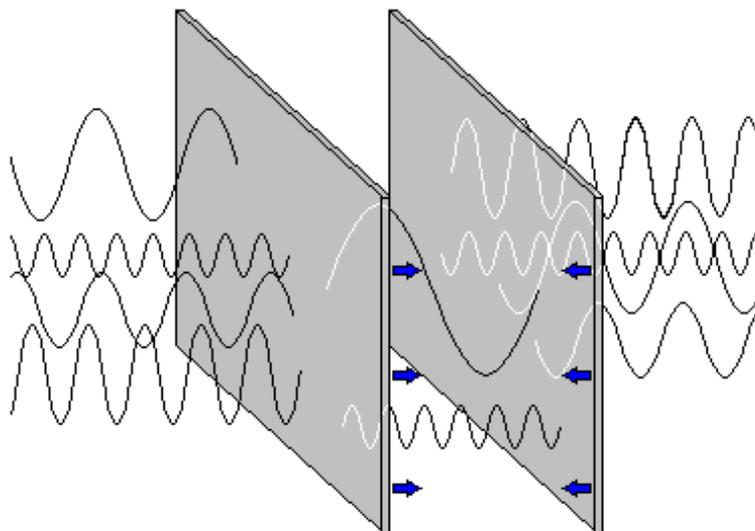


Figura 1.1: Exclusión de algunos modos que da lugar al efecto Casimir.

con la teoría dentro de una incertidumbre experimental de 5 %. Otras partículas distintas a los fotones también contribuyen con un pequeño efecto, pero sólo la fuerza del fotón es medible. Todos los bosones, tales como los fotones, producen una fuerza atractiva de Casimir mientras que los fermiones hacen una contribución repulsiva.

El modelo fermiónico de este efecto se reduce a un problema de valor de frontera para el operador de Dirac [14] y se obtiene su solución general, así como la condición de compatibilidad —necesaria para satisfacer las condiciones de frontera— que garantiza la existencia de soluciones no triviales [15], [16]. De esta forma, el conjunto completo de eigenvalores para el efecto Casimir es obtenido.

Por otra parte, se estudia la relación entre los dos más importantes operadores de la física de partículas, es decir del operador de Klein-Gordon y del operador de Dirac. Desde luego, algunas relaciones entre estos dos operadores se establecieron desde el momento en que Dirac descubrió su operador como una raíz cuadrada del operador de Klein-Gordon. Por lo tanto, está claro que cualquier solución de la ecuación de Dirac

resuelve también la ecuación de Klein-Gordon. Aquí se prueba una conexión más íntima entre las soluciones de ambas ecuaciones. Esto es, mostramos que cualquier solución de la ecuación de Klein-Gordon puede ser representada a través de dos soluciones de la ecuación de Dirac con la misma masa [44], lo que parece ser una extensión natural de la teoría de Dirac. En otras palabras, cualquier función que describe el comportamiento de una partícula libre con spin entero puede ser completamente determinada por dos funciones que describen partículas libres con spin  $1/2$ . Además, las dos funciones que corresponden a cada solución de la ecuación de Klein-Gordon son únicas.

Finalmente debe remarcarse que para tratar estos problemas, usaremos el análisis cuaterniónico como herramienta principal. No ha sido sino hasta tiempos recientes que la aplicación del análisis cuaterniónico ha comenzado a extenderse, principalmente por su aplicabilidad a una amplia clase de problemas de la física-matemática y además porque las herramientas del análisis cuaterniónico han permitido que se obtengan resultados donde otros métodos de análisis han fallado.

Así, en el Capítulo 2 se incluyen las definiciones básicas del álgebra de cuaterniones complejos y se introduce el operador de Moisil-Theodoresco, el cual tiene un importante papel a lo largo de toda esta tesis, ya que permite definir ciertos operadores que nos servirán para reformular a las ecuaciones de Maxwell y al operador de Dirac en forma cuaterniónica. Tal operador nos permite definir dos operadores que nos permitirán factorizar al operador de Helmholtz, y para los cuales obtendremos sus soluciones fundamentales. Este capítulo se cierra con la introducción de los operadores que permiten las representaciones integrales de las soluciones y que garantizan una solución eficiente de distintos tipos de problemas con valores de frontera: los análogos cuaterniónicos del operador  $T$ , del operador integral de Cauchy y del operador de integración singular. A partir de estos operadores pueden definirse los elementos

necesarios para introducir la fórmula integral de Cauchy para el dominio interior, la cual permite obtener los valores de una función en el interior de un dominio acotado, a partir de sus valores en la frontera.

En el Capítulo 3 se introducen las ecuaciones de Maxwell, las cuales enfocamos a continuación en el estudio de un campo electromagnético armónico en tiempo —o monocromático. Tales campos representan el principal objeto de estudio de la radio-electrónica, la teoría de propagación de ondas y otras ramas de la física y la ingeniería. Así que una vez determinadas las ecuaciones de Maxwell armónicas en tiempo, procedemos a reescribirlas cuaterniónicamente con la ayuda del operador de Moisil-Theodoresco, lo cual da como resultado una reducción a un sistema de tan solo dos ecuaciones. Las funciones —cuaterniónicas— a las cuales está aplicado este nuevo sistema, tienen una relación muy directa y clara con los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , así que es muy sencillo trasladar los resultados de la forma cuaterniónica a la tradicional y viceversa. Además, esta relación da como resultado que cuando se muestra la forma explícita de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en forma vectorial, se obtiene un conjunto de cuatro ecuaciones, donde dos de ellas son las fórmulas de Stratton-Chu y las otras dos son dos ecuaciones nuevas que permiten garantizar la existencia y unicidad de las soluciones para las ecuaciones de Maxwell.

El mismo capítulo continúa con la presentación de la ecuación de Dirac. Después se presenta el proceso que nos lleva a obtener una transformación lineal invertible que permite reformular la ecuación de Dirac a una forma cuaterniónica. Para esta ecuación se analiza también el caso de sus soluciones armónicas en tiempo y se obtiene la relación de la forma clásica con el operador cuaterniónico equivalente basado en el operador de Moisil-Theodoresco. Finalmente se muestra la relación entre las ecuaciones de Maxwell y la de Dirac.

El Capítulo 4 se dedica a la descomposición del kernel del operador de Klein-

Gordon. A continuación se presenta la relación entre las ecuaciones de Maxwell y el operador de onda. También se obtuvo una descomposición del kernel del operador de onda [12] que permite relacionar la teoría de este operador con las soluciones de los operadores cuaterniónicos  $(i\partial_t + D)$  y  $(-i\partial_t + D)$ , los cuales tienen muchas aplicaciones en electrodinámica y mecánica cuántica (ver [51]).

El problema de la extendibilidad para las ecuaciones de Maxwell es estudiado en el Capítulo 5. Primero se trata la extendibilidad a los dominios acotados. Después presentamos la ecuación de Helmholtz —la cual en el caso no homogéneo, por ejemplo, permite encontrar el patrón de radiación emitido por una antena lineal alimentada con un patrón de corriente sinusoidal, siempre que la función del lado derecho tenga un soporte finito— y la condición de radiación de Sommerfeld, la cual caracteriza completamente el comportamiento de las soluciones de aquella en el infinito y garantiza la unicidad para el problema de Dirichlet exterior. Basados en esta condición presentamos las condiciones de radiación para los operadores  $D_{\pm\nu}$  y finalmente, para las ecuaciones de Maxwell, las condiciones de radiación de Silver-Müller. Tales condiciones son reformuladas cuaterniónicamente y esto permite resolver el problema de extendibilidad al dominio exterior para las ecuaciones de Maxwell.

En el Capítulo 6 iniciamos presentando las representaciones integrales en los dominios acotados para el operador de Dirac en forma cuaterniónica. Después de obtener la condición de radiación apropiada se presentan las representaciones integrales en el dominio no acotado, es decir, se estudia la extensión al dominio no acotado. Posteriormente la condición de radiación es llevada a los términos del operador de Dirac en su forma clásica y para este operador se presentan las representaciones integrales para los dominios acotado y no acotado.

Usando los resultados anteriores se estudia el modelo de bolsa del MIT y utilizando tal modelo se reformula cuaterniónicamente el modelo del efecto Casimir, mismo para

el que se encuentra la solución general y la condición de compatibilidad que garantiza la existencia de soluciones no triviales.

El Capítulo 7 incluye las conclusiones y recomendaciones de la presente tesis.

Las partes donde en esta tesis se presentan resultados nuevos son las Secciones 4.1, 4.3, 5.3, 5.5 y prácticamente en todo el Capítulo 6, mismos que fueron publicados en los artículos [12], [13], [14], [15], [16], [17], [44], [45] y [46]. Tales resultados se presentaron en el 3<sup>er</sup> Congreso de Proyectos de Investigación del IPN; en el 5<sup>o</sup> y 6<sup>o</sup> Congresos Nacionales y en el 3<sup>o</sup> Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas del IPN; en el Congreso IKM 2003, Sesión “*Quaternion algebra and analysis and their applications*”, Weimar, Alemania; en el Seminario “*Generalized Cauchy-Riemman structures, complex approximation, and surface properties of crystals*”, Będlewo, Polonia; en el Simposio “*The search for unity in physics*”, París, Francia; en la revista *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* y en la revista *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.

# Capítulo 2

## Elementos del análisis cuaterniónico y operador de Moisil-Theodoresco

### 2.1 Álgebra de cuaterniones complejos

A lo largo del presente trabajo se hará gran uso de elementos del conjunto de los cuaterniones complejos que aquí se denota como  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ . Un cuaternión complejo o biquaternión  $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  puede ser representado como una combinación lineal de sus componentes  $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$  y los elementos de la base ortonormal  $i_k$  de la siguiente manera

$$a = \sum_{k=0}^3 i_k a_k$$

donde  $i_0 := 1$  y  $\{i_k \mid k = 1, 2, 3\}$  son las unidades imaginarias cuaterniónicas, las cuales tienen las siguientes propiedades:

$$i_k^2 = -1, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3; \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1; \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2. \quad (2.1)$$

La unidad imaginaria del conjunto de números complejos  $\mathbb{C}$  es denotada por  $i$  y por definición conmuta con las unidades imaginarias cuaterniónicas

$$i \cdot i_k = i_k \cdot i, \quad k = \overline{0, 3}.$$

En algunos casos es útil representar a un cuaternión  $a$  como la suma de una parte escalar  $\text{Sc}(a) := a_0$  y una parte vectorial  $\text{Vec}(a) := \vec{a} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ . Si  $\text{Sc}(a) = 0$  entonces  $a = \vec{a}$  es llamado un cuaternión puramente vectorial. Note que las unidades imaginarias cuaterniónicas básicas  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  se pueden identificar con los vectores de coordenadas base en un espacio tridimensional. En este caso, se puede identificar un vector de  $\mathbb{C}^3$  con un cuaternión puramente vectorial con las mismas componentes.

Usando la representación previa se puede definir el producto de dos cuaterniones arbitrarios  $a$  y  $b$  como

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + a_0 \vec{b} + \vec{a} b_0 + [\vec{a} \times \vec{b}], \quad (2.2)$$

donde

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

y

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Se pueden definir dos operadores  $Z_{\mathbb{C}}$  y  $Z_{\mathbb{H}}$  para las diferentes conjugaciones en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ . Para  $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ , la conjugación compleja usual está definida por

$$Z_{\mathbb{C}}(a) := a^* = \text{Re } a - i \text{Im } a = \sum_{k=0}^3 \text{Re}(a_k) i_k - i \sum_{k=0}^3 \text{Im}(a_k) i_k$$

y la conjugación cuaterniónica de un cuaternión  $a = a_0 + \vec{a}$  por

$$Z_{\mathbb{H}}(a) := \bar{a} = a_0 - \vec{a}.$$

De (2.2) es fácil observar que

$$a \cdot \bar{a} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 =: |a|^2, \quad (2.3)$$

y obtener una propiedad importante de la conjugación cuaterniónica:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

Si  $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a$ , entonces

$$a \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot a = \sum_{k=0}^3 a_k^2 = |\operatorname{Re} a|^2 - |\operatorname{Im} a|^2 + 2i \langle \operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \rangle_{\mathbb{R}^4} \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

donde  $|\operatorname{Re} a|$ ,  $|\operatorname{Im} a|$  representan el módulo usual de un cuaternión real (o la norma euclidiana de un vector tetradimensional);  $\langle \operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \rangle_{\mathbb{R}^4}$  el producto escalar euclidiano de dos vectores tetradimensionales. Note que  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ .

Ya que el módulo introducido en (2.3) en general no da información acerca de los valores absolutos de las componentes de un cuaternión complejo cuando éste es un divisor de cero, se usa frecuentemente otro tipo de módulo

$$|a|_c := \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}, \quad (2.5)$$

donde  $|a_k|^2 = a_k a_k^*$  y donde “\*” denota la conjugación compleja. El módulo en (2.5) puede ser expresado también de las siguientes formas

$$|a|_c^2 = |\operatorname{Re} a|^2 + |\operatorname{Im} a|^2 = \operatorname{Sc}(a \cdot \bar{a}^*) = \operatorname{Sc}(\bar{a}^* \cdot a).$$

Por otra parte, si el producto de dos elementos  $a$  y  $b$  es igual a cero, pero ni  $a$  ni  $b$  son cero, entonces  $a$  y  $b$  son llamados *divisores de cero*. Denotemos el conjunto de divisores de cero en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  por  $\mathfrak{S}$ :

$$\mathfrak{S} := \{a \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) \mid a \neq 0; \exists b \neq 0 : a \cdot b = 0\}.$$

Si  $a \in \mathfrak{S}$  entonces  $a^{-1}$  no existe; los divisores de cero no son invertibles. El siguiente lema da una descripción más detallada del conjunto  $\mathfrak{S}$ .

**Lema 1 ([51])** (*Estructura del conjunto de divisores de cero*) Sea  $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  y  $a \neq 0$ .

Las siguientes aseveraciones son equivalentes:

1.  $a \in \mathfrak{S}$ .
2.  $a \cdot \bar{a} = 0$ .
3.  $a_0^2 = \vec{a}^2$ .
4.  $a^2 = 2a_0a = 2\vec{a}a$ .

Si  $a \in \mathfrak{S}$  y  $a_0 \neq 0$  entonces, de acuerdo al punto 4 del lema anterior, el cuaternión complejo  $c := \frac{1}{2a_0}a$  es idempotente (proyector), esto es  $c^2 = c$ .

Se denotará mediante  $M^\lambda$  al operador de multiplicación por un cuaternión  $\lambda$  por la derecha  $M^\lambda[f] := f\lambda$ ; por  ${}^\lambda M$  al operador de multiplicación por la izquierda  ${}^\lambda M[f] := \lambda f$  y por  ${}^\lambda M^\eta$  al operador de multiplicación simultánea por  $\lambda$  por la izquierda y por  $\eta$  por la derecha  ${}^\lambda M^\eta[f] := \lambda f \eta$ ,  $\lambda, \eta \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ .

## 2.2 Operador de Moisil-Theodoresco

Este operador también es conocido con el nombre de operador de Dirac cuando en vez de cuaterniones se usa el álgebra de Clifford equivalente, pero aquí se llamará operador de Dirac a un operador que se introducirá más adelante. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ . El operador cuaterniónico de Moisil-Theodoresco (considerado por primera vez en [61], [62]) se define como

$$Df := \sum_{k=1}^3 i_k \partial_k f$$

donde  $\partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$ . Consideremos la acción del operador  $D$  sobre la función bicuaterniónica  $f$  en una forma más explícita:

$$\begin{aligned} Df &= (i_1\partial_1 + i_2\partial_2 + i_3\partial_3)(f_0 + f_1i_1 + f_2i_2 + f_3i_3) = \\ &= (i_1\partial_1f_0 + i_2\partial_2f_0 + i_3\partial_3f_0) - (\partial_1f_1 + \partial_2f_2 + \partial_3f_3) + \\ &+ ((\partial_2f_3 - \partial_3f_2)i_1 + (\partial_3f_1 - \partial_1f_3)i_2 + (\partial_1f_2 - \partial_2f_1)i_3). \end{aligned}$$

La primera expresión obtenida es precisamente el gradiente de la función  $f_0$ :

$$\text{grad } f_0 = (i_1\partial_1 + i_2\partial_2 + i_3\partial_3)f_0.$$

Los segundos paréntesis contienen la divergencia del vector  $\vec{f}$ :

$$\text{div } \vec{f} = \partial_1f_1 + \partial_2f_2 + \partial_3f_3.$$

Finalmente, los terceros paréntesis representan el rotacional de  $\vec{f}$ :

$$\text{rot } \vec{f} = (\partial_2f_3 - \partial_3f_2)i_1 + (\partial_3f_1 - \partial_1f_3)i_2 + (\partial_1f_2 - \partial_2f_1)i_3.$$

Consecuentemente,

$$Df = -\text{div } \vec{f} + \text{grad } f_0 + \text{rot } \vec{f}. \quad (2.6)$$

Se ve, por tanto, que el resultado de la acción del operador de Moisil-Theodoresco  $D$  sobre la función  $f$  es un cuaternión complejo constituido por los tres principales operadores diferenciales del cálculo vectorial. Si éstos son considerados por separado, entonces muchas características importantes se pierden, pero su mezcla en  $D$  nos permite obtener generalizaciones apropiadas para la mayoría de los hechos básicos del análisis complejo.

De (2.6) puede verse que si la ecuación

$$Df = 0 \quad (2.7)$$

es separada en sus partes escalar y vectorial, entonces es equivalente al sistema

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{grad} f_0 + \operatorname{rot} \vec{f} = 0, \quad (2.9)$$

llamado sistema de Moisil-Theodoresco. El estudio de este sistema marcó el punto inicial del desarrollo de la teoría de funciones hipercomplejas y ha sido tratado en cientos de trabajos. Tal interés se debió un poco a las aplicaciones físicas de (2.8) y (2.9), pero en su mayor parte debido al hecho de que el sistema de Moisil-Theodoresco reveló tener propiedades tan importantes que fue considerado como la generalización más natural del sistema de Cauchy-Riemann en el espacio de tres dimensiones. Este sistema aclaró qué son el teorema integral de Cauchy, el teorema de Morera, la fórmula integral de Cauchy, las fórmulas de Plemelj-Sokhotski y muchas otras en tres dimensiones.

Una propiedad importante de  $D$  se obtiene de (2.3)

$$D^2 = -\Delta, \quad (2.10)$$

donde  $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$  es el operador de Laplace tridimensional. Esta propiedad garantiza que toda componente de una función  $f$  que satisface (2.7) es una función armónica.

Note que el operador de Moisil-Theodoresco fue introducido actuando por la izquierda. El operador equivalente que actúa por la derecha es denotado por  $D_r$ :

$$D_r f := \sum_{k=1}^3 \partial_k f i_k.$$

En forma vectorial,  $D_r$  puede ser representado como

$$D_r = -\operatorname{div} \vec{f} + \operatorname{grad} f_0 - \operatorname{rot} \vec{f}$$

y la teoría correspondiente puede ser desarrollada para  $D_r$  exactamente igual que para  $D$ .

### 2.2.1 Factorización del operador de Helmholtz

Si se agrega al operador de Moisil-Theodoresco un término adicional perturbándole, se puede considerar el siguiente operador

$$D_{\pm\nu} := D \pm \nu I$$

donde  $\nu$  es un número complejo e  $I$  es el operador identidad. Este operador fue estudiado por primera vez en [28] (para  $\nu$  real). Las soluciones puramente vectoriales de la ecuación  $D_{\pm\nu}f = 0$  se conocen como campos de Beltrami y son de gran importancia en la teoría de los campos electromagnéticos en medios quirales [53]. Con la ayuda del operador  $D_\nu$  es posible factorizar el operador de Helmholtz

$$\Delta + \nu^2 = -(D + \nu)(D - \nu) = -D_\nu D_{-\nu}. \quad (2.11)$$

La igualdad (2.11) significa que cualquier función que satisface la ecuación

$$D_\nu f = 0 \quad (2.12)$$

ó

$$D_{-\nu} f = 0 \quad (2.13)$$

también satisface la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + \nu^2)f = 0.$$

En otras palabras, cada componente de la función cuaterniónica  $f$  que satisface (2.12) ó (2.13) es también una solución de la ecuación de Helmholtz.

Otro importante corolario de (2.11) es la posibilidad de calcular las soluciones fundamentales de los operadores  $D_\nu$  y  $D_{-\nu}$ . Suponga que  $\theta_\nu$  es una solución fundamental del operador de Helmholtz, es decir, que satisface la ecuación

$$(\Delta + \nu^2)\theta_\nu = \delta,$$

donde  $\delta$  es la función delta de Dirac. Entonces, usando (2.11) se obtienen las funciones

$$\mathcal{K}_{\pm\nu} := -(D \mp \nu)\theta_\nu, \quad (2.14)$$

las cuales son respectivamente las soluciones fundamentales de  $D_{\pm\nu}$ , esto es

$$D_{\pm\nu}\mathcal{K}_{\pm\nu} = \delta.$$

Asumamos que  $\text{Im } \nu \geq 0$ . Tomando en cuenta esta condición, la solución fundamental del operador de Helmholtz se escoge como

$$\theta_\nu(x) = -\frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|}, \quad (2.15)$$

en cuyo caso (como se mostrará más adelante) satisface la condición de radiación de Sommerfeld en el infinito. El motivo por el que se elige en particular esta forma para la solución tiene un claro significado físico: representa una onda alejándose (decreciendo en el infinito) generada por una fuente puntual en el origen. Otra posible elección habría sido la distribución  $-e^{-i\nu|x|}/(4\pi|x|)$ , pero si  $\text{Im } \nu > 0$  ésta crece exponencialmente en el infinito y por esta razón no sirve para describir campos producidos por fuentes en una parte finita del espacio, además que las ondas descritas serían entrantes. Como se verá después, el problema es distinguir en el infinito el comportamiento de estas dos soluciones fundamentales en el caso en que  $\text{Im } \nu = 0$ . Esta dificultad se supera con la ayuda de la llamada condición de radiación, cuya discusión se hará después.

Sustituyendo (2.15) en la igualdad (2.14) y, considerando que el operador  $D$  se aplica a una función escalar, usando (2.6) obtenemos

$$\mathcal{K}_{\pm\nu}(x) = -\text{grad } \theta_\nu(x) \pm \nu\theta_\nu(x) = \left( \pm\nu + \frac{x}{|x|^2} - i\nu\frac{x}{|x|} \right) \theta_\nu(x),$$

donde  $x := \sum_{k=1}^3 i_k x_k$ . Estas funciones fueron obtenidas en [36], ver también [51, Sección 3].

## 2.3 Elementos del análisis cuaterniónico

Necesitamos probar algunos hechos importantes relacionados con las representaciones integrales de las soluciones de (2.12). Iniciemos con el siguiente teorema auxiliar que no es sino una versión cuaterniónica de la fórmula de Stokes. Asumamos que  $\Omega$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^3$  con una frontera seccionalmente suave  $\Gamma := \partial\Omega$  como el mostrado en la Figura 2.1.

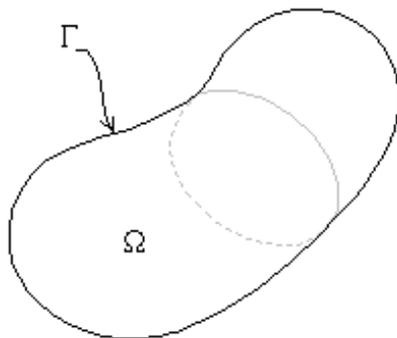


Figura 2.1: Dominio acotado y su frontera.

**Teorema 2** (*Fórmula de Stokes cuaterniónica*) *Pertenezcan  $f$  y  $g$  a  $C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ . Entonces*

$$\int_{\Omega} ((D_r f(y)) \cdot g(y) + f(y) \cdot (Dg(y))) dy = \int_{\Gamma} f(y) \cdot \vec{n}(y) \cdot g(y) d\Gamma_y, \quad (2.16)$$

donde  $\vec{n}(y)$  es la representación cuaterniónica del vector normal unitario hacia el exterior de la superficie  $\Gamma$ :  $\vec{n}(y) := \sum_{k=1}^3 i_k n_k(y)$ .

La prueba de este hecho puede ser encontrada en [51, Capítulo 4] ó [31, p. 86].

En adelante, a menos que se indique otra cosa, se asume que  $\Gamma$  es una superficie de Liapunov. Prácticamente, todos los resultados presentados aquí para fronteras de

Liapunov pueden ser generalizados para el caso de fronteras de Lipschitz (ver, v.g., [32] y la bibliografía ahí mencionada) lo que implica algunas complicaciones innecesarias para explicar las ideas principales de este trabajo.

Ahora se usará el Teorema 2 para probar una generalización de la fórmula de Borel-Pompeiu. Introduzcamos los principales operadores integrales los cuales, debido a sus propiedades, son muy similares a sus famosos prototipos del análisis complejo el operador  $T$ , el operador integral de Cauchy y el operador de integración singular y que garantizan una solución eficiente de diferentes tipos de problemas con valores de frontera:

$$T_{\pm\nu}[f](x) := \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\pm\nu}(x-y)f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (2.17)$$

$$K_{\pm\nu}[f](x) := - \int_{\Gamma} \mathcal{K}_{\pm\nu}(x-y)\vec{n}(y)f(y)d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (2.18)$$

$$S_{\pm\nu}[f](x) := -2 \int_{\Gamma} \mathcal{K}_{\pm\nu}(x-y)\vec{n}(y)f(y)d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma. \quad (2.19)$$

Note que la integral en (2.19) se considera en el sentido del valor principal de Cauchy. Los operadores  $\mathcal{K}_{\pm\nu}$  están definidos en (2.14). Los operadores  $T_{\pm\nu}$ ,  $K_{\pm\nu}$  y  $S_{\pm\nu}$  son operadores cuaterniónicos ya que todos los productos en ellos son cuaterniónicos.

Como es costumbre, el operador de integración singular genera dos importantes operadores

$$P_{\nu} := \frac{1}{2}(I + S_{\nu}) \quad \text{y} \quad Q_{\nu} := \frac{1}{2}(I - S_{\nu}). \quad (2.20)$$

En adelante, asumimos que  $\Omega$  es un dominio abierto acotado en  $\mathbb{R}^3$  con frontera de Liapunov  $\Gamma := \partial\Omega$ .

**Teorema 3** (*Fórmula cuaterniónica de Borel-Pompeiu*) Sea  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ . Entonces

$$K_{\nu}[f](x) + T_{\nu}D_{\nu}[f](x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

El Teorema 3 inmediatamente implica el siguiente análogo de la fórmula integral de Cauchy.

**Teorema 4** (*Fórmula integral de Cauchy cuaterniónica para el dominio interior*) [50]  
Sea  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  y  $f \in \ker D_\nu(\Omega)$ . Entonces

$$f(x) = K_\nu[f](x), \quad \forall x \in \Omega \tag{2.21}$$

(recuerde que una función  $f$  pertenece al kernel del un operador  $A$  en algún dominio  $\Omega$  si y sólo si  $Af = 0, \forall x \in \Omega$ ).

# Capítulo 3

## Sobre las ecuaciones de Maxwell y de Dirac

### 3.1 Ecuaciones de Maxwell

Toda la enorme diversidad de fenómenos electromagnéticos se reduce a cuatro ecuaciones de Maxwell, las cuales son axiomas de la teoría electromagnética:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{E}$  es la intensidad del campo eléctrico en Volt/m,  $\mathbf{H}$  es la intensidad del campo magnético en Amper/m,  $\mathbf{D}$  es el vector de inducción eléctrica en Coulomb/m<sup>2</sup>,  $\mathbf{B}$  es el vector de inducción magnética en Tesla=Volt · s/m<sup>2</sup>,  $\rho$  es la densidad de carga volumétrica en Coulomb/m<sup>3</sup> y  $\mathbf{j}$  es la densidad de corriente en Amper/m<sup>2</sup>.

Las ecuaciones de Maxwell son consideradas junto con las llamadas ecuaciones materiales, las cuales describen las relaciones entre los vectores de inducción y los

vectores de campo. En general pueden ser escritas como sigue

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

La interpretación más simple de estas relaciones consiste en que, por ejemplo, la inducción  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, t)$  está completamente determinada por la intensidad  $\mathbf{E}(x, t)$  en el mismo punto  $x$  y en el mismo instante  $t$  ( $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  son consideradas en forma similar). En otras palabras, los fenómenos electromagnéticos en el medio son considerados locales y no inerciales. A pesar de que tal interpretación es bastante idealizada, es aplicable en muchos casos prácticos. Entonces

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \tag{3.5}$$

y

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \tag{3.6}$$

donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad del espacio libre medida en Farad/m y  $\mu_0$  es la permeabilidad del espacio libre medida en Henry/m; las cantidades adimensionales  $\varepsilon_r$  y  $\mu_r$  son llamadas respectivamente permitividad y permeabilidad relativas. Los coeficientes  $\varepsilon := \varepsilon_0 \varepsilon_r$  y  $\mu := \mu_0 \mu_r$  son respectivamente la permitividad y la permeabilidad absolutas.

Las ecuaciones materiales (3.5) y (3.6) describen una rica variedad de fenómenos físicos que representan la respuesta del medio a la aplicación del campo electromagnético. Se asumirá que las características electromagnéticas del medio  $\varepsilon$  y  $\mu$  no cambian en el tiempo. Si además tienen los mismos valores en todos los puntos de un volumen  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  entonces el medio que llena el volumen es llamado homogéneo y en el caso opuesto, cuando  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  y/o  $\mu = \mu(x)$ , no homogéneo. Supondremos también que los pares de vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  son colineales. En este caso el medio es llamado isotrópico (en caso contrario, anisotrópico).

### 3.1.1 Ecuaciones de Maxwell armónicas en tiempo

Usando la transformada de Fourier cualquier campo electromagnético puede ser representado como una superposición infinita de campos armónicos (o monocromáticos) los cuales, normalmente, son el objetivo principal del estudio en radioelectrónica, teoría de propagación de ondas y muchas otras ramas de la Física y la ingeniería. Un campo electromagnético armónico en tiempo tiene la siguiente forma

$$\mathbf{E}(x, t) = \text{Re}(\vec{E}(x)e^{-i\omega t}) \quad (3.7)$$

y

$$\mathbf{H}(x, t) = \text{Re}(\vec{H}(x)e^{-i\omega t}), \quad (3.8)$$

donde los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  dependen solamente de las variables espaciales  $x = (x_1, x_2, x_3)$  y toda dependencia del tiempo se concentra en el factor  $e^{-i\omega t}$ .  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son vectores complejos y son llamados amplitudes complejas del campo electromagnético;  $\omega$  es la frecuencia de las oscilaciones.

Substituyendo (3.7) y (3.8) en las ecuaciones de Maxwell (3.1)-(3.4) se obtienen las ecuaciones para las amplitudes complejas  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  ( $\rho$  y  $\mathbf{j}$  —que caracterizan las fuentes— se asumen también como armónicas en tiempo:  $\rho(x, t) = \text{Re}(\rho(x)e^{-i\omega t})$ ,  $\mathbf{j}(x, t) = \text{Re}(\vec{j}(x)e^{-i\omega t})$ ):

$$\text{rot } \vec{H}(x) = -i\omega\epsilon\vec{E}(x) + \vec{j}(x), \quad (3.9)$$

$$\text{rot } \vec{E}(x) = i\omega\mu\vec{H}(x), \quad (3.10)$$

$$\text{div } \vec{E}(x) = \frac{\rho}{\epsilon}(x), \quad (3.11)$$

$$\text{div } \vec{H}(x) = 0. \quad (3.12)$$

Aplicando la divergencia a (3.9) y usando (3.11) encontramos la relación entre  $\rho$  y  $\vec{j}$ :

$$i\omega\rho - \text{div } \vec{j} = 0 \quad (3.13)$$

ecuación que es conocida con el nombre de *ecuación de continuidad*. En el resto de este trabajo se considerará que las fuentes están localizadas en un dominio finito del espacio.

### 3.1.2 Ecuaciones de Maxwell cuaterniónicas

Sea  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ . Dado que  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son puramente vectoriales, usando (2.6) se pueden reescribir las ecuaciones (3.9)-(3.12) como dos ecuaciones cuaterniónicas:

$$D\vec{E} = \text{rot } \vec{E} - \text{div } \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} - \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (3.14)$$

$$D\vec{H} = \text{rot } \vec{H} - \text{div } \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{j}. \quad (3.15)$$

Introduzcamos  $\nu := \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ , cantidad llamada *número de onda* y cuyo signo se escoge de tal forma que  $\text{Im } \nu \geq 0$ , y el siguiente par de funciones bicuaterniónicas puramente vectoriales [51]

$$\vec{\varphi} := -i\omega\varepsilon\vec{E} + \nu\vec{H} \quad (3.16)$$

y

$$\vec{\psi} := i\omega\varepsilon\vec{E} + \nu\vec{H}. \quad (3.17)$$

Aplicando el operador  $D$  a  $\vec{\varphi}$  y usando (3.14), (3.15) obtenemos:

$$\begin{aligned} D\vec{\varphi} &= -i\omega\varepsilon D\vec{E} + \nu D\vec{H} = \nu^2\vec{H} + i\omega\rho - i\omega\varepsilon\nu\vec{E} + \nu\vec{j} \\ &= \nu\vec{\varphi} + i\omega\rho + \nu\vec{j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\vec{\psi} &= i\omega\varepsilon D\vec{E} + \nu D\vec{H} = -\nu^2\vec{H} - i\omega\rho - i\omega\varepsilon\nu\vec{E} + \nu\vec{j} \\ &= -\nu\vec{\psi} - i\omega\rho + \nu\vec{j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto a partir de la ecuación anterior y usando la ecuación de continuidad (3.13), vemos que  $\vec{\varphi}$  satisface la ecuación

$$(D - \nu)\vec{\varphi} = \operatorname{div} \vec{j} + \nu \vec{j}. \quad (3.18)$$

Análogamente,  $\vec{\psi}$  satisface la ecuación

$$(D + \nu)\vec{\psi} = -\operatorname{div} \vec{j} + \nu \vec{j}. \quad (3.19)$$

Este par de ecuaciones (3.18) y (3.19) es equivalente al sistema de ecuaciones de Maxwell (3.9)-(3.12) y su ventaja sobre estas últimas es que las funciones no están mezcladas en cada una de las ecuaciones. A partir de las ecuaciones (3.16) y (3.17) podemos determinar la relación de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  con los vectores  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$ :

$$\vec{E} = \frac{1}{2i\omega\varepsilon} (\vec{\psi} - \vec{\varphi}) \quad (3.20)$$

y

$$\vec{H} = \frac{1}{2\nu} (\vec{\varphi} + \vec{\psi}). \quad (3.21)$$

Así, si dos funciones  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$  satisfacen (3.18), (3.19), entonces las funciones vectoriales (3.20), (3.21) satisfacen las ecuaciones de Maxwell sin necesidad de ninguna condición adicional.

El proceso de diagonalización de las ecuaciones (3.18) y (3.19) puede ser escrito de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \operatorname{rot} - \operatorname{div} & -i\omega\mu \\ i\omega\varepsilon & \operatorname{rot} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D & -i\omega\mu \\ i\omega\varepsilon & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \\ &= L_\nu^{-1} \begin{pmatrix} D - \nu & 0 \\ 0 & D + \nu \end{pmatrix} L_\nu \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$L_\nu := \begin{pmatrix} -i\omega\varepsilon & \nu \\ i\omega\varepsilon & \nu \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L_\nu^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/i\omega\varepsilon & 1/i\omega\varepsilon \\ 1/\nu & 1/\nu \end{pmatrix}.$$

Usando la fórmula de Borel–Pompeiu podemos reescribir (3.18) y (3.19) en la siguiente forma

$$\vec{\varphi} = T_{-\nu}(\operatorname{div} \vec{j} + \nu \vec{j}) + K_{-\nu} \vec{\varphi}, \quad (3.22)$$

$$\vec{\psi} = T_{\nu}(-\operatorname{div} \vec{j} + \nu \vec{j}) + K_{\nu} \vec{\psi}. \quad (3.23)$$

Reescribiendo (3.22), (3.23) para el campo electromagnético obtenemos:

$$-i\omega\varepsilon \vec{E} + \nu \vec{H} = T_{-\nu}(\operatorname{div} \vec{j} + \nu \vec{j}) + K_{-\nu}(-i\omega\varepsilon \vec{E} + \nu \vec{H}),$$

$$i\omega\varepsilon \vec{E} + \nu \vec{H} = T_{\nu}(-\operatorname{div} \vec{j} + \nu \vec{j}) + K_{\nu}(i\omega\varepsilon \vec{E} + \nu \vec{H}),$$

o, de forma equivalente (sumando y restando las ecuaciones anteriores):

$$\begin{aligned} \vec{E} = \frac{1}{2i\omega\varepsilon} & \left( i\omega\varepsilon(K_{\nu} + K_{-\nu})\vec{E} + \nu(K_{\nu} - K_{-\nu})\vec{H} - \right. \\ & \left. -(T_{\nu} + T_{-\nu}) \operatorname{div} \vec{j} + \nu(T_{\nu} - T_{-\nu}) \vec{j} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \vec{H} = \frac{1}{2\nu} & \left( \nu(K_{\nu} + K_{-\nu})\vec{H} + i\omega\varepsilon(K_{\nu} - K_{-\nu})\vec{E} - \right. \\ & \left. -(T_{\nu} - T_{-\nu}) \operatorname{div} \vec{j} + \nu(T_{\nu} + T_{-\nu}) \vec{j} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para comparar las últimas dos igualdades con algunas fórmulas conocidas de la teoría electromagnética (3.24) y (3.25) deben ser reescritas en términos vectoriales. Recordemos que –de (2.18) y teniendo en cuenta que los productos son cuaterniónicos–

$$\begin{aligned} K_{\pm\nu} \vec{f}(x) = \int_{\Gamma} & \{ \pm\nu\theta_{\nu}(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{f}(y) \rangle - \langle [\operatorname{grad}_x \theta_{\nu}(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{f}(y) \rangle \mp \\ & \mp \nu\theta_{\nu}(x-y) [\vec{n}(y) \times \vec{f}(y)] - \langle \operatorname{grad}_x \theta_{\nu}(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{f}(y) + \\ & + [[\operatorname{grad}_x \theta_{\nu}(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{f}(y)] \} d\Gamma_y. \end{aligned}$$

De esta forma explícita de la integral cuaterniónica obtenemos las siguientes combinaciones necesarias:

$$\begin{aligned}
(K_\nu + K_{-\nu})\vec{f}(x) &= 2 \int_{\Gamma} \{ -\langle [\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{f}(y) \rangle - \\
&\quad - \langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{f}(y) + \\
&\quad + [[\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{f}(y)] \} d\Gamma_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(K_\nu - K_{-\nu})\vec{f}(x) &= 2\nu \int_{\Gamma} \{ \theta_\nu(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{f}(y) \rangle - \\
&\quad - \theta_\nu(x-y) [\vec{n}(y) \times \vec{f}(y)] \} d\Gamma_y.
\end{aligned}$$

Razonando de forma similar obtenemos representaciones explícitas para las combinaciones necesarias de los operadores  $T_\nu$  y  $T_{-\nu}$ :

$$(T_\nu + T_{-\nu})f_0(x) = -2 \int_{\Omega} \text{grad}_x \theta_\nu(x-y) f_0(y) dy,$$

$$(T_\nu - T_{-\nu})f_0(x) = 2\nu \int_{\Omega} \theta_\nu(x-y) f_0(y) dy,$$

$$(T_\nu + T_{-\nu})\vec{f}(x) = 2 \int_{\Omega} \{ \langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), \vec{f}(y) \rangle - [\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{f}(y)] \} dy,$$

$$(T_\nu - T_{-\nu})\vec{f}(x) = 2\nu \int_{\Omega} \theta_\nu(x-y) \vec{f}(y) dy.$$

Usando todas estas combinaciones obtenemos las siguientes representaciones inte-

grales para el campo electromagnético:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x) &= \int_{\Gamma} \{-\langle [\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{E}(y) \rangle - \\
&\quad -\langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{E}(y) + [[\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{E}(y)]\} d\Gamma_y + \\
&\quad + i\omega\mu \int_{\Gamma} \{-\theta_\nu(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{H}(y) \rangle + \theta_\nu(x-y) [\vec{n}(y) \times \vec{H}(y)]\} d\Gamma_y + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{i\omega\varepsilon} \text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \text{div } \vec{j}(y) - i\omega\mu\theta_\nu(x-y) \vec{j}(y) \right\} dy, \\
\vec{H}(x) &= \int_{\Gamma} \{-\langle [\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{H}(y) \rangle - \\
&\quad -\langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{H}(y) + [[\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{H}(y)]\} d\Gamma_y - \\
&\quad - i\omega\varepsilon \int_{\Gamma} \{-\theta_\nu(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{E}(y) \rangle + \theta_\nu(x-y) [\vec{n}(y) \times \vec{E}(y)]\} d\Gamma_y - \\
&\quad - \int_{\Omega} \left\{ \theta_\nu(x-y) \text{div } \vec{j}(y) - \langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), \vec{j}(y) \rangle + [\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{j}(y)] \right\} dy.
\end{aligned}$$

Separando las partes escalar y vectorial en las últimas dos igualdades, obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\int_{\Gamma} \left\{ \langle [\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{E}(y) \rangle + i\omega\mu\theta_\nu(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{H}(y) \rangle \right\} d\Gamma_y = 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} \left\{ \langle [\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)], \vec{H}(y) \rangle - i\omega\varepsilon\theta_\nu(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{E}(y) \rangle \right\} d\Gamma_y = \\
&\quad = - \int_{\Omega} \left\{ \theta_\nu(x-y) \text{div } \vec{j}(y) - \langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), \vec{j}(y) \rangle \right\} dy, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x) &= \int_{\Gamma} \{ -\langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{E}(y) + \\
&\quad + [[\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{E}(y)] + i\omega\mu\theta_\nu(x-y)[\vec{n}(y) \times \vec{H}(y)] \} d\Gamma_y + \\
&\quad + \int_{\Omega} \{ \frac{1}{i\omega\varepsilon} \text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \text{div} \vec{j}(y) - i\omega\mu\theta_\nu(x-y) \vec{j}(y) \} dy,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}(x) &= \int_{\Gamma} \{ -\langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), \vec{n}(y) \rangle \vec{H}(y) + [[\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{n}(y)] \times \vec{H}(y)] - \\
&\quad - i\omega\varepsilon\theta_\nu(x-y)[\vec{n}(y) \times \vec{E}(y)] \} d\Gamma_y - \int_{\Omega} [\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) \times \vec{j}(y)] dy.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Las últimas dos igualdades representan uno de los hechos teóricos centrales de la electrodinámica moderna, las fórmulas de Stratton–Chu, las cuales tienen muchas aplicaciones útiles en diferentes tipos de problemas con valores de frontera para las ecuaciones de Maxwell (ver, e.g., [20], [21], [76]).

Para entender qué son las igualdades integrales (3.26) y (3.27), recordemos una identidad vectorial auxiliar simple (ver [36] y también [51, p. 120])

$$\int_{\Gamma} \{ \langle \text{grad}_x \theta_\nu(x-y), [\vec{n}(y) \times \vec{f}(y)] \rangle + \theta_\nu(x-y) \langle \vec{n}(y), \text{rot} \vec{f}(y) \rangle \} d\Gamma_y = 0, \tag{3.30}$$

$x \in \Omega$ , la cual es válida para cualquier  $\vec{f} \in C^1(\overline{\Omega})$  y que en general no tiene sentido cuando para  $x \in \Gamma$ . Entonces para obtener (3.26) de (3.30) debemos tomar  $\vec{E}$  como  $\vec{f}$  y usar una de las ecuaciones de Maxwell:  $\text{rot} \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}$ . Para obtener (3.27) es necesario usar la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \{ \theta_\nu(x-y) \text{div}_y \vec{j}(y) + \langle \text{grad}_y \theta_\nu(x-y), \vec{j}(y) \rangle \} dy = \\
&\quad = \int_{\Omega} \text{div}_y [\theta_\nu(x-y) \vec{j}(y)] dy = \int_{\Gamma} \theta_\nu(x-y) \langle \vec{n}(y), \vec{j}(y) \rangle d\Gamma_y,
\end{aligned}$$

donde se utilizó el teorema de Gauss así como la siguiente igualdad:

$$\text{grad}_x \theta_\nu(x - y) = -\text{grad}_y \theta_\nu(x - y).$$

Así, (3.27) toma la forma

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \{ \langle [\text{grad}_x \theta_\nu(x - y) \times, \vec{n}(y)], \vec{H}(y) \rangle - i\omega\varepsilon\theta_\nu(x - y) \langle \vec{n}(y), \vec{E}(y) \rangle \} d\Gamma_y = \\ = - \int_{\Gamma} \theta_\nu(x - y) \langle \vec{n}(y), \vec{j}(y) \rangle d\Gamma_y, \end{aligned}$$

la cual equivale a (3.30) si tomamos  $\vec{H}$  como  $\vec{j}$  y usamos la ecuación de Maxwell:

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{j}.$$

## 3.2 Ecuación de Dirac

Para que una ecuación de onda satisfaga el requerimiento especial relativista de la covarianza de Lorentz, las derivadas respecto a espacio y tiempo deben aparecer con el mismo orden. La ecuación de Klein-Gordon —de la que se hablará en el siguiente capítulo— ilustra que una expresión que satisface esta condición pero que es no lineal en sus derivadas de espacio y tiempo da lugar a resultados anómalos. Dirac se propuso encontrar una ecuación que fuera de primer orden en derivadas de espacio y tiempo. El resultado de sus esfuerzos, la ecuación de Dirac, es difícil de motivar y bastante más complicada que su análogo no relativista. Sin embargo, la ecuación de onda de Dirac para una sola partícula satisface todos los requerimientos de la relatividad especial y la mecánica cuántica, y es capaz de predecir las propiedades de sistemas de una partícula con una precisión notable. No obstante, la existencia de soluciones con

energía negativa preocupaba a Dirac. Él sentía que era un “gran desperfecto” en su teoría que aparecieran estas soluciones aparentemente no físicas. En los años siguientes, sin embargo, muchas investigaciones experimentales, las más notables aquellas de Carl Anderson, proporcionaron evidencia de la existencia de positrones, partículas cuya masa era igual a la del electrón pero con una carga positiva. La confirmación experimental de la existencia de estas soluciones de energía negativa fue un gran triunfo para la teoría de Dirac.

La ecuación de Dirac clásica la cual describe una partícula libre de spin 1/2 (e.g., el electrón, protón, neutrón, otras partículas como la xi, sigma, lambda o los neutrinos entre otras) es

$$\mathbb{D}[\Phi] := \left( \gamma_0 \partial_t - \sum_{k=1}^3 \gamma_k \partial_k + im \right) [\Phi] = 0, \quad (3.31)$$

donde  $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\Phi := \Phi(t, x_1, x_2, x_3)$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ ,  $m \in \mathbb{R}$  es la masa de la partícula (la velocidad de la luz y la constante de Planck dividida por  $2\pi$  se asumen con valor unitario  $c = \hbar = 1$ ) y las matrices  $\gamma_k$  en la forma estándar ([8], [74]) de Dirac-Pauli son

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que

1.  $\gamma_0^2 = \gamma_5^2 = E_4$ , la matriz identidad;
2.  $\gamma_k^2 = -E_4$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;
3.  $\gamma_j\gamma_k = -\gamma_k\gamma_j$ ,  $j, k = 0, 1, 2, 3, 5$ ,  $j \neq k$ .

### 3.2.1 Representación matricial de los cuaterniones

Con objeto de hacer compatibles los cuaterniones con el operador de Dirac, el cual está basado en matrices, introduciremos una representación matricial de los cuaterniones, misma que usaremos para generar un par de transformaciones que nos ayudarán a transportar los elementos del operador de Dirac a una forma cuaterniónica y viceversa.

Con ayuda de las matrices  $\gamma$  es posible definir una base [51, p.26]

$$\widehat{i}_0 := E_4; \quad \widehat{i}_1 := \gamma_3\gamma_2; \quad \widehat{i}_2 := \gamma_1\gamma_3; \quad \widehat{i}_3 := \gamma_1\gamma_2; \quad \widehat{i} := \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Cálculos sencillos muestran que el conjunto  $\{\widehat{i}_0, \widehat{i}_1, \widehat{i}_2, \widehat{i}_3, \widehat{i}\}$  de matrices complejas  $4 \times 4$  tiene las mismas reglas de multiplicación que el conjunto  $\{i_0, i_1, i_2, i_3, i\}$ .

Denotemos por  $\mathfrak{D}$  al álgebra (compleja) generada por  $\{\widehat{i}_0, \widehat{i}_1, \widehat{i}_2, \widehat{i}_3, \widehat{i}\}$ , y definamos el mapeo

$$\kappa : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{D}$$

por su acción en los generadores:

$$\kappa(i_k) =: \widehat{i}_k, \quad \kappa(i) =: \widehat{i}.$$

Está claro que  $\kappa$  es un isomorfismo de las álgebras complejas; por tanto  $\mathfrak{D}$  es una realización matricial de  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ . Si  $a = \sum_{k=0}^3 a_k \cdot i_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ ,  $a_k = \tilde{a}_k + \tilde{\tilde{a}}_k \cdot i$ ,  $\{\tilde{a}_k, \tilde{\tilde{a}}_k\} \subset \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} \kappa(a) &= \tilde{a}_0 \hat{i}_0 + \tilde{a}_1 \hat{i}_1 + \tilde{a}_2 \hat{i}_2 + \tilde{a}_3 \hat{i}_3 + \\ &\quad + i \left( \tilde{\tilde{a}}_0 \hat{i}_0 + \tilde{\tilde{a}}_1 \hat{i}_1 + \tilde{\tilde{a}}_2 \hat{i}_2 + \tilde{\tilde{a}}_3 \hat{i}_3 \right), \end{aligned}$$

o, en forma explícita,

$$\kappa(a) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 - i\tilde{\tilde{a}}_3; & i\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2; & i\tilde{a}_0 + \tilde{a}_3; & -\tilde{a}_1 + i\tilde{\tilde{a}}_2 \\ i\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2; & \tilde{a}_0 + i\tilde{\tilde{a}}_3; & -\tilde{a}_1 - i\tilde{\tilde{a}}_2; & i\tilde{a}_0 - \tilde{a}_3 \\ i\tilde{\tilde{a}}_0 + \tilde{a}_3; & -\tilde{a}_1 + i\tilde{\tilde{a}}_2; & \tilde{a}_0 - i\tilde{\tilde{a}}_3; & i\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \\ -\tilde{a}_1 - i\tilde{\tilde{a}}_2; & i\tilde{a}_0 - \tilde{a}_3; & i\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2; & \tilde{a}_0 + i\tilde{\tilde{a}}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Esto significa que una matriz arbitraria  $A \in \mathfrak{D}$  tiene la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -c_1^* & c_2 & c_3^* \\ c_1 & c_0^* & c_3 & -c_2^* \\ c_2 & c_3^* & c_0 & -c_1^* \\ c_3 & -c_2^* & c_1 & c_0^* \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

donde  $c_0, c_1, c_2, c_3$  son números complejos arbitrarios y “\*” denota la conjugación compleja usual.

El mapeo  $\kappa : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{D}$  da un isomorfismo del álgebra  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  a la subálgebra del álgebra de Dirac.

Ahora, para cualquier  $A \in \mathfrak{D}$ , es decir, para cualquier matriz  $A$  de la forma (3.33) definimos una matriz columna  $\chi(A)$  según la regla:

$$\chi(A) := A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto tenemos un mapeo

$$\chi : A \in \mathfrak{D} \longmapsto \beta := \chi(A) := \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 - i\tilde{a}_3 \\ i\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \\ i\tilde{a}_0 + \tilde{a}_3 \\ -\tilde{a}_1 - i\tilde{a}_2 \end{pmatrix}$$

el cual asigna a cualquier matriz  $A \in \mathfrak{D}$  su primera columna.

El mapeo  $\chi$  es invertible ya que con una columna de números complejos uno puede reconstruir de manera única una matriz de la forma (3.33):

$$A := \chi^{-1}(\beta) = \chi^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix},$$

donde los números reales  $\tilde{a}_k, \tilde{\tilde{a}}_k, k \in \mathbb{N}_3^0$  en (3.32) están definidos como sigue:

$$\tilde{a}_0 = \operatorname{Re} \beta_0, \quad \tilde{a}_1 = \operatorname{Im} \beta_1, \quad \tilde{a}_2 = -\operatorname{Re} \beta_1, \quad \tilde{a}_3 = -\operatorname{Im} \beta_0, \quad (3.34)$$

$$\tilde{\tilde{a}}_0 = \operatorname{Im} \beta_2, \quad \tilde{\tilde{a}}_1 = -\operatorname{Re} \beta_3, \quad \tilde{\tilde{a}}_2 = -\operatorname{Im} \beta_3, \quad \tilde{\tilde{a}}_3 = \operatorname{Re} \beta_2.$$

En adelante adoptemos la siguiente convención: para cualquier dominio  $\Xi \subset \mathbb{R}^4$  denotaremos por  $\tilde{\Xi}$  a su imagen bajo la reflexión  $x_3 \longmapsto -x_3$ , y para cualquier  $\Phi$  definida en  $\Xi$  la función  $\tilde{\Phi}(t, x_1, x_2, x_3) := \Phi(t, x_1, x_2, -x_3)$ .

Ahora introduzcamos un mapeo [51]  $\mathcal{H}$  definido de la forma siguiente: si  $\Phi : \tilde{\Xi} \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  entonces

$$F := \mathcal{H}[\Phi] := \kappa^{-1} \chi^{-1} \left[ \tilde{\Phi} \right] : \Xi \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C}).$$

En forma explícita,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Phi] \quad : \quad &= (\operatorname{Re} \tilde{\Phi}_0 + i \operatorname{Im} \tilde{\Phi}_2) i_0 + (\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_1 - i \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_3) i_1 - \\ & - (\operatorname{Re} \tilde{\Phi}_1 + i \operatorname{Im} \tilde{\Phi}_3) i_2 - (\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_0 - i \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_2) i_3. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{-1}[F] \quad = \quad & \left( \operatorname{Re} \tilde{F}_0 - i \operatorname{Re} \tilde{F}_3, -\operatorname{Re} \tilde{F}_2 + i \operatorname{Re} \tilde{F}_1, \right. \\ & \left. \operatorname{Im} \tilde{F}_3 + i \operatorname{Im} \tilde{F}_0, -\operatorname{Im} \tilde{F}_1 - i \operatorname{Im} \tilde{F}_2 \right)^T. \end{aligned} \tag{3.36}$$

El siguiente lema nos da algunas simples pero importantes propiedades aritméticas de  $\mathcal{H}$ .

**Lema 5** [51, Sec. 12] Sea  $\Phi : \tilde{\Xi} \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ . Entonces

1.  $\mathcal{H}[\gamma_0 \Phi] = (\mathcal{H}[\Phi])^*$ ,
2.  $\mathcal{H}[\gamma_0 \gamma_1 \Phi] = ii_1 \mathcal{H}[\Phi]$ ,
3.  $\mathcal{H}[\gamma_0 \gamma_2 \Phi] = ii_2 \mathcal{H}[\Phi]$ ,
4.  $\mathcal{H}[\gamma_0 \gamma_3 \Phi] = -ii_3 \mathcal{H}[\Phi]$ ,
5.  $\mathcal{H}[i\Phi] = -\mathcal{H}[\Phi] i_3$
6.  $\mathcal{H}[-i\gamma_5 \Phi] = i\mathcal{H}[\Phi]$ .

Aquí puede verse en la identidad 4 la razón de haber elegido la reflexión de  $x_3$ .

**Prueba.**

1. Usando (3.35) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\gamma_0\Phi] &= \mathcal{H}\left[\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ -\Phi_2 \\ -\Phi_3 \end{pmatrix}\right] = \\ &= (\operatorname{Re} \tilde{\Phi}_0 - i \operatorname{Im} \tilde{\Phi}_2)i_0 + (\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_1 + i \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_3)i_1 - \\ &- (\operatorname{Re} \tilde{\Phi}_1 - i \operatorname{Im} \tilde{\Phi}_3)i_2 - (\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_0 + i \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_2)i_3 = (\mathcal{H}[\Phi])^*. \end{aligned}$$

2. De nuevo usando (3.35) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\gamma_0\gamma_1\Phi] &= -\mathcal{H}\left[\begin{pmatrix} \Phi_3 \\ \Phi_2 \\ \Phi_1 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}\right] = \\ &= -((\operatorname{Re} \tilde{\Phi}_3 + i \operatorname{Im} \tilde{\Phi}_1)i_0 + (\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_2 - i \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_0)i_1 + \\ &+ (-\operatorname{Re} \tilde{\Phi}_2 - i \operatorname{Im} \tilde{\Phi}_0)i_2 + (-\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_3 + i \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_1)i_3) = ii_1\mathcal{H}[\Phi]. \end{aligned}$$

3.-4. La prueba de estos casos es completamente análoga a la de 2.

5. Calculemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[i\Phi] &= \mathcal{H}[i \operatorname{Re} \Phi - \operatorname{Im} \Phi] = \\ &= (-\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_0 + i \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_2)i_0 + (\operatorname{Re} \tilde{\Phi}_1 + i \operatorname{Im} \tilde{\Phi}_3)i_1 + \\ &+ (\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_1 - i \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_3)i_2 + (-\operatorname{Re} \tilde{\Phi}_0 - i \operatorname{Im} \tilde{\Phi}_2)i_3 = -\mathcal{H}[\Phi]i_3. \end{aligned}$$

6. Por analogía,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \left[ \widehat{i\Phi} \right] &= \kappa^{-1} \chi^{-1} \begin{pmatrix} i\Phi_2 \\ i\Phi_3 \\ i\Phi_0 \\ i\Phi_1 \end{pmatrix} = \\ &= \kappa^{-1} \left( \widehat{i\chi^{-1}[\Phi]} \right) = i\kappa^{-1} [\chi^{-1}[\Phi]] = i\mathcal{H}[\Phi]. \end{aligned}$$

■

### 3.2.2 Reformulación cuaterniónica del operador de Dirac

Multipliquemos (3.31) por la matriz  $\gamma_0$  por la izquierda y apliquemos el mapeo  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} \left[ \partial_t \Phi - \sum_{k=1}^3 \gamma_0 \gamma_k \partial_k \Phi + im\gamma_0 \Phi \right] = 0. \quad (3.37)$$

Escribimos  $F := \mathcal{H}[\Phi]$  y usamos el Lema 5; entonces de (3.37) y después de multiplicar por  $i$  obtenemos

$$(i\partial_t + D - imZ_{\mathbb{C}}M^{i3}) [F] = 0. \quad (3.38)$$

Esta ecuación es la reformulación cuaterniónica de la ecuación de Dirac propuesta por Lanczos [56]. Tal ecuación es completamente equivalente a (3.31). Por tanto tenemos lo siguiente

**Teorema 6** *Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de biespinores de Dirac (i.e., el conjunto de soluciones de la ecuación de Dirac (3.31)) y el conjunto de soluciones de la ecuación cuaterniónica compleja (3.38), la cual está dada por el mapeo  $\mathcal{H}$ : para cualquier solución  $\Phi$  de (3.31) la función  $F := \mathcal{H}[\Phi]$  es una solución de (3.38), y viceversa, para cualquier solución  $F$  de (3.38) la función  $\Phi := \mathcal{H}^{-1}[F]$  es una solución de (3.31).*

Denotemos al operador en (3.38) por  $N$ :

$$N := i\partial_t + D - imZ_{\mathbb{C}}M^{i3}.$$

Lo consideraremos sobre funciones valuadas en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  continuamente diferenciables. Note que de las definiciones anteriores podemos escribir

$$N = i\mathcal{H}\gamma_0\mathbb{D}\mathcal{H}^{-1}. \quad (3.39)$$

El operador  $N$  está estrechamente relacionado al sistema de Maxwell. Si consideramos la situación sin masa (ver, e.g., [3, p. 80]; [7, p. 140]), entonces la ecuación

$$(\partial_t + iD)\vec{f} = 0,$$

donde  $\vec{f}$  es puramente vectorial, es una reformulación cuaterniónica del sistema de Maxwell para el vacío [55] (ver también [27]), [71], [33] (ver también [51]).

La principal desventaja del operador  $N$  es la presencia del operador de conjugación compleja  $Z_{\mathbb{C}}$ . En las siguientes líneas mostramos cómo se puede eliminar este operador. Tal procedimiento fue propuesto en [38].

El primer paso está basado en la conocida identidad matricial de Gokhberg-Krupnik —ver, e.g., [57], [52]—:

$$\begin{pmatrix} I & C \\ I & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ CBC & CAC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ C & -C \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} A + BC & 0 \\ 0 & A - BC \end{pmatrix},$$

donde  $A, B$  y  $C$  son operadores lineales y  $C^2 = I$ . Es interesante notar que esta identidad matricial se usa con mucha frecuencia en la teoría de operadores integrales singulares cuando es necesario eliminar al operador de conjugación. El precio que se paga por esto es la obtención de un sistema de dos ecuaciones sin el operador de conjugación en vez de una ecuación incluyéndolo. Aquí, como veremos, debido a la anticonmutatividad de los cuaterniones esta identidad matricial, recién llegada de otra

teoría matemática, nos lleva no a un sistema sino a una sola ecuación cuaterniónica. Tomando  $A = i\partial_t + D$ ;  $B = -imM^{i_3}$ ;  $C = Z_{\mathbb{C}}$  y escribiendo  $N' := i\partial_t + D + imZ_{\mathbb{C}}M^{i_3}$  tenemos

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & Z_{\mathbb{C}} \\ I & -Z_{\mathbb{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\partial_t + D & -imM^{i_3} \\ imM^{i_3} & -i\partial_t + D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ Z_{\mathbb{C}} & -Z_{\mathbb{C}} \end{pmatrix}.$$

Esto es, si  $F \in \ker N$  y  $G \in \ker N'$ , entonces las funciones  $f := \frac{1}{2}(F + G)$  y  $g := \frac{1}{2}(F^* - G^*)$  satisfacen el sistema

$$(i\partial_t + D)f - imgi_3 = 0, \quad (3.40)$$

$$(-i\partial_t + D)g + imfi_3 = 0. \quad (3.41)$$

Note que  $F = f + g^*$ ,  $G = f - g^*$ . Así, en vez de (3.38) obtuvimos el sistema (3.40), (3.41) sin el operador de conjugación. Nuestra siguiente tarea es mostrar que de hecho el sistema (3.40), (3.41) es equivalente a una sola ecuación. Para llevar esto a cabo introducimos la siguiente notación

$$P_k^{\pm} := \frac{1}{2}M^{(1 \pm ii_k)}, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Cualquier par de operadores  $P_k^+$ ,  $P_k^-$  para una  $k$  fija es un par de proyectores mutuamente complementarios en el conjunto de funciones valuadas en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ .

Apliquemos  $P_1^{\pm}$  a las igualdades (3.40) y (3.41). Entonces, tomando en cuenta que

$$P_1^{\pm}M^{i_3} = M^{i_3}P_1^{\mp}, \quad (3.42)$$

obtenemos

$$(i\partial_t + D)P_1^+[f] - imM^{i_3}P_1^-[g] = 0, \quad (3.43)$$

$$(i\partial_t + D)P_1^-[f] - imM^{i_3}P_1^+[g] = 0, \quad (3.44)$$

$$(i\partial_t - D)P_1^+[g] - imM^{i_3}P_1^-[f] = 0, \quad (3.45)$$

$$(i\partial_t - D) P_1^- [g] - imM^{i_3} P_1^+ [f] = 0. \quad (3.46)$$

Sumando (3.43) y (3.46) para la función  $\varphi := P_1^+ [f] - P_1^- [g]$ , y sumando (3.44) y (3.45) para  $\psi := P_1^- [f] - P_1^+ [g]$ , obtenemos dos ecuaciones separadas

$$P_1^+ (i\partial_t + D) [\varphi] + P_1^- (-i\partial_t + D) [\varphi] - m\varphi i_2 = 0, \quad (3.47)$$

$$P_1^+ (-i\partial_t + D) [\psi] + P_1^- (i\partial_t + D) [\psi] + m\psi i_2 = 0. \quad (3.48)$$

Note que

$$f = P_1^+ [\varphi] + P_1^- [\psi], \quad g = -P_1^+ [\psi] - P_1^- [\varphi].$$

Las ecuaciones (3.47) y (3.48) no son independientes, ya que si  $\varphi$  es cualquier solución de (3.47) entonces la función  $\psi := \varphi i i_3 = (P_3^+ - P_3^-) [\varphi]$  es una solución de (3.48) y viceversa. Por tanto el sistema (3.40), (3.41) y por consiguiente la ecuación (3.38) es equivalente a cada una de las ecuaciones (3.47) y (3.48). Para tener una definición única escogemos (3.47) como nuestra ecuación de Dirac cuaterniónica.

El último paso es regresar de la función  $\varphi$  que satisface (3.47) a la función  $F$  que satisface (3.38), ya que (3.47) es la ecuación cuaterniónica requerida la cual es equivalente a (3.38) y no contiene al operador  $Z_{\mathbb{C}}$ . Entonces

$$\begin{aligned} F &= f + g^* = P_1^+ [\varphi] + P_1^- [\varphi i i_3] - Z_{\mathbb{C}} [P_1^+ [\varphi i i_3] + P_1^- [\varphi]] = \\ &= (P_1^+ - P_1^+ Z_{\mathbb{C}} + P_1^- (P_3^+ - P_3^-) + P_1^- (P_3^+ - P_3^-) Z_{\mathbb{C}}) [\varphi] = \\ &= (P_1^+ (I - Z_{\mathbb{C}}) + P_1^- (P_3^+ - P_3^-) (I + Z_{\mathbb{C}})) [\varphi]. \end{aligned}$$

Hemos aprovechado las obvias relaciones de conmutación

$$P_k^{\pm} Z_{\mathbb{C}} = Z_{\mathbb{C}} P_k^{\mp}.$$

Recíprocamente,

$$\varphi = (P_1^+ P_3^+ - Z_{\mathbb{C}} P_1^+ P_3^-) [F] = (P_1^+ P_3^+ - P_1^- P_3^+ Z_{\mathbb{C}}) [F].$$

Usemos las siguientes notaciones

$$\mathcal{U} := P_1^+ P_3^+ - P_1^- P_3^+ Z_{\mathbb{C}}, \quad \mathcal{U}^{-1} := P_1^+(I - Z_{\mathbb{C}}) + P_1^-(P_3^+ - P_3^-)(I - Z_{\mathbb{C}}).$$

El resultado final es

$$N = \mathcal{U}^{-1} R \mathcal{U}, \quad (3.49)$$

donde  $R$  es el operador de la ecuación (3.47):

$$R := P_1^+ (i\partial_t + D) + P_1^- (-i\partial_t + D) - mM^{i2}.$$

De (3.39) tenemos

$$R = \mathcal{U} i \mathcal{H} \gamma_0 \mathbb{D} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{U}^{-1}$$

o, usando la aseveración 6 del Lema 5,

$$R = \mathcal{A} i \gamma_0 \gamma_5 \mathbb{D} \mathcal{A}^{-1}, \quad (3.50)$$

donde  $\mathcal{A} := \mathcal{U} \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{A}^{-1} := \mathcal{H}^{-1} \mathcal{U}^{-1}$  (ver [38] y [51, Sec. 12]).

Por tanto el estudio del operador de Dirac  $\mathbb{D}$  es equivalente al del operador diferencial cuaterniónico  $R$ .

Escribamos el mapeo  $\mathcal{A}$  en forma explícita. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} [\tilde{q}] &= (P_1^+ P_3^+ - P_1^- P_3^+ Z_{\mathbb{C}}) [(\operatorname{Re} q_0 + i \operatorname{Im} q_2) i_0 + \\ &\quad + (\operatorname{Im} q_1 - i \operatorname{Re} q_3) i_1 - (\operatorname{Re} q_1 + i \operatorname{Im} q_3) i_2 - (\operatorname{Im} q_0 - i \operatorname{Re} q_2) i_3]. \end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} P_3^+ \mathcal{H} [\tilde{q}] &= \frac{1}{2} M^{(1+i3)} \mathcal{H} [\tilde{q}] = \\ &= \frac{1}{2} [(\operatorname{Re} q_0 + i \operatorname{Im} q_2) i_0 + (\operatorname{Im} q_1 - i \operatorname{Re} q_3) i_1 - (\operatorname{Re} q_1 + i \operatorname{Im} q_3) i_2 - \\ &\quad - (\operatorname{Im} q_0 - i \operatorname{Re} q_2) i_3 + (\operatorname{Re} q_2 + i \operatorname{Im} q_0) i_0 + (\operatorname{Im} q_3 - i \operatorname{Re} q_1) i_1 - \\ &\quad - (\operatorname{Re} q_3 + i \operatorname{Im} q_1) i_2 - (\operatorname{Im} q_2 - i \operatorname{Re} q_0) i_3] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [(q_0 + q_2) i_0 - i(q_1 + q_3) i_1 - (q_1 + q_3) i_2 + i(q_0 + q_2) i_3].$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_1^+ P_3^+ \mathcal{H} [\tilde{q}] &= \frac{1}{4} M^{(1+i i_1)} [(q_0 + q_2) i_0 - i(q_1 + q_3) i_1 - \\ &\quad - (q_1 + q_3) i_2 + i(q_0 + q_2) i_3] = \\ &= \frac{1}{4} [(q_0 - q_1 + q_2 - q_3) i_0 + i(q_0 - q_1 + q_2 - q_3) i_1 - \\ &\quad - (q_0 + q_1 + q_2 + q_3) i_2 + i(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) i_3]. \end{aligned}$$

Por analogía,

$$P_3^+ Z_{\mathbb{C}} \mathcal{H} [\tilde{q}] = \frac{1}{2} [(q_0 - q_2) i_0 - i(q_1 - q_3) i_1 - (q_1 - q_3) i_2 + i(q_0 - q_2) i_3]$$

y

$$\begin{aligned} P_1^- P_3^+ Z_{\mathbb{C}} \mathcal{H} [\tilde{q}] &= \frac{1}{4} [(q_0 + q_1 - q_2 - q_3) i_0 - i(q_0 + q_1 - q_2 - q_3) i_1 + \\ &\quad + (q_0 - q_1 - q_2 + q_3) i_2 + i(q_0 - q_1 - q_2 + q_3) i_3]. \end{aligned}$$

Entonces, finalmente, tenemos

$$\mathcal{A} [\tilde{q}] = \frac{1}{2} [-(q_1 - q_2) i_0 + i(q_0 - q_3) i_1 - (q_0 + q_3) i_2 + i(q_1 + q_2) i_3] \quad (3.51)$$

y

$$\mathcal{A}^{-1} [\tilde{\rho}] = (- (i\rho_1 + \rho_2), - (\rho_0 + i\rho_3), \rho_0 - i\rho_3, i\rho_1 - \rho_2)^T. \quad (3.52)$$

Escribamos el mapeo  $\mathcal{A}$  en su forma matricial más simple, relacionando las componentes de una función  $\Phi$  valuada en  $\mathbb{C}^4$  con las componentes de una función  $F$  valuada en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ :

$$F = \mathcal{A} [\Phi] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 \\ \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \\ \tilde{\Phi}_3 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

y

$$\Phi = \mathcal{A}^{-1}[F] = \begin{pmatrix} 0 & -i & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_0 \\ \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

El procedimiento que lleva a esta transformación seguramente parece bastante difícil. Sin embargo, el resultado final, como lo muestran las dos últimas igualdades, es simple y fácil de usar. Introduzcamos algunas propiedades de la transformación  $\mathcal{A}$ .

**Lema 7** (*Propiedades algebraicas de la transformación  $\mathcal{A}$* )

1.  $-\mathcal{A}i\gamma_0\gamma_5\gamma_1\mathcal{A}^{-1}[F] = -\mathcal{A}\gamma_2\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] = i_1F,$
2.  $-\mathcal{A}i\gamma_0\gamma_5\gamma_2\mathcal{A}^{-1}[F] = \mathcal{A}\gamma_1\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] = i_2F,$
3.  $-\mathcal{A}i\gamma_0\gamma_5\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] = -\mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\mathcal{A}^{-1}[F] = -i_3F,$
4.  $-\mathcal{A}i\gamma_0\gamma_5\gamma_0\mathcal{A}^{-1}[F] = \mathcal{A}i\gamma_5\mathcal{A}^{-1}[F] = Fi_1,$
5.  $-\mathcal{A}i\gamma_0\gamma_5\mathcal{A}^{-1}[F] = -iFi_2.$

*Las pruebas pueden encontrarse en [43, Sec. 3.5]*

En estas propiedades hay algunos hechos que deben resaltarse: la única diferencia entre ellas en el lado izquierdo, es la presencia o ausencia de alguna de las matrices  $\gamma$  antes de la transformación inversa  $\mathcal{A}^{-1}$ . Esta diferencia determina en el lado derecho de las ecuaciones, entre otras cosas, el lado por el que se multiplican las unidades imaginarias cuaterniónicas (recordemos que debido a la anticonmutatividad de los cuaterniones, esto es importante) y el signo. Precisamente puede observarse en la propiedad 3 la comodidad que implica introducir  $\tilde{\Phi}$  cambiando el signo de la tercera componente espacial, lo cual justifica tal consideración.

Podemos ahora resumir el resultado principal de esta sección en el siguiente teorema.

**Teorema 8** *Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de biespinores de Dirac (i.e., el conjunto de soluciones de la ecuación de Dirac (3.31)) y las soluciones de la ecuación cuaterniónica*

$$R[F] = P_1^+ (i\partial_t + D) [F] + P_1^- (-i\partial_t + D) [F] - mFi_2 = 0, \quad (3.55)$$

la cual está dada por el mapeo  $\mathcal{A}$ : para cualquier solución  $\Phi$  de (3.31) la función  $F := \mathcal{A}[\Phi]$  es una solución de (3.55), y viceversa, para cualquier solución  $F$  de (3.55) la función  $\Phi := \mathcal{A}^{-1}[F]$  es una solución de (3.31). La relación entre los operadores  $\mathbb{D}$  y  $R$  está dada por

$$R = Ai\gamma_0\gamma_5\mathbb{D}\mathcal{A}^{-1}. \quad (3.56)$$

**Nota 9** *El operador  $R$  puede ser reescrito de la forma siguiente*

$$R[F] = -\partial_t Fi_1 + DF - mFi_2$$

de donde es obvio que el operador de Dirac  $R$  no es un operador bicuaterniónico sino un operador cuaterniónico real, hecho que se utilizó en [49] para estudiar simetrías involutivas de la ecuación de Dirac entre otras aplicaciones.

Por último consideremos una función armónica en tiempo  $\Phi$  perteneciente al kernel del operador  $\mathbb{D}$  que tiene por forma  $\Phi(x, t) = q(x)e^{i\omega t}$ , donde  $\omega \in \mathbb{R}$  y  $q(x)$  es una función valuada en  $\mathbb{C}^4$  que depende sólo de  $x$ . De la aplicación del operador (3.31) a dicha función  $\Phi$ , obtenemos la siguiente ecuación para  $q(x)$

$$\mathbb{D}_{\omega, m}q(x) = 0 \quad (3.57)$$

donde

$$\mathbb{D}_{\omega,m} := i\omega\gamma_0 - \sum_{k=1}^3 \gamma_k \partial_k + imI. \quad (3.58)$$

Con ayuda de las propiedades de la transformación  $\mathcal{A}$  se puede reformular cuaterni3nicamente al operador  $\mathbb{D}_{\omega,m}$ , esto es

$$D_\alpha = \mathcal{A}i\gamma_0\gamma_5\mathbb{D}_{\omega,m}\mathcal{A}^{-1} \quad (3.59)$$

donde

$$D_\alpha := D + M^\alpha$$

y  $\alpha = \vec{\alpha} := -(i\omega i_1 + mi_2)$ . Este operador es el equivalente cuaterni3nico del operador de Dirac.

**Teorema 10** *La ecuaci3n*

$$D_\alpha[\rho] = 0, \quad (3.60)$$

*es equivalente a la ecuaci3n (3.57). Si  $q$  es una soluci3n de (3.57), entonces  $\rho := \mathcal{A}[q]$  satisface (3.60) y viceversa, si  $\rho \in \ker D_\alpha$ ,  $\alpha := -(i\omega i_1 + mi_2)$  entonces  $q := \mathcal{A}^{-1}[\rho]$  es una soluci3n de (3.57).*

### 3.3 Relaci3n entre las ecuaciones de Maxwell y la ecuaci3n de Dirac

Se sabe que

$$D_{\vec{\alpha}} = P^+D_\nu + P^-D_{-\nu} \quad (3.61)$$

donde  $\nu := \sqrt{\vec{\alpha}^2} \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \nu \geq 0$ , y  $P^\pm := \frac{1}{2\nu}M^{(\nu \pm \vec{\alpha})}$  son dos operadores de proyecci3n mutuamente complementarios en el conjunto de funciones valuadas en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ .

Esta igualdad es válida gracias a que los operadores  $P^\pm$  conmutan con  $D_{\pm\nu}$ . Consideremos un ejemplo que ilustrará esto: considere un par de funciones  $u$  y  $v$  tales que

$$\begin{cases} D_\nu u = 0, \\ D_{-\nu} v = 0. \end{cases}$$

Consideremos la siguiente función construida a partir de las funciones  $u$  y  $v$

$$f = P^+ u + P^- v.$$

De (3.61) y la ecuación anterior tenemos que

$$\begin{aligned} D_{\vec{\alpha}} f &= (P^+ D_\nu + P^- D_{-\nu})(P^+ u + P^- v) = \\ &= P^+ D_\nu u + P^- D_{-\nu} v = 0. \end{aligned}$$

Es aquí donde el hecho de que los proyectores  $P^\pm$  conmuten con  $D_{\pm\nu}$ , además de las propiedades de dichos proyectores, lo que nos permite obtener tal representación.

A partir de la representación (3.61), y recordando el par de ecuaciones (3.18) y (3.19), equivalentes cuaterniónicas del sistema de ecuaciones de Maxwell, establecemos la relación entre las ecuaciones de Maxwell y el operador de Dirac. Algunas relaciones interesantes entre la ecuación de Dirac y el sistema de Maxwell pueden verse en [42].

## Capítulo 4

# Descomposición del kernel del operador de Klein-Gordon

El contenido de esta sección está basado en [45] y los métodos del análisis cuaterniónico usados fueron desarrollados recientemente en [4], [30], [51].

Usaremos los siguientes idempotentes generados por divisores de cero:

$$P_k^\pm := \frac{1}{2} M^{(i \pm i i k)} \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Consideremos al operador de Helmholtz con un número de onda cuaterniónico  $\Delta + M^{\alpha^2}$  estudiado en [50] (ver también [51]). A semejanza de la factorización mostrada en (2.11), con la ayuda de los cuaterniones es posible (ver [28]) factorizar tal operador de Helmholtz de la siguiente manera:

$$\Delta + M^{\alpha^2} = -(D + M^\alpha)(D - M^\alpha).$$

Introduzcamos los siguientes operadores:

$$\Pi_\alpha = \begin{cases} -\frac{1}{2\alpha\bar{\alpha}} M^{\bar{\alpha}} D_{-\alpha} & \text{si } \alpha \notin \mathfrak{S} \\ -\frac{1}{8\alpha_0^2} M^\alpha D_{-\alpha} & \text{si } \alpha \in \mathfrak{S} \end{cases}$$

los cuales están definidos sobre  $\ker(\Delta + M^{\alpha^2})$  y poseen las siguientes propiedades:

$$\Pi_\alpha^2 = \Pi_\alpha \quad \text{para toda } \alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) \quad (4.1)$$

$$\Pi_\alpha \Pi_{-\alpha} = \Pi_{-\alpha} \Pi_\alpha = 0 \quad \text{para toda } \alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) \quad (4.2)$$

$$\Pi_\alpha + \Pi_{-\alpha} = I \quad \text{para toda } \alpha \notin \mathfrak{S} \quad (4.3)$$

$$\Pi_\alpha + \Pi_{-\alpha} + \frac{1}{2\alpha_0} M \bar{\alpha} = I \quad \text{para toda } \alpha \in \mathfrak{S}. \quad (4.4)$$

Para cualquier  $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  tenemos  $\Pi_\alpha : \ker(\Delta + M^{\alpha^2}) \rightarrow \ker D_\alpha$ .

Con ayuda de tales operadores fueron obtenidos en [37], [50] (ver también [51, Sec. 2]) los siguientes resultados:

Para  $\alpha \notin \mathfrak{S} \cup \{0\}$ ,

$$\ker(\Delta + M^{\alpha^2}) = \ker(D + M^\alpha) \oplus \ker(D - M^\alpha). \quad (4.5)$$

Para  $\alpha \in \mathfrak{S}$  tenemos

$$\ker(\Delta + M^{\alpha^2}) = M^\alpha (\ker D_{2\alpha_0} \oplus \ker D_{-2\alpha_0}) \oplus M^{\bar{\alpha}}(\ker \Delta). \quad (4.6)$$

Aquí y en lo sucesivo usaremos la notación  $D_\alpha := D + M^\alpha$ . A su vez para el kernel del operador de Laplace tenemos

$$\ker \Delta = \ker D_{-\alpha} \oplus M^{i_1}(\ker D_\alpha),$$

donde  $\alpha$  es un divisor de cero arbitrario,  $\alpha_0 = 0$ , y  $\alpha_1 \neq 0$ .

Consideraremos funciones valuadas en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  dadas en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ . En el conjunto  $C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  el siguiente operador está definido [38]:

$$\mathfrak{D} := P_1^+(i\partial_t + D) + P_1^-(-i\partial_t + D) - mM^{i_2}.$$

El operador  $\mathfrak{D}$  es equivalente al operador de Dirac clásico (3.31) en el sentido que  $\mathfrak{D}$  puede ser obtenido de  $\mathbb{D}$  a través de la transformación matricial invertible  $\mathcal{A}$  introducida en el capítulo anterior. Denotemos con  $F$  a la transformada de Fourier con respecto a la variable  $t$ :

$$F[f(t)] := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\beta t} dt.$$

## 4.1 Descomposición del kernel del operador de Klein-Gordon

Denotemos por  $\mathfrak{A}$  al operador de Klein-Gordon el cual describe partículas con spin entero:

$$\mathfrak{A} := \partial_t^2 - \Delta + m^2.$$

Consideraremos al operador  $\mathfrak{A}$  en el conjunto  $C^2(\Omega)$ , donde  $\Omega = (-\infty, \infty) \times G$ ,  $(-\infty, \infty)$  es el eje que corresponde a la variable tiempo  $t$  y  $G$  es un dominio en  $\mathbb{R}^3$ .

Introduzcamos el operador

$$\overline{\mathfrak{D}} := P_1^+ (-i\partial_t + D) + P_1^- (i\partial_t + D) + mM^{i_2}$$

y consideremos el producto

$$\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{D}} = P_1^+ (\partial_t^2 - \Delta) + P_1^- (\partial_t^2 - \Delta) + m^2 = \partial_t^2 - \Delta + m^2 = \mathfrak{A}.$$

Por tanto,  $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}\overline{\mathfrak{D}}$ . Usaremos este hecho para el análisis del  $\ker \mathfrak{A}$ .

Reescribamos los operadores  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{D}$  y  $\overline{\mathfrak{D}}$  en la forma

$$\mathfrak{A} = F^{-1} (-\Delta + m^2 - \beta^2) F \tag{4.7}$$

$$\mathfrak{D} = F^{-1} (D + M^{(i\beta i_1 - mi_2)}) F$$

$$\overline{\mathfrak{D}} = F^{-1} (D - M^{(i\beta i_1 - mi_2)}) F.$$

Denotemos  $\alpha := -(i\beta i_1 - mi_2)$ . Entonces, para el operador de Helmholtz de los paréntesis en (4.7) tenemos

$$-\Delta + m^2 - \beta^2 = D_\alpha D_{-\alpha}.$$

Usando los operadores de proyección correspondientes  $\Pi_\alpha$  y  $\Pi_{-\alpha}$  introducimos los operadores

$$Q_{\pm\alpha} := F^{-1} \Pi_{\pm\alpha} F.$$

La siguiente proposición es un simple corolario de (4.1) - (4.4).

**Proposición 11** *En el conjunto  $\ker \mathfrak{A}$  las siguientes igualdades se cumplen:*

1.  $Q_\alpha^2 = Q_\alpha$ .
2.  $Q_\alpha Q_{-\alpha} = Q_{-\alpha} Q_\alpha = 0$ .
3.  $Q_\alpha + Q_{-\alpha} = I$ .

Note que  $\ker Q_\alpha = \ker \mathfrak{D}$  y  $\ker Q_{-\alpha} = \ker \overline{\mathfrak{D}}$ . La prueba, por ejemplo, de la primera igualdad es un corolario del hecho de que ambas inclusiones  $f \in \ker Q_\alpha$  y  $f \in \ker \mathfrak{D}$  son equivalentes a la igualdad  $D_{-\alpha} F f = 0$ . Entonces obtenemos la siguiente

**Proposición 12** *El kernel del operador de Klein-Gordon  $\mathfrak{A}$  puede ser representado como la suma directa de los kernels de los operadores de Dirac  $\mathfrak{D}$  y  $\overline{\mathfrak{D}}$ , i.e.  $\ker \mathfrak{A} = \ker \mathfrak{D} \oplus \ker \overline{\mathfrak{D}}$ .*

Esta proposición es una generalización del siguiente resultado, obtenido en [12]:  $\mathcal{M} = \ker(-i\partial_t + D) \oplus \ker(i\partial_t + D)$ , donde  $\mathcal{M}$  denota todas las soluciones nulas del operador de onda  $\Delta - \partial_t^2$  que dependen del tiempo.

Note que si  $f \in \ker \mathfrak{D}$ , entonces  $f i_3 \in \ker \overline{\mathfrak{D}}$ . En otras palabras:  $\ker \overline{\mathfrak{D}} = M^{i_3}(\ker \mathfrak{D})$  y obtenemos el siguiente resultado principal:

**Proposición 13** *La relación  $\ker \mathfrak{A} = \ker \mathfrak{D} \oplus M^{i_3}(\ker \mathfrak{D})$  es verdadera.*

Un punto curioso en este resultado es el hecho de que, debido a la anticonmutatividad de las unidades imaginarias cuaterniónicas, el kernel del operador de segundo orden  $\mathfrak{A}$  se representa a través del kernel del operador de primer orden  $\mathfrak{D}$ . Consecuentemente, cualquier solución de la ecuación de Klein-Gordon puede ser representada

como una suma de dos soluciones de la ecuación de Dirac, una de las cuales se multiplica por  $i_3$ . Este resultado concuerda, e.g. con el modelo de cuarks de los mesones. Cada mesón está constituido por un cuark y un anticuark. La multiplicación por  $i_3$  en la Proposición 13 representa la transformación de una partícula en una antipartícula.

Note que la descomposición (4.5) del kernel del operador de Helmholtz no es única y que puede ser reescrita de una forma similar a la Proposición 13. Consideremos el siguiente operador de Helmholtz  $\Delta + \alpha^2 I$ , donde  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces tenemos

$$\Delta + \alpha^2 I = - (D + M^{\alpha i_1}) (D - M^{\alpha i_1})$$

y con la ayuda de los operadores de proyección  $\Pi_\alpha$  y  $\Pi_{-\alpha}$  obtenemos

$$\ker (\Delta + \alpha^2 I) = \ker (D + M^{\alpha i_1}) \oplus \ker (D - M^{\alpha i_1}).$$

Pero  $\ker (D - M^{\alpha i_1}) = M^{i_2} (\ker (D + M^{\alpha i_1}))$ , consecuentemente

$$\ker (\Delta + \alpha^2 I) = \ker (D + M^{\alpha i_1}) \oplus M^{i_2} (\ker (D + M^{\alpha i_1})).$$

## 4.2 Las ecuaciones de Maxwell y el operador de onda

La mayor parte del material correspondiente a modelos electromagnéticos aquí presentado está dedicado al tratamiento de campos electromagnéticos armónicos en tiempo (monocromáticos). Sin embargo, los métodos del análisis cuaterniónico también pueden ser muy útiles en la situación general. Supongamos que el medio es homogéneo (e isotrópico). Considere la función [43]

$$\mathbf{V} := \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E} + i\sqrt{\mu} \mathbf{H}.$$

Es fácil verificar que las ecuaciones de Maxwell (3.1)-(3.4) pueden ser reescritas de la siguiente forma

$$\left(\frac{1}{c} + iD\right) \mathbf{V} = -\left(\sqrt{\mu}\mathbf{j} + \frac{i\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el medio:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

(en particular, en el caso del vacío tenemos que  $c = c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  es la velocidad de la luz).

Notamos una importante propiedad del operador de Maxwell cuaterniónico  $\frac{1}{c}\partial_t + iD$ . Ésta es, que factoriza al operador de onda:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta = \left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right) \left(\frac{1}{c}\partial_t - iD\right). \quad (4.8)$$

Además, cada solución (escalar o bicuaterniónica) de la ecuación de onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right) u = 0$$

puede ser escrita de una manera única como la suma de dos funciones  $f$  y  $g$ , donde  $f$  satisface la ecuación

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right) f = 0$$

y  $g$  satisface la ecuación conjugada

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t - iD\right) g = 0.$$

En otra palabras,

$$\ker\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right) = \ker\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right) \oplus \ker\left(\frac{1}{c}\partial_t - iD\right).$$

La prueba de este resultado se mostrará en la siguiente sección, pero antes queremos mencionar como ejemplo de la aplicación de (4.8) el estudio del problema de una carga en movimiento (ver [43, p. 54], [34]) donde se requiere encontrar el campo electromagnético generado por una carga  $q$  moviéndose con la velocidad  $\vec{v}(t)$ .

### 4.3 Descomposición del kernel del operador de onda

El material tratado en la presente sección está basado en el artículo [12]. Una función compleja armónica se representa como la suma de dos funciones  $f$  y  $g$ , donde  $f$  es holomorfa (verifica las condiciones de Cauchy-Riemann) y  $g$  es antiholomorfa (satisface las condiciones de Cauchy-Riemann conjugadas)

$$u = f + g.$$

Pero esta descomposición de una función armónica no es única, ya que si sumamos las funciones  $f'$  y  $g'$ , donde

$$f' = f + c \quad \text{y} \quad g' = g - c$$

para las cuales  $c$  es una constante, obtenemos una segunda descomposición.

En [50] se obtuvo un resultado similar (véase también [51]), pero en tres dimensiones para la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + \nu^2 u = 0, \tag{4.9}$$

donde  $\nu$  es un número complejo. La solución de (4.9) se representa como

$$u = f + g$$

donde  $f$  y  $g$  verifican

$$(D + \nu)f = 0 \quad \text{y} \quad (D - \nu)g = 0.$$

También en [37] se obtuvo un resultado parecido para el operador de Laplace tridimensional. En este caso la función armónica  $u$  se representa como una suma

$$u = f + gi_1,$$

donde  $f$  y  $g$  verifican las ecuaciones

$$Df - f\alpha = 0 \quad \text{y} \quad Dg + g\alpha = 0.$$

A diferencia del análisis complejo, aquí la descomposición es única, y  $\alpha$  es un cuaternión complejo divisor de cero para el cual  $\alpha_0 = 0$  y  $\alpha_1 \neq 0$ .

A continuación estudiaremos las soluciones de la ecuación de onda homogénea

$$\square u = (\Delta - \partial_t^2)u = 0,$$

donde  $u = u(t, x) \in C^2$  es una función cuyos valores en general pueden estar en  $\mathbb{C}^4$ .

Consideremos los siguientes operadores

$$\Pi_\nu = -\frac{1}{2\nu}D_{-\nu} \quad \text{y} \quad \Pi_{-\nu} = \frac{1}{2\nu}D_\nu$$

donde  $\nu \in \mathbb{C}$  y  $\nu \neq 0$ . Podemos definir los operadores  $P_\nu$  y  $P_{-\nu}$  como sigue:

$$P_\nu = F^{-1}\Pi_\nu F,$$

$$P_{-\nu} = F^{-1}\Pi_{-\nu} F,$$

para los cuales  $F$  es la transformada de Fourier

$$\mathbf{F}(\nu) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\nu t} dt$$

y  $F^{-1}$  la transformada inversa de Fourier

$$f(t) = F^{-1}[\mathbf{F}(\nu)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\nu)e^{i\nu t} d\nu.$$

Consideraremos el dominio de definición de los operadores  $P_{\pm\nu}$  como el conjunto de funciones que verifican la ecuación de onda homogénea, es decir como  $\ker \square$ . Además, en adelante consideraremos sólo las funciones del kernel del operador de onda que dependen del tiempo. Denotaremos este conjunto como  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M} := \ker \square \setminus (\ker \partial_t \cap \ker \square).$$

**Proposición 14** (*Propiedades de los operadores  $P_\nu$  y  $P_{-\nu}$* ). *Las siguientes relaciones se cumplen:*

1.  $P_\nu^2 = P_\nu$ .
2.  $P_\nu P_{-\nu} = P_{-\nu} P_\nu = 0$ .
3.  $P_\nu + P_{-\nu} = I$ .
4.  $g \in \ker P_{-\nu} \Leftrightarrow g \in \text{im } P_\nu$ .

### Demostración

1. Comencemos por demostrar la primera proposición.

$$\begin{aligned} P_\nu^2 &= F^{-1} \Pi_\nu F F^{-1} \Pi_\nu F = F^{-1} \Pi_\nu \Pi_\nu F = \\ &= F^{-1} \left( -\frac{1}{2\nu} D_{-\nu} \right) \left( -\frac{1}{2\nu} D_{-\nu} \right) F = F^{-1} \frac{1}{4\nu^2} (D_{-\nu} D_{-\nu}) F. \end{aligned}$$

Por la definición del operador  $D_{-\nu}$  obtenemos

$$P_\nu^2 = F^{-1} \frac{1}{4\nu^2} (D^2 - 2D\nu + \nu^2) F.$$

Ahora, recordando la ecuación (2.10)

$$D^2 = -\Delta$$

y además, si  $Ff$  satisface la ecuación (4.9)

$$-\Delta Ff = \nu^2 Ff,$$

obtenemos

$$P_\nu^2 = F^{-1} \frac{1}{4\nu^2} (-\Delta - 2D\nu + \nu^2) F = F^{-1} \frac{1}{4\nu^2} (\nu^2 - 2D\nu + \nu^2) F =$$

$$\begin{aligned}
&= F^{-1} \frac{1}{4\nu^2} (2\nu^2 - 2D\nu) F = F^{-1} \left( -\frac{2\nu}{4\nu^2} (D - \nu) \right) F = \\
&= F^{-1} \left( -\frac{1}{2\nu} D_{-\nu} \right) F = F^{-1} \Pi_\nu F = P_\nu \\
&\quad \therefore P_\nu^2 = P_\nu.
\end{aligned}$$

2. Se demostrará ahora la segunda propiedad:  $P_\nu P_{-\nu} = P_{-\nu} P_\nu = 0$ . Siguiendo un procedimiento similar al usado en la demostración anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
P_\nu P_{-\nu} &= F^{-1} \Pi_\nu F F^{-1} \Pi_{-\nu} F = F^{-1} \Pi_\nu \Pi_{-\nu} F = \\
&= F^{-1} \left( -\frac{1}{2\nu} D_{-\nu} \right) \left( \frac{1}{2\nu} D_\nu \right) F = F^{-1} \left[ -\frac{1}{4\nu^2} (D^2 - \nu^2) \right] F = \\
&= F^{-1} \left[ -\frac{1}{4\nu^2} (-\Delta - \nu^2) \right] F = F^{-1} \left[ -\frac{1}{4\nu^2} (\nu^2 - \nu^2) \right] F = 0 \\
&\quad \therefore P_\nu P_{-\nu} = P_{-\nu} P_\nu = 0.
\end{aligned}$$

3. Para la tercera propiedad,  $P_\nu + P_{-\nu} = I$ , tenemos

$$P_\nu + P_{-\nu} = F^{-1} \Pi_\nu F + F^{-1} \Pi_{-\nu} F.$$

Dado que la transformada de Fourier es un operador lineal, podemos factorizar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
P_\nu + P_{-\nu} &= F^{-1} \left( -\frac{1}{2\nu} D_{-\nu} + \frac{1}{2\nu} D_\nu \right) F = F^{-1} \frac{1}{2\nu} (-(D - \nu) + (D + \nu)) F = \\
&= F^{-1} \frac{1}{2\nu} 2\nu F = F^{-1} F = I \\
&\quad \therefore P_\nu + P_{-\nu} = I.
\end{aligned}$$

4. Sea  $g \in \mathcal{M}$  y  $g \in \text{im } P_\nu$ , es decir  $\exists h$  tal que

$$g = P_\nu h,$$

entonces, usando la propiedad 2 y la ecuación anterior, tenemos

$$P_{-\nu}[g] = P_{-\nu}P_{\nu}[h] = 0.$$

Por lo tanto

$$g \in \ker P_{-\nu}.$$

Si  $g \in \ker P_{-\nu} \Rightarrow g = P_{\nu}g$ , ya que los operadores  $P_{-\nu}$  y  $P_{\nu}$  son ortogonales y mutuamente complementarios.

**Proposición 15** Sea  $f \in \mathcal{M}$ , entonces

$$f \in \ker(\mp i\partial_t + D) \iff f \in \text{im } P_{\pm\nu} = \ker P_{\mp\nu}.$$

**Demostración**

Sea

$$f = P_{\nu}g, \tag{4.10}$$

si aplicamos  $P_{\nu}$  a los dos miembros de la ecuación obtenemos

$$P_{\nu}f = P_{\nu}^2g$$

$$P_{\nu}f = P_{\nu}g,$$

por lo tanto, reemplazando (4.10) en la ecuación anterior tenemos

$$f = P_{\nu}f,$$

$$f = F^{-1} \left( -\frac{1}{2\nu} D_{-\nu} \right) Ff.$$

Aplicando ahora la transformada de Fourier a ambos miembros, nos da

$$Ff = -\frac{1}{2\nu} D_{-\nu} Ff. \tag{4.11}$$

Consideremos ahora

$$(-i\partial_t + D)f = 0.$$

Si aplicamos la transformada de Fourier, obtenemos

$$F(-i\partial_t + D)f = 0.$$

De acuerdo a las propiedades de la transformada de Fourier, la ecuación anterior nos da

$$-i(i\nu Ff) + FDf = 0$$

$$(\nu + D)Ff = 0.$$

Si restamos y sumamos  $\nu$ , la ecuación no se altera, y podemos escribir

$$(\nu + D - \nu + \nu)Ff = 0$$

$$D_{-\nu}Ff + 2\nu Ff = 0,$$

por lo que, despejando, obtenemos

$$Ff = -\frac{1}{2\nu}D_{-\nu}Ff,$$

que es igual a la ecuación (4.11), por lo tanto podemos concluir que

$$f \in \ker(\pm i\partial_t + D) \Leftrightarrow f \in \text{im } P_{\pm\nu} = \ker P_{\mp\nu}.$$

Conjuntando los resultados de las proposiciones 14 y 15 obtenemos el resultado central de esta sección.

**Proposición 16** [12]  $\mathcal{M} = \ker(-i\partial_t + D) \oplus \ker(i\partial_t + D)$ .

La descomposición de una función compleja armónica representa una relación muy importante entre la teoría de las funciones holomorfas y la teoría de las funciones

armónicas que permite utilizar los resultados obtenidos en una de las teorías en los objetos de la otra.

La proposición 16 muestra que una relación del mismo tipo existe entre la teoría de la ecuación de onda y las soluciones de los operadores cuaterniónicos  $(i\partial_t + D)$  y  $(-i\partial_t + D)$ , los cuales tienen muchas aplicaciones en electrodinámica y mecánica cuántica (ver [51]).

## Capítulo 5

# Problema de la extendibilidad para las ecuaciones de Maxwell

El estudio de las representaciones integrales para varias clases de funcionales está estrechamente relacionada con el estudio del comportamiento de las funciones correspondientes cerca de la frontera. Dado que usaremos a la integral de Cauchy  $K_\nu f$  para hacer las extensiones desde la frontera hacia los dominios tanto interior como exterior, analizaremos su comportamiento en las inmediaciones de la frontera.

Está claro que para funciones “razonablemente buenas” la integral  $K_\nu f$  es una función continua (aún más, sus derivadas de cualquier orden existen), pero en la frontera  $\Gamma$  el núcleo de la integral, la función  $\mathcal{K}_\nu(x-y)$ , tiene una singularidad que no permite que  $K_\nu f$  sea continua en los puntos de  $\Gamma$ . Usaremos entonces un análogo de las fórmulas de Plemelj-Sokhotski del análisis complejo para determinar el comportamiento de la integral de Cauchy.

Primero denotemos  $\Omega^+ := \Omega$  y  $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ . Denotaremos como  $C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  al conjunto de todas las funciones cuaterniónicas complejas  $f$  cuyas componentes satisfacen la condición del Hölder en  $\Gamma$ :

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq C|x - y|^\epsilon, \quad 0 < \epsilon \leq 1$$

para  $x, y \in \Gamma$  arbitrarias.

**Teorema 17** (*Fórmulas cuaterniónicas de Plemelj-Sokhotski*) [50] Sea  $\Gamma$  una superficie cerrada de Liapunov,  $f \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$ . Entonces en cualquier parte de  $\Gamma$  existen los siguientes límites

$$\lim_{\Omega^{\pm} \ni x \rightarrow \tau \in \Gamma} K_{\nu}[f](x) =: K_{\nu}[f]^{\pm}(\tau),$$

y las siguientes fórmulas se cumplen

$$K_{\nu}[f]^{+}(\tau) = P_{\nu}[f](\tau), \quad K_{\nu}[f]^{-}(\tau) = -Q_{\nu}[f](\tau), \quad (5.1)$$

donde los operadores  $P_{\nu}$  y  $Q_{\nu}$  fueron introducidos en (2.20).

(Para la prueba ver [51, p. 83] y las referencias ahí mencionadas).

El Teorema 17 implica algunas propiedades bastante interesantes de los operadores  $P_{\nu}$ ,  $Q_{\nu}$  y  $S_{\nu}$ . Antes que nada, probemos el siguiente

**Teorema 18** *El operador  $S_{\nu}$  es una involución en el espacio  $C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$  y por tanto  $P_{\nu}$  y  $Q_{\nu}$  son operadores de proyección mutuamente complementarios en el mismo espacio:*

$$S_{\nu}^2 = I, \quad (5.2)$$

$$P_{\nu}^2 = P_{\nu}, \quad Q_{\nu}^2 = Q_{\nu}; \quad P_{\nu}Q_{\nu} = Q_{\nu}P_{\nu} = 0. \quad (5.3)$$

**Prueba.** Un simple cálculo usando las definiciones de estos operadores muestra que (5.2) y (5.3) son equivalentes, de forma tal que basta probar (5.3). Sea  $f \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ .  $K_{\nu}[f] \in \ker D_{\nu}(\Omega)$  y debido a la fórmula integral de Cauchy obtenemos que

$$K_{\nu}[f](x) = K_{\nu}[K_{\nu}[f]](x).$$

Ahora, haciendo  $x \rightarrow \tau \in \Gamma$  y usando (5.1) obtenemos la primera de las igualdades (5.3). La segunda se prueba de una forma similar considerando el exterior de  $\Omega$ . Entonces,  $P_\nu$  y  $Q_\nu$  son operadores de proyección. Por su definición, son mutuamente complementarios, esto es,  $Q_\nu = I - P_\nu$ . Entonces  $P_\nu Q_\nu = P_\nu (I - P_\nu) = P_\nu - P_\nu^2 = 0$  y obtenemos el resultado necesario. ■

Se probó que  $P_\nu$  y  $Q_\nu$  son operadores de proyección sobre el espacio  $C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ , así, cualquier  $f \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  puede ser representada en una forma única como la suma  $f = P_\nu f + Q_\nu f$ . Veamos en el siguiente Teorema qué son estas partes de  $f$ ,  $P_\nu f$  y  $Q_\nu f$ .

**Teorema 19** *Sea  $\Gamma$  una superficie de Liapunov cerrada la cual es frontera de un dominio finito  $\Omega^+$  y de un dominio infinito  $\Omega^-$ . Sea  $f \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$ .*

1. *Para que  $f$  sea un valor de frontera de una función  $F$  de  $\ker D_\nu(\Omega^+)$ , la condición siguiente es necesaria y suficiente:*

$$f \in \text{im } P_\nu \tag{5.4}$$

*(esto es, existe tal función  $g \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  que  $f = P_\nu g$ ).*

2. *Para que  $f$  sea un valor de frontera de una función  $F$  de  $\ker D_\nu(\Omega^-)$ , la condición siguiente es necesaria y suficiente:*

$$f \in \text{im } Q_\nu. \tag{5.5}$$

**Nota 20** *La condición (5.4) puede ser reescrita como sigue*

$$f(\tau) = S_\nu[f](\tau), \quad \forall \tau \in \Gamma, \tag{5.6}$$

y (5.5) como

$$f(\tau) = -S_\nu[f](\tau), \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{5.7}$$

El Teorema 19, en particular, significa que para cualquier  $f \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  su parte  $P_\nu[f]$  es extendible al dominio  $\Omega^+$  en forma tal que la extensión pertenece a  $\ker D_\nu(\Omega^+)$  y su otra parte  $Q_\nu[f]$  es extendible a  $\Omega^-$  en forma tal que la extensión pertenece a  $\ker D_\nu(\Omega^-)$ . La función  $f$  en sí misma es extendible en este sentido a  $\Omega^+$  u  $\Omega^-$  si y sólo si  $Q_\nu[f] \equiv 0$  ó  $P_\nu[f] \equiv 0$  en  $\Gamma$  respectivamente.

El Teorema 19 permite considerar el siguiente problema con valores de frontera para el operador  $D_\nu$ .

**Problema 21** (*Problema interior de Dirichlet para el operador  $D_\nu$* ) Dada una función cuaterniónica compleja  $g \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ , el problema es encontrar una función  $f$  tal que

$$D_\nu f(x) = 0, \quad x \in \Omega^+$$

y

$$f(x) = g(x), \quad x \in \Gamma.$$

Analícemos este problema. Del Teorema 19 vemos inmediatamente que la solución del Problema 21 no siempre existe ya que no todas las funciones  $g$  son  $\nu$ -extendibles a  $\Omega^+$ . Éstas deben satisfacer la condición (5.4) o, equivalentemente, la condición (5.6) [51]:

$$g = S_\alpha g \quad \text{en } \Gamma.$$

Si esta condición es satisfecha, entonces la solución del Problema 21 de acuerdo a la fórmula integral de Cauchy se obtiene como la integral de Cauchy de  $g$  [46]:

$$f = K_\nu g.$$

## 5.1 Problema de extendibilidad en los dominios acotados

Recordemos que consideramos a  $\Omega$  como un dominio acotado en  $\mathbb{R}^3$  con una frontera de Liapunov  $\Gamma := \partial\Omega$ .

**Problema 22** *Encontrar un par de vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  que satisfagan las ecuaciones de Maxwell (3.9)-(3.12) en  $\Omega$ , así como las siguientes condiciones de frontera:*

$$\vec{E}|_{\Gamma} = \vec{e} \quad \text{y} \quad \vec{H}|_{\Gamma} = \vec{h},$$

donde  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  son funciones vectoriales complejas dadas definidas en  $\Gamma$  que satisfacen la condición de Hölder ahí.

Este problema es equivalente a un problema de valor de frontera para un par de funciones cuaterniónicas complejas, así que usaremos los resultados de la subsección 3.1.2 para reformular todos los elementos que conforman este problema.

Lo primero que haremos es considerar los análogos de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ : las funciones cuaterniónicas complejas introducidas anteriormente (3.16) y (3.17)

$$\vec{\varphi} := -i\omega\varepsilon\vec{E} + \nu\vec{H}, \quad \vec{\psi} := i\omega\varepsilon\vec{E} + \nu\vec{H}$$

donde consideramos  $\text{Im } \nu \geq 0$ . También recordemos que las ecuaciones (3.18) y (3.19)

$$(D - \nu)\vec{\varphi} = \text{div } \vec{j} + \nu\vec{j}, \quad (D + \nu)\vec{\psi} = -\text{div } \vec{j} + \nu\vec{j},$$

satisfechas por  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$  respectivamente, son equivalentes al sistema de ecuaciones de Maxwell (3.9)-(3.12).

La condición de frontera la obtenemos simplemente sustituyendo los valores de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en la frontera, en las funciones  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$

$$\vec{\varphi}|_{\Gamma} = -i\omega\varepsilon\vec{e} + \nu\vec{h} \quad \text{y} \quad \vec{\psi}|_{\Gamma} = i\omega\varepsilon\vec{e} + \nu\vec{h}.$$

Denotando  $\Omega^+ := \Omega$ ,  $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ , podemos presentar el siguiente equivalente del Problema 22:

**Problema 23** *Encontrar dos funciones puramente vectoriales  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$  que satisfagan (3.18), (3.19) en  $\Omega^+$  y las condiciones de frontera*

$$\vec{\varphi}|_{\Gamma} = -i\omega\varepsilon\vec{e} + \nu\vec{h} \quad y \quad \vec{\psi}|_{\Gamma} = i\omega\varepsilon\vec{e} + \nu\vec{h}.$$

Para dar solución a este problema consideremos

$$(D + \nu)f = g \quad \text{en } \Omega^+ \tag{5.8}$$

y

$$f|_{\Gamma} = v. \tag{5.9}$$

Introduzcamos la función

$$u := f - T_\nu g. \tag{5.10}$$

Si  $f$  resuelve el problema (5.8), (5.9), considerando que  $T_\nu$  es el operador inverso a la derecha de  $D_\nu$ , es decir  $D_\nu T_\nu = I$  (ver [39, Sec. 5.4], [43, Sec. 2.6]), entonces  $u$  es una solución del problema de frontera

$$D_\nu u = 0 \quad \text{en } \Omega^+,$$

$$u|_{\Gamma} = w,$$

donde

$$w(x) := v(x) - T_\nu g(x), \quad x \in \Gamma.$$

Hemos obtenido el problema de Dirichlet, presentado en la sección anterior, cuya solución existe (como vimos anteriormente) si y sólo si la función  $w$  satisface la condición [51]:

$$w = S_\nu w \quad \text{en } \Gamma.$$

En otras palabras,

$$\begin{aligned} v - T_\nu g &= S_\nu(f - T_\nu g) && \text{en } \Gamma \\ v - T_\nu g &= S_\nu v - S_\nu T_\nu g && \text{en } \Gamma. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Si esta condición es satisfecha, entonces la solución es [46]

$$u = K_\nu w = K_\nu(v - T_\nu g).$$

Consideremos la expresión  $K_\nu T_\nu g$ . De la fórmula de Borel-Pompeiu (Teorema 3) tenemos que

$$K_\nu T_\nu g = (I - T_\nu D_\nu)T_\nu g = T_\nu g - T_\nu g = 0. \quad (5.12)$$

Por lo tanto,

$$u = K_\nu v. \quad (5.13)$$

Además (5.12) nos da que, según la ecuación (5.1), cuando  $x \rightarrow \Gamma$ ,  $K_\nu \rightarrow P_\nu$ , por lo que  $P_\nu T_\nu g = 0$  en  $\Gamma$ , esto implica que

$$\begin{aligned} P_\nu T_\nu &= \frac{1}{2}(I + S_\nu)T_\nu \\ 2P_\nu T_\nu &= T_\nu + S_\nu T_\nu \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$T_\nu g = -S_\nu T_\nu g,$$

y la condición (5.11) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$v - S_\nu v = 2T_\nu g \quad \text{en } \Gamma$$

o

$$Q_\nu v = T_\nu g \quad \text{en } \Gamma. \quad (5.14)$$

Ahora, regresando al problema de valor de frontera, a partir de (5.10), obtenemos su solución en la forma

$$f = u + T_\nu g = K_\nu v + T_\nu g$$

la cual existe bajo la condición necesaria y suficiente (5.14). De hecho, tal función, obviamente, satisface (5.8) y gracias a las fórmulas de Plemelj-Sokhotski y (5.14), obtenemos en la frontera la igualdad requerida (5.9):

$$f|_{\Gamma} = P_\nu v + (T_\nu g)|_{\Gamma} = P_\nu v + Q_\nu v = v,$$

por lo que la condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución de este problema es la validez de las igualdades

$$Q_{-\nu}(-i\omega\varepsilon \vec{e} + \nu \vec{h}) = T_{-\nu}(\operatorname{div} \vec{j} + \nu \vec{j}) \quad \text{en } \Gamma \quad (5.15)$$

y

$$Q_\nu(i\omega\varepsilon \vec{e} + \nu \vec{h}) = T_\nu(-\operatorname{div} \vec{j} + \nu \vec{j}) \quad \text{en } \Gamma. \quad (5.16)$$

Por lo tanto, el Problema 22 tiene solución si y sólo si (5.15) y (5.16) son satisfechas y si éste es el caso, según (3.24) y (3.25) la solución está dada por las igualdades

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2i\omega\varepsilon} \left( i\omega\varepsilon(K_\nu + K_{-\nu})\vec{e} + \nu(K_\nu - K_{-\nu})\vec{h} - \right. \\ &\quad \left. -(T_\nu + T_{-\nu})\operatorname{div} \vec{j} + \nu(T_\nu - T_{-\nu})\vec{j} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2\nu} \left( \nu(K_\nu + K_{-\nu})\vec{h} + i\omega\varepsilon(K_\nu - K_{-\nu})\vec{e} - \right. \\ &\quad \left. -(T_\nu - T_{-\nu})\operatorname{div} \vec{j} + \nu(T_\nu + T_{-\nu})\vec{j} \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

o en forma vectorial por las fórmulas de Stratton-Chu (3.28) y (3.29), donde los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  del lado derecho deben ser reemplazados por sus valores de frontera  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$ . Resumamos este en el siguiente

**Teorema 24** *El problema 22 tiene solución si y sólo si las condiciones (5.15) y (5.16) son satisfechas y la solución está dada por (5.17) y (5.18).*

## 5.2 El operador de Helmholtz y la condición de radiación de Sommerfeld

En esta sección se usarán los conceptos y resultados de [20, Capítulo 3]. La formulación correcta de problemas de frontera para ecuaciones en dominios no acotados no es de ninguna forma bien conocida. En este caso, aparte de las condiciones en la frontera del dominio, tienen que imponerse más condiciones u otras en el infinito. Sin embargo, aunque la forma de las condiciones que deben ser dadas en la frontera de un dominio se conoce (como para los problemas en un dominio acotado), hasta fechas recientes no se sabía que condiciones se debían dar en el infinito.

La existencia de una solución única a problemas exteriores con valores en la frontera de la ecuación de Helmholtz puede ser establecida por el método de ecuaciones integrales definido sobre la frontera del obstáculo difractante. La principal ventaja del uso de métodos de ecuaciones integrales de frontera para estudiar problemas con valores en la frontera exterior para la ecuación de Helmholtz yace en el hecho de que esta aproximación reduce un problema definido sobre un dominio no acotado a uno definido sobre un dominio acotado de dimensión menor, esto es, la frontera del obstáculo difractante. Este hecho es, desde luego, crucial desde el punto de vista del análisis numérico. Sin embargo, las ventajas inherentes a los métodos de ecuaciones integrales de frontera no son alcanzadas sin ningún costo. Esto es básicamente debido al hecho de que el uso directo de la teoría de potenciales para formular ecuaciones integrales de frontera, para los problemas con valores en la frontera clásicos de la teoría de difracción, lleva a ecuaciones que no tienen solución única a los eigenvalores de

ciertos problemas con valores en la frontera interior. La implementación numérica de estos métodos presenta problemas posteriores ya que, en general, los eigenvalores no se conocen de antemano, y esto necesita el uso de métodos más sofisticados para tratar el problema de eigenvalores interiores, en particular, el estudio de ecuaciones integrales fuertemente singulares y su regularización.

Primero se discutirá el origen físico de problemas exteriores con valores en la frontera para la ecuación de Helmholtz, el concepto de una condición de radiación, y el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Helmholtz que satisfacen tal condición de radiación. Esta discusión permitiría introducir el concepto de un patrón de campo lejano y derivar los resultados de unicidad básica para los problemas exteriores de Dirichlet y Neumann —aunque dichos temas no se tratarán en el presente trabajo— cuyos resultados pueden extenderse para tratar los problemas de impedancia y transmisión.

A lo largo del capítulo se asume que los problemas son tridimensionales.

Primero discutamos algunos argumentos heurísticos que llevan a la noción de condición de radiación en el infinito. Consideremos la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + \nu^2)u(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (5.19)$$

la cual matemáticamente define la solución fundamental del operador de Helmholtz. Para que la solución de (5.19) tenga significado físico debemos recordar que describe una onda monocromática generada por una fuente puntual situada en el origen. Es razonable, físicamente hablando, requerir que  $u$  decrezca en el infinito, lo cual ayuda a obtener una energía finita del proceso de propagación. Suponga que  $\text{Im } \nu > 0$  entonces no es difícil ver (aplicando la transformada de Fourier a (5.19)) que la única solución de (5.19) que satisface este requerimiento es la función (generalizada)  $u = \theta_\nu$  definida por (2.15). La situación cambia drásticamente cuando suponemos que  $\text{Im } \nu = 0$ . En

este caso hay dos soluciones de (5.19) que decrecen en el infinito

$$u^+(x) := -\frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|} \quad \text{y} \quad u^-(x) := -\frac{e^{-i\nu|x|}}{4\pi|x|}.$$

Sin embargo, la unicidad de la solución fundamental es crucial para tener la unicidad de las representaciones integrales y de las soluciones de problemas con valores de frontera físicamente significativas. Hay dos formas de tratar esta situación. La primera está relacionada con el llamado principio de absorción límite (LAP, por sus siglas en Inglés), el cual, aplicado a (5.19) consiste en lo siguiente. Se asume que hay una pequeña absorción en el medio, caracterizada por un parámetro pequeño  $\epsilon$ . Entonces la ecuación correspondiente tiene la forma

$$(\Delta + (\nu + i\epsilon)^2)u_\epsilon(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (5.20)$$

Como hemos visto, para  $\epsilon > 0$  la solución de (5.20) que decrece en el infinito es única:

$$u_\epsilon(x) = -\frac{e^{i(\nu+i\epsilon)|x|}}{4\pi|x|}.$$

Considerando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  llegamos a la solución  $u^+$  de (5.19).

Otra posibilidad de obtener una solución única de (5.19) en el caso que  $\text{Im } \nu = 0$  es imponer una condición de radiación en el infinito. Para la ecuación de Helmholtz ésta fue propuesta por Sommerfeld y tiene la siguiente forma. Se requiere que  $u$  satisfaga la igualdad asintótica

$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - i\nu u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

Puede verificarse que esta condición es cumplida por  $u^+$  pero no por  $u^-$ . A continuación se introducirán los elementos necesarios para seguir el desarrollo que nos lleva a esta condición de radiación.

### 5.2.1 Difracción acústica armónica en tiempo

Considere la propagación de una onda en un medio homogéneo isotrópico en  $\mathbb{R}^3$  con densidad  $\rho$ , velocidad del sonido  $c$ , y coeficiente de amortiguación  $\gamma$ . El movimiento de la onda puede ser determinado de un potencial de velocidad  $U = U(x, t)$  del cual la velocidad del campo  $v$  es obtenida por

$$v = \frac{1}{\rho} \text{grad } U$$

y la presión  $p$  por

$$p - p_0 = -\frac{\partial U}{\partial t} - \gamma U$$

donde  $p_0$  denota la presión del medio sin perturbaciones. En la teoría linearizada, el potencial de velocidad  $U$  satisface la ecuación de onda disipativa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} - c^2 \Delta U = 0 \quad (5.21)$$

y por lo tanto para ondas acústicas armónicas en tiempo de la forma  $U(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}$  con frecuencia  $\omega > 0$ , deducimos que la parte dependiente del espacio  $u$  satisface la ecuación de onda reducida o ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + \nu^2 u = 0 \quad (5.22)$$

donde el número de onda  $\nu \neq 0$  está dado por  $\nu^2 = \omega(\omega + i\gamma)/c^2$ . Se escoge el signo de  $\nu$  tal que

$$\text{Im } \nu \geq 0. \quad (5.23)$$

De ahí, la descripción matemática de la difracción de las ondas armónicas en tiempo por un obstáculo  $\Omega$  lleva a problemas con valores en la frontera para la ecuación de Helmholtz. Aquí  $\Omega$  denota una región abierta acotada en  $\mathbb{R}^3$ . Prescribir los valores de  $u$  en la frontera del obstáculo (i.e., el problema de Dirichlet) corresponde físicamente

a prescribir la presión de la onda acústica. En particular, se considera la difracción de una onda acústica de entrada dada  $u^i$  por un obstáculo  $\Omega$ . Entonces la onda acústica total es de la forma  $u = u^i + u^s$  donde  $u^s$  denota la onda difractada y para un obstáculo suave al sonido la presión total debe desaparecer en la frontera, esto es  $u^s = -u^i$  sobre la frontera. De forma similar, prescribir la derivada normal de  $u$  sobre la frontera (i.e., en el problema de Neumann) corresponde físicamente a prescribir la componente normal de la velocidad de la onda acústica, esto es, a la difracción acústica de un obstáculo duro al sonido.

Una condición de frontera que presenta un tratamiento más realista de las propiedades acústicas del obstáculo  $\Omega$  en comparación con las condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann está dada por

$$\langle \mathbf{n}, v \rangle + \chi(p - p_0) = 0,$$

esto es, la velocidad normal en la frontera es proporcional al exceso de presión en la frontera. El coeficiente  $\chi$  es llamado impedancia acústica del obstáculo  $\Omega$  y es, en general, una función dependiente del espacio definida en la frontera  $\partial\Omega$ , la cual asumiremos como constituida por un número finito de superficies acotadas cerradas, inconexas que pertenecen a la clase  $C^2$ . Esta condición de impedancia lleva a un problema con valores en la frontera para el potencial de velocidad  $u$  de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \lambda u = 0$$

donde  $\lambda = i\chi\rho(\omega + i\gamma)$ .

### 5.2.2 Condición de radiación de Sommerfeld

Se inicia el análisis estableciendo la propiedad básica que cualquier solución de la ecuación de Helmholtz puede ser representada como la combinación de un potencial de superficie acústico de capa simple y uno de capa doble.

Sea  $\nu$  un número complejo tal que  $\text{Im } \nu \geq 0$ . La función

$$\theta_\nu(x - y) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\nu|x-y|}}{|x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y,$$

es una solución de la ecuación del Helmholtz (5.22) en  $\mathbb{R}^3$  con respecto a  $x$  para una  $y$  fija.

Sea  $\Gamma := \partial\Omega$ . Dada una función  $\phi \in C(\Gamma)$ , la función

$$u(x) := \int_{\Gamma} \theta_\nu(x - y) \phi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (5.24)$$

es llamada *potencial acústico de capa sencilla* con densidad  $\phi$  (ver [20, Capítulo 2]).

Ya que para  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  podemos diferenciar bajo el signo de la integral, vemos que  $u$  es una solución de la ecuación de Helmholtz y, por tanto, analítica en  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ .

Dada una función  $\psi \in C(\Gamma)$ , la función

$$v(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta_\nu(x - y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \psi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \quad (5.25)$$

es llamada *potencial acústico de doble capa* con densidad  $\psi$ . Asumimos la normal unitaria  $\mathbf{n}$  dirigida al exterior del dominio  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ . Note que el potencial de doble capa  $v$  también es una solución de la ecuación de Helmholtz y por tanto, analítico en  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ .

Para cualquier dominio acotado  $G$  con frontera  $\Lambda := \partial G$  de clase  $C^2$ , introducimos el espacio lineal  $\mathfrak{R}(G)$  de todas las funciones valuadas complejas  $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$  para las cuales la derivada normal en la frontera existe en el sentido que el límite

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \langle \mathbf{n}(x), \text{grad } u(x - h\mathbf{n}(x)) \rangle \quad x \in \Lambda, \quad h > 0$$

existe uniformemente sobre  $\Lambda$ . Recordemos que aquí  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar. Algunas líneas más adelante se verá qué es  $h$ . Aquí asumimos que la normal  $\mathbf{n}$  está dirigida al exterior de  $G$ . Se nota que la suposición  $u, v \in \mathfrak{R}(G)$  basta para garantizar

la validez del primer teorema de Green

$$\int_G u \Delta v dx = \int_\Lambda u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\Lambda - \int_G \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle dx \quad (5.26)$$

y del segundo teorema de Green

$$\int_G (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_\Lambda \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Lambda. \quad (5.27)$$

Esto se obtiene primero integrando sobre las superficies  $\Gamma_h$  [20, Capítulo 2] paralelas a  $\Gamma$

$$x = z + h\mathbf{n}(z), \quad z \in \Gamma, \quad (5.28)$$

donde el parámetro  $h$  denota la distancia de  $\Gamma_h$  a la superficie generadora  $\Gamma$ , y entonces pasando al límite  $\Lambda$ .

Debe recordarse que por  $\Omega$  se denota una región acotada en  $\mathbb{R}^3$  con la frontera  $\Gamma$  conformada por un número finito de superficies inconexas, cerradas, acotadas que pertenecen a la clase  $C^2$ . El exterior  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  se asume que está conectado, mientras que  $\Omega$  por sí mismo puede tener más de una componente. Se asume que la normal  $\mathbf{n}$  a  $\Omega$  está dirigida al exterior de  $\Omega$ .

**Teorema 25** [20] *Sea  $u \in \mathfrak{R}(\Omega)$  una solución de la ecuación de Helmholtz*

$$\Delta u + \nu^2 u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

*Entonces*

$$\int_\Gamma \left\{ u(y) \frac{\partial \theta_\nu(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \theta_\nu(x-y) \right\} d\Gamma_y = \begin{cases} -u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

**Prueba.** Se escoge un punto arbitrario fijo  $x \in \Omega$  y se circunscribe con una esfera  $S(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |x - y| = r\}$ . Asumamos que el radio  $r$  es lo suficientemente pequeño como para que  $S(x, r) \subset \Omega$  y dirijamos la normal unitaria  $\mathbf{n}$  a  $S(x, r)$  hacia

el interior de  $S(x, r)$ . Ahora apliquemos el segundo teorema de Green (5.27) a las funciones  $u(y)$  y  $\theta_\nu(x - y)$  en la región  $\{y \in \Omega \mid |x - y| > r\}$  para obtener

$$\int_{\Gamma+S(x,r)} \left\{ u(y) \frac{\partial \theta_\nu(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \theta_\nu(x-y) \right\} d\Gamma_y = 0. \quad (5.29)$$

Ya que en  $S(x, r)$  tenemos

$$\theta_\nu(x - y) = \frac{e^{i\nu r}}{4\pi r}, \quad \text{grad}_y \theta_\nu(x - y) = \left( \frac{1}{r} - i\nu \right) \frac{e^{i\nu r}}{4\pi r} \mathbf{n}(y)$$

(el subíndice en el operador  $\text{grad}_y$  indica la diferenciación con respecto a  $y$ ) un cálculo directo, usando el teorema del valor medio, muestra que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S(x,r)} \left\{ u(y) \frac{\partial \theta_\nu(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \theta_\nu(x-y) \right\} d\Gamma_y = u(x)$$

de donde de (5.29) el teorema de representación se establece para  $x \in \Omega$ . ■

El enunciado para  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  en seguida surge del teorema de Green aplicado a las funciones  $u(y)$  y  $\theta_\nu(x - y)$  en la región  $\Omega$ .

Cálculos directos muestran que

$$\left\langle \frac{x}{|x|}, \text{grad}_x \theta_\nu(x - y) \right\rangle - i\nu \theta_\nu(x - y) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

y

$$\left\langle \frac{x}{|x|}, \text{grad}_x \frac{\partial \theta_\nu(x - y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \right\rangle - i\nu \frac{\partial \theta_\nu(x - y)}{\partial \mathbf{n}(y)} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

uniformemente para todas las direcciones  $x/|x|$  y uniformemente para toda  $y$  contenida en el conjunto acotado  $\Gamma$ . De esto se concluye el siguiente

**Teorema 26** *Tanto el potencial acústico de capa simple definido por (5.24) como el de capa doble definido por (5.25) satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld*

$$\left\langle \frac{x}{|x|}, \text{grad } u(x) \right\rangle - i\nu u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

*uniformemente para todas las direcciones de  $x/|x|$ .*

La condición de radiación de Sommerfeld caracteriza completamente el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Helmholtz en el infinito.

**Teorema 27** Sea  $u \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  una solución de la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + \nu^2 u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$$

que satisface la condición de radiación de Sommerfeld

$$\left\langle \frac{x}{|x|}, \text{grad } u(x) \right\rangle - i\nu u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.30)$$

uniformemente para todas las direcciones  $x/|x|$ . Entonces

$$\int_{\Gamma} \left\{ u(y) \frac{\partial \theta_{\nu}(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \theta_{\nu}(x-y) \right\} d\Gamma_y = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ u(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

**Prueba.** Primero mostramos que

$$\int_{|y|=R} |u|^2 d\Gamma = O(1), \quad R \rightarrow \infty. \quad (5.31)$$

Para cumplir esto, primero observamos que de la condición de radiación (5.30) sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - i\nu u \right|^2 d\Gamma \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 + |\nu|^2 |u|^2 + 2 \text{Im} \left( \nu u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde  $\mathbf{n}$  denota la normal unitaria hacia el exterior de la esfera  $S^R := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y| = R\}$ . Se toma una  $R$  lo suficientemente grande para que  $S^R \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  y se aplica el primer teorema de Green (5.26) en el dominio  $B^R := \{y \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \mid |y| < R\}$  para obtener

$$\nu \int_{|y|=R} u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \nu \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \nu^* |\nu|^2 \int_{B^R} |u|^2 dy + \nu \int_{B^R} |\text{grad } u|^2 dy.$$

Ahora se substituye la parte imaginaria de la última ecuación en (5.32) y se encuentra que

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{|y|=R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 + |\nu|^2 |u|^2 \right\} d\Gamma + 2 \operatorname{Im}(\nu) \int_{B^R} \{ |\nu|^2 |u|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 \} dy \right\} \\ &= -2 \operatorname{Im} \left( \nu \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Los cuatro términos a la izquierda de (5.33) son no negativos, ya que  $\operatorname{Im}(\nu) \geq 0$ . Por lo tanto estos términos deben estar individualmente acotados mientras  $R \rightarrow \infty$  ya que su suma tiende a un límite finito. La ecuación (5.31) sigue inmediatamente.

Ahora notamos la identidad

$$\begin{aligned} & \int_{|y|=R} \left\{ u(y) \frac{\partial \theta_\nu(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \theta_\nu(x-y) \right\} d\Gamma_y \\ &= \int_{|y|=R} u(y) \left\{ \frac{\partial \theta_\nu(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - i\nu \theta_\nu(x-y) \right\} d\Gamma_y \\ &\quad - \int_{|y|=R} \theta_\nu(x-y) \left\{ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) - i\nu u(y) \right\} d\Gamma_y =: \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

y se aplica la desigualdad de Schwarz a cada una de las integrales  $\mathbf{I}_1$  e  $\mathbf{I}_2$ . De la condición de radiación

$$\frac{\partial \theta_\nu(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - i\nu \theta_\nu(x-y) = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad y \in S^R,$$

para la solución fundamental y (5.31) vemos que  $\mathbf{I}_1 = O(1/R)$  mientras  $R \rightarrow \infty$ . La condición de radiación (5.30) y  $\theta_\nu(x-y) = O(1/R)$ ,  $y \in S^R$ , dan  $\mathbf{I}_2 = o(1)$  para  $R \rightarrow \infty$ . Por tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left\{ u(y) \frac{\partial \theta_\nu(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \theta_\nu(x-y) \right\} d\Gamma_y = 0.$$

La prueba se completa como en el Teorema 25 aplicando el segundo teorema de Green en el dominio  $\{y \in B^R \mid |x - y| > r\}$  si  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  o  $B^R$  si  $x \in \Omega$ . ■

**Nota 28** *Cualquier solución de la ecuación de Helmholtz que satisface la condición de radiación de Sommerfeld (5.30) automáticamente satisface*

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

*uniformemente para todas las direcciones  $x/|x|$ .*

Note que no es necesario imponer esta condición adicional para que el teorema de representación sea válido.

Físicamente, la solución fundamental  $\theta_\nu(x - y)$  describe una onda esférica saliente de la forma

$$\frac{e^{i(\nu|x-y|-\omega t)}}{4\pi|x-y|}.$$

Por lo tanto la condición de radiación, primero introducida por Sommerfeld [73], matemáticamente caracteriza ondas salientes. De forma similar, usando la solución fundamental

$$\frac{e^{-i\nu|x-y|}}{4\pi|x-y|},$$

es posible desarrollar una teoría análoga de ondas de entrada caracterizadas por la condición

$$\left\langle \frac{x}{|x|}, \text{grad } u(x) \right\rangle + i\nu u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Del Teorema de representación 25, se concluye que las soluciones de la ecuación de Helmholtz son

$$= -\left(\nu^2 + \frac{(1 - i\nu|x|)^2}{|x|^2}\right) \frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|} = \left(-\frac{1}{|x|^2} + \frac{2i\nu}{|x|}\right) \frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|}.$$

Esta función decrece en el infinito como  $O(1/|x|^2)$  y por tanto (5.35) se cumple para  $\mathcal{K}^+$ . El mismo procedimiento muestra que  $\mathcal{K}^-$  no satisface (5.35). funciones analíticas de sus variables independientes.

### 5.3 Condición de radiación para los operadores $D_{\pm\nu}$

Una situación similar a la tratada para la condición de radiación del operador de Helmholtz se observa en el caso del operador  $D_\nu$ . Cuando  $\text{Im } \nu = 0$  la ecuación

$$D_\nu \mathcal{K}(x) = \delta(x), \quad \nu \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

admite dos soluciones que decrecen en el infinito obtenidas (de acuerdo a (2.14)) mediante la aplicación del operador  $-D_{-\nu}$  a las soluciones fundamentales del operador de Helmholtz  $u^+$  y  $u^-$  respectivamente:

$$\mathcal{K}^\pm(x) = \left( \nu + \frac{x}{|x|^2} \mp i\nu \frac{x}{|x|} \right) \cdot u^\pm(x). \quad (5.34)$$

Para omitir una de estas posibilidades, se impone la siguiente condición de radiación [46]

$$\left( \nu - \frac{x}{|x|^2} + i\nu \frac{x}{|x|} \right) \cdot \mathcal{K}(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.35)$$

Veamos que pasa con la función  $\mathcal{K}^+$ . Consideremos

$$\begin{aligned} & - \left( \nu - \frac{x}{|x|^2} + i\nu \frac{x}{|x|} \right) \cdot \left( \nu + \frac{x}{|x|^2} - i\nu \frac{x}{|x|} \right) \frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|} = \\ & = - \left( \nu - \frac{x}{|x|} \left( \frac{1 - i\nu|x|}{|x|} \right) \right) \cdot \left( \nu + \frac{x}{|x|} \left( \frac{1 - i\nu|x|}{|x|} \right) \right) \frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|} = \\ & = - \left( \nu^2 + \frac{(1 - i\nu|x|)^2}{|x|^2} \right) \frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|} = \left( -\frac{1}{|x|^2} + \frac{2i\nu}{|x|} \right) \frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|}. \end{aligned}$$

Esta función decrece en el infinito como  $O(1/|x|^2)$  y por tanto (5.35) se cumple para  $\mathcal{K}^+$ . El mismo procedimiento muestra que  $\mathcal{K}^-$  no satisface (5.35).

Como se mostró en [58], la condición anterior puede ser representada en una forma más elegante. Notemos que la expresión que aparece en (5.35) puede ser reescrita como sigue

$$\left( \nu - \frac{x}{|x|^2} + i\nu \frac{x}{|x|} \right) = \nu \left( 1 + \frac{ix}{|x|} \right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Entonces, una idea natural es introducir la condición de radiación como

$$\left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) f(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.36)$$

ya que el término  $x/|x|^2$  aparentemente da un decrecimiento más rápido. El problema aquí es que (5.36) no implica el decrecimiento del producto  $\frac{x}{|x|^2} \cdot f(x)$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  debido al hecho que  $(1 + \frac{ix}{|x|})$  es un divisor de cero.

El siguiente ejemplo aclara esto. Considere  $f(x) := (1 - \frac{ix}{|x|}) \cdot |x|^2$ . Esta función obviamente (recuerde la propiedad 2 del Lema 1) satisface (5.36) pero  $\frac{x}{|x|^2} \cdot f(x) = O(|x|)$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ . Entonces, para poder aplicar (5.36) en lugar de (5.35), debemos probar que si  $f$  pertenece a  $\ker D_\nu(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  y satisface (5.36) entonces decrece en el infinito. Siguiendo los argumentos de [58] se prueba esto.

**Teorema 29** *Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ ,  $f \in \ker D_\nu(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ ,  $\text{Im } \nu \geq 0$ , tal que satisfaga (5.36). Entonces*

$$\int_{|x|=R} |f(x)|_c^2 d\Gamma_x^R = O(1) \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty, \quad (5.37)$$

donde el módulo  $|\cdot|_c$  se define en (2.5).

**Prueba.** Considere la expresión

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) f \right|_c^2 &= \text{Sc} \left( \left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) f \overline{f}^* \left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) \right) = 2 \text{Sc} \left( \left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) f \overline{f}^* \right) = \\ &= 2 \left( |f|_c^2 - \text{Im Sc}(\overline{f}^* \frac{x}{|x|} f) \right). \end{aligned}$$

Sea  $\Gamma^R$  una esfera con centro en el origen y radio  $R$  lo suficientemente grande como para que  $\Omega$  esté contenido en la bola  $B^R$  con frontera  $\partial B^R = \Gamma^R$  y  $\Omega^R := B^R \setminus \overline{\Omega}$ .

Consecuentemente,

$$\int_{|x|=R} \left| \left( 1 + \frac{ix}{|x|} \right) f(x) \right|_c^2 d\Gamma_x^R = 2 \left( \int_{|x|=R} |f(x)|_c^2 d\Gamma_x^R - \operatorname{Im} \operatorname{Sc} \left( \int_{|x|=R} \bar{f}^*(x) \frac{x}{|x|} f(x) d\Gamma_x^R \right) \right). \quad (5.38)$$

Debido al Teorema 2 tenemos

$$\int_{|x|=R} \bar{f}^*(x) \cdot \frac{x}{|x|} \cdot f(x) d\Gamma_x^R = \int_{\Gamma} \bar{f}^*(x) \cdot \vec{n}(x) \cdot f(x) d\Gamma_x +$$

$$\int_{\Omega^R} (D_r(\bar{f}^*(x)) \cdot f(x) + \bar{f}^*(x) \cdot Df(x)) dx.$$

La primera integral en el lado derecho es alguna constante  $c$ . Para simplificar la segunda usamos  $Df = -\nu f$  y observamos que

$$D_r \bar{f}^* = -\overline{Df^*} = \overline{\nu^* f^*} = \nu^* \bar{f}^*.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^R} (D_r(\bar{f}^*(x)) \cdot f(x) + \bar{f}^*(x) \cdot Df(x)) dx &= \int_{\Omega^R} (\nu^* \bar{f}^*(x) \cdot f(x) - \nu \bar{f}^*(x) \cdot f(x)) dx = \\ &= -2i \operatorname{Im} \nu \int_{\Omega^R} \bar{f}^*(x) \cdot f(x) dx, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\operatorname{Sc} \left( \int_{|x|=R} \bar{f}^*(x) \frac{x}{|x|} f(x) d\Gamma_x^R \right) = c_0 - 2i \operatorname{Im} \nu \int_{\Omega^R} |f(x)|_c^2 dx.$$

Substituyendo esta expresión en (5.38) y usando la condición de radiación (5.36) tenemos

$$\int_{|x|=R} |f(x)|_c^2 d\Gamma_x^R = \operatorname{Im} c_0 - 2 \operatorname{Im} \nu \int_{\Omega^R} |f(x)|_c^2 dx, \quad R \rightarrow \infty.$$

El último término en la ecuación anterior desaparece cuando  $\text{Im } \nu = 0$  y es negativo cuando  $\text{Im } \nu > 0$ . En ambos casos (5.37) es probada. ■

Este teorema establece la equivalencia de las condiciones de radiación (5.35) y (5.36) para las funciones de  $\ker D_\nu$ .

**Nota 30** Para las funciones  $g$  del  $\ker D_{-\nu}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$  la condición de radiación tiene la forma

$$\left(1 - \frac{ix}{|x|}\right) g(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.39)$$

Dado que consideramos funciones bicuaterniónicas que satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + \nu^2) u = 0 \quad (5.40)$$

en dominios no acotados es conveniente obtener una condición de radiación en el infinito en forma cuaterniónica para tales funciones. Esta condición se obtuvo en [35] y la presentaremos después de introducir ciertos operadores necesarios para su estudio. Introduzcamos estos operadores

$$\Pi_{\pm\nu} := \mp \frac{1}{2\nu} D_{\mp\nu},$$

que se consideran actuando en funciones de  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$  pertenecientes al  $\ker(\Delta + \nu^2)$ .

**Proposición 31** Las siguientes relaciones se cumplen:

1.  $\Pi_{\pm\nu^2} = \Pi_{\pm\nu}$ ,
2.  $\Pi_\nu \Pi_{-\nu} = \Pi_{-\nu} \Pi_\nu = 0$ ,
3.  $\Pi_\nu + \Pi_{-\nu} = I$ ,
4. Mientras  $\text{im } \Pi_{\pm\nu} = \ker D_{\pm\nu}$  tenemos  $\ker(\Delta + \nu^2) = \ker D_\nu \oplus \ker D_{-\nu}$ .

Denotemos a los dominios interior y exterior como  $\Omega^+ := \Omega$  y  $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ . La consideración de las ecuaciones

$$D_\nu f = 0$$

ó

$$D_{-\nu} f = 0$$

en el dominio  $\Omega^-$  requiere que se impongan las condiciones de radiación en el infinito (5.36) y (5.39) respectivamente, uniformemente en todas las direcciones.

Si una solución  $u_0$  de la ecuación de Helmholtz es una función escalar, entonces la condición de radiación correspondiente es la condición de Sommerfeld

$$i\nu u_0(x) - \left\langle \frac{x}{|x|}, \text{grad } u_0(x) \right\rangle = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.41)$$

Para una solución vectorial de la ecuación de Helmholtz, la condición de radiación correspondiente tiene la forma [20]

$$\left[ \text{rot } \vec{u} \times \frac{x}{|x|} \right] + \frac{x}{|x|} \text{div } \vec{u} - i\nu \vec{u} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.42)$$

Note que una solución vectorial  $\vec{u}$  de la ecuación de Helmholtz satisface esta condición si y sólo si cada componente cartesiana de  $\vec{u}$  satisface la condición de Sommerfeld [20]. Por tanto, nuestra condición de radiación cuaterniónica debe incluir las condiciones (5.41) para  $u_0$  y (5.42) para  $\vec{u}$ .

Es fácil obtener tal condición usando la Proposición 31 y las condiciones de radiación (5.36) y (5.39). De la Proposición 31, una solución de (5.40) valuada en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ,  $u = u_0 + \vec{u}$ , tiene la forma  $u = \Pi_\nu u + \Pi_{-\nu} u$ , donde  $\Pi_\nu u$  satisface (5.36) y  $\Pi_{-\nu} u$  satisface (5.39). De esta forma obtenemos

$$u(x) = -i \frac{x}{|x|} \cdot \Pi_\nu u(x) + i \frac{x}{|x|} \cdot \Pi_{-\nu} u(x) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

De la definición de  $\Pi_{\pm\nu}$  tenemos

$$2\nu u(x) = i\frac{x}{|x|} \cdot (D - \nu)u(x) + i\frac{x}{|x|} \cdot (D + \nu)u(x) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

Finalmente llegamos a la siguiente condición de radiación en el infinito para las soluciones cuaterniónicas complejas de la ecuación de Helmholtz (5.40):

$$i\nu u(x) + \frac{x}{|x|} \cdot Du(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.43)$$

Como es fácil de observar, cuando  $u = u_0$ , entonces la parte escalar de esta igualdad nos da exactamente la condición de Sommerfeld (5.41) y la parte vectorial

$$\left[ \frac{x}{|x|} \times \text{grad } u_0(x) \right] = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty \quad (5.44)$$

es una igualdad redundante ya que es una simple consecuencia del hecho de que una solución escalar de la ecuación de Helmholtz que satisface la condición de Sommerfeld en el infinito puede ser representada como un potencial de capa simple que satisface (5.44).

Cuando  $u = \vec{u}$ , la parte vectorial de (5.43) nos da (5.42) y la parte escalar

$$\left\langle \frac{x}{|x|}, \text{rot } \vec{u}(x) \right\rangle = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty$$

es nuevamente una simple consecuencia de la representación integral de (ver [20, Sec. 4.2] ó [51, p. 120]). Por tanto, (5.43) en casos especiales se reduce a (5.41) y (5.42) y en general representa la condición de radiación en el infinito para la ecuación de Helmholtz cuaterniónica. Note que (5.36) y (5.39) surgen de (5.41) inmediatamente si uno asume que  $u \in \ker D_\nu$  o que  $u \in \ker D_{-\nu}$  respectivamente.

## 5.4 Condiciones de radiación de Silver-Müller

Se considera la propagación de una onda electromagnética en un medio homogéneo isotrópico en  $\mathbb{R}^3$  con permitividad eléctrica  $\varepsilon$ , permeabilidad magnética  $\mu$ , y con-

ductividad eléctrica  $\sigma$ . La onda electromagnética con frecuencia  $\omega > 0$  se describirá por los campos eléctrico y magnético

$$\mathbf{E}(x, t) = \left( \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{-1/2} \tilde{E}(x) e^{i\omega t}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \mu^{-1/2} \tilde{H}(x) e^{i\omega t}.$$

De la forma dependiente del tiempo de las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\sigma \mathbf{E} \quad (5.46)$$

concluimos que las partes dependientes del espacio  $\tilde{E}$  y  $\tilde{H}$  satisfacen la forma armónica en tiempo de las ecuaciones de Maxwell

$$\left( \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{-1/2} \operatorname{rot} \tilde{E} + i\omega \mu^{1/2} \tilde{H} = 0, \quad \mu^{-1/2} \operatorname{rot} \tilde{H} - i\omega \left( \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{1/2} \tilde{E} = 0$$

multiplicando las ecuaciones anteriores por  $\left( \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{1/2}$  y  $\mu^{1/2}$  respectivamente obtenemos

$$\operatorname{rot} \tilde{E} + i\nu \tilde{H} = 0 \quad \operatorname{rot} \tilde{H} - i\nu \tilde{E} = 0 \quad (5.47)$$

donde el número de onda  $\nu$  está dado por  $\nu^2 := \left( \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu \omega^2$ . Se escoge el signo de  $\nu$  tal que

$$\operatorname{Im} \nu \geq 0. \quad (5.48)$$

Por lo tanto, la descripción matemática de la difracción de ondas armónicas en tiempo por un obstáculo  $\Omega$  lleva a problemas de valor de frontera para las ecuaciones de Maxwell reducidas. En particular, se considera la difracción de una onda electromagnética dada  $\tilde{E}^i$ ,  $\tilde{H}^i$  entrando por un cuerpo perfectamente conductor  $\Omega$ . Entonces para la onda total  $\tilde{E}^{\text{tot}} = \tilde{E}^i + \tilde{E}^s$ ,  $\tilde{H}^{\text{tot}} = \tilde{H}^i + \tilde{H}^s$ , donde  $\tilde{E}^s$ ,  $\tilde{H}^s$  denotan la onda difractada. La componente tangencial del campo eléctrico debe desvanecerse

en la superficie conductora  $\Omega$ , esto es,  $[\mathbf{n} \times \tilde{E}^{\text{tot}}] = 0$ . La difracción por un cuerpo  $\Omega$  que no es perfectamente conductor pero que no permite que la onda electromagnética penetre profundamente en el cuerpo lleva a una condición de frontera de impedancia de la forma

$$[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \tilde{H}^{\text{tot}}]] - \psi[\mathbf{n} \times \tilde{E}^{\text{tot}}] = 0$$

donde  $\psi$  denota la (posiblemente no constante) impedancia electromagnética del obstáculo  $\Omega$ .

### 5.4.1 Teoremas de representación y condiciones de radiación

Se comienza el análisis estableciendo un teorema de representación debido a Stratton y Chu que muestra que cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell armónicas en tiempo puede ser representada como el campo electromagnético generado por una combinación de distribuciones de superficie de dipolos eléctricos y magnéticos. Sea  $\Gamma := \partial\Omega$ .

**Teorema 32** *Sea  $\tilde{E}, \tilde{H} \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  una solución de las ecuaciones de Maxwell*

$$\text{rot } \tilde{E} + i\nu\tilde{H} = 0, \quad \text{rot } \tilde{H} - i\nu\tilde{E} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

*Entonces*

$$\begin{aligned} & \text{rot} \int_{\Gamma} [\mathbf{n}(y) \times \tilde{E}(y)] \theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y + \\ & + \frac{1}{i\nu} \text{rot rot} \int_{\Gamma} [\mathbf{n}(y) \times \tilde{H}(y)] \theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y = \begin{cases} \tilde{E}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \end{aligned}$$

$y$

$$\begin{aligned} & \text{rot} \int_{\Gamma} [\mathbf{n}(y) \times \tilde{H}(y)] \theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y - \\ & - \frac{1}{i\nu} \text{rot rot} \int_{\Gamma} [\mathbf{n}(y) \times \tilde{E}(y)] \theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y = \begin{cases} \tilde{H}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Prueba.** Se usarán las notaciones introducidas en la prueba del Teorema 25 y se escoge un punto arbitrario fijo  $x \in \Omega$  y un vector unitario fijo arbitrario  $e \in \mathbb{R}^3$ . Usando las ecuaciones de Maxwell para  $\tilde{E}$  y  $\tilde{H}$  y la relación  $\text{rot rot rot } e\theta_{\nu} = \nu^2 \text{rot } e\theta_{\nu}$ , calculamos

$$\text{div} \left\{ [\tilde{E} \times \text{rot } e\theta_{\nu}] + \frac{1}{i\nu} [\tilde{H} \times \text{rot rot } e\theta_{\nu}] \right\} = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \{x\}.$$

Por tanto, del teorema de Gauss, se encuentra

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma+S(x,r)} \left\{ (\mathbf{n}(y), \tilde{E}(y), \text{rot}_y e\theta_{\nu}(x-y)) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{i\nu} (\mathbf{n}(y), \tilde{H}(y), \text{rot}_y \text{rot}_y e\theta_{\nu}(x-y)) \right\} d\Gamma_y = 0, \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde  $(\cdot, \cdot, \cdot)$  es el producto escalar triple de tres vectores definido, por ejemplo para los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ , como

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left\langle \vec{a}, [\vec{b} \times \vec{c}] \right\rangle$$

(para más información, ver e.g. [22]).

Con la ayuda del teorema de Stokes y la segunda ecuación de Maxwell, vemos que

$$\begin{aligned} & \int_{S(x,r)} (\mathbf{n}(y), \tilde{H}(y), \text{grad}_y \text{div}_y e\theta_{\nu}(x-y)) d\Gamma_y \\ & = i\nu \int_{S(x,r)} \left\langle \mathbf{n}(y), \tilde{E}(y) \right\rangle \text{div}_y e\theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y. \end{aligned}$$

Entonces, ya que en  $S(x, r)$  tenemos  $\theta_{\nu}(x-y) = O(1/r)$  y

$$\text{div } e\theta_{\nu}(x-y) = \frac{\langle \mathbf{n}(y), e \rangle}{4\pi r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad \text{rot } e\theta_{\nu}(x-y) = \frac{[\mathbf{n}(y) \times e]}{4\pi r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

se usa  $\text{rot rot } e\theta_\nu = \nu^2 e\theta_\nu + \text{grad div } e\theta_\nu$  para obtener por cálculo directo que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S(x,r)} \left\{ (\mathbf{n}(y), \tilde{E}(y), \text{rot}_y e\theta_\nu(x-y)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{i\nu} (\mathbf{n}(y), \tilde{H}(y), \text{rot}_y \text{rot}_y e\theta_\nu(x-y)) \right\} d\Gamma_y = \langle e, \tilde{E}(x) \rangle.$$

Finalmente, observando la relación de simetría

$$\text{grad}_x \theta_\nu(x-y) = -\text{grad}_y \theta_\nu(x-y)$$

se verifica fácilmente que

$$(\mathbf{n}(y), \tilde{E}(y), \text{rot}_y e\theta_\nu(x-y)) = \langle e, \text{rot}_x [\mathbf{n}(y) \times \tilde{E}(y)] \theta_\nu(x-y) \rangle$$

y

$$(\mathbf{n}(y), \tilde{H}(y), \text{rot}_y \text{rot}_y e\theta_\nu(x-y)) = \langle e, \text{rot}_x \text{rot}_x [\mathbf{n}(y) \times \tilde{H}(y)] \theta_\nu(x-y) \rangle.$$

Por lo tanto, podemos concluir ahora de (5.49) que

$$\left( e, \int_{\Gamma} \{ \text{rot}_x [\mathbf{n}(y) \times \tilde{E}(y)] \theta_\nu(x-y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{i\nu} \text{rot}_x \text{rot}_x [\mathbf{n}(y) \times \tilde{H}(y)] \theta_\nu(x-y) \} d\Gamma_y + \tilde{E}(x) \right) = 0.$$

Ya que  $e$  es arbitrario, se ha establecido el Teorema 32 para  $x \in \Omega$ . ■

Si  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ , la prueba sigue en una forma similar de la identidad

$$\int_{\Gamma} \left\{ (\mathbf{n}(y), \tilde{E}(y), \text{rot}_y e\theta_\nu(x-y)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{i\nu} (\mathbf{n}(y), \tilde{H}(y), \text{rot}_y \text{rot}_y e\theta_\nu(x-y)) \right\} d\Gamma_y = 0.$$

La representación de  $\tilde{H}$  se obtiene fácilmente usando  $\tilde{H} = -(1/i\nu) \text{rot } \tilde{E}$ .

**Teorema 33** *Cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell continuamente diferenciable posee componentes cartesianas analíticas.*

En particular, las componentes cartesianas de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son automáticamente dos veces continuamente diferenciables. Por tanto, podemos emplear la identidad vectorial

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{E} = -\Delta \tilde{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \tilde{E}$$

para probar el siguiente resultado.

**Teorema 34** Sean  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{H}$  soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Entonces  $\tilde{E}$  y  $\tilde{H}$  están libres de divergencia y satisfacen la ecuación de Helmholtz vectorial

$$\Delta \tilde{E} + \nu^2 \tilde{E} = 0, \quad \Delta \tilde{H} + \nu^2 \tilde{H} = 0.$$

A la inversa, sea  $\tilde{E}$  (o  $\tilde{H}$ ) una solución de la ecuación vectorial de Helmholtz que satisface  $\operatorname{div} \tilde{E} = 0$  (o  $\operatorname{div} \tilde{H} = 0$ ). Entonces  $\tilde{E}$  y  $\tilde{H} := -(1/i\nu) \operatorname{rot} \tilde{E}$  (o  $\tilde{H}$  y  $\tilde{E} := (1/i\nu) \operatorname{rot} \tilde{H}$ ) satisfacen las ecuaciones de Maxwell.

Sea  $a \in \mathbb{R}^3$  un vector constante. Entonces

$$\tilde{E}_m(x) : = \operatorname{rot}_x a \theta_\nu(x - y) \tag{5.50}$$

$$\tilde{H}_m(x) : = -\frac{1}{i\nu} \operatorname{rot} \tilde{E}_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$$

representa el campo electromagnético generado por un dipolo magnético localizado en el punto  $y \in \mathbb{R}^3$  y resuelve las ecuaciones de Maxwell. De forma similar,

$$\tilde{H}_e(x) : = \operatorname{rot}_x a \theta_\nu(x - y) \tag{5.51}$$

$$\tilde{E}_e(x) : = \frac{1}{i\nu} \operatorname{rot} \tilde{H}_e(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$$

representa el campo electromagnético generado por un dipolo eléctrico. El Teorema 32 obviamente da una representación de cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell

en términos de dipolos eléctricos y magnéticos distribuidos en la superficie de la frontera y en este sentido los campos (5.50) y (5.51) pueden ser considerados como soluciones fundamentales de las ecuaciones de Maxwell.

Por cálculos directos se puede ver que

$$\tilde{E}_m(x) = i\nu\theta_\nu(x-y) \left[ \frac{x}{|x|} \times a \right] + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

$$\tilde{H}_m(x) = i\nu\theta_\nu(x-y) \left\{ a - \left\langle a, \frac{x}{|x|} \right\rangle \frac{x}{|x|} \right\} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

uniformemente para todas las direcciones  $x/|x|$  y uniformemente para toda y contenida en cualquier conjunto acotado de  $\mathbb{R}^3$ . De esto, y la propiedad  $\tilde{E}_e = -\tilde{H}_m$ ,  $\tilde{H}_e = \tilde{E}_m$ , concluimos lo siguiente.

**Teorema 35** Tanto el campo electromagnético  $\tilde{E}_m$ ,  $\tilde{H}_m$  de un dipolo magnético, como el campo electromagnético  $\tilde{E}_e$ ,  $\tilde{H}_e$  de un dipolo eléctrico satisfacen las condiciones de radiación de Silver-Müller ([65], [72])

$$\left[ \tilde{H} \times \frac{x}{|x|} \right] + \tilde{E} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

y

$$\left[ \tilde{E} \times \frac{x}{|x|} \right] - \tilde{H} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

uniformemente para todas las direcciones  $x/|x|$ .

Basta imponer una de estas condiciones de radiación para caracterizar completamente el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el infinito.

**Teorema 36** Soluciones  $\tilde{E}, \tilde{H} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$  las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} \tilde{E} + i\nu\tilde{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \tilde{H} - i\nu\tilde{E} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

y una de las condiciones de radiación de Silver-Müller

$$\left[ \tilde{H} \times \frac{x}{|x|} \right] + \tilde{E} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.52)$$

o

$$\left[ \tilde{E} \times \frac{x}{|x|} \right] - \tilde{H} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.53)$$

uniformemente para todas las direcciones  $x/|x|$ . Entonces

$$\begin{aligned} & \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [\mathbf{n}(y) \times \tilde{E}(y)] \theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y + \\ & + \frac{1}{i\nu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [\mathbf{n}(y) \times \tilde{H}(y)] \theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ -\tilde{E}(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [\mathbf{n}(y) \times \tilde{H}(y)] \theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y - \\ & - \frac{1}{i\nu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\Gamma} [\mathbf{n}(y) \times \tilde{E}(y)] \theta_{\nu}(x-y) d\Gamma_y = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ -\tilde{H}(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Corolario 37** *Cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell que satisface la condición de radiación*

$$\left[ \tilde{H} \times \frac{x}{|x|} \right] + \tilde{E} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

uniformemente para todas las direcciones  $x/|x|$  también satisface

$$\left[ \tilde{E} \times \frac{x}{|x|} \right] - \tilde{H} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

uniformemente para todas las direcciones y viceversa.

Ya que los cálculos directos muestran que las componentes cartesianas de las soluciones fundamentales (5.50) y (5.51) satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld uniformemente para toda  $y$  contenida en cualquier dominio acotado de  $\mathbb{R}^3$ , del Teorema 36 podemos concluir el siguiente resultado.

**Corolario 38** *Las componentes cartesianas de cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell que satisfagan las condiciones de radiación de Silver-Müller también satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld para la ecuación de Helmholtz escalar. Esto se cumple también en sentido inverso.*

Es importante remarcar que la ecuación (5.47) obtenida a partir de la forma de los campos eléctrico y magnético en (5.45) nos lleva a obtener las condiciones de radiación de Silver-Müller normalizadas. Ahora bien, usando las definiciones que habíamos introducido anteriormente en (3.7), (3.8) y las ecuaciones de Maxwell (3.9)-(3.12) tenemos lo siguiente

$$\operatorname{rot} \vec{E} + i\omega\mu\vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} - i\omega\varepsilon\vec{E} = 0$$

de donde se obtiene

$$\frac{1}{W} \operatorname{rot} \vec{E} + i\nu\vec{H} = 0, \quad W \operatorname{rot} \vec{H} - i\nu\vec{E} = 0.$$

Aquí  $W$  es la impedancia de onda intrínseca del medio, introducida como  $W = \sqrt{\mu}/\sqrt{\varepsilon}$ . Podemos decir entonces que para un par de soluciones  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  de las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{1}{W} \operatorname{rot} \vec{E} + i\nu\vec{H} = 0, \quad W \operatorname{rot} \vec{H} - i\nu\vec{E} = 0,$$

las condiciones de radiación de Silver-Müller tienen la siguiente forma

$$\left[ \vec{H} \times \frac{x}{|x|} \right] + \frac{1}{W} \vec{E} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty, \quad (5.54)$$

o

$$\left[ \vec{E} \times \frac{x}{|x|} \right] - W\vec{H} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.55)$$

## 5.5 El problema de la extendibilidad en los dominios no acotados

De igual forma que en el caso del problema de extendibilidad para el dominio acotado, iniciemos estudiando un problema de Dirichlet, en este caso exterior.

**Problema 39** (*Problema exterior de Dirichlet para el operador  $D_\nu$* ) Dada una función cuaterniónica compleja  $g \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ , el problema es encontrar una función  $f$  tal que

$$D_\nu f(x) = 0, \quad x \in \Omega^-,$$

$$f(x) = g(x), \quad x \in \Gamma,$$

y además  $f$  debe satisfacer (5.36) en el infinito.

Este problema puede ser analizado en forma similar al del caso interior con algunas diferencias. La primera de ellas será que la función  $f$  debe satisfacer la condición de radiación (5.36) en el infinito. Así que debe satisfacer la condición (5.5) o, equivalentemente, la condición (5.7) [51]:

$$g = -S_\alpha g \quad \text{en } \Gamma.$$

Si ésta se cumple, entonces la solución del Problema (21) de acuerdo a la fórmula integral de Cauchy se obtiene como:

$$f = -K_\nu g.$$

Una vez mostrado lo anterior, podemos tratar el problema de extendibilidad para el campo electromagnético en el dominio no acotado.

**Problema 40** Encontrar un par de vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  que satisfagan las ecuaciones de Maxwell (3.9)-(3.12) en  $\Omega^-$ , las condiciones de frontera

$$\vec{E}|_{\Gamma} = \vec{e} \quad y \quad \vec{H}|_{\Gamma} = \vec{h},$$

donde  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  son funciones vectoriales complejas dadas definidas en  $\Gamma$  que satisfacen la condición de Hölder ahí. Además  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  deben cumplir la condición de Silver-Müller en el infinito:

$$\left[ \vec{E} \times \frac{x}{|x|} \right] + W\vec{H} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.56)$$

Este problema es igual al de la extensión al dominio interior salvo por la presencia de la condición de radiación, así que nos concentraremos primero en ésta.

Sabemos que las condiciones de radiación para los operadores  $D_{\pm\nu}$  aplicados a  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$  son (5.36) y (5.39) [46]:

$$\left(1 - \frac{ix}{|x|}\right) \vec{\varphi}(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.57)$$

$$\left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) \vec{\psi}(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (5.58)$$

Recordemos la relación de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  con los vectores  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$ :

$$\vec{E} = \frac{1}{2i\omega\varepsilon} (\vec{\psi} - \vec{\varphi}) \quad y \quad \vec{H} = \frac{1}{2\nu} (\vec{\varphi} + \vec{\psi}). \quad (5.59)$$

Para tales  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  tenemos

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{2\omega\varepsilon|x|} (\vec{\varphi} + \vec{\psi}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{\nu}{\omega\varepsilon|x|} \frac{1}{2\nu} (\vec{\varphi} + \vec{\psi}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) = \\ &= -W \frac{x}{|x|} \vec{H} + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

de donde obtenemos (5.54). Iniciando con  $\vec{H}$  obtenemos (5.55):

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2\nu|x|} (\vec{\varphi} - \vec{\psi}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) = \frac{\omega\varepsilon}{\nu|x|} \frac{1}{2i\omega\varepsilon} (\vec{\psi} - \vec{\varphi}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) = \\ &= \frac{1}{W|x|} \vec{E} + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Entonces, ya que el sistema de ecuaciones de Maxwell se reformula como un sistema cuaterniónico basado en los operadores  $D_{\pm\nu}$ , inmediatamente conocemos sus condiciones de radiación —(5.57) y (5.58)—, las cuales hemos demostrado que son equivalentes a las condiciones de radiación de Silver-Müller.

De esta forma tenemos el siguiente problema

**Problema 41** *Encontrar dos funciones puramente vectoriales  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{\psi}$  que satisfagan las ecuaciones de Maxwell en su forma cuaterniónica (3.18), (3.19) en  $\Omega^-$ , las condiciones de frontera*

$$\vec{\varphi}|_{\Gamma} = -i\omega\varepsilon\vec{e} + \nu\vec{h} \quad y \quad \vec{\psi}|_{\Gamma} = i\omega\varepsilon\vec{e} + \nu\vec{h},$$

y las condiciones de radiación en el infinito (5.57), (5.58).

En forma similar al caso de la extensión al dominio interior, consideramos el problema

$$(D + \nu)f = g \quad \text{en } \Omega^-, \quad (5.60)$$

$$f|_{\Gamma} = \eta \quad (5.61)$$

y la condición de radiación (5.58). Siguiendo los pasos del caso citado, tenemos que la solución tiene la forma

$$f = u + T_{\nu}g = -K_{\nu}\eta + T_{\nu}g$$

bajo la condición necesaria y suficiente

$$P_{\nu}\eta = T_{\nu}g \quad \text{en } \Gamma. \quad (5.62)$$

Por lo tanto, el Problema 40 es solucionable si y sólo si se cumplen las igualdades

$$P_{-\nu}(-i\omega\varepsilon\vec{e} + \nu\vec{h}) = T_{-\nu}(\operatorname{div}\vec{j} + \nu\vec{j}) \quad \text{en } \Gamma \quad (5.63)$$

y

$$P_\nu(i\omega\varepsilon\vec{e} + \nu\vec{h}) = T_\nu(-\operatorname{div}\vec{j} + \nu\vec{j}) \quad \text{en } \Gamma, \quad (5.64)$$

y si éste es el caso, según (3.24) y (3.25) la solución está dada por

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \frac{1}{2i\omega\varepsilon} \left( i\omega\varepsilon(K_\nu + K_{-\nu})\vec{e} + \nu(K_\nu - K_{-\nu})\vec{h} - \right. \\ & \left. -(T_\nu + T_{-\nu})\operatorname{div}\vec{j} + \nu(T_\nu - T_{-\nu})\vec{j} \right) \end{aligned} \quad (5.65)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{H} = & \frac{1}{2\nu} \left( \nu(K_\nu + K_{-\nu})\vec{h} + i\omega\varepsilon(K_\nu - K_{-\nu})\vec{e} - \right. \\ & \left. -(T_\nu - T_{-\nu})\operatorname{div}\vec{j} + \nu(T_\nu + T_{-\nu})\vec{j} \right), \end{aligned} \quad (5.66)$$

o —al igual que en el caso para el dominio interior— en forma vectorial por las fórmulas de Stratton-Chu (3.28) y (3.29), donde los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  del lado derecho deben ser reemplazados por sus valores de frontera  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$ . Podemos resumir los resultados en el siguiente

**Teorema 42** *El problema 40 tiene solución si y sólo si las condiciones (5.63) y (5.64) son satisfechas y la solución está dada por (5.65) y (5.66).*

Dado que ya hemos obtenido la condición de radiación apropiada en el infinito, estamos listos para probar la fórmula integral de Cauchy para las funciones del kernel del operador  $D_\nu$  para el dominio exterior  $\Omega^-$ .

**Teorema 43** *(Fórmula integral de Cauchy cuaterniónica para el dominio exterior)*  
Sea

$$f \in C^1(\Omega^-; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^+; \mathbb{H}(\mathbb{C})), \quad f \in \ker D_\nu(\Omega^-), \quad \operatorname{Im} \nu \geq 0$$

y  $f$  satisfaga la condición de radiación

$$\left( \nu - \frac{x}{|x|^2} + i\nu \frac{x}{|x|} \right) \cdot f(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

Entonces

$$f(x) = -K_\nu[f](x), \quad \forall x \in \Omega^-. \quad (5.67)$$

**Prueba.** (se usarán las notaciones del Teorema 29) Sea  $\Gamma^R$  una esfera con centro en el origen y radio  $R$  lo suficientemente grande como para que  $\Omega$  esté contenido en la bola  $B^R$  con frontera  $\partial B^R = \Gamma^R$  (Fig. 5.1).

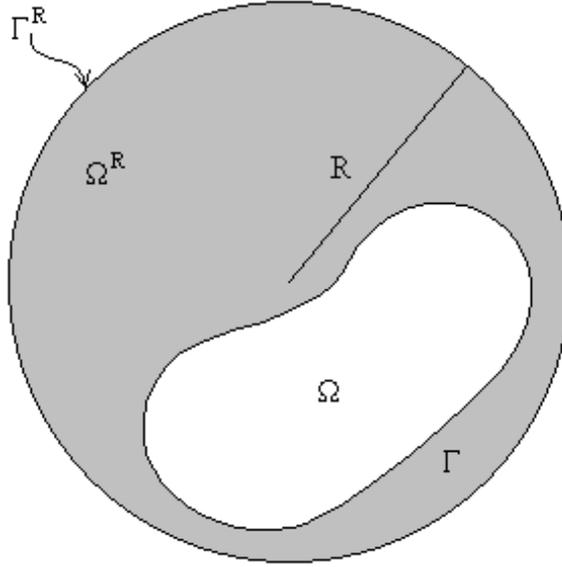


Figura 5.1: El dominio acotado se cubre con una esfera para probar la fórmula integral de Cauchy en el dominio exterior.

De acuerdo al Teorema 4 en cada punto  $x$  del dominio  $\Omega^R := B^R \setminus \overline{\Omega^+}$  tenemos la igualdad

$$f(x) = \int_{\Gamma} \mathcal{K}_\nu(x-y) \vec{n}(y) f(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma^R} \mathcal{K}_\nu(x-y) \frac{y}{|y|} f(y) d\Gamma_y^R.$$

Consideremos ahora el límite de esta igualdad cuando  $R \rightarrow \infty$ . Tenemos la siguiente relación asintótica

$$\int_{\Gamma^R} \mathcal{K}_\nu(x-y) \frac{y}{|y|} f(y) d\Gamma_y^R \sim \int_{\Gamma^R} \theta_\nu(y) \left( \nu - \frac{y}{|y|^2} + i\nu \frac{y}{|y|} \right) f(y) d\Gamma_y^R, \quad R \rightarrow \infty.$$

Usando la condición de radiación obtenemos que esta integral tiende a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ . Por tanto,

$$f(x) = \int_{\Gamma} \mathcal{K}_{\nu}(x-y) \vec{n}(y) f(y) d\Gamma_y.$$

■

La introducción de la condición de radiación en la forma (5.35) nos permitió obtener una prueba muy simple de la fórmula integral de Cauchy para el dominio exterior.

Los Teoremas 4 y 43 permiten reconstruir las soluciones de la ecuación  $D_{\nu}f = 0$  tanto en el dominio interior  $\Omega^+$  como en el exterior cuando los valores de la función  $f$  están dados en todos los puntos de la superficie  $\Gamma = \partial\Omega^+$ . La solución se presenta entonces en forma de la integral de Cauchy  $K_{\nu}f$ . Además el comportamiento de esta representación integral cerca de la frontera —como se menciona en las primeras líneas de este capítulo— está dado por las fórmulas de Plemelj-Sokhotski en el Teorema 17.

Finalmente, las aplicaciones que podemos dar a estos resultados serán por tanto todas aquellas que tengan que ver con problemas para los cuales se tengan como datos los valores de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  sobre una determinada frontera y donde se requiera conocer el campo electromagnético en una región alejada de la fuente. Dentro de este tipo de problemas pueden encontrarse varios relacionados con antenas donde se asume —por ejemplo— un dipolo situado en el origen, con una cierta cubierta esférica de radio conocido, en la cual el campo electromagnético es conocido también y donde se requiere encontrar el valor del campo electromagnético en una zona alejada del dipolo. Este ejemplo particularmente considera una frontera esférica, pero para el método propuesto no hay limitaciones por la forma de la frontera, siempre y cuando se cumpla con la suavidad que los teoremas establecen para ésta.

Otra aplicación es aquella de la testificación de rocas cuyo objeto es determinar la constitución del suelo distinguiendo la dureza de los estratos, la presencia de agua dulce o salada, o de petróleo o carbón. Dentro de los distintos tipos de testificación

se encuentra la testificación electromagnética, en la cual se miden las perturbaciones que provocan las rocas en el campo magnético terrestre.

# Capítulo 6

## Problema de extendibilidad para la ecuación de Dirac

Se iniciará presentando la fórmula integral de Cauchy para el operador de Dirac en forma cuaterniónica (3.59), es decir para  $D_\alpha$ , en el dominio interior y se procederá a obtener la condición de radiación que permitirá formular la integral correspondiente para el dominio exterior. Después de eso, usando la transformación  $\mathcal{A}$  reescribiremos tales resultados para el operador de Dirac en su forma clásica, esto es, para  $\mathbb{D}_{\omega,m}$ . Finalmente se estudiará el efecto Casimir, para el cual se obtendrán las soluciones generales.

### 6.1 Representaciones integrales en los dominios no acotados

Recordemos algunas definiciones (introducidas en la Sección 3.3):  $\nu := \sqrt{\vec{\alpha}^2}$ ,  $\xi_\pm := \alpha_0 \pm \nu$ . donde el signo de  $\nu$  se escoge de forma tal que  $\text{Im } \nu \geq 0$ ,

$$P^\pm := \frac{1}{2\nu} M^{(\nu \pm \vec{\alpha})}$$

donde los cuaterniones complejos  $\nu + \vec{\alpha}$  y  $\nu - \vec{\alpha}$  son divisores de cero, por lo que  $P^\pm$  son dos operadores de proyección mutuamente complementarios en el conjunto de funciones valuadas en  $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ . Iniciemos considerando los diferentes casos para el operador  $K_\alpha$  que surgen cuando consideramos  $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  [51].

$$K_\alpha := \begin{cases} P^+ K_{\xi_+} + P^- K_{\xi_-}, & \alpha \notin \mathfrak{S} \text{ y } \vec{\alpha}^2 \neq 0, \\ (I + M^{\vec{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha_0}) K_{\alpha_0}, & \alpha \notin \mathfrak{S} \text{ y } \vec{\alpha}^2 = 0, \\ P^+ K_{2\alpha_0} + P^- K_0, & \alpha \in \mathfrak{S} \text{ y } \alpha_0 \neq 0, \\ K_0 - M^\alpha V, & \alpha \in \mathfrak{S} \text{ y } \alpha_0 = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde los operadores  $K_{\xi_\pm}$  están definidos por (2.18) y

$$Vf(x) := \int_{\Gamma} \theta_0(x-y) \vec{n}(y) f(y) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \quad (6.2)$$

$$\text{Aquí } \theta_0(x-y) := -\frac{1}{4\pi|x-y|}.$$

**Teorema 44** (*Fórmula integral de Cauchy para un parámetro bicuaterniónico  $\alpha$* ) [51]  
 Sea  $\alpha$  un cuaternión complejo arbitrario,  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^3$  con frontera de Liapunov  $\Gamma := \partial\Omega$ , y sea  $K_\alpha$  como en la fórmula (6.1). Sea  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  y  $f \in \ker D_\alpha(\Omega)$ . Entonces

$$f(x) = K_\alpha[f](x), \quad \forall x \in \Omega.$$

La fórmula integral de Cauchy para el dominio exterior requiere un análisis más detallado. Debemos obtener las condiciones de radiación que corresponden a los distintos tipos de  $\alpha$ . En otras palabras, debemos introducir algunas condiciones apropiadas que garanticen el decrecimiento de la integral  $K_\alpha[f]$  tomada sobre una esfera cuyo

radio  $R$  tiende a infinito (ver la prueba del Teorema 43). Para el estudio del operador de Dirac, nos interesa particularmente el caso en que  $\alpha = \vec{\alpha} := -(i\omega i_1 + m i_2)$ , para el cual si  $\omega^2 \neq m^2$  entonces  $\vec{\alpha} \notin \mathfrak{S}$  y si  $\omega^2 = m^2$  entonces  $\vec{\alpha} \in \mathfrak{S}$ .

Para estos dos casos, tenemos las siguientes condiciones de radiación:

I. Sea  $\alpha \notin \mathfrak{S}$  y  $\vec{\alpha}^2 \neq 0$ . Entonces, ya que

$$K_{\vec{\alpha}} f = P^+ K_{\xi_+} f + P^- K_{\xi_-} f,$$

obtenemos que las siguientes condiciones independientes deben ser satisfechas:

$$\left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) \cdot f(x) \cdot (\lambda + \vec{\alpha}) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

y

$$\left(1 - \frac{ix}{|x|}\right) \cdot f(x) \cdot (\lambda - \vec{\alpha}) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

o, en otra forma:

$$\left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) \cdot P^+ f(x) + \left(1 - \frac{ix}{|x|}\right) \cdot P^- f(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (6.3)$$

II. Si  $\alpha \in \mathfrak{S}$  y  $\alpha_0 = 0$ , entonces tenemos las condiciones en la forma

$$f(x) = o(1), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (6.4)$$

y

$$f(x)\alpha = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (6.5)$$

Bajo las condiciones de radiación obtenidas, la fórmula integral de Cauchy para las funciones de  $\ker D_\alpha(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ ,  $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  es válida.

**Teorema 45** (*Fórmula integral de Cauchy para  $D_\alpha$  en un dominio exterior*) [46] Sea

$$f \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})), \quad f \in \ker D_\alpha(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$$

y  $f$  satisfaga la condición de radiación:

I. Para  $\alpha \notin \mathfrak{S}$ ,  $\bar{\alpha}^2 \neq 0$

$$\left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) \cdot P^+ f(x) + \left(1 - \frac{ix}{|x|}\right) \cdot P^- f(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

II. Para  $\alpha \in \mathfrak{S}$ ,  $\alpha_0 = 0$

$$f(x) = o(1), \quad y \quad f(x)\alpha = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

Entonces

$$f(x) = -K_\alpha[f](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Note que para toda  $\alpha = \bar{\alpha} \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  (esto es  $\alpha \in \mathfrak{S}$  o  $\alpha \notin \mathfrak{S}$ ),  $K_{\bar{\alpha}}f$  admite la siguiente representación

$$K_{\bar{\alpha}}[f](x) = - \int_{\Gamma} \left\{ \theta_\nu(x-y) \left( \frac{x-y}{|x-y|^2} - \frac{i\nu(x-y)}{|x-y|} \right) \bar{n}(y)f(y) + \right. \\ \left. + \theta_\nu(x-y) \bar{n}(y)f(y)\bar{\alpha} \right\} d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma.$$

Además la condición de radiación para cualquier  $\alpha = \bar{\alpha} \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$  puede ser reescrita también en una forma unificada como se puede ver en el siguiente enunciado.

**Proposición 46** Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ ,  $f \in \ker D_\alpha(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ ,  $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ ,  $\text{Sc } \alpha = 0$  tal que  $f$  satisface la condición de radiación

$$\nu f(x) + \frac{ix}{|x|} f(x)\bar{\alpha} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty, \quad (6.6)$$

cuando  $\nu := \sqrt{\bar{\alpha}^2} \in \mathbb{C}$  y  $\text{Im } \nu \geq 0$ . Si  $\alpha \in \mathfrak{S}$  entonces suponemos adicionalmente que  $f(x) = o(1)$ . Entonces

$$f(x) = -K_{\bar{\alpha}}[f](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

**Prueba.** Primero suponemos que  $\vec{\alpha} \notin \mathfrak{S}$ . Multiplicando (6.6) por  $\vec{\alpha}/\nu$  por el lado derecho obtenemos

$$f(x)\vec{\alpha} + \nu \frac{ix}{|x|} f(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad (6.7)$$

sumando y restando (6.6) y (6.7) obtenemos

$$\begin{aligned} & \left( \nu f(x) + \frac{ix}{|x|} f(x)\vec{\alpha} \right) \pm \left( f(x)\vec{\alpha} + \nu \frac{ix}{|x|} f(x) \right) = \\ & = \left( 1 \pm \frac{ix}{|x|} \right) f(x)\nu \pm \left( 1 \pm \frac{ix}{|x|} \right) f(x)\vec{\alpha} = \\ & = \left( 1 \pm \frac{ix}{|x|} \right) f(x) (\nu \pm \vec{\alpha}) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

lo cual puede ser reescrito como sigue

$$P^+ \left( \left( 1 + \frac{ix}{|x|} \right) f(x) \right) + P^- \left( \left( 1 - \frac{ix}{|x|} \right) f(x) \right) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

Por tanto, (6.6) es equivalente a (6.9), de donde se ve que  $P^+ f$  satisface la condición de radiación (5.36) y  $P^- f$  la condición conjugada, la cual corresponde al operador  $D_{-\nu}$ . Consecuentemente las integrales  $K_{\pm\nu} P^\pm f$  tomadas sobre la esfera  $\Gamma^R$  (ver la prueba del Teorema 43) decrecen cuando  $R \rightarrow \infty$ .

Ya que  $K_{\pm\nu}$  conmuta con  $P^\pm$ , obtenemos que la integral  $K_{\vec{\alpha}} f(x)$  tomada sobre la esfera  $\Gamma^R$  también decrece cuando  $R \rightarrow \infty$ .

En el caso en el que  $\alpha$  es un divisor de cero la condición de radiación (6.6) se convierte en

$$\frac{ix}{|x|} f\vec{\alpha} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

Ya que el comportamiento de  $\theta_0$  en (6.2) es del tipo  $O\left(\frac{1}{|x|}\right)$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  y ya que la expresión  $M^{\vec{\alpha}} V_0$  contiene la multiplicación por el lado derecho por  $\vec{\alpha}$ , y en este caso  $f\vec{\alpha} = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ , puede verse que la integral (6.1) tomada sobre la esfera  $\Gamma^R$  decrece también en el infinito. ■

## 6.2 Condición de radiación para el operador de Dirac

A continuación obtendremos la condición de radiación para el operador de Dirac en su representación clásica usando las matrices  $\gamma$ .

Denotemos

$$q := \mathcal{A}^{-1}f. \quad (6.11)$$

De acuerdo al Teorema 10, si  $f \in \ker D_{\vec{\alpha}}$  entonces  $q \in \ker \mathbb{D}_{\omega, m}$ . Suponga que  $f$  cumple la condición de radiación (6.6) entonces tenemos

$$\nu \mathcal{A} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \mathcal{A}^{-1} f + \mathcal{A} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \mathcal{A}^{-1} \frac{ix}{|x|} f \vec{\alpha} = o\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Denotemos

$$f \vec{\alpha} =: F$$

y consideremos el producto

$$xF = (x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) F.$$

Usando las propiedades 1.-3. de las transformadas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{-1}$  (Lema 7), obtenemos

$$xF = \mathcal{A} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \left( \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k \right) \mathcal{A}^{-1} [F].$$

Consecuentemente, usando las propiedades 4. y 5., tenemos

$$\begin{aligned} xF(x) &= \mathcal{A} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \left( \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k \right) \mathcal{A}^{-1} [f(x) \cdot (-i\omega i_1 - m i_2)] = \\ &= \mathcal{A} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \left( \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k \right) \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 \mathcal{A}^{-1} f(x) \cdot (-i\omega) + \\ &+ \mathcal{A} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \left( \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k \right) \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \mathcal{A}^{-1} f(x) \cdot (-im) = \end{aligned}$$

$$= \mathcal{A} \left( \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k \right) \gamma_0 \mathcal{A}^{-1} f(x) \cdot (-i\omega) + \mathcal{A} \left( \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k \right) \mathcal{A}^{-1} f(x) \cdot (-im).$$

Usando (6.11) podemos reescribir la ecuación anterior como

$$xF = \mathcal{A} \left( \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k \right) (-i\omega\gamma_0 - im)q.$$

Entonces (6.6) puede ser reescrita como sigue

$$\nu f + \frac{ix}{|x|} f \vec{\alpha} = \nu \mathcal{A}q + \mathcal{A} \frac{1}{|x|} \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k (\omega\gamma_0 + m)q = o\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

y por tanto la condición de radiación para el operador de Dirac en su forma tradicional es obtenida en la siguiente forma [46]

$$\nu q(x) - (\omega\gamma_0 - m) \frac{\vec{x}_\gamma}{|x|} q(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (6.12)$$

donde  $\vec{x}_\gamma := \sum_{k=1}^3 x_k \gamma_k$ .

### 6.3 Representaciones integrales para el operador de Dirac

Introduzcamos el siguiente operador

$$\mathbb{K}_{\omega,m} := \mathcal{A}^{-1} K_{\vec{\alpha}} \mathcal{A},$$

donde  $\vec{\alpha} = -(i\omega i_1 + m i_2)$ . Usando este operador, en [38] se probó un análogo de la fórmula integral de Cauchy  $\mathbb{D}_{\omega,m}$  en dominios acotados. Aquí, con la ayuda de la condición de radiación obtenemos este hecho para los dominios no acotados.

**Teorema 47** (*Fórmula integral de Cauchy para  $\mathbb{D}_{\omega,m}$  en el dominio exterior  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$* )  
 [46] Sea  $q \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}; \mathbb{C}^4) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega; \mathbb{C}^4)$ ,  $q \in \ker \mathbb{D}_{\omega,m}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ , y  $q$  satisfaga la condición de radiación (6.12). Entonces

$$q(x) = -\mathbb{K}_{\omega,m}[q](x), \quad x \in (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}). \quad (6.13)$$

La prueba consiste en la aplicación de (3.59) y del Teorema 43.

Estos resultados, junto con las fórmulas de Plemelj-Sokhotski (Teorema 17) nos permiten resolver problemas con valores de frontera para el operador  $\mathbb{D}_{\omega,m}$ . En particular, el problema de valor de frontera correspondiente al llamado MIT bag model.

### 6.3.1 Modelo de bolsa del MIT

El modelo de bolsa del MIT —Massachusetts Institute of Technology— (MIT bag model), el cual describe el fenómeno de confinamiento de los cuarks, fue propuesto en [18] y [19] de la siguiente forma:

**Problema 48** (*Modelo de bolsa del MIT*) *Encontrar una solución de la ecuación de Dirac en  $\tilde{\Omega}$ :*

$$\mathbb{D}_{\omega,m}[q] := \left( i\omega\gamma_0 - \sum_{k=1}^3 \gamma_k \partial_k + im \right) [q] = 0, \quad (6.14)$$

que satisfaga la condición de frontera

$$\sum_{k=1}^3 \gamma_k \tilde{n}_k(x) q(x) = iq(x), \quad x \in \tilde{\Gamma}, \quad (6.15)$$

donde  $\tilde{n}_k$  son las componentes del vector normal unitario dirigido al exterior de la frontera  $\tilde{\Gamma}$  en el punto  $x$ . Como antes, asumimos que  $q \in C^1(\tilde{\Omega}) \cap C(\overline{\tilde{\Omega}})$ ;  $\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{\Omega}$  es una superficie cerrada de Liapunov en  $\mathbb{R}^3$ .

Tenemos que una función  $q$  satisface (6.14) si y sólo si su imagen bajo el mapeo  $\mathcal{A}$ ,  $\rho := \mathcal{A}[q]$ , satisface la ecuación cuaterniónica

$$D_\alpha[\rho] = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (6.16)$$

donde  $\alpha := -(i\omega e_1 + me_2)$ .

También es necesario obtener la reformulación bicuaterniónica de la condición de frontera (6.15). Multipliquemos ambos lados de (6.15) por  $-i\gamma_0\gamma_5$  por la izquierda y apliquemos entonces la transformación  $\mathcal{A}$ . Entonces la igualdad

$$-\mathcal{A} \left[ \left( \sum_{k=1}^3 i\gamma_0\gamma_5\gamma_k\tilde{n}_kq \right) \Big|_{\tilde{\Gamma}} \right] = \mathcal{A} [(\gamma_0\gamma_5q)|_{\tilde{\Gamma}}]$$

es equivalente a

$$\left( -\mathcal{A} \left[ \sum_{k=1}^3 i\gamma_0\gamma_5\gamma_k\tilde{n}_kq \right] \right) \Big|_{\Gamma} = (\mathcal{A}[(\gamma_0\gamma_5q)])|_{\Gamma}. \quad (6.17)$$

Del Lema 7, para el lado derecho de (6.17) obtenemos

$$\mathcal{A}[(\gamma_0\gamma_5q)] = (\mathcal{A}q)i_2.$$

Análogamente para el lado izquierdo de (6.17) obtenemos (cambiando el vector normal  $\tilde{n}$  a  $\tilde{\Gamma}$  por  $\vec{n}$ , el vector normal unitario a  $\Gamma$ )

$$-\mathcal{A} \left[ \sum_{k=1}^3 i\gamma_0\gamma_5\gamma_k\tilde{n}_kq \right] \Big|_{\Gamma} = \vec{n} \mathcal{A}[q]|_{\Gamma}$$

donde  $\vec{n} := \sum_{k=1}^3 n_k i_k$ . Así, la igualdad (6.15) se convierte en

$$\vec{n} \mathcal{A}[q] = (\mathcal{A}q)i_2$$

o, en forma equivalente

$$\frac{1}{2} (I + \vec{n} M^{i_2}) \mathcal{A}q = 0.$$

De forma que, para  $\rho := \mathcal{A}[q]$  y  $S^\pm := \frac{1}{2}(I \mp \vec{n} M^{i_2})$ , la condición de frontera se convierte en

$$S^- [\rho] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (6.18)$$

Por tanto podemos escribir el modelo de bolsa del MIT en términos cuaterniónicos.

**Problema 49** (*Reformulación bicuaterniónica del modelo de bolsa del MIT*) [38]  
 Encontrar una solución de (6.16) con la condición de frontera (6.18).

La condición (6.18) puede ser reescrita como  $\rho = S^+[\rho]$  sobre  $\Gamma$ .

**Teorema 50** (*Existencia de solución para el problema del modelo de bolsa del MIT*) [38] Dada  $\rho \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ , el Problema 49 tiene solución si y sólo si

$$\rho = P_\alpha[\rho] = S^+[\rho] \quad (6.19)$$

se cumple sobre  $\Gamma$ .

De esta forma el modelo de bolsa (Problema 48) se reduce al sistema de dos ecuaciones de frontera independientes (6.19).

Este criterio puede ser ligeramente modificado para que en vez de dos igualdades en (6.19) se obtenga sólo una.

**Teorema 51** [51] Dada  $g \in C^{0,\epsilon}(\Gamma; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$  la función  $\rho := K_\alpha[g]$  proporciona una solución del Problema 49 si y sólo si

$$S^-P_\alpha[g] = 0 \quad (6.20)$$

se cumple sobre  $\Gamma$ .

De esta forma, el modelo de bolsa del MIT se reduce a una ecuación integral de frontera.

## 6.4 Efecto Casimir fermiónico

Denotemos por  $\Gamma$  a una frontera la cual consiste de dos placas paralelas infinitas separadas por  $\Omega$ , la región entre las placas las cuales están situadas a una distancia  $h$  una de la otra (ver Figura 6.1).

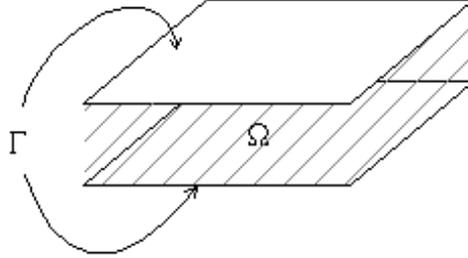


Figura 6.1: Dominio considerado para el efecto Casimir.

El modelo para el efecto Casimir fermiónico se reduce a un problema de valor de frontera (ver, e.g., [63], [60]) que involucra al operador de Dirac

$$[-\omega\gamma_0 + i\gamma \cdot \nabla - m]\psi = 0, \quad (6.21)$$

donde  $\gamma$  es el vector de matrices de Dirac  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , y la condición del modelo de bolsa MIT, la cual se cumple en la frontera  $\Gamma$ :

$$(i\gamma \cdot \vec{n}\psi + \psi)|_{\Gamma} = 0, \quad (6.22)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal unitario hacia el exterior de la frontera. Esta condición no sólo es compatible con la ecuación de Dirac sino que también satisface el requerimiento natural de que la corriente de las partículas a través de la frontera debe desvanecerse, de acuerdo al modelo de bolsa MIT.

Para una configuración de dos placas paralelas infinitas (ver [64]) en  $x_1 = 0$  y  $x_1 = h$ , uno puede buscar una solución particular de (6.21) de la forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{i\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

$$\varphi = (ue^{ikx} + ve^{-ikx}) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}},$$

donde  $u$  y  $v$  son espinores constantes,  $\mathbf{q}$  y  $\rho$  son vectores bidimensionales en el plano de las placas y  $\sigma$  es el vector de matrices de Pauli  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  con

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: E_2.$$

Como  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  y  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ , la solución particular  $\psi$  —considerando  $q = 0$ — en forma explícita es

$$\psi = \begin{pmatrix} u_1 e^{ikx} + v_1 e^{-ikx} \\ u_2 e^{ikx} + v_2 e^{-ikx} \\ k(m - \omega)^{-1} (u_2 e^{ikx} - v_2 e^{-ikx}) \\ k(m - \omega)^{-1} (u_1 e^{ikx} - v_1 e^{-ikx}) \end{pmatrix}.$$

Demostremos ahora que tal función  $\psi$  satisface la ecuación de Dirac (6.21). Primero debemos notar que nuestra función depende únicamente de  $x_1$  por lo que en este caso el producto  $\gamma \cdot \nabla = \gamma_1 \partial_{x_1}$ . Así tenemos, reemplazando  $\psi$  en la ecuación de Dirac

$$\begin{pmatrix} -\omega (u_1 e^{ikx_1} + v_1 e^{-ikx_1}) - \left[ \frac{k^2}{(m-\omega)} (u_1 e^{ikx_1} + v_1 e^{-ikx_1}) \right] - m (u_1 e^{ikx_1} + v_1 e^{-ikx_1}) \\ -\omega (u_2 e^{ikx_1} + v_2 e^{-ikx_1}) - \left[ \frac{k^2}{(m-\omega)} (u_2 e^{ikx_1} + v_2 e^{-ikx_1}) \right] - m (u_2 e^{ikx_1} + v_2 e^{-ikx_1}) \\ \frac{k\omega}{(m-\omega)} (u_2 e^{ikx_1} - v_2 e^{-ikx_1}) + k (u_2 e^{ikx_1} - v_2 e^{-ikx_1}) - \frac{km}{(m-\omega)} (u_2 e^{ikx_1} - v_2 e^{-ikx_1}) \\ \frac{k\omega}{(m-\omega)} (u_1 e^{ikx_1} - v_1 e^{-ikx_1}) + k (u_1 e^{ikx_1} - v_1 e^{-ikx_1}) - \frac{km}{(m-\omega)} (u_1 e^{ikx_1} - v_1 e^{-ikx_1}) \end{pmatrix} = 0.$$

Sabemos además que

$$\omega^2 = q^2 + m^2 + k^2$$

y como  $q = 0$ , tenemos

$$k^2 = \omega^2 - m^2 = (\omega + m)(\omega - m).$$

Usando esta igualdad podemos ver que

$$\begin{pmatrix} (u_1 e^{ikx_1} + v_1 e^{-ikx_1}) \left[ -\omega - \frac{(\omega+m)(\omega-m)}{-(\omega-m)} - m \right] \\ (u_2 e^{ikx_1} + v_2 e^{-ikx_1}) \left[ -\omega - \frac{(\omega+m)(\omega-m)}{-(\omega-m)} - m \right] \\ (u_2 e^{ikx_1} - v_2 e^{-ikx_1}) \left[ \frac{\omega k}{m-\omega} + k - \frac{mk}{m-\omega} \right] \\ (u_1 e^{ikx_1} - v_1 e^{-ikx_1}) \left[ \frac{\omega k}{m-\omega} + k - \frac{mk}{m-\omega} \right] \end{pmatrix} = 0.$$

Una vez demostrado que  $\psi$  es una solución de la ecuación de Dirac podemos sustituirla en la condición de frontera (6.22), obteniendo para  $\varphi$  lo siguiente

$$\begin{aligned} & \left[ i\gamma \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{i\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{i\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \end{pmatrix} \right] \Big|_{\Gamma} = 0 \\ & \left[ i \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{i\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{i\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \end{pmatrix} \right] \Big|_{\Gamma} = 0 \\ & \begin{pmatrix} i\sigma \cdot \vec{n} \left( \frac{-i\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \right) + \varphi \\ -i\sigma \cdot \vec{n} \varphi - \frac{i\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones, para la primera de las cuales tenemos

$$\sigma \cdot \vec{n} \left( \frac{\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \right) + \varphi = 0, \quad \text{en } \Gamma.$$

Multiplicando por  $\sigma \cdot \vec{n}$  por la izquierda tenemos

$$\sigma \cdot \vec{n} \sigma \cdot \vec{n} \left( \frac{\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \right) + \sigma \cdot \vec{n} \varphi = 0, \quad \text{en } \Gamma$$

$$\left( \frac{\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} \right) + \sigma \cdot \vec{n} \varphi = 0, \quad \text{en } \Gamma$$

$$\sigma \cdot \nabla \varphi + (m-\omega) \sigma \cdot \vec{n} \varphi = 0, \quad \text{en } \Gamma.$$

Para la segunda ecuación de nuestro sistema

$$-i\sigma \cdot \vec{n} \varphi - \frac{i\sigma \cdot \nabla \varphi}{m-\omega} = 0 \quad \text{en } \Gamma$$

$$\begin{aligned}\sigma \vec{n} \varphi + \frac{\sigma \cdot \nabla \varphi}{m - \omega} &= 0 \quad \text{en } \Gamma \\ (m - \omega) \sigma \cdot \vec{n} \varphi + \sigma \cdot \nabla \varphi &= 0 \quad \text{en } \Gamma.\end{aligned}$$

Así que tenemos que ambas nos llevan a la misma ecuación, por lo que podemos escribir una sola condición

$$(m - \omega) (\sigma \cdot \vec{n}) \varphi + (\sigma \cdot \nabla) \varphi = 0, \quad \text{en } \Gamma. \quad (6.24)$$

Sustituyendo la forma explícita de  $\varphi$  en (6.24), podemos obtener dos condiciones en las fronteras  $x_1 = 0$  ( $\vec{n} = (-1, 0, 0)$ ) y  $x_1 = h$  ( $\vec{n} = (1, 0, 0)$ ). Estas condiciones adquieren una forma más compacta si primero multiplicamos (6.24) por la izquierda por  $\sigma_1$  y usamos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\sigma_1 \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_1; & \sigma_1 \sigma_3 &= -\sigma_3 \sigma_1; & \sigma_2 \sigma_3 &= -\sigma_3 \sigma_2, \\ \sigma_1 \sigma_2 &= i\sigma_3; & \sigma_1 \sigma_3 &= -i\sigma_2; & \sigma_2 \sigma_3 &= i\sigma_1.\end{aligned}$$

Así que tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_1 [(m - \omega) (\sigma \cdot \vec{n}) \varphi + (\sigma \cdot \nabla) \varphi] &= 0 \\ \sigma_1 [(m - \omega) (\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3) \varphi + (\sigma_1 \partial_1 + \sigma_2 \partial_2 + \sigma_3 \partial_3) \varphi] &= 0 \\ (m - \omega) (E_2 n_1 + i\sigma_3 n_2 - i\sigma_2 n_3) \varphi + (E_2 \partial_1 + i\sigma_3 \partial_2 - i\sigma_2 \partial_3) \varphi &= 0.\end{aligned}$$

Usando la expresión explícita para  $\varphi$  de (6.23) obtenemos

$$\begin{aligned}(m - \omega) (E_2 n_1 + i\sigma_3 n_2 - i\sigma_2 n_3) [ue^{ikx_1} + ve^{-ikx_1}] e^{i\mathbf{q} \cdot \rho} + \\ + (E_2 \partial_1 + i\sigma_3 \partial_2 - i\sigma_2 \partial_3) [ue^{ikx_1} + ve^{-ikx_1}] e^{i\mathbf{q} \cdot \rho} = 0.\end{aligned}$$

Dado que se encuentran en el plano de las placas, podemos suponer al vector constante  $\mathbf{q} = (q_2, q_3)$  y a  $\rho = (x_2, x_3)$ , por lo que tenemos

$$\begin{aligned}(m - \omega) (E_2 n_1 + i\sigma_3 n_2 - i\sigma_2 n_3) [ue^{ikx_1} + ve^{-ikx_1}] e^{i\mathbf{q} \cdot \rho} + \\ + E_2 (ik [ue^{ikx_1} - ve^{-ikx_1}]) + (i\sigma_3 q_2 - i\sigma_2 q_3) [ue^{ikx_1} + ve^{-ikx_1}] e^{i\mathbf{q} \cdot \rho} = 0.\end{aligned}$$

En esta ecuación sustituiremos los valores de  $x_1$  (y su respectiva  $\vec{n}$ ). Comencemos con  $x_1 = 0$  ( $\vec{n} = n_1 = -1$ ) —y recordemos que estamos considerando  $q = 0$ —:

$$(m - \omega)(-E_2)[u + v] + E_2(ik[u - v]) = 0,$$

$$[(m - \omega - ik)E_2]u + [(m - \omega + ik)E_2]v = 0. \quad (6.25)$$

Para el caso de  $x_1 = h$  ( $\vec{n} = n_1 = 1$ )

$$(m - \omega)(E_2)[ue^{ikh} + ve^{-ikh}] + E_2(ik[ue^{ikh} - ve^{-ikh}]) = 0,$$

$$[(m - \omega + ik)E_2]ue^{ikh} + [(m - \omega - ik)E_2]ve^{-ikh} = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por  $e^{ikh}$  obtenemos

$$[(m - \omega + ik)E_2]ue^{2ikh} + [(m - \omega - ik)E_2]v = 0. \quad (6.26)$$

Denotemos  $N \equiv m - \omega + ik$  y  $\epsilon = e^{2ikh}$ . Así (6.25) y (6.26) se convierten en

$$N^*E_2u + NE_2v = 0,$$

$$NE_2u\epsilon + N^*E_2v = 0.$$

Dado que  $u$  y  $v$  son vectores de dos componentes, podemos formar un sistema de cuatro ecuaciones a partir de las dos anteriores

$$\begin{pmatrix} N^* & 0 & N & 0 \\ 0 & N^* & 0 & N \\ N\epsilon & 0 & N^* & 0 \\ 0 & N\epsilon & 0 & N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.27)$$

Ya que el determinante de (6.27) es un número ordinario, calcularemos éste y lo igualaremos a cero para obtener la existencia de condiciones para una solución no

trivial. Llamemos  $A$  a la matriz  $4 \times 4$  que contiene los coeficientes de nuestras ecuaciones.

$$\det A = N^{*4} - 2N^{*2}N^2\epsilon + N^4\epsilon^2 = (N^{*2} - N^2\epsilon)^2 = 0$$

$$N^{*2} - N^2\epsilon = 0$$

$$\epsilon = \frac{N^{*2}}{N^2} = \frac{[(m - \omega) - ik]^2}{[(m - \omega) + ik]^2} = \frac{(m - \omega)^2 - 2ik(m - \omega) - k^2}{(m - \omega)^2 + 2ik(m - \omega) - k^2}.$$

Recordemos que

$$\omega^2 = q^2 + m^2 + k^2. \quad (6.28)$$

Sustituyendo aquí  $q = 0$  y despejando  $k^2$  vemos que

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{m^2 - 2m\omega + \omega^2 - 2ik(m - \omega) + m^2 - \omega^2}{m^2 - 2m\omega + \omega^2 + 2ik(m - \omega) + m^2 - \omega^2} = \\ &= \frac{2m(m - \omega) - 2ik(m - \omega)}{2m(m - \omega) + 2ik(m - \omega)} = \frac{m - ik}{m + ik} = e^{2ikh}. \end{aligned}$$

Además tenemos que

$$e^{2ikh} = (\cos kh + i \operatorname{sen} kh)^2$$

y por otra parte que

$$\frac{m - ik}{m + ik} = \left( \frac{m - ik}{m + ik} \right) \left( \frac{m - ik}{m - ik} \right) = \frac{(m - ik)^2}{m^2 + k^2}$$

y usando de nuevo (6.28)

$$\frac{m - ik}{m + ik} = \frac{(m - ik)^2}{\omega^2}.$$

Por tanto tenemos lo siguiente

$$(\cos kh + i \operatorname{sen} kh)^2 = \frac{(m - ik)^2}{\omega^2}$$

$$\cos kh + i \operatorname{sen} kh = \frac{m}{\omega} - \frac{ik}{\omega}.$$

Igualando las partes real e imaginaria tenemos

$$\cos kh = \frac{m}{\omega} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} kh = -\frac{k}{\omega}.$$

Podemos unir ambas ecuaciones en una sola condición:

$$mh \operatorname{sen} kh + kh \operatorname{cos} kh = 0,$$

la cual garantiza la existencia de soluciones no triviales.

### 6.4.1 Reformulación cuaterniónica y solución general

Siguiendo el procedimiento de [38] (ver [14]), con ayuda de las transformaciones  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{-1}$  el operador en (6.21) puede ser transformado en el operador  $D_\alpha$  usando la igualdad (3.59). La condición de frontera (6.22) también puede transformarse —como se mostró en la Subsección 6.3.1— en

$$(I - \vec{n} M^{i_2})f = 0, \quad f \in \Gamma.$$

**Proposición 52** (*Reformulación cuaterniónica del modelo matemático para el efecto Casimir*) [14] Sea  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ . La ecuación

$$D_\alpha f = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{6.29}$$

donde  $\alpha := -(i\omega i_1 + m i_2)$ , y la condición de frontera

$$(I - \vec{n} M^{i_2})f = 0, \quad \text{sobre } \Gamma \tag{6.30}$$

son equivalentes al problema de valor de frontera (6.21) y (6.22).

Una vez definida la reformulación cuaterniónica del problema, podemos proceder a buscar su solución. Primero introduzcamos las siguientes definiciones para la transformada de Fourier

$$\tilde{f} = F[f](x_1, \xi_2, \xi_3) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2, x_3) e^{i(x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3)} dx_2 dx_3,$$

y para la transformada inversa de Fourier

$$f = F^{-1} \left[ \tilde{f} \right] (x) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x_1, \xi_2, \xi_3) e^{-i(x_2\xi_2 + x_3\xi_3)} d\xi_2 d\xi_3.$$

Aplicando la transformada de Fourier a (6.29) tenemos

$$\begin{aligned} F [(i_1\partial_1 + i_2\partial_2 + i_3\partial_3 + M^\alpha) f] &= 0 \\ (i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3) \tilde{f} + M^\alpha \tilde{f} &= 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Introduzcamos ahora un par de proyectores  $P^\pm$  que nos permitirán dividir la ecuación (6.31) en dos componentes. Estos proyectores son

$$P^\pm := \frac{1}{2\nu} M^{(\nu \pm \alpha)}$$

donde  $\nu := \sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\omega^2 - m^2}$ . Aplicando tales proyectores a (6.31) obtenemos las siguientes ecuaciones [14]. Para  $P^+$ :

$$\begin{aligned} P^+ \left[ (i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3) \tilde{f} + M^\alpha \tilde{f} \right] &= 0 \\ \frac{1}{2\nu} (i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3) \tilde{f} (\nu + \alpha) + \frac{1}{2\nu} M^\alpha \tilde{f} (\nu + \alpha) &= 0 \\ (i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3) \tilde{f} \nu + (i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3) \tilde{f} \alpha + \tilde{f} \nu \alpha + \tilde{f} \nu^2 &= 0 \\ (i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3 + \nu) \tilde{f} \nu + (i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3 + \nu) \tilde{f} \alpha &= 0 \\ (i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3 + \nu) M^{(\nu + \alpha)} \tilde{f} &= 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para  $P^-$  obtenemos:

$$(i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3 - \nu) \tilde{f} M^{(\nu - \alpha)} = 0. \quad (6.33)$$

Introduzcamos las siguientes notaciones

$$g_1(x_1, \xi_2, \xi_3) := \tilde{f}(x_1, \xi_2, \xi_3) M^{(\nu + \alpha)}$$

y

$$g_2(x_1, \xi_2, \xi_3) := \tilde{f}(x_1, \xi_2, \xi_3)M^{(\nu-\alpha)}$$

y usémoslas para reescribir (6.32) y (6.33) como

$$(i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3 + \nu)g_1 = 0,$$

$$(i_1\partial_1 + i_2i\xi_2 + i_3i\xi_3 - \nu)g_2 = 0.$$

Multiplicando las dos últimas ecuaciones por  $-i_1$  por la izquierda tenemos

$$(\partial_1 - i_3i\xi_2 + i_2i\xi_3 - i_1\nu)g_1 = 0, \quad (6.34)$$

$$(\partial_1 - i_3i\xi_2 + i_2i\xi_3 + i_1\nu)g_2 = 0. \quad (6.35)$$

Definamos

$$\vec{\beta}_1 := -i_3i\xi_2 + i_2i\xi_3 - i_1\nu,$$

$$\vec{\beta}_2 := -i_3i\xi_2 + i_2i\xi_3 + i_1\nu.$$

Usando estas definiciones (6.34) y (6.35) se convierten en

$$\left(\partial_1 + \vec{\beta}_1\right)g_1 = 0, \quad (6.36)$$

$$\left(\partial_1 + \vec{\beta}_2\right)g_2 = 0. \quad (6.37)$$

Hasta este momento hemos separado nuestra ecuación original en dos partes, con ayuda de los operadores  $P^\pm$ . Separaremos ahora estas dos ecuaciones de forma similar y para hacer esto debemos definir los operadores de proyección necesarios. Iniciemos calculando el valor de  $\vec{\beta}_1^2$

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_1^2 & : = (-i_3i\xi_2 + i_2i\xi_3 - i_1\nu)(-i_3i\xi_2 + i_2i\xi_3 - i_1\nu) = \\ & = \xi_2^2 + i_1\xi_2\xi_3 - i_2i\nu\xi_2 - i_1\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 - i_3i\nu\xi_3 + i_2i\nu\xi_2 + i_3i\nu\xi_3 - \nu^2 = \\ & = \xi_2^2 + \xi_3^2 - \nu^2. \end{aligned}$$

Para  $\vec{\beta}_2^2$  tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\beta}_2^2 & : = (-i_3 i \xi_2 + i_2 i \xi_3 + i_1 \nu) (-i_3 i \xi_2 + i_2 i \xi_3 + i_1 \nu) = \\
& = \xi_2^2 + i_1 \xi_2 \xi_3 + i_2 i \nu \xi_2 - i_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_3^2 + i_3 i \nu \xi_3 - i_2 i \nu \xi_2 - i_3 i \nu \xi_3 - \nu^2 = \\
& = \xi_2^2 + \xi_3^2 - \nu^2.
\end{aligned}$$

Así,  $\vec{\beta}_1^2 = \vec{\beta}_2^2 = \xi_2^2 + \xi_3^2 - \nu^2$  y  $\gamma := \sqrt{\vec{\beta}_1^2} = \sqrt{\vec{\beta}_2^2} = \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 - \nu^2}$ . Podemos construir ahora los operadores

$$Q_k^\pm := \frac{1}{2\gamma} {}^{(\gamma \pm \vec{\beta}_k)} M, \quad k = 1, 2.$$

Aplicando éstos a (6.36) y (6.37) tenemos lo siguiente. Primero apliquemos  $Q_1^\pm$  a (6.36). Tenemos para  $Q_1^+$ :

$$\begin{aligned}
Q_1^+ \left( \partial_1 + \vec{\beta}_1 \right) g_1 & = 0 \\
\frac{1}{2\gamma} \left( \gamma + \vec{\beta}_1 \right) \left( \partial_1 + \vec{\beta}_1 \right) g_1 & = 0 \\
\left( \gamma \partial_1 + \gamma \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_1 \partial_1 + \gamma^2 \right) g_1 & = 0 \\
(\partial_1 + \gamma) \gamma g_1 + (\partial_1 + \gamma) \vec{\beta}_1 g_1 & = 0 \\
(\partial_1 + \gamma)^{(\gamma + \vec{\beta}_1)} M \tilde{g}_1 & = 0.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Para  $Q_1^-$  tenemos

$$\begin{aligned}
Q_1^- \left( \partial_1 + \vec{\beta}_1 \right) g_1 & = 0 \\
\frac{1}{2\gamma} \left( \gamma - \vec{\beta}_1 \right) \left( \partial_1 + \vec{\beta}_1 \right) g_1 & = 0 \\
\left( \gamma \partial_1 + \gamma \vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_1 \partial_1 - \gamma^2 \right) g_1 & = 0 \\
(\partial_1 - \gamma) \gamma g_1 - (\partial_1 - \gamma) \vec{\beta}_1 g_1 & = 0 \\
(\partial_1 - \gamma)^{(\gamma - \vec{\beta}_1)} M g_1 & = 0.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

De igual manera, aplicando  $Q_2^\pm$  a (6.37) tenemos

$$(\partial_1 + \gamma)^{(\gamma + \vec{\beta}_2)} M g_2 = 0. \quad (6.40)$$

y

$$(\partial_1 - \gamma)^{(\gamma - \vec{\beta}_2)} M g_2 = 0. \quad (6.41)$$

Denotemos ahora

$$\begin{aligned} h_1 &:= (\gamma + \vec{\beta}_1) M g_1, & h_2 &:= (\gamma - \vec{\beta}_1) M g_1, \\ j_1 &:= (\gamma + \vec{\beta}_2) M g_2, & j_2 &:= (\gamma - \vec{\beta}_2) M g_2. \end{aligned}$$

De estas definiciones (6.38)-(6.41) quedan como

$$(\partial_1 + \gamma) h_1 = 0, \quad (6.42)$$

$$(\partial_1 - \gamma) h_2 = 0, \quad (6.43)$$

$$(\partial_1 + \gamma) j_1 = 0, \quad (6.44)$$

$$(\partial_1 - \gamma) j_2 = 0. \quad (6.45)$$

Las soluciones  $h_1$  y  $h_2$  de (6.42) y (6.43) respectivamente están dadas por

$$h_1 = c_1 e^{-\gamma x_1}, \quad h_2 = c_2 e^{\gamma x_1},$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes cuaterniónicas complejas.

En forma análoga, las soluciones  $j_1$  y  $j_2$  de (6.44) y (6.45) respectivamente son

$$j_1 = c_3 e^{-\gamma x_1}, \quad j_2 = c_4 e^{\gamma x_1}$$

con  $c_3$  y  $c_4$  constantes cuaterniónicas complejas.

A partir de estos pares de soluciones podemos construir una solución para (6.36) de la forma

$$\frac{1}{2\gamma} (\gamma + \vec{\beta}_1) c_1 e^{-\gamma x_1} + \frac{1}{2\gamma} (\gamma - \vec{\beta}_1) c_2 e^{\gamma x_1} \quad (6.46)$$

y una solución para (6.37) de la forma

$$\frac{1}{2\gamma} \left( \gamma + \vec{\beta}_2 \right) c_3 e^{-\gamma x_1} + \frac{1}{2\gamma} \left( \gamma - \vec{\beta}_2 \right) c_4 e^{\gamma x_1}. \quad (6.47)$$

Finalmente, (6.46) y (6.47) nos permiten construir la solución general de (6.31) de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \frac{1}{4\gamma\nu} \left[ \left( \gamma + \vec{\beta}_1 \right) c_1 e^{-\gamma x_1} + \left( \gamma - \vec{\beta}_1 \right) c_2 e^{\gamma x_1} \right] (\nu + \alpha) + \\ & + \frac{1}{4\gamma\nu} \left[ \left( \gamma + \vec{\beta}_2 \right) c_3 e^{-\gamma x_1} + \left( \gamma - \vec{\beta}_2 \right) c_4 e^{\gamma x_1} \right] (\nu - \alpha). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Las condiciones de frontera para la función  $\tilde{f}$  descrita arriba están dadas por (6.30). Además para cada una de las placas consideradas en  $x_1 = 0$  y  $x_1 = h$  tenemos  $\vec{n} = -i_1$ , para  $x_1 = 0$  y  $\vec{n} = i_1$  para  $x_1 = h$ , lo cual nos lleva a

$$\begin{cases} \tilde{f} + i_1 \tilde{f} i_2 = 0, & \text{para } x_1 = 0, \\ \tilde{f} - i_1 \tilde{f} i_2 = 0, & \text{para } x_1 = h. \end{cases} \quad (6.49)$$

Para resolver este sistema aplicamos simultáneamente los divisores de cero  $(\gamma \pm \vec{\beta}_1)$  y  $(\nu \pm \alpha)$  respectivamente por la izquierda y por la derecha de cada una de las ecuaciones. Iniciemos con la condición de frontera para  $x_1 = 0$ :

$$(\gamma - \vec{\beta}_1) M^{(\nu + \alpha)} \left( \tilde{f} + i_1 \tilde{f} i_2 \right) = 0, \quad (6.50)$$

$$(\gamma - \vec{\beta}_1) M^{(\nu - \alpha)} \left( \tilde{f} + i_1 \tilde{f} i_2 \right) = 0, \quad (6.51)$$

$$(\gamma + \vec{\beta}_1) M^{(\nu + \alpha)} \left( \tilde{f} + i_1 \tilde{f} i_2 \right) = 0, \quad (6.52)$$

$$(\gamma + \vec{\beta}_1) M^{(\nu - \alpha)} \left( \tilde{f} + i_1 \tilde{f} i_2 \right) = 0. \quad (6.53)$$

Para  $x_1 = h$  tenemos:

$$(\gamma - \vec{\beta}_1) M^{(\nu + \alpha)} \left( \tilde{f} - i_1 \tilde{f} i_2 \right) = 0, \quad (6.54)$$

$$(\gamma - \vec{\beta}_1) M^{(\nu-\alpha)} (\tilde{f} - i_1 \tilde{f} i_2) = 0, \quad (6.55)$$

$$(\gamma + \vec{\beta}_1) M^{(\nu+\alpha)} (\tilde{f} - i_1 \tilde{f} i_2) = 0, \quad (6.56)$$

$$(\gamma + \vec{\beta}_1) M^{(\nu-\alpha)} (\tilde{f} - i_1 \tilde{f} i_2) = 0. \quad (6.57)$$

Ahora desarrollaremos los productos indicados. Mostraremos el procedimiento para la primera de estas ocho ecuaciones y para las demás simplemente indicaremos su resultado para abreviar espacio.

$$(\gamma - \vec{\beta}_1) M^{(\nu+\alpha)} (\tilde{f} + i_1 \tilde{f} i_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} & (\gamma - \vec{\beta}_1) \left( \frac{1}{4\gamma\nu} [(\gamma + \vec{\beta}_1) c_1 + (\gamma - \vec{\beta}_1) c_2] (\nu + \alpha) \right) (\nu + \alpha) + \quad (6.58) \\ & + (\gamma - \vec{\beta}_1) \left( \frac{1}{4\gamma\nu} [(\gamma + \vec{\beta}_2) c_3 + (\gamma - \vec{\beta}_2) c_4] (\nu - \alpha) \right) (\nu + \alpha) + \\ & + (\gamma - \vec{\beta}_1) i_1 \left( \frac{1}{4\gamma\nu} [(\gamma + \vec{\beta}_1) c_1 + (\gamma - \vec{\beta}_1) c_2] (\nu + \alpha) \right) i_2 (\nu + \alpha) + \\ & + (\gamma - \vec{\beta}_1) i_1 \left( \frac{1}{4\gamma\nu} [(\gamma + \vec{\beta}_2) c_3 + (\gamma - \vec{\beta}_2) c_4] (\nu - \alpha) \right) i_2 (\nu + \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Analicemos primero los productos que aparecen en esta ecuación:

$$(\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma + \vec{\beta}_1) = \gamma^2 - \vec{\beta}_1^2 = \gamma^2 - \gamma^2 = 0,$$

$$(\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma - \vec{\beta}_1) = \gamma^2 - 2\gamma\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_1^2 = 2\gamma^2 - 2\gamma\vec{\beta}_1 = 2\gamma (\gamma - \vec{\beta}_1),$$

$$(\nu + \alpha) (\nu + \alpha) = \nu^2 + 2\nu\alpha + \alpha^2 = 2\nu^2 + 2\nu\alpha = 2\nu (\nu + \alpha),$$

$$(\nu - \alpha) (\nu + \alpha) = \nu^2 - \alpha^2 = \nu^2 - \nu^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} (\gamma - \vec{\beta}_1) i_1 (\gamma + \vec{\beta}_1) &= (\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma + i_3 i \xi_2 - i_2 i \xi_3 - i_1 \nu) i_1 = \\ &= (\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma + i_3 i \xi_2 - i_2 i \xi_3 + i_1 \nu - 2i_1 \nu) i_1 = \\ &= (\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma - \vec{\beta}_1 - 2i_1 \nu) i_1 = (\gamma - \vec{\beta}_1) (2\gamma i_1 + 2\nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma - \vec{\beta}_1) i_1 (\gamma - \vec{\beta}_1) &= (\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma - i_3 i \xi_2 + i_2 i \xi_3 + i_1 \nu) i_1 = \\
&= (\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma - i_3 i \xi_2 + i_2 i \xi_3 - i_1 \nu + 2i_1 \nu) i_1 = \\
&= (\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma + \vec{\beta}_1 + 2i_1 \nu) i_1 = (\gamma - \vec{\beta}_1) (-2\nu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nu + \alpha) i_2 (\nu + \alpha) &= i_2 (\nu + i\omega i_1 - mi_2) (\nu + \alpha) = i_2 (\nu + i\omega i_1 + mi_2 - 2mi_2) (\nu + \alpha) = \\
&= i_2 (\nu - \alpha - 2mi_2) (\nu + \alpha) = 2m (\nu + \alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma - \vec{\beta}_1) i_1 (\gamma + \vec{\beta}_2) &= (\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma - \vec{\beta}_1) i_1 = 2\gamma (\gamma - \vec{\beta}_1) i_1, \\
(\gamma - \vec{\beta}_1) i_1 (\gamma - \vec{\beta}_2) &= (\gamma - \vec{\beta}_1) (\gamma + \vec{\beta}_1) i_1 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nu - \alpha) i_2 (\nu + \alpha) &= i_2 (\nu - i\omega i_1 + mi_2) (\nu + \alpha) = i_2 (\nu - i\omega i_1 - mi_2 + 2mi_2) (\nu + \alpha) = \\
&= i_2 (\nu + \alpha + 2mi_2) (\nu + \alpha) = i_2 (2\nu + 2mi_2) (\nu + \alpha) = \\
&= 2(\nu i_2 + m) (\nu + \alpha).
\end{aligned}$$

Utilizando todas las igualdades anteriores en (6.58) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\gamma\nu} (\gamma - \vec{\beta}_1) [4\gamma\nu c_2] (\nu + \alpha) + \\
&+ \frac{1}{4\gamma\nu} (\gamma - \vec{\beta}_1) [4m(\gamma i_1 + \nu) c_1 - 4m\nu c_2] (\nu + \alpha) + \\
&+ \frac{1}{4\gamma\nu} (\gamma - \vec{\beta}_1) [4\gamma i_1 c_3 (\nu i_2 + m)] (\nu - \alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Esta ecuación podría hacerse igual a cero con facilidad utilizando los conjugados de los divisores de cero en los extremos, pero esto daría lugar a soluciones triviales, así que lo que igualaremos a cero serán los términos entre estos divisores de cero.

$$\gamma\nu c_2 + m(\gamma i_1 + \nu) c_1 - m\nu c_2 + \gamma i_1 c_3 (\nu i_2 + m) = 0$$

$$m(\gamma i_1 + \nu) c_1 + \nu(\gamma - m) c_2 + \gamma i_1 c_3 (\nu i_2 + m) = 0.$$

Si guiendo el mismo procedimiento vemos que podemos reescribir las ecuaciones (6.50)-(6.53), para la placa en  $x_1 = 0$ , como:

$$m(\gamma i_1 + \nu) c_1 + \nu(\gamma - m) c_2 + \gamma i_1 c_3 (\nu i_2 + m) = 0, \quad (6.59)$$

$$(\gamma i_1 + \nu) c_1 (\nu i_2 + m) - \nu c_2 (\nu i_2 + m) + i_1 (\nu^2 - \gamma m) c_3 + \nu(\gamma - i_1 \nu) c_4 = 0, \quad (6.60)$$

$$\nu(\gamma + m) c_1 + m(\gamma i_1 - \nu) c_2 + \gamma i_1 c_4 (\nu i_2 - m) = 0, \quad (6.61)$$

$$\nu c_1 (\nu i_2 + m) + (\gamma i_1 - \nu) c_2 (\nu i_2 + m) + \nu(\gamma + i_1 \nu) c_3 - i_1 (\nu^2 + \gamma m) c_4 = 0. \quad (6.62)$$

Para la placa en  $x_1 = h$ , las ecuaciones (6.54)-(6.57) dan:

$$-m(\gamma i_1 + \nu) c_1 e^{-\gamma h} + \nu(\gamma + m) c_2 e^{\gamma h} - \gamma i_1 c_3 e^{-\gamma h} (\nu i_2 - m) = 0, \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} & -(\gamma i_1 + \nu) c_1 e^{-\gamma h} (\nu i_2 + m) + \nu c_2 e^{\gamma h} (\nu i_2 + m) + \\ & + i_1 (\nu^2 + \gamma m) c_3 e^{-\gamma h} + \nu(\gamma - \nu i_1) c_4 e^{\gamma h} = 0, \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\nu(\gamma - m) c_1 e^{-\gamma h} - m(\gamma i_1 - \nu) c_2 e^{\gamma h} - \gamma i_1 c_4 e^{\gamma h} (\nu i_2 - m) = 0, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} & -\nu c_1 e^{-\gamma h} (\nu i_2 + m) - (\gamma i_1 - \nu) c_2 e^{\gamma h} (\nu i_2 + m) + \\ & + \nu(\gamma + i_1 \nu) c_3 e^{-\gamma h} - i_1 (\nu^2 - \gamma m) c_4 e^{\gamma h} = 0. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Despejemos  $c_3$  de (6.59) y  $c_4$  de (6.61)

$$c_3 = -\frac{1}{\gamma \omega^2} i_1 [m(\gamma i_1 + \nu) c_1 + \nu(\gamma - m) c_2] (\nu i_2 + m),$$

$$c_4 = -\frac{1}{\gamma \omega^2} i_1 [\nu(\gamma + m) c_1 + m(\gamma i_1 - \nu) c_2] (\nu i_2 + m).$$

No es difícil demostrar, sustituyendo estos valores, que (6.60) y (6.62) son combinaciones lineales de (6.59) y (6.61).

Despejemos ahora  $c_3$  de (6.63) y  $c_4$  de (6.65)

$$c_3 = \frac{1}{\gamma \omega^2} i_1 [-m(\gamma i_1 + \nu) c_1 + \nu(\gamma + m) c_2 e^{2\gamma h}] (\nu i_2 + m),$$

$$c_4 = \frac{1}{\gamma \omega^2} i_1 [\nu(\gamma - m) c_1 e^{-2\gamma h} - m(\gamma i_1 - \nu) c_2] (\nu i_2 + m).$$

Nuevamente sustituyendo estos valores probamos que (6.64) y (6.66) son combinaciones lineales de (6.63) y (6.65).

Igualando  $c_3$  obtenida de (6.59) con la obtenida de (6.63) tenemos

$$\frac{1}{\gamma\omega^2}i_1 [-m(\gamma i_1 + \nu)c_1 + \nu(\gamma + m)c_2 e^{2\gamma h} + m(\gamma i_1 + \nu)c_1 + \nu(\gamma - m)c_2] (\nu i_2 + m) = 0$$

$$\frac{\nu}{\gamma\omega^2}i_1 c_2 [(\gamma + m)e^{2\gamma h} + (\gamma - m)] (\nu i_2 + m) = 0. \quad (6.67)$$

Igualando ahora  $c_4$  de (6.61) con  $c_4$  despejada de (6.65) obtenemos

$$\frac{1}{\gamma\omega^2}i_1 [\nu(\gamma - m)c_1 e^{-2\gamma h} - m(\gamma i_1 - \nu)c_2 + \nu(\gamma + m)c_1 + m(\gamma i_1 - \nu)c_2] (\nu i_2 + m) = 0$$

$$\frac{\nu}{\gamma\omega^2}i_1 c_1 [(\gamma - m)e^{-2\gamma h} + (\gamma + m)] (\nu i_2 + m) = 0. \quad (6.68)$$

De (6.67) obtenemos la condición

$$e^{2\gamma h} = \frac{-(\gamma - m)}{\gamma + m} = \frac{m - \gamma}{m + \gamma}$$

y de (6.68) la condición

$$e^{-2\gamma h} = \frac{-(\gamma + m)}{\gamma - m}$$

las cuales garantizan la existencia de soluciones no triviales.

Podemos ver que para valores fijos de  $h$  y  $m$  no todos los valores de  $\gamma$  satisfarán estas condiciones y ya que  $\gamma = \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 - \nu^2}$  concluimos que  $\xi_2$  y  $\xi_3$  deben ser iguales a 0, lo cual nos da

$$\gamma = \sqrt{-\nu^2} = i\nu = ik$$

de forma tal que la condición de compatibilidad en ambos casos se convierte en

$$\nu \cos \nu h + m \operatorname{sen} \nu h = 0. \quad (6.69)$$

De esta forma, hemos encontrado la solución general (6.48), las condiciones de frontera (6.49) y la condición de compatibilidad (6.69) las cuales nos permiten obtener el conjunto completo de eigenvalores para el modelo del efecto Casimir.

# Capítulo 7

## Conclusiones y recomendaciones

El uso de las técnicas del análisis cuaterniónico simplificó en buena medida la obtención de los resultados planteados en los objetivos, ya que las reformulaciones cuaterniónicas de los modelos para los operadores estudiados se hicieron más simples y fáciles de estudiar y solucionar.

Así, con las condiciones de radiación obtenidas para las ecuaciones de Maxwell y de Dirac en forma cuaterniónica —además de en forma clásica para el operador de Dirac— y con la información conocida previamente, se pudieron determinar las representaciones integrales tanto en el dominio acotado como en el no acotado para ambos operadores. Esto permite que gran cantidad de problemas con valores de frontera, entre ellos los problemas de extendibilidad al dominio acotado o al no acotado, puedan ser estudiados y resueltos.

En el caso particular del problema de extendibilidad del campo electromagnético a los dominios no acotados se determinó un criterio de existencia de la solución y se propuso ésta. Las aplicaciones prácticas de estos resultados podrán encontrarse en distintos problemas cuyo planteamiento incluya los datos del campo electromagnético en una cierta superficie y donde se deseen encontrar los valores del campo en el interior de tal dominio o en lugares alejados de éste. Dichos problemas surgen, por citar

algunos ejemplos, en medicina, en el análisis de antenas, en la exploración geológica, en la microscopía por escaneo, etcétera.

En el caso del operador de Dirac un problema de extendibilidad que es posible estudiar es el modelo de bolsa del MIT y, utilizando éste, el modelo del efecto Casimir. Éste último puede ser reducido a un problema de valor de frontera para el operador de Dirac y su solución general obtenida, junto con la condición de compatibilidad —necesaria para satisfacer las condiciones de frontera— que garantiza la existencia de soluciones no triviales. De esta forma, el conjunto completo de eigenvalores para el efecto Casimir pudo ser obtenido.

Además es importante remarcar que las relaciones que conectan en ambas direcciones las soluciones de las versiones clásicas de las ecuaciones de Maxwell (basadas en los vectores tradicionales  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ ) y de Dirac (escrita en términos de matrices  $\gamma$ ) con sus equivalentes cuaterniónicas son muy simples, por lo que los resultados pueden ser trasladados en una dirección u otra sin dificultad, lo cual es una ventaja más dada por el uso del análisis cuaterniónico.

Por otra parte, se estudió la relación entre los dos más importantes operadores de la física de partículas, es decir del operador de Klein-Gordon y del operador de Dirac. Aquí se prueba que cualquier solución de la ecuación de Klein-Gordon puede ser representada a través de dos soluciones de la ecuación de Dirac con la misma. En otras palabras, cualquier función que describe el comportamiento de una partícula libre con spin entero puede ser completamente determinada por dos funciones que describen partículas libres con spin 1/2. Además, las dos funciones que corresponden a cada solución de la ecuación de Klein-Gordon son únicas.

En forma análoga a la importante relación (a que da lugar la descomposición de una función armónica compleja) entre la teoría de las funciones holomorfas y la teoría de las funciones armónicas, mostramos con la descomposición del kernel del operador

de onda que una relación del mismo tipo existe entre la teoría de la ecuación de onda y las soluciones de los operadores cuaterniónicos  $(i\partial_t + D)$  y  $(-i\partial_t + D)$ , los cuales tienen muchas aplicaciones en electrodinámica y mecánica cuántica. (ver [51]).

Cabe mencionar que algunos resultados ya están siendo utilizados como base para otros trabajos como, por ejemplo, [1], [5], [29], [35], [40], [43], [47], [68] y [70]. El uso tan rápido que se está haciendo de nuestros resultados nos hace valorar en gran medida su importancia.

Entre las recomendaciones, se encuentran la recomendación del uso del análisis cuaterniónico para el estudio de problemas similares, así como de cualquier otro tipo donde se intuya que las ventajas de usar un álgebra más allá de tres dimensiones pueda simplificar el tratamiento o la estructura del problema.

Otra recomendación sería la del estudio de campos electromagnéticos en medios más complejos —no homogéneos o anisotrópicos—, el estudio más profundo del caso dependiente del tiempo o la realización de análisis numéricos para algunos de estos modelos. Si bien algunos de estos temas ya están siendo estudiados, no por ello dejan de ser continuaciones naturales del trabajo presentado, el cual proporciona una buena base de partida.

RECONOCIMIENTO: El desarrollo de la presente tesis fue posible gracias al apoyo del CONACYT, a través de una beca y del proyecto 32424-E.

# Apéndice A

## Algunas definiciones del análisis funcional

Sea  $A$  un conjunto arbitrario. Si un elemento  $a$  está contenido (no contenido) en el conjunto  $A$ , denotaremos eso como:  $a \in A$  ( $a \notin A$ ). Sea  $B$  otro conjunto. Si  $A$  está contenido en  $B$  esto se denota escribiendo  $A \subset B$ ; se denota por  $A = B$  la coincidencia de  $A$  con  $B$ , por  $A \cup B$  la unión de  $A$  y  $B$ , por  $A \cap B$  la intersección de  $A$  y  $B$ , y por  $A \setminus B$  el complemento de  $B$  relativo a  $A$ .

Denotaremos un espacio Euclidiano  $n$ -dimensional por  $\mathbb{R}^n$ , y sus puntos por  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , son coordenadas del punto  $x$ . Sea  $y$  otro punto en  $\mathbb{R}^n$ , Usaremos los símbolos  $\langle x, y \rangle$  y  $|x|$  para denotar, respectivamente, el *producto escalar* y la *longitud (norma)* en  $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

De esta forma, el número  $|x - y|$  es la distancia Euclidiana entre los puntos  $x$  y  $y$ .

El conjunto de puntos  $x$  que pertenecen a  $\mathbb{R}^n$  y que satisfacen la desigualdad  $|x - \mathbf{x}_0| < R$  es llamado *bola abierta* de radio  $R$  con centro en el punto  $\mathbf{x}_0$ . Deno-

taremos esta bola por  $B(\mathbf{x}_0; R)$ .  $B^R = B(0, R)$  denota la bola de radio  $R$  centrada en el origen.

Se dice que un conjunto es *acotado* en  $\mathbb{R}^n$  si hay una bola que lo contiene. El punto  $\mathbf{x}_0$  es llamado *punto interior* de un conjunto si hay una bola  $B(\mathbf{x}_0; R)$  contenida en este conjunto. Un conjunto es llamado *abierto* si todos sus puntos son interiores. Un conjunto es llamado *conectado* si cualesquiera dos de sus puntos pueden ser unidos por una línea continua que yace en este conjunto. Un conjunto abierto conectado es llamado una *región*.

El punto  $\mathbf{x}_0$  es llamado *punto límite* del conjunto  $A$  si hay una secuencia  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , tal que  $\mathbf{x}_k \in A$ ,  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$  mientras  $k \rightarrow \infty$ . Si agregamos todos sus puntos límite a un conjunto  $A$ , el conjunto obtenido es llamado *cerradura* del conjunto  $A$  y es denotado por  $\bar{A}$ ; es claro que  $A \subset \bar{A}$ . Si un conjunto coincide con su cerradura es llamado *cerrado*.

Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  conjuntos lineales. Se dice que el operador  $L$ , que transforma los elementos del conjunto  $\mathcal{M}$  en elementos del conjunto  $\mathcal{N}$ , es lineal si para cualesquiera elementos  $f$  y  $g$  que pertenezcan a  $\mathcal{M}$ , y números complejos  $\lambda$  y  $\mu$  la ecuación

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda Lf + \mu Lg$$

se cumple. En este caso el conjunto  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L$  es llamado el *dominio de definición* del operador  $L$ . Para denotar el dominio de definición del operador  $L$  usamos la notación  $\text{Dom } L$ . El *kernel* del operador  $L$  se define de la siguiente manera

$$\ker L = \{f \in \text{Dom } L \mid Lf = 0\}.$$

Otro conjunto de funciones asociado a un operador que debemos definir es la *imagen* del operador. Se dice que una función  $g$  pertenece a la imagen del operador  $L$  si existe tal función  $f \in \text{Dom } L$  que  $g = Lf$ . Se denota

$$g \in \text{im } L, \quad \text{im } L = \{g \mid \exists f \in \text{Dom } L, \quad g = Lf\}.$$

Si  $L$  y  $M$  son dos operadores que actúan en el mismo espacio de funciones, podemos definir la suma de estos operadores:

$$(L + M)f = Lf + Mf.$$

El operador  $L \cdot M$  se llama producto de los operadores  $L$  y  $M$  si

$$(L \cdot M)f = L[M[f]].$$

Si  $Lf = f$  para toda  $f \in \mathcal{M}$ , el operador  $L$  es llamado operador *identidad* (*unitario*). Denotaremos al operador identidad por  $I$ . Por supuesto,  $MI = IM = M$  para cualquier operador  $M$ , aunque en general los operadores no conmutan, es decir,

$$L \cdot M \neq M \cdot L.$$

Sea  $L$  un operador lineal.  $M$  se llama *inverso izquierdo* para el operador  $L$  si  $M \cdot L = I$ . El operador  $N$  se llama *inverso a la derecha* del operador  $L$  si  $L \cdot N = I$ . Si un operador  $L$  tiene ambos, tanto un inverso izquierdo  $M$  como un inverso a la derecha  $N$ , entonces  $M = N$  porque

$$M = M \cdot I = M \cdot (L \cdot N) = (M \cdot L)N = I \cdot N = N.$$

En este caso se dice que el operador  $L$  tiene un inverso que se denota como  $L^{-1}$ .

Un operador  $P$  se llama *proyector* si para cualquier función  $f$  del  $\text{Dom } P : P^2f = Pf$ . Dos proyectores  $P$  y  $Q$  que actúan sobre un mismo conjunto de funciones se llaman *mutuamente complementarios* si para cualquier función  $f$  del conjunto tenemos:

$$Pf + Qf = f.$$

Dos proyectores  $P$  y  $Q$  se llaman *ortogonales* si para cualquier función  $f$ :

$$(P \cdot Q)f = (Q \cdot P)f = 0.$$

La ortogonalidad de dos proyectores mutuamente complementarios es necesaria para garantizar que la descomposición de cualquier función  $f$  en dos partes

$$f = Pf + Qf$$

es única.

## Apéndice B

# Espacios funcionales y clase de superficies consideradas

Sea  $\Omega$  una región. Los puntos de la cerradura  $\overline{\Omega}$  que no pertenecen a  $\Omega$  forman un conjunto cerrado  $\Gamma$ , llamado *frontera* de la región  $\Omega$ , así que  $\Gamma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ . Por ejemplo, la superficie esférica  $|x - \mathbf{x}_0| = R$  es la frontera de la bola abierta  $B(\mathbf{x}_0; R)$ . Denotaremos esta superficie esférica como  $S(\mathbf{x}_0, R)$ ;  $S^R = S(0, R)$  denota la superficie esférica de radio  $R$  centrada en el origen.

Diremos que una superficie  $\Gamma$  pertenece a la clase  $C^p$ ,  $p \geq 1$ , si en alguna vecindad de cada punto  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  ésta puede ser representada por la ecuación  $\omega_{\mathbf{x}_0}(x) = 0$ , donde  $\text{grad} \omega_{\mathbf{x}_0}(x) \neq 0$ , y la función  $\omega_{\mathbf{x}_0}(x)$  es continua junto con todas sus derivadas hasta de orden  $p$  inclusive en la vecindad referida. Una superficie  $\Gamma$  es llamada *seccionalmente suave* si consiste de un número finito de superficies de clase  $C^1$ .

Sea  $G$  un conjunto cerrado – por ejemplo, la cerradura  $\overline{\Omega}$  o la frontera  $\Gamma$  de la región  $\Omega$ . Denotaremos por  $C(G)$  la clase de funciones continuas acotadas en  $G$ . La función  $f \in C(G)$  se dice que es *continua de Hölder* en  $G$  si hay números  $c > 0$ , y  $\nu$ ,  $0 < \nu \leq 1$ , tales que para toda  $\mathbf{x}_1 \in G$  y  $\mathbf{x}_2 \in G$  la desigualdad

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq c |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^\nu$$

se cumple; si  $\nu = 1$ , la función  $f(x)$  se dice que es *continua de Lipschitz* en  $G$ .

Una superficie acotada cerrada  $\Gamma$  se conoce como *superficie de Liapunov* (ver, por ejemplo, [75]) si satisface las siguientes condiciones:

1. En cada punto de  $\Gamma$  hay un plano tangente;
2. Hay un número  $r_0 > 0$  tal que para cualquier punto  $x \in \Gamma$  el conjunto  $\Gamma \cap B(x; r_0)$  es conectado y es intersecado por líneas rectas paralelas a la normal  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  en no más de un punto;
3. La normal  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  es continua de Hölder sobre  $\Gamma$ ; esto es, existen los números  $c > 0$  y  $\nu > 0$ ,  $\nu \leq 1$ , tales que

$$|\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y)| \leq c|x - y|^\nu, \quad x, y \in \Gamma.$$

De esta definición sigue que las superficies de Liapunov están contenidas en la clase de superficies con suavidad  $C^1$ ; por otra parte, toda superficie cerrada acotada de la clase  $C^2$  es una superficie de Liapunov (para  $\nu = 1$ ).

Por otra parte, para describir el comportamiento, mientras  $x \rightarrow \infty$ , de una función deseada  $f(x)$  en términos de una función conocida  $\phi(x)$ , se usan frecuentemente las siguientes notaciones, debidas a Bachmann y Landau. Primero, suponemos que  $x$  es una variable real. En el infinito  $\phi(x)$  puede desvanecerse, tender a infinito, o tener otro comportamiento —no se impone ninguna restricción.

(i) Si  $f(x)/\phi(x)$  tiende a la unidad, escribimos

$$f(x) \sim \phi(x) \quad (x \rightarrow \infty),$$

o, en forma abreviada, cuando no hay ambigüedad,  $f \sim \phi$ . En palabras,  $f$  es asintótica a  $\phi$ , o  $\phi$  es una aproximación asintótica a  $f$ .

(ii) Si  $f(x)/\phi(x) \rightarrow 0$ , escribimos

$$f(x) = o(\phi(x)) \quad (x \rightarrow \infty),$$

o, en forma abreviada,  $f = o(\phi)$ ; en palabras,  $f$  es de orden menor que  $\phi$  (en los casos en que  $\phi(x)$  no es real ni positivo, algunos escritores usan signos de módulo en la definición, como  $f(x) = o(|\phi(x)|)$ ). De forma similar es usado en la definición (iii) a continuación).

(iii) Si  $|f(x)/\phi(x)|$  es acotado, escribimos

$$f(x) = O(\phi(x)) \quad (x \rightarrow \infty),$$

o  $f = O(\phi)$ ; nuevamente, en palabras,  $f$  es de orden que no excede a  $\phi$ .

Casos especiales de estas definiciones son  $f = o(1)$  ( $x \rightarrow \infty$ ), que significa simplemente que  $f$  se desvanece mientras  $x \rightarrow \infty$ , y  $f = O(1)$  ( $x \rightarrow \infty$ ), que significa que  $|f|$  es acotado mientras  $x \rightarrow \infty$ .

Algunos ejemplos simples son

$$(x+1)^2 \sim x^2, \quad \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \sinh x = O(e^x).$$

Comparando (i), (ii) y (iii), notamos que (i) y (ii) son mutuamente exclusivos. También, cada uno es un caso particular de (iii), y cuando es aplicable cada uno es más informativo que (iii).

# Bibliografía

- [1] Agranovich M. S., *Spectral problems for the Dirac system with spectral parameter in local boundary conditions*. Functional Analysis and Its Applications, 2001, v. 35, No.3, 161-175.
- [2] Balian R. y Duplantier B., *Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect*. Annals of Physics 112, 165-208 (1978).
- [3] Berestetskij V. B., Lifshits E. M y Pitaevskij L. P., *Quantum electrodynamics*. (Moscow: Nauka, 1980) [Traducido al Inglés (Oxford: Pergamon Press, 1982)].
- [4] Berezin, A. V., Kurochkin, Yu. A. y Tolkachev E. A., *Quaternions in Relativistic Physics* (en Ruso). Minsk: Nauka y Tekhnika 1989.
- [5] Bernstein S., *Lippman-Schwinger's integral equation for quaternionic Dirac operators*. Digital Proceedings of the 16th International Conference on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering ISSN 1611-4085.
- [6] Bitsadze A. V., *Boundary value problems for second-order elliptic equations*. Amsterdam: North-Holland and N. Y.: Interscience, 1968.
- [7] Bogoliubov N. N., Shirkov D. V., *Introduction to the theory of quantized fields*.

- (Moscow: Nauka, 1984), 600 pp. [Traducido al Inglés por Seweryn Chomet (Wiley-Interscience, 1980), 620 pp.].
- [8] Bogoliubov N. N. y Shirkov D. V., *Quantum fields*. (Moscow: Fizmatlit, 1993), 336 pp. [Traducido al Inglés (Addison-Wesley: Benjamin/Cummings, 1983)].
- [9] Cambefort, Henri, *Perforaciones y sondeos*. Ediciones Omega, 1975.
- [10] Casimir H. B. G., *On the attraction between two perfectly conducting plates*. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B51, 793 (1948).
- [11] Castillo R. *Aplicación del análisis cuaterniónico a los problemas de frontera para las ecuaciones de Maxwell en los dominios no acotados*. Tesis de Maestría, IPN, febrero de 2001.
- [12] Castillo R. y Kravchenko V. V., *Sobre una descomposición del kernel del operador de onda*. Memorias del 3er Congreso de Proyectos de Investigación, IPN, México D.F. 1997, pp. 1-5.
- [13] Castillo R. y Kravchenko V. V., *Sobre las condiciones de radiación para los campos electromagnéticos y espinoriales*. Memorias del 6<sup>o</sup> Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, noviembre de 2001, ESIME Zacatenco, IPN, pp. 902-911.
- [14] Castillo R. y Kravchenko V. V., *A quaternionic representation of the mathematical model for the Casimir effect*. Memorias del 3er Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, Noviembre de 2002, México, D. F., pp. 135-140.
- [15] Castillo R. y Kravchenko V. V., *On the fermionic Casimir effect*. Memorias digi-

tales del Congreso IKM 2003, Sesión “Quaternion algebra and analysis and their applications”, Weimar, Alemania, Data \ Papers \ 176, ISSN 1611-4085.

- [16] Castillo R. y Kravchenko V. V., *General solution of the fermionic Casimir effect model*. Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódz (2003), v. 53, Série: Recherches sur les déformations, No. 41, pp. 115-123.
- [17] Castillo R. y Kravchenko V. V., *Quaternionic reformulation of the Dirac operator and its applications*. Por aparecer en las memorias del Simposio “The search for unity in physics”, Septiembre de 2003, París, Francia.
- [18] Chodos A., Jaffe R. L., Thorn C. B. y Weisskopf V., *New extended model of hadrons*. Phys. Rev. D., 1974, v. 9, 3471-3495.
- [19] Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K., Thorn C. B., *Baryon structure in the bag theory*, Phys. Rev. D., 1974, v. 10, 2559-2604.
- [20] Colton D. y Kress R., *Integral equation methods in scattering theory*. John Wiley & Sons, 1983.
- [21] Colton D. y Kress R., *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Berlin: Springer, 1992.
- [22] Davis, Harry F., Snider, Arthur D., *Introduction to vector analysis*, Allyn and Bacon Inc., 1979.
- [23] Demarest, Kenneth R., *Engineering electromagnetics*. Prentice Hall, 1998.
- [24] Dzhuravaev A. D., *Singular integral equation method*. Moscow: Nauka, 1987 (en Ruso)[Traducido al Inglés (Longman Sci. Tech., Harlow and Wiley, N. Y., 1992)].

- [25] Feynman R., Leighton R. B. y Sands M., *Física. Volumen II: electromagnetismo y materia*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1993.
- [26] Golubeva V. A. y Pokazeev V. V., *Clifford analysis and its applications. I. Representations of the Laplace operator. Regularity criteria. Integral representations of Cauchy-Green type*. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 91, No. 5, 1998, pp. 3258-3292. [Traducido de Itogi Naukii Tekhniki. Seriya Sovremennaya Matematika. Tematicheskie Obsory. Vol. 37 Analysis-10-1996.].
- [27] Gsponer A. y Hurni J. P., *Lanczos' functional Theory of electrodynamics, a commentary on Lanczos' Ph. D. dissertation*. arXiv:math-ph/040212 v1.
- [28] Gürlebeck K., *Hypercomplex factorization of the Helmholtz equation*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, v. 5 (1986), No. 2, pp. 125-131.
- [29] Gürlebeck K., Shapiro M. V. y Spröbig W., *On a Teodorescu transform for a class of metaharmonic functions*. Journal of Natural Geometry, 2002, v. 21, No. 1-2, 17-38.
- [30] Gürlebeck K. y Spröbig W., *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems*. Berlin: Akademie-Verlag 1989.
- [31] Gürlebeck K. y Spröbig W., *Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers*, John Wiley & Sons, 1997.
- [32] Gürsey F., Tze H. C., *On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics*. Singapore: World Scientific, 1996.
- [33] Imaeda K., *A new formulation of classical electrodynamics*. School of Cosmic Physics, Dublin, Ireland, Il nuovo cimento, Vol. 32B, No. 1, 1976.

- [34] Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. y Rabinovich V. S., *Métodos del análisis cuaterniónico en los problemas de propagación de ondas electromagnéticas producidas por las fuentes en movimiento*. Memorias del Segundo Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México, D.F., 1999.
- [35] Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. y Rabinovich V. S., *Quaternionic Fundamental Solutions for Electromagnetic Scattering Problems and Application*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, v. 22 (2003), No. 1, 147-166.
- [36] Kravchenko V. V., *On the relation between holomorphic biquaternionic functions and time-harmonic electromagnetic fields*. Deposited in UkrINTEI, 29.12.1992, #2073-Uk-92, 18pp. (en Ruso).
- [37] Kravchenko V. V., *Direct sum expansions of the kernel of the Laplace operator with the aid of biquaternion zero divisors*. Differential equations, 1995, v. 31, #3, 462-465.
- [38] Kravchenko V. V., *On a biquaternionic bag model*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, v. 14 (1995), No. 1, pp. 3-14.
- [39] Kravchenko V. V., *Elementos del análisis moderno y teoría electromagnética*. Serie Técnica, Matemáticas aplicadas, SCT, 1996.
- [40] Kravchenko V. V., *Functional-analytic and complex methods, their interactions and applications to partial differential equations*. Capítulo en libro. Proceedings of the International Graz Workshop, World Scientific, Editores H. Florian et al. 2001.
- [41] Kravchenko V. V., *On a new approach for solving Dirac equations with some potentials and Maxwell's system in the inhomogeneous media*. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 121, 2001, Birkhäuser. Verlag Basel/Switzerland.

- [42] Kravchenko V. V., *On the relation between the Maxwell system and the Dirac equation*. WSEAS Transactions on Systems, v. 1, # 2 (2002), pp. 115-118.
- [43] Kravchenko V. V., *Applied Quaternionic analysis*. Research and Exposition in Mathematics, v. 28, Heldermann Verlag, 2003, 127 pp.
- [44] Kravchenko V. V. y Castillo R., *On the Kernel of the Klein-Gordon Operator*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, v. 17 (1998), No. 2, pp. 261-265.
- [45] Kravchenko V. V. y Castillo R., *El problema de la extendibilidad del campo electromagnético en los dominios no acotados*. Memorias del 5o. Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, ESIME, IPN, 2000.
- [46] Kravchenko V. V. y Castillo R., *An analogue of the Sommerfeld radiation condition for the Dirac operator*. Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002), pp. 1383-1394.
- [47] Kravchenko V. V. y Oviedo H., *On a quaternionic reformulation of Maxwell's equations for chiral media and its applications*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, v. 22 (2003), No. 3, pp. 569-589.
- [48] Kravchenko V. V. y Ramírez T., *Sobre la aplicación del análisis hipercomplejo en el electromagnetismo*. Memorias del Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas 1999.
- [49] Kravchenko V. V. y Ramírez M., *On a quaternionic reformulation of the Dirac equation and its relationship with Maxwell's system*. Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź (2003), v. 53, Série: Recherches sur les déformations, No. 41, 101-114.
- [50] Kravchenko V. V. y Shapiro M. V., *Helmholtz operator with a quaternionic wave*

*number and associated function theory. 2. Integral representations. Acta Applicandae Mathematicae 32, # 3 (1993), 243-265.*

- [51] Kravchenko V. V. y Shapiro M. V., *Integral representations for spatial models of mathematical physics*. Addison Wesley Longman Ltd, 1996, 256.
- [52] Krupnik N. Ya., *Banach algebras with symbol and singular integral operators*. Kishinev: Shtiinca, 1984, 138 pp. [Traducido del Ruso por A. Iacob. *Operator Theory: Advances and Applications*, 26. Birkhäuser Verlag, Basel, 1987. 205 pp.].
- [53] Lakhtakia, A., *Beltrami fields in chiral media*, World Scientific, London, 1994.
- [54] Lamoreaux S., *S. Phys. Rev. Lett.*, 78 p. 5 (1996).
- [55] Lanczos C., *The function theoretical relationships of the Maxwell aether equations*. Doctoral dissertation, Publishing House of Josef Nemeth, Budapest, 1919, 80 pp.
- [56] Lanczos C., *The tensor analytical relationships of Dirac's equation*. *Zeitschrift für Physik*, 1929, v. 57, 447-473.
- [57] Litvinchuk G. S., *Boundary value problems and singular integral equations with shift*. Moscow: Nauka, 1977, 488 pp. (en Ruso).
- [58] McIntosh A. y Mitrea M., *Clifford algebras and Maxwell's equations in Lipschitz domains*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1999, v. 22, 1599-1620.
- [59] Milonni P. W. y Shih Mei-Li, *Casimir Forces*. *Contemporary Physics*, 1992, v. 33, No. 5, pp 313-322.
- [60] Milton K. A., *The Casimir effect*, World Scientific, 2001.
- [61] Moisil, G., *Sur les quaternions monogenes*. *Bull. Sci. Math. Paris* 55 (1931), pp. 169-194.

- [62] Moisil G. y Theodoresco N., *Functions holomorphes dans l'espace*. Mathematica (Cluj), 1931, v. 5, 142-159.
- [63] Mostepanenko V. M. y Trunov N. N., *The Casimir effect and its applications*. Sov. Phys. Usp. 31 (11), Noviembre 1988.
- [64] Mostepanenko V. M. and Trunov N. N., *The Casimir effect and its applications*, Oxford Science Publications, 1997.
- [65] Müller C., *Grund probleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [66] Obolashvili E. I., *Three-dimensional generalized holomorphic vectors*. Differential Equations, 1975, v. 11, #1, 82-87.
- [67] Olver F. W. J., *Introduction to asymptotics and Special functions*. Academic Press, 1974.
- [68] Oviedo H., *Nuevas representaciones para el campo electromagnético en medios quirales en base al análisis cuaterniónico*. Tesis para el grado de Doctor en Ciencias en Comunicaciones y Electrónica, ESIME, IPN, 2004.
- [69] Plunien G., Müller B. y Greiner W., *The Casimir effect*. Phys. Rep. 134 (1986), pp. 87-193.
- [70] Schneider B. y Shapiro M. *Some properties of the Cauchy-type integral for the time-harmonic relativistic Dirac equation*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, Volume 25, Issue 16-18, 2002, 1441-1463.
- [71] Shneerson M. S., *Maxwell's equation and functionally invariant solutions of the wave equation*. J. Differ. Equations, 4(1968), 386-394 (1972).

- [72] Silver S., *Microwave antenna theory and design*. M.I.T. Radiation Laboratory Series. Vol. 12, Mc Graw-Hill, New York, 1949.
- [73] Sommerfeld A., *Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung*. Jber. Deutsch. Math. Verein. **21**, 309-353, 1912.
- [74] Thaller B., *The Dirac equation*. Springer-Verlag, 1992.
- [75] Vladimirov V. S., *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, Inc., 1971.
- [76] Zhdanov M. S., *Integral Transforms in Geophysics*. Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.