



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA  
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**RESPUESTA DINÁMICA DE PLATAFORMAS DE PIERNAS  
TENSIONADAS ANTE OLEAJE IRREGULAR**

**TESIS PARA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS EN ESTRUCTURAS**

**PRESENTA**

**JORGE SILVA BALLESTEROS**

**DIRECTOR**

**DR. JORGE LUIS ALAMILLA LÓPEZ**



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D. F., siendo las 17:30 horas del día 09 del mes de Marzo del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A. – U. Z. para examinar la tesis titulada:  
“RESPUESTA DINÁMICA DE PLATAFORMAS DE PIERNAS TENSIONADAS ANTE OLEAJE IRREGULAR”.

Presentada por el alumno:

Silva  
Apellido paterno

Ballesteros  
Apellido materno

Jorge  
Nombre(s)

Con registro: 

A	7	8	0	4	0	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

\_\_\_\_\_  
Dr. Jorge Luis Alamilla López

\_\_\_\_\_  
Dr. Héctor Aureliano Sánchez Sánchez

\_\_\_\_\_  
Dr. Ernesto Pineda León

\_\_\_\_\_  
Dr. Esteban Flores Méndez

\_\_\_\_\_  
Dr. Dante Marcel Campos Arias

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

\_\_\_\_\_  
M. en C. Pino Durán Escamilla  
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO E INVESTIGACIÓN



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México D.F., el día 09 del mes marzo del año 2011, el que suscribe Jorge Silva Ballesteros alumno del Programa de la Maestría en Ciencias en Estructuras con número de registro A780405, adscrito a la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura U.Z., manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Jorge Luis Alamilla López y cede los derechos del trabajo intitulado “RESPUESTA DINÁMICA DE PLATAFORMAS DE PIERNAS TENSIONADAS ANTE OLEAJE IRREGULAR”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [jsilvab@imp.mx](mailto:jsilvab@imp.mx). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

Jorge Silva Ballesteros

## DEDICATORIAS

A mi amada esposa *Gabriela*  
Por su comprensión e infinita tolerancia

A mis hijos *Jorge, Priscila y Jessica*  
Que son mi inspiración continua

A mis padres *Antonio y Guadalupe*  
Por su ejemplo y gran amor

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi maestro *Jorge López Ríos* por su apoyo y confianza

A mis compañeros de claustro que han creído en mí

A mi *Alma Máter* el Instituto Politécnico Nacional que me abrió sus puertas y me dio la oportunidad de formarme académicamente

A *Dios*

Por quien todo es posible

## RESUMEN

En el presente trabajo de tesis de grado se aborda el estudio de la respuesta dinámica de una Plataforma de Piernas Tensionadas, bajo la acción de condiciones ambientales extremas tanto de oleaje como de corriente marina en el Golfo de México.

Dos aspectos relevantes son descritos e incluidos en el estudio, son los efectos no lineales geométricos del sistema estructural y el origen aleatorio de las variables ambientales que generan las cargas dinámicas sobre la plataforma.

Se plantea el modelo matemático y el desarrollo de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico del sistema Plataforma-Solicitud y se definen los estados de mar a los que se verá sometido. Dichos estados se definen a través de estimaciones estadísticas de las condiciones del mar durante un periodo finito de tiempo y normalmente representados por espectros de oleaje parametrizados con la altura de ola significativa  $H_s$  y el periodo pico  $T_p$ , los espectros son convertidos en series de tiempo a través de simulación de oleaje aleatorio vía la descomposición de componentes armónicos de densidades espectrales de oleaje. Una vez definidas las variables metoceanicas y a través del uso de la cinemática de las partículas del agua alrededor de la plataforma, se procede a la generación espacial de fuerzas sobre todo el casco de la plataforma, integrando su efecto en el centro de masas de la misma, estableciéndose las historias de tiempo de fuerzas que son usadas posteriormente en la solución del sistema de ecuaciones de movimiento, misma que es realizada paso a paso debido a que la no linealidad de la matriz de rigidez no permite la solución en el dominio de la frecuencia.

Finalmente, se presentan los resultados de un caso de estudio hipotético de respuesta dinámica de una Plataforma de Piernas Tensionadas para los servicios de perforación y producción localizada en aguas profundas en un tirante de 1000 metros en el sur del Golfo de México.

## ABSTRACT

This document presents technical issues about the study of dynamic behavior of a Tension Leg Platform under the action of extreme ocean conditions such as wave sea states as well as ocean currents in the Gulf of Mexico.

Two main relevant subjects are included and described during the study, such as geometric non linear behavior imposed by the station keeping structural conditions (Tension legs) and the randomness of the ocean variables such as wave heights and current velocity which are the main source of dynamic forces acting on the platform.

A mathematical model is developed along with the governing equations that describe the Platform-Solicitation dynamic behavior, and then applicable sea states are defined. Sea state definition is performed through statistical estimations during a finite period, such sea states are commonly represented using wave spectral densities as functions of statistical parameters like significant wave height  $H_s$  and peak period  $T_p$ . The spectral densities are then converted into time series through wave stochastic simulation adding multiple harmonic components from the spectrum. Once the metocean variables have been defined, the water particle kinematics around the platform components are used to generate dynamic forces over the entire platform hull and translating their effect in the platform gravity center getting the force vector time history which is imposed as input to solve the governing equations. The solution is performed step by step due to the fact that stiffness coefficients are non linear producing non constant structural natural frequencies.

Finally, results about the dynamic response from a case of study are presented, such a case is an hypothetical Tension Leg Platform located somewhere in the south of the Gulf of Mexico in a 1000 meter water depth.

## CONTENIDO

<b>RESUMEN</b> .....	1
<b>ABSTRACT</b> .....	2
<b>LISTA DE TABLAS</b> .....	4
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	5
<b>NOMECLATURA</b> .....	8
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b> .....	11
1.1. Entorno y descripción del problema .....	11
1.2 Objetivo .....	14
1.3. Alcance .....	14
1.4. Justificación.....	15
1.5. Actividades generales del trabajo.....	17
1.6. Aportaciones del trabajo.....	18
<b>CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO</b> .....	20
2.1. Modelo estructural de la Plataforma de Piernas Tensionadas .....	20
2.2. Ecuaciones de movimiento .....	23
2.3. Matriz de rigidez no lineal .....	29
2.4. Solicitaciones del sistema .....	52
2.4.1 Oleaje.....	52
2.4.2 Corriente marina .....	55
<b>CAPÍTULO 3.- ALGORITMOS DE SOLUCIÓN</b> .....	59
3.1. Oleaje sintético.....	59
3.2 Fuerzas sobre la plataforma .....	65
3.3 Solución del sistema de ecuaciones.....	72
<b>CAPÍTULO 4.- CASO DE ESTUDIO, Golfo de México</b> .....	76
4.1. Condiciones meteoceánicas del sitio.....	76
4.1.1. Oleaje.....	76
4.1.2. Corriente .....	78
4.2. Dimensionamiento de la PPT.....	81
4.2.1 Requerimientos operativos .....	81
4.2.2. Selección de componentes .....	83
4.2.3. Selección de la pretensión en tendones .....	85
4.3. Respuesta Dinámica .....	89
4.3.1 Respuesta ante estado monocromático de mar extremo. ....	89
4.3.2 Respuesta ante estados policromáticos (espectral) de mar extremo. ....	95
<b>RECOMENDACIONES</b> .....	111
<b>REFERENCIAS</b> .....	112
<b>APÉNDICE 3.1</b> .....	114

## LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1. a Valores estadísticos de las series de tiempo de la posición de la superficie del mar $\eta(t)$ simuladas, caso (1) alturas de ola significativa 10 metros y periodo de cruces por cero 10 segundos .....	61
Tabla 3.1. b Valores estadísticos de las series de tiempo de la posición de la superficie del mar $\eta(t)$ simuladas, caso (2) alturas de ola significativa 12 metros y periodo de cruces por cero 15 segundos .....	62
Tabla 4.2. a Componentes y características principales de plataformas PPT instaladas y operando en tirantes cercanos a 1000 m.....	82
Tabla 4.3. a Frecuencias naturales en condición inicial con desplazamiento provocado por corriente oceánica.....	89
Tabla 4.3. b Estados de mar analizados.....	95

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. 1 Plataforma de Piernas Tensionadas ubicada en el Norte del Golfo de México.	13
Figura 2.1. a Modelo esquemático de una PPT .....	20
Figura 2.1. b Sistema de referencia ubicado en el centro de gravedad de la plataforma y desplazamientos generalizados asociados a los grados de libertad del sistema. ....	21
Figura 2.1. c Efecto del cabeceo en los tendones .....	22
Figura 2.1. d Modelo masa resorte .....	23
Figura 2.3. a Posición desplazada de la plataforma.....	30
Figura 2.3. b Coeficientes de rigidez asociadas a un desplazamiento .....	30
Figura 2.3. c Incremento del desplazamiento $\delta x$ .....	32
Figura 2.3. d Coeficientes de rigidez asociadas a un desplazamiento $\delta z$ en dirección Z positiva, grado de libertad 3 .....	37
Figura 2.3. e Desplazamiento $\delta \theta$ a partir de la posición $x$ y rigideces asociadas.....	43
Figura 2.3. f Efectos hidrodinámicos por rotación en flotación libre.....	44
Figura 2.3. g. Plano del agua que cruza las columnas de la plataforma .....	45
Figura 2.4.2. a Dinámica de circulación superficial en el Golfo de México del 18 al 21 de febrero del 2010. Fuente Colorado Center for Astrodynamics Research.....	56
Figura 2.4.2. b Ubicación de la zona de interés, latitud N19.2°, longitud W95.0° y tirante de 1000 metros. ....	57
Figura 2.4.2. c Batimetría de la zona de interés. ....	58
Figura 3.1. a Series de tiempo de la posición de la superficie del mar $\eta(t)$ , alturas de ola significativa 10 metros y periodo de cruces por cero 10 segundos .....	60
Figura 3.1. b Series de tiempo de la posición de la superficie del mar $\eta(t)$ , alturas de ola significativa 12 metros y periodo de cruces por cero 15 segundos .....	61
Figura 3.1. c Densidad espectral de origen (azul) y densidades estimadas (rojo) usando las señales simuladas, alturas de ola significativa 10 metros y periodo de cruces por cero 10 segundos .....	63
Figura 3.1. d Densidad espectral de origen (azul) y densidades estimadas (rojo) usando las señales simuladas, alturas de ola significativa 12 metros y periodo de cruces por cero 15 segundos .....	64
Figura 3.2. a Esquematización de la obtención del vector de fuerzas actuantes en la plataforma.....	67
Figura 3.2. b Variación de las historias de velocidad de partícula por oleaje, simulación con 512 armónicos del espectro PM con $H_s=12$ m y $T_z=15$ seg.....	69
Figura 3.2. c Variación de las historias de fuerza en columnas izquierda, derecha y CG, para dos alturas de ola y tres periodos asociados. ....	71

Figura 3.3. a Variación de la rigidez $K_{II}$ con el desplazamiento horizontal de la plataforma .....	74
Figura 3.3. b Convergencia de la rigidez $K$ , de una condición j a una j+1 .....	75
Figura 4.1.1. a Altura de ola significativa en la localización 22.017N 94.046W, obtenidos de la boya 42055 de la Agencia Norteamericana para la Administración del Océano y la Atmosfera. ....	77
Figura 4.1.1. b Periodos pico asociados a ola significativa en la localización 22.017N 94.046W, obtenidos de la boya 42055 de la Agencia Norteamericana para la Administración del Océano y la Atmosfera. ....	78
Figura 4.1.1. c Velocidad (cm/s) zonal, meridional y rapidez de corriente marina en la superficie en la localización 19.53N 94.48W, fuente “El Consorcio HYCOM”. ....	79
Figura 4.1.1. d Velocidad (cm/s) zonal, meridional y rapidez de corriente marina a una profundidad de 30 metros en la localización 19.53N 94.48W, fuente “The HYCOM Consortium”. ....	80
Figura 4.2.3. a Espectro de oleaje de Pierson-Moskowitz.....	86
Figura 4.2.3. b Fuerza horizontal sobre plataforma.....	86
Figura 4.2.3. c Desplazamientos horizontal y vertical de la plataforma .....	87
Figura 4.2.3. d Historia de esfuerzos en tendones .....	88
Figura 4.3.1. a Desplazamiento horizontal de la plataforma (estado transitorio y estacionario).....	90
Figura 4.3.1. b Fuerza horizontal en la plataforma por la acción simultánea de corriente y oleaje.....	91
Figura 4.3.1. c Desplazamiento vertical de la plataforma (estado transitorio y estacionario) .....	92
Figura 4.3.1. d Giro $\theta$ alrededor del eje Y de la plataforma (estado transitorio y estacionario).....	92
Figura 4.3.1. e Variación del coeficiente de rigidez $K_{II}$ (estado transitorio y estacionario)	93
Figura 4.3.1. f Variación de la tensión promedio en los tendones (estado transitorio y estacionario).....	93
Figura 4.3.1. g Variación del esfuerzo promedio en los tendones (estado transitorio y estacionario).....	94
Figura 4.3.1. h Relación entre variables, sección del estado estacionario.....	94
Figura 4.3.2. a Desplazamiento horizontal de la plataforma (caso 8 realización 4).....	97
Figura 4.3.2. b Fuerza horizontal en la plataforma por la acción simultánea de corriente y oleaje (caso 8 realización 4) .....	97
Figura 4.3.2. c Sección de Fuerza horizontal y desplazamiento horizontal en la plataforma por la acción simultánea de corriente y oleaje (caso 8 realización 4) .....	98
Figura 4.3.2. d Desplazamiento vertical de la plataforma (caso 8 realización 4).....	98
Figura 4.3.2. e Variación del coeficiente de rigidez $K_{II}$ (caso 8 realización 4) .....	99

Figura 4.3.2. f Variación de la tensión promedio en los tendones (caso 8 realización 4) ....	99
Figura 4.3.2. g Desplazamientos horizontales máximos correspondiente a cinco simulaciones de 16 estados de mar con velocidad de corriente de 100 cm/s, de acuerdo a la tabla 4.3.b .....	101
Figura 4.3.2. h Desplazamientos horizontales máximos correspondiente a cinco simulaciones de 16 estados de mar con velocidad de corriente de 120 cm/s, de acuerdo a la tabla 4.3.b .....	102
Figura 4.3.2. i Desplazamientos horizontales máximos .....	103
Figura 4.3.2. j Desplazamientos verticales máximos .....	104
Figura 4.3.2. k Desplazamientos angulares máximos .....	105
Figura 4.3.2. l Tensiones máximas promedio en tendones.....	106
Figura 4.3.2. m Tensiones mínimas promedio en tendones .....	107

## NOMECLATURA

$A$	Área de la sección transversal del elemento sumergido
$A_C$	Área de la sección transversal de cada columna de la plataforma
$A_j$	Amplitud de la $j$ 'ésima ola de un estado de mar aleatorio
$B$	Distancia centro a centro entre columnas
$b$	Centro de flotación
$\underline{C}$	Matriz de amortiguamiento
$c_d$	Coefficiente de arrastre
$c_m$	Coefficiente de inercia
$\overline{CG}$	Centro de gravedad de la plataforma
$\overline{CGm}$	Altura metacéntrica en cabeceo= GMp
$\overline{CG_z}$	Distancia de la superficie libre del agua en calma al centro de gravedad de la plataforma
$D$	Diámetro de las columnas de la plataforma
$dF(t)$	Diferencial de fuerza de oleaje
$ds$	Diferencial de longitud de elemento sumergido
$F_B$	Fuerza de flotación= $\rho g V_{sum}$
$f$	Vector de densidad de fuerza provocada por el oleaje y la corriente,
$\rightarrow$	discretizado en los tres grados de libertad del sistema en el plano
$g$	Aceleración de la gravedad
GMp	Altura metacéntrica en cabeceo = $\overline{CGm}$
$H$	Altura de ola
Hs ó $h_{sig}$	Altura de ola significativa
$\bar{h}$	Distancia del centro de gravedad al extremo superior del tendón
$h_j$	altura de la $j$ 'ésima ola de un estado de mar
$h_m$	Distancia desde el centro de masa adherida al centro de masa de la plataforma
$I_{m55}$	Momento de inercia de masa alrededor del eje $Y$
$I_Y$	Momento de inercia alrededor del eje $Y$ del área de la sección transversal(water plane) de todo el cuerpo, para una posición $\theta = 0$
$\underline{K}$	Matriz de rigidez
$K_{ij}$	Coefficiente de Rigidez: fuerza en el grado de libertad " $i$ " provocada por un desplazamiento unitario en el grado de libertad " $j$ " con todos los grados de libertad restringidos, excepto " $j$ "
$k_j$	Numero de ola = $2\pi/\lambda_j$
$L$	Longitud del tendón en la posición $x$
$L_0$	Longitud de la ola en aguas profundas
$\underline{M}$	Matriz de masas
$m$	Metacentro
$m_{11}$	Masa adherida trasnacional en la dirección del eje $X$
MMSCFD	Millones de pies cúbicos estándar por día

MBOD	Miles de barriles de aceite por día
NOAA	National Oceanic and Atmospheric Administration
PPT	Plataforma de Piernas Tensionadas
Pt	Peso total de la plataforma
$S(\omega)$	Función de densidad espectral del oleaje para un estado de mar
$T_0$	Tensión inicial en tendón
$T_{h0}$	Periodo de cruces por cero de la ola
$T^x$	Tensión de tendón asociada a la posición $x$ sin pretensión
$T$	Tensión de tendón asociada a la posición $x$ , igual a $T_0 + T^x$
$T_h$	Periodo de la ola
$T_p$	Periodo pico de la ola
$U(x', z', t)$	Velocidad relativa instantánea de la partícula de agua actuando en dirección del eje <b>X</b>
$\dot{U}(x', z', t)$	Aceleración relativa instantánea de la partícula de agua actuando en dirección del eje <b>X</b>
$u_1, u_2, u_3$	Desplazamientos lineales generalizados asociados a los grados de libertad 1, 2 y 3. Ver también $x, y, z$
$u_4, u_5, u_6$	Desplazamientos angulares generalizados asociados a los grados de libertad 4, 5 y 6
$V$	Velocidad de corriente
$V_{sum}$	Desplazamiento en metros cúbicos (volumen desplazado)
$W$	Peso de la plataforma
<b>X, Y y Z</b>	Ejes del sistema ortogonal de referencia fijo, ubicado en el centro de gravedad de la plataforma en su posición inicial
<b>X<sub>ola</sub>, Y<sub>ola</sub> y Z<sub>ola</sub></b>	Ejes del sistema ortogonal de referencia para generación de oleaje, ubicado en el nivel medio del mar, en proyección vertical del centro de gravedad de la plataforma.
$\vec{X}, \dot{\vec{X}} y \ddot{\vec{X}}$	Vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en los tres grados de libertad del sistema en el plano
$x, y, z$	Coordenadas del centro de masa de la plataforma, iguales respectivamente a los desplazamientos lineales generalizados $u_1, u_2, u_3$
$x', y', z'$	Coordenadas de un punto del casco referidas al sistema <b>X<sub>ola</sub>, Y<sub>ola</sub> Z<sub>ola</sub></b>
$x_l, y_l, z_l$	Coordenadas del extremo inferior del tendón
$\alpha$	Ángulo del tendón respecto al eje <b>X</b> en la posición $x$
$\alpha'$	Ángulo del tendón respecto al eje <b>X</b> en la posición $x + \delta x$
$\beta$	Ángulo del tendón respecto al eje <b>Y</b> en la posición $x$
$\beta'$	Ángulo del tendón respecto al eje <b>Y</b> en la posición $x + \delta x$
$\gamma$	Ángulo del tendón respecto al eje <b>Z</b> en la posición $x$
$\gamma'$	Ángulo del tendón respecto al eje <b>Z</b> en la posición $x + \delta x$
$\delta T$	Incremento en la tensión por efecto de un desplazamiento diferencial $\delta x$
$\delta L_z$	Incremento de la longitud del cable debido a un desplazamiento $\delta z$
$\xi_n$	Porcentaje de amortiguamiento para cada modo natural $n$
$\lambda$	Rigidez axial del tendón = $AE/L$

$\lambda_j$	Longitud de la j'esima ola de un estado de mar
$\nabla$	Operador nabra $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$
$\rho$	Densidad del agua en unidades de masa por metro cúbico 0.1019367 agua dulce
$\theta$	Desplazamiento angular alrededor del eje Y, igual al desplazamiento generalizado $u_5$
$\omega_j$	Relación de dispersión de la j'esima ola de un estado de mar $= [gk_j \tanh(k_j d)]^{1/2}$
$\omega_n$	Modos naturales de de la plataforma: retrazo (desplazamiento lateral), sustentación (desplazamiento vertical) y cabeceo (desplazamiento
$\psi_j$	Ángulo de la fase aleatoria con función de densidad de probabilidad constante $[0 \ 2\pi]$

## **CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN**

### **1.1. Entorno y descripción del problema**

La producción de hidrocarburos proveniente de yacimientos marinos en México ha declinado en los últimos años por lo que en el corto plazo se requerirá el desarrollo de infraestructura que permita incorporar la producción de nuevas reservas, las cuales se encuentran principalmente en yacimientos localizados en el Golfo de México en tirantes de agua que van de los 500 a los 3500 metros de profundidad (Secretaría de Energía, 2009). En estos casos las plataformas metálicas convencionales actualmente usadas en México en aguas someras no son aplicables por razones principalmente técnicas.

Para lograr el desarrollo de campos en este tipo de yacimientos, a nivel mundial se han aplicado tecnologías basadas en sistemas estructurales flotantes tales como Plataformas de Piernas Tensionadas, Barcos de Almacenamiento, Proceso y Descarga, Plataformas Semisumergibles y Plataformas tipo SPAR, algunos de ellos combinados con sistemas submarinos de producción.

En México existen al menos dos áreas con importantes prospectos petroleros en aguas profundas que requerirán el uso de algunos de los sistemas antes citados, dichas áreas se localizan en la zona de Perdido en la franja fronteriza de México con los Estados Unidos de Norteamérica, donde los tirantes de agua superan los 3000 metros y en el sur del Golfo en las costas del estado de Veracruz en tirantes que oscilan alrededor de 1000 metros. Con lo anterior se abren expectativas de nuevos desarrollos marinos en el Golfo de México en un entorno que exige tecnologías poco exploradas por la ingeniería mexicana y expuestas a un ambiente marino agresivo por la presencia de huracanes, nortes y corrientes oceánicas que pueden comprometer la estabilidad de la infraestructura de explotación.

A continuación se describe el sistema que será estudiado en el presente trabajo, destacando la problemática que representa el estudio de su comportamiento ante eventos meteorológicos y oceanográficos.

Es importante destacar que la selección del concepto estructural seleccionado para la realización de la tesis se baso primero en sus características de comportamiento estructural que limitan los desplazamientos verticales y rotacionales, lo cual permite el uso de árboles de producción petrolera alojados directamente en las cubiertas (árboles secos) y segundo porque dicho concepto proporciona grandes áreas para la instalación de los diferentes trenes de producción para el procesamiento del crudo e infraestructura completa incluyendo los de servicios habitacionales.

### ***Plataformas de Piernas Tensionadas.***

Estas plataformas son conocidas como TLP's (por sus siglas en inglés Tension Leg Platform) y están integradas básicamente por una cubierta metálica que esta sostenida en cuatro columnas circulares que se conectan en la parte inferior a pontones. El conjunto columnas y pontones compone lo que se denomina casco el cual proporciona flotación y capacidad de carga al sistema.

El casco es conectado al fondo marino a través de tendones (o piernas) que se extienden verticalmente hasta el fondo del mar, los tendones son tubulares y se conectan entre si a través de conectores mecánicos o bien por soldadura.

En la Figura 1. 1 se muestra una TLP que opera en el Norte del Golfo de México, en la cual es importante observar la cantidad de equipo que puede alojarse, incluyendo los sistemas de perforación, producción, separación, compresión, endulzamiento de gas, habitacional y servicios auxiliares que son necesarios para el proceso del hidrocarburo en alta mar.



Figura 1. 1 Plataforma de Piernas Tensionadas ubicada en el Norte del Golfo de México.

Debido a la forma en que se conectan al fondo marino, las TLP's tienen desplazamientos verticales virtualmente nulos por lo que son atractivas para la producción a través de árboles superficiales secos; sin embargo, lateralmente presentan poca rigidez —en

comparación a la vertical— lo cual hace que los desplazamientos horizontales (avance-retroceso) sean importantes.

La evaluación de la rigidez lateral arriba mencionada es uno de los aspectos más destacados desde el punto de vista técnico, debido a su no linealidad geométrica que será discutida y resuelta posteriormente. Lo anterior introduce una problemática importante en la solución del sistema de ecuaciones de movimiento que gobiernan el comportamiento del sistema, mismas que deben ser resueltas en el dominio del tiempo.

Otro aspecto importante es la definición de las solicitaciones a que se ve sometida la plataforma, las cuales pueden representarse mediante procesos estocásticos, acorde a las características del sitio de instalación. Específicamente la modelación de los estados de mar de oleaje sintético en condiciones de tormenta y su efecto en las columnas y pontones de la plataforma resulta un trabajo complejo.

## **1.2 Objetivo**

Estudiar y modelar matemáticamente el comportamiento dinámico en el plano de un sistema estructural flotante (Plataforma de Piernas Tensionadas) para usos de explotación petrolera en aguas profundas del Golfo de México. El sistema tiene rigidez no-lineal y esta sometido a cargas dinámicas caracterizadas mediante procesos estocásticos que representan las condiciones ambientales o estados de mar en ciertas regiones del Golfo de México.

## **1.3. Alcance**

Como ya fue mencionado en la introducción, en el presente trabajo se aborda el estudio de un sistema flotante, específicamente una Plataforma de Piernas Tensionadas, bajo la acción de condiciones ambientales locales del Golfo de México. Se toman en cuenta los efectos no lineales geométricos del sistema y las no linealidades de las cargas inducidas por las corrientes marinas y el oleaje.

La modelación sólo incluye el comportamiento dinámico global de la plataforma en el plano vertical, lo cual se logra acoplando los efectos entre el casco y tendones, y

posteriormente sometiendo al sistema a estados de mar extremos simulados a través de series de tiempo de oleaje y corriente marina.

Debe destacarse que debido a las características estructurales del casco, los desplazamientos globales de la plataforma comparados con los desplazamientos relativos entre los componentes del casco son superiores en varios órdenes de magnitud, por lo que el casco se modela como un cuerpo rígido resultando un sistema dinámico de tres grados de libertad.

Se ha decidido efectuar la modelación del comportamiento dinámico global de la plataforma en el plano, primero por el hecho de que en este tipo de instalaciones marinas siempre se busca: simetría en las características estructurales; simetría en la distribución de cargas; y alineación vertical del centro de rigidez, centro de masas y centro de flotación, con lo cual se minimiza el efecto de torsión en el plano horizontal. Una segunda razón para el análisis en el plano es la necesidad de mostrar la viabilidad técnica de la solución propuesta a través de un modelo simple (no simplificado) que incluya integralmente la física del problema, para su posterior potenciación a seis grados de libertad.

Dado lo anterior y debido a las no linealidades mencionadas así como a la complejidad matemática y numérica, la modelación y los análisis de respuesta dinámica están restringidos al plano y al dominio del tiempo.

#### **1.4. Justificación**

Un sistema que reúne características de capacidad de carga y superficie suficiente para alojar los diversos equipos de perforación y producción requeridos para la explotación de hidrocarburos en aguas profundas es la llamada Plataforma de Piernas Tensionadas, cuyo mayor atractivo radica en el hecho de operar con pozos de producción superficial, lo que reduce ampliamente el costo y el riesgo de falla del sistema petrolero. Un esquema descriptivo de la plataforma se presenta en la Figura 2.1. a , en la cual se muestran los elementos principales de la plataforma que son: pontones que proporcionan la mayor cantidad de la flotación requerida por el sistema y tienen dimensiones entre los 7 y 15 metros de diámetro, y longitud que muchas veces excede los 60 metros; columnas cuya función es múltiple pero principalmente proporcionan soporte a las cubiertas y las integra

con los pontones, así mismo contribuyen a la flotación del sistema y proporcionan espacio para la colocación de equipos mecánicos, el diámetro de las columnas puede rebasar los 16 metros; tendones los cuales conectan el sistema flotante con el lecho marino y trabajan en tensión, estos elementos son tubulares y se colocan en grupos en los extremos de la plataforma, su diámetro es generalmente menor de un metro y su longitud puede alcanzar los 1500 metros, por lo que representa la principal fuente de no linealidad del sistema.

No obstante lo atractivo que resultan estos sistemas por ofrecer una gran capacidad de carga y adecuada respuesta dinámica, su análisis estructural representa una complicación mayor debido principalmente a dos factores:

- el primero es su comportamiento no lineal debido a su geometría
- el segundo son las solicitaciones ambientales aleatorias (meteorológicas y oceanográficas) a la que está sometido durante toda su vida útil.

Una de las principales políticas energéticas actuales está enfocada a la explotación de hidrocarburos en aguas profundas del Golfo de México. Para este propósito es necesario asimilar y desarrollar tecnología aplicable a las condiciones ambientales propias prevalecientes en esos sitios.

Hasta la fecha en México no se han desarrollado herramientas propias que permitan evaluar el comportamiento de este tipo de estructuras en las condiciones específicas del Golfo de México en la parte sur y tampoco se cuenta con normatividad para su diseño.

El presente trabajo pretende contribuir a la reducción de las brechas en estos dos rubros estableciendo un procedimiento de análisis simplificado pero riguroso en el planteamiento teórico que pueda ser usado en trabajos posteriores tendientes a establecer la normatividad requerida. En el capítulo 2 se presenta el modelo estructural de la plataforma que incluye el planteamiento de las ecuaciones de movimiento así como el desarrollo de los coeficientes no lineales de la matriz de rigidez del sistema, la definición de los estados de mar extremo a través de la densidad espectral de oleaje y el método de obtención de series de tiempo de oleaje sintético y su transformación a velocidades y aceleración de partículas de agua que generan las fuerzas que son aplicadas en el casco de la plataforma, se finaliza el capítulo

con el establecimiento de las velocidades de corriente oceánica que posteriormente son sumadas a las que resultan de los estados de mar de oleaje. En el capítulo 3 se presentan los algoritmos para la generación numérica de las series de tiempo de las fuerzas que actúan en la plataforma, lo cual incluye la transformación de las densidades espectrales de oleaje a través de la suma de olas regulares (armónicas) las cuales tienen ángulos de fase aleatorios con distribución de probabilidad constante entre cero y  $2\pi$ , así mismo se presenta el método de solución del sistema de ecuaciones de movimiento, el cual combina una aproximación por diferencias finitas con un procedimiento iterativo para lograr estabilidad de la solución debido a la dependencia de los coeficientes de la matriz de rigidez con los desplazamientos del sistema. Finalmente en el capítulo 4 se presenta un caso de estudio para una plataforma con servicios de perforación y producción en un sitio en el sur del Golfo de México y se discuten los principales resultados.

### **1.5. Actividades generales del trabajo**

A continuación se describen en forma general las actividades que se desarrollaron en el presente trabajo de tesis

- **Desarrollo de un modelo matemático:**  
Se plantean las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico del sistema Estructura-Solicitación en el plano.
- **Definición de solicitaciones ambientales:**  
Se plantean los estados de mar a los que se verá sometida la Plataforma y se presenta un modelo de simulación de oleaje vía la descomposición de una densidad espectral de oleaje a través de componentes armónicos (oleaje sintético).
- **Definición de fuerzas actuantes sobre la estructura:**  
Se obtiene la distribución espacial de fuerzas en todo el casco de la plataforma, integrando su efecto en su centro de masas, a través del uso de la cinemática de las

partículas del agua alrededor de la plataforma, estableciéndose historias de tiempo que son usadas posteriormente en el sistema de ecuaciones de movimiento.

- **Análisis dinámicos:**

Debido a la no linealidad del sistema se aplica un algoritmo de solución en el dominio del tiempo (diferencias finitas) que permite obtener historias de respuesta del centro de masas del sistema

- **Caso de estudio:**

Se desarrolla el análisis de una Plataforma de Piernas Tensionadas hipotética, para los servicios de perforación y producción localizada en aguas profundas en un tirante de 1000 metros en el sur del Golfo de México.

## **1.6. Aportaciones del trabajo**

Las principales aportaciones que emergen como resultado del presente trabajo de tesis y que serán destacadas durante el desarrollo de los capítulos subsecuentes se listan a continuación:

1. Se establece la matriz de rigidez de una Plataforma de Piernas Tensionadas la cual incluye tanto los efectos de no-linealidad geométrica aportados por sus tendones, como la rigidez hidrodinámica producto de los efectos de flotación variable. Además de las no-linealidades, la matriz muestra una estructura totalmente diferente a la de una estructura elástica lineal ya que es no simétrica, lo cual se demuestra en la sección 2.3. Aunque esta falta de simetría es compartida por otro autor (S. Ahmad 1996), los coeficientes de rigidez aquí desarrollados difieren considerablemente debido probablemente a las simplificaciones realizadas por el mencionado autor. Por otro lado existen otros autores (Patel and Lynch 1983) que muestran una similitud muy grande en los coeficientes de la matriz de rigidez pero asumen simetría de la matriz de rigidez aunque no la demuestran.
2. Se determina el comportamiento de dinámico global de una TLP para condiciones extremas de mar para un sitio en el sur del Golfo de México, específicamente en una

región de potencial petrolero, observándose que para condiciones estructurales estándar, provenientes de un análisis comparativo de plataformas similares que operan en el Golfo de México, la plataforma muestra un comportamiento adecuado, lo cual es un avance positivo en la viabilidad de infraestructura para la explotación en aguas profundas.

3. El método de análisis y la herramienta de cálculo desarrollada proporcionan parte de la información necesaria para posteriores análisis de confiabilidad del sistema de tendones (sistema de amarre), así como información de condiciones de frontera que se usan como entrada para los análisis por elemento finito para el diseño del casco de la plataforma.

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Modelo estructural de la Plataforma de Piernas Tensionadas

En el capítulo 1 fue descrita la configuración de una Plataforma de Piernas Tensionadas, se mencionaron las principales solicitaciones a que está sometida y se estableció el objetivo y alcance del presente trabajo, mismos que serán logrados partiendo de un modelo estructural que represente las condiciones de operación la plataforma. En la Figura 2.1. a se muestran esquemáticamente los elementos principales de la plataforma, los cuales representados adecuadamente permitirán establecer un modelo matemático para el estudio del comportamiento dinámico del sistema.

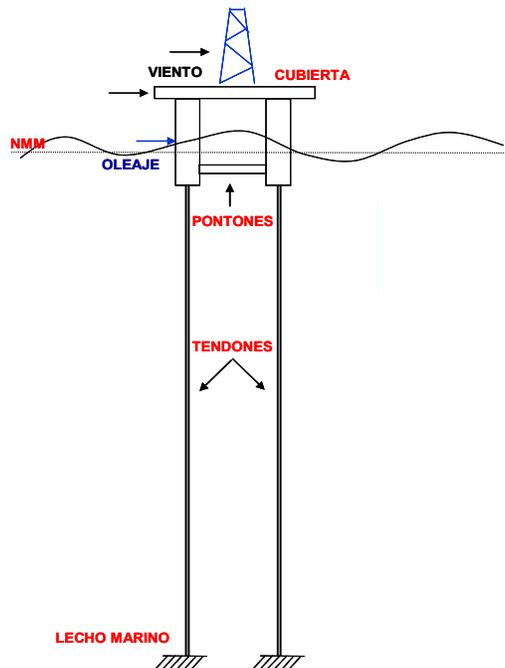


Figura 2.1. a Modelo esquemático de una PPT

En el presente trabajo, el modelo sólo representa el comportamiento de la plataforma en el plano vertical, acoplando los efectos entre el casco y los tendones y sometiendo al sistema al efecto externo de oleaje y corriente marina.

Previo a la descripción del modelo es importante establecer el sistema de referencia que será usado en el desarrollo del presente trabajo, dicho sistema, mostrado en la Figura 2.1. b,

es ortogonal derecho y esta identificado por los ejes **X**, **Y** y **Z**, cuyo origen se encuentra en el centro de gravedad de la plataforma en la posición inicial previa al movimiento. Así mismo, se observan en la misma figura los desplazamientos generalizados asociados a cada uno de los seis grados de libertad del sistema, tres de ellos lineales  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ , en la dirección de los ejes **X**, **Y** y **Z** respectivamente y tres angulares;  $u_4$ ,  $u_5$  y  $u_6$ , alrededor de los ejes **X**, **Y** y **Z** respectivamente. Estos desplazamientos son conocidos en el ambiente naval con los siguientes nombres: ( $u_1$ ) retrazo; ( $u_2$ ) deriva; ( $u_3$ ) sustentación; ( $u_4$ ) balanceo; ( $u_5$ ) cabeceo; y ( $u_6$ ) rotación

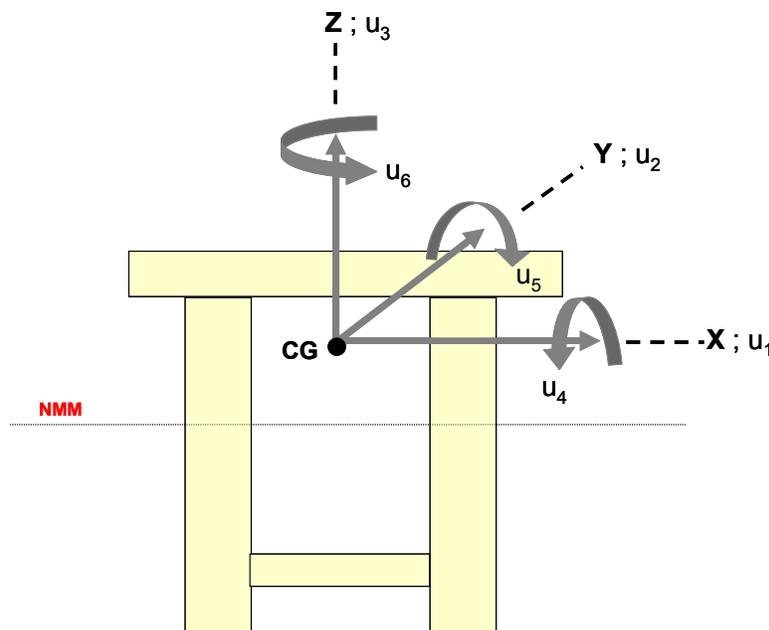


Figura 2.1. b Sistema de referencia ubicado en el centro de gravedad de la plataforma y desplazamientos generalizados asociados a los grados de libertad del sistema.

Debido a sus características estructurales, los desplazamientos del casco comparados con los desplazamientos relativos entre sus componentes son varios ordenes de magnitud superiores, por lo que el modelo permite estudiar el comportamiento dinámico global del sistema simulando el casco como un cuerpo rígido, para posteriormente usar la respuesta cinemática en un segundo análisis con un modelo de elemento finito que permita estudiar el comportamiento del casco a nivel de esfuerzos. Debe destacarse que esto último no es parte del alcance del presente trabajo.

Los tendones son modelados como elementos unidimensionales de comportamiento inelástico. Es importante mencionar que debido al exceso de flotación del casco los tendones están inicialmente en tensión y se pretende que durante la operación del sistema se mantengan en tensión, sin embargo debido al efecto de cabeceo (rotación alrededor del eje Y) de la plataforma, esta tensión se reduce en algunos tendones y crece en otros, debiéndose cuidar que en ningún caso se exceda la fluencia o se presente compresión ya que esto último provocaría inestabilidad en el tendón debido a su esbeltez extrema, este efecto se muestra en la Figura 2.1. c

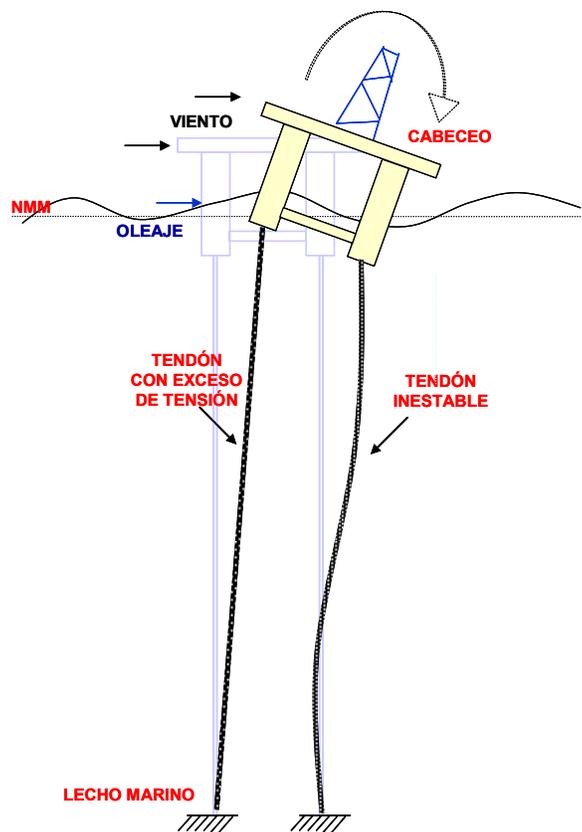


Figura 2.1. c Efecto del cabeceo en los tendones

El sistema se puede representar con un modelo masa resorte como el mostrado en la Figura 2.1. d, en el cual el casco tiene movimiento de cuerpo rígido en tres grados de libertad y se conecta a dos resortes de rigidez no-lineal que simulan a los tendones. Una parte importante del casco (pontones y más del 80% de la longitud de las columnas) está sometido al efecto del oleaje y la corriente.

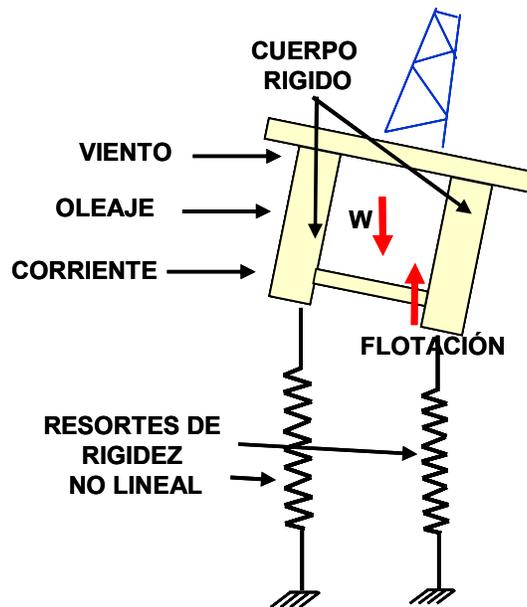


Figura 2.1. d Modelo masa resorte

Un aspecto importante que se debe destacar y que se observa en la misma Figura 2.1. d, es que al instante en que rota el casco de la plataforma, las cargas gravitacionales y la fuerza de flotación no coinciden en una línea vertical generándose una excentricidad que provoca un momento en sentido contrario al giro de la plataforma restaurando su posición de equilibrio, a este momento se suma el provocado por los tendones. Ambos efectos serán desarrollados en detalle en la sección 2.3 donde se plantea la matriz de rigidez del sistema acoplado casco-tendones.

## 2.2. Ecuaciones de movimiento

A fin de plantear el sistema de ecuaciones de movimiento, considérese el modelo presentado en la Figura 2.1. d, como un modelo compacto masa resorte sometido al efecto del oleaje y de corriente marina como se muestra en la siguiente Figura 2.2. a, el sistema de referencia se localiza en el centro de gravedad de la estructura como se muestra en la Figura 2.1. b. En este modelo se han incluido resortes horizontales que representan la proyección horizontal de la fuerza de los tendones cuando la plataforma se desplaza lateralmente, ésta fuerza es conocida como “fuerza de restauración”, y su definición se presenta con detalle en la sección 2.3.

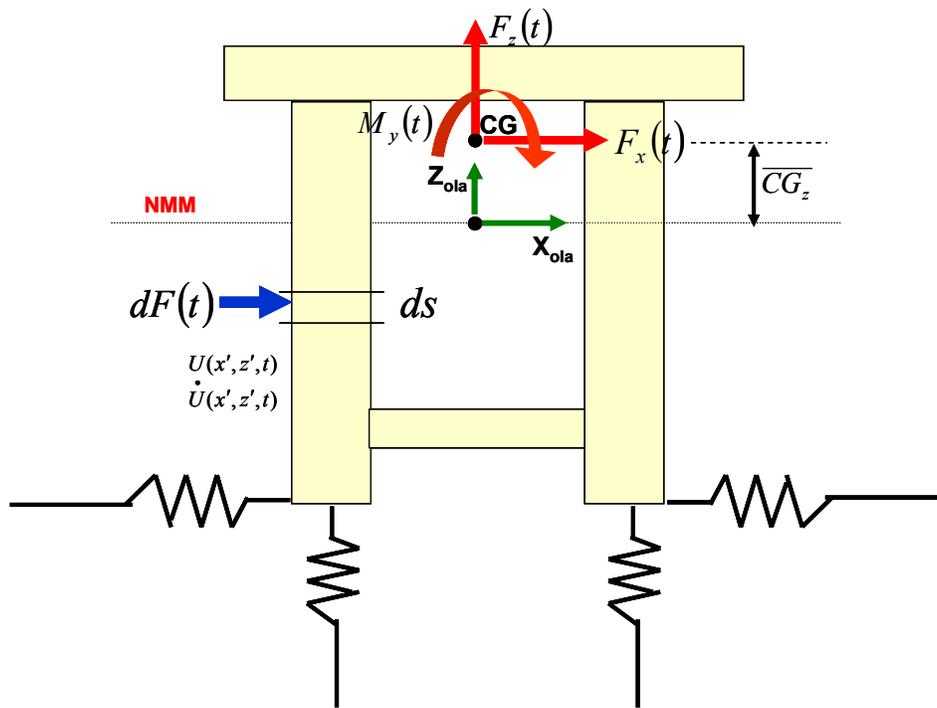


Figura 2.2. a Modelo masa resorte

Como se menciono previamente, el casco es considerado como un cuerpo rígido y por lo tanto presenta 6 grados de libertad, de los cuales se conservarán sólo 3 para el estudio del comportamiento en el plano que será considerado en este trabajo, los grados de libertad que se conservan son el 1, 3 y 5. Adicionalmente debe destacarse que, por comodidad de manejo, para el planteamiento tanto de la ecuación de movimiento como de los coeficientes de rigidez se usa convencionalmente la nomenclatura  $x$ ,  $z$  &  $\theta$  para los desplazamientos asociados a los tres grados de libertad a que se hace referencia, lo cual es valido ya que las coordenadas  $x$  &  $z$  coinciden con los gados de libertad  $u_1$  &  $u_3$ .

Con lo anterior se puede expresar la ecuación de movimiento de la plataforma en forma matricial de la siguiente manera (Chakrabarti S. K., 1897 y Ahmad S., 1996)

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{C} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \int_{\text{sumergida}} \underline{f} ds \quad (2.2.a)$$

Donde:

$M$ ,  $C$  y  $K$  son respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema cuyos elementos se describirán y determinarán en las secciones subsecuentes.

$\vec{X}$ ,  $\dot{\vec{X}}$  y  $\ddot{\vec{X}}$  son los vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en los tres grados de libertad del sistema en el plano.

$\vec{f}$  es el vector de densidad de fuerza provocada por el oleaje y la corriente incidiendo en la zona sumergida del casco, en los tres grados de libertad del sistema en el plano.

Es importante destacar que la dinámica de una plataforma flotante esta fuertemente influenciada por efectos de masa adherida y amortiguamiento producidos por el propio movimiento de la estructura dentro del agua, lo cual se manifiesta en el segundo término de la ecuación cuando las fuerzas son determinadas por el potencial de velocidad producido por las olas incidentes, difractadas y radiadas sobre la estructura, siendo estas ultimas las que introducen los efectos hidrodinámicos en términos de coeficiente de masa adherida y coeficiente de amortiguamiento.

El efecto de difracción es importante en aquellos casos en los que la presencia del elemento estructural afecta el flujo del fluido y por lo tanto el perfil de la ola, dicho efecto empieza a ser importante cuando se cumple la relación  $\pi D/L_0 > 0.5$  (Carl Weggel D, 1997) donde  $D$  es el diámetro del elemento estructural sumergido y  $L_0$  la longitud de la ola.

Para el caso estudiado, el efecto de difracción no es considerado ya que los estados de mar que serán analizados presentan olas cuyos periodos en la mayoría de los casos rebasan los 9 segundos con lo cual se tiene una longitud de ola mínima de 126 m (para aguas profundas la relación entre el periodo y la longitud de ola es  $L_0 = 1.5613T^2$ ) y como se verá en la descripción de la plataforma sus piernas tienen un diámetro de 18 metros por lo que  $\pi D/L_0 > 0.5$  es menor que 0.5

Dado lo anterior sólo se toma en cuenta el efecto de las olas incidentes a través de la ecuación de Morison (Brebbia C.A. and Walker S., 1979). Por lo tanto el lado derecho de la ecuación se divide en dos componentes, la primera conocida como fuerza de inercia (FI) que es impuesta por la aceleración diferencial entre las partículas del agua y la estructura, y la segunda se conoce como fuerza de arrastre (FD) y es producto de la velocidad diferencial

entre el agua y la estructura, por lo que la ecuación de movimiento 2.2.a. se puede expresar de la siguiente manera ya que las piernas de la plataforma son de tipo cilíndrico:

$$\begin{matrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{matrix} + C \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{matrix} + K \begin{matrix} x \\ z \\ \theta \end{matrix} = \begin{matrix} \int_{sumergida} \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 (\dot{U}-\dot{x}) \ddot{x} ds + \int_{sumergida} \rho c_d \frac{D}{2} \left\{ (U+\dot{x}) \left| (U-\dot{x}) \right| \right\} ds \\ 0 \\ -h_m \int_{sumergida} \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 (\dot{U}-\dot{x}) \ddot{x} ds - h_m \int_{sumergida} \rho c_d \frac{D}{2} \left\{ (U+\dot{x}) \left| (U-\dot{x}) \right| \right\} ds \end{matrix} \quad (2.2.b)$$

Donde:

$\rho$  = Densidad del agua del mar.

$h_m$  = Distancia desde el centro de masa adherida al centro de masa de la plataforma, entendiéndose como masa adherida a aquel volumen de agua que se desplaza junto con los elementos sumergidos de la plataforma.

$c_d$  = Coeficiente de arrastre.

$c_m$  = Coeficiente de inercia.

$U$  = Velocidad relativa instantánea de la partícula de agua actuando en dirección del eje **X**

$\dot{U}$  = Aceleración relativa instantánea de la partícula de agua actuando en dirección del eje **X**

Los valores de los coeficientes de masa y de arrastre  $c_m$  y  $c_d$  respectivamente, se encuentran en forma experimental y están disponibles en la literatura v.g. Brebbia C.A. and Walker S., 1979.

Dos consideraciones se harán en este punto: la primera es que debido a que las rotaciones alrededor del eje **Y** (cabeceo) son muy pequeñas, la aceleración  $\ddot{x}$  de la plataforma no varía sobre el eje **Z** (movimiento de cuerpo rígido); y la segunda es que la velocidad de la plataforma es pequeña comparada con la de la partícula de agua por lo que el efecto

diferencial no será considerado. De esta manera podemos reescribir la ecuación 2.2.b. como:

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + C \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_c \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} \dot{U} ds - \rho_c \frac{\pi}{4} D^2 \ddot{x} \int_{sumergida} ds + \rho_d \frac{D}{2} \int_{sumergida} \{U|U\} ds \\ 0 \\ -h_m \rho_c \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} \dot{U} ds + h_m \rho_c \frac{\pi}{4} D^2 \ddot{x} \int_{sumergida} ds - h_m \rho_d \frac{D}{2} \int_{sumergida} \{U|U\} ds \end{Bmatrix}$$

Los términos del lado derecho de la ecuación que están multiplicando a la aceleración  $\ddot{x}$  son reagrupados del lado izquierdo y representan la masa adherida trasnacional en la dirección del eje **X** y el momento de inercia de masa alrededor del eje **Y**, los cuales se suman a la masa  $m_{11}$  y  $I_{m55}$  respectivamente, quedando finalmente la ecuación de movimiento de la siguiente manera:

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + C \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_c \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} \dot{U} ds + \rho_d \frac{D}{2} \int_{sumergida} \{U|U\} ds \\ 0 \\ -h_m \rho_c \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} \dot{U} ds - h_m \rho_d \frac{D}{2} \int_{sumergida} \{U|U\} ds \end{Bmatrix}$$

(2.2.c)

Donde la matriz de masa queda definida por:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} m_{11} + \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} ds & 0 & 0 \\ 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m55} + h_m^2 \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} ds \end{pmatrix}$$

Para efectos del presente estudio el amortiguamiento se consideró de tipo viscoso usando el porcentaje de amortiguamiento  $\xi_n$  para cada modo natural de vibración de la plataforma, el cual puede ser determinado en forma experimental, porcentajes de amortiguamiento son propuestos por Kim et.al., 2001, para una plataforma similar para los modos naturales  $\omega_n$  de: retrazo (desplazamiento lateral), sustentación (desplazamiento vertical) y cabeceo (desplazamiento angular alrededor del eje **Y**), por lo que la matriz de amortiguamiento considerada en el presente trabajo tiene la siguiente forma:

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \left\{ m_{11} + \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} ds \right\} \xi_n 2\omega_n & 0 & 0 \\ 0 & m_{33} \xi_n 2\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & \left\{ I_{m55} + h_m^2 \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} ds \right\} \xi_n 2\omega_n \end{pmatrix}$$

Dependiendo de las características de las matrices  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  y  $\underline{K}$  de la ecuación 2.2.c., ésta puede ser resuelta en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo, si tales matrices fuesen constantes y considerando que el segundo término de la ecuación puede ser linealizado entonces sería posible una transformación de la ecuación al dominio de la frecuencia y la realización de un análisis espectral.

Sin embargo, como se verá en la sección 2.3, la matriz  $K$  presenta no linealidades importantes que obligan a la solución del sistema de ecuaciones en el dominio del tiempo a través del uso de técnicas de diferencias finitas.

### 2.3. Matriz de rigidez no lineal

A continuación se plantea la matriz de rigideces del sistema, la cual esta constituida por la parte hidrodinámica del casco y la rigidez del sistema de amarre cuyos tendones funcionan como resortes no lineales.

Partiendo de la definición de rigidez, cada coeficiente  $K_{ij}$  será la fuerza en el grado de libertad “i” provocada por un desplazamiento unitario en el grado de libertad “j” con todos los grados de libertad restringidos, excepto “j”, lo cual se puede expresar como:

$$K_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (2.3.a)$$

#### Calculo de coeficientes de rigidez por efecto de un desplazamiento en dirección X:

Para el análisis de la plataforma se considera el sistema en el plano con los tres grados de libertad 1, 3 y 5 y sus desplazamientos asociados  $x$ ,  $z$  &  $\theta$  respectivamente, mismos que se mencionaron en la sección 2.2.

La Figura 2.3. a muestra la estructura en una posición inicialmente desplazada a una posición  $x$ . En la Figura 2.3. b se muestran los coeficientes de rigidez asociadas a un desplazamiento en el grado de libertad 1.

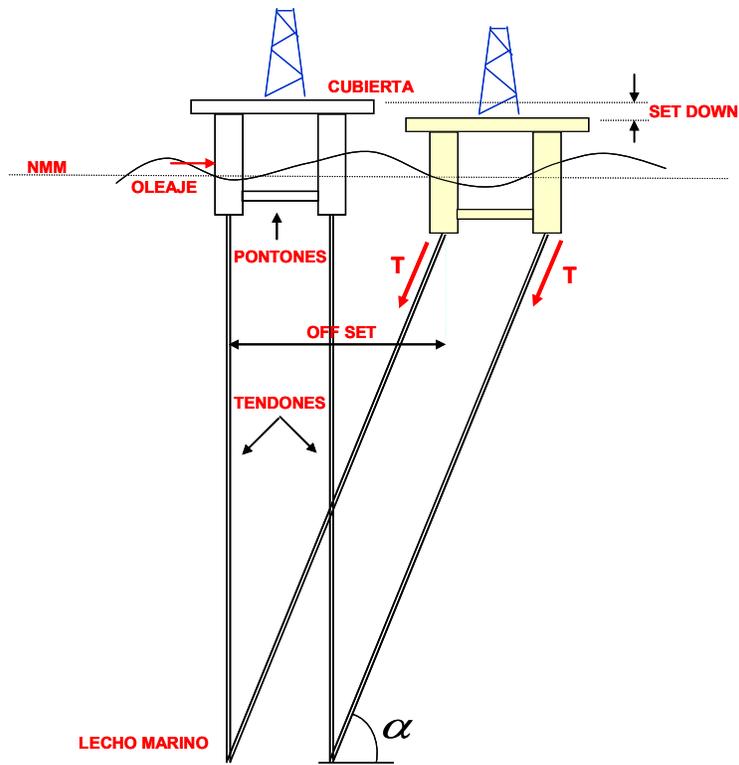


Figura 2.3. a Posición desplazada de la plataforma

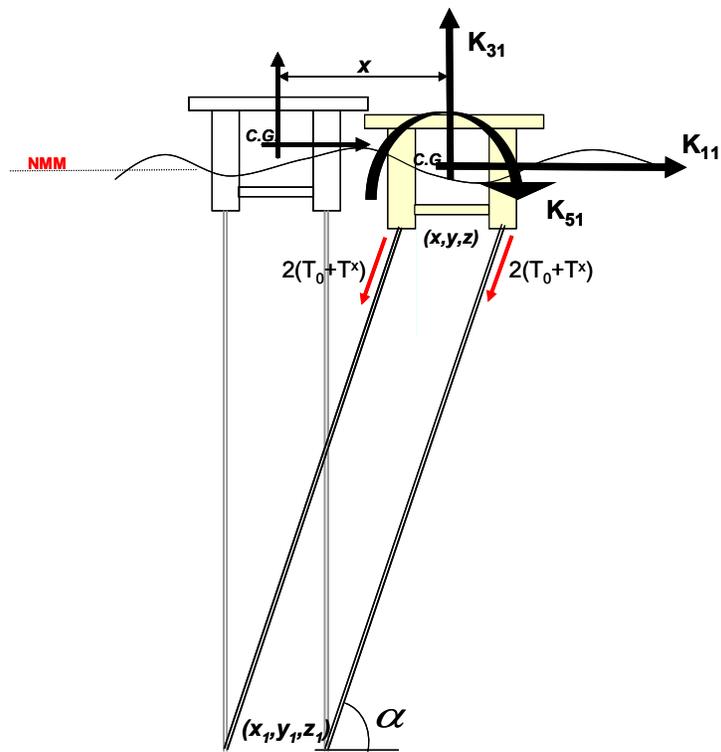


Figura 2.3. b Coeficientes de rigidez asociadas a un desplazamiento en el grado de libertad 1

### **Calculo del coeficiente de rigidez $K_{11}$**

Dado que la rigidez variará con la posición de la plataforma, para su cálculo se considera que la estructura se ha desplazado a una posición  $x$ , es decir se considera una configuración inicial deformada, por lo que la ecuación de equilibrio en la dirección  $\mathbf{X}$  será:

$$K_{11}x = 4(T_0 + T^x) \cos \alpha \quad (i)$$

Donde:

$T_0$  = Tensión inicial

$T^x$  = Incremento de tensión de la posición inicial a la posición  $x$

$\alpha$  = ángulo del tendón respecto al eje  $\mathbf{X}$  en la posición  $x$

La longitud  $L$  del tendón en la posición  $x$  será:

$$L = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}$$

$x, y, z$  &  $x_1, y_1, z_1$  son las coordenadas del extremo superior e inferior del tendón y

Además

$$\cos \alpha = \frac{x - x_1}{L} = \frac{a}{L} \quad \cos \beta = \frac{y - y_1}{L} = \frac{b}{L} \quad \cos \gamma = \frac{z - z_1}{L} = \frac{c}{L}$$

A partir de esta posición se aplica un incremento del desplazamiento  $\delta x$  en la misma dirección  $\mathbf{X}$  como se muestra en la

Figura 2.3. c

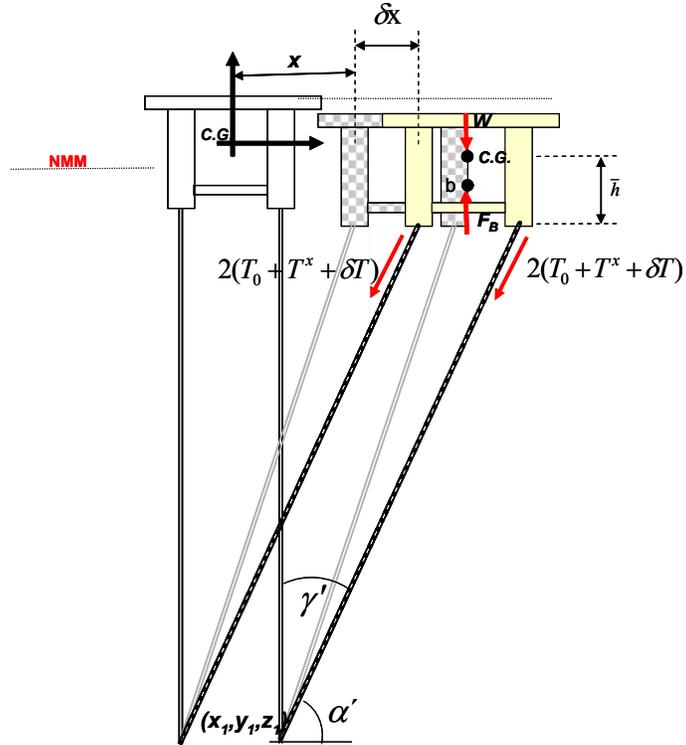


Figura 2.3. c Incremento del desplazamiento  $\delta x$

Y obtenemos la siguiente ecuación por equilibrio en la dirección **X**:

$$K_{11}(x + \delta x) = 4(T_0 + T^x + \delta T) \cos \alpha' \quad (\text{ii})$$

Donde:

$\delta T$  = Incremento en la tensión por efecto de un desplazamiento diferencial  $\delta x$

$\alpha'$  = ángulo del tendón respecto al eje **X** en la posición  $x + \delta x$

$\gamma'$  = ángulo del tendón respecto al eje **Z** en la posición  $x + \delta x$

$$\cos \alpha' = \frac{x + \delta x - x_1}{L + \delta L} = \frac{a + \delta x}{L + \delta L}$$

Substituyendo la ecuación (i) en (ii) y reagrupando, se puede escribir:

$$\frac{K_{11} \delta x}{4} = [(T + \delta T) \cos \alpha' - T \cos \alpha] \quad (\text{iii})$$

Donde  $T = T_0 + T^x$

Substituyendo  $\cos \alpha'$  y  $\cos \alpha$  en (iii) y haciendo trabajo de algebra se tiene;

$$\frac{K_{11}\delta x}{4} = [(T + \delta T) \frac{a + \delta x}{L + \delta L} - T \frac{a}{L}] = [(T + \delta T) \frac{a + \delta x}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} - T \frac{a}{L}] = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots = [(T + \delta T) \frac{aL - \delta x \delta L - a \delta L + L \delta x}{L^2 + (\delta L)^2} - T \frac{a}{L}]$$

Reduciendo términos de orden superior se llega a;

$$\frac{K_{11}\delta x}{4} = T \frac{a}{L} \left( \frac{\delta x}{a} - \frac{\delta L}{L} + \frac{\delta T}{T} \right) \quad (iv)$$

El incremento de la tensión  $\delta T$  se calcula como función de la elongación incremental del cable  $\delta L$ , entonces:

$$\delta T = \lambda \delta L$$

Donde:

$$\lambda = \frac{AE}{L} = \text{Rigidez axial del tendón}$$

$$\delta L = \nabla_L \cdot \vec{\delta X} = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial z} \delta z$$

Debido a que en este caso sólo existe  $\delta x$ , se puede describir  $\delta L$  como;

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x$$

Entonces;

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x = \frac{\partial [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}}{\partial x} \delta x = \frac{x - x_1}{L} \delta x$$

$$\delta L = \frac{a}{L} \delta x \quad (v)$$

Por lo que el incremento de tensión en el tendón será;

$$\delta T = \lambda \frac{a}{L} \delta x \quad (vi)$$

Sustituyendo (v) y (vi) en (iv) se obtiene;

$$\frac{K_{11}\delta x}{4} = T \frac{a}{L} \left( \frac{\delta x}{a} - \frac{a\delta x}{L^2} + \frac{\lambda a\delta x}{LT} \right) = \delta x \left( \frac{T}{L} - \frac{T}{L} \cos^2 \alpha + \lambda \cos^2 \alpha \right)$$

Pero;  $\frac{T}{L} = \frac{T}{L} \text{sen}^2 \alpha + \frac{T}{L} \cos^2 \alpha$

Por lo que;

$$\frac{K_{11}\delta x}{4} = \delta x \left( \frac{T}{L} \text{sen}^2 \alpha + \lambda \cos^2 \alpha \right)$$

Encontrándose finalmente el coeficiente de rigidez  $K_{11}$ :

$$K_{11} = 4 \left( \frac{T}{L} \text{sen}^2 \alpha + \lambda \cos^2 \alpha \right) \quad (2.3.b)$$

### **Calculo del coeficiente de rigidez $K_{31}$**

Debido al mismo efecto de desplazamiento  $\delta x$  mostrado en la Figura 2.3. c, ahora se plantea el equilibrio en la dirección  $\mathbf{Z}$ , con lo que se puede establecer el coeficiente de rigidez  $K_{31}$  en el cual se incluyen las fuerzas de flotación y el peso de la plataforma, mismas que se observan en la Figura 2.3. c:

$$K_{31}(x + \delta x) + F_B = 4(T_0 + T^x + \delta T)\text{sen}\alpha' + W \quad (vii)$$

Donde:

$F_B$ = Fuerza de flotación

$W$ = Peso de la plataforma

Además  $\text{sen}\alpha' = \cos\gamma'$

De las condiciones iniciales de equilibrio vertical, esto es con desplazamiento horizontal cero, se tiene que:

$$F_B - 4T_0 - W = 0 \quad (viii)$$

La cual se sustituye en (vii) para obtener:

$$K_{31}(x + \delta x) = 4(T_0 + T^x + \delta T)\cos\gamma' - 4T_0 \quad (ix)$$

Además por equilibrio en la dirección  $\mathbf{Z}$  en la posición  $x$  se tiene:

$$K_{31}x + F_B = 4(T_0 + T^x)\cos\gamma + W \quad (x)$$

Sustituyendo (viii) en (x) se obtiene:

$$K_{31}x = 4(T_0 + T^x) \cos \gamma - 4T_0 \quad (\text{xi})$$

Restando (ix) y (xi) se obtiene la fuerza de restauración en dirección  $\mathbf{Z}$  para un desplazamiento incremental  $\delta x$  de la siguiente manera:

$$\frac{K_{31}\delta x}{4} = (T + \delta T) \cos \gamma' - T \cos \gamma \quad (\text{xii})$$

En esta posición se tienen los siguientes cosenos:

$$\cos \gamma' = \frac{z - z_1}{L + \delta L} = \frac{c}{L + \delta L} \quad \text{y} \quad \cos \gamma = \frac{z - z_1}{L} = \frac{c}{L}$$

Sustituyendo ambos en (xii) y multiplicando el primer término del lado derecho por el conjugado de  $L + \delta L$  en el numerador y denominador:

$$\frac{K_{31}\delta x}{4} = (T + \delta T) \frac{c}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} - T \frac{c}{L}$$

Haciendo el producto y eliminando términos de orden superior se obtiene:

$$\frac{K_{31}\delta x}{4} = -T \frac{c}{L^2} \delta L + \frac{c}{L} \delta T = -\frac{T}{L} \cos \gamma \cos \alpha \delta x + \lambda \cos \gamma \cos \alpha \delta x$$

Llegando finalmente al siguiente coeficiente de rigidez  $K_{31}$ :

$$K_{31} = 4\left(\lambda - \frac{T}{L}\right) \cos \alpha \cos \gamma \quad (2.3.c)$$

### ***Calculo del coeficiente de rigidez $K_{51}$***

Debido al mismo efecto de desplazamiento  $\delta x$  mostrado en la Figura 2.3. c, ahora se plantea el equilibrio de momentos alrededor del eje  $\mathbf{Y}$  en el centro de gravedad, con lo que se puede establecer el coeficiente de rigidez  $K_{51}$ . Nótese que los momentos de las proyecciones verticales de las fuerzas de los tendones (derechos e izquierdos) se cancelan quedando la ecuación como:

$$K_{51}(x + \delta x) + 4(T_0 + T^x + \delta T) \cos \alpha' * \bar{h} = 0 \quad (\text{xiii})$$

Donde:

$\bar{h}$  = Distancia del centro de gravedad al extremo superior del tendón

Sustituyendo la ecuación (ii) en (xiii) se obtiene:

$$K_{s1}(x + \delta x) + K_{11}(x + \delta x) * \bar{h} = 0 \quad (\text{xiv})$$

Por otro lado, la ecuación de equilibrio de momentos alrededor del eje Y en el centro de gravedad en la posición  $x$  previo al incremento de desplazamiento  $\delta x$  es:

$$K_{s1}x + 4(T_0 + T^x) \cos \alpha * \bar{h} = 0 \quad (\text{xv})$$

Sustituyendo la ecuación (i) e (xv) se obtiene:

$$K_{s1}x + K_{11}x * \bar{h} = 0 \quad (\text{xvi})$$

Restando (xvi) de (xiv) se obtiene finalmente el coeficiente de rigidez  $K_{s1}$ :

$$K_{s1} = -K_{11} * \bar{h}$$

$$K_{s1} = -4\left(\frac{T}{L} \text{sen}^2 \alpha + \lambda \cos^2 \alpha\right) * \bar{h} \quad (\text{2.3.d})$$

### **Cálculo de coeficientes de rigidez por efecto de un desplazamiento en dirección Z**

En la Figura 2.3. d se muestran los coeficientes de rigidez asociadas a un desplazamiento en el grado de libertad 3, que se logran aplicando un desplazamiento  $\delta z$  a partir de la posición inicialmente desplazada de la estructura como se vio en la Figura 2.3. a

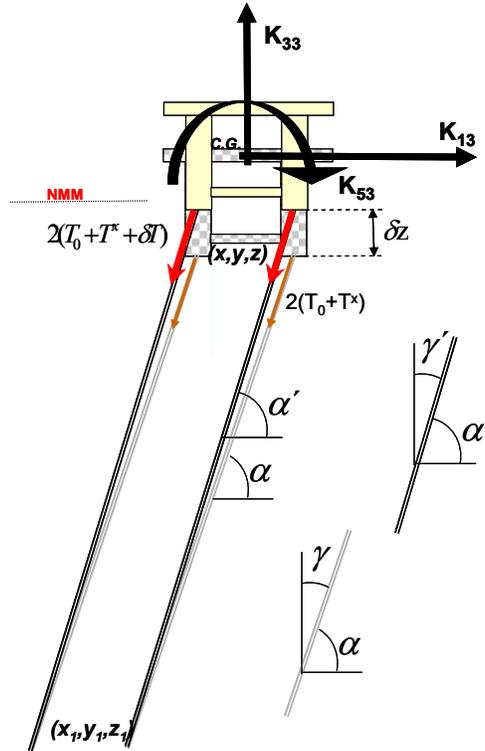


Figura 2.3. d Coeficientes de rigidez asociadas a un desplazamiento  $\delta z$  en direcci3n Z positiva, grado de libertad 3

Los cosenos directores para esta nueva posici3n desplazada son:

$$\cos \alpha' = \frac{x - x_1}{L + \delta L} = \frac{a}{L + \delta L} \quad \text{y} \quad \cos \gamma' = \frac{z - z_1 + \delta z}{L + \delta L} = \frac{c + \delta z}{L + \delta L}$$

Debe destacarse que el incremento de la longitud del cable  $\delta L$  se debe en este caso a la aplicaci3n del desplazamiento  $\delta z$ , por lo que partiendo de:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial z} \delta z,$$

y dado que esta vez solo existe  $\delta z$  se obtiene:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z$$

Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2} \langle (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \rangle^{-1/2} 2(z - z_1) = \frac{z - z_1}{L}$$

Entonces

$$\delta L = \frac{z - z_1}{L} \delta z = \delta z \cos \gamma \quad (\text{xvii})$$

**Calculo del coeficiente de rigidez  $K_{33}$**

De la Figura 2.3. d se puede establecer el equilibrio en la dirección  $Z$ , en dicha figura se han omitido sencillez del dibujo tanto el peso  $W$  como la fuerza de flotación  $F_B$  que actúan verticalmente en el centro de masas y centro de flotación respectivamente y que se pueden apreciar en la Figura 2.3. c, ambos efectos son incluidos en la ecuación xviii, así como el decremento de flotación  $4A_C \rho g \delta z$  provocado por el desplazamiento  $\delta z$ , por tanto se obtiene:

$$K_{33}(z + \delta z) + F_B - 4A_C \rho g \delta z = 4(T_0 + T^x + \delta T) \cos \gamma' + W \quad (\text{xviii})$$

Donde  $A_C$  es el área de la sección transversal de cada columna de la plataforma.

Por otro lado se sabe que  $\delta T = \lambda \delta L$

Sustituyendo la ecuación (xvii) en  $\delta T$  se obtiene:

$$\delta T = \lambda \delta z \cos \gamma \quad (\text{xix})$$

sustituyendo las ecuaciones (viii) en (xviii) se obtiene:

$$K_{33}z + K_{33}\delta z - 4A_C \rho g \delta z = 4(T + \delta T) \cos \gamma' - 4T_0 \quad (\text{xx})$$

Además por equilibrio en la misma dirección  $Z$  pero previo a la aplicación del desplazamiento  $\delta z$  se obtiene:

$$K_{33}z + F_B = 4(T_0 + T^x) \cos \gamma + W \quad (\text{xxi})$$

Substituyendo la ecuación (viii) en (xxi) y restando este resultado a (xx), se obtiene:

$$K_{33}\delta z - 4A_C \rho g \delta z = 4(T + \delta T) \cos \gamma' - 4T \cos \gamma$$

Desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{K_{33}}{4} \delta z - A_C \rho g \delta z &= (T + \delta T) \cos \gamma' - T \cos \gamma = (T + \delta T) \frac{c + \delta z}{L + \delta L} - T \cos \gamma = \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &= (T + \delta T) \frac{c + \delta z}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} - T \cos \gamma = (T + \delta T) \frac{cL - c\delta L + L\delta z - \delta z\delta L}{L^2 + (\delta L)^2} - T \cos \gamma \end{aligned}$$

Eliminando términos de orden superior se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{K_{33}}{4} \delta z - A_C \rho g \delta z &= (T + \delta T) \frac{cL - c\delta L + L\delta z}{L^2} - T \cos \gamma = (T + \delta T) \left( \cos \gamma - \cos \gamma \frac{\delta L}{L} + \frac{\delta z}{L} \right) - T \cos \gamma = \dots \\ \dots &= (T + \delta T) \left( \cos \gamma - \cos^2 \gamma \frac{\delta z}{L} + \frac{\delta z}{L} \right) - T \cos \gamma = \dots \\ \dots &= T \cos \gamma - T \cos^2 \gamma \frac{\delta z}{L} + T \frac{\delta z}{L} + \delta T \cos \gamma - \delta T \cos^2 \gamma \frac{\delta z}{L} + \delta T \frac{\delta z}{L} - T \cos \gamma \end{aligned}$$

Eliminando términos de orden superior y sustituyendo la ecuación (xix) se obtiene:

$$\frac{K_{33}}{4} \delta z - A_C \rho g \delta z = -T \cos^2 \gamma \frac{\delta z}{L} + T \frac{\delta z}{L} + \lambda \delta z \cos \gamma \cos \gamma = \delta z \left( -\frac{T}{L} \cos^2 \gamma + \frac{T}{L} + \lambda \cos^2 \gamma \right)$$

Usando la siguiente igualdad:

$$\frac{T}{L} = \frac{T}{L} (\text{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma)$$

Se obtiene:

$$\frac{K_{33}}{4} \delta z - A_C \rho g \delta z = \delta z \left( \frac{T}{L} \text{sen}^2 \gamma + \lambda \cos^2 \gamma \right)$$

Despejando

$$K_{33} \delta z = 4 \delta z \left( \frac{T}{L} \text{sen}^2 \gamma + \lambda \cos^2 \gamma \right) + 4 A_C \rho g \delta z$$

Finalmente eliminando  $\delta z$  se obtiene el coeficiente de rigidez  $K_{33}$ :

$$K_{33} = 4 \left( \frac{T}{L} \text{sen}^2 \gamma + \lambda \cos^2 \gamma \right) + 4 A_C \rho g \quad (2.3.e)$$

El término  $4 A_C \rho g$  se denomina Rigidez hidrostática.

### **Calculo del coeficiente de rigidez $K_{53}$**

Debido al mismo efecto de desplazamiento  $\delta z$  y con ayuda de la Figura 2.3. d, se plantea ahora el equilibrio de momentos alrededor del eje **Y** en el centro de gravedad, con lo que se establecerá el coeficiente de rigidez  $K_{53}$ . Nótese que los momentos de las proyecciones verticales de las fuerzas de los tendones (derechos e izquierdos) se cancelan quedando la ecuación de la siguiente forma:

$$K_{53} (z + \delta z) + 4(T_0 + T^x + \delta T) \cos \alpha' * \bar{h} = 0 \quad (xxii)$$

Además planteando el equilibrio de momentos alrededor del eje **Y** en el centro de gravedad antes de aplicar  $\delta z$  se puede establecer que:

$$K_{53}z + 4(T_0 + T^x) \cos \alpha * \bar{h} = 0 \quad (\text{xxiii})$$

Restando (xxiii) de (xxii) se obtiene:

$$K_{53}\delta z + 4(T + \delta T) \cos \alpha' * \bar{h} - 4T \cos \alpha * \bar{h} = 0$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} K_{53}\delta z &= -\left((T + \delta T) \cos \alpha' - T \cos \alpha\right)4\bar{h} = -\left((T + \delta T) \frac{a}{L + \delta L} - T \cos \alpha\right)4\bar{h} = \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &= -\left((T + \delta T) \frac{a}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} - T \cos \alpha\right)4\bar{h} = -\left((T + \delta T) \frac{aL - a\delta L}{L^2 - (\delta L)^2} - T \cos \alpha\right)4\bar{h} \end{aligned}$$

Eliminando el término de orden superior y desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} K_{53}\delta z &= -\left((T + \delta T) \frac{aL - a\delta L}{L^2} - T \cos \alpha\right)4\bar{h} = -\left((T + \delta T) \left(\cos \alpha - \cos \alpha \frac{\delta L}{L}\right) - T \cos \alpha\right)4\bar{h} = \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &= -\left(T \cos \alpha - T \cos \alpha \frac{\delta L}{L} + \delta T \cos \alpha - \delta T \cos \alpha \frac{\delta L}{L} - T \cos \alpha\right)4\bar{h} \end{aligned}$$

Eliminando el término de orden superior  $\delta T \cos \alpha \frac{\delta L}{L}$ , y sustituyendo la ecuación (xvii) en

la anterior se tiene:

$$K_{53}\delta z = -\left(-\frac{T}{L} \delta z \cos \alpha \cos \gamma + \delta T \cos \alpha\right)4\bar{h} = -\left(-\frac{T}{L} \delta z \cos \alpha \cos \gamma + \lambda \delta z \cos \gamma \cos \alpha\right)4\bar{h}$$

Eliminando  $\delta z$  y agrupando obtenemos el coeficiente de rigidez  $K_{53}$ :

$$K_{53} = -4\left(\lambda - \frac{T}{L}\right) \cos \alpha \cos \gamma * \bar{h} = -K_{31} * \bar{h} \quad (2.3.f)$$

**Calculo del coeficiente de rigidez  $K_{13}$**

En este caso existe simetría del coeficiente de rigidez  $K_{13} = K_{31}$  , lo cual se puede comprobar planteando el equilibrio de fuerzas en dirección **X** en la posición  $x$  y con el desplazamiento  $\delta z$  como se aprecia en la Figura 2.3. d:

$$K_{13}(z + \delta z) = 4(T_0 + T^x + \delta T)sen\gamma'$$

O

$$K_{13}(z + \delta z) = 4(T + \delta T)sen\gamma' \tag{xxiv}$$

Además planteando el equilibrio en la dirección X antes de aplicar el desplazamiento  $\delta z$  se tiene:

$$K_{13}z = 4(T_0 + T^x)sen\gamma$$

O

$$K_{13}z = 4Tsen\gamma \tag{xxv}$$

Restando (xxv) de (xxiv) se obtiene:

$$K_{13}\delta z = 4(T + \delta T)sen\gamma' - 4Tsen\gamma \tag{xxvi}$$

Además de la Figura 2.3. d se observa que:

$$sen\gamma' = \cos\alpha' = \frac{a}{L + \delta L} \quad \text{y} \quad sen\gamma = \cos\alpha = \frac{a}{L}$$

Por lo que sustituyendo en (xxvi) se obtiene eliminando  $(\delta L)^2$  :

$$K_{13}\delta z = 4(T + \delta T)\frac{a}{L + \delta L} - 4T\cos\alpha = 4(T + \delta T)\frac{a}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} - 4T\cos\alpha = \dots\dots$$

$$\dots = 4(T + \delta T)\frac{aL - a\delta L}{L^2 - (\delta L)^2} - 4T\cos\alpha = 4(T + \delta T)\frac{aL - a\delta L}{L^2} - 4T\cos\alpha = \dots\dots$$

$$\dots\dots = 4(T + \delta T)(\cos\alpha - \cos\alpha\frac{\delta L}{L}) - 4T\cos\alpha = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots = 4(T\cos\alpha - T\cos\alpha\frac{\delta L}{L} + \delta T\cos\alpha - \delta T\cos\alpha\frac{\delta L}{L}) - 4T\cos\alpha$$

Eliminando el término de orden superior y agrupando:

$$K_{13}\delta z = 4(-T\cos\alpha\frac{\delta L}{L} + \delta T\cos\alpha - \delta T\cos\alpha\frac{\delta L}{L}) \tag{xxvii}$$

Sustituyendo la ecuación (xvii) en (xxvii):

$$K_{13}\delta z = 4\left(-\frac{T}{L}\cos\alpha\delta z\cos\gamma + \delta T\cos\alpha - \delta T\cos\alpha\frac{\delta z\cos\gamma}{L}\right)$$

Eliminando el término de orden superior y sustituyendo la ecuación (xix) se obtiene:

$$K_{13}\delta z = 4\left(-\frac{T}{L}\cos\alpha\delta z\cos\gamma + \lambda\delta z\cos\gamma\cos\alpha\right)$$

Eliminando  $\delta z$  y agrupando se obtiene el coeficiente de rigidez  $K_{13}$  que es igual a  $K_{31}$ :

$$K_{13} = 4\left(\lambda - \frac{T}{L}\right)\cos\alpha\cos\gamma \quad (2.3.g)$$

### **Cálculo de los coeficientes de rigidez por efecto de un desplazamiento angular $\delta\theta$ alrededor del eje Y**

En la

Figura 2.3. e se muestran los coeficientes de rigidez  $K_{55}$ ,  $K_{15}$  y  $K_{35}$  asociados a un desplazamiento en el grado de libertad 5, que se logra aplicando un desplazamiento  $\delta\theta$  a partir de la posición  $x$  de la estructura como se vio en la Figura 2.3. a, nótese que se introduce la longitud B que es la distancia entre los centros de las columnas.

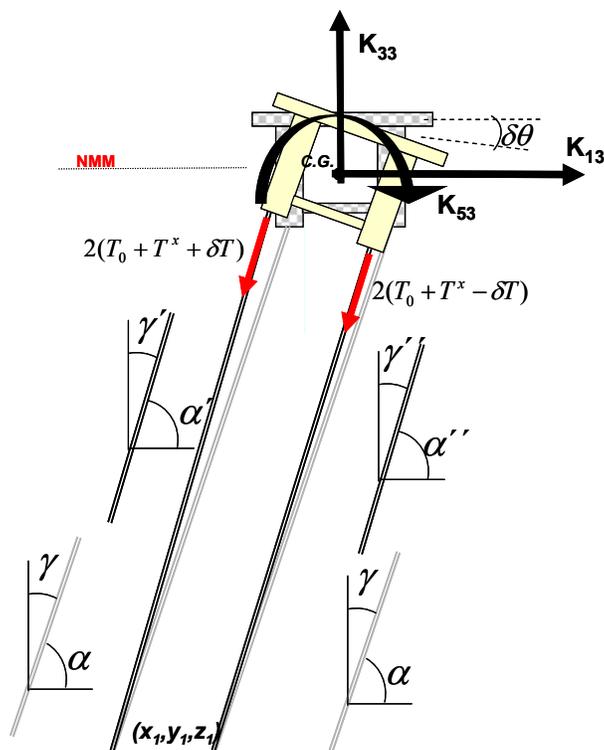


Figura 2.3. e Desplazamiento  $\delta\theta$  a partir de la posición  $x$  y rigideces asociadas

De la

Figura 2.3. e se establecen las siguientes relaciones (xxviii) que serán usadas en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio para obtener los coeficientes de rigidez  $K_{55}$ ,  $K_{15}$  y  $K_{35}$ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x - x_1}{L} = \frac{a}{L} & \cos \alpha' &= \frac{a}{L + \delta L} & \cos \alpha'' &= \frac{a}{L - \delta L} \\ \cos \gamma &= \frac{z - z_1}{L} = \frac{c}{L} & \cos \gamma' &= \frac{c + \frac{B\delta\theta}{2}}{L + \delta L} & \cos \gamma'' &= \frac{c - \frac{B\delta\theta}{2}}{L - \delta L} \end{aligned} \quad (\text{xxviii})$$

Antes de establecer las ecuaciones de equilibrio es importante describir los efectos hidrostáticos adicionales que se presentan cuando la estructura esta girando alrededor del eje  $Y$ , mismos que se desprenden de la Figura 2.3. f, para una posición desplazada un

ángulo  $\gamma$ . Nótese que debido al movimiento de cuerpo rígido de la plataforma y a que los desplazamientos horizontales son varios órdenes de magnitud comparados con la deformación de los tendones, entonces  $\gamma = \theta$ ,

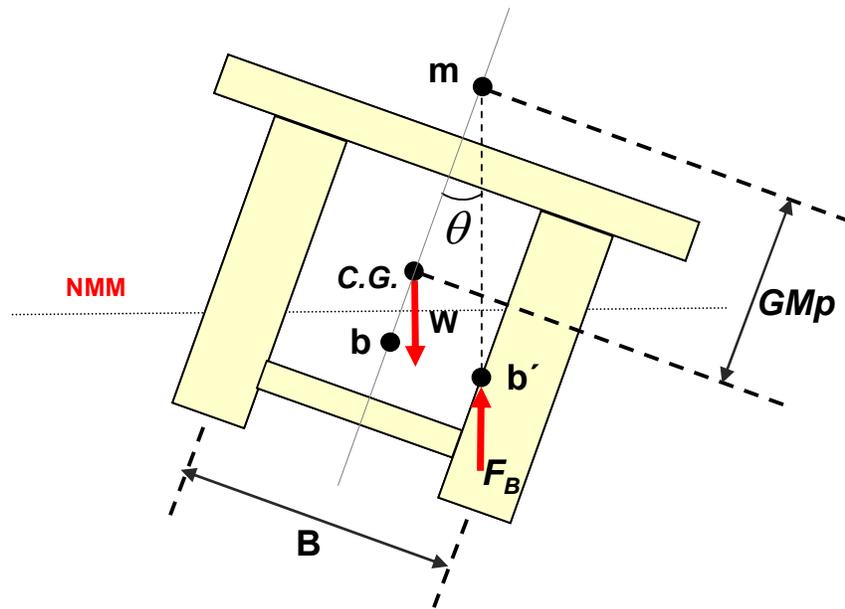


Figura 2.3. f Efectos hidrodinámicos por rotación en flotación libre.

En esta figura destaca la posición del metacentro  $m$  y la altura metacéntrica  $GMp$  (H.O. Berteaux, 1976).

$m$  = metacentro

$b$  = centro de flotación con  $\theta = 0$

$b'$  = centro de flotación con  $\theta \neq 0$

$$\overline{bm} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \overline{b'm} = \frac{I_y}{V_{sum}}$$

En esta expresión  $I_y$  es el momento de inercia alrededor del eje  $Y$  del área de la sección transversal de las columnas que son cruzadas por el plano del agua, para una posición  $\theta = 0$ , lo cual se puede apreciar en la

Figura 2.3. g

$\overline{C.G.m}$  = altura metacéntrica en pitch =  $GMp$

$$GMp = \overline{bm} \pm \overline{C.G.b}$$

$$F_B = \text{Flotación} = \rho g V_{sum}$$

$V_{sum}$  = desplazamiento en metros cúbicos (volumen desplazado)

$\rho$  = densidad del agua en unidades de masa por metro cúbico

= 0.1019367 agua dulce

$g$  = Aceleración de la gravedad

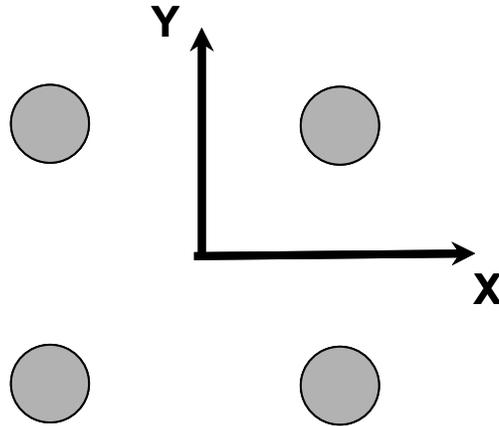


Figura 2.3. g. Plano del agua que cruza las columnas de la plataforma

### **Calculo del coeficiente de rigidez $K_{55}$**

De acuerdo a lo mostrado en la Figura 2.3. f se puede encontrar el momento de restauración de la plataforma en flotación libre en una las posiciones  $\theta$  y  $\theta + \delta\theta$ , tomando momentos alrededor del eje Y, dicho momento será para la posición  $\theta$ :

$$M_{R\theta} = -F_B * GM_p \text{sen} \theta \quad (\text{xxix})$$

Y para la aposición  $\theta + \delta\theta$  será:

$$M_{R(\theta+\delta\theta)} = -F_B * GM_p \text{sen}(\theta + \delta\theta)$$

Desarrollando se tiene:

$$M_{R(\theta+\delta\theta)} = -F_B * GM_p (\text{sen} \theta \cos \delta\theta + \cos \theta \text{sen} \delta\theta)$$

Adicionalmente considerando que:  $\cos \delta\theta \rightarrow 1$  ; y  $\text{sen} \delta\theta \rightarrow \delta\theta$ , se obtiene:

$$M_{R(\theta+\delta\theta)} = -F_B * GM_p \text{sen} \theta - F_B * GM_p \delta\theta \cos \theta \quad (\text{xxx})$$

Ahora se establece el equilibrio de momentos alrededor del eje Y considerando todas las fuerzas que intervienen en las posiciones  $\theta$  y  $\theta + \delta\theta$ , esto es, se incluyen tanto las mostradas en la Figura 2.3. e como en la figura 2.3.f, para la posición  $\theta$  la ecuación de equilibrio de momentos queda:

$$K_{55}\theta + 4(T_0 + T^x)\bar{h} * \cos \alpha + M_{R\theta} = 0$$

Sustituyendo (xxix) y  $T = T_0 + T^x$  se obtiene:

$$K_{55}\theta + 4T\bar{h} * \cos \alpha - F_B GM_p \text{sen} \theta = 0 \quad (\text{xxxii})$$

Para la posición  $\theta + \delta\theta$  la ecuación de equilibrio de momentos queda:

$$K_{55}(\theta + \delta\theta) + 2(T_0 + T^x + \delta T) \cos \alpha' * (\bar{h} - \delta\theta \frac{B}{2}) + 2(T_0 + T^x - \delta T) \cos \alpha'' * (\bar{h} + \delta\theta \frac{B}{2}) - \\ 2(T_0 + T^x + \delta T) \cos \gamma' * \frac{B}{2} + 2(T_0 + T^x - \delta T) \cos \gamma'' * \frac{B}{2} + M_{R(\theta+\delta\theta)} = 0$$

Sustituyendo (xxx) y  $T = T_0 + T^x$  se obtiene:

$$K_{55}(\theta + \delta\theta) + 2(T + \delta T) \cos \alpha' * (\bar{h} - \delta\theta \frac{B}{2}) + 2(T - \delta T) \cos \alpha'' * (\bar{h} + \delta\theta \frac{B}{2}) - \dots \\ 2(T + \delta T) \cos \gamma' * \frac{B}{2} + 2(T - \delta T) \cos \gamma'' * \frac{B}{2} - F_B GM_p \text{sen} \theta - F_B GM_p \delta\theta \cos \theta = 0 \quad (\text{xxxiii})$$

Desarrollando esta ecuación se tiene:

$$K_{55}(\theta + \delta\theta) + 2(T + \delta T) \cos \alpha' \bar{h} - 2(T + \delta T) \cos \alpha' \delta\theta \frac{B}{2} + 2(T - \delta T) \cos \alpha'' \bar{h} + \dots \\ 2(T - \delta T) \cos \alpha'' \delta\theta \frac{B}{2} - 2(T + \delta T) \cos \gamma' * \frac{B}{2} + 2(T - \delta T) \cos \gamma'' * \frac{B}{2} - \dots \\ \dots - F_B GM_p \text{sen} \theta - F_B GM_p \delta\theta \cos \theta = 0 \quad (\text{xxxiii})$$

Del segundo al séptimo término de la ecuación (xxxiii) son desarrollados a continuación con ayuda de las expresiones (xxviii):

Segundo término de la ecuación (xxxiii):

$$2(T + \delta T) \cos \alpha' \bar{h} = 2\bar{h}(T + \delta T) \frac{a}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} \approx 2\bar{h}(T + \delta T) \frac{aL - a\delta L}{L^2} = \dots$$

$$\dots = 2\bar{h}(T + \delta T) \cos \alpha - 2\bar{h}(T + \delta T) \frac{\delta L}{L} \cos \alpha \quad (\text{xxxiv})$$

Tercer término de la ecuación (xxxiii):

$$-2(T + \delta T) \cos \alpha' \delta \theta \frac{B}{2} = -B \delta \theta (T + \delta T) \left( \cos \alpha - \frac{\delta L}{L} \cos \alpha \right) \quad (\text{xxxv})$$

Cuarto término de la ecuación (xxxiii):

$$2(T - \delta T) \cos \alpha'' \bar{h} = 2\bar{h}(T - \delta T) \frac{a}{L - \delta L} * \frac{L + \delta L}{L + \delta L} \approx 2\bar{h}(T - \delta T) \frac{aL + a\delta L}{L^2} = \dots$$

$$\dots = 2\bar{h}(T - \delta T) \cos \alpha + 2\bar{h}(T - \delta T) \frac{\delta L}{L} \cos \alpha \quad (\text{xxxvi})$$

Quinto término de la ecuación (xxxiii):

$$2(T - \delta T) \cos \alpha'' \delta \theta \frac{B}{2} = B \delta \theta (T - \delta T) \frac{a}{L - \delta L} * \frac{L + \delta L}{L + \delta L} \approx B \delta \theta (T - \delta T) \frac{aL + a\delta L}{L^2} = \dots$$

$$\dots = B \delta \theta (T - \delta T) \cos \alpha + B \delta \theta (T - \delta T) \frac{\delta L}{L} \cos \alpha \quad (\text{xxxvii})$$

Sexto término de la ecuación (xxxiii):

$$-2(T + \delta T) \cos \gamma' * \frac{B}{2} = -B(T + \delta T) \frac{c + \frac{B\delta\theta}{2}}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} \approx -B(T + \delta T) \frac{cL - c\delta L + \frac{LB\delta\theta}{2}}{L^2} = \dots$$

$$\dots = -B(T + \delta T) \left( \cos \gamma - \frac{\delta L}{L} \cos \gamma + \frac{B}{2} \frac{\delta\theta}{L} \right) \quad (\text{xxxviii})$$

Séptimo término:

$$2(T - \delta T) \cos \gamma'' * \frac{B}{2} = B(T - \delta T) \frac{c - \frac{B\delta\theta}{2}}{L - \delta L} * \frac{L + \delta L}{L + \delta L} \approx B(T - \delta T) \frac{cL + c\delta L - \frac{LB\delta\theta}{2}}{L^2} = \dots$$

$$\dots = B(T - \delta T) \left( \cos \gamma + \frac{\delta L}{L} \cos \gamma - \frac{B}{2} \frac{\delta\theta}{L} \right) \quad (\text{xxxix})$$

Substituyendo las ecuaciones (xxxiv) a la (xxxix) en la ecuación (xxxiv) se obtiene:

$$K_{55}(\theta + \delta\theta) + 4\bar{h}T \cos \alpha - 2B\delta T \cos \gamma + 2BT \frac{\delta L}{L} \cos \gamma - B^2T \frac{\delta\theta}{L} + \dots \dots \dots - F_B GMp \sin \theta - F_B GMp \delta\theta \cos \theta = 0 \quad (\text{x1})$$

Restando la ecuación (xxx1) de la (x1) se obtiene:

$$K_{55}\delta\theta - 2B\delta T \cos \gamma + 2BT \frac{\delta L}{L} \cos \gamma - B^2T \frac{\delta\theta}{L} - F_B GMp \delta\theta \cos \theta = 0$$

O despejando se obtiene:

$$K_{55}\delta\theta = 2B\delta T \cos \gamma - 2BT \frac{\delta L}{L} \cos \gamma + B^2T \frac{\delta\theta}{L} + F_B GMp \delta\theta \cos \theta \quad (\text{xli})$$

Por otro lado se tiene que:

$$\delta T = \lambda \delta L$$

$$\text{Y en este caso } \delta L = \frac{z - z_1}{L} \delta z = \cos \gamma \delta z$$

Dado el movimiento de cuerpo rígido en rotación se tiene que:

$$\delta z = \frac{B}{2} \delta\theta \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\delta L = \frac{B}{2} \delta\theta \cos \gamma$$

Con lo que el incremento en la tensión será:

$$\delta T = \lambda \frac{B}{2} \delta\theta \cos \gamma$$

Sustituyendo  $\delta L$ ,  $\delta T$ ,  $F_B$ , en la ecuación (xli) y recordando que  $\theta = \gamma$  se obtiene:

$$K_{55}\delta\theta = B^2 \lambda \delta\theta \cos^2 \gamma - B^2T \frac{\delta\theta}{L} \cos^2 \gamma + B^2T \frac{\delta\theta}{L} + \rho g V_{sum} GMp \delta\theta \cos \gamma$$

Eliminando  $\delta\theta$  de ambos lados de la ecuación y agrupando obtenemos el coeficiente de rigidez  $K_{55}$ :

$$K_{55} = B^2 \left( \lambda \cos^2 \gamma + \frac{T}{L} \sin^2 \gamma \right) + \rho g V_{sum} GMp \cos \gamma \quad (\text{2.3.h})$$

En esta ecuación el primer término representa la rigidez estructural y el segundo la rigidez hidrostática.

**Calculo del coeficiente de rigidez  $K_{15}$**

Debido al mismo efecto de desplazamiento  $\delta\theta$  y con ayuda de la Figura 2.3. e y Figura 2.3. f, se plantea ahora el equilibrio de fuerzas en dirección del eje **X** antes y después del citado desplazamiento angular, con lo que se establecerá el coeficiente de rigidez  $K_{15}$ . La ecuación de equilibrio antes del desplazamiento  $\delta\theta$  queda de la siguiente forma:

$$K_{15}\theta = 4(T_0 + T^x) \cos \alpha$$

O también:

$$K_{15}\theta = 4T \cos \alpha \quad (\text{xlii})$$

La ecuación de equilibrio posterior al desplazamiento  $\delta\theta$  de la siguiente forma:

$$K_{15}(\theta + \delta\theta) = 2(T_0 + T^x + \delta T) \cos \alpha' + 2(T_0 + T^x - \delta T) \cos \alpha''$$

Sustituyendo  $T = T_0 + T^x$  y los cosenos de la ecuación (xxviii), la anterior ecuación queda:

$$\begin{aligned} K_{15}(\theta + \delta\theta) &= 2(T + \delta T) \frac{a}{L + \delta L} + 2(T - \delta T) \frac{a}{L - \delta L} = \dots\dots \\ \dots\dots &= 2(T + \delta T) \frac{a}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} + 2(T - \delta T) \frac{a}{L - \delta L} * \frac{L + \delta L}{L + \delta L} \approx \dots\dots \\ \dots\dots\dots &\approx 2(T + \delta T) \frac{aL - a\delta L}{L^2} + 2(T - \delta T) \frac{aL + a\delta L}{L^2} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$K_{15}(\theta + \delta\theta) = 2(T + \delta T) \left( \cos \alpha - \frac{\delta L}{L} \cos \alpha \right) + 2(T - \delta T) \left( \cos \alpha + \frac{\delta L}{L} \cos \alpha \right) \quad (\text{xliii})$$

Restando la ecuación (xlii) de (xliii) se obtiene:

$$K_{15}\delta\theta = 2(T + \delta T) \left( \cos \alpha - \frac{\delta L}{L} \cos \alpha \right) + 2(T - \delta T) \left( \cos \alpha + \frac{\delta L}{L} \cos \alpha \right) - 4T \cos \alpha$$

Desarrollando se encuentra el coeficiente de rigidez  $K_{15}$ :

$$K_{15} = 0 \quad (2.3.i)$$

**Calculo del coeficiente de rigidez  $K_{35}$**

Se establece ahora el equilibrio de fuerzas en dirección del eje **Y** antes y después del desplazamiento  $\delta\theta$ , véanse la Figura 2.3. e y Figura 2.3. f. La ecuación de equilibrio antes del desplazamiento  $\delta\theta$  queda de la siguiente forma:

$$K_{35}\theta + F_B - W = 4(T_0 + T^x) \cos \gamma$$

O también:

$$K_{35}\theta + F_B - W = 4T \cos \gamma \quad (xliv)$$

La ecuación de equilibrio posterior al desplazamiento  $\delta\theta$  de la siguiente forma:

$$K_{35}(\theta + \delta\theta) + F_B - W = 2(T_0 + T^x + \delta T) \cos \gamma' + 2(T_0 + T^x - \delta T) \cos \gamma''$$

Sustituyendo  $T = T_0 + T^x$  y los cosenos de la ecuación (xxviii), la anterior ecuación queda:

$$\begin{aligned} K_{35}(\theta + \delta\theta) + F_B - W &= 2(T + \delta T) \frac{c + \frac{B\delta\theta}{2}}{L + \delta L} + 2(T - \delta T) \frac{c - \frac{B\delta\theta}{2}}{L - \delta L} = \dots \\ \dots &= 2(T + \delta T) \frac{c + \frac{B\delta\theta}{2}}{L + \delta L} * \frac{L - \delta L}{L - \delta L} + 2(T - \delta T) \frac{c - \frac{B\delta\theta}{2}}{L - \delta L} * \frac{L + \delta L}{L + \delta L} = \dots \\ \dots &= 2(T + \delta T) \frac{cL + \frac{LB\delta\theta}{2} - c\delta L - \frac{\delta LB\delta\theta}{2}}{L^2 - (\delta L)^2} + 2(T - \delta T) \frac{cL - \frac{LB\delta\theta}{2} + c\delta L - \frac{\delta LB\delta\theta}{2}}{L^2 - (\delta L)^2} \end{aligned}$$

Eliminando términos de orden superior y agrupando se tiene:

$$\begin{aligned} K_{35}(\theta + \delta\theta) + F_B - W &= 2(T + \delta T) \left( \cos \gamma + \frac{B}{2} \frac{\delta\theta}{L} - \cos \gamma \frac{\delta L}{L} \right) + \dots \\ &\dots + 2(T - \delta T) \left( \cos \gamma - \frac{B}{2} \frac{\delta\theta}{L} + \cos \gamma \frac{\delta L}{L} \right) \quad (xlv) \end{aligned}$$

Restando la ecuación (xlv) de la (xlv) se tiene:

$$K_{35} \delta\theta = 2(T + \delta T) \left( \cos \gamma + \frac{B}{2} \frac{\delta\theta}{L} - \cos \gamma \frac{\delta L}{L} \right) + 2(T - \delta T) \left( \cos \gamma - \frac{B}{2} \frac{\delta\theta}{L} + \cos \gamma \frac{\delta L}{L} \right) - 4T \cos \gamma$$

Desarrollando y eliminando términos de orden superior se encuentra el coeficiente de rigidez  $K_{35}$ :

$$K_{35} = 0 \quad (2.3.j)$$

Finalmente la matriz de rigidez del sistema considerando sólo los grados de libertad 1, 3 y 5, que son los del plano en estudio queda como:

$$K = \begin{bmatrix} 4\left(\frac{T}{L} \text{sen}^2 \alpha + \lambda \cos^2 \alpha\right) & 4\left(\lambda - \frac{T}{L}\right) \cos \alpha \cos \gamma & 0 \\ 4\left(\lambda - \frac{T}{L}\right) \cos \alpha \cos \gamma & 4\left(\frac{T}{L} \text{sen}^2 \gamma + \lambda \cos^2 \gamma\right) + 4A_c \rho g & 0 \\ -4\left(\frac{T}{L} \text{sen}^2 \alpha + \lambda \cos^2 \alpha\right) * \bar{h} & -4\left(\lambda - \frac{T}{L}\right) \cos \alpha \cos \gamma * \bar{h} & B^2 \left( \lambda \cos^2 \gamma + \frac{T}{L} \text{sen}^2 \gamma \right) + \rho g V_{sum} GMp \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.3.k)$$

Es importante destacar tres aspectos de la matriz de rigidez  $K$  que tienen fuerte impacto en la posterior solución del sistema de ecuaciones:

- 1.- Es no lineal dependiente de la posición, variable de la que es función la ecuación de movimiento.
- 2.- No existe simetría respecto a la diagonal principal.
- 3.- Se identifica el efecto de rigidez hidrodinámica en los elementos  $K_{33}$  y  $K_{55}$  a través de las fuerzas de restauración por unidad de desplazamiento que se presentan en los segundos términos de cada coeficiente.

## 2.4. Solicitaciones del sistema

Las sollicitaciones que serán consideradas en el sistema son el oleaje y la corriente marina, las cuales se discutirán en el presente capítulo describiendo sus principales componentes sin entrar en aspectos profundos que son temas de otra área de especialidad. Ambos fenómenos oceanográficos generan movimiento de las partículas del agua, lo cual induce fuerzas ya sea de arrastre o de inercia sobre los componentes sumergidos de la plataforma, lo cual fue mostrado en el capítulo 2.2 de este trabajo. Por tal motivo en esta sección sólo se enfatizará la evaluación de las velocidades y aceleraciones producidas durante estos fenómenos.

### 2.4.1 Oleaje

El oleaje puede aproximarse ya sea en forma monocromática, lo cual significa que con sólo el periodo y altura de ola ésta queda caracterizada ó bien en forma generalizada como un proceso aleatorio definido por un estado de mar a través de un espectro de energía de oleaje el cual considera todo el contenido de oleaje en un periodo de tiempo específico que en términos generales oscila entre 3 y 6 horas, tiempo en el que los estadísticos del proceso (al menos el valor esperado y la autocorrelación) no presentan variaciones, hecho que garantiza que el estado de mar es un proceso por lo menos débilmente estacionario. Esto último permite el uso de la teoría de vibraciones aleatorias para el análisis de estructuras con comportamiento lineal, sin embargo para el caso de estudio la matriz de rigideces del sistema varia con la posición y ésta a su vez con el tiempo, provocando que las características dinámicas de la plataforma no sean constantes, con lo que se elimina la posibilidad de su análisis en el dominio de la frecuencia. Dado lo anterior la solución del sistema de ecuaciones presentado en el capítulo 2.2 se efectuará en el dominio del tiempo y para ello aquí se planteará la historia de tiempo de oleaje partiendo de un espectro de energía de oleaje.

Puede considerarse que la elevación  $\eta$  de la superficie del mar es un proceso aleatorio y que consiste en la suma de un gran número de armónicos (olas de Airy con amplitud  $A_j$ ) con ángulos de fase aleatorios, esto puede lograrse a través de la suma de exponenciales

considerando que solo la parte real es la que representa a las variables físicas, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\eta(x', t) = \sum_{j=1}^n A_j \exp[-i(k_j x' - \omega_j t + \psi_j)] \quad (2.4.1.a)$$

Donde:

$\eta$  = Elevación de la superficie del mar

$A_j = \frac{h_j}{2}$  = Amplitud de j'ésima ola de un estado de mar

$k_j = \frac{2\pi}{\lambda_j}$  = Numero de ola

$\lambda_j$  = Longitud de la j'ésima ola de un estado de mar

$h_j$  = Altura de la j'ésima ola de un estado de mar

$\omega_j = [gk_j \tanh(k_j d)]^{1/2}$  = Relación de dispersión de la j'ésima ola de un estado de mar

$\psi_j$  = ángulo de la fase aleatoria con función de densidad de probabilidad constante  $[0 \ 2\pi]$

$x', y', z'$  son las coordenadas de un punto del casco referidas al sistema  $\mathbf{X}_{ola}, \mathbf{Y}_{ola}, \mathbf{Z}_{ola}$  ubicado en el nivel medio del mar, en proyección vertical del centro de gravedad de la plataforma

Usando la expresión de la elevación  $\eta$  de la superficie del mar, ecuación (2.4.1.a) se puede definir la función de potencial de velocidad  $\Phi^v$  cuyo gradiente en cualquier punto en el fluido es el vector de velocidad (Department of the Army, 2008):

$$\Phi^v(x', z', t) = \sum_{j=1}^n i \frac{g}{\omega_j} A_j \exp[-i(k_j x' - \omega_j t + \psi_j)] \frac{\cosh[k_j(z' + d)]}{\cosh k_j d} \quad (xlvii)$$

Derivando esta ecuación respecto a  $x$  se obtiene la velocidad horizontal de la partícula del agua  $U_{x'}$

$$U_{x'} = \frac{\partial \Phi^v}{\partial x'} = \sum_{j=1}^n \frac{g}{\omega_j} a_j \exp[-i(k_j x' - \omega_j t + \psi_j)] \frac{\cosh[k_j(z' + d)]}{\cosh k_j d} \quad (\text{xlvi})$$

Y derivando esta última ecuación respecto del tiempo se obtiene la aceleración horizontal

$$\dot{U}_{x'}$$

$$\dot{U}_{x'} = \frac{\partial U_{x'}}{\partial t} = \sum_{j=1}^n i g a_j \exp[-i(k_j x' - \omega_j t + \psi_j)] \frac{\cosh[k_j(z' + d)]}{\cosh k_j d} \quad (\text{xlix})$$

Considerando que el problema esta planteado para aguas profundas el valor de  $k_j d$  es muy grande haciendo que  $\tanh k_j d \approx 1$  por lo que la relación de dispersión queda  $\omega_j^2 = g k_j$ , con lo que es posible obtener expresiones complejas para la velocidad y aceleración horizontal. Sin embargo como se mencionó al inicio de la sección, solo la parte real representa el fenómeno físico y es la que se presenta en las ecuaciones 2.4.1.b y 2.4.1.c, para el caso de aguas profundas.

$$U(x', z', t) = \sum_{j=1}^n \frac{2\pi}{T_j} a_j \exp\left(\frac{2\pi z'}{L_{0j}}\right) \text{Cos} 2\pi \left( \frac{x'}{L_{0j}} - \frac{t}{T_j} + \frac{\psi_j}{2\pi} \right) \quad (2.4.1.b)$$

$$\dot{U}(x', z', t) = \sum_{j=1}^n \frac{4\pi^2}{T_j^2} a_j \exp\left(\frac{2\pi z'}{L_{0j}}\right) \text{Sen} 2\pi \left( \frac{x'}{L_{0j}} - \frac{t}{T_j} + \frac{\psi_j}{2\pi} \right) \quad (2.4.1.c)$$

El algoritmo para la estimación de los valores de la velocidad y la aceleración considerando densidades espectrales de oleaje específicas se presenta en el capítulo 3 de esta tesis.

## 2.4.2 Corriente marina

Para entender el origen de la corriente marina se parte del hecho de que en el océano se presentan procesos que involucran transferencia de masa, momentum y energía. Por ejemplo el océano recibe agua y diferentes sustancias provenientes de los continentes. Así mismo recibe agua de los polos lo cual en gran medida gobierna la circulación profunda en todo el planeta. Otra importante fuente de transmisión de energía es la radiación solar o el viento sobre la superficie marina. En síntesis se puede mencionar que los procesos oceánicos más importantes y que generan corrientes marinas son:

- Transporte y almacenamiento de calor y masa en el océano
- Intercambio de calor entre el océano y la atmósfera
- Forzamiento por viento de la superficie marina

Entre los efectos dinámicos más importantes que generan esos procesos se pueden destacar las corrientes geostroficas, circulación de Ekman, ondas internas, vorticidad y ondas de gran periodo como las mareas.

El estudio de esta dinámica es complicado debido a su no-linealidad y a los efectos de turbulencia que siempre están presentes. Por ello en la actualidad se combinan modelos numéricos que resuelven en forma discretizada las ecuaciones primitivas de la mecánica de fluidos adaptadas a las condiciones oceánicas, con mediciones en puntos estratégicos que permiten calibrar y ajustar parámetros para mejorar el resultado analítico.

Como se mencionó en la introducción y en los alcances, el estudio ubica la plataforma en un lugar en el Golfo de México (GM) por lo que es importante establecer los principales rasgos de la circulación en dicho entorno, quizá lo más importante y que gobierna la dinámica del GM sea la corriente de lazo que entra por el estrecho de Yucatán, para salir por el estrecho de Florida. Este flujo de entrada al GM proviene del gran giro anticiclónico del Atlántico tropical y forma la corriente del Caribe que pasa por las Antillas. Al entrar en el GM, esta corriente de lazo en algunas ocasiones llega a presentar fuertes inestabilidades en el doblamiento que hace para salir y como resultado una parte se desprende formando remolinos anticiclónicos, los cuales a su vez se desplazan hacia el suroeste. En el interior

del GM, la circulación general muestra la presencia de un giro que es casi permanente en el sur, frente a la zona denominada Bahía de Campeche, el cual se debilita e intensifica a lo largo del año. Hacia el oeste, también se encuentran rasgos de una corriente costera que varía en dirección a lo largo del año, siendo ésta al sur en otoño e invierno y al norte en primavera y verano. La Figura 2.4.2. a muestra la corriente superficial del Golfo de México durante cuatro días consecutivos, y en ella se puede observar claramente la dinámica antes descrita.

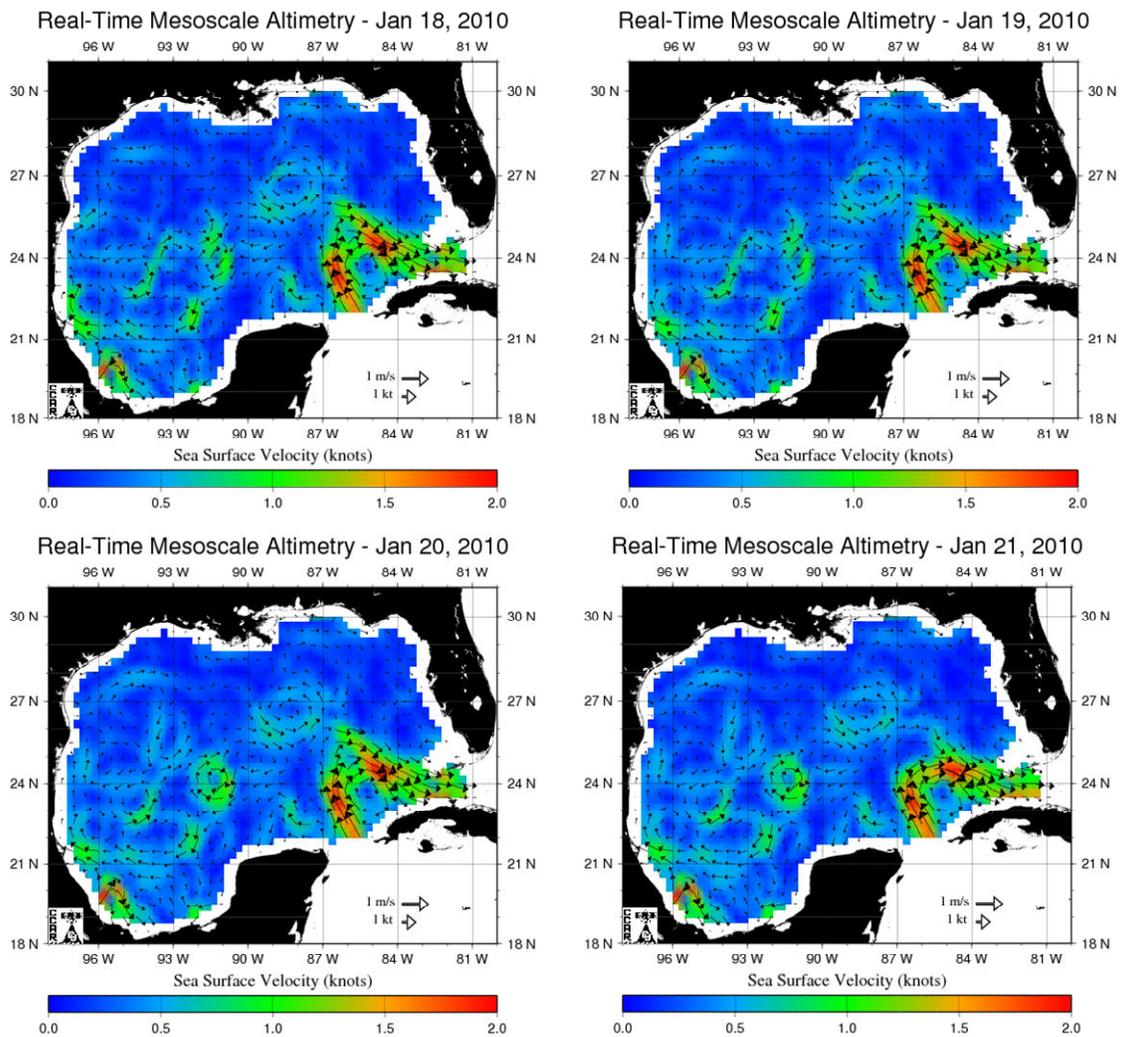


Figura 2.4.2. a Dinámica de circulación superficial en el Golfo de México del 18 al 21 de febrero del 2010. Fuente Colorado Center for Astrodynamics Research.

Para seleccionar el valor de la velocidad a ser usada en el análisis de la plataforma, se revisó información del Centro de Investigación de Astrodinámica de Colorado (Colorado Center for Astrodynamics Research), así como la que presenta un modelo numérico que es retroalimentado con datos medidos, propiedad del consorcio “Hycom” Consorcio del Modelo Oceánico de Coordenadas Híbridas (Hybrid Coordinate Ocean Model) y que es patrocinado por el Programa de la Asociación Nacional para el Océano (National Ocean Partnership Program).

Los datos muestran que en la zona de interés, aproximadamente en las coordenadas latitud norte  $N19.2^\circ$  y longitud oeste  $W95.0^\circ$ , con tirante de 1000 metros Figura 2.4.2. b y Figura 2.4.2. c la velocidad de la corriente superficial puede alcanzar valores de hasta 1.2 m/s, lo cual aunque es crítico es realista y será usado en este trabajo. Cabe mencionar que estos valores de velocidad de corriente están asociados a periodos de retorno de entre 100 y 1000 años.

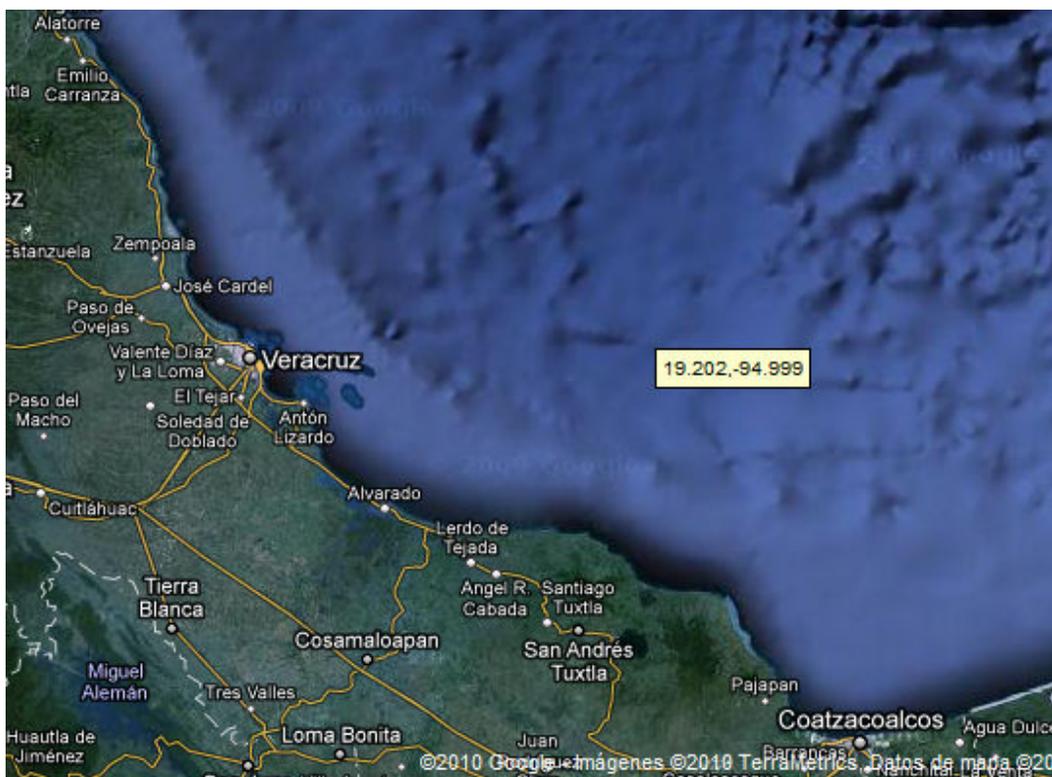


Figura 2.4.2. b Ubicación de la zona de interés, latitud  $N19.2^\circ$ , longitud  $W95.0^\circ$  y tirante de 1000 metros.

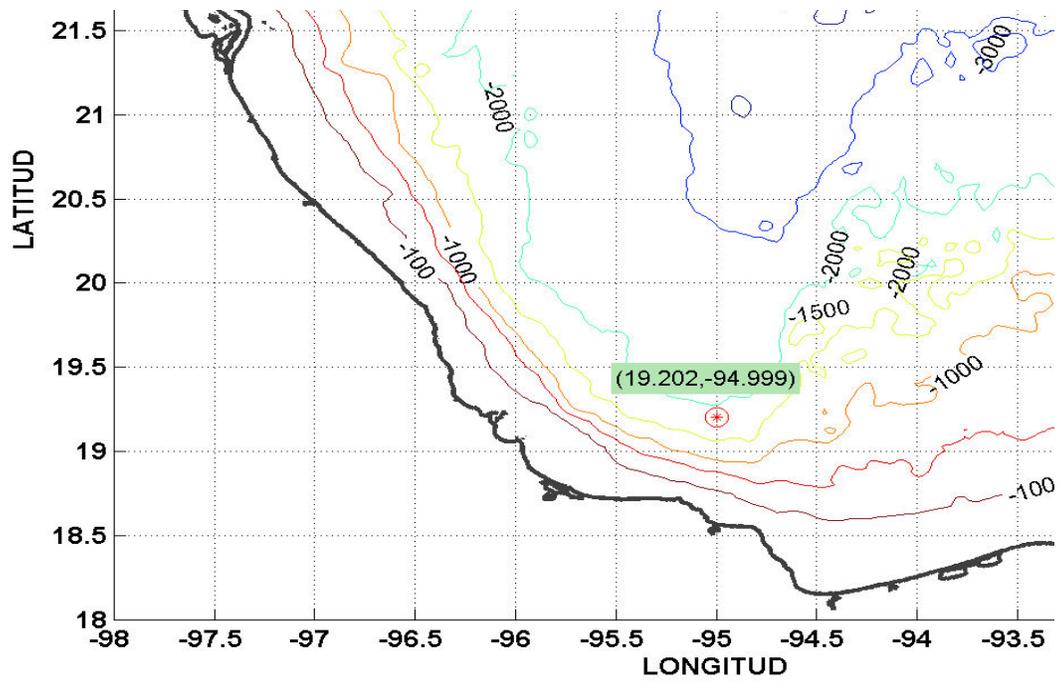


Figura 2.4.2. c Batimetría de la zona de interés.

## CAPÍTULO 3.- ALGORITMOS DE SOLUCIÓN

### 3.1. Oleaje sintético

Como fue mencionado en el inciso 2.4 del capítulo 2, un estado de mar se puede aproximar por la suma de olas de Airy con amplitud aleatoria  $A_j$  y ángulos de fase  $\psi_j$  aleatoria con función de densidad de probabilidad constante entre  $[0, 2\pi]$ . Ambas variables son necesarias para calcular la velocidad y aceleración de las partículas del agua durante dicho estado de mar de acuerdo a las ecuaciones 2.4.1.b y 2.4.1.c.

Las amplitudes aleatorias pueden ser determinadas a partir de una densidad espectral de oleaje considerando bandas de frecuencia de acuerdo a la ecuación 3.1.a (Ahmad S., 1996.):

$$a_j = 2[S(f_j)\Delta f]^{1/2} \quad (3.1.a)$$

Donde  $S(f)$  es el espectro de energía de oleaje, que para el caso de estudio se ha considerado como un espectro de Pierson and Moskowitz -ecuación 3.1.b- (Hallam et.al, 1978) que es aplicable a mares totalmente desarrollados:

$$S(f) = \frac{h_{sig}^2}{4\pi^5 T_{h0}^4} \exp\left(-\frac{1}{\pi(fT_0)^4}\right) \quad (3.1.b)$$

Donde:

$h_{sig}$  es la altura significativa,

$T_{h0}$  es el periodo de cruces por cero de la ola,

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Adicionalmente en el programa desarrollado también se incluye el espectro JONSWAP desarrollado por el Proyecto Conjunto de Oleaje del Mar del Norte (Joint North Sea Wave Project), para tormenta en mares con fetch limitado.

Debido a que la estructura puede ser sensible a periodos largos de oleaje, por su baja rigidez lateral, es importante incluir en la simulación oleaje con periodos desde los 100 hasta los 2 segundos, por lo que el ancho de banda del espectro será de 0.01 a 0.5 hz.

Para seleccionar la discretización del espectro que será usada posteriormente en la generación del oleaje que permitirá obtener la fuerzas sobre la estructura, se probaron cuatro diferentes tamaños de intervalos de frecuencia o divisiones de franjas del espectro, esto es se tomaron 128, 256, 512 y 1024 bandas o franjas de frecuencia, para dos casos: 1) alturas de ola significativa 10 metros y periodo de cruces por cero 10 segundos; y 2) alturas de ola significativa 12 metros y periodo de cruces por cero 15 segundos, obteniéndose series de tiempo de la posición de la superficie del mar  $\eta(t)$  que son mostradas en la Figura 3.1. a y Figura 3.1. b. Cada grupo de series son estadísticamente equivalentes como se puede apreciar en las Tabla 3.1. a y Tabla 3.1. b con un valor medio virtualmente cero metros y desviación estándar de aproximadamente 3.54 metros para el caso 1 y de 4.22 metros para el caso 2.

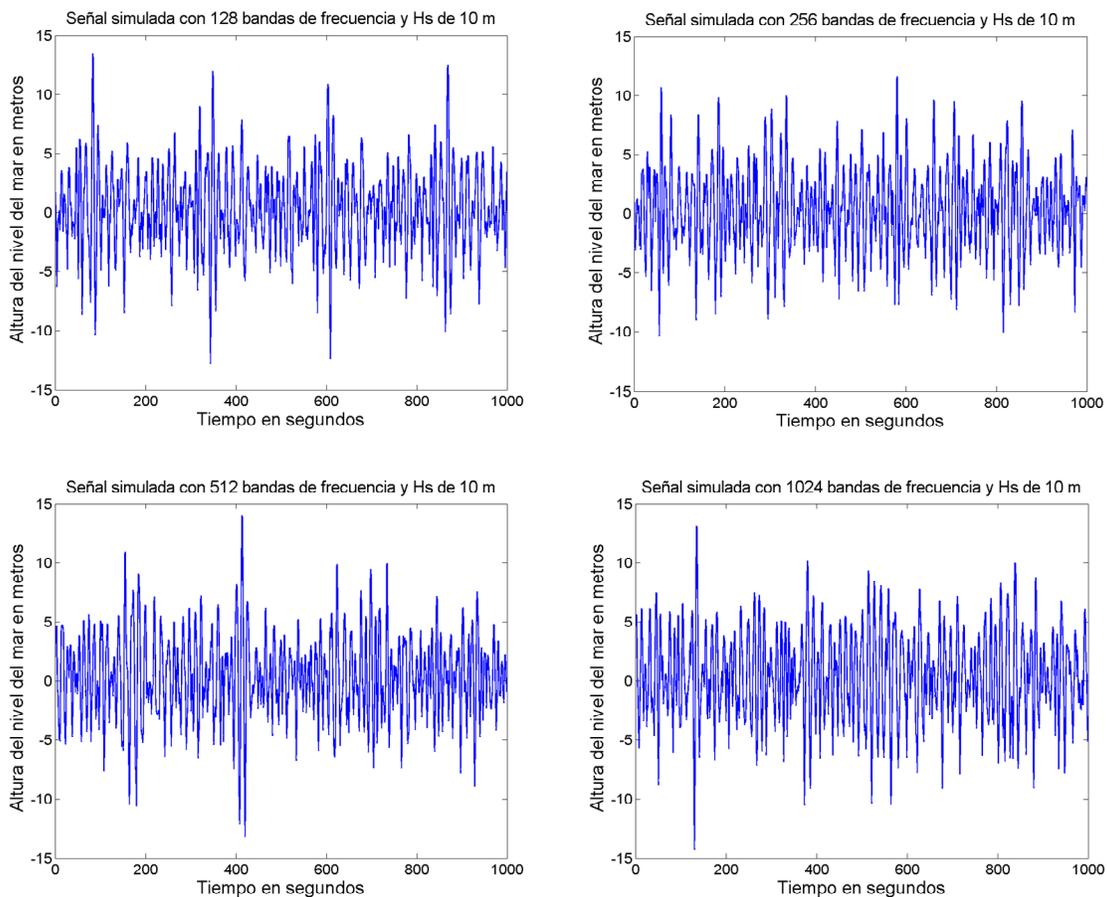


Figura 3.1. a Series de tiempo de la posición de la superficie del mar  $\eta(t)$ , alturas de ola significativa 10 metros y periodo de cruces por cero 10 segundos

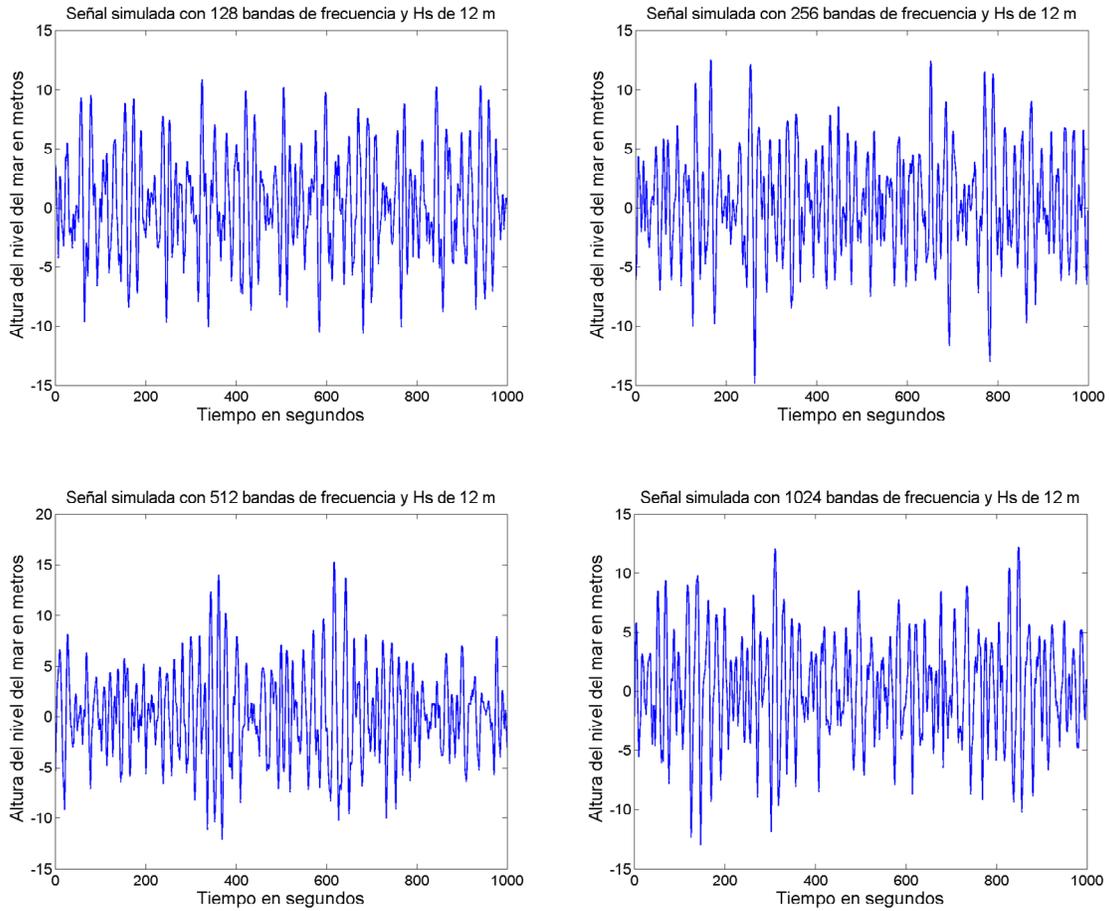


Figura 3.1. b Series de tiempo de la posición de la superficie del mar  $\eta(t)$ , alturas de ola significativa 12 metros y periodo de cruces por cero 15 segundos

Tabla 3.1. a Valores estadísticos de las series de tiempo de la posición de la superficie del mar  $\eta(t)$  simuladas, caso (1) alturas de ola significativa 10 metros y periodo de cruces por cero 10 segundos

Señal (divisiones)	Media	Desviación estándar
128	-0.012	3.54
256	-0.003	3.53
512	0.000	3.54
1024	0.000	3.54

Tabla 3.1. b Valores estadísticos de las series de tiempo de la posición de la superficie del mar  $\eta(t)$  simuladas, caso (2) alturas de ola significativa 12 metros y periodo de cruces por cero 15 segundos

Señal (divisiones)	Media	Desviación estándar
128	-0.016	4.24
256	-0.007	4.22
512	0.003	4.21
1024	0.000	4.24

Lo anterior no es suficiente para efectuar la selección del número de divisiones del espectro por lo que se precedió a obtener las densidades espectrales de cada una de las señales a través del uso de la transformada de Fourier, esto con la finalidad de determinar como se aproxima la densidad espectral de la señal simulada a la densidad espectral de origen.

De acuerdo a lo establecido por Newland, 1993 y de lo mostrado en el apéndice 3.1 de este trabajo, es posible obtener estimaciones espectrales suavizadas  $\bar{S}(\omega)$  en frecuencias  $\omega_k = 2\pi k / T$  por lo que para un valor de  $k=1$  tendríamos que dicho espectro estará dado por la ecuación 3.1.c:

$$\bar{S}(\omega) \approx \frac{T}{2\pi} S_1 \quad (3.1.c)$$

Donde  $S_1$  es el producto de la transformada de Fourier,  $N(\omega)$ , de  $\eta(t)$  por su conjugado complejo  $N^*(\omega)$ , ecuación 3.1.d:

$$S_1 = N(\omega)N^*(\omega) \quad (3.1.d)$$

La transformada de Fourier de  $\eta(t)$  fue calculada usando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) (Newland, 1993). En la Figura 3.1. c y Figura 3.1. d para los casos 1 y 2 respectivamente se muestran en azul la densidad espectral de origen (Pierson and Moskowitz) y rojo las densidades estimadas usando las señales simuladas.

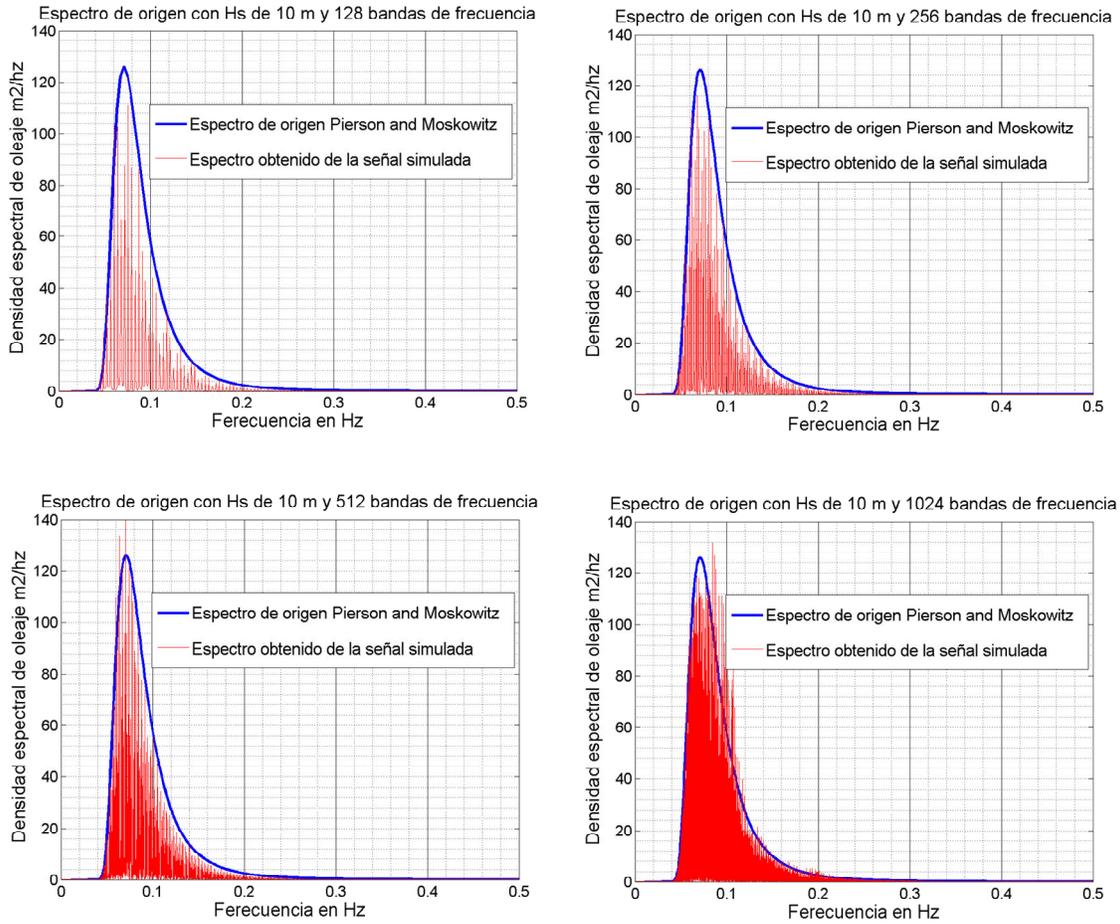


Figura 3.1. c Densidad espectral de origen (azul) y densidades estimadas (rojo) usando las señales simuladas, alturas de ola significativa 10 metros y periodo de cruces por cero 10 segundos

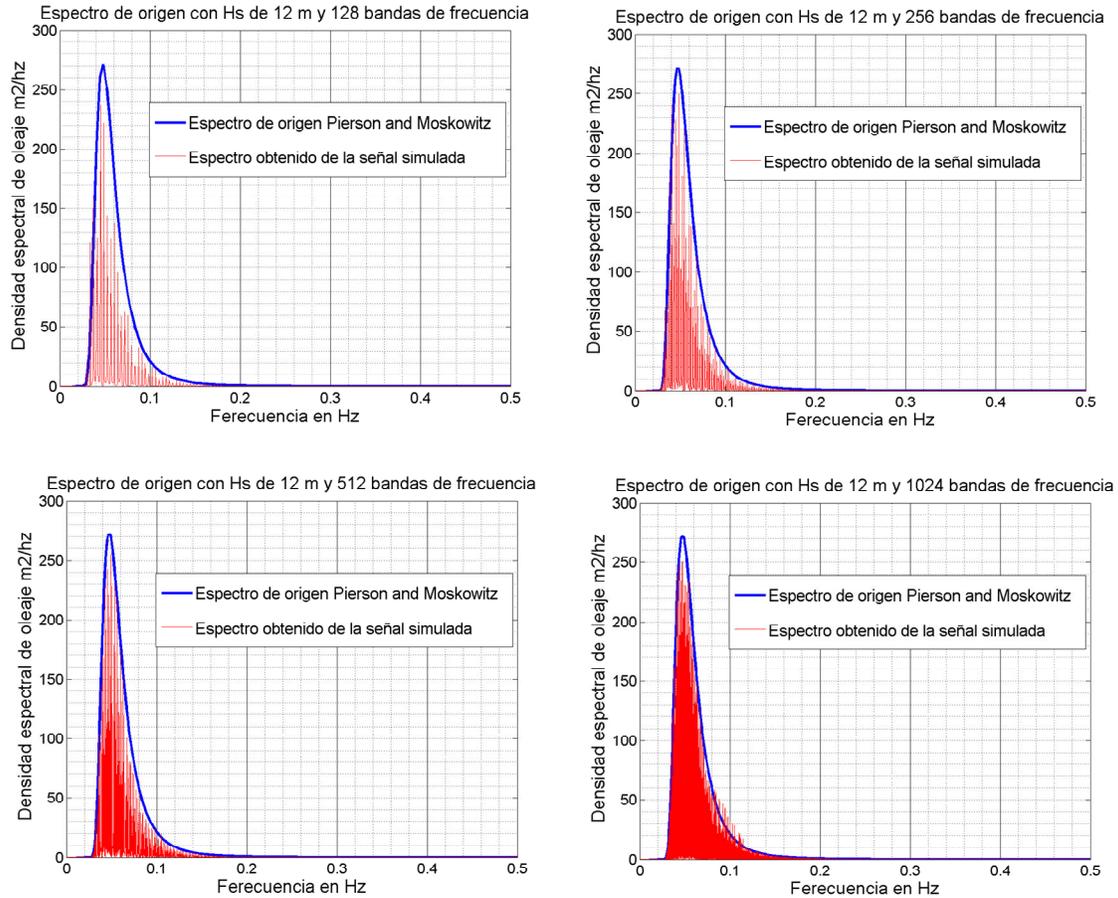


Figura 3.1. d Densidad espectral de origen (azul) y densidades estimadas (rojo) usando las señales simuladas, alturas de ola significativa 12 metros y periodo de cruces por cero 15 segundos

De las densidades estimadas se puede apreciar para el caso 1, que la correspondiente al número de divisiones de 256, aproxima adecuadamente al espectro de origen. Obsérvese que los casos de 512 y 1024 sobrestiman la densidad espectral en varias frecuencias, lo cual genera algunos picos importantes en las señales que están alejados de la altura de ola significativa. Por lo anterior se decidió seleccionar 256 divisiones del espectro para efectuar la simulación para estados de mar tipo 1, lo cual significa un contenido de armónicos (olas de Airy) suficientemente grande para caracterizar un estado de mar de oleaje. Para estados de mar tipo 2 los casos de 256 y 512 divisiones aproximan adecuadamente al espectro de origen ya que 1024 divisiones sobrestiman en frecuencias alrededor de 0.1 Hz.

### 3.2 Fuerzas sobre la plataforma

En la sección 2.2 se estableció la ecuación de movimiento del sistema, en donde se observa que el forzamiento del mismo esta dado por las partículas de agua que inciden sobre los elementos sumergidos de la plataforma, induciendo en éstos fuerzas de arrastre y fuerzas de inercia, las primeras provocadas por la velocidad y las segundas por la aceleración de dichas partículas. Así mismo se destacó en la sección 2.4 que la velocidad es producto de los fenómenos oceánicos de oleaje y circulación marina.

En lo que respecta a la aceleración de las partículas del agua, se puede asumir que ésta es producto sólo del oleaje ya que los eventos de circulación oceánica son de periodos extremadamente largos (de horas o de días) durante los cuales la velocidad se asume constante.

Las fuerzas sobre los elementos estructurales de la plataforma están dadas por la ecuación de Morison (Hallam et.al., 1978). Dado que la fuerza varia tanto espacialmente como temporalmente, se tiene que determinar para cada instante un vector de tres componentes en el centro de masas que resulta de la integración espacial del diferencial de fuerza que actúa sobre los elementos sumergidos, dicho fuerza se presenta a continuación como ecuación 3.2.a, en donde se destaca que el primer termino representa la fuerza de arrastre y el segundo la de inercia:

$$dF(t) = \frac{1}{2} c_d \rho D U |U| ds + c_m \rho A \dot{U} ds \quad (3.2.a)$$

Donde:

$dF(t)$  es un diferencial de fuerza que actúa sobre una diferencial de longitud  $ds$  del elemento sumergido,

$U = U(x', z', t)$  es la velocidad relativa instantánea de la partícula de agua actuando en dirección normal al elemento sumergido, incluye la de oleaje y la de corriente,

$\dot{U} = \dot{U}(x', z', t)$  es la aceleración relativa instantánea de la partícula de agua actuando en dirección normal al elemento sumergido.

Para fines de este trabajo se considera que la cinemática de la estructura es pequeña comparada con la de la partícula del agua por lo que  $U$  y  $\dot{U}$  se calculan de acuerdo a lo establecido en la sección 2.4.

$\rho$  es la densidad de masa del agua,

$A$  es el área de la sección transversal del elemento sumergido,

$c_d$  es el coeficiente de arrastre,

$c_m$  es el coeficiente de inercia.

Estos diferenciales de fuerza son calculados sobre cada una de las cuatro columnas y pontones de la plataforma y su efecto es integrado numéricamente en el centro de masas del sistema, lográndose un vector de tres componentes variables en el tiempo, ecuación 3.2.b, la referencia de aplicación de cada componente se puede observar en la Figura 3.2. a:

$$\vec{F}(t)=[F_x(t), F_z(t), M_y(t)] \quad (3.2.b)$$

El procedimiento para el cálculo de  $\vec{F}(t)$  es el siguiente, mismo que se presenta en forma esquemática en la Figura 3.2. a:

- De acuerdo con el estado de mar establecido para el análisis, se selecciona el tipo de densidad espectral de oleaje y número de bandas de frecuencia en que será discretizado (dicho número corresponde a la cantidad de armónicos u olas regulares que se incluirán),
- Se selecciona la longitud y el incremento de tiempo de la señal de fuerza requerida,
- Para cada banda se calcula la velocidad y aceleración en cada elemento diferencial de la plataforma, tomando como origen para la generación de los armónicos la posición desplazada por corriente oceánica constante, a esa posición se le asignan las coordenadas  $x'=0$  &  $z'=0$ . Para este cálculo se emplean las ecuaciones 2.4.1.b y 2.4.1.c,

- Se suman las contribuciones de todos los armónicos en cada elemento diferencial sumergido, obteniendo una serie de tiempo de velocidad y otra de aceleración para cada elemento,
- A las series de tiempo de velocidad por efecto de oleaje se les suma vectorialmente la velocidad de corriente oceánica,
- Para cada elemento diferencial se calcula la fuerza con la ecuación 3.2.a y su efecto se integra en el centro de masas de la plataforma, esto se realiza para cada incremento de tiempo en toda la longitud de la señal obteniéndose  $\vec{F}(t)$ .

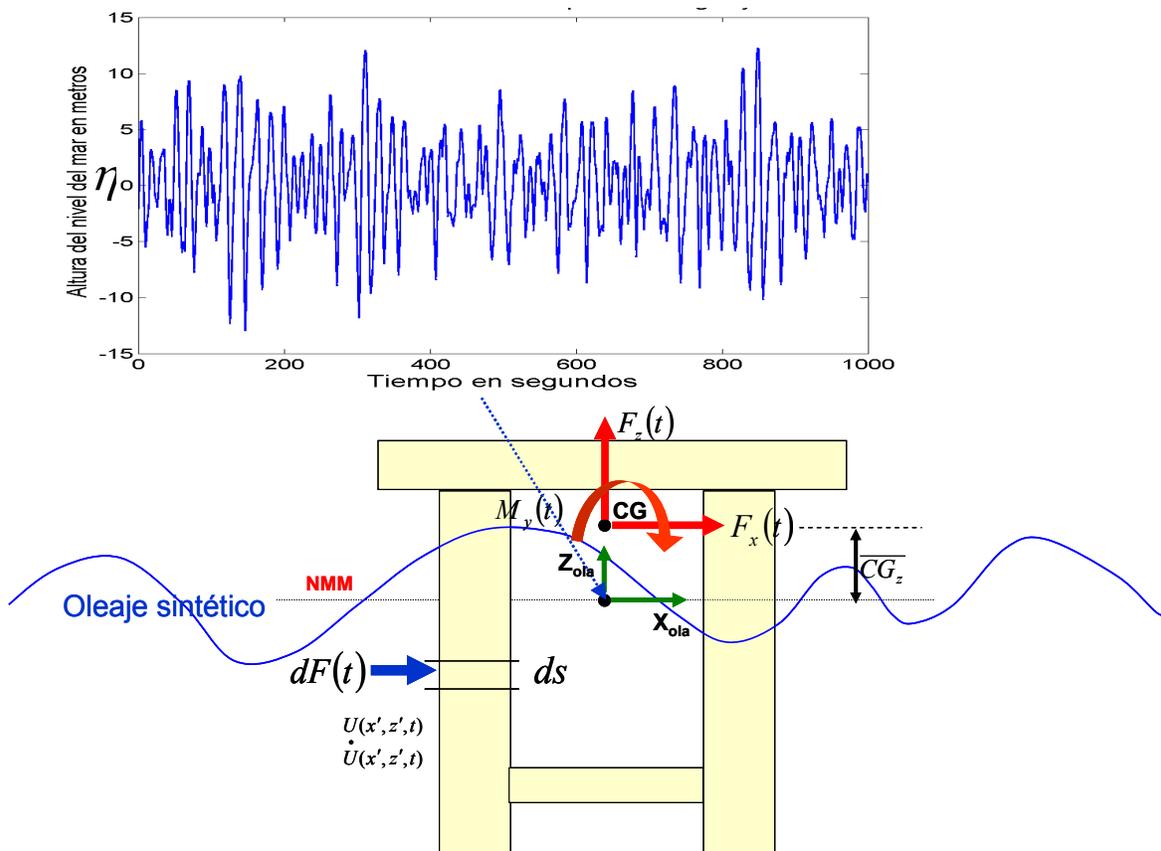


Figura 3.2. a Esquematzación de la obtención del vector de fuerzas actuantes en la plataforma

A continuación se presentan algunas simulaciones de señales de oleaje generadas en el punto  $x'=0$  &  $z'=0$  para una plataforma de las siguientes características:

- Diámetro de columna = 18 m
- Longitud centro a centro de columnas = 62 m
- Longitud total de la columna = 46 m
- Profundidad sumergida= 29 m
- Ancho de Pontón = 9 m
- Altura de Pontón = 12 m
- Largo de Pontón= 44 m
- Tirante de agua = 1000 m

El primer caso que se muestra en la Figura 3.2. b corresponde a un estado de mar con altura de ola significativa ( $H_s$ ) de 12 metros y periodo pico ( $T_p$ ) de 15 segundos, el espectro considerado es el Pierson and Moskowitz.

Es importante destacar que las historias de velocidad de las partículas del oleaje se calculan en todos los puntos de la plataforma y para ejemplificar sólo se presentan datos en algunos niveles de las columnas izquierda y derecha de la plataforma. Estas velocidades permiten posteriormente el cálculo de las historias de fuerzas  $\vec{F}(t)$  cuyo efecto se integra en toda la plataforma y se discretiza en el centro de gravedad de la misma.

En la Figura 3.2. b puede notarse el defasamiento de las historias de velocidad entre ambas columnas y la disminución de la intensidad de la velocidad con la profundidad, esto último provocado por la disminución de la velocidad y aceleración de las partículas del agua por efecto del oleaje al alejarse de la superficie.

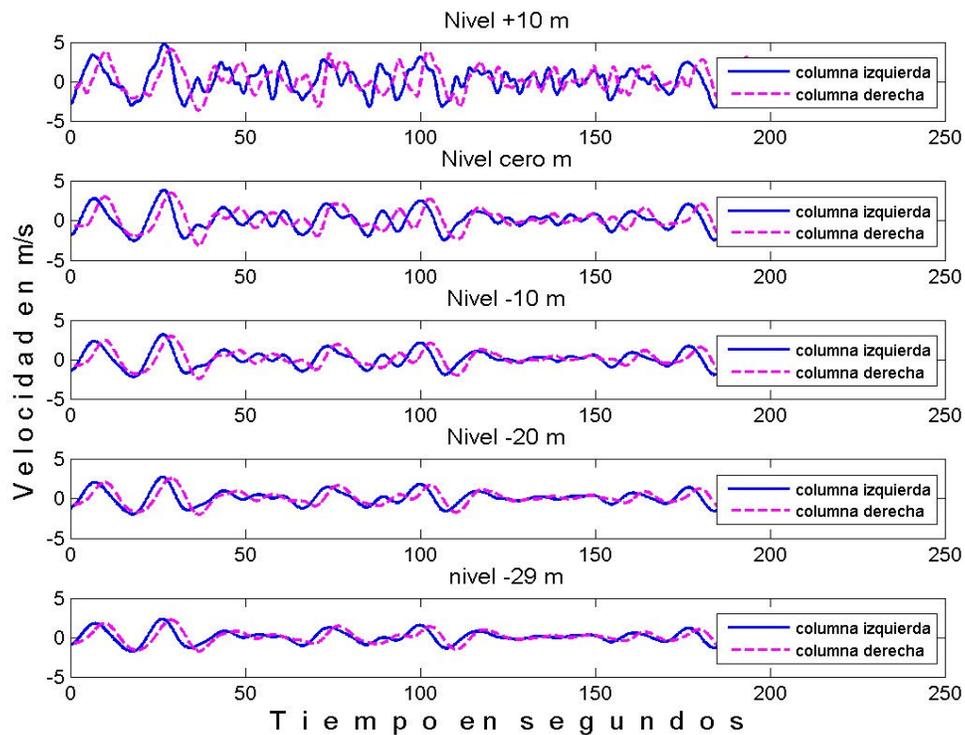


Figura 3.2. b Variación de las historias de velocidad de partícula por oleaje, simulación con 512 armónicos del espectro PM con  $H_s=12$  m y  $T_z=15$  seg.

El segundo caso que se muestra (Figura 3.2. c), ejemplifica los efectos de cancelación o de amplificación que se incluyen en cada armónico, por lo que se aplicaron olas solitarias con diferentes amplitudes y periodos. En la Figura 3.2. c se muestra el resultado del cálculo de fuerzas en las columnas del lado izquierdo, derecho y resultante, todo en el CG de la plataforma, por efecto de dos tipos de ola (6 y 12 m. de altura, y algunos periodos asociados).

Nótese que no importando la altura de ola, existe un importante efecto de cancelación de fuerzas para periodos alrededor de 9 segundos, lo cual es explicable si se considera que la separación de columnas es de 62 metros, por lo que olas cuya longitud sea de 124 metros presentarán en el mismo instante orbitas opuestas en las columnas izquierdas y derechas. Esto se puede observar en la ecuación 3.2.c (Hallam et.al, 1978) válida para aguas profundas:

$$L_0 = 1.5613T_h^2 \tag{3.2.c}$$

Donde:

$L_0$  = Longitud de la ola en aguas profundas

$T_h$  = Periodo de la ola

Por otro lado para olas de aproximadamente 62 metros de longitud de onda, lo cual significa periodos asociados alrededor de 6.3 segundos, se observan efectos de amplificación importantes.

Puede verse entonces que una ola solitaria con altura de 6 metros y periodo de 6 segundos genera fuerzas mucho más importantes (arriba del 100% en intensidad) sobre la plataforma que una ola de 12 metros de altura y periodo de 9 segundos.

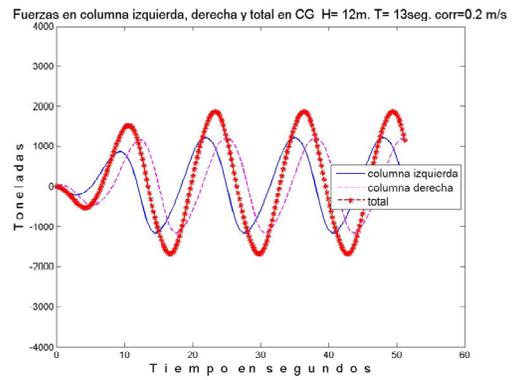
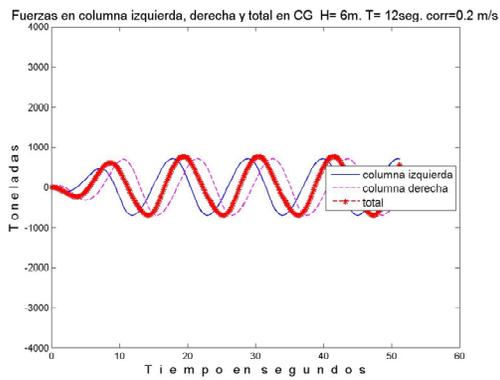
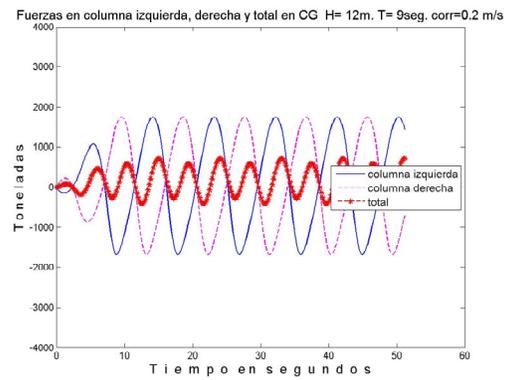
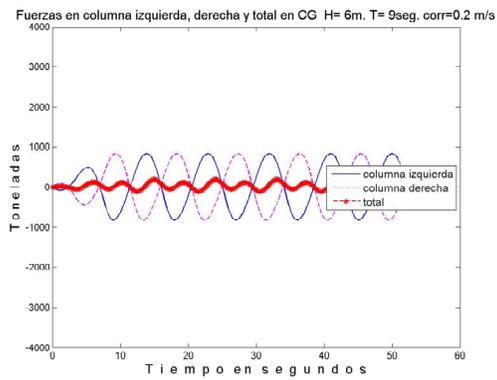
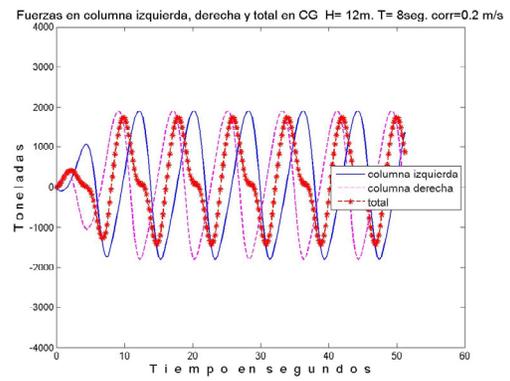
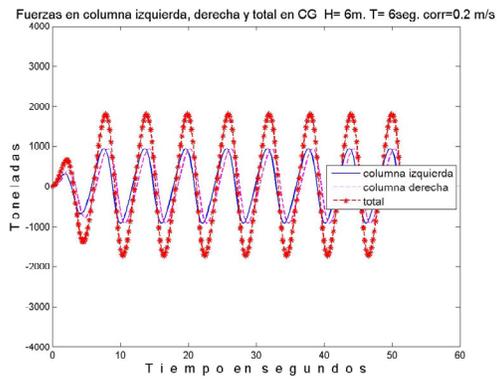


Figura 3.2. c Variación de las historias de fuerza en columnas izquierda, derecha y CG, para dos alturas de ola y tres periodos asociados.

### 3.3 Solución del sistema de ecuaciones

Método de integración directa

En la sección 2.2 se estableció la ecuación de movimiento del sistema (la cual se reproduce a continuación para pronta referencia) y posteriormente en las secciones 2.3 la matriz de rigidez de la estructura que resultó ser no lineal dependiente del propio desplazamiento de la plataforma. Esta no-linealidad elimina la posibilidad de resolver el sistema de ecuaciones en el dominio de la frecuencia o a través de un análisis de superposición modal ya que las frecuencias naturales en este caso no son invariantes del sistema.

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} \dot{U} ds + \rho c_d \frac{D}{2} \int_{sumergida} \{U|U\} ds \\ 0 \\ -h_m \rho c_m \frac{\pi}{4} D^2 \int_{sumergida} \dot{U} ds - h_m \rho c_d \frac{D}{2} \int_{sumergida} \{U|U\} ds \end{Bmatrix}$$

(2.2.c)

Dado lo anterior, la solución del sistema debe realizarse con un método de integración directa para el que no es necesaria la transformación del sistema de ecuaciones previamente a su solución.

Un aspecto que debe destacarse en este tipo de aproximaciones es que la solución no se establece para todos los valores del tiempo  $t$ , sino sólo en intervalos discretos separados un incremento de tiempo  $\Delta t$ , para los cuales se establece el equilibrio estático entre las fuerzas de inercia, de amortiguamiento, restitución y la sollicitación, considerando que a cada incremento de  $\Delta t$  existe una variación de desplazamientos, velocidades y aceleraciones del sistema (variación de la cinemática del sistema). La forma asumida de esta variación y el tamaño del incremento del tiempo son los factores que gobiernan la precisión y estabilidad de la solución.

Existen diversas formas de variación de la cinemática del sistema, de las cuales se desprenden algunos métodos de diferencias finitas que aproximan las velocidades y aceleraciones en términos de los desplazamientos y que producen resultados eficientes, sin embargo hay que destacar que esto requiere que los coeficientes de la ecuación sean constantes, lo cual no se logra entre cada paso de tiempo. Dado lo anterior es necesario introducir un mecanismo que en cada intervalo de tiempo varíe la rigidez del sistema hasta encontrar el equilibrio estático entre las fuerzas de inercia, de amortiguamiento, elásticas y la sollicitación, asumiendo en ese instante el nuevo valor de la matriz de rigidez como constante para el siguiente paso en el tiempo.

A fin de hacer más manejable la ecuación 2.2.c, los términos que multiplican a la aceleración los expresaremos como una matriz de masa equivalente  $\hat{M}$  y las integrales de fuerzas simplemente como un vector de fuerzas F, quedando dicha ecuación de la siguiente manera para un instante específico t, ecuación 3.3.a:

$$\hat{M} \ddot{X}_{\rightarrow t} + C \dot{X}_{\rightarrow t} + K X_{\rightarrow t} = F_{\rightarrow t} \quad (3.3.a)$$

El esquema de integración seleccionado fue el Método de Diferencias Centrales (Collatz L., 1966), en el que se asume que la aceleración y velocidad en el instante t tienen la siguiente forma, ecuación 3.3.b y 3.3.c:

$$\ddot{X}_{\rightarrow t} = \frac{1}{\Delta t^2} [X_{\rightarrow t-\Delta t} - 2X_{\rightarrow t} + X_{\rightarrow t+\Delta t}] \quad (3.3.b)$$

$$\dot{X}_{\rightarrow t} = \frac{1}{2\Delta t} [-X_{\rightarrow t-\Delta t} + X_{\rightarrow t+\Delta t}] \quad (3.3.c)$$

Usando estas expresiones en la ecuación 3.3.a se pueden resolver los desplazamientos en el instante  $t+\Delta t$  quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$[\frac{1}{\Delta t^2} \hat{M} + \frac{1}{2\Delta t} C] X_{\rightarrow t+\Delta t} = F_{\rightarrow t} - [K - \frac{2}{\Delta t^2} \hat{M}] X_{\rightarrow t} - [\frac{1}{\Delta t^2} \hat{M} - \frac{1}{2\Delta t} C] X_{\rightarrow t-\Delta t} \quad (3.3.d)$$

Se debe destacar que este método de solución se ha seleccionado debido al hecho importante de que para la solución en  $t+\Delta t$  se utilizan las condiciones de equilibrio del instante inmediato anterior (método de integración explícita), lo cual es relevante ya que en

dicho instante  $t$  la matriz de rigideces ya ha convergido a una condición estable acorde a los desplazamientos  $X_{\rightarrow t}$  de acuerdo al criterio de convergencia que se verá a continuación, situación que no se presenta en los métodos de integración implícita como Wilson o Newmark (Klaus-Jürgen et.al., 1976) que emplean las condiciones de equilibrio en el instante  $t+\Delta t$ , para el cual la matriz de rigidez  $K$  aún es desconocida.

Debido a que la matriz de rigidez es dependiente de la posición, es necesario que antes de efectuar un incremento en el tiempo, dicha matriz haya convergido a una condición compatible al desplazamiento de la estructura y cumpliendo las condiciones de equilibrio del sistema, para tal fin antes de proceder a un incremento  $t+\Delta t$ , se procede de forma iterativa a encontrar el valor de la matriz  $K$  que logre dichas condiciones.

Un aspecto que ayuda ampliamente a encontrar una solución empleando poco esfuerzo computacional es el hecho de que la rigidez del sistema aumenta con el incremento de desplazamientos como se observa en la Figura 3.3. a para el caso del coeficiente  $K_{11}$ , siguiendo una tendencia muy definida.

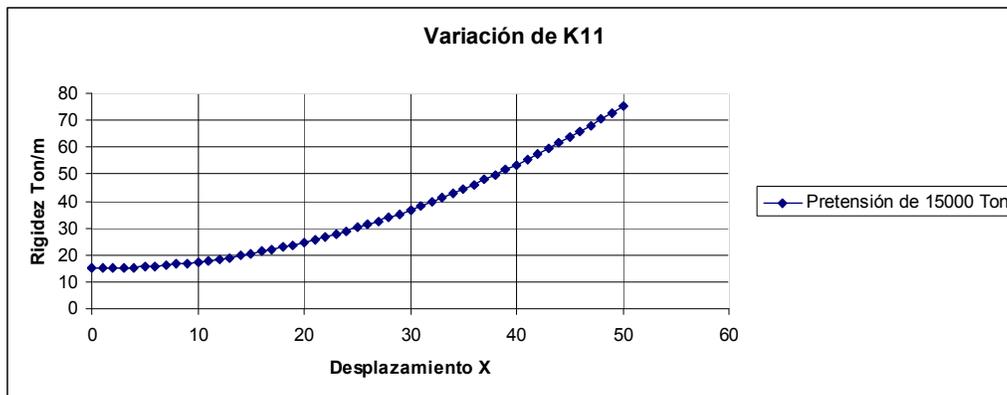


Figura 3.3. a Variación de la rigidez  $K_{11}$  con el desplazamiento horizontal de la plataforma

Para lograr la convergencia de la rigidez una vez que se realizó un incremento de tiempo y por lo tanto un incremento o decremento de fuerza se realiza un proceso iterativo como se esquematiza en la Figura 3.3. b, en la que la posición “j” esta asociada al j’esimo paso en el tiempo  $t$ , para el cual se cumple la condición de compatibilidad y equilibrio. A partir de esta condición se considera un incremento  $\Delta F_{t \rightarrow}$  de la fuerza asociado al incremento del tiempo.

Se toma  $\underline{K}_j$  como condición inicial para el proceso iterativo haciendo  $\underline{K}_i = \underline{K}_j$  y se resuelve la condición de equilibrio:

$$\underline{K}_{i \rightarrow i} U_{\rightarrow j+1} = F_{\rightarrow j+1} \quad (3.3.e)$$

Con el nuevo valor de  $U_{\rightarrow i}$  se calcula  $\underline{K}_{i+1}$  la cual es mayor que  $\underline{K}_j$ , como se ve en la Figura 3.3. b para un incremento positivo de  $F_{\rightarrow j}$ , por lo tanto la ecuación fuerza-desplazamiento produce un nuevo valor  $U_{\rightarrow i+1}$  menor que  $U_{\rightarrow i}$  ya que la fuerza  $F_{\rightarrow j+1}$  no varía:

$$\underline{K}_{i+1 \rightarrow i+1} U_{\rightarrow j+1} = F_{\rightarrow j+1} \quad (3.3.f)$$

Este proceso se repite en forma iterativa tomando como condición inicial para la nueva iteración el valor de la rigidez  $\underline{K}$  previa, repitiéndose hasta cumplir la condición de convergencia la cual se logra cuando cada uno de los términos de  $U_{\rightarrow i+1} - U_{\rightarrow i}$  y  $\underline{K}_{i+1} - \underline{K}_i$  son menores a una tolerancia prescrita para cada caso. Una vez alcanzada la convergencia, se produce un nuevo incremento de tiempo repitiéndose el ciclo desde la ecuación 3.3.b. hasta la ecuación 3.3.f.

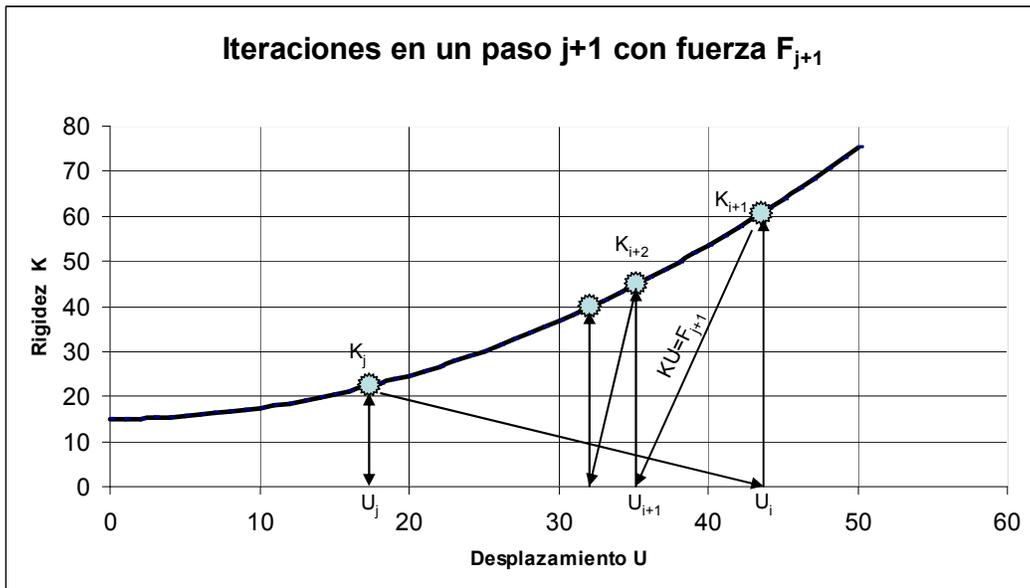


Figura 3.3. b Convergencia de la rigidez  $\underline{K}$ , de una condición  $j$  a una  $j+1$

## **CAPÍTULO 4.- CASO DE ESTUDIO, Golfo de México**

### **4.1. Condiciones metoceánicas del sitio**

Como fue destacado en los capítulos 2 y 3 de este trabajo de tesis, los efectos del oleaje y las corrientes marinas son de primordial importancia debido a las fuerzas que ejercen sobre la plataforma marina. Para la definición del ó de los estados de mar que deben ser aplicados a la plataforma es necesario realizar un análisis estadístico profundo que además tome en cuenta un riesgo aceptable de falla estructural de acuerdo a la importancia de la plataforma, dicho riesgo puede ser valorado en términos de la producción perdida o diferida, el impacto ambiental, la pérdida de vidas humanas o una combinación de de estos elementos, considerando uno o varios modos de falla de la estructura.

Este tipo de análisis permite establecer los parámetros metoceánicos de diseño asociados a diferentes periodos de retorno de los estados de mar seleccionados, y su desarrollo requiere contar con información suficientemente amplia de las variables en estudio, como por ejemplo series de tiempo de altura de ola significativa que incluyan datos de tormentas extremas de por lo menos 20 años (DNV-RP-C205, 2007 y American Petroleum Institute, 2005), aunque periodos menores también permiten el desarrollo del estudio pero aumentan la incertidumbre de los resultados. Las series de tiempo de las variables pueden ser obtenidas de modelos numéricos de oleaje y de corrientes y cuando sea posible calibrados a través de mediciones físicas.

Un análisis como el antes descrito está fuera del alcance del presente trabajo; sin embargo, para la realización de los análisis de respuesta dinámica es necesario definir al menos un estado de mar representativo de condiciones extremas en la zona de estudio por lo que se recurrió a diversas fuentes nacionales e internacionales para su obtención, los cuales se describen a continuación.

#### **4.1.1. Oleaje**

Una fuente importante de datos de oleaje es la Agencia Norteamericana para la Administración del Océano y la Atmosfera (National Oceanic and Atmospheric Administration, NOAA) la cual cuenta con boyas metoceánicas instrumentadas para la medición de diversos parámetros metoceánicos. Para el caso que nos ocupa existen dos

boyas de la NOAA en la zona sur-oeste del Golfo de México: la estación 42906 localizada en 19.633N 92.483W, la cual es de reciente instalación y no cuenta aún con datos; y la estación 42055 localizada en 22.017N 94.046W la cual tiene datos intermitentes de oleaje y atmosféricos de los últimos 5 años.

La información de oleaje obtenida de la boya 42055 esta graficada en las Figura 4.1.1. a y Figura 4.1.1. b, para altura de ola significativa y periodo pico respectivamente. El periodo de mediciones es del mes de mayo del 2005 a la fecha, con temporadas fuera de operación que se aprecian en las zonas blancas de las graficas.

Esta es una de las pocas fuentes de información de oleaje disponibles, sin embargo la boya esta localizada en un sitio donde el fetch (área de transmisión de energía del viento sobre la superficie del mar) es suficientemente amplio para captar oleaje totalmente desarrollado por lo que podemos considerar que las aturas de ola significativa máximas detectadas son representativas del área de interés.

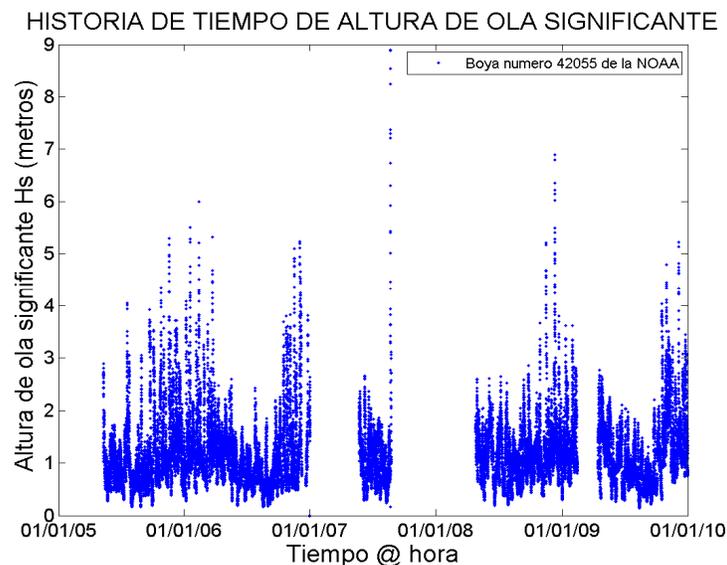


Figura 4.1.1. a Altura de ola significativa en la localización 22.017N 94.046W, obtenidos de la boya 42055 de la Agencia Norteamericana para la Administración del Océano y la Atmosfera.

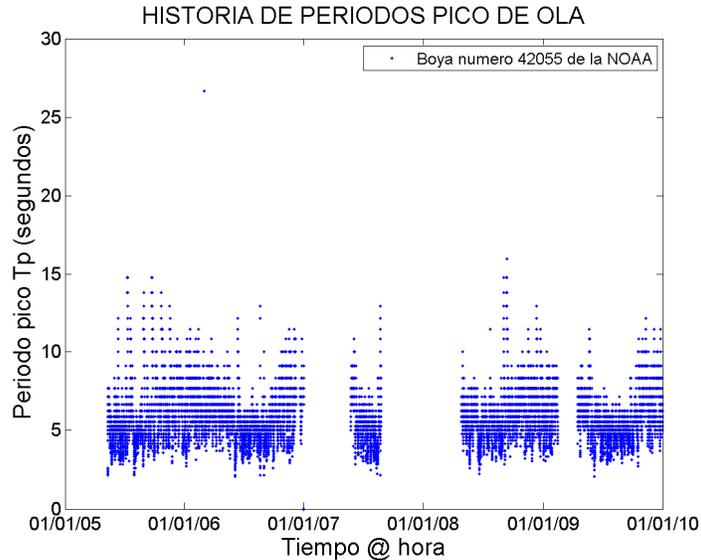


Figura 4.1.1. b Periodos pico asociados a ola significativa en la localización 22.017N 94.046W, obtenidos de la boya 42055 de la Agencia Norteamericana para la Administración del Océano y la Atmosfera.

Dado lo anterior se ha escogido para los análisis que se presentan en este trabajo un intervalo de alturas de ola significativa  $H_s$  que oscilan de 9 a 12 metros con periodos pico asociado  $T_p$  de 12 a 15 segundos. Estos valores corresponden a eventos de tormentas extremas cuyos periodos de retorno oscilan entre los 100 y 1000 años de periodo de retorno.

#### 4.1.2. Corriente

Para el caso de la circulación oceánica o corriente marina existen modelos numéricos que permiten la extracción de información de historias de tiempo de la velocidad de la corriente en diferentes profundidades.

Para el caso de la presente investigación se recurrió a una fuente internacional denominada “El consorcio HYCOM”, el cual es un conjunto de instituciones patrocinadas por El Programa Norteamericano Conjunto para el Océano (National Ocean Partnership Program, NOPP), que pertenece al Experimento Norteamericano de Asimilación de Datos Globales del Océano (U. S. Global Ocean Data Assimilation Experiment, GODAE).

El Modelo Oceánico de Coordenadas Híbridas (Hybrid Coordinate Ocean Model, Hycom) es un modelo numérico de circulación oceánica que contiene simulaciones de la circulación

marina de gran parte del globo terráqueo. En particular se procedió a la extracción de información en el nodo de malla correspondiente a las coordenadas 19.53N 94.48W. Cabe destacar que los archivos se presentan en Formato de Código de Datos de Red (Network Code Data Form, NetCDF) desde la superficie marina hasta el lecho del mar.

En la Figura 4.1.1. c y Figura 4.1.1. d se presenta la historia de tiempo de la velocidad zonal, meridional y la rapidez tanto para la superficie como a una profundidad de -30 metros, que es la parte que incide directamente sobre el casco de la plataforma en estudio.

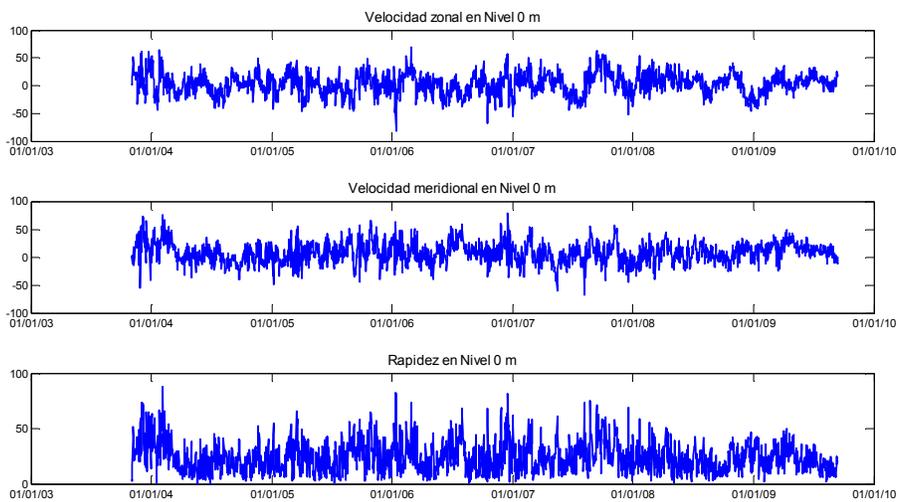


Figura 4.1.1. c Velocidad (cm/s) zonal, meridional y rapidez de corriente marina en la superficie en la localización 19.53N 94.48W, fuente “El Consorcio HYCOM”.

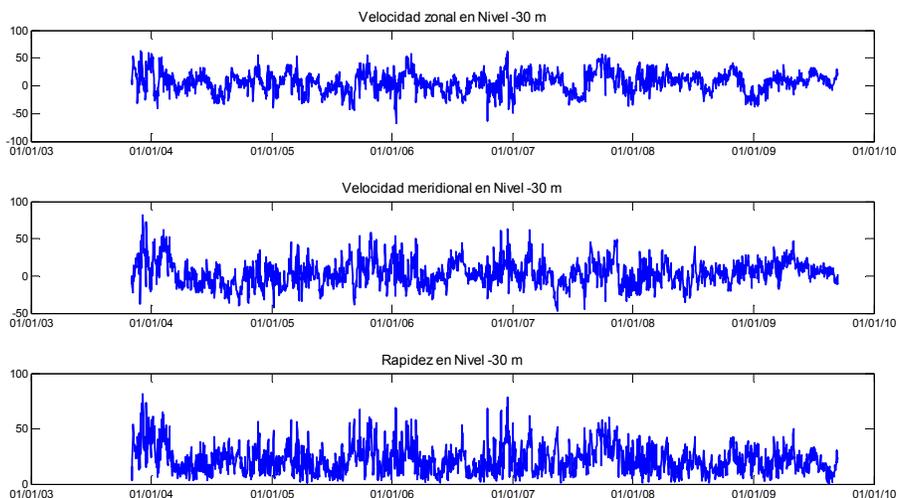


Figura 4.1.1. d Velocidad (cm/s) zonal, meridional y rapidez de corriente marina a una profundidad de 30 metros en la localización 19.53N 94.48W, fuente “The HYCOM Consortium”.

Debido a que la fuente antes citada proporciona información confiable se ha escogido para los análisis que se presentan en este trabajo un rango de velocidad de la corriente  $V$  que oscila entre 100 y 120 cm/s incidiendo directamente sobre las piernas y pontones de la plataforma. Al igual que para el caso de oleaje, los datos seleccionados corresponden a eventos oceánicos extremos con periodos de retorno asociados entre 100 y 1000 años.

## **4.2. Dimensionamiento de la PPT**

### **4.2.1 Requerimientos operativos**

Una Plataforma de Piernas Tensionadas puede ser diseñada para diferentes funciones de la industria petrolera como son perforación o producción, o inclusive una combinación de ambas.

No importando cual sea el servicio que la plataforma satisfaga, se requiere un conjunto de sistemas de producción y sistemas auxiliares que permitan la operación adecuada de la plataforma.

En el presente trabajo se consideró que la plataforma permitirá el desarrollo de un campo petrolero en el Golfo de México en un tirante de 1000 metros de profundidad, con una producción máxima de 200 MBOD y 200 MMSCFD, y permitirá en forma simultánea la perforación y reparación de pozos.

De acuerdo a estas premisas se efectuó un análisis comparativo de los componentes principales de varias plataformas que operan actualmente en tirantes similares. Los componentes y características principales de dichas plataformas se presentan en la Tabla 4.2. a.

Tabla 4.2. a Componentes y características principales de plataformas PPT instaladas y operando en tirantes cercanos a 1000 m.

		PLATAFORMA					
Características		Unidades	AUGER	MARS	RAM/POWELL	URSA	BRUTUS
Instalaciones superficiales	Producción de aceite	MBOD	105	200	160	150	130
	Producción de gas	MMSCFD	420	185	200	400	150
	Modulo habitacional	Personas	132	106	110	156	94
	Niveles del deck		2				
	Dimensiones del deck (Largo Ancho Alto)	ft m	290' x 330' x 70' 88x101x 21	245' x 245' x 45' 75x75x14	245' x 245' x 40' 75x75x12		266' x 266' 81 x 81
Casco	Numero de columnas		4	4	4	4	4
	Diámetro de columna	ft (m)	74' (22.6m)	66.5' (22m)	66.5' (22m)	85' (26m)	66.5' (20m)
	Largo de columnas	ft (m)		162' (49 m)	165' (50 m)	177' (54 m)	166' (51m)
	Longitud centro a centro de columnas	ft (m)					200' (61m)
	Numero de pontones		4	4	4	4	
Equipo de perforación		ft	25000		25000		
Tendones	Numero de tendones		12 (4 x 3)	12 (4 x 3)	12 (4 x 3)	16 (4 x4)	12 (4 x 3)
	Diámetro de tendón	in (mm)	26" (660mm)	28" (711mm)	28" (711mm)	32" (812.8mm)	32" (813mm)
	Espesor de tendón	in (mm)	1.3" (33mm)	1.2" (30.5mm)	1.2" (30.5mm)	1.5" (38.1mm)	1.25" (31.7mm)
	Longitud del tendón	ft (m)		2,852' (869m)	3145' (959m)	3,800' (1,158m)	2,900'
Pesos	Peso de cubierta y equipos	mt (st)	21,772.4 mt (24,000 st)	6,531.7 mt (7,200 st)		20,320.9 mt (22,400 st)	19,958.1 mt (22,000 st)
	Peso del casco	mt (st)	35,380 mt (39,000 st)	15,105 mt (16,650 st)	13,608 mt (15,000 st)	26,018 mt (28,680 st)	13,154 mt (14,500 st)
	Peso total	m t(st)					
	Desplazamiento @MWL	mt (st)	66,224 mt (73,000 st)	49,099 mt (54,123 st)	49,100 mt (54,123 st)	88,451 mt (97,500 st)	49,623 mt (54,700 st)
Condiciones de sitio	Tirante	m	873	894	980	1159	980
	Lugar		US-GOM	US-GOM	US-GOM	US-GOM	US-GOM

El objetivo del análisis comparativo fue determinar un orden de magnitud en cuanto al tamaño y peso para la plataforma del estudio, encontrándose lo siguiente:

- Para los casos de gran producción de gas como lo son Auger y Ursa con 420 y 400 MMSCFD el volumen desplazado se incrementa considerablemente lo cual obedece a los requerimientos de equipo para el tratamiento de esta importante cantidad de gas, comparada con los otros casos.

- Obsérvese el peso del casco en Auger y Ursa, sustancialmente mayor que el resto de los casos, hecho que también se adjudica al mayor volumen de tratamiento de gas.
- El peso de cubiertas y equipo (6531 ton.) que se muestra para el caso de la plataforma Mars es sumamente pequeño para una plataforma multiservicios. Los pesos promedios de equipos de perforación alcanzan valores entre 4500 y 6000 ton., mientras que los equipos de producción del orden de 8000 a 10000 ton., por lo que un valor entre 18000 y 20000 ton. para el concepto “Peso de cubierta y Equipos” como lo muestra la plataforma Brutus es más razonable.
- Es casi un común denominador usar cuatro grupos de tres tendones, un grupo por esquina. Su diámetro y espesor dependerán de las condiciones de sitio y del nivel de pretensión que se imponga en la plataforma, lo cual será presentado en las secciones siguientes.

#### **4.2.2. Selección de componentes**

En el diseño de una Plataforma de Piernas Tensionadas existen elementos básicos que definen las dimensiones del casco de la plataforma (columnas y pontones), entre los más destacados están:

*Selección de la distancia entre columnas.-* para minimizar la oscilación horizontal y aprovechar los efectos hidrodinámicos de cancelación debidos a la fuerza de oleaje lo cual permite reducir las fuerzas totales sobre la plataforma y por consiguiente las fuerzas en los tendones y los desplazamientos del sistema.

*Secciones de columnas y pontones.-* Se busca siempre que el diámetro de las columnas y la sección del pontón sean lo más pequeños posible para minimizar las fuerzas provocadas por oleaje y corriente, sin embargo deben ser lo suficiente robustos para proporcionar una flotación en exceso que mantenga los tendones siempre en tensión.

*Dimensionamiento de las cubiertas.-* El tamaño y número de cubiertas esta gobernado por los requerimientos inerciales de los sistemas de producción, perforación y auxiliares, los cuales son esenciales para la operación de la plataforma, sin embargo un elemento que se cuida es la simetría de la distribución de las propiedades inerciales de los sistemas respecto al centro geométrico de la plataforma, manteniendo lo más cercano a la superficie del agua sus centros de gravedad lo cual mejora la respuesta dinámica global de la plataforma.

De acuerdo a lo anterior y basados en los requerimientos operativos y el benchmark desarrollados en la sección 4.2.1, se propuso un conjunto de datos globales de la plataforma, los cuales después de una serie de análisis estáticos condujeron a las siguientes dimensiones para las cuales se efectuarán posteriormente los análisis hidrodinámicos en la sección 4.3 de este trabajo.

Peso de cubierta y servicios = 19,000 ton  
 Centro de Gravedad de cubierta y servicios respecto a NMM = 26.00 m  
 Ancho de Pontón = 9.00 m  
 Altura de Pontón = 12.00 m  
 Largo de Pontón = 44.00 m  
 Espesor del Pontón = 0.101 m  
 Diámetro de columna = 18.00 m  
 Longitud total de la columna = 46.02 m  
 Espesor de columna = 0.101 m  
 Longitud centro a centro de columnas = 62.00 m  
 Numero de tendones por esquina = 3  
 Diámetro de tendón = 0.71 m  
 Espesor de tendón = 0.03 m  
 Nivel inferior de cubierta = 20.00 m  
 Peso total = 32,996.50 ton  
 Inercia = 998,790.90 m<sup>4</sup>  
 Volumen desplazado = 45,496.54 ton  
 Centro de gravedad respecto a la superficie del mar = 10.687 m  
 Centro de Flotación (SNMM) = -15.94 m  
 bm = 21.95 m  
 $\overline{CGb}$  = 26.62 m  
 Altura metacéntrica = -4.68 m  
 Profundidad sumergida = 26.02 m  
 Volumen de pontones = 19,008.00 ton  
 Radio de giro = 31.32  
 La masa<sub>11</sub> es = 7,032.514  
 La masa<sub>33</sub> es = 3,363.557  
 El momento de inercia de masa I<sub>m55</sub> es = 3,500,516.00  
 Longitud inicial del tendón = 973.98 m  
 Rigidez axial inicial del grupo de tendón por esquina = 4,016.80 ton  
 Distancia del fondo al CG = 36.71 m.  
 Área de cada columna = 254.47 m<sup>2</sup>  
 Área total de acero de los tendones de una esquina = 0.20 m<sup>2</sup>  
 Acero de casco y tendones A36

### **4.2.3. Selección de la pretensión en tendones**

Una vez que se ha dimensionado la plataforma, un elemento importante que impacta en el comportamiento dinámico de la misma es la pretensión de sus tendones, un valor pequeño reduce los esfuerzos de trabajo en los mismos pero incrementa la excursión del casco, y a medida que se aumenta la pretensión los tendones se tornan más solicitados aunque las excursiones se reducen.

Para seleccionar la pretensión se efectuaron análisis aplicando pretensiones de 10000, 12500, 15000, 17500 y 20000 toneladas a la plataforma y considerando un estado de mar crítico a través de la simulación sintética de oleaje a partir de un espectro de oleaje de Pierson-Moskowitz con altura de ola significativa de 12 metros y periodo pico de 15 segundos y velocidad de corriente marina simultanea de 120 cm/s.

La obtención de las series de oleaje se efectuó a través de realizaciones simulando para cada caso historias con una duración de 820 segundos, cada armónico simulado es posteriormente traducido en fuerzas distribuidas sobre las columnas y pontones, como se menciona en capítulos anteriores dichas fuerzas son integradas y trasladadas al centro de gravedad de la plataforma donde esta ubicado el sistema de referencia.

En la Figura 4.2.3. a y Figura 4.2.3. b se muestra respectivamente el espectro de oleaje empleado y las series de tiempo de fuerzas horizontales para las diferentes pretensiones considerando el empuje de oleaje y corriente acoplados. Es importante destacar que el oleaje generado a través de las simulaciones es estadísticamente el mismo sin importar la pretensión que se le imponga a la estructura, sin embargo las fuerzas que se ejercen sobre la plataforma si dependen de la pretensión ya que en cada caso los desplazamientos horizontales de la plataforma son diferentes y el empuje de la ola depende de la posición relativa entre ésta y la plataforma.

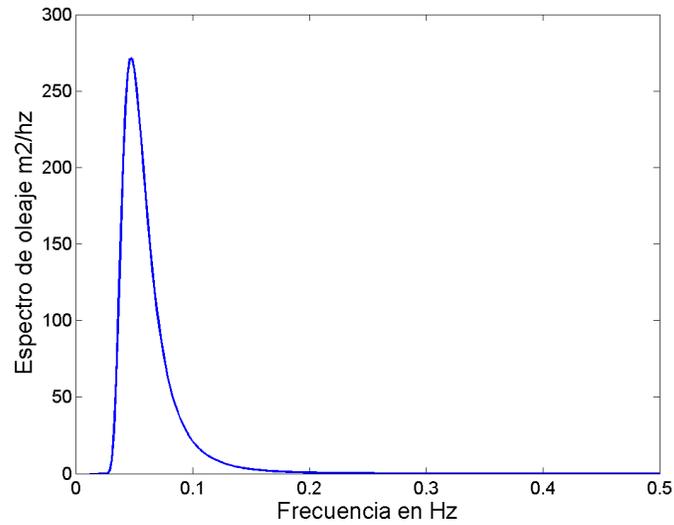


Figura 4.2.3. a Espectro de oleaje de Pierson-Moskowitz

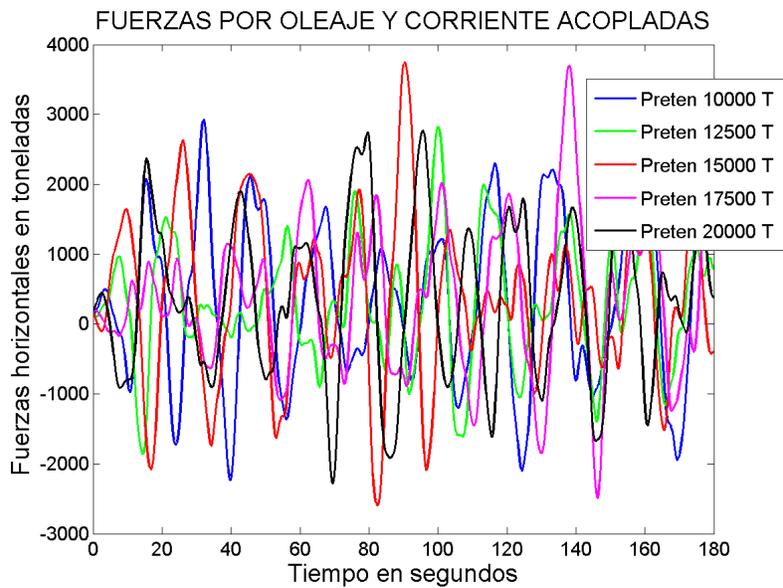


Figura 4.2.3. b Fuerza horizontal sobre plataforma

En la Figura 4.2.3. c es evidente esta diferencia de desplazamientos horizontales lo cual tiene su origen en la dependencia que tiene la rigidez lateral de la tensión en los tendones, obsérvese en dicha figura que para la pretensión de 10,000 ton los desplazamientos horizontales alcanzan valores cercanos a los 50 metros lo que significa el 5% de la profundidad total en el sitio, lo anterior es acompañado por desplazamientos verticales (sustentación) que van hasta los 2.3 metros de hundimiento de la plataforma, dicho estado

de desplazamientos es excesivo desde el punto de vista operativo. Al duplicar la pretensión (20,000 ton) los desplazamientos se reducen en un 40% alcanzando máximos de 30 metros lo cual es aceptable desde el punto de vista de servicio, sin embargo los niveles de esfuerzos que se generan en ambos casos muestran (Figura 4.2.3. d) que para la pretensión de 20,000 ton se alcanzan valores superiores a los  $2,700 \text{ kg/cm}^2$  lo que rebasa el esfuerzo de fluencia del acero A-36 que hemos seleccionado para los tendones.

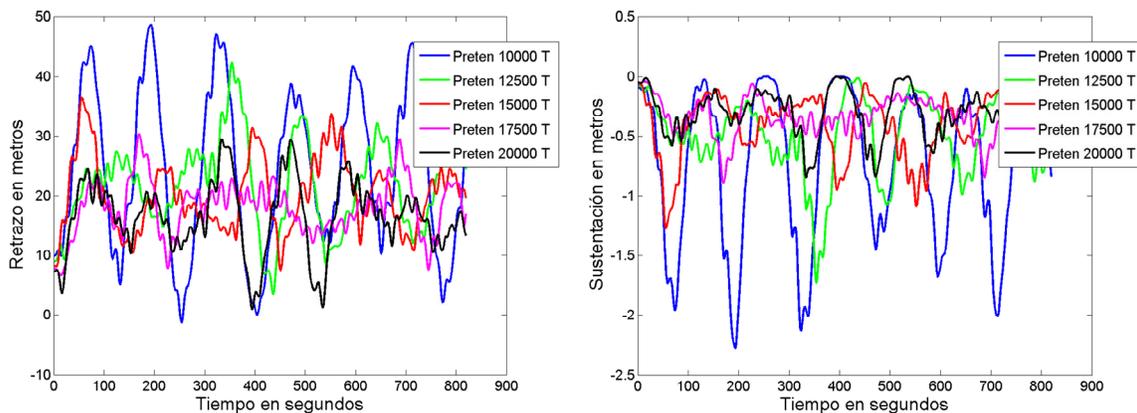


Figura 4.2.3. c Desplazamientos horizontal y vertical de la plataforma

Dado lo anterior se deben descartar ambos valores de pretensión uno por condición de servicio y el otro por condición de trabajo.

Lo anteriormente expuesto muestra las condiciones extremas de pretensión para el estado de mar estudiado, se tiene por lo tanto que buscar una pretensión que limite los desplazamientos y que a su vez no sobre-esfuerce los tendones.

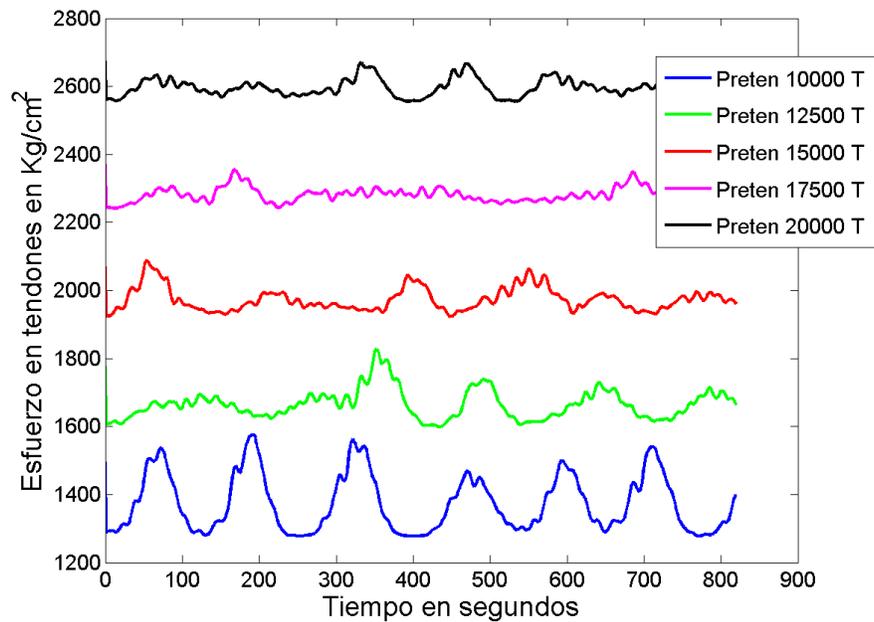


Figura 4.2.3. d Historia de esfuerzos en tendones

Refiriéndonos a las mismas figuras antes citadas, se descarta la pretensión de 17,500 ton ya que no obstante que limita los desplazamientos a valores aceptables, el nivel de esfuerzos que induce a los tendones es cercano al límite de fluencia, una situación inversa sucede en el caso de la pretensión de 12,500 ton en la que mientras el nivel de esfuerzos se mantiene bajo, los desplazamientos son excesivos.

La pretensión que ofrece un buen balance entre esfuerzos y desplazamientos es la de 15,000 ton en donde el esfuerzo promedio es de aproximadamente 2000 kg/cm<sup>2</sup> y los desplazamientos horizontales y verticales máximos son 35 y 1.25 metros respectivamente. Por tal motivo este valor es escogido para los análisis subsecuentes.

### 4.3. Respuesta Dinámica

#### 4.3.1 Respuesta ante estado monocromático de mar extremo.

Como primer caso de análisis de respuesta de la plataforma de piernas tensionadas descrita en la sección anterior, se seleccionó un estado de mar en el que se presenta solo oleaje regular (oleaje monocromático) cuyas características de altura de ola y magnitud de la corriente marina, lo posicionan como un estado de mar extremo. Tales características se presentan a continuación:

$H=12$  metros

$T_h= 15$  segundos

$V=100$  cm/s

Como primera etapa del análisis se aplica en forma incremental la fuerza inducida por la corriente marina hasta alcanzar el máximo desplazamiento por esta condición de fuerza estática, el cual fue de aproximadamente 6 metros (condición inicial para el análisis dinámico) como se observa en el tiempo cero en la Figura 4.3.1. a, instante en el cual se inicia la aplicación de la carga dinámica que es producida por la acción simultánea de la corriente constante más la acción del oleaje. Este estado transitorio dura aproximadamente 700 segundos tiempo en el cual se estabiliza el comportamiento de la plataforma alcanzando su respuesta en estado estacionario a partir de los 700 segundos con desplazamientos que oscilan entre 17 y 19 metros.

En el tiempo cero las características dinámicas de la plataforma son las siguientes:

Tabla 4.3. a Frecuencias naturales en condición inicial con desplazamiento provocado por corriente oceánica.

Grado de Libertad / desplazamiento asociado	$\omega$ en rad/seg	$f$ en ciclos/seg	Periodo seg
$u_1 / x$	4.752E-02	7.562E-03	132.23
$u_3 / z$	2.239	3.563E-01	2.81
$u_5 / \theta$	2.011	3.200E-01	3.125

Es importante destacar que el desplazamiento máximo que se reporta en el estado transitorio es sólo de referencia ya que este estado depende de las condiciones iniciales que se han impuesto para el análisis, mismas que consideran un desplazamiento inicial de 6 metros, con velocidad y aceleración cero. Nótese en la Figura 4.3.1. a la oscilación de baja frecuencia que tiene lugar a partir del tiempo cero, esta oscilación es la respuesta en la frecuencia natural lateral de la plataforma misma que se disipa después de cuatro ciclos completos. El periodo natural de la plataforma en esta dirección es de 132 segundos, lo cual coincide con el periodo de la respuesta de baja frecuencia.

Por otro lado la respuesta de mayor frecuencia que se ve montada sobre la de baja frecuencia y que es la única que persiste en el estado estacionario, tiene un periodo de 15 segundos como se ve en la Figura 4.3.1. a y Figura 4.3.1. h, y corresponde por supuesto al periodo del oleaje.

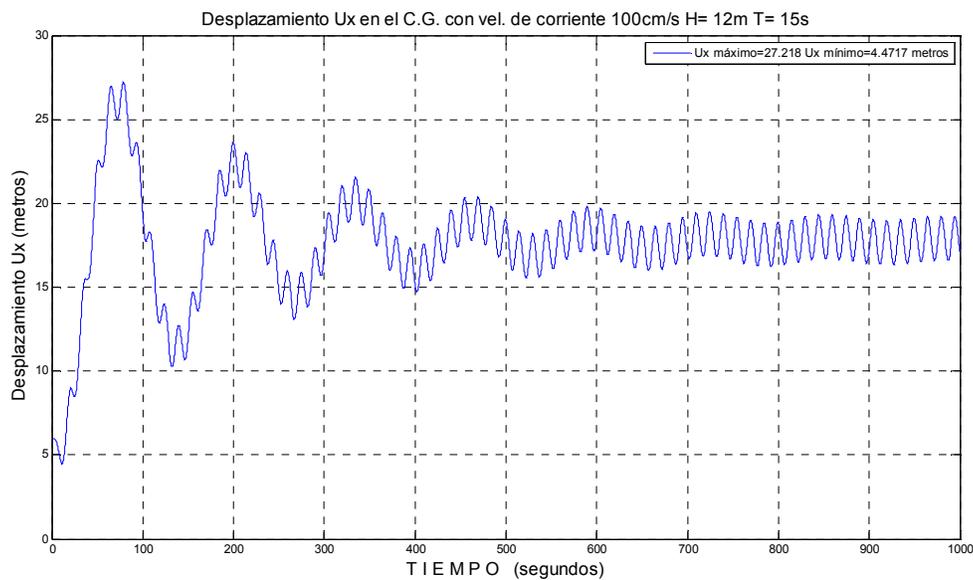


Figura 4.3.1. a Desplazamiento horizontal de la plataforma (estado transitorio y estacionario)

La historia de fuerzas horizontales producto de la corriente y el oleaje se presentan en la figura 4.3.1.b. donde se aprecia que la función está desfasada hacia la parte positiva debido a la acción positiva de la corriente.

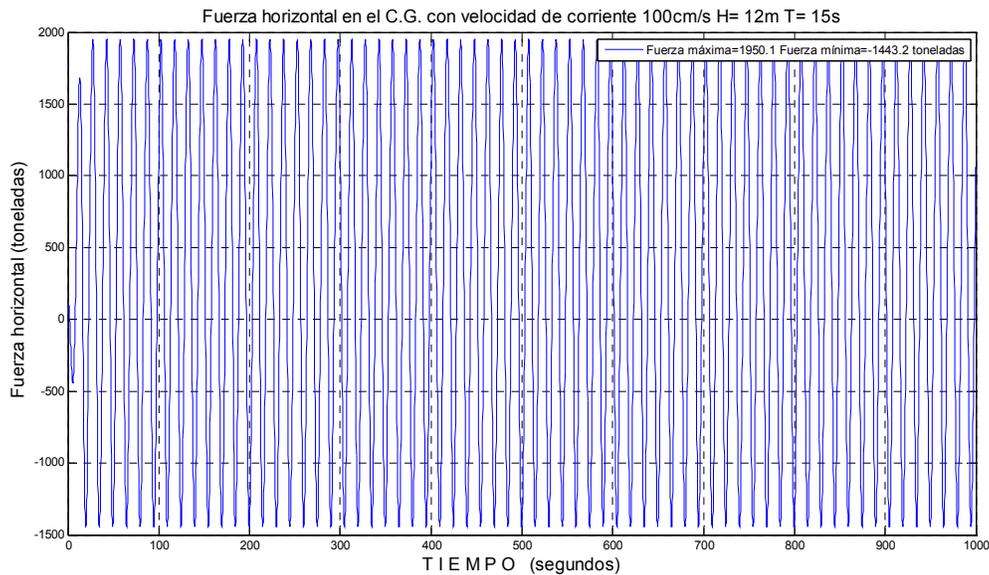


Figura 4.3.1. b Fuerza horizontal en la plataforma por la acción simultánea de corriente y oleaje

En la Figura 4.3.1. c y Figura 4.3.1. d se pueden apreciar los desplazamientos verticales y giros de la plataforma los cuales son consistentes con lo que sucede en el grado de libertad horizontal. Obsérvese en la Figura 4.3.1. c como la estructura permanece siempre por debajo del nivel medio del mar alrededor de -0.30 m y en la Figura 4.3.1. d se aprecian los desplazamientos angulares sumamente pequeños con máximos de  $4 \times 10^{-3}$  radianes lo cual permite el desarrollo de actividades en la cubierta de la plataforma.

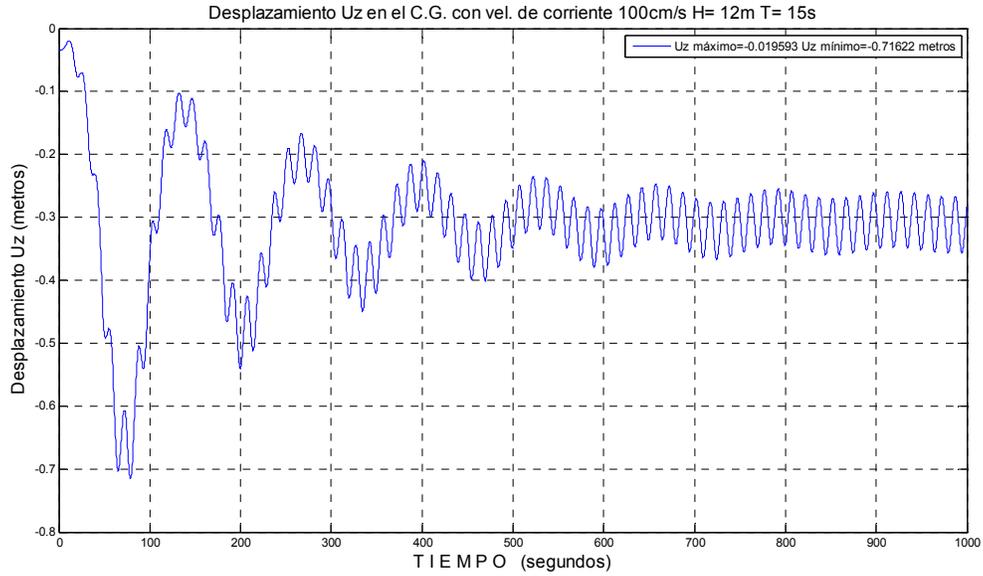


Figura 4.3.1. c Desplazamiento vertical de la plataforma (estado transitorio y estacionario)

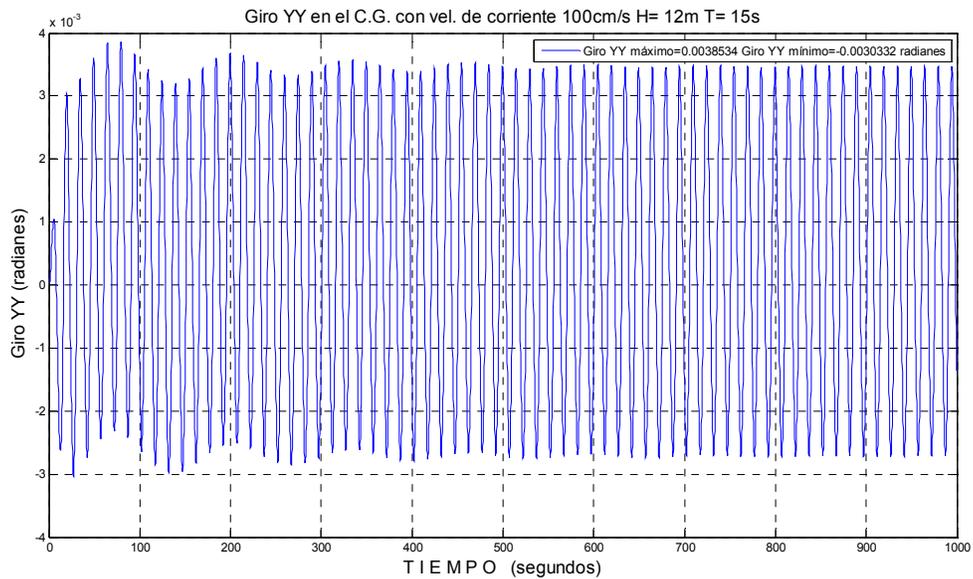


Figura 4.3.1. d Giro  $\theta$  alrededor del eje Y de la plataforma (estado transitorio y estacionario)

La variación del coeficiente de rigidez  $K_{11}$  se presenta en la Figura 4.3.1. e donde se puede apreciar su comportamiento totalmente no-lineal y su estabilidad a través del tiempo que se logró con el procedimiento presentado en capítulos previos. Así mismo se puede observar la correlación que se guarda entre la rigidez y la tensión de los tendones que se presenta en la Figura 4.3.1. f

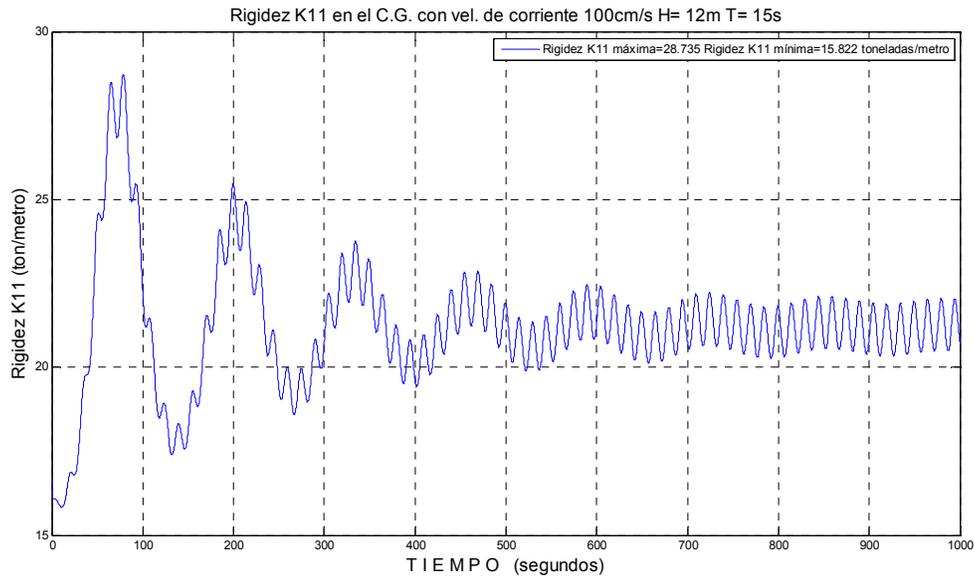


Figura 4.3.1. e Variación del coeficiente de rigidez  $K_{11}$  (estado transitorio y estacionario)

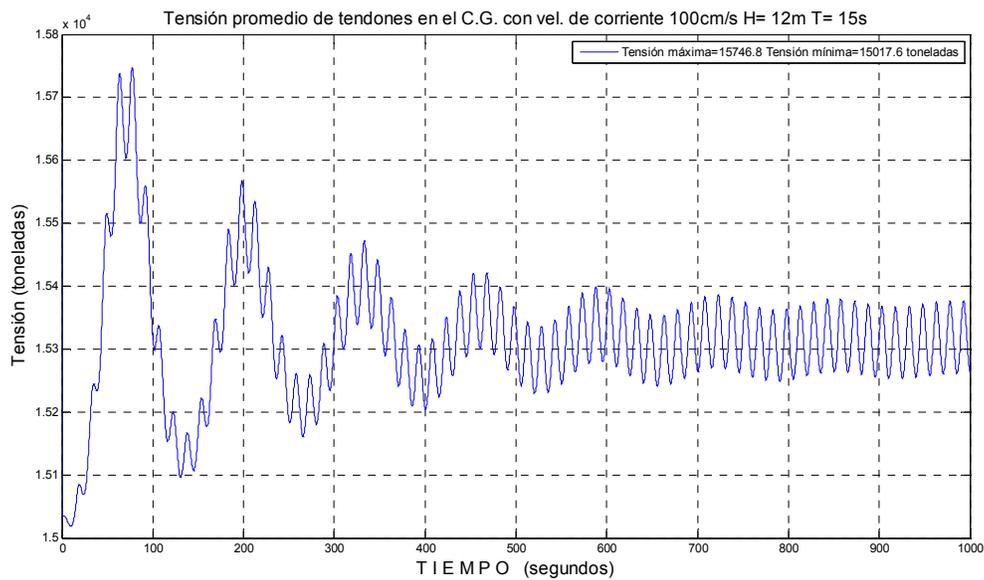


Figura 4.3.1. f Variación de la tensión promedio en los tendones (estado transitorio y estacionario)

Finalmente en la Figura 4.3.1. g se muestra la historia de tiempo de esfuerzo axial en los tendones, donde se puede apreciar que siempre se encuentran dentro de un rango admisible de acuerdo a la selección de la pretensión en los propios tendones.

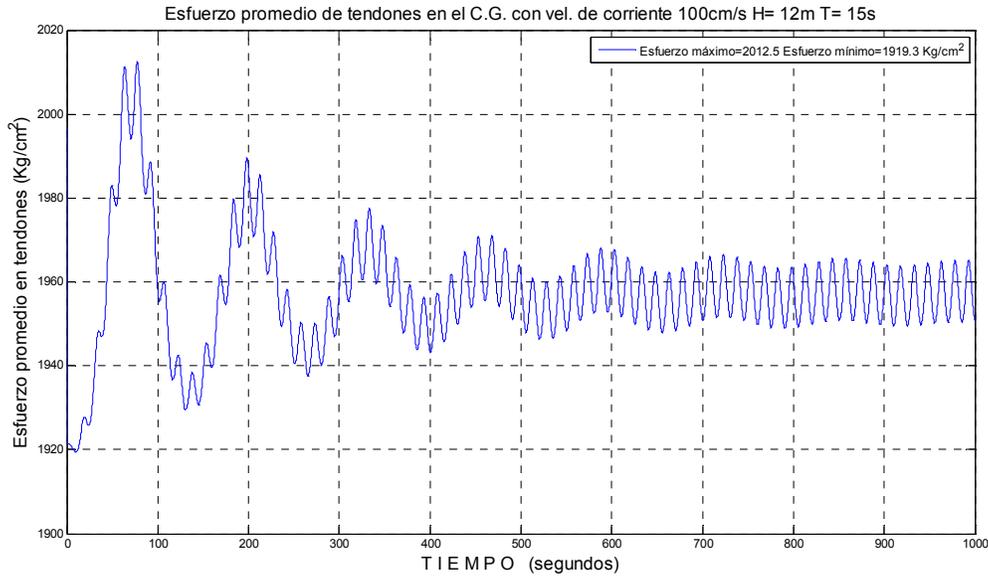


Figura 4.3.1. g Variación del esfuerzo promedio en los tendones (estado transitorio y estacionario)

Para mayor claridad en lo referente a las fases entre las diferentes variables, en la Figura 4.3.1. h se reproduce una sección de la parte estacionaria de las diferentes variables, la cual se encuentra entre 700 y 800 segundos.

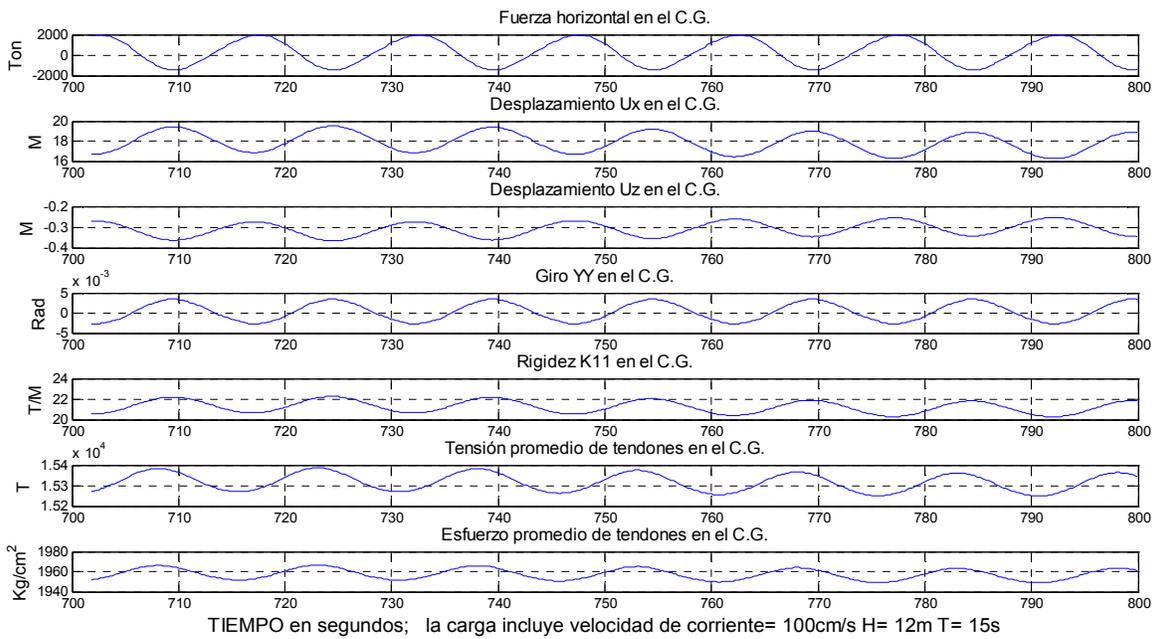


Figura 4.3.1. h Relación entre variables, sección del estado estacionario

### 4.3.2 Respuesta ante estados policromáticos (espectral) de mar extremo.

En general durante una tormenta la plataforma tiene un comportamiento no lineal, por lo que no es posible estimar a priori que combinación –de los parámetros que definen un estado de mar policromático a través de una densidad espectral de oleaje– va a provocar su respuesta máxima, por esta razón en el presente trabajo se ha establecido un abanico de posibles combinaciones de altura de ola significativa, periodo pico y velocidad de corriente, que cubren los rangos planteados previamente en la sección de “Condiciones Meteoceánicas del Sitio”.

Las combinaciones son presentadas en la Tabla 4.3. b en donde puede observarse que se definen 32 estados de mar.

Tabla 4.3. b Estados de mar analizados.

		16 Estados de mar con V=1 m/s			
		Hs (m)			
		9	10	11	12
Tp (s)	12	1	2	3	4
	13	5	6	7	8
	14	9	10	11	12
	15	13	14	15	16

		16 Estados de mar con V=1.2 m/s			
		Hs (m)			
		9	10	11	12
Tp (s)	12	17	18	19	20
	13	21	22	23	24
	14	25	26	27	28
	15	29	30	31	32

Para la determinación de la serie de tiempo de oleaje, en cada estado de mar se aplica una descomposición del espectro de oleaje de Pierson and Moskowitz como fue descrito en la sección de “Oleaje Sintético”. Dado que la descomposición esta basada en la suma de armónicos con ángulos de fase generados de manera aleatoria, es importante investigar el comportamiento de plataforma ante varias simulaciones de un mismo estado de mar (en términos estadísticos “Realizaciones”), ya que si bien es cierto que cada Realización produce series de tiempo estadísticamente similares, la respuesta de la estructura no necesariamente produce resultados estadísticamente similares debido a su condición no

lineal. Para lograr esto último se efectuaron cinco “Realizaciones” de cada estado de mar con lo que se llegó a un total de 160 análisis dinámicos no-lineales de la plataforma en estudio.

Como es de esperarse la cantidad de información numérica generada por los 160 análisis es extremadamente voluminosa por lo que para fines de análisis del comportamiento global de la plataforma fue seleccionado el desplazamiento horizontal “ $U_x$ ”. Sin embargo antes de presentar dicha comparación, se muestran gráficamente las mismas variables de respuesta que fueron mostradas en el caso de mar extremo monocromático, para lo cual se escogió sólo un caso de los 160 simulados. Esta serie de historias de tiempo permiten identificar el comportamiento global de la Plataforma de Piernas Tensionadas ante estados de mar extremo policromático, para tal efecto se seleccionó uno de los estados de mar con respuesta más elevada en términos del desplazamiento horizontal de la plataforma y que correspondió al caso 8 de la Tabla 4.3. b (realización número 4 con  $H_s$  de 12 metros,  $T_p$  de 13 segundos y velocidad de corriente de 120 cm/s)

Es fácil observar en la Figura 4.3.2. a como la plataforma responde en su frecuencia natural inicial (ver Tabla 4.3. a), así mismo existe un patrón de similitud entre la respuesta horizontal y la fuerza total en dicha dirección la cual se presenta en la Figura 4.3.2. b, en donde se manifiesta el alto contenido de frecuencias asociado al oleaje sintético que proviene de la descomposición de la densidad espectral de oleaje. La Figura 4.3.2. c muestra en forma detallada una sección de la respuesta horizontal y la fuerza, en la cual se manifiesta la respuesta de alta frecuencia (del oleaje) con periodo de aproximadamente 12 a 14 segundos, montada sobre la respuesta en la frecuencia natural de la plataforma.

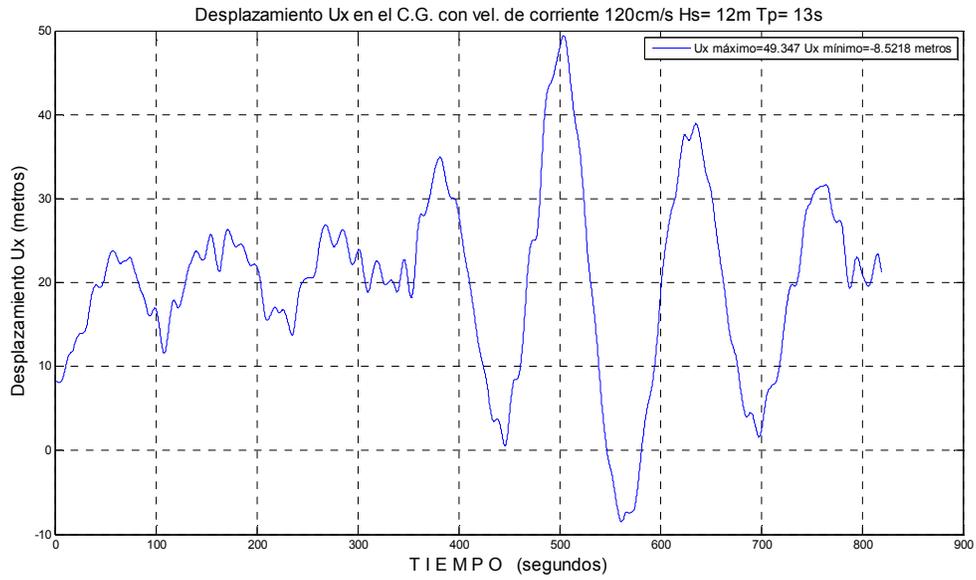


Figura 4.3.2. a Desplazamiento horizontal de la plataforma (caso 8 realización 4)

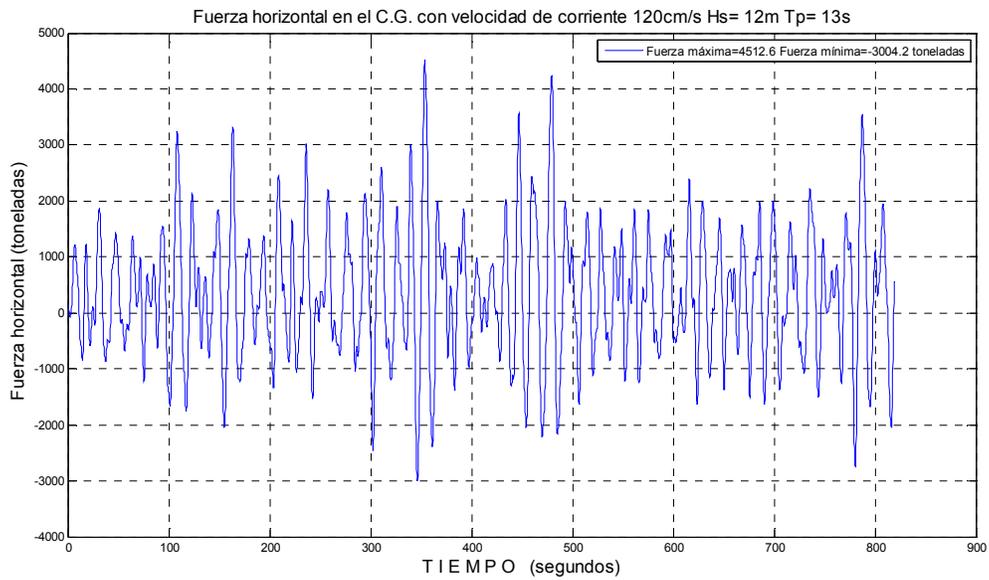


Figura 4.3.2. b Fuerza horizontal en la plataforma por la acción simultánea de corriente y oleaje (caso 8 realización 4)

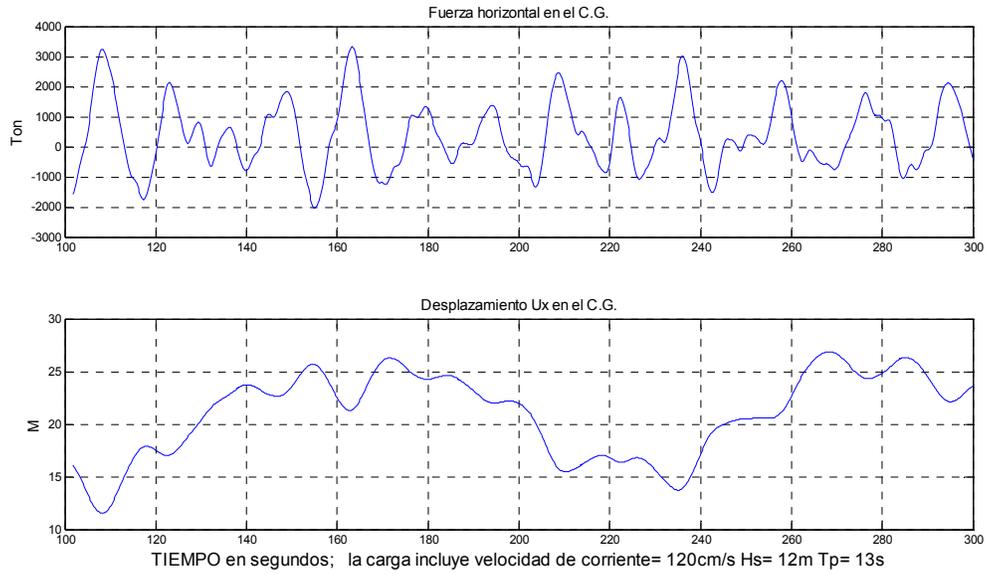


Figura 4.3.2. c Sección de Fuerza horizontal y desplazamiento horizontal en la plataforma por la acción simultánea de corriente y oleaje (caso 8 realización 4)

Si contrastamos el desplazamiento vertical con el horizontal (Figura 4.3.2. d y Figura 4.3.2. a) se observa una excelente correlación en el sentido físico ya que los mayores desplazamientos horizontales corresponden a los máximos hundimientos y en general las dos señales muestran estar en fase adecuadamente.

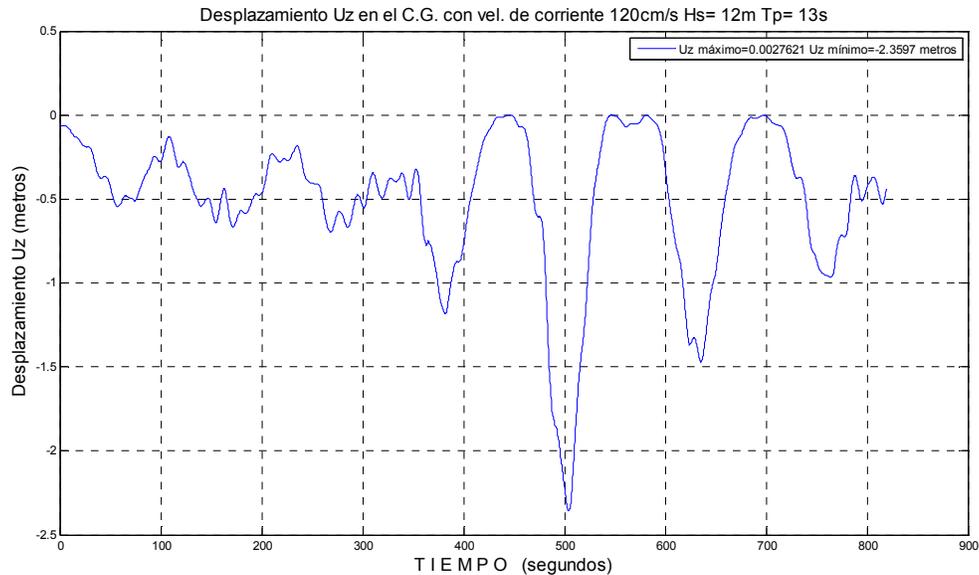


Figura 4.3.2. d Desplazamiento vertical de la plataforma (caso 8 realización 4)

Como se vio anteriormente, existe una dependencia de la rigidez  $K_{11}$  con los desplazamientos horizontales y la tensión en los tendones, lo cual se observa si contrastamos la Figura 4.3.2. a, Figura 4.3.2. e y Figura 4.3.2. f, obsérvense como el aumento o disminución de la rigidez sigue el patrón de los desplazamientos y tensión.

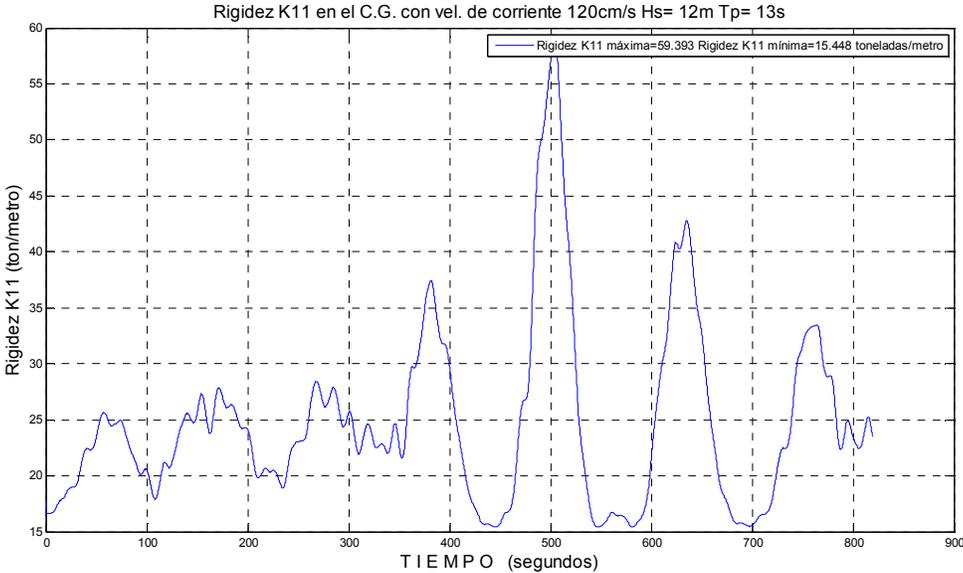


Figura 4.3.2. e Variación del coeficiente de rigidez  $K_{11}$  (caso 8 realización 4)

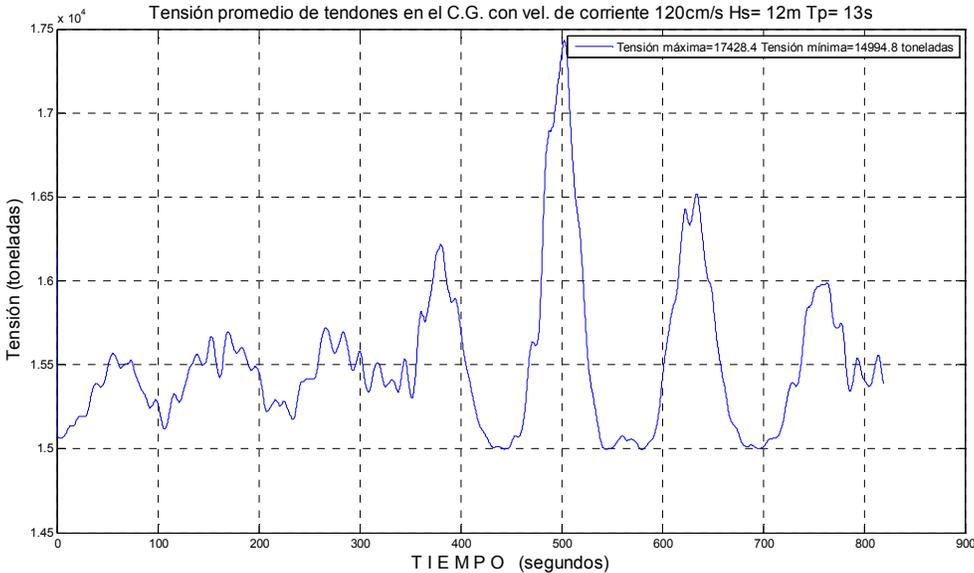


Figura 4.3.2. f Variación de la tensión promedio en los tendones (caso 8 realización 4)

Conjuntos de gráficas como las presentadas en esta sección (Figura 4.3.2. a hasta Figura 4.3.2. f) pueden ser construidas para cada uno de los 160 análisis realizados, los cuales corresponden a los 32 estados de mar presentados en la Tabla 4.3. a, sin embargo como se mencionó al inicio de la propia sección, debido a la forma en que se realizan las simulaciones del oleaje y a la respuesta no lineal de la plataforma, no necesariamente el estado de mar de mayor altura de ola significativa y velocidad de corriente producirá la máxima respuesta, por tal motivo la forma de representar los resultados es a través de los máximos de respuesta.

En la Figura 4.3.2. g y Figura 4.3.2. h se muestran los desplazamientos horizontales máximos correspondiente a cinco simulaciones de los 32 estados de mar de la Tabla 4.3. a, en dichas figuras se aprecia como un mismo estado de mar no produce siempre la misma respuesta máxima, nótese por ejemplo el caso 3 cuyos parámetros son  $H_s=11$  m,  $T_p=12$  seg y  $V=100$  cm/s, en el que las respuestas máximas son 36, 28, 41, 30, y 33 metros para las cinco simulaciones respectivamente.

En general se observa una tendencia a que la respuesta aumente con el aumento de la altura de ola significativa, sin embargo existen varios casos en los que no sucede esto como se aprecia por ejemplo entre los casos 3 y 4 de la simulación 1 ó entre los casos 15 y 16 para las simulaciones 4 y 5, donde para un incremento de un metro de la altura de ola significativa, se observa una reducción importante en la respuesta máxima, lo anterior para velocidad de corriente de 100 cm/s.

Un patrón similar se observa para las simulaciones de los estados de mar que tienen velocidad de corriente de 120 cm/s.

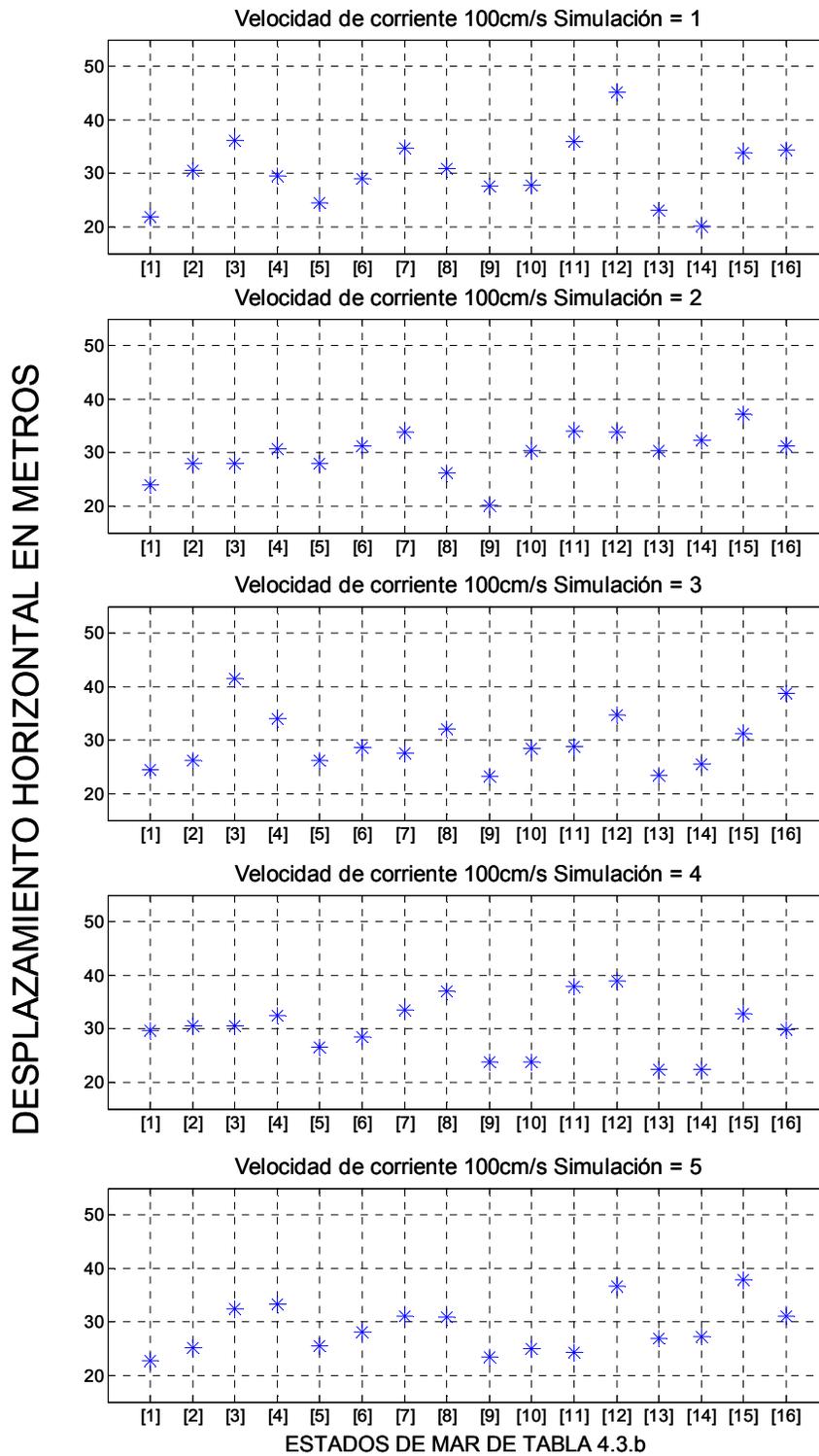


Figura 4.3.2. g Desplazamientos horizontales máximos correspondiente a cinco simulaciones de 16 estados de mar con velocidad de corriente de 100 cm/s, de acuerdo a la tabla 4.3.b

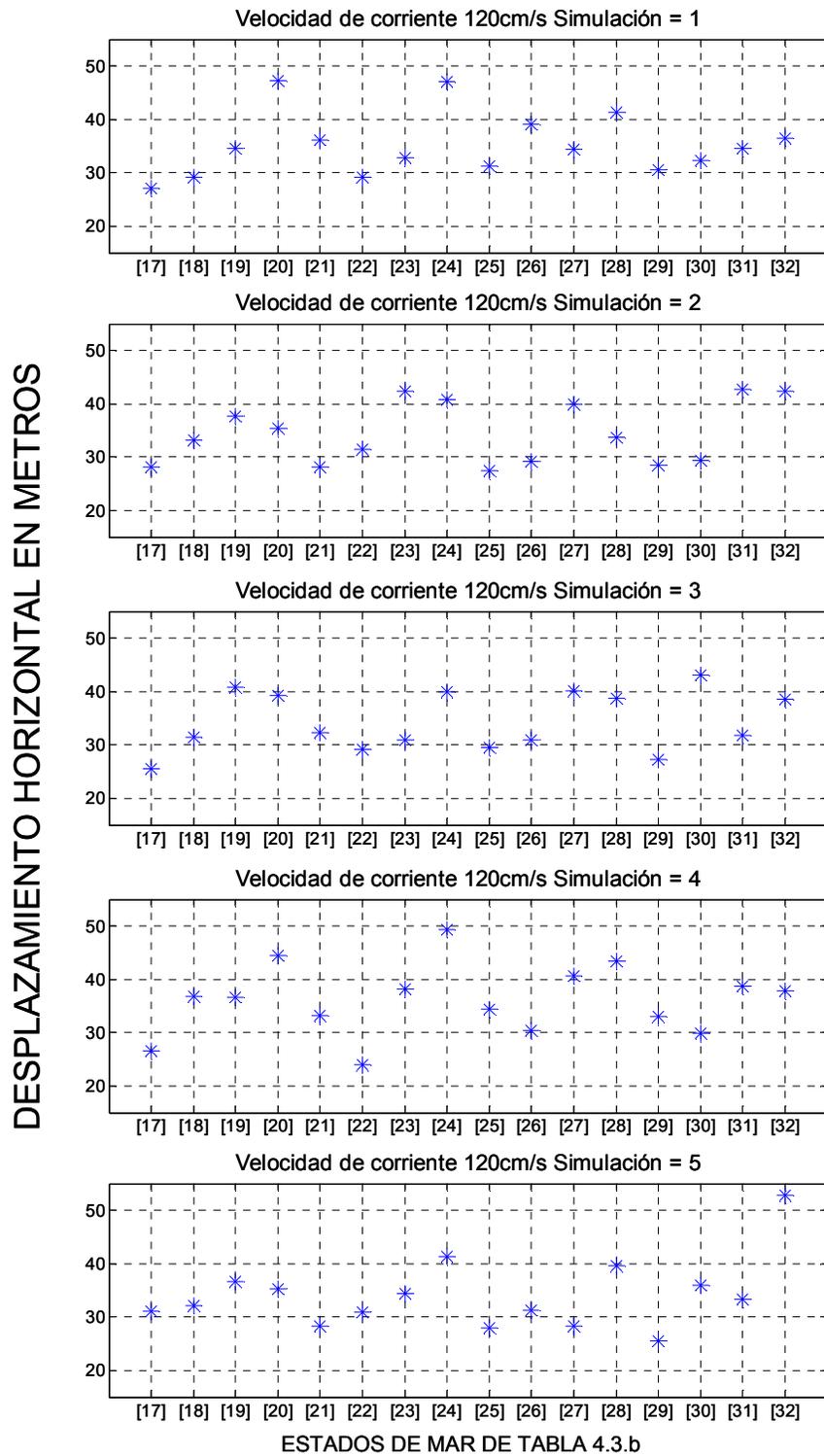


Figura 4.3.2. h Desplazamientos horizontales máximos correspondiente a cinco simulaciones de 16 estados de mar con velocidad de corriente de 120 cm/s, de acuerdo a la tabla 4.3.b

Otra forma de observar la variación de la respuesta se presenta en la Figura 4.3.2. i., Figura 4.3.2. j., y Figura 4.3.2. k. donde se aprecia la respuesta máxima de desplazamientos  $x$ ,  $z$  y  $\theta$  respectivamente, en cada figura las líneas representan la respuesta de una realización. En cada figura se presentan gráficas de la variable como función de la altura de ola significativa  $H_s$ , para cada periodo pico y velocidad de corriente analizados. De la observación de estas graficas se puede hacer la precisión de que la media de la respuesta máxima de cualquiera de los desplazamientos estudiados tiene una tendencia incremental con el aumento de  $H_s$ , lo cual era de esperarse.

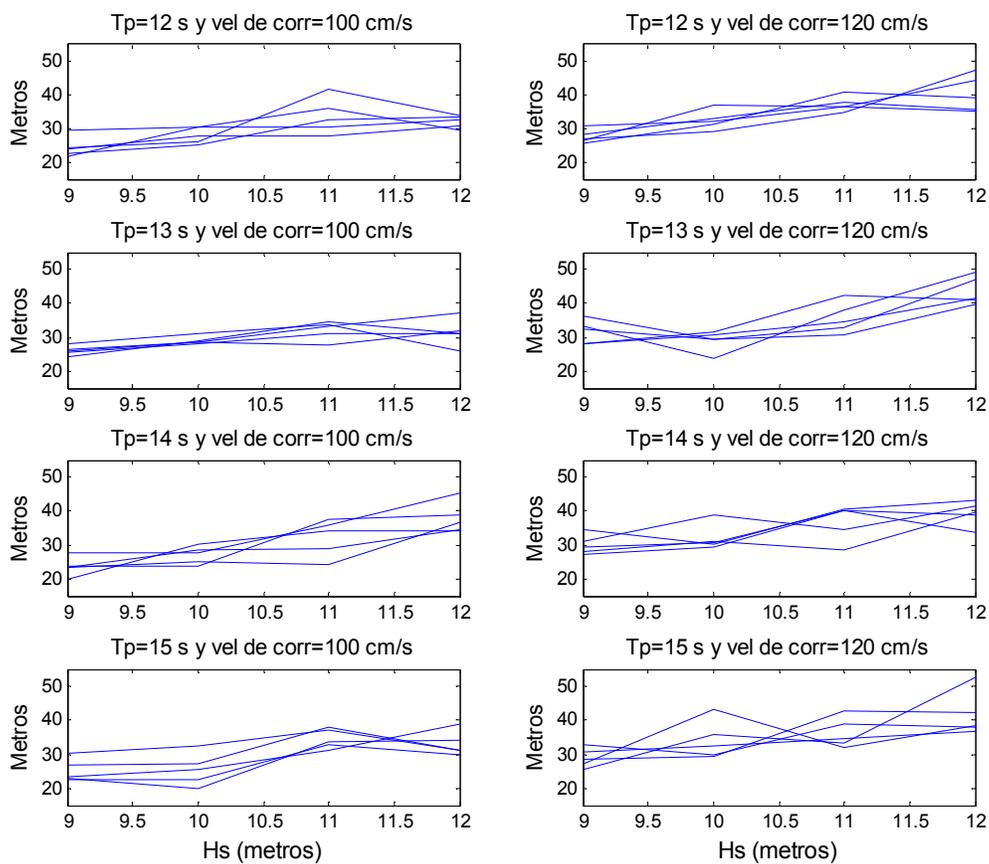


Figura 4.3.2. i Desplazamientos horizontales máximos

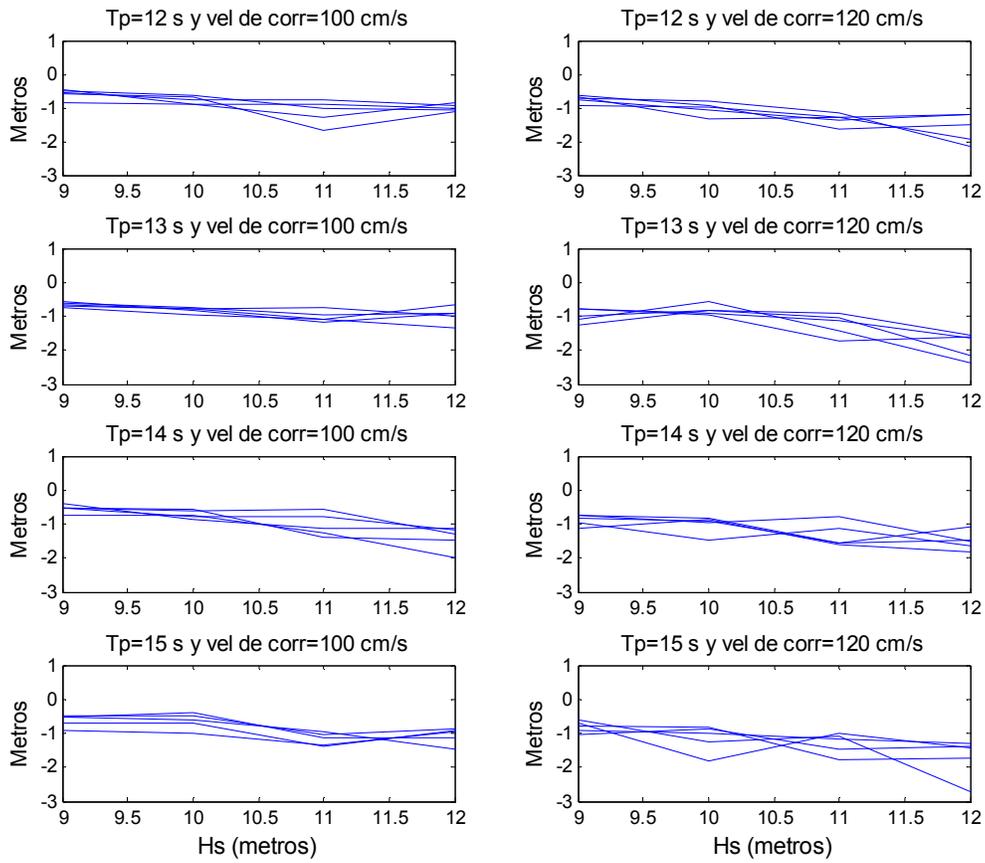


Figura 4.3.2. j Desplazamientos verticales máximos

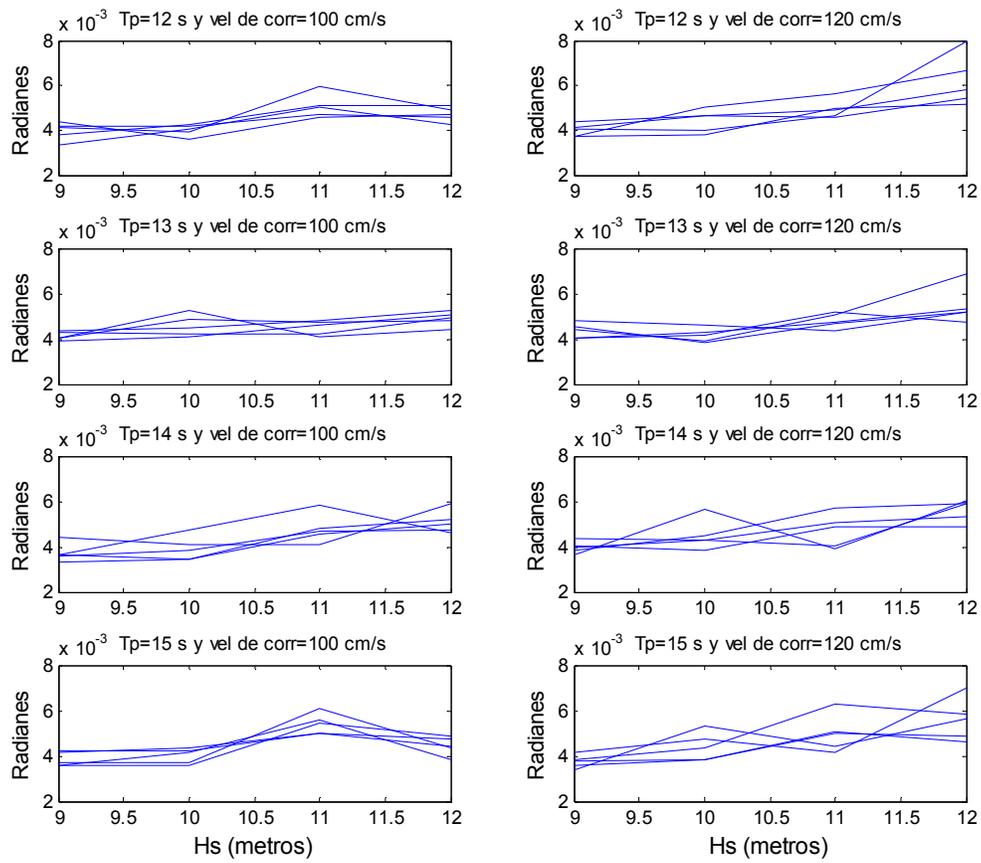


Figura 4.3.2. k Desplazamientos angulares máximos

Un aspecto que debe destacarse es la tensión máxima y mínima en los tendones, la cual debe estar perfectamente acotada durante la presencia de todos los estados de mar que se puedan presentar en el sitio. Los valores de tensión no deben rebasar los valores permisibles asociados a las características del material seleccionado, que para el caso analizado es de aproximadamente 4500 ton y puede apreciarse en la figura 4.3.2.1. que para las 160 simulaciones, dicho valor no es rebasado.

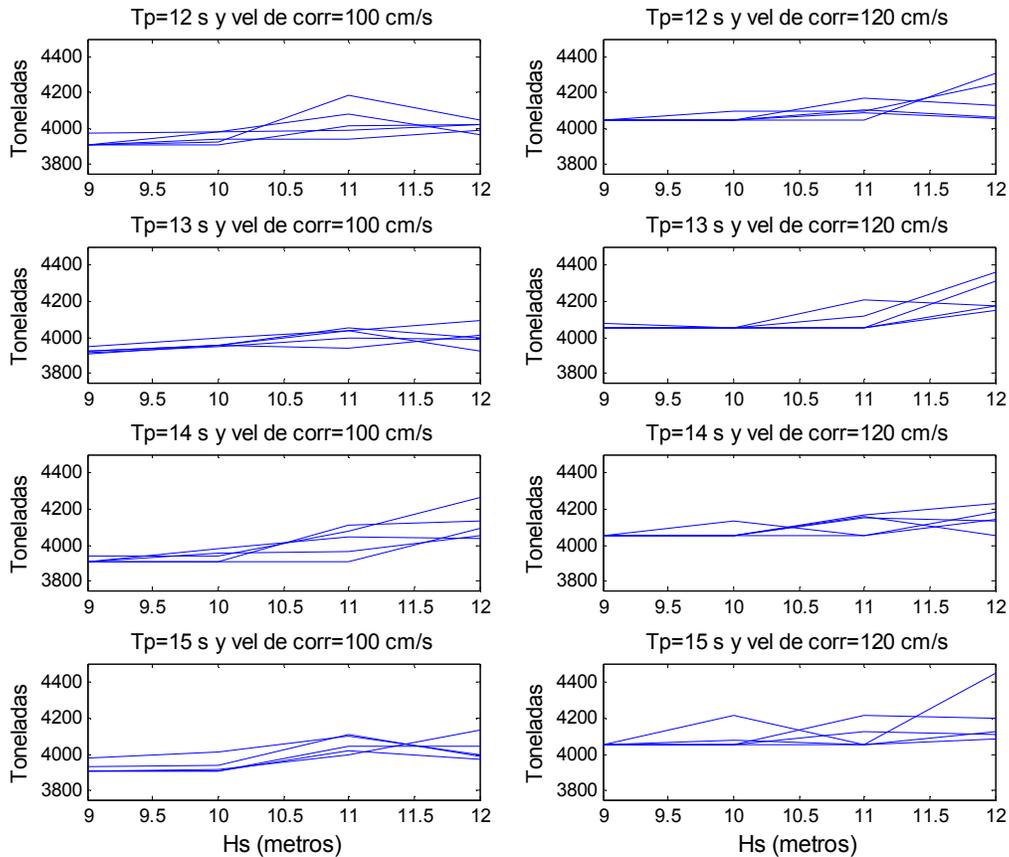


Figura 4.3.2. 1 Tensiones máximas promedio en tendones

Respecto a las tensiones mínimas estas pueden resultar aún más peligrosas que las máximas debido a que los tendones están precargados para ofrecer una condición de estabilidad en la plataforma y si por condiciones de la combinación de los efectos de excursión y rotación de la plataforma éstos pierden tensión, toda la plataforma pierde estabilidad, la Figura 4.3.2. m. muestra los valores mínimos promedio donde se aprecia que existen condiciones que

reducen la pretensión sin llegar a una condición extrema. Obsérvese que en general la tensión mínima es superior en el caso de la velocidad de corriente de 120 cm/s, lo cual es lógico dado que el mayor empuje lateral aumenta la excursión de la plataforma, es necesario por lo tanto identificar y analizar una condición más crítica, misma que podría ser la de velocidad de corriente cero.

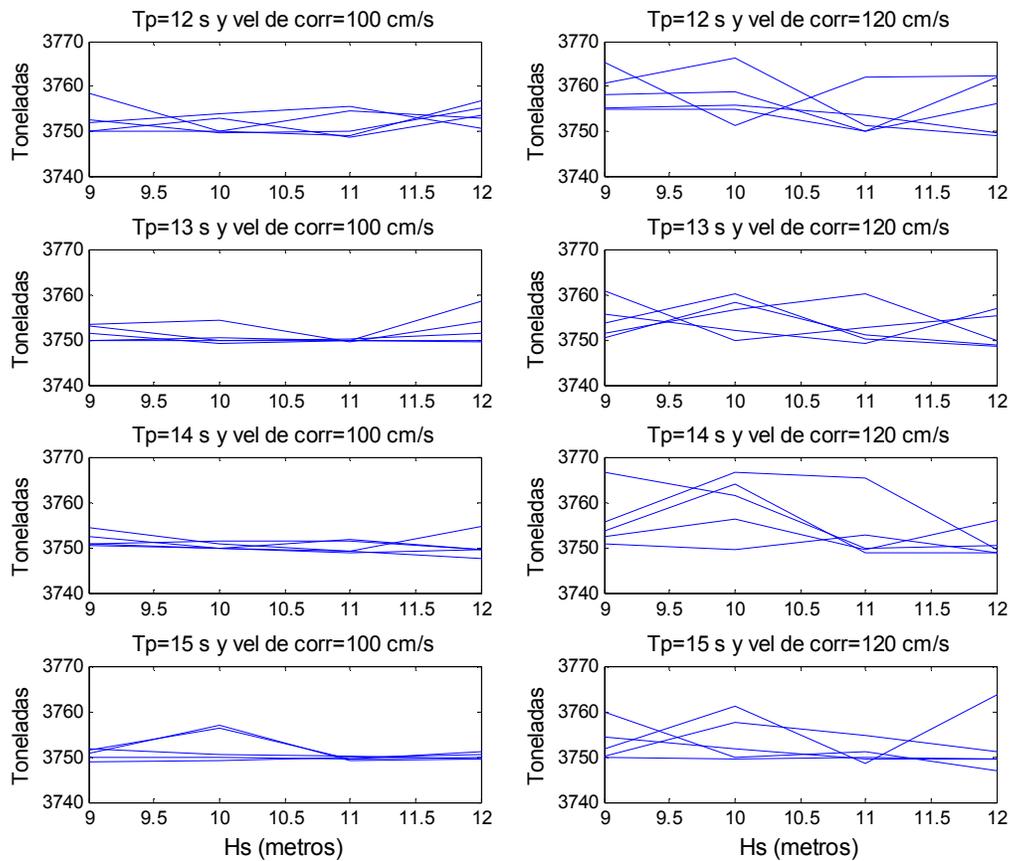


Figura 4.3.2. m Tensiones mínimas promedio en tendones

## CONCLUSIONES

Como resultado de los trabajos desarrollados se establece una metodología de análisis dinámico no lineal en el plano de Plataformas de Piernas Tensionadas de la cual se desprenden una serie de conclusiones que incluyen tanto aspectos de modelación y comportamiento estructural, como de definición de solicitaciones oceanográficas. A continuación se destacan las conclusiones más relevantes del presente trabajo de tesis.

La Plataforma de Piernas Tensionadas presenta condiciones de no linealidad que se introducen en la matriz de rigidez por efectos geométricos debidos principalmente al mecanismo de restauración de equilibrio que imponen las proyecciones horizontales de la tensión variable en los tendones. Dichos mecanismos de restauración no son de dos vías por lo que adicionalmente al efecto no lineal reflejado directamente en los coeficientes de rigidez, se suma la asimetría de la matriz de rigideces del sistema.

Una fuente adicional de no linealidad en la matriz de rigidez del sistema se identifica en los coeficientes asociados al desplazamiento vertical ( $K_{33}$ ) y rotación ( $K_{55}$ ) por la presencia del efecto hidrodinámico incluido a través de las fuerzas de restauración por unidad de desplazamiento, mismo que se observa en el segundo término de cada coeficiente. Lo anterior hace una diferencia fundamental con respecto a las estructuras civiles convencionales cuyas características mecánicas no incluyen este efecto.

Debido a la no linealidad del sistema se hizo necesario contar historias de tiempo de oleaje para poder realizar los análisis dinámicos correspondientes. Las historias de tiempo requeridas fueron generadas partiendo de estados de mar de tormenta caracterizados a través de densidades espectrales de oleaje las cuales representan la estadística de mar de corto plazo, dichos estados de mar fueron transformados en series de tiempo a través de descomposición de armónicos con ángulos de fase aleatorios distribuidos en forma constante permitiendo la simulación de estados de mar con características estadísticas similares en cada realización, lo cual garantiza que cada análisis de la plataforma representa la respuesta ante una condición extrema en una misma condición de mar.

Debido a la no linealidad de la matriz de rigideces fue necesaria la selección de un método de integración explícito ya que para la solución en  $t+\Delta t$  se utilizan las condiciones de equilibrio del instante inmediato anterior, lo cual es relevante ya que en dicho instante  $t$  la matriz de rigideces ha convergido a una condición estable, situación que no se logra en un método implícito en el cual se requiere el valor de la rigidez un instante después. El método de integración seleccionado, en conjunto con el procedimiento iterativo de convergencia para aproximar los valores de la matriz de rigideces en cada incremento de desplazamiento funcionan adecuadamente logrando estabilidad numérica durante cada análisis.

La pretensión de los tendones juega un papel muy importante en el comportamiento global de la plataforma ya que valores pequeños generan importantes desplazamientos del sistema durante condiciones de operación lo cual es inadmisibles desde el punto de vista operativo, y por otro lado, valores elevados de pretensión aunque disminuyen los desplazamientos globales, generan importantes esfuerzos en los tendones. En el caso de estudio desarrollado se cuidó el balance entre esfuerzos en tendones y desplazamientos globales, resultando una pretensión de 15,000 ton, para la cual los esfuerzos de fluencia no fueron excedidos y los desplazamientos horizontales están dentro de las prácticas recomendadas.

Cuando la plataforma es sometida a oleaje regular, su respuesta máxima no esta asociada a las condiciones de altura máxima del oleaje, en realidad existen condiciones menos severas de oleaje que en combinación con su longitud generan fuerzas dinámicas más críticas. Lo anterior se debe a los efectos de cancelación o amplificación de fuerzas por la posición relativa del oleaje respecto a las piernas de la plataforma. En el caso de estudio se observa que para olas de aproximadamente 62 metros de longitud lo cual significa periodos asociados de ola de alrededor de 6.3 segundos, se observan efectos de amplificación importantes, mientras que olas de 12 metros de altura y periodos de 9 segundos con longitud de 126 metros presentan efectos de cancelación. Lo anterior se debe a la coincidencia de crestas o de cresta y valle de la ola sobre columnas izquierda y derecha con el consecuente cambio de dirección de la velocidad de las partículas de agua. Puede verse entonces que una ola solitaria con altura de 6 metros y periodo de 6 segundos genera

fuerzas mucho más importantes (arriba del 100% en intensidad) sobre la plataforma que una ola de 12 metros de altura y periodo de 9 segundos.

Para estados de mar oleaje irregular se observa que la respuesta de la plataforma esta gobernada principalmente por su frecuencia fundamental de condición inicial (132 segundos para el caso analizado) no obstante la gran variación de la rigidez con el tiempo, sobre esta respuesta se monta la correspondiente la frecuencia de mayor energía de excitación, lo cual corresponde al periodo pico de la densidad espectral simulada. Respuesta con periodo de aproximadamente 12 a 14 segundos montada sobre la respuesta en la frecuencia natural de la plataforma con periodo de aproximadamente 132 segundos.

De los análisis realizados se observa una excelente correlación entre los desplazamientos horizontales y verticales ya que en general las dos señales muestran estar en fase adecuadamente, así como con el aumento o disminución de la rigidez la cual sigue invariablemente el patrón de los desplazamientos y tensión en los tendones.

Debido a la no linealidad del sistema un mismo estado de mar no produce siempre la misma respuesta máxima, no importando que cada realización del estado de mar produzca series de tiempo estadísticamente similares. Sin embargo en general se observa una tendencia a que la respuesta de desplazamientos máximos aumente con el aumento de la altura de ola significativa.

En general y no importando los valores del periodo pico del oleaje ( $T_p$ ), la media de las respuestas máximas horizontales tiene una tendencia incremental con el aumento de  $H_s$ , aunque con una gran dispersión.

## RECOMENDACIONES

Como fue descrito en varios de los capítulos de la tesis, se realizaron una serie de simplificaciones y consideraciones que podrían tener impacto en los resultados de la respuesta de la plataforma, por tal motivo se sugieren una serie de trabajos futuros que se listan a continuación, sin que el orden de su presentación implique de alguna manera su importancia o posible impacto en la respuesta de la plataforma:

1. Inclusión de los tres grados de libertad faltantes para lograr una respuesta integral en el espacio, y que tome en cuenta el efecto direccional diferencial de oleaje y de corriente.
2. Inclusión del efecto difracción del oleaje por la presencia de la plataforma.
3. Mayor número de realizaciones para cada estado de mar a fin de caracterizar estadísticamente la respuesta de la plataforma
4. Realización de pruebas de sensibilidad en la pretensión de los tendones para establecer niveles de pretensión para diferentes condiciones de operación
5. Realización de pruebas de variación de amortiguamiento

## REFERENCIAS

Ahmad S., 1996, Stochastic TLP Response Under Long Crested Random Sea. Computer and Structures Vol. 61 No. 6, Elsevier Science Ltd.

American Petroleum Institute, 2005, Design and Analysis of Stationkeeping Systems for Floating Structures. Recommended Practice 2SK Third Edition.

Berteaux H.O., 1976, Buy Engineering. John Wiley & Sons, New York, N.Y.

Brebbia C.A. and Walker S., 1979, Dynamic Analysis of Offshore Structures. Newnes-Butterworths.

Carl Weggel D., 1997, Nonlinear Dynamic Responses of Large Diameter Offshore Structures. Offshore Technology Research Center.

Chakrabarti S. K., 1897, Hydrodynamics of Offshore Structures. Computational Mechanics Publications, Southampton Boston

Collatz L., Springer-Verlag, 1966. The Numerical Treatment of Differential Equations. New York, N.Y.,

Department of the Army, 2008, Engineering and Design Coastal Engineering Manual, U.S. Army Corps of Engineers.

DNV-RP-C205, 2007, Environmental Conditions And Environmental Loads. Recommended Practice Det Norske Veritas.

Hallam M.G., Heaf N. J. and Wootton L. R., 1978. Dynamics of marine structures: Methods of calculating the dynamic response of fixed structures subjected to wave and current action. CIRIA Underwater Engineering Group.

Kim M.H., Tahar A., and Kim J.B., 2001, Variability of TLP Motion Analysis Against Various Design Methodologies/Parameters, Proceedings of the Eleventh International Offshore and Polar Engineering Conference.

Klaus-Jürgen Bathe and Edward L, Wilson, 1976. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice Hall, Inc.

Newland D. E., 1993. An introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis. Prentice Hall, Pearson Education Limited , Third edition.

Patel M. H. and Lynch E. J. 1983, Coupled dynamics of tensioned buoyant platforms and mooring tethers, Butterworth and Co. Ltd.

Robert H. Stewart, 2007, Introduction to Physical Oceanography, Department of Oceanography Texas A & M University.

Secretaria de Energía, 2009, Las reservas de hidrocarburos de México. Pemex Exploración y Producción

## APÉNDICE 3.1

### Sobre la Densidad Espectral y su relación con el Cuadrado del Módulo de la Transformada de una Señal.

Comenzaremos por establecer el análisis de Fourier para una función  $x(t)$ , con su media cuadrática.

Por definición, sabemos que la  $\overline{x^2}$  de una función  $x(t)$  esta dada por:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt \quad (1)$$

**Relación para funciones periódicas:**

Si  $x(t)$  es una función periódica, entonces, según el análisis de Fourier, su serie esta dada por:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (2)$$

Donde los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_n t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_n t dt \end{aligned} \quad (3)$$

Donde:

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \right] dt \\ \overline{x^2} &= \frac{a_0}{T} \int_0^T x(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_n t dt + \frac{b_n}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_n t dt \right] \end{aligned}$$

Y sustituyendo las ecuaciones (3)

$$\overline{x^2} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (4)$$

A las contribuciones de las componentes armónicas de  $x(t)$  al valor de la  $\overline{x^2}$  se le conoce como Función Espectral de  $x(t)$ .

El espectro de la función periódica  $x(t)$ , es entonces dado por los coeficientes de la serie (2), mediante la relación (4); y cada término de la serie (4) es la contribución de la correspondiente frecuencia a la media cuadrática de  $x(t)$ .

### Relación para funciones no periódicas:

Según el Análisis de Fourier, cuando  $x(t)$  no es una función periódica, en vez de utilizar la serie, usamos la Integral de Fourier (resultado que surge de hacer tender el T a infinito, en la serie de Fourier.); sin embargo, en la práctica, se tienen funciones discretas de las correspondientes funciones continuas no periódicas, por lo que deberá utilizarse la Transformada Discreta de Fourier, dada por:

$$X_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i(2\pi kr/N)} \quad (5)$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{-i(2\pi kr/N)} \quad (6)$$

Por otro lado la media cuadrática de la trama (función discreta)  $X_r$ , estará dada por:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r^2 \quad (7)$$

Sustituyendo (5) en (7)

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i(2\pi kr/N)}$$

O bien

$$\overline{x^2} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \left[ \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{i(2\pi kr/N)} \right] \quad (8)$$

Y notando que el segundo factor de (8), es el conjugado complejo de (6) se obtiene:

$$\overline{x^2} = \sum_{r=0}^{N-1} X_k X_k^* \quad (9)$$

Donde  $X_k^*$  es el conjugado complejo de  $X_k$

Y del algebra compleja, se sabe que:

$$X_k X_k^* = |X_k|^2 \quad (10)$$

Es decir, que un complejo por su conjugado es igual al cuadrado del modulo del complejo.

Finalmente sustituyendo (10) en (9)

$$\overline{x^2} = \sum_{r=0}^{N-1} |X_k|^2 \quad (11)$$

De manera análoga a la ecuación (4), cada término de (11) es la contribución a la media cuadrática, esto es:

$$\Delta \overline{x^2} = |X_k|^2 \quad (12)$$

Las ecuaciones (4) y (11), son las relaciones que buscábamos entre el análisis de Fourier y la media cuadrática de una función  $x(t)$ , periódica y no periódica respectivamente.

Ahora ya estamos en posibilidad de establecer la relación que buscamos entre la función de densidad espectral  $S_x(\omega)$ , y el cuadrado del módulo de la transformada de la función  $x(t)$ .

Antes de realizar lo anterior, recordaremos que:

$$R_x(0) = \overline{x^2}$$

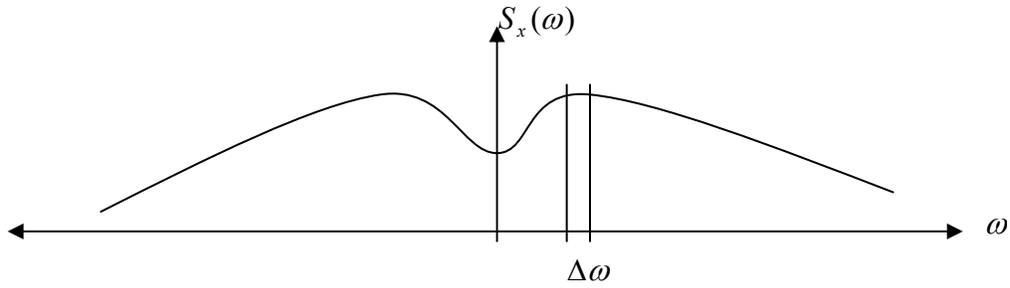
y

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega ;$$

Entonces:

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

Es decir, que la media cuadrática de un proceso aleatorio (por lo menos débilmente estacionario), viene dada por el área bajo la curva de su densidad espectral.



Por lo que la contribución a la media cuadrática de un proceso  $x(t)$ , mediante su densidad espectral  $S_x(\omega)$ , esta dada por:

$$\Delta \overline{x^2} = S_x(\omega) \Delta \omega \quad (13)$$

Por lo que se debe cumplir que (12) es igual a (13), esto es:

$$|X_k|^2 = S_x(\omega) \Delta \omega$$

Pero es bien sabido que  $\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}$ , por lo que:

$$S_x(\omega) = \frac{T}{2\pi} |X_k|^2$$

Que es el resultado buscado.