



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"**

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE DUCTOS SOMETIDOS A DIFERENTES CONDICIONES DE CARGA MEDIANTE MODELADO NUMÉRICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS
EN ESTRUCTURAS**

P R E S E N T A:

ING. MARÍA JESÚS PÉREZ DE LA CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. HÉCTOR A. SÁNCHEZ SÁNCHEZ



MÉXICO D. F. 2009



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D.F. siendo las 19:00 horas del día 03 del mes de Junio del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A.-U.Z. para examinar la tesis de grado titulada:
"Estudio del comportamiento mecánico de ductos sometidos a diferentes condiciones de carga mediante modelado numérico".

Presentada por el alumno:

<u>Pérez</u>	<u>de la Cruz</u>	<u>María Jesús</u>
<small>Apellido paterno</small>	<small>Apellido materno</small>	<small>Nombre(s)</small>

Con registro:

B	0	6	1	3	3	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Dr. Héctor Aureliano Sánchez Sánchez

Dr. Jorge Luis Alamilla López

Dr. Dante Campos Arias

Dr. Esteban Flores Méndez



Dr. Norberto Domínguez Ramírez

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
M. en C. Pino Durán Escamilla



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 3 del mes de Junio del año 2009, la que suscribe María Jesús Pérez de la Cruz alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Estructuras con número de registro B061336, adscrito a la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco, manifiesta que es autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Héctor A. Sánchez Sánchez y cede los derechos del trabajo intitulado “*Estudio del Comportamiento mecánico de ductos sometidos a diferentes condiciones de carga mediante modelado numérico*”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección mjpc.mar@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'M. J. Pérez', is written above a horizontal line.

Ing. María Jesús Pérez de la Cruz

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo de tesis primero que nada a Dios, por ser mi guía y fortaleza en la vida.

A MIS PADRES:

Imelda y José del Carmen

Que son las personas más importantes en mi vida, por su amor y cariño siempre, por el apoyo otorgado, pero sobre todo por la confianza que depositaron en mí para continuar con mis estudios y hoy verlos concluidos.

A MIS QUERIDOS HERMANOS:

María del Carmen y René

Por su amistad y cariño siempre.

A VÍCTOR F.

Por su amistad, amor, apoyo incondicional, y por formar parte de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

En el transcurso de la vida, contamos con personas que nos impulsan, de una u otra manera al desarrollo de nuestras actividades, es por ello que como persona agradecida quiero manifestar mi agradecimiento:

Al Instituto Politécnico Nacional, específicamente a la SEPI-ESIA Zacatenco por la oportunidad brindada.

Al director de tesis: Dr. Héctor A. Sánchez Sánchez por la excelente orientación que me dio en el desarrollo de esta tesis.

Al Jurado integrado por el Dr. Dante Campos Arias, Dr. Esteban Flores Méndez, Dr. Jorge Alamilla López, y al Dr. Norberto Domínguez Ramírez.

Al Ing. Carlos Cortés Salas por el tiempo dedicado en el manejo del programa utilizado.

A los profesores de la Maestría en Ciencias en Estructuras que son parte de mi formación académica.

RESUMEN

La gran actividad y crecimiento cada vez más dinámicos de la industria Petrolera Nacional, demanda crear una mayor infraestructura para satisfacer sus necesidades de explotación, producción, almacenamiento y distribución del crudo, así como de sus derivados. En lo referente al almacenamiento y distribución de estos productos, en años recientes se ha estado requiriendo la construcción de nuevas líneas de ductos, así como la reparación o rehabilitación de otras ya existentes; razón por la cual, esta investigación está dirigida al estudio y comportamiento mecánico de ductos sometidos a diferentes estados de carga.

Por lo tanto, en este trabajo de tesis se analizan tuberías de acero con diferentes espesores, en algunos casos tomando en cuenta el comportamiento elástico lineal y modelos mecánicos no lineales del material, con el propósito de estudiar la respuesta estructural bajo acciones combinadas como: presión interna, presión externa, tensión axial y momento flexionante. Modelos teóricos de cascarones y modelos numéricos basados en el Método de los Elementos finitos (MEF) fueron usados para los análisis elásticos y de colapso de las tuberías. Los modelos numéricos son generados con el programa comercial Ansys. Los modelos numéricos incluyen las geometrías reales de ductos típicos usados en la industria petrolera y las leyes de comportamiento del material.

Finalmente, las aproximaciones de los modelos numéricos son comparadas con los resultados teóricos y de datos experimentales los cuales muestran buenas aproximaciones.

ABSTRACT

The dynamic activity and growth of the National Oil industry demand to create a greater infrastructure to satisfy its needs of operation, production, storage and distribution of the oil, as well as its derivatives. Hence, with respect to the storage and distribution of these products, in recent years it is had been requiring the construction of new pipelines, also the repair or rehabilitation of other already existing ones; reason for which this research is going to the study of the mechanical behavior of the steel pipes submitted to different load cases.

Therefore, in this work of thesis the steel pipes with different thicknesses are analyzed, taking into account the linear elastic behavior and nonlinear mechanical models of the steel material, with the purpose to study the structural behavior under combined actions such as, internal pressure, external pressure, axial effort and bending. Theoretical models of the shells and numerical models based in the finite element method (FEM) were used for the elastic analysis and collapse of these pipes. The numerical models are generated with of program Ansys. The numerical models include real geometries of typical pipes used in the oil industry and the laws of behavior of the material.

Finally, the numerical approaches of the models are compared with the theoretical results and experimental dates show a good agree between them.

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE DUCTOS SOMETIDOS A DIFERENTES CONDICIONES DE CARGA MEDIANTE MODELADO NUMÉRICO

CONTENIDO GENERAL

	Pág.
RESUMEN	ix
ABSTRACT	xi
Contenido general	xiii
Lista de tablas	xv
Lista de figuras	xvi
Lista de gráficas	xix
Simbología	xxii
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	1
I.1 Generalidades	2
I.2 Antecedentes	3
I.2.1 Estudios de la plasticidad	3
I.2.2 Método del elemento finito	5
I.2.3 Ductos como transporte de hidrocarburo	5
I.2.4 Conceptos básicos	6
I.3 Objetivo	6
I.4 Metas	7
I.5 Justificación	7
I.6 Contenido de la tesis	8
CAPÍTULO II	
DESARROLLO ANALÍTICO DEL PROBLEMA EN ESTUDIO	9
II.1 Planteamiento del problema	10
II.2 Comportamiento lineal del material	11
II.3 Ecuaciones fundamentales del elemento diferencial de cascarón	11
II.3.1 Ecuaciones de equilibrio	12
II.3.2 Ecuaciones de compatibilidad	13
II.3.3 Ecuaciones de comportamiento del material	13
II.4 Análisis lineal de las tuberías	14
II.4.1 Determinación de los esfuerzos	16
II.4.2 Respuesta analítica de la tubería	19
II.5 Comportamiento no lineal del material	20

II.5.1	Fundamentos de la plasticidad	22
II.5.2	Leyes de comportamiento de material	24
II.5.3	Modelos no lineales de material de las tuberías	26
a)	Modelo de Ramberg-Osgood	26
b)	Modelo bilineal	27
II.6	Análisis de la grafica momento-curvatura	28
II.6.1	Comportamiento de la sección	29
II.6.2	Momento plástico resistente y factor de forma	31
II.6.3	Relaciones de momento-curvatura	31
II.6.4	Obtención de diagramas de momento-curvatura	32
CAPÍTULO III		
ANÁLISIS NUMÉRICO		35
III.1	Introducción	36
III.2	Modelado numérico lineal	37
III.2.1	Ductos sometidos a presión interna, presión externa, fuerza axial y momento flexionante	39
III.2.2	Ductos sometidos a combinaciones de carga	54
III.3	Modelado numérico no lineal	64
III.3.1	Hipótesis fundamentales	65
III.3.2	Ductos sometidos a presión interna, presión externa fuerza axial y momento flexionante	69
III.3.3	Ductos sometidos a combinaciones de carga	78
III.4	Diagramas de interacción	87
Caso a)	Ducto sometido a presión interna más tensión	87
Caso b)	Ducto sometido a presión interna más momento flexionante	88
Caso c)	Ducto sometido a fuerza de tensión más momento flexionante	89
Caso d)	Ducto sometido a presión externa más fuerza de tensión	90
III.5	Comparación de resultados	93
III.5.1	Resultados analíticos contra numéricos (lineales)	93
III.5.2	Resultados analíticos contra numéricos (no lineales)	95
III.5.3	Resultados numéricos contra experimentales (no lineales)	97
Conclusiones		103
Referencias bibliográficas		107
Apéndices A. Conceptos generales		111
Apéndices B. El método de los elementos finitos		121
Apéndices C. Ecuaciones de cascarón cilíndrico		127
Anexo A. Determinación de la relación momento-curvatura		133

LISTA DE TABLAS

		Pág.
CAPÍTULO II		
DESARROLLO ANALÍTICO DEL PROBLEMA EN ESTUDIO		
Tabla II.1	Características geométricas y mecánicas de los modelos de las tuberías	19
Tabla II.2	Valores de momento-curvatura	34
CAPÍTULO III		
ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CASO EN ESTUDIO		
Tabla III.1	Características mecánicas de los modelos de las tuberías	37
Tabla III.2	Resumen de análisis numérico con MEF debido a (p_i)	42
Tabla III.3	Resumen de análisis numérico con MEF debido a (p_e)	46
Tabla III.4	Resumen de análisis numérico con MEF para (T)	49
Tabla III.5	Resumen de análisis numérico con MEF debido a (M)	53
Tabla III.6	Resumen de desplazamientos radiales debido a (p_i+T)	56
Tabla III.7	Resumen de esfuerzos tangenciales debido a (p_i+T)	57
Tabla III.8	Resumen de análisis numérico con MEF debido a (p_e+T)	60
Tabla III.9	Resumen de análisis numérico con MEF debido a (p_i+M)	63
Tabla III.10	Geometría del ducto y medidas de presión interna de falla (p_{if})	71
Tabla III.11	Geometría del ducto y medidas de presión externa de falla (p_{ef})	73
Tabla III.12	Geometría del ducto y medidas fuerzas de tensión de falla (T_f)	76
Tabla III.13	Geometría del ducto y medidas de momento flexionante de falla (M_f)	78
Tabla III.14	Geometría del ducto y medidas de presión interna y tensión (p_i+T_f)	79
Tabla III.15	Geometría del ducto y medidas de (p_i+M_f)	81
Tabla III.16	Geometría del ducto y medidas (p_e+T_f)	83
Tabla III.17	Geometría del ducto y medidas de tensión mas momento (T_f+M_f)	85
Tabla III.18	Comparación de desplazamientos radiales w debido a (p_i)	94
Tabla III.19	Comparación de resultados analíticos y numéricos no lineales	97
Tabla III.20	Valores de la curva esfuerzo-deformación unitaria del acero API-X52	98
Tabla III.21	Resultados numéricos para diferentes estados de carga	101
ANEXO A		
DIAGRAMA DE MOMENTO-CURVATURA		
Tabla A1.1	Valores de momento-curvatura	139

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	
Figura I.1 Diagrama de un tubo cilíndrico de pared delgada sometido a presión	3
CAPÍTULO II	
DESARROLLO ANALÍTICO DEL PROBLEMA EN ESTUDIO	
Figura II.1 Planteamiento del problema	10
Figura II.2 Comportamiento lineal del material	11
Figura II.3 Elemento diferencial de un cascarón cilíndrico	12
Figura II.4 Combinación de esfuerzos en un cilindro	16
Figura II.5 Sección transversal del ducto	17
Figura II.6 Tipo de respuesta no lineal	21
Figura II.7 Relación entre esfuerzos y deformaciones	22
Figura II.8 Superficie de plastificación de Von mises	23
Figura II.9 Modelos empíricos de esfuerzos-deformación	25
Figura II.10 Curvas de comportamiento de material	29
Figura II.11 Deformaciones unitarias, esfuerzos y zonas plastificadas de una sección tubular	30
Figura II.12 Flexión pura de una sección tubular de pared delgada	32
CAPÍTULO III	
ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CASO EN ESTUDIO	
Figura III.1 Geometría del ducto en estudio	37
Figura III.2 Elemento Shell 63	38
Figura III.3 Modelado del ducto, a) Malla de elementos finitos, b) Condiciones de frontera	39
Figura III.4 Ducto sometido a presión interna (p_i)	40
Figura III.5 Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial σ_θ	41
Figura III.6 Ducto sometido a presión externa, (p_e)	44
Figura III.7 Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial σ_θ	45
Figura III.8 Modelo con carga de tensión y condiciones de frontera	48
Figura III.9 Resultados numéricos, a) Desplazamiento longitudinal Δ_L , b) Esfuerzo longitudinal σ_L	48
Figura III.10 Modelo sometido a cargas de flexión y condiciones de frontera	51
Figura III.11 Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo longitudinal σ_L	52

	Pág.	
Figura III.12	Modelo sometido presión interna y tensión (p_i+T)	55
Figura III.13	Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial (σ_θ)	55
Figura III.14	Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial (σ_θ)	59
Figura III.15	Modelo sometido presión interna y flexión (p_i+M)	62
Figura III.16	Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial (σ_θ)	62
Figura III.17	Curva esfuerzo-deformación, a) Modelo de Ramberg-Osgood, b) Modelo bilineal	66
Figura III.18	Elemento Shell 181	67
Figura III.19	Método de Newton-Raphson	68
Figura III.20	Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial (σ_θ) debido a (p_i)	70
Figura III.21	Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial debido a (p_e)	72
Figura III.22	Resultados numéricos, a) Desplazamiento longitudinal Δ_L , b) Esfuerzo longitudinal σ_L debido a (T)	74
Figura III.23	Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo longitudinal σ_L debido a (M)	76
Figura III.24	Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo longitudinal σ_L de a (p_i+M)	80

APÉNDICES A

CONCEPTOS GENERALES

Figura A.1	Diagrama esfuerzo-deformación para un acero bajo al carbono	112
Figura A.2	Diagramas idealizados de esfuerzo deformación	113
Figura A.3	Criterio de Tresca y de Von Mises	115
Figura A.4	Componentes cartesianas de esfuerzo actuando en las caras de un pequeño elemento cúbico	117

APÉNDICES B

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Figura B.1	Elementos finitos unidimensionales	125
Figura B.2	Elementos finitos tridimensionales	126
Figura B.3	Elementos triangulares y sus formas isoparamétricas con Interpolación cuadrática y cúbica	126
Figura B.4	Elementos cuadriláteros y sus formas isoparamétricas con Interpolación cúbica y cuarta	126

	Pág.
APÉNDICES C	
ECUACIONES DE CASCARÓN CILÍNDRICO	
Figura C.1	128
Representación esquemática de la tubería doblemente articulada	
Figura C.2	128
Tubería doblemente articulada con el origen a la mitad	
Figura C.3	131
Representación esquemática de la tubería doblemente empotrada	
ANEXO A	
DIAGRAMA DE MOMENTO-CURVATURA	
Figura A1.1	133
Curva esfuerzo-deformación del material	
Figura A1.2	134
Determinación teórica momento-curvatura	
Figura A1.3	139
Diagrama de momento curvatura	

LISTA DE GRÁFICAS

		Pág.
CAPÍTULO II		
DESARROLLO ANALÍTICO DEL PROBLEMA EN ESTUDIO		
Gráfica II.1	Desplazamiento radial debido a p_i	20
Gráfica II.2	Esfuerzos tangenciales σ_θ debido a p_i	20
Gráfica II.3	Modelo mecánico de Ramberg-Osgood	27
Gráfica II.4	Modelo mecánico bilineal de plasticidad con endurecimiento por deformación	28
Gráfica II.5	Relaciones de momento curvatura elasto-plástica perfecta de una sección circular	33
Gráfica II.6	Diagrama de momento curvatura incluyendo plasticidad con endurecimiento por deformación de una sección circular	34
CAPÍTULO III		
ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CASO EN ESTUDIO		
Gráfica III.1	Desplazamiento radial w debido a (p_i)	41
Gráfica III.2	Esfuerzo tangencial σ_θ debido a (p_i)	42
Gráfica III.3	Variación de desplazamientos radiales w debido a (p_i)	43
Gráfica III.4	Variación de esfuerzos tangenciales σ_θ debido a (p_i)	43
Gráfica III.5	Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_i)	43
Gráfica III.6	Esfuerzos tangenciales σ_θ vs t/D debido a (p_i)	44
Gráfica III.7	Desplazamiento radial w debido a (p_e)	45
Gráfica III.8	Esfuerzo tangencial σ_θ debido a (p_e)	45
Gráfica III.9	Variación de desplazamientos radiales w debido a (p_e)	46
Gráfica III.10	Variación de esfuerzos tangenciales σ_θ debido a (p_e)	46
Gráfica III.11	Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_e)	47
Gráfica III.12	Esfuerzos tangenciales σ_θ vs t/D debido a (p_e)	47
Gráfica III.13	Variación de desplazamientos longitudinales Δ_L , debido a (T)	49
Gráfica III.14	Variación de esfuerzos longitudinales σ_L , debido a (T)	49
Gráfica III.15	Desplazamientos longitudinales Δ_L vs t/D , debido a (T)	50
Gráfica III.16	Esfuerzos longitudinales σ_L vs t/D debido a (T)	50
Gráfica III.17	Desplazamiento radial w debido a (M)	51
Gráfica III.18	Variación de desplazamientos radiales w , debido a (M)	53
Gráfica III.19	Variación de esfuerzos longitudinales σ_L , debido a (M)	53
Gráfica III.20	Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (M)	54
Gráfica III.21	Esfuerzos longitudinales σ_L vs t/D debido a (M)	54
Gráfica III.22	Desplazamiento radial w debido a (p_i+T)	56
Gráfica III.23	Esfuerzo tangencial σ_θ debido a (p_i+T)	56
Gráfica III.24	Variación de los desplazamientos radiales w , debido a (p_i+T)	57

	Pág.	
Gráfica III.25	Variación de esfuerzos tangenciales σ_{θ} , debido a (p_i+T)	57
Gráfica III.26	Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_i+T)	58
Gráfica III.27	Esfuerzos tangenciales σ_{θ} vs t/D debido a (p_i+T)	58
Gráfica III.28	Desplazamiento radial w debido a (p_e+T)	59
Gráfica III.29	Esfuerzo tangencial σ_{θ} debido a (p_e+T)	60
Gráfica III.30	Variación de los desplazamientos radiales w debido a (p_e+T)	60
Gráfica III.31	Variación de esfuerzos tangenciales σ_{θ} debido a (p_e+T)	61
Gráfica III.32	Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_e+T)	61
Gráfica III.33	Esfuerzos tangenciales σ_{θ} vs t/D debido a (p_e+T)	61
Gráfica III.34	Variación de desplazamientos radiales w debido a (p_i+M)	63
Gráfica III.35	Variación de esfuerzos tangenciales σ_{θ} , debido a (p_i+M)	63
Gráfica III.36	Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_i+M)	64
Gráfica III.37	Esfuerzos tangenciales σ_{θ} vs t/D debido a (p_i+M)	64
Gráfica III.38	Respuesta estructural del ducto sometido a (p_i)	70
Gráfica III.39	Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_i)	71
Gráfica III.40	Respuesta estructural del ducto sometido a (p_e)	72
Gráfica III.41	Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_i)	73
Gráfica III.42	Respuesta estructural del ducto sometido a (T)	75
Gráfica III.43	Comportamiento mecánico del ducto sometido a (T)	75
Gráfica III.44	Respuesta estructural del ducto sometido a (M)	77
Gráfica III.45	Comportamiento mecánico del ducto sometido a (M)	77
Gráfica III.46	Respuesta estructural del ducto sometido a (p_i+T)	78
Gráfica III.47	Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_i+T)	79
Gráfica III.48	Respuesta estructural del ducto sometido a (p_i+M)	80
Gráfica III.49	Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_i+M)	81
Gráfica III.50	Respuesta estructural del ducto sometido a (p_e+T)	82
Gráfica III.51	Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_e+T)	83
Gráfica III.52	Respuesta estructural del ducto sometido a $(T+M)$	84
Gráfica III.53	Comportamiento mecánico del ducto sometido a $(T+M)$	84
Gráfica III.54	Curvas de respuesta estructural para tres condiciones de carga	85
Gráfica III.55	Curvas de respuesta estructural para cuatro condiciones de carga	86
Gráfica III.56	Estados de carga combinados. Fuerza de tensión vs presión interna	88
Gráfica III.57	Estados de carga combinados. Momento flexionante vs presión interna	89
Gráfica III.58	Estados de carga combinados. Fuerza de tensión vs Momento flexionante	90
Gráfica III.59	Estados de carga combinados. Fuerza de tensión vs presión externa	91
Gráfica III.60	Comparación de desplazamientos radiales w debido a (p_i)	93
Gráfica III.61	Comparación de esfuerzos tangenciales σ_{θ} debido a (p_i)	93

		Pág.
Gráfica III.62	Comparación de desplazamientos radiales w debido a (p_i)	94
Gráfica III.63	Comparación de esfuerzos tangenciales (σ_θ) de un ducto sometido a (p_i)	95
Gráfica III.64	Curva esfuerzo-deformación numérica debido a (M)	95
Gráfica III.65	Curva esfuerzo-deformación analítica debido a (M)	96
Gráfica III.66	Comparación de resultados del ducto sometidos (M)	96
Gráfica III.67	Curva de esfuerzo-deformación para el acero API-X52	98
Gráfica III.68	Curva esfuerzo-deformación numérica vs la experimental	99
Gráfica III.69	Curva esfuerzo-deformación para el ducto sometido a (p_i)	100
Gráfica III.70	Curva esfuerzo-deformación para el ducto sometido a (p_e)	101

SIMBOLOGÍA

p_i	Presión interna
p_e	Presión externa
T	Fuerza axial
M	Momento flexionante
σ_θ	Esfuerzo tangencial
σ_L	Esfuerzo longitudinal
r_i	Radio interno
r_e	Radio externo
R	Radio medio
t	Espesor
A	Área
$\sigma_y = F_y$	Esfuerzo de fluencia
α, m	Constantes de endurecimiento por deformación
E	Módulo de elasticidad
ν	Relación de Poisson
ε^e	Deformación elástica
ε^p	Deformación plástica
ε	Deformación
$\bar{\sigma}$	Esfuerzo equivalente
L	Longitud del ducto
w	Desplazamiento radial
D	Rigidez a flexión de cascarón
T_{ymax}	Fuerza máxima de fluencia
Δ_L	Desplazamiento longitudinal
σ_u	Esfuerzo último
μ	Factor de ductilidad
N	Número de nodos
x, y	Sistema de coordenada cartesiano
I	Momento de inercia
T_f	Fuerza de tensión de falla
p_{if}	Presión interna de falla
p_{ef}	Presión externa de falla
M_f	Momento flexionante de falla
M_y	Momento de fluencia
M_p	Momento plástico
Z	Módulo de sección plástica
k	Factor de forma
W^p	Trabajo plástico

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

- I.1 Generalidades
- I.2 Antecedentes
- I.3 Objetivo
- I.4 Metas
- I.5 Justificación
- I.6 Contenido de la tesis

RESUMEN

En el presente capítulo se hace mención de conceptos fundamentales para el estudio del comportamiento mecánico de ductos bajo la teoría de pared delgada. Así mismo se hace una descripción del estado del arte, en el cual se incluyen algunas expresiones desarrolladas por diversos investigadores, para dar paso a los objetivos, metas y justificación del trabajo.

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

I.1 GENERALIDADES

Actualmente, la mayoría de las industrias modernas requieren de grandes redes de tuberías, en particular en áreas como el sector petrolero, refinerías, industrias químicas y farmacéuticas así como, en centrales eléctricas. En estas y otras aplicaciones industriales, los ductos son usados muy a menudo para transportar sustancias que, por virtud de sus presiones y cargas adicionales a las que se someten, éstos llegan a presentar fallas de magnitudes importantes, generando serios efectos negativos en la salud, y en el medio ambiente.

Focalizándose en el sector petrolero, éstos presentan gran actividad y crecimiento económico, lo cual demanda crear una mayor infraestructura para satisfacer sus necesidades, de explotación, producción, almacenamiento y distribución del crudo, así como de sus derivados. Por consiguiente, en años recientes se ha estado requiriendo la construcción de nuevas líneas de ductos y de la reparación o rehabilitación de otras ya existentes para almacenar y distribuir sus productos.

En la actualidad, gran parte de las investigaciones se enfocan al análisis no lineal de las estructuras para estudiar con mayor precisión la respuesta real de las mismas, cuyos cálculos son más accesibles debido al desarrollo numérico y a la disponibilidad de las potentes computadoras; sin embargo, el análisis no lineal no ha sido de uso común en la prácticas de diseño de ingeniería, debido a la complejidad que éste representa. Por lo que, en este trabajo se realizan diversos análisis no lineales para ductos de acero para poder estudiar y conocer con mayor detalle el comportamiento mecánico de estas estructuras bajo ciertas combinaciones de carga. En este estudio se adaptaron modelos mecánicos elastoplásticos y plásticos con endurecimiento por deformación, para representar el comportamiento material de las tuberías, ya que están concebidos para metales y se asemejan en mayor medida al comportamiento esperado.

Para el caso particular de este trabajo se analiza un tubo cilíndrico sometido a presiones, empleando la teoría clásica de recipientes a presión de pared delgada, tendiendo a comportándose como un cascarón, es decir, las paredes resisten a flexión.

De acuerdo a la teoría empleada de esfuerzos planos, solo actúan dos esfuerzos a lo largo del ducto, que son, los esfuerzos tangenciales designados como σ_{θ} y los esfuerzos longitudinales σ_L , como se muestra en figura I.1. Los esfuerzos multiplicados por sus respectivas áreas mantienen al cilindro en equilibrio con la presión interna.

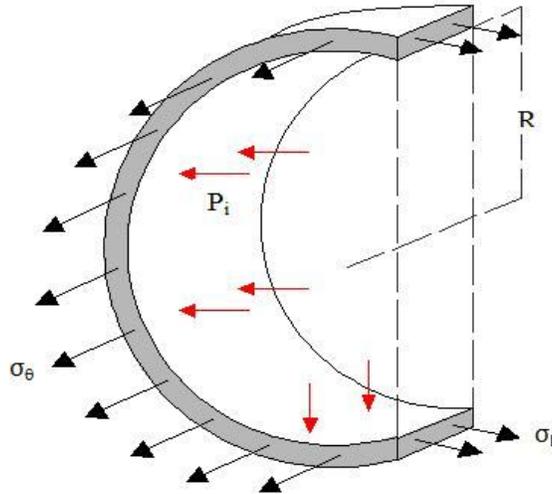


Figura I.1. Diagrama de un tubo cilíndrico de pared delgada sometido a presión

Cabe destacar que en este trabajo se analizan diferentes espesores, primero tomando en cuenta el comportamiento elástico lineal, y posteriormente el comportamiento no lineal del material para diferentes acciones, con el propósito de observar la respuesta estructural bajo presión externa, presión interna, tensión axial y flexión. Los modelos numéricos representan las geometrías reales de las tuberías típicas usadas en la industria petrolera así como también las funciones constitutivas del material. En este estudio, los modelos numéricos son realizados mediante el uso del programa de análisis que emplea el método de elementos finitos (Ansys Versión 11).

I.2 ANTECEDENTES

I.2.1 ESTUDIOS DE LA PLASTICIDAD

El estudio científico de la plasticidad de metales tuvo comienzo en 1864. En ese año Tresca publicó sus experimentos de punzonamiento y presión interna. Previamente los criterios de fluencia para sólidos plásticos, principalmente suelos, habían sido propuestos por Coulomb en 1773 y aplicados por Poncelet en 1840 y Rankine en 1853 a problemas de presiones producidos por el suelo. El criterio de Tresca fue aplicado por Saint-Venant para determinar los esfuerzos en un cilindro parcialmente plástico sujeto a torsión y flexión en 1870, y a un tubo totalmente plástico expandido por presión interna en 1872, (el primer paso hacia la solución de una parte de un tubo plástico fue tomado por Turner en 1990). En 1871 Lévy,

adoptando la concepción de Saint Venant de un material ideal plástico, propuso la relación tridimensional entre esfuerzo y el valor de deformación plástica. Los avances fueron significativos hasta el final del siglo cuando Guest investigó la fluencia de un tubo hueco bajo carga combinada de tensión axial y presión interna, cuyos resultados concuerdan ampliamente con el criterio de esfuerzo cortante máximo (Hill, 1956).

El avance más satisfactorio del estudio de plasticidad, fue el criterio de Von Mises en 1913, desarrollado con base consideraciones puramente matemáticas. Reinterpretado posteriormente por Hencky, éste considera que la fluencia ocurre cuando la energía elástica de deformación cortante alcanza un valor crítico. En 1926, Lode midió la deformación en los tubos con varios metales bajo carga combinada de tensión y presión interna. Posteriormente en el año de 1932, se construyó una teoría en la que se reproducen las propiedades elásticas y plásticas, principalmente para metales isotrópicos. Mientras tanto una teoría propuesta por Hencky en 1924 fue favorecida por su conveniencia analítica en problemas donde la deformación era pequeña, ésta teoría fue ampliamente usada por la escuela de Rusia desde 1935 en adelante (Hill, 1956).

Es útil representar la curva de esfuerzo-deformación de un material sometido a tensión simple, por una ecuación obtenida empíricamente por ajustes de datos experimentales. Entre estos modelos se encuentran los de Ludwik, Swift y Voce, los cuales incluyen el efecto de endurecimiento por deformación del material. Las expresiones de Ludwik, Swift y Voce se muestran en las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3), respectivamente (Chakrabarty, 1987).

$$\sigma = C\varepsilon^n \quad (1.1)$$

$$\sigma = C(m + \varepsilon)^n \quad (1.2)$$

$$\sigma = C(1 - me^{-n\varepsilon}) \quad (1.3)$$

Otro modelo muy utilizado es el de Ramberg-Osgood, el cual utiliza una ecuación de tres parámetros para expresar la relación entre el esfuerzo nominal y la deformación a tensión para valores mayores al esfuerzo de fluencia del material σ_y .

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^{m-1} \right\} \quad (1.4)$$

Los tres parámetros considerados por Ramberg-Osgood son el módulo de elasticidad E , el esfuerzo de fluencia σ_y y el parámetro n que define la curva (Kyriakides and Corona, 2007).

I.2.2 MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Para realizar la parte numérica de este problema, se ha propuesto emplear el método de los elementos finitos, en donde se considera las curvas y/o leyes de comportamiento de los materiales en el intervalo elástico y plástico.

El concepto básico del Método de los Elementos Finitos consiste en dividir el continuo en un conjunto de elementos discretos, es decir, se discretiza el continuo. Cada elemento está definido geométricamente por un grupo de puntos representativos llamados nodos, mientras que la integración se verifica al interior en otros puntos conocidos como puntos de Gauss. Posteriormente se resuelve en cada uno de los elementos las ecuaciones del sistema para después ensamblar la solución total (*Huebner, 1975*).

Ventajas del Método de los Elementos Finitos (MEF)

- Una estructura modelada en MEF se asemeja mucho al cuerpo real que se analiza.
- Se pueden generar modelos de un dominio irregular.
- Modelado de los cuerpos compuestos de diferentes materiales.
- El método presenta convergencia.
- Maneja comportamientos no lineales con grandes deformaciones y materiales no lineales.

Desventajas del MEF

- Se requiere una inversión considerable en tiempo y dinero, lo que no se justifica en soluciones de problemas sencillos.
- Número limitado de datos de la curva esfuerzo-deformación que se pueden introducir al programa.
- Presenta problemas para analizar materiales incompresibles.

I.2.3 DUCTOS COMO TRASPORTE DE HIDROCARBUROS

Los indicios del uso de tuberías datan del año 4000 A.C y desde entonces su crecimiento es constante en todas partes del mundo, dándoles diferentes usos.

Se tiene que para la conducción de líquido o sólidos se ha hecho uso de tuberías desde hace más de 1,000 años. Los Romanos usaron tubos de plomo para sus sistemas de acueducto para abastecer de agua a su población. Los Chinos usaron tubos de bambú para transportar gas natural en su capital Beijing. Tubos de arcilla fueron empleados para la construcción de drenaje en Egipto y otras ciudades. En 1613 en Alemania se creó el primer tubo de hierro forjado que utilizaron como cañón, y en 1685 en París, Francia, se construye exitosamente el primer sistema de tubería subterránea.

Una importante mejora en la tecnología de tubería ocurrió en el siglo XVIII cuando fueron manufacturados tubos de hierro fundido para uso de líneas de agua, alcantarillado y para tuberías de gas. Un evento importante fue la introducción de tubo de acero en el siglo XIX. En 1879, siguiendo los descubrimientos de crudo en Pennsylvania, la primera línea de tubería fue construida en este estado. Nueve años después, fue construida una línea de tubería para transportar gas natural de Kane Pennsylvania a Buffalo, Nueva York. Con el desarrollo de tubos de acero de alta resistencia fue posible transportar fluidos, como gas natural y petróleo en largas distancias. En 1920 con el desarrollo del arco eléctrico soldado en uniones de los tubos, se hizo posible la construcción de tuberías sujetas a altas presiones y diámetros largos. Actualmente todas las tuberías sometidas a altas presiones son elaboradas con tubos de acero sin costura y con uniones soldadas (*Liu, 2003*).

Hoy en día las tuberías se encuentran en todas partes del mundo. En los países de Europa y en América, las ciudades más grandes tienen miles de kilómetros de tubería.

En la República Mexicana se transportan a través de ductos, tres millones 370 mil barriles de petróleo crudo y 500 millones de pies cúbicos de gas diariamente [www.elmundodelpetroleo.com].

I.2.4 CONCEPTOS BÁSICOS

En el análisis de estructuras cilíndricas de pared delgada se requieren conocimientos previos de la Mecánica del Medio Continuo en materiales que se deforman de manera elástica y plástica. Por dicha razón, se incluyen en el apéndice A de este trabajo algunos conceptos generales de la teoría de la elasticidad y de plasticidad. En lo que respecta a la teoría general del Método de los Elementos Finitos, puede consultarse el apéndice B de este mismo documento.

I.3 OBJETIVO

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento y respuesta estructural estática, lineal y no lineal de ductos de pared delgada, sometidos a diferentes estados de carga tales como: presión interna, presión externa, fuerza axial y momento flexionante; así como combinaciones de estas cargas, por medio de simulaciones numéricas basadas en el método de los elementos finitos.

I.4 METAS

Para la elaboración de esta tesis se consideran las siguientes metas:

- Efectuar una revisión bibliográfica de ductos y del Método de Elementos Finitos.
- Modelar las tuberías con diferentes espesores, en el programa seleccionado Ansys V.11.
- Estudiar la respuesta de ductos sometidos a sistemas de cargas combinados considerando el comportamiento lineal y no lineal del material.
- Evaluar la ductilidad de los ductos para diferentes condiciones de carga.
- Comparar los resultados numéricos de los análisis lineales y de plasticidad con planteamientos analíticos.
- Comparar los resultados numéricos de plasticidad con datos experimentales.

I.5 JUSTIFICACIÓN

Se requiere que las estructuras civiles sean estables y seguras para garantizar la integridad de los elementos durante el tiempo que estarán en servicio; tal es el caso de los ductos que por su importancia en el transporte de hidrocarburos y derivados del petróleo, se requiere el buen funcionamiento de los mismos en situaciones ordinarias y extraordinarias.

Durante el proceso de instalación y operación se presentan acciones de presión interna y externa, fuerzas de tensión y momento flexionante. Por lo tanto, es relevante el estudio de los ductos, ya que son susceptibles de presentar daños de magnitudes importantes y considerando que a nivel nacional no se cuenta con un reglamento específico para este tipo de estructuras, existe la necesidad de estudiar el comportamiento mecánico en estas estructuras de manera más detallada, con el propósito de buscar nuevas alternativas de análisis y diseño de tuberías, empleando geometrías y características mecánicas usadas en la industria del petróleo.

I.6 CONTENIDO DE LA TESIS

La tesis se desarrolla en tres capítulos. En este primer capítulo, se abordó un breve estado del arte relacionado tanto con los modelos de plasticidad, como del método de los elementos finitos, entre otros conceptos fundamentales, además de presentarse los objetivos, las metas y justificación de este trabajo.

En el capítulo II se estudian la teoría de cascarones, los modelos de materiales y soluciones analíticas lineales y de plasticidad. Además, se describen las características geométricas y mecánicas de los ductos.

En el capítulo III se indican las hipótesis empleadas en esta tesis. Se realizan análisis numéricos de los ductos para ciertas combinaciones de carga, empleando análisis lineal y no lineal del material. Los resultados de los modelos numéricos son comparados con resultados analíticos.

Finalmente, se presentan las conclusiones más relevantes que se obtienen de este trabajo de tesis.

Capítulo II

DESARROLLO ANALÍTICO DEL PROBLEMA

- II.1 Planteamiento del problema
- II.2 Comportamiento lineal del material
- II.3 Ecuaciones fundamentales del elemento diferencial de cascarón
- II.4 Análisis lineal de las tuberías
- II.5 Comportamiento no lineal de material
- II.6 Análisis de la gráfica momento-curvatura

RESUMEN

En este capítulo se presenta el desarrollo analítico que permite predecir el comportamiento de los ductos sometido a presión interna, considerando un análisis lineal y de plasticidad, utilizando la ley de Hooke y la curva esfuerzo-deformación del material empleando la relación de Ramberg-Osgood.

Capítulo II

DESARROLLO ANALÍTICO DEL PROBLEMA

II.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Actualmente los estándares mundiales permiten tomar en consideración deformaciones plásticas en el estudio de las tuberías para alcanzar un grado de utilización más alto. Las deformaciones plásticas máximas pueden ser permitidas para los tubos de acero sometidas a presión interna y cargas adicionales.

Para desarrollar este estudio se emplea la teoría de pared delgada; cuyo espesor es constante y está sometido a la acción de presiones de manera uniforme y distribuida, la deformación que se produce es axisimétrica y no varía a lo largo de su longitud. Por otra parte, una tubería se considera de pared delgada si se tiene la siguiente relación:

$$t/R < 0.10 \quad (2.1)$$

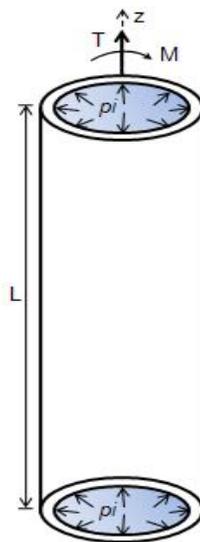


Figura II.1. Planteamiento del problema.

En la figura II.1 se muestra la sección del ducto, así como las cargas a la que éste es sometido, en la que las paredes actúan como un cascarón.

II.2 COMPORTAMIENTO LINEAL DEL MATERIAL

El análisis lineal asume que la relación entre cargas y desplazamientos es lineal, es decir, se cumple el principio de superposición: si se duplica la magnitud de esfuerzo se obtiene el doble de respuesta del modelo (desplazamientos, deformaciones y esfuerzos resultantes). Todas las estructuras reales se comportan de forma no lineal a partir de un cierto nivel de carga. En muchos casos y hasta cierto límite un análisis lineal puede ser adecuado, pero en otros casos no convencionales la solución lineal producirá resultados alejados de la respuesta, para lo cual se deberá realizar un análisis no lineal.

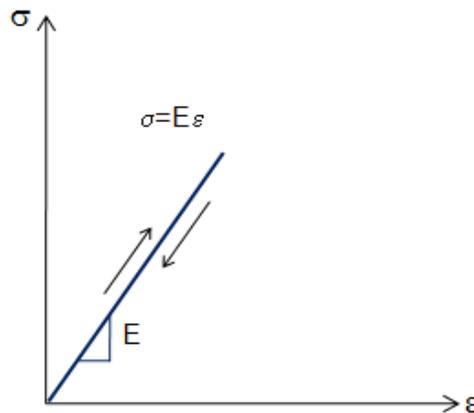


Figura II.2. Comportamiento lineal del material

Se dice que un material es elástico si la trayectoria de descarga coincide con la trayectoria de carga, a este proceso se le conoce como reversible, (ver figura II.2). Cuando la carga es aplicada a un cuerpo, éste sufre una deformación de tal manera que al cesar la fuerza actuante se recupera su forma original.

II.3 ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL ELEMENTO DIFERENCIAL DE CASCARÓN

Para el estudio de tubos de pared delgada, el problema puede reducirse a la resolución de un problema de cascarones cilíndricos, para lo cual se considera un elemento diferencial como el que se indica en la figura II.3 (*Timoshenko, 1959*).

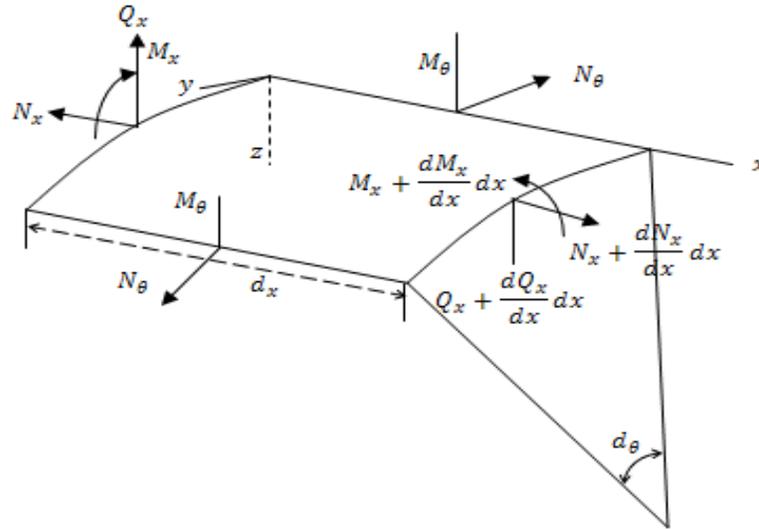


Figura II.3. Elemento diferencial de un cascarón cilíndrico

II.3.1 ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Se considera el equilibrio del elemento diferencial del elemento mostrado en la figura II.3, con un espesor unitario en la dirección z .

Debido a la simetría del elemento, solo se consideran tres de las seis ecuaciones de equilibrio, las cuales se obtienen realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a x y z , y tomando momentos alrededor del eje que es tangencial al elemento en la dirección circunferencial. Las tres ecuaciones son:

$$\frac{dN_x}{dx} R dx d\theta = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{dQ_x}{dx} R dx d\theta + N R dx d\theta + Z R dx d\theta = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{dM_x}{dx} R dx d\theta - Q_x R dx d\theta = 0 \quad (2.4)$$

La ecuación (2.2) indica que los esfuerzos son constantes, lo cual se considera igual a cero. Dividiendo las ecuaciones (2.3) y (2.4) por $R dx d\theta$, quedan solo dos ecuaciones,

$$\frac{dQ_x}{dx} - \frac{N_\theta}{R} = -Z \quad (2.5)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad (2.6)$$

II.3.2 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Estas ecuaciones expresan la parte cinemática, la cual relaciona los desplazamientos. Por tanto, se expresa la deformación tangencial ε_θ y los cambios de curvatura k_x , k_θ en términos del desplazamiento radial w .

Primero se considera ε_θ , donde la deformación circunferencial está definida como:

$$\varepsilon_\theta = w/R \quad (2.7)$$

Considerando k_x como el radio de curvatura;

$$k_x = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.8)$$

y el cambio de curvatura en la dirección circunferencial es,

$$k_\theta = w/R^2 \quad (2.9)$$

II.3.3 ECUACIONES DE COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL

Considerando que $N_x = 0$ y $k_\theta = 0$, se tiene:

$$\varepsilon_\theta = N_\theta/Et \quad (2.10)$$

$$k_x = M_x/D \quad (2.11)$$

Donde E es el modulo de Young, t es el espesor del cascarón y D es la rigidez a flexión. Por otra parte, la ley de Hooke también considera otras dos relaciones las cuales son involucradas indirectamente en el análisis:

$$\varepsilon_\theta = -\nu\varepsilon_x \quad (2.12)$$

$$M_\theta = \nu M_x \quad (2.13)$$

Una vez expuestas las relaciones constitutivas, posteriormente éstas se relacionan con el propósito de obtener una ecuación general que conduzca a obtener los desplazamientos w y así poder obtener los elementos mecánicos en función de la longitud.

De la ecuación (2.8) y (2.11), tenemos:

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.14)$$

De forma similar, al combinar la ecuación de compatibilidad con la ecuación lineal se obtiene la siguiente expresión:

$$N_\theta = (Et/R)w \quad (2.15)$$

La cual al sustituirse en la ecuación de equilibrio permite obtener la ecuación que gobierna el comportamiento de la tubería.

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{Et}{R^2} \right) w = Z \quad (2.16)$$

Todos los problemas de deformación axisimétrica se reducen a la solución de la ecuación anterior. La aplicación más sencilla de esta ecuación se obtiene cuando el espesor del cascarón es constante (*Timoshenko, 1959*). En este caso la ecuación (2.16) toma la siguiente forma:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D} \quad (2.17)$$

donde

$$\beta^4 = \left[\frac{Et}{4DR^2} \right] = \left[\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 t^2} \right] \quad (2.18)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.19)$$

II.4 ANÁLISIS LINEAL DE LA TUBERÍA

Para el análisis lineal de la tubería se considera la teoría general de cascarones cuando son cargados por fuerzas que son axisimétricas respecto a su eje. Se establece la ecuación general a partir de las ecuaciones constitutivas.

Considerando a la tubería en sus condiciones de frontera: como doblemente articulada, se puede deducir la ecuación que gobierna el comportamiento de una tubería sujeta a presión interna y cuya carga es simétrica alrededor de su eje longitudinal.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D} \quad (2.20)$$

La solución general de la ecuación (2.20) es

$$w = e^{\beta x}[C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x] + e^{-\beta x}[C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x] + f(x) \quad (2.21)$$

Donde $f(x)$ es una solución particular de la ecuación (2.20).

Para este caso de carga uniforme ($Z = -p$). Cuya solución particular es

$$\frac{p}{4\beta^4 D} = -\frac{pR^2}{Eh} \quad (2.22)$$

La solución general puede entonces ser expresada en la forma siguiente por la introducción de funciones hiperbólicas en lugar de funciones exponenciales:

$$w = -\frac{pa}{Eh} + C_1 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{ch} \beta x + C_3 \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \quad (2.23)$$

Con base en el principio de simetría, y considerando el origen al centro de la tubería ($L/2$), se puede reducir la ecuación (2.23), ya que debe ser una función par de x , por lo tanto;

$$C_2 = C_3 = 0 \quad (2.24)$$

Por lo que, la ecuación (2.23) se reduce a;

$$w = -\frac{pa}{Eh} + C_1 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \quad (2.25)$$

Las constantes C_1 y C_4 se eligen de modo que satisfaga las condiciones de frontera en los extremos. Derivando la ecuación (2.25), se encuentran las expresiones para determinar las pendientes, momentos y fuerzas cortantes a lo largo de la longitud de la tubería. Ver apéndice C.

Entonces

$$C_1 = \frac{pa^2}{Eh} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \right)$$

$$C_4 = \frac{pa^2}{Eh} \left(\frac{2 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \right) \quad (2.26)$$

Estas constantes se sustituyen en la ecuación (2.25), que serán empleadas para evaluar el comportamiento mecánico en esta configuración de la tubería.

Asimismo, la deflexión en cualquier punto de la tubería puede determinarse con la siguiente expresión;

$$w = \frac{pa^2}{64D\alpha^4} \left(1 - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x - \frac{2 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \right) \quad (2.27)$$

Derivando dos veces la ecuación (2.27) y multiplicando por D , se obtiene la expresión que determina el momento,

$$M_x = -\frac{pl^2}{4\alpha^4} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x - \frac{\cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x \right) \quad (2.28)$$

II.4.1 DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS ACTUANTES

Los recipientes a presión tal como lo es la estructura cilíndrica, en particular los ductos sometidos a presión interna uniforme producen un estado de esfuerzo como el que se muestra en la figura II.4.

Estos esfuerzos son los siguientes:

- Esfuerzo tangencial (también conocido como circunferencial), σ_θ
- Esfuerzo longitudinal, σ_L

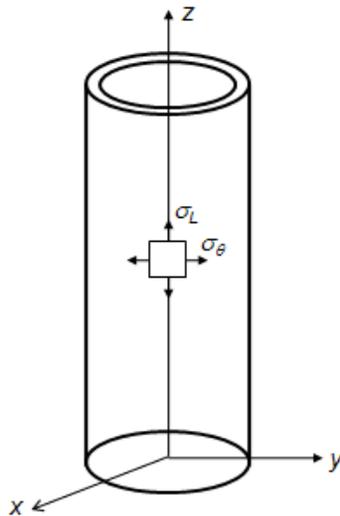


Figura II.4. Combinación de esfuerzos en un cilindro

Debido a las condiciones de simetría que se presenta en el ducto, no se considera la existencia de cualquier esfuerzo cortante en los planos de las secciones, ya que la presencia de esfuerzos cortantes provocaría una distorsión incompatible del ducto. Se tiene un esfuerzo radial de compresión muy pequeño en comparación con el esfuerzo tangencial y el esfuerzo longitudinal, por lo que considerando la teoría de esfuerzos planos se desprecian los esfuerzos radiales.

Para encontrar la magnitud de tales esfuerzos es necesario considerar el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura II.5.

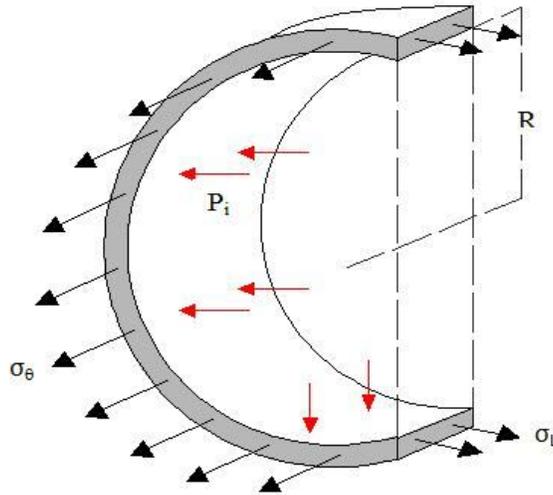


Figura II.5. Sección transversal del ducto

Podemos ver que la fuerza que actúa sobre el elemento es igual a la presión interna por el área de contacto $2r_iL$.

$$p_{actante} = 2p_i r_i L \quad (2.29)$$

Esta fuerza es equilibrada por las fuerzas p desarrolladas por los esfuerzos tangenciales σ_θ multiplicados por sus respectivas áreas.

Lo anterior es fácil de relacionar con $\sigma = p/A$ de lo que se obtiene que $p = \sigma A$, de donde $A = L(r_e - r_i)$ y $\sigma = \sigma_\theta$, por lo tanto, se obtiene la expresión,

$$p = \sigma_\theta L(r_e - r_i) \quad (2.30)$$

Por otro lado al realizar la suma de fuerzas de la figura II.5 tenemos:

$$\begin{aligned} \sum F &= 0 \\ p_i &= p + p \\ p_i &= 2p \end{aligned} \quad (2.31)$$

sustituyendo la ecuación (2.29) en el sistema (2.31), se tiene;

$$2p_i r_i L = 2\sigma_\theta L(r_e - r_i) \quad (2.32)$$

Es importante notar que la diferencia de los radios es igual al espesor t del ducto, por lo que la ecuación (2.32) se puede representar como:

$$2p_i r_i L = 2\sigma_\theta L t \quad (2.33)$$

Resolviendo la ecuación (2.33), encontramos finalmente la expresión que nos determina la magnitud de la componente tangencial de los esfuerzos:

$$\sigma_\theta = \frac{p_i r_i}{t} \quad (2.34)$$

Para evaluar el esfuerzo longitudinal se considera un recipiente cilíndrico a presión como el mostrado en la figura II.5.

La fuerza desarrollada por la presión es:

$$A * p = \pi R^2 p_i \quad (2.35)$$

si $\sigma = p/A$ y $\sigma = \sigma_L$, entonces el área correspondiente es

$$A = (\pi r_e^2 - \pi r_i^2) \quad (2.36)$$

con lo que se obtiene;

$$p = \sigma_L \pi (r_e^2 - r_i^2) \quad (2.37)$$

igualando las fuerzas actuantes

$$\pi r^2 p_i = \sigma_L \pi (r_e^2 - r_i^2) \quad (2.38)$$

si se sabe que $r_e - r_i = t$ y haciendo la consideración que $r_e \approx r_i \approx R$, se obtiene la ecuación de esfuerzo longitudinal σ_L .

$$\sigma_L = \frac{p_i R}{2t} \quad (2.39)$$

También es posible determinar las deformaciones radiales que sufre el cilindro debido a las presiones internas impuestas al modelo, mediante la siguiente expresión:

$$w = \frac{\sigma_L R}{E} \quad (2.40)$$

Ya conocida la magnitud de los momentos es posible determinar los esfuerzos por medio de la teoría de flexión para secciones. Estos esfuerzos se calculan como:

$$\sigma = \frac{M}{I} z \quad (2.41)$$

donde

$$z = \frac{t}{2}$$

por lo tanto, la ecuación (2.41) se expresa como:

$$\sigma_{max} = \frac{Mt}{2I} \quad (2.42)$$

Si se sabe que $D=EI$, entonces se puede determinar el esfuerzo máximo a partir de la teoría de la flexión.

Donde,

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad I = \frac{t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

En función de las deformaciones unitarias se puede conocer el esfuerzo tangencial a lo largo del ducto, a través de la siguiente expresión:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\varepsilon_{\theta}E}{1 - \nu^2} \quad (2.43)$$

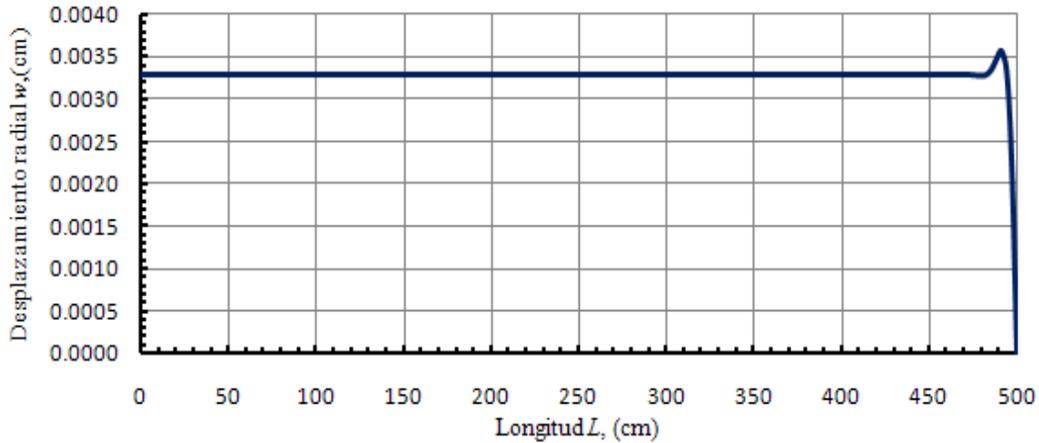
II.4.2 RESPUESTA ANALÍTICA DE LA TUBERÍA

A continuación se muestra el resultado de los desplazamientos radiales w , momentos longitudinales y los esfuerzos tangenciales que actúan en un cilindro, considerando que en $X=0$, se restringen los desplazamientos en las direcciones x, y, z , permitiendo el giro en las direcciones mencionada, mientras que en $X=L$ se permite el desplazamiento en el dirección longitudinal del ducto. En la tabla II.1 se hace mención de las propiedades geométricas y mecánicas del ducto en estudio, así como las acciones.

Tabla II.1. Características geométricas y mecánicas de los modelos de las tuberías

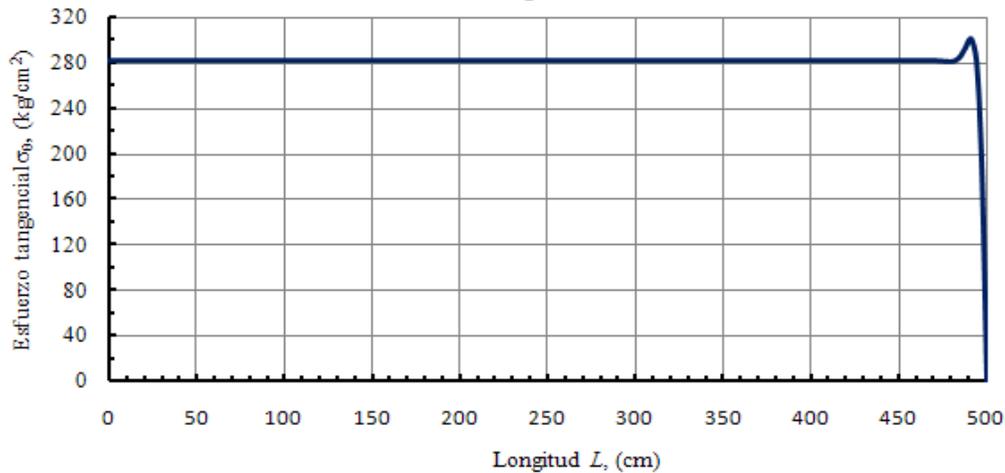
Longitud, $L=$	1,000cm	
Espesor, $t=$	0.9525cm	(3/8")
Módulo de elasticidad, $E=$	2,100,000 kg/cm ²	(206,084Mpa)
Módulo de Poisson, $\nu =$	0.3	
Presión interna, $p_f=$	10.19 kg/cm ²	(1Mpa)

De la ecuación (2.27) se obtiene el desplazamiento radial, ver gráfica II.1



Gráfica II.1. Desplazamiento radial w debido a p_i

De la ecuación (2.43) se determinan los esfuerzos tangenciales σ_θ , ver gráfica II.2



Gráfica II.2. Esfuerzos tangenciales σ_θ debido a p_i

De las figuras anteriores se observa que los desplazamientos radiales w , y esfuerzo tangenciales σ_θ permanecen constantes en casi toda la longitud de la tubería, no obstante en los extremos se aprecia un incremento tanto en los desplazamientos como en los esfuerzos debido a las condiciones de fronteras elegidas.

II.5 COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL MATERIAL

Es de suma importancia estudiar el comportamiento de una estructura en el intervalo no lineal, ya que debe poseer ante todo la habilidad de mantener su capacidad de carga para deformaciones mayores a la de fluencia. La respuesta de una estructura en su conjunto depende del tipo de comportamiento que tengan los

elementos que la componen, pero depende también en forma importante de la manera que estos elementos se encuentran integrados y conectados para formar la estructura en su conjunto (Bazán y Meli, 2007).

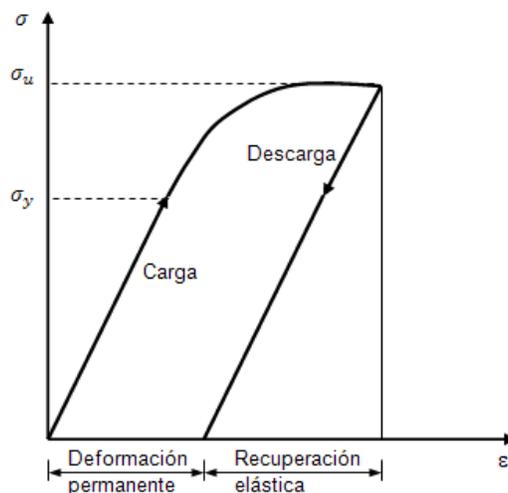


Figura II.6. Tipo de respuesta no lineal

La respuesta del material se puede clasificar por diferentes tipos, lo cual va a depender de su respuesta a la condición de carga. Tal, es el caso cuando esta carga es suficientemente grande, y la curva esfuerzo-deformación llega a ser no lineal. La curva de esfuerzo deformación a tensión es influenciada en forma determinante por las características del material que la componen y de las condiciones de pruebas. Un material se dice que tiene comportamiento no lineal, si la trayectoria de descarga no sigue la trayectoria de carga. Un material que se comporta de manera plástica no regresa a su estado original después que la carga es removida, por lo que se presenta una deformación permanente como se muestra en la figura II.6 (Boresi and Richard, 2003).

El mecanismo de comportamiento no lineal de la estructura depende del tipo y número de elementos que sobrepasen el intervalo lineal. Mientras mayor sea el número de secciones que participen en la deformación no lineal y mientras más dúctil sea el comportamiento de estos elementos, mayor ductilidad tendrá el sistema en conjunto (Bazán y Meli, 2007).

Dentro de la respuesta de una estructura, es de importancia considerar que ésta sea capaz de deformarse de manera dúctil cuando es sometida bajo un estado de carga que incurse en el intervalo plástico (Park y Paulay, 1999).

Por lo que, la ductilidad de deformaciones se expresa como la relación entre la deformación de colapso y la de fluencia.

$$\mu = \varepsilon_u / \varepsilon_y \quad (2.44)$$

II.5.1 FUNDAMENTOS DE LA PLASTICIDAD

Criterio de fluencia

Una diferencia importante entre las relaciones correspondientes a los intervalos elásticos y plásticos, consiste en que dado un estado de esfuerzos puede calcularse la deformación mediante relaciones finitas siguiendo la ley de Hooke, esto es para el primer intervalo, en cambio para el caso plástico las deformaciones no están en general determinadas unívocamente por los esfuerzos, sino que deben tratarse con relaciones diferenciales incrementales, ver figura II.7. La teoría de la plasticidad provee las relaciones matemáticas que caracterizan la respuesta de los materiales elasto-plásticos. Los componentes de la teoría de la plasticidad son: Criterio de fluencia, relación de flujo plástico y la relación de endurecimiento (González y Morales, 2006).

Los infinitos estados de esfuerzo que determinan la entrada del material en el campo plástico, constituyen una superficie cerrada denominada superficie de fluencia. La expresión de la superficie de fluencia es en general una función de las variables de estado dada por:

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, K) = 0 \quad (2.45)$$

Donde K es un coeficiente que mide el endurecimiento por deformación.

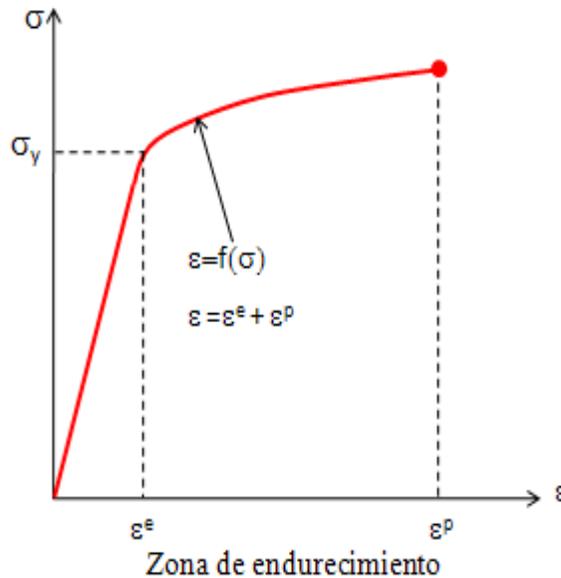


Figura II.7. Relación entre esfuerzos y deformaciones

Endurecimiento isótropo

Se ha visto que un elemento de material fluye cuando se incrementa la magnitud del vector de esfuerzos de distorsión a un valor tal que, el punto de esfuerzo

alcanza el lugar geométrico de fluencia. Si el material aún no llega al estado de endurecimiento, éste estado de esfuerzo plástico puede cambiar de una manera tal que el esfuerzo sea constante. Para un material con deformación por endurecimiento, la fluencia depende de la historia completa de deformación plástica.

Es necesaria una formulación matemática para definir esta deformación por endurecimiento, la cual se obtiene al suponer que la superficie de fluencia crece uniformemente sin cambio en su forma, como el estado de esfuerzo cambia a lo largo de cierta trayectoria. La cantidad de endurecimiento está dada por el estado plástico final. Puesto que el lugar geométrico de fluencia aumenta simplemente de tamaño, cualquier estado de endurecimiento puede ser definido por el esfuerzo de fluencia en tensión uniaxial. Sin embargo, es necesario relacionar el esfuerzo de fluencia con la cantidad de deformación plástica, después de un estado inicial de fluencia dado. Por lo que se reemplaza el criterio de fluencia por σ_e , el cual se conoce como el esfuerzo equivalente. Refiriendo al criterio de fluencia de Von Mises, ver figura II.8 (Chakrabarty, 1987). Se tiene;

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}^{1/2} = f(\{\sigma\}) \quad (2.46)$$

El historial de la deformación plástica de un metal es a menudo caracterizado por el trabajo plástico dado w^p (Mendelson, 1968)

$$W^p = \int (\sigma) d\varepsilon^p \quad (2.47)$$

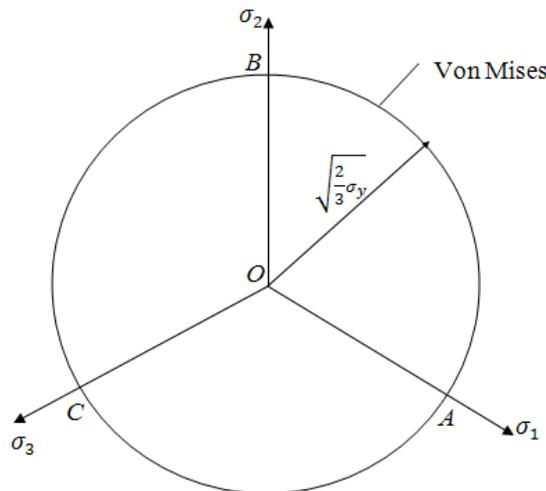


Figura II.8. Superficie de plastificación de Von Mises

Flujo plástico

Una característica que define la plasticidad, es la dependencia de la trayectoria. Por lo que, las ecuaciones constitutivas deben ser formuladas incrementalmente. Los modelos de plasticidad incremental son definidos a través de una relación de flujo, que relaciona incremento de deformación con el incremento de esfuerzo. La deformación total dada por la ecuación (2.48) está compuesta por los incrementos de la deformación elástica ε^e y los incrementos de la deformación plástica ε^p (*Chakrabarty, 1987*).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.48)$$

II.5.2 LEYES DE COMPORTAMIENTO DE MATERIAL

El conocimiento del módulo de elasticidad y el esfuerzo de fluencia del material resultan insuficientes para definir el comportamiento de la curva esfuerzo-deformación, cuando el material se encuentra sometido a esfuerzos mayores a los del intervalo elástico, es por ello que se requieren expresiones que relacionen los esfuerzos con las deformaciones y que definan la forma de la curva en el intervalo plástico.

La plasticidad es un fenómeno altamente dependiente de la historia de carga y de la historia de la deformación. De tal modo que para determinar la forma en la cual la estructura se opone a las cargas externas, se requiere saber la manera en cómo evolucionan las deformaciones plásticas y conocer algunas hipótesis simplificadas: (*Pacheco, 1999*).

- El material es isotrópico.
- Las deformaciones son independientes del tiempo.
- El material obedece a la ley de Hooke hasta el límite elástico o lo que es lo mismo, el módulo de plasticidad es infinito hasta ese punto.
- Se asumen curvas simplificadas de esfuerzo contra deformación, como las que se mencionan a continuación:

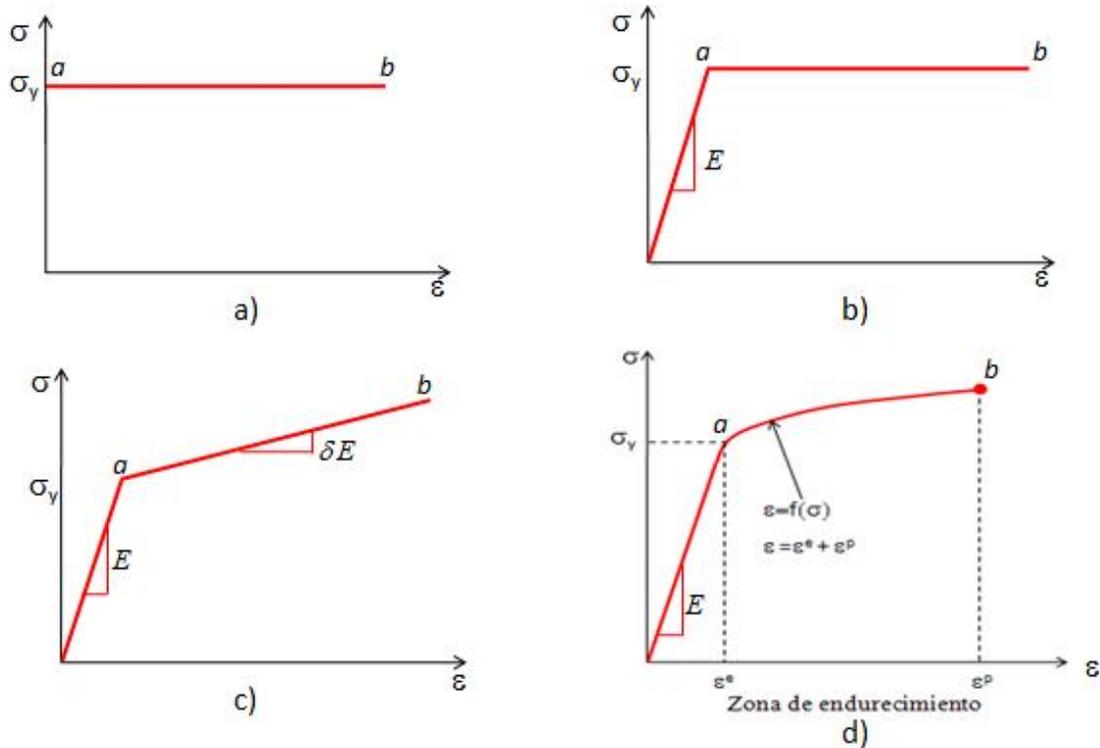


Figura II.9. Modelos empíricos de esfuerzos-deformación

La configuración II.9. a se denomina perfectamente plástica, las deformaciones elásticas se asumen como cero. Cuando se asume que la deformación elástica es cero, entonces el cuerpo es llamado rígido. En la figura II.9.b, se tiene que la parte a-b es paralela al eje de deformación (el esfuerzo permanece constante conforme aumenta la deformación), y se dice que la respuesta del material es elástico perfectamente plástico. Para materiales que presentan endurecimiento por deformación en la región no lineal inicial, las deformaciones se incrementan conforme aumentan los esfuerzos. Estas curvas de esfuerzos-deformación son referidas como bilineal y plástica con endurecimiento por deformación, (ver figura II.9.c y II.9.d, respectivamente) (Boresi et al. 2003).

En deformación plástica se asume que el volumen es constante, lo cual no puede asumirse en el caso de la deformación elástica. El volumen constante implica que:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (2.49)$$

y que la relación de Poisson es de 0.5, lo que indica que ν varía de 0.3 hasta 0.5 a medida que la deformación pasa de la elástica a la plástica (André y Kumar, 1984).

II.5.3 MODELOS NO LINEALES DE MATERIAL DE LAS TUBERÍAS

La relación entre el esfuerzo y deformación unitaria puede ser lineal o no lineal. Por lo que, la no linealidad en el material representa la pérdida de rigidez a medida que el nivel de deformación aumenta. La constante de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación unitaria es el módulo de Young E , en tanto que la relación constitutiva no lineal sigue la aproximación de la curva obtenida en un ensayo de tensión simple.

Por tanto, para esta tesis se emplean dos modelos no lineales: el modelo bilineal y de Ramberg-Osgood, ya que representan de forma adecuada el comportamiento mecánico no lineal mediante la curva esfuerzo-deformación.

a) Modelo de Ramberg-Osgood

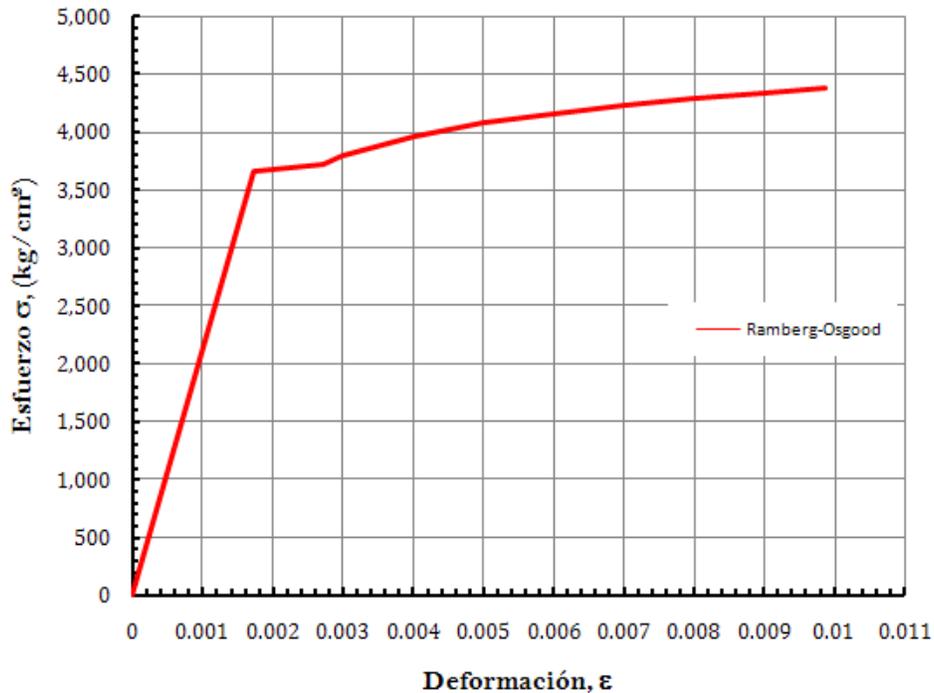
Una de las expresiones más utilizadas para predecir el comportamiento de metales dúctiles es la ecuación de los tres parámetros de Ramberg-Osgood, la cual establece una ley potencial de la forma: (*Ramberg et al. 1943*).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left\{ 1 + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^{m-1} \right\}, \quad \text{para } \sigma \geq \sigma_y \quad (2.50)$$

El esfuerzo nominal de fluencia corresponde a la condición cuando $\sigma = \sigma_y$, la deformación plástica es α veces la deformación elástica. El primer término de la ecuación (2.50) representa el comportamiento lineal y el segundo representa el comportamiento no lineal. Por lo que, la curva de Ramberg-Osgood muestra una transición continua del comportamiento elástico al plástico, expresado en una sola ecuación cuando el material presenta una zona de endurecimiento.

Para la curva esfuerzo-deformación correspondiente al modelo de Ramberg-Osgood, se emplea la ecuación (2.50). El modelo mecánico incluye tres parámetros, E , σ_y y m , éstos pueden ser medidos a través de la respuesta esfuerzo-deformación de la siguiente manera:

- E es la pendiente de la respuesta elástica lineal, módulo de Young.
- σ_y pertenece al esfuerzo de fluencia considerado, este esfuerzo corresponde al esfuerzo nominal del material.
- El valor aproximado de m se obtiene de la pendiente que corresponde a la parte lineal de $\log \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E} \right)$ vs $\log(\sigma)$ (*Chakrabarty, 1987*).



Gráfica II.3. Modelo mecánico de Ramberg-Osgood

La ecuación que determina el modelo no lineal consta de dos partes, la rama lineal primaria y la rama secundaria no lineal. En la gráfica II.3 se muestra la curva correspondiente al material de la tubería de acero X52 empleando el modelo de Ramberg-Osgood, generado mediante una rutina elaborado en Matlab.

Los datos relacionados con la gráfica II.4 para el material X52 son:

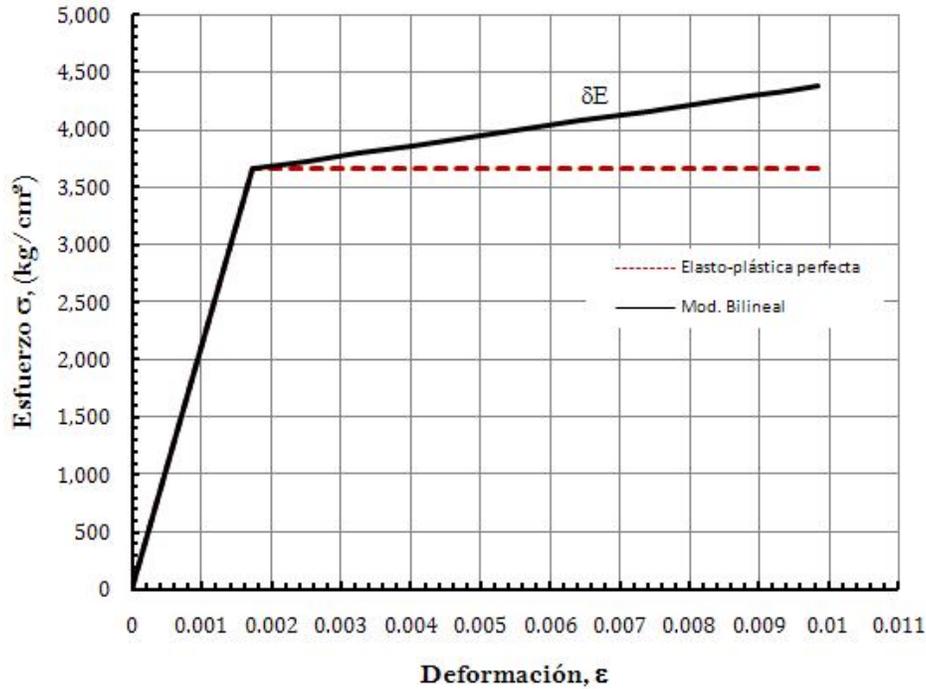
$$E = 2,100,000 \frac{Kg}{cm^2}, \sigma_y = 3,658.21 \frac{Kg}{cm^2} y m = 13$$

b) Modelo bilineal

Los modelos bilineales utilizan la teoría clásica de la plasticidad, con módulo plástico constante y endurecimiento por deformación. Esta curva está formada por dos líneas rectas, cuyo esfuerzo de fluencia ocurre en la intersección de estas líneas.

La ecuación (2.51) que determina el modelo consta de dos partes, la rama lineal primaria que corresponde modulo de elasticidad E y la rama secundaria no lineal que está controlada por el parámetro δ como una función del modulo de elasticidad E que puede variar de cero a la unidad, como se muestra en la gráfica II.4. Cuando $\delta = 0$ resulta un comportamiento elasto-plástico perfecto (Dowling, 2002).

$$\varepsilon = \frac{\sigma_y}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_y)}{\delta E} \quad (2.51)$$



Gráfica II.4. Modelo mecánico bilineal de plasticidad con endurecimiento por deformación

Los datos relacionados con la gráfica II.5 son los siguientes:

Módulo de elasticidad $E_s =$	$2,100,000 \text{ kg/cm}^2$	(206,084Mpa)
Esfuerzo de fluencia $\sigma_y =$	$3,658.21 \text{ kg/cm}^2$	(359Mpa)
Deformación elástica $\varepsilon^e =$	0.00174	
Esfuerzo último $\sigma_u =$	$4,381.82 \text{ kg/cm}^2$	
Deformación elástica $\varepsilon^p =$	0.00174	(430Mpa)

II.6 ANÁLISIS DE LA GRÁFICA MOMENTO-CURVATURA

La herramienta básica para el estudio teórico de estructuras a flexión en uno de sus planos de simetría es la curva de momento-curvatura (M-φ) de sus secciones transversales. Para construir la grafica momento-curvatura se supone que las secciones planas antes y después de la flexión permanecen planas y que se conoce la curva esfuerzo-deformación del acero. Las curvaturas asociadas con un intervalo de momentos flexionantes pueden determinarse mediante la aplicación de estas suposiciones y a partir de los requerimientos de compatibilidad de deformación y equilibrio de fuerzas (Park y Paulay, 1999).

II.6.1 COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN

En la figura II.10 se muestran las curvas de comportamiento de material, a) elasto-plástico perfecto, b) comportamiento plástico con endurecimiento isótropo (modelo de Ramberg-Osgood).

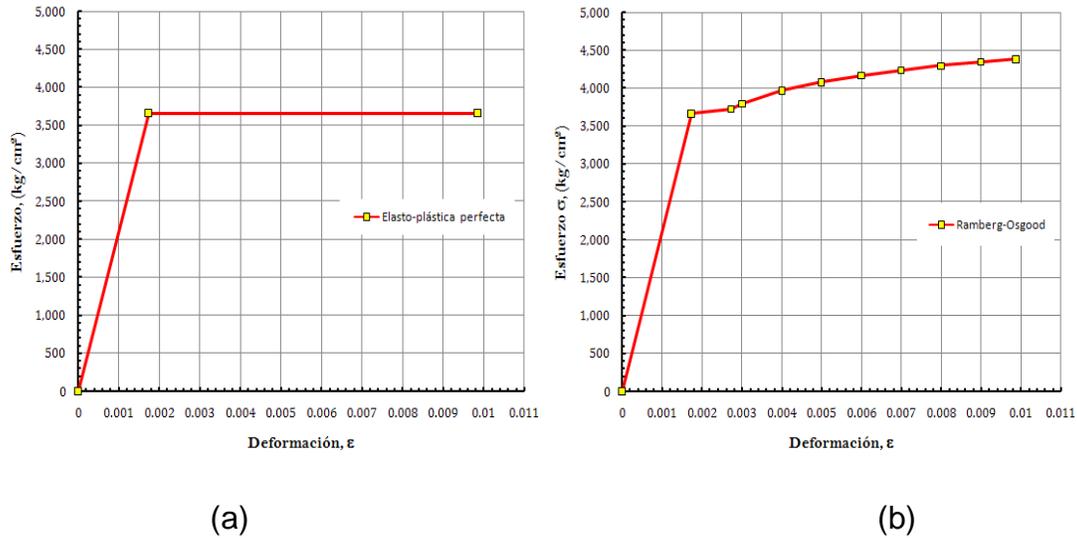
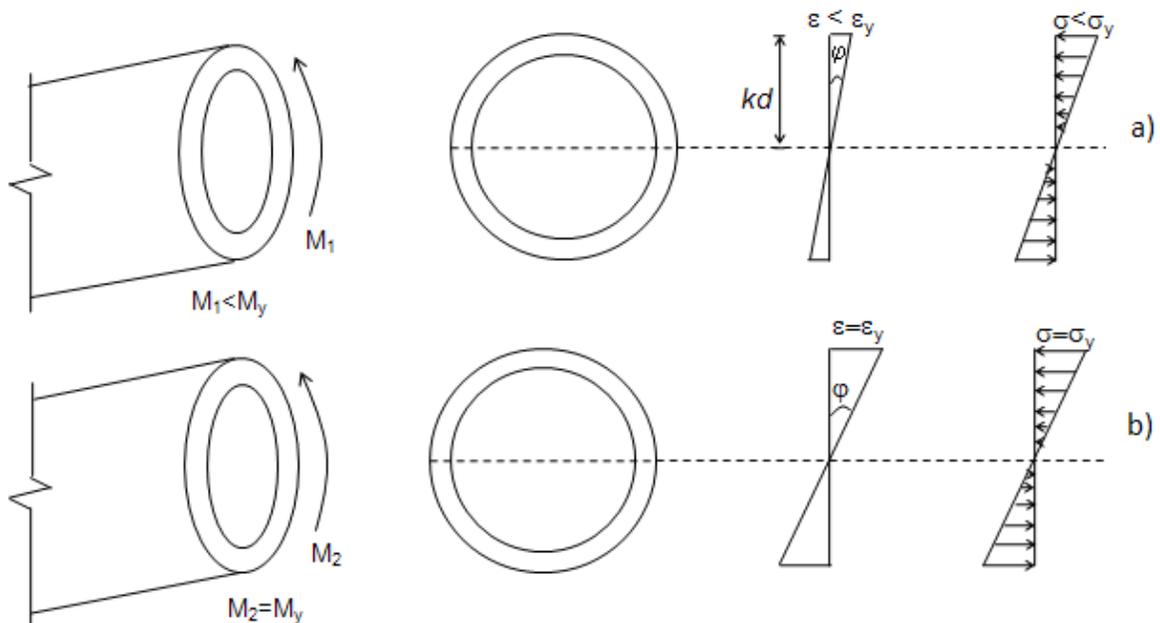


Figura II.10. Curvas de comportamiento de material

En la figura II.11 se muestra el comportamiento de una sección tubular, las deformaciones unitarias, esfuerzos y zonas plastificadas.



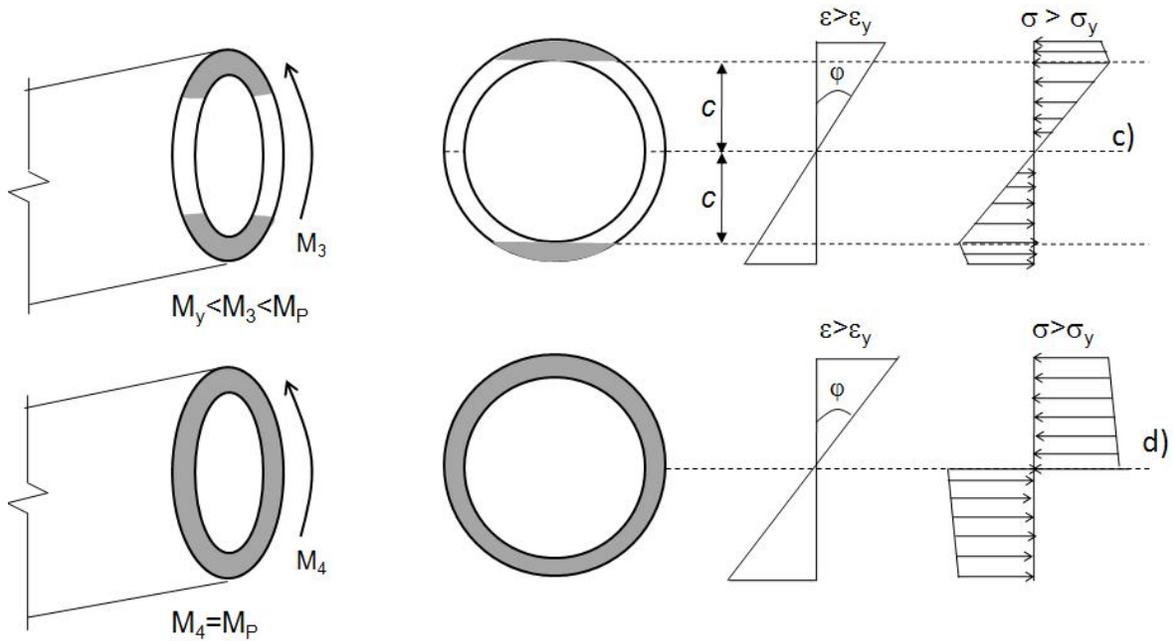


Figura II.11. Deformaciones unitarias, esfuerzos y zonas plastificadas de una sección tubular

En la figura II.11.a los esfuerzos y deformaciones crecen proporcionalmente a M , mientras que ninguna fibra alcanza el esfuerzo de fluencia. Mientras que en la figura II.11.b las fibras de los extremos empiezan a plastificarse al llegar al esfuerzo de fluencia σ_y . Al momento flexionante correspondiente se le llama momento de fluencia M_y (M.R. Dalmau et. al 2003).

En la figura II.11.c se observa que cuando el momento es mayor que M_y , en la sección central y en la mayor parte del claro el material sigue siendo elástico, lo que no sucede con las secciones extremas; en ellas, de acuerdo a la hipótesis de la sección plana, las deformaciones ϵ , crecen linealmente desde el eje de flexión hacia los bordes, pero en las franjas cercanas a éstos sobrepasan el valor ϵ_y correspondiente a la iniciación del flujo plástico; la zona central de amplitud $2c$, se mantiene en estado elástico, y se conserva la relación lineal entre esfuerzos y deformaciones, pero el material situado fuera de ellas entra en el intervalo plástico y, de acuerdo con la grafica esfuerzo-deformación del material está sometido a un esfuerzo σ que corresponde a la deformación unitaria mayor que ϵ_y .

Cuando la carga crece, aumentan las deformaciones en las secciones extremas, y se reduce la amplitud de la zona central elástica, al extenderse hacia el eje de flexión las dos regiones, superior e inferior, en las que el material está plastificado; se tiene como límite los esfuerzos de la figura II.11.d, donde todo el acero está sometido al esfuerzo de fluencia, en tensión de un lado del eje de flexión y en compresión del otro. (No es posible que se presenten estos esfuerzos en una sección, pues implicarían deformaciones infinitas y esfuerzos de magnitud σ_y , pero de signos contrarios; en realidad siempre hay una zona central, de amplitud

reducida que permanece en estado elástico, y en los bordes de la sección los esfuerzos sobrepasan el límite de fluencia, al endurecerse el material por deformación; sin embargo la distribución de esfuerzos propuesta se acerca mucho a la real e introduce simplificaciones importantes en el análisis, por lo que se acepta para este estudio (*De Buen, 2000*).

II.6.2 MOMENTO PLÁSTICO RESISTENTE Y FACTOR DE FORMA

El momento plástico M_p está definido como el instante en el cual ocurre la deformación plástica en la totalidad de la sección del tubo flexionado. Por lo que la expresión que define el momento plástico se escribe de forma similar a la del momento de fluencia:

$$M_p = \sigma_y Z \quad (2.52)$$

donde,

$$Z = \frac{A(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2}$$

En donde Z depende de la geometría de la sección considerada; se conoce como módulo de sección plástico, por su semejanza con el módulo de sección elástico.

La ecuación (2.52) es aplicable a secciones transversales de cualquier forma; el módulo plástico Z , puede interpretarse geoméricamente como el momento estático de la sección con respecto a un eje perpendicular al de simetría, que la divide en dos porciones de áreas iguales, puesto que las resultantes de las fuerzas interiores de tensión y compresión son numéricamente iguales.

El cociente del momento plástico M_p de una sección entre el momento M_y de la misma define es el factor de forma, k .

$$k = \frac{M_p}{M_y} = \frac{\sigma_y Z}{\sigma_y S} = \frac{Z}{S} \quad (2.53)$$

k es una característica geométrica de la sección; representa una reserva de capacidad para resistir la flexión fuera del intervalo elástico, pues este termina cuando el momento alcanza el valor M_y y la sección admite incrementos adicionales, hasta llega a M_p (*De Buen, 2000*).

II.6.3 RELACIONES DE MOMENTO-CURVATURA

Se considera un elemento de longitud L de sección transversal tubular con pared delgada (radio medio = R , espesor de pared = t) como se muestra en la figura

II.12.a. Cuando el segmento viga está sujeto a momentos flexionantes M en sus extremos, se flexiona en un arco de radio R que se mide hasta el eje neutro, como se observa en la figura II.12.b. Considerando solamente un elemento diferencial de longitud dx del elemento, y tomando la notación de la figura II.12, las siguientes relaciones proporcionan la rotación entre los extremos del elemento.

$$\frac{dx}{R} = \frac{\varepsilon dx}{kd}$$

Por lo que;

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{kd}$$

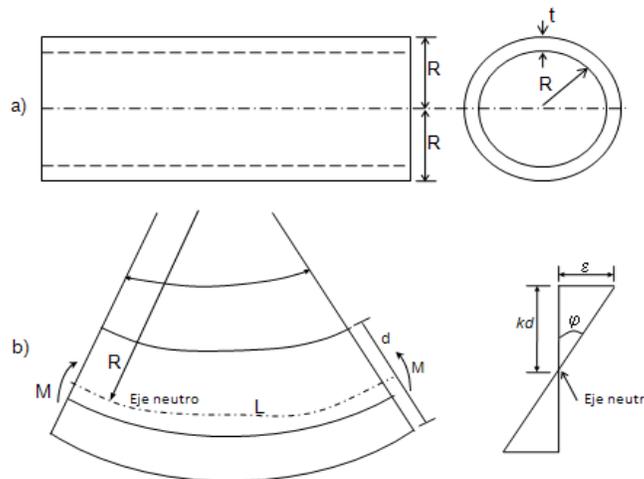


Figura II.12. Flexión pura de una sección tubular de pared delgada

Entonces, $1/R$ se define como la curvatura en el elemento y está dado por el símbolo φ . Así se tiene que:

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{kd} \quad (2.54)$$

Es evidente que la curvatura es el gradiente del perfil de deformaciones en el elemento, como se ve en la figura II.12.

La curvatura varía físicamente a lo largo del elemento debido a la fluctuación de la profundidad del eje neutro (*Park y Paulay, 1999*).

II.6.4 OBTENCIÓN DE DIAGRAMAS DE MOMENTO-CURVATURA

La obtención de la relación $M - \varphi$ en una sección tubular de pared delgada se desarrolla primeramente empleando un material con comportamiento elasto-plástico perfecto y segundo, el material considera endurecimiento isótropo (ver figura II 10.a y II.10.b, respectivamente).

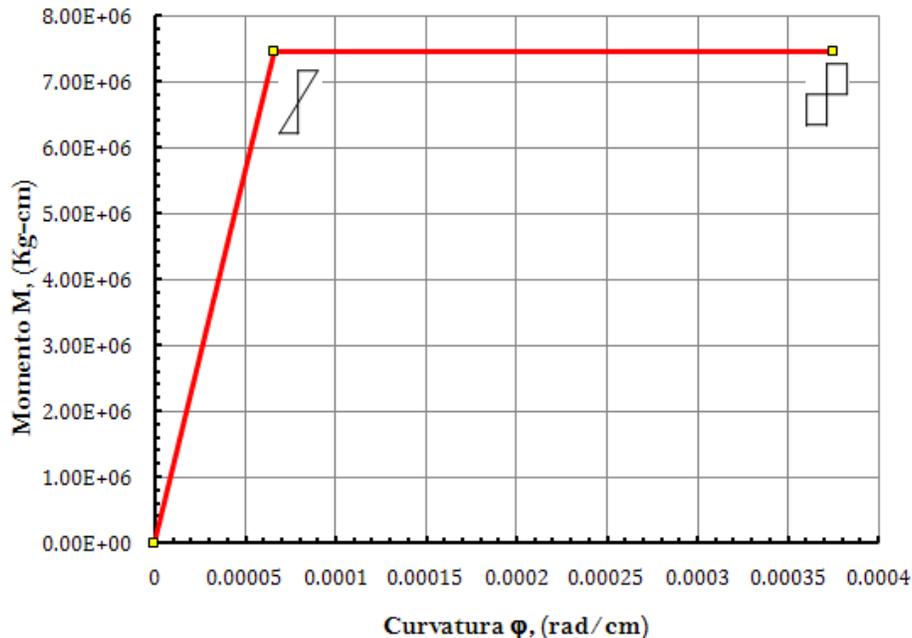
Los puntos que se estudian para definir la forma general del diagrama $M - \phi$ corresponden a los siguientes estados:

- a) A la fluencia del acero.
- b) Entre la fluencia del acero y la resistencia última de la sección.
- c) Resistencia última

Conocidas estas propiedades y características del diagrama momento-curvatura, se puede obtener como sigue:

Se elige una deformación unitaria ε , para la fibra superior y la profundidad del eje neutro, kd , necesaria para el equilibrio de la sección transversal. Los valores de ε y de kd , definen la distribución de deformaciones unitarias en la sección transversal, con esta distribución de deformaciones se calculan las fuerzas de tensión y el momento M de curvatura se calcula dividiendo la deformación unitaria ε , entre la profundidad del eje neutro, kd . De esta manera se determina el valor de M y el valor de ϕ que definen un punto del diagrama momento-curvatura ($M-\phi$). Repitiendo este procedimiento para otros valores de deformación, hasta la deformación última $\varepsilon_u = 0.0098$ se obtienen los puntos del diagrama, ver anexo A (Bresler, 1981).

En la gráfica II.5 y II.6 se muestra el diagrama de momento-curvatura ($M-\phi$) empleando las leyes de comportamiento arriba mencionadas para una sección circular, cuyo espesor t es de 0.9525cm (3/8”).

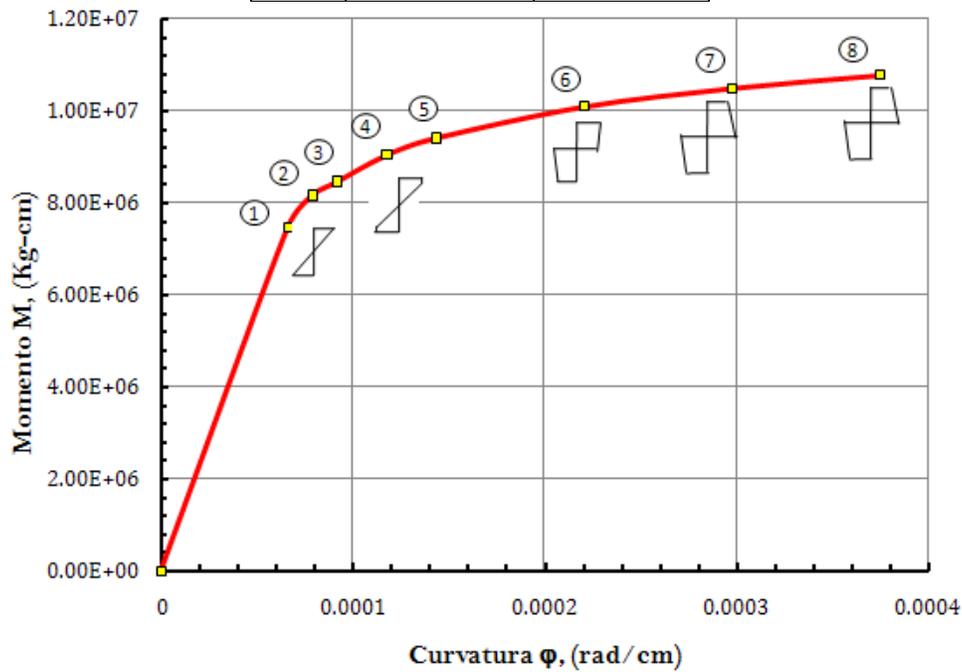


Gráfica II.5. Relaciones de momento curvatura elasto-plástica perfecta de una sección circular

En la tabla II.2 se muestran los valores a partir de los cuales se construye la gráfica II.6.

Tabla II.2. Valores de momento-curvatura

Punto	M (Kg-cm)	φ (rad/cm)
0	0	0
1	7,457,579.12	6.61038E-05
2	8,154,243.81	7.89299E-05
3	8,449,513.79	9.1756E-05
4	9,024,164.93	0.000117408
5	9,397,014.72	0.000143307
6	10,079,042.16	0.00022051
7	10,478,711.62	0.000297714
8	10,761,863.36	0.000374917



Gráfica II.6. Diagrama de momento curvatura incluyendo plasticidad con endurecimiento por deformación de una sección circular

Para realizar la gráfica antes mencionada se dispuso de las franjas necesarias en la sección transversal hasta el momento en que entra en juego el colapso del ducto.

Con la finalidad de estimar la capacidad que tiene la estructura de incursionar en el intervalo inelástico, evaluamos la ductilidad de curvatura, la cual se define como, μ_{φ} . Por lo que $\mu_{\varphi}=5.67$.

Capítulo III

ANÁLISIS NUMÉRICO

- III.1 Introducción
- III.2 Modelado numérico lineal
- III.3 Modelado numérico no lineal
- III.4 Diagramas de interacción
- III.5 Comparación de resultados

RESUMEN

En este capítulo se describe los modelos numéricos basados en la técnica del elemento finito para simular el comportamiento estructural de los ductos. Estos modelos son utilizados como herramientas de análisis para estudiar el comportamiento mecánico bajo las cargas aplicadas a la estructura. Los modelos numéricos son comparados con los resultados analíticos.

Capítulo III

ANÁLISIS NUMÉRICO

III.1 INTRODUCCIÓN

Mediante el uso de técnicas basadas en la discretización por medio de los elementos finitos, se desarrolla un modelo tridimensional que permite estudiar la influencia de las cargas en el comportamiento de los ductos. Además, de la existencia actual de poderosos modelos de análisis basados en el MEF permite reproducir comportamientos estructurales complejos con ecuaciones constitutivas no lineales, incluyendo la no linealidad del material. La utilización de dichos modelos permite realizar estudios preliminares del problema, y obtener de forma aproximada los resultados (carga máxima, desplazamientos, deformaciones, reacciones o esfuerzos).

Por lo tanto, es posible comparar estos resultados con los planteamientos analíticos y verificar la adaptación de dicho modelo. Para ello, se realiza un estudio paramétrico empleando modelos numéricos, que permitan la variación de los parámetros más importantes.

Así pues, en este trabajo se han realizado dos consideraciones en los análisis numéricos, uno lineal y otro no lineal, para obtener la respuesta estructural de los ductos.

- En primer lugar se estudia el comportamiento de ductos sometidos a presión interna, presión externa, fuerza axial y momento flexionante, así como combinaciones de cargas, mediante un análisis lineal, centrando dicho estudio en el cálculo de esfuerzos y desplazamientos máximas.
- Posteriormente, se realiza un estudio de los ductos sometidos a las cargas arriba mencionadas, mediante modelado no lineal, empleando leyes de comportamiento del material, que ya han sido mencionadas con anterioridad.

En este estudio, los modelos numéricos son analizados mediante el empleo del programa de elemento finito Ansys versión 11.

III.2 MODELADO NUMÉRICO LINEAL

Para el modelado numérico lineal de las tubería en estudio se considera que la relación de esfuerzo-deformación ($\sigma - \varepsilon$) es lineal, es decir, que siempre hay una relación única entre esfuerzos y deformaciones; esto es, que para cada valor de esfuerzos, existe un solo valor de deformación (*Boresi and Schmidt, 2003*).

Se realiza un estudio paramétrico con el propósito de conocer el comportamiento de los ductos de acero, para lo cual se analiza una serie de casos donde se mantiene constante el diámetro interior, mientras que se consideran seis diferentes espesores (0.9525, 1.27, 1.5875, 1.905, 2.22 y 2.54cm).

Características geométricas y mecánicas de los modelos

Para la selección de las dimensiones de los modelos a analizar se toman en cuenta tanto las características del material, como las geometrías reales empleadas en el sector petrolero. Tal y como se muestra en la figura III.1, el ducto tiene un diámetro de 50.8cm (20”), con longitud de 1,000cm. Los espesores del tubo (t) tienen una relación de (D/t) mayor a 20. Las características mecánicas se muestran en la tabla III.1:

Tabla III.1. Características mecánicas de los modelos de las tuberías

Módulo de elasticidad $E_s =$	2,100,000 kg/cm ²	(206,084Mpa)
Coefficiente de Poisson $\nu =$	0.3	
Esfuerzo de fluencia $\sigma_y =$	3,658.21 kg/cm ²	(359Mpa)

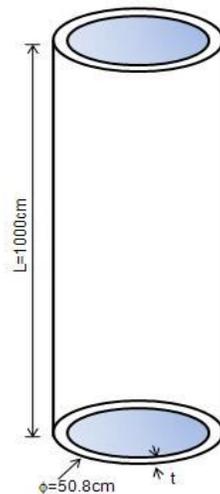


Figura III.1. Geometría del ducto en estudio

Se asume que el material es isótropo, homogéneo y obedece la ley de Hooke. El módulo elástico es constante, cuya pendiente es el esfuerzo contra deformación.

Elemento finito seleccionado

Tal y como se ha descrito anteriormente en este trabajo se han realizado dos análisis distintos, de modo que el tipo de elemento finito utilizado en cada caso será también distinto.

Al emplear Ansys como programa de base para la resolución de la tubería, se requiere seleccionar de su librería de elementos los mejor adaptados para la modelación respectiva. Por lo que, para los modelos lineales se emplea el elemento Shell 63 (ver figura III.2), éste se utiliza para modelar estructuras en las que una dimensión (el espesor) es mucho menor que las otras, y los esfuerzos en la dirección del espesor son despreciables. Además su capacidad portante viene dada por la combinación de esfuerzos de flexión y de membrana. Se permiten cargas normales y en el plano. El elemento tiene seis grados de libertad en cada nodo: tres traslaciones nodales en las direcciones $x, y,$ y z , así como otras tres rotaciones nodales sobre los ejes x, y, z . Los resultados asociados con el elemento corresponden a desplazamientos nodales, momento alrededor de la cara x (MX), momento alrededor de la cara y (MY) y el momento de torsión (MXY). Los momentos son calculados por unidad de longitud en el elemento (*Ansys Release, 2007*).

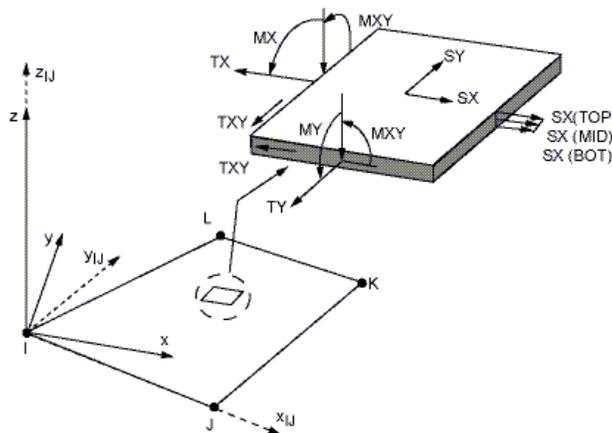


Figura III.2. Elemento Shell 63

Condiciones de frontera y mallado

Respecto a las condiciones de frontera, en $X = 0$ se restringen los desplazamientos en las direcciones x, y, z , mientras que en el punto geométrico

$X = L$ se permite el desplazamiento en la dirección longitudinal del ducto; asimismo, tanto en $X = 0$ como en $X = L$ hay libertad de giro. Ver figura III.3.b.

Con respecto a la malla de elementos finitos, se construyó una malla estructurada tridimensional de 3cm, lo cual genera 56 divisiones angulares y 333 divisiones verticales, lo cual genera 18,760 nodos y 18,704 elementos, ver figura III.3.

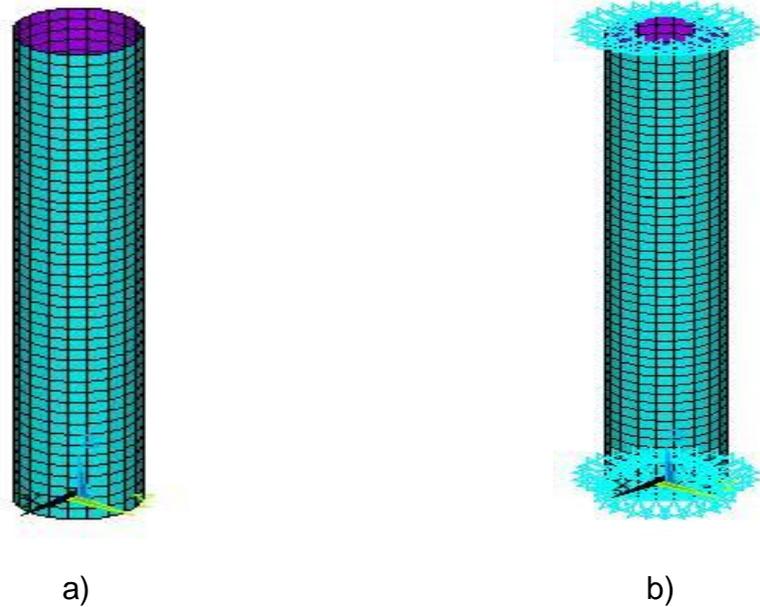


Figura III.3. Modelado del ducto, a) Malla de elementos finitos, b). Condiciones de frontera

III.2.1 DUCTOS SOMETIDOS A: A) PRESIÓN INTERNA, B) PRESIÓN EXTERNA, C) TENSIÓN AXIAL Y D) MOMENTO FLEXIONANTE

En esta sección se muestran los resultados numéricos de los ductos sometidos solamente a un estado de carga como: presión interna, presión externa, tensión axial y momento flexionante. Primeramente se analiza el ducto sometido a presión interna, lo cual sirve como base de calibración y permite la observación de la influencia de las cargas en los ductos.

Para determinar las fuerzas máximas de tensión elástica se emplea la siguiente ecuación:

$$T_{ymáx} = \frac{(\sigma_y A)}{N} \quad (3.1)$$

Para el último caso de estudio, el cual corresponde a un ducto sometido a momento flexionante (M), se utilizan las siguientes expresiones:

$$M_u = \frac{(\sigma_y I)}{r_i} \quad (3.2)$$

donde,

$$\sigma_u = \frac{M_u}{\pi R^2 t} \cos \theta$$

$$\theta = \arccos(x/y)$$

$$I = \frac{\pi(r_e^4 - r_i^4)}{4}$$

El momento se aplica como un par de fuerzas, por lo que:

$$F = \sigma_u A \quad (3.3)$$

Caso a) Ducto sometido a presión interna

La figura III.4 muestra el modelo del ducto, el cual está sometido a la acción de presión interna uniforme (p_i). Dicho modelo servirá como base de calibración y observar la influencia de las cargas en los ductos.

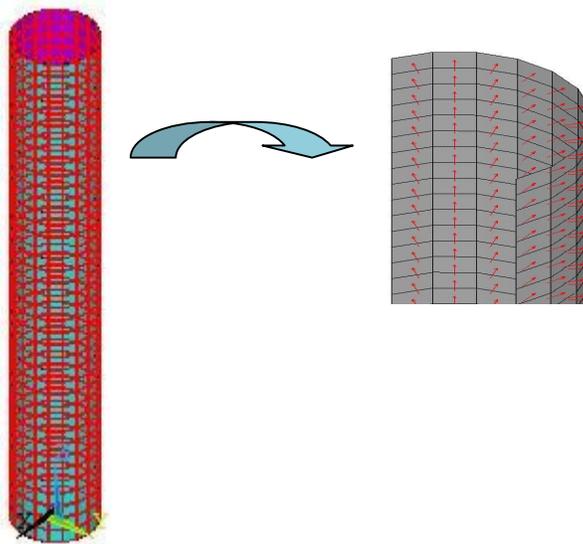


Figura III.4. Ducto sometido a presión interna (p_i)

En este caso se modela un ducto sometido solamente a presión interna (p_i), cuya longitud es de 10m. La presión a la cual es sometido el ducto es de 10.19 kg/cm^2 , (1Mpa).

Resultados numéricos

A continuación se muestran los resultados del análisis numérico del ducto de espesor 0.9525cm ($3/8''$) bajo presión interna de 10.19 kg/cm^2 (1Mpa). En las figuras III.5.a y III.5.b se muestran los desplazamientos y esfuerzos numéricos, para la condición de un ducto sometido solo a presión interna, p_i . De igual forma éstos resultados se muestran en las gráficas III.1 y III.2.

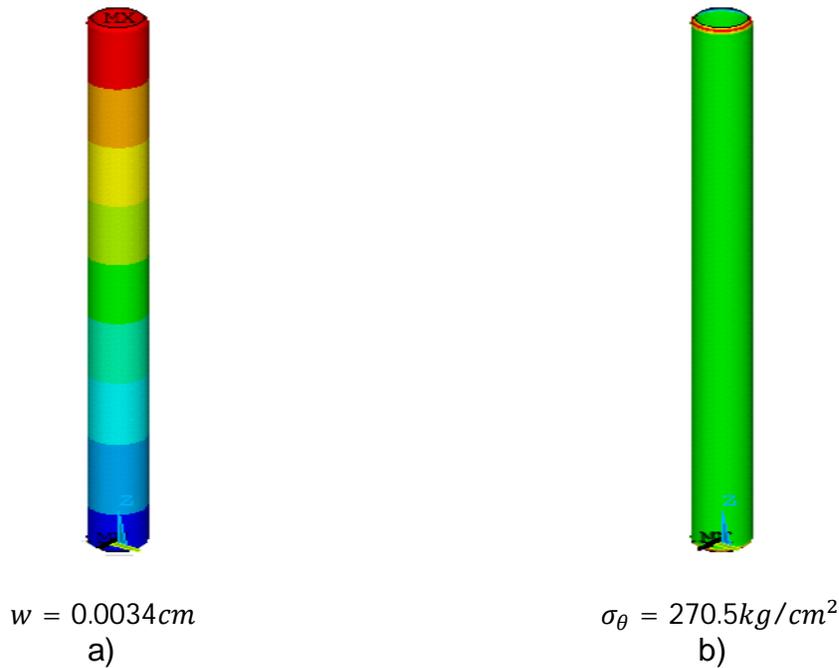
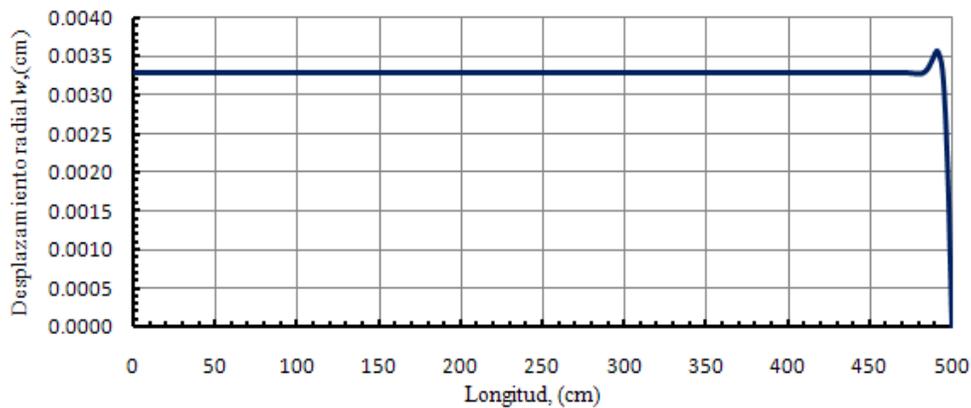
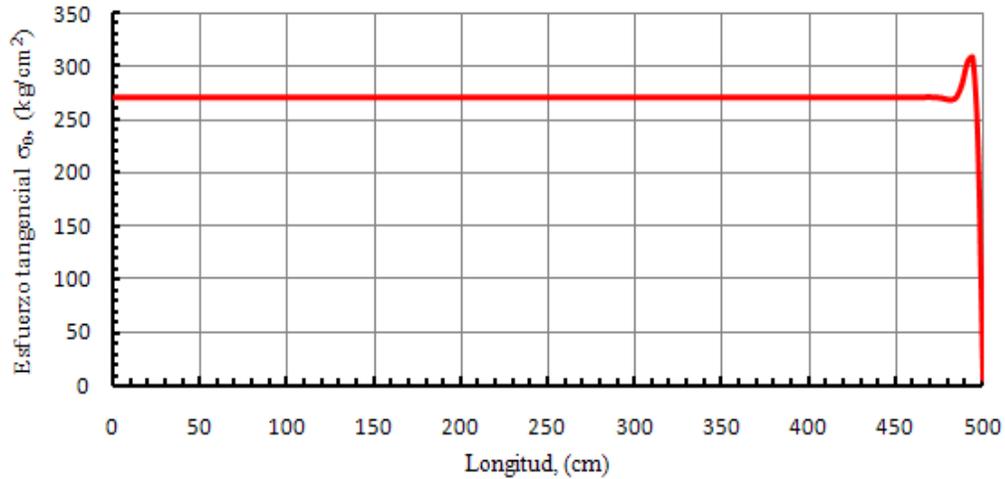


Figura III.5. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial σ_θ



Gráfica III.1. Desplazamiento radial w debido a (p_i)



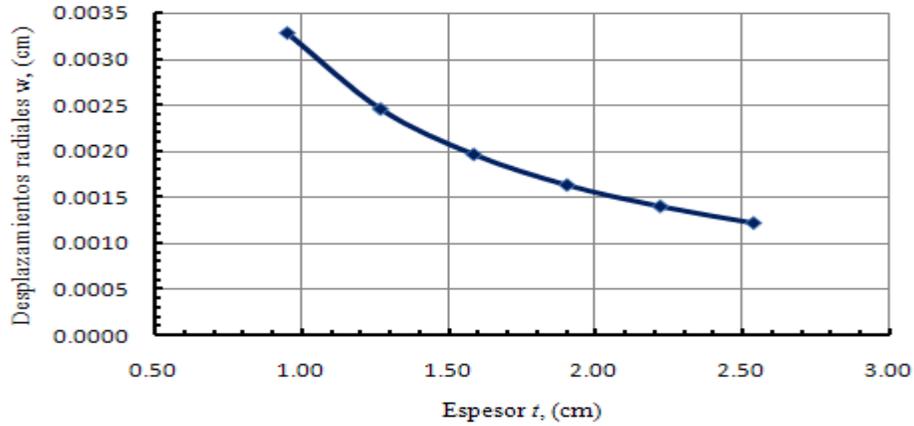
Gráfica III.2. Esfuerzo tangencial σ_θ debido a (p_i)

De las figuras anteriores se observa que los desplazamientos radiales w , y esfuerzo tangenciales σ_θ permanecen constantes en casi toda la longitud de la tubería, no obstante en los extremos se aprecia un incremento tanto en los desplazamientos como en los esfuerzos, esto debido a las condiciones de fronteras elegidas.

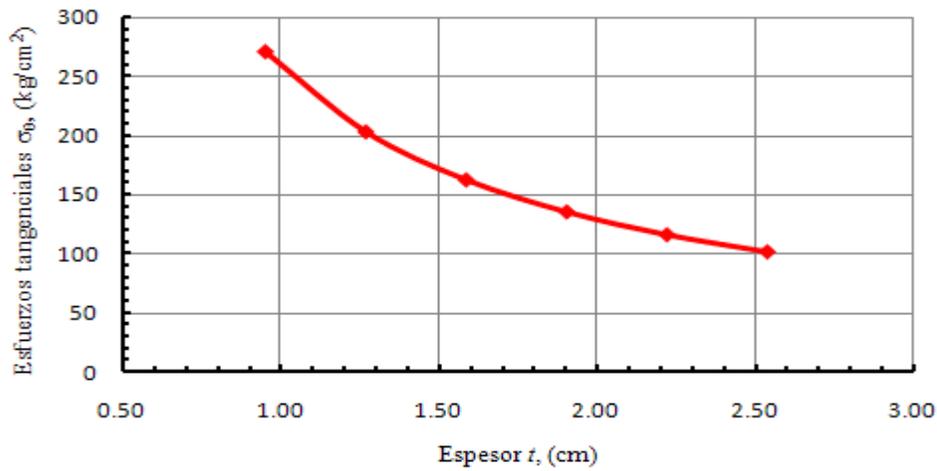
De la misma forma se realizó un análisis paramétrico para los distintos espesores considerados, los resultados se muestran en la tabla III.2, y en las gráficas III.3 y III.4 se muestran los desplazamientos y esfuerzos, para la condición de carga antes señalada.

Tabla III.2. Resumen de análisis numérico con MEF debido a (p_i)

Espesor (t)		R	r_e	t/D	w	σ_θ
Pulg.	cm	cm	cm		cm	Kg/cm ²
3/8"	0.9525	25.8763	26.3525	0.01875	0.00345	270.50
1/2"	1.2700	26.0350	26.6700	0.02500	0.00246	202.84
5/8"	1.5875	26.1938	26.9875	0.03125	0.00197	162.27
3/4"	1.9050	26.3525	27.3050	0.03750	0.00164	135.23
7/8"	2.2225	26.5113	27.6225	0.04375	0.00141	115.91
1"	2.5400	26.6700	27.9400	0.05000	0.00123	101.42

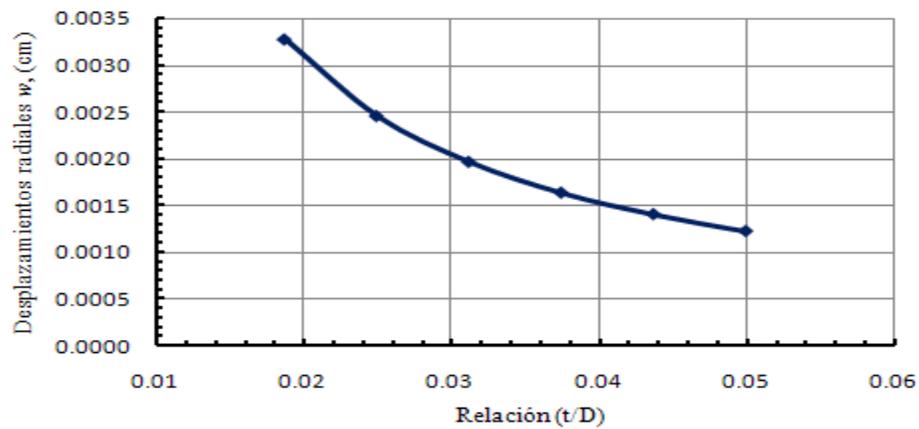


Gráfica III.3. Variación de desplazamientos radiales w debido a (p_i)

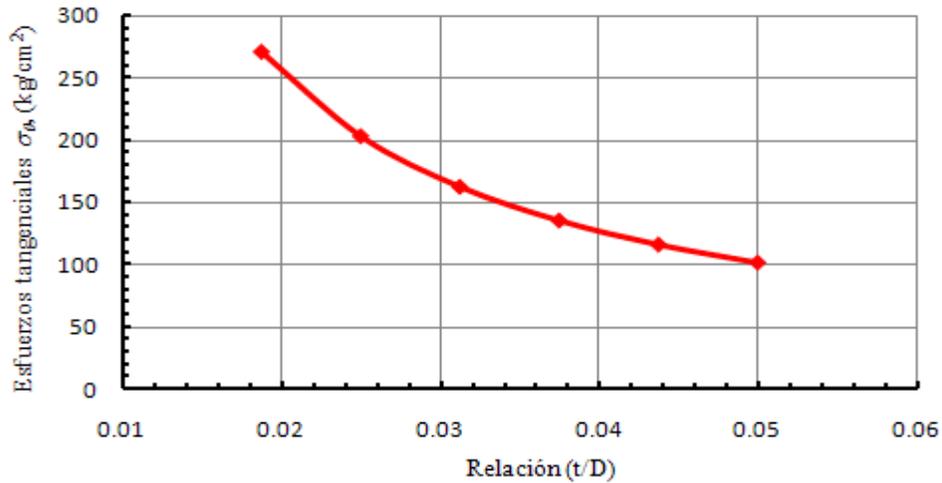


Gráfica III.4. Variación de esfuerzos tangenciales σ_θ debido a (p_i)

A continuación se muestran en las gráficas III.5 y III.6 los desplazamientos y esfuerzos considerando la relación (t/D) .



Gráfica III.5 Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_i)



Gráfica III.6. Esfuerzos tangenciales σ_θ vs t/D debido a (p_i)

Caso b) Ducto sometido a presión externa

El modelo que a continuación se presenta corresponde a al ducto sometido solamente a presión externa, con longitud de 10m. La carga a la cual es sometido el ducto es de 10.19 kg/cm².

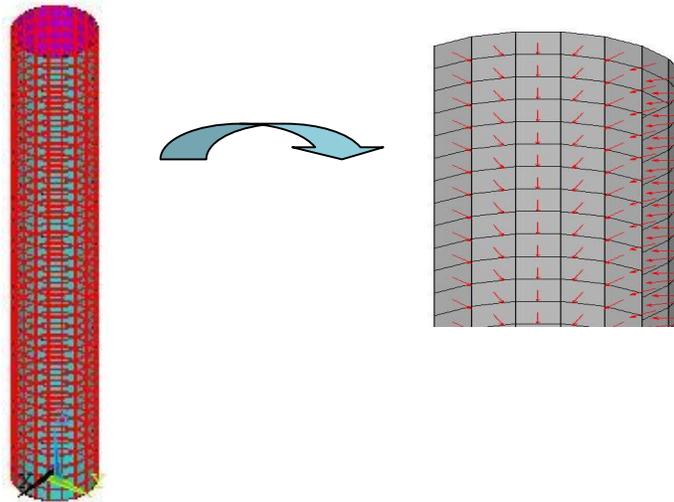


Figura III.6. Ducto sometido a presión externa, (p_e)

Resultados numéricos

En la figura III.7 a y III.7.b, se muestra el comportamiento del ducto para un $t=0.9525\text{cm}$ (3/8") sujeto a presión externa (p_e). Estas figuras indican los

desplazamientos y esfuerzos numéricos en todo el ducto. Dichos desplazamientos y esfuerzos se muestran en las gráficas III.7 y III.8, respectivamente.



$$w = -0.0034\text{cm}$$

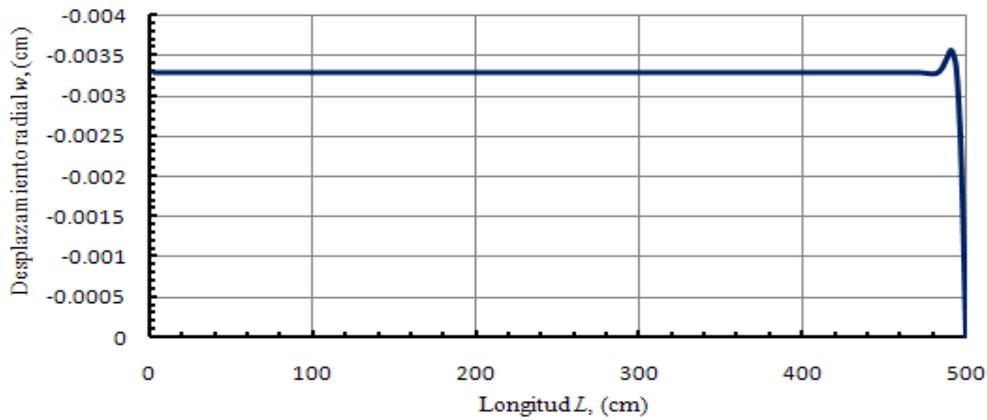
a)



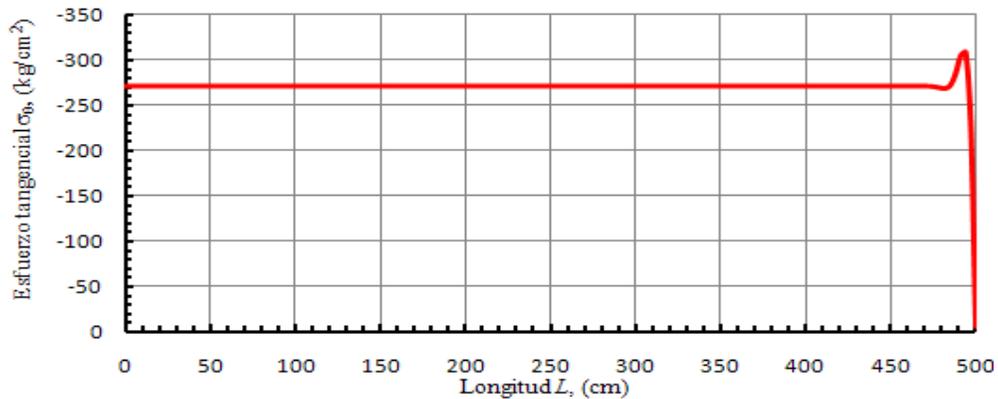
$$\sigma_\theta = -270.5\text{kg/cm}^2$$

b)

Figura III.7. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial σ_θ



Gráfica III.7. Desplazamiento radial w debido a (p_e)

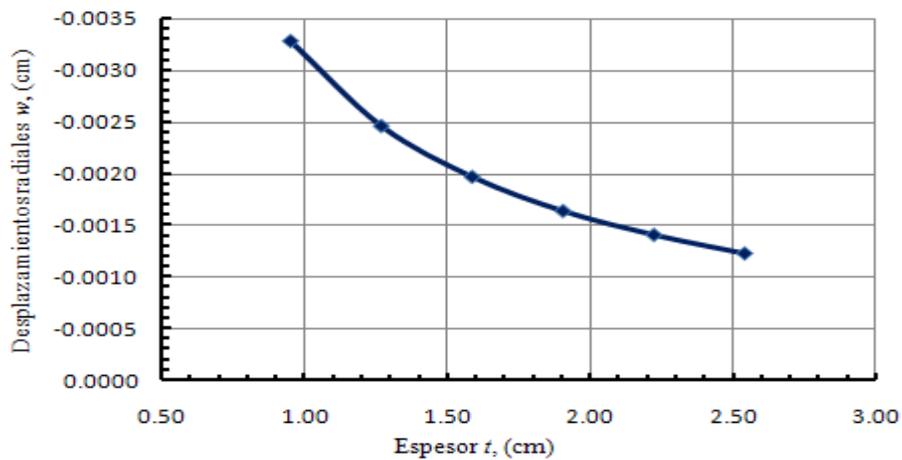


Gráfica III.8. Esfuerzo tangencial σ_θ debido a (p_e)

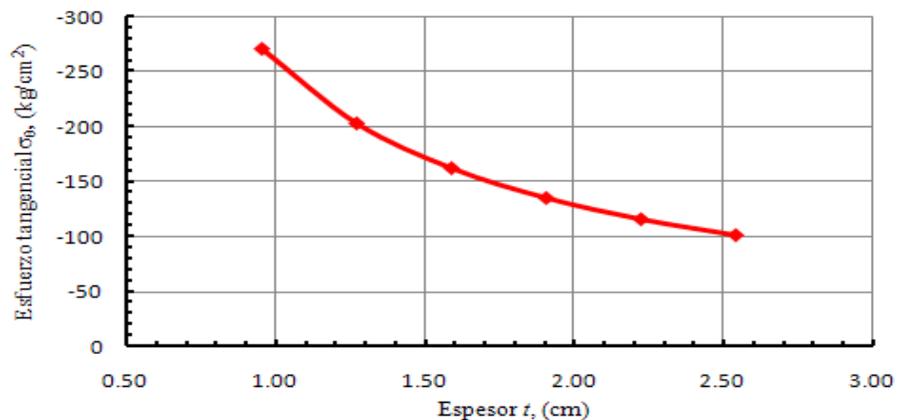
En la tabla III.3, se muestran los resultados de un análisis paramétrico, derivados de los distintos espesores. En las gráficas III.9 y III.10 se representan los desplazamientos radiales w y esfuerzos tangenciales σ_θ , para el ducto sometido a presión externa.

Tabla III.3. Resumen de análisis numérico con MEF debido a (p_e)

Espesor (t)		R	r_e	t/D	Desplazamiento radial w	Esfuerzo tangencial σ_θ
Pulg.	cm	cm	cm		cm	Kg/cm ²
3/8"	0.9525	25.8763	26.3525	0.01875	-0.00345	-270.50
1/2"	1.2700	26.0350	26.6700	0.02500	-0.00246	-202.84
5/8"	1.5875	26.1938	26.9875	0.03125	-0.00197	-162.27
3/4"	1.9050	26.3525	27.3050	0.03750	-0.00164	-135.23
7/8"	2.2225	26.5113	27.6225	0.04375	-0.00141	-115.91
1"	2.5400	26.6700	27.9400	0.05000	-0.00123	-101.42

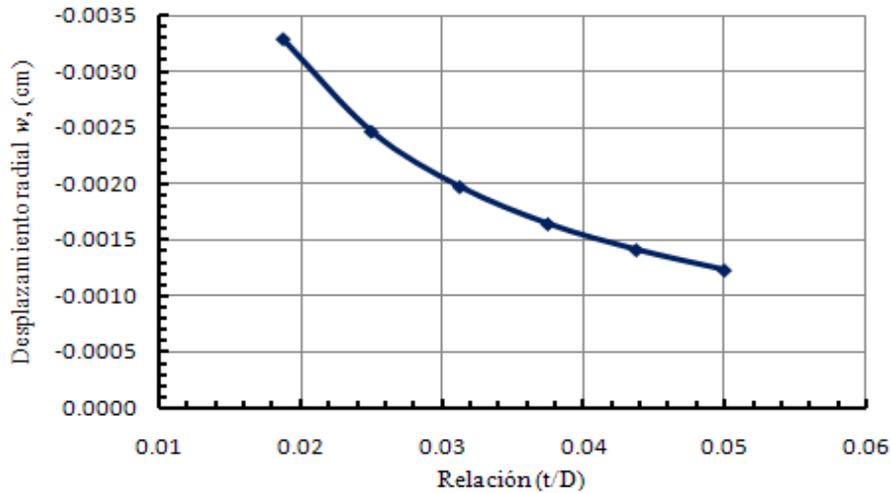


Gráfica III.9. Variación de desplazamientos radiales w debido a (p_e)

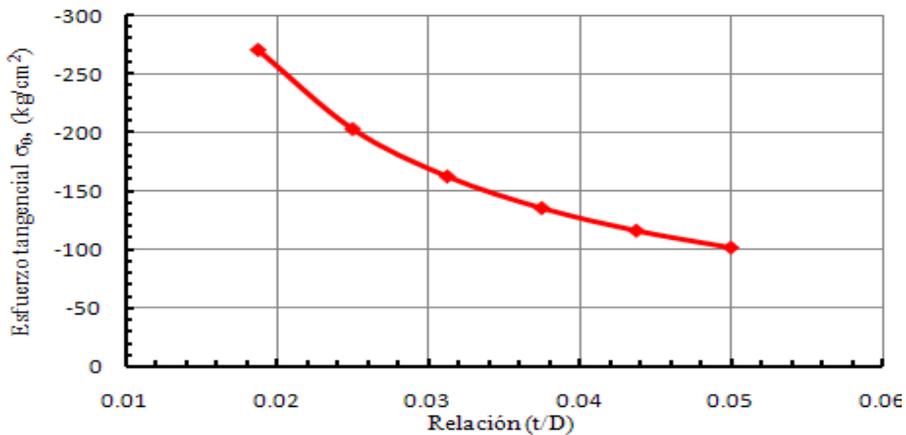


Gráfica III.10. Variación de esfuerzos tangenciales σ_θ debido a (p_e)

A continuación se muestran en las gráficas III.11 y III.12 que corresponden a los desplazamientos y esfuerzos considerando la relación (t/D).



Gráfica III.11. Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_e)



Gráfica III.12. Esfuerzos tangenciales σ_θ vs t/D debido a (p_e)

Caso c) Ducto sometido a fuerza axial

En esta parte se modela el ducto con una carga impuesta que corresponde a una fuerza de tensión (T), la cual ha sido aplicada al modelo de elementos finitos en función de un porcentaje de la tensión máxima asociada al esfuerzo de fluencia del material en estudio. Las cargas aplicadas corresponden a 2, 5, 10 y 20 por ciento del esfuerzo de fluencia σ_y .

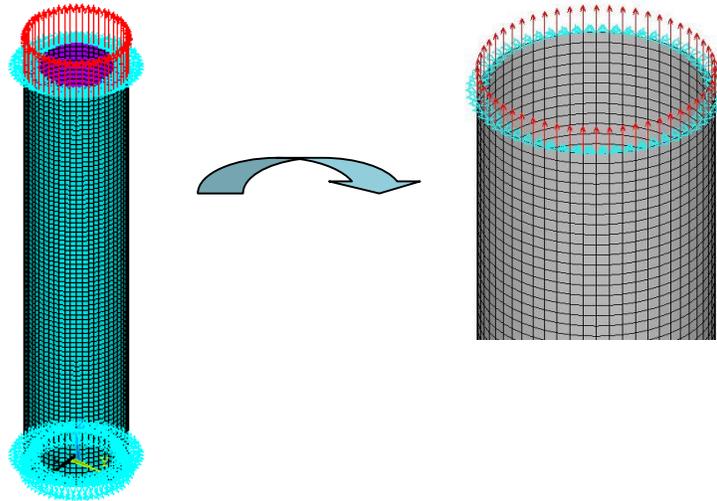


Figura III.8. Modelo con carga de tensión y condiciones de frontera

La figura III.8 presenta el ducto con la fuerza de tensión aplicada en la dirección longitudinal. Así mismo se indican las condiciones de frontera antes mencionadas. Cabe mencionar que se realizaron 24 análisis de modelado numérico para esta condición de carga, ya que cada ducto con su respectivo diámetro se somete a cuatro distintas fuerzas de tensión, como ya se ha indicado.

Resultados numéricos

A continuación se muestra el análisis de un ducto de espesor 0.9525cm (3/8”) bajo una carga a tensión de $0.02T_{ymáx}$, (ver ecuación 3.1). En las figuras III.9.a y III.9.b se muestra los desplazamientos y esfuerzos numéricos para la condición de un ducto sometido a fuerzas de tensión.



$$\Delta_L = 0.0353cm$$

a)



$$\sigma_L = 87.29kg/cm^2$$

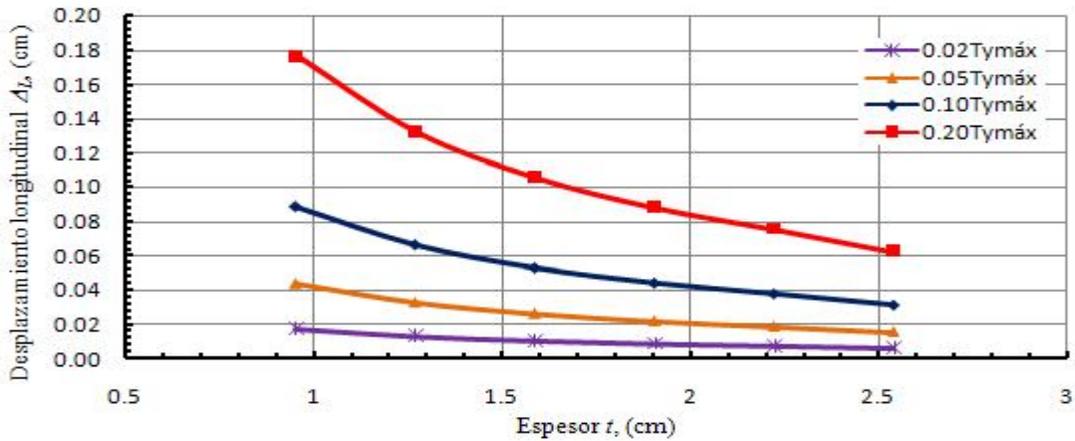
b)

Figura III.9. Resultados numéricos, a) Desplazamiento longitudinal Δ_L , b) Esfuerzo longitudinal σ_L

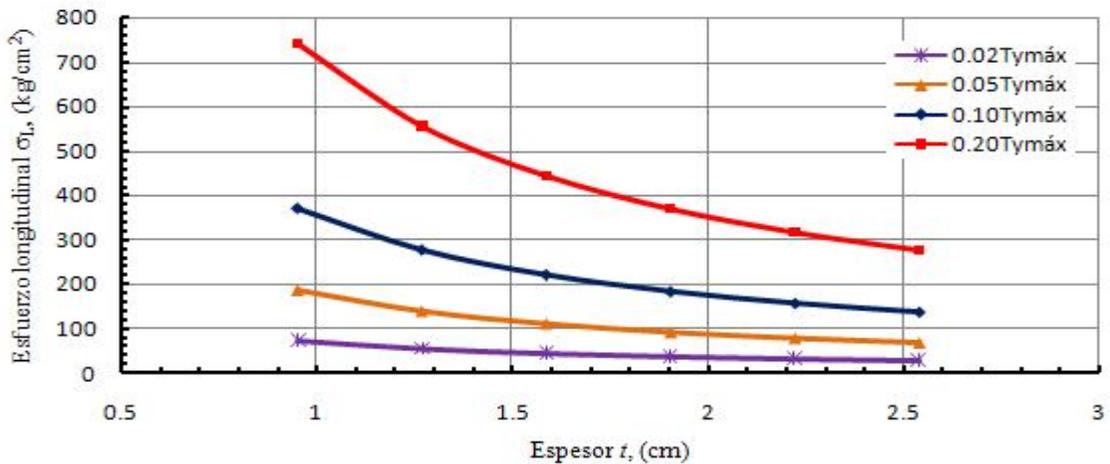
Se realizó un análisis paramétrico para los distintos espesores, los resultados se muestran en la tabla III.4, y en las gráficas III.13 se muestran los desplazamientos y esfuerzos, respectivamente.

Tabla III.4. Resumen de análisis numérico con MEF para (T)

Espesor (t)		t/D	Desplazamientos longitudinales Δ_L				Esfuerzos longitudinales σ_L			
Pulg.	cm		cm	0.02Ty	0.05Ty	0.10Ty	0.20Ty	0.02Ty	0.05Ty	0.10Ty
3/8"	0.9525	0.01875	0.03534	0.08835	0.17671	0.35342	87.394	218.49	436.97	873.94
1/2"	1.27	0.02500	0.02650	0.06626	0.13250	0.26500	65.295	163.24	326.48	652.95
5/8"	1.5875	0.03125	0.02120	0.05300	0.10600	0.21200	52.00	130.00	260.01	520.03
3/4"	1.905	0.03750	0.01767	0.04417	0.08834	0.17670	43.25	108.12	216.25	432.49
7/8"	2.2225	0.04375	0.01514	0.03786	0.07570	0.15140	37.23	93.08	186.16	372.32
1"	2.54	0.05000	0.01320	0.03310	0.06625	0.13250	32.67	81.66	163.33	326.66

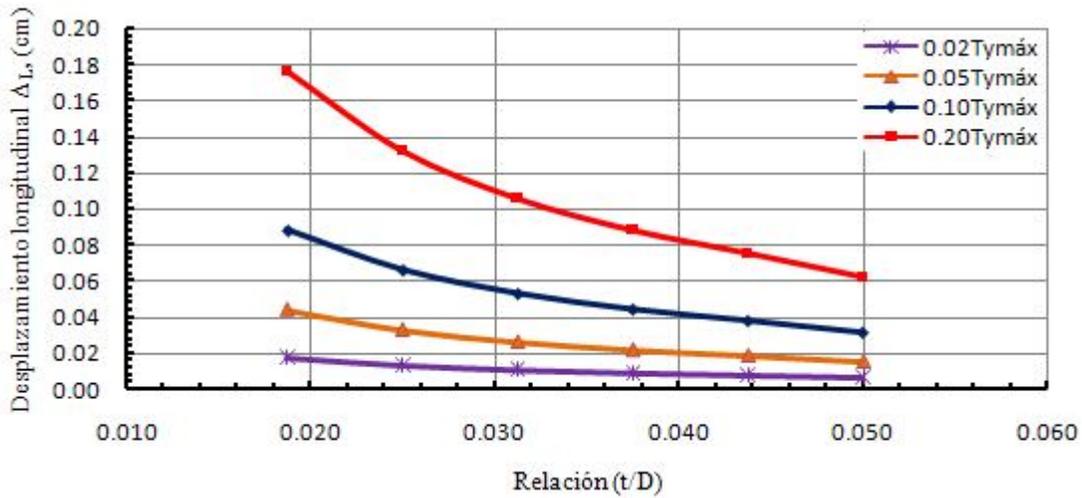


Gráfica III.13. Variación de desplazamientos longitudinales Δ_L , debido a (T)

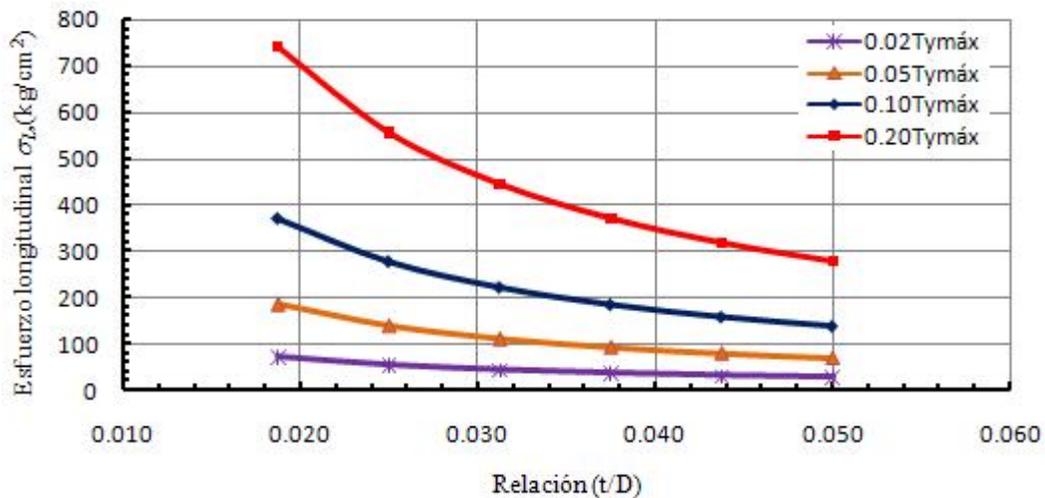


Gráfica III.14. Variación de esfuerzos longitudinales σ_L , debido a (T)

A continuación se muestran en las gráficas III.15 y III.16 los desplazamientos y esfuerzos considerando la relación t/D .



Gráfica III.15. Desplazamientos longitudinales Δ_L vs t/D , debido a (T)



Gráfica III.16. Esfuerzos longitudinales σ_L vs t/D debido a (T)

Caso d) Ducto sometido a momento flexionante

El siguiente estado de carga del sistema es flexión pura, para lo cual se consideran diferentes magnitudes de momentos para cada espesor indicado, éstos corresponden al 10, 20, 30, 40 y 50 por ciento del esfuerzo de fluencia del material (σ_y). La flexión se introduce en el modelo a través de pares de fuerza en los nodos de los extremos, como se muestra en la figura III.10. Las fuerzas se obtienen mediante la ecuación (3.3).

Respecto a las condiciones límites, éstas se encuentran en el centro del ducto ($L/2$), en la que en dos nodos se restringen los desplazamientos y giros; en los nodos restantes solo se restringe el desplazamiento en la dirección longitudinal, u_z , esto con la finalidad de lograr la flexión del tubo ante la carga aplicada, ver figura III.10.

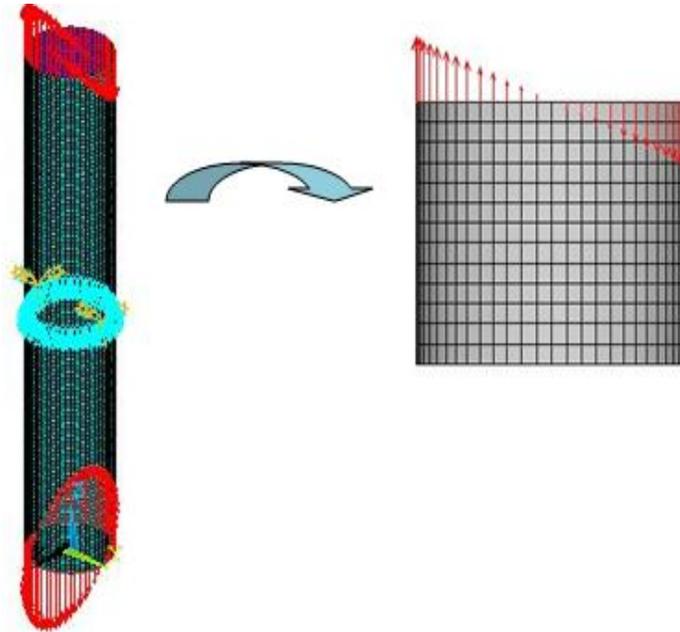


Figura III.10. Modelo sometido a cargas de flexión y condiciones de frontera

Resultados numéricos

De igual forma que los casos anteriores se muestra el análisis numérico del ducto correspondiente al espesor de $t=0.9525\text{cm}$ ($3/8''$) sometida a momento flexionante que producen un esfuerzo equivalente de $0.1\sigma_y$. Posteriormente en la tabla III.5 se muestra un resumen de resultados para diferentes espesores.

En las figuras III.11.a muestra que el desplazamiento máximo se localiza en los extremos del ducto, y la figura III.11.b muestra el esfuerzo en la dirección longitudinal.

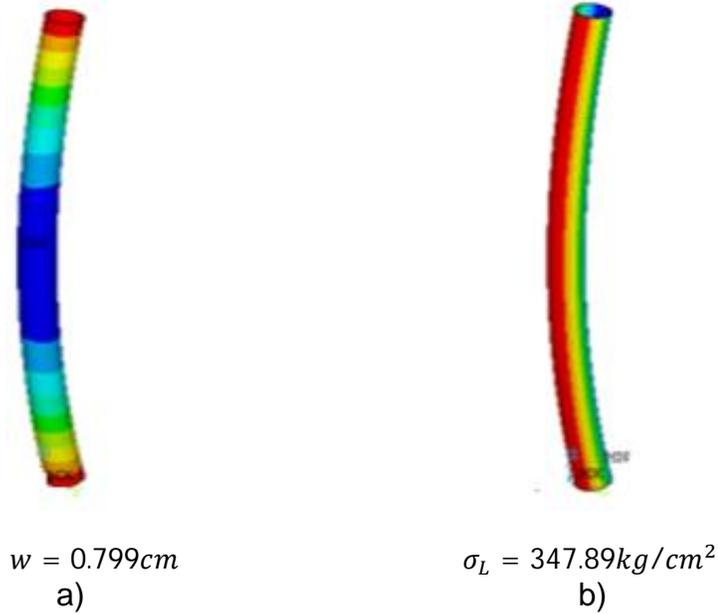
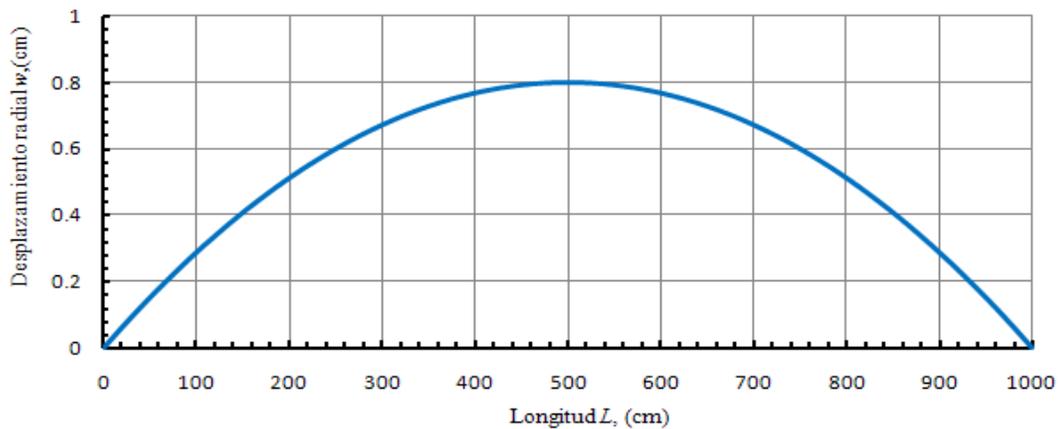


Figura III.11. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo longitudinal σ_L

Una vez obtenidos los desplazamientos se transforman, tal como se muestra en la gráfica III.17, donde el desplazamiento máximo ahora se localiza a la mitad del ducto.

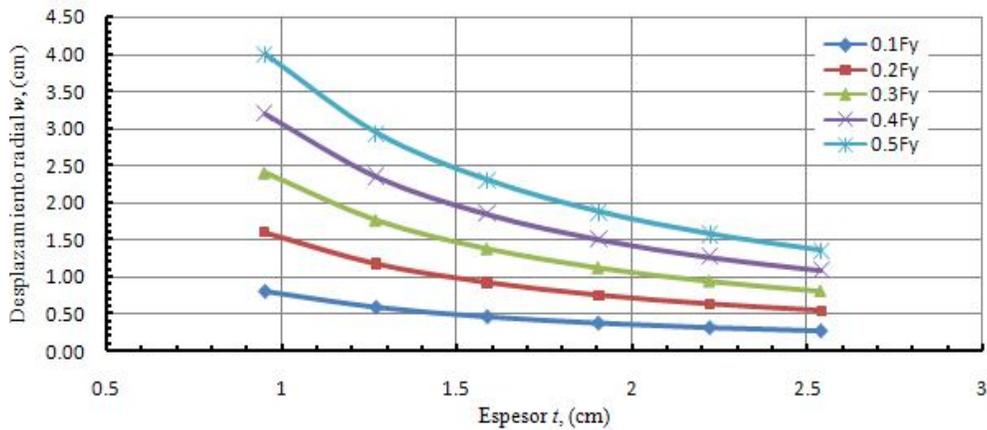


Gráfica III.17. Desplazamiento radial w debido a (M)

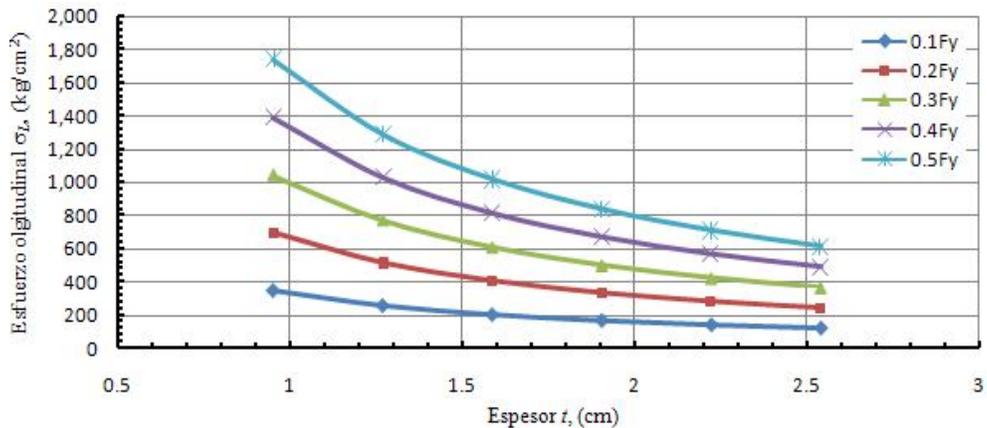
Se realizó un análisis paramétrico para los distintos espesores, los resultados se muestran en la tabla III.5, y en las gráficas III.18 y III.19 se muestran los desplazamientos y esfuerzos, respectivamente.

Tabla III.5. Resumen de análisis numérico con MEF debido a (M)

Espesor (t)		t/D	Desplazamientos radiales, (w)					Esfuerzos longitudinales (σ_L)				
Pulg.	cm		$0.1\sigma_y$	$0.2\sigma_y$	$0.3\sigma_y$	$0.4\sigma_y$	$0.5\sigma_y$	$0.1\sigma_y$	$0.2\sigma_y$	$0.3\sigma_y$	$0.4\sigma_y$	$0.5\sigma_y$
3/8"	0.9525	0.01875	0.7999	1.5998	2.3997	3.1996	3.9995	347.84	695.68	1043.5	1391.4	1739
1/2"	1.27	0.025	0.5885	1.1770	1.7655	2.3540	2.9425	257.58	515.16	772.74	1030.3	1288
5/8"	1.5875	0.03125	0.4619	0.9238	1.3858	1.8477	2.3096	203.47	406.93	610.4	813.86	1017
3/4"	1.905	0.0375	0.3770	0.7540	1.1310	1.5080	1.8850	167.38	334.76	502.14	669.52	836.9
7/8"	2.2225	0.04375	0.3170	0.6340	0.9510	1.2680	1.5850	141.63	283.25	424.88	566.5	708.1
1"	2.54	0.05	0.2730	0.5460	0.8190	1.0920	1.3650	122.31	244.61	366.92	489.22	611.5

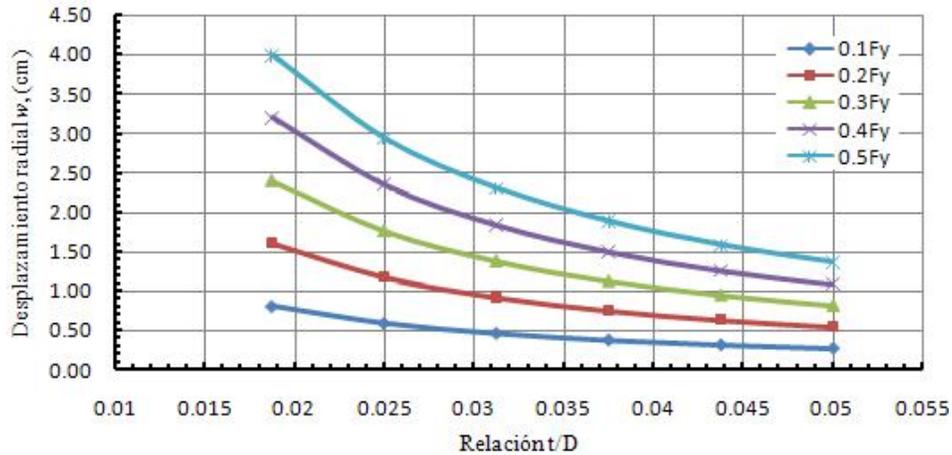


Gráfica III.18. Variación de desplazamientos radiales w , debido a (M)

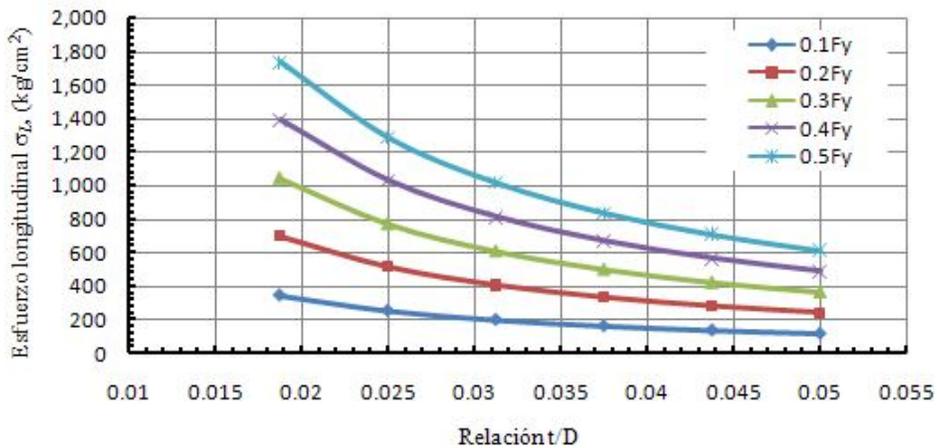


Gráfica III.19. Variación de esfuerzos longitudinales σ_L , debido a (M)

A continuación se muestran en las gráficas III.20 y III.21 los desplazamientos y esfuerzos considerando la relación t/D .



Gráfica III.20. Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (M)



Gráfica III.21. Esfuerzos longitudinales σ_L vs t/D debido a (M)

Como se observa en las figuras anteriores, solo se ve reflejado los esfuerzos longitudinales, ya que son mayores comparados con los esfuerzos radiales y tangenciales, ya que en estos últimos sus valores son muy pequeños, por lo que se consideran nulos.

III.2.2 DUCTOS SOMETIDOS A COMBINACIONES DE CARGA

Caso a) Ducto sometido presión interna más tensión

En esta parte se presentan los resultados numéricos derivados de la combinación de carga de presión interna más tensión ($p_i + T$), donde las fuerzas de tensión aplicadas corresponden a un determinado porcentaje de la tensión máxima asociada al esfuerzo de fluencia del material en estudio; los porcentajes aplicados

corresponden a 2, 5, 10 y 20 por ciento de la fuerza de tensión asociada al esfuerzo de fluencia σ_y .

Se muestra el modelo numérico correspondiente a $t=0.9525\text{cm}$ (3/8") sometido a p_i de 10.19 kg/cm^2 (1Mpa) y la carga aplicada corresponde al 2% de la tensión máxima de fluencia. En la figura III.12 se muestra la combinación de carga mencionada.

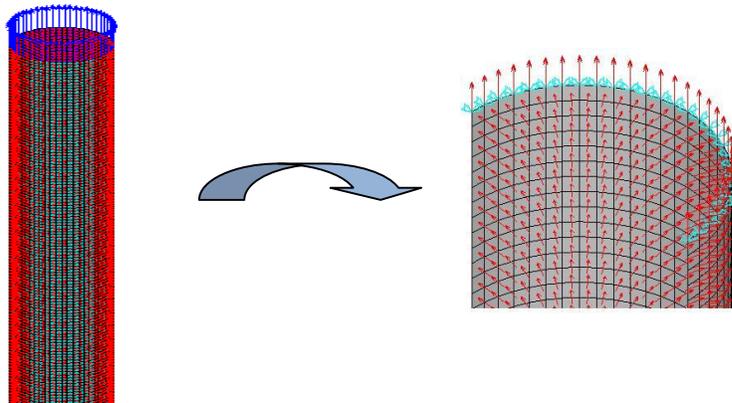


Figura III.12. Modelo sometido presión interna y tensión (p_i+T)

Resultados numéricos

A continuación se muestra el modelo de 3/8" bajo una presión de 10.19 kg/cm^2 (1Mpa), que se mantiene constante y una tensión de $0.02T_{y\text{max}}$. En las figuras III.13.a y III.13.b, se muestran los desplazamientos y esfuerzos numéricos para la condición de ($p_i + T$). De igual forma estos resultados se muestran en las gráficas III.22 y III.23.

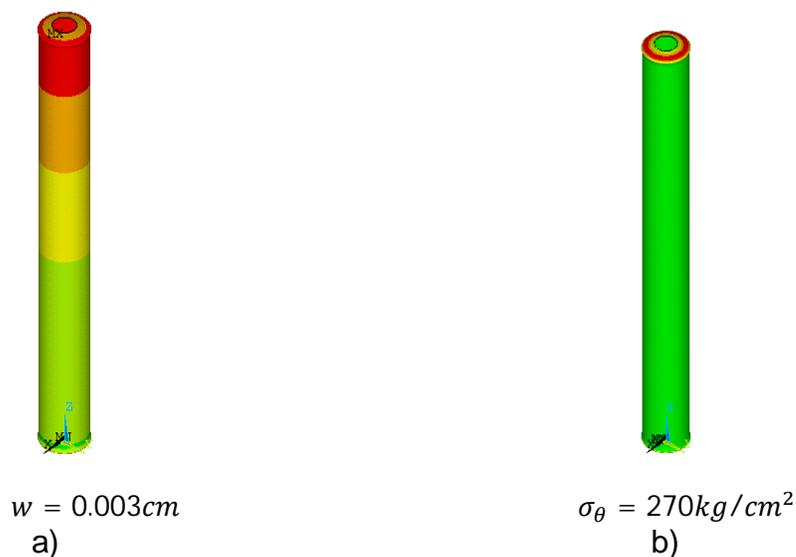
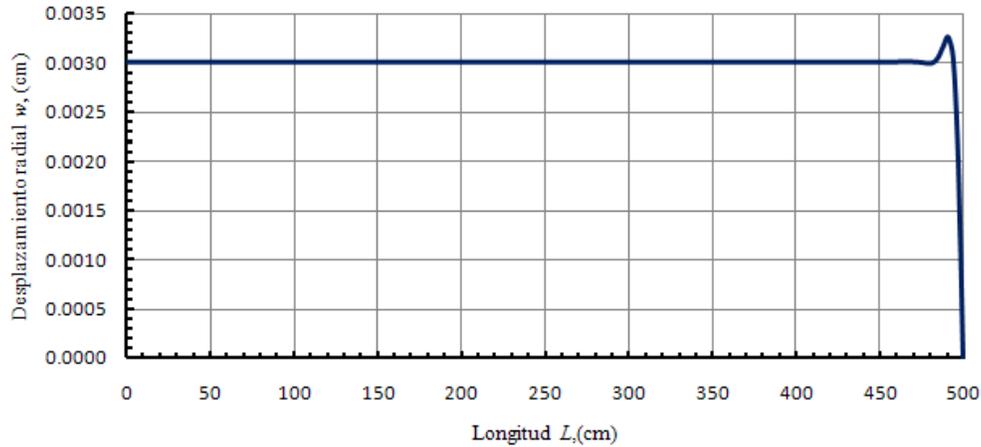
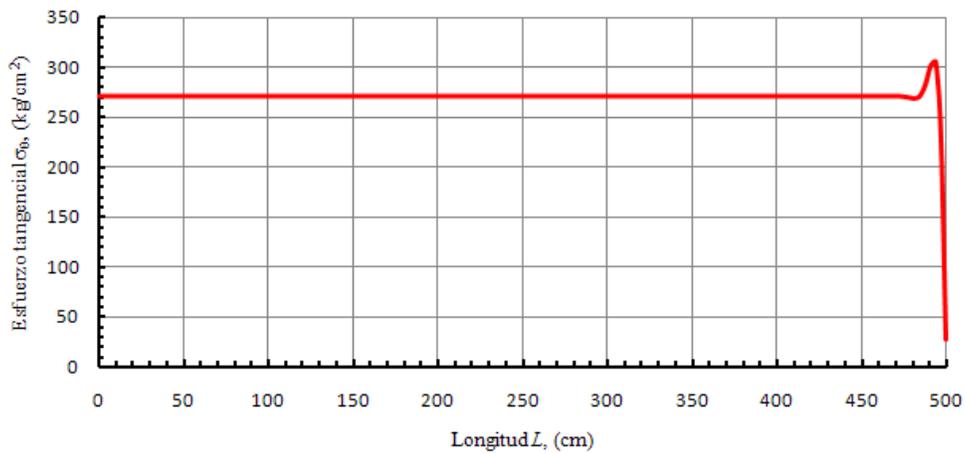


Figura III.13. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo angencial (σ_θ)



Gráfica III.22. Desplazamiento radial w debido a (p_i+T)



Gráfica III.23. Esfuerzo tangencial σ_θ debido a (p_i+T)

De igual forma se realizó un análisis paramétrico para los distintos espesores, los resultados de desplazamientos y esfuerzos se muestran en la tabla III.6 y III.7, respectivamente.

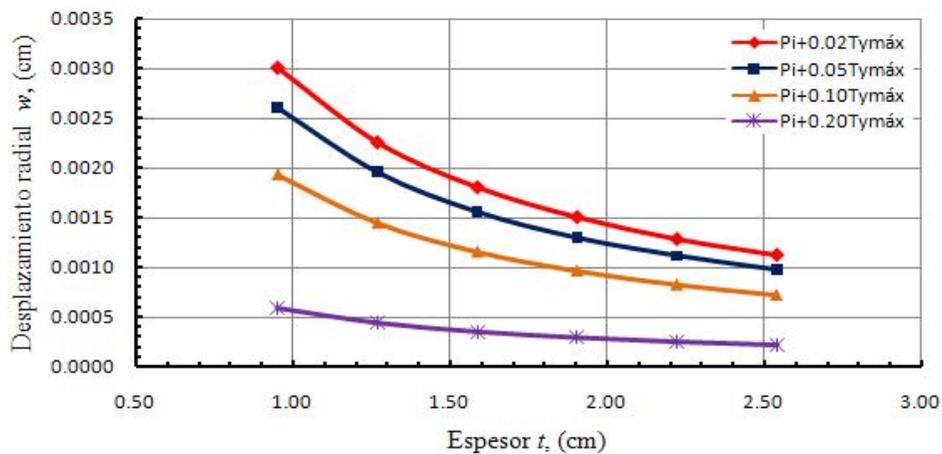
Tabla III.6. Resumen de desplazamientos radiales debido a (p_i+T)

Espesor (t)		R	r_e	t/D	Desplazamiento radial w			
Pulg.	cm	cm	cm		0.02Ty	0.05Ty	0.10Ty	0.20Ty
3/8"	0.9525	25.8763	26.3525	0.01875	0.00301	0.0026	0.0019	0.0006
1/2"	1.2700	26.0350	26.6700	0.02500	0.00226	0.0020	0.0015	0.0004
5/8"	1.5875	26.1938	26.9875	0.03125	0.00181	0.0016	0.0012	0.0004
3/4"	1.9050	26.3525	27.3050	0.03750	0.00151	0.0013	0.0010	0.0003
7/8"	2.2225	26.5113	27.6225	0.04375	0.00129	0.0011	0.0008	0.0003
1"	2.5400	26.6700	27.9400	0.05000	0.00113	0.0010	0.0007	0.0002

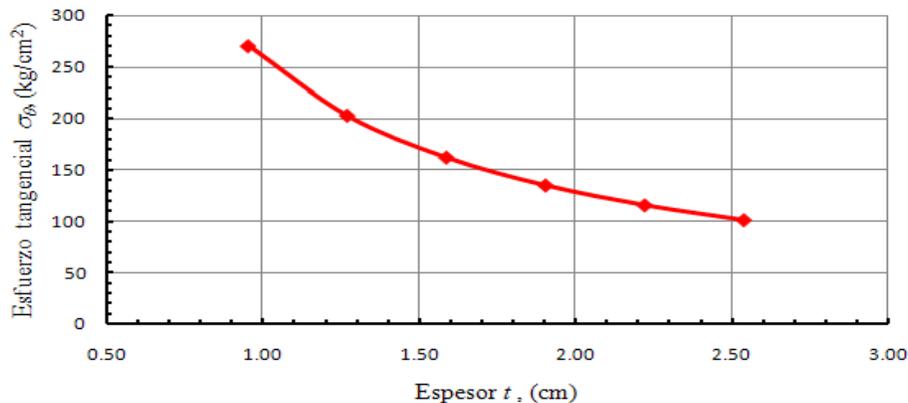
Tabla III.7. Resumen de esfuerzos tangenciales debido a (p_i+T)

p_i (kg/cm ²)	Tensión	Espesor (cm)	0.952	1.27	1.587	1.905	2.22	2.54
10.19	0.02Ty	Esfuerzo tangencial σ_θ , (kg/cm ²)	270.45	202.84	162.27	135.23	115.91	101.42
	0.05Ty		270.45	202.84	162.27	135.23	115.91	101.42
	0.10Ty		270.45	202.84	162.27	135.23	115.91	101.42
	0.20Ty		270.45	202.84	162.27	135.23	115.91	101.42

En las gráficas III.24 y III.25 se muestran los desplazamientos y esfuerzos considerando presión interna constantes de 10.19 kg/cm² y diferentes porcentajes de fuerza de tensión aplicados a cada espesor.



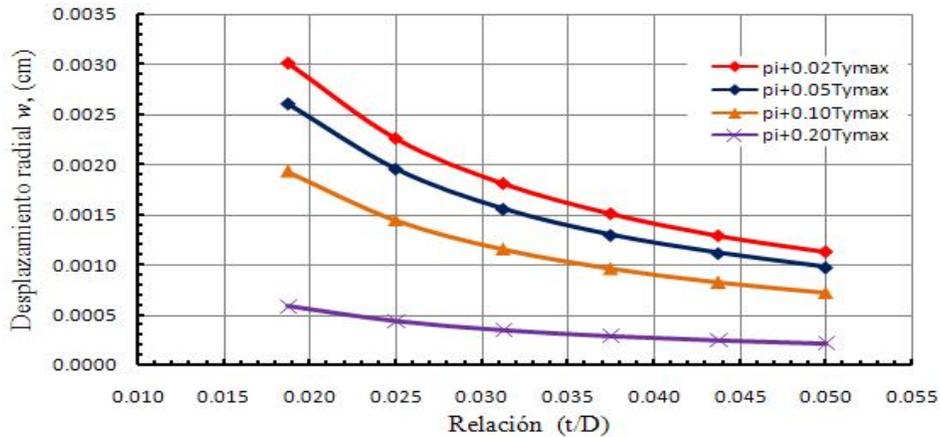
Gráfica III.24. Variación de los desplazamientos radiales w , debido a (p_i+T)



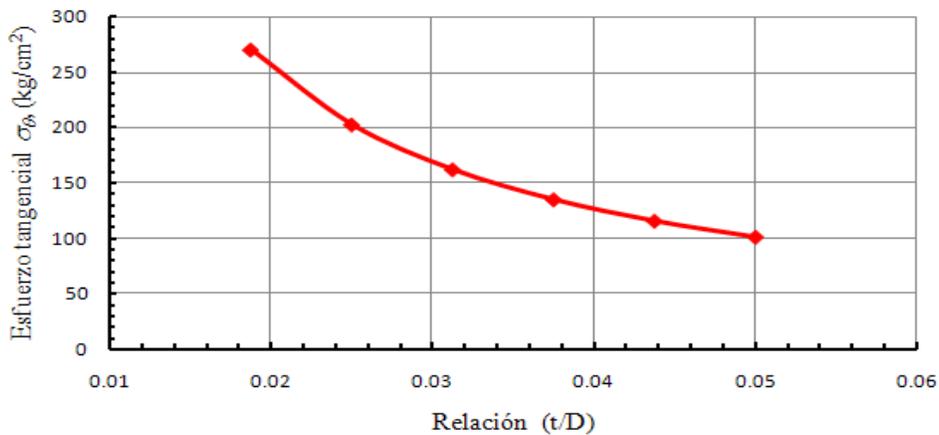
Gráfica III.25. Variación de esfuerzos tangenciales σ_θ , debido a (p_i+T)

Como se observa en las figura III.25 y la tabla III.7, los esfuerzo tangenciales son constantes, por lo que no influye las distintas fuerzas de tensión aplicada a los modelos.

A continuación se muestra en las gráficas III.26 y III.27 los desplazamientos y esfuerzos considerando la relación t/D .



Gráfica III.26. Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_i+T)



Gráfica III.27. Esfuerzos tangenciales σ_θ vs t/D debido a (p_i+T)

Caso b) Ducto sometido presión externa más tensión

Se modela el ducto para la carga de presión externa combinada con una fuerza de tensión.

Las fuerzas de tensión aplicadas, corresponden a un determinado porcentaje de la tensión máxima asociada al esfuerzo de fluencia del material; las distintas cantidades de carga aplicados al modelo son los siguientes:

- Presión externa + 2% T_y
- Presión externa + 5% T_y
- Presión externa + 10% T_y
- Presión externa + 20% T_y

Resultados numéricos

La presión externa aplicada al modelo es de 10.19 kg/cm^2 , para un $t=0.9525\text{cm}$ ($3/8''$). En las figuras III.14.a y III.14.b se muestran los desplazamientos y esfuerzos numéricos para la condición de presión externa y una tensión de $0.02T_{y\text{max}}$. De igual forma estos resultados se muestran en las gráficas III.28 y III.29.



$$w = -0.0035\text{cm}$$

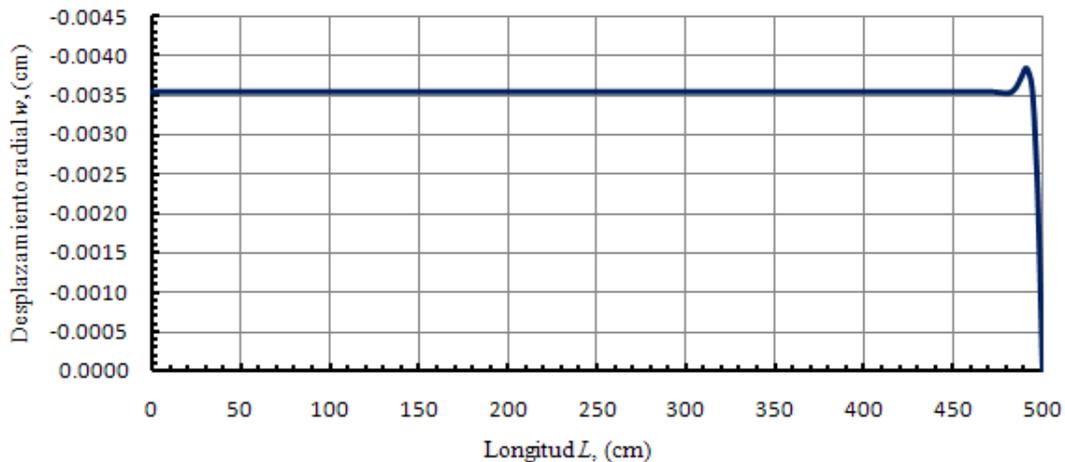
a)



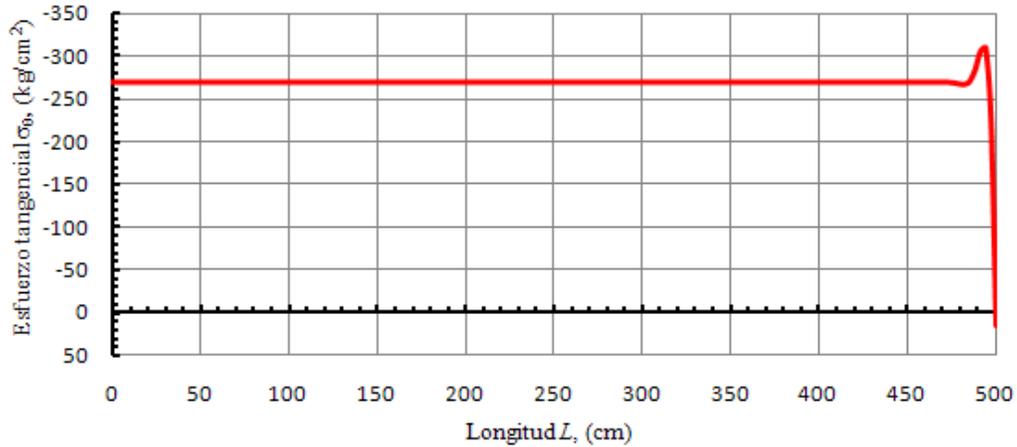
$$\sigma_{\theta} = -270\text{kg/cm}^2$$

b)

Figura III.14. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial (σ_{θ})



Gráfica III.28. Desplazamiento radial w debido a (p_e+T)



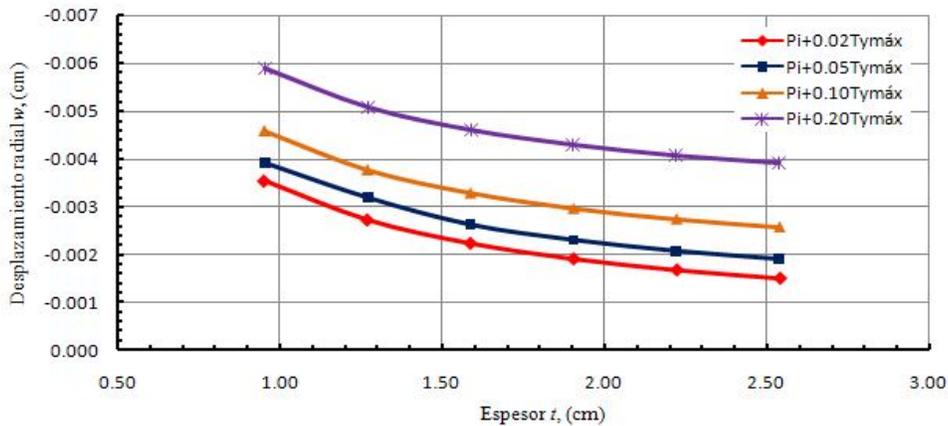
Gráfica III.29. Esfuerzo tangencial σ_{θ} debido a (p_e+T)

De la igual forma se realizó un análisis paramétrico para los distintos espesores, los resultados se muestran en la tabla III.8.

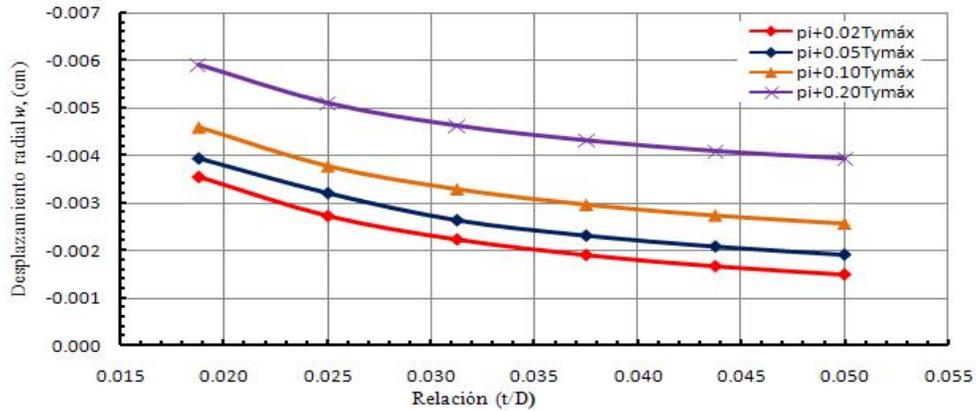
Tabla III.8. Resumen de análisis numérico con MEF debido a (p_e+T)

Espesor (t)		R	re	t/D	σ_{θ}	Desplazamiento radial w			
Pulg.	cm	cm	cm		kg/cm ²	0.02Ty	0.05Ty	0.10Ty	0.20Ty
3/8"	0.9525	25.8763	26.3525	0.01875	270.45	-0.00354	-0.00393	-0.00459	-0.005897
1/2"	1.2700	26.0350	26.6700	0.02500	202.84	-0.002724	-0.003199	-0.003776	-0.00509
5/8"	1.5875	26.1938	26.9875	0.03125	162.27	-0.002233	-0.00263	-0.003297	-0.004616
3/4"	1.9050	26.3525	27.3050	0.03750	135.23	-0.001907	-0.002306	-0.002972	-0.004304
7/8"	2.2225	26.5113	27.6225	0.04375	115.91	-0.001674	-0.002076	-0.002746	-0.00408
1"	2.5400	26.6700	27.9400	0.05000	101.42	-0.0015	-0.001905	-0.002578	-0.003926

En las gráficas III.30 y III.31 se muestran los desplazamientos y esfuerzos considerando presión interna constante de 10.19 kg/cm² y diferentes porcentajes de fuerza de tensión aplicados a cada espesor.



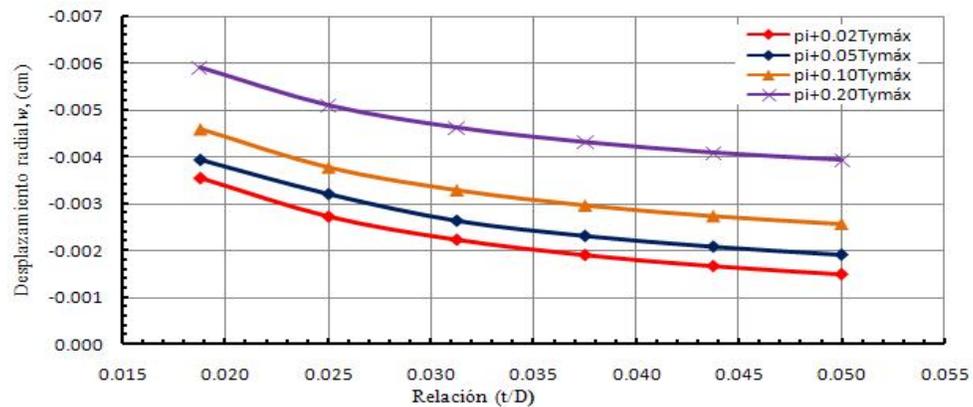
Gráfica III.30. Variación de los desplazamientos radiales w debido a (p_e+T)



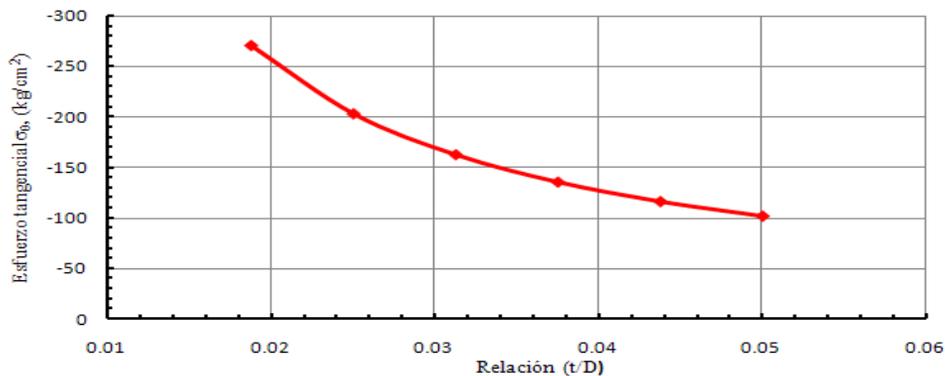
Gráfica III.31. Variación de esfuerzos tangenciales σ_θ debido a (p_e+T)

Igual que la combinación de carga anterior, se observa en la figura III.31 que los esfuerzos tangenciales son constantes, por lo que no influyen las distintas de fuerzas de tensión aplicada a los modelos.

A continuación se muestra en las gráficas III.32 y III.33 los desplazamientos y esfuerzos considerando la relación t/D.



Gráfica III.32. Desplazamientos radiales w vs t/D debido a (p_e+T)



Gráfica III.33. Esfuerzos tangenciales σ_θ vs t/D debido a (p_e+T)

Caso c) Ducto sometido presión interna más flexión

Se modela el ducto para la carga de presión interna combinada con momento flexionante, para lo cual se consideran diferentes magnitudes de momentos para cada espesor indicado, los momentos corresponden a 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5 del esfuerzo de fluencia del material (σ_y).

De igual forma se muestra el modelo numérico correspondiente al espesor de $t=0.9525\text{cm}$ ($3/8''$) sometida a presión interna y momento flexionante de $0.1 \sigma_y$. La flexión se introduce en el modelo a través de pares de fuerza en los nodos de los extremos, como se muestra en la figura III.15.

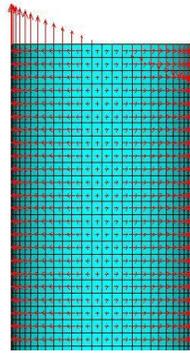


Figura III.15. Modelo sometido presión interna y flexión (p_i+M)

Resultados numéricos

La presión interna aplicada al modelo es de 10.19 kg/cm^2 , para un $t=0.9525\text{cm}$ ($3/8''$). En las figuras III.16.a y III.16.b se muestran los desplazamientos y esfuerzos numéricos para la condición de presión interna y momento flexionante.

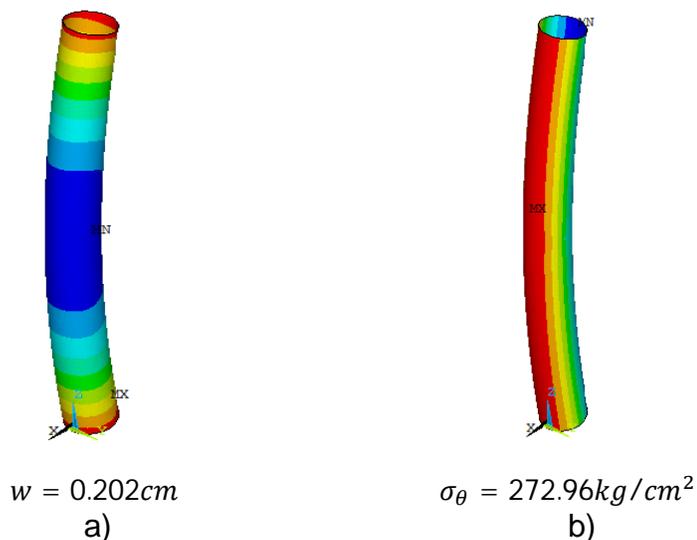
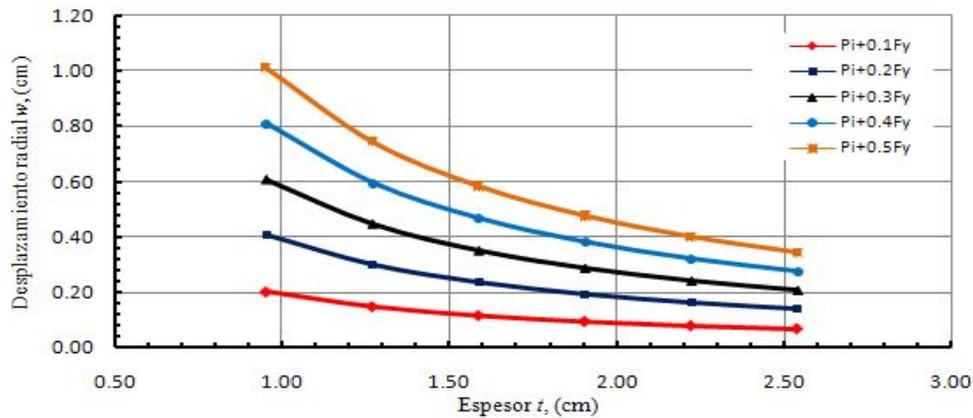


Figura III.16. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial (σ_θ)

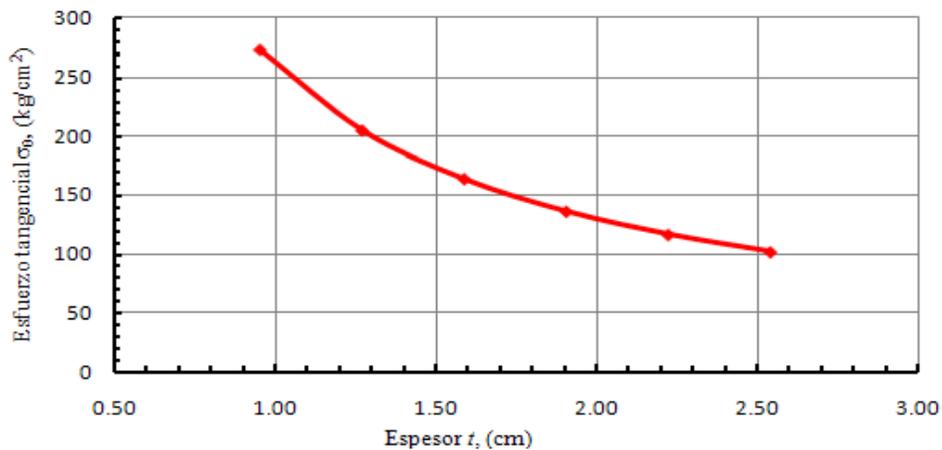
Se realizó un análisis paramétrico para los distintos espesores, los resultados se muestran en la tabla III.9, y en las gráficas III.34 y III.35 se muestran los desplazamientos y esfuerzos considerando presión interna de 10.19 kg/cm² y diferentes cantidades de momento flexionante, los momentos corresponden a 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5 del esfuerzo de fluencia del material (σ_y).

Tabla III.9. Resumen de análisis numérico con MEF debido a (pi+M)

Espesor (t)		r_i	R	r_e	t/D	Esf. Tangencial σ_θ kg/cm ²	Desplazamiento radial w				
Pulg.	cm	cm	cm	cm			0.1 σ_y	0.2 σ_y	0.3 σ_y	0.4 σ_y	0.5 σ_y
3/8"	0.9525	25.40	25.876	26.353	0.019	272.96	0.2023	0.4046	0.6068	0.8091	1.0114
1/2"	1.2700	25.40	26.035	26.670	0.025	204.76	0.1489	0.2977	0.4466	0.5954	0.7443
5/8"	1.5875	25.40	26.194	26.988	0.031	163.61	0.1168	0.2337	0.3505	0.4674	0.5842
3/4"	1.9050	25.40	26.353	27.305	0.038	136.13	0.0955	0.1911	0.2866	0.3821	0.4776
7/8"	2.2225	25.40	26.511	27.623	0.044	116.5	0.0803	0.1607	0.2410	0.3213	0.4016
1"	2.5400	25.40	26.670	27.940	0.050	101.81	0.0689	0.1379	0.2069	0.2758	0.3447



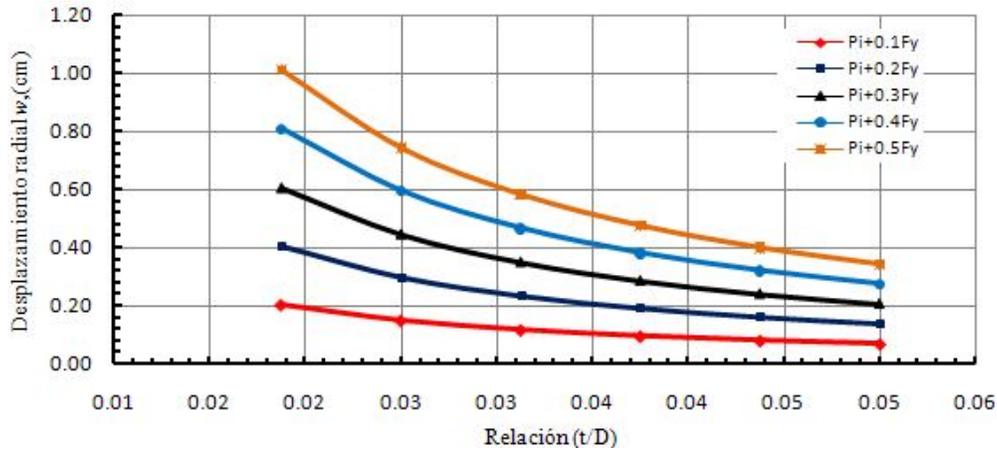
Gráfica III.34. Variación de desplazamientos radiales w debido a (pi+M)



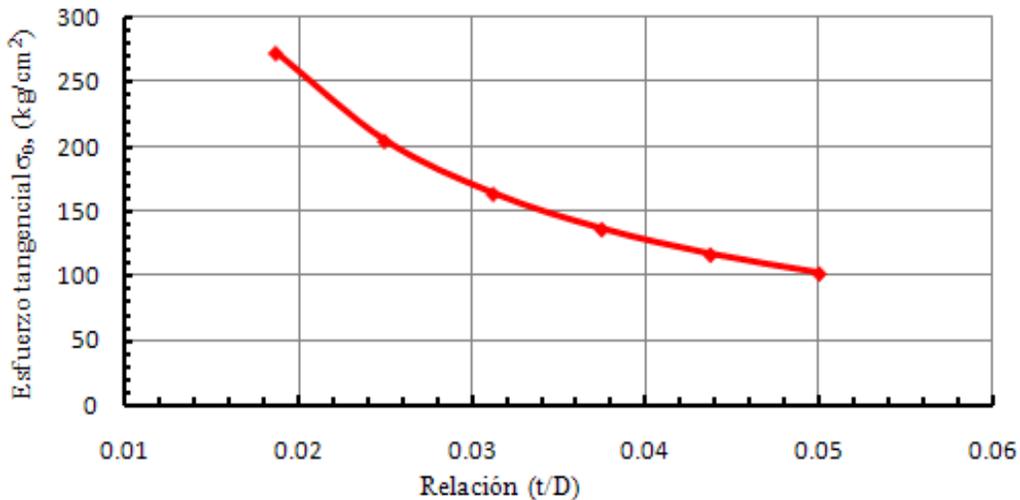
Gráfica III.35. Variación de esfuerzos tangenciales σ_θ , debido a (pi+M)

También se observa en la figura III.35 que los esfuerzos longitudinales σ_L , son constantes, por lo que no influyen los distintos momentos de flexión aplicado a los modelos.

A continuación se muestran en las gráficas III.36 y III.37 los desplazamientos y esfuerzos considerando la relación t/D .



Gráfica III.36. Desplazamientos radiales w vs t/D debido a $(\pi+M)$



Gráfica III.37. Esfuerzos tangenciales σ_θ vs t/D debido a $(\pi+M)$

III.3 MODELADO NUMÉRICO NO LINEAL

Un problema no lineal es aquel en el que las deformaciones dejan de ser lineales, después de que el material entra en el intervalo plástico y la rigidez de la estructura va cambiando a medida que ésta se deforma. En realidad todas las estructuras se comportan de manera no lineal, aunque a veces para fines ingenieriles de diseño es suficiente con realizar un análisis lineal del problema

para estudiar su comportamiento. Existen muchos problemas de importancia en los que no se preserva tal linealidad, por lo que, es necesario incluir la no linealidad. Para estudiar dicho comportamiento se llevará a cabo un análisis incremental, utilizando la técnica de los elementos finitos con la ayuda del programa Ansys versión 11, el cual usa el método de Newton Raphson para la solución del sistema de ecuaciones planteadas.

III.3.1 HIPÓTESIS FUNDAMENTALES

Para realizar este estudio se consideraron las siguientes hipótesis, que ayudan a entender el comportamiento estructural de los ductos.

- a) Las secciones planas del tubo permanecen planas antes y después de la flexión.
- b) Esfuerzos cortantes y radiales son insignificantes y pueden ser ignorados.
- c) Esfuerzos longitudinales y tangenciales son de magnitud considerable, motivo por el cual deben ser tomados en cuenta.
- d) Se considera que el material tiene comportamiento no-lineal con condición de fluencia de Von Mises y endurecimiento isótropo.
- e) El ducto es modelado en 3D ya que reproduce el comportamiento de los ductos bajo combinaciones de cargas.
- d) No se considera análisis por estabilidad.

Características geométricas y mecánicas de los modelos

Las características geométricas y condiciones de frontera de los ductos en estudio son las mismas que fueron empleadas para el análisis lineal.

Las propiedades del material son parámetros de entrada importantes cuando las simulaciones son usadas para estudiar el comportamiento y resistencia de tuberías de acero que emplean comportamiento plástico. El material empleado en este estudio, corresponde al acero X52, cuyas propiedades son las siguientes:

Módulo de elasticidad $E_s =$	2,100,000 kg/cm^2	(206,084Mpa)
Esfuerzo de fluencia $\sigma_y =$	3,658.21 kg/cm^2	(359Mpa)
Relación de Poisson $\nu =$	0.4999	
Esfuerzo último $\sigma_u =$	4,381.82 kg/cm^2	(423Mpa)

Para realizar este tipo de análisis se emplea la curva esfuerzo deformación del material, cuyo comportamiento es complejo y responde a relaciones constitutivas no lineales, de modo que las relaciones entre esfuerzos y deformaciones planteadas son también no lineales. Para el análisis no lineal del material, en esta tesis se emplean dos modelos ó leyes de comportamiento, que corresponden al modelo de Ramberg-Osgood y el modelo bilineal, ver figuras III.17.a y III.17.b, las cuales fueron descritas en el capítulo precedente.

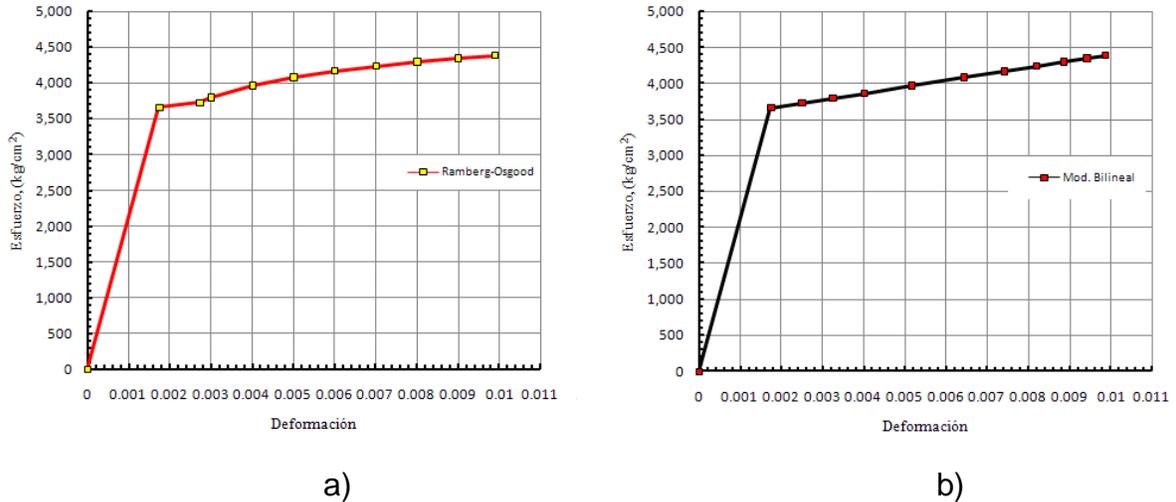


Figura III.17. Curva esfuerzo-deformación, a) Modelo de Ramberg-Osgood, b) Modelo bilineal

Los modelos plásticos se formulan en términos de:

- Superficie de fluencia, que determina el nivel de esfuerzo en el cual se inicia la fluencia.
- Regla de flujo plástico, que define la dirección de la deformación plástica.
- Leyes de evolución que definen el endurecimiento. El camino que debe seguir la superficie de fluencia y/o el flujo a medida que aparece la deformación elástica.

El material es isótropo y presenta endurecimiento por deformación, como se observa en la curva de esfuerzo-deformación de la figura III.17. Como propósito de este estudio, se realiza la comparación entre el modelo de la figura III.17.a y el modelo bilineal de la figura III.17.b.

Elemento seleccionado

Para el análisis no lineal con Ansys se utiliza el elemento Shell 181, figura III.18. Este elemento se adapta adecuadamente para analizar estructuras axisimétricas de pared delgada, así como estructuras de pared moderadamente gruesas,

además de considerar los efectos de la plasticidad. El elemento tiene cuatro nodos con seis grados de libertad en cada nodo: tres traslaciones en los ejes x , y y z y tres rotaciones sobre los ejes ya mencionados (*Ansys Release 2007*).

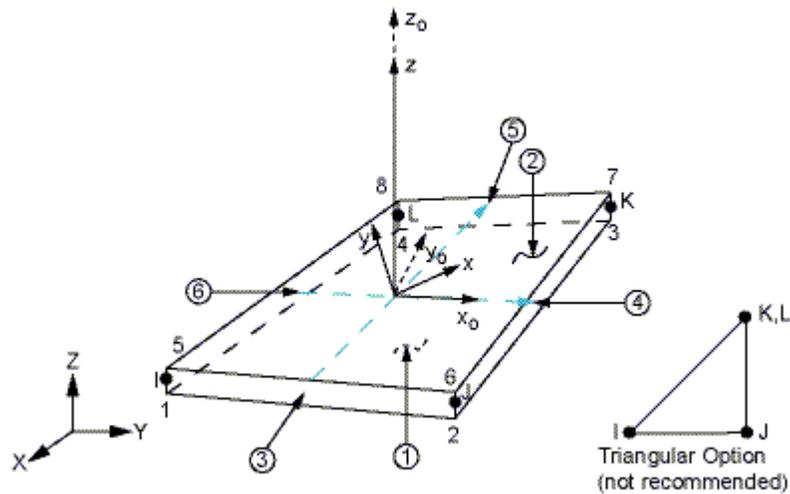


Figura III.18. Elemento Shell 181

El orden de interpolación del elemento Shell 181 generalmente se determina a partir de los nodos usados en el elemento. Las funciones de forma utilizadas para este elemento son cuadráticos o de segundo orden y son productos de polinomios de Lagrange. Por otro lado, la formulación utilizada en Ansys para este elemento se basa en la teoría Lagrangiana. Los problemas de cascarones delegados, asume que la deformación transversal por cortante es tan pequeña que se puede despreciar.

Método de Newton Raphson. Solución de problemas no lineales

Tal y como se ha mencionado con anterioridad, el material que se emplea tiene comportamiento complejo de esfuerzo-deformación y responde a las relaciones constitutivas no lineales. Por lo que es necesario incluir la no linealidad para estudiar el problema.

Una vez discretizado el problema no lineal, éste puede plantearse como un sistema de ecuaciones de la forma:

$$Ka = f \quad (3.4)$$

En donde la matriz de rigidez K puede depender del campo de desplazamientos, que corresponde a las incógnitas del problema.

El problema puede escribirse de la forma:

$$\Psi(a) = K(a)a + f = 0 \quad (3.5)$$

Donde $K(a)a$, representa las fuerzas internas, f las fuerzas externas, y $\Psi(a)$ el vector residual entre fuerzas internas y externas. La solución del problema será aquella que restituya el equilibrio entre fuerzas externas e internas, con lo que $\Psi(a) = I(a) - E = 0$.

Al ser un problema no lineal, no puede resolverse directamente, por lo que la solución se obtiene de forma incremental.

El método de Newton Raphson, para la solución del sistema no lineal de la ecuación (3.5) se basa en suponer que si se conoce una solución aproximada del problema $a = a^n$, se puede obtener una solución mejorada $a = a^{n+1} = a^n + \Delta a^n$ aproximando la función residual $\Psi(a^{n+1})$ por otra definida a partir de un desarrollo de la serie de Taylor de dos términos, de la forma:

$$\Psi(a^{n+1}) \equiv \Psi(a^n) + \left(\frac{d\Psi}{da}\right) \Delta a^n = 0 \quad (3.6)$$

Siendo

$$\left(\frac{d\Psi}{da}\right)\Big|_n = \frac{dI(a)}{da}\Big|_n = K_T^n \text{ la matriz de rigidez tangente.}$$

Se requiere que el término $\Psi(a^i)$ sea prácticamente nulo, de modo que hay que seguir iterando hasta obtener un valor suficiente cercano a cero.

En la figura III.19 puede verse una representación gráfica del método y cómo en cada paso es preciso resolver un nuevo sistema de ecuaciones lineales para Δa^n (Zienkiewicz, 1980).

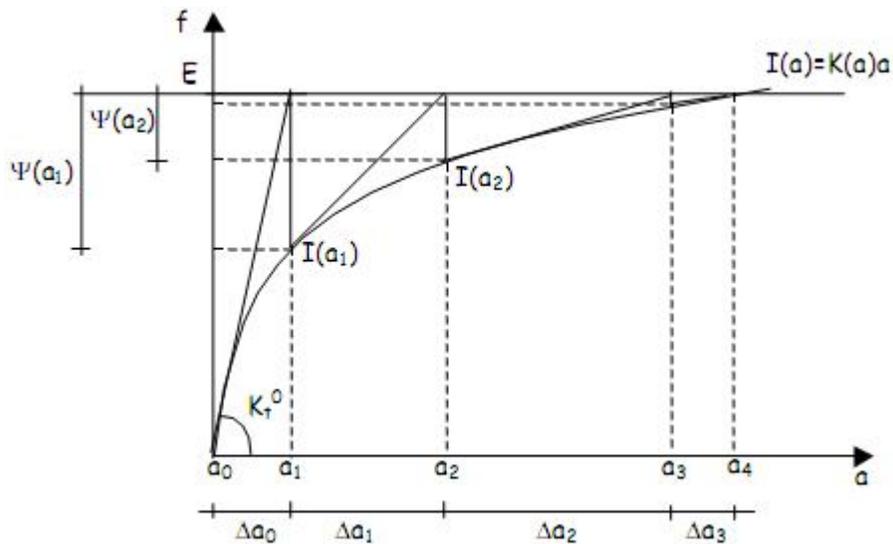


Figura III.19. Método de Newton-Raphson

No linealidad del material

Debido a que las relaciones de esfuerzo deformación del material no son lineales, la ecuación de equilibrio puede escribirse como:

$$\Psi(a) = \int_V B^T \sigma dV + f = 0 \quad (3.7)$$

que se resuelve mediante el método de Newton-Rapshon a través de la definición de una matriz de rigidez tangente K_T .

Si el material es elástico no lineal $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, y en este caso,

$$K_T = \frac{d\Psi}{da} = \int_V B^T \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{da} dV = \int_V B^T D_T B dV \quad (3.8)$$

donde $D_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, es la matriz de rigidez elástica tangente (*Zienkiewicz, 1980*).

Si el material además de tener un comportamiento no lineal, es un material plástico con endurecimiento por deformación, aparecerán deformaciones permanentes una vez que dejen de actuar las fuerzas externas aplicadas más allá del intervalo elástico en el elemento.

Este comportamiento se entiende como la existencia de una superficie de fluencia que define el límite de esfuerzo en función de un parámetro de endurecimiento y que permite definir una ley de fluencia plástica que relaciona los incrementos de deformación plástica en función de la superficie de fluencia. En este caso la superficie de fluencia utilizada para definir el comportamiento es la de Von Mises con un parámetro de endurecimiento isótropo.

III.3.2 DUCTOS SOMETIDOS A: A) PRESIÓN INTERNA, B) PRESIÓN EXTERNA, C) TENSIÓN AXIAL Y D) MOMENTO FLEXIONANTE

En esta sección se muestra el comportamiento y respuesta estructural del ducto de espesor $t=0.9525\text{cm}$ (3/8"), sometidos a presión interna, presión externa, tensión axial y momento flexionante.

Caso a) Ducto sometido a presión interna

En la figura III.20.a y III.20.b se muestra el comportamiento del ducto sometido a una presión interna de 162 kg/cm^2 , que corresponde a la presión de falla, ésta se obtiene sometiendo al ducto a incrementos de presión, hasta alcanzar el esfuerzo último σ_u .

En las siguientes figuras se indican los desplazamientos radiales w y los esfuerzos tangenciales σ_θ , pudiéndose observar la plastificación del ducto.



$w_{max} = 4.45$

a)

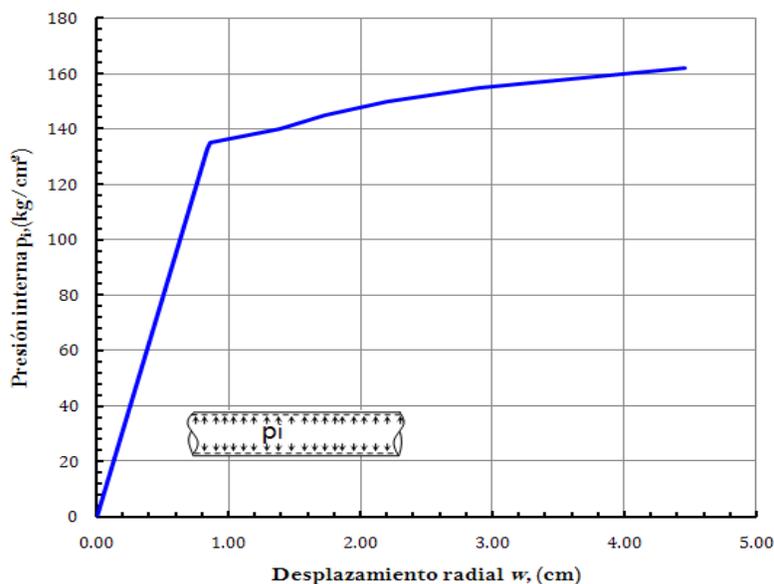
$\sigma_y = 3,585.03 \text{ kg/cm}^2, \sigma_u = 4,380.57 \text{ kg/cm}^2$

b)

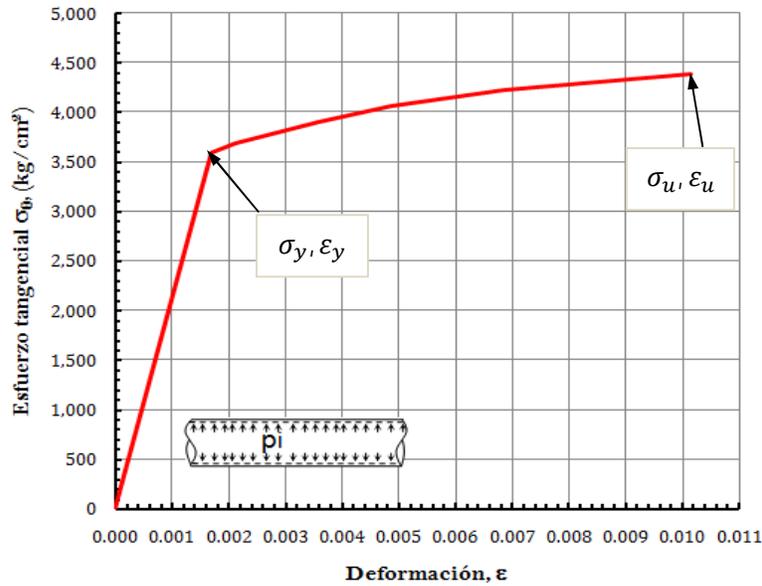
Figura III.20. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial (σ_θ) debido a (p_i)

La respuesta estructural se representa a través de la curva de presión interna contra desplazamientos radiales w , como se indica en la gráfica III.38. En esta curva se observa que la presión interna donde se inicia la fluencia del material es de 133 kg/cm^2 , cuyo desplazamiento radial w a la fluencia es de 0.83 cm y la presión interna máxima es de 162 kg/cm^2 , con un desplazamiento radial w máximo de 4.45 cm .

El comportamiento mecánico se muestra en la curva esfuerzo-deformación de la gráfica III.39. En esta curva se observa que la parte lineal máxima es del orden de $3,585.03 \text{ kg/cm}^2$ y el esfuerzo máximo es del orden $4,380.57 \text{ kg/cm}^2$. Estos valores son obtenidos de los modelos realizados en un programa comercial (Ansys Release, 2007).



Grafica III.38. Respuesta estructural del ducto sometido a (p_i)



Gráfica III.39. Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_i)

Con la finalidad de estimar la capacidad que tiene la estructura de incursionar en el rango inelástico evaluamos la ductilidad de desplazamientos empleando la ecuación (2.44), la cual se define como μ .

Ductilidad debido a (p_i)

ϵ_y	ϵ_u	μ
0.00161	0.0101	6.32

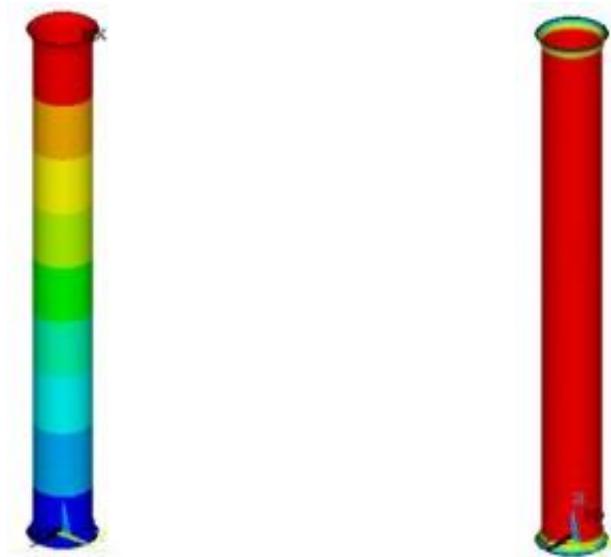
En la tabla 10 se muestran las presiones de falla y las ductilidades para diferentes espesores t .

Tabla III.10. Geometría del ducto y medidas de presión interna de falla (p_{if})

Material	D (cm)	t (cm)	p_{if} (kg/cm ²)	μ
X 52	50.8	0.952	162	6.32
	50.8	1.27	216	6.16
	50.8	1.587	272	5.68
	50.8	2.54	430	5.47

Caso b) Ducto sometido a presión externa

En la figura III.21.a y III.21.b se muestra el comportamiento del ducto sometido a presión externa de 165 kg/cm², que es la presión de falla. En estas figuras se indican los desplazamientos radiales w y los esfuerzos tangenciales σ_θ , pudiéndose observar la plastificación del ducto.



$$w_{max} = -4.63 \text{ cm}$$

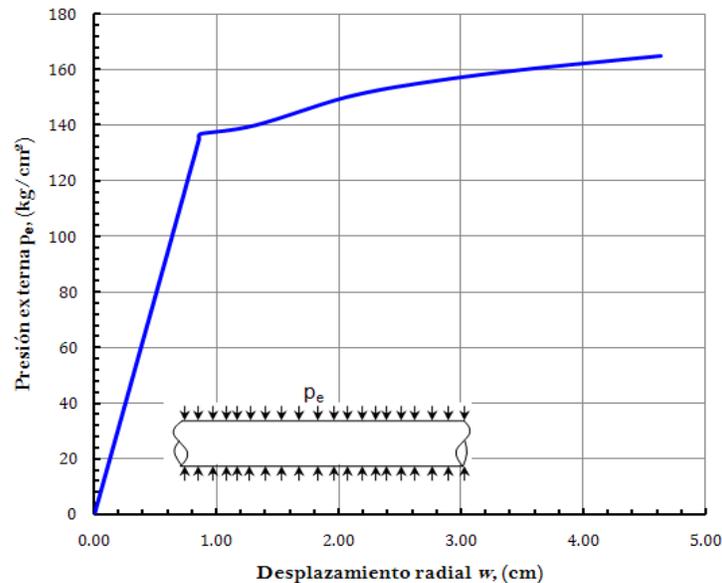
a)

$$\sigma_y = 3,425 \text{ kg/cm}^2, \sigma_u = 4,380.53 \text{ kg/cm}^2$$

b)

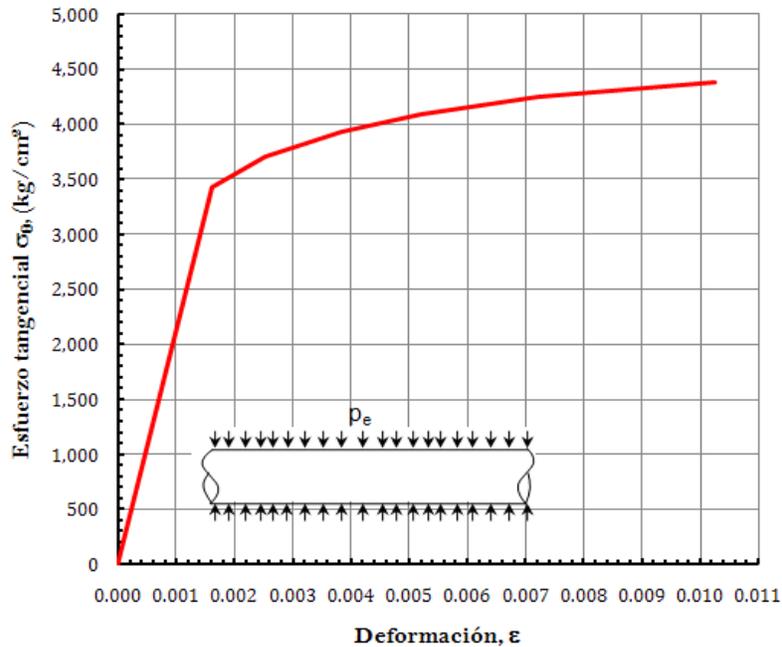
Figura III.21. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo tangencial σ_θ debido a (p_e)

La respuesta estructural se representa a través de la curva de presión externa contra desplazamientos radiales w , como se indica en la gráfica III.40. En esta curva se observa que la presión externa donde se inicia la fluencia del material es de 135 kg/cm^2 , cuyo desplazamiento radial a la fluencia es de 0.854 cm y la presión interna máxima es de 165 kg/cm^2 , con un desplazamiento radial máximo de 4.63 cm .



Gráfica III.40. Respuesta estructural del ducto sometido a (p_e)

El comportamiento mecánico se muestra en la curva esfuerzo-deformación de la gráfica III.41. En esta curva se observa que la parte lineal máxima es del orden de $3,425 \text{ kg/cm}^2$ y el esfuerzo máximo es del orden $4,380.53 \text{ kg/cm}^2$.



Gráfica III.41. Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_i)

Con la finalidad de estimar la capacidad que tiene la estructura de incursionar en el rango inelástico evaluamos la ductilidad de desplazamiento, la cual se define como μ .

Ductilidad debido a (p_e)

ϵ_y	ϵ_u	μ
0.00163	0.0102	6.29

En la tabla 11 se muestran las presiones de falla, y las ductilidades para diferentes espesores t .

Tabla III.11. Geometría del ducto y medidas de presión externa de falla (p_{ef})

Material	D, (cm)	t (cm)	p_{ef} , (kg/cm ²)	μ
X 52	50.8	0.952	165	6.29
	50.8	1.27	220	6.12
	50.8	1.587	275	6.04
	50.8	2.54	442	5.86

Es conveniente mencionar que este estado de carga genera problemas de inestabilidad. Para un ducto de igual longitud la carga crítica de pandeo reportada por *Sánchez y Cortés (2005)* corresponde al valor de 50.95 kg/cm^2 (5 Mpa), Sin

embargo, este tipo de análisis queda fuera del alcance de este trabajo de tesis, ya que representa otra línea de investigación.

Caso c) Ducto sometido a tensión axial

En esta parte se modela el ducto con una carga impuesta, que corresponde a una fuerza de tensión, la cual ha sido aplicada al modelo numérico en función de un factor de la tensión máxima asociada al esfuerzo de fluencia del material. El factor aplicado a este modelo corresponde a 1.16 de la tensión de fluencia, que corresponde al instante de falla, la cual es equivalente a una fuerza de 657,162.5 6kg, ver figura III.22.a y III.22.b, que indican los desplazamientos y esfuerzos.



$$\Delta_{Lmax} = 9.97 \text{ cm}$$

a)



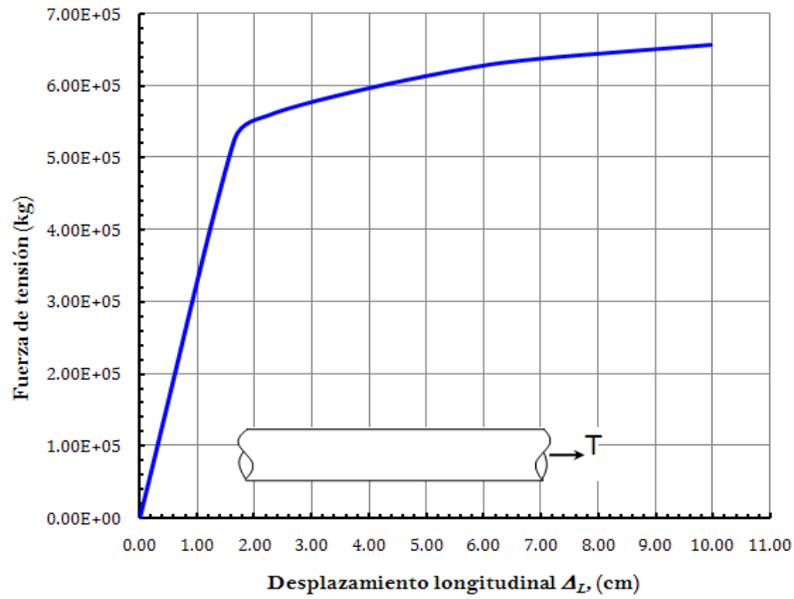
$$\sigma_y = 3,485.77 \text{ kg/cm}^2, \sigma_u = 4,381.82 \text{ kg/cm}^2$$

b)

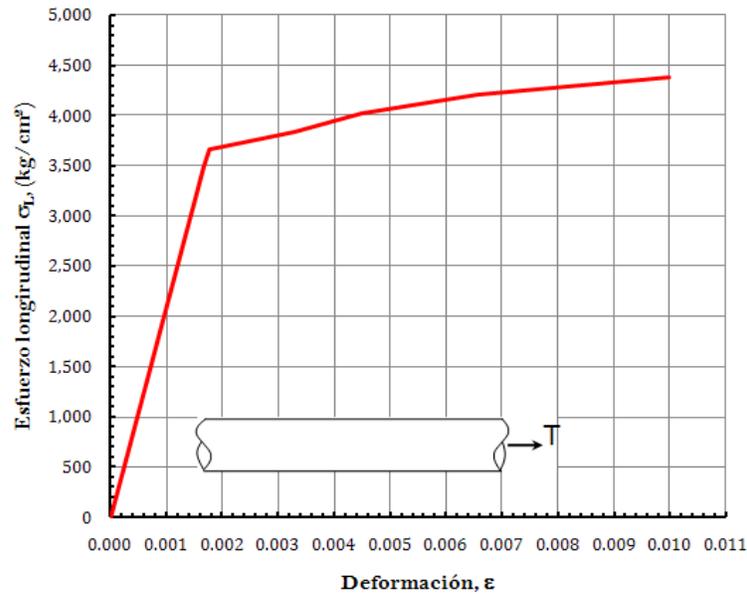
Figura III.22. Resultados numéricos, a) Desplazamiento longitudinal Δ_L , b) Esfuerzo longitudinal σ_L debido a (T)

La respuesta estructural se representa a través de la curva de tensión axial contra desplazamientos longitudinales Δ_L , como se indica en la gráfica III.42. La fuerza de tensión de fluencia ocurre cuando se alcanza el factor de 0.928 de la tensión máxima asociada al esfuerzo de fluencia del material, que corresponde a una fuerza de 525,730.05 kg, cuyo desplazamiento longitudinal Δ_L es de 1.65cm. la fuerza de tensión máxima es de 1.16 de la tensión de fluencia, con un desplazamiento de 9.97cm.

El comportamiento mecánico se representa a través de la curva esfuerzo-deformación como se indica en la gráfica III.43. En esta curva se observa que la parte lineal máxima es del orden de 3,485.77 kg/cm² y el esfuerzo máximo es del orden 4,381.82 kg/cm².



Gráfica III.42. Respuesta estructural del ducto sometido a (T)



Gráfica III.43. Comportamiento mecánico del ducto sometido a (T)

La ductilidad que presenta el ducto en estudio se muestra a continuación:

Ductilidad debido a (T)

ϵ_y	ϵ_u	μ
0.001666	0.00999	6.02

En la tabla 12 se muestran las fuerzas de tensión de falla y las ductilidades para diferentes espesores t .

Tabla III.12. Geometría del ducto y medidas fuerzas de tensión de falla (T_f)

Material	D, (cm)	t (cm)	T_f , (kg)	μ
X 52	50.8	0.952	657,162.56	6.02
	50.8	1.27	881,592.31	6.21
	50.8	1.587	1,099,152.00	5.96
	50.8	2.54	1,759,477.33	5.98

Caso d) Ducto sometido a momento flexionante

En las figuras III.23.a y III.23.b se muestran los resultados del análisis del ducto para un $t = 0.9525\text{cm}$, sometido a momento flexionante en los nodos de los extremos, aplicados como un par de fuerza, dicho momento corresponde al valor 6,341,209.20 kg-cm que es la carga cuando falla el ducto.

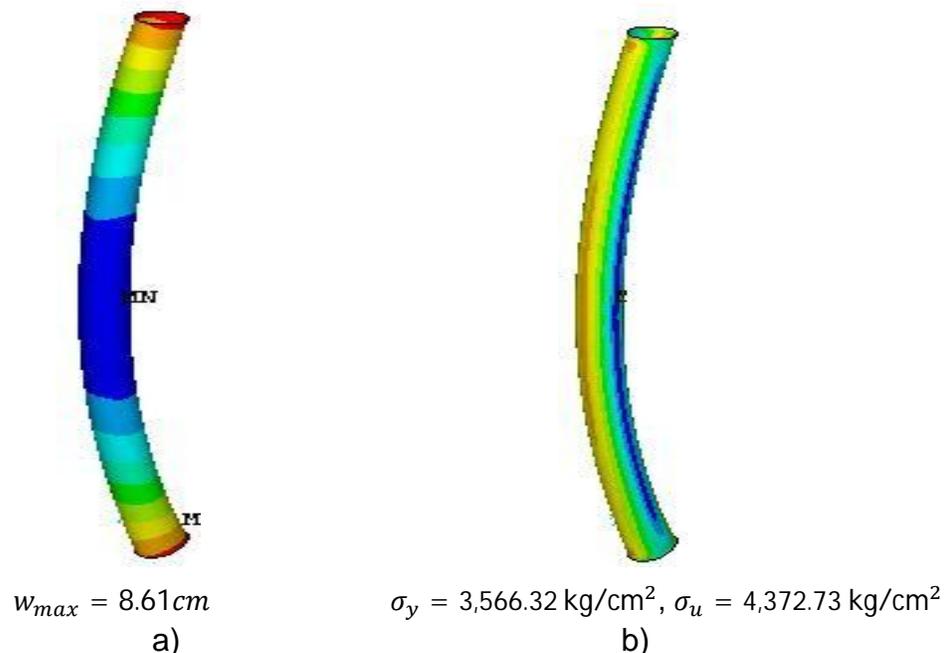
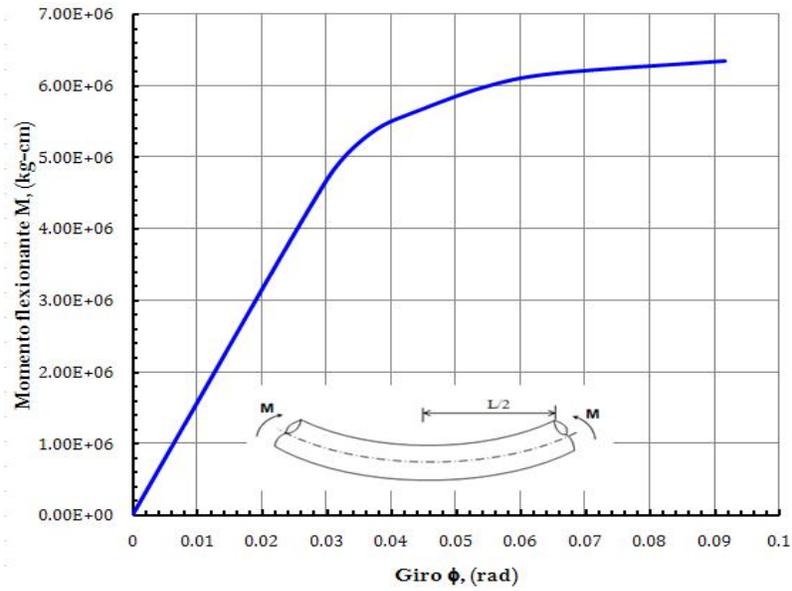


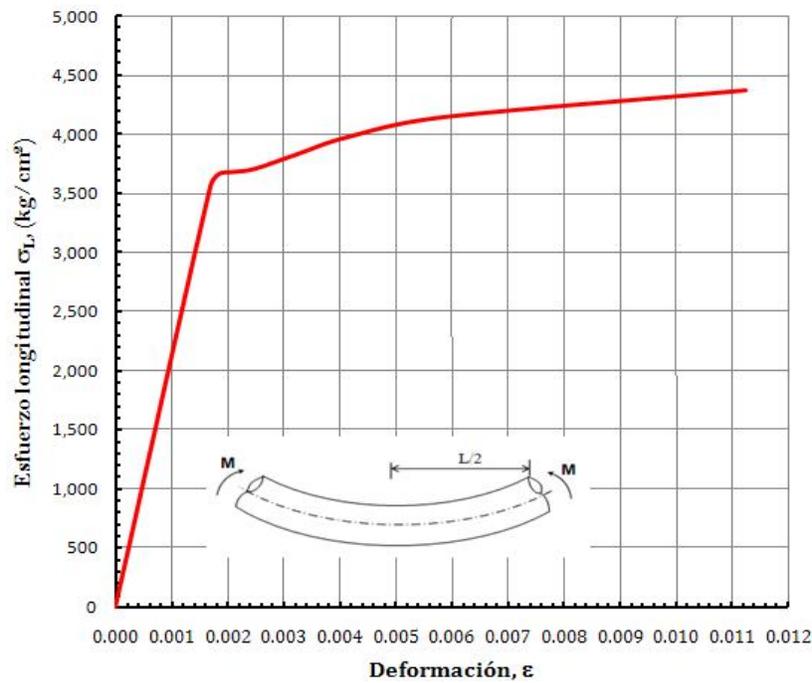
Figura III.23. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo longitudinal σ_L debido a (M)

La respuesta estructural se representa mediante la curva de momento flexionantes contra giro ϕ (ver figura III.44). El momento de fluencia alcanzado es de 4,672,469.93 kg-cm y el momento máximo es de 6,341,209.20 kg-cm.

El comportamiento mecánico es evaluado al centro de la longitud de la tubería ($L/2$) y se representa a través de la curva esfuerzo-deformación como se indica en la gráfica III.45. En esta curva se observa que la parte lineal máxima es del orden de 3,566.32 kg/cm² y el esfuerzo máximo es del orden 4,372.73 kg/cm².



Gráfica III.44. Respuesta estructural del ducto sometido a (M)



Gráfica III.45. Comportamiento mecánico del ducto sometido a (M)

La ductilidad que presenta el ducto en estudio se muestra a continuación:

Ductilidad debido a (M)

ϵ_y	ϵ_u	μ
0.001698	0.0112	6.62

En la tabla III.13 se muestran los momentos flexionantes de falla y las ductilidades para diferentes espesores t .

Tabla III.13. Geometría del ducto y medidas de momento flexionante de falla (M_f)

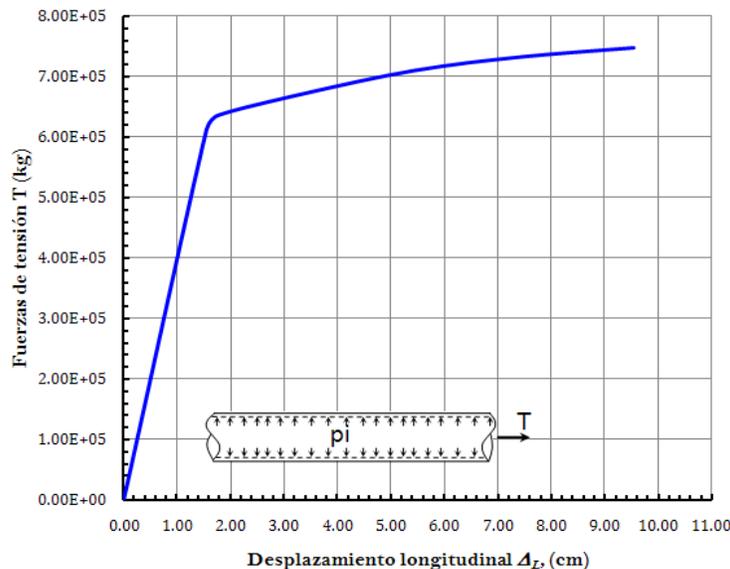
Material	D, (cm)	t (cm)	M_f , (kg-cm)	μ
X 52	50.8	0.952	6,341,209.20	6.62
	50.8	1.27	8,820,847.60	6.31
	50.8	1.587	11,248,012.81	5.92
	50.8	2.54	19,106,179.21	6.78

III.3.3 DUCTOS SOMETIDOS A COMBINACIONES DE CARGA

En esta sección se muestra el comportamiento y respuesta estructural del ducto de espesor $t=0.9525\text{cm}$ ($3/8''$), sometidos a combinaciones de cargas como: presión interna más tensión axial, presión interna más momento flexionante, presión externa más tensión axial y tensión axial más momento flexionante.

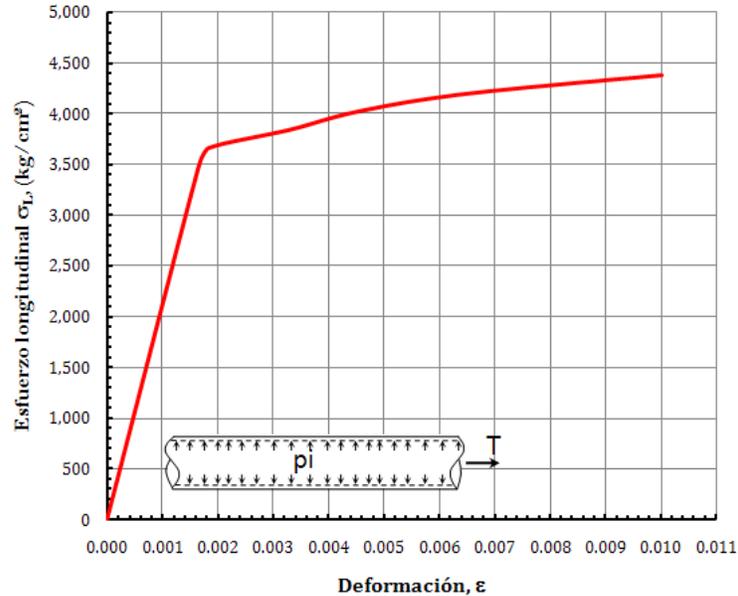
Caso a) Ducto sometido presión interna más tensión

En la gráfica III.46 se muestra la respuesta del ducto sometido a esta combinación, donde la presión interna p_i permanece constante y corresponde a 60 kg/cm^2 que es la carga de diseño. La fuerza de tensión donde se inicia la fluencia de la tubería corresponde 1.08 de la tensión máxima asociada al esfuerzo de fluencia que es equivalente a una fuerza de $611,841.00\text{ kg}$, con desplazamiento de longitudinal de fluencia de Δ_L de 9.53 cm . La fuerza de tensión máxima alcanzada es de 1.32 de la tensión máxima asociada al esfuerzo de fluencia σ_y del material. La tensión aplicada es de $747,805.67\text{ kg}$, que corresponde al instante de falla del ducto.



Gráfica III.46. Respuesta estructural del ducto sometido a (p_i+T)

El comportamiento mecánico se representa a través de la curva esfuerzo-deformación que se muestra en la gráfica III.47. En esta curva se observa que la parte lineal máxima es del orden de 3,495.45 kg/cm² y el esfuerzo máximo es del orden 4,381.82 kg/cm².



Gráfica III.47. Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_i+T)

La ductilidad que presenta el ducto en estudio se muestra a continuación:

Ductilidad debido a (p_i+T)

ϵ_y	ϵ_u	μ
0.00166	0.0100	6.02

En la tabla III.14 se muestran las presiones y las ductilidades para diferentes espesores t .

Tabla III.14. Geometría del ducto y medidas de presión interna y tensión (p_i+T_f)

Material	D_i (cm)	t (cm)	p_{if} (kg/cm ²)	T_f (kg)	μ
X 52	50.8	0.952	60	747,805.67	6.02
	50.8	1.27	60	972,791.51	5.54
	50.8	1.587	60	1,194,730.43	5.68
	50.8	2.54	60	1,868,471.51	6.09

Caso b) Ducto sometido presión interna más momento flexionante

En las figuras III.24.a y III.24.b se muestran los resultados del análisis del ducto para un $t = 0.9525\text{cm}$ y presión interna constante de 60 kg/cm² y momento flexionante en los nodos de los extremos, aplicados como un par de fuerzas.

En la gráfica III.48 se muestra la respuesta del ducto. El momento flexionante de fluencia corresponde a 4,672, 469.37kg-cm y el momento máximo alcanzado tiene un valor de 5, 072,967.36kg-cm, que es la carga de falla del ducto.

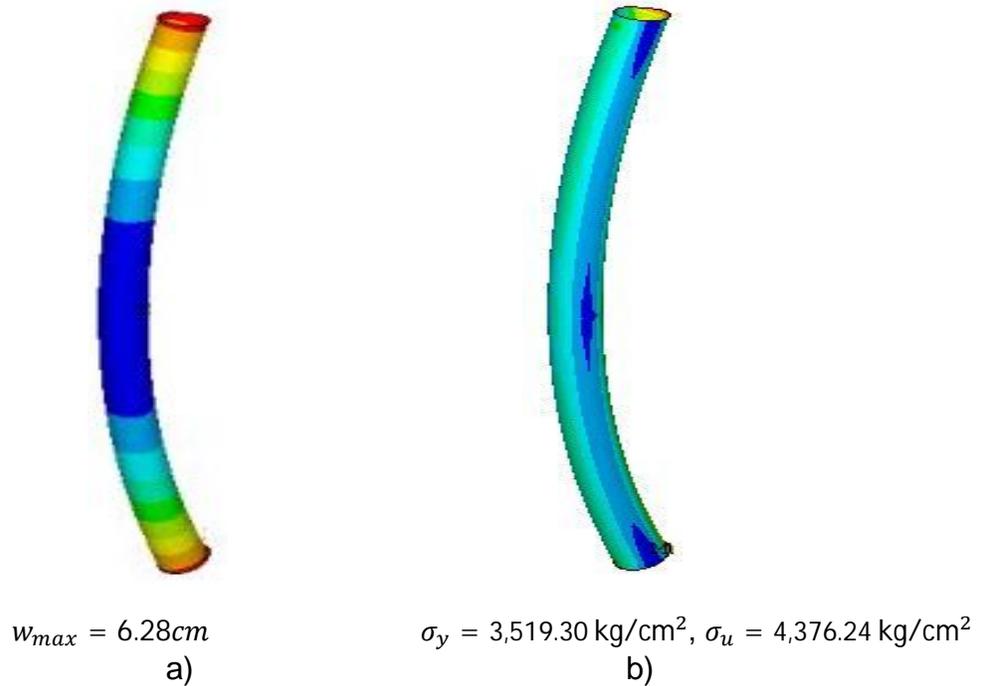
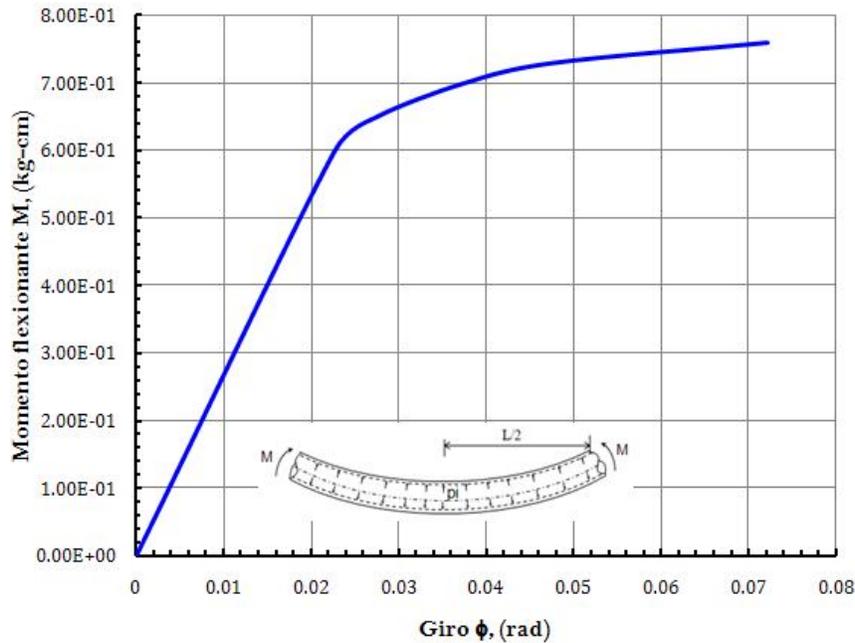
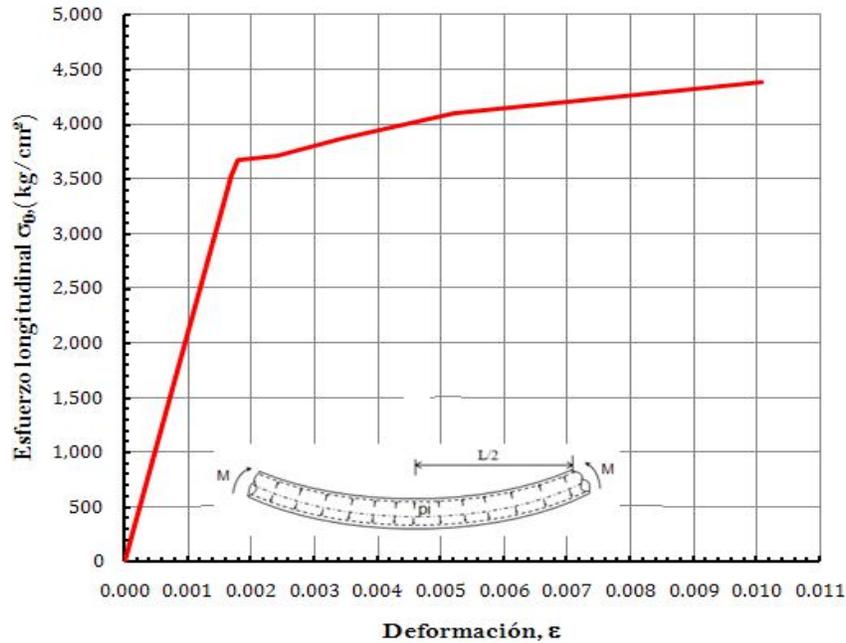


Figura III.24. Resultados numéricos, a) Desplazamiento radial w , b) Esfuerzo longitudinal σ_L de a (p_i+M)



Gráfica III.48. Respuesta estructural del ducto sometido a (p_i+M)

El comportamiento mecánico se representa a través de la curva esfuerzo-deformación como se indica en la gráfica III.49. En esta curva se observa que la parte lineal máxima es del orden de 3,519 kg/cm² y el esfuerzo máximo es del orden 4,376 kg/cm².



Gráfica III.49. Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_i+M)

La ductilidad que presenta el ducto en estudio se muestra a continuación:

Ductilidad debido a (p_i+M)

ϵ_y	ϵ_u	μ
0.00168	0.0101	6.01

En la tabla III.15 se muestran los resultados para los cuatro espesores de ductos estudiados en esta tesis.

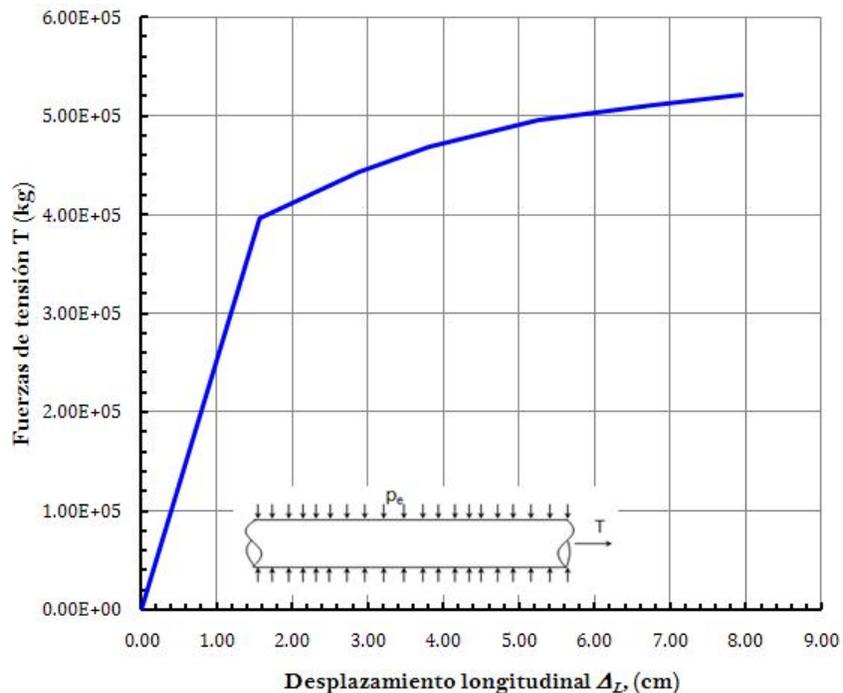
Tabla III.15. Geometría del ducto y medidas de (p_i+M_i)

Material	D (cm)	t (cm)	p_{if} (kg/cm ²)	M_{if} (kg-cm)	μ
X 52	50.8	0.952	60	5,072,967.36	6.01
	50.8	1.27	60	7,510,820.73	5.78
	50.8	1.587	60	10,176,773.50	6.74
	50.8	2.54	60	17,487,011.48	5.69

Caso c) Ducto sometido presión externa más tensión

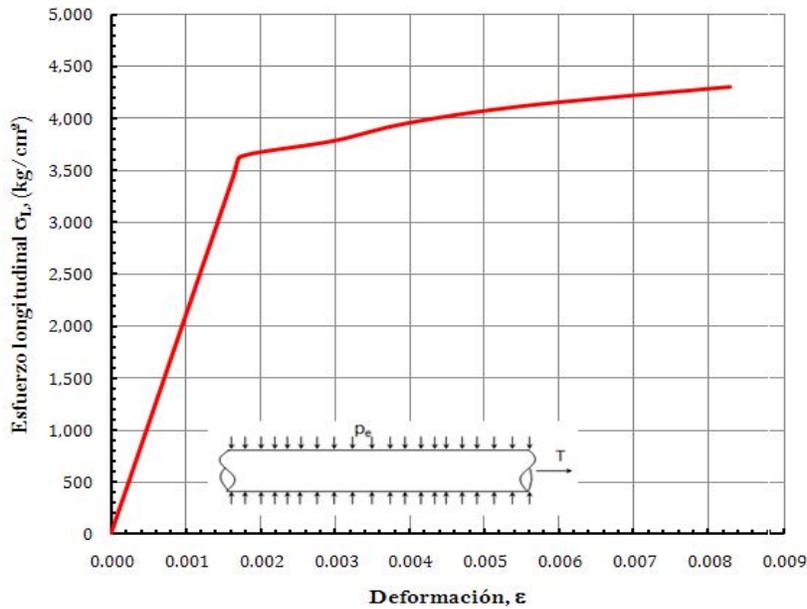
En la curva de la gráfica III.50 se muestra la respuesta del ducto sometido a esta combinación de carga, la presión externa p_e permanece constante y corresponde al valor de 51 kg/cm^2 , la cual permanece constante. La fuerza de tensión corresponde a un porcentaje de la tensión máxima asociada al esfuerzo de fluencia del material.

La carga de fluencia es de 76 por ciento de la tensión máxima, que es equivalente a una fuerza de $395,997.09 \text{ kg}$ con un desplazamiento longitudinal Δ_L de 1.56 cm . La carga de tensión máxima es del 92 por ciento de la tensión de fluencia, que corresponde al instante de falla, la cual es equivalente a una fuerza de $521,197 \text{ kg}$.



Gráfica III.50. Respuesta estructural del ducto sometido a (p_e+T)

El comportamiento mecánico se representa a través de la curva esfuerzo-deformación como se indica en la gráfica III.51. En esta curva se observa que la parte lineal máxima es del orden de $3,634.15 \text{ kg/cm}^2$ y el esfuerzo máximo es del orden $4,306.79 \text{ kg/cm}^2$.



Gráfica III.51. Comportamiento mecánico del ducto sometido a (p_e+T)

La ductilidad que presenta el ducto en estudio se muestra a continuación:

Ductilidad debido a (p_e+T)

ϵ_y	ϵ_u	μ
0.00163	0.0083	5.07

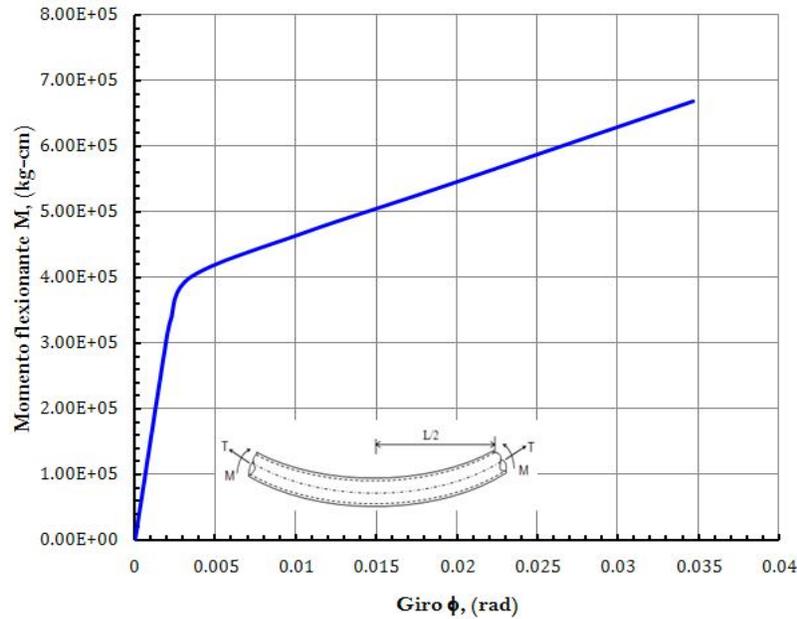
En la tabla III.16. Se muestran los resultados para diferentes espesores t .

Tabla III.16. Geometría del ducto y medidas (p_e+T_f)

Material	D, (cm)	t (cm)	p_e , (kg/cm ²)	T_f , (kg)	μ
X 52	50.8	0.952	51	521,197.89	5.07
	50.8	1.27	51	744,793.50	4.90
	50.8	1.587	51	974,900.03	5.32
	50.8	2.54	51	1,619,341.97	5.17

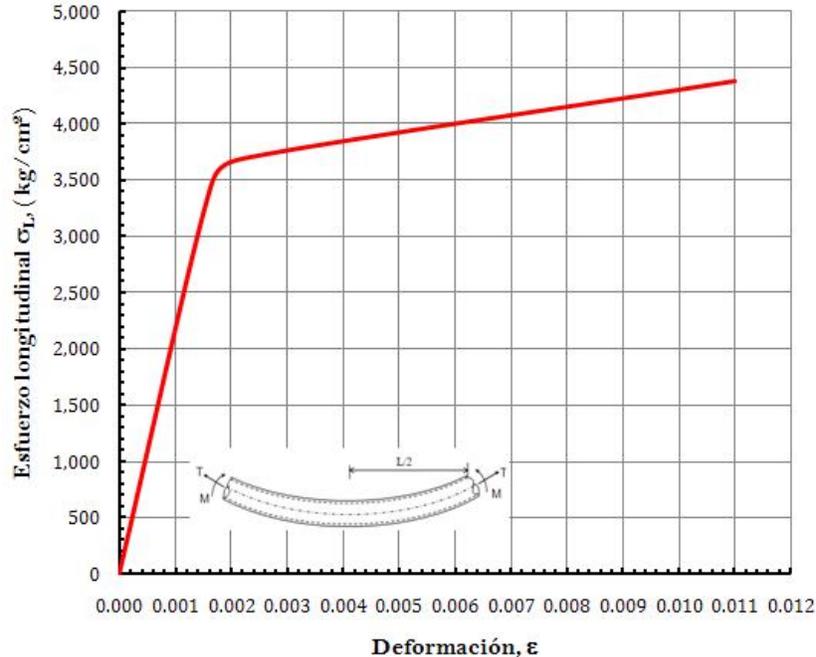
Caso d) Ducto sometido tensión axial más momento flexionante

En la curva de la gráfica III.52 se muestra la respuesta del ducto sometido a esta combinación de carga. La fuerza de tensión es de 90 por ciento de la tensión máxima y es equivalente a una fuerza de 509,867.50 kg, la cual permanece constante mientras varía el momento flexionante, hasta alcanzar el momento flexionante máximo o de falla del ducto. En este caso el momento de fluencia es de 300,373.07 kg-cm, y el momento máximo alcanzado corresponde a 667,495.71kg-cm, que es la carga donde falla el ducto.



Gráfica III.52. Respuesta estructural del ducto sometido a (T+M)

En la gráfica III.53 se muestra la curva de comportamiento del ducto, en la que se observa que el esfuerzo de fluencia corresponde al valor de $3,670.00 \text{ kg/cm}^2$ y el esfuerzo último es del orden de $4,376.70 \text{ kg/cm}^2$.



Gráfica III.53. Comportamiento mecánico del ducto sometido a (T+M)

La ductilidad que presenta el ducto en estudio se muestra a continuación:

Ductilidad debido a (T+M)

ϵ_y	ϵ_u	μ
0.00164	0.0109	6.70

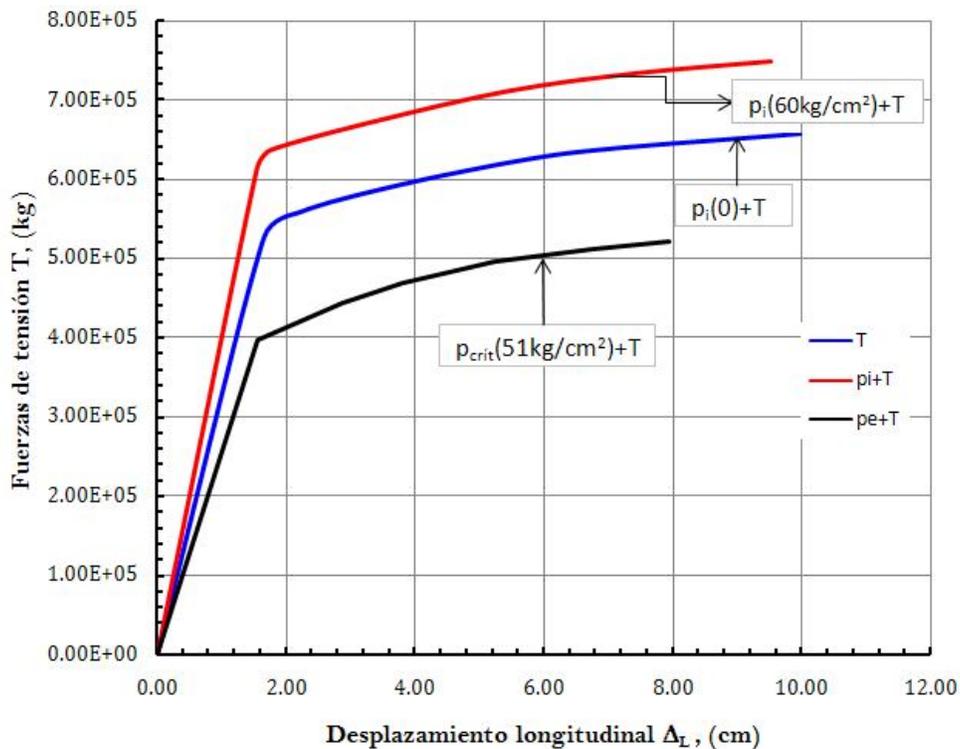
En la tabla III.17 se muestran las fuerzas de tensión, momento de falla y las ductilidades para diferentes espesores t .

Tabla III.17. Geometría del ducto y medidas de tensión mas momento (T_f+M_f)

Material	D, (cm)	t (cm)	T_f , (kg)	M_f , (kg-cm)	μ
X 52	50.8	0.952	509,867.50	667,495.71	6.70
	50.8	1.27	759,993.37	2,794,723.99	6.08
	50.8	1.587	955,784.35	5,891,816.24	5.32
	50.8	2.54	1,557,059.59	15,382,093.43	4.39

A continuación se muestran las comparaciones de curvas de respuesta para diferentes condiciones de carga empleando el modelo de Ramberg-Osgood aplicados al ducto de espesor $t=0.9525\text{cm}$ (3/8").

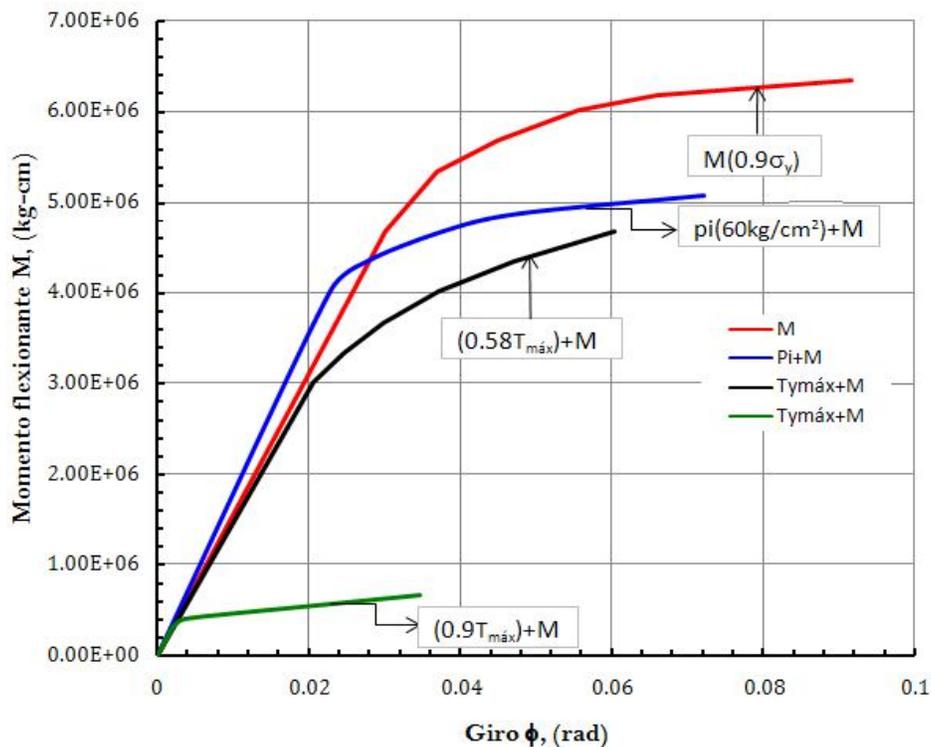
En la gráfica III.54 se comparan los resultados para tres estados de cargas distintos, que corresponden a un ducto sometido a fuerzas de tensión simple, presión interna más tensión y presión externa más tensión.



Gráfica III.54. Curvas de respuesta estructural para tres condiciones de carga

De la gráfica III.54 se observa que cuando el ducto es sometido solamente a fuerzas de tensión se tiene mayor capacidad de deformación, dando como resultado una tensión última de 657,162 kg y un desplazamiento longitudinal último de 9.97cm. Cuando se somete al ducto a presión interna de 60 kg/cm² más la tensión hasta alcanzar la resistencia última, esta curva da un mejor comportamiento, ya que la presión interna ayuda a incrementar su capacidad de carga, no obstante se presenta una disminución en cuanto a la capacidad de deformación con respecto al ducto sometido a tensión simple. Para el caso de presión externa más tensión, se observa que disminuye su capacidad de resistencia y de desplazamiento longitudinal en relación a los dos estados de carga presentados en la gráfica III.54.

En la gráfica III.55 se comparan los resultados para tres estados de cargas distintos, que corresponden a un ducto sometido a momento flexionante, presión interna más momento flexionante y tensión más momento flexionante.



Gráfica III.55. Curvas de respuesta estructural para cuatro condiciones de carga

Cuando el ducto es sometido solamente a momento flexionante se obtiene mayor capacidad de resistencia y de giro. El momento último aplicado es de 6,341,209.19 kg-cm y el giro correspondiente a este momento es de 0.092 rad. Para la condición de carga de presión interna más momento flexionante se tiene menor capacidad resistente y de giro, no obstante se tiene mayor rigidez que el ducto sometido a flexión pura. La presión interna correspondiente a esta combinación es de 60 kg/cm² y el momento flexionante hasta la falla del ducto es de 5,072,967.35 kg-cm. Otro caso de carga mostrado en la gráfica III.55 es la combinación de

tensión axial más momento flexionante, aquí se observan dos curvas para esta combinación, una corresponde a un $0.9T_{y_{m\acute{a}x}}$ más momento flexionante de 667,495.70 kg-cm y la otra corresponde a una tensión de $0.58T_{y_{m\acute{a}x}}$ más momento de 4,672,469.93 kg-cm, de estas dos curvas se observa que cuando disminuye el porcentaje de tensión máximo aplicado, se requiere de un momento mayor para hasta lograr la resistencia última de la tubería, y cuando se incrementa la fuerza de tensión, el momento requerido para lograr la falla del ducto disminuye, dando como resultado momentos y giros muy bajos con respecto a las otras combinaciones de cargas mostradas en la misma gráfica.

Cabe mencionar que las curvas de la gráfica III.54 y III.55 fueron descritas de forma separada en la parte superior de esta sección.

III.4 DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN

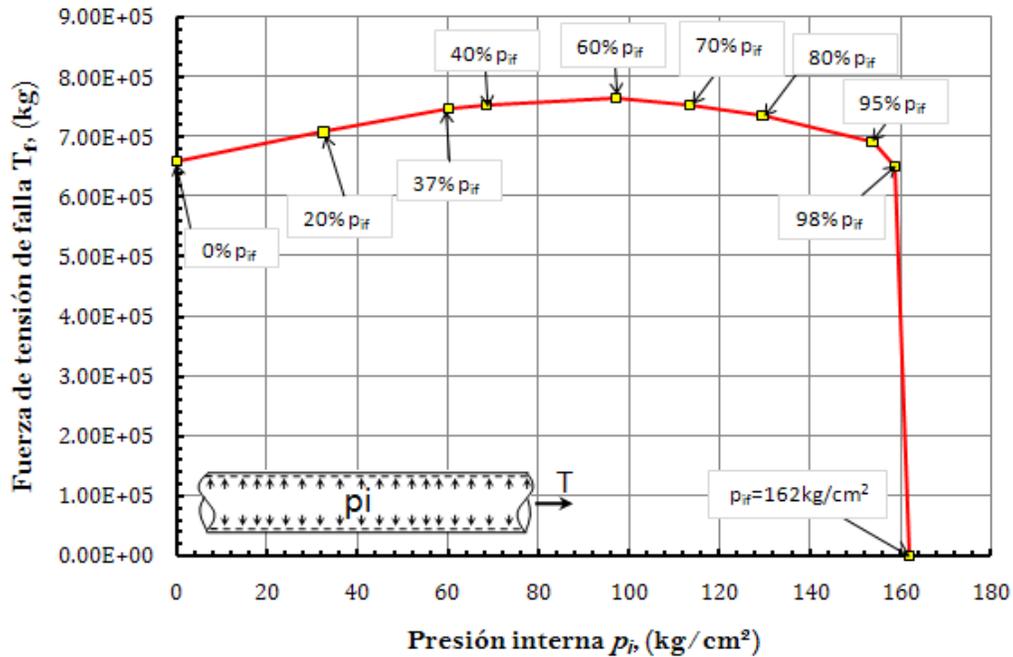
La mejor forma de ilustrar las combinaciones de cargas que provocan la falla de una sección dada es mediante un diagrama de interacción. Cualquier combinación de carga que pueda graficarse dentro del área de los diagramas se puede considerar sin falla; las combinaciones graficadas fuera del área representan el colapso del sistema. Así si se cuenta con dicho diagrama, se conocen todas las combinaciones de carga que la tubería puede soportar.

Por lo tanto, en esta sección se muestran diagramas de este tipo obtenidos de forma numérica para la tubería de 0.9525cm (3/8") de espesor.

Caso a) Ducto sometido a presión interna más tensión

Una vez calculada la presión interna de falla (p_{if}) del ducto de acero, se calcula la respuesta para los estados de carga restantes. Cuatro de ellos consistieron en someter al tubo a una presión interna de 20, 40, 60 y 80% de p_{if} , respectivamente y luego, manteniendo la presión interna constante, se le aplicó una fuerza de tensión creciente en el extremo del tubo de coordenada $X=L$ hasta alcanzar la falla estructural. El último estado de carga consistió en aplicar una fuerza de tensión creciente hasta alcanzar la falla estructural, sin aplicar presión interior.

En la gráfica III.56 se muestran los valores de la fuerza de tensión donde falla el tubo contra el valor de presión interior aplicada.



Gráfica III.56. Estados de carga combinados. Fuerza de tensión vs presión interna

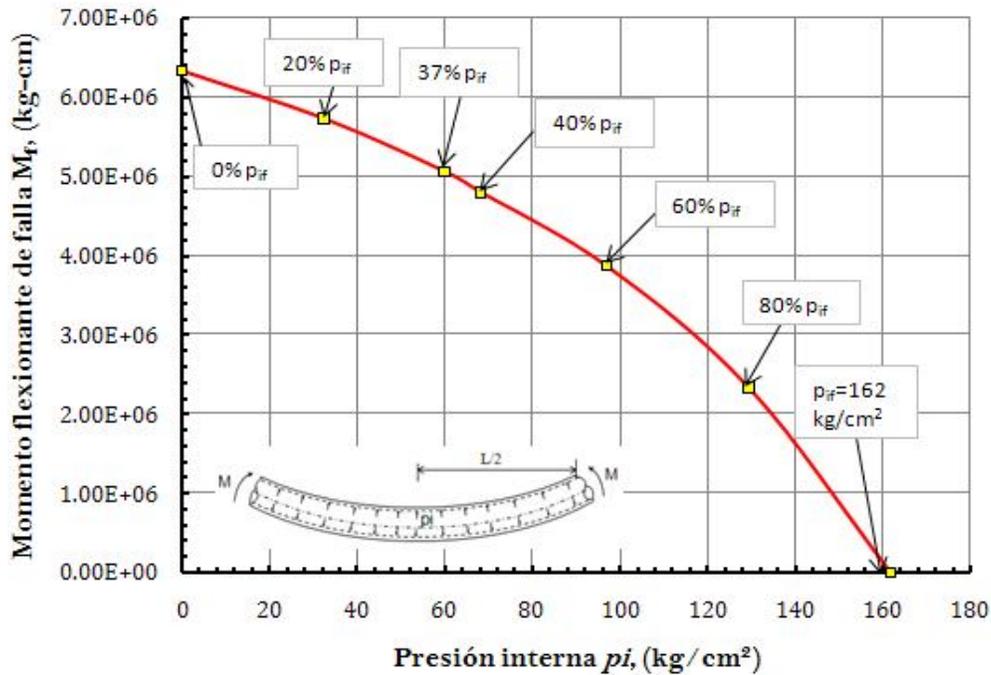
Es importante notar que cuando la fuerza de tensión es nulo, el valor de presión corresponde a presión interna de falla p_{if} (primer estado de carga).

De la gráfica III.56 se observa que conforme aumenta la presión interna, la fuerza de tensión también crece, esto sucede cuando se alcanza el 60 por ciento de presión interna, que es la resistencia máxima calculada más una fuerza de tensión de 7.5×10^5 kg. Después de este punto las tensiones disminuyen conforme sigue aumentando la presión interna hasta llegar a la presión interna de falla.

Caso b) Ducto sometido a presión interna más momento flexionante

De igual forma que el caso anterior, una vez calculada la presión interna de falla (p_{if}) del ducto de acero, se calcula la respuesta para los estados de carga restantes. Cuatro de ellos consistieron en someter al tubo a una presión interna de 20, 40, 60 y 80% de p_{if} , respectivamente y luego, manteniendo la presión interna constante, se le aplicó un momento flexionante de manera creciente en ambos extremos del tubo, hasta alcanzar la falla estructural. El último estado de carga consistió en aplicar momento creciente hasta alcanzar la falla estructural, sin aplicar presión interna.

En la gráfica III.57 se muestran los resultados numéricos del momento flexionante donde falla el tubo contra el valor de presión interna aplicada.



Gráfica III.57. Estados de carga combinados. Momento flexionante vs presión interna

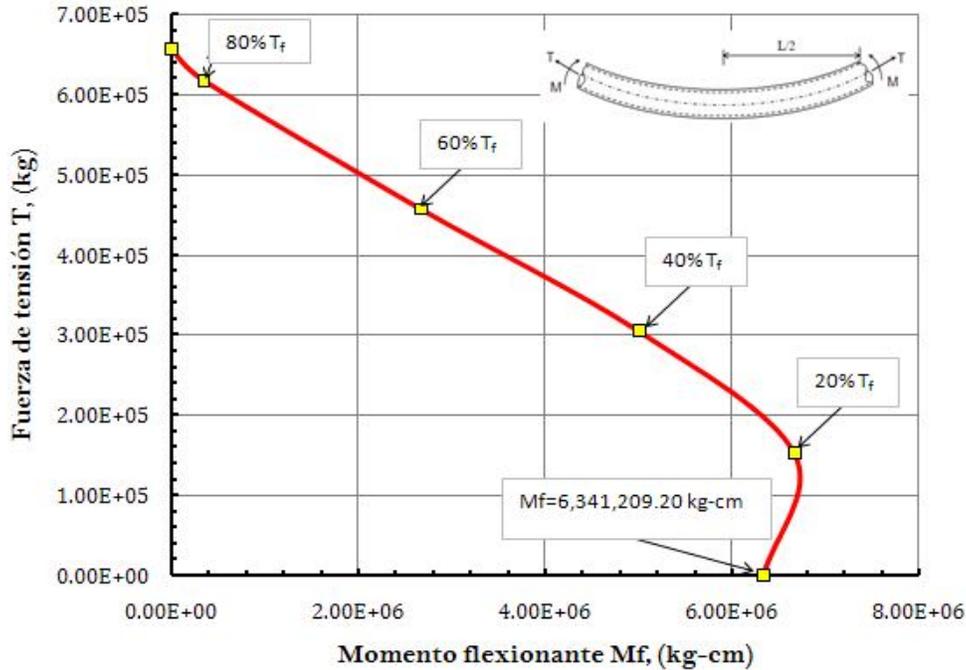
Es importante notar que cuando el momento flexionante es nulo, el valor de presión corresponde a presión interna de falla p_{if} (primer estado de carga). De la gráfica III.57 se observa que a medida que la presión interna va incrementándose, el momento aplicado hasta lograr la falla estructural del ducto de acero decrece.

Caso c) Ducto sometido a fuerza de tensión más momento flexionante

Una vez calculada la fuerza de tensión de falla (T_f) del ducto de acero, se calcula la respuesta para los estados de carga restantes. Cuatro de ellos consistieron en someter al tubo a una fuerza de tensión de 20, 40, 60 y 80% de tensión de falla T_f , respectivamente y luego, manteniendo la tensión constante, se le aplicó momento flexionante creciente en el extremo del tubo de coordenada $X=L$ y $X=0$, hasta alcanzar la falla estructural. El último estado de carga consistió en aplicar un momento creciente hasta alcanzar la falla estructural, sin aplicar fuerzas de tensión.

En la gráfica III.58 se muestran los valores de momento flexionante donde falla el tubo contra el valor de fuerzas de tensión aplicada.

Es importante notar que cuando el momento flexionante es nulo, el valor de la tensión corresponde a T_f (primer estado de carga).



Gráfica III.58. Estados de carga combinados. Fuerza de tensión vs Momento flexionante

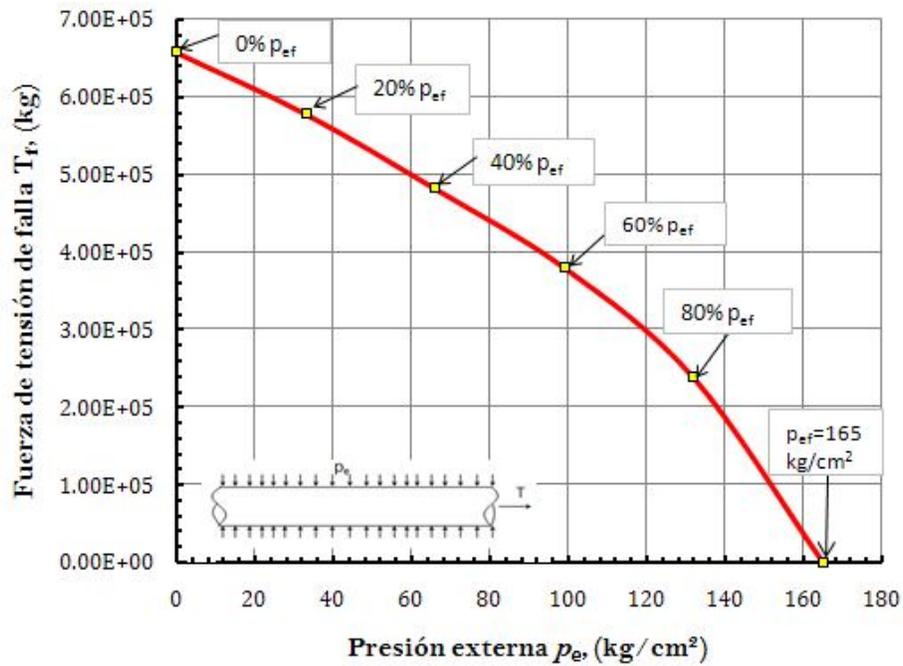
De la gráfica III.58 se aprecia que a medida que la tensión disminuye, el momento flexionante también decrece, esto ocurre cuando se alcanza el 25 por ciento de la tensión de fluencia, ya que cuando la carga de tensión está por debajo de este porcentaje, se requiere que el momento flexionante sea mayor al de la falla actuando solo.

Caso d) Ducto sometido a presión externa más fuerza de tensión

Una vez calculada la presión externa de falla (p_{ef}) del ducto de acero, se calcula la respuesta para los estados de carga restantes. Los siguientes casos consisten en someter al tubo a una presión externa de 20, 40, 60 y 80% de p_{ef} , respectivamente y luego, manteniendo la presión externa constante, se le aplicó una fuerza de tensión creciente en el extremo del tubo de coordenada $X=L$ hasta alcanzar la falla estructural. El último estado de carga consistió en aplicar una fuerza de tensión creciente hasta alcanzar la falla estructural, sin aplicar presión externa.

En la gráfica III.59 se muestran los valores de la fuerza de tensión donde falla el tubo contra el valor de presión externa aplicada.

Es importante mencionar que cuando la fuerza de tensión es nula, el valor de presión corresponde a la presión externa de falla p_{ef} (primer estado de carga).



Gráfica III.59. Estados de carga combinados. Fuerza de tensión vs presión externa

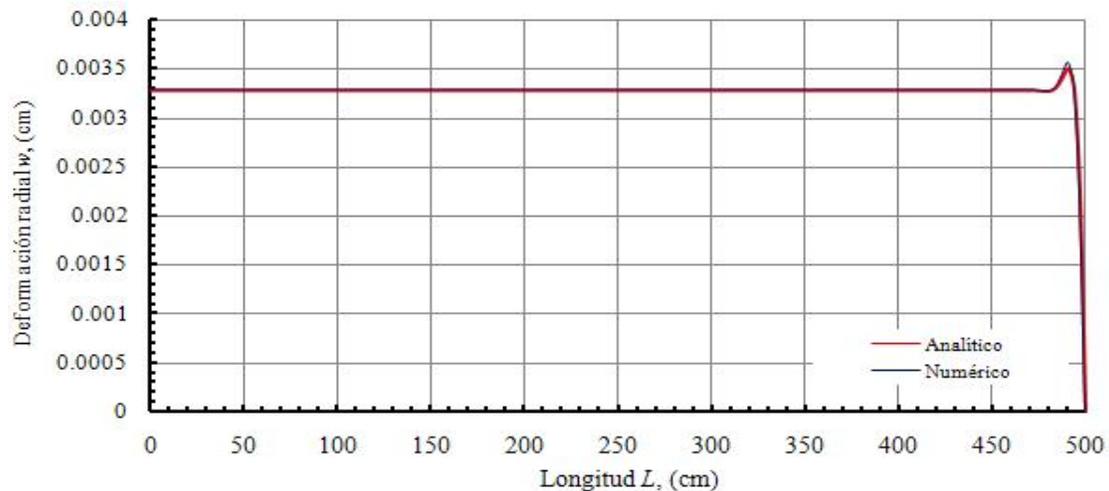
De la gráfica III.59 se observa que a medida que la presión externa va aumentando, la fuerza de tensión aplicada decrece hasta lograr la falla estructural del ducto de acero.

III.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

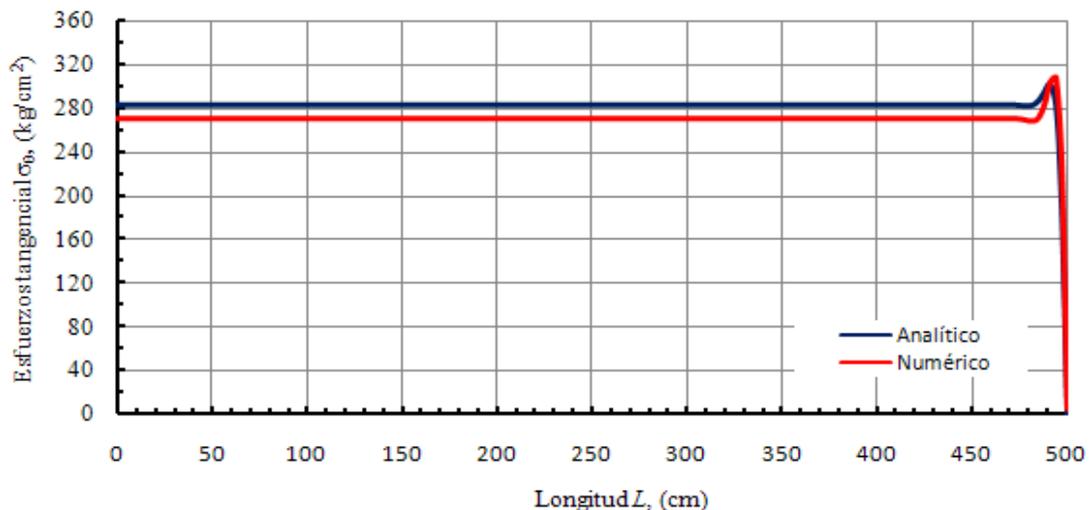
III.5.1 RESULTADOS ANALÍTICOS CONTRA NUMÉRICOS (LINEALES)

A continuación se muestra la comparación de los resultados obtenidos mediante planteamientos analíticos y numéricos para un ducto con espesor de $t=0.9525\text{cm}$ ($3/8''$). En las gráficas III.60 y III.61, se muestra el desplazamiento radial y esfuerzos tangenciales, respectivamente. Dichos resultados corresponden a una presión interna de 10.19 kg/cm^2 (1Mpa).

Como se mencionó en los capítulos precedentes, para el análisis teórico se emplea las ecuaciones propuestas por la teoría de cascarones y para el modelado numérico se utiliza la técnica de elementos finitos con el apoyo del programa Ansys, empleando el elemento Shell 63, descrito en la sección III.2.



Gráfica III.60. Comparación de desplazamientos radiales w debido a (p_i)



Gráfica III.61. Comparación de esfuerzos tangenciales σ_θ debido a (p_i)

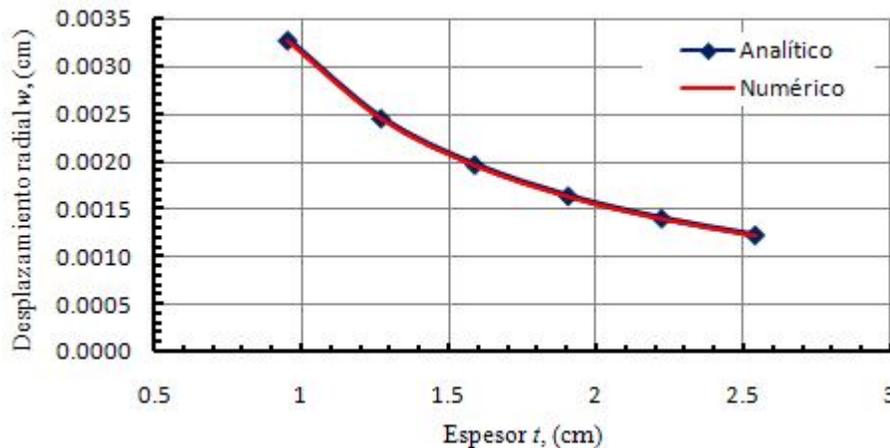
De estas gráficas se observa que los desplazamientos radiales y los esfuerzos tangenciales son constantes en casi toda la longitud del ducto, no obstante, en los extremos se presentan los mayores desplazamientos y esfuerzos, debido a la influencia de las condiciones de frontera impuestas al ducto.

De la gráfica III.60, se puede observar que los desplazamientos obtenidos del planteamiento analítico y del modelado numérico presentan muy buena aproximación. En la gráfica III. 61, que corresponde a los esfuerzos tangenciales, se tiene muy poca variación en los valores, lo cual corresponde a un 6%.

En la tabla III.18 se muestran los resultados (desplazamiento radial w y esfuerzo tangencial σ_θ) obtenidos para distintos espesores, éstos se pueden ver en las gráficas III.62 y III.63, respectivamente.

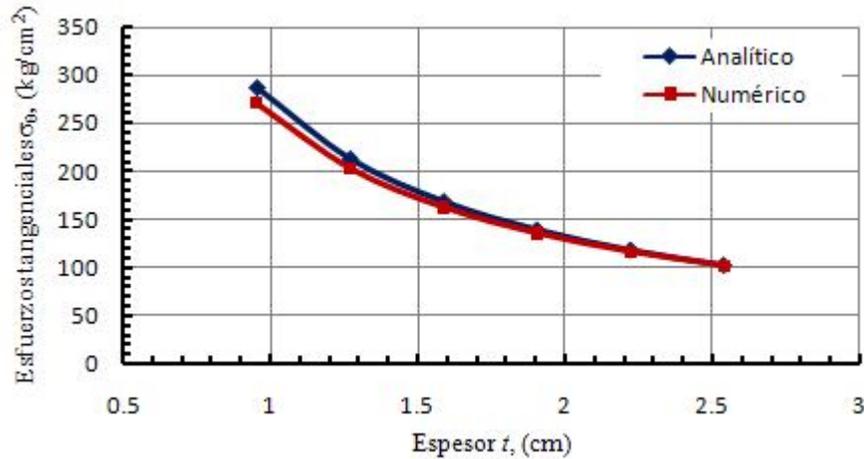
Tabla III.18. Comparación de resultados analíticos lineales

Espesor (cm)	Analítico		Numérico	
	w , (cm)	σ_θ , (kg/cm ²)	w , (cm)	σ_θ , kg/cm ²
3/8"	0.9525	0.00328	0.003280	270.45
1/2"	1.27	0.002460	0.002460	202.84
5/8"	1.5875	0.001972	0.001968	162.27
3/4"	1.905	0.001643	0.001640	135.23
7/8"	2.2225	0.001408	0.001406	115.91
1"	2.54	0.0012320	0.001230	101.42



Gráfica III.62. Comparación de desplazamientos radiales w debido a (p_i)

De la gráfica III.62, se observa que los valores de los desplazamientos para los seis espesores indicados muestran muy buena aproximación, tanto para el planteamiento analítico como para el numérico. En la gráfica III.63, los esfuerzos tangenciales σ_θ para los diferentes espesores tienen variaciones pequeñas, principalmente los espesores 0.9525cm y 1.27cm (3/8" y 1/2"), respectivamente.

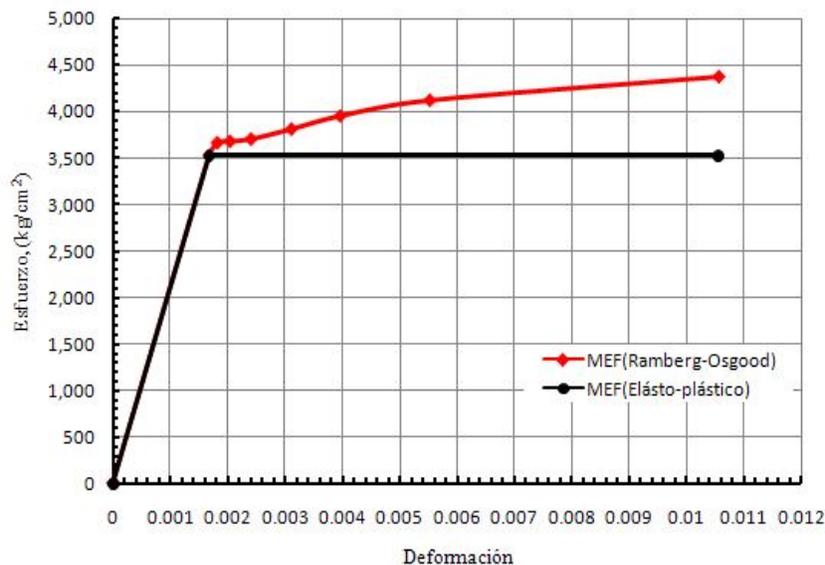


Gráfica III.63. Comparación de esfuerzos tangenciales (σ_θ) de un ducto sometido a (ρ_i)

III.5.2 RESULTADOS ANALÍTICOS CONTRA NUMÉRICOS (NO LINEALES)

Con el propósito de comparar diferentes técnicas de análisis no lineal, se presenta a continuación los resultados obtenidos para el caso de flexión.

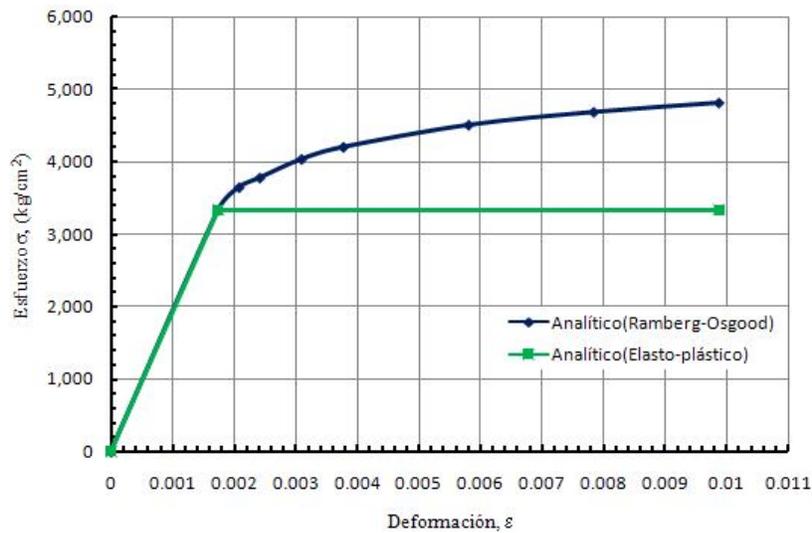
Por lo que, en la gráfica III.64 se muestra la curva esfuerzo-deformación obtenida mediante el programa de elementos finitos Ansys para el ducto de $D=50.8\text{cm}$ y espesor $t=0.9525\text{cm}$ ($3/8''$) sometido a momento flexionante, para el cual se emplearon dos leyes de comportamiento diferentes: la elasto-plástica perfecta y con endurecimiento por deformación, dicho procedimiento para obtener esta curva de esfuerzo deformación se puede consultar en la sección III.3.2.d.



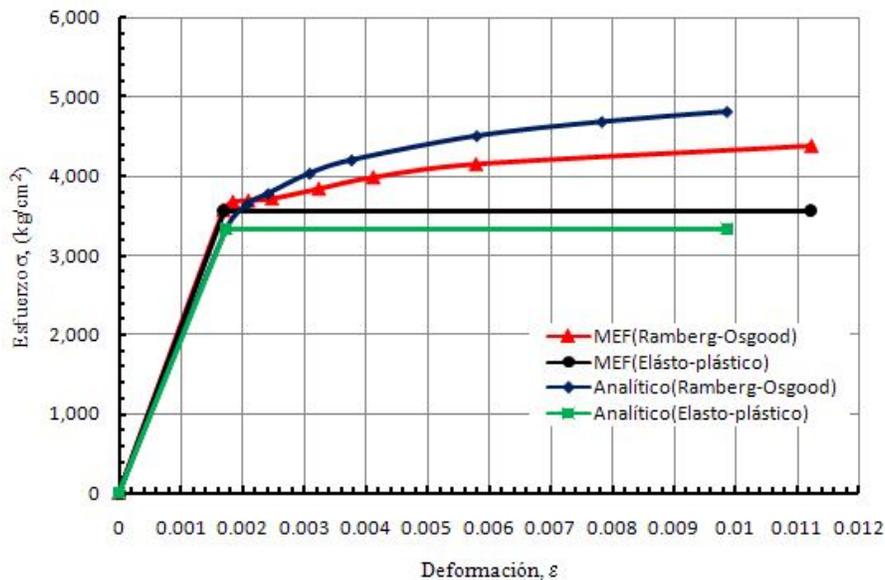
Gráfica III.64. Curva esfuerzo-deformación numérica debido a (M)

La respuesta analítica se determina mediante la obtención del diagrama de momento-curvatura, empleando leyes de comportamiento del material: la elasto-plástica perfecta y con endurecimiento por deformación, la cual se puede ver en la sección II.6.1. Para obtener la respuesta en términos de esfuerzos y deformaciones se realiza una transformación de momentos flexionantes a esfuerzos normales empleando las ecuaciones de la sección II.6.2 y de esta forma es posible comparar con los resultados numéricos de la gráfica III.45.

En la gráfica III.65 se muestra el comportamiento obtenida mediante el procedimiento analítico del diagrama de momento-curvatura desarrollado en la sección II.6.4, y en la gráfica III.66 se hace la comparación de ambas técnicas.



Gráfica III.65. Curva esfuerzo-deformación analítica debido a (M)



Gráfica III.66. Comparación de resultados del ducto sometidos (M)

De la gráfica III.66 se observa que los esfuerzos de fluencia para el modelo elasto-plástico numérico alcanzan el valor de 3,566.32 kg/cm² y para el analítico el valor del esfuerzo es de 3,338.89 kg/cm². En cuanto a los resultados que emplean la ley del material con endurecimiento por deformación se observa que de acuerdo a la solución analítica el material fluye primero con un valor de esfuerzos de 3,338.89 kg/cm², en cuanto al valor de fluencia obtenido con la técnica numérica el esfuerzo es de 3,566.32 kg/cm².

De la gráfica III.66 se observa que para el comportamiento elasto-plástico perfecto resulta más conservador el resultado analítico, por lo que se pueden predecir valores de esfuerzos más bajos. Sin embargo, ocurre lo contrario para el material con endurecimiento, aquí los esfuerzos analíticos son mayores, lo cual indica valores de momentos más altos. En la tabla III.19 se presenta la comparación entre dichos resultados, presentando además un porcentaje de error en cuanto a las deformaciones y esfuerzos resultantes de ambos métodos de análisis.

Tabla III.19. Comparación de resultados analíticos y numéricos no lineales

Respuesta	Elasto-plástica		Con endurecimiento	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
$\epsilon_y=$	0.001742	0.001698	0.001742	0.001698
error %=	2.51		2.51	
$\sigma_y=$	3,338.89	3,566.32	3,338.89	3,566.32
error %=	6.81		6.81	
$\epsilon_u=$	0.00988	0.01124	0.00988	0.01124
error %=	12.12		12.12	
$\sigma_u=$	3,338.89	3,566.32	4,818.28	4,372.73
error %=	6.38		9.25	
$\mu=$	5.67	6.62	5.67	6.62

Como sabemos la ductilidad es una característica importante de los materiales, motivo por el cual evaluamos la ductilidad como se indica en la ecuación (2.44). Se tiene que la ductilidad obtenida del análisis numérico es de $\mu = 6.62$ y para el analítico se tiene una ductilidad de $\mu = 5.67$.

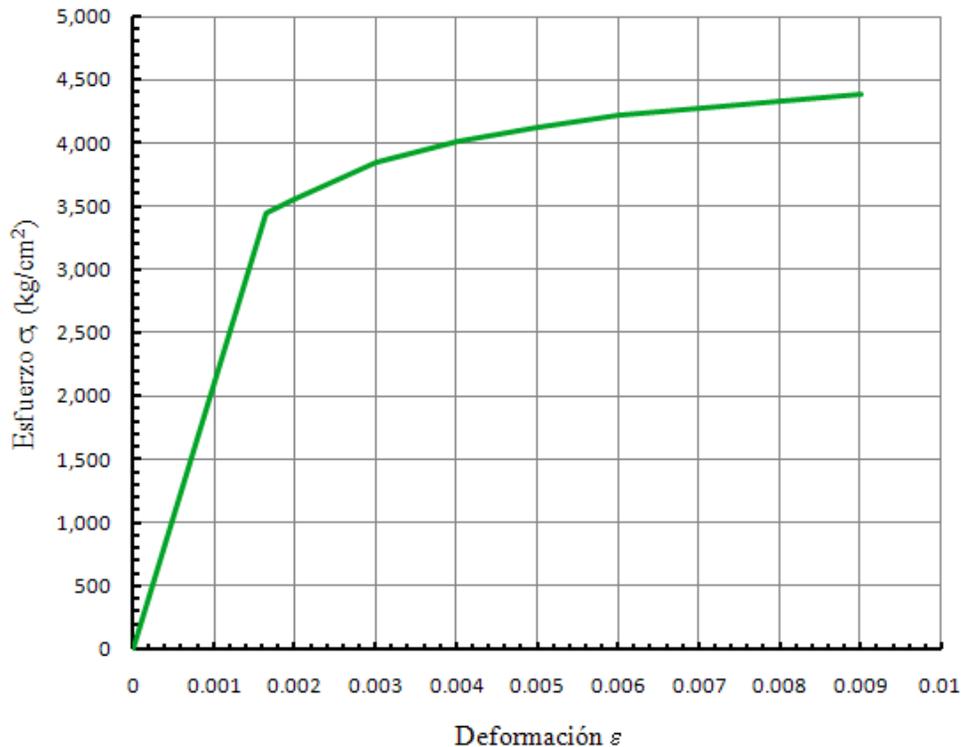
III.5.3 RESULTADOS NUMÉRICOS CONTRA EXPERIMENTALES (NO LINEALES)

En esta sección se compara la curva de esfuerzo deformación para un ducto de espesor $t=0.9525\text{cm}$ (3/8") obtenida del modelado numérico, la cual considera la no linealidad del material con la curva obtenida de datos experimentales.

Los datos de la curva experimental resultan de someter una placa de material de acero API-X52 a fuerzas de tensión simple. Los datos relacionados a esta prueba se muestran en la tabla III.20, y la curva de esfuerzo deformación se indica en la gráfica III.67 (Vázquez, 2000).

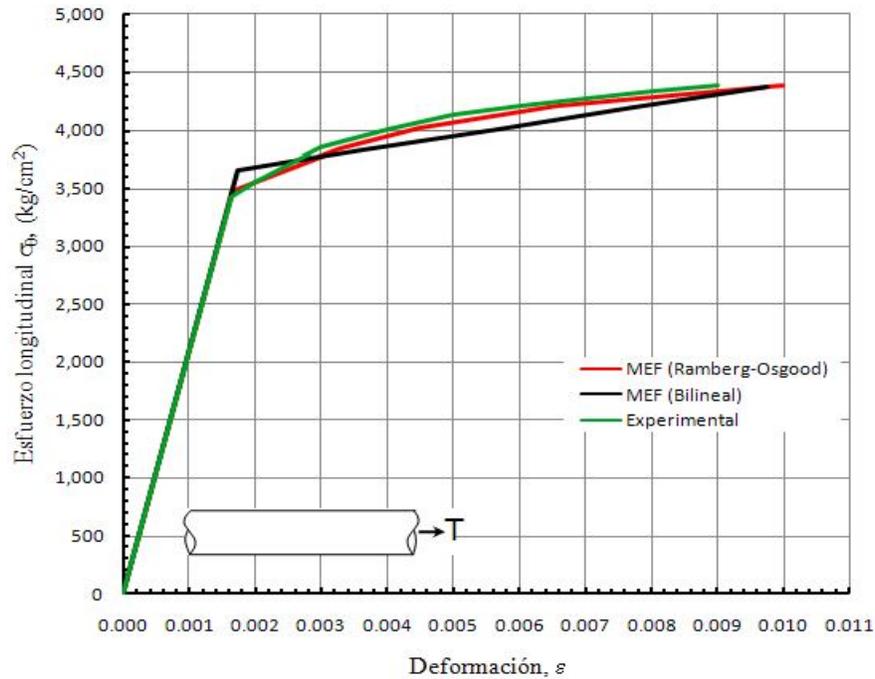
Tabla III.20 Valores de la curva esfuerzo-deformación unitaria del acero API-X52

Esfuerzo ing. σ , (kg/cm ²)	Deformación unitaria ε
0	0
3436.72	0.00163
3557.007	0.002
3845.692	0.003
4003.781	0.004
4124.066	0.005
4209.985	0.006
4268.408	0.007
4330.27	0.008
4381.82	0.009



Gráfica III.67. Curva de esfuerzo-deformación para el acero API-X52

Conocida la curva de esfuerzo-deformación experimental se compara con la curva de esfuerzo deformación obtenida de los modelos numéricos, los cuales consideran comportamiento plástico con endurecimiento por deformación (Ramberg-Osgood) y el modelado bilineal, ver gráfica III.68.

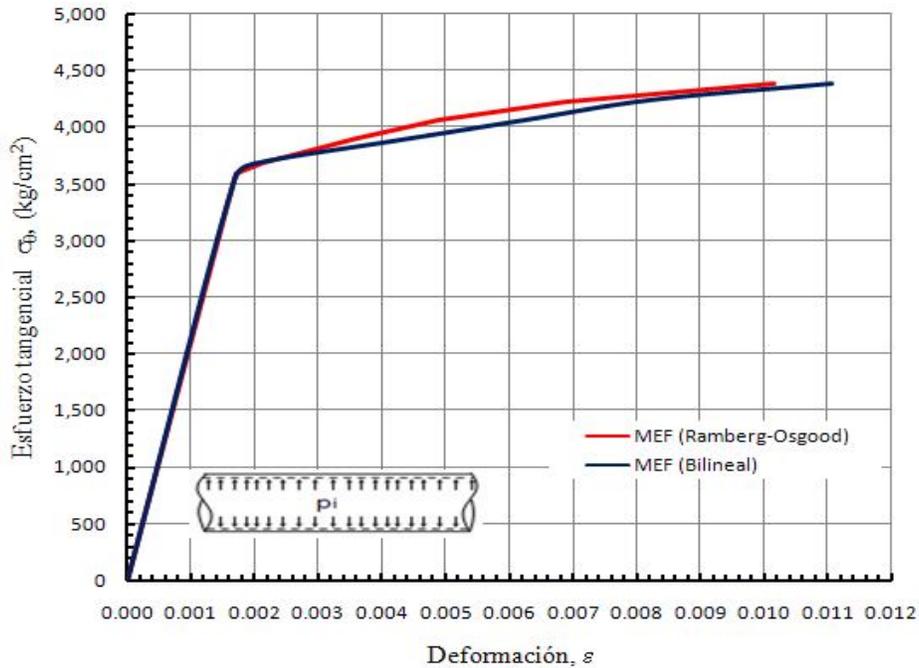


Gráfica III.68. Curva esfuerzo-deformación numérica vs la experimental

De la gráfica III.68 se observa muy buenas aproximaciones para los tres modelos considerados, no obstante la curva bilineal reporta valores de esfuerzos ligeramente menores en la etapa de endurecimiento. En cuanto a la capacidad del ducto de incursionar en el rango inelástico se tiene que la curva representada por Ramberg-Osgood tiene una ductilidad de 6.02 que es mayor que la bilineal de 5.61 y que la experimental de 5.50.

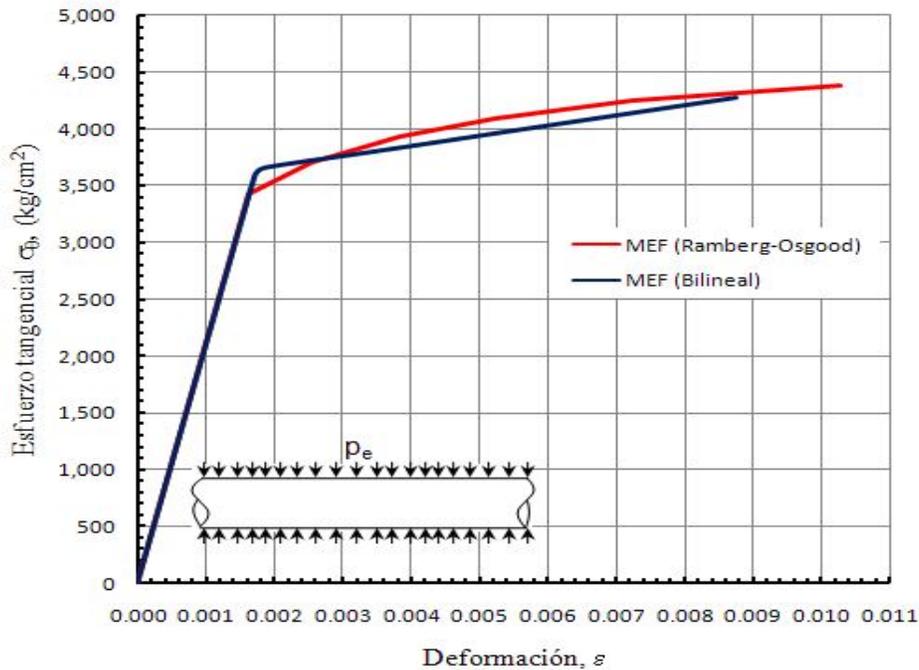
Las gráficas que a continuación se presentan solo muestran comparaciones de resultados numéricos empleando el modelo mecánico de Ramberg-Osgood y el bilineal ya que no se pudo contar con datos experimentales para las condiciones de cargas indicadas.

En la gráfica III.69 se muestran los resultados para un ducto sometido a presión interna, en ésta se observa que para el modelo bilineal el esfuerzo de fluencia es de $3,552 \text{ kg/cm}^2$, lo cual está ligeramente por encima del esfuerzo de fluencia de la curva empleando Ramberg-Osgood. En cuanto a la ductilidad se tiene que el modelo bilineal es de 6.54, lo que indica mayor capacidad de deformación que la obtenida empleando Ramberg-Osgood que es de 6.32.



Gráfica III.69. Curva esfuerzo-deformación para el ducto sometido a (p_i)

En la gráfica III.70 se muestran las curvas de esfuerzo-deformación del ducto sometido a presión externa, en esta se puede ver que la respuesta bilineal es un poco más conservadora en la zona plástica, lo cual se podría prever valores de esfuerzos y de deformaciones más bajos. De esta gráfica se observa un mejor comportamiento en el modelo de Ramberg-Osgood.



Gráfica III.70. Curva esfuerzo-deformación para el ducto sometido a (p_e)

En la tabla III.21 se muestran los resultados obtenidos de los modelos numéricos arriba mencionados, en la que se indican esfuerzos, deformaciones y ductilidades.

Tabla III.21. Resultados numéricos para diferentes estados de carga

Tipo de carga	Material	σ_y , (kg/cm ²)	ϵ_y	σ_u , (kg/cm ²)	ϵ_u	μ
Presión interna	Ramberg-Osgood	3,374.30	0.00161	4,380.58	0.01015	6.32
	Bilineal	3,552.19	0.00169	4,380.56	0.01107	6.54
Presión externa	Ramberg-Osgood	3,425.01	0.00163	4,380.53	0.0103	6.29
	Bilineal	3,436.60	0.00164	4,280.14	0.00875	5.34
Tensión axial	Ramberg-Osgood	3,485.78	0.001660	4,381.82	0.00999	6.02
	Bilineal	3,646.21	0.001736	4,372.50	0.00974	5.61
	Experimental	3,436.72.	0.001636	4,381.82	0.009	5.50

Para la condición de carga de presión interna se observa gran similitud para el modelo bilineal y el de Ramberg-Osgood, y para el ductos sometido a tensión se tienen buenas aproximaciones entre los tres modelos utilizados.

CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones más relevantes de esta tesis, las cuales fueron obtenidas a partir de análisis lineales y de análisis no lineales

- De los análisis lineales

- Del análisis realizado del ducto sometido a presión interna se obtuvo una muy buena aproximación entre el resultado analítico empleando las ecuaciones propuestas por la teoría de cascarones, y los resultados numéricos realizados con el programa Ansys.
- De la condición de carga de presión interna, se observó que los desplazamientos radiales dan valores iguales tanto en el análisis numérico y analítico. En cuanto a los esfuerzos tangenciales se obtuvieron pequeñas variaciones principalmente en los dos de menor espesor, dicha variación corresponde a un 6%. De igual forma se observó que a medida que los espesores disminuyen, los desplazamientos y esfuerzos se incrementan y cuando aumentan los espesores sucede lo contrario.

- De los análisis no lineales

Empleando los estudios de plasticidad es posible llegar a conocer los estados de carga de falla de tuberías y obtener mayor información acerca de su comportamiento mecánico.

- La mayoría de los ductos sometidos a un solo estado de carga presentaron ductilidades similares. Y se observó que en algunos estados de carga, como presión interna, presión externa y momento flexionante la ductilidad disminuye conforme aumenta el espesor, t .
- En cuanto a los ductos sometidos a combinaciones de carga, se tiene que el ducto que presenta mayor ductilidad es la combinación de tensión axial más momento flexionante (T+M).

Del ducto sometido a momento flexionante se obtuvieron respuestas numéricas y analíticas, empleando dos leyes de comportamiento, la elasto-plástica y plástica con endurecimiento por deformación (modelo de Ramberg-Osgood). En la que se observa lo siguiente:

- El ducto fluye primero en la solución analítica que el que se obtiene de forma numérica para ambos materiales.
- Para el ducto que emplea la curva de plasticidad con endurecimiento por deformación (Ramberg-Osgood), se tiene que la ductilidad obtenida de forma numérica es mayor que la ductilidad del resultado analítico, lo que indica que la respuesta determinada de forma numérica presenta mayor capacidad de deformación. Sin embargo, la curva esfuerzo deformación analítica presenta mayor capacidad resistente.
- Para el ducto que emplea la curva elasto-plástica perfecta, se tiene que la ductilidad obtenida de forma numérica es mayor que la ductilidad analítica. Aquí, sin embargo la curva esfuerzo deformación numérica presenta mayor capacidad resistente.

De igual forma se realizaron modelos numéricos empleando la ley de comportamiento bilineal para tres diferentes estados de carga, como son presión interna, presión externa y fuerza de tensión, la cual fueron comparados con la respuesta numérica empleando el modelo mecánico de Ramberg-Osgood y la curva obtenida de datos experimentales, encontrando muy buena aproximación entre ellos.

- El ducto sometido a presión interna y fuerza de tensión presenta un buen comportamiento para las tres leyes de material utilizadas. Para el caso de presión externa el modelo bilineal no muestra una buena respuesta ya que presenta valores muy conservadores.
- El modelo bilineal presentó mayor ductilidad para el ducto sometido a presión interna, y en los otros dos casos los niveles más grandes de ductilidad se presenta en los modelos de Ramberg-Osgood.

De las curvas de respuesta estructural de las tuberías se observó lo siguiente:

- Del ducto sometido solamente a tensión, este presenta mayor ductilidad con respecto al ducto sometido a la combinación de carga de presión interna más tensión, y que el ducto sometido a presión externa más tensión. Si al ducto sometido a tensión se le aplica presión interna mejora su capacidad resistente, no obstante se reduce su ductilidad en un 2.5% respecto del evaluado solamente a tensión. También se observó que el ducto sometido a tensión más presión externa disminuye su capacidad de resistencia y su ductilidad, en un porcentaje del 10% respecto del ducto a tensión.

- Del ducto sometido a momento flexionante se observó que presenta mayor capacidad resistente y de giro respecto del ducto sometido a flexión más presión interna, no obstante en esta combinación se tiene mayor rigidez que el ducto sometido a flexión pura

De la comparación de los resultados numéricos con el experimental para el ducto sometido a tensión se observa muy buenas aproximación para los tres modelos utilizados, no obstante la curva bilineal reporta valores de esfuerzos ligeramente menores en la etapa de endurecimiento. En cuanto a la capacidad del ducto de incursionar en el rango inelástico se tiene que la curva representada por Ramberg-Osgood tiene una ductilidad de 6.02 que es mayor que la bilineal de 5.61 y que la experimental de 5.50

Con el elemento Shell 63 y 181 se obtuvieron buenas aproximaciones ya que estos elementos son usados para modelar estructuras en las cuales una dimensión (espesor), es significativamente más pequeño que el resto de las otras dimensiones y además la deformación transversal por cortante es insignificante.

Finalmente, este trabajo de tesis sirvió para conocer la influencia de las cargas en las tuberías y, conocer la respuesta estructural evaluando los diferentes niveles de cargas y combinaciones de cargas que la tubería es capaz de soportar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A -

André M. M. and kumar C. K., (2005). “Mechanical metallurgy- Principles and Applications”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

Ansys Release V.11.0, (2007). “Ansys, Inc. Theory reference”.

- B -

Bazan E. y Meli R., (2000). “Diseño sísmico de edificios”, Editorial Limusa, Noriega editores, México.

Bresler Boris., (1981). “Concreto reforzado en ingeniería. Editorial Limusa. Primera edición”. Vol.1. México.

- C -

Chakrabarty. J., (1987). “Theory of plasticity”. Third edition. Editorial Elsevier.

- D -

Daryl L. L., (2002). “A first course in the finite element method”. Editorial Thomson Learning. Third edition. United State of America. Pp 1-21.

De Buen O., (2000). “Diseño de estructuras de acero, Flexión 1 (Vigas sin pandeo lateral)”. Fundación ICA.

Dominguez V., M. Urriolagaitia C., Ortega H. J. M., (1992). “Análisis computacional de esfuerzos mediante el método de elementos finitos”. SEPI-ESIME. Serie en ciencias e ingeniería. Vol.12.

- E -

Dowling E. N., (2002). “Mechanical behavior of material. engineering methods for deformation, fracture, and fatigue”. Editorial Prentice Hall. Third edition. Upper Saddle River, New Jersey.

- F -

Fyrileiv O. and Collberg L., (2005). "Influence of pressure in pipeline design-effective axial force". Proceeding of the 24th International Conference on Offshore Mechanics and Engineering, OMAE. Halkidiki, Grece. Pp. 1-8.

- G -

González J. L. y Morales A. R., (2006). "Comportamiento mecánico de laminaciones no coplanares en tubos aplicando EF". IX Congreso Iberoamericano de Metalurgia y Materiales, Habana, Cuba.

Guerrero M., Valderrábano S., Campos R., Ainoso Isasi. L., (1999). "Aplicación del método del elemento finito". Ingenierías, Enero-Abril 1999, Vol. II, pp. 49-55.

- H -

Hill, R., (1956). "Mathematical theory of plasticity". Ed. Oxford. England. pp 1-13.

Huebner Kenneth H., (1975). "The finite element method". Ed. John wiley and Sons. United States of America.

- J -

J. Grittini S. y G. Toscano R., (2004). "Modelado computacional de la respuesta estructural de tuberías compuestas. Aplicaciones a ductos submarinos". Mecánica Computacional Vol. XXIII. Bariloche, Argentina. Pp. 1-17.

- K -

Kyriakides S. and Corona E., (2007). "Mechanics of offshore pipelines". First edition. Ed. Elsevier. Vol. I Buckling and collapse.

- L -

Liu, H., (2003). "Pipeline engineering". Ed. Lewis Publishers.

López Ríos J., y Musito C. E., (1994). "Análisis de las graficas de interacción momento flexionante-fuerza axial-curvatura para un ducto con comportamiento elasto-plástico". Memorias del IX congreso nacional de ingeniería estructural. Vol. I. Zacatecas, México. Pp 206-215.

- M -

M. Asghar Bhatti J., (2005). "Fundamental finite element analysis and applications with mathematical and matlab Ccomputations". Editorial. John wiley and Sons.

Mendelson A., (1968). "Plasticity: Theory and application". Ed. Robert E. Krieger Publishing Company. Malabar, Florida.

M.R. Dalmau, J Vilardell y M. R. Dalmau G., (2003). "Introducción al análisis plástico de estructuras". Publicado por ediciones UPC.

- P -

P. Boresi A. and J. Schmidt R., (2003). "Advanced mechanics of materials". Sixth Edition. Ed. John Wiley & Sons.

Park R., y Paulay T., (1999). "Estructuras de concreto reforzado". Editorial Limusa. México.

Pérez de la C.M., Cortés S.C. y Sánchez. S. H (2008). "Comportamiento mecánico de ductos metálicos sometidos a condiciones de carga mediante modelado Numérico". VIII Congreso internacional de innovación y diseño basado en simulación por computadora. Guanajuato, México.

- R -

Ramberg, W. and Osgood, W., (1943). "Description of stress strain curves by three parameters". Technical Note No. 902, National Advisory Committee for Aeronautics. Washington, DC.

- S -

Sánchez S. H., y Cortés S. C., (2005). "Riser stability external pressure and axial compression observing geometrical imperfections". Proceeding of the 24th International Conference on Offshore Mechanics and Engineering, OMAE. Halkidiki, Grece. Pp. 1-16.

Sánchez. S. H., Cortés S.C., Flores C.V y Pérez De C.M., (2008). "Estudio del comportamiento mecánico de ductos sometidos a diferentes solicitaciones", Reporte SIP-20080276, IPN.

Schaumann P., Keindorf C. and Brüggemann, (2005). "Elasto-plastic behavior and buckling analysis of steel pipelines exposed to internal pressure and additional loads". Proceeding of the 24th International Conference on Offshore Mechanics and Engineering, OMAE. Halkidiki, Grece. Pp. 1-9.

- T -

Timoshenko, S.T., (1945). "Resistencia de materiales. Primera edición en español". Ed. Esparsa-Calpe. S.A. Madrid. Vol, 2.

Timoshenko, S.T., and Krieger, S. P. (1959). “Theory of plates and shells”. Ed. McGraw-Hill. Tokio, Japan.

Toscano G. R., Gonzáles M. and N. Dvorkin E., (2004). “Validation of a finite element model that simulates the behavior of steel pipes under external pressure”. Center for Industrial Research. Buenos Aires, Argentina. Pp.1-19.

Torselletti E., Vitalli Luigino and Bruschi R., (2005). “Bending capacity of girth-welded pipes”. Proceeding of the 24th International Conference on Offshore Mechanics and Engineering, OMAE. Halkidiki, Grece. Pp. 1-9.

- U -

Ugural, A.C., (1995). “Advanced strength and applied elasticity”. Third edition. Ed. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River. New Jersey.

- V -

Vázquez M. G., (2000). “Análisis numérico tridimensional de grietas circunferenciales en ductos”. Escuela superior de ingeniería mecánica y eléctrica. Sección de estudios de posgrado e investigación del I.P.N. México D.F.

- Z -

Zienkiewicz, O. C., (1980). “El método de los elementos finitos”. Ed. Reverté. Barcelona.

Páginas de internet

- U -

Answers.com. “Ramberg-Osgood Relationship”. Obtenida el 11 de Noviembre de 2007, de <http://www.answers.com/topic/ramberg-osgood-relationship>

Capítulo 3 Modelo numérico. Obtenida el 5 de Diciembre de 2008, de http://www.tdr.cesca.es/TESIS_UPC/AVAILABLE/TDX062510109218//capitulo03.PDF

Producción de petróleo en México. Obtenida el 5 de Noviembre de 2007, de [www.elmundodelpetroleo.com].

Apéndice A

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Es de importancia el conocimiento de la respuesta del material para el análisis lineal y de plasticidad, por lo que se presentan los diagramas de esfuerzo-deformación, la cual representa el comportamiento del material.

Comportamiento mecánico en tensión

El esfuerzo es una función de las fuerzas internas en un cuerpo, que se producen por la aplicación de las cargas exteriores, que cuando esto sucede ocurre un cambio en la deformación.

La curva esfuerzo deformación es una representación del comportamiento del sólido mientras que la carga aumenta monótonicamente a la fractura. Estas curvas son usualmente presentadas como: curva esfuerzo deformación de ingeniería, en la cual las dimensiones originales de los especímenes son generalmente usados en la mayoría de los cálculos y la curva esfuerzo deformación verdadera, aquí son usadas las dimensiones instantáneas del sólido en cada punto durante la prueba.

En esta sección comenzaremos definiendo el esfuerzo axial de compresión uniaxial de ingeniería como la fuerza aplicada P entre el área A_0 transversal original del sólido. Suponiendo que el esfuerzo es constante en toda la sección transversal del sólido, por lo que tenemos,

$$\sigma_{ing} = \frac{P}{A_0} \quad \text{A.1}$$

de la misma manera definimos la deformación de la curva de ingeniería, que es la relación entre el cambio o elongación de la longitud medida original ΔL del sólido y la longitud original L_0 . Suponiendo que la deformación unitaria es constante en toda la longitud del sólido, por lo que tenemos;

$$\varepsilon_{ing} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{A.2}$$

a continuación se muestra la gráfica de esfuerzo-deformación de ingeniería, obtenida de materiales sometidos a pruebas de tensión.

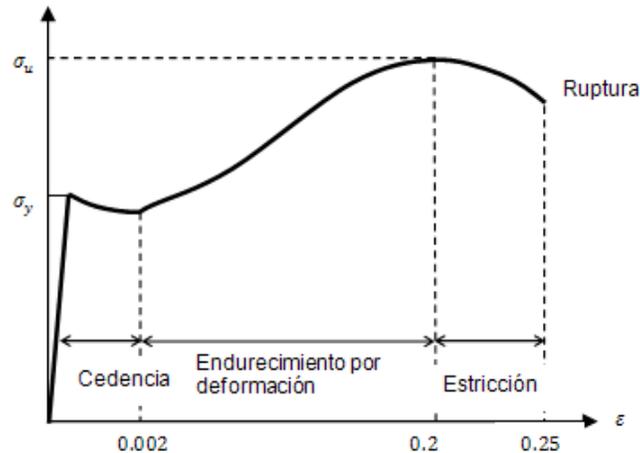


Figura A.1. Diagrama esfuerzo-deformación para un acero bajo al carbono

De la figura A.1, se observa la porción de línea recta que es la región elástica, donde el esfuerzo es linealmente proporcional a la deformación. El punto en el cual la línea sale de la parte recta es el límite de proporcionalidad, aquí la curva disminuye su pendiente y el material se deforma con muy poco o ningún aumento en la carga. El material fluye o se deforma plásticamente en este punto. Posteriormente la curva aumenta su pendiente y alcanza un valor máximo, donde σ_u es el esfuerzo que el material es capaz de soportar. Después la curva desciende hasta donde ocurre la fractura.

El diagrama esfuerzo deformación indica también la rigidez de un material, esto es el módulo de elasticidad o módulo de Young, que es la pendiente de la línea recta de la curva, esto es;

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{A.3}$$

la forma de la curva esfuerzo deformación y los valores asignados sobre los puntos de la curva de un metal dependen de su composición, tratamiento térmico y condiciones, historia previa de deformación plástica, el valor de deformación de la prueba, temperatura, orientación relativos de esfuerzos aplicados y de la medida y forma del sólido.

Los parámetros que se usan para describir esta curva son: la fuerza a la tensión, la fuerza de fluencia o punto de fluencia, fuerza última a tensión, porcentaje de elongación y reducción del área, siendo los tres primeros parámetros de fuerza y los restantes indica ductilidad.

Curva esfuerzo deformación real

En el diagrama de esfuerzo deformación real está basada en las medidas instantáneas, obtenidas del sólido.

El esfuerzo y deformación real se determinan de la siguiente manera,

$$\sigma_{real} = \frac{P}{A_0} \quad A.4$$

$$\varepsilon_{real} = \int_0^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \quad A.5$$

esta deformación representa la suma de los incrementos de deformación dividida por la longitud L , correspondiente a un incremento particular de la longitud dL .

De la relación que existe en la deformación y esfuerzo real con los de ingeniería, se tiene,

$$\varepsilon_{real} = \ln(1 + \varepsilon_{ing}) \quad A.6$$

$$\sigma_{real} = \sigma_{ing}(1 + \varepsilon_{ing}) \quad A.7$$

cabe mencionar, que de una comparación las curvas esfuerzo deformación, se tiene que la curva real se encuentra por arriba de la de ingeniería, esto es debido a que se considera el área instantánea en la prueba a tensión del material.

Modelos de curva esfuerzo deformación en tensión uniaxial

Las curvas de esfuerzo deformación son difíciles de utilizar en soluciones matemáticas de problemas complejos. Sin embargo, modelos idealizados de la respuesta del material pueden ser usados en el análisis. Por consiguiente, en esta sección se verán cuatro modelos de curvas idealizadas para entender el comportamiento del material.

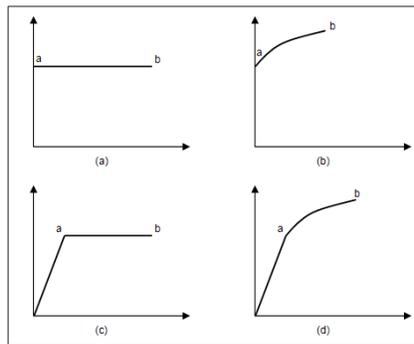


Figura A.2. Diagramas idealizados de esfuerzo deformación

La figura A.2a son materiales referidos como rígidos perfectamente plástico, este modelo no considera la deformación elástica. La respuesta mostrada en la figura A.2b se dice que es rígido plástico, éste incluye endurecimiento por deformación.

En la figura A.2c, la parte a-b es paralela al eje de deformación, y el esfuerzo permanece constante conforme aumenta la deformación, la respuesta es elástico perfectamente plástico, la cual no ignora la deformación elástica. Y por último, la respuesta de endurecimiento por deformación elástica lineal, dada en la figura A.2d.

Criterios de fluencia

El estudio del comportamiento de materiales es conocido como la teoría de plasticidad. En general una teoría completa de plasticidad tiene tres componentes:

1. Criterio de fluencia, que define la iniciación de la fluencia del material.
2. Relación de flujo, que relaciona los incrementos de deformación plástica con los incrementos de esfuerzos después de la iniciación de la fluencia.
3. Relación de endurecimiento, que predice los cambios en la superficie de fluencia.

Han surgido varios criterios para predecir el punto de fractura basado en propiedades del material, como es el esfuerzo de fluencia. Muchos de estos son, sin embargo, sólo de interés histórico, porque están en conflicto con lo experimental encontrando que un esfuerzo hidrostático no tiene efecto en la fluencia. Los criterios se aplican dependiendo como se espere la falla del material, es decir; frágil o dúctil. Los dos criterios más ampliamente aceptados para la aparición del comportamiento inelástico (fluencia) en materiales dúctiles bajo esfuerzos combinados; son el criterio de Von Mises y el de Tresca.

Criterio de Tresca (1864)

Este criterio es también conocido como el esfuerzo cortante máximo, este indica que la fluencia comienza cuando el esfuerzo cortante máximo en un punto es igual al esfuerzo cortante máximo a la fluencia en tensión uniaxial. Para un estado de esfuerzo multiaxial, el esfuerzo cortante máximo es:

$$\sigma_y = |\sigma_{max} - \sigma_{min}|$$

Donde σ_{max} y σ_{min} denota la componente de esfuerzo principal máxima y mínima, respectivamente.

Criterio de von mises (1913)

A este criterio se le conoce como la energía de distorsión máxima. En este enfoque, la energía elástica total se divide en dos partes: una asociada a los cambios volumétricos del material y otra que causa distorsiones por cortante. Igualando la energía de distorsión o deformación por cortante en el punto de fluencia en tensión simple a la energía correspondiente a esfuerzo combinado, se establece el criterio de fluencia para estos esfuerzos.

Según esta teoría de Von Mises, asume que la fluencia inicia cuando la energía de distorsión se iguala en un punto a la energía de distorsión a la fluencia en tensión uniaxial. Dicha energía de distorsión está asociada con un cambio en la forma de cuerpo.

Por definición, este criterio se expresa como;

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad \text{A.8}$$

expresado en esfuerzos principales, se tiene;

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad \text{A.9}$$

se puede ver que el esfuerzo de Von Mises es un tipo de promedio del esfuerzo de corte en el tensor de esfuerzos.

En la figura A.3 se muestra el criterio de Tresca y Von Mises; de acuerdo a ésta, cualquiera de las dos líneas da un criterio para la fluencia de un material perfectamente plástico. Y se puede observar que la discrepancia en el hexágono de Tresca y la elipse de Von Mises no es my grande; la teoría del esfuerzo cortante máximo es en general más conservadora.

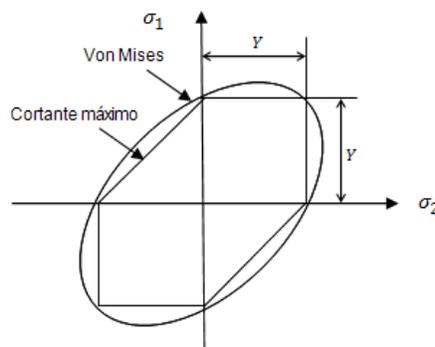


Figura. A.3. Criterio de Tresca y de Von Mises

Si los esfuerzos principales son conocidos, el criterio de Tresca es más fácil de aplicar que el criterio de Von Mises. Este último criterio predice un esfuerzo de fluencia a cortante puro alrededor de un 15 por ciento que lo predicho por el criterio de Tresca. Materiales que se comportan según cualquiera de los dos criterios son a menudo llamados materiales J_2 , donde el esfuerzo efectivo puede ser escrito solamente en términos de invariantes (*Boresi et al. 2003*).

Elasticidad y campos de esfuerzos

Los avances realizados con la computadora digital dentro de las décadas pasadas han abierto nuevos campos para ingenieros y científicos. Los problemas previamente considerados como singular, solamente se podían resolver mediante experimentos y fórmulas empíricas simplificadas, ahora se pueden analizar numéricamente a gran detalle. En el campo de la mecánica del medio continuo esto ha aumentado el interés en descripciones matemáticas detalladas.

Por tanto, se presenta algunos conceptos generales que son fundamentales en la teoría de la elasticidad, que se requieren para el estudio de las técnicas de análisis de esfuerzos empleados.

Tensor de esfuerzos

Básicamente existen dos tipos de fuerza cuya acción produce la aparición de esfuerzos en un cuerpo. Estos esfuerzos son las fuerzas de superficies y las llamadas fuerza de cuerpo. Las primeras son llamadas de superficie porque actúan sobre la superficie del cuerpo. Dichas fuerzas por lo general son ejercidas cuando un cuerpo entra en contacto con otro. Las fuerzas del segundo tipo se deben a acciones centrífugas, gravitacionales, o de algún otro campo. Estas fuerzas están asociadas a la masa del espécimen y es común que no sean tomadas en cuenta para el análisis.

Cuando un cuerpo está sujeto a un sistema de cargas externas, se producen fuerzas internas en diferentes partes del cuerpo, tal que cada elemento del cuerpo está en un estado de equilibrio estático.

Se puede representar las componentes cartesianas de esfuerzos en un pequeño elemento cúbico, como el que se muestra en la figura A.4. La convención de signos empleada en la construcción del cubo establece que si la normal que define la cara del cubo está en la dirección positiva de x , y , y z , entonces la componente normal y cortante de esfuerzos asociados a ella, también estarán en la dirección positiva de x , y , y z . Si la normal está en la dirección negativa de x , y , y z , entonces las componentes de esfuerzos normal y cortante también estarán en la dirección negativa de x , y , y z (*Dominguez et al. 1992*).

La cara del esfuerzo normal del cubo son denotado por σ_x , σ_y y σ_z , donde el subíndice denota las direcciones normales a la cara. El esfuerzo cortante que actúa en las caras normal al eje x es resuelto dentro de dos componentes τ_{xy} y τ_{xz} paralelas al eje y y z , respectivamente. El primer subíndice indica la dirección normal a la cara y el segundo la dirección de la componente. De forma similar, el esfuerzo cortante en la cara normal al eje y es denotado por τ_{yx} y τ_{yz} , y en las caras normal al eje z por τ_{zx} y τ_{zy} . Las nueve componentes de esfuerzos en cualquier punto forma un tensor de segundo orden σ_{ij} , conocido como el tensor de esfuerzo, donde i y j toman valores de 1, 2 y 3.

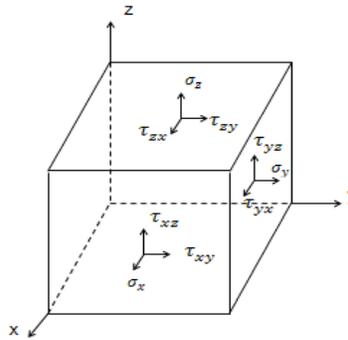


Figura A.4. Componentes cartesianas de esfuerzo actuando en las caras de un pequeño elemento cúbico

Las componentes de esfuerzos pueden ser mostradas como elementos de una matriz cuadrada.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

El tenso de esfuerzo es simétrico con respecto a sus subíndices, esto puede ser expresado como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. De aquí que son seis componentes de esfuerzos independientes, tres componentes normal σ_x , σ_y , σ_z , y tres componentes de esfuerzos cortantes τ_{xy} , τ_{yz} y τ_{zx} , lo cual especifica el estado de esfuerzo en cada punto del cuerpo. La matriz que representa el tensor de esfuerzo es simétrica.

La media de los tres esfuerzos normales, es igual a $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$, y es conocido como el esfuerzo hidrostático denotado por σ_y .

Tensor de deformación

En un cuerpo dado sometido a un sistema de fuerzas, los puntos individuales del cuerpo se mueven. A este movimiento de un punto arbitrario se le llama desplazamiento y es una cantidad vectorial. Si los distintos puntos del cuerpo sufren diferentes movimientos, cada uno de los cuales puede representarse sólo

por su vector individual de desplazamiento, cada vector puede descomponerse en componentes tales como u, v, w , las cuales son paralelas a los ejes de coordenada cartesiana x, y, z , respectivamente.

El movimiento de un cuerpo puede considerarse como la suma de dos partes:

- La traslación y/o rotación del cuerpo como un todo.
- El movimiento de los puntos del cuerpo respecto de otros puntos del mismo cuerpo.

A la primera de las dos partes que constituyen el movimiento de un cuerpo se les denomina movimiento de cuerpo rígido. Éste es aplicable tanto a cuerpos que se consideran completamente rígidos como a cuerpos reales que son deformables. Al movimiento de los puntos de un cuerpo respecto de ellos mismos se le llama deformación y es, por supuesto, una propiedad exclusiva de los cuerpos reales.

La deformación es una cantidad geométrica que depende del movimiento relativo de dos o tres puntos en un cuerpo. Como los desplazamientos de cuerpo rígido no producen deformaciones, no son tomadas en cuenta para estudiar las deformaciones. De igual modo que para los esfuerzos, las deformaciones se clasifican en normales y cortantes o tangenciales. La deformación normal se define como el cambio de longitud de un segmento de línea entre dos puntos, dividida entre la longitud inicial del segmento de línea. La deformación cortante se define como el cambio angular entre dos segmentos de líneas, los cuales eran originalmente perpendiculares. Las relaciones entre deformaciones y desplazamientos se pueden determinar considerando la distorsión en un cubo que forma parte de un cuerpo.

La deformación normal ε_x se define como el cambio de longitud en un segmento de la línea paralela al eje x , dividido por su longitud; esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{A.10a}$$

por similitud se tiene,

$$\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{A.10b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{A.10c}$$

la deformación cortante γ_{xy} se define como el cambio en el ángulo recto formado por segmentos de líneas paralelos a los eje x , y y ; esto es,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{A.11a}$$

de manera similar;

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{A.11b}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{A.11c}$$

En ciertos problemas donde el campo de desplazamientos puede calcularse analíticamente, tal es el caso del método del elemento finito, por lo que las ecuaciones (A.10) y (A.11) son muy importantes. Entonces que, las deformaciones pueden conocerse directamente si se conocen los desplazamientos (*Domínguez et al. 1992*).

Ecuaciones de equilibrio

Un cuerpo que se somete a un sistema de fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo, se producen esfuerzos de magnitudes y direcciones variables. La distribución de dichos esfuerzos debe ser tal que se mantenga el equilibrio en el cuerpo entero; así como también debe mantenerse el equilibrio de cada elemento del mismo.

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} = 0 \quad \text{A.12a}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{Y} = 0 \quad \text{A.12b}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} = 0 \quad \text{A.12c}$$

Donde \bar{X} , \bar{Y} , y \bar{Z} son las fuerzas de cuerpo.

Ecuaciones de compatibilidad

Las deformaciones y las relaciones de cambio de forma deben ser compatibles entre ellas. La interpretación física de la compatibilidad, es que no debe existir ningún tipo de discontinuidad en el material después de la deformación adicional a las que se presentaba previamente el cuerpo sin deformar. Esto implica que u , v y w deben ser funciones de posición continua.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial_x \partial_y} \quad \text{A.14a}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial_x \partial_z} \quad \text{A.14b}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial_y \partial_z} \quad \text{A.14c}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial_z \partial_x} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial_y \partial_z} \quad \text{A.14d}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial_x \partial_z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial_y \partial_z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial_x \partial_y} \quad \text{A.14e}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_y \partial_z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial_x \partial_z} \quad \text{A.14f}$$

Ecuaciones de continuidad

Al considerar un sólido cuyo comportamiento de la partícula obedece la ley de Hooke para un material elástico lineal, homogéneo e isotrópico, y tomando en consideración las relaciones de simetría, entonces se puede relacionar los seis esfuerzos y deformaciones principales en función de las tres constantes (E, G, ν) como sigue (Boresi et al. 2003).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\gamma_{yz}}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\gamma_{zx}}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \gamma_{zx} \end{aligned} \quad \text{A.15}$$

Apéndice B

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos es una técnica de análisis numérico empleada para obtener soluciones aproximadas para una amplia variedad de problemas de ingeniería. En la actualidad, se sabe que en muchas situaciones es necesario resolver estos problemas obteniendo soluciones numéricas aproximadas en vez de soluciones exactas. Así mismo, con la aparición de la computadora alteró radicalmente la capacidad disponible para resolver ecuaciones diferenciales parciales, lográndose que las soluciones numéricas estén al alcance de los analistas. El método del elemento finito emplea un arreglo de varias subregiones o elementos de tamaño muy pequeño y que están interconectados entre sí. El modelo por elementos finitos de un problema, ofrece una aproximación por elementos de las ecuaciones gobernantes.

El concepto básico de este método es el de dividir el continuo en un número finito de elementos, es decir discretizar el continuo y resolver sobre cada uno de los elementos las ecuaciones del sistema para después ensamblar la solución total. Los elementos pueden ser colocados en una gran variedad de posiciones y las dimensiones se pueden usar para representar aun las formas más complejas. (*Huebner, 1975*).

Al igual que otros procedimientos numéricos alternativos, empleados para solucionar problemas prácticos en el campo de la mecánica del medio continuo, el método del elemento finito requiere formular y resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. La principal ventaja de este método reside en la capacidad de ser automatizado para formar ecuaciones y la habilidad que tiene para representar estructuras irregulares y complejas, así como diversas condiciones de frontera.

Mediante el método del elemento finito se calcula las deformaciones que sufre el elemento debido a fuerzas externas a él, o por contacto con otros elementos. Una vez hecho esto, pasa a otro elemento que sea adyacente al anterior, tomando en cuenta las condiciones de frontera de los elementos.

Antecedente histórico del método del elemento finito

El principio básico del método del elemento finito ha sido empleado durante siglos en diferentes formas. Todas ellas tienen la característica común de reemplazar un problema real por uno más simple, haciendo uso de los llamados elementos finitos.

El desarrollo del método del elemento finito, tal como se conoce en la actualidad, inició en la década de los 40s. En 1941, Hrenikoff y en 1943 Mc Henry publicaron trabajos donde aplicaban el método a problemas de elasticidad en estructuras. En 1943, Courant sugirió el uso de polinomios de interpolación pieza por pieza en subregiones triangulares. El trabajo de Courant es particularmente importante ya que se extendió el concepto del método del elemento finito a otros campos y no se limitó al de la mecánica estructural.

En 1947, Levy aplicó el método del método del elemento finito a la aeronáutica, un campo que captó la atención de muchos investigadores y que fue objeto de múltiples estudios. La formulación general del método de la ingeniería matricial de estructuras, basado en los principios energéticos fundamentales de la elasticidad (el principio de los trabajos D'Alembert), se debió a Argyris y Kesley.

En 1953, Levy introdujo la formulación del método basándose en la matriz de rigidez. Levy aplicó esta formulación para estudiar el comportamiento elástico de las alas tipo Delta en aeronaves, resolviendo las ecuaciones planteadas con computadoras digitales. En 1956, Turner, Clough, Martin y Topp publicaron un artículo considerado como la contribución clave del progreso del método del elemento finito. Este trabajo y el representado por Argyris y Kesley dieron origen a que el método tuviera desarrollo explosivo y que fuera extensamente aplicado en el campo de la ingeniería.

El término método del elemento finito fue propuesto por Clough en 1960, en una publicación referente a problemas de elasticidad plana. El problema de la flexión de placas fue tratado en primera instancia por Melosh, Adini y Clough, ambos fueron publicados en 1961 y emplearon elementos finitos rectangulares. Melosh, en 1963, estableció las bases matemáticas para fundamentar el método del elemento finito, convirtiéndolo en un área de estudio interesante para los académicos, de igual forma reconoció que el método del elemento finito es un variante del método de Rayleigh-Ritz y lo confirmó como una técnica de uso general para manejar problemas continuos de elasticidad. Zienkewicz y Cheung interpretaron el método del elemento finito de una manera más amplia, presentando la formulación variacional del método (*Huebner, 1975*).

Actualmente, el método del elemento finito ha sido aplicado a un sin número de campos de la ingeniería y la física, teniendo un desarrollo espectacular en las últimas décadas

Método de trabajo del elemento finito

En un problema del medio continuo de cualquier dimensión, la variable en consideración, tal como; temperatura, desplazamiento, esfuerzo o cualquier otra cantidad tiene una infinidad de valores, ya que es una función de cada uno de los puntos que forman el dominio en estudio, por lo que, el problema tiene un número infinito de incógnitas. El método del elemento finito discretiza el dominio reduciendo el problema a un número finito de incógnitas, mediante la división del dominio en elementos y expresando al mismo tiempo el campo de incógnitas en términos de funciones aproximadas para cada elemento. Las funciones de aproximación (también llamadas funciones de interpolación) son definidas en términos de los puntos nodales. El comportamiento del campo de la variable respecto a los elementos viene dado por los valores nodales del campo y de las funciones de interpolación para los elementos. Para el método del elemento finito, los valores nodales en el campo de la variable se convierten en las nuevas incógnitas, las funciones de interpolación definen la variable a través del ensamble de los elementos.

Naturalmente, la exactitud de la solución depende tanto del tamaño, como de la cantidad de elementos usados, así como de las funciones de interpolación utilizadas. El método del elemento finito posee una característica que lo hace único entre los métodos numéricos aproximados. Una característica del elemento finito es la capacidad para formular soluciones para elementos individuales antes de ensamblarlos para representar el problema completo. Un ejemplo de dicha característica es que si se trata un problema de análisis de esfuerzos, sería posible encontrar la rigidez para cada elemento, y ensamblar todos los elementos para determinar posteriormente la rigidez de la estructura completa.

El método del elemento finito realiza un procedimiento ordenado, el cual puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Discretización del continuo. El primer paso consiste en dividir el dominio de estudio en elementos. Para un dominio no solo se desea sino que es necesario usar diferentes elementos.
2. Seleccionar de las funciones de interpolación. El siguiente paso es asignar los nodos a cada elemento y elegir el tipo de función de interpolación para representar el cambio de la variable sobre el elemento. La variable puede ser un escalar, un vector o un tensor de orden superior. En muchas ocasiones, pero no siempre, se seleccionan polinomios como funciones de interpolación para la variable porque éstos se integran fácilmente. El grado del polinomio elegido

depende del número de nodos asignados a cada elemento, de la naturaleza y el número de las incógnitas de cada nodo y los requerimientos de continuidad impuestos a los nodos a lo largo de los límites de los elementos.

3. Definir las propiedades del elemento. Una vez que ha sido establecido el modelo de elementos finitos (esto es, ya que se eligieron los elementos y las funciones de interpolación), se está en posibilidad de determinar las ecuaciones matriciales que expresan las propiedades de cada uno de los elemento. Para realizar esto se puede emplear alguna de las cuatro formulaciones posibles del método de los elementos finitos: la formulación directa, la formulación variacional, la formulación de los pesos residuales, o la formulación del balance de energía. La formulación variacional es la más conveniente, pero para cualquier aplicación depende de la naturaleza del problema.
4. Ensamblar las propiedades del elemento para obtener las ecuaciones del sistema, considerando a las condiciones de frontera. Para determinar las propiedades de todo el sistema modelado por la red de elementos, se deben ensamblar las propiedades de todos los elementos. Esto es, se requiere combinar las ecuaciones matriciales expresando el comportamiento del dominio entero o sistema. Las ecuaciones matriciales para el sistema tienen la misma forma que las ecuaciones para un solo elemento, excepto que éstas contienen muchos más términos, porque incluyen a todos los nodos. La parte de condiciones de frontera es fundamental para llevar a buen término un análisis mediante el método del elemento finito. Si no se presentan en forma adecuada las condiciones de frontera que tiene el espécimen modelado, los resultados obtenidos serán poco confiables.
5. Resolver las ecuaciones del sistema. El proceso de ensamble del paso precedente, establece una serie de ecuaciones simultáneas, las cuales pueden resolverse para obtener los valores nodales desconocidos de la variable.
6. Solución computacional. Es esta parte se realiza la solución de las ecuaciones del sistema para calcular los parámetros importantes.

A continuación se mencionan algunas ventajas que se presenta con el método de los elementos finitos, así como ciertas desventajas (*Logan, 2002*).

Ventajas del MEF

1. Se pueden general modelos de un dominio irregular.
2. Puede manejar diferentes condiciones de cargas.
3. Cuerpo modelados compuestos de diferentes materiales debidos a que las ecuaciones del elemento se evalúan individualmente.
4. Manejo de números ilimitados y tipos de condiciones de frontera.
5. Es aplicable a diferentes áreas de la ingeniería.
6. Incluye efectos dinámicos.

Desventajas del MEF

1. Se requiere una inversión considerable en tiempo y dinero, lo que no se justifica en soluciones de problemas sencillos.
2. Número limitado de datos de la curva esfuerzo-deformación que se pueden introducir al programa
3. Tiene problemática para analizar materiales incompresibles.

Tipos de elementos finitos

Para realizar un análisis mediante el método del elemento finito, es necesario comenzar con la discretización del dominio, de este modo se idealiza la región física de interés. Así por ejemplo, una estructura puede idealizarse empleando elementos axiales. Los elementos finitos se pueden clasificar dependiendo de la dimensionalidad involucrada, por lo que se tiene:

1. Elementos unidimensionales (axiales).
2. Elementos bidimensionales.
3. Elementos tridimensionales.

Los elementos unidimensionales tienen una sección transversal determinada, pero por lo general se representan esquemáticamente como un segmento de línea. El empleo más común de estos elementos se refiere a problemas de transferencia de calor y problemas de estructuras que involucran miembros que soportan fuerzas axiales.

La figura B.1a muestra un elemento unidimensional sin refinamiento, el cual tiene dos nodos, uno en cada extremo. El elemento unidimensional cuadrático, figura B.1b, el cual es el elemento de orden superior más comúnmente empleado, y consta de tres nodos.



Figura B.1. Elementos finitos unidimensionales

La función de interpolación en forma de polinomio, corresponde a un elemento unidimensional cuadrático, es:

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{B.1}$$

Desde $a_i, i = 0, 1, 2$ y 3 son las incógnitas correspondientes a los desplazamientos en cada uno de los nodos. El grado del polinomio es igual al número de coeficientes incógnitos, menos uno.

Los elementos finitos bidimensionales, que se emplean con mayor frecuencia, son el triángulo y el cuadrilátero. Los elementos triangulares más comunes son los tetraedros y paralelepípedos, figura B.2a y B.2.b. En ambos, los elementos lineales sólo se presentan en los lados rectos, mientras que los elementos de orden superior pueden tener superficies curvas (*Domínguez et al. 1992*).

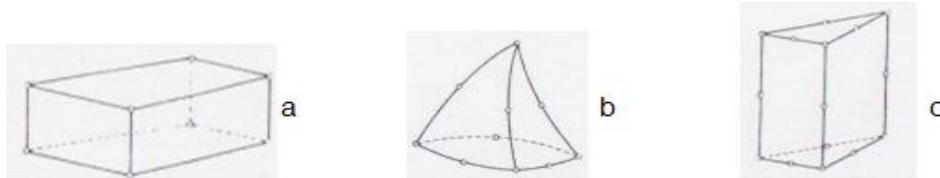


Figura B.2. Elementos finitos tridimensionales

Otro grupo de elementos tridimensionales que pueden emplearse en otros problemas que involucran formas cilíndricas, se muestra en la figura B.2c. Dichos elementos son similares al elemento triangular bidimensional, excepto que éstos permiten una variación en su tercera dimensión.

En el análisis de problemas axisimétricos se emplean cuadrilátero en vez de triángulos. Cuando se tienen dificultades en idealizar superficies o fronteras curvas usando elementos con lados rectos y superficies planas, se requiere emplear elementos con lados y/o caras curvas. Estos elementos son paraméricamente equivalentes con sus elementos rectilíneos correspondientes, por ello se les denomina elementos isoparamétricos. En las figura B.3 y B.4 se muestran elementos de orden superior, cuadráticos y cúbicos, para regiones triangulares y cuadriláteros, respectivamente, en las cuales se presentan elementos de lados rectos, por una parte, y elementos isoparamétricos por la otra (*Dominguez, et .1992*).



Interpolación cuadrática



Interpolación cúbica

Figura B.3. Elementos triangulares y sus formas isoparamétricas con interpolación cuadrática y cúbica



Interpolación cuadrática



Interpolación cúbica

Figura B.4. Elementos cuadriláteros y sus formas isoparamétricas con interpolación cúbica y cuarta

Apéndice C

ECUACIONES DE CASCARÓN CILÍNDRICO

Los problemas de deformación simétrica de cascarones cilíndricos se reducen a la integración de la siguiente ecuación:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{Et}{R^2} \right) w = Z \quad \text{C.1}$$

Cuando el espesor del cascarón es constante, la ecuación (C.1) toma la siguiente forma:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D} \quad \text{C.2}$$

Donde

$$\beta^4 = \left[\frac{Et}{4DR^2} \right] = \left[\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 t^2} \right] \quad \text{C.3}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{C.4}$$

La solución general de esta ecuación es;

$$w = e^{\beta x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x] + e^{-\beta x} [C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x] + f(x) \quad \text{C.5}$$

en la que $f(x)$ es una solución particular de la ecuación (C.1) y C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son las constantes de integración a determinar en cada caso particular a partir de las condiciones en los extremos del cilindro.

Para este caso de carga uniforme ($Z = -p$). Cuya solución particular es;

$$\frac{p}{4\beta^4 D} = -\frac{pa^2}{Eh} \quad \text{C.6}$$

La solución general puede entonces ser expresada en la forma siguiente por la introducción de funciones hiperbólicas en lugar de funciones exponenciales:

$$w = -\frac{pa^2}{Eh} + C_1 \text{sen}\beta x \text{sh}\beta x + C_2 \text{sen}\beta x \text{ch}\beta x + C_3 \text{cos}\beta x \text{sh}\beta x + C_4 \text{cos}\beta x \text{ch}\beta x \quad \text{C.7}$$

Consideración de la Tubería: Doblemente articulada

En la figura C.1, se representa la tubería de forma esquemática para la configuración articulada en ambos extremos.

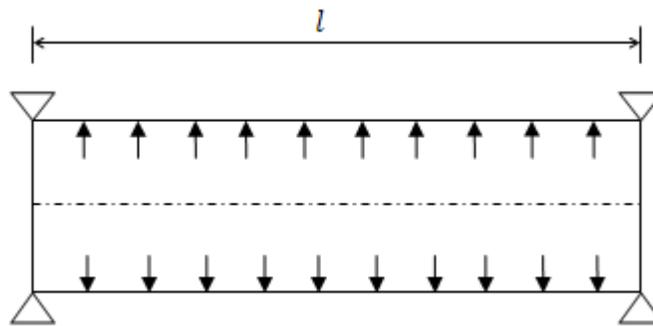


Figura C.1. Representación esquemática de la tubería doblemente articulada

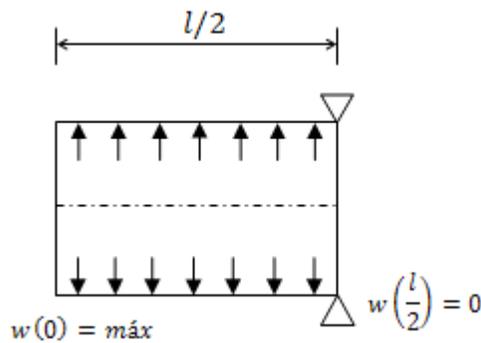


Figura C.2. Tubería doblemente articulada con el origen a la mitad

Debido a la simetría, se considera el origen al centro de la tubería, figura C.2. Lo cual ayuda a reducir la ecuación (C.7), ya que debe ser una función par de x , por lo tanto;

$$C_2 = C_3 = 0 \quad \text{C.8}$$

Por lo que, la ecuación (C.7) se reduce a;

$$w = -\frac{pa^2}{Eh} + C_1 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \quad \text{C.9}$$

Derivando la ecuación anterior, podemos encontrar las expresiones que nos ayudaran a encontrar, pendientes, momentos y fuerzas cortantes a lo largo de la longitud de la tubería. Entonces,

$$\frac{dw}{dx} = C_1 [\operatorname{sen} \beta x \operatorname{ch} \beta x(\beta) + \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x(\beta)] + C_4 [\cos \beta x \operatorname{sh} \beta x(\beta) - \operatorname{sen} \beta x \operatorname{ch} \beta x(\beta)] = 0 \quad \text{C.9.a}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = C_1 \beta [\operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x(\beta) + \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x(\beta) + \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x(\beta) - \operatorname{sh} \beta x \operatorname{sen} \beta x(\beta)] + C_4 \beta [\cos \beta x \operatorname{ch} \beta x(\beta) - \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x(\beta) - \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x(\beta) - \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x(\beta)] = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} &= C_1 \beta^2 [\operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x + \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x - \operatorname{sh} \beta x \operatorname{sen} \beta x] \\ &\quad + C_4 \beta^2 [\cos \beta x \operatorname{ch} \beta x - \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x - \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x - \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x] = 0 \\ &= C_1 \beta^2 [\operatorname{sen} \beta x (\operatorname{sh} \beta x - \operatorname{sh} \beta x) + \cos \beta x (\operatorname{ch} \beta x - \operatorname{ch} \beta x)] \\ &\quad + C_4 \beta^2 [\cos \beta x (\operatorname{ch} \beta x - \operatorname{ch} \beta x) - \operatorname{sen} \beta x (\operatorname{sh} \beta x + \operatorname{sh} \beta x)] = 0 \\ &= C_1 \beta^2 2 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x - C_4 \beta^2 2 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} &= 2\beta^2 (C_1 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x) - 2\beta^2 (C_4 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x) = 0 \\ &= C_1 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x - C_4 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = 2\beta^3 C_1 (\cos \beta x \operatorname{sh} \beta x - \operatorname{sen} \beta x \operatorname{ch} \beta x) + 2\beta^3 C_4 (-\operatorname{sen} \beta x \operatorname{ch} \beta x - \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x)$$

Para las condiciones limites en $x = l/2$, y haciendo que $\alpha = \beta l/2$, se tiene;

$$C_1 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha - C_4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha = 0$$

De la ecuación C.9.

$$w = -\frac{pa}{Eh} + C_1 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x$$

Se plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} C_1 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha - C_4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha &= 0 & \text{C.10} \\ C_1 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x &= \frac{pa}{Eh} & \text{C.11} \end{aligned}$$

Se despeja C_1 y C_4 de la ecuación C.10 y C.11, respectivamente.

$$C_1 = \frac{C_4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{ch} \alpha} \quad \text{C.12}$$

$$C_4 = -\frac{pa^2}{Eh \operatorname{cos} \alpha \operatorname{ch} \alpha} - \frac{C_1 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{ch} \alpha} \quad \text{C.13}$$

Sustituyendo la ecuación C.13 en C.12, se tiene;

$$C_1 = \frac{pa^2}{Eh} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha + \operatorname{cosh} 2\alpha} \right) \quad \text{C.14}$$

Despejando C_4 de la ecuación C.12 y sustituyendo C.14,

$$C_4 = \frac{pa^2}{Eh} \left(\frac{2 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha + \operatorname{cosh} 2\alpha} \right) \quad \text{C.15}$$

Sustituyendo la ecuación C.14 y C.15 dentro de la expresión C.9, se tiene;

$$w = -\frac{pa}{Eh} + \frac{pa^2}{Eh} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha + \operatorname{cosh} 2\alpha} \right) \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x + \frac{pa^2}{Eh} \left(\frac{2 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha + \operatorname{cosh} 2\alpha} \right) \operatorname{cos} \beta x \operatorname{ch} \beta x$$

si,

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2D}; \quad \frac{Eh}{a^2} = 4D\beta^4 = \frac{64Da^4}{l^2}$$

entonces,

$$w = -\frac{pl^2}{64Da^4} \left(1 - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha + \operatorname{cosh} 2\alpha} \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x - \frac{2 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha + \operatorname{cosh} 2\alpha} \operatorname{cos} \beta x \operatorname{ch} \beta x \right) \quad \text{(C.16)}$$

Para hallar la expresión que determina el momento flexionante se deriva dos veces la ecuación C.16 y multiplicando por D,

$$M_x = -D \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{pl^2}{4a^4} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha + \operatorname{cosh} 2\alpha} \operatorname{cos} \beta x \operatorname{ch} \beta x - \frac{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha + \operatorname{cosh} 2\alpha} \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x \right) \quad \text{C.17}$$

Consideración de la Tubería: Doblemente empotrada

En la figura C.3, se representa la tubería de forma esquemática para la configuración de empotrado en ambos extremos.

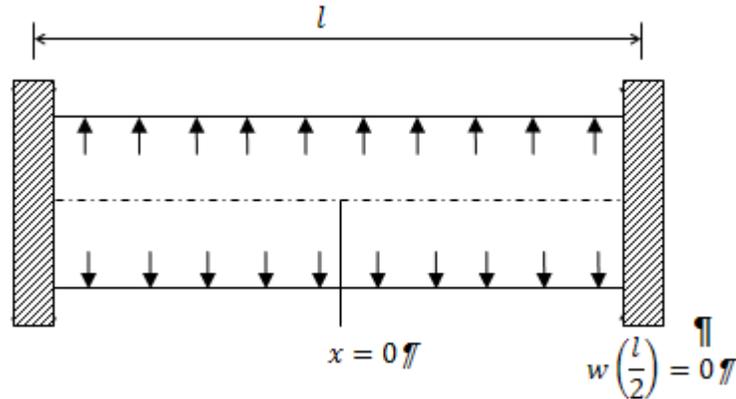


Figura C.3. Representación esquemática de la tubería doblemente empotrada

Si se considera que el origen de coordenada se encuentra a la mitad de la longitud de la tubería, se tiene que la ecuación general debe ser una función par de x , por lo tanto;

$$C_2 = C_3 = 0 \tag{C.8}$$

Por lo que, la ecuación (C.7) se reduce a;

$$w = -\frac{pa^2}{Eh} + C_1 \operatorname{sen}\beta x \operatorname{sh}\beta x + C_4 \operatorname{cos}\beta x \operatorname{ch}\beta x \tag{C.9}$$

Las otras dos constantes se obtienen a partir de las condiciones en los extremos, como se observa en la figura C.3, cuya configuración es la siguiente;

$$x = l/2, \quad w = 0, \quad w' = 0$$

De la ecuación C.9, se despeja la constante C_1 , por lo que;

$$C_1 = -\frac{C_4 (\operatorname{cosa} \operatorname{sha} - \operatorname{cha} \operatorname{sena})}{\operatorname{sena} \operatorname{cha} + \operatorname{sha} \operatorname{cosa}} \tag{C.10}$$

Sustituyendo C.10 en la ecuación C.9.

$$w = -\frac{pa^2}{Eh} + \left[-\frac{C_4 (\operatorname{cosa} \operatorname{sha} - \operatorname{cha} \operatorname{sena})}{\operatorname{sena} \operatorname{cha} + \operatorname{sha} \operatorname{cosa}} \right] \operatorname{sena} \operatorname{sha} + C_4 \operatorname{cosa} \operatorname{cha}$$

Despejando C_4 , se tiene;

$$C_4 = \frac{\frac{pa^2}{Eh}}{\cos \alpha \operatorname{ch} \alpha - \frac{\cos \alpha \operatorname{sh} \alpha - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha}$$

$$C_4 = \frac{\frac{pa^2}{Eh} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha)}{\cos \alpha \operatorname{ch} \alpha (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha) - (\cos \alpha \operatorname{sh} \alpha - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha} \quad \text{C.11}$$

Sustituyendo la expresión C.18 en C.10 y se determina la constante C_1

$$C_1 = \frac{\frac{pa^2}{Eh} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{ch} \alpha)}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha (\operatorname{sh} \alpha \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{ch} \alpha) - (\operatorname{sh} \alpha \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha} \quad \text{C.12}$$

Ahora, sustituyendo las constantes encontradas dentro de la ecuación C.9 y haciendo la siguiente consideración,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sh} \alpha &= A & \operatorname{sen} \alpha \operatorname{ch} \alpha &= B & \frac{pa^2}{Eh} &= H \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha &= B & \operatorname{c} \operatorname{os} \alpha \operatorname{ch} \alpha &= F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = -H &- \left[\frac{H(B - C)}{F(B + C) - (B - C)A} \right] \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x \\ &+ \left[\frac{H(B + C)}{F(B + C) - (B - C)A} \right] \operatorname{c} \operatorname{os} \beta x \operatorname{ch} \beta x \end{aligned} \quad \text{C.13}$$

Para obtener la ecuación de momento cuya condición de la tubería es doblemente empotrada y sometida a presión interna, se deriva la ecuación C.13, se tiene;

$$\begin{aligned} M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{pl^2}{8\alpha^2} \left[\frac{(B - C)}{F(B + C) - (B - C)A} \operatorname{c} \operatorname{os} \beta x \operatorname{ch} \beta x \right. \\ &\left. + \frac{(B + C)}{F(B + C) - (B - C)A} \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sh} \beta x \right] \end{aligned} \quad \text{C.14}$$

Anexo A

DETERMINACIÓN DE LA RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA

Es posible llevar acabo curvas teóricas de momento curvatura para secciones sometidas a flexión y carga axial, con base en ciertas suposiciones. Dichas suposiciones corresponden a que las secciones transversales permanecen planas antes y después de la flexión, y que se conocen las curvas de esfuerzo deformación del material. Las curvaturas asociadas con un rango de momentos flexionantes y carga axial pueden determinarse utilizando estas suposiciones y a partir de los requerimientos de compatibilidad de deformación y equilibrio de fuerzas (*Park y Paulay, 1999*).

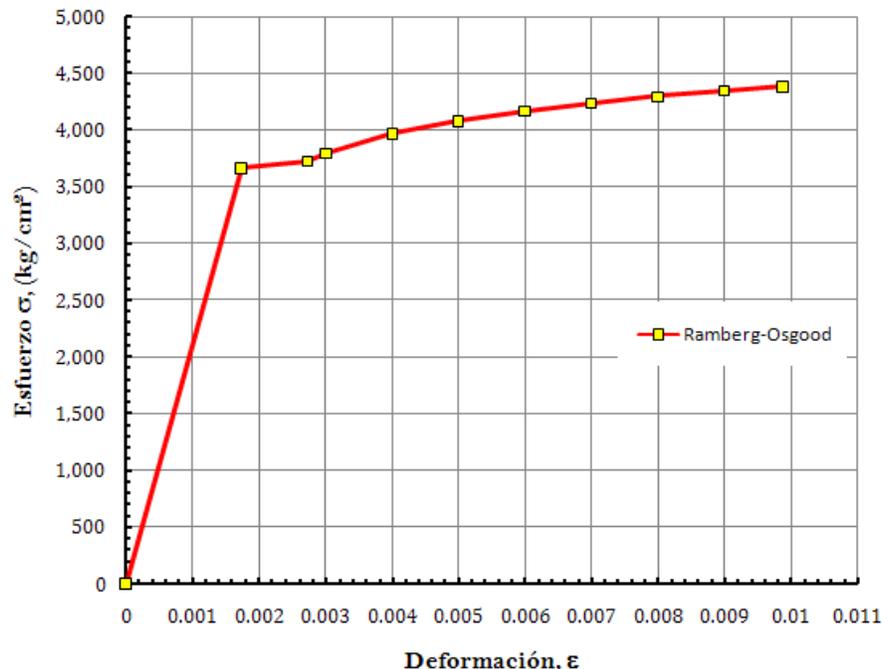


Figura A1.1. Curva esfuerzo-deformación del material

A continuación se determinan los puntos de las gráficas momento-curvatura de sección transversal tubular con pared delgada de ($R=25.87\text{cm}$ y $t=0.9525\text{cm}$).

La magnitud de la fuerza resultante de tensión en el acero, se obtiene mediante el diagrama esfuerzo-deformación unitaria propuesta por Ramberg-Osgood que considera una línea recta en el intervalo $0 \leq \varepsilon_s \leq 0.00174$ y una curva parabólica en el intervalo $0.00174 \leq \varepsilon_s \leq 0.00988$ y que se muestra en la figura A1.1. La deformación máxima del acero que se considera es $\varepsilon_u = 0.00988$.

El procedimiento consiste en que para determinada deformación del acero en la fibra extrema y una profundidad kd del eje neutro, se pueden determinar las deformaciones del acero $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, por triángulos semejantes del diagrama de deformaciones. Posteriormente se encuentran los esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$, correspondientes a las deformaciones $\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}, \varepsilon_{s3}, \dots$, a partir de la curva esfuerzo deformación del acero. En seguida se determinan las fuerzas del acero F_1, F_2, F_3, \dots , a partir de los esfuerzos del acero y las áreas del mismo, y por último se determinan los momentos, ver figura A1.2 (Park y Paulay, 1999).

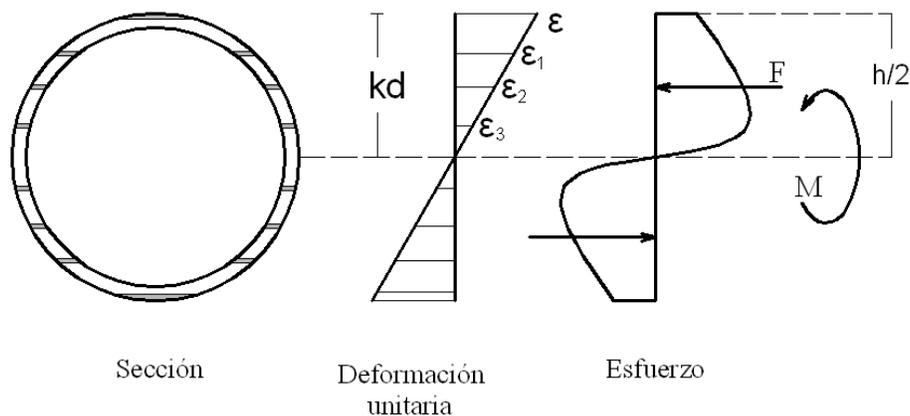


Figura A1.2. Determinación teórica momento-curvatura

Los puntos que se estudian para definir la forma general del diagrama $M - \phi$ corresponden a los siguientes estados:

- a) A la fluencia del acero
- b) Entre la fluencia del acero y la resistencia última de la sección
- c) Resistencia última

Obtención del primer punto. A la fluencia del acero

c cm	ε	σ Kg/cm ²	A cm ²	d cm	F Kg	M Kg-cm
26.35	0.001742	3,658.200	6.940	25.19	25,387.91	639,521.40
25.52	0.001687	3,542.634	15.527	24.36	55,005.06	1,339,923.31
23.2	0.001534	3,220.576	8.582	22.04	27,640.28	609,191.66
20.88	0.001380	2,898.519	6.877	19.72	19,931.95	393,058.14
18.56	0.001227	2,576.461	5.997	17.4	15,452.07	268,865.98
16.24	0.001074	2,254.403	5.455	15.08	12,298.67	185,463.99
13.92	0.000920	1,932.346	5.092	12.76	9,839.89	125,557.02
11.6	0.000767	1,610.288	4.840	10.44	7,793.15	81,360.49
9.28	0.000613	1,288.231	4.663	8.12	6,006.50	48,772.81
6.96	0.000460	966.173	4.542	5.8	4,388.36	25,452.47
4.64	0.000307	644.115	4.447	3.48	2,864.12	9,967.15
2.32	0.000153	322.058	4.430	1.16	1,426.84	1,655.14

$\Sigma M=7,457,579.12$

La sumatoria de los momentos corresponde a 3,728,789.56kg-cm pero como la sección es simétrica se multiplica por 2, lo que resulta un M= 7,457,579.12 kg-cm.

Para determinar la curvatura φ , se divide la deformación unitaria ε , entre la profundidad del eje neutro, kd . Por lo que, la curvatura $\varphi= 6.61038E-05$ rad/cm.

Los puntos del dos al siete corresponden entre la fluencia del acero y la resistencia última de la sección.

Obtención del segundo punto

c cm	ε	σ Kg/cm ²	A cm ²	d cm	F Kg	M Kg-cm
26.35	0.00208	3,660.000	6.940	25.19	25,400.40	639,836.08
25.52	0.00201	3,659.000	15.527	24.36	56,811.83	1,383,936.16
23.2	0.00183	3,658.210	8.582	22.04	31,396.22	691,972.72
20.88	0.00165	3,460.918	6.877	19.72	23,799.35	469,323.15
18.56	0.00146	3,076.372	5.997	17.4	18,450.23	321,034.01
16.24	0.00128	2,691.825	5.455	15.08	14,684.98	221,449.54
13.92	0.00110	2,307.279	5.092	12.76	11,749.12	149,918.83
11.6	0.00092	1,922.732	4.840	10.44	9,305.25	97,146.86
9.28	0.00073	1,538.186	4.663	8.12	7,171.94	58,236.19
6.96	0.00055	1,153.639	4.542	5.8	5,239.83	30,391.01
4.64	0.00037	769.093	4.447	3.48	3,419.85	11,901.07
2.32	0.00018	384.546	4.430	1.16	1,703.69	1,976.29

$\Sigma M=8,154,243.81$

El momento es $M=8,154,243.81\text{kg-cm}$ y la curvatura de $\varphi= 7.892\text{E-}05\text{ rad/cm}$.

Obtención del tercer punto

c <i>cm</i>	ε	σ <i>Kg/cm²</i>	A <i>cm²</i>	d <i>cm</i>	F <i>Kg</i>	M <i>Kg-cm</i>
26.35	0.00242	3,633.000	6.94	25.19	25,213.02	635,115.97
25.52	0.00234	3,607.000	15.5266	24.36	56,004.45	1,364,268.31
23.2	0.00213	3,660.000	8.5824	22.04	31,411.58	692,311.31
20.88	0.00192	3,658.000	6.8766	19.72	25,154.60	496,048.77
18.56	0.00170	3,576.282	5.9974	17.4	21,448.39	373,202.04
16.24	0.00149	3,129.247	5.4554	15.08	17,071.29	257,435.08
13.92	0.00128	2,682.211	5.0922	12.76	13,658.36	174,280.63
11.6	0.00106	2,235.176	4.8396	10.44	10,817.36	112,933.22
9.28	0.00085	1,788.141	4.6626	8.12	8,337.39	67,699.57
6.96	0.00064	1,341.106	4.542	5.8	6,091.30	35,329.55
4.64	0.00043	894.070	4.4466	3.48	3,975.57	13,835.00
2.32	0.00021	447.035	4.4304	1.16	1,980.54	2,297.43

$\Sigma M=8,449,513.79$

El momento es $M= 8,449,513.79\text{ kg-cm}$ y la curvatura es $\varphi= 9.175\text{E-}05\text{ rad/cm}$.

Obtención del cuarto punto

c <i>cm</i>	ε	σ <i>Kg/cm²</i>	A <i>cm²</i>	d <i>cm</i>	F <i>Kg</i>	M <i>Kg-cm</i>
26.35	0.00309	3,812.00	6.94	25.19	26,455.28	666,408.50
25.52	0.00300	3,790.00	15.5266	24.36	58,845.81	1,433,484.03
23.2	0.00272	3,738.00	8.5824	22.04	32,081.01	707,065.49
20.88	0.00245	3,700.00	6.8766	19.72	25,443.42	501,744.24
18.56	0.00218	3,665.00	5.9974	17.4	21,980.47	382,460.20
16.24	0.00191	3,658.00	5.4554	15.08	19,955.85	300,934.27
13.92	0.00163	3,432.08	5.0922	12.76	17,476.82	223,004.25
11.6	0.00136	2,860.06	4.8396	10.44	13,841.57	144,505.95
9.28	0.00109	2,288.05	4.6626	8.12	10,668.27	86,626.34
6.96	0.00082	1,716.04	4.542	5.8	7,794.25	45,206.63
4.64	0.00054	1144.026	4.4466	3.48	5,087.02	17,702.85
2.32	0.00027	572.013	4.4304	1.16	2,534.25	2,939.72

$\Sigma M=9,024,164.93$

El momento es $M= 9,024,164.93\text{ kg-cm}$ y la curvatura es $\varphi= 0.000117\text{ rad/cm}$.

Obtención del quinto punto

c <i>cm</i>	ε	σ <i>Kg/cm²</i>	A <i>cm²</i>	d <i>cm</i>	F <i>Kg</i>	M <i>Kg-cm</i>
26.35	0.00378	3,930.00	6.94	25.19	27,274.20	687,037.10
25.52	0.00366	3,912.00	15.5266	24.36	60,740.06	1,479,627.84
23.2	0.00332	3,857.00	8.5824	22.04	33,102.32	729,575.06
20.88	0.00299	3,791.00	6.8766	19.72	26,069.19	514,084.44
18.56	0.00266	3,707.00	5.9974	17.4	22,232.36	386,843.10
16.24	0.00233	3,660.00	5.4554	15.08	19,966.76	301,098.80
13.92	0.00199	3,659.00	5.0922	12.76	18,632.36	237,748.91
11.6	0.00166	3,490.96	4.8396	10.44	16,894.85	176,382.27
9.28	0.00133	2,792.77	4.6626	8.12	13,021.56	105,735.09
6.96	0.00100	2,094.58	4.542	5.8	9,513.57	55,178.68
4.64	0.00066	1396.384	4.4466	3.48	6,209.16	21,607.88
2.32	0.00033	698.192	4.4304	1.16	3,093.27	3,588.19

$\Sigma M=9,397,014.72$

El momento es $M= 9,397,014.72$ kg-cm y la curvatura es $\varphi= 0.000143$ rad/cm.

Obtención del sexto punto

c <i>cm</i>	ε	σ <i>Kg/cm²</i>	A <i>cm²</i>	d <i>cm</i>	F <i>Kg</i>	M <i>Kg-cm</i>
26.35	0.00581	4,149.00	6.94	25.19	28,794.06	725,322.37
25.52	0.00563	4,133.00	15.5266	24.36	64,171.44	1,563,216.22
23.2	0.00512	4,088.00	8.5824	22.04	35,084.85	773,270.12
20.88	0.00460	4,036.00	6.8766	19.72	27,753.96	547,308.04
18.56	0.00409	3,975.00	5.9974	17.4	23,839.67	414,810.17
16.24	0.00358	3,901.00	5.4554	15.08	21,281.52	320,925.25
13.92	0.00307	3,792.00	5.0922	12.76	19,309.62	246,390.78
11.6	0.00256	3,682.00	4.8396	10.44	17,819.41	186,034.61
9.28	0.00205	3,660.00	4.6626	8.12	17,065.12	138,568.74
6.96	0.00153	3,222.98	4.542	5.8	14,638.77	84,904.89
4.64	0.00102	2148.653	4.4466	3.48	9,554.20	33,248.62
2.32	0.00051	1074.327	4.4304	1.16	4,759.70	5,521.25

$\Sigma M=10,079,042.16$

El momento es $M= 10,079,042.16$ kg-cm y la curvatura es $\varphi= 0.00022$ rad/cm.

Obtención del séptimo punto

c <i>cm</i>	ε	σ <i>Kg/cm²</i>	A <i>cm²</i>	d <i>cm</i>	F <i>Kg</i>	M <i>Kg-cm</i>
26.35	0.00785	4,283.00	6.94	25.19	29,724.02	748,748.06
25.52	0.00760	4,269.00	15.5266	24.36	66,283.06	1,614,655.23
23.2	0.00691	4,227.00	8.5824	22.04	36,277.80	799,562.82
20.88	0.00622	4,180.00	6.8766	19.72	28,744.19	566,835.39
18.56	0.00553	4,125.00	5.9974	17.4	24,739.28	430,463.39
16.24	0.00483	4,060.00	5.4554	15.08	22,148.92	334,005.77
13.92	0.00414	3,983.00	5.0922	12.76	20,282.23	258,801.29
11.6	0.00345	3,880.00	4.8396	10.44	18,777.65	196,038.65
9.28	0.00276	3,737.00	4.6626	8.12	17,424.14	141,483.99
6.96	0.00207	3,660.00	4.542	5.8	16,623.72	96,417.58
4.64	0.00138	2900.922	4.4466	3.48	12,899.24	44,889.36
2.32	0.00069	1450.461	4.4304	1.16	6,426.12	7,454.30

$\Sigma M=10,478,711.62$

El momento es $M= 10,478,711.62$ kg-cm y la curvatura es $\varphi= 0.000297$ rad/cm.

Obtención del octavo punto es evaluado en la resistencia última

c <i>cm</i>	ε	σ <i>Kg/cm²</i>	A <i>cm²</i>	d <i>cm</i>	F <i>Kg</i>	M <i>Kg-cm</i>
26.35	0.00988	4,381.82	6.94	25.19	30,409.83	766,023.64
25.52	0.00957	4,367.00	15.5266	24.36	67,804.66	1,651,721.57
23.2	0.00870	4,330.00	8.5824	22.04	37,161.79	819,045.90
20.88	0.00783	4,282.00	6.8766	19.72	29,445.60	580,667.26
18.56	0.00696	4,229.00	5.9974	17.4	25,363.00	441,316.28
16.24	0.00609	4,170.00	5.4554	15.08	22,749.02	343,055.19
13.92	0.00522	4,100.00	5.0922	12.76	20,878.02	266,403.54
11.6	0.00435	4,006.00	4.8396	10.44	19,387.44	202,404.85
9.28	0.00348	3,883.00	4.6626	8.12	18,104.88	147,011.59
6.96	0.00261	3,693.00	4.542	5.8	16,773.61	97,286.91
4.64	0.00174	3,658.20	4.4466	3.48	16,266.55	56,607.60
2.32	0.00087	1,826.60	4.4304	1.16	8,092.55	9,387.36

$\Sigma M=10,761,863.36$

El momento es $M= 10,761,863.36$ kg-cm que corresponde al momento plástico de la sección, y la curvatura es $\varphi= 0.0003749$ rad/cm.

En la tabla A1.1 se muestran los valores de momentos y curvatura evaluados para los distintos puntos.

Tabla A1.1. Valores de momento-curvatura

Punto	M (Kg-cm)	ϕ (rad/cm)
0	0	0
1	7,457,579.12	6.61038E-05
2	8,154,243.81	7.89299E-05
3	8,449,513.79	9.1756E-05
4	9,024,164.93	0.000117408
5	9,397,014.72	0.000143307
6	10,079,042.16	0.00022051
7	10,478,711.62	0.000297714
8	10,761,863.36	0.000374917

En la figura. A1.3 se construye la grafica momento-curvatura para la sección circular.

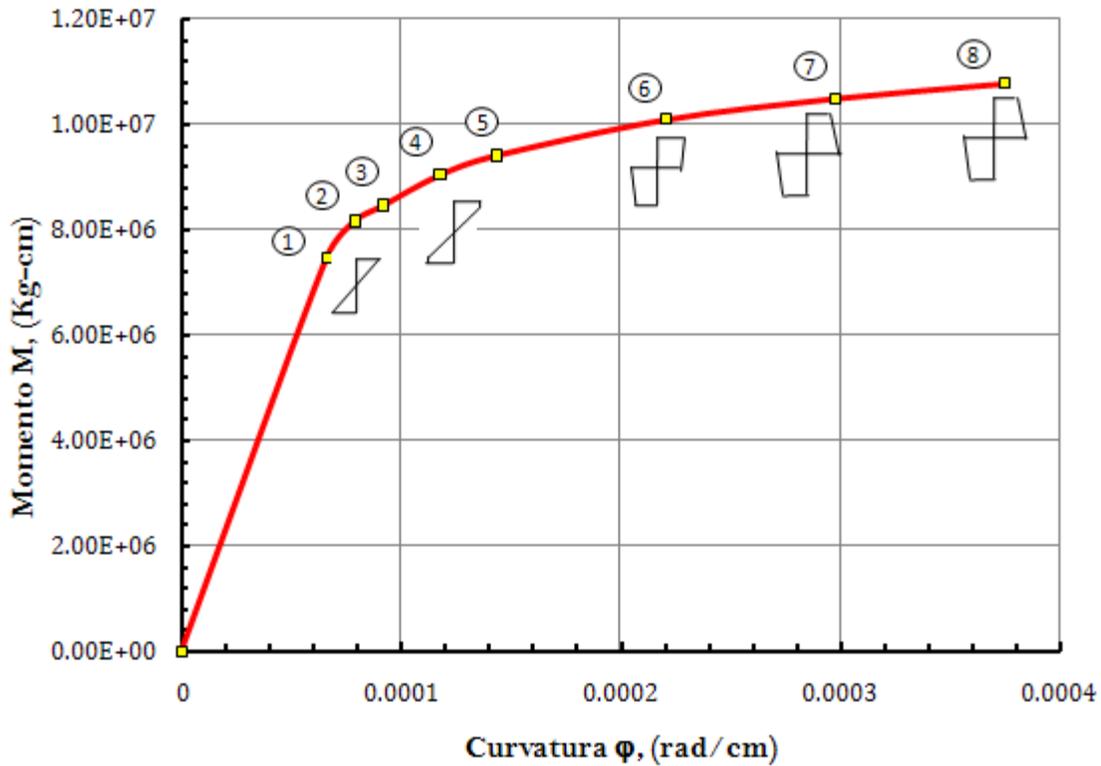


Figura A1.3. Diagrama de momento curvatura

