



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Optimización Termo-Económica de un
Modelo de Planta de Potencia de Novikov
bajo Distintos Regímenes Termodinámicos
Incluyendo Costos de Operación**

T E S I S

que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS

Presenta:

Juan Carlos Pacheco Paez

Directores de Tesis:

Dr. Marco Antonio Barranco Jiménez
ESCOM-IPN

Dr. Fernando Angulo Brown
ESFM-IPN

Índice general

Introducción	1
1. Termodinámica de Tiempos Finitos (TTF) y Termo-economía	2
1.1 Termodinámica de Tiempos Finitos.....	2
1.2 Termo-economía Endorreversible.....	12
2. Termo-economía	20
2.1 Distintos Regímenes de Operación.....	20
2.2 Distintas Leyes de Transferencia de Calor.....	21
3. Nueva Función de beneficios	25
3.1 Impacto Ambiental.....	32
4. Conclusiones	39
5. Referencias	40
6. Apéndice	43

Índice de figuras y tablas

Figura 1	Máquina de Curzon-Ahlborn.....	3
Figura 2	Cantidades termodinámicas como función de la eficiencia de conversión $\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3}$ de una máquina de Curzon-Ahlborn.....	6
Figura 3	Eficiencia η como función de la razón de temperaturas $\frac{T_2}{T_1}$	12
Figura 4	Modelo de Novikov para una planta de potencia.....	13
Figura 5	Calor y potencia como función de la temperatura T_3	14
Figura 6	Función de beneficios en función de las temperaturas T_3 y para distintos valores de β	16
Tabla 1	Costo fraccional de combustible para distintas fuentes de energía [1].....	18
Figura 7	Eficiencia óptima como función del costo fraccional de combustible f , calculado numéricamente para $T_L/T_H = 0.5$	18
Figura 8	Eficiencia óptima como función de la razón de las temperaturas T_L/T_H	19
Figura 9	Eficiencias óptimas en términos del costo fraccional de combustible (f) y el cociente de temperaturas (τ).....	24
Figura 10	Comparación entre las tres funciones objetivo termo-económicas con respecto a la temperatura reducida tomando en cuenta el costo de mantenimiento de la planta de potencia ($\gamma \neq 0$).....	27
Figura 11	Eficiencias óptimas en función del costo de mantenimiento ($\gamma \neq 0$) de la planta de potencia a máxima potencia eficiente y para distintos valores del costo fraccional de combustible f	29

Figura 12	Eficiencias óptimas en función del costo fraccional de combustible a máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica ($\gamma = 0$).....	30
Figura 13	Eficiencias óptimas en función del costo de mantenimiento ($\gamma \neq 0$) de la planta de potencia a máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica y para un costo fraccional de combustible fijo $f = 0.25$	31
Figura 14	Eficiencias óptimas en función del costo fraccional de combustible a máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica para distintos valores del costo de mantenimiento.....	32
Figura 15	Calor expulsado bajo los regímenes de máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica modificada para una ley lineal de transferencia de calor para $\tau = 1/2$	34
Figura 16	Cociente del calor ecológico expulsado y el calor a máxima potencia y a máxima potencia eficiente en términos del costo fraccional, (línea azul para el caso $\gamma = 0$, previamente reportado en [16]).....	34
Figura 17	Producción de entropía para el modelo de Novikov para una ley lineal de transferencia de calor tipo Newton y para $\tau = 1/2$	37
Figura 18	Cociente de la producción de entropía a máxima función ecológica y máxima potencia y para máxima potencia eficiente, también se muestra el caso $\gamma = 0$, previamente reportado en [16].....	37

Agradecimientos:

A mi padre: Juan Jesús Pacheco Rico †

*Gracias por darme una educación e inculcar en mí valores, confianza y amor;
por siempre apoyarme, cuidarme y guiarme con tu ejemplo, pues fuiste un
gran hombre triunfador*

A mi madre: N. Graciela Páez Hernández

*Gracias por educarme, por darme los mejores consejos y estar siempre al
pendiente de mí; por preocuparte por mi formación profesional, por todos los
sacrificios que haz hechos para apoyarme y por todo tu amor*

A mi novia: Wendy Coronel Ramírez

*Gracias nena por motivarme y ayudarme a seguir estudiando, por tu cariño y
compresión en la elaboración de mi tesis; y por ser parte de mi vida*

***A mis asesores: Dr. Fernando Angulo Brown y Dr. Marco A. Barranco
Jiménez***

*Por la oportunidad de realizar la maestría tomando la responsabilidad de
dirigir mi trabajo; y por sus consejos para llegar al final de este camino*

Al IPN y CONACyT:

*Por ser mi casa de estudios desde el nivel medio superior y proveerme de
todos los recursos para el logro de este objetivo*

***A la comisión revisora: Dr. Fernando Angulo Brown, Dr. Marco A. Barranco
Jiménez, Dr. Ricardo T. Páez Hernández, Dr. Luis Antonio Arias Hernández
y Dra. Norma Sánchez Salas***

*Por sus observaciones y conocimientos compartidos durante la realización
del presente trabajo*

Resumen

En esta tesis se presenta un estudio termo-económico de una planta de potencia tipo Novikov operando bajo tres diferentes regímenes termodinámicos, máxima potencia, potencia eficiente y máxima función ecológica modificada, considerando una ley lineal de transferencia de calor newtoniana. El estudio se realizó mediante la optimización de una función de beneficios en la cual se tomó en cuenta un nuevo costo asociado al mantenimiento de la planta de potencia. Además se analizó el impacto ambiental y la producción de entropía cuando la planta de potencia opera en los distintos regímenes termodinámicos.

Abstract

In this thesis a thermo-economic study of a Novikov power plant model is presented under three different regimes of operation, maximum power, efficient power and maximum modified ecological function, considering a linear Newtonian heat transfer law. The study was made by means of the optimization of a benefit function in which was taken into account a new cost associated to the maintenance of the power plant. Also the environmental impact and entropy production was analyzed when the power plant is operating in the different thermodynamic regimes.

Introducción

En 1995, Alexis De Vos [1] propuso un análisis termo-económico del modelo de planta de potencia tipo Novikov maximizando una función de beneficios definida en términos de la razón de la potencia de salida de la planta y los costos asociados con el funcionamiento de la misma, (costos en el consumo de combustible y costos asociados a la inversión). De Vos [1] mostró que la eficiencia óptima variaba entre el punto óptimo de máxima potencia (eficiencia de Curzon-Ahlborn) correspondiente a fuentes de energía donde la inversión es el costo preponderante, hasta el valor de Carnot (eficiencia de Carnot), es decir para fuentes de energía donde el costo en el combustible es el costo predominante. Posteriormente, Barranco-Jiménez y Angulo Brown [2,3], también estudiaron la termo-economía del modelo de Novikov pero en términos de la maximización de una función de beneficios definida como la razón de la llamada función ecológica [4-5] y los costos totales considerados previamente por De Vos [1]. En este trabajo, estudiamos nuevamente la termo-economía del modelo de planta de potencia tipo Novikov considerando los regímenes de operación de máxima potencia, máxima función ecológica y el llamado régimen de operación de potencia eficiente [6-7] definido como el producto de la potencia de salida y la eficiencia del modelo. En nuestro estudio, consideramos la ley de transferencia de calor de enfriamiento de Newton y también tomamos en cuenta un costo asociado al mantenimiento de la planta de potencia que es proporcional a la potencia de salida de la misma. En este trabajo mostramos bajo condiciones de operación de máxima función ecológica que la pérdida en beneficios se ve compensada por un mejor uso en el combustible de modo que la planta de potencia reduce hasta en un 55 % la cantidad de energía disipada al medio ambiente con respecto a la cantidad de energía bajo los regímenes de operación de máxima potencia y máxima potencia eficiente.

1. Termodinámica de Tiempos Finitos (TTF) y Termo-economía

1.1 Termodinámica de Tiempos Finitos (TTF)

La termodinámica de tiempos finitos se considera una extensión de la termodinámica clásica, pues en ella se considera fijar límites a los tiempos de operación en los procesos termodinámicos y tomar en cuenta las irreversibilidades que ocurren durante los acoplamientos de la máquina con el mundo externo [8], obviamente se obtienen aproximaciones al funcionamiento de máquinas reales. En este contexto se consideran máquinas irreversibles o bien llamadas máquinas endorreversibles [9]. Un ciclo endorreversible es definido como un ciclo en el que la transferencia de calor hacia los almacenes es dependiente del tiempo (irreversible) y todos los procesos restantes que no tienen que ver con la transferencia de calor son reversibles, sin embargo el cambio en las propiedades del fluido de trabajo son determinados por procesos isotérmicos reversibles, es decir; el proceso es internamente reversible pero externamente irreversible. El trabajo de Curzon y Ahlborn [10] es considerado como el pionero de esta teoría, en el que se considera un ciclo trabajando entre dos fuentes térmicas y la transferencia de calor en los acoplamientos de los almacenes térmicos con la sustancia de trabajo se realiza obedeciendo una ley de transferencia tipo Newton. Haciendo uso de la hipótesis de endorreversibilidad se encuentra que la eficiencia para un ciclo de Carnot operando a máxima potencia es: $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_2/T_1}$, donde T_1 y T_2 son las temperaturas de los almacenes caliente y frío respectivamente, donde CA denota Curzon-Ahlborn. Un esquema realizado por De Vos para una máquina endorreversible es el siguiente, Figura 1. Para obtener la eficiencia de Curzon-Ahlborn procedemos como sigue:

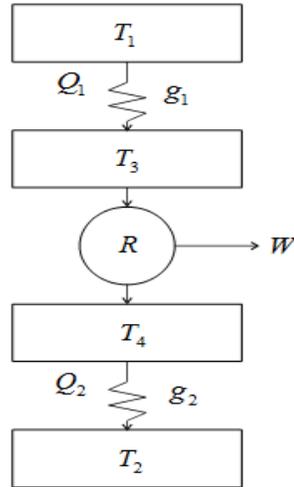


Figura 1. Máquina de Curzon-Ahlborn.

La Figura 1 muestra diferentes partes de la máquina de Curzon y Ahlborn, dos reservorios calientes; uno a una temperatura alta T_1 y otro a una temperatura baja T_2 , dos componentes irreversibles; resistores térmicos que limitan el flujo de calor Q_1 y Q_2 , ellos causan una caída de temperatura T_1 a una temperatura intermedia T_3 y una caída de temperatura de una temperatura intermedia T_4 a T_2 , una máquina de Carnot reversible entre el reservorio intermedio a temperatura T_3 y el reservorio intermedio a temperatura T_4 . Para determinar las propiedades de la nueva estructura, tenemos también implementada las dos leyes de la termodinámica (aquí se usa la notación de De Vos [1,30]).

Axioma 1: Conservación de la Energía,

$$\sum Q + \sum W = 0, \quad (1)$$

donde Q son los flujos de calor, W los flujos de trabajo y \sum denota suma sobre una superficie cerrada arbitraria.

Axioma 2: Conservación de la Entropía,

$$\sum \frac{Q}{T} = 0, \quad (2)$$

donde Σ denota suma sobre una superficie cerrada arbitraria conteniendo sólo partes reversibles, es decir una superficie encerrando sólo la máquina de Carnot. Del axioma 1 se tiene que:

$$Q_1 = W + Q_2, \quad (3)$$

Del axioma 2 se tiene que:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_4}. \quad (4)$$

Si introducimos la conversión de la eficiencia η : $W = \eta Q_1$ con $Q_1 = \eta Q_1 + Q_2$ entonces $Q_1(\eta - 1) = -Q_2$ por lo tanto:

$$Q_1(\eta - 1) = -\frac{T_4}{T_3} Q_1, \quad (5)$$

entonces de las Ecs. (3) y (4) tenemos:

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3}. \quad (6)$$

El cual no es otra cosa que la prueba clásica de la fórmula de Carnot, para una máquina reversible trabajando entre las temperaturas T_3 y T_4 . Ahora necesitamos construir leyes para los conductores térmicos, de acuerdo con Curzon y Ahlborn, usamos leyes lineales:

$$Q_1 = g_1(T_1 - T_3), \quad (7)$$

$$Q_2 = g_2(T_4 - T_2), \quad (8)$$

tal que, la ley de Fourier para la difusión de calor es:

$$Q = -\lambda \nabla T,$$

y los coeficientes de proporcionalidad g_1 y g_2 son llamados conductancias térmicas, sustituyendo las Ecs. (7) y (8) en la Ec. (4) da:

$$\frac{g_1(T_1 - T_3)}{T_3} = \frac{g_2(T_4 - T_2)}{T_4}, \quad (9)$$

del conjunto de Ecs. podemos encontrar expresiones para T_3 y T_4 . De la Ec. (6) obtenemos,

$$(1 - \eta)T_3 = T_4, \quad (10)$$

sustituyendo en Ec. (9) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{g_1(T_1 - T_3)}{T_3} &= \frac{g_2[(1 - \eta)T_3] - T_2}{(1 - \eta)T_3} \\ g_1(T_1 - T_3) &= \frac{g_2[(1 - \eta)T_3] - T_2}{(1 - \eta)} \\ g_1(1 - \eta)T_1 - g_1(1 - \eta)T_3 &= g_2(1 - \eta)T_3 - g_2T_2 \\ T_3(1 - \eta)(g_2 + g_1) &= g_2T_2 + g_1(1 - \eta)T_1, \end{aligned}$$

Despejando T_3 se tiene:

$$T_3 = \frac{g_1}{g_2 + g_1} T_1 + \frac{g_2}{g_2 + g_1} \frac{1}{(1 - \eta)} T_2.$$

De la Ec. (10): $T_3 = \frac{1}{(1 - \eta)} T_4$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{g_1 \left(T_1 - \frac{1}{(1 - \eta)} T_4 \right) (1 - \eta)}{T_4} &= \frac{g_2(T_4 - T_2)}{T_4} \\ g_1(1 - \eta)T_1 - g_1T_4 &= g_2T_4 - g_2T_2 \\ T_4(g_2 + g_1) &= g_1(1 - \eta)T_1 + g_2T_2 \\ T_4 &= \frac{g_2}{g_2 + g_1} T_2 + \frac{g_1}{g_2 + g_1} (1 - \eta) T_2. \end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado de T_3 en la Ec. (7), obtenemos:

$$\begin{aligned} Q_1 &= g_1(T_1 - T_3) \\ Q_1 &= g_1 \left(T_1 - \frac{g_1}{g_2 + g_1} T_1 - \frac{g_2}{g_2 + g_1} \frac{1}{(1 - \eta)} T_2 \right) \\ Q_1 &= \frac{g_1 T_1 (g_2 + g_1)}{g_2 + g_1} - \frac{g_1^2 T_1}{g_2 + g_1} - \frac{g_2 g_1}{g_2 + g_1} \frac{1}{(1 - \eta)} T_2 \\ Q_1 &= \frac{g_2 g_1 T_1}{g_2 + g_1} + \frac{g_1^2 T_1}{g_2 + g_1} - \frac{g_2 g_1}{g_2 + g_1} \frac{1}{(1 - \eta)} T_2 - \frac{g_1^2 T_1}{g_2 + g_1}, \end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{g_2 g_1 (g_2 + g_1) (1 - \eta) T_1 - g_2 g_1 (g_2 + g_1) T_2}{(g_2 + g_1)^2 (1 - \eta)}$$

$$Q_1 = \frac{g_2 g_1}{g_2 + g_1} \left(\frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{1 - \eta} \right). \quad (11)$$

Por lo que obtenemos $Q_1 = g \frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{1 - \eta}$ con $g = \frac{g_2 g_1}{g_2 + g_1}$, esta relación entre Q_1 y η es una de las llamadas funciones característica, la cual se representa en la Figura 2(a), donde se observa dos asíntotas así como dos puntos particulares en $Q_1(\eta)$

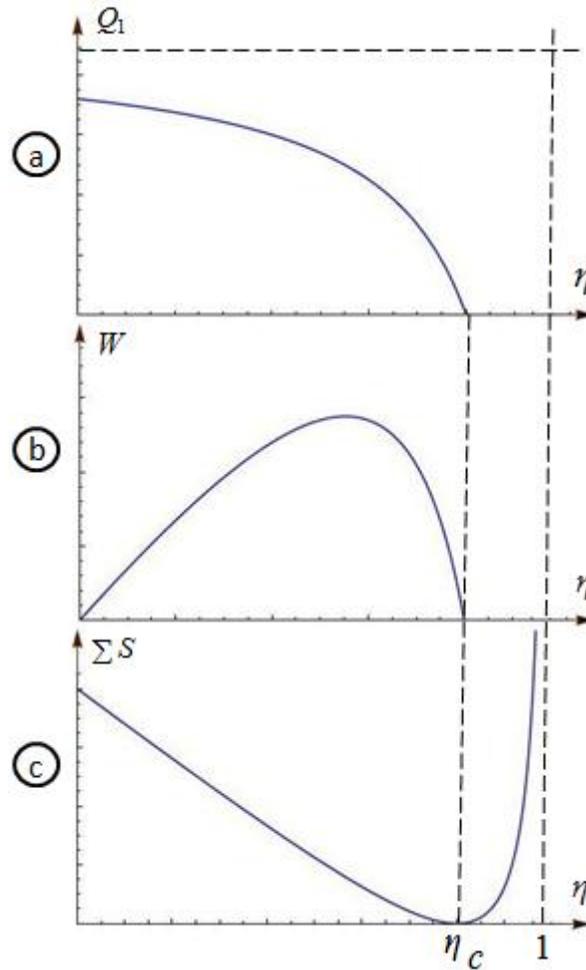


Figura 2. Cantidades termodinámicas como función de la eficiencia de conversión $\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3}$ de una máquina de Curzon-Ahlborn: (a) consumo de calor Q_1 , (b) trabajo producido W , (c) producción de entropía ΣS .

- Para $\eta = -\infty$ la corriente de calor Q_1 iguala su valor de saturación

$$Q_{sat} = Q_1(-\infty) = gT_1. \quad (12)$$

$$Q_1(-\infty) = g \frac{T_1 - T_2 - T_1(-\infty)}{1 - (-\infty)}$$

$$Q_1(\eta) = g \frac{T_1(1 - \eta) - T_2}{(1 - \eta)}$$

$$Q_1(\eta) = g \left(T_1 - \frac{T_2}{(1 - \eta)} \right)$$

$$Q_1(-\infty) = g \left(T_1 - \frac{T_2}{1 - (-\infty)} \right)$$

$$Q_1(-\infty) = gT_1.$$

- La intersección con el eje ordenado es llamado punto de corto circuito. La corriente de corto circuito es igual a:

$$Q_{sc} = Q_1(0) = g \left(T_1 - \frac{T_2}{1 - 0} \right) = g(T_1 - T_2).$$

- La intersección con el eje de la abscisa es llamado punto de circuito abierto, igualando el lado derecho de la Ec. (11) a cero y resolviendo para η , encontramos que la eficiencia a circuito abierto es:

$$\eta_{oc} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

es decir, exactamente la eficiencia de Carnot η_c de una máquina reversible trabajando entre las temperaturas T_1 y T_2

- Para $\eta = 1$, la corriente de calor llega a ser infinita:

$$Q_1(1) = \frac{gT_1(1 - 1) - T_2}{(1 - 1)} \simeq -\infty,$$

de multiplicar la Ec. (11) por η tenemos:

$$\begin{aligned} Q\eta &= g \frac{\eta(T_1 - T_2 - T_1\eta)}{1 - \eta}, \\ W &= g \frac{\eta(T_1 - T_2 - T_1\eta)}{1 - \eta}, \end{aligned} \quad (13)$$

el punto de corto circuito y el punto de circuito abierto dividen la $Q_1(\eta)$ y la $W(\eta)$ característica en tres partes:

- Para $-\infty < \eta < 0$, tenemos, $T_1 > T_3, T_4 > T_3$ y $T_4 > T_2$ y la máquina entre T_3 y T_4 trabaja como refrigerador.
- Para $0 < \eta < \eta_{oc}$, tenemos, $T_1 > T_3 > T_4 > T_2$ y la máquina entre T_3 y T_4 trabaja como una máquina térmica.
- Para $\eta_{oc} < \eta < 1$, tenemos, $T_3 > T_1 > T_2 > T_4$ y la máquina entre T_3 y T_4 trabaja como una bomba de calor.

Llamamos $W(\eta)$ a la función característica de trabajo en términos de la eficiencia. Para demostrar que la máquina de Curzon y Ahlborn no es reversible calculamos $\sum S$ para una superficie cerrada conteniendo toda la máquina es decir ambos, la máquina de Carnot y los dos conductores térmicos, entonces:

$$\sum S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2},$$

donde el signo menos de Q_1 se toma de acuerdo al hecho de que el calor Q_1 entra a la superficie Σ en lugar de salir, entonces:

$$\sum S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1},$$

sabemos que $\frac{Q_2}{T_4} = \frac{Q_1}{T_3}$ pues el sistema opera en ciclos reversibles esto es un corolario de la desigualdad de Clausius, $Q_1 = W + Q_2$ y $W = \eta Q_1$ entonces:

$$\begin{aligned} \sum S &= \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = \frac{(Q_1 - W)}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} \\ &= \frac{Q_1}{T_2} - \frac{\eta Q_1}{T_1} - \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_1}{T_2} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] - \frac{\eta Q_1}{T_2} \\ &= (\eta_c - \eta) \frac{Q_1}{T_2}, \end{aligned} \tag{14}$$

donde η_c denota la eficiencia de Carnot, sustituyendo la Ec. (11) en la Ec. (14) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum S &= (\eta_c - \eta) \frac{Q_1}{T_2} \quad \text{con} \quad Q_1 = g \frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{1 - \eta} \\ \sum S &= (\eta_c - \eta) g \frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{(1 - \eta) T_2} \\ &= g \left[1 - \frac{T_2}{T_1} - \eta \right] \frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{(1 - \eta) T_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g \left[\frac{T_1 - T_2}{T_1} - \eta \right] \frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{(1 - \eta)T_2} \\
&= g \left[\frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{T_1} - \eta \right] \frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{(1 - \eta)T_2} \\
&= g \frac{(T_1 - \eta T_1 - T_2)^2}{(1 - \eta)T_2 T_1}.
\end{aligned}$$

La Figura 2 muestra las características de $\Sigma S(\eta)$ junto con $Q_1(\eta)$ y $W(\eta)$. Observemos que bajo condiciones reversibles, es decir, $\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3}$, igual al valor de Carnot $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, ambos Q_1 y W son cero. Esto expresa el principio general que bajo condiciones reversibles la conversión ocurre infinitamente lenta. En un ciclo reversible, el cambio de entropía es cero, sin embargo en un ciclo irreversible la entropía se incrementa. Ahora remarquemos que el trabajo W producido, muestra un máximo a un valor η , entre 0 y η_c , este valor se encuentra calculando $\frac{dW}{d\eta} = 0$. De la ecuación (13), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{d\eta} &= g \frac{d}{d\eta} \frac{\eta(T_1 - T_2 - T_1\eta)}{1 - \eta} \\
&= g \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\eta(1 - \eta)T_1 - T_2}{1 - \eta} \right] \\
&= g \frac{d}{d\eta} \frac{T_2}{(1 - \eta)} \left[\eta T_1 - \frac{T_2}{(1 - \eta)} \right] \\
&= g \left[T_1 - \frac{d}{d\eta} (1 - \eta)^{-1} T_2 \right] \\
&= g \left[T_1 - \frac{T_2}{(1 - \eta)^2} \right] \\
&= g [T_1(1 - \eta)^2 - T_2] = 0.
\end{aligned}$$

Por lo que llegamos a que:

$$\begin{aligned}
T_1 - 2T_1\eta + T_1\eta^2 - T_2 &= 0, \\
T_1\eta^2 - 2T_1\eta + T_1 - T_2 &= 0,
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación para η tenemos:

$$\eta = \frac{2T_1 \pm \sqrt{4T_1^2 - 4(T_1^2 - T_1T_2)}}{2T_1} = 1 - \frac{\sqrt{4T_1T_2}}{2T_1} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad (15)$$

tomamos el signo (-) porque el (+) implica que $\eta > 1$ que viola la segunda ley. Esta importante fórmula fue descubierta por Curzon y Ahlborn en 1975, bajo estas condiciones de máxima potencia las cantidades Q_1 , W y $\sum S$ toman valores no cero:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= g \frac{T_1 - \eta T_1 - T_2}{(1 - \eta)} \\
 &= g \frac{T_1 - 1 \pm \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} T_1 - T_2}{1 - 1 \pm \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} \\
 &= g \frac{T_1 - T_1 - T_2 + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} T_1}{\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} \\
 &= g \left[\frac{-T_2 \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} + \frac{\sqrt{T_2} T_1}{\sqrt{T_2}} \right] \\
 &= g [-\sqrt{T_1} \sqrt{T_2} + T_1] \\
 &= g \sqrt{T_1} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}).
 \end{aligned}$$

Por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned}
 W &= \eta Q_1 \\
 &= \left(1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) g \sqrt{T_1} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \\
 &= g \sqrt{T_1} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) - g \sqrt{T_2} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \\
 &= g (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2.
 \end{aligned}$$

Y la producción de entropía está dada como

$$\begin{aligned}
 \sum S &= g \frac{(T_1 - \eta T_1 - T_2)^2}{(1 - \eta) T_2 T_1} \\
 &= g \frac{\left(T_1 - \left(1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) T_1 - T_2 \right)^2}{\left(1 - 1 + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) T_2 T_1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g \frac{\left(-T_2 + T_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right)^2}{T_2 T_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} \\
&= g \frac{\left(T_2^2 - 2T_1 T_2 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} + T_1^2 \frac{T_2}{T_1}\right)}{T_2 T_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} \\
&= g \left[\frac{T_2 \sqrt{T_1}}{T_1 \sqrt{T_2}} - 2 + \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} \right] \\
&= g \left(\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}} - 2 + \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} \right) \\
&= g \left(\frac{T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2} + T_1}{\sqrt{T_1 T_2}} \right) \\
&= g \frac{(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}{\sqrt{T_1 T_2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene derivada la fórmula de Curzon y Ahlborn, la cual expresa la eficiencia operando a máxima potencia. La Figura 3 muestra la relación entre la eficiencia η y la razón de temperaturas $\frac{T_2}{T_1}$, vemos que la curva de CA está por debajo de la línea $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, la cual expresa la eficiencia de Carnot η_c , para la misma máquina, pero trabajando en condiciones reversibles. Esto confirma la regla general, la eficiencia bajo condiciones irreversibles es más baja que bajo condiciones reversibles.

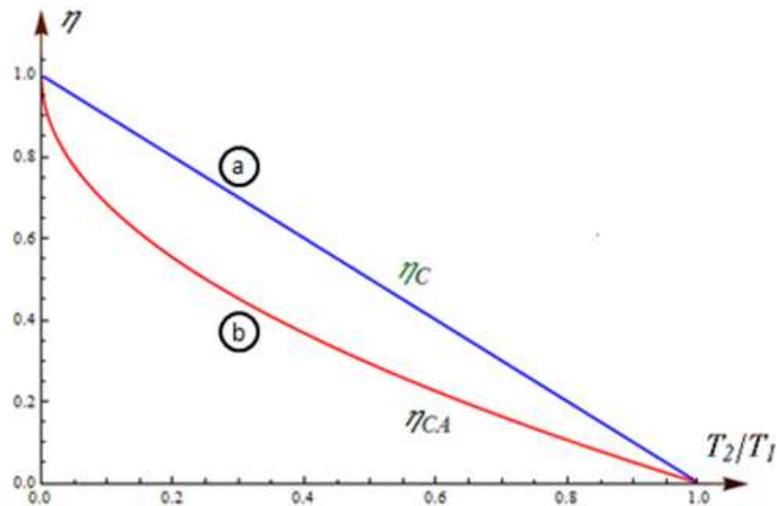


Figura 3. Eficiencia η como función de la razón de temperaturas $\frac{T_2}{T_1}$: a) de acuerdo a Carnot, b) de acuerdo a Curzon-Ahlborn.

La eficiencia de Curzon y Ahlborn η_{CA} no solo se tiene para conductores térmicos lineales en combinación con máquina de Carnot, ésta también puede ser muy buena aproximación para combinaciones de conductores lineales con otras máquinas cíclicas, tal como las máquinas Otto, Diesel y Joule Brayton [11-12].

1.2 Termo-economía Endorreversible

En 1995, Alexis De Vos [1] propuso un análisis termo-económico del modelo de planta de potencia tipo Novikov [13], ver Figura 4, maximizando una función de beneficios definida en términos de la razón de la potencia de salida de la planta y los costos asociados con el funcionamiento de la misma, (costos en el consumo de combustible y costos asociados a la inversión).

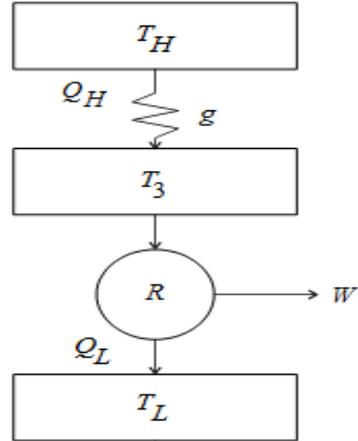


Figura 4. Modelo de Novikov para una planta de potencia.

Mientras que en termodinámica se trata con flujos de calor y trabajo (en $J/s = W$), en termo-economía también se tratarán flujos de dinero (en $\$/s$).

El flujo de calor Q se rige por la ley constitutiva del conductor térmico. Así como Novikov y Curzon y Ahlborn, De Vos asumió una ecuación lineal de transporte:

$$Q = g(T_H - T_3). \quad (16)$$

La conversión de calor a trabajo se rige por la ley de Carnot:

$$W = \left(1 - \frac{T_L}{T_3}\right) Q.$$

Considerando las relaciones anteriores podemos escribir:

$$W = \left(1 - \frac{T_L}{T_3}\right) g(T_H - T_3). \quad (17)$$

Donde W está en función de la variable de temperatura T_3 . La Figura 5 muestra la función $W(T_3)$. La función tiene dos ceros: uno a $T_3 = T_L$ y otro a $T_3 = T_H$.

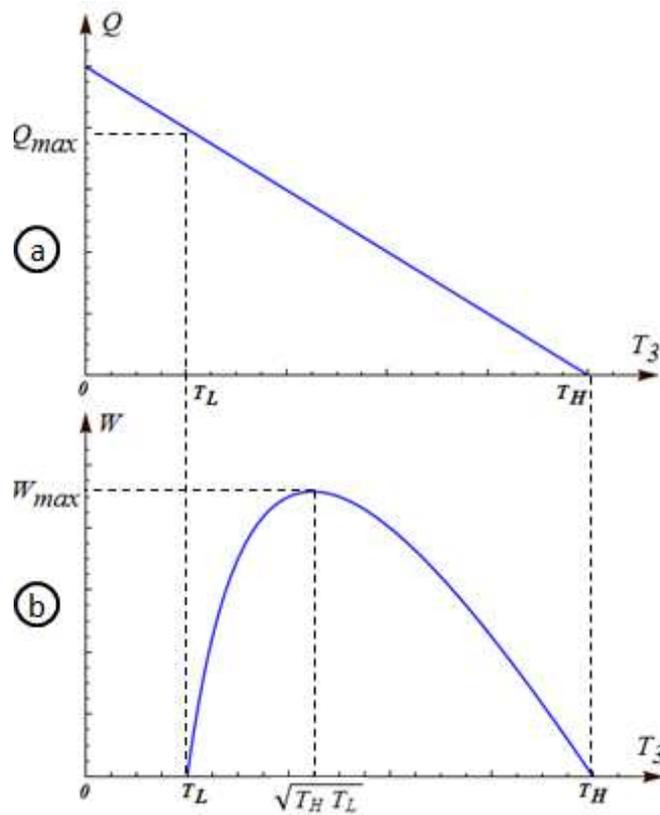


Figura 5. Calor y potencia como función de la temperatura T_3 : a) Consumo de calor; b) Producción de potencia.

Entre los dos ceros la curva muestra un máximo. Como ya se mencionó anteriormente éste ocurre cuando $\frac{dW}{dT_3} = 0$ y esto conduce a $T_3 = \sqrt{T_H T_L}$ y, subsecuentemente a $W_{max} = g(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2$ con la ecuación de eficiencia $\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{T_L}{T_3}$, con lo cual conduce a que:

$$\eta_{opt} = 1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}}.$$

Observemos que en el rango $T_L \leq T_3 \leq T_H$, la máquina trabaja como una máquina térmica verdadera, mientras que para $T_3 < T_L$ funciona como un refrigerador y para $T_3 > T_H$ como una bomba de calor. El calor máximo que podemos extraer del almacén caliente sin suministrar trabajo (es decir, sin que W sea negativo) está dada por: $Q_{max} = Q(T_2) = g(T_H - T_L)$.

Independientemente De Vos [1] y Gordon y Huleihil, comentaron que ni la operación reversible ($T_3 = T_H$) ni la operación a máxima potencia ($T_3 = \sqrt{T_H T_L}$), son condiciones económicas óptimas. En efecto:

- A mayor potencia entregada W , las inversiones para la construcción de plantas rápidamente se recuperan, pero
- A mayor eficiencia, mejores serán los gastos para la adquisición de combustibles que se recuperarán.

Por lo tanto, el punto de explotación óptimo se encuentra entre el punto de máxima potencia y el punto de máxima eficiencia. Así la T_3 óptima satisface:

$$\sqrt{T_H T_L} < (T_3)_{opt} < T_H. \quad (18)$$

Y por lo tanto tenemos:

$$1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} < \eta_{opt} < 1 - \frac{T_L}{T_H}. \quad (19)$$

En el trabajo realizado por De Vos se consideró esta idea, además de tomar en cuenta los gastos de funcionamiento C de la planta de potencia que consistían de dos partes:

- Un costo de capital que es proporcional a la inversión y, por lo tanto, proporcional al tamaño de la planta, y
- Un costo de combustible que es proporcional al consumo de combustible y, por lo tanto, al calor Q de entrada.

Ahora suponiendo que Q_{max} es una medida adecuada para el tamaño de la planta. Así los gastos de funcionamiento C de la explotación de la planta están dado por:

$$C = aQ_{max} + bQ. \quad (20)$$

Los coeficientes a y b ambos tienen dimensiones de [\$/J].

La función de beneficios es:

$$q = \frac{W}{C}. \quad (21)$$

Una cantidad expresada en [J/\$]. Esta cantidad fue la que De Vos maximizó. Este enfoque fue algo diferente a:

- Bejan [14], que minimiza una función de costo sencilla $\frac{gT_1}{W}$, que conlleva a dejar de lado el costo del combustible, y
- Ibrahim [15], que minimiza una función de costo muy complicada, que conduce a cálculos complicados que implican los multiplicadores de Lagrange.

Así que De Vos maximizó la siguiente función:

$$q(T_3) = \frac{W(T_3)}{aQ_{max} + bQ(T_3)},$$

con respecto a T_3 . Substituyendo las ecuaciones (16) y (17), la expresión anterior se convierte en:

$$q(T_3) = \frac{1}{a} \frac{(T_3 - T_L)(T_H - T_3)}{T_3[(T_H - T_L) + \beta(T_H - T_3)]} \quad (22)$$

donde β es la relación adimensional b/a .

La figura 6 muestra la función $q(T_3)$ para varios valores del parámetro β . Para $\beta = 0$, la curva tiene la misma forma que la curva $W(T_3)$ de la Figura 5(b).

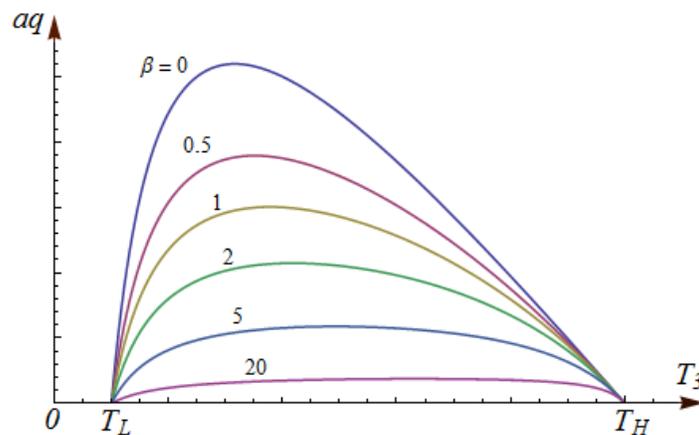


Figura 6. Función de beneficios en función de la temperatura T_3 y para distintos valores de β .

En efecto, si $\beta = 0$, entonces:

$$q(T_3) = \frac{1}{aQ_{max}} W(T_3),$$

con un máximo en $T_3 = \sqrt{T_H T_L}$. Para $\beta \rightarrow +\infty$, el máximo de la curva se acerca más y más a su punto reversible a $T_3 = T_H$.

Manipulando explícitamente $\frac{dq}{dT_3} = 0$ para β arbitraria conduce a una ecuación cuadrática:

$$[T_H - (1 + \beta)T_L]T_3^2 + 2\beta T_H T_L T_3 - [(1 + \beta)T_H - T_L]T_H T_L = 0,$$

con solución:

$$T_3 = \sqrt{T_H T_L} \frac{\sqrt{1 + \beta(T_H - T_L)} - \beta\sqrt{T_H T_L}}{T_H - (1 + \beta)T_L}.$$

Y por lo tanto, obtenemos:

$$\eta_{opt} = 1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H} \frac{T_H - (1 + \beta)T_L}{\sqrt{1 + \beta(T_H - T_L)} - \beta\sqrt{T_H T_L}}}.$$

En lugar de expresar el resultado en términos del parámetro β , un número difícil de obtener de la literatura, también se puede expresar en términos del costo fraccional de combustible definido como el cociente del costo en el combustible y el costo total, es decir;

$$f = \frac{bQ}{aQ_{max} + bQ} = \frac{\beta(T_H - T_3)}{(T_H - T_L) + \beta(T_H - T_3)}.$$

Entonces la eficiencia óptima en términos del costo fraccional de combustible está dada por la expresión [3,16]:

$$\eta_{opt}^{DV} = 1 - \frac{f}{2}\tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau + f^2\tau^2}}{2}. \quad (23)$$

Para diversas tecnologías, este número está dado aproximadamente por la tabla 1. Los valores en la tabla han sido deducidos a partir de la situación de Bélgica, pero tienen, sin embargo, un valor indicativo en general [1].

Combustible	$f(\%)$
Renovable	0
Uranio	25
Carbón	35
Gas Natural	50

Tabla 1. Costo fraccional de combustible para distintas fuentes de Energía [1].

Para distintos valores del parámetro β , podemos ahora calcular numéricamente ambos f y η_{opt} , dados en la Figura 7.

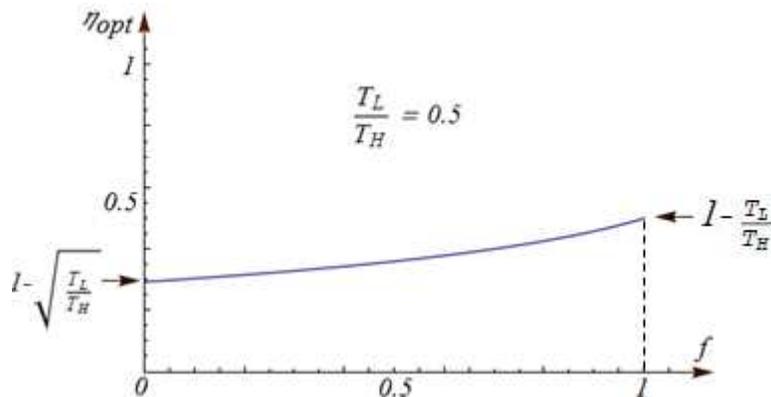


Figura 7. Eficiencia óptima como función del costo fraccional de combustible f , calculado numéricamente para $T_L/T_H = 0.5$

Podemos observar como la η_{opt} varía suavemente desde el valor de la eficiencia a máxima potencia para $f = 0$, es decir para fuentes de energía donde la inversión es el costo preponderante, hasta el valor de Carnot para $f = 1$, es decir para fuentes de energía donde el combustible es el costo predominante.

Si se repiten estos cálculos para distintos valores de la relación T_L/T_H , se obtiene finalmente la curva de la Figura 8. Como todos los valores de f en la tabla 1 están en el rango $0 \leq f \leq 0.5$, observamos de la Figura 8 que, en todos los casos, que el óptimo está más cerca de $1 - \sqrt{T_L/T_H}$ que de $1 - T_L/T_H$.

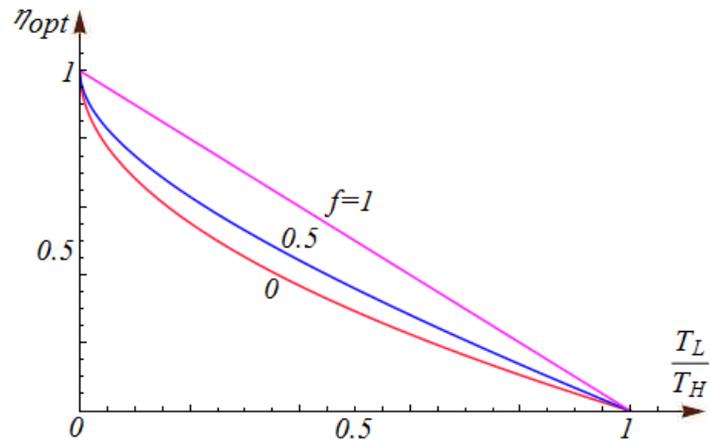


Figura 8. Eficiencia óptima como función de la razón de las temperaturas T_L/T_H

En conclusión, De Vos calculó la eficiencia óptima económica de una planta de potencia. Él trató diversas tecnologías de conversión de energía, el costo de combustible relativo que va de 0 (energías renovables) al 50% (gas natural). Resultó que el punto de trabajo óptimo se encuentra entre el punto de trabajo de Curzon-Ahlborn y el punto de trabajo de Carnot, un poco más cerca del primero que del segundo.

2. Termo-economía (Distintos regímenes de operación y distintas leyes de calor)

2.1 Distintos Regímenes de Operación

Dentro de la TTF, diversos criterios de operación han sido propuestos para la optimización de las máquinas térmicas. Algunos autores maximizan la potencia de salida, al cual se conoce como criterio de máxima potencia de salida [10], otros autores han propuesto la minimización de la entropía [17], la minimización de la entropía es el método más adecuado para preservación de los recursos naturales. Recientemente, Yilmaz [18] propuso un criterio de operación que está dado por el producto de la potencia de salida por la eficiencia de la máquina de potencia, es decir:

$$P_E = \eta W. \quad (24)$$

Al expresión anterior se le conoce como criterio potencia eficiente.

Otro criterio de mérito, diferente al de máxima potencia y potencia eficiente para la optimización de máquinas térmicas y como alternativa para incluir la producción de entropía en el estudio del desempeño del ciclo de Curzon y Ahlborn, fue propuesto por Angulo-Brown [4], el cual consiste en maximizar una funcional termodinámica E , que representa un buen compromiso entre alta producción de potencia y baja producción de entropía, la función E está dada por la expresión:

$$E = W - T_L \sigma, \quad (25)$$

donde W es la potencia de salida del ciclo, σ la producción de entropía por ciclo y T_L la temperatura del almacén frío. Este criterio de optimización proporciona aproximadamente un 75% de la potencia que se produce en el régimen de máxima potencia a expensas de producir solamente el 25% de la entropía (Corolario 75-25), debido a esta propiedad Angulo-Brown denominó a E función ecológica.

Posteriormente, Angulo-Brown y Arias-Hernández [5] mostraron que un criterio de optimización ecológica más adecuada debe depender de la ley de transferencia de calor utilizada para modelar los flujos de calor irreversibles entre los reservorios de calor y el fluido de trabajo, a través de una generalización de la Ec. (15), dado por [5]:

$$E^M = W - \epsilon T_L \sigma, \quad (26)$$

esta expresión es la llamada función ecológica modificada y donde la función ϵ contiene la dependencia de la ley de transferencia de calor particular. La función ϵ para el caso de una ley lineal de transferencia de calor Newtoniano está dada por [5]:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{T_H}{T_L}}, \quad (27)$$

El criterio de función ecológica modificada también conduce a un buen compromiso entre la máxima potencia de salida ($\sim 0.75 P_{max}$) y baja producción de entropía ($\sim 0.25 \sigma_{Pmax}$) [5].

2.2 Distintas Leyes de Transferencia de Calor

En el análisis termo-económico distintas leyes de transferencia de calor se han usado para modelar los flujos de calor irreversibles entre los reservorios de calor y el fluido de trabajo, algunas de estas leyes de transferencia de calor son:

Ley enfriamiento de Newton:

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T_1 - T_2). \quad (28)$$

Donde T_1 y T_2 son las temperaturas extremas durante un proceso de intercambio de calor, y Q es el calor transferido, perdido o ganado por el sistema, en cualquier instante de dicho proceso de intercambio de calor; la

conductancia térmica α se supone constante. De acuerdo a nuestro modelo denotamos a las temperaturas de los almacenes caliente y frío, respectivamente, como T_H y T_L , y las temperaturas alta y baja de la sustancia de trabajo, como T_3 y T_4 , respectivamente, por lo que la expresión anterior la consideramos como:

$$\frac{dQ}{dt} = g(T_H - T_3). \quad (29)$$

En donde $\frac{dQ}{dt}$ es el flujo de calor y g es la conductancia térmica constante del medio que separa al sistema del almacén, siendo positivo el calor transferido del almacén hacia el sistema, absorbido por la sustancia de trabajo.

Sin embargo se sabe que esta ley es una idealización de la forma real en que se produce la transferencia de calor, que depende de los materiales y del medio entre el sistema y los alrededores. Otra ley de transferencia de calor es la conocida ley de Dulong-Petit [19-21], estos autores consideraron partiendo de la ley de enfriamiento de Newton la siguiente expresión

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = \alpha(T - T_a)^n. \quad (30)$$

donde $\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$ es la tasa de calor perdido por unidad de área desde un cuerpo a temperatura T , α es la conductancia térmica, T_a es la temperatura del fluido que rodea el cuerpo. Se estableció que el valor del exponente n se encuentra entre los valores 1.2 y 1.6 [21]. Se ha reconocido en la literatura que una descripción más realista del intercambio de calor entre la sustancia de trabajo y los almacenes debe incluir un término de T^4 (Radiación de Stefan-Boltzman). Algunos autores han establecido que $n = 5/4$, basados en estudios de Lorentz y Langmuir[22-23]. Como Colm O' Sullivan [21] afirma, en su trabajo original de 1879 Stefan tomó los resultados de Dulong y Petit (DP) con experimentos hechos por Tyndall y puntualizó que el modelo de DP estaba de acuerdo con su ley de T^4 .

El caso $n = 5/4$, nos permite describir el caso de una combinación de conducción, convección y radiación, a este caso se le conoce como ley de transferencia de calor Dulong-Petit [19-21], y está dada por

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = \alpha(T - T_a)^{5/4}. \quad (31)$$

Recientemente Chen et al.[20] consideraron en el modelo de De Vos que el flujo de calor Q_H entre la fuente de calor y el fluido de trabajo obedece otra ley de transferencia de calor, es decir, una ley de transferencia de calor fenomenológica de la siguiente forma:

$$Q_H = g \left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_H} \right). \quad (32)$$

En forma similar para el modelo de De Vos, Chen [20] y Barranco-Jiménez et al. [3] consideraron que Q_{max} es una medida apropiada para el tamaño de la planta de potencia (es decir el costo del capital), y que en este caso se tendrá:

$$Q_{max} = g(T_L^{-1} - T_H^{-1}). \quad (33)$$

Estas leyes de transferencia de calor se pueden considerar a través de una generalización de la Ec. (26).

Donde la función ϵ contiene la dependencia de la ley de transferencia de calor particular como se había mencionado en la sección anterior.

Recientemente Barranco-Jiménez y Angulo-Brown [3,16] también estudiaron el modelo de máquina tipo Novikov siguiendo el enfoque utilizado por De Vos, pero por medio del llamado criterio de optimización ecológica. El criterio de optimización ecológica consiste en maximizar la bien conocida función ecológica, estos autores encontraron una expresión para la eficiencia termo-económica bajo el régimen de máxima función ecológica y otra expresión para el régimen de máxima función ecológica modificada, dada por las expresiones [3,16]:

$$\eta_{opt}^E = 1 - \frac{f\tau}{2} - \frac{\sqrt{2(1-f)(1+\tau)\tau + f^2\tau^2}}{2}, \quad (34)$$

$$\eta_{opt}^{EM} = 1 - \frac{f}{2}\tau - \frac{\sqrt{4\tau^{3/2}(1-f) + f^2\tau^2}}{2}, \quad (35)$$

Las expresiones anteriores están en términos del costo fraccional de combustible y donde $\tau = \frac{T_L}{T_H}$ es la razón de la temperatura del reservorio frío entre la temperatura del reservorio caliente. Estas expresiones tienen el mismo comportamiento que la eficiencia óptima encontrada por De Vos, Ec.(23) la cual recordemos que en términos del costo fraccional de combustible se escribe como:

$$\eta_{opt}^{DV} = 1 - \frac{f}{2}\tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau + f^2\tau^2}}{2}. \quad (23)$$

El comportamiento de las eficiencias anteriores se observan en la Figura 9.

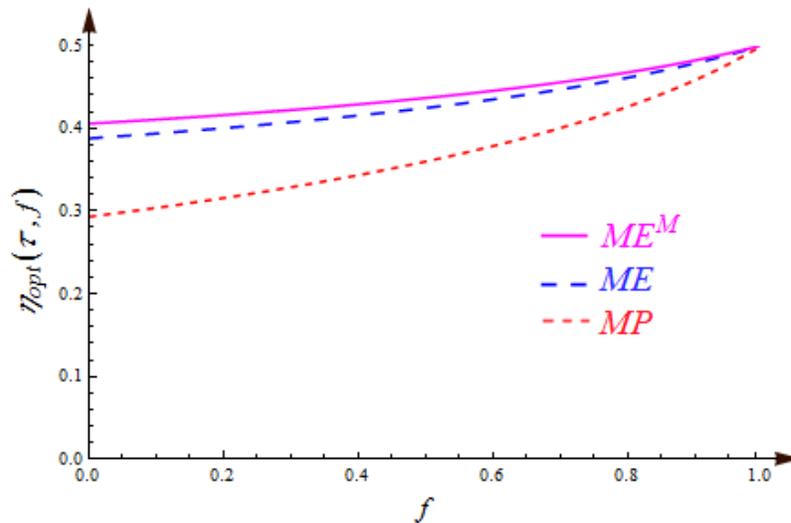


Figura 9. Eficiencias óptimas en términos del costo fraccional de combustible (f) y el cociente de temperaturas (τ).

Las eficiencias óptimas obtenidas por Barranco-Jiménez y Angulo-Brown [3,16] a máxima función ecológica mostraron una reducción en los beneficios pero con un mejor uso en combustibles primarios que provocaba una drástica disminución de la energía disipada al medio ambiente, con respecto al régimen de máxima potencia.

3. Nueva Función de Beneficios

En el presente trabajo se estudia nuevamente la termo-economía para una planta de potencia tipo Novikov (ver Figura 4) considerando el enfoque termo-económico citado en las secciones anteriores, pero con una nueva función de beneficios en la cual se consideraron los siguientes costos de funcionamiento de la planta de potencia:

- Un costo de capital que es proporcional a la inversión y, por lo tanto, es proporcional al tamaño de la planta, y
- Un costo de combustible que es proporcional al consumo de combustible y, por lo tanto, a la energía térmica entrante Q .
- Y un costo de mantenimiento de la planta proporcional a la potencia de salida W de la planta de potencia.

Este último costo es la novedad en la función de gastos de funcionamiento C de la planta. Suponiendo que Q_{max} es una medida adecuada para el tamaño de la planta, los nuevos gastos de funcionamiento C de la explotación de la planta los escribimos como:

$$C = aQ_{max} + bQ_H + cW, \quad (36)$$

donde las constantes de proporcionalidad a , b y c tienen unidades de $\$/Joule$, y $Q_{max} = g(T_H - T_L)$ es el calor máximo que puede ser extraído del reservorio térmico sin producir trabajo (ver Figura 4). Así la nueva función de beneficios para el caso de máxima potencia está dada por:

$$F = \frac{W}{C} = \frac{W}{aQ_{max} + bQ_H + cW}. \quad (37)$$

En nuestro estudio consideramos la ley de transferencia de calor de enfriamiento de Newton, así como los distintos regímenes de operación estudiados anteriormente, máxima función ecológica modificada, máxima potencia y máxima potencia eficiente

Aplicando la primera Ley de la termodinámica a la Figura 4, la potencia de salida está dada por:

$$W = Q_H - Q_L. \quad (38)$$

Donde Q_H y Q_L son el calor de transferencia suministrado por la fuente caliente al fluido de trabajo y el calor transferido desde el fluido de trabajo a la fuente fría respectivamente.

Por otra parte, la eficiencia interna de la máquina está dada por [3]:

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{\tau}{R\theta}. \quad (39)$$

Donde $\theta = T_3/T_H$ que llamaremos la temperatura reducida y $R = \Delta S_1/|\Delta S_2|$ es el parámetro de no-endorreversibilidad [24-26] (la cual caracteriza el grado de irreversibilidad interna y proviene de la desigualdad de Clausius), siendo ΔS_1 el cambio de la entropía interna a lo largo de la rama isotérmica superior y ΔS_2 el cambio de entropía correspondiente a la compresión isotérmica fría. Este parámetro en principio está en el intervalo $0 < R \leq 1$ ($R = 1$ para el límite endorreversible). Ya que la transferencia de calor la consideramos mediante la ley de transferencia de Newton, entonces:

$$Q_H = gT_H(1 - \theta). \quad (40)$$

Por lo tanto, podemos escribir la función de beneficios bajo un régimen de máxima potencia de salida como:

$$aF_{MP} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{R\theta}\right)(1 - \theta)}{(1 - \tau) + \beta(1 - \theta) + \gamma\left(1 - \frac{\tau}{R\theta}\right)(1 - \theta)}. \quad (41)$$

Para nuestra optimización termo-económica definimos otras dos funciones objetivo una bajo el régimen de máxima función ecológica modificada y otra bajo el régimen de máxima potencia eficiente, es decir:

$$F_{MEM} = \frac{W - T_L \epsilon \sigma}{C}, \quad (42)$$

$$F_{PE} = \frac{\eta W}{C}, \quad (43)$$

Las cuales las podemos escribir como:

$$aF_{MEM} = \frac{\left[(1 + \epsilon) \left(1 - \frac{\tau}{R\theta} \right) - \epsilon(1 - \tau) \right]}{(1 - \tau) + \beta(1 - \theta) + \gamma \left(1 - \frac{\tau}{R\theta} \right) (1 - \theta)}, \quad (44)$$

$$aF_{PE} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{R\theta} \right)^2 (1 - \theta)}{(1 - \tau) + \beta(1 - \theta) + \gamma \left(1 - \frac{\tau}{R\theta} \right) (1 - \theta)}, \quad (45)$$

donde $\beta = b/a$ y $\gamma = c/a$. En la Figura 10 se muestra el comportamiento de las tres funciones objetivo en función de la temperatura reducida θ . Como se puede observar en la Figura 10 existe un valor de eficiencia óptima el cual depende del parámetro R y el valor óptimo de θ . También podemos observar que los beneficios disminuyen conforme el costo de mantenimiento aumenta. Por otra parte, para el caso de máxima potencia, el valor óptimo de θ no cambia el máximo de beneficios cuando el costo de mantenimiento (parámetro γ) está presente en la optimización.

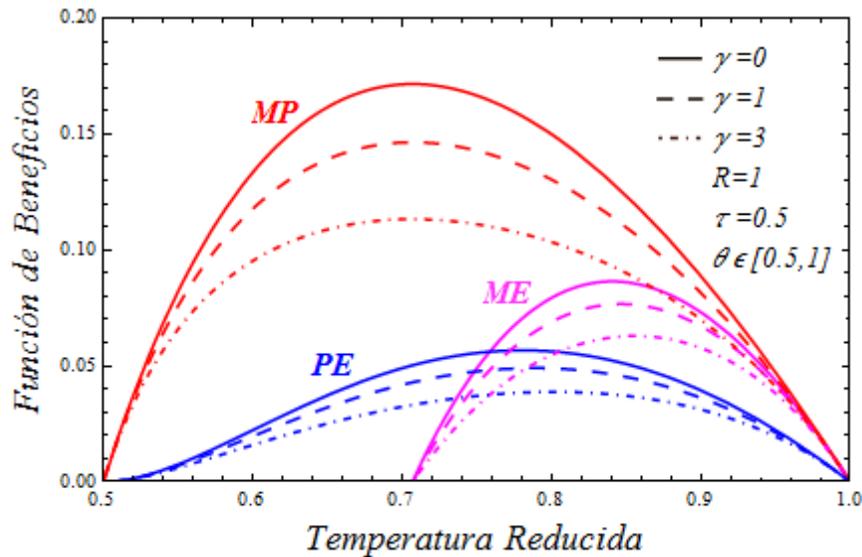


Figura 10. Comparación entre las tres funciones objetivo termo-económicas con respecto a la temperatura reducida tomando en cuenta el costo de mantenimiento de la planta de potencia ($\gamma \neq 0$).

La optimización de las funciones objetivo dadas por las Ecs. (40), (43) y (44) mediante $\left. \frac{dF}{d\theta} \right|_{\theta^*} = 0$, proporciona las eficiencias óptimas correspondientes. Por lo tanto, tomando las derivadas de aF_{MP} y aF_{ME} con respecto a θ e igualando a cero obtenemos la temperatura óptima del fluido de trabajo ($\theta^* = T_3^*/T_H$) que maximiza las Ecs. (40), (43) y (44), y haciendo uso de la Ec. (39), se obtienen las eficiencias óptimas en cada régimen de operación, en función de τ , R , γ y β ; sin embargo, como en el procedimiento usado por De Vos donde afirma que este parámetro β es un número difícil de obtener, definimos un costo fraccional de combustible, en términos del costo asociado al combustible y el costo total involucrado en el funcionamiento de la planta de potencia, en este caso dicho costo fraccional está dado por:

$$f = \frac{bQ}{aQ_{max} + bQ + cW} \quad (46)$$

en términos de la eficiencia interna del modelo se puede escribir de la forma:

$$\beta(\eta, \tau, f, \gamma, R) = \left(\frac{f}{1-f} \right) * \frac{(1-\tau) + \gamma\eta \left(1 - \frac{\tau}{R(1-\eta)} \right)}{\left(1 - \frac{\tau}{R(1-\eta)} \right)} \quad (47)$$

Para el caso de máxima potencia de salida, la eficiencia óptima está por [2,3]:

$$\eta_{MP}(\tau, f, R) = 1 - \frac{f}{2R}\tau - \frac{\sqrt{4(1-f)R\tau + f^2\tau^2}}{2R} \quad (48)$$

Como ya se mencionó anteriormente el valor óptimo de θ no cambia el máximo de beneficios, es decir, la eficiencia óptima es independiente del parámetro γ , el cual es el asociado al costo en el mantenimiento en el modelo de la planta (ver figura 4). Para el caso de régimen de máxima función ecológica modificada obtenemos una nueva expresión para la eficiencia óptima:

$$\eta_{ME}(\tau, f, \gamma, R) = 1 - \frac{2\tau(f-1)[R + (R-\gamma)\sqrt{\tau}]}{R[f\tau + 2\gamma(1-f)\sqrt{\tau} + f\tau - \sqrt{(\tau + \sqrt{\tau})(4(f-1)((f-1)\gamma-1)R)}] + \Lambda(\tau, f, \gamma, R)} \quad (49)$$

Donde $\Lambda(\tau, f, \gamma, R) = [4(R - \gamma) + f(f - 4R + 4\gamma(2 - f))]\sqrt{\tau} + f^2\tau$. De la ecuación anterior, cuando $\gamma = 0$ y $R = 1$ (caso endorreversible), la eficiencia óptima obtenida por Barranco-Jiménez y Angulo-Brown [2,3] dada por la ecuación (35) se recupera. De una forma similar, podemos encontrar la expresión para la eficiencia óptima bajo condiciones de operación de máxima potencia eficiente, pero la expresión es demasiado larga, aunque se puede obtener usando un paquete de manipulación algebraica [27]. De hecho dicha expresión para la eficiencia óptima se obtiene al

resolver la ecuación $\left. \frac{dF_{PE}}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_{PE}^*} = 0$, que explícitamente consiste en encontrar las raíces de la siguiente ecuación:

$$\frac{(-1+f)\eta(-2R^2(-1+\eta)^2(1+f\gamma\eta-\tau)-2f\gamma\eta\tau^2+R\tau(2-2\tau+\eta(-1+\tau+f(-1+4\gamma-4\gamma\eta+\tau))))}{(R(-1+\eta)(1+f\gamma\eta-\tau)+f\gamma\eta\tau)^2} = 0 \quad (50)$$

Una vez obtenida la eficiencia óptima para el régimen de máxima potencia eficiente considerando el costo asociado al mantenimiento de la planta de potencia es decir $\gamma \neq 0$, podemos observar en la siguiente gráfica el comportamiento de dicha eficiencia óptima conforme los costos de mantenimiento aumentan

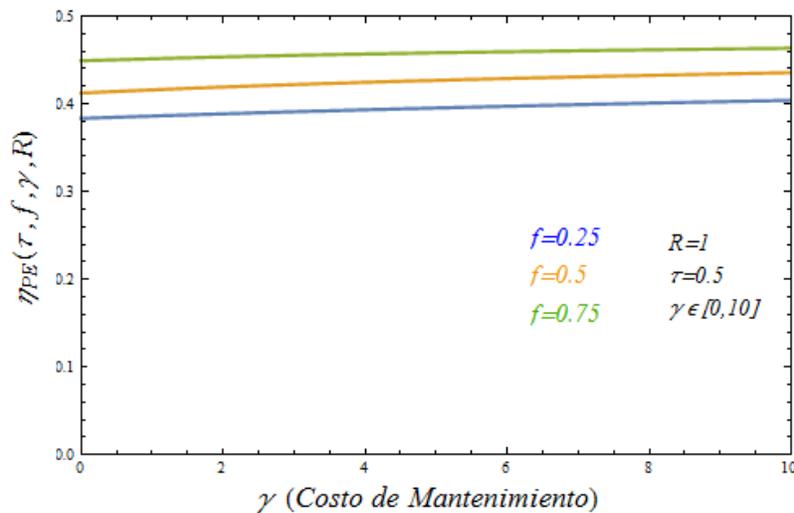


Figura 11. Eficiencias óptimas en función del costo de mantenimiento ($\gamma \neq 0$) de la planta de potencia a máxima potencia eficiente y para distintos valores del costo fraccional de combustible f .

Podemos observar claramente que conforme aumentan los costos de mantenimiento ($\gamma \neq 0$) de la planta de potencia, la eficiencia óptima se mantiene casi constante, aún y para distintos costos fraccionales f .

Por otro lado, si sólo consideramos los costos relacionados a la inversión y el costo en el consumo de combustible en el modelo de la figura 4, obtenemos la eficiencia óptima a máxima potencia eficiente, y ésta resulta ser [28-29]:

$$\eta_{PE}(\tau, f, \gamma = 0, R) = 1 - \frac{(1+f)\tau}{4R} - \frac{\sqrt{8(1-f)R\tau + (1+f)^2\tau^2}}{4R}. \quad (51)$$

En esta ecuación, para el caso $f=0$ y $R=1$, obtenemos la eficiencia $\eta = 1 - \frac{\tau}{4} - \frac{\sqrt{8\tau(1+\tau)}}{4}$, esta expresión fue previamente reportada por Yilmaz [18] para el modelo de Curzon-Ahlborn bajo condiciones de operación de máxima potencia eficiente. En la figura 12, para el caso $\gamma = 0$, mostramos las eficiencias óptimas en donde se muestra que satisface $\eta_{CA} < \eta_{MP} < \eta_{PE} < \eta_{ME} < \eta_C$ para todos los valores del costo fraccional de combustible.

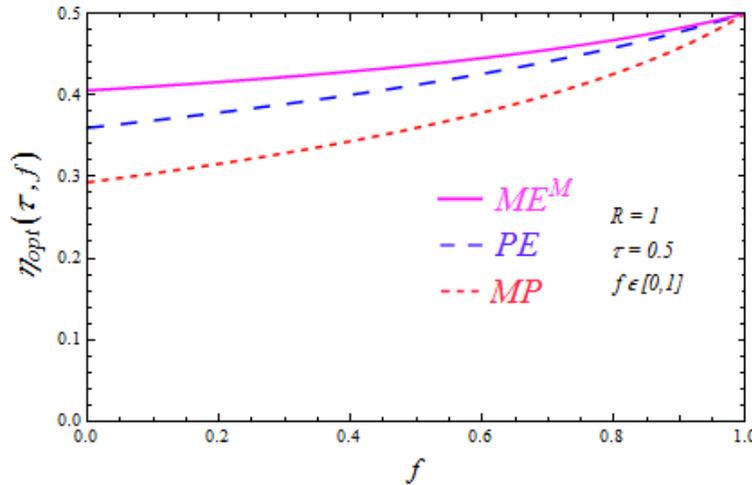


Figura 12. Eficiencias óptimas en función del costo fraccional de combustible a máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica ($\gamma = 0$).

Sin embargo, de igual forma que para máxima potencia eficiente, podemos hacer una comparación cuando consideramos el costo de mantenimiento ($\gamma \neq 0$) de la planta para los distintos regímenes de operación máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica, y para costo fraccional de

combustible fijo $f = 0.25$, aunque podría tomarse para distintos valores más y esto lo podemos observar en la figura 13.

Es claro de la gráfica que el comportamiento de las eficiencias es parecido; es decir, se mantienen casi constantes conforme el costo asociado al mantenimiento ($\gamma \neq 0$) de la planta aumenta.

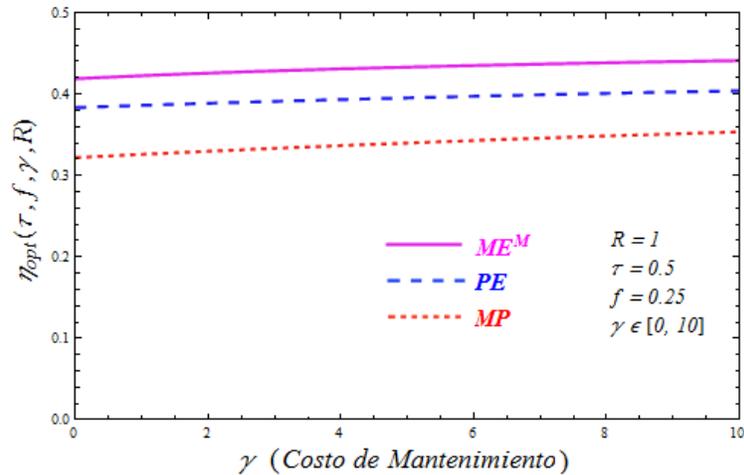


Figura 13. Eficiencias óptimas en función del costo de mantenimiento ($\gamma \neq 0$) de la planta de potencia a máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica y para un costo fraccional de combustible fijo $f = 0.25$.

Podemos realizar una gráfica para observar el comportamiento de las eficiencias óptimas cuando la planta de potencia opera bajo los distintos regímenes de operación, máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica modificada, en función del costo fraccional de combustible (f) y considerando distintos valores para el costo asociado al mantenimiento (γ).

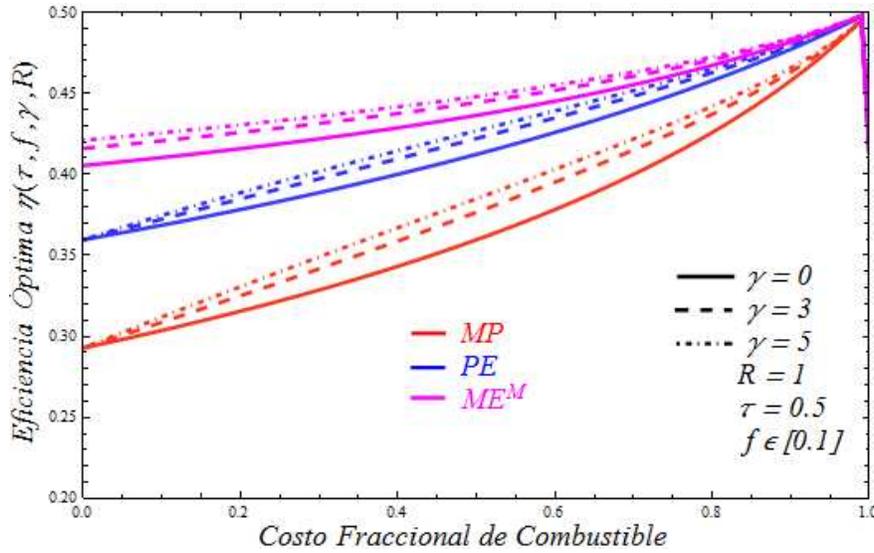


Figura 14. Eficiencias óptimas en función del costo fraccional de combustible a máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica para distintos valores del costo de mantenimiento

De la Figura 14 observamos como el régimen de máxima función ecológica modificada tiene una mayor eficiencia respecto a los regímenes de máxima potencia y máxima potencia eficiente, aún y cuando se consideran distintos valores del costo de mantenimiento (γ), es decir se sigue conservando la relación $\eta_{CA} < \eta_{MP} < \eta_{PE} < \eta_{ME} < \eta_C$, además la eficiencia aumenta en cada régimen de operación cuando el costo de mantenimiento de la planta de potencia es considerado.

3.1 Impacto Ambiental

Aplicando la primera Ley de la Termodinámica al modelo de máquina térmica mostrado en la Figura 4, obtenemos:

$$Q_L = Q_H - W, \quad (52)$$

donde Q_L es el calor expulsado al medio ambiente por la planta de potencia. Cuando la planta de potencia trabaja bajo los regímenes de operación de máxima potencia y máxima potencia eficiente, tenemos que los calores expulsados son respectivamente:

$$Q_L(R, \tau, \theta_{MP}^*) = g_{T_H} \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{MP}^*} \right] (1 - \theta_{MP}^*), \quad (53)$$

$$Q_L(R, \tau, \theta_{PE}^*) = gT_H \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{PE}^*} \right] (1 - \theta_{PE}^*), \quad (54)$$

De una forma similar cuando la planta de potencia trabaja bajo el régimen de máxima función ecológica modificada tenemos que el calor expulsado al medio ambiente lo podemos escribir como:

$$Q_L(R, \tau, \theta_{MEM}^*) = gT_H \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{MEM}^*} \right] (1 - \theta_{MEM}^*). \quad (55)$$

De las Ecs. (49), (50) y (51), podemos calcular el calor expulsado al medio ambiente para cada valor de f bajo diferentes modos de operación de la planta de potencia. Para el caso $\gamma = 0$, sustituyendo los valores óptimos para las eficiencias a máxima función ecológica, máxima potencia y máxima potencia eficiente, ecuaciones (35), (48) y (51) respectivamente en las ecuaciones (53), (54) y (55), obtenemos:

$$Q_L(R, \tau, f)_{MP} = \frac{(-2 + f)\tau - \sqrt{-\tau} \sqrt{4(-1 + f)R - f^2\tau}}{2R}, \quad (56)$$

$$Q_L(R, \tau, f)_{PE} = \frac{(-3 + f)\tau + \sqrt{\tau(-8(-1 + f)R + (1 + f)^2\tau)}}{4R}, \quad (57)$$

$$Q_L(R, \tau, f)_{MEM} = \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{\tau})^2(4R - 4fR + f^2\sqrt{\tau})\sqrt{\tau}\sqrt{\tau} + (-2 + f)\tau + (-2 + f)\tau^{3/2}}}{2R(1 + \sqrt{\tau})}, \quad (58)$$

En la Figura 15 mostramos el comportamiento de estas funciones y podemos observar cómo el calor expulsado bajo condiciones ecológicas es menor que el calor expulsado bajo condiciones de máxima potencia y máxima potencia eficiente.

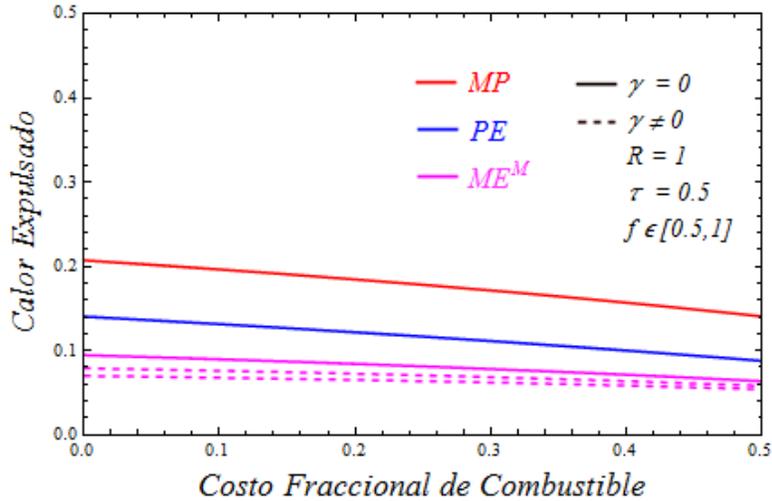


Figura 15. Calor expulsado bajo los regímenes de máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica modificada para una ley lineal de transferencia de calor para $\tau = 1/2$.

De la figura anterior podemos observar que el calor expulsado al medio ambiente bajo el régimen de máxima función ecológica disminuye cuando se considera el parámetro γ es decir el costo de mantenimiento asociado a la planta de potencia.

También podemos hacer una gráfica comparando los calores expulsados, es decir hacer el cociente para máxima función ecológica modificada entre máxima potencia eficiente, máxima función ecológica modificada entre máxima potencia y máxima potencia eficiente entre máxima potencia, los cuales representamos en la siguiente figura:

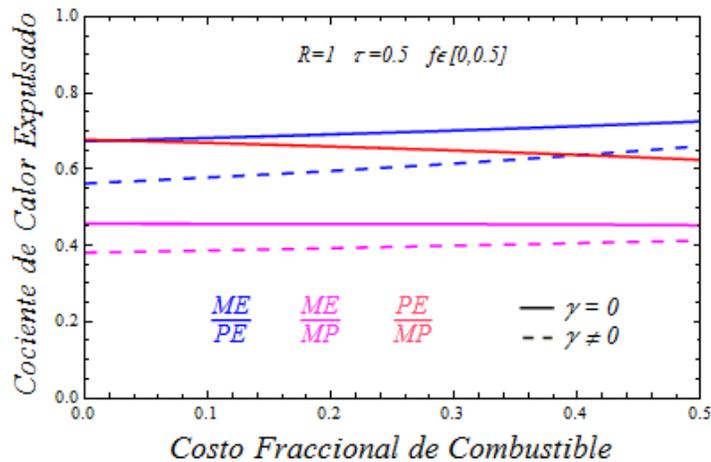


Figura 16. Cociente del calor ecológico expulsado y el calor a máxima potencia y a máxima potencia eficiente en términos del costo fraccional, (línea azul para el caso $\gamma = 0$, previamente reportado en [16]).

Además, podemos calcular la producción de entropía total para el modelo de Novikov para los tres regímenes de operación mencionados anteriormente. Aplicando la segunda Ley de la Termodinámica al modelo de la Figura 4, obtenemos:

$$\sigma = \frac{Q_H - W}{T_L} - \frac{Q_H}{T_H}. \quad (59)$$

Usando también las Ecs. (37), (38) y (39) y después de algunas manipulaciones algebraicas, la producción de entropía bajo los distintos regímenes de operación: máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica modificada se puede calcular con las siguientes expresiones:

$$\sigma(R, \tau, \theta_{MP}^*) = gT_H \left[(1 - \tau) - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{MP}^*} \right] (1 - \theta_{MP}^*), \quad (60)$$

$$\sigma(R, \tau, \theta_{PE}^*) = gT_H \left[(1 - \tau) - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{PE}^*} \right] (1 - \theta_{PE}^*), \quad (61)$$

$$\sigma(R, \tau, \theta_{MEM}^*) = gT_H \left[(1 - \tau) - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{MEM}^*} \right] (1 - \theta_{MEM}^*). \quad (62)$$

En forma análoga a las ecuaciones (56)-(58), en términos del costo fraccional de combustible para el caso $\gamma = 0$, las producciones de entropía bajos los distintos regímenes de operación resultan ser:

$$\sigma(R, \tau, f)_{MP} = \tau \left(\frac{2(f-1)}{f\tau + \sqrt{4(1-f)\tau R + f^2\tau^2}} - 1 \right) \left(1 - \frac{f\tau + \sqrt{4(1-f)\tau R + f^2\tau^2}}{2R(1-f)} \right), \quad (63)$$

$$\sigma(R, \tau, f)_{PE} = \frac{(2(f-1)R - (1+f)\tau + \sqrt{8(1-f)\tau R + (1+f)^2\tau^2})}{8(-1+f)R^2} X \left((1+f-4R)\tau + \sqrt{8(1-f)\tau R + (1+f)^2\tau^2} \right), \quad (64)$$

$$\sigma(R, \tau, f)_{ME^M} = \frac{1}{2} \tau \left(2 + \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{\tau})^2 (-4(-1 + f)R + f^2 \sqrt{\tau}) \sqrt{\tau} - f(\sqrt{\tau} + \tau)}}{(f - 1)R(1 + \sqrt{\tau})} \right) \quad (65)$$

$$\times \left(1 - \frac{2(f - 1)(1 + \sqrt{\tau})}{\sqrt{(1 + \sqrt{\tau})^2 (4(1 - f)R + f^2 \sqrt{\tau}) \sqrt{\tau} + f(\sqrt{\tau} + \tau)}} \right).$$

Las expresiones anteriores las graficamos en la Figura 16, y podemos observar que el régimen de operación de máxima potencia eficiente, es más “entrópico” con respecto al régimen de operación de máxima función ecológica modificada, aun cuando la potencia de salida es mayor que la que se obtiene bajo un régimen de operación de máxima función ecológica modificada, también se ha mostrado que la eficiencia óptima bajo un régimen de operación ecológico, es mayor con respecto a los regímenes de operación de máxima potencia y máxima potencia eficiente (ver Figura 12).

Estas propiedades también fueron reportadas recientemente para el modelo de Novikov considerando solamente costos asociados a la inversión y al consumo de combustible [16]. Por lo que podemos ver que el régimen de operación a máxima función ecológica modificada es el régimen menos contaminante para el medio ambiente. Además la producción de entropía es menor cuando se considera el parámetro γ es decir el costo de mantenimiento asociado a la planta de potencia (ver Figura 17 líneas punteadas). Como podemos observar, también el cociente de producción de entropía disminuye cuando se toman en cuenta costos asociados al mantenimiento en los tres regímenes de operación; máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica modificada.

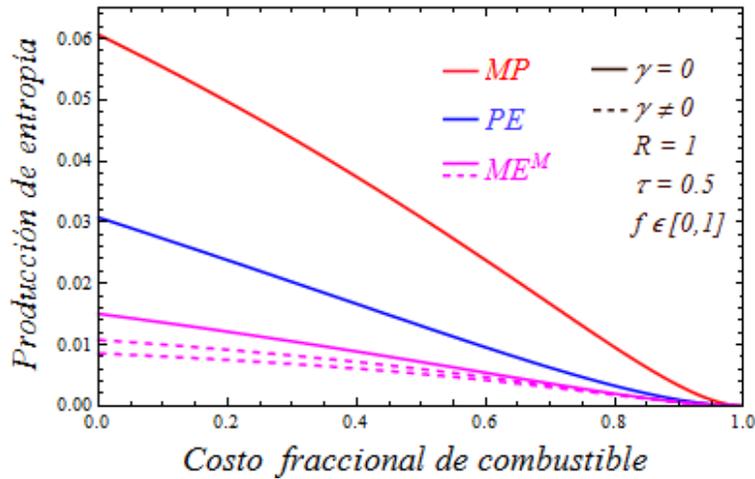


Figura 17. Producción de entropía para el modelo de Novikov para una ley lineal de transferencia de calor tipo Newton y para $\tau = 1/2$.

De igual forma que para el calor expulsado al medio ambiente, podemos también hacer una gráfica comparando la producción de entropía para los distintos regímenes de operación, es decir hacer el cociente para máxima función ecológica modificada entre máxima potencia eficiente, máxima función ecológica modificada entre máxima potencia y máxima potencia eficiente entre máxima potencia, las cuales representamos en la siguiente figura 18.

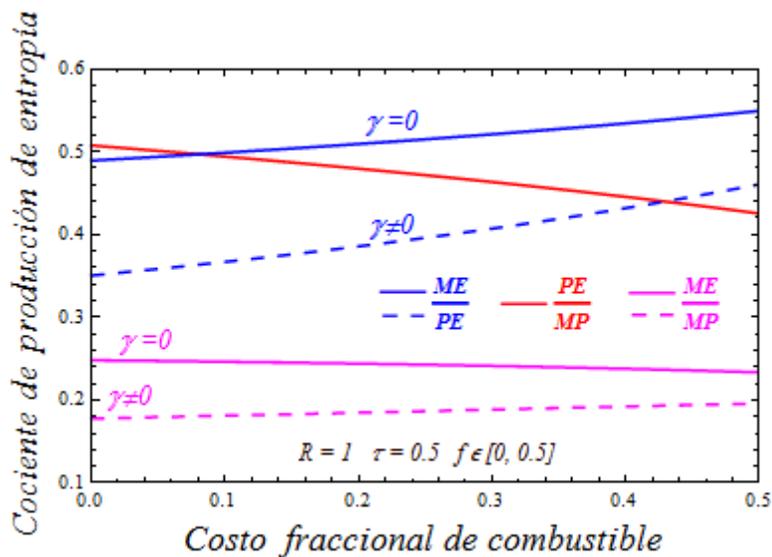


Figura 18. Cociente de la producción de entropía a máxima función ecológica y máxima potencia y para máxima potencia eficiente, también se muestra el caso $\gamma = 0$, previamente reportado en [16].

Como podemos observar, también el cociente de producción de entropía disminuye cuando se toman en cuenta costos asociados al mantenimiento en los tres regímenes de operación; máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica modificada.

4. Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio termo-económico de un modelo de planta de potencia térmica simplificada no-endorreversible (la llamada máquina de Novikov). Este caso no-endorreversible mejora los resultados obtenidos por medio de un modelo endorreversible debido a la inclusión de la disipación interna de la máquina a través del parámetro R . En este estudio, se tomó en cuenta un costo asociado al mantenimiento de la planta de potencia, que es, proporcional a la potencia de salida de la planta. Se consideraron distintos regímenes de operación: Máxima Potencia de Salida, Máxima Potencia Eficiente y Máxima Función Ecológica. Se muestra que cuando la planta de potencia tipo Novikov trabaja bajo el régimen de Máxima Función Ecológica Modificada, ésta reduce el calor expulsado al medio ambiente hasta un 55% (ver Figura 16) del calor expulsado en el caso de que la planta trabaje bajo condiciones de máxima potencia. Además se analizó el efecto sobre la reducción de la potencia de salida en términos de una irreversibilidad interna. Finalmente, como resultado de esta tesis en el apéndice mostramos los artículos publicados en congresos nacionales e internacionales y un artículo en una revista indexada.

5. Referencias

- [1] Alexis De Vos, "Endoreversible Thermoeconomics". *Energy. Convers. Magnagement.* 1995; 36:(1)1-5.
- [2] M. A. Barranco-Jiménez and F. Angulo-Brown, "Thermoeconomic optimization of a Novikov power plant model under maximum ecological conditions" *J. of the Energy Inst.* 80:2(1-4):96-104, 2007.
- [3] M. A. Barranco-Jiménez, "Finite-time thermoeconomic optimization of a non endoreversible heat engine", *Rev. Mex. Fis.* 55 (3) 211-220 (2009).
- [4] Angulo-Brown F; An ecological optimization criterion for finite-time heat engines. *J. Appl. Phys.* 1991; 69: 7465-7469.
- [5] F. Angulo-Brown and L.A. Arias-Hernández, *Journal of Applied Physics* 89 (2001): 1520-3.
- [6] Yilmaz T; A new performance criterion for heat engine: efficient power. *J. Energy Inst.* 2006; 79(1):38-41.
- [7] L. A. Arias-Hernández, M. A. Barranco-Jiménez and F. Angulo-Brown, "Comparison between two ecological-type modes of performance for a simple energy converter", *Journal of the Energy Institute*, 82 (3) 193-197 (2009).
- [8] S. Sieniutycz, P. Salamon, editors. *Finite-time thermodynamics and thermoeconomics.* New York: Taylor and Francis; 1990.
- [9] Andresen B, Salamon P, Berry RS. *Thermodynamics in finite time.* *Physics Today* Sept 1984:62.
- [10] Curzon F. and Ahlborn B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *Am. J. Phys.* 1975; 43: 22-24.
- [11] J. González-Ayala, L. A. Arias-Hernández and F. Angulo-Brown, "Connection between maximum-work and maximum-power thermal cycles", *Physical Review E* 88, 052142 (2013)
- [12] F. Angulo-Brown, J. González-Ayala, and L. A. Arias-Hernández, "Restrictions on linear capacities from Juole-Brayton maximum-work cycle efficiency", *Physical Review E* 89, 022134 (2014)

- [13] I. I. Novikov, the efficiency of atomic power stations (a review). *Atomimaya Energiya*, Vol. 3 1957; 409: in English translation; *I. Nuclear Energy*, Vol. 7, 125; 1958.
- [14] A. Bejan, *Trans. A.S.M.E.--J. Energy Resour. Technol.* 115, 148 (1993).
- [15] O. Ibrahim, S. Klein and J. Mitchell, *AES--Vol. 24, Thermodynamics and Energy Systems: Fundamentals, Education, and Computer-aided Analysis*, A.S.M.E., pp. 15-20 (1991)
- [16] M. A. Barranco-Jiménez and F. Angulo-Brown, "Thermoeconomic optimization of endoreversible heat engine under maximum modified ecological criterion" *J. of the Energy Inst.* 80:4(1-4): 232-238, 2007.
- [17] Bejan A. Entropy generation minimization: the new thermodynamics of finite-size devices and finite time processes. *J. Appl. Phys.* 1996; 79 (3):1191–218.
- [18] Yilmaz T; A new performance criterion for heat engine: efficient power. *J. Energy Inst.* 2006; 79(1):38-41.
- [19] Gutowicz-Krusin, D.; Procaccia, J.; Ross, J. On the efficiency of rate process: Power and efficiency of heat engines. *J Chem. Phys.* 1978, *69*, 3898-3906.
- [20] Chen, L.; Sun, F.; Chen, W. Influence of heat transfer law on the performance of a carnot engine. *Chin. J. Engng. Thermophys.* 1990, *11*, 241-243.
- [21] Colm T O Sullivan, Newton's law of cooling. A critical assessment, *Am. J. Phys.* 58, (1990), 956-960.
- [22] Lorentz L, Ueber das Leitungsvermögen der Metalle für Wärme und Electricität, *Ann. Phys.* 13 (1881), 582-606.
- [23] Langmuir I, Convection and conduction of heat in gases, *Phys. Rev.* **34** (1912), 401-422; *Tran. Am. Electrochem. Soc.* 23 (1913) 299.
- [24] J. Chen. The maximum power output and maximum efficiency of an irreversible Carnot heat engine. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1994;27:1144–1149.
- [25] Ozcaynak, S.; Goktan, S.; Yavuz, H. Finite-time thermodynamics analysis of a radiative heat engine with internal irreversibility. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1994; 27: 1139–1143.

- [26] Wu, C., Chen, L., Chen, J., eds., Recent Advances in Finite-Time Thermodynamics, Nova Science, New York, 1999.
- [27] S. Wolfram, "Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer" Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
- [28] J. C. Pacheco-Páez, F. Angulo-Brown and M. A. Barranco-Jiménez, "Thermoeconomical optimization of an irreversible heat engine, the Novikov plant model". Proceeding of 27th International Conference on Efficiency, Cost, Optimization, Simulation and Environmental impact of energy systems (ECOS2014, Turku Finland, June 15-19, 2014.)
- [29] J. C. Pacheco-Páez, F. Angulo-Brown and M. A. Barranco-Jiménez, "Thermoeconomical analysis of a non-endoreversible Novikov power plant model under different regimes of performance", J. Phys.: Conf. Ser. 582 (2015) 012050.
- [30] Alexis De Vos, "Endoreversible Thermodynamics of Solar Energy Conversion", Oxford University Press, Oxford 1992.

6. Apéndice: Productos obtenidos de la Tesis

Durante la realización de la tesis los avances se presentaron en congresos nacionales e internacionales, obteniendo finalmente un artículo publicado en una revista internacional, dichos productos se enlistan a continuación:

1. **J. C. Pacheco-Páez**, F. Angulo-Brown and M. A. Barranco-Jiménez, "Thermoeconomical optimization of an irreversible heat engine, the Novikov plant model". Proceeding of 27th International Conference on Efficiency, Cost, Optimization, Simulation and Environmental impact of energy systems (ECOS2014, Turku Finland, June 15-19, 2014.)
2. **J. C. Pacheco-Páez**, F. Angulo-Brown, M. A. Barranco-Jiménez, "Optimización Termo-económica de una máquina térmica tipo Novikov bajo distintos criterios de optimización". Memorias del XXIX Congreso Nacional de Termodinámica (Temixco, Mor., Septiembre 1-5, 2014)
3. **J. C. Pacheco-Páez**, F. Angulo-Brown and M. A. Barranco-Jiménez, "Thermoeconomical analysis of a non-endoreversible Novikov power plant model under different regimes of performance", J. Phys.: Conf. Ser. 582 (2015) 012050.

Este último trabajo es la referencia del artículo obtenido de la tesis el cual fue presentado en el 7° Congreso Internacional de Ingeniería Física, celebrado del 24 al 28 de Noviembre de 2014 en la UAM-Azcapotzalco, México D. F.

Thermoeconomical optimization of an irreversible heat engine, the Novikov plant model

J. C. Pacheco-Páez^a, F. Angulo-Brown^a and M. A. Barranco-Jiménez^b

^a *Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, Edif. 9, 2º. Piso, UP Zacatenco CP 07738, D.F., México, jcpacheco@esfm.ipn.mx, angulo@esfm.ipn.mx*

^b *Depto de Formación Básica, Escuela Superior de Cómputo del IPN*

Av. Juan de Dios Bátiz s/n UP Zacatenco, CP 07738, D.F., México, mbarrancoj@ipn.mx

Abstract:

In 1995, Alexis De Vos introduced a thermoeconomical analysis of a Novikov plant model considering the power output per unit of running cost of the plant exploitation as an objective function. In his study he assumed that the running costs of the plant consist of two parts: a capital cost that is proportional to the investment and, therefore, to the size of the plant and a fuel cost that is proportional to the fuel consumption. De Vos showed how the optimal efficiency smoothly increases from the maximum-power point (Curzon-Ahlborn efficiency) corresponding to energy sources where the investment is the preponderant cost up to the Carnot value (Carnot efficiency), that is, for energy sources where the fuel is the predominant cost when the heat fluxes in the Novikov model are given by a linear Newtonian heat transfer law. Later, Barranco-Jiménez and Angulo-Brown also studied a Novikov engine following the thermoeconomical approach used by De Vos, but by means of the so-called ecological optimization criterion. By means of the maximization of an objective function defined by the quotient of the characteristic functions (power output, ecological function) and the total costs considered in the performance of the power plant. In this work, we again study the thermoeconomics of a non-endoreversible simplified thermal power plant model (the so-called Novikov engine). In our study, we also take into account a cost associated to maintenance of the power plant that is proportional to the power output of the plant. In our study we consider different regimes of performance: Maximum Power Output, Maximum Efficient Power and Maximum Ecological Regime. It is shown that under ecological conditions the plant dramatically reduces the amount of heat rejected to the environment, and a loss of profits is translated in an usage of fuels that dramatically reduces the heat rejected towards the environment respect to that of a maximum power regime. Besides, we analyzed the effect on the reduction of power output in terms of an internal irreversibility.

Keywords:

Thermo-economics optimization, irreversible heat engine, Novikov model.

1. Introduction

In his 1995 paper, De Vos [1] made a thermoeconomic analysis of a model of power plant of the Novikov type [2] (see Fig. 1). De Vos analyzed this endoreversible power plant with respect to economical exploitation, and he took the optimal exploitation point lying somewhere between the maximum-power point, that is, Curzon-Ahlborn (CA) efficiency [3] and the maximum-efficiency point (Carnot efficiency), with an optimum efficiency η_{opt} such that,

$$\eta_{MP} < \eta_{opt} < \eta_C, \quad (1)$$

where the subscripts *MP* and *C* mean maximum power and Carnot respectively. De Vos [1] found for the Novikov's model that η_{opt} is given by

$$\eta_{opt}(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2} \tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau + f^2\tau^2}}{2}, \quad (2)$$

where f is the fractional fuel cost, which is defined as the ratio of the cost of the fuel consumption and the running costs of the power plant; $\tau = T_L/T_H$ with T_H and T_L the temperatures of the hot and cold thermal reservoirs respectively. Figure 2 shows how the De Vos optimal efficiency (Equation (2)) smoothly increases from the MP-efficiency, $f=0$, corresponding to energy sources where the investment is the preponderant cost towards the Carnot value for $f=1$, that is, for energy sources where the fuel is the predominant cost [1]. Equation (2) gives the optimal efficiency for a Novikov power plant working at maximum profit in terms of the fractional fuel cost f when the heat fluxes in Figure 1 are given by a linear Newtonian heat transfer law. Recently, Barranco-Jiménez and Angulo-Brown [4,5] also studied a Novikov engine following the thermoeconomical approach used by De Vos, but by means of the so-called modified ecological optimization criterion [6, 7]. The ecological criterion combines the power output (high power output) and the entropy generation rate of the power plant (low entropy production), in terms of the maximization of the following expression [7],

$$E = W - \epsilon T_L \sigma, \quad (3)$$

where W is the plant's power output, ϵ is a parameter depending of the heat transfer law and σ is the total entropy production of the endoreversible power plant model but by means of the so-called modified ecological optimization criterion [7].

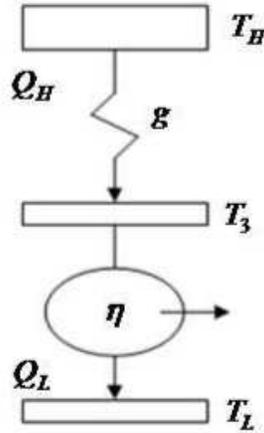


Figure 1. Novikov's model for a thermal power plant.

This criterion also leads to an efficiency η_{me}^N between η_{MP} and η_C and drastically reduces the entropy production of the engine [4, 5]. These authors found that the optimal efficiency under the modified ecological regime, with a Newtonian heat transfer law is given by,

$$\eta_{me}^N(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2} \tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau^{3/2} + f^2\tau^2}}{2}. \quad (4)$$

Figure 2 also shows how η_{me}^N varies smoothly with f (for a given τ) from the maximum ecological function point with $f=0$ ($\eta^E = 1 - \tau^{3/4}$) [7, 8] to the Carnot point $f=1$ in an analogous way to the De Vos-efficiency (see Fig. 2). In this figure it is also shown a curve corresponding to the former ecological function [6], which was defined by $E = W - T_L \sigma$ being W the power output and σ the total entropy production. The profits q in the De Vos approach [1] and

other authors [9-11] are defined as, $q = W/C$, being W the engine's power output and C the running costs [1]. This function q is lesser for the η_{me}^N curve in Fig. 2 than for the η_{mp}^N curve [4]. However, this lost of profits is concomitant with a better efficiency for a given f , and with an important reduction of wasted energy ($\approx 55\%$) to the environment compared with the MP-operation of the plant.

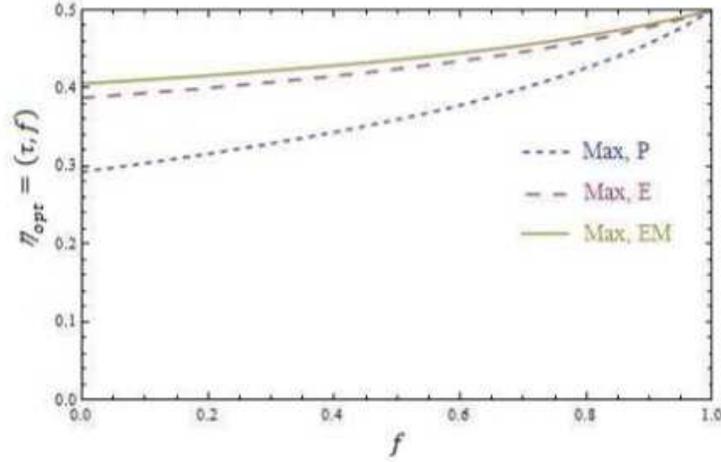


Figure 2. Comparison between optimum efficiencies for both maximum power and maximum ecological regimes (the former E function and the modified EM).

In the next sections, we again study the thermoeconomics of a non-endoreversible simplified thermal power plant model (the so-called Novikov engine). In our study, we also take into account a cost associated to maintenance of the power plant that is proportional to the power output of the plant. Besides, in our study we consider different regimes of performance: Maximum Power Output, Maximum Efficient Power and Maximum Ecological Regime.

2. Objective thermoeconomical functions

Applying the first law of thermodynamics to Fig. 1, the power output is given by,

$$W = Q_H - Q_L, \quad (5)$$

where Q_H and Q_L are the heat transfer supplied by the hot source to the working fluid and the heat transfer from the working fluid to the cold source respectively. On the other hand, the internal efficiency of the engine is given by [5],

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{\tau}{R\theta}, \quad (6)$$

where $\theta = T_3/T_H$ and the parameter $R = \Delta S_1/|\Delta S_2|$ is the non-endoreversibility parameter [12-14] (which characterizes the degree of internal irreversibility that comes from the Clausius inequality) ΔS_1 being the change of the internal entropy along the hot isothermal branch and ΔS_2 the entropy change corresponding to the cold isothermal compression. This parameter in principle is within the

interval $0 < R \leq 1$ ($R = 1$ for the endoreversible limit). If we consider that the heat transfer between the hot source and the working fluid obey a Newton heat transfer, then

$$Q_H = gT_H(1 - \theta). \quad (7)$$

The De Vos thermoeconomical analysis considers a profit function F , which is maximized [1]. This profit function is given by the quotient of the power output W and the total cost involved in the performance of the power plant, that is

$$F = \frac{W}{C}. \quad (8)$$

In his study, De Vos assumed that the running costs of the plant consist of two parts: a capital cost which is proportional to the investment and, therefore, to the size of the plant and, a fuel cost that is proportional to the fuel consumption and, therefore, to the heat input rate. In this work we also take into account a cost associated to maintenance of the power plant that is proportional to the power output of the plant. Assuming that is an appropriate measure for the size of the plant, the running cost of the plant exploitation is now defined as

$$C = aQ_{\max} + bQ_H + cW, \quad (9)$$

where the proportionality constants a , b and c have units of $\$/Joule$, and $Q_{\max} = g(T_H - T_L)$ is the maximum heat that can be extracted from the heat reservoir without supplying work (see Figure 1). Combining equations (7), (8) and (9), the dimensionless objective at maximum power output is given by,

$$aF_{MP} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{R}\frac{1}{\theta}\right)(1 - \theta)}{(1 - \tau) + \beta(1 - \theta) + \nu\left(1 - \frac{\tau}{R}\frac{1}{\theta}\right)(1 - \theta)}. \quad (10)$$

For our thermoeconomic optimization approach, we define two other objective functions in terms of the so-called ecological function ($E \equiv W - T_L \in \sigma$) [6, 7] and the efficient power ($P_E \equiv \eta W$) [15, 16], both divided by the total cost involved in the performance of the plant, that is, $F_{PE} = \frac{\eta W}{C}$, and

$F_{ME} = \frac{W - T_L \in \sigma}{C}$, these dimensionless objectives are given by,

$$aF_{PE} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{R}\frac{1}{\theta}\right)^2(1 - \theta)}{(1 - \tau) + \beta(1 - \theta) + \nu\left(1 - \frac{\tau}{R}\frac{1}{\theta}\right)(1 - \theta)}, \quad (11)$$

and

$$aF_{ME} = \frac{\left[(1+\varepsilon) \left(1 - \frac{\tau}{R\theta} \right) - \varepsilon(1-\tau) \right] (1-\theta)}{(1-\tau) + \beta(1-\theta) + \gamma \left(1 - \frac{\tau}{R\theta} \right) (1-\theta)}, \quad (12)$$

where $\beta = b/a$ and $\gamma = c/a$. In Figure 3 we show the behavior of the three objective functions versus the reduced temperature θ . As it can be seen from Fig. 3 there exists an optimal efficiency value which depends on the parameter R and the optimum value of θ . We can also observe that the benefit diminishes as the internal irreversibilities (parameter R) increase. Besides, for the case of maximum power conditions, the optimum value of θ does not change the maximum of benefits when the maintenance costs (parameter γ) are present in the optimization.

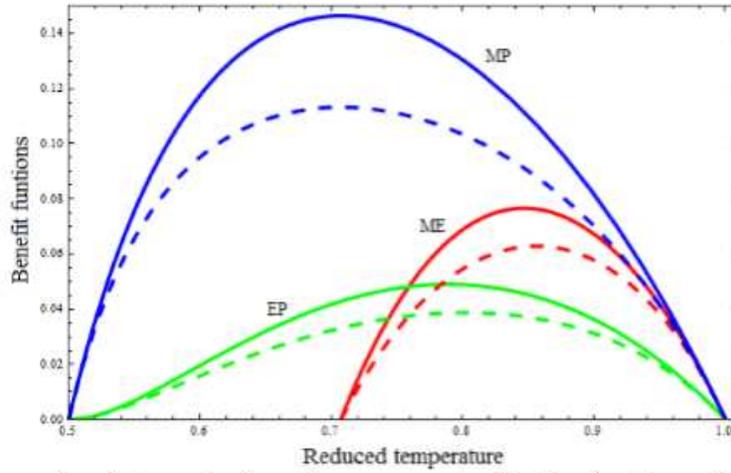


Figure 3. Comparison between the three thermoeconomic objective functions with respect to the reduced temperature taking into account the maintenance costs of the plant ($\gamma \neq 0$).

The optimization of the objective functions given by Eq. (10), (11) and Eq. (12) by $\left. \frac{dF}{d\theta} \right|_{\theta'} = 0$ gives the corresponding optimal efficiencies. Therefore, taking the derivatives of aF_{MP} and aF_{ME} with respect to θ and setting them equal to zero we obtain the optimum working fluid temperature ($\theta = T_3'/T_H$) that maximizes Eqs. (10), (11) and (12), and by using Eq. (6), the optimal efficiencies can be obtained. For the case of maximum power output, the optimal efficiency is given by [4,5],

$$\eta_{MP}(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2} \tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau + f^2\tau^2}}{2}. \quad (13)$$

As it was previously mentioned, the optimum value of θ does not change the maximum of benefits, that is, the optimal efficiency is independent of the parameter γ , which is associated to the maintenance costs of the plant (see Fig. 3). For the case of maximum ecological function conditions we get a new formula for the efficiency,

$$\eta_{ME}(\tau, f, \gamma, R) = 1 - \frac{2\tau(f-1)[R+(R-\gamma)\sqrt{\tau}]}{R[f\tau+2\gamma(1-f)\sqrt{\tau}+f\tau-\sqrt{(\tau+\sqrt{\tau})(4(f-1)((f-1)\gamma-1)R)}]+\Lambda(\tau, f, \gamma, R)}, \quad (14)$$

where $\Lambda(\tau, f, \gamma, R) = [4(R-\gamma) + f(f-4R+4\gamma(2-f))]\sqrt{\tau} + f^2\tau$. From the previous equation, when $\gamma=0$ and $R=1$ (endoreversible case), the optimal efficiency given by Eq. (4) is recovered. In a similar way, we can obtain an expression for the optimal efficiency at maximum efficient power conditions, but this expression is very large, but it can be easily obtained using an algebra package [17]. In fact, if we consider only costs both related to the investment and fuel consumption cost in the model of Fig. 1, we get at maximum efficient power,

$$\eta_{EP}(\tau, f, \gamma=0, R) = 1 - \frac{(1+f)}{4R} \tau - \frac{\sqrt{8(1-f)R\tau + (1+f)^2\tau^2}}{4R}. \quad (15)$$

In this equation, for the case of $f=0$ and $R=1$, we obtain the efficiency $\eta = 1 - \frac{\tau}{4} - \frac{\sqrt{8\tau(1+\tau)}}{4}$, this expression was previously reported by Sahin [12] for the Curzon-Ahlborn model under maximum efficient power conditions.

3. Environmental impact

Applying the first law of thermodynamics to the engine model shown in Fig. 1 we get

$$Q_L = Q_H - W. \quad (16)$$

Where Q_L is the heat rejected to the environment by the power plant. When the power plant works at maximum power regime, we get

$$Q_L(R, \tau, \theta_{MP}^*) = gT_H \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{MP}^*} \right] (1 - \theta_{MP}^*). \quad (17)$$

In a similar way, when the power plant works under maximum ecological function conditions, we get

$$Q_L(R, \tau, \theta_{ME}^*) = gT_H \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{ME}^*} \right] (1 - \theta_{ME}^*). \quad (18)$$

In addition, we can calculate the total entropy production for the Novikov model for both regimes: ecological function and maximum power. Applying the second law of thermodynamics to the engine model of Fig. 1 we get $\sigma = \frac{Q_H - W}{T_L} - \frac{Q_H}{T_H}$, which by using Eqs. (5) and (6), and after some algebraic manipulation, the entropy production is given by

$$\sigma(R, \tau, \theta) = gT_H \left[(1 - \tau) - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta} \right] (1 - \theta). \quad (19)$$

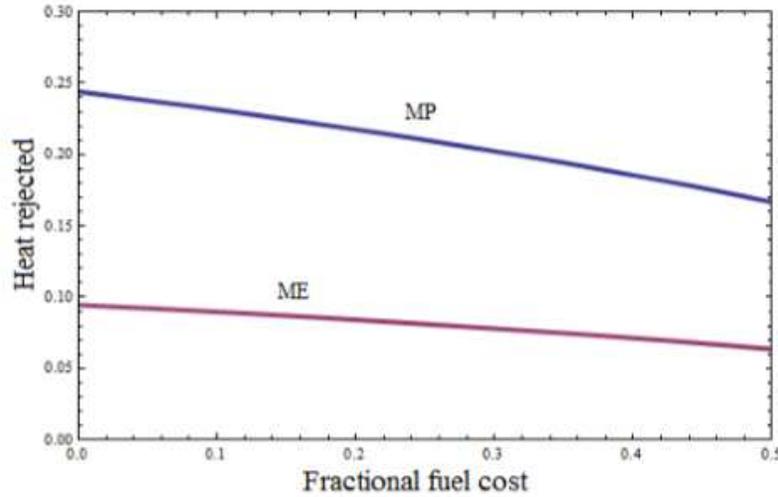


Fig. 4. Ecological rejected heat and maximum power rejected heat for a linear heat transfer law for $\tau=1/2$ for the case of ($\gamma=0$).

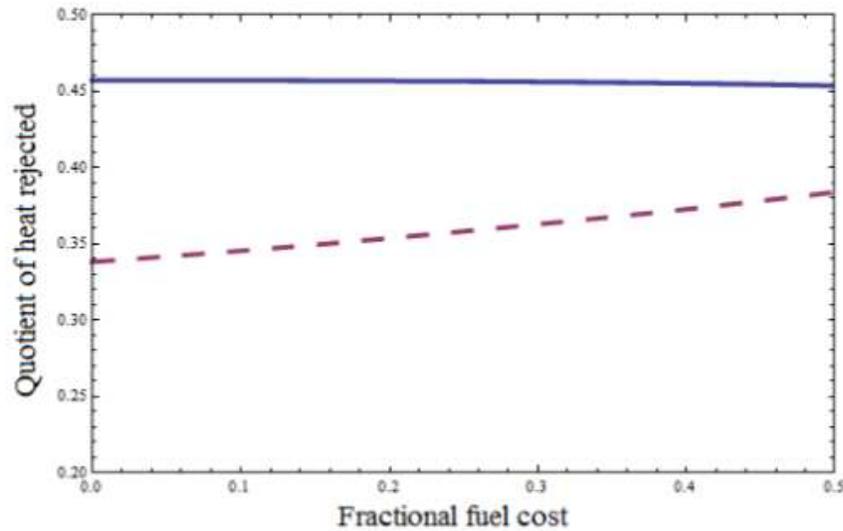


Fig. 5. Quotient between ecological rejected heat and maximum power rejected heat in terms of fractional cost, (blue line for the case of $\gamma=0$, previously reported in [5], and red dashed line for the case of $\gamma \neq 0$)

From Eqs. (17) and (18), we can calculate the heat rejected to the environment for each value of f and under different ways of operation of the power plant. In Fig. 4, it can be seen how the heat

rejected under ecological conditions is lower than the heat rejected under maximum power conditions. In Fig. 5 we show the ratio between the amounts of rejected heat considering the case when $\gamma \neq 0$.

4. Concluding remarks

In this work, we study the thermoeconomics of a non-endoreversible simplified thermal power plant model (the so-called Novikov engine). In our study, we also take into account a cost associated to maintenance of the power plant that is proportional to the power output of the plant. In our study we consider different regimes of performance: Maximum Power Output, Maximum Efficient Power and Maximum Ecological Regime. We found that when the Novikov model maximizes the ecological function, it reduces the rejected heat to the environment up to about 55% of the rejected heat in the case of a power plant model working under maximum power conditions. Besides, we analyze the effect on the reduction of power output in terms of an internal irreversibility.

Acknowledgments

This work was supported in part by CONACYT, COFAA and EDI-IPN-México

References

- [1] A. De Vos. Endoreversible thermoeconomics. *Energy. Convers. Management*. 1995;36:(1)1-5.
- [2] I. I. Novikov, the efficiency of atomic power stations (a review). *Atomimaya Energiya*, Vol. 3 1957; 409; in English translation; *I. Nuclear Energy*, Vol. 7, 125; 1958.
- [3] Curzon F. and Ahlborn B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *Am. J. Phys.* 1975;43:22-24.
- [4] M. A. Barranco-Jiménez and F. Angulo-Brown, "Thermoeconomic optimization of a Novikov power plant model under maximum ecological conditions" *J. of the Energy Inst.* 80:2(1-4):96-104, 2007.
- [5] M. A. Barranco-Jiménez "Finite-time thermoeconomic optimization of a non endoreversible heat engine", *Rev. Mex. Fis.* 55 (3) 211-220 (2009).
- [6] Angulo-Brown F; An ecological optimization criterion for finite-time heat engines. *J. Appl. Phys.* 1991; 69:7465-7469.
- [7] F. Angulo-Brown and L.A. Arias-Hernández, *Journal of Applied Physics* 89 (2001): 1520-3.
- [8] Velasco S, Roco J. M. M. Medina A. White J. A. and Calvo-Hernández A. Optimization of heat engines including the saving of natural resources and the reduction of thermal pollution. *J. Phys. D.* 2000; 33:355-359.
- [9] Qin, X.; Chen, L.; Sun, F.; Wu, C. Thermoeconomic optimization of an endoreversible four-heat-reservoir absorption-refrigerator. *Appl. Energy* 2005, 81, 420-433.
- [10] Chen, L.; Sun, F.; Wu, C. Endoreversible thermoeconomics for heat engines. *Appl. Energy* 2005, 81, 388-396.
- [11] Sahin, B.; Kodal, A. Performance analysis of an endoreversible heat engine based on a new thermoeconomic optimization criterion. *Energy Convers. Manage.* 2001, 3, 1085-1093.
- [12] J. Chen. The maximum power output and maximum efficiency of an irreversible Carnot heat engine. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1994;27:1144-1149.
- [13] Ozcaynak, S.; Goktan, S.; Yavuz, H. Finite-time thermodynamics analysis of a radiative heat engine with internal irreversibility. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1994;27:1139-1143.
- [14] Wu, C., Chen, L., Chen, J., eds., *Recent Advances in Finite-Time Thermodynamics*, Nova Science, New York, 1999.
- [15] Yilmaz T; A new performance criterion for heat engine: efficient power. *J. Energy Inst.* 2006; 79(1):38-41.



MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA

Temixco, Mor.
1-5 de septiembre de 2014

Trabajo en extenso



OPTIMIZACIÓN TERMO-ECONÓMICA DE UNA MÁQUINA TÉRMICA TIPO NOVIKOV BAJO DISTINTOS CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN

J. C. Pacheco-Páez^a, F. Angulo-Brown^a, M. A. Barranco-Jiménez^b

^a Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, Edif. 9, 2º. Piso, UP Zacatenco CP 07738, D.F., México, jcpacheco@esfm.ipn.mx, angulo@esfm.ipn.mx

^b Departamento de Formación Básica, Escuela Superior de Cómputo del IPN Av. Juan de Dios Bátiz s/n UP Zacatenco, CP 07738, D.F., México, mbarrancoj@ipn.mx

Resumen

En 1995, Alexis De Vos propuso un análisis termo-económico del modelo de planta de potencia tipo Novikov maximizando una función de beneficios definida en términos de la razón de la potencia de salida de la planta y los costos asociados con el funcionamiento de la misma, (costos en el consumo de combustible y costos asociados a la inversión). De Vos mostró que la eficiencia óptima variaba entre el punto óptimo de máxima potencia (eficiencia de Curzon-Ahlborn) correspondiente a fuentes de energía donde la inversión es el costo preponderante, hasta el valor de Carnot (eficiencia de Carnot), es decir para fuentes de energía donde el costo en el combustible es el costo predominante. Posteriormente, Barranco-Jiménez y Angulo Brown, también estudiaron la termo-economía del modelo de Novikov pero en términos de la maximización de una función de beneficios definida como la razón de la llamada función ecológica y los costos totales considerados previamente por De Vos. En este trabajo, estudiamos nuevamente la termo-economía del modelo de planta de potencia tipo Novikov considerando los regímenes de operación de máxima potencia, máxima función ecológica y el llamado régimen de operación de potencia eficiente definido como el producto de la potencia de salida y la eficiencia del modelo. En nuestro estudio, consideramos la ley de transferencia de calor de enfriamiento de Newton y también tomamos en cuenta un costo asociado al mantenimiento de la planta de potencia que es proporcional a la potencia de salida de la misma. En este trabajo mostramos bajo condiciones de operación de máxima función ecológica que la pérdida en beneficios se ve compensada por un mejor uso en el combustible de modo que la planta de potencia reduce hasta en un 55 % la cantidad de energía disipada al medio ambiente con respecto a la cantidad de energía bajo los regímenes de operación de máxima potencia y máxima potencia eficiente.

Palabras clave:

Optimización termo-económica, máquina térmica irreversible, modelo de Novikov.

Introducción

En su artículo de 1995, De Vos [1] realizó un análisis termo-económico de un modelo de planta de potencia tipo Novikov [2] (ver Figura 1). De Vos mostró que la eficiencia óptima bajo un régimen se encuentra entre el punto de máxima potencia, que es, la eficiencia de Curzon-Ahlborn (CA) [3] y el punto de máxima eficiencia (eficiencia de Carnot), con una eficiencia óptima (η_{opt}) tal que:

$$\eta_{MP} < \eta_{opt} < \eta_C, \quad (1)$$

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

Donde los subíndices *MP* Y *C* significan máxima potencia y Carnot respectivamente. De Vos encontró para el modelo de Novikov que η_{opt} esta dada por:

$$\eta_{opt}(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2} \tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau + f^2\tau^2}}{2}, \quad (2)$$

donde f es el costo de combustible fraccional (Tabla 1), el cual se define como la relación entre el costo del consumo del combustible y los costos de funcionamiento de la planta de potencia; $\tau = T_L/T_H$ con T_H y T_L las temperaturas de los almacenes térmicos caliente y frío respectivamente. La ecuación (2) proporciona la eficiencia óptima para un modelo de planta de potencia tipo Novikov trabajando bajo un régimen de operación a máxima potencia en términos del costo de combustible fraccional f cuando los flujos de calor en la Figura 1 están dados por una ley lineal de transferencia tipo Newton.

Table 1. Costo fraccional de combustible [1]

Combustible	f (%)
Renovable	0
Uranio	25
Carbón	35
Gas Natural	50

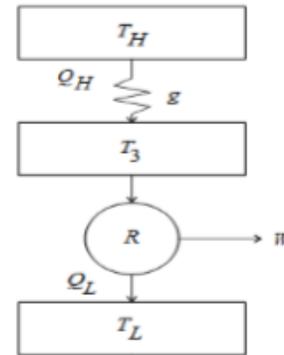


Figura 1. Modelo de Novikov para una planta de potencia.

Recientemente, Barranco-Jiménez y Angulo-Brown [4,5] también estudiaron una máquina Novikov siguiendo el enfoque usado por De Vos, pero en términos de la maximización de la llamada función ecológica modificada [6,7]. El criterio ecológico combina la potencia de salida y baja producción de entropía del modelo de planta de potencia (Corolario 75-25), en términos de la maximización de la siguiente expresión [7]:

$$E = W - \epsilon T_L \sigma, \quad (3)$$

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

donde W es la potencia de salida de la planta, ϵ es un parámetro dependiente de la ley de transferencia de calor y σ la producción de entropía total del modelo de planta de potencia endorreversible [7].

Este criterio conduce a una eficiencia η_{ME} entre η_{MP} y η_C que drásticamente reduce la producción de entropía de la planta. Estos autores encontraron que la eficiencia óptima bajo el régimen de la función ecológica modificada con una ley de transferencia de calor Newtoniana está dada por:

$$\eta_{ME}(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2} \tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau^{3/2} + f^2\tau^2}}{2}, \quad (4)$$

La ecuación anterior, además satisface la siguiente desigualdad $\eta_{MP} < \eta_{opt} < \eta_{ME} < \eta_C$. Así mismo, la expresión anterior provoca una reducción de beneficios que se ve reflejado por un mejor uso en el combustible que provoca una reducción en el impacto ambiental de la planta de potencia [5,8]. En las siguientes secciones, de nuevo estudiamos la termo-economía de un modelo de planta de potencia térmica no-endorreversible (la llamada máquina de Novikov). También en el modelo tomamos en cuenta un costo asociado al mantenimiento de la planta que es proporcional a la potencia de salida de la planta. Además, en nuestro estudio consideramos diferentes regímenes de operación: Máxima Potencia de Salida [3, 9], Máxima Potencia Eficiente [9, 10] y el régimen de Máxima Función Ecológica [6].

2. Funciones objetivo Termo-económicas

Aplicando la primera Ley de la termodinámica a la Figura 1, la potencia de salida está dada por:

$$W = Q_H - Q_L, \quad (5)$$

Donde Q_H y Q_L son el calor de transferencia suministrado por la fuente caliente al fluido de trabajo y el calor transferido desde el fluido de trabajo a la fuente fría respectivamente. Por otra parte, la eficiencia interna de la máquina está dada por [5]:

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{\tau}{R\theta}, \quad (6)$$

donde $\theta = T_3/T_H$ y $R = \Delta S_1/|\Delta S_2|$ es el parámetro no-endorreversible [12-14] (la cual caracteriza el grado de irreversibilidad interna y proviene de la desigualdad de Clausius), siendo ΔS_1 el cambio de la entropía interna a lo largo de la rama isotérmica y ΔS_2 el cambio de entropía correspondiente a la compresión isotérmica fría. Este parámetro en principio está entre el intervalo $0 < R \leq 1$ ($R=1$ para el límite endorreversible). Si consideramos que la transferencia de calor entre la fuente caliente y la sustancia de trabajo obedece la ley de transferencia de Newton, entonces:

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
 Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

$$Q_H = gT_H(1-\theta), \quad (7)$$

En el análisis termo-económico de De Vos se consideró una función de beneficios F , la cual se maximiza [1]. Esta función de beneficio está dada por el cociente de la potencia de salida W y el costo total involucrado en el desempeño de la planta de potencia [1, 11]:

$$F = \frac{W}{C}, \quad (7)$$

En su estudio, De Vos asumió que los costos de funcionamiento de la planta consistían de dos partes: un costo de capital el cual es proporcional a la inversión, y por lo tanto, al tamaño de la planta y, un costo en el combustible que es proporcional al consumo del mismo y, por lo tanto, a la tasa de salida del calor. En este trabajo además se toma en cuenta un costo asociado al mantenimiento de la planta que es proporcional a la potencia de salida de la planta. Asumiendo que Q_{\max} es una medida apropiada para el tamaño de la planta, los costos de funcionamiento de la planta se definen ahora como:

$$C = aQ_{\max} + bQ_H + cW, \quad (9)$$

donde las constantes de proporcionalidad a , b y c tienen unidades de $\$/Joule$, y $Q_{\max} = g(T_H - T_L)$ es el calor máximo que puede ser extraído del reservorio térmico sin proporcionar trabajo útil (ver Figura 1). Combinando las ecuaciones (6), (7), (8) y (9), la función objetivo adimensional a máxima potencia está dada por:

$$aF_{MP} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{R\theta}\right)(1-\theta)}{(1-\tau) + \beta(1-\theta) + \gamma\left(1 - \frac{\tau}{R\theta}\right)(1-\theta)}, \quad (10)$$

Para nuestro enfoque de optimización termo-económico, definimos otras dos funciones objetivo en términos de la llamada función ecológica modificada ($E = W - T_L \in \sigma$) [6, 7] y la potencia eficiente dada por la ecuación ($P_E = \eta W$) [9, 10], ambas divididas por el costo total involucrado en el desempeño de la planta, que es, $F_{PE} = \frac{\eta W}{C}$ y $F_{ME} = \frac{W - T_L \in \sigma}{C}$, estas funciones objetivo adimensionales son [15]:

$$aF_{PE} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{R\theta}\right)^2(1-\theta)}{(1-\tau) + \beta(1-\theta) + \gamma\left(1 - \frac{\tau}{R\theta}\right)(1-\theta)}, \quad (11)$$

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
 Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

y

$$aF_{ME} = \frac{\left[(1+\varepsilon) \left(1 - \frac{\tau}{R\theta} \right) - \varepsilon(1-\tau) \right] (1-\theta)}{(1-\tau) + \beta(1-\theta) + \gamma \left(1 - \frac{\tau}{R\theta} \right) (1-\theta)}, \quad (12)$$

donde $\beta = b/a$ y $\gamma = c/a$. En la figura 3 se muestra el comportamiento de las tres funciones objetivo en función de la temperatura reducida θ . Como se puede observar en la Figura 2 existe un valor para la eficiencia óptima el cual depende del parámetro R y el valor óptimo de θ . También podemos observar que los beneficios disminuyen conforme las irreversibilidades internas (parámetro R) aumentan. Por otra parte, para el caso de máxima potencia, el valor óptimo de θ no cambia el máximo de beneficios cuando el costo de mantenimiento (parámetro γ) está presente en la optimización.

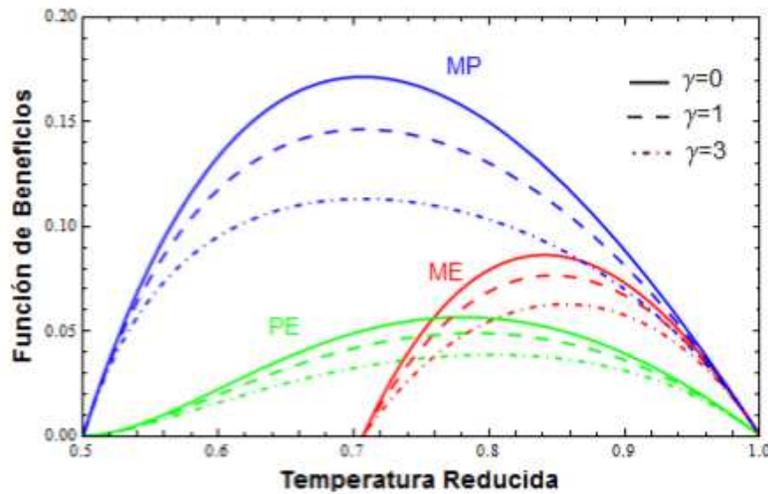


Figura 2. Comparación entre las tres funciones objetivo termo-económicas con respecto a la temperatura reducida tomando en cuenta el costo de mantenimiento de la planta ($\gamma \neq 0$).

La optimización de las funciones objetivo dadas por las ecuaciones (10), (11) y (12) mediante $\left. \frac{dF}{d\theta} \right|_{\theta^*} = 0$ proporciona las eficiencias óptimas correspondientes. Por lo tanto, tomando las derivadas de aF_{MP} y aF_{ME} con respecto a θ e igualando a cero obtenemos la temperatura óptima del fluido de trabajo ($\theta^* = T_3^*/T_H$) que maximiza las ecuaciones (10), (11) y (12), y haciendo uso de la ecuación (6), se obtienen las eficiencias óptimas. Para el caso de máxima potencia de salida, la eficiencia óptima está dada por [4,5]:

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
 Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

$$\eta_{MP}(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2} \tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau + f^2\tau^2}}{2}, \quad (13)$$

Como se menciono anteriormente el valor optimo de θ no cambia el máximo de beneficios, es decir, la eficiencia óptima es independiente del parámetro γ , el cuál está asociado al costo en el mantenimiento en el modelo de la planta de potencia (ver Figura 2). Para el caso de régimen de máxima función ecológica modificada obtenemos una nueva expresión para la eficiencia:

$$\eta_{ME}(\tau, f, \gamma, R) = 1 - \frac{2\tau(f-1)[R+(R-\gamma)\sqrt{\tau}]}{R[f\tau + 2\gamma(1-f)\sqrt{\tau} + f\tau - \sqrt{(\tau + \sqrt{\tau})(4(f-1)((f-1)\gamma - 1)R)) + \Lambda(\tau, f, \gamma, R)}], \quad (14)$$

donde $\Lambda(\tau, f, \gamma, R) = [4(R-\gamma) + f(f-4R+4\gamma(2-f))]\sqrt{\tau} + f^2\tau$. De la ecuación anterior, cuando $\gamma = 0$ y $R = 1$ (caso endorreversible), la eficiencia optima dada por la ecuación (4) se recupera. De una forma similar, podemos encontrar la expresión para la eficiencia óptima bajo condiciones de operación de máxima potencia eficiente, pero la expresión es muy larga, pero se puede obtener usando un paquete de manipulación algebraica [16]. De hecho, si solo consideramos los costos relacionados a la inversión y el costo de consumo de combustible en el modelo de la figura 1, obtenemos la potencia eficiente:

$$\eta_{PE}(\tau, f, \gamma = 0, R) = 1 - \frac{(1+f)}{4R} \tau - \frac{\sqrt{8(1-f)R\tau + (1+f)^2\tau^2}}{4R}, \quad (15)$$

En esta ecuación, para el caso de $f = 0$ y $R = 1$, obtenemos la eficiencia $\eta = 1 - \frac{\tau}{4} - \frac{\sqrt{8\tau(1+\tau)}}{4}$, esta expresión fue previamente reportada por Yilmaz [12] para el modelo de Curzon-Ahlborn bajo condiciones de máxima potencia eficiente. En la Figura 3, para el caso $\gamma = 0$, mostramos las eficiencias óptimas en donde se muestra que se satisface la siguiente desigualdad $\eta_{CA} < \eta_{MP} < \eta_{PE} < \eta_{ME} < \eta_C$ para todos los valores del costo fraccional de combustible.

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

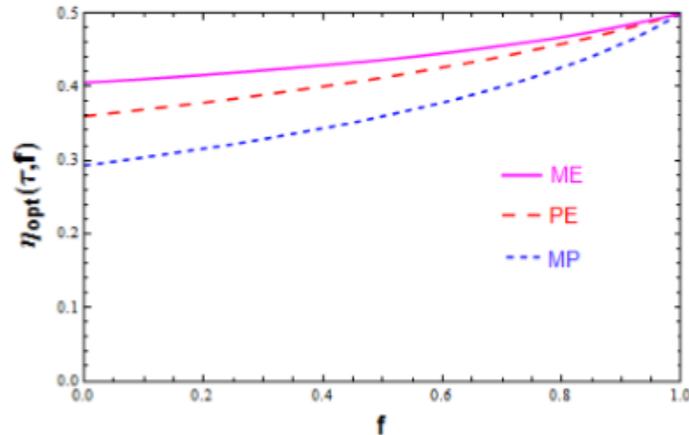


Figura 3. Eficiencias óptimas en función del costo fraccional de combustible a máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica ($\gamma = 0$).

3. Impacto Ambiental

Aplicando la primera ley de la termodinámica al modelo de máquina térmica mostrado en la Figura 1 obtenemos $Q_L = Q_H - W$, donde Q_L es el calor expulsado al medio ambiente por la planta de potencia. Cuando la planta de potencia trabaja bajo los regímenes de operación de máxima potencia y máxima potencia eficiente, tenemos respectivamente:

$$Q_L(R, \tau, \theta_{MP}^*) = gT_H \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{MP}^*} \right] (1 - \theta_{MP}^*), \quad (16)$$

$$Q_L(R, \tau, \theta_{PE}^*) = gT_H \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{PE}^*} \right] (1 - \theta_{PE}^*), \quad (17)$$

de una forma similar cuando la planta de potencia trabaja bajo el régimen de máxima función ecológica modificada, tenemos:

$$Q_L(R, \tau, \theta_{ME}^*) = gT_H \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{ME}^*} \right] (1 - \theta_{ME}^*). \quad (18)$$

De las ecuaciones (16), (17) y (18), podemos calcular el calor expulsado al medio ambiente para cada valor de f bajo diferentes modos de operación de la planta de potencia. En la Figura 4, se puede observar como el calor expulsado bajo condiciones ecológicas es menor que el calor expulsado bajo condiciones de máxima potencia. Además, podemos calcular la producción de entropía total para el modelo Novikov para los tres regímenes de operación mencionados.

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
 Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

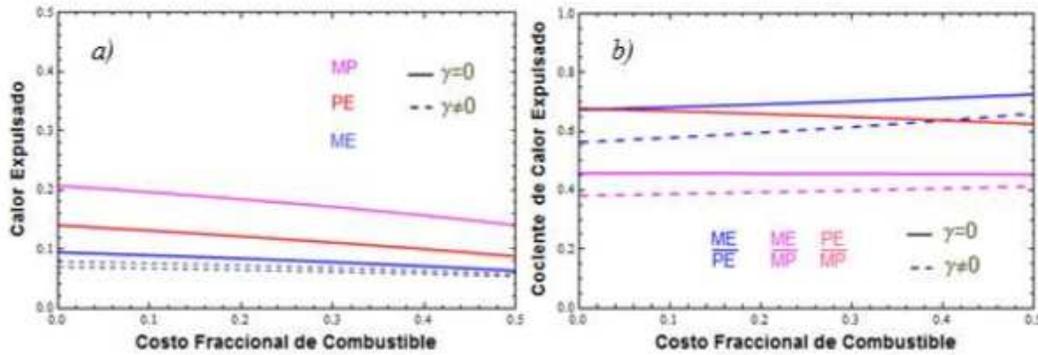


Figura 4. a) Calor ecológico expulsado y calor a máxima potencia expulsado para una ley lineal de transferencia de calor para $\tau=1/2$, y b) Cociente del calor ecológico expulsado y el calor a máxima potencia (y máxima potencia eficiente) expulsado en términos del costo fraccional, (línea azul para el caso $\gamma = 0$, previamente reportado en [5, 8]).

Aplicando la segunda ley de la termodinámica al modelo de la Figura 1, obtenemos $\sigma = \frac{Q_H - W}{T_L} - \frac{Q_H}{T_H}$, usando también las ecuaciones (5), (6) y (7) y después de algunas manipulaciones algebraicas, la producción de entropía bajo los regímenes de operación de máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica se puede calcular de la forma:

$$\sigma(R, \tau, \theta_{MP}^*) = gT_H \left[(1 - \tau) - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{MP}^*} \right] (1 - \theta_{MP}^*), \quad (19)$$

$$\sigma(R, \tau, \theta_{PE}^*) = gT_H \left[(1 - \tau) - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{PE}^*} \right] (1 - \theta_{PE}^*), \quad (20)$$

$$\sigma(R, \tau, \theta_{ME}^*) = gT_H \left[(1 - \tau) - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta_{ME}^*} \right] (1 - \theta_{ME}^*), \quad (21)$$

Como podemos observar en la Figura 5, el régimen de operación de máxima potencia eficiente, es más "entrópico" con respecto al régimen de operación de máxima función ecológica, aun cuando la potencia de salida es mayor que la que se obtiene bajo un régimen de operación de máxima función ecológica. Así también se mostró que la eficiencia óptima bajo un régimen de operación ecológico, es mayor con respecto a los regímenes de operación de máxima potencia y máxima potencia eficiente para todas las fuentes de energía consideradas en el modelo, como se observa en la Figura 2. Estas propiedades también fueron reportadas recientemente [16, 17].

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

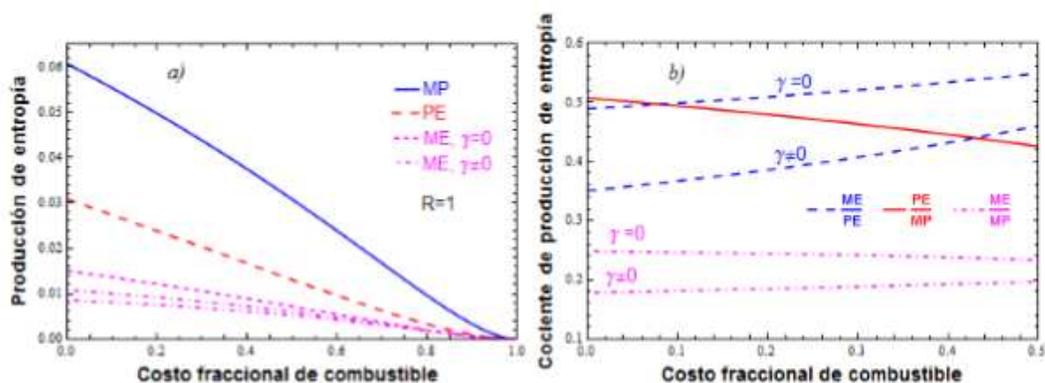


Figura 5. a) Producción de entropía para el modelo de Novikov para una ley lineal de transferencia de calor para $\tau=1/2$ para el caso, b) Cociente de la producción de entropía a máxima función ecológica y máxima potencia (y máxima potencia eficiente), también se muestra el caso $\gamma = 0$, previamente reportado en [5,8].

4. Conclusiones

En este trabajo, estudiamos la termo-economía de una planta de potencia térmica simplificada no-endorreversible (la llamada máquina de Novikov). En nuestro estudio, además tomamos en cuenta un costo asociado al mantenimiento de la planta de potencia que es proporcional a la potencia de salida de la planta. Consideramos diferentes regímenes de operación: Máxima Potencia de Salida, Máxima Potencia Eficiente y Máxima Función Ecológica Modificada. Encontramos que cuando la planta de Novikov trabaja bajo el régimen de Máxima Función Ecológica Modificada, esta reduce el calor expulsado al medio ambiente hasta un 55% del calor expulsado en el caso de que la planta trabaje bajo condiciones de máxima potencia en términos de una irreversibilidad interna.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado en parte por el CONACYT, COFAA y EDI-IPN-México

Referencias

- [1] A. De Vos. Endoreversible thermoeconomics. *Energy. Convers. Magnagement.* 1995;36:(1)1-5.
- [2] I. I. Novikov, the efficiency of atomic power stations (a review). *Atomimaya Energiya*, Vol. 3 1957; 409; in English translation; *I. Nuclear Energy*, Vol. 7, 125; 1958.
- [3] Curzon F. and Ahlborn B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *Am. J. Phys.* 1975; 43: 22-24.

MEMORIAS DEL XXIX CONGRESO NACIONAL DE TERMODINÁMICA
Temixco, Mor., 1-5 de septiembre de 2014

- [4] M. A. Barranco-Jiménez and F. Angulo-Brown, "Thermoeconomic optimization of a Novikov power plant model under maximum ecological conditions" *J. of the Energy Inst.* 80:2(1-4):96-104, 2007.
- [5] M. A. Barranco-Jiménez, "Finite-time thermoeconomic optimization of a non endoreversible heat engine", *Rev. Mex. Fis.* 55 (3) 211-220 (2009).
- [6] Angulo-Brown F; An ecological optimization criterion for finite-time heat engines. *J. Appl. Phys.* 1991; 69: 7465-7469.
- [7] F. Angulo-Brown and L.A. Arias-Hernández, "Replay to Comment on A general property of endoreversible thermal engines". *Journal of Applied Physics* 89 (2001): 1520-1.
- [8] Velasco S, Roco J. M. M. Medina A. White J. A. and Calvo-Hernández A. Optimization of heat engines including the saving of natural resources and the reduction of thermal pollution. *J. Phys. D.* 2000; 33: 355-359.
- [9] Yilmaz T; A new performance criterion for heat engine: efficient power. *J. Energy Inst.* 2006; 79(1):38-41.
- [10] L. A. Arias-Hernández, M. A. Barranco-Jiménez and F. Angulo-Brown, "Comparison between two ecological-type modes of performance for a simple energy converter", *Journal of the Energy Institute*, 82 (3) 193-197 (2009).
- [11] Sahin, B.; Kodal, A. Performance analysis of an endoreversible heat engine based on a new thermoeconomic optimization criterion. *Energy Convers. Manage.* 2001, 3, 1085–1093.
- [12] J. Chen. The maximum power output and maximum efficiency of an irreversible Carnot heat engine. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1994;27:1144–1149.
- [13] Ozcaynak, S.; Goktan, S.; Yavuz, H. Finite-time thermodynamics analysis of a radiative heat engine with internal irreversibility. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1994; 27: 1139–1143.
- [14] Wu, C., Chen, L., Chen, J., eds., *Recent Advances in Finite-Time Thermodynamics*, Nova Science, New York, 1999.
- [15] J. C. Pacheco-Páez, F. Angulo-Brown and M. A. Barranco-Jiménez "Thermoeconomical optimization of an irreversible heat engine, the Novikov plant model". *Proceeding of 27th International Conference on Efficiency, Cost, Optimization, Simulation and Environmental impact of energy systems (ECOS2014)*, Turku Finland, June 15-19, 2014.
- [16] S. Wolfram, "Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer" Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

Thermoeconomical analysis of a non-enderversible Novikov power plant model under different regimes of performance

J C Pacheco-Páez¹, F Angulo-Brown¹ and M A Barranco-Jiménez²

¹Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, Edif. 9, 2° Piso, UP Zacatenco CP 07738, D.F., México.

²Departamento de Formación Básica, Escuela Superior de Cómputo del IPN, Av. Juan de Dios Bátiz s/n. UP Zacatenco, CP 07738, D. F., México.

E-mail: jcpacheco@esfm.ipn.mx

Abstract. In this work, we study the thermoeconomics of a non-enderversible simplified thermal power plant model, the so-called Novikov engine. Our study is made by means of the maximization of objective functions defined by the quotient of the characteristic functions (power output, efficient power and ecological function) and the total costs considered in the performance of the power plant. In our study three different costs are considered: a capital cost that is proportional to the investment and, therefore, to the size of the plant, a fuel cost that is proportional to the fuel consumption and a cost associated to maintenance of the power plant; that is, proportional to the power output of the plant. It is shown that under ecological conditions the plant dramatically reduces the amount of heat rejected to the environment, and a loss of profits is translated in an usage of fuels that dramatically reduces the heat rejected towards the environment in comparison to that obtained by means of maximum power regime.

1. Introduction

In 1995 [1], Alexis De Vos introduced a thermoeconomical analysis of an irreversible heat engine model, the so-called Novikov plant model (see figure 1) [2], in terms of the maximization of an objective function defined by the ratio of the power output and the running costs of the plant exploitation. De Vos [1] assumed that the running costs of the plant consist of two parts: a capital cost that is proportional to the investment and, therefore, to the size of the plant and a fuel cost that is proportional to the fuel consumption. De Vos [1] showed how the optimal efficiency (in the economical sense) smoothly increases from the maximum-power point (Curzon-Ahlborn efficiency [3]) corresponding to energy sources where the investment is the preponderant cost up to the Carnot value (Carnot efficiency), that is, for energy sources where the fuel is the predominant cost when the heat fluxes in the Novikov model are given by a linear Newtonian heat transfer law, that is, $\eta_{MP} < \eta_{opt} < \eta_C$, where the subscripts *MP*, *opt* and *C* mean maximum power, optimal efficiency and Carnot respectively. De Vos [1] found for the Novikov's model that η_{opt} is given by:



Content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/). Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.

Published under licence by IOP Publishing Ltd

1

$$\eta_{opt}(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2} \tau - \frac{\sqrt{4(1-f)\tau + f^2\tau^2}}{2}, \quad (1)$$

where f is the fractional fuel cost (see table 1), which is defined as the ratio of the cost of the fuel consumption and the running costs of the power plant; $\tau = T_L/T_H$ with T_H and T_L the temperatures of the hot and cold thermal reservoirs respectively (see figure 1). Later, Barranco-Jiménez and Angulo-Brown [4, 5] also studied the Novikov engine model following the thermoeconomical approach used by De Vos, but by means of the so-called ecological optimization criterion. The ecological optimization criterion consist in maximizing the well known ecological function [6, 7] defined by $E = W - \epsilon T_L \sigma$, where W is the plant's power output, ϵ is a parameter depending of the heat transfer law [7] and σ is the total entropy production of the endoreversible power plant model. Barranco-Jiménez and Angulo-Brown [4, 5] also obtained a thermoeconomical efficiency η_{opt}^E between η_{MP} and η_C that drastically reduces the entropy production of the engine.

Besides the optimal efficiency satisfy the following inequality $\eta_{MP} < \eta_{opt} < \eta_{opt}^E < \eta_C$.

Table 1. Relative fuel cost (in percent) for various energy sources

Fuel	f (%) [1]
Renewable	0
Uranium	25
Coal	35
Gas	50

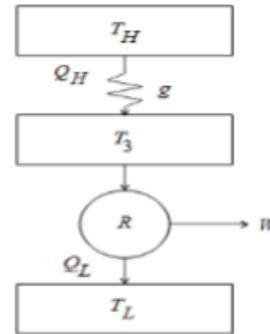


Figure 1. Novikov's model for a thermal power plant.

In this work, we extend the thermoeconomical analysis following the De Vos's approach but maximizing three benefit functions defined by the ratio of the characteristic functions (Power Output [1], Efficient Power [8, 9] and Ecological Function [6]) and the total costs involved in the performance of the plants, that is: $F_{MP} = \frac{W}{C_t}$, $F_{EP} = \frac{\eta W}{C_t}$ and $F_{ME} = \frac{W - \epsilon T_L \sigma}{C_t}$. Besides in the maximization of the benefit functions, the total costs C_t are taken as $C_t = aQ_{max} + bQ_H + cW$, where the proportionality constants a , b and c have units of $\$/Joule$ ($\$/currency$), the last term, is a cost associated to maintenance of the power plant that is proportional to the power output of the plant [10], and $Q_{max} = g(T_1 - T_2)$ is the maximum heat that can be extracted from the heat reservoir without supplying work [1].

2. Thermoeconomical optimization under different regimes of performance for a non-endoreversible Novikov plant model

Applying the first law of thermodynamics to Fig. 1, the power output is given by,

$$W = Q_H - Q_L, \quad (2)$$

where Q_H and Q_L are the heat transfer supplied by the hot source to working fluid and the heat transfer from the working fluid to cold source respectively. On the other hand, the internal efficiency of the engine is given by [5],

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta}, \quad (3)$$

where $\theta = T_3/T_1$ and the parameter $R = \Delta S_1/|\Delta S_2|$ is the non-endoreversibility parameter [11-13] (which characterizes the degree of internal irreversibility that comes from the Clausius inequality) ΔS_1 being the change of the internal entropy along the hot isothermal branch and ΔS_2 the entropy change corresponding to the cold isothermal compression. This parameter in principle is within the interval $0 < R \leq 1$ ($R = 1$ for the endoreversible limit, see [11]). If we consider that the heat transfer between the hot source and the working fluid obey a Newton heat transfer law, and applying the first and second laws of thermodynamics we can write the benefit functions defined in the previous section as [10],

$$aF_{MP} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta}\right)(1-\theta)}{(1-\tau) + \beta(1-\theta) + \gamma \left(1 - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta}\right)(1-\theta)}, \quad (4)$$

$$aF_{EP} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta}\right)^2 (1-\theta)}{(1-\tau) + \beta(1-\theta) + \gamma \left(1 - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta}\right)(1-\theta)}, \quad (5)$$

$$aF_{ME} = \frac{\left[(1+\varepsilon) \left(1 - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta}\right) - \varepsilon(1-\tau)\right](1-\theta)}{(1-\tau) + \beta(1-\theta) + \gamma \left(1 - \frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta}\right)(1-\theta)}, \quad (6)$$

where $\beta = b/a$ and $\gamma = c/a$. Fig. 2 shows that exists an optimal efficiency value which depends on the parameter R and the optimum value of θ . We can also observe that the benefit diminishes as the internal irreversibilities (parameter R) increase. Besides, for the case of maximum power conditions, the optimum value of θ does not change the maximum of benefits when the maintenance costs (parameter γ , dashed lines) are present in the optimization. Therefore, taking the derivatives of aF_{MP} , aF_{PE} and aF_{ME} with respect to θ and setting them equal to zero we obtain the optimum working fluid temperature ($\theta^* = T_3^*/T_1$) for each value that maximize equations (4), (5) and (6) respectively, and by using equation (3), the optimal efficiencies are obtained at maximum power output, efficient power and ecological function conditions respectively:

$$\eta_{MP}(\tau, f, R) = 1 - \frac{f}{2R} \tau - \frac{\sqrt{4(1-f)R\tau + f^2\tau^2}}{2R}, \quad (7)$$

$$\eta_{EP}(\tau, f, \gamma = 0, R) = 1 - \frac{(1+f)}{4R} \tau - \frac{\sqrt{8(1-f)R\tau + (1+f)^2\tau^2}}{4R}, \quad (8)$$

$$\eta_{ME}(\tau, f, \gamma, R) = 1 - \frac{2\tau(f-1)[R + (R-\gamma)\sqrt{\tau}]}{R[f\tau + 2\gamma(1-f)\sqrt{\tau} + f\tau - \sqrt{(\tau + \sqrt{\tau})(4(f-1)((f-1)\gamma - 1)R))} + \Lambda(\tau, f, \gamma, R)]} \quad (9)$$

where $\Lambda(\tau, f, \gamma, R) = [4(R-\gamma) + f(f-4R+4\gamma(2-f))]\sqrt{\tau} + f^2\tau$. In figure 3 we show the behavior of the optimal efficiencies (equations (7), (8) and (9)). Figure 3 also shows how the optimal efficiencies smoothly vary from the value $f = 0$, corresponding to energy sources where the investment is the preponderant cost up to the Carnot value for $f = 1$, that is, for energy sources where the fuel is the predominant cost, in an analogous way to De Vos-efficiency [1].

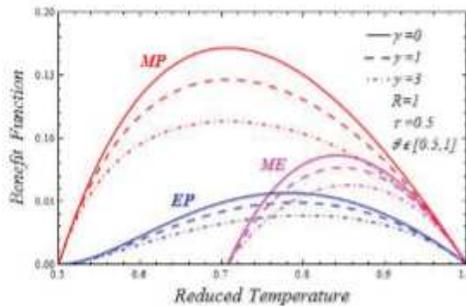


Figure 2. Comparison between the three thermo-economic objective functions with respect to the reduced temperature θ .

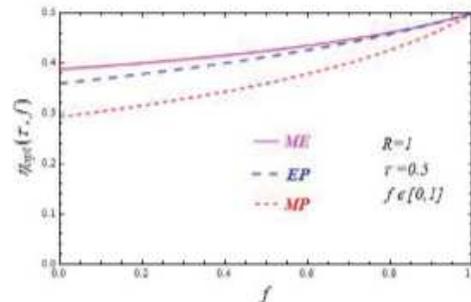


Figure 3. Optimal efficiencies for ecological regime, efficient power and maximum power output conditions.

3. Environmental impact

Applying the first and second laws of thermodynamics to the engine model shown in figure 1, we obtain the expression for the heat rejected (Q_L) to the environment by the power plant given by [10],

$$Q_L(R, \tau, \theta^*) = gT_H \left[\frac{\tau}{R} \frac{1}{\theta^*} \right] (1 - \theta^*). \quad (10)$$

From equation (10) we can calculate the heat rejected to the environment for each value of f and under different ways of operation of the power plant. In Fig. 4, it can be seen how the heat rejected under ecological function conditions is lower than the heat rejected under both maximum power output and maximum efficient power conditions. In Fig. 5 we show the ratio between the amounts of rejected heat considering the case when $\gamma \neq 0$ (red dashed line).

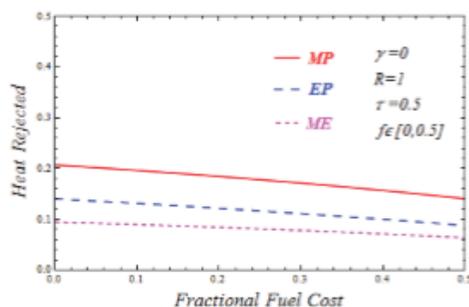


Figure 4. Maximum power rejected heat, efficient power rejected heat and ecological rejected heat for a linear heat transfer law.

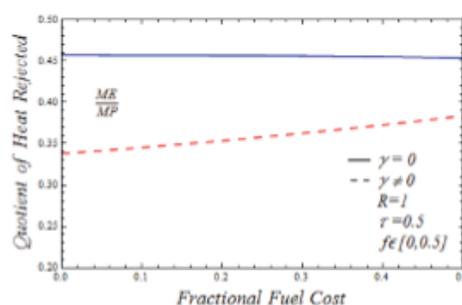


Figure 5. Quotient between ecological rejected heat and maximum power rejected heat in terms of fractional cost.

We also observe in figure 5 that for the case of $\gamma = 0$ (blue line), we obtain the result recently reported in [5] and previously reported by Velasco et al [14]. In addition, we can calculate the total entropy production and we also analyze the effect on the reduction of power output in terms of an internal irreversibility for the Novikov model for both ecological function and maximum power conditions [10].

3. Concluding Remarks

In this work, we have made a thermoeconomic study of a non-endoreversible simplified thermal power plant model (the so-called Novikov engine). This non-endoreversible case improves the results obtained by means of an endoreversible model due to the inclusion of the engine's internal dissipation through the lumped parameter R . In our study, we also take into account a cost associated to maintenance of the power plant; that is, proportional to the power output of the plant. In our study we consider different regimes of performance: Maximum Power Output, Maximum Efficient Power and Maximum Ecological Regime. We found that when the Novikov model maximizes the ecological function, it reduces the rejected heat to the environment down to about 55% (see figure 5) of the rejected heat in the case of a power plant model working under maximum power conditions. Besides, we analyze the effect on the reduction of power output in terms of an internal irreversibility.

Acknowledgments

This work was supported in part by CONACYT, COFAA and EDI-IPN-México.

- [1] De Vos A 1995 Endoreversible thermoeconomics. *Energy. Convers. Management*. **36** 1 1-5.
- [2] Novikov I I 1957 The efficiency of atomic power stations (a review) *Atomimaya Energiya* **3** 409 (English translation 1958. *Nuclear Energy* 7 125)
- [3] Curzon F. and Ahlborn B 1975 Efficiency of a Carnot engine at maximum power output *Am. J. Phys.* **43** 22-24.
- [4] Barranco-Jiménez M A and Angulo-Brown F 2007 Thermoeconomic optimization of a Novikov power plant model under maximum ecological conditions *J. of the Energy Inst.* 80:2(1-4):96-104, 2007.
- [5] M. A. Barranco-Jiménez "Finite-time thermoeconomic optimization of a non endoreversible heat engine", *Rev. Mex. Fis.* 55 (3) 211-220 (2009).
- [6] Angulo-Brown F 1991 An ecological optimization criterion for finite-time heat engines *Appl. Phys.* **69** 7465-7469

- [7] Angulo-Brown F and Arias-Hernández L A 2001 *J. of Appl. Phys.* **89** 1520
- [8] Yilmaz T 2006 A new performance criterion for heat engine: efficient power. *J. Energy Inst.* **79** 1 38-41.
- [9] Arias-Hernández L A, Barranco-Jiménez M A and Angulo-Brown F 2009 Comparison between two ecological-type modes of performance for a simple energy converter", *J. of the Energy Institute* **82** 3 193-197
- [10] Proceedings of 27th International conference, ECOS2014 2014 (Turku Finland) 15-19
- [11] Chen J 1994 The maximum power output and maximum efficiency of an irreversible Carnot heat engine. *J. Phys. D: Appl. Phys* **27** 1144–1149.
- [12] Öskaynak, S, Göktun, S, Yavuz, H 1994 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **27** 1139–1143.
- [13] Wu, C., Chen, L., Chen, J., eds., 1999 *Recent Advances in Finite-Time Thermodynamics*, Nova Science (New York)
- [14] Velasco S, Roco J. M, Medina A, White J A and Calvo-Hernández A. 2000 *J. Phys. D.* **33** 355-359