



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TEORÍA DE PUNTOS FIJOS DE
OPERADORES TOTALMENTE CONTINUOS
NO LINEALES Y SU APLICACIÓN A
ECUACIONES DIFERENCIALES

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Maestro en Ciencias
Fisicomatemáticas**

PRESENTA:

Marco Antonio Amaral Valle

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Valeri Kucherenko



México D.F, Abril del 2016.

*Dedicado a mis padres
Irma y Marco*

Agradecimientos

A mi director de tesis Dr. Valeri Kucherenko, mi más amplio agradecimiento por haberme confiado este trabajo, por su paciencia y apoyo en la conclusión de este. Cuya experiencia y educación han sido mi fuente de motivación y curiosidad durante estos años.

Agradezco al Dr. Egor Maximenko por sus observaciones en los comités tutoriales y correcciones hechas en este trabajo.

Ana Karen por su ayuda en la redacción y realización de este trabajo.

Resumen

Este trabajo presenta la aplicación de los teoremas de puntos fijos, para demostrar la existencia de la solución de algunos problemas de ecuaciones diferenciales no lineales. El trabajo consiste en 5 capítulos y se abordan de la siguiente manera:

En el primer capítulo se dan los preliminares de Topología Algebraica, herramienta utilizada en este trabajo para llevar a cabo la demostración del Teorema de Brouwer, presentando diferentes demostraciones.

En el segundo capítulo presentamos el Teorema de Invarianza Topológica de Grupos de Homología, demostración estándar basada en la subdivisión baricéntrica. En este capítulo también presentamos algunos ejemplos, del cálculo de los grupos de homología de Esferas, Bolas y el Espacio Ocho.

En el tercer capítulo exponemos los conceptos importantes de Aplicaciones Homotópicas, Espacios Homotopicamente Equivalentes, Grado de una Aplicación, entre otros. El objetivo de este capítulo es demostrar el Teorema de punto fijo de Lefschetz, generalización del Teorema de punto fijo de Brouwer.

En el cuarto capítulo abordamos los Teoremas de puntos fijos clásicos, Banach, Brouwer, Schauder y Schaefer. La demostración del Teorema de punto fijo de Brouwer, que se basa en la demostración de los Teoremas de puntos fijos de Schauder y Schaefer por ello su importancia, se basa en las propiedades de los Espacios Retractos y los grupos de homología de la Esfera y la Bola.

En el último capítulo se aplican los resultados obtenidos del capítulo 4, en la demostración de la solución del Problema con Condición de Frontera, Problema Estacionario para la Ecuación de Navier-Stokes y el Problema de Ecuaciones Elípticas no Lineales.

En cada capítulo agregamos demostraciones de Teoremas y ejemplos que no se presentan en las referencias citadas, además incluimos contraejemplos de Teoremas al quitar alguna hipótesis.

Abstract

This work shows an application of the fixed-point theorem, in order to show the existence of the solution of some non-linear differential equations problems. This work is formed by 5 chapters addresses in the following way:

In the 1st chapter some algebraic topology preliminaries are given. We used them in order to prove Brouwer fixed-point theorem. Various proofs are presented.

The 2nd chapter addresses the Topological invariance of homology groups theorem, the standar proof based in barycentric subdivision is given. We show some examples of the homology groups of spheres, balls y eight space.

The 3rd chapter explains the most important concepts of Homotopic maps, Homotopy spaces equivalent , Degree of the map, among others. The aim of this chapter is demonstrate the Lefschetz fixed-point theorem, wich is Brouwer fixed-point theorem generalization.

In chapter 4 we approach the classical fixed-point theorems, such as Banach, Brouwer, Schauder y Schaefer. The importance of the Brouwer fixed-point theorem proof is that it is the base of Schauder and Schaefer fixed-point theorems demonstration. It relies on the retract space properties and on the homology groups of the sphere and ball.

Finally, in the last chapter we apply the obtained results of chapter 4 in the solution boundary value problems proof, Stationary problem for the general nonlinear Navier-Stokes equations and in the Problem Nonlinear Elliptic Equations.

Every chapter contains the theorems proofs and some examples that are not included in the cited references, we also add counterexamples of the Theorems when we remove some hypothesis.

Índice general

Introducción	XI
1. Grupos de Homología	5
1.1. Introducción	5
1.2. Homología Cero Dimensional	12
1.3. Grupo de Homología del Cono	13
1.4. Homomorfismos Inducidos por Aplicaciones Simpliciales	15
1.5. Cadenas Complejas y Portadores Acíclicos	18
2. Invarianza Topológica de Grupos de Homología	21
2.1. Aproximación Simplicial	21
2.2. Subdivisión Baricéntrica y Teorema de Aproximación Simplicial	23
2.3. Subdivisión Algebraica	27
2.4. Invarianza Topológica de los Grupos de Homología	29
2.5. Grupos de Homología de la Esfera y Bola	31
3. Teoremas de Puntos Fijos para Espacios de Dimensión Finita	37
3.1. Homomorfismos Inducidos por Aplicaciones Homotópicas	37
3.2. Aplicaciones en Esferas	40
3.3. Teorema del punto fijo de Lefschetz	45
4. Teorema de Puntos Fijos en Espacios de Dimensión Infinita	51
4.1. Teorema del punto fijo de Banach	51
4.2. Teorema del punto fijo de Brouwer	55
4.3. Teorema del punto fijo de Schauder y contraejemplo de Kakutani	58
4.4. Teorema del punto fijo de Schaefer	61
5. Aplicaciones de los Teoremas de Puntos Fijos	63
5.1. Aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Lineales	63
5.2. Problema con Condición de Frontera	65
5.3. Problema Estacionario para la Ecuación de Navier-Stokes	68
5.4. Ecuaciones Elípticas no Lineales	72
A. Espacios de Sobolev y Teorema de Encajamiento	81

Introducción

En esta tesis se aborda el problema de la existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales no lineales sobre un espacio de Banach. Dados x, f elementos del espacio de Banach B la ecuación diferencial puede ser presentada en la forma

$$T(x) = f, \quad (1)$$

con T un operador no lineal acotado, definido para todo $x \in B$. La ecuación (1) en muchos casos se puede llevar a la forma

$$A(x) = U(x). \quad (2)$$

donde A y U son operadores no necesariamente lineales, reduciendo nuestro problema a encontrar un punto fijo del operador A .

Los primeros teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales no lineales sobre un espacio de Banach, fueron demostrados para contracciones, es decir, para aplicaciones que satisfacen la condición:

$$\|A(u) - A(v)\| < k \|u - v\|, \text{ con } 0 < k < 1. \quad (3)$$

El método de contracción se aplica para demostrar el teorema de existencia y unicidad de la solución para el problema de Cauchy de ecuaciones diferenciales ordinarias, la existencia de la función Implícita, etc. Pero, para el problema con condiciones de frontera para ecuaciones diferenciables ordinarias y parciales, la condición de contracción (3) en general no se cumple.

Para tratar el problema con condiciones de frontera, se utilizan los trabajos clásicos de Leray-Schauder donde se desarrollaron diferentes métodos para demostrar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (2), teniendo amplias aplicaciones. En el método de Leray-Schauder se considera la función A que lleva un conjunto convexo, compacto, no vacío del espacio de Banach B , en un subconjunto compacto de B . Esta función se puede aproximar con cualquier precisión por funciones de dimensión finita. A su vez por el teorema de Brouwer toda función continua de un conjunto convexo, compacto en sí mismo tiene un punto fijo. Usando los pasos mencionados anteriormente se puede concluir que las condiciones de Leray-Schauder garantizan la existencia del punto fijo de la función A .

La teoría de los puntos fijos de una aplicación tiene larga historia y diferentes acercamientos. En el año de 1930 en el libro de Lefschetz fue introducido el número de Lefschetz de una aplicación, que permite demostrar la existencia de puntos fijos de una amplia clase de aplicaciones. Este método está basado en Topología Algebraica [12].

En realidad calcular el número de Lefschetz no es una tarea simple. En el caso del Teorema del punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^n cuando A aplica un conjunto convexo, compacto no vacío en si mismo es fácil calcular el número de Lefschetz. En caso más general, sí el número de Lefschetz es distinto de 0 el punto fijo (la solución) de la ecuación (2) existe. Por eso cuando no se cumplen las condiciones para emplear el teorema de Brouwer verificar la existencia de un punto fijo basta con calcular el número de Lefschetz para puntos fijos.

En esta tesis investigamos el método Larey-Schauder y sus aplicaciones. Primero escribimos las propiedades de los grupos de homología en los capítulos 1 y 2. En el capítulo 3 deducimos el número de Lefschetz de una aplicación y demostramos su invarianza topológica. Después presentamos su aplicación para determinar los puntos fijos de una función y demostramos el teorema de Brouwer (Este importante teorema trata de aplicaciones en espacio de dimensión finita y posee una gran variedad distinta de demostraciones). En el capítulo 4 se consideran los puntos fijos de las aplicaciones continuas en espacios de Banach y se demuestra el Teorema de Schauder. En los primeros trabajos de Schauder, su teorema fue demostrado por partición de conjuntos convexos de dimensión finita por simples. Nosotros seguimos el acercamiento del libro [13] basado en el teorema de Brouwer .

Como aplicación del teorema de Schauder en el capítulo 5 investigamos el problema de Cauchy y el problema con condiciones de frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias . Observamos que los teoremas topológicos sobre puntos fijos demuestran la existencia de los puntos fijos, pero en caso general las aplicaciones pueden tener varios puntos fijos. La investigación de la unicidad del punto fijo es una tarea adicional, por ejemplo en las aplicaciones contractivas se tiene que los puntos fijos son únicos.

En caso general para ecuaciones diferenciales no lineales el problema de Cauchy con condiciones de frontera puede tener varios puntos fijos. Un ejemplo simple que ilustra esto, es el problema de Cauchy para la ecuación diferencial ordinaria

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

con $f(x,y)$ continua en \mathbb{R}^2 , pero en el punto $x = 0$, $y(0) = y_0$ no cumple la condición de Lipschitz.

En el capítulo 5 se considera el problema estacionario con datos de frontera para la ecuación de Navier-Stokes estacionario. Aplicando el método de Schauder demostramos la existencia de su solución generalizada.

Por otra parte también en el capítulo 5 se consideran las ecuaciones no lineales elípticas monótonas. Para este caso es cómodo trabajar con la ecuación (1). En este caso por medio de las aproximaciones de Galerkin se reduce el problema inicial en el espacio de Banach a un problema de dimensión finita. Después usando el lema del Ángulo Agudo 24, la existencia de las aproximaciones de Galerkin se reduce al Teorema de Brouwer .

Aplicando propiedades de las ecuaciones elípticas monótonas obtenemos que la aproximación de Galerkin convergen débilmente a la solución del problema de frontera para ecuaciones no lineales elípticas.

En este trabajo se consideran las soluciones generalizadas para las ecuaciones de Navier-Stokes estacionario y ecuaciones elípticas monótonas en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Se puede también demostrar la existencia de las soluciones en espacios de Sobolev $W^{k,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Usando los teoremas de encajamiento

$$W^{k,2}(\Omega) \rightarrow C^{m,\lambda}(\Omega)$$

y se puede obtener las soluciones en los espacios $C^{m,\lambda}(\Omega)$.

Capítulo 1

Grupos de Homología

En este capítulo se exponen las estructuras que utilizaremos para definir los grupos de homología, calculamos los grupos de homología de algunas superficies y mostramos las propiedades generales de los grupos de homología.

Se estudian los homomorfismos de grupos de homología, teniendo como propósito dar las condiciones necesarias para saber cuando dos homomorfismos inducen el mismo grupo de homología.

Este capítulo es la base para la demostración del teorema de Invarianza topológica de los grupos de homología, teorema que atacaremos en el siguiente capítulo.

1.1. Introducción

Definición 1. Dado un conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$ de puntos de \mathbb{R}^n , este conjunto se dice **geoméricamente independiente** si para cualesquiera escalares $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

Definición 2. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto geoméricamente independiente en \mathbb{R}^n . Definimos el **n -simplejo** σ generado por a_0, \dots, a_n denotado por el símbolo $a_0 \dots a_n$, al conjunto de puntos x en \mathbb{R}^n tal que:

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1.$$

Los puntos a_0, \dots, a_n que generan al simplejo σ , son llamados **vértices** de σ ; el número n es llamado la **dimensión** de σ . Cualquier simplejo generado por un subconjunto de a_0, \dots, a_n es llamada una **cara** de σ . En particular, la cara de σ generada por a_1, \dots, a_n es llamada la cara **opuesta** a a_0 . Las caras diferentes a σ del propio σ son llamadas las **caras propias** de σ , su unión es llamado la **frontera** de σ y es denotada por $Bd\sigma$.

Definición 3. Un **complejo simplicial** (o simplemente complejo) K en \mathbb{R}^n es una colección de simplejos en \mathbb{R}^n tal que:

- (1) Cada cara de un simplejo de K está en K .

(2) La intersección de cualquier dos simplejos de K es una cara de cada uno de estos.

Definición 4. Si L es una subcolección de K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial en su propia forma, es llamado un **subcomplejo** de K . Un subcomplejo de K es la colección de todos los simplejos de K de dimensión a lo más p ; es llamado **p -estructura** de K y se denota por $K^{(p)}$. Los puntos de la colección $K^{(0)}$ son llamados **vértices** de K .

Definición 5. Sea $|K|$ el subconjunto de \mathbb{R}^n que se forma de la unión de los simplejos de K . Dando a cada simplejo su topología natural como un subespacio de \mathbb{R}^n , entonces la topología de $|K|$ queda definida como sigue: sea A un subconjunto de $|K|$, el cual es cerrado en $|K|$ si y sólo si $A \cap \sigma$ es cerrado en σ , para cada $\sigma \in K$. $|K|$ es llamado el **espacio subyacente** de K , o el **politopo** de K .

Ejemplo 1. Sean $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathbb{R}^2$, es claro que el conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$ es geoméricamente independiente. Sea el 2-simplejo $a_0a_1a_2$ generado por los puntos a_0, a_1, a_2 , igual al triángulo con vértices estos tres puntos.

El complejo simplicial definido por este simplejo es $K = \{a_0, a_1, a_2, a_0a_1, a_0a_2, a_1a_2, a_0a_1a_2\}$, como en la Figura 1.1, con espacio subyacente $|K|$ igual al triángulo.

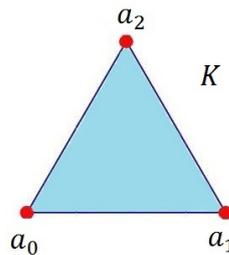


Figura 1.1: Complejo

Un subcomplejo simplicial L de K , podemos tomarlo como $L = \{a_0, a_1, a_2, a_0a_1, a_0a_2, a_1a_2\}$, como en la Figura 1.2. Claramente L es el subcomplejo de K que consiste de la colección de los simplejos $\sigma \in K$ de dimensión a lo más 1.

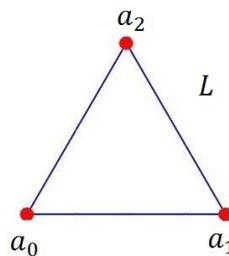


Figura 1.2: Subcomplejo

Lema 1. Una aplicación $f : |K| \rightarrow X$ es continua si y sólo si $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$.

Demostración. Si f es continua, lo es $f|_{\sigma}$ ya que σ es un subespacio de K . Recíprocamente, supongamos que cada aplicación $f|_{\sigma}$ es continua. Si C es un conjunto

cerrado de X , entonces $f^{-1}(C) \cap \sigma = (f|_{\sigma})^{-1}(C)$, que es cerrado en σ por continuidad de $f|_{\sigma}$. Así $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. ■

Lema 2. Sean K y L complejos, y sea $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una aplicación. Supongamos que cuando los vértices v_0, \dots, v_n de K generan un simplejo de K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un simplejo de L . Entonces f puede extenderse a una aplicación continua $g : |K| \rightarrow |L|$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \quad \implies \quad g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i).$$

Llamamos a g la (líneal) **aplicación simplicial** inducida por la aplicación vértice f .

Demostración. Observemos que aunque los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ de L no son necesariamente diferentes, aún así generan un simplejo τ de L , por hipótesis. Observemos que en la expresión para $g(x)$, sigue siendo cierto que los coeficientes son no negativos y que la suma es 1; así $g(x)$ es un punto de τ . Por lo tanto g lleva el n -simplejo σ generado por v_0, \dots, v_n continuamente a el simplejo τ cuyo conjunto de vértices es $\{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$.

La aplicación g es continua como una aplicación de σ en τ y por lo tanto como una aplicación σ en $|L|$. Entonces por el lema anterior g es una aplicación continua de $|K|$ en $|L|$. ■

La definición de aplicación simplicial dada en el lema anterior y el mismo lema tomaran mayor relevancia en la sección 1.3.

Definición 6. Sea v un vértice de K la **estrella** de v en K , denotada por $St v$ o algunas veces por $St(v, K)$, es la unión de los interiores de los simplejos de K que tienen a v como vértice.

Definición 7. Sea σ un simplejo. Definamos dos ordenamientos del conjunto de sus vértices, se dicen que son equivalentes si estos difieren uno del otro por una permutación par. Si $\dim \sigma > 0$, el ordenamiento de los vértices de σ pertenecen a dos clases de equivalencia. Cada una de estas clases es llamada una **orientación** de σ . (Si σ es un 0-simplejo, entonces existe solo una clase y por lo tanto solo una orientación de σ .) Un **simcomplejo orientado** es un simcomplejo σ junto con una orientación de σ .

Usaremos el símbolo

$$[v_0, \dots, v_n]$$

para denotar el simplejo orientado que consiste del simplejo $v_0 \dots v_n$ y la clase de equivalencia a la que pertenece el ordenamiento de sus vértices (v_0, \dots, v_n) .

Definición 8. Sea K un complejo simplicial. Una **p -cadena** en K es una función c del conjunto de p -simplejos orientados de K a los enteros, tal que:

- (1) $c(\sigma) = -c(\sigma')$ si σ y σ' son orientaciones opuestas del mismo complejo.
- (2) $c(\sigma) = 0$ para todo p -simplejos σ , excepto un número finito.

Sumando p -cadenas por adición de sus valores; el grupo resultante es denotado por $C_p(K)$ y es llamado el **grupo de p -cadenas** de K . Si $p < 0$ o $p > \dim K$, entonces $C_p(K)$ denota el grupo trivial.

Si σ es un simplejo orientado, la **cadena elemental** c correspondiente a σ es la función definida como sigue:

$$\begin{aligned} c(\sigma) &= 1, \\ c(\sigma') &= -1 \quad \text{si } \sigma' \text{ tiene la orientación opuesta a } \sigma, \\ c(\tau) &= 0 \quad \text{para todo simplejo orientado } \tau \text{ distinto de } \sigma. \end{aligned}$$

Por abuso de notación, algunas veces usaremos el símbolo σ para denotar no solo un simplejo, o un simplejo orientado, si no también denota la elemental p -cadena c correspondiente al simplejo orientado σ . Con esta convención, si σ y σ' son orientaciones opuestas del mismo simplejo, entonces podemos escribir $\sigma' = -\sigma$, siempre y cuando σ y σ' son interpretados como cadenas elementales.

Ahora procedemos a definir el operador frontera, con el cual podremos definir los grupos de homología.

Definición 9. Ahora definimos un homomorfismo

$$\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K),$$

llamado el **operador frontera**. Si $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ es un simplejo orientado con $p > 0$, definimos:

$$\partial_p \sigma = \partial_p [v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p], \quad (1.1)$$

donde el símbolo \hat{v}_i quiere decir, que el vértice v_i es eliminado del simplejo $[v_0, \dots, v_p]$.

Notemos que dado el simplejo orientado $[v_0, \dots, v_p]$ visto como elemento del grupo de cadenas $C_p(K)$, se tiene que

$$[v_0, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p] = -[v_0, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_p].$$

Probar que el operador ∂_p este bien definido, basta con checar que preserve la relación anterior. Comparemos las siguientes expresiones

$$\partial_p [v_0, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p] \text{ y } \partial_p [v_0, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_p].$$

Para $i \neq j, j+1$, el i -ésimo término en estas dos expresiones difieren precisamente por un signo, puesto que las términos son iguales excepto v_j y v_{j+1} que estan intercambiados.

Solo falta checar el caso cuando $i = j, j+1$, en la primera expresión tenemos

$$(-1)^j [v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_p] + (-1)^j [v_0, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+2}, \dots, v_p].$$

La segunda expresión es

$$(-1)^j [v_0, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+2}, \dots, v_p] + (-1)^j [v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_p].$$

Comparando, podemos ver que estas dos expresiones difieren por un signo.

Lema 3. $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \partial_{p-1} \circ \partial_p[v_0, \dots, v_p] &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_p[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p] \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \partial_p[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p] \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^j \partial_p[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p]. \end{aligned}$$

Los términos de estas dos sumas se cancelan a pares. ■

Definición 10. El kernel de $\partial_p: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ es llamado el grupo de **p-ciclos** y es denotado por $Z_p(K)$. La imagen de $\partial_{p+1}: C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$ es llamado el grupo **p-frontera** y es denotado por $B_p(K)$. Del Lema 3, se sigue que $B_p(K) \subset Z_p(K)$. Definimos:

$$H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K),$$

y es llamado el **p-grupo de homología** de K .

Recordemos que dado G un grupo y $K \triangleright G$ un subgrupo normal, entonces el conjunto de clases laterales izquierdas y derechas son iguales, mas aún, estos conjuntos forman un grupo el cual es llamado grupo cociente módulo K y es denotado por G/K . En nuestro caso particular como $C_p(K)$ es un grupo abeliano, se sigue que $B_p(K)$ y $Z_p(K)$ son grupos abelianos. Además como $B_p(K)$ es un subgrupo de $Z_p(K)$, entonces $B_p(K)$ es un subgrupo normal de $Z_p(K)$, quedando bien definido el cociente $Z_p(K)/B_p(K)$.

Ejemplos de Grupos de Homología

Antes de comenzar a calcular los grupos de homología de algunas superficies, daremos algo de terminología, diremos que una cadena c es **llevada** por subcomplejo L de K si c tiene valor 0 en todo simplejo que no esta en L . Y diremos que dos p -cadenas c y c' son **homólogas** si $c - c' = \partial_{p+1}d$ para alguna $p + 1$ cadena d . En particular, si $c = \partial_{p+1}d$, se dice que c es **homóloga al cero**, o simplemente que c es una **frontera**.

Cuando decimos que dos cadenas son homólogas, se refiere básicamente a que las dos cadenas pertenecen a la misma clase de equivalencia, en el caso de grupos de homología, quiere decir que la diferencia de las cadenas pertenece a $B_p(K)$ el grupo frontera.

Lema 4. Sea L el complejo de la Figura 1.3 de abajo, cuyo espacio subyacente es un rectángulo. Sea $Bd L$ el complejo cuyo espacio es la frontera de el rectángulo. Orientar cada 2-simplejo σ_i de L en sentido contrario a las manecillas del reloj. Orientar 1-simplejos arbitrariamente. Entonces:

- 1) Cada 1-ciclo de L es homólogo a un 1-ciclo llevado por $Bd L$.
- 2) Si d es una 2-cadena de L y si ∂d es llevado por $Bd L$, entonces d es un múltiplo

de la cadena $\sum \sigma_i$.

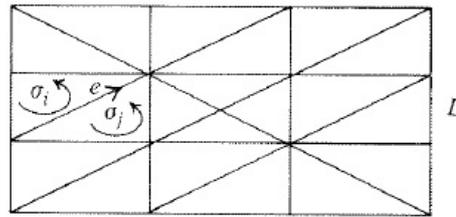


Figura 1.3: Complejo L

Ejemplo 2. Sea T que denota el simplejo representado por el rectángulo etiquetado L de la Figura 1.4; su espacio adyacente es el toro. Entonces

$$H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_2(T) \cong \mathbb{Z}.$$

Orientar cada 2-simplejo de L en sentido antihorario; usar la orientación inducida de los 2-simplices de T ; sea γ que denota la suma de estos. Sea:

$$w_1 = [a, b] + [b, c] + [c, a],$$

$$z_1 = [a, d] + [d, e] + [e, a].$$

Entonces γ genera $H_2(T)$ y w_1, z_1 representan una base para $H_1(T)$.

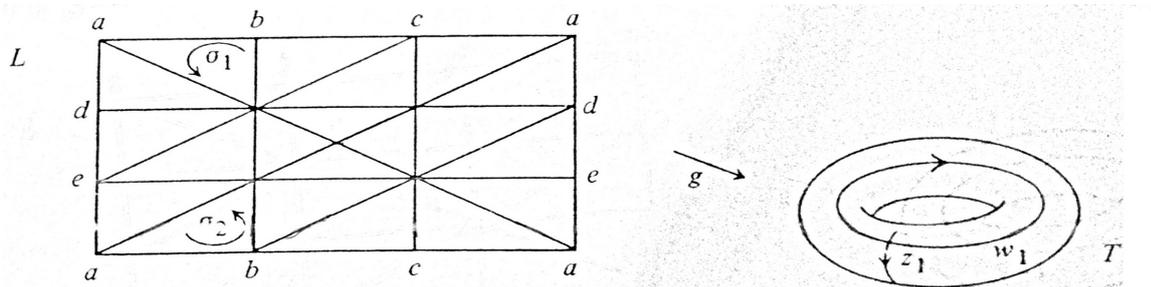


Figura 1.4: Toro

Demostración. Sea $g : |L| \rightarrow |T|$ la aplicación pegar; sea $A = g(|Bd L|)$. Entonces A es homeomorfo al espacio que es unión de dos círculos con un punto en común. Orientar los 1-simplejo de T arbitrariamente. Ya que g hace identificaciones solo en simplices de $Bd L$, los argumentos que se dieron para demostrar el Lema 4 se aplican literalmente y se tiene lo siguiente:

- (1) Cada 1-ciclo de T es homólogo a un 1-ciclo llevado por A .
- (2) Si d es una 2-cadena de T y si ∂d es llevada por A , entonces d es un múltiplo de γ .

Sin embargo, en el complejo T , se tienen dos resultados más:

- (3) Si c es un 1-ciclo de T llevado por A , entonces c es de la forma $nw_1 + mz_1$.
- (4) $\partial\gamma = 0$.

Demostrar (3) es fácil, dado que A es sólo un complejo de 1-dimensión. La demostración de (4) es similarmente directa: es claro que $\partial\gamma$ tiene valor 0 en cada 1-simplejo de T que no esta en A . Uno checa directamente que también tiene valor 0 en cada 1-simplejo en A . El elemento cadena $[a, b]$ por ejemplo, aparece en la expresión para $\partial\sigma_1$ con valor -1 y en la expresión para $\partial\sigma_2$ con valor $+1$, así que $\partial\gamma$ tiene valor 0 en $[a, b]$.

Usando estos resultados, podemos calcular la homología de T . Cada 1-ciclo de T es homólogo a un 1-ciclo de la forma $c = nw_1 + mz_1$, por (1) y (3). Si un ciclo es un borde, entonces es el trivial, en efecto, sea $c = \partial d$ para algún d , entonces por (2) se tiene que $c = p\gamma$ para algún p ; como $\partial\gamma = 0$ por (4), tenemos $c = \partial d = 0$. Concluimos que

$$H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

y los 1-ciclos w_1 y z_1 forman una base para la homología 1-dimensional.

Calculemos $H_2(T)$, por (2) cualquier 2-ciclos d de T debe de ser de la forma $p\gamma$ para algún p . Cada 2-cadena es en efecto un ciclo, por (4), y no hay 3 cadenas. Concluimos que:

$$H_2(T) \cong \mathbb{Z},$$

y este grupo tiene como generador al 2-ciclo γ . ■

Ejemplo 3. Sea P^2 el complejo indicado por el rectángulo etiquetado de la Figura 1.5, su espacio adyacente es llamado el plano proyectivo. Entonces:

$$H_1(P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_2(P^2) = 0.$$

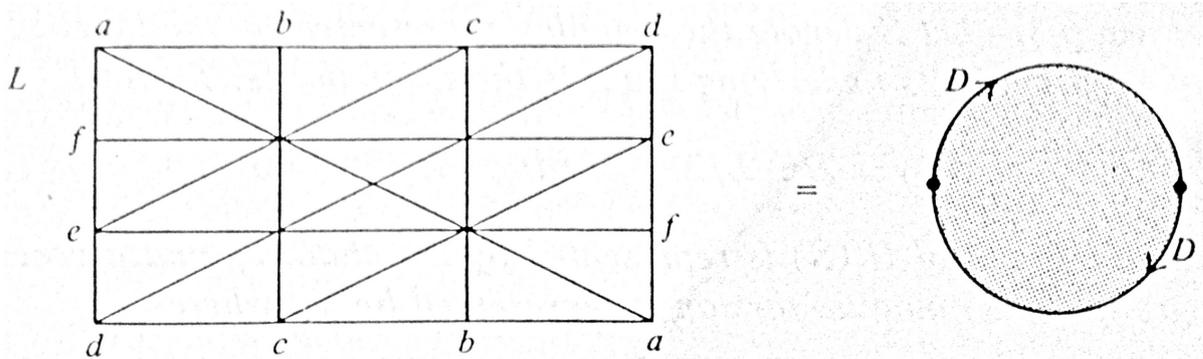


Figura 1.5: Plano Proyectivo

Demostración. Sea $g : |L| \rightarrow |P^2|$ la aplicación pegar y $A = g(|Bd L|)$; que es homeomorfo al círculo. Sea γ como antes; y sea:

$$z_1 = [a, b] + [b, c] + [c, d] + [d, e] + [e, f] + [f, a].$$

Las condiciones (1) y (2) son como en el ejemplo anterior. Los resultados adicionales, son fáciles de comprobar:

- (3) Cada 1-ciclo llevado por A es un múltiplo de z_1 .

$$(4) \quad \partial\gamma = -2z_1$$

De estos hechos, concluimos que

$$H_1(P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_2(P^2) = 0.$$

El elemento no cero de H_1 , es representado por el ciclo z_1 . ■

1.2. Homología Cero Dimensional

Mostraremos que este grupo tiene una fácil interpretación topológica que hace su cálculo trivial.

Teorema 4. Sea K complejo. Entonces el grupo $H_0(K)$ es abeliano libre. Si $\{v_\alpha\}$ es una colección que consiste de uno de los vértices de cada componente conexa de $|K|$, entonces la clase de homología de las cadenas v_α forman una base para $H_0(K)$.

Demostración. Paso 1.- Si v y w son vértices de K , diremos que $v \sim w$ si existe una sucesión

$$a_0, \dots, a_n$$

de vértices de K tal que $v = a_0$ y $w = a_n$, y $a_i a_{i+1}$ es un 1-simplejo de K para cada i . Esta relación es claramente una relación de equivalencia. Dado v , definamos

$$C_v = \cup \{St w : v \sim w\}.$$

Mostremos que los conjuntos C_v son las componentes conexas de $|K|$.

Notemos primero que C_v es abierto porque es unión de conjuntos abiertos. Además, $C_v = C_{v'}$ si $v \sim v'$. Ahora, mostremos que C_v es conexo, en efecto, dado v , sea $w \sim v$ y x un punto de $St w$. Elejimos una sucesión a_0, \dots, a_n de vértices de K , como antes. Entonces la unión de líneas formadas por a_0, \dots, a_n , x pertenece a C_v : en efecto, $a_i \sim v$ por definición, así que $St a_i \subset C_v$, y en particular, el segmento de línea $a_i a_{i+1}$ esta contenida en C_v . Similarmente, el segmento de línea $a_n x$ esta contenido en $St a_n$, el cual esta contenido en C_v . Por lo tanto C_v es arco conexo, por lo tanto conexo.

Por último, mostremos que si C_v y $C_{v'}$ son distintos entonces son disjuntos. Supongamos que $x \in C_v \cap C_{v'}$. Entonces $x \in St w$ para algún w equivalente a v , y $x \in St w'$ para algún w' equivalente a v' . Ya que x esta en el interior de ambos $St w$ y $St w'$, algún simplejo de K tiene a w y w' como vértices. Entonces ww' debe ser un 1-simplejo de K , así que $w \sim w'$. Se sigue que $v \sim v'$, así que los dos conjuntos C_v y $C_{v'}$ son iguales.

Siendo conexos, abiertos y disjuntos, los conjuntos C_v son necesariamente las componentes conexas de $|K|$.

Paso 2.- Ahora probemos el teorema. Sea $\{v_\alpha\}$ una colección de vértices donde cada vértice v_α esta contenido en su componente conexa C_α de $|K|$. Dado un vértice w de K , que pertenece a alguna componente conexa de $|K|$, digamos C_α . Por hipótesis, $w \sim v_\alpha$, por lo tanto existe una sucesión a_0, \dots, a_n de vértices de K , como antes, etiquetados de v_α a w . La 1-cadena

$$[a_0, a_1] + [a_1, a_2] + \dots + [a_{n-1}, a_n]$$

tiene como su frontera la 0-cadena $a_n - a_0 = w - v_\alpha$. Así la 0-cadena w es homóloga a la cero cadena v_α .

Ahora mostremos que ninguna cadena no trivial de la forma $c = \sum n_\alpha v_\alpha$ es una frontera. Supongamos $c = \partial d$ para alguna 1-cadena d . Ya que cada 1-simplejo de K pertenece a una única componente de $|K|$, podemos escribir $d = \sum d_\alpha$, donde d_α consiste en todos aquellos términos de d que son llevados por C_α . Ya que $\partial d = \sum \partial d_\alpha$ y ∂d_α son llevados por C_α , concluimos que $\partial d_\alpha = n_\alpha v_\alpha$. Se sigue que $n_\alpha = 0$ para cada α . Sea $\epsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ el homomorfismo definido tomando $\epsilon(v) = 1$ para cada vértice v de K . Entonces $\epsilon(\partial[v, w]) = \epsilon(w - v) = 1 - 1 = 0$, para cualquier elemento 1-cadena $[v, w]$. Como resultado, $\epsilon(\partial d) = 0$ para toda 1-cadena d . En particular, $0 = \epsilon(\partial d_\alpha) = \epsilon(n_\alpha v_\alpha) = n_\alpha$. ■

Definición 11. Sea $\epsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ un homomorfismo suprayectivo definido por $\epsilon(v) = 1$ para cada vértice v de K . Entonces si c es una 0-cadena, $\epsilon(c)$ igual a la suma de los valores de c en los vértices de K . La aplicación ϵ es llamada una **aplicación aumento** para $C_0(K)$. Tenemos que notar que $\epsilon(\partial d) = 0$ si d es una 1-cadena. Definimos el **grupo de homología reducido** de K en dimensión 0, denotado $\tilde{H}_0(K)$, por la ecuación

$$\tilde{H}_0(K) = \ker \epsilon / \text{im} \partial_1.$$

(Si $p > 0$, dejamos $\tilde{H}_0(K)$ denota el grupo usual $H_0(K)$.)

Teorema 5. El grupo $\tilde{H}_0(K)$ es abeliano libre, y

$$\tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(K).$$

Por lo tanto $\tilde{H}_0(K)$ desaparece si $|K|$ es arcoconexo. Si $|K|$ no es arcoconexo, sea $\{v_0\}$ que consiste de un vértice de cada componente conexa de $|K|$; sea α_0 un índice fijo. Entonces las clases de homología de las cadenas $v_\alpha - v_{\alpha_0}$, para $\alpha \neq \alpha_0$, forman una base para $\tilde{H}_0(K)$.

Demostración. Dado una 0-cadena c , es homóloga a una 0-cadena de la forma $c' = \sum n_\alpha v_\alpha$ y la cadena c' es una frontera sólo si $n_\alpha = 0 \forall \alpha$. Ahora si $c \in \ker \epsilon$, entonces $\epsilon(c) = \epsilon(c') = \epsilon(\sum n_\alpha v_\alpha) = \sum n_\alpha = 0$. Si $|K|$ tiene sólo una componente conexa, esto significa que $c' = 0$. Si $|K|$ tiene mas de una componente conexa, esto implica que c' es una combinación lineal de las 0-cadenas $v_\alpha - v_{\alpha_0}$. ■

1.3. Grupo de Homología del Cono

Calcularemos el grupo de homología del n -simplejo, una forma conveniente de hacer esto es introducir la noción de cono.

Definición 12. Supongamos que K es un complejo en \mathbb{R}^n , y w es un punto de \mathbb{R}^n tal que cada rayo que emana de w intersecta $|K|$ en a lo más un punto. Definimos el **cono en K con vértice w** , a la colección de todos los simplejos de la forma $wa_0 \dots a_p$, donde $a_0 \dots a_p$ es un simplejo de K , junto con todas las caras de tales simplejos. Denotemos esta colección por $w * K$.

Mostremos que $w * K$, es un complejo bien definido, y contiene a K como subcomplejo, K es llamado a menudo la base del cono.

Primero mostremos que el conjunto $\{w, a_0, \dots, a_p\}$ es geoméricamente independiente: Si w estuviera en el plano P determinado por a_0, \dots, a_p , podríamos considerar el segmento de línea que une w a un punto interior x de $\sigma = a_0 \dots a_p$. El conjunto $\text{Int } \sigma$, que es abierto en P , debería contener un intervalo de puntos de este segmento de línea. Pero el rayo que va de w a x intersecta a $|K|$ en un sólo punto, por hipótesis.

Ahora demostremos que $w * K$ es un complejo. Los simplejos de $w * K$ son de tres tipos: simplejos $a_0 \dots a_p$ de K , simplejos de la forma $wa_0 \dots a_p$ y el 0-simplejo w . Claramente toda cara de un simplejo de $w * K$ esta en $w * K$ por definición. Por otra parte la intersección de cualesquiera dos simplejos de la forma $wa_0 \dots a_p$ $w * K$ vuelve a ser de la misma forma, siendo cara de cada uno de ellos, los demás casos se siguen del hecho de que K es complejo.

Ejemplo 6. Si K_σ es el complejo que consiste del simplejo $\sigma = v_0 \dots v_n$ y sus caras, entonces $K_\sigma = v_0 * K_s$, donde s es la cara de σ opuesta v_0 . Así cada simplejo de dimensión positiva es un cono, Figura 1.6.

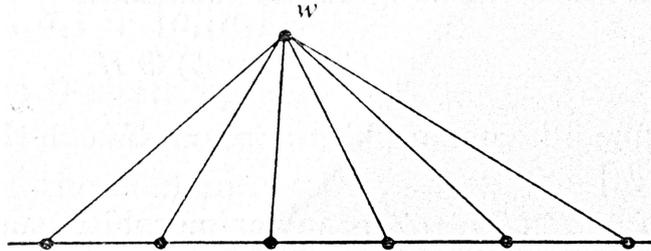


Figura 1.6: Cono

Definición 13. Sea $w * K$ un cono. Si $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ es un simplejo orientado de K , sea $[w, \sigma]$ que denota el simplejo orientado $[w, a_0, \dots, a_p]$ de $w * K$. Esta operación está bien definida, intercambiar dos vértices en la colección $[a_0, \dots, a_p]$ resulta en intercambiar dos vértices en la colección $[w, a_0, \dots, a_p]$. Más generalmente, si:

$$c_p = \sum n_i \sigma_i,$$

es una p -cadena de K , definimos

$$[w, c_p] = \sum n_i [w, \sigma_i].$$

Esta **operación corchete** es un homomorfismo llevando $C_p(K)$ en $C_{p+1}(w * K)$.

Se calcula finalmente de la fórmula frontera:

$$\partial [w, \sigma] = \begin{cases} \sigma - w & \text{si dim } \sigma = 0, \\ \sigma - [w, \sigma] & \text{si dim } \sigma > 0. \end{cases}$$

Esto conduce a las siguientes fórmulas más generales:

$$\begin{aligned} \partial [w, c_0] &= c_0 - \varepsilon(c_0)w, \\ \partial [w, c_p] &= c_p - [w, \partial c_p] \quad \text{si } p > 0. \end{aligned}$$

Teorema 7. Si $w * K$ es un cono, entonces para todo p :

$$\widetilde{H}_p(w * K) = 0.$$

En general, un complejo cuya homología reducida es nula en todas las dimensiones se dice que es **acíclico**.

Demostración. La homología reducida de $w * K$ se anula en dimensión 0, por que $|w * K|$ es conexo. Consideremos el caso $p > 0$. Sea z_p un p -ciclo de $w * K$ mostremos que z_p está en la frontera. Vamos a escribir:

$$z_p = c_p + [w, d_{p-1}],$$

donde c_p consiste en los términos de z_p que son llevados por K , y d_{p-1} es una cadena de K . Mostremos que

$$z_p - \partial[w, c_p] = 0;$$

entonces nuestro resultado se prueba. Por cálculo directo

$$z_p - \partial[w, c_p] = c_p + [w, d_{p-1}] - c_p + [w, \partial c_p] = [w, e_{p-1}],$$

donde $e_{p-1} = d_{p-1} + \partial c_p$ es una cadena de K . Ahora como z_p es un ciclo,

$$0 = \begin{cases} e_{p-1} - \varepsilon(e_{p-1})w & \text{si } p=1, \\ e_{p-1} - [w, \partial e_{p-1}] & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

La parte de esta cadena llevada por K es e_{p-1} ; por lo tanto $e_{p-1} = 0$, concluimos que

$$z_p - \partial[w, c_p] = [w, e_{p-1}] = 0,$$

como se deseaba. ■

1.4. Homomorfismos Inducidos por Aplicaciones Simpliciales

En esta sección veremos las propiedades functoriales de las aplicaciones simpliciales, se definirán las cadenas de homotopías y como influyen estas en los grupos de homología inducidas por las aplicaciones simpliciales.

Definición 14. Sea $f : K \rightarrow L$ una aplicación simplicial. Si $v_0 \dots v_p$ es un simplejo de K , entonces los puntos $f(v_0), \dots, f(v_p)$ generan un simplejo de L . Definimos un homomorfismo $f_{\#} : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ definiéndolo en los simplejos orientados como sigue:

$$f_{\#}([v_0, \dots, v_p]) = \begin{cases} [f(v_0), \dots, f(v_p)] & \text{si } f(v_0), \dots, f(v_p) \text{ son distintos,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida; intercambiar dos vértices en la expresión $[v_0, \dots, v_p]$ cambia el signo de la parte derecha de la ecuación. La familia de homomorfismos $\{f_{\#}\}$, uno en cada dimensión, es llamado la **aplicación cadena inducida por la aplicación simplicial f** .

Lema 5. El homomorfismo $f_{\#}$ conmuta con ∂ ; por lo tanto $f_{\#}$ induce un homomorfismo $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$.

Demostración. Necesitamos demostrar que.

$$\partial f_{\#}([v_0, \dots, v_p]) = f_{\#} \partial([v_0, \dots, v_p]). \quad (1.2)$$

Sea τ un simplejo de L generado por $f(v_0), \dots, f(v_p)$. Consideremos varios casos.

Caso 1. $\dim \tau = p$. En este caso, los vértices $f(v_0), \dots, f(v_p)$ son distintos y el resultado es consecuencia inmediata de la definición de $f_{\#}$ y ∂ .

Caso 2. $\dim \tau \leq p - 2$. En este caso, el lado izquierdo de (1.2) desaparece por que $f(v_0), \dots, f(v_p)$ no son distintos, y el lado derecho también desaparece por que para cada i , al menos dos de los puntos $f(v_0), \dots, f(v_{i-1}), f(v_{i+1}), \dots, f(v_p)$ son iguales.

Caso 3. $\dim \tau = p - 1$. En este caso, podemos asumir los vértices de manera ordenada, tal que $f(v_0) = f(v_1)$, y $f(v_1), \dots, f(v_p)$ son distintos. Entonces el lado izquierdo de (1.2) desaparece por definición. El lado derecho tiene sólo dos términos no cero, que es igual a:

$$[f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)] - [f(v_0), f(v_2), \dots, f(v_p)].$$

Como $f(v_0) = f(v_1)$, este término se cancela con el otro, como se deseaba.

El homomorfismo $f_{\#}$ lleva ciclos en ciclos, como la ecuación $\partial c_p = 0$ implica que $\partial f_{\#}(c_p) = f_{\#}\partial(c_p) = 0$. Y $f_{\#}$ lleva fronteras en fronteras, como la ecuación $c_p = \partial d_{p+1}$ implica que $f_{\#}(c_p) = f_{\#}(\partial d_{p+1}) = \partial f_{\#}(d_{p+1})$. Así $f_{\#}$ induce un homomorfismo $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ de grupos de homología. ■

Teorema 8. (a) Sea $i : K \rightarrow K$ la aplicación simplicial identidad. Entonces $i_* : H_p(K) \rightarrow H_p(K)$ es el homomorfismo identidad.

(b) Sea $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow M$ aplicaciones simpliciales. Entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

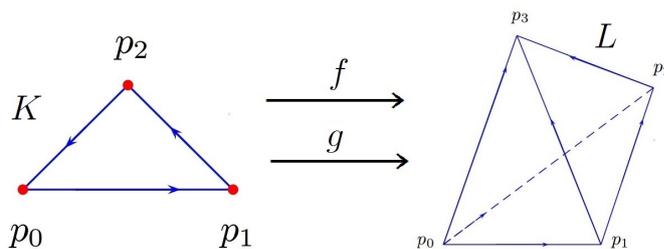
Demostración. Es inmediato de la definición que $i_{\#}$ es la identidad y $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$, como puede probar. El teorema se sigue. ■

Teorema 9. La aplicación cadena $f_{\#}$ preserva la aplicación aumento ϵ , por lo tanto, induce un homomorfismo f_* de grupos de homología reducida.

Demostración. Sea $f : K \rightarrow L$ una aplicación simplicial. Entonces $\epsilon(f_{\#}(v)) = 1$ y $\epsilon(v) = 1$ para cada vértice v de K . Así $\epsilon \circ f_{\#} = \epsilon$. Esta ecuación implica que $f_{\#}$ lleva el kernel de $\epsilon_K : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ en el kernel de $\epsilon_L : C_0(L) \rightarrow \mathbb{Z}$ y así induce un homomorfismo $f_* : \tilde{H}_0(K) \rightarrow \tilde{H}_0(L)$. ■

Sean $f, g : K \rightarrow L$ aplicaciones simpliciales, entonces estas aplicaciones definen homomorfismos $f_*, g_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$, la cuestión es cuando f_* y g_* inducen el mismo homomorfismo? Para aclarar esto, daremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 10. Sean f, g definidas como sigue:



$$\begin{array}{l} f : p_0 \rightarrow p_0 \quad g : p_0 \rightarrow p_0 \\ p_1 \rightarrow p_0 \quad p_1 \rightarrow p_1 \\ p_2 \rightarrow p_1 \quad p_2 \rightarrow p_2 \end{array}$$

Saber $f_{\#}, g_{\#}$ inducen el mismo grupo de homología basta con ver si $\forall z \in Z(K)$, $f_{\#}(z)$ y $g_{\#}(z)$ son homólogos, ya que los grupos de homología quedan completamente determinados por el grupo de ciclos.

El único ciclo del grupo $C_1(K)$ es $z = [p_0, p_1] + [p_1, p_2] + [p_2, p_0]$, notemos que

$$f_{\#}(z) = 0 \quad y \quad g_{\#}(z) = [p_0, p_1] + [p_1, p_2] + [p_2, p_0]$$

y claramente $f_{\#}$ y $g_{\#}$ no inducen el mismo homomorfismo ya que

$$f_* : H_1 \cong \mathbb{Z} \rightarrow e \quad y \quad g_* : H_1 \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 11. Con K y L los mismos complejos del ejemplo anterior, ahora definimos f, g como sigue:

$$\begin{array}{l} f : p_0 \rightarrow p_0 \quad g : p_0 \rightarrow p_0 \\ p_1 \rightarrow p_1 \quad p_1 \rightarrow p_1 \\ p_2 \rightarrow p_3 \quad p_2 \rightarrow p_2 \end{array}$$

Sea $z = [p_0, p_1] + [p_1, p_2] + [p_2, p_0]$ como antes, entonces

$$f_{\#}(z) = [p_0, p_1] + [p_1, p_3] + [p_3, p_0] \quad y \quad g_{\#}(z) = [p_0, p_1] + [p_1, p_2] + [p_2, p_0].$$

Notemos que $f_{\#}$ y $g_{\#}$ inducen el mismo homomorfismo ya que

$$f_* : H_1 \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad y \quad g_* : H_1 \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Pero esto no es casualidad, observemos que $f_{\#}(z) - g_{\#}(z) = \partial_2 d$, con $d = [p_0, p_1, p_3] - [p_0, p_1, p_2]$. Esto quiere decir que $f_{\#}(z)$ y $g_{\#}(z)$ son homólogos, cosa que no pasa en el ejemplo anterior.

Definición 15. Sean $f, g : K \rightarrow L$ aplicaciones simpliciales. Supongamos que para cada p , uno tiene un homomorfismo

$$D : C_p(K) \rightarrow C_{p+1}(L),$$

que satisface la ecuación

$$\partial D - D\partial = g_{\#} - f_{\#}.$$

Entonces D se dice que es cadena homotópica entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$.

Teorema 12. Si existe una cadena homotópica entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$, entonces el homomorfismo inducido por f_* y g_* , son iguales.

Demostración. Sea z un p -ciclo de K . Entonces

$$g_H(z) - f_H(z) = \partial D z + D \partial z = \partial D z + 0,$$

así $f_{\#}$ y $g_{\#}$ están en la misma clase de homología. Así $f_*({z}) = g_*({z})$, como se deseaba. ■

$$\begin{array}{ccc}
 & & C_{p+1}(L) \\
 & \nearrow D_p & \downarrow \partial_{p+1} \\
 C_p(K) & \xrightarrow{(f\#)_p} & C_p(L) \\
 \downarrow \partial_p & \xrightarrow{(g\#)_p} & \nearrow D_{p-1} \\
 C_{p-1}(K) & &
 \end{array}$$

1.5. Cadenas Complejas y Portadores Acíclicos

Muchas de las definiciones y resultados que hemos visto pretencen a un contexto más general.

Definición 16. Una **cadena compleja** \mathfrak{C} es una familia $\{C_p, \partial_p\}$ de grupos abelianos C_p y homomorfismos:

$$\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1},$$

indexada en los enteros, tal que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0 \forall p$.

Si $C_p = 0$ para $p < 0$ entonces \mathfrak{C} se dice que es una cadena compleja **no negativa**. Si C_p es un grupo abeliano libre para cada p , entonces \mathfrak{C} es una cadena compleja **libre**. El grupo

$$H_p(\mathfrak{C}) = \ker \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1},$$

es llamado el p -ésimo **grupo de homología** de la cadena compleja \mathfrak{C} .

Si \mathfrak{C} es una cadena compleja no negativa, un **aumento** para \mathfrak{C} es un epimorfismo $\epsilon : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\epsilon \circ \partial_1 = 0$. La **cadena compleja aumento** $\{\mathfrak{C}, \epsilon\}$ es la cadena compleja obtenida de \mathfrak{C} añadiendo $\mathbb{Z} = C_{-1}$ y usando ϵ como el operador frontera en dimensión 0. Los grupos de homología de la cadena compleja aumento son llamados los **grupos de homología reducida** de la cadena compleja original \mathfrak{C} , relativa a el aumento ϵ .

Definición 17. Sea $\mathfrak{C} = \{C_p, \partial_p\}$ y $\mathfrak{C}' = \{C'_p, \partial'_p\}$ cadenas complejas. Una **aplicación cadena** $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'$ es una familia de homomorfismos

$$\phi_p : C_p \rightarrow C'_p$$

tal que $\partial'_p \circ \phi_p = \phi_{p-1} \circ \partial_p \forall p$.

Una aplicación cadena $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'$ inducen los homomorfismos

$$(\phi_*)_p : H_p(\mathfrak{C}) \rightarrow H_p(\mathfrak{C}').$$

Definición 18. Sean $\phi, \psi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'$ aplicaciones cadenas, entonces una **cadena homotópica** de ϕ a ψ es una familia de homomorfismos

$$D_p : C_p \rightarrow C'_{p+1}$$

tal que

$$\partial'_{p+1} D_p + D_{p-1} \partial_p = \psi_p - \phi_p, \forall p.$$

Definición 19. Una aplicación cadena $\phi : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'$ es llamada **cadena equivalente** si existe una aplicación cadena $\phi' : \mathfrak{C}' \rightarrow \mathfrak{C}$ tal que $\phi \circ \phi'$ son cadenas homotópicas a la aplicación identidad de \mathfrak{C} y \mathfrak{C}' , respectivamente. Decimos que ϕ' es una **cadena homotópica inversa** a ϕ .

Definición 20. Dadas dos aplicaciones simpliciales $f, g : K \rightarrow L$, son llamadas **contiguas**, si para cada simplejo v_0, \dots, v_p de K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_p), g(v_0), \dots, g(v_p)$ generan un simplejo τ de L . (El simplejo τ puede ser de cualquier dimensión de 0 a 2_{p+1} , dependiendo de cuantos de estos son distintos.)

Pasamos a dar uno de los conceptos y teoremas más importantes, por ser base en la demostración de resultados de gran importancia.

Definición 21. Sean K y L complejos simpliciales. Un **portador acíclico** de K a L es una función Φ que asigna a cada simplejo σ de K , un subcomplejo $\Phi(\sigma)$ de L tal que:

- 1.- $\Phi(\sigma)$ es no vacío y acíclico.
- 2.- Si s es una cara de σ , entonces $\Phi(s) \subset \Phi(\sigma)$.

Si $f : C_p(K) \rightarrow C_q(L)$ es un homomorfismo, decimos que f es llevado por Φ si para cada p -simplejo orientado σ de K , la cadena $f(\sigma)$ es llevada por un subcomplejo $\Phi(\sigma)$ de L .

Teorema 13. (Teorema portador acíclico, versión geométrica[12]). Sea Φ un portador acíclico de K a L .

a) Si ϕ y ψ son dos aplicaciones cadena que preservan aumento de $\mathfrak{C}(K)$ a $\mathfrak{C}(L)$ que son llevados por Φ , entonces existe una cadena homotópica D de ϕ a ψ que también es llevado por Φ .

b) Existe una aplicación cadena que preservan aumento de $\mathfrak{C}(K)$ a $\mathfrak{C}(L)$ que es llevada por Φ .

Demostración. a) Para cada simplejo $\sigma = v_0 \dots v_p$ de K , sea $\Phi(\sigma)$ que denota el subcomplejo de L , que consiste del simplejo cuyo conjunto de vértices es $\{\phi(v_0), \dots, \phi(v_p), \psi(v_0), \dots, \psi(v_p)\}$, y sus caras. Observemos los siguientes hechos:

- 1.- $\Phi(\sigma)$ es no vacío y $\tilde{H}_i(\Phi(\sigma)) = 0 \forall i$.
- 2.- Si s es una cara de σ , entonces $\Phi(s) \subset \Phi(\sigma)$.
- 3.- Para cada simplejo orientado σ , la cadena $\phi_{\#}(\sigma)$ y $\psi_{\#}(\sigma)$ son llevados por $\Phi(\sigma)$.

Usando estos hechos vamos a construir la cadena de homotópica requerida $D : C_p(K) \rightarrow C_{p+1}(L)$ por inducción en p . Para cada σ , la cadena $D\sigma$ debera ser llevada por $\Phi(\sigma)$.

Sea $p = 0$, sea v un vértice de K . Ya que $\phi_{\#}$ y $\psi_{\#}$ preservan aumento $\epsilon(\psi_{\#}(v) - \phi_{\#}(v)) = 1 - 1 = 0$. Así $\psi_{\#}(v) - \phi_{\#}(v)$ representa un elemento del grupo homología reducido $\tilde{H}_0(\Phi(v))$. Debido a que este grupo desaparece, podemos elegir una 1-cadena Dv de L llevada por el subcomplejo $\Phi(v)$ tal que

$$\partial(Dv) = \psi_{\#}(v) - \phi_{\#}(v).$$

Ahora supongamos que D se define en dimensiones menores que p , tal que para cada simplejo orientado s de dimensión menor a p , la cadena D es llevada por $\Phi(s)$, tal que

$$\partial Ds + D\partial s = \psi_{\#}(s) - \phi_{\#}(s).$$

Sea σ un simplejo orientado de dimensión p . Queremos definir $D\sigma$ de modo que $\partial(D\sigma)$ sea igual a la cadena

$$c = \psi_{\#}(\sigma) - \phi_{\#}(\sigma) - D\partial\sigma.$$

Note que c es una cadena bien definida; $D\partial\sigma$ es definida por $\partial\sigma$ tiene dimensión $p-1$. Además c es un ciclo

$$\partial c = \partial\psi_{\#}(\sigma) - \partial\phi_{\#}(\sigma) - \partial D(\partial\sigma) = \partial\psi_{\#}(\sigma) - \partial\phi_{\#}(\sigma) - [\psi_{\#}(\partial\sigma) - \phi_{\#}(\partial\sigma) - D\partial(\partial\sigma)] = 0,$$

aplicando la hipótesis de inducción a la $p-1$ cadena $\partial\sigma$. Usando el hecho de que $\partial \circ \partial = 0$, vemos que $\partial c = 0$.

Por último, observemos que c es llevado por $\Phi(\sigma)$: tanto $\psi_{\#}(\sigma)$ como $\phi_{\#}(\sigma)$ son llevados por $\Phi(\sigma)$ por el hecho (3). Para demostrar que $D\partial\sigma$ es llevado por $\Phi(\sigma)$, note que la cadena $\partial\sigma$ es una suma de caras orientadas de σ . Para cada cara s , la cadena Ds es llevada por $\Phi(s)$ y $\Phi(s) \subset \Phi(\sigma)$ por el hecho (2). Así $D\partial\sigma$ es llevado por $\Phi(\sigma)$.

Como c es un p -ciclo llevado por $\Phi(\sigma)$ y $H_p(\Phi(\sigma)) = 0$, podemos elegir $p+1$ cadena $D\sigma$ llevada por $\Phi(\sigma)$ tal que:

$$\partial D\sigma = c = \psi_{\#}(\sigma) - \phi_{\#}(\sigma) - D\partial\sigma.$$

Entonces definamos $D(-\sigma) = -D(\sigma)$, repetimos este proceso para cada p -simplejo σ de K , entonces tenemos la cadena homotopía requerida D de dimensión p .

b) Procedemos como sigue: Para cada vértice v de K , definamos $\phi(v)$ como la 0-cadena c de $\Phi(v)$ tal que $\epsilon(c) = 1$. Esto lo podemos hacer porque $\Phi(v)$ es no vacío, así $\epsilon : \Phi(v) \rightarrow \mathbb{Z}$ es suprayectiva (De hecho podemos simplemente elegir a $\phi(v)$ ser un vértice de $\Phi(v)$). Entonces $\Phi(v)$ preserva aumento y

$$\partial\phi(v) = 0 = \phi(\partial v).$$

Sea $\sigma = [v, w]$ un 1-simplejo orientado de K . La cadena $c = \phi(\partial\sigma)$ está bien definida porque ∂v es una 0-cadena y ϕ sea definido en dimensión 0. Además c es llevado por $\Phi(\sigma)$, $\Phi(\partial v)$ es llevado por $\Phi(v)$ y $\Phi(w)$ ambos están contenidos en $\Phi(\sigma)$ por (2, definición de portador acíclico). Finalmente

$$\epsilon(c) = \epsilon\phi(\partial\sigma) = 0,$$

porque ϕ preserva aumento. Por lo tanto c representa un elemento $\widetilde{H}_0(\Phi(\sigma))$. Porque $\Phi(\sigma)$ es acíclico por (1 definición de portador acíclico), podemos elegir una 1-cadena llevada por $\Phi(\sigma)$ cuya frontera es c . Denotemos a esta 1-cadena por $\phi(\sigma)$, entonces

$$\partial\phi(\sigma) = c = \phi(\partial\sigma).$$

Para el paso de inducción, sea $p > 1$. Supongamos que $\dim s < p$ entonces $\phi(s)$ está definida y $\partial\phi(s) = \phi(\partial s)$. Sea σ un simplejo orientado de dimensión p , buscamos definir $\phi(\sigma)$. La cadena $c = \Phi(\partial\sigma)$ está bien definida por ser una $p-1$ cadena. Es llevada por $\Phi(\sigma)$ ya que $\Phi(\partial\sigma)$ es llevada por la unión de los complejos $\Phi(s_i)$ donde s_i se extiende sobre las $p-1$ caras de σ , y cada uno de estos complejos está contenido en $\Phi(\sigma)$. Además, c es un ciclo ya que

$$\partial c = \partial\phi(\partial\sigma) = \phi(\partial\partial\sigma) = 0.$$

Aquí aplicamos la hipótesis de inducción a la $p-1$ cadena $\partial\sigma$. Como $\Phi(\sigma)$ es acíclico podemos elegir $\phi(\sigma)$ tal que $\partial\phi(\sigma) = c$, entonces $\partial\phi(\sigma) = \phi(\partial\sigma)$, como se deseaba. ■

Capítulo 2

Invarianza Topológica de Grupos de Homología

En el capítulo anterior, definimos una función (operador frontera) que asigna a cada complejo simplicial K una sucesión de grupos abelianos llamados grupos de homología. Ahora probaremos que estos grupos dependen solamente del espacio topológico adyacente de K . La forma en que se aborda este problema es estudiar las aplicaciones continuas de un politopo $|K|$ en otro, y lo que estas aplicaciones hacen en los grupos de homología. Mostraremos que toda aplicación continua $h_* : |K| \rightarrow |L|$ induce de forma natural un homomorfismo $h_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ de grupos de homología de los correspondientes complejos simpliciales. Recordemos que los homomorfismos estudiados anteriormente se inducían a través de aplicaciones simpliciales, pero en caso general no toda aplicación continua de un politopo a otro es una aplicación simplicial, en este capítulo nos dedicaremos a demostrar que cualquier función continua h puede ser aproximada por una aplicación simplicial f , y que el resultado del homomorfismo inducido sólo depende de h , no de la aproximación simplicial elegida.

Además cuando h es un homeomorfismo de espacios topológicos, entonces h_* es un isomorfismo de grupos. La invarianza topológica de los grupos de homología se sigue.

2.1. Aproximación Simplicial

Estudiaremos lo que significa que cualquier función continua pueda ser “aproximada” por una aplicación simplicial.

Definición 22. Sea $h : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Decimos que h satisface la **condición estrella** con respecto a K y L si para cada vértice v de K , existe un vértice w de L tal que:

$$h(St v) \subset St w.$$

Lema 6. Sea $h : |K| \rightarrow |L|$ que satisface la condición estrella con respecto a K y L . Elijamos $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ de manera que cada vértice v de K ,

$$h(St v) \subset St f(v).$$

(a) Dado $\sigma \in K$. Elijamos $x \in Int \sigma$; y τ de manera que $h(x) \in Int \tau$. Entonces f lleva cada vértice de σ a un vértice de τ .

(b) f puede extenderse a una aplicación simplicial de K en L la cual denotamos también por f .

(c) Si $g : K \rightarrow L$ es otra aplicación simplicial tal que $h(St v) \subset St g(v)$ para cada vértice v de K , entonces f y g son contiguas.

Demostración. (a) Sea $\sigma = v_0 \dots v_p$. Dado $x \in St v_i \forall i$, por hipótesis

$$h(x) \in h(St v_i) \subset St f(v_i).$$

Esto significa que $h(x) \in St f(v_i) \forall i$. Por lo tanto, los puntos $\{f(v_0), \dots, f(v_p)\}$ deben ser un subconjunto de los vértices τ .

(b) Ya que f lleva los vértices de σ a vértices de un simplejo de L , puede extenderse a una aplicación simplicial $f : K \rightarrow L$.

(c) Sea σ , x y τ como antes, ya que

$$h(x) \in h(St v_i) \subset St g(v_i),$$

para $i = 0, \dots, p$, los vértices $g(v_i)$ también son vértices de τ . Por lo tanto $f(v_0), \dots, f(v_p), g(v_0), \dots, g(v_p)$ generan una cara de τ , así f y g son contiguos. ■

Definición 23. Sea $h : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Si $f : K \rightarrow L$ es una aplicación simplicial tal que:

$$h(St v) \subset St f(v),$$

para cada vértice v de K , entonces f es llamada una aproximación simplicial para h .

Lema 7. Sea $f : K \rightarrow L$ una aproximación simplicial de $h : |K| \rightarrow |L|$. Dado $x \in |K|$, existe un simplejo τ de L tal que $h(x) \in Int \tau$ y $f(x) \in \tau$.

Demostración. Del inciso (a) del Lema 6, dado $x \in |K|$ tal que $h(x) \in Int \tau$ se tiene que $f(x) \in \tau$. ■

Lema 8. Sean $h : |K| \rightarrow |L|$ y $k : |L| \rightarrow |M|$ con aproximaciones simpliciales $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow M$ respectivamente. Entonces $g \circ f$ es una aproximación simplicial de $k \circ h$.

Demostración. Sabemos que $g \circ f$ es una aplicación simplicial. Si v es un vértice de K , entonces:

$$h(St v) \subset St f(v),$$

porque f es una aproximación simplicial de h . Se sigue que :

$$k(h(St v)) \subset k(St f(v)) \subset St(g(f(v))),$$

porque g es una aproximación simplicial de k . ■

Observemos que si $h : |K| \rightarrow |L|$ es una aplicación continua que satisface la condición estrella con respecto a K y L , existe un homomorfismo bien definido

$$h_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$$

tomando $h_* = f_*$, donde f es cualquier aproximación simplicial de h . Cuando nos referimos a la expresión “bien definido”, quiere decir que si dada g otra aproximación simplicial de h entonces $f_{\#}$ y $g_{\#}$ inducen el mismo homomorfismo. En efecto por el Lema 6 inciso c) se tiene que f y g son contiguas. Ahora mostrar que inducen el mismo homomorfismo

por el Teorema 12 basta con demostrar que existe una cadena homotópica entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$. Construir tal cadena homotópica se sigue del Teorema 13 inciso a) cambiando $\Phi(\sigma)$ por $L(\sigma)$.

Sin embargo, en general una aplicación continua arbitraria $h : |K| \rightarrow |L|$ no satisface la condición estrella respecto a K y L , por lo tanto no podemos definir un homomorfismo h_* como antes. Para esto se tienen dos ideas:

Primera, mostraremos que dada $h : |K| \rightarrow |L|$, es posible “subdividir” K , formando un nuevo complejo K' con el mismo espacio adyacente de K , tal que h que satisface la condición estrella respecto a K' y L . Este paso es totalmente geométrico, y se abordará en la sección 2.2.

Segundo, mostraremos que la aplicación identidad $i : |k'| \rightarrow |K|$ que posee una aproximación simplicial $g : K' \rightarrow K$, el cual induce un isomorfismo en los grupos de homología g_* . Este paso es completamente algebraico y se llevará a cabo en la sección 2.3. El homomorfismo $h_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ inducido por h es entonces definido por $h_* = f_* \circ g^{-1}$, donde f es una aproximación simplicial de h , respecto a K' y L . Las propiedades de este homomorfismo se concluirán en la sección 2.4 .

2.2. Subdivisión Baricéntrica y Teorema de Aproximación Simplicial

En esta sección mostraremos que un complejo finito, puede ser “subdividido” por simplejos tan pequeños como se desee.

Definición 24. Sea K un complejo simplicial en \mathbb{R}^n . Un complejo K' se dice que es una **subdivisión** de K si :

- (1) Cada simplejo de K' está contenido en un simplejo de K .
- (2) Cada simplejo de K es igual a la unión finita de simplejos de K' .

Lema 9. Sea K' una subdivisión de K . Entonces para cada vértice w de K' existe un vértice v de K tal que:

$$St(w, K') \subset St(v, K).$$

En efecto, si σ es el simplejo de K tal que $w \in Int \sigma$, entonces esta inclusión se tiene precisamente cuando v es un vértice de σ .

Demostración. Si esta inclusión se tiene, entonces puesto que w pertenece a $St(w, K')$, w también pertenece al interior de algún simplejo de K que tiene a v como un vértice.

Recíprocamente, supongamos $w \in Int \sigma$ y v es un vértice de σ . Es suficiente mostrar que:

$$|K| - St(v, K) \subset |K| - St(w, K').$$

El conjunto del lado izquierdo de esta inclusión, es la unión de todos los simplejos de K que no tienen a v como un vértice. Por lo tanto también es la unión de los simplejos τ de K' . No hay tal simplejo τ que pueda tener a w como un vértice, porque $w \in Int \sigma \subset St(v, K)$. Así cualquiera de tales simplejos pertenecen a $|K| - St(w, K')$. ■

Lema 10. Si K es un complejo, entonces la intersección de cualquier colección de subcomplejos de K , es un subcomplejo de K . Recíprocamente si $\{K_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ es una colección de complejos en \mathbb{R}^n , tal que $\forall \alpha, \beta \in I$ $|K_{\alpha}| \cap |K_{\beta}|$ es el politopo de un complejo que es un subcomplejo de K_{α} y K_{β} , entonces la unión $\cup K_{\alpha}$ es un complejo.

Ahora describiremos un paso del proceso de subdivisión.

Definición 25. Sea K un complejo; supongamos que L_p es una subdivisión de la p -estructura de K . Sea σ un $p + 1$ -simplejo de K . El conjunto $Bd \sigma$ es el politopo de un subcomplejo de la p -estructura de K , y por lo tanto de un subcomplejo de L_p ; denotemos este último subcomplejo por L_σ . Si w_σ es un punto interior de σ , entonces el cono $w_\sigma * L_\sigma$ es un complejo cuyo espacio subyacente es σ . Definimos L_{p+1} a la unión de L_p y los complejos $w_\sigma * L_\sigma$, $\forall p + 1$ -simplejo $\sigma \in K$. Mostremos que L_{p+1} es un complejo, se dice que es la **subdivisión de $K^{(p+1)}$ obtenida por fijar L_p a los puntos w_σ** .

Para verificar que L_{p+1} es un complejo, notemos que:

$$|w_\sigma * L_\sigma| \cap |L_p| = Bd \sigma,$$

que es el politopo de el subcomplejo L_σ de tanto $w_\sigma * L_\sigma$ y L_p . Similarmente si τ es otro $p + 1$ -simplejo de K , entonces los espacios $|w_\sigma * L_\sigma|$ y $|w_\tau * L_\tau|$ intersectan en el simplejo $\sigma \cap \tau$ de K que es el politopo de un subcomplejo de L_p y por lo tanto de ambos L_σ y L_τ . Se sigue del Lema 10 que L_{p+1} es un complejo.

Definición 26. Si $\sigma = v_0 \dots v_p$ el **baricentro** de σ es definido como el punto:

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} v_i.$$

Es el punto que pertenece al $Int \sigma$, donde todas las coordenadas baricéntricas con respecto a los vértices de σ son iguales.

Definición 27. Sea K un complejo. Definimos una sucesión de subdivisiones de las estructuras de K como sigue: Sea $L_{(0)} = K^{(0)}$, la 0-estructura de K . En general, si L_p es una subdivisión de la p -estructura de K , sea L_{p+1} la subdivisión de los $p + 1$ -estructuras obtenidas por fijar L_p a los baricentros de los $p + 1$ -simplejos de K . Por el Lema 10, la unión de los complejos L_p es una subdivisión de K . Es llamada la **primera subdivisión baricéntrica** de K y denotada por $sd K$.

Habiendo formado un complejo $sd K$, podemos ahora construir su primera subdivisión baricéntrica $sd(sdK)$, la cual denotamos por $sd^2 K$. Este complejo es llamado la **segunda subdivisión baricéntrica** de K . En general se define $sd^n K$ de la misma manera.

En la Figura 2.1, se presentan la primera y segunda subdivisión baricéntrica del complejo K

Utilizaremos la notación $\sigma_1 \succ \sigma_2$ en el sentido " σ_2 es una cara propia de σ_1 ."

Lema 11. El complejo $sd K$ es igual a la colección de todos los simplejos de la forma:

$$\sigma_1^* \sigma_2^* \dots \sigma_n^*,$$

donde $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \dots \succ \sigma_n$.

Demostración. Probemos este hecho por inducción. Es inmediato que los simplejos de $sd K$ que estan en la subdivisión de $K^{(0)}$ son de esta forma. (Cada simplejo es un vértice de K , y $v^* = v$ para cada vértice.)

Supongamos ahora que cada simplejo de $sd K$ que esta en $|K^{(p)}|$ es de esta forma. Sea τ un simplejo de $sd K$ que esta en $|K^{(p+1)}|$ y no en $|K^{(p)}|$. Entonces τ pertenece

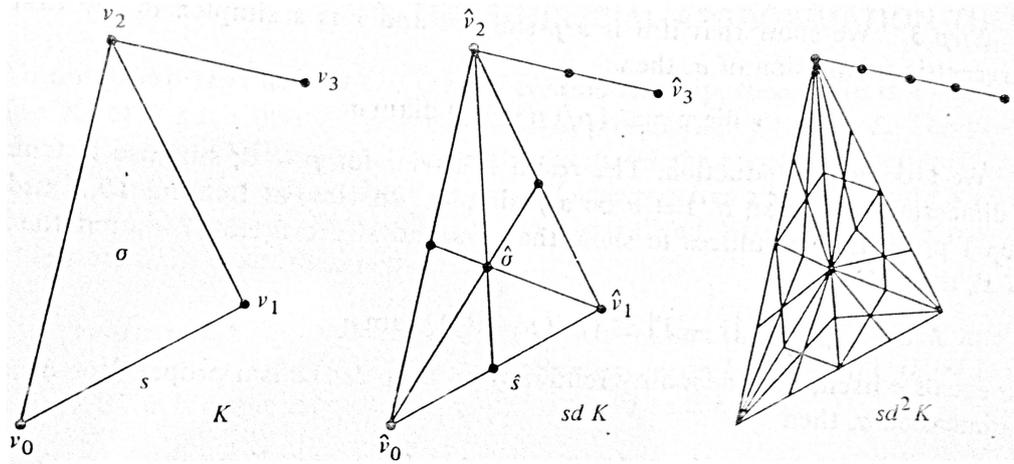


Figura 2.1: Subdivisión Baricéntrica

a uno de los complejos $\sigma^* * L_\sigma$, donde σ es un $p + 1$ -simplejo de K y L_σ es la primera subdivisión baricéntrica de el complejo que consiste de las caras propias de σ . Por hipótesis de inducción cada simplejo de L_σ es de la forma $\sigma_1^* \sigma_2^* \dots \sigma_n^*$, donde $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \dots \succ \sigma_n$ y σ_1 es una cara propia de σ . Entonces τ también es de la forma:

$$\sigma^* . \sigma_1^* \sigma_2^* \dots \sigma_n^*,$$

que es la forma deseada. ■

Teorema 14. Sea K un complejo, dotemos a $|K|$ de una métrica, entonces para $\varepsilon > 0$ fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada simplejo de $sd^N K$ tiene diámetro menor que ε .

Demostración. $|K|$ es compacto, por ser unión finita de subespacios compactos, por lo tanto es irrelevante cual métrica usemos para $|K|$. (Por que si d_1 y d_2 son dos métricas para $|K|$, entonces la aplicación identidad de $(|K|, d_1)$ a $(|K|, d_2)$ es uniformemente continua. Así dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cualquier conjunto con d_1 -diámetro menor que δ tiene d_2 -diámetro menor que ε). Por lo tanto también podemos utilizar la siguiente métrica en \mathbb{R}^n

$$|x - y| = \max |x_i - y_i|, \text{ con } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Paso 1.- Mostremos que si $\sigma = v_0 \dots v_p$ es un simplejo, entonces el diámetro de σ es igual al número $l = \max |v_i - v_j|$, que es la máxima distancia entre los vértices de σ . Ya que $v_i, v_j \in \sigma$ se tiene que $\text{diam}(\sigma) \geq l$. Probemos la desigualdad inversa.

Primero mostremos que $|x - v_i| \leq l$ para todo $x \in \sigma$. Consideremos la bola cerrada centrada en v_i de radio l en \mathbb{R}^n definida por la ecuación:

$$\mathbb{B}(v_i, l) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - v_i| \leq l\}.$$

$\mathbb{B}(v_i, l)$ es un conjunto convexo, por lo tanto, ya que contiene todos los vértices de σ , también contiene a σ . Entonces $|x - v_i| \leq l$ para $x \in \sigma$.

Ahora mostremos que $|x - z| \leq l$ para todo $x, z \in \sigma$, obteniendo $\text{diam}(\sigma) \leq l$ como deseabamos. Dado $x \in \sigma$, consideremos la bola cerrada $\mathbb{B}(x; l)$. Este conjunto contiene todos los vértices de σ , por el resultado de el párrafo anterior. Como es convexo, contiene a σ , así que $|x - z| \leq l$ para $x, z \in \sigma$.

Paso 2.- Mostremos que si σ tiene dimensión p , entonces para cada $z \in \sigma$,

$$|\sigma^* - z| \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(\sigma).$$

En efecto, notemos que

$$|v_0 - \sigma^*| = \left| v_0 - \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} v_i \right| \leq \sum_{i=0}^p \left| \frac{1}{p+1} (v_0 - v_i) \right| \leq \left(\frac{p}{p+1} \right) \max |v_0 - v_i| \leq \left(\frac{p}{p+1} \right) \text{diam}(\sigma).$$

Un cálculo similar vale para $|v_j - \sigma^*|$. Por lo tanto la bola cerrada centrada en σ^* de radio $(p/(p+1))\text{diam}(\sigma)$ contiene todos los vértices de σ y por convexidad, contiene a σ .

Paso 3.- Mostremos que si σ es un p -simplejo y τ es un simplejo en la primera subdivisión baricéntrica de σ , entonces

$$\text{diam}(\tau) \leq \left(\frac{p}{p+1} \right) \text{diam}(\sigma).$$

Procederemos por inducción. El resultado es trivial para $p = 0$; supongamos que es verdadero en dimensiones menores que p . Sea σ un p -simplejo. En vista del Lema 11 y del Paso 1, es suficiente mostrar que si s y s' son caras de σ tal que $s \succ s'$ entonces:

$$|s^* - s'| \leq \left(\frac{p}{p+1} \right) \text{diam}(\sigma).$$

Si s es igual a σ esta desigualdad se sigue del Paso 2. Si s es una cara propia de σ de dimensión q , entonces

$$|s^* - s'| \leq \left(\frac{q}{q+1} \right) \text{diam}(s) \leq \left(\frac{p}{p+1} \right) \text{diam}(\sigma).$$

La primera desigualdad se sigue por la hipótesis de inducción; y la segunda del hecho que $f(x) = x/(x+1)$ es creciente para $x > 0$.

Paso 4.- Sean K de dimensión n y d el máximo diámetro de un simplejo de K . Del Paso.- 2 se sigue que el diámetro máximo de un simplejo en la N -ésima subdivisión baricéntrica de K es $(n/(n+1))^N d$, como $(n/(n+1)) < 1$ la sucesión $\{(n/(n+1))^N d\}_{N \in \mathbb{N}}$ es convergente y converge a 0, por lo tanto $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall N > N_1$ se tiene que $(n/(n+1))^N d < \epsilon$. ■

Ya podemos mostrar que si $h : |K| \rightarrow |L|$ es una aplicación continua, entonces existe una subdivisión K' de K tal que h posee una aproximación simplicial $f : K' \rightarrow L$.

Teorema 15. (Teorema de aproximación simplicial) Sean K y L complejos. Dada una aplicación continua $h : |K| \rightarrow |L|$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que h tiene una aproximación simplicial $f : sd^N K \rightarrow L$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{w \in L^{(0)}} \{h^{-1}(St w)\}$ una cubierta abierta de $|K|$. Como $|K|$ es un espacio métrico compacto, existe un número λ tal que cualquier conjunto de diámetro menor que λ esta en uno de los elementos de \mathcal{A} , este número es llamado número de

Lebesgue para \mathcal{A} . Si no hubiese tal λ , uno podría elegir una sucesión C_n de conjuntos, donde C_n tiene diámetro menor que $1/n$, pero no es ningún elemento de A . Elijamos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \in C_n$ pero $x_n \notin C_{n+1}$, por la compacidad de $|K|$, existe alguna subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a algún $x \in |K|$. Por otra parte $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$ por ser cubierta abierta. Como A es un conjunto abierto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \subset A$, por lo tanto $C_{n_i} \subset A$ para $n_i > \varepsilon$, contrario a la construcción.

Elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $sd^N K$ tenga diámetro menor que $\lambda/2$. Entonces cada estrella con vértice en $sd^N K$ tiene diámetro menor que λ , por lo que se encuentra en unos de los conjuntos $h^{-1}(St w)$. Entonces $h : |K| \rightarrow |L|$ satisface la condición estrella relativa a $sd^N K$ y L , y la aproximación simplicial deseada existe. ■

2.3. Subdivisión Algebraica

En esta sección probaremos que si K es cualquier complejo y si K' es una subdivisión de K , entonces existe una cadena de aplicaciones definida como $\lambda : C_p(K) \rightarrow C_p(K')$ llamado el operador subdivisión que induce un isomorfismo de grupos de homología. Por lo tanto, si $g : K' \rightarrow K$ es cualquier aproximación simplicial a la aplicación identidad de $|K|$, entonces λ y $g_{\#}$ son cadenas homotópicas inversas una a la otra, así g_* es también un isomorfismo.

Lema 12. Sea K' una subdivisión de K . Entonces la aplicación identidad $i : |K| \rightarrow |K|$ tiene una aproximación simplicial:

$$g : K' \rightarrow K.$$

Sea τ un simplejo de K' y sea σ un simplejo de K ; si $\tau \subset \sigma$, entonces $g(\tau) \subset \sigma$.

Demostración. Por el Lema 9, la aplicación i tiene una aproximación simplicial g . Dado $\tau \subset \sigma$, sea w un vértice de τ . Entonces w está en el interior de σ o en una cara de σ . Entonces g lleva w en un vértice de σ por el Lema 6. ■

Definición 28. Sea K' una subdivisión de K . Si σ es un simplejo de K , sea $K(\sigma)$ que denote el subcomplejo de K que consiste de σ y sus caras, y sea $K'(\sigma)$ que denota el subcomplejo de K' cuyo politopo es σ .

Teorema 16. (Teorema de subdivisión algebraica [12]) Sea K' una subdivisión de K . Existe una única aplicación cadena que preserva aumento

$$\lambda : \mathfrak{C}(K) \rightarrow \mathfrak{C}(K')$$

tal que $\lambda(\sigma)$ es llevado por $K'(\sigma)$ para cada σ . Si $g : K' \rightarrow K$ es una aproximación simplicial a la identidad. Entonces λ y $g_{\#}$ son cadenas homotópicas inversas, por lo tanto λ_* y g_* son isomorfismos.

Llamamos a λ el operador subdivisión.

Demostración. Paso 1.- Mostremos primero que el teorema se cumple si K' satisface la condición de que para cada $\sigma \in K$ la subdivisión inducida $K'(\sigma)$ de σ es acíclico. Usaremos el Teorema 13, la versión geométrica de el teorema del portador acíclico. Definamos portadores acíclicos como sigue:

$$\Psi \circ K \begin{array}{c} \xrightarrow{\Lambda} \\ \xleftarrow{\Theta} \end{array} K' \circ \Phi.$$

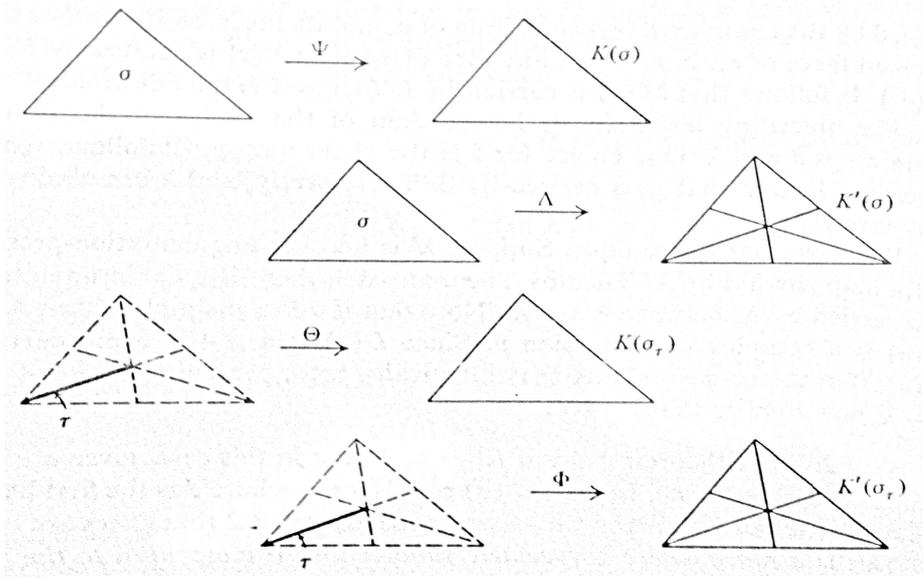


Figura 2.2: Portadores

Los portadores Ψ y Λ son fáciles de definir; establecidos

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma) &= K(\sigma), \\ \Lambda(\sigma) &= K'(\sigma),\end{aligned}$$

para cada $\sigma \in K$. El complejo $K(\sigma)$ es acíclico por que consiste de un simplejo y sus caras, y el complejo $K'(\sigma)$ es acíclico por hipótesis. La condición de inclusión para cualquier portador acíclico es inmediata; si $s \prec \sigma$, entonces $K(s) \subset K(\sigma)$ y $K'(s) \subset K'(\sigma)$.

Para definir Θ y Φ , procedemos como sigue: Para cada simplejo $\tau \in K'$, sea σ_τ el simplejo de K de menor dimensión tal que $\tau \subset \sigma_\tau$. Entonces si t es una cara de τ , tenemos $\sigma_t \subset \sigma_\tau$. Ya que ambos σ_t y σ_τ contienen a t , la intersección también contiene a t ; como σ_t tiene dimensión mínima, entonces σ_t debe ser igual a la intersección. Definimos:

$$\begin{aligned}\Theta(\tau) &= K(\sigma_\tau), \\ \Phi(\tau) &= K'(\sigma_\tau);\end{aligned}$$

ambos complejos son acíclicos. La condición de inclusión se sigue del hecho que si $t \prec \tau$, entonces $\sigma_t \subset \sigma_\tau$. Ver Figura 2.2, la cual ilustra estos portadores en el caso donde $K' = sdK$. Por el Teorema 13 existen aplicaciones cadenas λ y θ

$$C_p(K) \begin{matrix} \xrightarrow{\lambda} \\ \xleftarrow{\theta} \end{matrix} C_p(K')$$

que preservan aumento y son llevados por Λ y Θ , respectivamente.

Ahora la aplicación identidad $C_p(K) \rightarrow C_p(K)$ es llevada por Ψ (trivialmente). Mostremos que $\theta \circ \lambda$ es también llevado por Ψ ; de donde se sigue que $\theta \circ \lambda$ es una cadenas de homotópica a la identidad. Si σ es un simplejo de K , entonces $\lambda(\sigma)$ es una cadena de $K'(\sigma)$. Ahora cada simplejo τ en la subdivisión $K'(\sigma)$ de σ esta contenido en σ , de donde σ_τ que es igual a σ o a una cara de σ . En cualquier caso, si τ aparece en la cadena $\lambda(\sigma)$, entonces $\theta(\tau)$ es llevado por $K(\sigma_\tau) \subset K(\sigma)$. Así $\theta(\lambda(\sigma))$ es una cadena de $K(\sigma)$, así $\theta \circ \lambda$ es llevada por Ψ .

La aplicación identidad $C_p(K') \rightarrow C_p(K')$ es llevada por Φ ; para τ que esta contenido en σ_τ por definición, así pues τ es un simplejo de $K'(\sigma_\tau)$. Mostremos que $\lambda \circ \theta$ es una cadena homotópica a la identidad. Si $\tau \in K'$, entonces $\theta(\tau)$ es llevado por el complejo $K(\sigma_\tau)$ que consiste de σ_τ y sus caras, por lo que es igual a la suma de caras orientadas de σ_τ . Ahora si s es cualquier cara de σ_τ , entonces $\lambda(s)$ es llevado por $K'(s) \subset K'(\sigma_\tau)$. Se sigue que $\lambda(\theta(\tau))$ es llevado por $K'(\sigma_\tau) = \Phi(\tau)$, como se deseaba.

La discusión anterior es independiente de la elección de las aplicaciones cadena particulares θ y λ . Una opción para θ es la aplicación cadena $g_\#$; se sigue del anterior lema que $g_\#$ es llevado por Θ . Por lo tanto, $g_\#$ y λ son cadenas homotópicas inversas.

Mostremos que λ es única. Supongamos que λ' es otra aplicación cadena que preserve aumento llevada por Λ . Entonces por el Teorema 13, existe una cadena homotópica D , también llevada por Λ , entre λ y λ' . Observemos que si σ es un p -simplejo, entonces $\Lambda(\sigma) = K'(\sigma)$ es un complejo de dimensión p . Ya que $D(\sigma)$ es un $p+1$ cadena llevada por $K'(\sigma)$, que debe de ser cero. Así D es idénticamente cero, la ecuación $\partial D + D\partial = \lambda - \lambda'$, ahora implica que $\lambda = \lambda'$.

Paso 2.- El teorema se cumple si $K' = sd K$. En este caso, dado $\sigma \in K$, el complejo $K'(\sigma)$ es un cono. En efecto, $K'(\sigma)$ es igual $\sigma^* * J$, donde J , es la primera subdivisión baricéntrica de $Bd \sigma$. Y sabemos del Teorema 7 que los conos son acíclicos.

Este es un lugar donde la subdivisión baricéntrica es esencial para la prueba.

Paso 3.- El teorema es verdadero si $K' = sd^N K$. En vista del Paso 1, es suficiente probar que para cualquier simplejo σ de K , el complejo $sd^N K(\sigma)$ es acíclico. Esto se sigue del Paso 2, que implica que para cualquier complejo L

$$\tilde{H}_i(L) \cong \tilde{H}_i(sd L) \cong \tilde{H}_i(sd^2 L) \cong \dots$$

En particular, si L es acíclico, también lo es $sd^N L$.

Paso 4.- El teorema se cumple en general. En vista del Paso 1, es suficiente probar que si $\sigma \in K$ y si K' es cualquier subdivisión de K , entonces $K'(\sigma)$ es acíclico.

Sea $L = K(\sigma)$ y $L' = K'(\sigma)$. Entonces L es acíclico, y deseamos probar que L' también lo es. Procederemos como sigue. Sea $g : L \rightarrow L'$ una aproximación simplicial a la identidad. Elegimos N de modo que la aplicación identidad $i : |L'| \rightarrow |L|$ posee una aproximación simplicial $f : sd^N L \rightarrow L'$, para esto necesitamos el Teorema 15. Procediendo similarmente elegimos M tal que la identidad tiene una aproximación simplicial $k : sd^M(L) \rightarrow sd^N L$.

Ahora observemos que $g \circ f$ es una aproximación simplicial a la identidad, de manera que por el Paso 3 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ es un isomorfismo. Por la misma razón $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ es un isomorfismo. El primer hecho implica que f_* es inyectiva y el segundo implica que f_* es suprayectiva. Así f_* es un isomorfismo. Finalmente por que $g_* \circ f_*$ y f_* son isomorfismos, así lo es g . Así L es acíclico. ■

2.4. Invarianza Topológica de los Grupos de Homología

En esta sección probaremos el teorema más importante de este capítulo, La Invarianza de los Grupos de Homología simpliciales.

Definición 29. Sean K y L complejos simpliciales y $h : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Elegir una subdivisión K' de K tal que h posee una aproximación simplicial

$f : K' \rightarrow L$. Sea $\lambda : \mathfrak{C}(K) \rightarrow \mathfrak{C}(K')$ el operador subdivisión. Definimos el **homomorfismo inducido por h**

$$h_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L),$$

por la ecuación $h_* = f_* \circ \lambda_*$.

Note que una vez que K' ha sido elegido, el homomorfismo h_* es independiente de la aproximación simplicial $f : K' \rightarrow L$ de h , que se haya elegido. Porque cualesquiera dos aproximaciones simpliciales son contiguas.

Observemos también que si $g : K' \rightarrow K$ es una aproximación simplicial a la aplicación identidad $i_{|K|}$ de $|K|$ en sí mismo, entonces λ_* y g_* son inversas una a la otra. Por lo tanto, una podría igual definir:

$$h_* = f_* \circ (g_*)^{-1}.$$

Usemos este hecho para mostrar que h_* es independiente de la elección de la subdivisión de K' . Supongamos que K'' es otra subdivisión de K tal que h tiene una aproximación simplicial K'' en L . Mostremos que si h_* es definida usando la subdivisión K'' el resultado es el mismo que con K' .

La demostración es especialmente fácil en el caso cuando la aplicación identidad de $|K|$ tiene una aproximación simplicial $k : K'' \rightarrow K'$, como el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K'' & \xrightarrow{k} & K' \\ & & \swarrow \begin{array}{l} g \\ f \end{array} & \begin{array}{l} \rightarrow K \\ \rightarrow L \end{array} \end{array}$$

Entonces ya que $g \circ k$ y $f \circ k$ son aproximaciones simpliciales a la identidad y a h , respectivamente, el homomorfismo h_* definido mediante la subdivisión K'' , igual en la composición:

$$(f \circ k)_* \circ (g \circ k)_*^{-1} = (f_* \circ k_*) \circ (g_* \circ k_*)^{-1} = f_* \circ g_*^{-1}.$$

El resultado es el mismo como cuando h_* es definido usando la subdivisión K' . El caso general es probando eligiendo una subdivisión K''' de K tal que la aplicación identidad tiene aproximaciones simpliciales:

$$k_1 : K''' \rightarrow K' \quad \text{y} \quad k_2 : K''' \rightarrow K''.$$

Entonces usando K''' para definir h_* da el mismo resultado que usando K' o K'' .

Hay que señalar que, hablando con propiedad, el homomorfismo h_* no sólo depende de los espacios $X = |K|$ y $Y = |L|$ y la aplicación continua $h : X \rightarrow Y$, si no también en particular, de los complejos K y L cuyo politopo son X y Y , respectivamente. Si M y N son otros complejos cuyos politopos son X y Y , respectivamente, entonces h también induce un homomorfismo

$$h_* : H_p(M) \rightarrow H_p(N).$$

Realmente se debe utilizar una notación como $(h_{K,L})_*$ y $(h_{M,N})_*$ para distinguir entre los homomorfismos. Vamos a abusar de la terminología, sin embargo, y el uso de la notación sencilla h_* , apoyandose en el contexto para que su significado sea claro.

Teorema 17. (Propiedades Funtoriales) La aplicación identidad $i : |K| \rightarrow |K|$ induce el homomorfismo identidad $i_* : H_p(K) \rightarrow H_p(K)$. Si $h : |K| \rightarrow |L|$ y $k : |L| \rightarrow |M|$ son aplicaciones continuas, entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Los mismos resultados se tienen para la homología reducida.

Demostración. Que i_* es la identidad es inmediato de la definición. Para comprobar la segunda afirmación, elegimos $f_0: L \rightarrow M$ y $g_0: L \rightarrow L$ como aproximaciones simpliciales a k y $i_{|L|}$ respectivamente. Entonces elegimos $f_1: K' \rightarrow L$ y $g_1: K' \rightarrow K$ como aproximaciones simpliciales a k y $i_{|L|}$, respectivamente. Tenemos el siguiente diagrama de aplicaciones continuas y aplicaciones simpliciales: ahora $f_0 \circ f_1$ es una aproximación simplicial a $k \circ h$,

$$\begin{array}{ccccc}
 |K| & \xrightarrow{h} & |L| & \xrightarrow{k} & |M| \\
 K & & L & & M \\
 \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\
 g_1 & & g_0 & & f_0 \\
 K' & \nearrow & L' & & \\
 & f_1 & & &
 \end{array}$$

por lo tanto,

$$(k \circ h)_* = (f_0 \circ f_1)_* \circ (g_1)_*^{-1},$$

por definición ya que $g_0 \circ f_1$ es una aproximación simplicial a h , tenemos:

$$h_* = (g_0 \circ f_1)_* \circ (g_1)_*^{-1} \quad \text{y} \quad k_* = (f_0)_* \circ (g_0)_*^{-1},$$

de nuevo por definición. La combinación de estas ecuaciones y aplicando el Teorema 8, obtenemos el resultado deseado

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

■

Corolario 18. (Invariancia topológica de grupos de homología [12]) Si $h: |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo, entonces $h_*: H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ es un isomorfismo.

Demostración. Sea $k: |L| \rightarrow |K|$ la inversa de h . Entonces $h_* \circ k_*$ igual $(i_{|L|})_*$ y $k_* \circ h_*$ igual $(i_{|K|})_*$. Así $h_* \circ k_*$ y $k_* \circ h_*$ son isomorfismos, así h_* es un isomorfismo. ■

2.5. Grupos de Homología de la Esfera y Bola

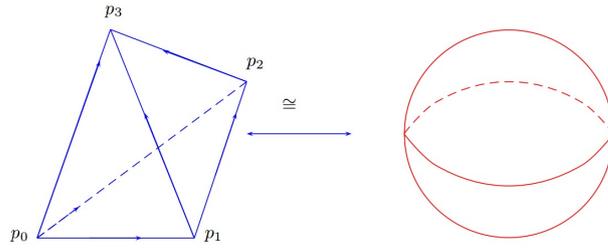
Con ayuda del corolario anterior, obtendremos los grupos de homología de la esfera y la bola, bajo homeomorfismos ya que estos inducen isomorfismos en los grupos de homología simpliciales. En esta sección utilizaremos la notación (a_0, \dots, a_n) por $a_0 \dots a_n$ un simplejo orientado para no prestar los cálculos a confusión.

Ejemplo 19. Grupo de Homología de la Esfera.

Demostración. El complejo del tetraedro está dado por

$$\begin{aligned}
 K = \{ & p_0, p_1, p_2, p_3, (p_0p_1), (p_0p_2), (p_0p_3), (p_1p_2), (p_1p_3), (p_2p_3), (p_0p_1p_2), \\
 & (p_0p_1p_3), (p_0p_2p_3), (p_1p_2p_3) \}.
 \end{aligned}$$

Ahora el grupo de homología $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, ya que el tetraedro es un conjunto arcoconexo.



Calculemos el grupo de homología $H_1(K)$, sea

$$z = a(p_0p_1) + b(p_0p_2) + c(p_0p_3) + d(p_1p_2) + e(p_1p_3) + f(p_2p_3),$$

un elemento de $Z_1(K)$, con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_1(z) &= a(p_1 - p_0) + b(p_2 - p_0) + c(p_3 - p_0) + d(p_2 - p_1) + e(p_3 - p_1) + f(p_3 - p_2) \\ &= (-a - b - c)p_0 + (a - d - e)p_1 + (b + d - f)p_2 + (c + e + f)p_3 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ a - d - e &= 0, \\ b + d - f &= 0, \\ c + e + f &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea

$$c = i(p_0p_1p_2) + j(p_0p_1p_3) + k(p_0p_2p_3) + l(p_1p_2p_3),$$

un elemento de $C_2(K)$. Si $b = \partial_2c \in B_1(K)$, entonces

$$\begin{aligned} b &= i[(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)] + j[(p_1p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_1)] + k[(p_2p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_2)] \\ &\quad + l[(p_2p_3) - (p_1p_3) + (p_1p_2)] \\ &= (i + j)(p_0p_1) + (k - i)(p_0p_2) + (-k - j)(p_0p_3) + (i + l)(p_1p_2) + (j - l)(p_1p_3) \\ &\quad + (k + l)(p_2p_3). \end{aligned}$$

Tomando $a = i + j, b = k - i, c = -k - j, d = i + l, e = j - l$ y $f = k + l$, se sigue que $Z_1(K) \subseteq B_1(K)$. Por lo tanto

$$H_1(K) \cong \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} \cong \{0\}.$$

Por último calculemos el grupo de homología $H_2(K)$, sea

$$z = i(p_0p_1p_2) + j(p_0p_1p_3) + k(p_0p_2p_3) + l(p_1p_2p_3),$$

un elemento de $Z_2(K)$ con $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$, luego

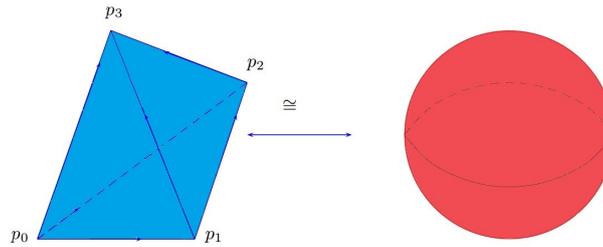
$$\begin{aligned} \partial_2(z) &= (i + j)(p_0p_1) + (k - i)(p_0p_2) + (-k - j)(p_0p_3) + (i + l)(p_1p_2) + (j - l)(p_1p_3) \\ &\quad + (k + l)(p_2p_3) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $i + j = 0, k - i = 0, k + j = 0, i + l = 0, j - l = 0$ y $k + l = 0$, es decir que $k = -l = -j = i$, de esto $Z_2(K) = \{i((p_0p_1p_2) - (p_0p_1p_3) + (p_0p_2p_3) - (p_1p_2p_3)) : i \in \mathbb{Z}\}$, por otra parte $B_2(K) = \{0\}$, ya que no hay 3-simplejos, se sigue

$$H_2(K) \cong Z_2(K) \cong \mathbb{Z}.$$

■

Ejemplo 20. Grupo de homología de la Bola.



Demostración. El complejo del prisma rectangular está dado de la siguiente manera

$$K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, (p_0p_1), (p_0p_2), (p_0p_3), (p_1p_2), (p_1p_3), (p_2p_3), (p_0p_1p_2), (p_0p_1p_3), (p_0p_2p_3), (p_1p_2p_3), (p_0p_1p_2p_3)\}.$$

Es claro que los grupos de homología de la bola $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(K) \cong \{0\}$; por el ejercicio anterior, falta calcular $H_2(K)$, ya que ahora si tenemos un 3-simplejo, entonces solo falta calcular $B_2(K)$. Sea

$$c = i(p_0p_1p_2p_3),$$

un elemento de $C_3(K)$. Si $b = \partial_3(c) \in B_2(K)$, entonces:

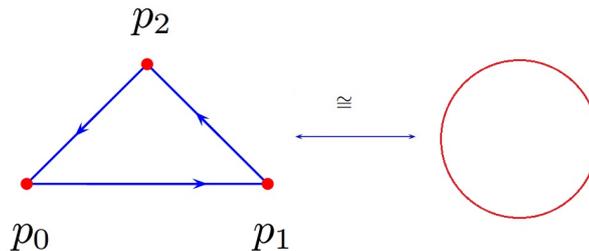
$$\partial_3(c) = i[(p_1p_2p_3) - (p_0p_2p_3) + (p_0p_1p_3) - (p_0p_1p_2)],$$

$i \in \mathbb{Z}$, se sigue que $B_2(K) = Z_2(K)$, por lo tanto:

$$H_2(K) \cong \{0\}.$$

■

Ejemplo 21. Grupo de homología del Círculo.



Demostración. El complejo de la frontera del triángulo está dada por

$$K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_0)\}.$$

Como el triángulo es arcoconexo entonces $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$. Ahora calculemos el grupo de homología $H_1(K)$, sea

$$z = i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0),$$

un elemento de $Z_1(K)$, entonces:

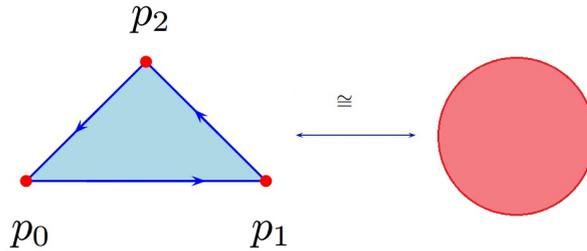
$$\begin{aligned} \partial_1(z) &= i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) \\ &= (k - i)p_0 + (i - j)p_1 + (j - k)p_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

con $i, j, k \in \mathbb{Z}$, entonces $k - i = 0, i - j = 0, j - k = 0$, por lo tanto $k = -j = i$, es decir, $Z_1(K) = \{i((p_0p_1) - (p_0p_2) + (p_1p_2))\}$, con $i \in \mathbb{Z}$ por otra parte como no hay 2-simplejos se tiene que $B_1(K) = \{0\}$, entonces:

$$H_1(K) \cong Z_1(K) \cong \mathbb{Z}.$$

■

Ejemplo 22. Grupo de homología del Disco.



Demostración. El complejo triángulo está dado por

$$K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_0), (p_0p_1p_2)\}.$$

Como anteriormente mencionamos el grupo de homología $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, por ser un conjunto arcoconexo, ahora por el ejercicio anterior solo falta calcular $B_1(K)$. Sea

$$c = i(p_0p_1p_2),$$

un elemento de $C_2(K)$. Si $b = \partial_2(p_0p_1p_2) \in B_1(K)$, entonces:

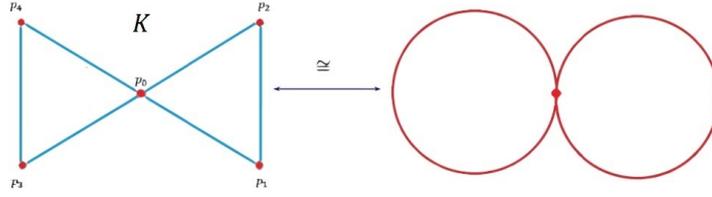
$$b = \partial_2c = i((p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)),$$

con $i \in \mathbb{Z}$, de esto $B_1(K) = Z_1(K)$, luego

$$H_1(K) \cong \{0\}.$$

■

Ejemplo 23. Ahora calcularemos el grupo de homología del espacio ocho.



Demostración. El complejo K está dado de la siguiente manera (sentido antihorario)

$$K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_0), (p_0p_4), (p_4p_3), (p_3p_0)\}.$$

Comencemos con $H_0(K)$, tenemos

$$\begin{aligned} B_0(K) &= \text{Im}(\partial_1) \\ &= \{\partial_1(i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) + l(p_0p_4) + m(p_4p_3) + n(p_3p_0)) : \\ &\quad i, j, k, l, m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) + l(p_4 - p_0) + m(p_3 - p_4) + n(p_0 - p_3) : \\ &\quad i, j, k, l, m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(-i + k - l + n)p_0 + (i - j)p_1 + (j - k)p_2 + (m - n)p_3 + (l - m)p_4 : \\ &\quad i, j, k, l, m, n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Por otra parte $Z_0(K) = C_0(K) = \{ap_0 + bp_1 + cp_2 + dp_3 + ep_4 : a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}\}$, definamos $f : Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ por la ecuación $f(ap_0 + bp_1 + cp_2 + dp_3 + ep_4) = a + b + c + d + e$. Es claro que f es un homomorfismo suprayectivo. Ahora

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= f^{-1}(0) \\ &= \{f(ap_0 + bp_1 + cp_2 + dp_3 + ep_4) = a + b + c + d + e = 0 : \\ &\quad ap_0 + bp_1 + cp_2 + dp_3 + ep_4 \in C_0(K)\} \\ &= \{(-b - c - d - e)p_0 + bp_1 + cp_2 + dp_3 + ep_4 : a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

sin pérdida de generalidad podemos tomar $b = i - j$, $c = j - k$, $d = m - n$, $e = l - m$, $i, j, k, m, n \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\text{Ker}(f) = B_0(K).$$

Por el teorema de isomorfismo, tenemos

$$Z_0(K) / \underbrace{\text{Ker}(f)}_{B_0(K)} \cong \text{Im}(f) \cong \mathbb{Z},$$

es decir $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Sigamos con $H_1(K)$, como no hay 2-simplejos se sigue que $B_1(K) \cong 0$, por lo tanto

$$H_1(K) \cong Z_1(K).$$

Sea $z \in C_1(K) = \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) + l(p_0p_4) + m(p_4p_3) + n(p_3p_0), i, j, k, l, m, n \in \mathbb{Z}\}$, entonces $z \in Z_1(K)$ si:

$$\begin{aligned}\partial_1(z) &= \partial_1(i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) + l(p_0p_4) + m(p_4p_3) + n(p_3p_0)) \\ &= (-i + k - l + n)p_0 + (i - j)p_1 + (j - k)p_2 + (m - n)p_3 + (l - m)p_4 \\ &= 0,\end{aligned}$$

de donde $i - j = 0$, $j - k = 0$, $m - n = 0$, $l - m = 0$ y $-i + k - l + n = 0$, es decir, $i = j = k$ y $l = m = n$. Por lo tanto

$$Z_1(K) = \{i((p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)) + l((p_0p_4) + (p_4p_3) + (p_3p_0)) : i, l \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

luego $H_1(K) \cong Z_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. ■

Capítulo 3

Teoremas de Puntos Fijos para Espacios de Dimensión Finita

En este capítulo, aplicamos los resultados obtenidos en los capítulos 1 y 2 de los grupos de Homología. Con ayuda de las aplicaciones homotópicas, primero se estudian los puntos fijos de las aplicaciones de esferas y bolas en sí mismas, obteniendo por ejemplo Teorema de Brouwer; generalizando estos resultados a otros conjuntos con el Teorema más importante de este capítulo, primero se define el número de Lefschetz, que sólo depende de la clase de homotopía de la aplicación y con ello se llega al Teorema de Lefschetz el cual nos da una condición suficiente para que la aplicación dada tenga un punto fijo.

3.1. Homomorfismos Inducidos por Aplicaciones Homotópicas

Ahora introducimos el importante concepto de homotopía, básicamente estudiaremos que sucede entre los homomorfismos inducidos por funciones homotópicas.

Definición 30. Sean X y Y espacios topológicos e $I = [0, 1]$, dos aplicaciones continuas $h, k: X \rightarrow Y$ se dicen ser **homotópicas** si existe una aplicación continua:

$$F(x, t): X \times I \rightarrow Y$$

tal que $F(x, 0) = h(x)$ y $F(x, 1) = k(x) \forall x \in X$. Si h y k son homotópicas, lo denotamos por $h \simeq k$. La aplicación F es llamada una **homotopía** de h a k . En otras palabras F deforma continuamente a h en k .

Probaremos que si $h, k: |K| \rightarrow |L|$ son homotópicas, entonces el homomorfismo de grupos de homología inducidos por h_* y k_* son el mismo. Esto conduce al importante resultado que veremos mas adelante, el cual dice; que los grupos de homología son invariantes del tipo de homotopía del espacio.

Corolario 24. La topología de $|K| \times I$ es coherente con la de los subespacios $\sigma \times I$, para $\sigma \in K$.

Lema 13. Sea K es un complejo, entonces $|K| \times I$ es el politopo de un complejo M , tal que cada conjunto $\sigma \times I$ es el politopo de un subcomplejo de M , y los conjuntos $\sigma \times 0$ y $\sigma \times 1$ son simplejos de M , para cada simplejo σ de K .

Demostración. Tenemos $|K| \subset \mathbb{R}^n$ para algún n . Entonces $|K| \times I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Vamos a subdividir $|K| \times I$ en simplejos, con una variante del procedimiento utilizando en la definición de la subdivisión baricéntrica.

Para $p \geq 0$, definimos:

$$X_p = (|K| \times 0) \cup (|K|, 1) \cup (|K^{(p)}| \times I).$$

Procederemos inductivamente para subdividir X_p en simplejos. Consideremos el caso $p = 0$. El espacio $(|K| \times 0) \cup (|K|, 1)$ es el politopo de un complejo que consiste de todos los simplejos de la forma $\sigma \times 0$ y $\sigma \times 1$, para $\sigma \in K$. El espacio $(|K^{(0)}| \times I)$ es el politopo del complejo que consiste de todos los 1-simplejos de la forma $\nu \times I$, para $\nu \in K^{(0)}$, y sus vértices. Su unión es un complejo M_0 cuyo politopo es X_0 .

En general supongamos que M_{p-1} es un complejo cuyo politopo es X_{p-1} , tal que cada conjunto $s \times I$, para s un simplejo de K de dimensión menor que p , es el politopo de un subcomplejo de M_{p-1} . Sea $\dim \sigma = p$, y consideremos el conjunto $\sigma \times I$. Ahora sea

$$Bd(\sigma \times I) = (\sigma \times I) - (Int\sigma \times IntI) = ((Bd\sigma) \times I) \cup (\sigma \times 0) \cup (\sigma \times 1).$$

Ya que $Bd \sigma$ es la unión de los simplejos s de K de dimensión $p - 1$, $Bd(\sigma \times I)$ es el politopo de un subcomplejo M_σ de M_{p-1} . Es finito por que $Bd(\sigma \times I)$ es compacto. Sea w_σ que denota el punto $(\hat{\sigma}, \frac{1}{2}) \in \sigma \times I$. Entonces el cono $w_\sigma * M_\sigma$ es un complejo cuyo politopo es $\sigma \times I$. La intersección de $|w_\sigma * M_\sigma|$ y $|M_{p-1}|$ es el politopo de un subcomplejo de cada uno de ellos.

Definir M_p como la unión de M_{p-1} y los conos $w_\sigma * M_\sigma$, $\forall \sigma$ p -simplejo de K . Finalmente, definir M a la unión de los complejos $M_p \forall p$.

Ahora M es un complejo cuyo politopo consiste precisamente de los puntos de el espacio $|K| \times I$. Sin embargo, no es en absoluto obvio que el espacio $|M|$ y $|K| \times I$ son iguales como espacios topológicos.

Sabemos por el Corolario 24 que la topología de $|K| \times I$ es coherente con los subespacios $\sigma \times I$, con $\sigma \in K$.

Por otra parte, la topología de $|M|$ es coherente con la de el subespacio s , para $s \in M$. Ahora si C es cerrado en $|K| \times I$, entonces $C \cap (\sigma \times I)$ es cerrado en $\sigma \times I$. Si s es un simplejo de M que esta en $\sigma \times I$, entonces s es un subespacio de $\sigma \times I$ (ambos subespacios de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, son compactos). Por lo tanto $C \cap s$ es cerrado en s . Se sigue que C es cerrado en $|M|$.

Recíprocamente, si C es cerrado en $|M|$, entonces $C \cap s$ es cerrado en s para cada $s \in M$. Por que $\sigma \times I$ es una unión finita de simplejos de s de M , el conjunto $C \cap (\sigma \times I)$ es cerrado en $\sigma \times I$. Así es cerrado en $|K| \times I$. ■

Ejemplo 25. Sea K es el complejo que consiste de un 1-simplejo y sus caras, entonces $|K| \times I$ es por el Lema anterior subdividido por el complejo representado en el Figura 3.1. Si el complejo consiste de un 2-simplejo y sus caras, entonces $|K| \times I$ es subdividido en el complejo representado en la Figura 3.2.

Teorema 26. Si $h, k: |K| \rightarrow |L|$ son homotópicas, entonces $h_*, k_*: H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ son iguales.

Demostración. Sea K un complejo cuyo espacio adyacente es $|K| \times I$, tal que para cada $\sigma \in K$, ambos $\sigma \times 0$ y $\sigma \times 1$ son simplejos de M , y $|K| \times I$ es el politopo de un subcomplejo de M .

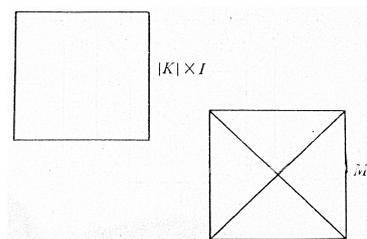


Figura 3.1: 1-simplejo

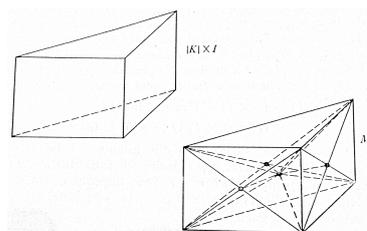


Figura 3.2: 2-simplejo

Sea $F: |K| \times I \rightarrow |K|$ la homotopía de h a k . Sea $i, j: |K| \rightarrow |K| \times I$ la aplicación $i(x) = (x, 0)$ y $j(x) = (x, 1)$ como se representa en la Figura 3.3. Entonces i y j son aplicaciones simpliciales de K en el complejo M ; además

$$f \circ i = h \quad \text{y} \quad f \circ j = k.$$

Afirmemos que la aplicaciones cadena $i_{\#}$ y $j_{\#}$ inducidas por i y j son cadenas homotópicas. Considerar la función Φ que asigna a cada simplejo de σ de K , el subcomplejo de M cuyo politopo es $\sigma \times I$. Ahora el espacio $\sigma \times I$ es acíclico por que es homeomorfo a la bola cerrada. Y si $s < \sigma$, entonces $s \times I \subset \sigma \times I$, así $\Phi(s)$ es un subcomplejo de $\Phi(\sigma)$. Por lo tanto Φ es un portador acíclico de k a M . Además lleva ambos $i_{\#}$ y $j_{\#}$, a ambos $i(\sigma) = \sigma \times 0$ y $j(\sigma) = \sigma \times 1$ pertenecen a $\Phi(\sigma)$. Se sigue del Teorema 13 que son cadenas homotópicas. Concluimos que $i_{\#} = j_{\#}$. Entonces

$$h_* = f_* \circ i_* = f_* \circ j_* = k_*,$$

como se deseaba. ■

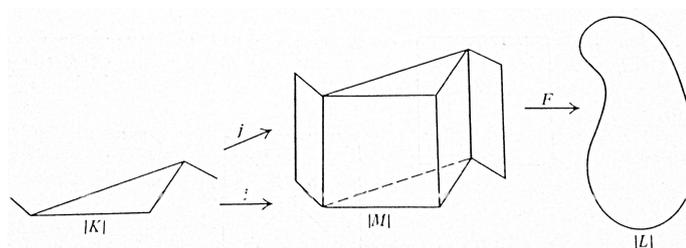


Figura 3.3: $|K| \times I$

Teorema 27. Si $f: K \rightarrow L$ es una aproximación simplicial a la aplicación continua $h: |K| \rightarrow |L|$, entonces f es homotópico a h .

Demostración. Para cada x en $|K|$, sabemos del Lema 7 que $f(x)$ y $h(x)$ se encuentran en un solo simplejo de L . Por lo tanto la "Homotopía lineal" dada por

$$f(x, t) = (1 - t)f(x) + th(x),$$

lleva $|K| \times I$ en $|L|$. F es continua, por ser suma y producto de funciones continuas. ■

Sabemos que si dos espacios son homemorfos, entonces sus grupos de homología son isomorfos. Hay una relación más débil que homeomorfismo el cual implica el mismo resultado. Esta es la relación de equivalencia homotópica.

Definición 31. Dos espacios X y Y se dicen **homotópicamente equivalentes**, o tienen el mismo tipo de homotopía, si existen aplicaciones:

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{y} \quad g: Y \rightarrow X$$

tal que $g \circ f \simeq i_X$ y $f \circ g \simeq i_Y$. Las aplicaciones f y g a menudo se les llama **equivalencias homotópicas** y g es llamada la **inversa homotópica** de f .

Si X tiene el tipo de homotopía de un solo punto, entonces X se dice que es contractible (contráctil). Esto es equivalente a la afirmación de que la aplicación identidad $i_X: X \rightarrow X$ es homotópica a una aplicación constante. Por ejemplo, la bola unitaria es contráctil, por que la aplicación $f(x, t) = (1 - t)x$ es homotópica entre la identidad y una constante.

Teorema 28. Si $f: |K| \rightarrow |L|$ es una homotopía equivalente, entonces f_* es un isomorfismo. En particular si $|K|$ es contráctil, entonces K es acíclico.

Demostración. La demostración es inmediata. Si g es inversa homotópica de f , entonces g_* es inversa de f_* . ■

3.2. Aplicaciones en Esferas

En esta sección se obtendrán importantes aplicaciones de la teoría de homología a los problemas clásicos de geometría y topología. Los problemas que mostraremos se generalizan en la siguiente sección, cuando se pruebe el teorema de punto fijos de Lefschetz.

Teorema 29. Sea σ un n -simplejo. El complejo K_σ que consiste de σ y sus caras es acíclico. Sean $n > 0$ y E^{n-1} que denota el complejo cuyo politopo es $Bd\sigma$. Dar una orientación a σ . Entonces $H_n(E^{n-1})$ es un grupo cíclico infinito y es generado por la cadena $\partial\sigma$, además, $\tilde{H}_i(E^{n-1}) = 0$ para $i \neq n - 1$.

Demostración. Como K_σ es un n -simplejo, se sigue del Teorema 7 que K_σ es acíclico. Ahora comparemos los grupos de cadenas de K_σ y E^{n-1} , que son iguales excepto en dimensión n :

$$\begin{array}{ccccccc} C_n(K_\sigma) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K_\sigma) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \rightarrow & C_0(K_\sigma) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}. \\ & & \parallel & & & & \parallel & \parallel \\ 0 & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(E^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \rightarrow & C_0(E^{n-1}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}. \end{array}$$

Se sigue que $\tilde{H}_i(E^{n-1}) = \tilde{H}_i(K_\sigma) = 0 \forall i \neq n-1$. Ahora calculemos el grupo de homología en dimensión $n-1$. Primero tratemos el caso $n > 1$. Se tiene

$$\begin{aligned} H_{n-1}(E^{n-1}) &= Z_{n-1}(E^{n-1}), \text{ porque no hay } n-1 \text{ fronteras,} \\ &= \ker \partial_{n-1} \\ &= \text{im} \partial_n, \text{ porque } H_{n-1}(K_\sigma) = 0. \end{aligned}$$

Ahora $C_n(K_\sigma)$ es un grupo cíclico infinito y es generado por σ . Por lo tanto $\text{im} \partial_n$ es acíclico y es generado por $\partial_n \sigma$ e infinito porque $C_{n-1}(K_\sigma)$ no tiene torsión. El aumento para $n=1$ es similar, excepto que ∂_{n-1} es reemplazado por ϵ en toda la demostración. ■

Teorema 30. Sea \mathbb{S}^n la esfera, entonces

$$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \text{ y } H_i(\mathbb{S}^n) = 0 \forall i \neq n.$$

Demostración. La demostración se sigue del Teorema 29 y del hecho que el complejo E^n es homeomorfo a \mathbb{S}^n . ■

Definición 32. Sean $n \geq 1$ y $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ una aplicación continua. Si α es uno de los dos generadores de el grupo cíclico infinito $H_n(\mathbb{S}^n)$, entonces $f_*(\alpha) = d\alpha$ para algún $d \in \mathbb{Z}$. El entero d es independiente de la elección de el generador, ya que $f_*(-\alpha) = d(-\alpha)$. Al entero d se le llama el **grado** de la aplicación f y es denotado por $\deg f$.

El grado tiene las siguientes propiedades:

- (1) Si $f \simeq g$, entonces $\deg f = \deg g$.
- (2) Si f se extiende a una aplicación continua $h: \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$, entonces $\deg f = 0$.
- (3) La aplicación identidad tiene grado 1.
- (4) $\deg(f \circ g) = (\deg f) \circ (\deg g)$.

La propiedad (1) se sigue del Teorema 26, mientras que (2) se sigue del hecho que $f_*: H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ es igual a la composición

$$H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathbb{B}^{n+1}) \xrightarrow{h_*} H_n(\mathbb{S}^n),$$

donde j es la inclusión. Ya que \mathbb{B}^{n+1} es acíclico, su composición es el homomorfismo cero. Las propiedades (3) y (4) son consecuencias inmediatas del Teorema 17.

Teorema 31. No existe retracción $r: \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$.

Demostración. Una aplicación tal r , sería una extensión de la identidad $i: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, ya que i tiene grado $1 \neq 0$, no existe la extensión. ■

Teorema 32. (Teorema del punto fijo de Brouwer) Toda aplicación continua $\phi: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ tiene un punto fijo.

Demostración. Si $\phi: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ no tiene punto fijo, podemos definir una aplicación $h: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ por la ecuación

$$h(x) = \frac{x - \phi(x)}{\|x - \phi(x)\|},$$

ya que $x - \phi(x) \neq 0$. Sea $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que denota la restricción de h a \mathbb{S}^{n-1} , entonces f tiene grado 0.

Por otra parte, mostremos que f tiene grado 1, dando una contracción. Definamos una homotópica $H: \mathbb{S}^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, por la ecuación:

$$H(a, t) = \frac{a - t\phi(a)}{\|a - t\phi(a)\|}.$$

El denominador no es cero para $t = 1$ ya que $a \neq \phi(a)$, y no es cero para $0 \leq t < 1$ por que $\|a\| = 1$ y $\|t\phi(a)\| = t\|\phi(a)\|$, la aplicación H es una homotópica entre la aplicación identidad de \mathbb{S}^{n-1} y la aplicación f . Por lo tanto $\deg f = 1$. ■

Definición 33. La **aplicación antipodal** $a: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es la aplicación definida por la ecuación $a(x) = -x \forall x \in \mathbb{S}$.

Teorema 33. Sea $n \geq 1$. El grado de la aplicación antipodal $a: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es $(-1)^{n+1}$.

Demostración. Mostremos que de hecho la aplicación reflexión:

$$\rho(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$$

tiene grado -1 . Para $\rho_i = h^{-1} \circ \rho \circ h$, donde h es el homeomorfismo de \mathbb{R}^{n+1} que simplemente intercambia x_i y x_{n+1} , así que:

$$\deg \rho_i = (\deg h^{-1})(\deg \rho)(\deg h) = \deg(h^{-1} \circ h) \deg \rho = \deg \rho.$$

Ya que es igual a la composición $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n+1}$ tenemos $\deg a = (-1)^{n+1}$.

Paso 1.- Una triangulación de un espacio X , es un complejo L y un homeomorfismo $h: |L| \rightarrow X$. Vamos a construir una triangulación de \mathbb{S}^n por un n -dimensional complejo tal que la aplicación reflexión ρ induce una aplicación simplicial de este complejo en sí mismo.

En general, si K es un complejo finito en $\mathbb{R}^N \times 0 \subset \mathbb{R}^{N+1}$, sea $w_0 = (0, \dots, 0, 1)$ y $w_1 = (0, \dots, 0, -1)$. en \mathbb{R}^{N+1} , y sea

$$S(K) = (w_0 * K) \cup (w_1 * K).$$

Entonces $S(K)$ es llamado una suspensión de K . Sea $r: S(K) \rightarrow S(K)$ la aplicación simplicial que cambia w_0 y w_1 y lleva cada vértice de K en sí mismo. Mostremos que existe un complejo K de dimensión $n - 1$, y una triangulación:

$$k: |S(K)| \rightarrow \mathbb{S}^n,$$

tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} S(K) & \xrightarrow{k} & \mathbb{S}^n \\ r \downarrow & & \downarrow \rho \\ S(K) & \xrightarrow{k} & \mathbb{S}^n \end{array}$$

Entonces el Paso 1 es probado.

Sea $h: |K| \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ cualquier triangulación de \mathbb{S}^{n-1} por un complejo de dimensión $n-1$. Sea $y \in |S(K)|$, si $y = (1-t)x + tw_0$ para algún $x \in |K|$, definir

$$k(y) = (\sqrt[2]{1-t^2}h(x), t).$$

Si $y = (1-t)x + tw_1$, se define

$$k(y) = (\sqrt[2]{1-t^2}h(x), -t).$$

Ver Figura 3.4. Es fácil verificar que k lleva $|S(K)|$ homeomorficamente a S^n . El hecho

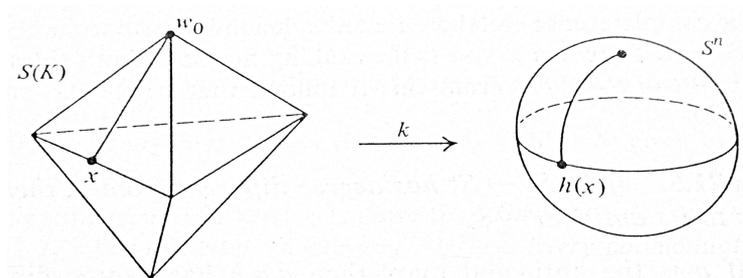


Figura 3.4: Triangulación

de que $\rho \circ k = k \circ r$ es inmediato, ya que,

$$r((1-t)x + tw_0) = (1-t)x + tw_1.$$

Paso 2.- En vista del Paso 1, con el fin de demostrar nuestro teorema es suficiente mostrar que $\deg r = -1$.

Sea z un n -ciclo de $S(K)$, entonces z es una cadena de la forma:

$$z = [w_0, c_m] + [w_1, d_m],$$

donde c_m y d_m son cadenas de K , y $m = n-1$. Asumimos $n > 1$. Ya que z es un ciclo

$$0 = \partial z = c_m - [w_0, \partial c_m] + d_m - [w_1, \partial d_m].$$

Restricción de esta cadena a K , obtenemos la ecuación $c_m + d_m = 0$ de donde:

$$z = [w_0, c_m] - [w_1, c_m].$$

Ya que r simplemente intercambia w_0 y w_1 , tenemos:

$$r_{\#}(z) = [w_0, c_m] - [w_1, d_m] = -z,$$

Como se deseaba. Un cálculo similar se tiene si $n = 1$. ■

Teorema 34. Si $h: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ tiene grado diferente de $(-1)^{n+1}$, entonces h tiene un punto fijo.

Demostración. Supondremos que $h: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ no tiene punto fijo y probaremos que $h \simeq a$. El teorema se sigue intuitivamente, construyamos la homotopía simplemente moviendo el punto $h(x)$ a el punto $-x$, a lo largo del círculo máximo que unen estos puntos; porque $h(x)$ y $-x$ no son antipodales, existe un único arco, así la homotopía esta bien definida. Formalmente, definimos la homotopía $H: \mathbb{S}^n \times I$ por la ecuación:

$$H(x, t) = \frac{(1-t)h(x) + t(-x)}{\|(1-t)h(x) + t(-x)\|}.$$

La prueba se completa una vez que se demuestre que el denominador no se anule. Si $(1-t)h(x) = tx$ para algún x y t , luego tomar las normas de ambas partes $1-t = t = \frac{1}{2}$. De esto se deduce que $h(x) = x$, contrario a la hipótesis. ■

Teorema 35. Si $h: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ tiene grado diferente de 1, entonces h lleva algún punto x a su antipodal $-x$.

Demostración. Si a es la aplicación antipodal, entonces $a \circ h$ tiene grado diferente de $(-1)^{n+1}$, por lo tanto, $a \circ h$ posee un punto fijo x . Así $a(h(x)) = x$, se sigue que $-h(x) = x$ como se deseaba. ■

Teorema 36. \mathbb{S}^n tiene un campo vectorial distinto de cero si y sólo si n es impar.

Demostración. Si n es impar, sea $n = 2k - 1$. Entonces para $x \in \mathbb{S}^n$, definimos

$$\vec{v}(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Note que $\vec{v}(x)$ es perpendicular a x , así que $\vec{v}(x)$ es tangente a \mathbb{S}^n en x .

Recíprocamente, supongamos que $\vec{v}(x)$ es un campo vectorial distinto de cero para $x \in \mathbb{S}^n$, tal que $\vec{v}(x)$ es tangente a \mathbb{S}^n en x . Entonces: $h(x) = \frac{\vec{v}(x)}{\|\vec{v}(x)\|}$ es una aplicación de \mathbb{S}^n en \mathbb{S}^n . Ya que $\vec{v}(x)$ es perpendicular a x , para todo x , no podemos tener $h(x) = x$ o $h(x) = -x$. Así h no tiene punto fijo y h lleva un punto en su no atipodal. Concluimos que $\deg h = (-1)^{n+1}$ y así $\deg h = 1$, así que n debe ser impar. ■

Teorema 37. Sea $n \in \mathbb{N}$ y \mathbb{S}^1 la esfera unitaria en el plano complejo \mathbb{C} . Consideremos la aplicación $h: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $h(z) = z^n$, entonces $\deg h = n$.

Demostración. El caso $n = 1$ es trivial. Primero mostremos el caso $n \geq 3$, construyamos el polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia \mathbb{S}^1 , con vértices las raíces n -ésimas de la unidad $a_0 = 1, a_2 = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \dots, a_{n-1} = e^{\frac{2\pi(n-1)i}{n}}$. Sea K_n el complejo formado por los vértices y los segmentos de líneas del polígono regular, definamos $f: |K| \rightarrow \mathbb{S}^1$, por $f = \frac{x}{\|x\|}$ claramente es continua, biyectiva y como $|K|$ es compacto se sigue que f es un homeomorfismo. Ahora podemos definir una aplicación continua $g: |K| \rightarrow |K|$ dada por la ecuación

$$g = f^{-1} \circ h \circ f.$$

Se puede comprobar que g no cumple la condición estrella, entonces se procede a subdividir el complejo K_n como sigue: cada simplejo $[a_i, a_{i+1}]$ se divide en n partes iguales añadiendo nuevos vértices $a_i = a_i^0, a_i^1, \dots, a_i^{n-1}, a_i^n = a_{i+1}$. Sea K'_n que denota la subdivisión del complejo K_n y definamos la aplicación $\varphi: K_n^{(0)} \rightarrow K_n^{(0)}$ por $\phi(a_i^j) = a_j$ si $j \neq n$ y $\phi(a_i^n) = a_0$. Es fácil probar que ϕ es una aproximación simplicial de g que lleva la 1-cadena formada por la suma de todos los 1-simplejos de K'_n en n veces el contorno orientado K_n ,

es decir, $\deg \phi = n$. Por el Teorema 27 se sigue que $\phi \simeq g$ (son homotópicas), por lo tanto, $\deg g = n$. Por otra parte el $\deg(f^{-1} \circ h \circ f) = (\deg f^{-1}) \cdot (\deg h) \cdot (\deg f) = (\deg f^{-1}) \cdot (\deg f) \cdot (\deg h) = (\deg f^{-1} \circ f) \cdot (\deg h) = \deg h$, entonces $\deg h = n$, ya que $f^{-1} \circ f$ es la función identidad.

Ahora mostremos el caso $n = 2$, tomando K_4 y dividimos cada lado por la mitad. Aplicando el procedimiento anterior se sigue $\deg h = 2$. ■

Corolario 38. (Teorema Fundamental del Álgebra) Todo polinomio complejo $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ con coeficientes reales o complejos tiene un cero en el plano complejo \mathbb{C} .

Demostración. Sea \mathbb{S}_c^1 la esfera de radio c en el plano complejo \mathbb{C} . Supongamos que $f(z)$ no se anula en la bola $|z| \leq c$. Sea

$$h : \mathbb{S}_c^1 \rightarrow \mathbb{C} - 0$$

definida por $h(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$. Mostremos que h es homotópica a la función constante, en efecto, sea

$$F(x, t) : \mathbb{S}_c^1 \times I \rightarrow \mathbb{C} - 0$$

definida por $F(x, t) = h(tz)$. Claramente $F(x, 1) = h(z)$ y $F(x, 0) = a_0$, por lo tanto, $\deg h = \deg a_0 = 0$.

Sea $M = \max\{1, n|a_{n-1}|, n|a_{n-2}|, \dots, n|a_0|\}$. Tenemos

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \leq |a_{n-1}| |z^{n-1}| + \dots + |a_0|.$$

Si además $|z| \geq M$ se sigue que $|z^{n-1}| \leq |z^n|$ y por lo tanto,

$$|a_{n-1}| |z^{n-1}| + \dots + |a_0| \leq (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) |z^{n-1}| \leq M |z^{n-1}| \leq |z^n|.$$

Consideremos

$$H(z, t) : \mathbb{S}_c^1 \times I \rightarrow \mathbb{C} - 0,$$

definida por $H(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)$, tomando $c = M$ se sigue que $H(z, t) \neq 0$, además $H(z, 1) = h(z)$ y $H(z, 0) = z^n$, por lo tanto, $0 = \deg h = \deg z^n$ por el Teorema 37 esto es imposible. ■

3.3. Teorema del punto fijo de Lefschetz

Los teoremas de puntos fijos probados en la anterior sección conciernen a aplicaciones de bolas y esferas a ellos mismos. Existen generalizaciones de gran alcance de estos teoremas, debido a Lefschetz que demostraremos en esta sección.

Primero necesitamos algunos hechos de álgebra.

Si $A = (a_{i,j})$ es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces la **traza** de A , denotada por $tr A$, es definida por la ecuación:

$$tr A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Si A y B son matrices $n \times n$, entonces

$$tr AB = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = tr BA.$$

Sea G es un grupo abeliano libre y e_1, \dots, e_n un base para G , si $\phi : G \rightarrow G$ es un homomorfismo, definimos la traza de ϕ al número trA , donde A es la matriz de ϕ relativa a la base dada. Este número es independiente de la elección de la base, ya que la matriz de ϕ relativa a otra base es igual $B^{-1}AB$ para alguna matriz cuadrada B , y $tr(B^{-1}AB) = tr((AB)B^{-1}) = tr(A)$. El mismo argumento muestra que $i : G \rightarrow G$ es un isomorfismo, entonces $tr(i \circ \phi \circ i^{-1}) = tr(\phi)$.

Sea K es un complejo y $\phi : C_P(K) \rightarrow C_P(K)$ es una aplicación cadena, entonces ya que $C_P(K)$ es abeliano libre de rango finito, la traza de ϕ esta definida. y la denotamos por $tr(\phi, C_P(K))$. El grupo $H_p(K)$ no es necesariamente un grupo abeliano libre, pero si $T_P(K)$ es su subgrupo de torsión, entonces el grupo $H_p(K)/T_P(K)$ es abeliano libre. Además, ϕ_* induce un homomorfismo de este grupo consigo mismo. Usamos la notación $tr(\phi_*, H_p(K)/T_P(K))$ para denotar la traza de este homomorfismo inducido.

No es obvia la relación entre estos dos números; como un resultado, la siguiente fórmula es bastante sorprendente.

Teorema 39. (Teorema de la traza de Hopf [12]). Sea K un complejo y $\phi : C_P(K) \rightarrow C_P(K)$ una aplicación cadena. Entonces:

$$\sum_p (-1)^p tr(\phi, C_P(K)) = \sum_p (-1)^p tr(\phi_*, H_p(K)/T_P(K)).$$

Demostración. Paso 1.- Sea G un grupo abeliano libre de rango finito y H un subgrupo (necesariamente abeliano libre), y supongamos que G/H es abeliano libre. Sea $\phi : G \rightarrow G$ un homomorfismo que lleva H en sí mismo. Mostremos que:

$$tr(\phi, G) = tr(\phi', G/H) + tr(\phi'', H),$$

donde ϕ' y ϕ'' denotan los homomorfismos inducidos por ϕ .

Sea $\{\alpha_1 + H, \dots, \alpha_n + H\}$ una base para G/H y β_1, \dots, β_p una base para H . Si A y B son las matrices para ϕ' y ϕ'' relativas respecto a las bases, entonces

$$\begin{aligned} \phi'(\alpha_j + H) &= \sum_i a_{i,j}(\alpha_i + H); \\ \phi''(\beta_j) &= \sum_i b_{i,j}\beta_i. \end{aligned}$$

Ahora es fácil comprobar que $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p$ es una base para G . Además, se sigue de la ecuación anterior que:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_j) &= \sum_i a_{i,j}\alpha_i + (\text{algo en } H); \\ \phi(\beta_j) &= \sum_i b_{i,j}\beta_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de ϕ relativa a estas bases para G tiene la forma

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & B \end{bmatrix}.$$

Obviamente, $tr(C) = trA + trB$, el resultado se sigue.

Paso 2.- Como de costumbre, sea C_P que denota el grupo cadena $C_p(K)$. Sean Z_P denota los p -ciclos, B_p que denota la p -frontera, y W_p que denota el grupo de la p -frontera débil, que consiste de las p -cadenas tal que algún múltiplo pertenezca al grupo B_p . Entonces

$$B_p \subset W_p \subset Z_P.$$

Ya que ϕ es una aplicación cadena, lleva cada uno de estos grupos en sí mismo. Mostremos que los grupos cocientes C_P/Z_P y Z_P/W_p son libres; entonces el paso 1 asegura que:

$$\text{tr}(\phi, C_p) = \text{tr}(\phi, C_P/Z_P) + \text{tr}(\phi, Z_P/W_p) + \text{tr}(\phi, W_p). \quad (3.1)$$

(Aquí abandonamos el uso de primas para distinguir entre los varios homomorfismos inducidos). Calculemos cada uno de estos.

Paso 3.- Considerar el grupo C_P/Z_P . El homomorfismo $\partial_p : C_P \rightarrow B_{p-1}$ obtenida de la restricción del rango de ∂ es suprayectiva y tiene Kernel igual a Z_P . Por lo tanto, induce un isomorfismo C_P/Z_P en B_{p-1} , así C_P/Z_P es libre. Además por que ϕ conmuta con ∂ , conmuta con este isomorfismo. Por lo tanto (como se ha recomendado anteriormente),

$$\text{tr}(\phi, C_P/Z_P) = \text{tr}(\phi, B_{p-1}). \quad (3.2)$$

Paso 4.- Consideremos el grupo Z_P/W_p y las proyección:

$$Z_P \rightarrow Z_P/B_p = H_p \rightarrow H_p/T_p.$$

Estas compocisiones son suprayectivas y tienen kernel W_p . Por lo tanto, induce un isomorfismo:

$$Z_P/W_p \rightarrow H_p/T_p.$$

Así Z_P/W_p es libre. Por que las proyecciones conmutan con ϕ , lo mismo ocurre con este isomorfismo, por lo tanto:

$$\text{tr}(\phi, Z_P/W_p) = \text{tr}(\phi, H_p/T_p). \quad (3.3)$$

Paso 5.- Considerar el grupo W_p , mostremos que:

$$\text{tr}(\phi, W_p) = \text{tr}(\phi, B_p). \quad (3.4)$$

Recordemos que B_p es un subgrupo de W_p . Aplicando el toerema básico de grupos abelianos libres, podemos elegir un base $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de W_p tal que para algunos enteros $m_1, \dots, m_k \geq 1$, los elementos $m_1\alpha_1, \dots, m_k\alpha_k$ forman una base para B_p . Ahora W_p/B_p es un grupo de torsión, por lo tanto $k = n$. Calculemos la traza de ϕ en W_p y B_p . Sea

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_j) &= \sum_i a_{i,j} \alpha_i \\ \phi(m_j \alpha_j) &= \sum_i b_{i,j} (m_i \alpha_i), \end{aligned}$$

donde la suma se extiende de 1 a n . Entonces $\text{tr}(\phi, W_p) = \sum a_{i,i}$ y $\text{tr}(\phi, B_p) = \sum b_{i,i}$, por definición. Multiplicando la primera ecuación anterior por m_j , concluimos que $m_i \alpha_{i,j} = b_{i,j} m_i$ para toda i y j . En particular $b_{i,i} = a_{i,i}$ para todo i . Por lo tanto $\text{tr}(\phi, W_p) = \text{tr}(\phi, B_p)$.

Paso 6.- Para completar la demostración, sustituimos las fórmulas (5.1),(3.3) y (3.4) en (3.1) obteniendo la ecuación:

$$tr(\phi, C_p) = tr(\phi, B_{p-1}) + tr(\phi, H_p/T_p) + tr(\phi, B_p).$$

Si multiplicamos esta ecuación por $(-1)^p$ y sumamos sobre todo p , los primeros y últimos términos se cancelan a pares, y la fórmula es probada como deseabamos. ■

Definición 34. El **número de Euler** de un complejo finito K es definido, clásicamente, por la ecuación

$$\chi(K) = \sum (-1)^p rank(C_p(K)).$$

Dicho de otro modo $\chi(K)$ es la suma alternada de los números de simplejos de K en cada dimensión.

Mostremos que el número de Euler de K es invariante topológico de $|K|$, como sigue:

Teorema 40. Sea K un complejo finito. Sea $\beta_p = rank(H_p/T_p(K))$, es el número de Betti de K en dimensión p . Entonces

$$\chi(K) = \sum_p (-1)^p \beta_p.$$

Demostración. Si $\phi : C_p(K) \rightarrow C_p(K)$ es la aplicación cadena identidad, entonces la matriz de ϕ relativa a cualquier base es la matriz identidad. Concluimos que $tr(\phi, C_p) = rank C_p$. Similarmente, porque ϕ_* es la aplicación identidad, $tr(\phi_*, (H_p/T_p(K))) = rank H_p/T_p(K) = \beta_p$. Nuestra fórmula ahora se sigue del teorema de la traza de Hopf. ■

Definición 35. Sea K un complejo finito; sea $h : |K| \rightarrow |K|$ una aplicación continua. El número

$$\Lambda(h) = \sum (-1)^p tr(h_*, (H_p/T_p(K))),$$

es llamado el **número de Lefschetz** de h .

Note que $\Lambda(h)$ depende sólo en la clase de homotopía de h . Además, depende sólo del espacio topológico $|K|$, no en lo particular del complejo K : Si L es otro complejo con $|L| = |K|$, entonces el homomorfismo:

$$J_* : H_p(L) \rightarrow H_p(K),$$

inducido por la identidad, es un isomorfismo. El hecho que $(h_L)_* = J_*^{-1} \circ (h_K)_* \circ J_*$ implica que $(h_L)_*$ y $(h_K)_*$ tienen la misma traza.

Teorema 41. (Teorema del punto fijo de Lefschetz [12]). Sea K un complejo finito; sea $h : |K| \rightarrow |K|$ una aplicación continua si $\Lambda(h) \neq 0$, entonces h tiene un punto fijo.

Demostración. Asumamos que h no tiene punto fijo. Probemos que $\Lambda(h) = 0$.

Paso1.- Supondremos en casos posteriores que K satisface la condición:

$$h(\overline{st}(v, K)) \cap \overline{st}(v, K) = \emptyset,$$

para todo v . Por lo tanto mostremos que esta supocisión se justifica.

Para empezar, sea $\varepsilon = \text{mín } |x - h(x)|$. Usando la continuidad iniforme de h , elegir δ tal que cuando $|x - y| < \delta$, tenemos $|h(x) - h(y)| < \varepsilon/3$. Sea $\lambda = \text{mín}(\delta, \varepsilon/2)$. Entonces para cualquier conjunto A de diámetro menor que λ , entre A y $h(A)$ tiene diámetro menor que $\varepsilon/2$, así ellos son necesariamente disjuntos. Reemplazar K por una subdivisión de K en la cual la estrella cerrada tenga diámetro menor que λ . Como sé señalo la estrella cerrada tenga diámetro menor que λ . Como se señalo anteriormente, esto no afecta en el cálculo de $\Lambda(h)$. Entonces nuestra condición se cumple.

Paso 2.- Asumimos que K satisface la condición del Paso 1. Ahora elijamos una subdivisión de K' de K tal que h tiene una aproximación simplicial $f : K' \rightarrow K$. Mostremos que si s y σ son simplices de K' y K , respectivamente tal que $s \subset \sigma$, entonces $f(s) \neq \sigma$.

Supongamos que $f(s) = \sigma$. Sea w un vértice de s , y sea $f(w) = v$, un vértice de σ . El hecho que $s \subset \sigma$ implica que $w \in \overline{st}(v, K)$, así que:

$$h(w) \in h(\overline{st}(v, K)). \quad (3.5)$$

Por otra parte, tenemos por la definición de una aproximación simplicial

$$h(st(w, K')) \subset st(v, K),$$

lo cual implica en particular que:

$$h(w) \in \overline{st}(v, K). \quad (3.6)$$

La combinación de las ecuaciones 3.5 y 3.6 contradice la suposición del Paso 1.

Paso 3.- Ahora calculemos $\Lambda(h)$ aplicando el Teorema de la traza Hopf.

Sea $f : K' \rightarrow K$ una aproximación simplicial de h ; sea $\lambda : C(K) \rightarrow C(K')$ el operador subdivisión. Entonces h_* induce la aplicación cadena $\phi = f_{\#} \circ \lambda$, por definición.

Calculemos la traza de ϕ . Sea A la matriz ϕ relativa a cada a la base usual para $C_p(K)$ que consiste de p -simplices orientados de K . Sea σ un típico elemento de la base. La cadena $\lambda(\sigma)$ es una combinación lineal de simplices orientados s de K' tal que $s \subset \sigma$. Para cualquier simplejo s , se sigue del Paso 2 que $f(s) \neq \sigma$. Concluimos que la cadena $\phi(\sigma) = f_{\#}(\lambda(\sigma))$ es una combinación lineal de p -simplices orientados de K diferentes de σ . La matriz A por lo tanto tiene una entrada cero en la fila y columna correspondiente a σ . Se sigue que todas las entradas de la diagonal de A desaparecen, así que $tr A = tr \phi = 0$.

El teorema de la traza de Hopf nos dice que

$$\Lambda(h) = \sum_p (-1)^p tr(\phi, C_p(K)).$$

Por lo que cada uno de estos términos en la sumatoria desaparece, $\Lambda(h) = 0$. ■

Lema 14. Sea K un complejo y $h : |K| \rightarrow |K|$ aplicación continua. Si $|K|$ es conexo, entonces $h_* : H_0(K) \rightarrow H_0(K)$ es la identidad.

Demostración. Sea $f : K' \rightarrow K$ una aproximación simplicial a h . Si v es un vértice de K , el operador subdivisión λ lleva v a una 0-cadena realizando la subdivisión de v , que es justo v en sí mismo.

Así $\lambda(v)$ es un múltiplo de v . Por que λ preserva aumento $\lambda(v) = v$. Entonces $f_{\#}(\lambda(v)) = f_{\#}(v)$ es homóloga a w . Por tanto $h_* = f_* \circ \lambda_*$ es igual a la identidad en $H_0(K)$. ■

Teorema 42. Sea K un complejo y $h : |K| \rightarrow |K|$ una aplicación continua. Si $|K|$ es acíclico, entonces h tiene un punto fijo.

Demostración. El grupo $H_0(K)$ es infinito cíclico, y h_* es la identidad en $H_0(K)$. Así $\text{tr}(h_*, H_0(K)) = 1$. Ya que toda dimensión superior de homología desaparece, $\Lambda(h) = 1$. Por lo tanto, h tiene un punto fijo. ■

Teorema 43. La aplicación antipodal de \mathbb{S}^n tiene grado $(-1)^{n+1}$.

Demostración. Sea $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ una aplicación de grado d . Calculemos $\Lambda(h)$. Ahora h_* es la identidad en 0-dimensional homológica. En n -dimensional homológica, su matriz es 1 por 1 con sólo entrada $d = \text{deg } h$. Por lo tanto

$$\Lambda(h) = 1 + (-1)^n d.$$

Ahora la aplicación antipodal a no tiene puntos fijos así que $\Lambda(h) = 0$. Se sigue que el grado de a es $(-1)^{n+1}$. ■

Capítulo 4

Teorema de Puntos Fijos en Espacios de Dimensión Infinita

En este capítulo culminamos con la exposición de Teoremas de puntos fijos, abarcando algunos de los resultados más importantes en este campo. Comenzamos con el Teorema de punto fijo de Banach, su aplicación en la demostración de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy-Lipschitz y mostrando el teorema de la función Implícita.

Seguimos con la demostración del Teorema de Brouwer, aunque en el capítulo anterior ya dimos una demostración utilizando el grado de una aplicación sobre esferas, se da una nueva demostración con retractos y la generalización de este problema en dominios más generales. El teorema de Lefschetz es en realidad la generalización del Teorema de Brouwer.

Continuamos con el Teorema de Schauder, mostrando las dos versiones que se tienen de este, las dos se basan en la utilización del Teorema de Brouwer, en realidad el Teorema Schauder es una generalización infinito-dimensional del Teorema de Brouwer, la segunda versión del Teorema de Schauder nos ayudará en la demostración del Teorema de Peano y mostrar la existencia de la solución del Problema con Condiciones de Frotera, que veremos en el siguiente capítulo.

Por último y no por ello menos importante llegamos al Teorema de Schaefer, que probamos apartir de la segunda versión del Teorema de Schauder, este teorema lo aplicaremos en la demostración de la existencia de la solución generalizada para el problema de Navier-Stokes Estacionario.

4.1. Teorema del punto fijo de Banach

Definición 36. Sean M un espacio métrico y $T : M \rightarrow M$ una aplicación. Decimos que $x \in M$ es un **punto fijo de T** , si $T(x) = x$.

Teorema 44. (Principio de aproximación sucesiva). Sean M un espacio topológico Hausdorff y $T : M \rightarrow M$ una aplicación continua, si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = y$, entonces $T(y) = y$.

Demostración. Ya que $Ty = T(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} x = y$. ■

Teorema 45. Sean M un espacio métrico y $T : G \rightarrow U$ una aplicación continua de un subconjunto cerrado $G \subset M$ en un subconjunto compacto $U \subset M$ y que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $x(\varepsilon)$ tal que:

$$\rho(T(x(\varepsilon)), x(\varepsilon)) < \varepsilon. \quad (4.1)$$

Entonces T tiene un punto fijo.

Demostración. Ya que $T(x(\varepsilon)) \in U$, podemos asumir que para alguna sucesión $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tenemos $T(x(\varepsilon_n)) \rightarrow y \in U$. Por (4.1) también tenemos que $x(\varepsilon_n) \rightarrow y$, así que $y \in G$. Por lo tanto Ty esta definida y

$$Ty = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(\varepsilon_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x(\varepsilon_n)) = y.$$

■

Definición 37. Sean M un espacio métrico y $T : M \rightarrow M$ una aplicación. Decimos que T es una **aplicación contráctil**, si existe k tal que $0 < k < 1$ y

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y) \quad \forall x, y \in M \quad (4.2)$$

Teorema 46. (Banach). Toda aplicación contráctil de un espacio métrico completo no vacío M en M , tiene un único punto fijo en M .

Demostración. Sea T una aplicación que satisface (4.2), para algún número $0 < k < 1$. Elegir cualquier punto $y \in M$. La sucesión de puntos $\{T^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$, satisface que para $n > 0$

$$\rho(T^n(y), T^{n+1}(y)) \leq k\rho(T^{n-1}(y), T^n(y)),$$

por inducción se tiene

$$\rho(T^n(y), T^{n+1}(y)) \leq k^n \rho(y, T(y)).$$

Por desigualdad del triángulo, tenemos que para $m \geq n$:

$$\begin{aligned} \rho(T^n(y), T^m(y)) &\leq \rho(T^n(y), T^{n+1}(y)) + \rho(T^{n+1}(y), T^{n+2}(y)) + \dots + \rho(T^{m-1}(y), T^m(y)) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{m-1})\rho(y, T(y)) \leq \frac{k^n}{1-k}\rho(y, T(y)). \end{aligned}$$

Se sigue que $\rho(T^n(y), T^m(y)) \rightarrow 0$ si $m, n \rightarrow \infty$, mostrando que la sucesión $\{T^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como M es un espacio métrico completo existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(y) = z$ con $z \in M$.

Por el Teorema 44, z es un punto fijo para T . Este punto fijo es único, en efecto supogamos lo contrario que existen $z, y \in M$ con $x \neq y$ puntos fijos de T se sigue que

$$\rho(z, w) = \rho(T(z), T(w)) \leq k\rho(z, w),$$

así que $\rho(z, w) = 0$; es decir, $z = w$ contradiciendo lo supuesto para x, y . ■

Notemos que la demostración del Teorma de punto fijo de Banach 46 es constructiva, por lo que encontrar el punto fijo de dicha función bastaría con iterar un número suficiente de veces para conseguir o aproximarnos al punto fijo, a diferencia de los teoremas que mostraremos en la siguiente sección que sólo muestran la existencia del punto fijo, sin proporcionarnos un proceso o algoritmo para encontrarlo.

Como concecuancia del Teorema de Banach 46, tenemos los siguientes 2 resultados.

Teorema 47. (Rudolf Lipschitz¹). Sea $f(t, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua que satisface la condición de Lipschitz respecto a y :

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|,$$

en alguna vecindad V_1 de $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces la ecuación diferencial con condición inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(a) = b \quad (4.3)$$

tiene una única solución en alguna vecindad del punto $a \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Observemos que la ecuación diferencial con condiciones iniciales (4.3) es equivalente a la ecuación integral

$$y(t) = b + \int_a^t f(x, y(x)) dx. \quad (4.4)$$

Sea V_2 una vecindad compacta de (a, b) tal que $V_2 \subset V_1$, como f es continua se sigue que es acotada en V_2 , por lo tanto existe $L > 0$, tal que:

$$|f(x, y)| \leq L \quad \forall (x, y) \in V_2.$$

Sea $\delta > 0$ tal que $k\delta < 1$ y definamos $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - a| \leq \delta\}$. Sea $C(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas definidas en Ω , con valores en \mathbb{R}^n . Consideremos en $C(\Omega)$ el subespacio completo M , que consiste de las funciones $y \in C(\Omega)$ tal que $\|y(t) - b\| \leq L\delta$. Definamos el operador $U : M \rightarrow M$ como sigue

$$U(y(t)) := b + \int_a^t f(x, y(x)) dx.$$

La forma en que se define el operador U se debe a la ecuación (4.4). Ahora mostremos que $U(M) \subset M$, es efecto dado $y \in M$

$$\|Uy(t) - b\| = \left\| \int_a^t f(t, y(t)) dt \right\| \leq L |t - a| \leq L\delta.$$

Veamos que U es una función contráctil, dados $y, z \in M$

$$\begin{aligned} \|Uy(t) - Uz(t)\| &= \left\| \int_a^t f(x, y(x)) - f(x, z(x)) dx \right\| \\ &\leq \delta \|f(x, y(x)) - f(x, z(x))\| \\ &\leq \delta k \|y(x) - z(x)\|, \end{aligned}$$

lo cual muestra que U es una aplicación contráctil, ya que $\delta k < 1$. Por el Teorema de Banach 46, U tiene un único punto fijo en M . Esto significa que existe una única función en M que es solución de (4.3). Ya que cualquier solución (4.3) está en M (para δ suficientemente pequeño), existe una única solución de (4.3). ■

¹Este teorema también es asociado con los nombres de Émile Picard, Ernest Lindelöf y Augustin-Louis Cauchy. El método empleado en la demostración es conocido como iteraciones de Picard.

Teorema 48. (Teorema de la Función Implícita). Sea V una vecindad de un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que f es una función continua de x y y en V y que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en V y es continua en (a, b) . Entonces si

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0, \\ ii) \quad & f(a, b) = 0, \end{aligned}$$

existe una única función continua $z(x)$, en alguna vecindad del punto a tal que $f(x, y_0(x)) = 0$.

Demostración. Escribamos D_f por $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Por la continuidad de las funciones $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ y $f(x, b)$, existen $\epsilon, \delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| D_f^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 1 \right| &< \frac{1}{2} \quad ((x, y) \in R), \\ |D_f^{-1} f(x, b)| &< \frac{1}{2} \delta; \quad |x - a| < \epsilon. \end{aligned}$$

Con

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a| \leq \epsilon \text{ y } |y - b| \leq \delta\}.$$

Sea $C(|x - a| \leq \epsilon)$ el conjunto de funciones continuas definidas en $|x - a| \leq \epsilon$, con valores en \mathbb{R} . Consideremos en $C(|x - a| \leq \epsilon)$ el subespacio completo M , que consiste de las funciones $y \in C(|x - a| \leq \epsilon)$ tal que $y(a) = b$ y $\|y(x) - b\| < \delta$. Definamos $T : M \rightarrow M$ como sigue

$$T(z(x)) := z(x) - D_f^{-1} f(x, z(x)).$$

La forma en que se definió el operador T , es por el hecho de que dado $y \in M$ un punto fijo de T , entonces $f(x, y(x)) \equiv 0$. Antes de mostrar que T es contráctil, observemos que si $y \in M$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} (y - D_f^{-1} f(x, y)) \right| = \left| \left(1 - D_f^{-1} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \right| < \frac{1}{2},$$

y por el Teorema del Valor Medio se sigue que para $y, z \in M$

$$|y(x) - D_f^{-1} f(x, y(x)) - z(x) + D_f^{-1} f(x, z(x))| < \frac{1}{2} |y(x) - z(x)|. \quad (4.5)$$

Mostrar que la aplicación T es contráctil resulta ahora sencillo, en efecto sean $x, y \in M$ entonces

$$\begin{aligned} \|T(y(x)) - T(z(x))\| &= \|y(x) - D_f^{-1} f(x, y(x)) - z(x) + D_f^{-1} f(x, z(x))\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|y(x) - z(x)\|. \end{aligned}$$

Ahora estamos listos para demostrar que $T(M) \subset M$, en efecto sean $y, b \in M$ con b la función constante entonces

$$T(y(a)) = y(a) - D_f^{-1} f(a, y(a)) = b - D_f^{-1} f(a, b) = b,$$

y

$$\begin{aligned}
\|T(y(x)) - b\| &= \|T(y(x)) - T(b(x)) + T(b(x)) - b\| \\
&\leq \|T(y(x)) - T(b(x))\| + \|T(b(x)) - b\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|y(x) - b(x)\| + \|D_f^{-1} f(x, b)\| \\
&< \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta = \delta.
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Banach 46 T tiene un único punto fijo en M . Es decir, nuestro problema tiene una única solución, que puede ser calculada por aproximaciones sucesivas usando el operador T , e iniciando desde cualquier elemento de M . ■

4.2. Teorema del punto fijo de Brouwer

Son variadas las demostraciones del Teorema de punto fijo de Brouwer, en esta apartado daremos la demostración de este teorema apartir de las propiedades retractos y los grupos de homología de la esfera y la bola.

Definición 38. Un espacio topológico X se dice que posee la **propiedad de punto fijo**, si cada aplicación $f : X \rightarrow X$ continua tiene un punto fijo.

Teorema 49. Sea X un espacio topológico homeomorfo a Y . Si X posee la propiedad del punto fijo, entonces Y también posee la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sean $f : Y \rightarrow Y$ una función continua y $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, entonces la aplicación $h^{-1} \circ f \circ h : X \rightarrow X$ es continua, como X posee la propiedad de punto fijo, existe $x \in X$ tal que $(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = x$, ya que h es biyectiva, podemos aplicar h en ambos lados de la igualdad y obtener que $f(h(x)) = h(x)$, con $h(x) \in Y$ un punto fijo de la aplicación f . ■

Definición 39. Decimos que X es un **retracto** de Y si $X \subset Y$ y existe una aplicación continua $r : Y \rightarrow X$ tal que $r = I$ identidad en X . (Entonces llamamos a r una aplicación retracto).

Lema 15. Un subconjunto cerrado, convexo no vacío X de \mathbb{R}^n o de un espacio de Hilbert, es un retracto de cualquier subconjunto Y tal que $X \subset Y$. [2]

Demostración. Definamos $r : Y \rightarrow X$ como sigue:

$$r(y) = x, \text{ donde } x \in X, \text{ tal que } \|x - y\| = \inf_{v \in X} \|v - y\|.$$

Como X es cerrado y convexo, la función r está bien definida, ahora mostremos que es continua, primero notemos lo siguiente

$$\|y - r(y)\| \leq \|y - w\|, \forall w \in X, \quad (4.6)$$

por definición de la función r . Sea $\alpha \in (0, 1)$ y $w \in X$, como X es convexo tenemos $\alpha w + (1 - \alpha)r(y) \in X$, por (4.6) se tiene

$$\begin{aligned}
\|y - r(y)\|^2 &\leq \|y - (\alpha w + (1 - \alpha)r(y))\|^2 \\
&= \|y - r(y) - \alpha(w - r(y))\|^2 \\
&= \|y - r(y)\|^2 + 2\alpha(r(y) - y, w - r(y)) + \alpha^2 \|r(y) - w\|.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$2\alpha(r(y) - y, w - r(y)) + \alpha^2 \|r(y) - w\| \geq 0.$$

Dividiendo por α y tomando $\alpha \rightarrow 0$, obtenemos

$$(r(y) - y, w - r(y)) \geq 0, \quad \forall y \in Y \text{ y } w \in X. \quad (4.7)$$

Ahora la continuidad de la función r se sigue de (4.7) y la desigualdad de Schwarz, en efecto, sean $y, y_1 \in Y$ entonces

$$\begin{aligned} \|r(y) - r(y_1)\|^2 &= (r(y) - r(y_1), r(y) - r(y_1)) \\ &= (r(y), r(y) - r(y_1)) - (r(y_1), r(y) - r(y_1)) \\ &\leq (y, r(y) - r(y_1)) - (y_1, r(y) - r(y_1)) \\ &= (y - y_1, r(y) - r(y_1)) \\ &\leq \|y - y_1\| \|r(y) - r(y_1)\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|r(y) - r(y_1)\| \leq \|y - y_1\|, \quad \forall y, y_1 \in Y. \quad \blacksquare$$

Teorema 50. Sea Y un espacio topológico que posee la propiedad del punto fijo y X es un retracto de Y , entonces X posee la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sea $r : Y \rightarrow X$ una aplicación retracto y sea $T : X \rightarrow X$ una aplicación continua, entonces $T \circ r = Tr$ es una aplicación continua de Y en X , como X es retracto de Y , entonces $X \subset Y$, por lo tanto $Tr : Y \rightarrow Y$ y como Y posee la propiedad del punto fijo, existe $w \in Y$ tal que $Tr(w) = w$, si observamos con detenimiento veremos que $w \in X$ ya que $Tr(Y) \subset X$. Ahora notemos que si $w \in X$ se tiene $r(w) = w$ por ser r retracto, entonces $Tw = w$. \blacksquare

Nuestro propósito en los siguientes resultados antes de mostrar el Teorema de Brouwer, es mostrar que \mathbb{S}^{n-1} no es un retracto de \mathbb{B}^n , resultado que ya se probó en el Teorema 31, pero ahora daremos un acercamiento diferente.

Definición 40. Un espacio topológico X es **contractible** (a un punto $x_0 \in X$) si existe un función continua $f(x, t) : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(x, 0) \equiv x$ y $f(x, 1) \equiv x_0$.

La definición de espacio contractible es un caso particular de espacios homotópicamente equivalentes (ver definición 31), más concretamente, es cuando la aplicación identidad es homotópica a la aplicación constante.

Ejemplo 51. \mathbb{B}^n es un espacio topológico contractible, sea $x_0 \in \mathbb{B}^n$ y definamos $f(x, t) : \mathbb{B}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}^n$ por la ecuación:

$$f(x, t) := (1 - t)x + tx_0.$$

Claramente $f(x, t)$ es una función continua, mostrando lo que deseábamos. Además nos muestra que \mathbb{B}^n es acíclico, es decir, $\tilde{H}_i(\mathbb{B}^n) = 0, \forall i$.

Teorema 52. Para todo $n \geq 0$, \mathbb{S}^n no es contractible.

Demostración. Si $n = 0$ es evidente el resultado, en caso contrario si $n > 0$ se sigue del Teorema 28 y del Teorema 30. ■

Lema 16. Sea Y un espacio topológico contractible, entonces cualquier retracto de Y es contractible.

Demostración. Sea X un retracto de Y , entonces existe una aplicación retracto $r : Y \rightarrow X$, como Y es un espacio topológico contractible, existe $f(x, t) : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tal que $f(y, 0) = y$ y $f(x, 1) = y_0$, con $y_0 \in Y$. Tomemos la aplicación $r \circ f(x, t) : X \times [0, 1] \rightarrow X$, claramente $r \circ f(x, t)$ es continua, además $r \circ f(x, 0) = x$ es evidente y $r \circ f(x, 1) = r(y_0)$, con $r(y_0) \in X$, mostrando que X contractible. ■

Teorema 53. Para todo $n \geq 1$, \mathbb{S}^{n-1} no es retracto de \mathbb{B}^n .

Demostración. Supongamos lo contrario que \mathbb{S}^{n-1} es retracto de \mathbb{B}^n . Como \mathbb{B}^n es contractible, entonces por el Lema 16 \mathbb{S}^{n-1} es un espacio contractible, lo cual no puede ser por el Teorema 52. ■

Teorema 54. (Brouwer [13], 1910):

- i) \mathbb{B}^n tiene la propiedad del punto fijo.
- ii) Todo subconjunto X compacto, convexo, no vacío de \mathbb{R}^n tiene la propiedad de punto fijo.

Demostración. i) Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que existe una aplicación $T : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ continua sin puntos fijos, entonces verifiquemos que podemos construir una retracción de \mathbb{B}^n a \mathbb{S}^{n-1} . En efecto definamos $r : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ por la ecuación

$$f(x) = t_0x + (1 - t_0)T(x),$$

donde t_0 se elige de tal manera que $t_0x + (1 - t_0)T(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $t_0 \in \mathbb{R}^+$. La continuidad de r se sigue de la función $f(x, t) : \mathbb{B}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por la ecuación

$$f(x, t) = tx + (1 - t)T(x),$$

que es continua por ser suma y producto de funciones continuas. Por otra parte, notemos que si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $t_0 = 1$, por lo tanto $r(x) = I(x)$ (la identidad) sobre \mathbb{S}^{n-1} , mostrando que r es una retracción. Pero por el Teorema 53 esto es imposible.

ii) Para k suficientemente grande, la bola $k\mathbb{B}^n$ de radio k contiene a X . Ya que $k\mathbb{B}^n$ es homeomorfo a \mathbb{B}^n , por el Teorema 49 y el inciso i) de este Teorema, se sigue que $k\mathbb{B}^n$ tiene la propiedad de punto fijo y por el Teorema 50, X tiene la propiedad de punto fijo. ■

Las hipótesis del Teorema de Brouwer 54 son imprescindibles, si el conjunto no es convexo o compacto la función podría no tener punto fijo.

Ejemplo 55.

Sea $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la esfera unitaria en \mathbb{R}^2 , es claro que \mathbb{S}^1 es un conjunto compacto y no convexo. Sea $T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, definida por la ecuación:

$$T(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

T es un operador lineal acotado, pero carece de punto fijo si $0 < \theta < 2\pi$.

Por otra parte, sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < 1\}$ la bola abierta centrada en el origen, es evidente que B no es compacto, pero sí convexo. Sea $f : B \rightarrow B$, definida por la ecuación:

$$f(x, y) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+y}{2} \right).$$

Claramente f es una función continua, pero carece de punto fijo.

4.3. Teorema del punto fijo de Schauder y contraejemplo de Kakutani

El Teorema del punto fijo de Schauder es la generalización infinito-dimensional del Teorema de Brouwer 54, para su demostración, aproximamos espacios de dimensión infinita por espacios de dimensión finita que poseen la propiedad del punto fijo, evidentemente con la intención de usar el Teorema de Brouwer. El siguiente lema es un claro ejemplo.

Lema 17. Sea Y un espacio métrico compacto. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $P_\varepsilon : Y \rightarrow Y$ una aplicación continua, tal que $\rho(P_\varepsilon(x), x) < \varepsilon \forall x \in Y$. Supongamos que cada conjunto $P_\varepsilon(Y)$ posee la propiedad de punto fijo. Entonces Y posee la propiedad de punto fijo.

Demostración. Sea $T : Y \rightarrow Y$ una aplicación continua. Ya que $P_\varepsilon \circ T$ lleva $P_\varepsilon(Y)$ en sí mismo, existe un punto fijo x_ε ; es decir, $P_\varepsilon \circ T(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Así $\rho(x_\varepsilon, Tx_\varepsilon) = \rho(P_\varepsilon Tx_\varepsilon, x_\varepsilon) < \varepsilon$. Por el Teorema 45, T tiene un punto fijo en Y . ■

Definición 41. El **cubo de Hilbert** \mathcal{H}_0 , es el subconjunto de \mathcal{l}^2 que consiste de los puntos $a = (a_1, a_2, \dots)$ tal que $|a_r| \leq r^{-1}$ para todo r .

Teorema 56. Todo subconjunto compacto, convexo K , de un espacio de Banach B , es homeomorfo bajo una aplicación lineal, a un subconjunto compacto, convexo de \mathcal{H}_0 .

Demostración. Asumimos sin pérdida de generalidad, que K es un subconjunto de la bola unitaria en B . Ya que K y $\text{span}(K)$ son separables, podemos elegir una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ densa en $\text{span}(K)$. Para $n = 1, 2, \dots$ elegimos F_n en el espacio dual B^* tal que

$$F_n(x_n) = \frac{\|x_n\|}{n}, \quad \|F_n\| = \frac{1}{n}.$$

La aplicación

$$F : x \rightarrow (F_1(x), \dots, F_n(x), \dots),$$

claramente lleva K en \mathcal{H}_0 . Podemos ver que F es un operador lineal acotado de B a \mathcal{l}^2 . F es inyectiva en $\text{span}(K)$ ya que si $x \neq y$ en $\text{span}(K)$ tenemos

$$|F_n(x) - F_n(y)| \geq |F_n(x_n)| - |F_n(x - y - x_n)| \geq \frac{\|x_n\|}{n} - \frac{\|(x - y) - x_n\|}{n} > 0,$$

si x_n es suficientemente cercano a $x - y$. Así F es un homeomorfismo de K a $F(K)$, ya que F es inyectiva y continua en el compacto K . Ahora concluimos que $F(K)$ es compacto y convexo ya que un homeomorfismo lineal preserva estas propiedades. ■

Definición 42. P_n es la proyección de \mathcal{l}^2 en un subespacio de dimensión n , dada por:

$$P_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Teorema 57. El cubo de Hilbert \mathcal{H}_0 , posee la propiedad de punto fijo.

Demostración. Observemos que para n suficientemente grande

$$\|P_n(a) - a\| \leq \left(\sum_{n+1}^{\infty} r^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

para todo $a \in \mathcal{H}_0$. Ya que $P_n\mathcal{H}_0$ es compacto $\forall n \in \mathbb{N}$, esto muestra que \mathcal{H}_0 es compacto. Ya que $P_n\mathcal{H}_0$ puede considerarse como un subconjunto convexo, compacto de \mathbb{R}^n , por el Teorema de Brouwer 54, $P_n\mathcal{H}_0$ tiene la propiedad de punto fijo. Así por el Lema 17, \mathcal{H}_0 tiene la propiedad de punto fijo. ■

Teorema 58. Cualquier subconjunto compacto, convexo y no vacío H de \mathcal{H}_0 , tiene la propiedad de punto fijo.

Demostración. Por Lema 15, H es un retracto de \mathcal{H}_0 ; por el Teorema 50, H tiene la propiedad de punto fijo. ■

Estamos listos para demostrar la primera versión del Teorema de Schauder.

Teorema 59. (Schauder [13], 1930). Cualquier subconjunto compacto, convexo, no vacío Y , de un espacio normado, posee la propiedad de punto fijo.

Demostración. Por el Teorema 56, Y es homeomorfo a un subconjunto compacto, convexo X de \mathcal{H}_0 ; por el Teorema 58, X tiene la propiedad de punto fijo; así por el Teorema 49, se tiene el resultado. ■

Mostraremos, que en el Teorema de Schauder, la condición de compacto no puede ser remplazada por acotado y cerrado. Conocido como el ejemplo de Kakutani.

Definición 43. Consideremos \mathcal{l}^2 como $\mathcal{l}^2(Z)$ con la base natural que consiste en las sucesiones $y_n = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ con 1 en la posición n . Para cada x en \mathcal{l}^2 este puede escribirse como

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = \sum x_n y_n.$$

Escribimos por U al **operador de desplazamiento derecho**:

$$U(x) = \sum x_n y_{n+1}.$$

Lema 18. El vector $x - U(x)$ es un múltiplo de y_0 si y sólo si $x = 0$.

Demostración. La relación $x - Ux = \sum (x_n - x_{n-1})y_n = cy_0$, requiere que $x_0 = x_n$ para todo $n > 0$ y $x_n = x_{-1}$ para todo $n < 0$, recordemos que para \mathcal{l}^2 esto sólo es posible si $x_0 = x_{-1} = 0$. ■

Teorema 60. La bola unitaria \mathbb{B} en \mathcal{l}^2 , carece de la propiedad de punto fijo.

Demostración. Definemos la aplicación

$$Tx = (1 - \|x\|)y_0 + Ux.$$

Entonces $T : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ y es continua, ya que $\|x\| < 1$ tenemos que

$$\|Tx\| \leq (1 - \|x\|) \|y_0\| + \|Ux\| = (1 - \|x\|) + \|x\| = 1.$$

Finalmente T no tiene punto fijo, ya que si

$$x = Tx = (1 - \|x\|)y_0 + Ux,$$

entonces $x - Ux = (1 - \|x\|)y_0$, lo cual es claramente imposible si $x = 0$, y es imposible por el Lema 18 si $x \neq 0$. ■

Ahora mostraremos la segunda versión del Teorema de punto fijo de Schauder.

Notación 1. Escribimos $co(X)$ al mínimo conjunto convexo que contiene a X , y $\overline{co}(X)$ como la clausura de $co(X)$.

Definición 44. Sea T una aplicación que lleva un conjunto L acotado en un espacio topológico X . Si TL está contenido en un subconjunto compacto de X decimos que T es **compacto (totalmente continuo)**.

Lema 19. (Proyección de Schauder). Si K es un subconjunto compacto de un espacio normado V y dado $\varepsilon > 0$, entonces existe un subconjunto finito X de K , y una aplicación continua $P : K \rightarrow co(K)$ tal que

$$\|P(x) - x\| < \varepsilon \quad \text{con } x \text{ en } K.$$

Demostración. Elijamos $x_1, \dots, x_n \in K$ tal que los conjuntos $\mathbb{B}(x_i, \varepsilon)$ con $i = 1, \dots, n$ cubran a K , poner $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Para $1 \leq i \leq n$ ponemos

$$f_i(x) = \max(0, \varepsilon - \|x - x_i\|).$$

Entonces $f_i(x) \neq 0$ si y sólo si $x \in \mathbb{B}(x_i, \varepsilon)$. Así para cada $x \in K$, algún $f_i(x) \neq 0$. Ahora ponemos

$$P(x) = \frac{\sum f_i(x)x_i}{\sum f_i(x)} \quad \text{con } x \in K.$$

Claramente $P(x)$ es continua. Por otra parte como $P(x)$ es una combinación convexa de los puntos $x_i \in \mathbb{B}(x_i, \varepsilon)$, tenemos que $P(x) \in \mathbb{B}(x, \varepsilon)$. ■

Teorema 61. (Schauder [13]). Sea M subconjunto convexo, no vacío de un espacio normado B . Sea T una aplicación continua de M en un conjunto compacto $K \subset M$. Entonces T tiene un punto fijo.

Demostración. Para $n = 1, 2, \dots$ consideremos $P_n \circ T$, donde P_n es la aplicación dada en el Lema 19 con $\varepsilon = 1/n$. Ya que $X \subset K \subset M$ tenemos que $co(X) \subset M$. Así $P_n \circ T$ es una aplicación continua que lleva el conjunto finito dimensional convexo, compacto en sí mismo. Por el Teorema de Brouwer 54, existe un punto fijo x_n de la aplicación $P_n \circ T$. Es decir, $P_n T(x_n) = x_n$, se sigue que

$$\|T(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Por el Lema 45 T tiene un punto fijo. ■

4.4. Teorema del punto fijo de Schaefer

Lema 20. Sea \mathbb{B} una bola cerrada de radio n en un espacio normado B . La retracción radial a \mathbb{B} es definida por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{B} \\ \frac{nx}{\|x\|} & \text{si } x \notin \mathbb{B} \end{cases}$$

Entonces:

- i) r es una retracción continua de B hacia \mathbb{B} ,
- ii) si $r(x) \in \mathbb{B}^\circ$ entonces $r(x) = x$,
- iii) si $x \notin \mathbb{B}$ entonces $r(x) \in \partial\mathbb{B}$.

Demostración. iii) si $x \notin \mathbb{B}$, entonces $r(x) = \frac{nx}{\|x\|}$, por lo tanto $\|r(x)\| = n$, se sigue que $r(x) \in \partial\mathbb{B}$; por otra parte si $r(x) \in \mathbb{B}^\circ$, entonces $x \in \mathbb{B}^\circ$ y $r(x) = x$, demostrando el inciso ii). El inciso i) es obvio. ■

Lema 21. Sea $T : M \rightarrow N$ una función compacta y sea $r : N \rightarrow P$ una función continua. Entonces rT es compacta.

Demostración. Sea $X \subset M$, como T es una función compacta, entonces $T(X) \subset Y$ con Y un conjunto compacto de N , por otra parte se tiene que $r(T(X)) \subset r(Y)$, como r es una función continua y Y compacto entonces $r(Y)$ es compacto, esto muestra que rT es una función compacta. ■

Teorema 62. Sea B un espacio normado, \mathbb{B} la bola cerrada unitaria en B y $\partial\mathbb{B}$ la esfera unitaria en B . Sea $T : \mathbb{B} \rightarrow B$ una aplicación compacta continua, tal que $T(\partial\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}$. Entonces T tiene un punto fijo.

Demostración. Sea r la retracción radial hacia \mathbb{B} . Entonces rT es una función compacta por el Lema 21, por lo tanto rT tiene un punto fijo por el Teorema de Schauder 61, digamos y , entonces

$$rTy = y.$$

Si $y \in \partial\mathbb{B}$ se tiene que $Ty \in \mathbb{B}$ así que:

$$y = rTy = Ty.$$

Esta ecuación es cierta, por el Lema 20 inciso ii), si $y = rTy$ esta en \mathbb{B}° . ■

Uno de los resultados importantes como consecuencia del Teorema de Schauder es el Teorema de Schaefer, que posee una amplia aplicación en probar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Basta en encontrar una estimación a priori para la solución del problema. La dificultad de la aplicación del Teorema de Schauder sale a relucir debido a que en muchas ocasiones es difícil encontrar un conjunto convexo que se aplique a sí mismo.

Teorema 63. (Schaefer [13]) Sea B un espacio normado, $T : B \rightarrow B$ una aplicación continua compacta para cada subconjunto acotado X de B . Entonces:

1. La ecuación $x = \lambda T(x)$ tiene una solución para $\lambda = 1$, o

2. El conjunto de todas las soluciones x , para $0 < \lambda < 1$, no es acotado.

Demostración. Sean \mathbb{B} la bola de radio n y $r : \mathbb{B} \rightarrow B$ la retracción radial definida en el Lema 20. Por el Teorema de Schauder 61, rT tiene un punto fijo $x \in \mathbb{B}$. En el caso 1 $\|T(x)\| \leq n$, en este caso $T(x) = rT(x) = x$, o en el caso 2 $\|T(x)\| > n$, por lo cual $\|x\| = \|rT(x)\| = n$, así que

$$x = rT(x) = \left(\frac{n}{\|T(x)\|} \right) T(x) = \lambda T(x) \quad \text{con } 0 < \lambda < 1.$$

Así para cada entero n obtenemos una solución de $T(x) = x$, o para cada n obtenemos un vector propio de norma n , para algún valor propio en $(0, 1)$; en el segundo caso el conjunto de los vectorios propios no es acotado. ■

Capítulo 5

Aplicaciones de los Teoremas de Puntos Fijos

En diferentes problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, la demostración de la existencia de la solución del problema, se reduce a una ecuación

$$x = T(x) \tag{5.1}$$

en un espacio de Banach B con operador no lineal $T : B \rightarrow B$. En este modo, la existencia de la solución del problema para ecuaciones diferenciales, se reduce al problema de mostrar la existencia de un punto fijo del operador T . Para aplicar el teorema de Schauder, sobre existencia de puntos fijos de la ecuación (5.1), demostramos para cada problema en modo diferenciable (dependiendo del problema), que el operador correspondiente T es compacto y aplica un conjunto convexo en sí mismo.

5.1. Aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Lineales

El siguiente teorema demuestra la existencia de la solución del problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias, dando un contraejemplo al término de la demostración sobre la unicidad, cuando la función F no cumple la condición de Lipschitz.

Teorema 64. (Peano) Sea $F(t, y)$ una función vectorial continua de t y y en el rectángulo $S = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - a| < h_1, \|y - b\| < h_2\}$, $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces el problema de Cauchy:

$$y' = F(t, y), \quad y(a) = b, \tag{5.2}$$

tiene al menos una solución en una vecindad de $a \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $S_1 = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - a| \leq \frac{h_1}{2}, \|y - b\| \leq \frac{h_2}{2}\}$, como $F(t, y)$ es una función continua entonces es acotada en S_1 , es decir, existe $K > 0$ tal que $\|F(t, y)\| \leq K$ en S_1 . Ahora elegimos $\delta > 0$ tal que $K\delta \leq \frac{h_2}{2}$. Sea $\mathcal{C}(|t - a| \leq \delta)$ el espacio de funciones continuas definido para $|t - a| \leq \delta$, con valores en \mathbb{R}^n . Consideremos en $\mathcal{C}(|t - a| \leq \delta)$ el subespacio cerrado, convexo M , que consiste de las funciones $y \in \mathcal{C}(|t - a| \leq \delta)$ que cumplen la condición $\|y(t) - b\| \leq \delta K$. Definamos el operador $U : M \rightarrow M$ como sigue:

$$U(y(t)) = b + \int_a^t F(s, y(s)) dt.$$

Es fácil ver que $U : M \rightarrow M$, en efecto sea $y \in M$ entonces:

$$\|U(y(t)) - b\| = \left\| \int_a^t F(t, y(t)) dt \right\| \leq K |t - a| \leq K\delta,$$

es decir, $U(M) \subset M$.

Ahora mostraremos que el operador U es precompacto, por lo tanto por el Teorema de Schauder 61, U tendrá por lo menos un punto fijo. Siendo este punto fijo la solución del sistema (5.2).

La aplicación U es continua en M , en efecto como la función $F(t, y)$ es continua en y y t , entonces dados $y, z \in M$ se tiene:

$$\|U(y(t)) - U(z(t))\| = \left\| \int_a^t F(s, y(s)) - F(s, z(s)) ds \right\| \rightarrow 0 \text{ cuando } \|y(t) - z(t)\| \rightarrow 0.$$

También

$$\|U(y(t))\| \leq |b| + \delta K,$$

y

$$\|U(y(s)) - U(y(t))\| \leq \left\| \int_s^t F(t, y(t)) dt \right\| \leq K |s - t|.$$

Así $U(M)$ es una familia de funciones equicontinuas y uniformemente acotadas, por el Teorema de Arzela Ascoli, $U(M)$ es precompacto y por el Teorema de Schauder 61, U tiene un punto fijo $y \in M$, que es la solución del problema. ■

El teorema demostrado garantiza la existencia de la solución del problema de Cauchy (5.2). Para tener solución única, se necesitan añadir condiciones a F , por ejemplo condición de Lipschitz y demostrar unicidad aparte.

Ahora presentamos un ejemplo, donde el problema de Cauchy (5.3) no posee solución única.

Consideremos el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^{\frac{1}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Mediante separación de variables, encontramos una solución:

$$\frac{dy}{dt} = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = \int dt \Rightarrow \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = t + C,$$

donde $C = 0$ por las condiciones iniciales, luego una solución del problema es $y(t) = (\frac{2}{3}t)^{\frac{3}{2}}$. Pero haciendo un inspección del problema, podemos ver que existe otra solución del sistema $y(t) \equiv 0$, más aún podemos fabricar una familia infinita de soluciones como sigue:

$$y_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < t_0, \\ (\frac{2}{3}(t - t_0))^{\frac{3}{2}} & \text{si } t \geq t_0. \end{cases}$$

Esto ocurre debido a que la función $f(y) = y^{\frac{1}{3}}$, no cumple la condición de Lipschitz en el punto $y = 0$. En otras palabras que no existe L tal que $|f(0) - f(y)| = y^{\frac{1}{3}} < L|y|$.

5.2. Problema con Condición de Frontera

Consideremos el problema escalar de frontera ([1],[5]) para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [0, l], \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad (5.4)$$

$$f : [0, l] \times \mathbb{R}^1, \quad f(x, y) \in C^1([0, l] \times \mathbb{R}^1), \quad \sup_{x, y \in [0, l] \times \mathbb{R}^1} |f(x, y)| < \infty. \quad (5.5)$$

El problema con condición de frontera se puede transformar a la siguiente ecuación integral equivalente

$$y(x) = \int_0^l G(x, t)f(t, y(t))dt, \quad t \in [0, l]. \quad (5.6)$$

Donde $G(x, t)$ es la función de Green [9] para el problema (5.4) y se presenta de la siguiente forma:

$$G(x, t) = \begin{cases} u_1(x)u_2(t), & 0 \leq t < x \leq l, \\ u_2(x)u_1(t), & 0 \leq x \leq t \leq l. \end{cases}$$

Las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ satisfacen la ecuación homogénea

$$\ddot{u}_i(x) = 0, \quad \text{para } n = 1, 2.$$

y las condiciones de frontera

$$u_2(0) = 0; u_1(l) = 0; \dot{u}_1(0)u_2(0) - \dot{u}_2(0)u_1(0) = 1.$$

En nuestro caso se puede elegir

$$u_2(x) = -\frac{x}{l}; \quad u_1(x) = l - x,$$

por lo tanto la función de Green del problema (5.6) tiene la forma [9]

$$G(x, t) = \begin{cases} (x-l)\left(\frac{t}{l}\right), & 0 \leq t < x \leq l, \\ (t-l)\left(\frac{x}{l}\right), & 0 \leq x \leq t \leq l. \end{cases} \quad (5.7)$$

Lema 22. Supongamos que la solución $y \in C^2[0, l]$ del problema con condiciones de frontera 5.4 existe, entonces la solución satisface la ecuación integral

$$y(x) = \int_0^l G(x, t)f(t, y(t))dt, \quad t \in [0, l]. \quad (5.8)$$

Recíprocamente, si $y \in C[0, l]$ y cumple la ecuación integral (5.8), entonces y es la solución del problema (5.4).

Demostración. Se sigue de la definición de la función de Green (5.7):

$$y(x) = \int_0^l G(x, t)f(t, y(t))dt = \frac{(x-l)}{l} \int_0^x tf(t, y(t))dt + \frac{x}{l} \int_x^l (t-l)f(t, y(t))dt. \quad (5.9)$$

Supongamos que la solución del problema (5.4) existe y $y \in C^{(2)}[0, l]$, entonces $f(x, y(x)) \in C[0, l]$, aplicando la función de Green al problema (5.4) obtenemos (5.8).

Ahora sea $y \in C[0, l]$, entonces $f(x, y) \in C[0, l]$ y de la fórmula (5.9) se sigue que $y \in C^2[0, l]$. Sustituyendo (5.9) en (5.6) y usando las propiedades de la función de Green (5.7) obtenemos que $y(x)$ satisface el problema (5.4). ■

Ahora demostraremos la existencia de la solución del problema (5.4), definiendo un operador T del espacio de funciones continuas en sí mismo y demostrando que este operador T cumple las condiciones del Teorema de Schauder 61.

Teorema 65. Bajo las condiciones (5.5), existe la solución $y \in C^2[0, l]$ del problema (5.4).

Demostración. De las condiciones (5.5), existe $L > 0$ tal que:

$$|f(x, y(x))| < L \quad \forall x, y \in [0, l] \times \mathbb{R}^1.$$

Sea $C^{(1)}[0, l]$ el espacio de las funciones con primeras derivadas continuas, con la norma uniforme. Consideremos en $C^{(1)}[0, l]$, el subespacio cerrado, convexo $M = C^{(1)}\left([0, l], |y(t)| \leq \frac{l^2 L}{8}\right)$, y definimos el operador $T : M \rightarrow M$ como sigue:

$$T(y(t)) = \int_0^l G(x, t) f(t, y(t)) dt,$$

donde $G(x, t)$ es la función de Green (5.7).

Probemos que $T : M \rightarrow M$, para ello necesitamos las siguientes estimaciones.

i) Sean $s, x \in [0, l]$ tal que $0 \leq x \leq s \leq t$, usando la condición de frontera izquierda de la función de Green (5.7), se sigue:

$$\begin{aligned} \text{a) } |G(x, t) - G(s, t)| &= \left| \frac{x}{l}(t-l) - \frac{s}{l}(t-l) \right| = \left| \frac{(t-l)}{l}(x-s) \right| \\ &= \frac{l-t}{l} |x-s|. \end{aligned}$$

ii) Sean $s, x \in [0, l]$, tal que $t \leq s \leq x \leq l$, usando la condición de frontera derecha de la función de Green (5.7), se sigue:

$$\begin{aligned} |G(x, t) - G(s, t)| &= \left| \frac{t}{l}(x-l) - \frac{t}{l}(s-l) \right| = \left| \frac{t}{l}[x-l-s+l] \right| \\ &= \left| \frac{t}{l}(x-s) \right| = \frac{t}{l} |x-s|. \end{aligned}$$

Definimos $g(x) = \int_0^l G(x, t)dt$, y calculemos su mínimo. En efecto, notemos que:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^l G(x, t)dt = \int_0^x G(x, t)dt + \int_x^l G(x, t)dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-l)}{l} t dt + \int_x^l \frac{x}{l} (t-l) dt \\ &= \frac{(x-l)}{l} \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + \frac{x}{l} \left(\frac{t^2}{2} - tl \right) \Big|_x^l \\ &= \frac{x^2(x-l)}{2l} + \frac{x}{l} \left[-\frac{l^2}{2} - \frac{x^2}{2} + xl \right] \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{lx}{2} = \frac{x}{2}(x-l). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g(x) = \frac{x^2 - lx}{2}.$$

Es claro que el mínimo de esta función es $\frac{l}{2}$, entonces:

$$|g(x)| = \left| \frac{x^2 - lx}{2} \right| \leq \left| g\left(\frac{l}{2}\right) \right| = \frac{l^2}{8}.$$

Se sigue que:

$$\left| \int_0^l G(x, t)dt \right| \leq \frac{l^2}{8}.$$

Sea $y \in M$, entonces:

$$|T(y(t))| = \left| \int_0^l G(x, t)f(t, y(t))dt \right| \leq L \left| \int_0^l G(x, t)dt \right| \leq \frac{l^2 L}{8},$$

por lo tanto $T(M) \subset M$.

Ahora mostremos que $T(M)$ es relativamente compacto.

Sean $y \in M$ y $x, s \in [0, l]$, entonces:

$$\begin{aligned} |T(y(x)) - T(y(s))| &= \left| \int_0^l G(x, t)f(t, y(t))dt - \int_0^l G(s, t)f(t, y(t))dt \right| \\ &= \left| \int_0^l [G(x, t) - G(s, t)] f(t, y(t))dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^l |[G(x, t) - G(s, t)]| |f(t, y(t))| dt \right| \\ &\leq L \left| \int_0^l |[G(x, t) - G(s, t)]| dt \right| \leq L|x-s|\frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|T(y(x)) - T(y(s))| \leq \frac{Ll}{2} |x-s|, \quad \text{con } s, x \in [0, l].$$

Notando que se llega al mismo resultado si utilizamos las estimaciones i) o ii).

Por lo tanto, $T(M)$ es una familia de funciones equicontinuas y equiacotadas. Por el Teorema de Arzela Ascoli, $T(M)$ es relativamente compacto; y por el Teorema Schauder 61, la ecuación integral (5.6) tiene un punto fijo, y por el Lema 22, es la solución del problema (5.4). ■

Solución periódica. Sea la función vectorial $f : [0, t] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y consideremos la siguiente ecuación ordinaria

$$X'(t) = f(X, t). \quad (5.10)$$

Asumimos que [4]

- i) Para cada punto $P_0 \in \mathbb{B}^n$, existe una única solución en $[0, \infty]$, tal que $X(0) = P_0$.
- ii) Si $X(0) \in \mathbb{B}^n$, entonces $X(t) \in \mathbb{B}^n$ para todo $t > 0$.
- iii) $X(t)$ depende continuamente de los datos iniciales.
- iv) F tiene período $w > 0$, como una función de t .

Entonces la ecuación 5.10 tiene una solución de período w .

Teorema 66. Bajo las condiciones i),ii),iii) y iv) el problema (5.10), tiene solución periódica, con período w

Demostración. Para cada $p_0 \in B^n$ consideremos el punto $p_w = X(w)$, tal que $X(t)$ es la solución del problema $X(0) = p_0$. Definamos la aplicación $T : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ dada por $T(p_0) = X(w)$, es claro que $T(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{B}^n$ por la condición ii), más aún T es continuo por el inciso iii), por el Teorema de Brouwer 54, la aplicación T tiene un punto fijo, digamos p_0 , entonces $p_0 = T(p_0) = X(w)$. Por lo tanto $X(p_0, t)$ tiene período w . ■

5.3. Problema Estacionario para la Ecuación de Navier-Stokes

Comenzamos definiendo el espacio de funciones con el que trabajaremos. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ consideremos en $W^{1,2}(\Omega)$ el subespacio de las funciones senoidales definida como

$$H(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \operatorname{div}(u) = 0, u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Dotemos a $H(\Omega)$ con el producto escalar

$$[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 u_{x_k} \cdot v_{x_k} dx.$$

Que define una norma natural, inducida por el producto escalar anterior, por la desigualdad de Friedrich $[u, u]^{\frac{1}{2}} \sim \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$.

Ahora el problema estacionario de Navier-Stokes [11], queda establecido como sigue:

$$-\nu \Delta v + v_k v_{x_k} = -\operatorname{grad}(p) + f(x), \quad (5.11)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div}(v) = 0.$$

donde

$$v_k v_{x_k} = v_k \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad j = 1, 2, 3.$$

La función $v \in H(\Omega)$, se dice solución generalizada del problema (5.11), si satisface la identidad integral

$$\int_{\Omega} (\nu v_{x_k} \cdot \phi_{x_k} - v_k v \cdot \phi_{x_k}) dx = \int_{\Omega} f \cdot \phi dx, \quad (5.12)$$

para cualquier $\phi \in H(\Omega)$. La identidad integral (5.12), se deduce de aplicar las identidad de Green e integrando por partes el término no lineal.

Teorema 67. Sea $f \in L^2(\Omega)$, entonces el problema (5.11) en un dominio acotado Ω , tiene al menos una solución generalizada.

Demostración. Por el Teorema de representación de Riesz, el funcional lineal $\int_{\Omega} f \cdot \phi dx$ puede ser representado en la forma

$$\int_{\Omega} f \cdot \phi dx = [F, \phi], \quad (5.13)$$

donde F es un único elemento de $H(\Omega)$. Para $v \in H(\Omega)$ fijo, la integral $\int_{\Omega} v_k v \cdot \phi_{x_k} dx$ también define un funcional de $\phi \in H(\Omega)$; en efecto, la linealidad en ϕ es directa, mientras la acotación se sigue de la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v_k v \cdot \phi_{x_k} dx \right| &\leq \sqrt{3} \left(\int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 v_k^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 v_i^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^3 \phi_{i x_k}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3} \left(\int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 v_k^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_H. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad multiplicativa

$$\int_{\Omega} u^4 dx \leq \left(\int_{\Omega} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Se obtiene que

$$\sqrt{3} \left(\int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 v_k^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_H \leq \sqrt{3} C \|v\|_H^2 \|\phi\|_H.$$

Aquí hemos usado la desigualdad Hölder y desigualdad multiplicativa de cuarta potencia. Una vez más, utilizando el Teorema de representación de Riesz, obtenemos la existencia de un elemento Av en $H(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v_k v \cdot \phi_{x_k} dx = [Av, \phi], \quad (5.14)$$

donde $A : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ es un operador no lineal. De las identidades (5.13) y (5.14), podemos escribir la identidad (5.12) de la siguiente manera

$$[\nu v - Av - F, \phi] = 0.$$

Como ϕ es un elemento arbitrario de $H(\Omega)$, el problema de determinar la solución generalizada v se reduce a resolver la ecuación no lineal

$$v - \frac{1}{\nu}(Av + F) = 0, \quad (5.15)$$

en el espacio $H(\Omega)$.

Ahora mostraremos que el operador A es completamente continuo en $H(\Omega)$, sea $\{v^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $H(\Omega)$, utilizando la identidad (5.14) se deduce lo siguiente

$$\begin{aligned} [Av^m - Av^n, \phi] &= \int_{\Omega} (v_k^m v^m - v_k^n v^n) \cdot \phi_{x_k} dx \\ &= \int_{\Omega} (v_k^m - v_k^n) v^m \phi_{x_k} dx + \int_{\Omega} v_k^n (v^m - v^n) \cdot \phi_{x_k} dx. \end{aligned}$$

Para estimar el lado derecho, aplicaremos la desigualdad de Hölder y la desigualdad multiplicativa de cuarta potencia obteniendo:

$$|[Av^m - Av^n, \phi]| \leq C_1 \|v^m - v^n\|_{L^4(\Omega)} (\|v^m\|_H + \|v^n\|_H) \|\phi\|_H,$$

poniendo $\phi = Av^m - Av^n$ y tomando en cuenta que $\|v^m\| \leq C$ (*constante*), obtenemos lo siguiente:

$$\|Av^m - Av^n\|_H \leq C_2 \|v^m - v^n\|_{L^4(\Omega)} \leq C_3 \|v^m - v^n\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\nabla(v^m - v^n)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \leq C_4 \|v^m - v^n\|_{L^2(\Omega)},$$

en la parte derecho se han utilizado desigualdades multiplicativas y la desigualdad Fredich. Ahora utilizando el Teorema 72 para el caso $n = 3$ y $p = 2$, tenemos un encajamiento compacto, por lo tanto existe una subsucesión v^{m_j} que es convergente en $L_2(\Omega)$, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $j, i > N$ se tiene

$$\|Av^{m_j} - Av^{m_i}\|_H \leq C_4 \|v_j^m - v_i^n\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Por lo tanto A es un operador totalmente continuo, se sigue que el operador $A + F$, que asigna la función $Av + F$ a cada función v , es también un operador totalmente continuo. Para investigar la solubilidad de la ecuación (5.15) aplicaremos el Teorema de Schaefer 63. En efecto, se sigue del Teorema de Schaefer 63 que para probar la existencia de al menos una solución de la ecuación (5.15), es suficiente mostrar que las normas de todas las posibles soluciones v^λ de la ecuación

$$v - \frac{\lambda}{\nu}(Av + F) = 0, \quad (5.16)$$

donde $\lambda \in [0, 1]$, son uniformemente acotadas. Para probar esto, aplicamos el producto escalar en $H(\Omega)$ a la ecuación (5.16) con v , y lo expresamos en la siguiente forma

$$\int_{\Omega} \left(v_{x_k}^\lambda \cdot v_{x_k}^\lambda - \frac{\lambda}{\nu} v_{x_k}^\lambda v^\lambda \cdot v_{x_k}^\lambda \right) dx = \frac{\lambda}{\nu} [F, v^\lambda] = \frac{\lambda}{\nu} \int_{\Omega} f \cdot v^\lambda dx, \quad (5.17)$$

usando (5.14). El término no lineal desaparece

$$-\frac{\lambda}{\nu} \int_{\Omega} v_{x_k}^\lambda v^\lambda \cdot v_{x_k}^\lambda dx = -\frac{\lambda}{2\nu} \int_{\Omega} v_k^\lambda \frac{\partial (v^\lambda)^2}{\partial x_k} dx = 0,$$

ya que $\operatorname{div} v^\lambda = 0$ y $v^\lambda|_{\partial\Omega} = 0$. Por lo tanto (5.17) implica que la estimación a priori requerida es

$$\|v^\lambda\|_H \leq \frac{\lambda}{\nu} \|F\|_H = \frac{\lambda}{\nu} |f|,$$

donde $|f|$ es la norma del funcional lineal definido por f . Esto completa la demostración. \blacksquare

Para la solución del problema (5.11), tenemos la estimación

$$\|v\|_H \leq \frac{1}{\nu} \|F\|_H = \frac{1}{\nu} |f|. \quad (5.18)$$

Ahora mostraremos, cuando se tiene la unicidad de la solución generalizada del problema 5.11. Supongamos lo contrario, que existen 2 soluciones generalizadas v y w . Entonces la diferencia $u = v - w$ pertenece a $H(\Omega)$ y satisface la identidad

$$\int_{\Omega} (vu_{x_k} \cdot \phi_{x_k} - u_k v \cdot \phi_{x_k} - w_k u \cdot \phi_{x_k}) dx = 0. \quad (5.19)$$

Poniendo en la anterior identidad $\phi = u$, la identidad (5.19) puede ser trasformada en

$$0 = \nu \|u\|_H^2 - \int_{\Omega} (u_k v \cdot u_{x_k} + w_k u \cdot u_{x_k}) dx = \nu \|u\|_H^2 - \int_{\Omega} u_k v \cdot u_{x_k} dx.$$

Usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad multiplicativa de cuarta potencia, estimamos el siguiente término

$$\begin{aligned} \nu \|u\|_H^2 &= \nu \int_{\Omega} \sum_{k,i=1}^3 u_k v_i u_{ix_k} dx \leq \nu \sqrt{3} \|u\|_H \left(\int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 u_k^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 v_i^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq 2\sqrt{3} C^{\frac{-1}{4}} \|u\|_H^2 \|v\|_H. \end{aligned}$$

La estimación (5.18) es válida para la solución v , por lo tanto

$$\nu \|u\|_H^2 \leq 2\sqrt{3} C^{\frac{-1}{4}} \frac{1}{\nu} \|u\|_H^2 |f|. \quad (5.20)$$

Si v, f y el dominio Ω cumplen la condición

$$2\sqrt{3} C^{\frac{-1}{4}} \nu^{-2} |f| < 1,$$

entonces (5.20) implica que $u = 0$, es decir, que v y w son iguales. Así, tenemos demostrado el siguiente teorema de unicidad:

Teorema 68. Si ν, f y Ω satisfacen la condición

$$2\sqrt{3} C^{\frac{-1}{4}} \nu^{-2} |f| < 1,$$

entonces el problema 5.11 tiene solución única.

5.4. Ecuaciones Elípticas no Lineales

Ahora mostraremos la existencia de la solución para ecuaciones Elípticas no Lineales, para esto requeriremos introducir nuevos conceptos que condicionarán nuestro problema para mostrar la existencia de la solución. Utilizaremos el Teorema de Punto fijo de Brouner de manera indirecta en la demostración, en otras palabras la demostración del problema no recae en cumplir las condiciones de algún teorema de punto fijo, diferenciándose de los problemas anteriores. Procedemos a definir el problema.

Consideramos la ecuación elíptica [14]:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \varphi(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} = f(x), \quad (5.21)$$

donde

$$\varphi(x, \nabla u) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}). \quad (5.22)$$

La función $\varphi(x, y)$ es continua por x, y y acotada, es decir:

$$|\varphi(x, y)| \leq M \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Buscamos la solución $u \in W_0^{1,2}$. Observemos que si la función φ es constante, se tiene el clásico problema de Dirichlet:

$$\Delta u = f,$$

el cual podemos atacar con teoría de potencial [3].

El operador no lineal A definido como:

$$A(u) := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (5.23)$$

lleva al espacio $W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$, donde el espacio $W^{-1,2}(\Omega)$ consiste de las distribuciones $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ tal que $f_i \in L^2(\Omega)$.

Ejemplo 69.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

donde $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$ si $u \in W_0^{1,2}$, entonces tenemos que $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ es una distribución:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (\varphi) = (-1) \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx.$$

Lema 23. El operador $A : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$ es acotado.

Demostración. Tenemos $|\varphi(x, \nabla u)| \leq M$ y ya que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} \phi dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \varphi(x, \nabla u) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \right| \leq M \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq M \|u\|_{W_0^{1,2}} \|\phi\|_{W_0^{1,2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\| \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} dx \right\| \leq M \|u\|_{W_0^{1,2}}.$$

■

Para aclarar las condiciones que se necesitan imponer a las funciones φ , y así obtener el Teorema de existencia de la solución del problema (5.21), consideraremos la convergencia de las aproximaciones de Galerkin [10].

Sea $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ un base para $W_0^{1,2}(\Omega)$ y sea X_n el subespacio de $W_0^{1,2}(\Omega)$ generado por el conjunto $\{h_1, \dots, h_n\}$. Entonces la relación

$$\{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \sum_i^n a_i h_i = u^n,$$

donde $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y u^n es la proyección de u sobre X_n , define una aplicación lineal acotada $C : \mathbb{R}^n \rightarrow X_n$. Este operador induce una norma $\|\cdot\|_1$ en \mathbb{R}^n , que a cada vector $a \in \mathbb{R}^n$ le asocia el real positivo

$$\|a\|_1 := \left\| \sum_{i=1}^n a_i h_i \right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Como todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes, existe $k \in \mathbb{R}$:

$$\|a\| \leq k \|a\|_1 = k \|C(a)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \quad \text{donde } \|a\| \text{ es la norma estandar en } \mathbb{R}^n.$$

Ahora definimos el operador $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por la fórmula $B(a) = (b_1, \dots, b_n)$, donde cada

$$b_i = \langle A(C(a)) - f, h_i \rangle, \quad (5.24)$$

explícitamente queda de la siguiente forma:

$$b_i = \int_{\Omega} \left(\sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \varphi(x, \nabla u^n) \frac{\partial u^n}{\partial x_i} \right\} - f \right) h_i dx. \quad (5.25)$$

Si las integrales (5.25) existen, el operador B será definido para todos los $a \in \mathbb{R}^n$. Supondremos ahora que φ satisface las siguientes condiciones:

1. $\varphi(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

2. $|\varphi(x, y)| \leq M, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
3. La función $t \rightarrow \varphi(x, t)t$ es creciente y $t\varphi(x, t) - s\varphi(x, s) \geq 0$ para $t \geq s$.
4. $\varphi(x, y) \geq \alpha > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Notemos que la última condición 4 permite afirmar que el operador A satisface las siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \langle A(u), u \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \varphi(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} u dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \varphi(x, \nabla u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \quad (5.26) \\ &\geq \alpha \|\nabla u\|_{L_2}^2 \geq \alpha_1 \|u\|_{W_{01,2}^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ahora mostremos que la aproximación u^n de Galerkin cumple la siguiente condición

$$\langle A(u^n) - f, h_i \rangle = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (5.27)$$

Es decir, los coeficientes a_1, \dots, a_n cumplen que

$$B(a) = 0. \quad (5.28)$$

Probaremos que el teorema de Brouwer 54 garantiza la existencia de la solución de (5.28) por el siguiente lema.

Lema 24. (Ángulo Agudo) Sea $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y para un $R > 0$ satisface la condición:

$$(B(a), a) \geq 0 \quad \text{con } \|a\| = R.$$

Entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| \leq R$ y $B(x) = 0$.

Demostración. Supongamos que $B(a) \neq 0 \forall a \in \mathbb{B}^n = \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\| \leq R\}$, en otras palabras \mathbb{B}^n es la bola de radio R . Introducimos la aplicación $G : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ dada como sigue $G(a) = -R \frac{B(a)}{\|B(a)\|}$. Ya que $B(a) \neq 0$ en \mathbb{B}^n , la función G es continua y además aplica la bola \mathbb{B} en sí misma. Por el Teorema de Brouwer 54, G tiene un punto fijo, digamos $a_1 \in \mathbb{B}^n$ entonces:

$$a_1 = -R \frac{B(a_1)}{\|B(a_1)\|},$$

evidentemente $\|a_1\| = R$, por lo tanto

$$(B(a_1), a_1) = -R \|B(a_1)\| < 0,$$

que contradice la condición

$$(B(a), a) \geq 0 \quad \text{para } \|a\| = R.$$

■

Haciendo un parentesis, notemos que para el caso $n = 1$ el teorema anterior se sigue del Teorema del Valor Intermedio, en efecto, sea $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y para un $R > 0$ se satisface la condición

$$(B(a), a) \geq 0 \quad \text{con } |a| = R,$$

entonces $a = R$ o $a = -R$, por lo tanto:

$$B(R)R \geq 0 \quad \text{y} \quad B(-R)(-R) \geq 0,$$

se sigue que

$$B(R) \geq 0 \quad \text{y} \quad B(-R) \leq 0,$$

y por el Teorema del Valor Intermedio existe $x \in [-R, R]$ tal que $B(x) = 0$.

Ahora probemos que el Teorema del Ángulo Agudo, nos asegura (5.28).

Teorema 70. Existe una aproximación de Galerkin $u^n := \sum_{i=1}^n a_i h_i$ que cumple la ecuación (5.27).

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} (B(a), a) &= \sum_{i=1}^n b_i a_i \\ &= \langle A(u^n), u^n \rangle - \langle f, u^n \rangle \\ &\geq \langle A(u^n), u^n \rangle - \|f\| \|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\ &= \left(\frac{\langle A(u^n), u^n \rangle}{\|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}} - \|f\| \right) \|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

De la estimación (5.26)

$$\frac{\langle A(u^n), u^n \rangle}{\|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}} \rightarrow \infty, \quad \text{si} \quad \|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow \infty.$$

Ya que $\|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|C(a)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \sim \|a\|$, existe $R_1 > 0$ tal que

$$(B(a), a) \geq 0 \quad \text{para} \quad \|a\| = R_1.$$

Aplicando el Lema del Ángulo Agudo satisfacemos la existencia de la solución de la ecuación

$$B(a) = 0.$$

Por lo tanto tomando $u^n = C(a)$ se tiene

$$\langle A(u^n), h_i \rangle = \langle f, h_i \rangle \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, k. \quad (5.30)$$

■

Por otra parte, si multiplicamos la igualdad (5.30) por a_i y sumamos las igualdades obtenidas para cada $i = 1, \dots, k$, se tiene

$$\langle A(u^n), u^n \rangle = \langle f, u^n \rangle \leq \|f\| \|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Equivalentemente

$$\frac{\langle A(u^n), u^n \rangle}{\|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}} \leq \|f\|. \quad (5.31)$$

Por la desigualdad (5.26) se tiene lo siguiente

$$\|u^n\|_{W^{01,2}} \leq C' \|f\|. \quad (5.32)$$

y de (5.32), (5.30) también se sigue

$$\int \varphi(x, |\nabla u|) \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u^n}{\partial x_i} \right)^2 dx = \langle A(u^n), u^n \rangle \leq C' \|f\|^2. \quad (5.33)$$

Por otro lado de (5.31) se deduce que

$$\langle A(u^n), V_m \rangle = \langle f, V_m \rangle \quad \text{para } n > m, \quad (5.34)$$

donde

$$V_m := \sum_{i=1}^m a_i h_i.$$

Ahora consideremos el caso cuando en (5.34) el índice $m \rightarrow \infty$. De (5.32) se sigue que existe una subsucesión $\{u^{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge débilmente en $\|u^n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$

$$u^{n_k} \rightharpoonup u.$$

Pasando al límite en (5.34), obtenemos

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \langle A(u^{n_k}), V \rangle = \langle f, V \rangle \quad \forall V \in \bigcup_m X_m. \quad (5.35)$$

De (5.35) se sigue que la sucesión $A(u^{n_k})$ converge débilmente a la función $f \in W^{-1,2}$, sobre un conjunto denso $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ que a su vez es denso en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Lema 25. Au^{n_k} converge débilmente a f en $W^{-1,2}(\Omega)$.

Demostración. Basta verificar que $\|A(u^{n_k})\|_{W^{-1,2}}$ es acotado. Por definición del operador A , propiedades de la función $\varphi(x, \nabla u)$ y de la desigualdad (5.32), para la función $w \in W^{1,2}(\Omega)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \|A(u^n)\|_{W^{-1,2}} &= \sup_{w \neq 0} \left| \left\langle A(u^n), \frac{w}{\|w\|_{W^{1,2}}} \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{w \neq 0} \left| \int_{\Omega} \varphi(x, |\nabla u^n|) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u^n}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{1}{\|w\|_{W_0^{1,2}}} \right| \\ &\leq M_1 \|u^n\|_{W_0^{1,2}} \frac{\|w\|_{W_0^{1,2}}}{\|w\|_{W_0^{1,2}}} \\ &\leq M_1 \|u^n\|_{W_0^{1,2}} \\ &\leq C' M_1 \|f\|. \end{aligned}$$

Es decir $\|A(u^n)\|_{W^{-1,2}}$ es uniformemente acotada y por lo tanto de $A(u^n)$ se puede extraer una subsucesión débilmente convergente tal que $A(u^{n_m}) \rightharpoonup f$ ■

Así fue obtenido que $u^{n_m} \rightarrow u$ y $A(u^{n_m}) \rightarrow f$. Ahora sólo falta verificar que

$$A(u) = f.$$

Hasta ahora obtuvimos la aproximación de Galerkin para la solución de la ecuación elíptica (5.21). Pero demostrar su convergencia a la solución del problema al contrario del caso lineal, no están fáciles. Para demostrar que el límite débil de las aproximaciones de Galerkin es la solución del problema (5.21) se usa la teoría de los operadores monótonos.

Definición 45. El operador $A : X \rightarrow X^*$ se llama **monótono** si:

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in X. \quad (5.36)$$

Además vamos a usar la continuidad “radial” de un operador no lineal.

Definición 46. El operador $A : X \rightarrow X^*$ se llama **continuo radial** si $\forall u, v \in X$ la función :

$$s \rightarrow \langle A(u + sv), v \rangle, \quad s \in [0, 1], \quad (5.37)$$

es continuo.

Para nuestro caso, el espacio que consideramos es $X = \{u : u \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$ y el operador no lineal A (5.23).

Lema 26. Sea la función $\varphi(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ y $0 < m \leq \varphi \leq M < \infty$. Además la función $t\varphi(x, t)$ es monótona creciente en t , $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Entonces el operador (5.23) es monótono y continuo radial.

Demostración. 1- Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle A(u) - A(v), u - v \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left[\varphi(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \varphi(x, \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \{ \varphi(x, \nabla u) (\nabla u \cdot \nabla(u - v)) - \varphi(x, \nabla v) (\nabla v \cdot \nabla(u - v)) \} dx \\ &\geq \int_{\Omega} \varphi(x, \nabla u) (|\nabla u|^2 - |\nabla u| |\nabla v|) - \varphi(x, \nabla v) (|\nabla u| |\nabla v| - |\nabla v|^2) dx \\ &= \int_{\Omega} (\varphi(x, \nabla u) |\nabla u| - \varphi(x, \nabla v) |\nabla v|) [|\nabla u| - |\nabla v|] dx. \end{aligned}$$

Pero $\varphi(x, t)t$ es monótona creciente entonces $[\varphi(x, t)t - \varphi(x, \tau)\tau] (t - \tau) \geq 0$ y por lo tanto la expresión bajo la integral es no negativa. Lo que significa que A es un operador monótono.

2- Ahora mostraremos que A es un operador continuo radial. Tenemos

$$\langle A(u + sv), v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varphi(x, |\nabla u|) \frac{\partial(u + sv)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx.$$

Ya que φ es continua y acotada obtenemos

$$\varphi(x, |\nabla(u + sv)|) \rightarrow \varphi(x, |\nabla(u)|) \quad \text{cuando } s \rightarrow 0.$$

Entonces para u, v fijos, se cumple la estimación

$$\left| \sum_{i=1}^3 \varphi(x, |\nabla u|) \frac{\partial(u+sv)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq M (|\nabla u| |\nabla v| + |\nabla u|^2),$$

donde $M (|\nabla u| |\nabla v| + |\nabla u|^2) \in L_1$. Por el Teorema de Lebesgue se puede pasar al límite bajo la integral cuando $s \rightarrow 0$ y obtener que el operador A es continua radial. ■

Continuamos con la demostración de dos Lemas generales para operadores monótonos.

Lema 27. Sea el operador $A : X \rightarrow X^*$ continuo radial y monótono. Supongamos que para $f \in X^*$ y $u \in X$ se cumple la desigualdad

$$\langle f - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X,$$

entonces

$$A(u) = f.$$

Demostración. Sea $v \in X$ y $v_t = u - tv, t > 0$. Tenemos por hipótesis del lema que:

$$\langle f - A(v_t), u - v_t \rangle = \langle f - A(u - tv), tv \rangle = t \langle f - A(u - tv), v \rangle \geq 0.$$

Como $t > 0$ tenemos entonces

$$\langle f - A(u - tv), v \rangle \geq 0. \quad (5.38)$$

Pasando al límite en (5.38) y usando que el operador A es continuo radial, obtenemos

$$\langle f - A(u), v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X, \quad (5.39)$$

y también

$$\langle f - A(u), -v \rangle = -\langle f - A(u), v \rangle \geq 0. \quad (5.40)$$

De (5.39) y (5.40) se sigue

$$\langle f - A(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in X,$$

es decir

$$A(u) = f \quad \text{en } X^*.$$

■

Lema 28. Sea $A : X \rightarrow X^*$ un operador continuo radial y monótono. Entonces el conjunto de las soluciones de la ecuación $A(u) = f$ (*) es convexo.

Demostración. Sean u_1, u_2 dos diferentes soluciones de la ecuación (*) y sea

$$u_t = tu_1 + (1-t)u_2, \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle f - A(v), u_t - v \rangle &= \langle f - A(v), tu_1 + (t-1)u_2 - v \rangle \\ &= \langle f - A(v), tu_1 - tv \rangle + \langle f - A(v), (1-t)u_2 - (1-t)v \rangle \\ &= t \langle f - A(v), u_1 - v \rangle + (1-t) \langle f - A(v), u_2 - v \rangle \\ &= t \langle A(u_1) - A(v), u_1 - v \rangle + (1-t) \langle A(u_2) - A(v), u_2 - v \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Por lo tanto

$$\langle f - A(v), u_t - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X, \quad (5.42)$$

y por el lema anterior

$$A(u_t) = f \quad \forall t \in [0, 1].$$

■

Ahora ya estamos listos para demostrar la existencia de la solución bajo las condiciones D .

Teorema 71. Sea la función $\varphi(x, t)$ que satisface las condiciones D , entonces el límite débil de la aproximación de Galerkin es la solución del problema (5.21).

Demostración. Escribimos nuestro problema (5.21) en la forma:

$$A(u) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(a, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0, \quad (5.43)$$

donde

$$a(x, u, u_x) = -f(x); \quad a_i(a, u, u_x) = \varphi(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Entonces por la monotonía del operador A obtenemos

$$\int_{\Omega} [a_i(x, u^n, u_x^n) - a_i(x, \xi, \xi_x)] [u_{x_i}^n - \xi_{x_i}] - [a(x, u^n, u_x^n) - a(x, \xi, \xi_x)] [u^n - \xi] dx \geq 0, \quad (5.44)$$

$\forall \xi \in W^{01,2}(\Omega)$. Donde u^n es la aproximación de Galerkin, que también pertenece a $W_0^{1,2}(\Omega)$ por construcción. Observemos que la aproximación de Galerkin u^n satisface la identidad

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x, u^n, u_x^n) \eta_{x_i} - a(x, u^n, u_x^n) \eta \right] dx = 0, \quad (5.45)$$

donde

$$u^n = \sum_{k=1}^n C_k^n h_k, \quad \eta = \sum_{k=1}^n b_k h_k \in X_n \quad \forall (b_1, \dots, b_N); \quad h_1, \dots, h_n \text{ la base en } X_n.$$

Suponemos $\xi \in X_n$. Usando (5.45) con $\eta = u^n - \xi$. Después en (5.44) con $\xi \in X_n$ obtenemos

$$\int_{\Omega} \sum a_i(x, \xi, \xi_x) (u_{x_i}^n - \xi_{x_i}) - a(x, \xi, \xi_x) (u^n - \xi) dx \geq 0. \quad (5.46)$$

Ahora en (5.46) fijemos un $\xi \in X_k$ para k tal que $k < n$ y pasando al límite en (5.46) obtenemos

$$\int_{\Omega} \sum a_i(x, \xi, \xi_x) (u_{x_i} - \xi_{x_i}) - a(x, \xi, \xi_x) (u - \xi) dx \geq 0. \quad (5.47)$$

Sea $\xi_l \in X_k$ tal que $\xi_l \rightarrow \xi$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Elejimos subsucesión $\xi_{l_m}, \partial_x \xi_{l_m}$ que converge casi en todos puntos en Ω . Sustituimos en (5.47) ξ por ξ_{l_m} y pasamos al límite. Ya que $a(x, \xi, \xi_x)$ y $a_i(x, \xi, \xi_x)$ son continuas por los argumentos x, ξ, ξ_x y acotados, se puede pasar al límite en (5.47) cuando $l_m \rightarrow \infty$ y obtener la desigualdad (5.47) para todo $\xi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

En particular poniendo $\xi = s\eta + u$ con $s > 0$ en (5.47), donde η cualquier elemento en $W_0^{1,2}(\Omega)$ entonces

$$s \int_{\Omega} \sum a_i(x, u + s\eta, u_x + s\eta_x)\eta_{x_i} - a_i(x, u + s\eta, u_x + s\eta_x)\eta \, dx \geq 0, \quad (5.48)$$

para $s > 0$. Por el lema 26 sobre continuidad radial, se puede pasar al límite cuando $s \rightarrow 0$, por lo tanto

$$\int_{\Omega} \sum a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i} - a_i(x, u, u_x)\eta \, dx \geq 0 \quad \forall \eta \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (5.49)$$

También en la desigualdad (5.49) se cumple para $-\eta$. Por lo tanto

$$\int_{\Omega} \sum a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i} - a_i(x, u, u_x)\eta \, dx = 0 \quad \forall \eta \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad (5.50)$$

Ya que $X^* = W^{-1,2}(\Omega)$, $X = W_0^{1,2}(\Omega)$, de (5.50) se sigue que la función $u(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ es la solución generalizada del operador A :

$$\int_{\Omega} A(u) \cdot \eta \, dx = 0 \quad \forall \eta \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

es decir $A(u) = 0$. ■

Apéndice A

Espacios de Sobolev y Teorema de Encajamiento

Definición 47. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio el **Espacio de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ se define como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\} \subset L^p(\Omega).$$

Donde $D^\alpha f$ es la derivada débil (generalizada), y $|\alpha|$ es un multi-índice. $W_0^{m,p}$ se define como

$$W_0^{m,p} = \overline{W^{m,p}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)}.$$

Teorema 72. (Rellich-Kondrachov). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado con frontera C^1 . Asumimos que $1 \leq p < n$. Entonces para cada $1 \leq q < p^* = \frac{np}{n-p}$ se tiene el encajamiento compacto:

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega).$$

Demostración. 1.-Sea $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. Usando el teorema de extensión de funciones de Sobolev, podemos asumir que todas las funciones u_m están definidas en todo el espacio \mathbb{R}^n y son cero fuera de un conjunto compacto K :

$$\text{sup}(u_m) \subseteq K \subset \tilde{\Omega} \doteq B(\Omega, 1). \quad (\text{A.1})$$

El lado derecho es una vecindad de radio 1 alrededor de Ω .

Ya que $q < p^*$ y $\tilde{\Omega}$ es acotado, tenemos

$$\|u_m\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|u_m\|_{L^q(\tilde{\Omega})} \leq C \|u_m\|_{L^{p^*}(\tilde{\Omega})} \leq C' \|u_m\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})},$$

para alguna constantes C y C' . Por lo tanto la sucesión u_m es uniformemente acotada en $L^q(\mathbb{R}^n)$.

2.-Consideremos las funciones mollified $u_m^\varepsilon = J_\varepsilon * u_m$. Por (5.1) podemos asumir que todas estas funciones tiene soporte en $\tilde{\Omega}$. Veamos que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(\tilde{\Omega})} \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente.} \quad (\text{A.2})$$

En efecto, si u_m es suave, entonces (haciendo el cambio de variable $y' = \varepsilon y$ y $z = x - \varepsilon ty$)

$$\begin{aligned}
u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int_{|y'| < \varepsilon} J_\varepsilon(y') [u_m(x - y') - u_m(x)] dy' \\
&= \int_{|y| < 1} J(y) [u_m(x - \varepsilon y) - u_m(x)] dy \\
&= \int_{|y| < 1} J(y) \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (u_m(x - \varepsilon ty)) dt \right) dy \\
&= -\varepsilon \int_{|y| < 1} J(y) \left(\int_0^1 \nabla(u_m(x - \varepsilon ty)) \cdot y dt \right) dy.
\end{aligned}$$

Ahora, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| dx &\leq \varepsilon \int_{\tilde{\Omega}} \int_{|y| < 1} J(y) \left(\int_0^1 |\nabla u_m(x - \varepsilon ty)| dt \right) dy dx \\
&\leq \varepsilon \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u_m(z)| dz.
\end{aligned}$$

Por aproximación u_m en $W^{1,p}$ con una sucesión de funciones suaves, vemos que la misma estimación para todas las funciones $u_m \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$. Hemos así demostrado que:

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(\tilde{\Omega})} \leq \varepsilon \|\nabla u_m\|_{L^1(\tilde{\Omega})} \leq \varepsilon C \|u_m\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})}, \quad (\text{A.3})$$

para alguna constante C . Ya que las normas $\|u_m\|_{W^{1,p}}$ es acotada independiente de m , esto prueba el resultado (5.2) en el caso $q = 1$.

3.- Para probar (5.2) también para $1 < q < p^*$, usaremos la desigualdad de interpolación para normas L^p . Elegimos $0 < \theta < 1$ tal que:

$$\frac{1}{q} = \theta \cdot 1 + (1 - \theta) \cdot \frac{1}{p^*}.$$

Entonces

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(\tilde{\Omega})} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(\tilde{\Omega})}^\theta \cdot \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(\tilde{\Omega})}^{1-\theta} \leq C_0 \varepsilon^\theta. \quad (\text{A.4})$$

Para alguna constante C_0 independiente de m . En efecto, la norma L^1 es acotada por (5.3), mientras la norma L^{p^*} es acotada por una constante, por las desigualdad de Gagliardo-Nirenberg.

4.- Sea $\delta > 0$, y elegimos ε suficientemente pequeño tal que (5.4) se tiene:

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(\tilde{\Omega})} \leq C_0 \varepsilon^\theta \leq \frac{\delta}{2}, \quad \forall m \geq 1.$$

Recordando que $u_m^\varepsilon = J_\varepsilon * u_m$, tenemos que:

$$\|u_m^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|J_\varepsilon\|_{L^\infty} \|u_m\|_{L^1} \leq C_1,$$

$$\|\nabla u_m^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|\nabla J_\varepsilon\|_{L^\infty} \|u_m\|_{L^1} \leq C_2,$$

donde C_1, C_2 estas constantes dependen de ε pero no de m . Las anteriores desigualdades muestran que, para cada $\varepsilon \geq 0$, la sucesión $(u_m^\varepsilon)_{m \geq 1}$ es uniformemente acotada y equicontinua. Por el teorema de Arzela Ascoli, existe una subsucesión $(u_{m_j}^\varepsilon)_j$ que converge uniformemente en $\tilde{\Omega}$ a alguna función continua u^ε . Ahora tenemos lo siguiente:

Dado $\eta > 0$, tomando $\varepsilon = 1/n$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N_1$ se tiene :

$$\begin{aligned} \left\| u_n^{\frac{1}{n}} - u \right\| &< \frac{\eta}{8}, \\ \left\| u_{n,m_n}^{\frac{1}{n}} - u_n^{\frac{1}{n}} \right\|_{L^q} &< \frac{\eta}{8}. \end{aligned}$$

Ahora notemos que

$$\left\| u_{n,m_n}^{\frac{1}{n}} - u \right\|_{L^q} \leq \left\| u_{n,m_n}^{\frac{1}{n}} - u_n^{\frac{1}{n}} \right\|_{L^q} + \left\| u_n^{\frac{1}{n}} - u \right\|_{L^q} < \frac{\eta}{4}.$$

Por otra parte existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N_2$ se tiene:

$$\left\| u_{n,m_n} - u_{n,m_n}^{\frac{1}{n}} \right\|_{L^q} < \frac{\eta}{4}.$$

Sea la subsucesión (u_{n,m_n}) (no es mas que la diagonal formada por todas las subsucesiones para cada $\varepsilon = 1/n$), entonces para $n, i > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$\begin{aligned} \left\| u_{n,m_n} - u_{i,m_i} \right\|_{L^q} &\leq \left\| u_{n,m_n} - u_{n,m_n}^{\frac{1}{n}} \right\|_{L^q} + \left\| u_{n,m_n}^{\frac{1}{n}} - u \right\|_{L^q} + \left\| u - u_{i,m_i}^{\frac{1}{i}} \right\|_{L^q} + \left\| u_{i,m_i}^{\frac{1}{i}} - u_{i,m_i} \right\|_{L^q} \\ &< \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \eta. \end{aligned}$$

Por lo tanto la subsucesión (u_{n,m_n}) es de Cauchy, y converge al mismo límite $u \in L^q$. ■

Bibliografía

- [1] BASS, ROBERT W. (1958): On nonlinear repulsive forces. In Lefschetz, S. (ed.) Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol.IV, pp. 201-11. Princeton University Press.
- [2] BOURBAKI, NICOLAS (1955): Espaces vectoriels topologiques. Herman, Paris.
- [3] COLTON, DAVID (1988): Partial Differential Equations. University of Delaware. Mineola, New York.
- [4] CRONIN, JANE (1964): Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. Amer.Math.Soc. New York.
- [5] EDWARDS, ROBERT (1965): Functional analysis: theory and applications (Chapter 3). Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [6] FADELL, E. (1970): Recent results in the fixed point theory of continuous maps. Bull. Amer. Math.Soc. 76, pp 10-29.
- [7] GAJEWSKI, HERBERT; GRÖCKER, KONRAD; ZACHARIAS, KLAUS (1975): Nonlinear operator equations and differential operator equations, pp 336.
- [8] KANTORÓVICH, LEONID V. (1982): Functional Analysis, pp 474-496, Pergamon Press.
- [9] KOLMOGOROV, ANDRÉI N.; FOMIN, SERGEI V. (1978): Introductory real analysis. Dover Publication, INC. New York.
- [10] KUCHERENKO, VALERI V. (2013): Estimate from below for the Growth of solution to the Navier-Stokes equation when the solution blows up. In operator theory: Advances and Applications, Vol. 228, pp. 239-259, Springer-Basel.
- [11] LADYZHENSKAYA, OLGA A. (1987): The Mathematical theory of viscous incompressible flow. Second english edition.
- [12] MUNKRES, JAMES R. (1984): Elements of algebraic topology. Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts.
- [13] SMART, D.R.(1980): Fixed point theorems. Cambridge University.
- [14] TANABE, HIROKI (1996): Functional analytic methods for partial differential equations. Otteron Gakuin University Osaka, Japan.