

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



Solución del problema de sincronización de múltiples controles de tráfico utilizando teoría de juegos para una clase de cadenas de Markov ergódica y controlable con tiempo continuo

TESIS

Para obtener el grado de Maestría en Ciencias Físicomatemáticas

Presenta

Rodrigo Gabriel Castillo González

Directores de Tesis

Dr. Julio Bernardo Clempner Kerik

Dra. Adriana Lara López

Agradezco a toda mi familia por alentarme y brindarme el apoyo en ésta nueva etapa de mi vida. A mis Padres por todo los consejos que me ha dado a lo largo de éste proceso y a mi hermano por el apoyo brindado

Agradezco especialmente a mi asesor, Dr. Julio Bernardo Clempner Keriik, por el gran apoyo que me brindó y la confianza que tuvo en mí, para hacer posible que ésta tesis se realizara y por los logros obtenidos por ella. A mis sinodales y profesores. Dr. Alin Andrei Carsteanu, por el apoyo y consejos que me brindó durante éste tiempo para seguir adelante. Dr. Egor Maximenko, por su aliento que me daba a seguir adelante. Dra. Adriana Lara López, por las enseñanzas que me brindó. Dr. José Oscar González Cervantes y Dr. Marco Antonio Rodríguez Andrade por su apoyo en éste trabajo.

Agradezco a mis amigos de la ESFM que siempre han estado conmigo alentándome. A mi Amiga Andrea A. Rendón Peña, por todo el apoyo y consejos que siempre me ha brindado, a mis amigos. Luis E. Villanueva L., Angélica García L., Fabián Román N., y a cada uno de mis amigos y compañeros con los que compartí ésta etapa de mi vida.

Abstract

The traffic signal control plays a fundamental role to improve the efficiency and efficacy of traffic flows in traffic networks. This paper deals with the solution of the multi-traffic signal control problem for continuous-time Markov games under the expected average cost criterion. This game describes a Poisson process where the cars leave the queue in the order they arrive. Each signal controller (player) aims at finding green time that minimizes its signal and queuing delay. Then, a conflict appears when each signal controller tries to minimize its queue. For solving the problem we employ the extraproximal method. The solution of the problem is presented in terms of the Nash equilibrium. The c -variable method is extended with a special restriction for continuous-time Markov chains to obtain the set of average optimal policies. Finally, we illustrate an application example with method proposed.

Resumen

El control de la señal de tráfico juega un papel fundamental para mejorar la eficiencia y la eficacia de los flujos en las redes de tráfico. En este trabajo se aborda la solución de la señal de control del problema multi-tráfico para juegos de Markov en tiempo continuo bajo el criterio de costo promedio esperado. Este juego se describe un proceso de Poisson donde los coches salen de la cola en el orden en que llegan. Cada controlador de señal (jugador) tiene como objetivo, encontrar el tiempo verde que minimice la señal y el tiempo de espera. Entonces, el problema aparece cuando cada controlador de señal trata de minimizar su cola. Para resolver el problema empleamos el Método Extraproximal. La solución de la problema se presenta en términos de equilibrio de Nash. El método de la variable C , se amplía con una restricción especial cadenas de Markov en tiempo continuo, para obtener el conjunto de las políticas óptimas promedio. Finalmente, ilustramos un ejemplo de aplicación con el método propuesto.

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Reseña	11
1.2. Principales Resultados	15
1.3. Cadenas de Markov	16
1.3.1. Procesos Estocásticos	16
1.3.2. Propiedades Básicas de Cadenas de Markov	17
1.3.3. Propiedades de la Matriz de Transición	17
1.3.4. Ergodicidad	18
1.4. Organización del Trabajo	19
2. Juegos de Markov en tiempo continuo	21
3. Solución de control de tráfico para juegos de Markov con tiempo continuo	25
3.1. Descripción del sistema de tráfico	25
3.2. Consideraciones del flujo de tráfico	27
3.2.1. Dinámica del Juego	29
3.2.2. El método de la variable C , para CTMG	29
3.3. La solución de Teoría de Juegos de Nash	31
3.3.1. El equilibrio de Nash	31
3.4. La aplicación Principio Lagrange regularizado	32
3.5. El formato proximal	33
3.6. El método Extraproximal	33
3.7. Implantación de juegos de Markov	34
3.7.1. Función de Costos	34
3.8. El modelo Nash Extraproximal	39
3.9. Ejemplo Numérico	50

4. Conclusión	55
Referencias	57

Capítulo 1

Introducción

1.1. Reseña

En la actualidad las personas tienen la necesidad de transportarse de manera rápida por las ciudades, pero en las calles se encuentran un alto número de automóviles circulando, ocasionando problemas de congestión vehicular, además causando malestar a las personas que tienen la necesidad de trasladarse a su trabajo o cualquier otro lugar que deseen, también el aumento en el consumo de combustible CO_2 , generando problemas de salud y “strees” de las personas por el tiempo perdido. En muchos casos el largo tiempo de espera de los automóviles, hace retardar el movimiento de traslado de mercancías y de servicios, ocasionando el aumento en el precio de los productos y reduciendo la competitividad de los negocios.

Para tratar de resolver estos problemas, se han construido nuevas calles alternas o incluso ampliar las ya existentes, así como promover el uso de transporte público bajando el precio del pasaje para evitar el gran número de automóviles circulando, además existen otras ideas de regular y redirigir el flujo de tráfico vehicular, usando medidas tales como: Paneles dinámicos con información de las rutas (que indican velocidades apropiadas, direcciones preferentes o información de la longitud), control de semáforos, es decir, frecuencia variable en el cambio de luces para proporcionar mejor circulación, siendo la optimización de los controles de tráfico uno de los problemas más relevantes en la gestión de tráfico.

Con respecto al control de los semáforos, el problema es una mala sincronización ocasionando que el transporte sufra atrasos en el tiempo de recorrido, debido a su mal funcionamiento, el cual no se adapta a las necesidades de la población y no toma en cuenta el alto volumen de vehículos, es por esto que es de suma importancia tener mejor sincronización de los semáforos, que se encuentran en las intersecciones de las calles, siendo uno de los problemas más relevantes en la gestión de tráfico, ya que al conseguir una mejor sincronización, se conseguirá una circulación suave y se evitará largas colas de espera.

La coordinación de los semáforos es una de las soluciones de bajo costo, ya que se puede aprovechar al máximo las condiciones que existen para mejorar el tránsito y optimizar el funcionamiento de las redes urbanas, disminuyendo el número de paradas y conseguir que los automóviles transiten a una velocidad constante y minimizar el tiempo de viaje de los usuarios.

El objetivo de la optimización de los semáforos en las intersecciones de las calles, es minimizar el tiempo de espera; el problema de un controlador de señal (semáforo) es encontrar una óptima estrategia de la sincronización de la señal. Cada semáforo apunta a encontrar tiempo verde que minimice su señal de espera (Clempner y Poznyak (2015)). El control de la señal de tráfico para múltiples intersecciones se hace difícil de resolver. La interdependencia entre los controladores de señal de tráfico, hace difícil de configurar las señales correctamente para evitar accidentes y mejorar el rendimiento moderado o altos volúmenes de tráfico. Un enfoque para hacer frente a este complicado problema de control de señales de tráfico se está utilizando la teoría de juegos (Clempner y Poznyak (2015)).

Específicamente nos interesa una aproximación local que describe el principio de una técnica de procesamiento de la cola, donde los automóviles salen de la cola en el orden que llegan o esperar su turno en una señal de control de tráfico. Fathy y Siyal (1995) proponen un algoritmo que consiste en detectar el movimiento y los vehículos para las colas, reduciendo los efectos de variación de condición de las luces y el tiempo de computo, esta operación funciona de forma continua en todo el subperfil, pero la detección de vehículos sólo se aplica a la cola de la cola. Lei y Ozguner (1999) describen una combinación de varios enrutamientos de destino en tiempo real del control de tráfico, basado en concepto de costo, para trasladarse a destinos diferentes, de acuerdo a los costo se considera el efecto de la demora causada por las colas en cada

nodo descendente, el tiempo de viaje de cada enlace descendente y el retraso causado por los controles de señal. La estrategia de enrutamiento, es un método de enrutamiento parcialmente descentralizado y dinámico. De Schutter (1999) desarrolla un modelo que describe la evolución de las longitudes de cola en cada carril, como una función del tiempo y discute cómo determinar esquemas de conmutación de control de señal óptima para este sistema. Zhao y Yangzhou (2003) presentan un método de control de la señal para una sola intersección, basado en sistema cooperativo de infraestructura del Vehículo, también sugieren la optimización basada en fase. El procedimiento de estrategia y modelos de tiempo de la señal verde en la rodadura horizonte temporal de previsión y describe la optimización de la velocidad de orientación. Alvarez y Poznyak (2010) proponen una solución para optimizar la congestión en una avenida, basa en un modelo señalizado como intersecciones controladas, utilizando cadenas de Markov finitas. La solución es vista como un juego no cooperativo, donde cada controlador de señal trata de minimizar su cola y el equilibrio ε -Nash/Stackelberg es la solución del juego, Moya y Poznyak (2009) sugieren un juego Stackelberg-Nash usando una versión regularizada del método Extraproximal y para encontrar la solución controlada utilizan cadenas de Markov finitas, sin evitar intersección. Helbing y Mazlounian (2009) discuten el control de señal basado en la minimización de los tiempos de viaje en general o colas de vehículos, encontrando regímenes de diferentes operaciones, algunos de los cuales implican “más lento es más rápido el efecto”, donde un cambio de retraso, reduce los tiempos de viaje promedio, también discutieron el procedimiento y las ventajas de la optimización de múltiples fases además proponen considerar el precio de tener vehículos recién llegados, con el fin de mejorar el servicio y apoyar la auto organización de las ondas verdes. Clempner y Poznyak (2015) formulan un problema de control de señal multitráfico, como un enfoque de juego Stackelberg (para los juegos de Markov en tiempo discreto) para resolverlo utilizan el equilibrio de Nash basado en el método Extraproximal. Los líderes y los seguidores están determinadas por el número de coches que entra y salen de las intersecciones de las calles; considerando el problema como un problema de optimización local, el cual surge cuando se supone que los ajustes de la señal están diseñados para minimizar la demora de espera de acuerdo con una política local específica. Fisk y Nguyen (1982) comparan el desempeño de los diversos métodos para determinar el equilibrio en los flujos en un modelo de red, en las que los controles de intersección, conducen a funciones de costo particularmente asimétricas. Fisk (1984) describe la configuración

global óptima como un juego Stackelberg, en medio de la red de usuarios y agencia de tráfico. Chen (1998) muestra el problema como un problema de control de tráfico dinámico y el problema de asignación dinámica del tráfico se integran como un juego no cooperativo entre una autoridad de tráfico y usuarios como un juego Stackelberg. Cascetta, Gallo, y Montella (2006) presentan la combinación de asignación en el problema de control y muestran que desciende mediante el diseño de la red de equilibrio más general, proponiendo un modelo de equilibrio estocástico con funciones de retardo asimétricas. Allsop (1976) investiga la relación entre el ajuste de la señal y la asignación de tráfico además propone un programa de dos soluciones al problema de equilibrio de tráfico, SIGCAP es un programa que sirve para el cálculo de la capacidad de tráfico de la señal controlada en cruces de carreteras. Allsop (1971) SIGSET es un programa que calcula ajustes en las señal de tráfico en cruces de carreteras minimizando el tiempo. Gartner (1983) describe un método mixto de optimización del tráfico entero, diseñado para optimizar simultáneamente todas las variables de control de tráfico de la red. Tan (1979) trata con el ajuste de la señal como un Problema de optimización y propone posibles direcciones para el desarrollo de algoritmos aplicables para resolver problemas de optimización híbrido a gran escala. Lee y Machemehl (1998) estudian el ajuste de la señal mediante algoritmos genéticos. Cascetta, Gallo, y Montella (1999) estudian el problema de control de asignación de intersección combinado, mostrando que desciende del equilibrio en la red, además proponen un modelo estocástico, con funciones de retardo asimétricos, estudiando las propiedades teóricas de los modelos, además proponen y prueban algunos algoritmos para resolver el problema, con diferentes reglas de control de la señal optimizados a nivel local estimando su velocidad de convergencia. Cascetta y cols. (2006) presentan modelos y algoritmos de optimización de los ajustes de la señal en las redes urbanas, proponiendo un enfoque global (optimización de los ajustes de la señal de intersección de intersección). Cascetta (2009) presenta modelos y aplicaciones relacionadas con el análisis del sistema de transporte. Cantarella, Improta, y Sforza (1991) y D’Acierno, Gallo, y Montella (2012) hacen frente a la optimización local del problema de configuración de la señal, como un problema de punto fijo, donde buscan un equilibrio para un flujo de tráfico congruente con los costos y los ajustes de la señal, los ajustes de la señal se obtienen de acuerdo a una política local de control de optimización. Khamis y W. (2014) se centran en el objetivo de varios controles de señales de tráfico, calculando una configuración de señal de tráfico constante en cada unión, que optimiza múltiples índices de rendi-

miento. Placzek (2014) introduce un modelo de señal de tráfico para predecir los efectos de sus posibles acciones de control en un corto horizonte temporal.

1.2. Principales Resultados

Este trabajo trata sobre el control de los flujos de tráfico en optimización multi intersección para juegos de Markov en tiempo continuo. Centrándose en algunas características particulares.

- Para obtener una mejor comprensión del problema, se busca obtener un modelo de teoría de juegos basado en el método Extraproximal para múltiples intersecciones.
- Hasta nuestro conocimiento, el método Extraproximal es el único método capaz de resolver el problema de encontrar un punto de equilibrio para múltiples jugadores (Antipin (2005), Clempner y Poznyak (2015), Trejo, Clempner, y Poznyak (2015))
- Este juego describe un proceso de Poisson, donde los coches salen de la cola en el orden en que llegan. Minimizar las colas de los automóviles en lugar de los tiempos de viaje, simplifica la solución del problema.
- Cada controlador de señal (semáforo), tiene por objetivo reducir el tiempo de la señal verde en el semáforo y evitar la demora de espera.
- El problema es conceptualizado como un juego de Stackelberg, sin embargo la solución se presenta en términos del equilibrio de Nash.
- Obtener un modelo de la teoría de juegos basado en el método Extraproximal para múltiples intersecciones.
- El método de la variable C se amplía con una restricción especial para cadenas de Markov con tiempo continuo para obtener el conjunto de políticas óptimas promedio.

1.3. Cadenas de Markov

1.3.1. Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico en tiempo discreto es una sucesión de Variables Aleatorias $\{s(1), \dots, s(N)\}$ indexado por un parámetro de tiempo discreto n , $n = 1, 2, \dots$, representa el tiempo depende de la aplicación, pero el orden de la sucesión es importante, también, no es esencial que la primera vez sea con $n = 1$ o que el aumento de tiempo en pasos unitarios, estos son sólo convenciones que utilizamos al hablar de procesos estocásticos en general. Denotamos un proceso estocástico por $s(n)$ y se toma que es el valor aleatorio del proceso en el momento n . Denotamos el proceso mismo por $\{s(n); n \geq 1\}$ o simplemente como $\{s(n)\}$. En la práctica $\{s(n)\}$, representa el estado de un sistema en el tiempo n , El conjunto de todos los estados posibles se llama el espacio de estados del proceso, y por lo general denota por s .

Dado un proceso estocástico $s = \{s(n); n \geq 1\}$, la expresión

$$P(s(1) = s_1, s(2) = s_2, \dots, s(n) = s_n)$$

Como una función de

$$(s_1, s_2, \dots, s_n),$$

es la función de probabilidad de

$$s(0), s(1), \dots, s(n)$$

y se llama una distribución bidimensional infinita de $\{s(n); n \geq 1\}$.

La colección de todas las distribuciones de dimensión finita de un proceso, determina cómo calcular la probabilidad de cualquier camino proporcionando una descripción estadística completa del proceso. Por consiguiente, un modelo de un proceso estocástico es cualquier conjunto de supuestos que determina al menos en principio, todas sus distribuciones de dimensión finita y permite obtener un modelo para contener parámetros no especificados, en cuyo caso se denomina a veces un modelo paramétrico

1.3.2. Propiedades Básicas de Cadenas de Markov

Denotemos el conjunto de los número Reales como \mathbb{R} y el conjunto de los enteros no negativos se denota por \mathbb{N} . Sea (ω, F, P) un espacio de probabilidad, donde ω es el conjunto de resultados, F , sea $A \in F$, $P(A)$ es la probabilidad de A . el producto interno de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, es denotado por $\langle u, v \rangle = v^t u$. Sea S un conjunto finito, llamado el espacio de estado que consiste en todo enteros positivos $N \in \mathbb{N}$, de los estados $\{s_1, \dots, s_n\}$.

Definición 1.3.1 *Una cadena de Markov estacionaria, es una sucesión de S valores de variables aleatorias s_n , $n \in \mathbb{N}$, que satisfacen la condición de Markov:*

$$\begin{aligned} P(s(n+1) = s_j | s(n) = s_i, s(n-1) = s_{i_{n-1}}, \dots, s(1) = s_{i_1}) \\ = P(s(n+1) = s_j | s(n) = s_i) = \pi_{ij}(n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Recordemos que una variable aleatoria s , con Valores en I , es una función $s : \Omega \rightarrow I$. La cadena de Markov puede ser representado por un grafo cuyos nodos son los estados, donde cada borde $(s_i, s_j) \in S^2$, está etiquetado por la probabilidad de transición. La matriz $\Pi = (\pi_{ij})_{(s_i, s_j) \in S} \in [0, 1]^{S \times S}$, determina la evolución de la cadena para cada $n \in \mathbb{N}$. Π^n tiene en cada entrada (s_i, s_j) , la probabilidad de pasar del estado s_i al estado s_j , en exactamente n pasos.

Llamamos (1.1), la condición de Markov. En particular dice que en cualquier momento n , el pasado y el futuro del proceso son condicionalmente independientes, dada la actual.

Observación 1.3.1 *La propiedad de Markov (1.1), significa que el estado actual del sistema determina la probabilidad de un paso hacia el futuro.*

La ecuación $P(s(n+1) = s_j | s(n) = s_i)$, representa la probabilidad de transición del estado s_i al estado s_j en el tiempo n , si esta probabilidad no depende de n , se denota por π_{ij} y la cadena Markov se dice que es en tiempo homogénea.

1.3.3. Propiedades de la Matriz de Transición

La matriz π_{ij} , es una matriz de transición estacionaria, lo que significa que $\pi_{ij} \geq 0 \forall i, j \in N$. Dado que el proceso debe terminar en algún estado la suma de estas probabilidades sobre todos los estados es igual 1, esto es

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij} = \sum_{j=1}^N P(s(n+1) = s_j | s(n) = s_i) = 1$$

Cualquier matriz cuadrada de entradas no negativas cada una de cuyas filas suman 1, se llama una matriz estocástica, por lo que, las matrices de transición de estado son matrices estocásticas; la inversa, cualquier matriz estocástica es un modelo válido para las probabilidades de transición de una cadena de Markov.

Esta distribución en tiempo n de cadenas de Markov $\{s(n); n \geq 1\}$, esta dada por

$$P(s(n) = s_i)$$

sabemos que $P(s(n) = s_i) > 0$ y $\sum_{i=1}^N P(s(n) = s_i) = 1$, La distribución inicial de la cadena viene dada por $P(s(n) = s_i)$.

Debe ser especificado junto con la matriz de transición ij con el fin de caracterizar la cadena completamente. En efecto, mediante el uso repetido del Markov propiedad, obtenemos:

$$P(s(n) = s_i; s(n-1) = s_{i_{n-1}}, \dots, s(1) = s_1)$$

1.3.4. Ergodicidad

Definición 1.3.2 Una cadena de Markov se dice que es ergódica o irreducible si su espacio de estados es una sola clase de comunicación, es decir si todos los estados son alcanzables ($\forall i, j \in \omega$, i se comunica con j).

Observación 1.3.2 Para cualquier cadena de Markov finita homogénea con matriz de transición $\Pi = [\pi_{ij}]_{i,j=1,\dots,N}$ existe tiempo n_0 , tal que la probabilidad de transición para un estado inicial $s_1 = s(i)$ al estado $s_{n_0} = s(j)$, es estrictamente positivo, es decir

$$(\tilde{\pi}_{ij})_{n_0} > 0 \text{ para } i, j = 1, \dots, N$$

donde

$$(\tilde{\pi}_{ij})_{n_0} = P\{s_{n_0} = s(j) | s(i)\} = (\Pi^{n_0})_{ij}$$

En otras palabras, si es posible obtener el tiempo de todos los estados para todos los demás estados con probabilidad positiva.

Definición 1.3.3 *Las siguientes definiciones clasifican las cadenas de Markov y sus estados como periódica o aperiódica:*

- *estado $s(i)$ se dice que tiene un período $d_i \geq 1$, si d_i es el mayor entero tal que $\Pi^n = 0$, si n no es múltiplo de d_i . si $\Pi^n = 0, \forall n$ decimos que $d_i = \infty$*
- *Estado $s(i)$ se dice que es periódico si $d_i = 1$*
- *Una cadena de Markov se dice que es aperiódica si todos los estados son aperiódicos. En palabras, un estado de la cadena de Markov tiene periodo d , si es posible volver al mismo estado con probabilidad no nula sólo en algún múltiplo de pasos d y d es el mayor entero con esta propiedad*

1.4. Organización del Trabajo

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1, se presentó la introducción, los principales resultados del trabajo y Preliminares de Cadenas de Markov. Capítulo 2, se presenta los antecedentes necesarios de juegos de Markov en tiempo continuo para comprender el resto del trabajo. Capítulo 3, se presenta la formulación del problema que especifica el sistema de tráfico investigado en este trabajo, así como, la consideración de flujos de tráfico y la descripción de la dinámica de los juegos. Continuando, se discute un nuevo enfoque de optimización matemática para una clase especial de los procesos de toma de Markov de tiempo continuo que tenga en cuenta las funciones promedio de recompensa. Además se describe el método extraproximal y la solución propuesta para calcular el equilibrio de Nash. En las secciones del capítulo se llega a un concepto del modelo de teoría de juegos, lo que permite estudiar el comportamiento del control de señal propuesto analíticamente y resolver el problema en múltiples intersecciones, al finalizar el capítulo se muestra la implementación del método extraproximal para juegos de Markov en tiempo continuo y ejemplos numéricos. En el capítulo 4, se presenta la conclusión.

Capítulo 2

Juegos de Markov en tiempo continuo

Denotamos \mathbb{R} y \mathbb{N} Como el conjunto de números reales y números enteros no negativos, respectivamente. Un juego para cadenas de Markov con tiempo continuo (Continuos Time Markov Chain, CTMG), se describe como:

$$\mathcal{G} = (S^l, A^l, \{A^l(s)\}_{s \in S}, V^l, Q^l)_{l=\overline{1, N}} \quad (2.1)$$

donde un jugador se representa por $l = \overline{1, N}$, el espacio de estado S^l , es un conjunto finito $\{s_{(1)}, \dots, s_{(N)}\}$, $N \in \mathbb{N}$, dotado de la topología discreta y el conjunto de acciones A^l es el espacio de la acción (o control), un espacio métrico dotado de la correspondiente Borel σ -Álgebra $B(A^l)$.

Para cada $s^l \in S^l$, $A^l(s^l) \subset A^l$, es un conjunto no vacío de **acciones admisibles** en s^l y supongamos que es compacto. Considerando que el conjunto $\mathbb{K}^l := \{(s^l, a^l) : s^l \in S^l, a^l \in A^l(s^l)\}$, es la clase de pares admisibles, que se considera como un subespacio topológico de $S^l \times A^l$ y de manera similar el conjunto $\mathbb{K} := \{\mathbf{k} : \mathbf{k} \in \times_{l=1}^N \mathbb{K}^l\}$. $V^l \in \mathcal{B}(\times_{l=1}^N S^l \times \mathbb{K}^l)$ es la función de costo de una etapa.

La función Q^l en (2.1), es la matriz $[q_{(j_l|i_i, k_l)}^l]$ de tasas de transición del juego satisfaciendo $q_{(j_l|i_i, k_l)}^l \geq 0, \forall (s^l, a^l) \in \mathbb{K}^l$ y $i \neq j$, tal que

$$[q_{(j_l|i_i, k_l)}^l] = \begin{cases} -\sum_i \lambda_{i,j}^l(a^l), & \text{if } i = j \\ \lambda_{i,j}^l(a^l), & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

donde $\lambda_{i,j}^l$ es una tasa de transición entre el estado i y j , $\lambda_i^l = \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}^l$ esta matriz se supone que conserva $\sum_{j_l=1}^{N_l} q_{(j_l|i_i, k_l)}^l = 0$ y estable, lo que significa que

$$q_{i_l}^l := \sup_{a^l \in A^l} q_{i_l}^l(a_l) < \infty \quad \forall i_l \in S^l$$

donde $q_{i_l}^l := -q_{i_l, i_l}^l \geq 0 \quad \forall a^l \in A^l$.

Ahora denotamos la matriz de transición por

$$\Pi^l(t) = [\pi_{(s, i_l, \tau, j_l, k_l)}^l]_{i_l, j_l, k_l}, \quad \tau \geq s$$

tal que $\pi_{(s, i_l, \tau, j_l, k_l)}^l = \pi_{(0, i_l, t, j_l, k_l)}^l$, $t = \tau - s \quad \forall i_l, j_l \in S^l$ y donde

$$\sum_{j_l=1}^{N_l} \pi_{(j_l|i_i, k_l)}^l = 1.$$

Las ecuaciones de Kolmogorov se pueden escribir como la matriz diferencial.

$$\Pi'(t) = \Pi(t)Q; \quad \Pi(0) = I$$

$\Pi(t) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad. Este sistema puede resolverse como

$$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt} = e^{Qt} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!} \quad (2.2)$$

y en el estado estacionario, la matriz de transición de probabilidad se define como:

$$\Pi^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t)$$

Definición 2.0.1 El vector $P^l \in \mathbb{R}^N$ es llamado vector de distribución estacionaria si

$$(\Pi^{l\top})^* P^l = P^l$$

Donde $\sum_{i_l=1}^{N_l} P_{i_l}^l = 1$ Este vector puede ser visto como la proporción largo plazo de tiempo que el proceso en el estado $i_l \in S^l$.

Teorema 2.0.1 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $Q^{l\top} P^l = 0$
- $\Pi^{l\top}(t) P^l = P^l; \forall t \geq 0$

Una estrategia para el jugador l es entonces definido como una sucesión $d^l = \{d^l(t), t \geq 0\}$ de núcleos estocásticos $d^l(t)$ tal que

- para cada $t \geq 0$, $d^l_{(k_l|i_l)}(t)$, es una medida de probabilidad en A^l tal que $d^l_{(A^l(i_l)|i_l)}(t) = 1$
- Para cada $E^l \in \mathcal{B}(A^l)$ $d^l_{(E^l|i_l)}(t)$ es una función medible Borel en $t \geq 0$.

Denotamos por D^l la familia de todas las estrategias para el Jugador l . Un vector multiestrategias $\mathbf{d} = (d^1, \dots, d^N) \in D := \times_{l=1}^N D^l$. A partir de ahora, vamos a considerar sólo estrategias estacionaria, $d^l_{(k_l|i_l)}(t) = d^l_{(k_l|i_l)}$. Para cada estrategia $d^l_{(k_l|i_l)}$ la transición asociada tasa de matriz se define como :

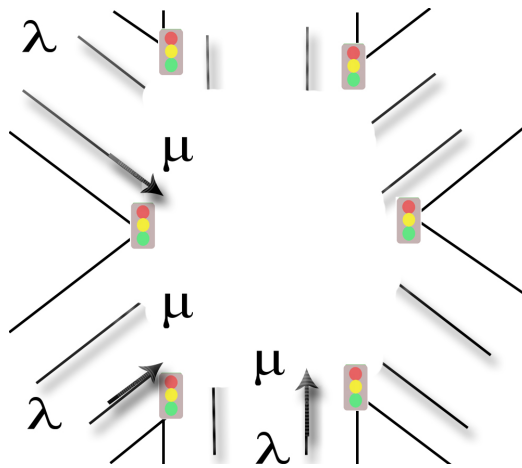
$$Q^l(d^l) := [q^l_{i_l, j_l}(d^l)] = \sum_{k_l=1}^{M_l} q^l_{(j_l|i_l, k_l)} d^l_{(k_l|i_l)}$$

de tal manera que en una distribución de estado estacionario para todos $d_{i,k}$ y $t \geq 0$, tenemos que $\Pi^{l*}(d) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{Q^l(d^l)t}$ donde $\Pi^{l*}(d^l)$ se controla una Matriz de transición estacionaria

Capítulo 3

Solución de control de tráfico para juegos con cadenas de Markov con tiempo continuo

3.1. Descripción del sistema de tráfico

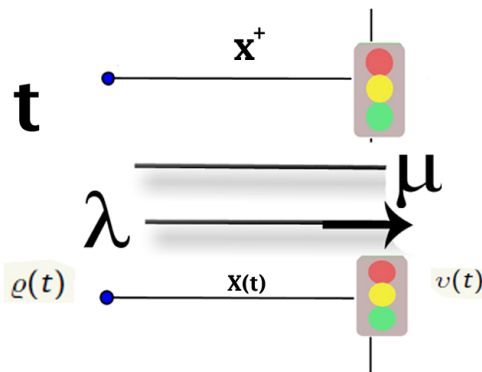
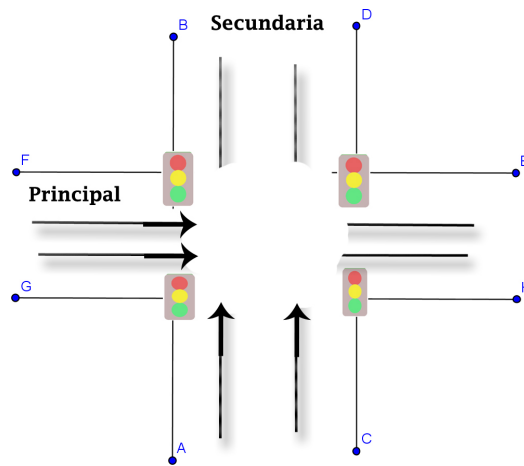


En el sistema de control de tráfico se centró en el estudio de señales de tráfico triple con llegada uniforme y flujos de salida. La extensión del concepto de control para varios semáforos (controles de señal) es sencilla y la solución sólo depende de que incluye un nuevo semáforo. Se tomarán en cuen-

ta modelar un semáforo con dos luces: Verde y Rojo.

También suponemos unidireccional de flujos en todas las calles con sentido alterno ya sea recto o giros a la derecha o izquierda. Todo depende de la dirección de conducción en el cruce. Por ejemplo, en el cruce de tres calles los caminos unidireccionales implican tres fases posibles de las fases que se alternan. También vamos a suponer que los vehículos que pasan una luz verde sin obstrucciones cruzan al respectivo tramo de la calle.

El control de Semáforo consiste en un juego que controla el cruce de vehículos en la intersección de calles, por ejemplo en dos calles se tendría una principal y una secundaria o lateral. Sobre cada esquina donde se encuentran ubicados los semáforos.



De la gráfica se muestra la formulación del problema de colas de la técnica nombrada FIFO (First in, first out), donde los autos salen en el orden que llegan o esperan su turno en la acción del semáforo, por lo que se asume una distribución de Poisson, dada por

$$f(l, [\lambda + \mu]t) = P(X = l) = \frac{e^{-(\lambda + \mu)t} (\lambda + \mu)^l}{l!} \quad (3.1)$$

Para una variable aleatoria X , donde l es el actual número de sucesos de un evento y λ es el número de sucesos del evento, El parámetro de entrada será denotado por λ y el parámetro de salida será denotado por μ , teniendo en cuenta que el parámetro de entrada $\lambda > 0$ y el parámetro de salida $\mu > 0$, puede ser diferente para cada semáforo.

3.2. Consideraciones del flujo de tráfico

El flujo de Vehículos es controlado por un semáforo de dos colores de acciones a_1 y a_2 . Representando las luces rojo y el verde respectivamente. sea x, y, z los tres controladores correspondientes a los jugadores $l = \overline{1, 2, 3}$, en el tiempo t el número total de automóviles en la calle esta definido por $x(t), y(t)$ y $z(t)$ el número de automóviles que entran se determina por $\varrho^{(1)}(t)$, $\varrho^{(2)}(t)$ y $\varrho^{(3)}(t)$ y el número de salidas de automóviles como $v^{(1)}(t)$, $v^{(2)}(t)$ y $v^{(3)}(t)$. La capacidad máxima de la calle (la cola) es determinada por x^+, y^+ y z^+ . La dinámica del flujo de vehículos en una simple intersección de las calles para los jugadores x, y y z es definida como:

$$a(t) = a_1 : \text{rojo}(x)/\text{verde}(y)/\text{rojo}(z)$$

$$x(t+1) = \begin{cases} x^+ & x(t) + \varrho^{(1)}(t) > x^+ \\ x(t) + \varrho^{(1)}(t) & x(t) + \varrho^{(1)}(t) \leq x^+ \end{cases}$$

$$y(t+1) = \begin{cases} y^+ & y(t) + \varrho^{(2)}(t) - v^{(2)}(t) > y^+ \\ [y(t) + \varrho^{(2)}(t) - v^{(2)}(t)]_+ & y(t) + \varrho^{(2)}(t) - v^{(2)}(t) \leq y^+ \end{cases}$$

$$z(t+1) = \begin{cases} z^+ & z(t) + \varrho^{(3)}(t) > z^+ \\ z(t) + \varrho^{(3)}(t) & z(t) + \varrho^{(3)}(t) \leq z^+ \end{cases}$$

Donde

$$[\zeta]_+ = \begin{cases} \zeta & \zeta \geq 0 \\ 0 & \zeta < 0 \end{cases}$$

$$a(t) = a_2 : \text{verde}(x)/\text{rojo}(y)/\text{rojo}(z)$$

$$x(t+1) = \begin{cases} x^+ & x(t) + \varrho^{(1)}(t) - v^{(1)}(t) > x^+ \\ [x(t) + \varrho^{(1)}(t) - v^{(1)}(t)]_+ & x(t) + \varrho^{(1)}(t) - v^{(1)}(t) \leq x^+ \end{cases}$$

$$y(t+1) = \begin{cases} y^+ & y(t) + \varrho^{(2)}(t) > y^+ \\ y(t) + \varrho^{(2)}(t) & y(t) + \varrho^{(2)}(t) \leq y^+ \end{cases}$$

$$z(t+1) = \begin{cases} z^+ & z(t) + \varrho^{(3)}(t) > z^+ \\ z(t) + \varrho^{(3)}(t) & z(t) + \varrho^{(3)}(t) \leq z^+ \end{cases}$$

$$a(t) = a_3 : \text{rojo}(x)/\text{rojo}(y)/\text{verde}(z)$$

$$x(t+1) = \begin{cases} x^+ & x(t) + \varrho^{(1)}(t) > x^+ \\ x(t) + \varrho^{(1)}(t) & x(t) + \varrho^{(1)}(t) \leq x^+ \end{cases}$$

$$y(t+1) = \begin{cases} y^+ & y(t) + \varrho^{(2)}(t) > y^+ \\ y(t) + \varrho^{(2)}(t) & y(t) + \varrho^{(2)}(t) \leq y^+ \end{cases}$$

$$z(t+1) = \begin{cases} z^+ & z(t) + \varrho^{(3)}(t) - v^{(3)}(t) > z^+ \\ [z(t) + \varrho^{(3)}(t) - v^{(3)}(t)]_+ & z(t) + \varrho^{(3)}(t) - v^{(3)}(t) \leq z^+ \end{cases}$$

Tres acciones a_1 , a_2 y a_3 para jugadores ($l = x, y, z$) debe cumplir las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} c_{(i_l|1)}^l, c_{(i_l|2)}^l, c_{(i_l|3)}^l &> 0 & c_{(i_l|1)}^l + c_{(i_l|2)}^l + c_{(i_l|3)}^l &= 1 \\ c &= \left\| c_{(i_l, k_l)} \right\|_{k_l=\overline{1,2,3}, i_l=\overline{0, N_l}} & (c_{(i_l|1)}^l, c_{(i_l|2)}^l, c_{(i_l|3)}^l) &\in \Delta \end{aligned}$$

3.2.1. Dinámica del Juego

La dinámica del juego es la siguiente. Los semáforos continuamente observan el estado actual de las intersecciones. Cada vez que el juego está en estado $i_l \in S^l$ en tiempo $t > 0$, los semáforos eligen independientemente acciones $a^j \in A^l$ (rojo, verde), de acuerdo con algunas reglas y restricciones por la intersección. Como consecuencia de ello ocurre lo siguiente

- El semáforo l recibe un pago inmediato V^l
- El sistema pasa a un nuevo estado $j \neq i$ con una posible transición no homogénea de la función de probabilidad, determinada por las tasas de transición $q_{(j_l|i_l, k_l)}^l$.

El objetivo individual de cada semáforo es

$$V^l(d^l) \rightarrow \min_{d^{(l)} \in D^{(l)}} \quad (3.2)$$

minimizar el tiempo de espera encontrando una estrategia óptima de sincronización de la señal $d^{(l)} \in D^{(l)}$.

3.2.2. El método de la variable C, para CTMG

Se propone un enfoque de optimización matemática para un clase especial de los procesos de Markov de tiempo continuo (*CTMDP*) tomando en cuenta las funciones de costo. Estas funciones para cada jugador, depende de los estados y acciones de todos los otros jugadores, está dada por los valores $W_{(i_1, k_1; \dots; i_N, k_N)}^l$ de manera que (función de costo promedio) V^l , en el régimen estacionario se puede expresar como

$$V^l(\mathbf{d}) := \sum_{i_1, k_1} \dots \sum_{i_N, k_N} W_{(i_1, k_1, \dots, i_N, k_N)}^l \prod_{l=1}^N d_{(k_l|i_l)}^l P^l(s^l = s_{(i_l)})$$

donde

$$W_{(i_1, k_1, \dots, i_N, k_N)}^l = \sum_{j_1} \dots \sum_{j_N} V^l_{(i_1, j_1, k_1, \dots, i_N, j_N, k_N)} \prod_{l=1}^N \pi_{(j_l|i_l, k_l)}^l$$

Dado que

$$c_{(i_l, k_l)}^l = d_{(k_l|i_l)}^l P^l(s^l = s_{(i_l)})$$

tenemos

$$\mathbf{V}^l(\mathbf{c}) := \sum_{i_1, k_1} \cdots \sum_{i_{\mathcal{N}}, k_{\mathcal{N}}} W_{(i_1, k_1, \dots, i_{\mathcal{N}}, k_{\mathcal{N}})}^l \prod_{l=1}^{\mathcal{N}} c_{(i_l, k_l)}^l \quad (3.3)$$

$\mathbf{c} = (c^1, \dots, c^{\mathcal{N}})$. LA variable $c_{(i_l, k_l)}^l$ satisface las siguientes restricciones

- Cada vector de la matriz $c^l := \left\| c_{(i_l, k_l)}^l \right\|_{i_l=1, \overline{N_l}; k_l=1, \overline{M_l}}$ que representa una estrategia mixta estacionaria que pertenece al simplex.

$$\mathcal{S}^{N_l \times M_l} := \begin{cases} c_{(i_l, k_l)}^l \in \mathbb{R}^{N_l \times M_l} \text{ for } c_{(i_l, k_l)}^l \geq 0, \\ \text{donde } \sum_{i_l, k_l} c_{(i_l, k_l)}^l = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

- La variable $c_{(i_l, k_l)}^l$, satisface el tiempo continuo y las restricciones de ergodicidad y pertenece a un conjunto convexo, cerrado y acotado, definido como sigue:

$$c^{(l)} \in C_{adm}^{(l)} = \begin{cases} \sum_{k_l} c_{(j_l, k_l)}^l = \sum_{i_l, k_l} \pi_{(j_l | i_l, k_l)}^l c_{(i_l, k_l)}^l \\ \sum_{i_l, k_l} q_{(j_l | i_l, k_l)}^l c_{(i_l, k_l)}^l = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Notemos que por (3.5) se sigue que

$$P^l(s^{(l)} = s_{(i_l)}) = \sum_{k_l} c_{(i_l, k_l)}^l$$

$$d_{(k_l | i_l)}^l = \frac{c_{(i_l, k_l)}^l}{\sum_{k_l} c_{(i_l, k_l)}^l}$$

En el caso ergódico $\sum_{k_l} c_{(i_l, k_l)}^l > 0$ para toda $l = \overline{1, \mathcal{N}}$.

3.3. La solución de Teoría de Juegos de Nash

3.3.1. El equilibrio de Nash

Sea

$$u^l := \text{col} (c^{(l)}), \quad U^l := C_{adm}^{(l)}, \quad U := \bigotimes_{l=1}^{\mathcal{N}} U^l \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}} \quad (l = \overline{1, \mathcal{N}})$$

donde col es el operador columna.

Consideremos un juego con N jugadores con estrategias $u^l \in U^l$ ($l = \overline{1, \mathcal{N}}$) donde U es un conjunto compacto y convexo. Denotemos por $u = (u^1, \dots, u^{\mathcal{N}})^T \in U$ la estrategia conjunta de los jugadores y u^l es una estrategia adjunta del resto de los jugadores $u^{\hat{l}}$

$$u^{\hat{l}} := (u^1, \dots, u^{l-1}, u^{l+1}, \dots, u^{\mathcal{N}})^T \in U^{\hat{l}} := \bigotimes_{m=1, m \neq l}^{\mathcal{N}} U^m$$

tal que $u = (u^l, u^{\hat{l}})$ ($l = \overline{1, \mathcal{N}}$).

Los jugadores tratan de llegar a un equilibrio de Nash, esto es, para encontrar una estrategia conjunta $u^* = (u^{1*}, \dots, u^{\mathcal{N}*}) \in U$ satisfaciendo para cualquier admisible $u^l \in U^l$ y cualquier $l = \overline{1, \mathcal{N}}$

$$G(u, \hat{u}(u)) := \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \left(\min_{u^l \in U^l} \varphi_l(u^l, u^{\hat{l}}) \right) - \varphi_l(u^l, u^{\hat{l}}) \quad (3.6)$$

donde $\hat{u}(u) = (u^{1\top}, \dots, u^{\mathcal{N}\top})^\top \in \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)}$ Donde $\varphi_l(u^l, u^{\hat{l}})$ es la función de costo para el jugador l que desempeña la estrategia $u^l \in U^l$ y el resto de los jugadores $u^{\hat{l}} \in U^{\hat{l}}$.

Si consideramos un punto utópico

$$\bar{u}^l := \arg \min_{u^l \in U^l} \varphi_l(u^l, u^{\hat{l}}) \quad (3.7)$$

entonces, podemos reescribir la ecuación (3.6), como sigue

$$G(u, \hat{u}(u)) := \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \varphi_l(\bar{u}^l, u^{\hat{l}}) - \varphi_l(u^l, u^{\hat{l}}) \quad (3.8)$$

La función $\varphi_l(u^l, u^{\hat{l}})$ ($l = \overline{1, \mathcal{N}}$) asumimos que son convexos en todos sus argumentos.

Observación 3.3.1 *La función $G(u, \hat{u}(u))$, satisface*

$$\max_{\hat{u}(u) \in \hat{U}} G(u, \hat{u}(u)) \leq 0$$

$$\text{donde } \varphi_l(\bar{u}^l, u^{\hat{l}}) - \varphi_l(u^l, u^{\hat{l}}) \leq 0 \quad (3.9)$$

para algún $u^l \in U^l$ y todo $l = \overline{1, \mathcal{N}}$

Definición 3.3.1 *Una estrategia $u^* \in U_{adm}$, se dice que es un equilibrio de Nash si*

$$u^* \in \text{Arg} \min_{u \in U_{adm}} \{G(u, \hat{u}(u)) \mid G(u, \hat{u}(u)) \leq 0\} \quad (3.10)$$

Observación 3.3.2 *Si $G(u, \hat{u}(u))$, es estrictamente convexo, entonces*

$$u^* = \arg \min_{u \in U_{adm}} \{G(u, \hat{u}(u)) \mid G(u, \hat{u}(u)) \leq 0\}$$

3.4. La aplicación Principio Lagrange regularizado

Aplicando el principio de Lagrange, de la definición (3.3.1), podemos reescribirlo como

$$u^* \in \text{Arg} \min_{u \in U, \hat{u}(u) \in \hat{U}, \xi \geq 0} \mathcal{L}(u, \hat{u}(u), \xi) \quad (3.11)$$

$$\mathcal{L}(u, \hat{u}(u), \xi) := G(u, \hat{u}(u)) + \xi G(u, \hat{u}(u)) = (1 + \xi)G(u, \hat{u}(u))$$

La solución aproximada obtenida por el regularizador de Tikhonov, esta dado por

$$u_\delta^* = \arg \min_{u \in U, \hat{u}(u) \in \hat{U}} \max_{\xi \geq 0} \mathcal{L}_\delta(u, \hat{u}(u), \xi) \quad (3.12)$$

$$\mathcal{L}_\delta(u, \hat{u}(u), \xi) := (1 + \xi)G_\delta(u, \hat{u}(u)) - \frac{\delta}{2}\xi^2$$

donde $\delta > 0$

$$G_\delta(u, \hat{u}(u)) = G_\delta(u, \hat{u}(u)) + \frac{\delta}{2}(\|u\|^2 + \|\hat{u}(u)\|^2) \quad (3.13)$$

teniendo en cuenta que $\delta > 0$ las funciones consideradas se vuelve a ser estrictamente convexa que proporciona la singularidad del problema de optimización condicional considerado, notemos también que la función de Lagrange en (3.12) satisface el punto de silla, para todo $u \in U$, $\hat{u} \in \hat{U}$, y $\xi \geq 0$ tenemos

$$\mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, \hat{u}_\delta(u), \xi_\delta) \leq \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, \hat{u}_\delta^*(u), \xi_\delta^*) \leq \mathcal{L}_\delta(u_\delta, \hat{u}_\delta^*(u), \xi_\delta^*) \quad (3.14)$$

3.5. El formato proximal

El formato proximal en relación (ver Antipin (2005)) con (3.12), como se busca el mínimo entonces se tiene el cambio de signo es decir:

$$\begin{aligned} \xi_\delta^* &= \arg \max_{\xi \geq 0} \left\{ -\frac{1}{2} \|\xi - \xi_\delta^*\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, \hat{u}_\delta^*(u), \xi) \right\} \\ u_\delta^* &= \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_\delta^*\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \hat{u}_\delta^*(u), \xi_\delta^*) \right\} \\ \hat{u}_\delta^*(u) &= \arg \min_{\hat{u} \in \hat{U}} \left\{ \frac{1}{2} \|\hat{u}(u) - \hat{u}_\delta^*(u)\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_\delta^*, \hat{u}(u), \xi_\delta^*) \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde la solución u_δ^* , $\hat{u}_\delta^*(u)$, and ξ_δ^* , depende de pequeños parámetros $\delta, \gamma > 0$.

3.6. El método Extraproximal

Se diseña el método Extraproximal para problema de optimización con restricciones para el juego de Nash en un formato general (3.12). La versión iterativa del formato general ($n = 0, 1, \dots$) del método extraproximal con unos valores iniciales admisibles ($u_0 \in U$, $\hat{u}_0(u) \in \hat{U}$, y $\xi_0 \geq 0$) sigue los siguientes pasos:

- El primer paso (Predicción)

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_n &= \arg \min_{\xi \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\xi - \xi_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, \hat{u}_n(u), \xi) \right\} \\ \bar{u}_n &= \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \hat{u}_n(u), \bar{\xi}_n) \right\} \\ \bar{\hat{u}}_n(u) &= \arg \min_{\hat{u} \in \hat{U}} \left\{ \frac{1}{2} \|\hat{u}(u) - \hat{u}_n(u)\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u_n, \hat{u}(u), \bar{\xi}_n) \right\}\end{aligned}\tag{3.16}$$

- El segundo paso

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \arg \min_{\xi \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|\xi - \xi_n\|^2 - \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{\hat{u}}_n(u), \xi) \right\} \\ u_{n+1} &= \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(u, \bar{\hat{u}}_n(u), \bar{\xi}_n) \right\} \\ \hat{u}_{n+1}(u) &= \arg \min_{\hat{u} \in \hat{U}} \left\{ \frac{1}{2} \|\hat{u}(u) - \hat{u}_n(u)\|^2 + \gamma \mathcal{L}_\delta(\bar{u}_n, \hat{u}(u), \bar{\xi}_n) \right\}\end{aligned}\tag{3.17}$$

3.7. Implantación de juegos de Markov

3.7.1. Función de Costos

El objetivo individual de cada jugador (x) (bajo estrategias estacionarias), se puede formular como sigue:

$$\mathbf{V}^{(x)} = \sum_{\substack{i^{(y)} j^{(y)} \\ k^{(y)} \neq k^{(x)}}}^{y^+} \sum_{k^{(y)}}^{M_y} \sum_{\substack{i^{(x)} j^{(x)} \\ k^{(x)}}}^{x^+} \sum_{k^{(x)}}^{M_x} j^{(x)} \left(\pi_{(j^{(x)} | i^{(x)} k^{(x)})}^{(x)} d_{(k^{(x)} | i^{(x)})}^{(x)} P_{(i^{(x)})}^{(x)} \right) \left(\pi_{(j^{(y)} | i^{(y)} k^{(y)})}^{(y)} d_{(k^{(y)} | i^{(y)})}^{(y)} P_{(i^{(y)})}^{(y)} \right)$$

desde $\sum_{i^{(y)} j^{(y)}}^{y^+} \sum_{k^{(y)}}^{M_y} \pi_{(i^{(y)} j^{(y)} | k^{(y)})}^{(y)} = 1$ tenemos que

$$\mathbf{V}^{(x)} = \sum_{\substack{i^{(x)} j^{(x)} \\ k^{(x)}}}^{x^+} \sum_{k^{(x)}}^{M_x} j^{(x)} \left(\pi_{(j^{(x)} | i^{(x)} k^{(x)})}^{(x)} d_{(k^{(x)} | i^{(x)})}^{(x)} P_{(i^{(x)})}^{(x)} \right) \sum_{\substack{i^{(y)} j^{(y)} \\ k^{(y)} \neq k^{(x)}}}^{y^+} \sum_{k^{(y)}}^{M_y} d_{(k^{(y)} | i^{(y)})}^{(y)} P_{(i^{(y)})}^{(y)}$$

obtenemos que

$$\mathbf{V}^{(x)} = \sum_{i^{(x)}=0}^{x^+} \sum_{k^{(x)}=0}^{M_x} \left(\sum_{j^{(x)}=0}^{x^+} j^{(x)} \pi_{(j^{(x)}|i^{(x)}k^{(x)})}^{(x)} \right) d_{(k^{(x)}|i^{(x)})}^{(x)} P_{(i^{(x)})}^{(x)} \sum_{i^{(y)}=0}^{y^+} \sum_{k^{(y)}=0}^{M_y} d_{(k^{(y)}|i^{(y)})}^{(y)} P_{(i^{(y)})}^{(y)}$$

teniendo

$$W_{(i^{(x)}|k^{(x)})}^{(x)} = \sum_{j^{(x)}=0}^{x^+} j^{(x)} \pi_{(j^{(x)}|i^{(x)}k^{(x)})}^{(x)}$$

donde $(i)^+$ es el tamaño del Buffer (el número máximo de automóviles para cada jugador l). En general para cada jugador l tenemos

$$\mathbf{V}^{(l)} = \sum_{i^{(l)}=0}^{(i)^+} \sum_{k^{(l)}=0}^{M_l} W_{(i^{(l)}|k^{(l)})}^{(l)} c_{(i^{(l)}|k^{(l)})}^{(l)} \sum_{i^{(\hat{l})}=0}^{(\hat{l})^+} \sum_{k^{(\hat{l})}=0}^{M_{\hat{l}}} c_{(i^{(\hat{l})}|k^{(\hat{l})})}^{(\hat{l})}$$

donde

$$c_{(i^{(l)}|k^{(l)})}^{(l)} = d_{(k^{(l)}|i^{(l)})}^{(l)} P_{(i^{(l)})}^{(l)}$$

$$c_{(i^{(\hat{l})}|k^{(\hat{l})})}^{(\hat{l})} = d_{(k^{(\hat{l})}|i^{(\hat{l})})}^{(\hat{l})} P_{(i^{(\hat{l})})}^{(\hat{l})}$$

El semáforo es basado en la duración de la luz verde, determinado por el número estimado de vehículos que entran durante un ciclo de luz rojo/verde. La distancia del jugador l , se calcula en función del tamaño del Buffer ($(i)^+$), multiplicados por el número de automóviles que entran y salen representados por la matriz de transición ($\pi_{(i^{(l)}j^{(l)}|k^{(l)})}^{(l)}$) y a largo plazo del jugador complementario ($c_{(i^{(\hat{l})}|k^{(\hat{l})})}^{(\hat{l})}$), entonces para los jugadores $l = x, y, z$ las siguientes identidades se tiene

$$\mathbf{V}^{(x)}(c^{(x)}, c^{(y)}, c^{(z)}) = \left(\sum_{i^{(x)}=0}^{x^+} \sum_{k^{(x)}=0}^{M_x} W_{(i^{(x)}|k^{(x)})}^{(x)} c_{(i^{(x)}|k^{(x)})}^{(x)} \right) \left(\sum_{i^{(y)}=0}^{y^+} \sum_{k^{(y)}=0}^{M_y} c_{(i^{(y)}|k^{(y)})}^{(y)} \right) \left(\sum_{i^{(z)}=0}^{z^+} \sum_{k^{(z)}=0}^{M_z} c_{(i^{(z)}|k^{(z)})}^{(z)} \right)$$

$$\mathbf{V}^{(y)}(c^{(x)}, c^{(y)}, c^{(z)}) = \left(\sum_{i^{(y)}=0}^{y^+} \sum_{k^{(y)}=0}^{M_y} W_{(i^{(y)}|k^{(y)})}^{(y)} c_{(i^{(y)}|k^{(y)})}^{(y)} \right) \left(\sum_{i^{(x)}=0}^{x^+} \sum_{k^{(x)}=0}^{M_x} c_{(i^{(x)}|k^{(x)})}^{(x)} \right) \left(\sum_{i^{(z)}=0}^{z^+} \sum_{k^{(z)}=0}^{M_z} c_{(i^{(z)}|k^{(z)})}^{(z)} \right)$$

$$\mathbf{V}^{(z)}(c^{(x)}, c^{(y)}, c^{(z)}) = \left(\sum_{i^{(z)}=0}^{z^+} \sum_{k^{(z)}=0}^{M_z} W_{(i^{(z)}|k^{(z)})}^{(z)} c_{(i^{(z)}|k^{(z)})}^{(z)} \right) \left(\sum_{i^{(x)}=0}^{x^+} \sum_{k^{(x)}=0}^{M_x} c_{(i^{(x)}|k^{(x)})}^{(x)} \right) \left(\sum_{i^{(y)}=0}^{y^+} \sum_{k^{(y)}=0}^{M_y} c_{(i^{(y)}|k^{(y)})}^{(y)} \right)$$

Para $n = 0, 1, \dots$, se define los vectores

$$u_n = \begin{pmatrix} \text{col } c^{(x)}(n) \\ \text{col } c^{(y)}(n) \\ \text{col } c^{(z)}(n) \end{pmatrix}$$

$$u_n = \hat{u}^l = \begin{pmatrix} \text{col } c^{(\hat{x})}(n) \\ \text{col } c^{(\hat{y})}(n) \\ \text{col } c^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix}$$

$$u^l = \begin{pmatrix} \text{col } \hat{c}^{(x)}(n) \\ \text{col } \hat{c}^{(y)}(n) \\ \text{col } \hat{c}^{(z)}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{col } \arg \min_{r \in C_{adm}^{(x)}} \mathbf{V}^{(x)}(r, c^{(\hat{y})}(n), c^{(\hat{z})}(n)) \\ \text{col } \arg \min_{r \in C_{adm}^{(y)}} \mathbf{V}^{(y)}(c^{(\hat{x})}(n), r, c^{(\hat{z})}(n)) \\ \text{col } \arg \min_{r \in C_{adm}^{(z)}} \mathbf{V}^{(z)}(c^{(\hat{x})}(n), c^{(\hat{y})}(n), r) \end{pmatrix}$$

considerando que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^x \left(\hat{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}, c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}, c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \right) &\leq \mathbf{V}^x \left(c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}, c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}, c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \right) \\ \mathbf{V}^y \left(\hat{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}, c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}, c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \right) &\leq \mathbf{V}^y \left(c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}, c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}, c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \right) \\ \mathbf{V}^z \left(\hat{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}, c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}, c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \right) &\leq \mathbf{V}^z \left(c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}, c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}, c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \right) \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \varphi_l(u^l, \hat{u}^l) &= \mathbf{V}^x \left(\hat{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}, c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}, c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \right) + \\ &+ \mathbf{V}^y \left(\hat{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}, c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}, c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \right) + \mathbf{V}^z \left(\hat{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}, c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}, c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \right) = \\ &\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \hat{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\ &\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \hat{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\ &\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \hat{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \varphi_l(u^l, u^{\hat{l}}) &= \mathbf{V}^x \left(c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}, c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}, c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \right) + \\
+ \mathbf{V}^y \left(c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}, c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}, c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \right) &+ \mathbf{V}^z \left(c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}, c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}, c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \right) = \\
\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} &W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} &W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} &W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Para calcular el punto de equilibrio de Nash se define la función $g_\delta(u, x)$ como sigue.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} G_l(u_l, \hat{u}_l) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \varphi_l(\bar{u}^l, u^{\hat{l}}) - \varphi_l(u^l, u^{\hat{l}}) \\
\bar{u}_l &= (\bar{u}^l, u^{\hat{l}}) \\
u_l &= (u^l, u^{\hat{l}}) \\
G(u, \hat{u}) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} G_l(u_l, \hat{u}_l) \\
u &= (u_1^T, \dots, u_n^T)^T, \hat{u} = (\hat{u}_1^T, \dots, \hat{u}_n^T)^T \\
\bar{u} &= \begin{pmatrix} \text{col} \left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \\ c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \\ c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{array} \right\| \\ \text{col} \left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \\ c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \\ c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{array} \right\| \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} \text{col} \left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \\ c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \\ c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{array} \right\| \\ \text{col} \left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \\ c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \\ c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{array} \right\| \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(u, \hat{u}) = & \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \overset{\circ}{C}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \overset{\circ}{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \overset{\circ}{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(z)}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

El regularizador para el problema (3.20), es definido como

$$\begin{aligned}
 G(u, \hat{u}) = & \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \overset{\circ}{C}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \overset{\circ}{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \overset{\circ}{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(z)} + \\
 & \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} C_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{array} \right\|^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Aplicando el principio Lagrange con la función de Lagrange

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\delta(u, \hat{u}, \xi) &= (1 + \xi) G_\delta(u, \hat{u}) - \frac{\delta}{2} \xi^2 = \\
(1 + \xi) &\left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \mathring{C}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \mathring{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \mathring{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} + \right. \\
&\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \mathring{C}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \mathring{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \mathring{C}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
&\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \mathring{C}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \mathring{C}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \mathring{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
&\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \mathring{C}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \mathring{C}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \mathring{C}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
&\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \mathring{C}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \mathring{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \mathring{C}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
&\left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \mathring{C}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \mathring{C}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \mathring{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} + \right. \\
&\left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \mathring{C}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ \mathring{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ \mathring{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \mathring{C}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ \mathring{C}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ \mathring{C}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{array} \right\|^2 \right) \right] - \frac{\delta}{2} \xi^2
\end{aligned}$$

3.8. El modelo Nash Extraproximal

El procedimiento para resolver el punto de equilibrio de Nash para el método extraproximal consiste en la siguiente aplicación de “reglas iterativas”, (por simplicidad sólo presentaremos las ecuaciones correspondientes a la mitad primer paso, el desarrollo correspondiente a la segunda etapa de la mitad es similar):

1. Primer paso

[1.a]

$$\bar{\xi}_n = \arg \min_{\xi \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} (\xi - \xi_n)^2 - \gamma \mathfrak{L}_\delta(u_n, x_n, \xi) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\xi - \xi_n)^2 - \gamma \mathfrak{L}_\delta(u_n, \hat{u}_n, \xi) = \\ & \frac{1}{2}(\xi - \xi_n)^2 - \\ & \gamma(1 + \xi) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \hat{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \right. \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \hat{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \hat{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\ & \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \right. \\ & \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] + \gamma \frac{\delta}{2} \xi^2 \end{aligned}$$

teniendo la derivada con respecto a ξ , tenemos

$$\begin{aligned} & \xi - \xi_n - \\ & \gamma \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \hat{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \right. \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \hat{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \hat{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\ & \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) + \gamma \delta \xi] = 0$$

finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{n+1} &= [\xi_n + \\ \gamma & \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{\circ(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \right. \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{\circ(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{\circ(z)} - \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) - \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\ & \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \right. \\ & \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \right]_+ \cdot \frac{1}{1+\gamma\delta} \end{aligned}$$

[1.b]

$$\bar{u}_n = \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u, x_n, \bar{\xi}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u, \hat{u}_n, \bar{\xi}_n) = \\
 & \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \\
 & \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \overset{\circ}{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \overset{\circ}{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \right. \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \overset{\circ}{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \overset{\circ}{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\
 & \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} + \right. \\
 & \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} \bar{\xi}_n^2 \right]
 \end{aligned}$$

dado

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u, \hat{u}_n, \bar{\xi}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \mathring{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \right. \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \mathring{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \mathring{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\
& \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} + \right. \\
& \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] - \gamma \frac{\delta}{2} \bar{\xi}_n^2
\end{aligned}$$

[1.c]

$$\bar{u}_n = \arg \min_{\hat{u} \in \hat{U}} \left\{ \frac{1}{2} \|\hat{u} - \hat{u}_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u_n, \hat{u}, \bar{\xi}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\hat{u} - \hat{u}_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u_n, \hat{u}, \bar{\xi}_n) = \\
& \frac{1}{2} \|\hat{u} - \hat{u}_n\|^2 + \\
& \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \mathring{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \right. \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \mathring{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \\
& \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} + \right. \\
& \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \right. \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \mathring{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
& \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \right. \\
& \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \right. \\
& \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} + \right. \\
& \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] - \gamma \frac{\delta}{2} \bar{\xi}_n^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \overset{\circ}{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \\
 & \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} C_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} \bar{\xi}_n]
 \end{aligned}$$

dado

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|\hat{u} - \hat{u}_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u_n, \hat{u}, \bar{\xi}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \\
 & \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \right. \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) +$$

$$\frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} \xi_n^2$$

2. Segundo paso

2.a

$$\xi_{n+1} = \arg \min_{\xi \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} (\xi - \xi_n)^2 - \gamma \mathfrak{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \xi) \right\}$$

donde

$$\frac{1}{2} (\xi - \xi_n)^2 - \gamma \mathfrak{L}_\delta(\bar{u}_n, \bar{x}_n, \xi) =$$

$$\frac{1}{2} (\xi - \xi_n)^2 -$$

$$\gamma (1 + \xi) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(\bar{z}) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \right.$$

$$\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) +$$

$$\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} -$$

$$\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) -$$

$$\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) -$$

$$\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) +$$

$$\left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] + \gamma \frac{\delta}{2} \xi^2$$

tomando la derivada con respecto a ξ obtenemos

$$\begin{aligned}
 & (\xi - \xi_n) - \\
 & \gamma \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \overset{\circ}{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \overset{\circ}{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) + \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \overset{\circ}{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} (n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) - \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} (n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} (n) + \right. \\
 & \quad \left. \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} (n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} (n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} (n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) \end{array} \right\|^2 \right) \right] + \gamma \delta \xi = 0
 \end{aligned}$$

finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \xi_{n+1} = [\xi_n + \\
 & \gamma \left\{ \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \overset{\circ}{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) + \right. \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \overset{\circ}{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) + \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \overset{\circ}{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} (n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) - \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} (n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) - \\
 & \quad \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} (n) + \right. \\
 & \quad \left. \left(\left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} (n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} (n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} (n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{c} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} (n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} (n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} (n) \end{array} \right\|^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{l} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{l} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) \cdot \frac{1}{1+\gamma\delta}$$

2.b

$$u_{n+1} = \arg \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u, \bar{u}_n, \bar{\xi}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u, \bar{u}_n, \bar{\xi}_n) = \\ & \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \\ & \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \right. \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) + \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\ & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) - \\ & \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \right] + \\ & \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{array}{l} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{array} \right\|^2 + \left\| \begin{array}{l} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{array} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} \bar{\xi}_n^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(u, \bar{u}_n, \bar{\xi}_n) = \\
 & \left(\frac{1}{2} + \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 - \\
 & \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \right. \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) - \\
 & \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) - \\
 & \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} + \right. \\
 & \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \right] - \gamma \frac{\delta}{2} \bar{\xi}_n^2
 \end{aligned}$$

2.c

$$\bar{u}_{n+1} = \arg \min_{x \in X} \left\{ \frac{1}{2} \|\hat{u} - \hat{u}_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(\bar{u}_n, \hat{u}, \bar{\xi}_n) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|\hat{u} - \hat{u}_n\|^2 + \gamma \mathfrak{L}_\delta(\bar{u}_n, \hat{u}, \bar{\xi}_n) = \\
 & \frac{1}{2} \|\hat{u} - \hat{u}_n\|^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \mathring{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} c_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(z)} \right] + \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \mathring{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \mathring{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
& \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) +
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{c}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ \bar{c}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ \bar{c}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) - \gamma \frac{\delta}{2} \bar{\xi}_n^2$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\hat{u} - \hat{u}_n\|^2 - \gamma \mathfrak{L}_\delta(\bar{u}_n, \hat{u}, \bar{\xi}_n) = \\
& \left(\frac{1}{2} + \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \frac{\delta}{2} \right) \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} c_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})}(n) \\ c_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})}(n) \\ c_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma(1 + \bar{\xi}_n) \left[\sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \overset{\circ}{C}_{(i(x)|k(x))}^{(x)} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \right. \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \overset{\circ}{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} + \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \overset{\circ}{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)} - \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(x)|k(x))}^{(x)} \bar{C}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \quad \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(y)|k(y))}^{(y)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \bar{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} - \\
 & \quad \left. \sum_{i(x)}^{x^+} \sum_{i(y)}^{y^+} \sum_{i(z)}^{z^+} \sum_{k(x)}^{M_x} \sum_{k(y)}^{M_y} \sum_{k(z)}^{M_z} W_{(i(z)|k(z))}^{(z)} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \bar{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{\delta}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \bar{C}_{(i(x)|k(x))}^{(x)}(n) \\ \bar{C}_{(i(y)|k(y))}^{(y)}(n) \\ \bar{C}_{(i(z)|k(z))}^{(z)}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} C_{(i(x)|k(x))}^{(\hat{x})} \\ C_{(i(y)|k(y))}^{(\hat{y})} \\ C_{(i(z)|k(z))}^{(\hat{z})} \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \right] - \gamma \frac{\delta}{2} \bar{\xi}_n^2
 \end{aligned}$$

3.9. Ejemplo Numérico

El ejemplo se trata de un tripe controlador de señal de tráfico (semáforo), supongamos que existen dos líderes x y y tal que $N^x = N^y = N^z = 3$, Se define las tasas de matrices de transición se definen como:

$$Q_{ij|rojo}^{x,y,z} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij|verde}^{x,y,z} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij|rojo}^{x,y,z} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, aplicando la ecuación de Kolmogorov (2.2) y resolviendo el problema utilizando el método extraproximal (3.6) se obtiene:

$$c_{i|k}^l = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \end{bmatrix}, \quad l = x, y, z$$

Entonces, fijando k y añadiendo por i la fracción de largo plazo del tiempo para cada jugador es como sigue:

$$c_k^x = \begin{bmatrix} \text{Rojo} & \text{Verde} & \text{Rojo} \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

$$c_k^y = \begin{bmatrix} \text{Verde} & \text{Rojo} & \text{Rojo} \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

$$c_k^z = \begin{bmatrix} \text{Rojo} & \text{Rojo} & \text{Verde} \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

Mediante la fijación de la misma α y μ para todos los jugadores que consiguen una distribución uniforme de la tiempo. Entonces las tasas de matrices de transición se definen como

$$Q_{ij|\text{rojo}}^{x,y} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij|\text{verde}}^{x,y} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij|\text{rojo}}^{x,y} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pero en este caso vamos a aumentar significativamente la salida flujo μ del controlador de señales z

$$Q_{ij|rojo}^z = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij|verde}^{x,y,z} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij|rojo}^z = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, aplicando la ecuación de Kolmogorov (2.2) y resolviendo el problema usando el método extraproximal (3.6), se obtiene:

$$c_{i|k}^l = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.4925 & 0.4925 & 0.0150 \end{bmatrix}, \quad l = x, y, z$$

fijando k y añadiendo por i la fracción de largo plazo del tiempo para cada jugador es como sigue:

$$c_k^x = \begin{bmatrix} \text{Rojo} & \text{Verde} & \text{Rojo} \\ 0.4925 & 0.4925 & 0.0150 \end{bmatrix}$$

$$c_k^y = \begin{bmatrix} \text{Verde} & \text{Rojo} & \text{Rojo} \\ 0.4925 & 0.4925 & 0.0150 \end{bmatrix}$$

$$c_k^z = \begin{bmatrix} \text{Rojo} & \text{Rojo} & \text{Verde} \\ 0.4925 & 0.4925 & 0.0150 \end{bmatrix}$$

En la figura (3.1), se demuestra la convergencia de parámetro ξ y en la figura (3.2), se muestra la convergencia de las estrategias conjuntas $c_{i|k}^j$ para los controladores de señal x, y y z

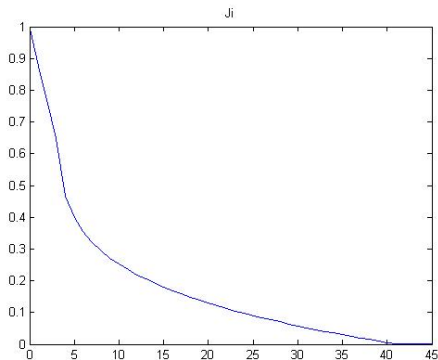


Figura 3.1: Convergencia del parametro J_i

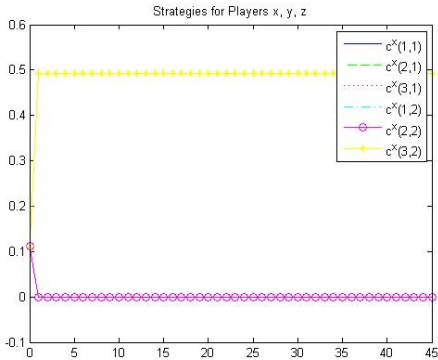


Figura 3.2: Convergencia de estrategias de los Controladores de señal x, y y z

Capítulo 4

Conclusión

El control de señal de tráfico juega un papel fundamental para mejorar la eficiencia y la eficacia de los flujos en las redes de tráfico. Este trabajo trató de la solución al problema de múltiples controladores de señal para cadenas de markov en tiempo continuo bajo el criterio de costo promedio esperado. En este juego se describe un proceso de Poisson donde los coches salen de la cola en el orden en que llegan, donde cada controlador de señal (jugador) tiene como objetivo minimizar el tiempo de la luz verde y minimizar la cola de espera.

Para resolver el problema se empleó el Método extraproximal presentando en términos del equilibrio de Nash. El método de la variable C , se amplía con una restricción especial para tiempo continuo de cadenas de Markov para obtener el conjunto de las políticas óptimas promedio. Finalmente, se expone la utilidad del método propuesto con un ejemplo de aplicación.

El método extraproximal es capaz de resolver el problema de encontrar un punto de equilibrio para múltiples controladores de señal de tráfico. Además se han realizado estudios antes, utilizando cadenas de Markov de tiempo discreto controladas. También conceptualizamos el problema como un juego de Stackelberg pero proponiendo una solución mediante el equilibrio de Nash. Consideramos el caso cuando los automóviles salen de la cola en el orden en que llegan. La solución propuesta de control de señales de tráfico en múltiples intersecciones considerando las limitaciones de flujo produce los mejores resultados entre los métodos de optimización consideradas. El método de la variable C se amplió para apoyar una restricción adicional de tiempo continuo cadenas de Markov, haciendo el problema computacionalmente tratable, es decir mostrando que el juego Stackelberg aproxima la solución a equilibrio

Nash, es eficiente en términos de conceptualización de la solución del problema, sobre todo si hay muchas intersecciones señalizadas.

Como trabajo de investigación a futuro podría involucrar a investigar las pruebas de diferentes configuraciones de múltiples intersecciones de calles, así como implementar un control adaptativo de aprendizaje con refuerzo

Referencias

- Allsop, R. E. (1971). Sigset: a computer program for calculating traffic signal settings. , *13*(2), 58–60.
- Allsop, R. E. (1976). Sigcap: a computer program for assessing the traffic capacity of signal-controlled road junctions. , *17*, 338–341.
- Allsop, R. E. (1977). Some possibilities for using traffic control to influence trip distribution and route choice. En D. J. Buckley (Ed.), *Proceedings of the sixth international symposium on transportation and traffic theory* (p. 345-373). New York: Elsevier.
- Alvarez, I., y Poznyak, A. S. (2010). Game theory applied to urban traffic control problem. En *International conference on control, automation and systems* (p. 2164-2169). Gyeonggi-do, Korea.
- Antipin, A. S. (2005). An extraproximal method for solving equilibrium programming problems and games. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, *45*(11), 1893–1914.
- Cantarella, G. E., Improta, G., y Sforza, A. (1991). Road network signal setting: equilibrium conditions. En M. Papageorgiou (Ed.), (p. 366-371). Amsterdam: Pergamon Press.
- Cascetta, E. (2009). Transportation system analysis: Models and applications..
- Cascetta, E., Gallo, M., y Montella. (2006). Models and algorithms for the optimization of signal settings on urban networks with stochastic assignment. *Annals of Operations Research*, *144*, 301 - 328.
- Cascetta, E., Gallo, M., y Montella, B. (1999). An asymmetric sue model for the combined assignment-control problem. En *Selected proceedings of 8th wctr* (pp. 189–202). Amsterdam: Pergamon Press.
- Chen, B.-A. M., O.J. (1998). Game-theoretic formulations of interaction between dynamic traffic control and dynamic traffic assignment. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*(98), 179–188.

- Chiou, S. W. (1999). Optimization of area traffic control for equilibrium network flows. *Transportation Science*, 33, 279-289.
- Clempner, J. B., y Poznyak, A. S. (2015). Modeling the multi-traffic signal-control synchronization: A markov chains game theory approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*.
- D'Acerno, L., Gallo, M., y Montella. (2012). An ant colony optimisation algorithm for solving the asymmetric traffic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, 217, 459 - 469.
- Dafermos, S. (1980). Traffic equilibrium and variational inequalities. *Transportation Science*, 14, 42 - 54.
- Dafermos, S. (1982). Relaxation algorithms for the general asymmetric traffic equilibrium problem. *Transportation Science*, 16, 231-240.
- De Schutter, B. (1999). Optimal traffic light control for a single intersection. En *Proceedings of the american control conference* (Vol. 3, p. 2195-2199). San Diego, CA: IEEE. doi: 10.1109/ACC.1999.786344
- Fathy, M., y Siyal, M. Y. (1995). Real-time image processing approach to measure traffic queue parameters. *IEEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing*, 142(5), 297-303.
- Fisk, C. S. (1984). Game theory and transportation system modelling transp. res. *Transportation Science*, 18B, 231 - 240.
- Fisk, C. S., y Nguyen, S. (1982). Solution algorithms for network equilibrium models with asymmetric user costs. *Transportation Science*, 16, 361 - 381.
- Florian, M., y Spiess, H. (1982). The convergence of diagonalization algorithms for asymmetric network equilibrium problems. *Transportation Research B*, 16, 477 - 483.
- Gartner, N. (1983). Opac: a demand responsive strategy for traffic signal control. *Transportation Research Record*, 906, 75 - 81.
- Gregoire, P., Desjardins, C., Laumonier, J., y Chaib-draa, B. (2007). Urban traffic control based on learning agents. En *Intelligent transportation systems conference* (p. 916 - 921). Seattle, WA: IEEE. doi: 10.1109/ITSC.2007.4357719
- Helbing, D., Lammer, S., y Lebacque, J. P. (2005). Optimal control and dynamic games. En C. Deissenberg y R. F. Hartl (Eds.), (p. 239-274). Springer, Dordrecht.
- Helbing, D., y Mazloumian, A. (2009). Operation regimes and slower-is-faster effect in the control of traffic intersections. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 70(2), 257-274.

- Heydecker, B. (1996). A decomposition approach for signal optimisation in road networks. *Transportation Research B*, 30, 99-114.
- Heydecker, B., y Khoo, T. (1990). The equilibrium network design problem. En *Proceedings of airo '90, conference on models and methods for decision support, sorrento* (p. 587-602).
- Khamis, M., y W., G. (2014). Adaptive multi-objective reinforcement learning with hybrid exploration for traffic signal control based on cooperative multi-agent framework. *Department of Computer Science and Engineering, Egypt-Japan University of Science*, 134-151.
- Lee, C., y Machemehl, R. B. (1998). Genetic algorithm, local and iterative searches for combining traffic assignment and signal control. , 488-497.
- Leeuwaarden, J. S. H. v. (2006). Delay analysis for the fixed-cycle traffic-light queue. *Transportation Science*, 40(2), 189-199.
- Lei, J., y Ozguner, U. (1999). Combined decentralized multi-destination dynamic routing and real-time traffic light control for congested traffic networks. En *Proceedings of the 38th ieee conference on decision and control* (Vol. 4, p. 3277-3282). Phoenix, AZ: IEEE. doi: 10.1109/CDC.1999.827776
- Meneguzzer, C. (1990). *Implementation and evaluation of an asymmetric equilibrium route choice model incorporating intersection-related travel times* (Tesis de Master no publicada). Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana, Illinois.
- Meneguzzer, C. (1995). An equilibrium route choice model with explicit treatment of the effect of intersections. *Transportation Research B*, 29, 329 - 356.
- Moya, S., y Poznyak, A. S. (2009). Extraproximal method application for a stackelberg-nash equilibrium calculation in static hierarchical games. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part b: Cybernetics*, 39(6), 1493-1504.
- Placzek, B. (2014). A self-organizing system for urban traffic control based on predictive interval microscopic model. *Institute of Computer Science, University of Silesia*, 34, 75-84.
- Poznyak, A. S. (2008). *Advance mathematical tools for automatic control engineers. vol 1 deterministic techniques*. Amsterdam: Elsevier.
- Poznyak, A. S., Najim, K., y Gomez-Ramirez., E. (2000). *Self-learning control of finite markov chains*. Marcel Dekker, Inc., New York,.
- Schloteac, A., Crisostomib, E., Kirklanda, S., y Shortenac, R. (2012). Traffic modelling framework for electric vehicles. *International Journal of*

- Control*, 85(7), 880-897.
- Sheffi, Y., y Powell, W. (1983). Optimal signal settings over transportation networks. *Journal of Transportation Engineering*, 109, 824-839.
- Smith, M. J. (1979a). The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria. *Transportation Research B*, 13, 295-304.
- Smith, M. J. (1979b). Traffic control and route-choice; a simple example. *Transportation Research B*, 13, 289-294.
- Smith, M. J., y Van Vuren, T. (1993). Traffic equilibrium with responsive traffic control. *Transportation Science*, 27, 118 - 132.
- Tan, S. B. A. M., H. N. Gershwin. (1979). Hybrid optimization in urban traffic networks. , 123p.
- Trejo, K. K., Clempner, J. B., y Poznyak, A. S. (2015). Computing the stac- kelberg/nash equilibria using the extraproximal method: Convergence analysis and implementation details for markov chains games. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 25(2). (To be published)
- Weiring, M. (2000). Multi-agent reinforcement learning for traffic light control. En *Proceedings of the seventeenth international conference (icml'2000)* (p. 1151-1158). San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann.
- Wey, W. M. (2000). Model formulation and solution algorithm of traffic signal control in an urban network. *Computers Environment and Urban Systems*, 24, 355-377.
- Wong, S., y Yang, H. (1997). Reserve capacity of a signal-controlled road network. *Transportation Research B*, 31, 397-402.
- Wong, S. C. (1997). Group-based optimization of signal timings using parallel computing. *Transportation Research C*, 5, 123-139.
- Yang, H., y Yagar, S. (1995). Traffic assignment and signal control in satu- rated road networks. *Transportation Research A*, 29, 125-139.
- Zhao, X., y Yangzhou, C. (2003). Traffic light control method for a single intersection based on hybrid systems. En *Proceedings of intelligent transportation systems* (Vol. 2, p. 1105-1109). IEEE. doi: 10.1109/ ITSC.2003.1252657
- Ziyou, G., y Yifan, S. (2002). A reserve capacity model of optimal signal control with user-equilibrium route choice. *Transportation Research B*, 36, 313-323.