



Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

**Trabajo de tesis para obtener el grado de maestro
en ciencias titulado:**

**Probabilidad de nucleación de universos
tipo brana**

Por Omar Hernández Hernández

Director de tesis: Dr. Rubén Cordero Elizalde

Dedicado a mis padres, de cuyos blancos cabellos yo soy la principal causa, a mis profesores, que me transmitieron una porción de su gran conocimiento y que sin ellos no habría presente trabajo, al CONACyT que financió la mayor parte de mis estudios de posgrado y a mi compañero Gladstone, que se desveló conmigo todas las noches en las que trabajé en el presente trabajo.

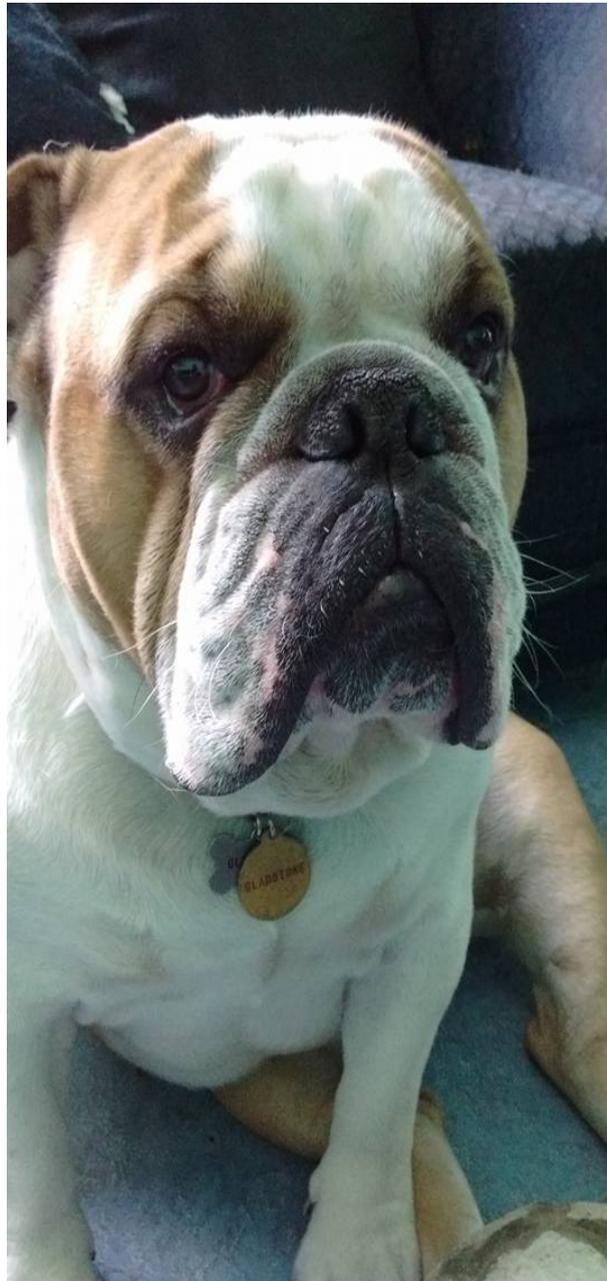


Figura 1: Gladstone el bulldog

Índice

1. Cosmología clásica	11
1.1. Universo esférico, hiperbólico o plano	11
1.2. Métrica Friedmann-Robertson-Walker	13
1.3. Ecuaciones de Friedmann	14
1.4. Parámetro de densidad	15
1.5. Radiación cósmica de fondo	16
1.6. Materia oscura	17
1.7. Energía oscura	18
1.8. Principio antrópico	19
2. Cosmología clásica de branas	21
2.1. Branas	21
2.2. Modelo de branas	22
2.3. Modelo modificado de Regge-Teitelboim	26
2.4. Modelo generalizado de Regge-Teitelboim	28
3. Cosmología cuántica	29
3.1. Cosmología cuántica estándar	29
3.2. Modelo cosmológico cuántico cuatridimensional	29
4. Cosmología cuántica de universos tipo brana	31
4.1. Formulación hamiltoniana	32
4.2. Transformaciones canónicas y norma fija	34
4.3. Cuantización de la formulación hamiltoniana para branas	37
4.4. Instantón	40
5. Nucleación de universos tipo brana	42
5.1. Modelo generalizado de Regge-Teitelboim	42
5.2. Efecto Schwinger generalizado	46
6. Conclusiones	50
7. Apéndice	51
7.1. Aspectos matemáticos de las hipersuperficies	51
7.2. Ecuaciones de Gauss y Codazzi	52
7.3. Condiciones de unión	52
7.4. Brana como variedad diferenciable	52

Resumen

La idea que el universo puede modelarse como una hipersuperficie (brana) inmerso en un espacio de dimensión mayor (espacio de fondo) ha despertado un gran interés en los últimos años. Utilizando el método del instantón calculamos la probabilidad de nucleación de universos tipo brana para una versión modificada de la acción propuesta por Regge y Teitelboim en la que se introduce un término extra del tensor de curvatura extrínseca.

Posteriormente calculamos la probabilidad de nucleación de universos tipo brana cuando existe una forma del efecto Schwinger producido por un campo tensorial de rango cuatro del tipo Ramond-Ramond.

Abstract

The idea that the universe can be modeled as an hypersurface (brane) embbebed in a higher dimension space (bulk) has awaken great interest in the last years. Using the instanton method we calculate the nucleation probability of a brane type universe for a modified versión of the action proposed by Regge and Teitelboim in which an extra term of extrinsic curvature has been added.

Finally, we calculate the probablity of brane universes when exists a kind of a Schwinger effect produced by a 4-rank tensor field similar to the Ramond-Ramond field.

Introducción

La cosmología es el estudio de la evolución del cosmos o universo (del griego cosmos- universo o armonía, siendo más específicos y logos-estudio) [1] de una manera en la que lo tomamos como un todo. El universo es rico estructuras en un vasto rango de escalas; los planetas orbitan alrededor de la estrellas, las estrellas están concentradas en las galaxias, las galaxias están concentradas en cúmulos, y estos cúmulos en supercúmulos. La cosmología es una ciencia que estudia galaxias enteras como si fueran pequeños objetos que se pueden ver como tales a primera estancia. También lidia con preguntas fundamentales para la condición humana: ¿De dónde venimos?, ¿Qué somos?, ¿A dónde vamos?; la cosmología trata de responder estas preguntas describiendo el pasado, explicando el presente y prediciendo el futuro del universo. Los cosmólogos hacen preguntas tales como, ¿De qué está hecho el universo?, ¿Es finito o infinito en el espacio?, ¿Tuvo algún inicio en algún punto en el pasado?, ¿Tendrá fin en algún futuro? La cosmología, que utiliza a la relatividad general como una de sus bases teóricas y matemáticas, trata con distancias grandes, objetos grandes y masivos, y escalas temporales muy grandes [1]. La cosmología ha sido sumamente exitosa en explicar diferentes características del universo como son su expansión y la existencia de la nucleosíntesis primordial [1]. Sin embargo existen varias interrogantes que aún son un enigma como la naturaleza de la materia y la energía oscura. Estas incógnitas han motivado el estudio de diferentes modelos entre los que se incluyen la posible existencia de dimensiones adicionales a la 4 (incluyendo al tiempo) que tenemos acceso directo.

La idea de que nuestro universo puede ser descrito como una superficie de 3+1 dimensiones inmersa en un espacio de fondo de mayor dimensión fue propuesta por Regge y Teitelboim en 1977. Posteriormente Rubakov y Shaposhnikov propusieron que nuestro universo pudiera ser un defecto topológico inmerso en un espacio tiempo de fondo extradimensional [2].

El modelo modificado de Regge y Teitelboim involucra un término extra de curvatura extrínseca en la primera acción que propusieron. Estos modelos han despertado interés porque pueden ser utilizados para modelar y explicar la existencia de la materia y energía oscura y la formación misma de nuestro universo.

Una pregunta fundamental que se ha investigado en los últimos años es la de cómo pudo surgir el universo. Para tratar de responder a ésta pregunta se ha desarrollado en los últimos 35 años la cosmología cuántica que trata de describir al universo primigenio utilizando a la relatividad general y diversos formalismos de cuantización. En la cosmología cuántica el universo como un todo se describe a través de una función de onda, que en principio, sería adecuada para responder a todas las preguntas relevantes que nos pudiéramos formular acerca del universo primigenio. Debido a la falta de una teoría cuántica de la gravedad completa se ha recurrido a reducciones importantes de los grados de libertad inherentes del universo por medio de la introducción de simetrías (como es el caso de considerar al universo homogéneo e isótropo). A partir de estas simetrías es posible escribir una ecuación cuántica

para el universo que tiene una forma muy similar a la ecuación de Schrödinger unidimensional para una partícula en un potencial. A la ecuación cuántica resultante que describe al universo se le conoce como la ecuación de Wheeler-DeWitt. El potencial que resulta con frecuencia tiene la forma de una barrera de potencial, así, la formación o nucleación del universo se podría entender como un proceso de tunelamiento cuántico.

La imagen que surge para la formación del universo en cosmología cuántica es que pudo haberse creado con un tamaño finito a partir de la nada (donde nada significa ausencia de espacio y tiempo) por medio de un proceso de tunelamiento cuántico. Una cantidad muy importante para calcular es la probabilidad de nucleación del universo ya que nos daría información muy relevante. La probabilidad de tunelamiento del universo podría ser utilizada para responder la pregunta: ¿Nuestro universo es probable en cuanto a formación y estructura?, y mediante el uso del principio antrópico, realizar predicciones físicas relevantes. La probabilidad de nucleación puede calcularse a través de la aproximación WKB aplicada a la ecuación de Wheeler-DeWitt, sin embargo, en muchos casos, ésta ecuación es muy complicada de encontrar, por lo que se tienen que recurrir a otros métodos para calcularla. Uno de los métodos que se han utilizado para calcular la probabilidad de nucleación es el del método del instantón donde se calcula la solución a las ecuaciones euclídeas de movimiento y se extremaliza la acción correspondiente.

En este trabajo se calcula la probabilidad de nucleación de universos tipo brana para el modelo modificado y generalizado de Regge y Teitelboim utilizando el método del instantón. Además también se calcula la probabilidad de nucleación cuando existe un acoplamiento de la brana con una 4-forma que induce la producción de universos de una manera analoga a la aparición de pares de partícula y antipartícula por un campo eléctrico (efecto Schwinger).

Dada la complejidad del universo, surgen algunas ramas dentro de la misma cosmología (que son indispensables para el desarrollo del trabajo de tesis) de las cuales se hablará en el presente trabajo:

- Cosmología estándar.
- Cosmología estándar de branas.
- Cosmología cuántica de branas.

A continuación realizaremos una descripción del contenido de la tesis.

En el capítulo uno presentamos los fundamentos de la cosmología y mencionamos aspectos relevantes de ella, como las ecuaciones de Friedmann, ley de Hubble, etc.

En el capítulo dos mencionaremos las ideas precursoras a las teorías cosmológicas de mayores dimensiones. Presentamos la acción que describe la gravedad en n-dimensiones y hallamos las ecuaciones de Einstein en n dimensiones. También hablaremos acerca del principio antrópico fuerte, que es una base

fuerte para considerar la posible existencia de universos múltiples, y discutiremos ligeramente sobre su formulación, sus precedentes y posibles consecuencias.

En el capítulo tres mencionamos algunos aspectos relativos a la gravitación que dieron origen a la cosmología cuántica de branas, así como las principales teorías sobre la gravitación n-dimensional. Presentamos el hamiltoniano para este modelo y el método del instantón.

Posteriormente nos encontraremos con el corazón de este trabajo:

En el capítulo cuatro calcularemos la probabilidad de creación de universos tipo brana para el modelo modificado de Regge-Teitelboim y agregaremos unos términos extra de curvatura extrínseca en la acción original. Utilizando el método del instantón, hallaremos los valores extremos de dicha probabilidad.

En el capítulo cinco hablaremos del efecto Schwinger generalizado, para lo cual haremos un procedimiento similar al del capítulo anterior para hallar la probabilidad máxima de nucleación, solo que ahora nuestra brana será acompañada de una anti-brana. También hacemos un análisis gráfico de dicha probabilidad.

Finalmente damos las conclusiones del trabajo de tesis.

En el apéndice se hablará de ciertos aspectos matemáticos de las hipersuperficies en relatividad general que fueron utilizados para realizar los cálculos de los capítulos anteriores, tales como superficies nulas, campos vectoriales tangentes y normales, tensor de Riemann, tensor de Ricci, tensor de curvatura extrínseca, ecuaciones de Gauss-Codazzi, etc.

1. Cosmología clásica

Una hipótesis fundamental de la cosmología es la de considerar al Universo isótropo y homogéneo. Por isotropía, nos referimos a que no hay direcciones preferentes en el universo, se ve igual en cualquier dirección que lo observemos; por homogeneidad entendemos que no hay puntos preferentes en el universo, no importa hacia donde miremos, se ve de la misma manera. Nótese que hablamos de que el universo es isótropo y homogéneo a escalas grandes, en este contexto, escalas grandes significa igual o mayor a 100Mpc. La isotropía del universo no es trivial, de hecho, en escalas pequeñas, el universo es antisótropo [3].

La radiación cósmica de fondo o CMB (por sus siglas en inglés, Cosmic Microwave Background radiation), es una pista en la cosmología. En particular, es la pista que evidencia que ocurrió una gran expansión, pues es natural encontrar una radiación de este tipo suponiendo que en el inicio el universo tenía una temperatura alta y una densidad muy grande. Si la masa se conserva en un universo que se expande, entonces en el pasado el universo era más denso de lo que es ahora.

La radiación de cuerpo negro (la cual en un universo estático es difícil de explicar) se puede explicar como una reliquia del tiempo cuando la temperatura y densidad eran mucho mayores en el inicio del universo de manera que éste fuera opaco. En la cosmología estándar, necesitamos funciones que nos permitan calcular la distancia entre dos puntos en la geometría del universo, estas funciones son llamadas componentes métricas.

1.1. Universo esférico, hiperbólico o plano

A continuación daremos unos conceptos importantes para describir la geometría posible del universo. Empecemos por considerar diferentes maneras de describir la curvatura en espacios bidimensionales, y luego las extenderemos a dimensiones más grandes [1]. La geometría más simple de un espacio bidimensional es la de un plano. En un plano, una geodésica es una línea recta. Si ponemos un triángulo en el plano, sus ángulos deberán obedecer que:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \tag{1.1}$$

con los ángulos medidos en radianes. En el plano se satisface el teorema de Pitágoras para medir distancias, por lo que nuestra métrica para un espacio plano, queda:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{1.2}$$

o en coordenadas polares, la distancia de un punto (r, θ) a un punto $(r + dr, \theta + d\theta)$ será dada por:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \tag{1.3}$$

Ahora consideremos otro espacio bidimensional, una esfera, o más bien solo el cascarón. Aquí una geodésica es una porción de un gran círculo. Nuevamente, si dibujamos un triángulo en la superficie

de la esfera, sus ángulos obedecen la relación:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{A}{R^2}, \quad (1.4)$$

donde A es el área del triángulo y R el radio de la esfera. Cuando la suma de los ángulos es mayor a π se dice que tiene curvatura positiva. En la superficie de la esfera, podemos poner un sistema polar de coordenadas simplemente tomando puntos, digamos polo norte y polo sur, y tomando una geodésica de un punto al otro que será el meridiano. Nuestra métrica quedará de la siguiente manera:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R} \right) d\theta^2. \quad (1.5)$$

Ahora hablemos de la curvatura negativa (hipérbola). donde tenemos que, si dibujamos un triángulo en esta superficie debe satisfacer la relación:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{A}{R^2}. \quad (1.6)$$

Haciendo un proceso análogo al de la esfera, nuestra métrica queda:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \left(\frac{r}{R} \right) d\theta^2. \quad (1.7)$$

En tres dimensiones, tenemos, para espacio plano:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.8)$$

o en coordenadas polares:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]. \quad (1.9)$$

Un espacio con curvatura positiva queda:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R} \right) [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]. \quad (1.10)$$

Un espacio con curvatura negativa, tiene la siguiente métrica:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \left(\frac{r}{R} \right) [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2], \quad (1.11)$$

Las tres métricas pueden ser escritas de manera más compacta:

$$ds^2 = dr^2 + S_\kappa(r)^2 d\Omega^2, \quad (1.12)$$

donde

$$S_\kappa = \begin{cases} r^2 & \text{para } \kappa = 1 & \text{(geometría plana)} \\ R^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R} \right) & \text{para } \kappa = 2 & \text{(geometría esférica)} \\ R^2 \sinh^2 \left(\frac{r}{R} \right) & \text{para } \kappa = 3 & \text{(geometría hiperbólica)} \end{cases} \quad (1.13)$$

[1]

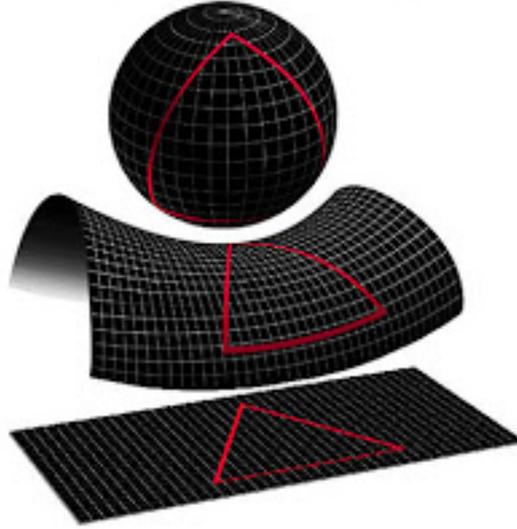


Figura 2: Ejemplo de tipos de universos

1.2. Métrica Friedmann-Robertson-Walker

La métrica de Robertson-Walker [2] que surge de la pregunta que se hicieron Howard Robertson y Arthur Walker: ¿Qué forma tendría una métrica en un espacio-tiempo asumiendo que el universo es espacialmente homogéneo e isótropo todo el tiempo y si las distancias se pueden expandir o contraer como función del tiempo?, entonces ellos derivaron su métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right], \quad \text{Friedmann-Lemaitre} \quad (1.14)$$

Note que la parte espacial de la métrica consiste de la métrica espacial para un espacio uniformemente curvo (está métrica describe la misma geometría de la sección anterior pero en un sistema de coordenadas distinto), multiplicado por el cuadrado de un factor de escala, el cual es llamado factor de escala cósmico, que no dice como se contrae o expande respecto al tiempo. El valor de $k = 1$ corresponde a geometría esférica, $k = 0$ representa geometría plana y $k = -1$ describe a geometría hiperbólica. Utilizando el factor de escala cósmica se define la distancia propia, como se hace en relatividad especial, simplemente considerando la longitud de la distancia entre dos puntos como la dada por la geodésica que los une.

$$ds = a(t)dt, \quad (1.15)$$

donde la distancia propia se encuentra integrando la expresión anterior.

Una parte fundamental para el estudio de la cosmología son las ecuaciones de Einstein que surgieron en el desarrollo de la relatividad general. Una consecuencia muy importante de la relatividad general es que la gravedad no se debe de entender como una fuerza si no como la deformación del espacio tiempo. Estas ecuaciones relacionan las propiedades del espacio curvo con el contenido de

materia-energía presente en el espacio y son las siguientes:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi GT_{ab}. \quad (1.16)$$

En la parte derecha de la ecuación tenemos las fuentes que producen el campo gravitacional caracterizadas por el tensor de energía-momento T_{ab} , el cual describe el flujo de energía y el momento lineal de una distribución continua de materia en el contexto de la relatividad general. En la parte izquierda de la ecuación están las propiedades geométricas del espacio tiempo representadas por el tensor de Ricci R_{ab} y el escalar de curvatura R , con lo que podemos formular la siguiente expresión fuerte: *La masa en el universo le dice al espacio-tiempo como curvarse, y el espacio-tiempo le dice a la masa del universo como moverse*. Sin embargo, es importante mencionar que las propiedades geométricas del espacio también están presentes en el tensor de energía-momento

El tensor de Einstein G_{ab} se construye con el tensor de Ricci, o de curvatura intrínseca

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}, \quad (1.17)$$

el cual se obtiene de una doble contracción de índices del tensor de Riemann. El tensor de Riemann se calcula de la siguiente manera:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}, \quad (1.18)$$

donde las comas indican derivación parcial y Γ son los símbolos de Christoffel y que se obtienen de la siguiente manera:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right), \quad (1.19)$$

Ahora estamos en condiciones de definir las ecuaciones de Friedmann.

1.3. Ecuaciones de Friedmann

En relatividad general, en el límite de gravedad débil, la clave que permite determinar el movimiento de una partícula debido a campos gravitacionales es la ecuación de Poisson. En el contexto cosmológico, las ecuaciones de campo de Einstein se pueden usar para conectar el factor de escala de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker con el contenido de energía-materia descrito a través del tensor de energía-momento para fluido perfecto (que corresponde a un fluido que es consistente con la homogeneidad e isotropía del universo). Esas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Friedmann [3].

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho - \Lambda}{3} - K\frac{c^2}{a^2}, \quad (1.20)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - 4\pi G(\rho + \frac{3p}{c^2}), \quad (1.21)$$

donde: Λ es la constante cosmológica, posiblemente causada por la energía del vacío, G es la constante de gravitación, c es la velocidad de la luz a es el factor de escala del Universo, ρ es la densidad de energía, p es la presión y K es la curvatura gaussiana cuando $a = 1$ (p.ej. hoy). Si la forma del universo es hipersférica y R es el radio de curvatura (R_0 en el momento actual), entonces $(R/R_0) = a$. Generalmente, $K/(a^2)$ es la curvatura gaussiana. Si K es positiva, entonces el Universo es hipersférico. Si K es cero, el Universo es plano, y si K es negativo, el Universo es hiperbólico. Nótese que ρ y p son función de a . El parámetro de Hubble, H , es la velocidad de expansión del universo. Estas ecuaciones a veces se simplifican redefiniendo la densidad de energía ρ y la presión p :

$$\rho \rightarrow \rho - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (1.22)$$

$$p \rightarrow p + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad (1.23)$$

para obtener:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - K\frac{c^2}{a^2}, \quad (1.24)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho + \frac{3p}{c^2}, \quad (1.25)$$

El parámetro de Hubble puede cambiar en el tiempo si otros miembros de la ecuación son dependientes del tiempo (en particular la densidad de energía y la curvatura). Evaluando el parámetro de Hubble en el momento actual se obtiene la constante de Hubble que es la constante de proporcionalidad de la ley de Hubble. Aplicado a un fluido con una ecuación de estado dada (donde la ecuación de estado es una relación entre la densidad de energía ρ y la presión p), las ecuaciones de Friedmann dan como resultado la evolución en el tiempo del factor de escala del Universo como función de la densidad de energía del fluido. Algunos cosmólogos llaman a la segunda de estas dos ecuaciones la ecuación de aceleración y se reservan el término ecuación de Friedmann sólo para la primera ecuación.

1.4. Parámetro de densidad

El parámetro de densidad, se define como la relación de la densidad actual (u observada) respecto a la densidad crítica del Universo de Friedmann. La densidad crítica se define como la necesaria para la cual la curvatura espacial es cero (como es para todos los Universos de Friedmann básicos). Cuando se sustituyen estos parámetros en la primera ecuación de Friedmann se encuentra que [1]:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.26)$$

Así se obtiene que la expresión siguiente para el parámetro de densidad [2] (útil para comparar diferentes modelos cosmológicos) es:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho. \quad (1.27)$$

Este término originalmente fue utilizado como una manera de determinar la geometría del universo. Si el parámetro de densidad es mayor que uno, la geometría es cerrada y el Universo eventualmente parará su expansión y entonces se colapsará. Si es menor que uno, será abierto y el Universo se expandirá para siempre. Sin embargo, también se pueden sintetizar los términos de curvatura y de la energía del vacío en una expresión más general para en el caso de que este parámetro de densidad de energía sea exactamente igual a la unidad. Entonces es una cuestión de medir los diferentes componentes, normalmente designados por subíndices. De acuerdo con el modelo Λ CDM, hay componentes importantes debido a los bariones, materia oscura fría y energía oscura. La geometría del espacio-tiempo fue medida por el satélite WMAP estando cerca de ser una geometría plana, es decir, el parámetro de curvatura es aproximadamente cero. La primera ecuación de Friedmann a menudo se escribe formalmente con los parámetros de densidad.

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_{R\Lambda} a^{-4} + \Omega_\Lambda - K c^2 a^{-2}, \quad (1.28)$$

donde: Ω_R es la densidad de radiación, Ω_M es la densidad de materia (oscura más la bariónica), Ω_Λ es la constante cosmológica o la densidad de vacío (en donde todas las cantidades anteriores están evaluadas en el tiempo actual).

1.5. Radiación cósmica de fondo

La radiación cósmica de fondo nos proporciona una vista del universo temprano cuando tenía unos 300,000 años. Los fotones en la radiación cósmica de fondo que se dispersaron por los electrones actualmente tienen un corrimiento al rojo debido a la expansión del universo. Cuando observamos a los fotones de la radiación cósmica de fondo notamos que literalmente vienen de un momento temprano del universo, por ello son la prueba más poderosa de la existencia del universo en su edad temprana.

Hablaremos de los detalles antes de la época cuando se dispersaron dichos fotones. Un hecho crucial es que las colisiones de los fotones con los electrones antes de dispersarse aseguraron que los fotones estaban en equilibrio, esto es, que deberían tener una radiación de cuerpo negro.

Lo que hemos aprendido en las últimas décadas de observar la radiación cósmica de fondo es que el universo temprano era suave, es decir, sin anisotropías apreciables detectadas en la radiación cósmica de fondo, esto nos lleva a la conclusión de que el universo comenzó con una gran explosión caliente. El universo también era opaco y denso, sin embargo, cuando el universo se volvió transparente tenía una temperatura de 3000 K°. La temperatura de la radiación cósmica de fondo es ahora de 2.725 K°, un factor 1100 veces más pequeño. El decaimiento de la temperatura en la radiación de cuerpo negro

es una consecuencia directa de la expansión del universo [4].

El físico estadounidense George Gamow descubrió que de acuerdo con el modelo de la gran explosión debe existir radiación de fondo que impregna a el Universo. En 1963, Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron dicha radiación, llamada ahora radiación cósmica de fondo (CMB, por su nombre en inglés) Trabajando con una antena para recibir microondas en los laboratorios Bell, recibieron lo que ellos pensaban era ruido y que se solucionaría apuntando la antena en una dirección distinta. Resultó que este ruido era isótropo y constante en el tiempo, era el CMB. Este descubrimiento fue muy importante para la aceptación de la teoría de la gran explosión como origen del Universo. Dicke y su grupo en la universidad de Princeton analizaron este ruido (señales isótropas y constantes en el tiempo) de donde dedujeron que el universo comenzó en un estado altamente denso y caliente. La primera medición con un rango amplio de longitud de onda fué realizada por el satélite COBE (COsmic Background Expolorer) lanzado en 1989. El último satélite lanzado, fué en 2013 y se llama Planck, el cual sigue analizando la información obtenida.

El 21 marzo de 2013, los resultados obtenidos por la nave espacial Planck que analizó la radiación de fondo del universo de todo el cielo fueron anunciados. Se obtuvo una estimación más precisa para el contenido de la materia y la energía presente en el universo: 68,3 % corresponde a energía oscura, un 26,8 % a materia oscura y un 4,9 % a materia ordinaria [5].

1.6. Materia oscura

La materia que conocemos y podemos ver, en cosmología es llamada materia bariónica. Esta materia interactúa con la luz, la dispersa, la refleja, refracta, etc, pero existe materia que no es visible, i. e., no interactúa con los fotones. Esta es conocida como materia oscura. Esto significa que estas partículas deben ser eléctricamente neutras. Estudios detallados sobre la dinámica de las galaxias nos dice que esta materia debe ser también fría [2].

El estudio de un cúmulo doble de galaxias nos ha dado evidencia directa de la existencia de materia oscura, que no tiene interacción gravitacional con si misma, ni con materia bariónica. Las galaxias en este cúmulo están agrupadas en dos distintos sub-cúmulos, mientras el gas caliente, observado mediante rayos X, está concentrado entre estos sub-cúmulos. La interpretación de esto es que dos cúmulos de galaxias han colisionado, las galaxias con menor probabilidad de colisionar siguieron su camino, cuando los cúmulos de gas caliente que las acompañaban han colisionado quedando cerca entre los dos cúmulos [1]. Observaciones posteriores indicaron la presencia de materia oscura en el universo: estas observaciones incluyen la citada velocidad de rotación de las galaxias, las lentes gravitacionales de los objetos de fondo por los cúmulos de galaxias, tales como el Cúmulo Bala (1E 0657-56) y la distribución de la temperatura del gas caliente en galaxias y cúmulos de galaxias.

No solo la materia bariónica es indetectable ante nuestros ojos, pues mucha materia no es bariónica,

la mayoría de la materia en el universo es materia oscura no-bariónica. Una buena manera de hallar evidencia de materia oscura es observar la influencia gravitacional alrededor de una región en el universo. Un método clásico de detectarla involucra observar la velocidad orbital de las estrellas en galaxias espiral, como nuestra propia galaxia o M31. Las galaxias en espiral contienen discos planos de estrellas, dentro de los discos, las estrellas están en órbitas casi circulares alrededor de la galaxia. El primer astrónomo que observó grandes cúmulos de materia oscura fue Fritz Zwicky en los años 1930's, notó que la dispersión de la velocidad radial de las galaxias es considerablemente grande -aproximadamente 1000km/s- las estrellas y el gas visible dentro de las galaxias no proveen la interacción gravitacional necesaria para mantener juntos los cúmulos de las galaxias, esto lo llevó a la conclusión de que debía haber allí materia oscura.

1.7. Energía oscura

Ahora hablemos de energía oscura. Uno de los campos de investigación más importantes en astrofísica y cosmología es el de la energía oscura (DE, por su nombre en inglés). Con el término energía oscura se denomina a la fuente causante de la recién descubierta expansión acelerada del Universo. Dicha expansión no era esperada de acuerdo con la teoría de la gran explosión pero gracias a las observaciones hechas por los grupos High-redshift Supernova Search Team y Supernova Cosmology Project Team [6] se pudo determinar su existencia [7].

Hoy en día todavía no se sabe la naturaleza o de qué está hecha la DE. La explicación más sencilla es la constante cosmológica que Einstein introdujo en su ecuación para obtener un Universo estático. La existencia de la energía oscura está apoyada por observaciones. Entre éstas se tiene la edad del Universo comparada con la edad de las estrellas más viejas, la observación de supernovas, el fondo de radiación cósmica, etc.

Como se mencionó anteriormente, en supernovas, los grupos High-redshift Supernova Search Team y Supernova Cosmology Project Team reportaron de forma independiente la expansión acelerada del Universo mediante la observación de Supernovas tipo Ia (SNIa) en el año 1998, comparando la brillantez de estas supernovas (que es una medida de su distancia) con su corrimiento al rojo (cuanto se ha expandido el Universo).

Hay dos conjuntos de evidencia de dicha energía:

1. La densidad de energía del universo es muy cercana a la crítica.

De hecho la densidad de materia total inferida de las observaciones es solo un tercio de la densidad crítica, el resto de la densidad de energía debe ser de alguna manera, energía oscura.

2. Uno puede comparar distancia teórica de algún astro con su corrimiento al rojo, y esta relación

puede ser observada directamente. En 1998, dos grupos dieron evidencia de energía oscura. Uno de los campos de investigación más importantes en astrofísica y cosmología es el de la energía oscura (DE, por su nombre en inglés).

1.8. Principio antrópico

El principio antrópico establece que cualquier teoría válida sobre el universo tiene que ser consistente con la existencia del ser humano. En otras palabras: «Si en el Universo se deben verificar ciertas condiciones para nuestra existencia, dichas condiciones se verifican ya que nosotros existimos». Los diferentes intentos de aplicar este principio al desarrollo de explicaciones científicas sobre la cosmología del universo han conducido a una gran confusión y elevada controversia. El principio antrópico sugiere que vivimos en un universo cuidadosamente ajustado, es decir, un universo que parece haber sido meticulosamente adaptado para permitir la existencia de la vida que conocemos. Si cualquiera de las constantes físicas básicas hubiese sido diferente, entonces la vida tal como se le conoce no habría sido posible.

Hay dos versiones del principio antrópico: la débil y la fuerte.

La versión débil del principio antrópico sugiere que el universo es como lo conocemos para que exista vida en el mismo. Podemos formularlo de la siguiente manera:

Los valores observados de todas las cantidades físicas y cosmológicas no son igualmente probables, sino que están restringidos por el hecho de que existen lugares del Universo donde se ha podido desarrollar la vida basada en el carbono y el hecho de que el Universo sea suficientemente antiguo como para que esto haya ocurrido.

El principio antrópico, en su versión fuerte, sugiere que la vida inteligente (nosotros) estamos ubicados en un universo en el cual las leyes que rigen la física y sus constantes, tales como la constante de Planck, la constante de estructura fina, la constante cosmológica, etc, tienen valores y formas de manera que se pudiera dar vida inteligente en ciertas regiones del universo o ciertos universos. El principio sugiere que la probabilidad de hallar vida en una cierta región del universo, tal como una galaxia, o en un universo es casi uno.

De manera que, nuestro universo está regido por las leyes conocidas (y quizá otras por conocer) y las constantes como las conocemos, puesto que, sí modificamos de manera mínima, por ejemplo, la carga del electrón, no tendríamos átomos, y sin átomos no habría un universo como lo conocemos. Si los neutrones tuvieran un tiempo de vida más corto, el universo habría colapsado antes de que se pudiera expandir tal y como las observaciones astronómicas sugieren, etc.

Y es aquí donde la versión fuerte del principio antrópico choca con su versión débil: ¿Estamos hechos

de acuerdo con las leyes y constantes físicas o éstas están hechas de acuerdo a nosotros?

Hay bastantes debates acerca de esto, sobretodo si nos enfocamos en la parte teológica (cosa que va más allá del objetivo de este trabajo), pero nosotros nos enfocamos en la parte fuerte del principio antrópico, pues precisamente la inteligencia es la que nos hace pensar que no somos casualidad, si no más bien causalidad, y es lo que sugiere dicha versión de este principio. ¿ Será la formación de vida inteligente, probable, o incluso necesaria para el hecho de que tengamos las leyes que gobiernan el universo tal y como es? Al no tener una respuesta a esta pregunta, optamos por reescribir el principio antrópico fuerte de la siguiente manera:

Las leyes físicas de la naturaleza y los valores de las constantes fundamentales y parámetros cosmológicos deben permitir la formación de vida inteligente. Estos valores deben ser probables [8]

Esto nos lleva a pensar en los universos múltiples, o que en el universo hay partes aisladas donde las leyes y constantes físicas son diferentes, de manera que la probabilidad de hallar vida inteligente en dichas regiones o universos sea casi uno. Cuando uno adopta esta forma del principio antrópico, el hecho de que la inflación eterna predice la creación de un número infinito de universos planos con valores casi aleatorios de los campos que determinan los valores de las constantes físicas, se convierte en un aspecto altamente deseable para esta teoría cosmológica [8].

En el presente trabajo utilizaremos la versión fuerte de este principio para obtener los posibles valores esperados de los parámetros que caracterizan a los modelos modificado y generalizado de RT para que su probabilidad de nucleación de universos sea máxima. El requerimiento anterior se basa en la suposición de que nuestro universo es “común”.

2. Cosmología clásica de branas

La idea de que nuestro universo puede estar inmerso en un espacio de fondo de dimensión mayor nos ha llevado a la necesidad de elaborar diversos modelos con campos físicos y propiedades geométricas. Esto dió origen a la cosmología de branas (la palabra "brana" surge de la palabra "membrana"), donde podemos hablar de n -branas y n es la dimensión. T. Regge y C. Teitelboim [9] fueron los primeros en dar estas ideas. Posteriormente Rubakov y Shaposhnikov [10] [11] propusieron una acción que modela nuestro universo como una membrana o brana de cuatro dimensiones considerando tres espaciales y una temporal, misma que se encuentra inmersa en un espacio de fondo de cinco dimensiones.

2.1. Branas

El término p -brana ha sido utilizado para describir un sistema dinámico localizado en una superficie de tipo temporal de dimensión $d=p+1$ inmerso en un espacio-tiempo de fondo de dimensión $n>p$. En el caso de menor dimensión, tenemos una cero-brana significando lo que usualmente llamamos una partícula elemental, una 1-brana es una cuerda, etc. En el caso extremo de mayor dimensión uno tiene el caso "impropio" de una $(n-1)$ -brana, que significa lo que es comúnmente llamado "medio" (lo podemos ejemplificar como un simple fluido), y una $(n-2)$ -brana que significa una membrana (de donde se deriva el término genérico "brana"). Una membrana tiene la característica especial de ser formada por una hipersuperficie, siendo apta para formar una frontera entre regiones separadas del espacio de fondo; esto significa que una 2-brana es una membrana en un espacio-tiempo cuatridimensional ordinario (con $n=4$), pero no en un espacio de fondo de mayor dimensión.

El fundamento de la cosmología de branas es la idea de dimensiones extra, la cual sugirió T. Kaluza (1919) y posteriormente la refinó O. Klein (1926). La teoría de Kaluza-Klein trata de unificar la gravitación y el electromagnetismo, usando un modelo geométrico en un espacio-tiempo de cinco dimensiones. La teoría usa las ecuaciones de campo de Einstein planteadas en un espacio-tiempo de cinco dimensiones, estas ecuaciones bajo hipótesis adicionales resultan dar por un lado las ecuaciones de Einstein convencionales para el campo gravitatorio y de otro lado las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. Además aparece un campo escalar extra. En 1926 Oskar Klein combinó las ideas de Kaluza con algunas ideas de la mecánica cuántica y pudo dar una estimación cuantitativa tanto de la cuantización de la carga como de la pequeñez e inobservabilidad práctica de la dimensión adicional.

Modernamente sobre la idea original de Kaluza y Klein se han construido generalizaciones de la teoría de la relatividad sobre espacio-tiempos de más de cinco dimensiones. A estas teorías, también se las llama usualmente, teorías de Kaluza-Klein aunque difieren en muchos aspectos de la propuesta original, retienen el principio de geometrización y otros aspectos de la teoría [12].

El punto de partida de Kaluza fue introducir un espacio-tiempo de cinco dimensiones, en que el tensor métrico de dicho espacio-tiempo contenía la métrica cuatridimensional g_{ij} y el potencial vectorial A_i del campo electromagnético, además de dos funciones escalares σ y ϕ :

$$\tilde{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{ab} + \kappa^2 \phi^2 A_a B_b & \kappa \phi^2 A_a \\ \kappa \phi^2 A_b & \phi^2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

El siguiente paso de la propuesta de Kaluza es imponer artificialmente la llamada condición cilíndrica que consiste en restringir que ninguna de las componentes del tensor pentadimensional \tilde{g}_{AB} dependa de la coordenada adicional x^4 . En ese caso las ecuaciones de campo de Einstein se reducen a las condiciones del electromagnetismo clásico más las ecuaciones de la relatividad general, más una ecuación adicional para el campo escalar adicional:

$$\tilde{R}_{AB} - \frac{\tilde{R}}{2} \tilde{g}_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} = \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{ab}^{TE} - \frac{1}{\phi} \nabla_a \partial_b \phi - g_{ab} \\ \nabla^a F_{ab} = -3 \frac{\partial^a \phi}{\phi} F_{ab} \\ = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{ab} F^{ab} \end{cases} \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones tienen la siguiente interpretación: Si se considera un espacio-tiempo cuasivaciado, de topología $\mathcal{M} \times S^1$ en cinco dimensiones con la métrica adecuada, entonces el movimiento de una partícula pequeña de prueba cargada en el mismo se parece al que tendría dicha partícula en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones \mathcal{M} en el que se ha introducido un campo electromagnético. Es decir, el campo electromagnético efectivo que ve una partícula cargada en el espacio-tiempo ordinario puede interpretarse como el resultado geométrico de la curvatura de un espacio-tiempo de cinco dimensiones.

2.2. Modelo de branas

Ahora consideramos la siguiente acción para el modelo de branas:

$$S_b = S_G^{(4)} + S_M^{(4)} = \frac{M_{(4)}^2}{2} \int_b (\sqrt{-g} R) d^4 x + \int_b (\sqrt{-g} L_m) d^4 x, \quad (2.3)$$

donde $M_{(4)}$ es la masa de Planck y R es el escalar de curvatura de la trayectoria barrida por la brana. Regge y Teitelboim [13] consideraron de gravedad pura el término $S_G^{(4)}$, sin embargo, consideraremos algo más general al incluir el otro término $S_M^{(4)}$. La forma más simple del término de materia es una constante cosmológica en cuatro dimensiones [5] $L_m = \rho_\nu = \text{const}$ que corresponde al término de tensión de la brana. La integración se hace en una superficie de 3+1 dimensiones descrita por:

$$y^A = y^A(x), \quad (2.4)$$

que son las coordenadas de embebimiento de la brana en el espacio-tiempo de fondo. En un espacio N dimensional con una métrica G_{AB} inducida sobre la brana:

$$g_{\mu\nu} = G_{AB} \frac{\partial y^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^B}{\partial x^\nu}, \quad (2.5)$$

denotaremos a g como el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$. Y la superficie está parametrizada por:

$$X^\mu = X^\mu(\tau, r, \theta, \phi), \quad (2.6)$$

Las variables independientes dinámicas de la teoría no son las componentes de la métrica pero si de las funciones y^A del embebimiento.

La acción general en N dimensiones incluye la curvatura del espacio de fondo y su contenido de materia:

$$S_b = S_G^{(4)} + S_M^{(4)} = \frac{M_{(N)}^{N-2}}{2} \int_b (\sqrt{-G} \tilde{R}) d^N y + \int_b (\sqrt{-G} \tilde{L}_m) d^N y, \quad (2.7)$$

donde $M_{(N)}$ es la masa de Planck en N dimensiones. El término de materia se toma usualmente en la forma de una constante cosmológica del espacio de fondo, la cual puede tomar diferentes valores en los diferentes lados de la brana. La gravitación en cuatro dimensiones de la brana es entonces recuperada si se compactan las dimensiones extra o si se introduce una constante cosmológica negativa suficientemente grande en el espacio de fondo, lo cual causaría que el espacio de fondo se deformase [5], confinando gravitones de bajas energías en la brana. De acuerdo con la teoría DGP nuestra gravedad de cuatro dimensiones puede ser también recuperada en un espacio de fondo asintóticamente de Minkowski. La acción completa en este caso es:

$$S_b = S_G^{(N)} + S_M^{(N)} + S_G^{(4)} + S_M^{(4)}, \quad (2.8)$$

Asumiendo un espacio de fondo de cinco dimensiones y una simetría Z_2 respecto a la brana, se encuentra [5] que la gravedad en la brana es efectivamente 4D en escalas pequeñas y 5D a mayores escalas. Ese modelo se puede extender en varias direcciones. La variación de la acción respecto a G_{AB} da:

$$\delta S = -\frac{1}{2k} \int_m d^N y \sqrt{-G} (R^{\tilde{A}\tilde{B}} - \frac{1}{2} G^{\tilde{A}\tilde{B}} \tilde{R} - k \tilde{T}_{bulk}^{ab}) \delta G_{AB} - \frac{1}{2k'} \int_m d^N x \sqrt{-g} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \tilde{R} - k' T^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

donde:

$$T_{bulk}^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-G}} \frac{\delta \tilde{L}_m}{\delta G_{AB}} \quad \text{y} \quad T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_m}{\delta g_{\mu\nu}} \quad \text{son los tensores de energía del espacio de fondo y la brana, respectivamente.} \quad k = M_{(N)}^{2-N}, \quad k' = M_{(4)}^2$$

y la variación $\delta g_{\mu\nu}$ se puede expresar en términos de la variación δG_{AB} como:

$$g_{\mu\nu} = \int_m d^N y G_{AB} \partial_\mu y^A(x) \partial_\nu y^B(x) \delta^N(y^A - y^A(x)), \quad (2.10)$$

con lo que obtenemos las ecuaciones de Einstein en N dimensiones:

$$R^{\tilde{A}\tilde{B}} - \frac{1}{2}G^{AB}\tilde{R} = k(\tilde{T}_{bulk}^{AB} + T_{brane}^{AB}), \quad (2.11)$$

donde:

$$T_{brane}^{AB} = \frac{1}{\sqrt{-G}} \int_b d^4x \sqrt{-g} \left[T^{\mu\nu} - \frac{1}{k'} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) \right] \partial_\mu y^A(x) \partial_\nu y^B(x) \delta^N(y^A - y^A(x)), \quad (2.12)$$

Utilizando la relación anterior, vemos que si las ecuaciones en 4D de Einstein son satisfechas en la brana:

$$T^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = T^{\mu\nu} - \frac{1}{k'} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) = 0, \quad (2.13)$$

entonces la brana no tiene efectos gravitacionales en el espacio de fondo. A estas branas se les conoce como sigilosas [14]

Las ecuaciones de movimiento de la brana pueden ser halladas variando la acción respecto a la métrica inducida, tales ecuaciones son

$$\tilde{T}^{\mu\nu} K_{\mu\nu}^i = 0, \quad (2.14)$$

donde:

$$K_{\mu\nu}^i = -n_A^i D_\mu e_\nu^A, \quad (2.15)$$

es la curvatura extrínseca y $D_\mu = e_\mu^A \nabla_A$ y ∇_A es la derivada covariante compatible con la métrica G_{AB} . Los vectores n_A^i son normales a la hoja de mundo y los vectores tangentes son:

$$e_\mu^A = y_{,\mu}^A, \quad (2.16)$$

los cuales cumplen que $n_A^i n_B^j g^{AB} = \delta^{ij}$ y $n_A^i e_\mu^A = 0$.

Supongamos que tenemos la solución en 4D de las ecuaciones de Einstein que se pueden embeber en un espacio de fondo de N dimensiones con ciertas funciones $y^A(x^\mu)$. Este embebimiento da una solución tanto a las ecuaciones de movimiento de la brana como a las ecuaciones de Einstein en N dimensiones. Entonces, cualquier universo 4D que se pueda embeber en el espacio de fondo representa una posible evolución de un universo tipo brana. Ahora consideremos una situación más general, cuando las ecuaciones de Einstein en 4D no son satisfechas. Tomamos el caso de branas esféricas en un espacio de fondo 5D por simplicidad. Asumimos una constante cosmológica distinta de cero para el espacio de fondo y dejamos la posibilidad de que asuma distintos valores dentro y fuera de la brana. Siguiendo los mismo pasos, las ecuaciones de movimiento de la brana quedan de la siguiente manera [5]:

$$[K] g_{\mu\nu} - [K_{\mu\nu}] = k\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu} \langle K_{\mu\nu} \rangle = [F_{nn}], \quad (2.18)$$

$$\nabla_\nu (T_\mu^\nu) = -[F_{\mu n}], \quad (2.19)$$

donde:

$$F_{nn} = (\tilde{T}_{bulk})_{AB} n^A n^B, \quad (2.20)$$

$$F_{\mu n} = (\tilde{T}_{bulk})_{AB} e_{\mu}^A n^B, \quad (2.21)$$

Los paréntesis cuadrados y angulados denotan la diferencia y semisuma de la correspondiente cantidad dentro y fuera de la brana [5], es decir:

$$[K_{\mu\nu}] = K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^-, \quad (2.22)$$

$$\langle K_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{2}(K_{\mu\nu}^+ + K_{\mu\nu}^-), \quad (2.23)$$

donde los signos mas y menos denotan dentro y fuera de la brana respectivamente. Tomamos la siguiente forma del tensor de energía-momento del espacio de fondo:

$$F_{AB}^{\pm} = -k^{-1} \Lambda^{\pm} g_{AB}, \quad (2.24)$$

Luego, en virtud del teorema generalizado de Birkoff [2], la métrica en 5D se puede escribir de la siguiente manera:

$$ds_5^2 = -A_{\pm} d\tau^2 + A_{\pm}^{-1} da^2 + a^2 d\Omega_3^2, \quad (2.25)$$

donde el último diferencial denota la métrica en una esfera unitaria de tres dimensiones y:

$$A_{\pm} = 1 - \frac{\Lambda^{\pm}}{6} a^2 - \frac{2M^{\pm}}{M_{(5)}^3 a^2}, \quad (2.26)$$

y M^{\pm} puede ser interpretado como las masas de un agujero negro dentro y fuera de la brana. La función de embebimiento es:

$$y^A = y^A(x^{\mu}) = (t(\tau), a(\tau), \chi, \theta, \phi), \quad (2.27)$$

que nos dá una trayectoria paramétrica del movimiento de la brana, la función a es conocida como factor de escala cósmica. En la norma propia de tiempo, la métrica inducida en la brana es:

$$ds_4^2 = -d\tau^2 + a^2 d\Omega_3^2, \quad (2.28)$$

Definimos $\Delta = -A_{\pm} \dot{t}^2 + A_{\pm}^{-1} \dot{a}^2$. Los vectores normales son:

$$\eta^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} (\dot{t}, \dot{a}, 0, 0, 0), \quad (2.29)$$

$$n^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} (A_{\pm}^{-1} \dot{a}, A_{\pm} \dot{t}, 0, 0, 0) \quad (2.30)$$

Los términos distintos de cero del tensor de curvatura extrínseca son [5]:

$$K_{\tau\tau}^{\pm} = -\frac{\left(\ddot{a} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\pm}}{\partial a}\right)}{(\dot{a}^2 + A_{\pm})^{\frac{1}{2}}}, \quad y \quad K_{\chi}^{\pm\chi} = K_{\theta}^{\pm\theta} = K_{\phi}^{\pm\phi} = \frac{(\dot{a}^2 + A_{\pm})^{\frac{1}{2}}}{a}, \quad (2.31)$$

Insertando esta información en las condiciones de unión (ecuaciones 2.17-2.19) y asumiendo que el tensor de energía-momento de la brana es diagonal, obtenemos:

$$(\dot{a}^2 + A_-)^{\frac{1}{2}} - (\dot{a}^2 + A_+)^{\frac{1}{2}} = \frac{ka}{3} \left(\rho - \frac{3(\dot{a}^2 + 1)}{k'a^2} \right), \quad \text{y} \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (2.32)$$

La ecuación (2.32) representa la conservación de energía y momento de la brana. Entonces obtenemos, a partir de las ecuaciones anteriores:

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} - \frac{\Lambda^-}{6} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} - \frac{\Lambda^-}{6} - \frac{\alpha}{6M_{(5)}^3} - \frac{2M}{M_{(5)}^3 a^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{M_{(5)}^3} \left(\frac{\rho}{3} - M_{(4)}^2 H^2 \right), \quad (2.33)$$

donde hemos definido:

$$\alpha = (\Lambda^+ - \Lambda^-)M_{(5)}^3, \quad (2.34)$$

Y tomando los siguientes límites:

$$\Lambda^+, \Lambda^- \rightarrow \Lambda \quad \text{y} \quad M_{(5)}^3 \rightarrow \infty, \quad (2.35)$$

obtenemos:

$$\left(\frac{\rho}{3} - M_{(4)}^2 \frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} \right) \left(\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} - \frac{\Lambda}{6} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{12} + \frac{M}{a^4}, \quad (2.36)$$

La ecuación tipo Friedmann de la relación anterior es:

$$\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} \equiv \frac{\rho}{3M_{(4)}^2} \Upsilon \equiv \tilde{\rho}\Upsilon, \quad (2.37)$$

donde Υ está definida mediante la siguiente ecuación:

$$M_{(4)}^4 (1 - \Upsilon)^2 \left(\Upsilon - \frac{\Lambda}{6\tilde{\rho}} \right) = \tilde{\rho}^{-3} \left(\frac{\alpha}{12} + \frac{M}{a^4} \right)^2, \quad (2.38)$$

A niveles clásicos esta ecuación es obtenida de la acción que una brana interactuando con un campo de una 4-forma y propagándose en un espacio-tiempo fijo de fondo con constante cosmológica [5].

2.3. Modelo modificado de Regge-Teitelboim

Consideremos una brana tridimensional dinámica. El volumen de mundo m (3+1)-dimensional, el universo tipo brana, está inmerso en un espacio-tiempo de fondo de Minkowski (4+1)-dimensional con métrica $\eta_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$). Asumiremos que las variables dinámicas son las funciones de embebimiento de m , $X^\mu(x^a)$ donde x^a son las coordenadas del volumen de mundo $a, b = 0, 1, 2, 3$. Construimos la métrica inducida $g_{ab} = \eta_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu := e_a \cdot e_b$ y la curvatura extrínseca como fué definida anteriormente donde $e_a^\mu = \partial_a X^\mu$ son los vectores tangentes a m y n^μ es el campo vectorial normal definido únicamente como $e_a \cdot n = 0$ y $n \cdot n = 1$. Bajo estas condiciones geométricas la acción para una brana 3-dimensional es definida como [13]:

$$S[X] = \int_m d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\alpha}{2} \mathcal{R} - \Lambda + \beta K \right), \quad (2.39)$$

donde \mathcal{R} y K son el escalar de Ricci y el escalar de curvatura extrínseca, respectivamente. En el modelo original de Regge-Teitelboim solo se consideró el primer término en la acción.

Un proceso variacional nos lleva a la ecuación de movimiento

$$\alpha G_{ab}K^{ab} - \beta \mathcal{R} + \Lambda K = 0, \quad (2.40)$$

Para nuestros propósitos consideramos un universo de Friedmann-Robertson-Walker cerrado en un espacio de fondo de Minkowski con métrica $ds_5^2 = -dt^2 + da^2 + a^2 d\Omega_3^2$, donde $d\Omega_3^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2$ es la 3-esfera unitaria. Considerando

$$X^\mu(x^a) = (t(\tau), a(\tau), \chi, \theta, \phi). \quad (2.41)$$

La métrica inducida es la de Friedmann-Robertson-Walker:

$$ds_4^2 = -N^2 d\tau^2 + a^2 d\Omega_3^2, \quad (2.42)$$

donde $N^2 = \dot{t}^2 - \dot{a}^2$ y $a(\tau)$ es el factor de escala. El vector normalizado a m está dado por:

$$n^\mu = \frac{1}{N}(\dot{a}, \dot{t}, 0, 0, 0). \quad (2.43)$$

Esta configuración geométrica nos lleva a:

$$\mathcal{R} = \frac{6\dot{t}}{N^4 a^2} a \ddot{a} \dot{t} - a \ddot{a} \dot{t} + N^2 \dot{t}, \quad (2.44)$$

$$K = \frac{1}{N^3} \dot{t} \ddot{a} - \dot{a} \ddot{t} + \frac{3\dot{t}}{aN} \quad (2.45)$$

De la ecuación (2.40) tenemos la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) + \frac{N^2 \dot{t}^2 - 3\bar{\Lambda} N^2 a^2 + 6\bar{\beta} N a \dot{t}}{a \dot{t} 3 \dot{t}^2 - \bar{\Lambda} N^2 a^2 + 6\bar{\beta} N a \dot{t}} = 0, \quad (2.46)$$

donde hemos introducido la notación $\bar{\Lambda}^2 := \frac{\Lambda}{3\alpha}$ y $\bar{\beta} := \frac{\beta}{3\alpha}$.

Para poder escribir la acción S en analogía con la mecánica analítica, sustituimos primero (2.44) y (2.45) en (2.39), entonces después de la integración sobre las coordenadas espaciales la acción se reduce a $S = 6\pi^2 \int d\tau L$ donde la función lagrangiana se lee:

$$L = \frac{a\dot{t}}{N^3} (a \ddot{a} \dot{t} - a \dot{a} \ddot{t} + N^2 \dot{t}) - N a^3 \bar{\Lambda}^2 + \frac{a^3 \bar{\beta}}{N^2} (\dot{t} \ddot{a} - \dot{a} \ddot{t}) + 3a^2 \bar{\beta} \dot{t}. \quad (2.47)$$

Notemos una dependencia lineal en la aceleración de las coordenadas $a(\tau)$ y $t(\tau)$. Inferimos [12] que la configuración del espacio es dada por $\{t, a, \dot{t}, \dot{a}\}$. Ciertamente, L puede ser descompuesta como $L = L_b + L_d$ donde

$$L_b = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{a^2 \dot{a}}{N} + a^3 \bar{\beta} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \right), \quad (2.48)$$

y

$$L_d = -\frac{a\dot{a}^2}{N} + aN (1 - a^2 \bar{\Lambda}^2) + 3a^2 \bar{\beta} \left[\dot{t} - \dot{a} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \right], \quad (2.49)$$

L_b denota un término lagrangiano de frontera que no produce dinámica, de manera que podemos quitarlo sin afectar las ecuaciones de movimiento. Para propósitos hamiltonianos esta estrategia no es adecuada a veces si queremos obtener restricciones cuadráticas en los momentos a menos que introduzcamos variables de campo auxiliares que extiendan el análisis canónico [15] [16] [17] [18] [19]. Afortunadamente, desde el punto de vista de una derivada de segundo orden, una prescripción robusta se mantiene intacta en el lagrangiano (2.47) [20].

2.4. Modelo generalizado de Regge-Teitelboim

Ahora consideraremos la siguiente acción para el modelo generalizado de Regge-Teitelboim en el que se introduce un término proporcional a la tercera potencia de la curvatura extrínseca que produce ecuaciones de movimiento que son de segundo orden:

$$S[X] = \int_m d^4\xi \sqrt{-g} \left(\frac{\alpha}{2} R - \Lambda + \beta K + \delta (K^3 - 3K K_{ab} K^{ab} + 2K_a^b K_b^c K_c^a) \right), \quad (2.50)$$

donde R y K denotan el escalar de Ricci y el escalar de curvatura extrínseca respectivamente, g es el determinante de la métrica inducida, α, β, δ son constantes y Λ es la constante cosmológica. La simetría principal de la función lagrangiana es su invariancia bajo reparametrizaciones de m . Tomando a las funciones de embebimiento como las variables dinámicas, las ecuaciones de movimiento son:

$$\alpha G_{ab} K^{ab} - \beta R + \Lambda K + \delta J_{ab} K^{ab} = 0, \quad (2.51)$$

donde G_{ab} es el tensor de Einstein del volumen de mundo y $J_{ab} = g_{ab} (K^3 - 3K K_{ab} K^{ab} + 2K_a^b K_b^c K_c^a) + 3R K_{ab} + 6K K_{ac} K_b^c - 6K_{ac} K_d^c K_b^d$. Las ecuaciones de movimiento resultantes son de segundo orden en derivadas de X^μ , aún cuando en la acción (2.50) tenemos cantidades que involucran segundas derivadas a través de R y K . La característica anterior surge de la estructura de la acción y por lo tanto pertenece a una clase de acciones generales conocidas como las acciones de Lovelock [21]. La integración de la ecuación de movimiento (2.51) dá como resultado la energía del sistema. La primera integral resulta ser precisamente la ecuación generalizada de Friedmann. A continuación procederemos a su cálculo explícito por medio del uso de la siguiente corriente conservada

$$f^{a\mu} = (\alpha G^{ab} + \beta S^{ab} + \Lambda g^{ab} + \delta J^{ab}) e_b^\mu, \quad (2.52)$$

en el sentido de

$$\nabla_a f^{a\mu} = 0, \quad (2.53)$$

donde $S_{ab} := K_{ab} - K g_{ab}$. A partir de la corriente anterior es posible calcular el momento conjugado por medio de la siguiente relación

$$\Pi_\mu = \sqrt{h} \eta_a f_\mu^a, \quad (2.54)$$

donde h es el determinante de la métrica tipo espacial de la hipersuperficie y η_a es su vector normal. La componente temporal del momento es la energía de la brana vista desde el espacio de fondo. El resultado anterior es la ecuación clave para determinar la evolución de este tipo de universos.

3. Cosmología cuántica

3.1. Cosmología cuántica estándar

En el inicio del universo es relevante conocer los efectos cuánticos. La cosmología cuántica trata al universo de manera cuántica como un todo, descrito por una función de onda (en lugar de un clásico espacio-tiempo clásico) obtenida mediante la ecuación de Wheeler-DeWitt. Esta aproximación cuántica se desarrolló por DeWitt hace ms de 25 años y ha atraído bastante interés. La idea es que un universo pequeño y cerrado, se puede nuclear de la "nada"; con "nada" nos referimos a ausencia de materia, de espacio y de tiempo.

La función de onda del universo $\psi [h_{ij}(x), \phi(x)]$, está definida sobre el superespacio, el cual es el espacio de todas las 3-métricas $h_{ij}(x)$ y configuraciones de campos de materia $\phi(x)$.

El desarrollo de la cosmología cuántica se originó en trabajos sobre la formulación Hamiltoniana en relatividad general en los años 1960's por R. Arnowitt, A. Wheeler, B. S. DeWitt y S. Deser [22]. Después, C. W. Misner y sus colaboradores comenzaron a construir una función de onda del universo. A finales de los años 1970's, S. W. Hawking utilizó la integral de trayectoria para construir la función de onda y posteriormente junto con J. B. Hartle [23] hicieron una propuesta para las condiciones de frontera de dicha función.

En los años 1980's A. Vilekin [7] propuso la idea de crear un universo por tunelamiento (de la nada) cuántico con su correspondiente condición de frontera.

3.2. Modelo cosmológico cuántico cuatridimensional

Consideramos que el universo de Friedmann-Robertson-Walker es homogéneo, isótropo, cerrado y regido mediante la siguiente acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - \rho_{vac}), \quad (3.1)$$

donde $R = 6(a^{-2} + a^{-2}\dot{a}^2 + a^{-1}\ddot{a})$, y ρ_{vac} es la densidad de energía del vacío, lo cual implica que

$$S = 2\pi^2 \int (a - a\dot{a}^2 - \Lambda a^3) dt, \quad (3.2)$$

con $\Lambda = \rho_{vac}$, así

$$S = 2\pi^2 \int \left(a - a\dot{a}^2 + \frac{d(a^2\dot{a})}{dt} - \Lambda a^3 \right) dt, \quad (3.3)$$

pero

$$\int L dt = \int \left(L + \frac{dF}{dt} \right) dt, \quad (3.4)$$

por lo que

$$S = 2\pi^2 \int (a - a\dot{a}^2 - \Lambda a^3) dt, \quad (3.5)$$

y la función lagrangiana es

$$L = 2\pi^2 [a (1 - a^{-2} - \Lambda a^2)], \quad (3.6)$$

y el momento conjugado es:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -4\pi^2 a \dot{a}. \quad (3.7)$$

Como el hamiltoniano es $H = p_a \dot{a} - L$, entonces tiene la siguiente forma:

$$H = -2\pi^2 a (\dot{a}^2 - 1 + \Lambda a^2), \quad (3.8)$$

pero por conservación de energía, $H = 0$, por lo que $\dot{a}^2 - 1 + \Lambda a^2 = 0$, la cual es una ecuación de Friedmann. De aquí, haciendo el álgebra, obtenemos que;

$$t = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \left[\ln \left(\sqrt{\Lambda} a + \sqrt{\Lambda a^2 - 1} \right) \right], \quad (3.9)$$

pero como $\ln \left(\sqrt{\Lambda} a + \sqrt{\Lambda a^2 - 1} \right) = \cosh(x)$, tenemos

$$a = \frac{\cosh(t)}{\sqrt{\Lambda}}, \quad (3.10)$$

con lo cual obtenemos un espacio de de Sitter.

Sustituyendo $\dot{a}^2 = \frac{p_a^2}{(4\pi^2)^2 a^2}$ en el hamiltoniano, obtenemos

$$H = -2\pi^2 \left(-\frac{1}{2\pi^2} \frac{p_a^2}{(4\pi^2)^2 a^2} - a + \Lambda a^2 \right). \quad (3.11)$$

Para cuantizar el hamiltoniano (3.11), sustituimos el momento p_a^2 por el operador cuántico de momento $i \frac{\partial}{\partial a}$ e identificamos el resto con un operador de energía potencial U , con lo que obtenemos la siguiente ecuación

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} + 32\pi^4 a^2 (\Lambda a^2 - 1) \right] \psi(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + U \right) \psi(a) = 0. \quad (3.12)$$

La cual es conocida como la ecuación de Wheeler-DeWitt.

4. Cosmología cuántica de universos tipo brana

Las ecuaciones de Friedmann proporcionan la dinámica del factor de escala cósmica, con lo que podemos deducir la evolución del universo, su expansión, etc. También podemos ver hacia el pasado, con lo que podemos formular diversas hipótesis sobre el origen del mismo. Esto ha llevado a la comunidad científica a pensar en la teoría de la gran explosión y a ser ésta la más aceptada hasta la actualidad.

Al pensar así, creemos que antes de la gran explosión, nuestro universo se podía describir en forma análoga al de una partícula cuántica sometida a un potencial obtenido de la acción que rige a nuestro universo visto como una brana.

En cosmología de branas hay una región clásicamente desconectada conocida como la época embrionaria del universo y además las condiciones de frontera son más claras. Esto ha llevado a buscar técnicas alternativas para estudiar los efectos cuánticos en la cosmología de branas.

La sugerencia de que nuestro universo puede ser una superficie de 3+1 dimensiones [13] inmerso en un espacio tiempo de mayores dimensiones fue propuesta por Regge y Teitelboim [24] hace algún tiempo, motivados por la idea de que la gravitación puede ser descrita en un punto o cuerda, como el volumen de mundo barrido por el movimiento de una brana espacial de tres dimensiones embebida en un espacio-tiempo de fondo de mayores dimensiones. Algunos años después Rubakov y Shaposhnikov [25] propusieron que nuestro universo puede ser un defecto topológico inmerso en un espacio tiempo de fondo extradimensional. Los modelos de mundo de brana BWS (por sus siglas en inglés -Brane World Scenario-) es una alternativa, junto a la relatividad general de cuatro dimensiones, para entender el nacimiento y evolución del universo [5].

Basado en la propuesta de que nuestro universo puede ser visto como un objeto de cuatro dimensiones inmerso en un espacio-tiempo de N dimensiones ($N > 4$), la idea física principal detrás de los BWS es que los campos de materia están confinados en un espacio de tres dimensiones (brana) mientras que campos gravitacionales están presentes en espacios de dimensiones mayores (espacio de fondo), donde la gravitación puede viajar en las dimensiones extra. Los BWS además de resolver el problema de la jerarquía han sido aplicados a una gama amplia de situaciones como energía o materia oscura, e inflación. En el contexto de cosmología hay predicciones de estas ideas que podrían ser comprobadas por observaciones astronómicas. Esto constituye una de las varias razones por las cuales los BWS son tan atractivos.

En los BWS la gravitación en una brana se recupera compactando las dimensiones extra o introduciendo un espacio-tiempo de fondo del tipo Anti de Sitter (AdS). Sin embargo, Dvali, Gabadadze y Porrati (DGP) [26], mostraron que incluso en un espacio de fondo asintótico de Minkowski, la gravitación cuatridimensional se recupera sí un término de curvatura de la brana es incluido en la acción. La propuesta de DGP considera simetría Z_2 bajo reflexiones respecto a la brana y se obtiene una

gravidad cuatridimensional a escalas pequeñas, y de cinco dimensiones en escalas mayores. Es importante notar que la simetría bajo reflexiones no es la única posibilidad en estos modelos, por ejemplo, cuando la brana está acoplada a un campo de una 4-forma, o para casos antisimétricos. De hecho, Brown y Teitelboim [27] trabajaron el proceso de creación de membranas por un campo antisimétrico motivada por el proceso de Schwinger [5] para la creación de pares en presencia de un campo eléctrico. Cabe remarcar que en estos trabajos no se incluyeron los términos de curvatura de la brana.

En esta sección estudiamos la cuantización canónica del modelo de Regge y Teitelboim. Empezamos escribiendo las clásicas restricciones en operadores, definidas sobre un dominio común en un espacio de Hilbert.

4.1. Formulación hamiltoniana

Comenzaremos con la siguiente acción:

$$S = \frac{M_{(4)}^2}{2} \int_m d^4x \sqrt{-g} (R - \Lambda_b) + \frac{k_2}{4!} \int_m d^4x \sqrt{-g} A_{ABCD} \epsilon^{ABCD}, \quad (4.1)$$

donde R es el escalar de Ricci de volumen de mundo m , $k_1 = M_{(4)}^2$ y $\Lambda_b = \frac{2\rho}{M_{(4)}^2}$ y hemos tomado el lagrangiano de [13].

Definimos los siguientes momentos:

$$P_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\frac{a^2 \dot{a}}{N^3} (\dot{t} + Na\bar{\beta}), \quad (4.2)$$

$$P_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{a^2 \dot{t}}{N^3} (\dot{t} + Na\bar{\beta}), \quad (4.3)$$

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{a\dot{t}}{N^3} (\dot{a}^2 + N^2 [1 - a^2 \bar{\Lambda}^2] + 3Na\bar{\beta}) := -\Omega, \quad (4.4)$$

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \right) = -\frac{a\dot{a}}{N^3} (\dot{a}^2 + N^2 [1 - a^2 \bar{\Lambda}^2] + 3Na\bar{\beta}), \quad (4.5)$$

siendo (4.5) y (4.6) los momentos conjugados de las variables de posición $[t, a]$. Es conveniente mencionar que p_i no es afectado por el término lagrangiano de superficie, por que no es más que la energía conservada del espacio de fondo que parametriza la desviación del límite de Einstein cuando $\beta \rightarrow 0$. El momento p_a está compuesto de dos contribuciones, $p_a = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_a$. El momento \mathbf{p}_a es asociado a la teoría dinámica equivalente definida por (2.49) y \mathbf{p}_a es el momento relativo a la función lagrangiana de frontera (2.48) [28], [29]. Explícitamente están dados por:

$$\mathbf{p}_a = -\frac{a\dot{a}}{N^3} [\dot{a}^2 + N^2 (3 - a^2 \bar{\Lambda}^2)] - 3a^2 \bar{\beta} \left[\frac{\dot{a}\dot{t}}{N^2} + \operatorname{arctanh} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \right], \quad (4.6)$$

$$\mathbf{p}_a = \frac{2a\dot{a}}{N} + 3a^2 \bar{\beta} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right). \quad (4.7)$$

En este sentido, $p_t = \mathbf{p}_t$. Para el siguiente análisis es crucial mantener a p_a en términos de dos piezas (4.6) y (4.7).

El hamiltoniano canónico que define el espacio fase apropiado está dado por la construcción de Ostrogradski [30], [31]

$$H_0 = P \cdot \ddot{X} + p \cdot \dot{X} - L, \\ = p \cdot \dot{X} + N \left(a^3 \bar{\Lambda}^2 - \frac{1}{a^3} N^2 P^2 + \bar{\beta}^2 a^3 - \bar{\beta} a^2 \frac{\dot{t}}{N} \right). \quad (4.8)$$

La definición de los momentos (4.2) y (4.3) nos dan dos primeras restricciones lineales en los momentos

$$\phi_1 = P_t + \frac{a^2 \dot{a}}{N^3} (\dot{t} + Na\bar{\beta}) \approx 0, \quad (4.9)$$

$$\phi_2 = P_a - \frac{a^2 \dot{t}}{N^3} (\dot{t} + Na\bar{\beta}) \approx 0 \quad (4.10)$$

que pueden ser escritas en la forma compacta $\phi_\mu = \mathbf{P}_\mu - \frac{a^2(\dot{t} + \bar{\beta}Na)}{N^2} n_\mu$. Aquí, el símbolo \approx se refiere a una igualdad débil en el esquema de Dirac para sistemas restringidos. Proyectando ϕ_μ sobre el vector velocidad y también sobre el vector unitario normal a m a un tiempo fijo, podemos obtener unas restricciones más adecuadas

$$\varphi_1 = P_t \dot{t} + P_a = P \cdot X \approx 0, \quad (4.11)$$

$$\varphi_2 = N (P \cdot n) - \frac{a^2}{N} (\dot{t} + \bar{\beta}Na) \approx 0. \quad (4.12)$$

Este hecho es fundamentado bajo una relación existente de completéz en la geometría de deformaciones para branas, $\eta^{\mu\nu} = n^\mu n^\nu - \eta^\mu \eta^\nu + h^{AB} \varepsilon_A^\mu \varepsilon_B^\nu$. Así que el hamiltoniano total es $H_T = H_0 + u^1 \phi_1 + u^2 \phi_2$ donde $u^{1,2}$ son multiplicadores de Lagrange que hacen que se cumplan (4.11) y (4.12). Aparentemente, en H_0 la dependencia lineal del momento p_μ nos lleva a la llamada inestabilidad de Ostrogradski [32] que nos forza a la manifestación de grados de libertad fantasmas. Usando el paréntesis extendido de Poisson (PB) entre dos funciones del espacio de fase, f y g

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial p_t} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial g}{\partial p_a} + \frac{\partial f}{\partial \dot{t}} \frac{\partial g}{\partial P_t} + \frac{\partial f}{\partial \dot{a}} \frac{\partial g}{\partial P_a} - (f \leftrightarrow g), \quad (4.13)$$

como se necesita para una teoría en derivadas de segundo orden, obtenemos que las restricciones secundarias son generadas por las relaciones de consistencia $\dot{\varphi}_{1,2} = \{\varphi_{1,2}, H_T\} \approx 0$. Así obtenemos dos restricciones secundarias

$$\varphi_3 = H_0 \approx 0, \quad (4.14)$$

$$\varphi_4 = p_t \dot{a} + p_a \dot{t} = N (p \cdot n) \approx 0. \quad (4.15)$$

No hay restricciones terciarias. La información física relevante es obtenida cuando las restricciones primarias y secundarias son separadas en restricciones de primera y segunda clase, $\mathfrak{F}'s$ y $\ell's$ respectivamente. En nuestro caso tenemos

$$\mathfrak{F}_1 = P \cdot X \approx 0, \quad (4.16)$$

$$\mathfrak{F}_2 = \left(\frac{N\Theta}{a^2\Phi} \right) \varphi_2 + H_0 \approx 0, \quad (4.17)$$

$$\ell_1 = \varphi_2 \approx 0, \quad (4.18)$$

$$\ell_2 = \varphi_4 \approx 0, \quad (4.19)$$

donde $\Theta := N^2\Omega + 2N\bar{\Lambda}^2 a^3 \dot{t} - 3\bar{\beta} a^2 \dot{t}^2$ y $\Phi := 3\dot{t}^2 - N^2 a^2 \bar{\Lambda}^2 + 6\bar{\beta} a \dot{t}$. Notemos que imponiendo la condición (4.18), el hamiltoniano total H_T es reemplazado entonces por el hamiltoniano de primera clase

$$H = \mathfrak{F}_2 + u^1 \mathfrak{F}_1. \quad (4.20)$$

De hecho, la evolución precedida por H_T y H es la misma [33]. Para completar nuestra aproximación debemos reemplazar el paréntesis de Poisson con el paréntesis de Dirac (DB), definido como

$$\{f, g\}^* := \{f, g\} - \{f, \ell_i\} \ell_{ij}^{-1} \{\ell_j, g\}, \quad (4.21)$$

donde ℓ_{ij}^{-1} denota a los elementos de la matriz inversa de las restricciones de segunda clase $\ell_{ij} := \{\ell_i, \ell_j\}$, ($i, j = 1, 2$). Explícitamente

$$(\ell_{ij}) = -\frac{a\Phi}{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

En vista del método de restricciones de Dirac, debemos considerar que las restricciones de segunda clase desaparezcan, lo cual nos ayuda a eliminar la parte proporcional a φ_2 [34] en (4.17), llevandonos a una expresión más simple para \mathfrak{F}_2 . El conteo de los grados de libertad (dof) es el siguiente [33]: dof=[8 - 2 x 2-2]/2=1. Este grado de libertad corresponde al factor de escala cósmico $a(\tau)$.

Para el álgebra de restricciones de primera clase, el paréntesis de Dirac entre \mathfrak{F}_1 y el reducido \mathfrak{F}_2 se lee

$$\{\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_j\}^* = -\epsilon_{ij} \mathfrak{F}_2, \quad i, j = 1, 2, \quad (4.23)$$

con ϵ_{ij} el símbolo de Levi-Civita tal que $\epsilon_{12} = 1$. Esta expresión nos sugiere introducir la notación $L_0 := \mathfrak{F}_1$ y $L_1 := \mathfrak{F}_2$. La relación (4.23) se transforma entonces en

$$\{L_m, L_n\}^* = (m - n) L_{m+n}, \quad m = 0, \quad n = 1; \quad (4.24)$$

que caracteriza una álgebra truncada de Virasoro [35], [36], [37]. Podemos decir, basados en algunos modelos recientemente estudiados [15], [28], [29], que ésta es una simetría heredada por todos los lagrangianos de branas de Lovelock caracterizados por una dependencia lineal en la aceleración de la brana.

4.2. Transformaciones canónicas y norma fija

Para obtener restricciones cuadráticas en el momento necesitamos reexpresar el conjunto de restricciones (3.31-3.34) de una manera conveniente.

Para hacer esto, consideramos la siguiente transformación canónica (CT) [29], [30]

$$N := \sqrt{\dot{t}^2 - \dot{a}^2}, \quad (4.25)$$

$$\Pi_N := \frac{1}{N} (P \cdot \dot{X}), \quad (4.26)$$

$$\nu := - \left[N (P \cdot n) - \frac{a^2}{N} (\dot{t} + \bar{\beta} N a) \right], \quad (4.27)$$

$$\Pi_\nu := \operatorname{arctanh} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right), \quad (4.28)$$

junto con las transformaciones $X^\mu = X^\mu$ y $\mathbf{p}_\mu = p_\mu - \mathbf{p}_\mu$. Esta transformación canónica preserva la estructura del paréntesis de Poisson en el siguiente sentido

$$\{N, \Pi_N\} = 1 = \{\nu, \Pi_\nu\} \quad \text{y} \quad \{X^\mu, \mathbf{p}_\mu\} = \delta_\nu^\mu. \quad (4.29)$$

Esta condición de frontera dicta que el vector velocidad puede ser escrito como

$$\dot{X}^\mu = N (\cosh \Pi_\nu, \sinh \Pi_\nu, 0, 0, 0), \quad (4.30)$$

mientras que los momentos (3.19) y (3.20) se convierten en

$$\mathbf{p}_t = a [\sinh^2 P i_\nu + (1 - a^2 \bar{\Lambda}^2) + 3\bar{\beta} \cosh \Pi_\nu] \cosh \Pi_\nu = -\Omega, \quad (4.31)$$

$$p_a = -a [\sinh^2 P i_\nu + (1 - a^2 \bar{\Lambda}^2) + 3\bar{\beta} \cosh \Pi_\nu] \sinh \Pi_\nu = a [\sinh^2 P i_\nu + (1 - a^2 \bar{\Lambda}^2) + 3\bar{\beta} \cosh \Pi_\nu] = \Omega \tanh \Pi_\nu, \quad (4.32)$$

ó, en una forma más compacta

$$p_\mu = \Omega (-1, \tanh \Pi_\nu, 0, 0, 0). \quad (4.33)$$

Los momentos (3.21) y (3.22) se convierten en

$$\mathbf{p}_a = \left\{ -a [\sinh^2 \Pi_\nu + (3 - a^2 \bar{\Lambda}^2)] - 3\bar{\beta} a^2 \cosh \Pi_\nu \right\} \sinh \Pi_\nu - 3\bar{\beta} a^2 \Pi_\nu, \quad (4.34)$$

$$p_a = 2a \sinh \Pi_\nu + 3\bar{\beta} a^2 \Pi_\nu. \quad (4.35)$$

Falta expresar los momentos (3.17) y (3.18) en términos de las nuevas variables del espacio de fase.

Por completez

$$\begin{aligned} P_t &= \Pi_N \cosh \Pi_\nu + \frac{1}{N} (\nu - \bar{\beta} a^3 - a^2 \cosh \Pi_\nu) \sinh \Pi_\nu \\ P_a &= -\Pi_N \sinh \Pi_\nu - \frac{1}{N} (\nu - \bar{\beta} a^3 - a^2 \cosh \Pi_\nu) \cosh \Pi_\nu. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ahora podemos escribir las restricciones de primera clase de la manera siguiente

$$\mathfrak{F}_1 = N \Pi_N, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2 &= N \left[\mathbf{p}_t \cosh \Pi_\nu + (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_a) \sinh \Pi_\nu + a^3 \bar{\Lambda}^2 + \frac{1}{a^3} N^2 \Pi_N - a \cosh^2 \Pi_\nu \right] - \\ &\quad - N \left[3\bar{\beta} a^2 \cosh \Pi_\nu - \frac{1}{a^3} \nu (\nu - 2a^2 \cosh \Pi_\nu - 2\bar{\beta} a^3) \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde hemos utilizado la relación $N^2 P^2 = -\left(P \cdot \dot{X}\right)^2 + N^2 (P \cdot n)^2$ [30] junto con las ecuaciones (3.40-3.43). Similarmente para las restricciones de segunda clase tenemos

$$\ell_1 = \nu, \quad (4.39)$$

$$\ell_2 = N \left(\mathbf{p}_a - 2a \sinh \Pi_\nu - 3\bar{\beta} a^2 \Pi_{nu} \right) \cosh \Pi_\nu. \quad (4.40)$$

Observamos inmediatamente que ℓ_2 se reduce a la definición de momento que nos dá el lagrangiano (2.48).

El hecho de que tenemos dos restricciones de primera clase nos dice que tenemos la libertad de escoger dos condiciones de norma. Imponemos la llamada *norma cósmica*

$$C_1 = N - 1 \approx 0, \quad (4.41)$$

y

$$C_2 = \cosh \Pi_\nu - \sqrt{\gamma} a \bar{\Lambda} \approx 0, \quad (4.42)$$

donde $\gamma \equiv \gamma(a)$. Para la expresión de C_2 y la definición del momento p_t , vemos que γ debe obedecer la siguiente ecuación

$$\gamma \left(\gamma - 1 + 3\sqrt{\gamma} \frac{\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}} \right)^2 = \frac{\Omega^2}{a^8 \bar{\Lambda}^6}. \quad (4.43)$$

Incluir la función $\gamma(a)$ será de ayuda para introducir la energía conservada Ω dentro de nuestra aproximación cuántica. Esta condición de norma es totalmente equivalente a la expresión $\sqrt{\dot{a}^2 + N^2} - \sqrt{\gamma} N a \bar{\Lambda} = 0$ donde hemos usado la componente temporal de (3.45) y la nueva variable canónica N dada por (3.40). Las relaciones (3.56) y (3.57) fijan completamente la libertad de norma asociada a la invariancia bajo reparametrizaciones. Estas condiciones de norma son suficientemente buenas, ya que la matriz cuadrada ($\{C_{1,2}, \mathfrak{F}_{1,2}\}$) resulta no degenerada en la superficie restringida. De hecho, tomando ventaja de que la estructura simpléctica definida en la ecuación (3.24) se mantiene cuando es evaluada con respecto a las nuevas variables canónicas (3.40-3.43) junto con X^μ y \mathbf{p}_μ , tenemos

$$\{C_1, \mathfrak{F}_1\} = C_1 + 1, \quad \{C_1, \mathfrak{F}_2\} = 0, \quad (4.44)$$

$$\{C_2, \mathfrak{F}_1\} = 0, \quad \{C_2, \mathfrak{F}_2\} = G(a, N, \nu, \Pi_\nu), \quad (4.45)$$

donde G es una función que no se anula. Esta función está dada por la relación $G(a, N, \nu, \Pi_\nu) := \left[\frac{2}{a^3} (\nu - a^2 \cosh \Pi_\nu - \bar{\beta} a^3) - \bar{\Lambda} \left(\sqrt{\gamma} + \frac{a}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \gamma}{\partial a} \right) \right] N \sinh \Pi_\nu$. La condición $\det(\{C_i, \mathfrak{F}_j\}) \neq 0$ con $i, j = 1, 2$, es satisfecha. El punto clave ahora es expresar los momentos \mathbf{p}_t y \mathbf{p}_a en términos de condiciones de norma fijas. De las ecuaciones (3.46), (3.47) tenemos

$$\mathbf{p}_t = a \left[\sinh^2 \Pi_\nu + (1 - a^2 \bar{\Lambda}^2) + 3\bar{\beta} a \cosh \Pi_\nu \right] \cosh \Pi_\nu, \quad (4.46)$$

$$- (\mathbf{p}_a + 3\bar{\beta} a^2 \Pi_\nu) = a \left(\cosh^2 \Pi_\nu - a^2 \bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta} a \cosh \Pi_\nu \right) \sinh \Pi_\nu. \quad (4.47)$$

Ahora, considerando la condición de norma (3.57) tenemos

$$\cosh \Pi_\nu = \frac{\mathbf{p}_t}{a \left[(\gamma - 1) a^2 \bar{\Lambda}^2 + 3\bar{\beta} \sqrt{\gamma} a^2 \bar{\Lambda} \right]}, \quad (4.48)$$

$$\sinh \Pi_\nu = \frac{(\mathbf{p}_a + 3\bar{\beta}a^2\Pi_\nu)}{a[(\gamma - 1)a^2\bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta}\sqrt{\gamma}a^2\bar{\Lambda}]} \quad (4.49)$$

Cuando insertamos estas expresiones en las restricciones (3.52) y (3.53), estas se convierten en

$$\chi_1 = N\Pi_N, \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \chi_2 = & -\frac{N}{a[(\gamma - 1)a^2\bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta}\sqrt{\gamma}a^2\bar{\Lambda}]} (p_a + 3\bar{\beta}a^2\Pi_\nu)^2 + \\ & + \frac{N}{a[(\gamma - 1)a^2\bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta}\sqrt{\gamma}a^2\bar{\Lambda}]} \left(a \frac{p_t^2}{a[(\gamma - 1)a^2\bar{\Lambda}^2 + 3\bar{\beta}\sqrt{\gamma}a^2\bar{\Lambda}]} \right) + \\ & + \frac{N}{a[(\gamma - 1)a^2\bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta}\sqrt{\gamma}a^2\bar{\Lambda}]} a \left(\frac{1}{a^3} N^2 \Pi_N^2 + 2a(\gamma a^2 \bar{\Lambda}^2 - 1) \right) - \\ & - \frac{N}{a[(\gamma - 1)a^2\bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta}\sqrt{\gamma}a^2\bar{\Lambda}]} a ((\gamma - 1)a^3\bar{\Lambda}^2 - 3\bar{\beta}a^3\sqrt{\gamma}\bar{\Lambda}) [(\gamma - 1)a^2\bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta}\sqrt{\gamma}a^2\bar{\Lambda}] \quad (4.51) \end{aligned}$$

donde en χ_2 se refleja una dependencia cuadrática en el momento de la teoría. Siguiendo el formalismo de Dirac para sistemas restringidos, una vez que fijamos la libertad de norma, nos quedamos con un sistema puramente de segunda clase ($\chi_1, \chi_2, \chi_3 := \ell_1, \chi_4 := \ell_2$). Estas restricciones de segunda clase son simples identidades expresando algunas variables dinámicas en términos de otras y todas las ecuaciones de la teoría formulada en términos de los paréntesis de Dirac. Hemos aprendido que una transformación canónica resuelve el problema de obtener una forma apropiada de cuantización. Notemos que logramos remover la inestabilidad de Ostrogradski removiendo estructuras asociadas a términos de mayor orden.

De acuerdo con la definición de el paréntesis de Dirac tenemos

$$\{N, \Pi_N\}^* = \{a, \mathbf{p}_a\}^* = 1 \quad \text{y} \quad \{\nu, \Pi_N\}^* = 0. \quad (4.52)$$

El hecho de que $\{\nu, \Pi_N\}^* = 0$ nos dice que el par (ν, Π_ν) no describe un grado de libertad físico verdadero, pues el álgebra asociada resultante con el sector $(N, \Pi_N, t, \mathbf{p}_t, \dot{a}, \mathbf{p}_a)$ de la teoría, es cerrado bajo paréntesis de Dirac [38].

4.3. Cuantización de la formulación hamiltoniana para branas

La transición al esquema de la mecánica cuántica se manejará de la manera estándar. La estructura del paréntesis de Dirac es reemplazada con un conmutador. Así, la regla de correspondencia $i\{\widehat{A}, \widehat{B}\}^* = [\hat{A}, \hat{B}]$ para dos operadores cuánticos \hat{A} y \hat{B} (ordenando el factor módulo y $\hbar = 1$) con ν y Π_ν reemplazados por el operador cero, nos arroja una teoría satisfactoria en la cual los pares canónicos (N, Π_ν) , (t, \mathbf{p}_t) y (a, \mathbf{p}_a) se promueven a operadores cuánticos no triviales. Ahora podemos cuantizar de forma canónica nuestro modelo y, de acuerdo al procedimiento usual

$$\mathbf{p}_t \longrightarrow \hat{\mathbf{p}}_t = -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.53)$$

$$\mathbf{p}_a \longrightarrow \hat{\mathbf{p}}_a = -i \frac{\partial}{\partial a}, \quad (4.54)$$

$$\Pi_N \longrightarrow \hat{\Pi}_N = -i \frac{\partial}{\partial N}. \quad (4.55)$$

Con esta prescripción podemos forzar de manera consistente nuestras restricciones como ecuaciones de operadores. El hamiltoniano (3.35) compuesto ahora por las restricciones de segunda clase χ_1 y χ_2 , es el que debemos cuantizar. Los estados físicos, Ψ , para nuestro sistema restringido son aquellos aniquilados por las siguientes ecuaciones:

$$\widehat{\chi}_1 \Psi = 0, \quad (4.56)$$

$$\widehat{\chi}_2 \Psi = 0. \quad (4.57)$$

Aquí, por simplicidad escogeremos un factor de orden trivial que nos permitirá eliminar el denominador de (3.66).

Insertando (3.68-3.70) en (3.65, 3.66), y que actúan en Ψ obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\widehat{\chi}_1 \Psi = -iN \frac{\partial \Psi}{\partial N} = 0, \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_2 \Psi = & \frac{N}{a [(\gamma - 1) a^2 \bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta} \sqrt{\gamma} a^2 \bar{\Lambda}]} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} \right) - \\ & - \frac{N}{a [(\gamma - 1) a^2 \bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta} \sqrt{\gamma} a^2 \bar{\Lambda}]} \left(a \frac{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}{a [(\gamma - 1) a^2 \bar{\Lambda}^2 + 3\bar{\beta} \sqrt{\gamma} a^2 \bar{\Lambda}]} \right) - \\ & - \frac{N}{a [(\gamma - 1) a^2 \bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta} \sqrt{\gamma} a^2 \bar{\Lambda}]} a \left(\frac{1}{a^3} N^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial N^2} + 2a (\gamma a^2 \bar{\Lambda}^2 - 1) \Psi \right) + \\ & + \frac{N}{a [(\gamma - 1) a^2 \bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta} \sqrt{\gamma} a^2 \bar{\Lambda}]} a ((\gamma - 1) a^3 \bar{\Lambda}^2 - 3\bar{\beta} a^3 \sqrt{\gamma} \bar{\Lambda}) [(\gamma - 1) a^2 \bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta} \sqrt{\gamma} a^2 \bar{\Lambda}] \Psi \end{aligned} \quad (4.59)$$

La ecuación (3.73) nos dice que los estados físicos Ψ no tienen dependencia de N . Consecuentemente, nos quedamos con la ecuación (3.74) que resulta ser la ecuación tipo Schrödinger que estábamos buscando.

Asumimos entonces que Ψ es representada en una manera usual como $\Psi(a, t) := \psi(a) e^{-i\Omega t}$ de acuerdo con la definición clásica de Ω .

Sustituyendo Ψ en (3.74), después de un largo cálculo, y eliminando el término exponencial, notamos que $\psi(a)$ satisface la ecuación tipo Wheeler-DeWitt:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial a^2} + U(a) \right] \psi(a) = 0, \quad (4.60)$$

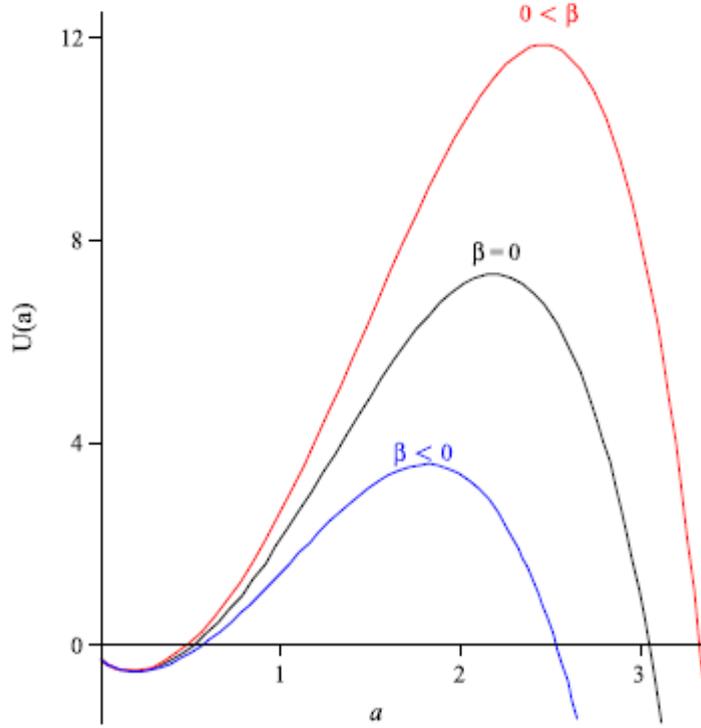


Figura 3: Gráfica del comportamiento del potencial tipo WDW para valores positivos, negativos de β y $\beta = 0$

Que parece una ecuación de Schrödinger con energía cero y con el potencial cuántico:

$$U(a) = a^2 [(\gamma - 1)a^2 \bar{\Lambda}^2 + 2 + 3\bar{\beta}\sqrt{\gamma}a^2 \bar{\Lambda}]^2 (1 - \gamma a^2 \bar{\Lambda}^2), \quad (4.61)$$

donde la función γ es la obtenida de (3.58). Nos aproximamos al límite de la brana geodesica cuando $\beta \rightarrow 0$. También, nos aproximamos al límite de Einstein cuando $\Omega \rightarrow 0$ y $\beta \rightarrow 0$, que es equivalente a cuando $\gamma \rightarrow 1$ y $\beta \rightarrow 0$.

El parámetro β que remarca la presencia de geometría modificada de gravedad de branas (MGBG) hasta este momento es arbitrario todavía. Para un valor de γ real, este potencial está bien definido para todos los valores de a y exhibe un máximo global en la región intermedia. De hecho, este potencial tiene una barrera con tal que se cumpla $(\Omega \bar{\Lambda})^2 - \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 \leq \left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}}\right) \left[4(\Omega \bar{\Lambda})^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}}\right) + 2(\Omega \bar{\Lambda})\right]$ donde la barrera es más angosta entre $a_l < a < a_r$ con $a_{l,r}$ siendo los puntos de retorno que son las raíces de $\hat{\Lambda}^2 a^3 - 3\hat{\beta}a^2 - a + \Omega = 0$. Para el caso interesante cuando $\Omega \bar{\Lambda} \ll 1$ tenemos que

$$a_l \simeq \Omega, \quad (4.62)$$

$$a_r \simeq \frac{1}{\bar{\Lambda}} \left[\left(\frac{3\bar{\beta}}{2\bar{\Lambda}} \right) + \sqrt{\left(\frac{3\bar{\beta}}{2\bar{\Lambda}} \right)^2 + 1} \right] - \frac{\left(\frac{\Omega}{2} \right)}{1 + \left(\frac{3\bar{\beta}}{2\bar{\Lambda}} \right) \left[\left(\frac{3\bar{\beta}}{2\bar{\Lambda}} \right) + \sqrt{\left(\frac{3\bar{\beta}}{2\bar{\Lambda}} \right)^2 + 1} \right]}. \quad (4.63)$$

4.4. Instantón

En teorías de norma que incorpora el mecanismo de Higgs, el vacío no tienen una estructura trivial en varios aspectos. Primero que todo, en el universo temprano el potencial efecto de Higgs tiene dos mínimos locales. Si la transición de una fase simétrica a una fase con simetría rota pasa cuando el vacío verdadero y falso están separados por una barrera, la transición es de primer orden acompañada con la nucleación de una burbuja; aunque esta situación no ocurre en cromodinámica cuántica ni en el modelo electro-débil, es típica para teorías de campo unificadas. Otro aspecto interesante de las teorías de norma no Abelianas es la existencia de diferentes topologías de vacíos, separados por una barrera y las transiciones topológicas pueden tomar acción en el universo temprano. Estas transiciones son importantes por que nos llevan a no conservación anómala del número fermiónico en el modelo estándar. Si la temperatura en un tiempo de transición es pequeña comparada con la altura de la barrera de potencial, las transiciones entre diferentes vacíos ocurren como resultado de un tunelamiento cuántico. En este caso la solución a las ecuaciones de campo, es lo que llamamos un instantón, que nos da la contribución dominante al efecto de tunelamiento. De otro modo, si la temperatura es suficientemente alta, las fluctuaciones térmicas pueden tomar al campo sobre la barrera a otro vacío sin tunelamiento; estas transiciones son clásicas y su tasa se determina bajo la configuración estática del campo, correspondiendo al máximo, y es lo que se denomina un esfalerón. En pocas palabras, un instantón es una solución clásica de una teoría de campos euclídea cuyo valor de la acción es finito y no nulo. En particular, para teorías definidas en el espacio-tiempo de Minkowski, se define un instantón como una solución de la versión euclídea de dicha teoría con las propiedades anteriormente mencionadas. En general, dada la forma de las ecuaciones de campo, un instantón de una teoría definida en un espacio euclídeo con D dimensiones es equivalente a una solución estática de la misma teoría, definida ahora en un espacio-tiempo de D+1 dimensiones [12]. Ahora mostremos un ejemplo del instantón:

El escape de una partícula de un pozo de potencial. Usamos la ecuación de Schrödinger:

$$\left(-\frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{dq^2} + V(q)\right) \Psi \simeq E\Psi, \quad (4.64)$$

La solución semiclásica a esta ecuación es:

$$\Psi \propto \exp\left(i \int \sqrt{2M(E-V)} dq\right), \quad (4.65)$$

En regiones clásicamente permitidas ($E > V$) la función de onda simplemente oscila, mientras debajo de la barrera decae exponencialmente. Para el caso $E=0$ tenemos que la probabilidad de tunelamiento es proporcional a la función exponencial con argumento :

$$-\int_0^{b(0)} \sqrt{2MV} dq = -\int_{-\infty}^{\tau_b} \left(\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + V\right) d\tau \equiv S_{b(0)}, \quad (4.66)$$

donde $b(0)$ corresponde al ancho de la barrera de potencial y q satisface que:

$$M\ddot{q} + \frac{\partial(-V)}{dq} = 0, \quad (4.67)$$

Esta ecuación es la ecuación de movimiento de la partícula en el potencial invertido $-V$ y puede ser obtenido de la ecuación original haciendo tender $t \rightarrow it$. Note que la sustitución $t \rightarrow it$ convierte la métrica de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2, \quad (4.68)$$

En la métrica Euclidea:

$$-ds_E^2 = d\tau^2 + dx^2, \quad (4.69)$$

donde una primera integral de la ecuación de movimiento da:

$$\frac{1}{2}M\dot{q}^2 - V = 0, \quad (4.70)$$

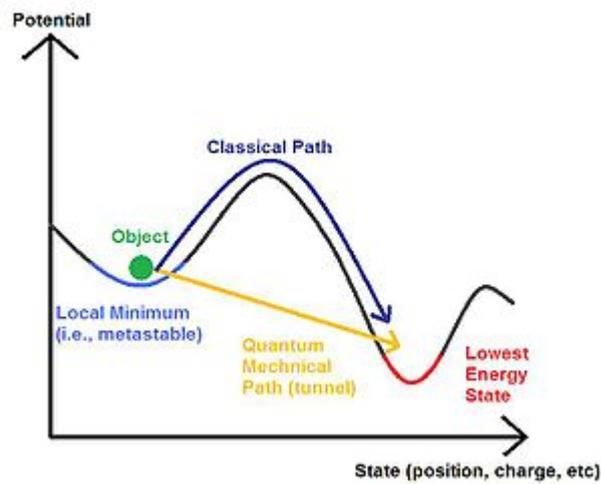


Figura 4: Gráfica de tunelamiento cuántico

A τ se le llama tiempo Euclideo. Podemos cerrar esa trayectoria considerando el movimiento de regreso. La solución correspondiente es una versión "bebé" de lo que se llama un instantón. La acción S es dos veces la acción $S_{b(0)}$. Así, la probabilidad de tunelamiento en $E = 0$ está dada por:

$$P \propto \exp(-S), \quad (4.71)$$

[5]

5. Nucleación de universos tipo brana

5.1. Modelo generalizado de Regge-Teitelboim

El modelo de Regge Teitelboim fue motivado tomando la idea de las cuerdas para describir el universo de dimensión (3+1), que sería un objeto extendido geodésicamente flotando en un espacio de fondo fijo de mayores dimensiones[33]. La cosmología asociada de brana fué estudiada en [39]. Los aspectos de la geometría diferencial discutidos en [40], muestran que localmente se induce una métrica en la hipersuperficie que comprende a nuestro universo y se propaga en un espacio-tiempo de N dimensiones. Los teoremas de embebimiento isométrico dictan que se requieren $N=n(n+1)/2$ dimensiones. En particular, para $n=4$, un espacio de fondo plano de diez dimensiones es necesario. Sin embargo, si la métrica (3+1) de la superficie admite algunos campos vectoriales de "Killing", N se reduce significativamente[36]. Los argumentos anteriores siguen siendo válidos aunque agreguemos la traza K del tensor de curvatura extrínseca. En el cálculo siguiente encontraremos la acción del instantón para lo cual es necesario hallar las soluciones clásica de la versión euclidea de las ecuaciones de movimiento.

Comencemos con la siguiente acción que nos dá ecuaciones de movimiento de segundo orden

$$S[x] = \int_m d^4\xi \sqrt{-g} \left(\frac{\alpha}{2} R - \Lambda + \beta K + \delta (K^3 - 3K K^{ab} K_{ab} + 2K_b^a K_c^b K_a^c) \right), \quad (5.1)$$

y utilizamos la métrica mencionada en el capítulo 2. Las ecuaciones de Friedmann son

$$1 + \dot{a}^2 = \gamma a^2 \bar{\Lambda}^2, \quad (5.2)$$

$$\ddot{a} = \gamma a \bar{\Lambda}^2, \quad (5.3)$$

y los valores de la curvatura extrínseca son los siguientes:

$$K_\tau^\tau = \frac{\ddot{a} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial a}}{(\dot{a}^2 + A)^{\frac{1}{2}}} K_x^x = \frac{(\dot{a}^2 + A)^{\frac{1}{2}}}{a}, \quad (5.4)$$

con A definida como:

$$A = 1 - \frac{\Lambda_b}{6} a^2. \quad (5.5)$$

De la ecuación (5.2) eliminamos \dot{a} y todo queda en términos de a de la siguiente manera:

$$R = 12\gamma \bar{\Lambda}^2, \quad (5.6)$$

$$K = 4 \left(\gamma \bar{\Lambda}^2 - \frac{\Lambda_b}{6} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

Con las siguientes constantes definidas de la siguiente manera:

$$\bar{\Lambda}^2 = \frac{\Lambda}{3\alpha}, \quad (5.8)$$

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{3\alpha}, \quad (5.9)$$

Ahora los últimos términos de la acción quedan:

$$3K K_{ab} K^{ab} = 12 \left(\gamma \bar{\Lambda}^2 - \frac{\Lambda_b}{6} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (5.10)$$

$$2K_b^a K_c^b K_a^c = 8 \left(\gamma \bar{\Lambda}^2 - \frac{\Lambda_b}{6} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.11)$$

La acción del instantón se puede escribir como:

$$S[x] = \frac{\alpha}{2} \left(R - 6\bar{\Lambda}^2 + 6\bar{\beta}K + \bar{\delta} (K^3 - 3K K^{ab} K_{ab} + 2K_b^a K_c^b K_a^c) \right) \int_m d^4\xi \sqrt{-g}, \quad (5.12)$$

donde definimos la constante $\bar{\delta}$ de la siguiente manera:

$$\bar{\delta} = \frac{2\delta}{\alpha}. \quad (5.13)$$

Utilizando que el volumen de una 4-esfera es $\frac{8}{3}\pi^2 R_0^4$ y que los términos geométricos están dados por las ecuaciones (4.6, 4.7, 4.10 y 4.11), obtenemos la siguiente acción:

$$S[x] = \frac{8}{3}\pi^2 R_0^4 \frac{\alpha}{2} \left(12\gamma \bar{\Lambda}^2 - 6\bar{\Lambda}^2 + 24\bar{\beta} \left(\gamma \bar{\Lambda}^2 - \frac{\Lambda_b}{6} \right)^{\frac{1}{2}} + 24\bar{\delta} \left(\gamma \bar{\Lambda}^2 - \frac{\Lambda_b}{6} \right)^{\frac{3}{2}} \right), \quad (5.14)$$

Para encontrar los valores extremos de la acción, utilizaremos las siguientes cantidades, donde su significado geométrico se muestra en la figura 5.

$$H_{ds}^2 = \frac{\Lambda_b}{6} \quad y \quad R_0 = \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} \bar{\Lambda}}, \quad (5.15)$$

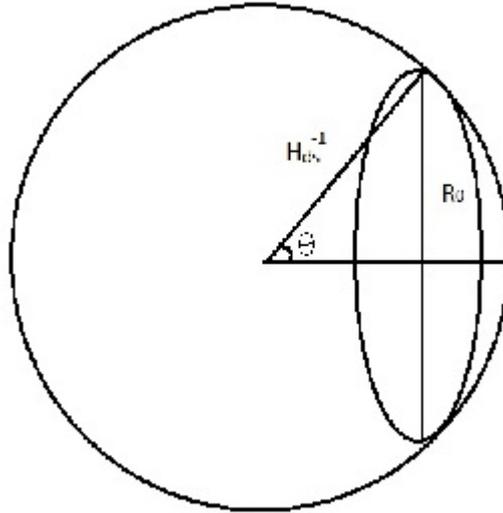


Figura 5: Modelo del instantón para la brana. La esfera representa el espacio de fondo (bulk) y el círculo representa a la brana. Cuando se realiza la euclideanización de la métrica el espacio de de Sitter se convierte en una hiperesfera (esfera de dimensión 5) y la brana en un hipercírculo (esfera de dimensión 4).

1.-Primer caso. Consideramos un espacio de Minkowski con $H_{ds} = 0$, para encontrar el valor extremal de la acción derivamos y obtenemos que:

$$\frac{\partial S}{\partial R_0} = 32\pi^2 \bar{\Lambda}^2 \alpha R_0^3 \left[\frac{1}{\bar{\Lambda}^2 R_0^2} - 1 + \frac{3\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}^2 R_0} + \frac{3\bar{\delta}}{\bar{\Lambda}^2 R_0^3} \right] = 0, \quad (5.16)$$

Por medio de la relación anterior la ecuación maestra se escribe como:

$$32\pi^2 \bar{\Lambda}^2 R_0 \left((\gamma - 1) + \frac{3\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}} \sqrt{\gamma} + \bar{\rho} \gamma^{\frac{3}{2}} \bar{\Lambda} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\gamma - 1) + \frac{3\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}} \sqrt{\gamma} + 3\bar{\delta} \gamma^{\frac{3}{2}} \bar{\Lambda} = 0, \quad (5.17)$$

La acción euclidea con valor extremo queda como:

$$S_E = \frac{6\pi^2 \alpha}{\gamma^2 \bar{\Lambda}^2} \left[\frac{4(6\gamma - 1)}{15} + \frac{-16(\frac{3\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}^2} \sqrt{\gamma} + 3\bar{\delta} \gamma^{\frac{3}{2}} \bar{\Lambda})}{15} + \frac{80}{15} \sqrt{\gamma} \frac{\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}} \right], \quad (5.18)$$

2.- Segundo caso.

Consideremos un espacio de de Sitter. Utilizando la geometría del instantón extremizamos con respecto al ángulo θ_0 .

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \theta_0} = \frac{\partial S}{\partial R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \theta_0} = \frac{\partial S}{\partial R_0} \frac{\cos(\theta)}{H_{ds}}, \quad (5.19)$$

y podemos escribir:

$$\frac{\cos(\theta)}{H_{ds}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}{H_{ds}} = \frac{\sqrt{1 - R_0^2 H_{ds}^2}}{H_{ds}} = \frac{(\gamma \bar{\Lambda}^2 - \frac{\Lambda_b}{6})^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}} \bar{\Lambda}}. \quad (5.20)$$

Extremizando respecto a R_0 obtenemos:

$$0 = 32\pi^2 \alpha \frac{(\gamma \bar{\Lambda}^2 - \frac{\Lambda_b}{6})^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}} \bar{\Lambda}} \left[\gamma - 1 + \frac{3\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\bar{\Lambda}^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}^2} \frac{H_{ds}^2}{\left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] + \\ + 32\pi^2 \alpha \frac{(\gamma \bar{\Lambda}^2 - \frac{\Lambda_b}{6})^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}} \bar{\Lambda}} \left[\frac{3\bar{\delta}}{\bar{\Lambda}^2} \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\bar{\delta}}{\bar{\Lambda}^2} H_{ds}^2 \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (5.21)$$

con lo que la ecuación maestra es:

$$\gamma - 1 = -\frac{3\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\bar{\Lambda}^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}^2} \frac{H_{ds}^2}{\left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - 3\frac{\bar{\delta}}{\bar{\Lambda}^2} \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\Lambda}^2} H_{ds}^2 \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.22)$$

Utilizando la expresión anterior en la acción, obtenemos el siguiente valor ya extremizado para la acción euclidea:

$$S_E = \frac{6\pi^2 \alpha}{\gamma^2 \bar{\Lambda}^2} \frac{4(6\gamma - 1)}{15} + \frac{6\pi^2 \alpha}{\gamma^2 \bar{\Lambda}^2} \frac{16}{15} \left[-\frac{3\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\bar{\Lambda}^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}^2} \frac{H_{ds}^2}{\left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] + \\ + \frac{6\pi^2 \alpha}{\gamma^2 \bar{\Lambda}^2} \left[-\frac{16}{15} \left(\frac{3\bar{\delta}}{\bar{\Lambda}^2} \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\Lambda}^2} H_{ds}^2 \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{80}{15} \frac{\bar{\beta}}{\bar{\Lambda}} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\bar{\Lambda}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.23)$$

Si $\Lambda_b=0$ obtenemos el resultado para un espacio plano de Minkowski. La probabilidad de nucleación está dada proporcional a la exponencial elevada a menos el valor absoluto de la acción, es decir:

$$P \sim e^{-S_e} = e^{-\left[\frac{6\pi^2\alpha}{\gamma^2\Lambda^2} \left(\frac{4(6\gamma-1)}{15} + \frac{16}{15} \left[-\frac{3\bar{\beta}}{\Lambda} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{\beta}}{\Lambda^2} \frac{H_{ds}^2}{\left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\bar{\delta}}{\Lambda^2} \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\bar{\delta}}{\Lambda^2} H_{ds}^2 \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{80}{15} \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}, \quad (5.24)$$

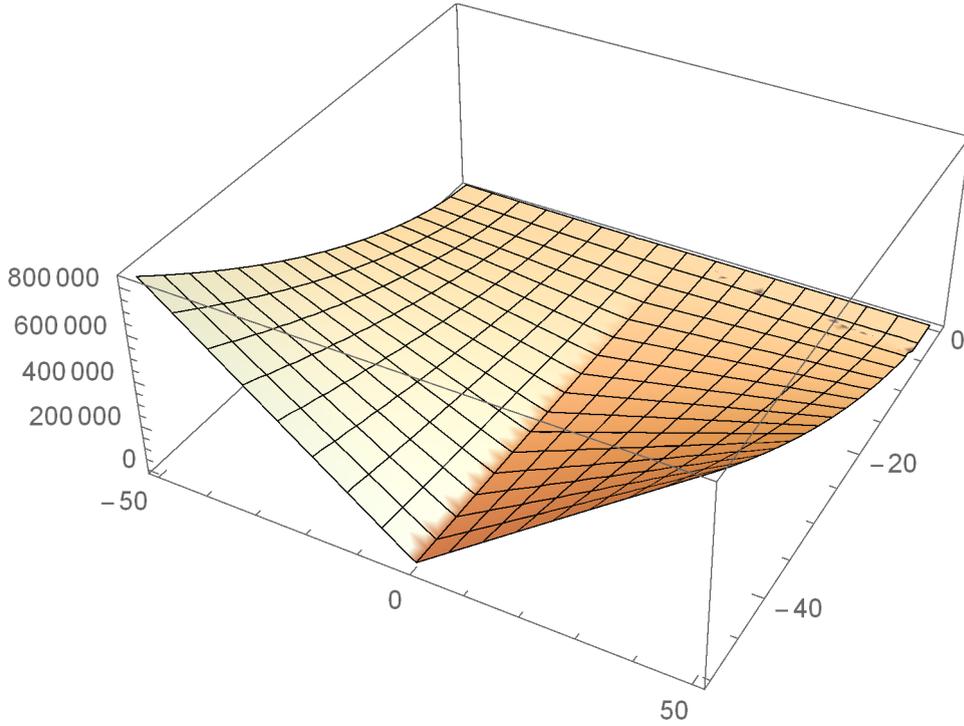


Figura 6: En ésta gráfica podemos observar el comportamiento del valor absoluto la acción para el modelo generalizado de Regge-Teitelboim respecto a $\bar{\beta}\epsilon[-50, 50]$ y $\bar{\delta}\epsilon[-50, 0]$. A las demás constantes les dimos los siguientes valores: Constante cosmológica $\Lambda_b = 6$, $\alpha = 1$, $H_{ds} = 1$ por simplicidad

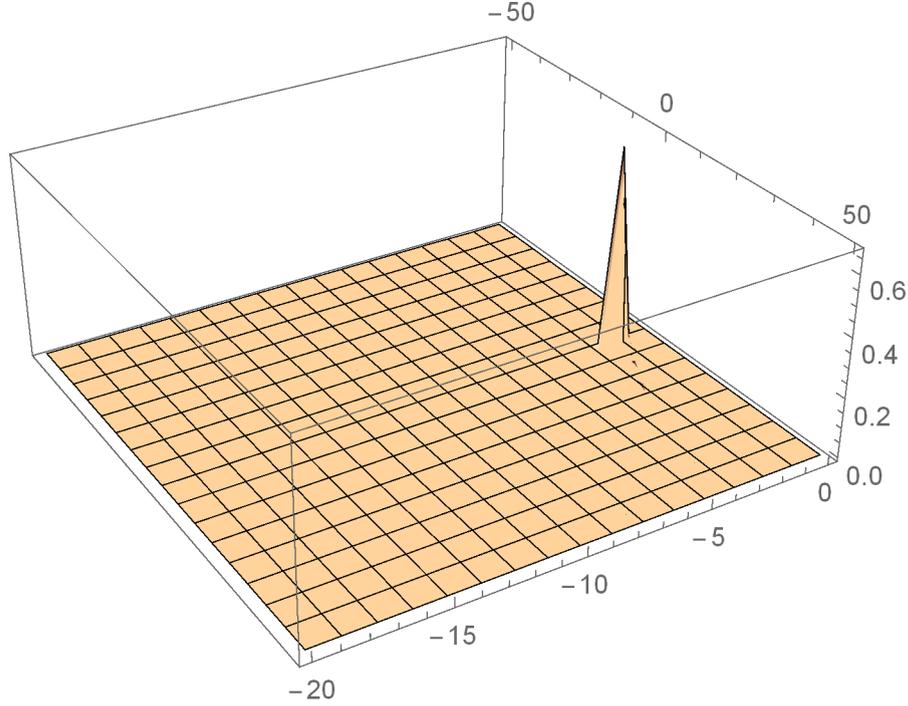


Figura 7: En ésta gráfica podemos observar el comportamiento de la probabilidad de nucleación de una brana para el modelo generalizado de Regge-Teitelboim respecto a $\bar{\beta}\epsilon[-50, 50]$ y $\bar{\delta}\epsilon[-20, 0]$.

5.2. Efecto Schwinger generalizado

En esta sección analizaremos el análogo efecto Schwinger para la creación de un par brana y anti-brana.

El efecto Schwinger [5], nombrado así en honor al físico Julian Seymour Schwinger, dice que es posible la creación de un par partícula y antipartícula (electrón-positrón) mediante un campo eléctrico. El campo eléctrico o su descripción en términos del potencial cuadvectorial, es un campo tensorial de rango uno. Si ahora tenemos un campo tensorial de rango dos éste crearía un par cuerda-anticuerda (vamos subiendo las dimensiones de los objetos creados conforme el rango del campo tensorial). Un campo tensorial de rango tres crearía un par burbuja y antiburbuja y un campo tensorial de rango cuatro crearía un par brana y antibrana. La 4-forma la podemos identificar con el campo de Ramond-Ramond que surge de la teoría de cuerdas.

Comenzaremos escribiendo nuestra nueva acción que involucre a un campo del tipo Ramond-Ramond:

$$\int_m d^4\xi \sqrt{-g} \frac{\alpha}{2} \left(R - 6\bar{\Lambda}^2 + 6\bar{\beta}K + \bar{\delta} [K^3 - 3KK_{ab}K^{ab} + 2K_b^a K_c^b K_a^c] \right) + \frac{k_2}{4!} \int_m \sqrt{-\gamma} A_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4\xi, \quad (5.25)$$

$$\int_m d^4\xi \sqrt{-g} \frac{\alpha}{2} \left(R - 6\bar{\Lambda}^2 + 6\bar{\beta}K + \bar{\delta} [K^3 - 3KK_{ab}K^{ab} + 2K_b^a K_c^b K_a^c] \right) - \int_v \sqrt{-g} k_2 F d^4\xi, \quad (5.26)$$

donde F es un término proporcional al campo Ramond-Ramond y resulta constante [5]. Nos fijamos en la segunda integral, ya que el proceso del instantón para la primera fue hecho en el capítulo anterior. Así, tenemos que:

$$\int_v \sqrt{-g} k_2 F = k_2 F V_4(R_0), \quad (5.27)$$

donde:

$$V_4(R_0) = 2 \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} H_{ds}^{-5} \int_0^{\phi_0} \sin^4(\phi) d\phi, \quad (5.28)$$

con:

$$\sin\phi = R_0 H_{ds}, \quad (5.29)$$

$$H_{ds} = \left(\frac{\Lambda_b}{6} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.30)$$

La integral entonces queda:

$$\int_v \sqrt{-g} k_2 F = k_2 F \left[\pi^2 H_{ds}^{-5} \phi_0 - \pi^2 H_{ds}^{-4} R_0 (1 - R_0^2 H_{ds}^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{3} R_0^2 H_{ds}^2 \right) \right], \quad (5.31)$$

Para extremizar la acción, derivemos esta expresión con respecto a R_0 para obtener la parte faltante de la ecuación de movimiento para este modelo obtenemos:

$$\frac{\partial \left(\int_0^{\phi_0} \sin^4 \phi d\phi \right)}{\partial R_0} = \frac{8}{3} \pi^2 \left(\frac{R_0^4}{\sqrt{1 - R_0^2 H_{ds}^2}} \right), \quad (5.32)$$

Sumando esta contribución al modelo modificado de Regge-Teitelboim de la sección anterior obtenemos la ecuación maestra:

$$\begin{aligned} \gamma - 1 = & -\frac{3\bar{\beta}}{\Lambda} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{\beta}}{\Lambda^2} \frac{H_{ds}}{\left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\bar{\delta}}{\Lambda^2} \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \\ & + \frac{\bar{\delta}}{\Lambda^2} H_{ds}^2 \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + k_2 F \frac{8}{3} R_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - R_0^2 H_{ds}^2}} \right), \end{aligned} \quad (5.33)$$

Utilizando el resultado anterior en el valor extremizado de la acción, encontramos que para el espacio de Minkowski se obtiene:

$$\begin{aligned} S_E = & \frac{6\pi^2 \alpha}{\gamma^2 \Lambda^2} \left[\frac{4(6\gamma - 1)}{15} + \frac{-16 \left(\frac{3\bar{\beta}}{\Lambda^2} \sqrt{\gamma} + \frac{3\bar{\delta}}{\Lambda^2 R_0^3} + \frac{8}{3} k_2 F R_0^4 \right)}{15} + \frac{80}{15} \sqrt{\gamma} \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \right] - \\ & - k_2 F \left[\pi^2 H_{ds}^{-5} \arcsin(R_0 H_{ds}) - \pi^2 H_{ds}^{-4} R_0 (1 - R_0^2 H_{ds}^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{3} R_0^2 H_{ds}^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (5.34)$$

La probabilidad de nucleación es proporcional a la exponencial de menos el valor absoluto de la acción extremizada, o sea:

$$P \propto e^{-\left| \frac{6\pi^2 \alpha}{\gamma^2 \Lambda^2} \left[\frac{4(6\gamma - 1)}{15} + \frac{-16 \left(\frac{3\bar{\beta}}{\Lambda^2} \sqrt{\gamma} + \frac{3\bar{\delta}}{\Lambda^2 R_0^3} + \frac{8}{3} k_2 F R_0^4 \right)}{15} + \frac{80}{15} \sqrt{\gamma} \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \right] - k_2 F \left[\pi^2 H_{ds}^{-5} \arcsin(R_0 H_{ds}) - \pi^2 H_{ds}^{-4} R_0 (1 - R_0^2 H_{ds}^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{3} R_0^2 H_{ds}^2 \right) \right] \right|} \quad (5.35)$$

$$\left. \right| \quad (5.36)$$

En general, cuando H_{ds} es diferente de cero tenemos:

$$S_{(E)} = \frac{6\pi^2\alpha}{\gamma^2\Lambda^2} \left\{ \frac{4(6\gamma-1)}{15} + \frac{16}{15} \left[-\frac{3\bar{\beta}}{\Lambda} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{\beta}}{\Lambda^2} \frac{H_{ds}^2}{\left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \frac{6\pi^2\alpha}{\gamma^2\Lambda^2} \frac{16}{15} \left[\frac{3\bar{\delta}}{\Lambda^2} \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\bar{\delta}}{\Lambda^2} H_{ds}^2 \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{3} k_2 F R_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - R_0^2 H_{ds}^2}} \right) \right] + \frac{6\pi^2\alpha}{\gamma^2\Lambda^2} \frac{80}{15} \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \pi^2 H_{ds}^{-5} \arcsin(R_0 H_{ds}) - k_2 F \left[\pi^2 H_{ds}^{-4} R_0 (1 - R_0^2 H_{ds}^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{3} R_0^2 H_{ds}^2 \right) \right] \quad (5.37)$$

Llamemos:

$$B = -\frac{3\bar{\beta}}{\Lambda} \left(\gamma - \frac{\Lambda_b}{6\Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{\beta}}{\Lambda^2} \frac{H_{ds}}{\left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\bar{\delta}}{\Lambda^2} \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\bar{\delta}}{\Lambda^2} H_{ds}^2 \left(\frac{1}{R_0^2} - H_{ds}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3} k_2 F R_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - R_0^2 H_{ds}^2}} \right). \quad (5.38)$$

Sustituyendo el valor extremo, tenemos:

$$S_{(E)} = \frac{6\pi^2\alpha}{\gamma^2\Lambda^2} \left[\frac{4(6\gamma-1)}{15} + \frac{16(B)}{15} + \frac{80}{15} \sqrt{\gamma} \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \right] - k_2 F \pi^2 H_{ds}^{-5} \arcsin(R_0 H_{ds}) - k_2 F \pi^2 H_{ds}^{-4} R_0 \left(1 + B - \frac{\Lambda_b}{6\Lambda^2} \right) \left(1 + \frac{2}{3} R_0^2 H_{ds}^2 \right) \quad (5.39)$$

Por lo que la probabilidad de nucleación será dada por la siguiente expresión:

$$P \propto e^{-\left| \frac{6\pi^2\alpha}{\gamma^2\Lambda^2} \left[\frac{4(6\gamma-1)}{15} + \frac{16(B)}{15} + \frac{80}{15} \sqrt{\gamma} \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \right] - k_2 F \left[\pi^2 H_{ds}^{-5} \arcsin(R_0 H_{ds}) - \pi^2 H_{ds}^{-4} R_0 \left(1 + B - \frac{\Lambda_b}{6\Lambda^2} \right) \left(1 + \frac{2}{3} R_0^2 H_{ds}^2 \right) \right] \right|} \quad (5.40)$$

Comportamiento de la acción para $\delta = -10, -5, -2$ y $\beta \in [-25, -15]$

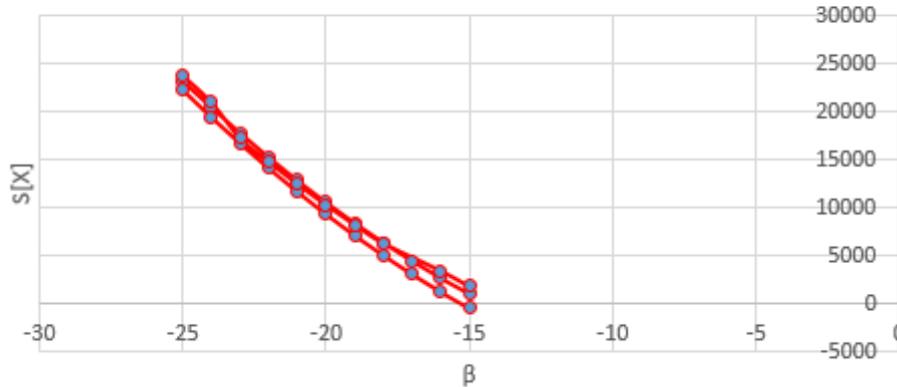


Figura 8: Podemos ver el comportamiento de la acción para un valor de $\delta = -10$, $\delta = -5$ y $\delta = -2$ con $\beta \in [-25, -15]$. La acción tiene un comportamiento inversamente proporcional al parámetro δ . A los demás parámetros les dimos valores constantes: Constante cosmológica $\Lambda_b = 6$, $\alpha = 1$, $H_{ds} = 1$ por simplicidad.

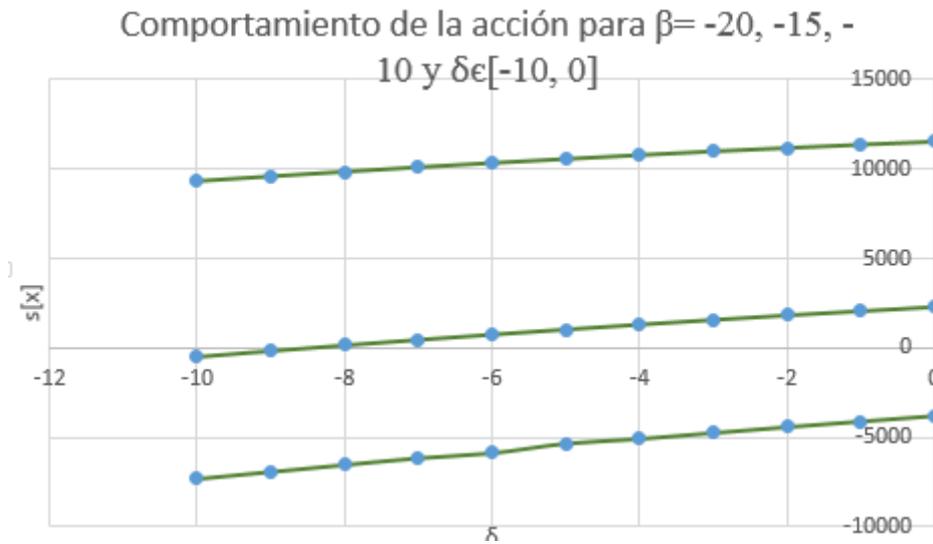


Figura 9: Podemos ver el comportamiento de la acción para los valores de $\beta = -20$, $\beta = -15$ y $\beta = -10$ y $\delta \in [-10, 0]$.

En la figura 8 medimos en el eje X el valor del parámetro δ , y en eje Y el valor de la acción. Notemos que tiene un comportamiento casi lineal. Podemos observar que la acción evaluada en un intervalo creciente para el parámetro δ se comporta de manera inversamente proporcional a l misma. Los valores para las demás constantes del modelo se fijaron igual que para el caso de la figura 8. Para los valores graficados, la probabilidad de nucleación de branas es máxima para $\beta = -15$ y aproximadamente $\delta = -8$, puesto que el valor absoluto de la acción es mínimo.

En la figura 9, el comportamiento de la acción al evaluarse en un intervalo creciente de β es proporcional a dicho parámetro.

6. Conclusiones

En éste trabajo de tesis realizamos una breve revisión de los principales conceptos físicos de la cosmología clásica y cuántica de branas. En particular calculamos la probabilidad de nucleación de universos tipo brana por medio de las acciones del modelo modificado y generalizado de Regge-Teitelboim. Posteriormente también calculamos la probabilidad de nucleación cuando se agrega el término proporcional al campo tensorial de orden 4 (campo Ramond-Ramond). En el proceso utilizamos las ecuaciones de Friedmann y el método del instantón para calcular la probabilidad de tunelamiento. Además extremizamos la acción y encontramos las ecuaciones de movimiento expresadas a través de la llama ecuación maestra.

Hicimos un análisis sobre el comportamiento de la acción respecto a algunos valores de las constantes $\bar{\beta}$ y $\bar{\delta}$. De acuerdo con el principio antrópico, los valores de $\bar{\beta}$ y $\bar{\delta}$ deben ser valores que permitan que la probabilidad de creación del universo sea máxima y la existencia del universo como lo conocemos.

Notemos que para encontrar el valor mínimo de la acción vemos que mientras el valor de $\bar{\delta}$ crece, el valor de la acción disminuye proporcionalmente en cierto rango de valores. Para estos casos fijamos los valores las constantes como se mencionó en la figura 8 y 9. El valor de la constante α deberá ser lo más pequeño posible para obtener una probabilidad de nucleación máxima.

Nótese que al agregar los términos extra de curvatura extrínseca la probabilidad se ve afectada dependiendo del valor de la constante $\bar{\delta}$, ya que hay otra contribución en la acción que puede alejarla o acercarla más al cero dependiendo del valor de dicha constante, por lo que es necesario hallar los valores de dichas constantes para notar cuales dominan en el modelo y cuales acercan el valor de la acción ya extremizada a cero para una probabilidad máxima.

Cuando consideramos la contribución del campo tensorial de orden 4, hay otro término adicional en la acción ya extremizada, que afectará significativamente la probabilidad de nucleación de la brana, de manera análoga al caso anterior, dependerá del valor de la constante de acoplamiento k_2 para el campo Ramond-Ramond. Necesitamos conocer al menos dos de las tres constantes anteriormente mencionadas para dar una buena estimación sobre la probabilidad de nucleación. Sin embargo, se puede afirmar que el efecto del la 4-forma promueve la producción de universos como era esperado de antemano por ser un efecto analogo al de Schwinger de la producción de pares de partícula-antipartícula.

7. Apéndice

7.1. Aspectos matemáticos de las hipersuperficies

En una variedad espacio tiempo cuatridimensional, una hipersuperficie es una variedad de tres dimensiones que puede ser de tipo temporal (timelike), de tipo espacial (spacelike), o nula; se dirá nula una hipersuperficie si sus vectores normales son siempre de norma cero. Se dice tipo-espacial si la hipersuperficie se mueve en el espacio y tipo-temporal si se mueve en el tiempo. Una superficie particular, denétemosla por la letra griega Σ , es seleccionada poniendo la condición

$$\Phi(x^a) = 0, \quad (7.1)$$

o dando las ecuaciones paramétricas

$$x^a = x^a(y^a), \quad (7.2)$$

donde y^a ($a=1,2,3$) son coordenadas intrínsecas a la superficie

El vector $\Phi_{,\alpha}$ es normal a la hipersuperficie por que el valor de $\{\Phi$ cambia solo en la dirección ortogonal a Σ , podemos introducir un vector normal n_α si la superficie es no nula.

$$n_\alpha n^\alpha = \varepsilon \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipoespacial} \\ 1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipotemporal} \end{cases}, \quad (7.3)$$

n_α está dado por

$$n_\alpha = \frac{\varepsilon \Phi_{,\alpha}}{\sqrt{g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}}}, \quad (7.4)$$

mientras nuestra hipersuperficie sea del tipo espacial o temporal. Cuando la superficie es nula, la expresión anterior se indetermina y definimos $k_\alpha = -\Phi_{,\alpha}$ este vector es tangente a la hipersuperficie por ser ortogonal a si mismo ($k_\alpha k^\alpha = 0$). Ahora hablemos de la curvatura extrínseca. Las cantidades

$$A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (7.5)$$

son las componentes tangenciales a $A_{\alpha;\beta} e_b^\beta$ donde $A_{\alpha;\beta} = \nabla_\beta A_\alpha$, descomponemos la expresión anterior en su forma tangencial y normal

$$A_{\alpha;\beta} e_b^\beta = (\varepsilon n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^\alpha e_{m\mu}) A_{;\beta}^\mu e_b^\beta = \varepsilon (n_\mu A_{;\beta}^\mu e_b^\beta) n^\alpha + h^{am} (A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha, \quad (7.6)$$

El primer término es normal a la hipersuperficie y el segundo es tangencial. Ahora utilizamos $A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ para llegar a:

$$A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta = A_{|b}^\alpha e_a^\alpha - \varepsilon A^a (n_{\mu;\beta} e_a^\mu e_b^\beta) n^\alpha, \quad (7.7)$$

En este punto introducimos el tensor

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (7.8)$$

el cual es llamado tensor de curvatura extrínseca o segunda forma fundamental. Y el escalar K se obtiene por contraer ambos índices con la métrica inducida.

$$K = h^{ab} K_{ab} = n_{;\alpha}^\alpha, \quad (7.9)$$

7.2. Ecuaciones de Gauss y Codazzi

El tensor de curvatura intrínseca se puede expresar de la siguiente manera:

$$A^c_{|ab} - A^c_{|ba} = -R^c_{dab}A^d, \quad (7.10)$$

Lo que implica:

$$R^c_{dab} = \Gamma^c_{db,a} - \Gamma^c_{da,b} + \Gamma^c_{ma}\Gamma^m_{db} - \Gamma^c_{mb}\Gamma^m_{da}, \quad (7.11)$$

si proyectamos la ecuación anterior sobre un vector normal y uno tangente se obtienen las ecuaciones de Gauss y Codazzi. A continuación la expresión general

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}e^{\alpha}_ae^{\beta}_be^{\gamma}_c = R^m_{abc}e^{\mu}_m + \varepsilon(K_{ab|c} - K_{ac|b}) + \varepsilon K_{ab}n^{\mu}_{;\gamma}e^{\gamma}_c - \varepsilon K_{ac}n^{\mu}_{;\beta}e^{\beta}_b, \quad (7.12)$$

El tensor de Ricci se obtiene contrayendo dos índices del tensor de Riemman (o de curvatura intrínseca) con la métrica, y el escalar de Ricci se obtiene nuevamente contrayendo el tensor de Ricci con la métrica.

7.3. Condiciones de unión

Serán mencionadas rápidamente estas condiciones, para esto definiremos el tensor de stress y energía:

$$16\pi\varepsilon S_{\alpha\beta} = \kappa_{\mu\alpha}n^{\mu}n_{\beta} + \kappa_{\mu\beta}n^{\mu}n_{\alpha} - \kappa n_{\alpha}n_{\beta} - \varepsilon\kappa_{\alpha\beta} - (\kappa_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} - \varepsilon\kappa)g_{\alpha\beta}, \quad (7.13)$$

Las condiciones de frontera son:

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \varepsilon([\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}]n_{\gamma} - [\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}]n_{\delta})S_{ab} = -\frac{\varepsilon}{8\pi}([K_{ab}] - [K])h_{ab}, \quad (7.14)$$

[41]

7.4. Brana como variedad diferenciable

Las dimensiones adicionales del espacio de fondo son compactas y están enrolladas en un espacio de Calabi-Yau. El matemático Eugenio Calabi conjeturó en 1957 que tales variedades admiten una métrica con curvatura de Ricci nula (una en cada clase de Kähler), es decir, una variedad "plana". Esta conjetura fue probada por Shing-Tung Yau en 1977 y devino el teorema de Yau. Por lo tanto, una variedad de Calabi-Yau se puede también definir como variedad Ricci-plana compacta de Kähler (que satisface condición de integración). Una variedad compacta es una variedad tal que de todo recubrimiento abierto se puede extraer un surecubrimiento finito. Aunque esta definición es perfectamente aplicable a variedades topológicas, se suele entender que una variedad compacta es

además una variedad diferenciable. De manera informal, una variedad compacta es la generalización a variedades de dimensión cualquiera de los conceptos de curva cerrada y de superficie cerrada. En geometría y topología, una variedad diferenciable es un tipo especial de variedad topológica, a la que podemos extender las nociones de cálculo diferencial que normalmente usamos en R^n . En una variedad diferenciable M podremos definir lo que es una función diferenciable $f : M \rightarrow R$, y campos de tensores diferenciables (incluidos campos de vectores) Una carta n -dimensional sobre M es una aplicación biyectiva cuya imagen $V = \phi(U)$ es un conjunto abierto del espacio euclideo. Un atlas diferenciable n -dimensional sobre un conjunto M es una familia de cartas, satisfaciendo las siguientes condiciones: (1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ (2) Para todo par de índices i y j , cualquier par de cartas son compatibles, o sea, que nos manden a las mismas coordenadas. Diremos que el atlas A determina una estructura diferenciable sobre M si es maximal para las condiciones anteriores, es decir, un elemento de A que no es menor que cualquier otro. Una variedad diferenciable de dimensión n es un par (M, A) formado por un conjunto M y una estructura diferenciable n -dimensional A sobre M . También es posible definir una variedad de Calabi-Yau como variedad con una holonomía $SU(n)$.

Referencias

- [1] RYDEN, B., *Introduction to cosmology*. 2003. Addison Wesley, USA
- [2] CORDERO, R. AND ROJAS, E., *Nucleation of 4R brane universes* 2004 Class. Quant. Grav.
- [3] WEINBERG, S., *Cosmology* Oxford university press. USA
- [4] DODELSON, S., *Modern Cosmology* 2003, Academic press, USA.
- [5] PLANCK PUBLICATIONS: PLANCK 2015 RESULTS. *European Space Agency. February 2015. Consultado el 9 de febrero de 2015*
- [6] D. N. SPERGEL Y OTROS *Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology*
- [7] ADAM RIESS Y OTRAS. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant* Astronomical J. 116: 1009-38.
- [8] HAWKING, STEPHEN W. *Historia del tiempo* 1988, p.166. Editorial Crítica. ISBN 84-7423-374-7.
- [9] REGGE T AND TEITELBOIM C, *Proc. Marcel Grossman* 1975 (Trieste) p 77
- [10] RUBAKOV V A, *Phys. Lett.* 1984 **B148** 280
- [11] RUBAKOV V A, *Large and infinite extradimensions* 2001 Preprint hep-th/0104152
- [12] OVERDUIN, WESSON .*Kaluza-Klein Gravity* p.59
- [13] CORDERO R CRUZ M MOLGADO A ROJAS E, *Quantum modified Regge-Teitelboim cosmology* DOI 10.1007/s10714-014-1761-8
- [14] R. Cordero and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **65**, 083519 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.083519 [hep-th/0107175]. CITATION = doi:10.1103/PhysRevD.65.083519; 41 citations counted in INSPIRE as of 01 Jun 2016
- [15] CORDERO, R., CRUZ, M., MOLGADO, A., ROJAS, E. *Modified geodetic brane cosmology* Class. Quantum Gravity 29, 175010 (2011)
- [16] DAVIDSON, A., KARASIK, D. *Quantum gravity of a brane-like universe*. Mod. Phys. Lett. A 13, 2187 (1998)
- [17] KARASIK, D., DAVIDSON, A. *Geodetic brane gravity*. Phys. Rev. D 67, 064012 (2003)
- [18] BANERJEE, R., MUKHERJEE, P., PAUL, B. *New Hamiltonian analysis of Regge-Teitelboim minisuperspace cosmology*. Phys. Rev. D 89, 043508 (2014)
- [19] PASTON, S.A., SEMENOVA, A.N. *Constraint algebra for Regge-Teitelboim formulation of gravity*.

- Int. J. Theor. Phys. 49, 2648 (2010)
- [20] CHEN, B.-Y. .On a variational problem on hypersurfaces. J. Lond. Math. Soc. 6, 321 (1973)
- [21] D. LOVELOCK *J. Math. Phys.* 12, 498 (1971). *Phys. Rev.* 1998 D **58** 067301
- [22] R. ARNOWITT, S. DESER AND C. W. MISNER *The dynamics of general relativity, in Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. L. Witten (Wiley, New York, 1962).
- [23] HARTLE J B AND HAWKING S W, *Phys. Rev.* 1983 D **28** 2960
- [24] REGGE, T., TEITELBOIM, C, *General relativity a la string: a progress report*. In: Ruffini, R. (ed.) Proceedings of the First Marcel Grossman Meeting, Trieste, Italy, p. 77. North-Holland, Amsterdam (1975)
- [25] RUBAKOV V A *Phys. Lett.* **B 148** 280 (1984)
- [26] GIA DVALI, GREGORY GABADADZE AND MASSIMO PORRATI. *4D gravity on a brane in 5D Minkowski space* Physics Letters B485 (1?3): 208?214
- [27] BROWN J D AND TEITELBOIM C *Nucl. Phys.* **B 297 787** 1988
- [28] CORDERO, R., MOLGADO, A., ROJAS, E. *Quantum charged rigid membrane*. *Class. Quantum Gravity* 28, 065010 (2011)
- [29] Cordero, R.,Molgado, A., Rojas, E.: Ostrogradski approach for the Regge?Teitelboim type cosmology. *Phys. Rev. D* 79, 024024 (2009)
- [30] NESTERENKO, V.V. *Singular Lagrangians with higher derivatives*. *J. Phys. A Math. Gen.* 22, 1673 (1989)
- [31] OSTROGRADSKI, M. *Mem. Ac. St. Petersburg*. VI 4, 385 (1850)
- [32] CHEN, T., FASIELLO, M., LIM, E.A., TOLLEY, A. *Higher derivative theories with constraints: exorcising Ostrogradski's ghost*. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 02, 042 (2013)
- [33] HENNEAUX, M., TEITELBOIM, C. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1992)
- [34] DEFFAYET, C., ESPOSITO-FARESE, G., VIKMAN, A. *Covariant Galileon*. *Phys. Rev. D* 79, 084003 (2009)
- [35] PAUL, B. *Gauge symmetry and Virasoro algebra in quantum charged rigid membrane: a first order formalism*. *Phys. Rev. D* 87, 045003 (2013)
- [36] BANERJEE, R.,MUKHERJEE, P., PAUL, B. *New Hamiltonian analysis of Regge?Teitelboim minisuperspace cosmology*. *Phys. Rev. D* 89, 043508 (2014)

- [37] HO, P.M. *Virasoro algebra for particles with higher derivative interactions*. Phys. Lett. B 558, 238 (2003)
- [38] HENNEAUX, M., TEITELBOIM, C. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1992)
- [39] DAVIDSON, A., KARASIK, A., LEDERER, Y., *Wavefunction of a brane-like universe*. Class. Quantum Gravity **16**, 1349 (1999)
- [40] FRIEDMANN, A, *Isometric embedding of Riemannian manifolds into Euclidean spaces* Rev. Mod. Phys. **37**, 201 (1965)
- [41] POISSON, E., *A relativist's toolkit, the mathematics of the black hole mechanics* 2204, Cambridge university press. UK.