Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Secretaría de Investigación y Posgrado
Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas

Sobre Algunos Operadores del Análisis Hipercomplejo.

Tesis

Que para Obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Físicomatematicas

Presenta

Luis Antonio Mendoza Tejeida

Director de Tesis

Dr. Juan Bory Reyes

México D.F. a 21 de junio de 2017

“Soy el resultado de lo que una gran mujer quiso hacer de mí.”
Thomas Edison.

A mi madre...

Resumen

En los últimos tiempos han sido varios los esfuerzos por desarrollar teorías de funciones hiperanalíticas, basados en la aplicación de métodos complejos y analíticos en el tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y que constituyen generalizaciones del sistema clásico de ecuaciones de Cauchy – Riemann del análisis complejo.

Entre los principales ejemplos de estas generalizaciones y que constituye el contexto de la presente tesis, se encuentra la teoría de funciones hiperanalíticas en el sentido de Douglis, que representa una variante de la clásica ecuación de Beltrami. Para una referencia del tratamiento clásico de estas teorías podemos mencionar los trabajos [1–3].

El objetivo general del presente trabajo es la demostración en detalle de las propiedades de continuidad y acotamiento de los operadores integrales de Cauchy (Integral singular e Integral del tipo de Cauchy) en el contexto del análisis hipercomplejo en el sentido Douglis para el caso de curvas rectificables de Jordán denominadas curvas α – Carleson y funciones continuas de Hölder generalizadas.

Abstract

In recent times there have been several efforts to develop theories of hyperanálticas functions, based on the application of complex and analytical methods in the treatment of systems of partial first order partial equations and that constitute generalizations of the classical system of equations of Cauchy - Riemann of the complex analysis.

Among the main examples of these generalizations, which constitute the context of the present thesis, is the theory of hyper-analysis functions in the sense of Douglis, which represent a variant of the classical Beltrami equation. For a reference from the classic treatment of these theories can mention the works [1–3].

The general objective of the present work is the demonstration in the detail of the properties of the continuity and boundedness of the integral operators of Cauchy (Integral singular and Integral of the type of Cauchy) in the context of the hypercomplex analysis in the sense Douglis for the case From Jordi's rectifiable curves called $\alpha -$ Carleson curves and generalized Hölder functions.

Índice general

Introducción

Las funciones analíticas de una variable compleja $z = x + iy$ de la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ estan definidas como soluciones suaves de la ecuación de Cauchy – Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial y} - i\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

donde u, v son funciones real–valuadas continuamente diferenciables.

Lipman Bears [4] e Ilya Vekua [5] extendieron el concepto de una función analítica al considerar en su lugar una ecuación más general del tipo

$$\frac{\partial f}{\partial y} - i\frac{\partial f}{\partial x} = af + b\overline{f}, \tag{2}$$

de manera análoga se obtiene la teoría de las funciones analíticas generalizadas.

Por otra parte G. N. Polozhii [6] afirma que después de transformar el siguiente sistema elíptico de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} a_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_1\frac{\partial u}{\partial y} + a_2\frac{\partial v}{\partial x} + b_2\frac{\partial v}{\partial y} &= A_1 u + A_2 v, \\ c_1\frac{\partial u}{\partial x} + d_1\frac{\partial u}{\partial y} + c_2\frac{\partial v}{\partial x} + d_2\frac{\partial v}{\partial y} &= B_1 u + B_2 v, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, B_i$ $(i = 1, 2)$ son funciones dadas en las variables x, y, que caracterizan el sistema. Podemos reescribir el sistema (3) en las nuevas variables características como

$$\begin{aligned} p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \alpha_1 u + \alpha_2 v, \\ -q\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \beta_1 u + \beta_2 v, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $p, q, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son funciones en las variables x, y. Además $p > 0$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ resultan de combinaciones lineales entre A_1, A_2, B_1, B_2.

Para $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0, q = 0$ el sistema de ecuaciones (4) en su forma compleja

$$p\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{5}$$

define conforme a (3) y (4) las llamadas funciones p – analíticas de característica p.

Para $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ el sistema de ecuaciones (4) en su forma compleja

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \sigma = p - iq, \tag{6}$$

define las funciones (p, q) – analíticas de caracteristica p y q.

Otra generalización natural de la ecuación (1) proviene del sistema

$$\frac{\partial f}{\partial y} - J\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

para un vector de funciones $f = (f_1, \ldots, f_s)$ donde J es una matriz constante de tamaño $s \times s$ que no tiene autovalores reales. Desde este punto de vista la ecuación (7) fue investigada por Avron Douglis bajo la suposición que la matriz J es un matriz triangular de Toeplitz, i. e., estas entradas dependen únicamente de la diferencia de índices [1].

Douglis [7] introdujo un álgebra y una clase de funciones que representan la parte principal de un sistema de $2r$ ecuaciones con $2r$ incógnitas y dos variables independientes. En el álgebra de Douglis este sistema de ecuaciones puede ser representado por una sola ecuación "hipercompleja".

Los operadores del tipo de Cauchy resultan una herramienta fundamental en el estudio de los problemas de frontera de la teoría de funciones hipercomplejas. Un aspecto básico en este sentido resulta el estudio de la conexión entre la continuidad de la integral del tipo de Cauchy y el acotamiento de la integral singular asociada.

Suponiendo que γ es una curva cerrada rectificable de Jordán orientada en el plano complejo $\mathbb{C}$ es conocido que la misma lo divide en dos dominios $\Omega^- := \mathbb{C}\backslash(\Omega^+ \cup \gamma)$ y $\Omega^+ := Int(\gamma)$.

Dada una función f continua $\mathbb{C}$–valuada y definida en γ, la integral del tipo de Cauchy en el análisis complejo clásico se define en $\mathbb{C}\backslash\gamma$ como

$$\mathbf{C}_{\gamma} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Mientras que la integral singular asociada a $\mathbf{C}_{\gamma} f(z)$ esta definida como

$$\mathbf{S}_{\gamma} f(z) := \int\limits_{\gamma} \frac{f(\tau) - f(z)}{\tau - z} \, d\tau, \quad z \in \gamma,$$

en el sentido de valor principal de Cauchy.

La existencia de los valores límites de $\mathbf{C}_{\gamma} f$ están íntimamente ligados con el valor principal de la integral singular. Relación expresada por el siguiente resultado clásico.

Teorema 1 (Teorema de Privalov [8])**.** *Sea γ una curva cerrada rectificable de Jordán, f una función continua sobre ella.*

1. *Si la integral del tipo de Cauchy $\mathbf{C}_{\gamma} f(t)$ tiene valores límites $\mathbf{C}_{\gamma}^{\pm} f(t)$ (cuando z se aproxima a t desde $\Omega^{\pm}$ no tangencialmente), casi seguramente con respecto a la longitud de arco entonces $\mathbf{S}_{\gamma} f(t)$ existe para casi todo $t \in \gamma$ y se cumplen las fórmulas*

$$\mathbf{C}_{\gamma}^{\pm}[f] = \frac{1}{2} \left(\mathbf{S}_{\gamma} f(t) \pm f(t) \right). \tag{8}$$

2. *Recíprocamente si $\mathbf{S}_{\gamma} f(t)$ existe para casi todo $t \in \gamma$ entonces la integral del tipo de Cauchy $\mathbf{C}_{\gamma} f(t)$ tiene valores límites $\mathbf{C}_{\gamma}^{\pm}$ no tangenciales casi seguramente sobre γ y las fórmulas en (8) se cumplen.*

Las fórmulas antes mencionadas son denominadas fórmulas de Sokhotski– Plemelj. Por otra parte el acotamiento de la integral singular resulta dado el siguiente resultado

Teorema 2 (Teorema de Invarianza)**.** *Sea γ un círculo. Entonces, para $0 < \alpha < 1$ se cumple*

$$f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\gamma) \Longleftrightarrow \mathbf{S}_{\gamma} f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\gamma),$$

donde $\mathcal{C}^{0,\nu}(\gamma)$, con $0 < \nu \leq 1$, denota el espacio de funciones Hölder continuas en γ con exponente ν.

El objetivo principal de la presente tesis es demostrar una generalización de ambos resultados al caso de curvas rectificables de Jordán α–Carleson y al espacio de funciones continuas de Hölder generalizadas en el contexto del analisis de Douglis.

El capítulo 1 presentará los preliminares necesarios, el capítulo 2 abordará las herramientas fundamentales pertenecientes a la geometría de las curvas y al espacio de funciones conocidos. El capítulo 3 brindará la relación entre el sistema complejo de ecuaciones del tipo (7) y una simple ecuación hipercompleja. Para concluir con las demostraciones de las propiedades de continuidad y acotamiento de los operadores integrales del tipo de Cauchy en el contexto α – Carleson y sobre funciones continuas Hölder generalizadas en el capítulo 4.

Capítulo 1

Análisis hipercomplejo.

"Ciertas ecuaciones algebraicas solo tienen solución en nuestra imaginación"
Rene Descartes.

La teoría de funciones hipercomplejas en particular la asociada con el operador de Douglis en $\mathbb{R}^2$ (identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ en la manera usual) ha recibido mucha atención porque ofrece una generalización natural al análisis complejo clásico en el plano y además es de uso práctico. Para más detalles se puede revisar el libro de Gilbert y Buchanan [9]. El sistema Douglis, un sistema de primer orden en dos variables independientes, puede ser representado por una simple ecuación hipercompleja.En [7] se hace un extenso estudio de la teoría de funciones hiperanalíticas.

A continuación se presentarán definiciones y resultados básicos sobre el álgebra de Douglis extraídas de [7].

1.1. Álgebra de Douglis

Consideremos el espacio lineal generado por (i, e) con la siguiente regla de multiplicación

$$i^2 = -1, \quad e^0 = 1, \quad ie = ei, \quad e^r = 0,$$

donde r es un entero positivo.

Los elementos de este espacio son combinaciones lineales con coeficientes reales de $2r$ elementos linealmente independientes

$$e^k, \quad ie^k, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Por lo tanto un elemento arbitrario del espacio lineal generado (denotado por $\mathbb{D}$) será un número hipercomplejo de la forma

$$a := \sum_{k=0}^{r-1} a_k e^k,$$

donde cada a_k es un número complejo; a_0 y $\sum_{k=1}^{r-1} a_k e^k$ se llaman **parte compleja** y **parte nilpotente** respectivamente.

Definición 1. Sean $a, b \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Será $a = b$ si, y solo si $a_k = b_k$ para $k = 0, 1, \ldots, r-1$. Con a, b, λ asociamos tres números de Douglis que escribimos $a + b, a \cdot b, \lambda a$ definidos como sigue:

- $a + b := \sum_{k=0}^{r-1} (a_k + b_k) e^k$,
- $a \cdot b := \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{k} (a_{k-l} b_l)\, e^k$ (tambien podemos escribir ab sin temor a confusiones),
- $\lambda\, a := \sum_{m=1}^{r-1} (\lambda a_k)\, e^k$.

Obsevación. Denotaremos por

$$\mathbf{1} = \sum_{k=0}^{r-1} a_k e^k \quad \& \quad \mathbf{0} = \sum_{k=0}^{r-1} b_k e^k$$

donde $a_0 = 1, b_0 = 0$ y $a_k = b_k = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, r-1$; $\mathbf{1}, \mathbf{0}$ denotaran la identidad multiplicativa y aditiva respectivamente y estas son únicas.

Teorema 3. *Las leyes conmutativas, asociativa y distributivas subsisten para las operaciones de adición y multiplicación definidas anteriormente.*

Teorema 4. *Para todo número de Douglis "a" tenemos* $a + \mathbf{0} = a$; $a\mathbf{1} = a$; $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Teorema 5. *Si* $a, b, c \in \mathbb{D}$ *son tales que* $a + b = a + c$ *entonces* $b = c$.

Teorema 6. *Para todo número de Douglis "a", hay uno, y sólo uno, "b" tal que* $a + b = \mathbf{0}$. *Este número lo denotamos como* $-a$

Teorema 7. *Escribiendo* $a - b$ *por* $a + (-b)$ *tenemos*

- $a - a = \mathbf{0}$,
- $(-a)b = a(-b) = -\mathbf{1}ab$.

De modo que no hay ambigüedad si escribimos $-ab$ en lugar de cualquiera de las expresiones anteriores.

Proposición 1. *Sea* $a \in \mathbb{D}$ *con* $a_0 \neq 0$ *entonces el inverso multiplicativo de* a *está dado por*

$$a^{-1} = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \left(\frac{A}{a_0} \right)^k, \tag{1.1}$$

donde A *es la parte nilpotente de* a.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{D}$ y tomemos

$$A := a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + +a_{r-1} e^{r-1}$$

como $a_0 \neq 0$ existe $a_0^{-1} \in \mathbb{C}$, así pues basta encontrar el inverso multiplicativo de

$$f := 1 + a_0^{-1} A.$$

Si

$$(1 + a_0^{-1} A) \overbrace{(1 - a_0^{-1} A + a_0^{-2} A^2 + \cdots + (-1)^{r-1} A^{r-1})}^{d} = f\, d$$

tenemos que

$$\begin{aligned} f\, d = 1 \quad - & \quad a_0^{-1} A + a_0^{-2} A^2 + \cdots + (-1)^{r-1} A^{r-1} \\ + & \quad a_0^{-1} A - a_0^{-2} A^2 + \cdots - (-1)^{r-1} A^{r-1} + (-1)^r A^r \end{aligned}$$

como $A^r = \mathbf{0}$, tenemos que $f\, d = \mathbf{1}$ y el álgebra es conmutativa entonces existe a^{-1} y tiene la forma (1.1). $\square$

Obsevación. Si $a_0 = 0$ entonces a no tiene inverso multiplicativo, pues es nilpotente.

Definición 2. Se introduce el conjugado de un número hipercomplejo como

$$\bar{a} := \sum_{k=0}^{r-1} \overline{a_k} e^k.$$

Con base en el módulo de los números complejos surge

Proposición 2. $\| \, \| : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$\|a\| := \sum_{k=0}^{r-1} |a_k|$$

es una norma.

Demostración. Dados a, $b \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

1. $\|\lambda\, a\| = \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda a_k| = \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda||a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{r-1} |a_k| = |\lambda|\|a\|$,
2. $\|a+b\| = \sum_{k=0}^{r-1} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=0}^{r-1} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=0}^{r-1} |a_k| + \sum_{k=0}^{r-1} |b_k| = \|a\| + \|b\|$
3. Si $\|a\| = 0$ entonces $\sum_{k=0}^{r-1} |a_k| = 0$ luego $a_k = 0, \forall k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ así pues $a = 0$,
4. Además si $|a_k| \geq 0$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, entonces $\|a\| \geq 0$.

Debido a 1 – 4 podemos concluir que $\| \, \|$ es una norma. □

Observación. En general no se cumple $a\, \overline{a} = \|a\|^2$. Sea $a \in \mathbb{D}$ tal que $a_{r-1} \neq 0$ entonces

$$a_{r-1} e^{r-1} \overline{a_{r-1}} e^{r-1} = 0 \tag{1.2}$$

este elemento es un factor del producto $a\bar{a}$, por otra parte

$$\|a\| = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{r-1}| = (a_0 \overline{a_0})^2 + (a_1 \overline{a_1})^2 \cdots + (a_{r-1} \overline{a_{r-1}})^2.$$

el último factor de la anterior sumatoria es distinto de cero, ademas por (1.2) el no aparece en $a\overline{a}$.

Nota. Todo número hipercomplejo puede ser descompuesto de manera única en la forma

$$a = \sum_{k=0}^{r-1} \mathfrak{Re}(a_k) e^k + i \sum_{k=0}^{r-1} \mathfrak{Im}(a_k) e^k,$$

donde $\mathfrak{Re}(a), \mathfrak{Im}(a)$ son la parte real e imaginaria del número complejo a. Abusando de la notación denotaremos con

$$\mathfrak{Re}(a) := \sum_{k=0}^{r-1} \mathfrak{Re}(a_k) e^k \quad \text{ y } \quad \mathfrak{Im}(a) := \sum_{k=0}^{r-1} \mathfrak{Im}(a_k) e^k.$$

Proposición 3. $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ *es un álgebra.*

Demostración. Sean $a, b, c \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} a\,(b+c) &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{k} a_k \left(b_{k-l} + c_{k-l}\right) e^k \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{k} a_k b_{k-l} e^k + \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{k} a_k c_{k-l} e^k \\ &= a\ b + a\ c \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} (b+c)\,a &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{k} \left(b_k + c_k\right) a_{k-l} e^k \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{k} b_k a_{k-l} e^k + \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{k} c_k a_{k-l} e^k \\ &= b\ a + c\ a \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$
\begin{aligned}
a\,(\lambda\, b) &= \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{k} a_k\,(\lambda b_{k-l})\,e^k \qquad (1.5)\\
&= \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{k}(\lambda a_k) b_{k-l} e^k = (\lambda\, a)\, b\\
&= \lambda \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{k} a_k b_{k-l} e^k = \lambda(a\, b)
\end{aligned}
$$

ya que se cumplen las condiciones (1,3), (1,4) y (1,5), podemos concluir que $\mathbb{D}$ es un álgebra. En adelante $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ será llamada Álgebra de Douglis. $\square$

Hasta aquí, hemos demostrado que los números de Douglis con la adición y la multiplicación dadas en la definición satisfacen ciertas las leyes aritméticas.

Obsevación. Podemos identificar el número complejo z con un número de Douglis de la siguiente manera

$$\sum_{k=0}^{r-1} a_k\, e^k,$$

donde $a_0 = z$ y $a_k = 0$, para todo $k = 1, 2, \dots, r-1$. Por lo que los números complejos están encajados en el Álgebra de Douglis.

1.2. Funciones de Douglis

Existen diversas generalizaciones de funciones dentro del estudio de análisis complejo, en esta sección nos enfocaremos al estudio de funciones que toman valores complejos y las relacionaremos con el objeto de estudio de la sección anterior la llamada álgebra de Douglis.

Definición 3. Entenderemos por una función de Douglis f, a una relación entre el campo de los números complejos y el álgebra de Douglis, de la siguiente manera

$$f : G \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$z \longmapsto \sum_{k=0}^{r-1} f_k(z) e^k$$

donde las $f_k{}'s$ son funciones complejo valuadas con dominio en G.

Obsevación. Las funciones de Douglis estan relacionadas con funciones que toman valores complejos, por lo que se entenderá como un dominio a un conjunto abierto conexo, como lo es en el análisis complejo clásico.

Nota. Una función Douglis–valuada f sobre un dominio $G \subset \mathbb{C}$ se dice perteneciente a una clase de funciones sobre G si cada componente f_k pertenece a dicha clase. De donde se tiene el siguiente listado de afirmaciones:

1) $f \in \mathcal{C}(G)$ si, y sólo si las f_k son funciones continuas.

2) $f \in \mathcal{C}^k(G)$ si, y sólo si las f_k son funciones k veces continuamente diferenciables.

3) $f \in \mathcal{B}(G)$ si, y sólo si las f_k son funciones acotadas en G.

4) $f \in \mathcal{C}^{0,\,\nu}(G)$ si, y sólo si las f_k son funciones continuas de Hölder con exponente ν con $0 < \nu < 1$.

5) $f \in \mathcal{B}^{k,\,\nu}(G)$ si, y sólo las f_k son funciones acotadas, k veces continuamente diferenciables de Hölder con exponente ν con $0 < \nu < 1$.

Sin pérdida de generalidad para el caso de funciones complejo valuadas utilizaremos las mismas notaciones.

Capítulo 2

Herramientas del análisis hipercomplejo.

"Las Teorías vienen y se van,
los ejemplos se quedan"
Izrail Gélfand.

Antes de proceder a la resolución inmediata del problema planteado en la introducción, se deben estudiar previamente las propiedades del aparato matemático que se utiliza para resolverlos. El presente capítulo es de caracter auxiliar. El material será expuesto de manera rápida y concisa, con la finalidad de presentar las condiciones necesarias para los capítulos posteriores.

2.1. Elementos básicos sobre la geometría y funciones

Una curva $\gamma \subset \mathbb{C}$ es la imagen de una aplicación continúa $\vartheta : [a, b] \to \mathbb{C}$. A los puntos $\vartheta(a), \vartheta(b)$ se les llama punto inicial y punto final respectivamente. Ambos reciben el nombre de extremos de la curva.

Se dice cerrada cuando sus extremos coinciden, esto es, $\vartheta(a) = \vartheta(b)$. En adelante sólo trabajaremos con este tipo de curvas.

Definición 4. [10] Denotaremos por curva suave, aquí y en lo sucesivo, una curva de Jordán (es decir, sin puntos múltiples) cerrada, cuya tangente cambia continuamente; además, esta curva no tiene puntos de retroceso.

Denotaremos por $d = diam(\gamma) := \sup_{t_1,t_2\in\gamma} |t_1 - t_2|$.

Obsevación. Sea γ un contorno cerrado suave en el plano complejo. El dominio dispuesto dentro del contorno γ lo llamaremos interior y designaremos Ω^+, y el dominio complementario a $\Omega^+ \cup \gamma$, en el cual esta el punto infinitamente alejado, lo llamaremos dominio exterior y denotaremos Ω^-.

Dada una curva continua γ y supongamos que dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos [11]

$$[t_{k-1}, t_k] \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

introduciendo $n - 1$ puntos intermedios $t_1, \ldots, t_{n-1}$ que tiene el comportamiento siguiente

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

El conjunto

$$\mathcal{P} = t_0, \cdots, t_n$$

es llamado una partición del intervalo $[a.b]$ y

$$|\mathcal{P}| = \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}\}$$

es llamada la norma de la partición. Con respecto a la partición dada, γ se divide en n arcos

$$\varsigma_k = z_k \overset{\frown}{z_{k-1}} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

donde

$$z_k = \vartheta(t_k) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

(entenderemos por $\overset{\frown}{AB}$ a una curva que une los puntos A, B). El punto final de cada arco coincide con el incial del siguiente. Uniendo cada uno de los puntos $z_0, z_1, \ldots, z_n$ con el siguiente por medio de un segmento de linea recta, obtenemos una curva poligonal Λ inscrita en γ. Los segmentos de Λ son los arcos unidos de los puntos finales ς_k y la longitud de Λ es

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$

entonces γ se dice rectificable si

$$\sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| = L < \infty$$

el número no negativo L se dice *la longitud de la curva* γ.

Una caracterización de dicha propiedad se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 8. [12]*Una curva γ se dice rectificable si posee longitud finita; es decir si la aplicación ϑ es de Lipschitz i. e.*

$$|\vartheta(x) - \vartheta(y)| \leq \ C|x - y|, \quad \textit{para todo } x, y \in \gamma. \tag{2.1}$$

En lo que respecta a las funciones de valores reales y su comportamiento tenemos las caracteristicas y propiedades de monotonía siguientes.

Definición 5. [13] Dada una función $\varphi : [0, d] \to \mathbb{R}$.

- Se dice creciente (decreciente), si $\varphi(x) < \varphi(y)$ para todo $x < y$ (o $x > y$ respectivamente) donde $x, y \in [0, d]$.
- Se dice que es casi–creciente (o casi–decreciente) abreviado c. c. y c. d. Si existe una constante $C > 1$ tal que $\varphi(x) \leq C\varphi(y)$ para todo $x \leq y$ (o $x \geq y$, respectivamente).

Teorema 9. [14] *Toda función no decreciente (no creciente) es una función casi–creciente (casi–decreciente).*

Obsevación. Sean φ, ψ funciones $\mathbb{R}$–valuadas no negativas sobre $[0, d]$, son equivalentes si existen c_1, $c_2 > 0$ tal que

$$c_1\varphi(\delta) \leq \psi(\delta) \leq c_2\varphi(\delta).$$

A menudo resulta útil considerar las características que relacionan los conceptos anteriores.(ver más [15])

$$\theta_t(\xi) := mes\, \gamma_\xi(t,) \quad t \in \gamma, \quad \xi \in (0, d], \tag{2.2}$$

$$\theta(\xi) := \sup_{t\in\gamma} \theta_t(\xi), \tag{2.3}$$

donde $\gamma_\xi(t) := \{\tau \in \gamma : |\tau - t|\} \leq \xi\}$ y "mes" se refiere a la longitud del arco.

Las características $\theta(\xi)$ y $\theta_t(\xi)$ son funciones no decrecientes de ξ que satisfacen $\theta_t(0+) = 0, \theta(0+) = 0$ (donde $0 + representa \lim\limits_{x \to 0^+} x$)y $\xi \leq \theta_t(\xi) \leq \theta(\xi)$.

Lema 1. [16] *Sea $g : (0, d] \to \mathbb{R}$ una función no creciente entonces*

$$\int\limits_{\gamma_{\varepsilon'}(t)\setminus\gamma_{\varepsilon''}(t)} g(|\tau - t|)\,|d\tau| = \int\limits_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} g(\tau)\,d\theta_t(\tau), \tag{2.4}$$

para todo $\varepsilon', \varepsilon'' \in (0, d]$ *tal que* $\varepsilon' < \varepsilon''$.

Demostración. Sean $\varepsilon' = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ \ldots < \varepsilon_N = \varepsilon''$. Entonces

$$\int\limits_{\gamma_{\varepsilon'}(t)\setminus\gamma_{\varepsilon''}(t)} g(|\tau - t|)\,|d\tau| = \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{\gamma_{\varepsilon_{i+1}}(t)\setminus\gamma_{\varepsilon_i}(t)} g(|\tau - t|)\,|d\tau|$$

puesto que g es no creciente tenemos que

$$\sum_{i=0}^{N-1} g(\varepsilon_{i+1})\,(\theta_t(\varepsilon_{i+1}) - \theta_t(\varepsilon_i)) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{\gamma_{\varepsilon_{i+1}}(t)\setminus\gamma_{\varepsilon_i}(t)} g(|\tau - t|)\,|d\tau| \leq \sum_{i=0}^{N-1} g(\varepsilon_i)\,(\theta_t(\varepsilon_{i+1}) - \theta_t(\varepsilon_i))\,,$$

como los ε_i *'s* forman una partición de $(0, d]$, entonces haciendo $\max\limits_i (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)$ tender a cero. Tenemos

$$\sum_{i=0}^{N-1} g(\varepsilon_i)\,(\theta_t(\varepsilon_{i+1}) - \theta_t(\varepsilon_i)) = \int\limits_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} g(\tau)\,d\theta_t(\tau),$$

cumpliéndose así la afirmacón deseada. □

En la teoría de integración a lo largo de curvas rectificables es común estudiar funciones con singularidades dentro de dichas curvas, en este estudio existe un tipo de integración impropia que se construye de manera simétrica.

Definición 6. [10] Sea γ una curva cerrada rectificable de Jordán en $\mathbb{C}$, para un punto fijo $c \in \gamma$ sea f una función integrable sobre $\gamma \backslash \{c\}$ con una singularidad en c, si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon(t)} f(\tau)\, d\tau$$

existe éste valor se denotará como el valor principal de Cauchy de la integral con singularidad en c.

2.2. Curvas α – Carleson

Dada la clase de curvas rectificables cerradas de Jordán, uno de los intereses principales del trabajo es tratar con una clase más amplia que la familia de curvas conocidas como Carleson (o A. D. – regulares descritas a través de la métrica característica $\theta(\xi) \sim \xi$). A. Bröttcher *et al* en [17, pags.5–6] presenta un ejemplo de una familia de curvas bastante útil, en el trabajo se probará que bajo ciertas condiciones se pueden tener un ejemplo de una curva α – Carleson que no sea Carleson. Por otra parte se incluye el trabajo construido por Gonzalez y Seifullaev en [18].

Definición 7. Una curva γ se dice α – Carleson con $0 < \alpha \leq 1$ si esta satisface la condición

$$\theta(\xi) \leq c\, \xi^\alpha, \text{ para } \xi \in (0, d],$$

donde c es una constante positiva que no depende de ξ.

Obsevación. Una curva α – Carleson con $\alpha = 1$ se llamará solo Carleson.

Proposición 4. [19] *Si γ es una curva cerrada rectificable de Jordán se tiene*

$$\xi \leq \theta(\xi) \quad \textit{para } \xi \in (0, d].$$

Lema 2. [17] *Si*

$$\gamma : = \{\tau \in \mathbb{C} | \tau = x + if(x),\, a < x < b\},$$

con

$$f \in \mathcal{C}\left([a,b]\right) \cap \mathcal{C}^1\left([a,b]\right) \text{ y } |f'(x)| < M \quad \forall\, x \in (a,b)$$

entonces γ es una curva Carleson.

2.2.1. Ejemplos de curvas $\alpha -$ Carleson

De los principales ejemplos de curvas α – Carleson propios de esta clase tenemos los siguientes.

Proposición 5. [17] *Sea $\beta > 0$ y*

$$\gamma := \{0\} \cup \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, \tau = x + ix^{\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), 0 < x < 1\}.$$

entonces

- *γ es Carleson para $\beta \geq 2$,*
- *γ es Carleson para $1 < \beta < 2$,*
- *γ no es rectificable para $0 < \beta < 1$,*

Demostración. Tomemos $f(x) = x^{\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Por otra parte como

$$f'(x) = \beta x^{\beta-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\beta-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

la cual está acotada sobre $(0, 1)$ para $\beta \geq 2$ empleando el Lema 2, entonces tenemos que γ es una curva Carleson.

Tomando $x_n \in \left(\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right)$ tal que $\left|sen\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| = 1$. Se cumplen las siguientes desigualdades para algún $N \geq 1$

$$N\pi\theta_0\left(\frac{1}{N\pi}\right) \geq N\pi \sum_{0<x_n<\frac{1}{N\pi}} x_n^{\beta} \geq N\pi \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)^{\beta}$$

en la última parte de la desigualdad (de izquierda a derecha) la suma diverge para $\beta \leq 1$, haciendo así γ no rectificable.

Por ultimo, fijemos $1 < \beta < 2$, por (2.3) tenemos

$$
\begin{aligned}
\theta_t(\varepsilon) &= \int\limits_{\gamma(t,\varepsilon)} |d\tau| \\
&\leq \int_{\max\{0,t-\varepsilon\}}^{\min\{1,t+\varepsilon\}} \sqrt{1+\left(\beta x^{\beta-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\beta-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2}\,dx,
\end{aligned}
$$

para ε suficientemente pequeño tenemos

$$\theta_t(\varepsilon) \leq \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \sqrt{1+(\beta-1)x^{-2(2-\beta)}}dx,$$

puesto que el integrando es una función decreciente tenemos que

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \sqrt{1+(\beta-1)x^{-2(2-\beta)}}dx \leq \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \sqrt{1+(\beta-1)(t-\varepsilon)^{-2(2-\beta)}}dx,$$

así

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \sqrt{1+(\beta-1)(t-\varepsilon)^{-2(2-\beta)}}dx = \sqrt{1+(\beta-1)(t-\varepsilon)^{-2(2-\beta)}}\varepsilon.$$

Tomando $t \geq 2\varepsilon$ se cumple

$$\sqrt{1+(\beta-1)(t-\varepsilon)^{-2(2-\beta)}} \leq \sqrt{(\beta-1)}\varepsilon^{\beta-1}$$

entonces

$$\theta_t(\varepsilon) \leq \sqrt{(\beta-1)}\varepsilon^{\beta-1}$$

Ahora bien si $t = 0$

$$\theta_t(\varepsilon) \leq \varepsilon$$

De (2.3) concluimos

$$\theta(\varepsilon) \leq \sqrt{(\beta-1)}\varepsilon^{\beta-1}$$

por lo tanto que γ es una curva $(\beta-1)$ – Carleson, para $1 < \beta < 2$.

$\square$

Otro ejemplo de este tipo de curvas fue construido por Gonzalez y Seifullaev en [18].

Sea $\beta = 1 - \alpha$ donde $0 < \alpha < 1$, se construye la sucesión de puntos $v_n = 2^{-n}$, con $n = 1, 2, \ldots$, la cual esta contenida en el eje real del plano complejo.

Sea $N_n = \left[2^{-\beta\, n}\right]$, donde $[*]$ representa la parte entera del número real $*$.

Por medio de los puntos

$$z_n^k = v_{n+1} + (v_n - v_{n+1})\frac{k}{2N_n} = v_{n+1}\left(1 + \frac{k}{2N_n}\right)$$

se divide cada intervalo (A_{n+1}, A_n) en $2N_n$ subintervalos y define los puntos

$$B_n^k = z_n^k + iv_{n+1}, \quad \text{donde}\, k = 1, 2, \ldots, 2N_n$$

ahora uniendo por medio de los segmentos derechos los puntos

$$A_{n+1}, z_n^1, B_n^1, B_n^2, z_n^3, \ldots, z_n^{2N_n-1}, B_n^{2N_n-1}, B_n^{2N_n}, A_n$$

se obtiene una línea poligonal abierta cuyos puntos extremos son A_n y A_{n+1}. Juntando las poligonales para $n = 0, 1, 2, \ldots$ se genera el arco abierto $\overset{\frown}{A_0 O}$, donde O denota el origen del eje coordenado.

Finalmente, definen la curva cerrada γ_0 como

$$\gamma_0 = \overset{\frown}{A_0 O} \cup \overline{OC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA_0}$$

donde C y D pueden ser elegidos por ejemplo $C = -i$ y $D = 1 - i$.

Afirmación 1. γ_0 *es una curva rectificable.*

Demostración. Si tenemos que

$$L_n = mes(\overset{\frown}{A_n A_{n+1}})$$

entonces

$$L_n = \frac{2N_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

de lo cual tenemos

$$\frac{2N_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n(1-\beta)}} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \left(\frac{1}{2^{\alpha}}\right)^n + \frac{1}{2^n}$$

luego

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2^\alpha} \right)^n + \frac{1}{2^n} \right] + 3,$$

asi pues γ_0 es rectificable.

Afirmación 2. *Sea $t \in \gamma_0$ con $t \neq 0$ entonces*

$$\theta_t(\delta) \leq c_1 \delta \quad con\, \delta \in (0, d].$$

Afirmación 3. *Para $t = 0$ tenemos que*

$$\theta_0(\delta) \leq c_2 \delta^\alpha \quad con\, \delta \in (0, d]$$

Demostración. Dado $\delta \in (0, d]$ existe $\xi \in \gamma_0$ tal que $|\xi| = \delta$, tambien es claro que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\xi \in \overset{\frown}{A_n, A_{n+1}}$. Asi pues

$$\theta_0(\delta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} L_k + L'$$

donde L' representa $mes(\overset{\frown}{A_{n+1}, \xi})$ y cumple que

$$L' \leq c_3 \delta$$

por otra parte

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} L_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2^\alpha} \right)^k + \frac{1}{2^k} \right] = \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1} \left(\frac{1}{2^{n+2}} \right)^\alpha + \frac{1}{2^{n+2}},$$

como $A_{n+1} \leq \delta \leq A_n$ tenemos que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} L_k \leq \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1} \delta^\alpha + \delta.$$

de lo anterior podemos concluir que

$$\theta_0(\delta) \leq c_4 \delta^\alpha \text{con}\, \delta \in (0, d].$$

De las afirmaciones anteriores tenemos que

$$\theta(\delta) \leq c\delta^\alpha \quad \text{con}\, \delta \in (0, d],$$

donde c unicamente depende de las constantes $c_i's$.

Por lo tanto γ_0 es una curva α – Carleson.

2.3. Espacios de Funciones Hölder Generalizadas.

A. Guseinov y H. Muktarov en [14, pags. 49–99] estudiaron las propiedades del módulo de continuidad de funciones acotadas. Además realizaron un estudio profundo acerca de las funciones reales positivas confinadas a un intervalo, las cuales cumplen condiciones que serán de suma importancia al momento de trabajar tanto el acotamiento como las propiedades de continuidad de los operadores del tipo de Cauchy. Así mismo N. K. Bary y S. B. Steckin en [20] construyen la rectificación de la caraterística de continuidad, la cual resulta ser un módulo de continuidad.

A continuación se describirán y mostrará la relación de este estudio con el espacio de funciones continuas generalizadas de Hölder.

2.3.1. Módulos de continuidad

Una función φ real valuda que toma valores en $[0, d]$ se llamará módulo de continuidad si cumple las siguientes condiciones [14]

1. $\varphi(0) = 0$,
2. $\varphi(\sigma)$ es una función no decreciente de σ,
3. $\varphi(\sigma)$ es subaditiva, es decir

$$\varphi(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2),$$

4. $\varphi(\sigma)$ es una función continua de σ sobre $[0, d]$. Esta última propiedad puede ser deducida de la anterior.

Dada una función f real valuada acotada que toma valores en γ la característica de continuidad de la función f esta definida como

$$\sup_{|t_1 - t_2| < \sigma} |f(t_1) - f(t_2)| =: \omega(f, \sigma) \qquad t_1, t_2 \in [0, d],$$

para todo σ tal que $0 < \sigma \leq d$.

Obsevación. La condición $\lim\limits_{\sigma \to 0} \omega(f, \sigma) = 0$ es necesaria y suficiente para que $f(t)$ sea una función continua.

Por otra parte consideremos funciones $\varphi : (0, d] \to \mathbb{R}^+$ que cumplan las siguientes propiedades

1. $\lim\limits_{\sigma \to 0} \varphi(\sigma) = 0$
2. φ sea casi–creciente.

llamemos a esta clase de funciones $\Phi_{(0,d]}$.

Obsevación. La clase de módulos de continuidad se encuentra dentro la clase $\Phi_{(0,d]}$.

Lema 3. *Sea una función φ no decreciente y continúa sobre $[0, d]$ tal que $\varphi(t)/t$ es no creciente y $\varphi(0) = 0$, entonces $\varphi(t)$ es un módulo de continuidad.*

Demostración. Tenemos que φ cumple las condiciones 1) 2) y 4), pues por el Teorema 9, φ es casi–creciente y $\varphi(t)/t$ es casi–decreciente ahora bien se probará que si $\varphi(x)/x$ es no creciente entonces φ es subaditiva.

Dados σ_1, σ_2 tales que $0 < \sigma_1 + \sigma_2 \leq d$ entonces

$$\varphi(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_1 \frac{\varphi(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} + \sigma_2 \frac{\varphi(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} \leq \varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2)$$

por lo que φ es subaditiva. □

Obsevación. Las funciones que satisfacen las condiciones del Lema 3 también pertenecen a $\Phi_{(0,d]}$, más aún esta inmersas en los módulos de continuidad.

2.3.2. La Clase Bari – Stechkin parametrizada

La clase $\Phi_{[a,b]}$ es la clase más abstracta pues pide menos requerimientos sobre el comportamiento de la función, la siguiente sección abordará una clase de funciones encajada en $\Phi_{[a,b]}$ que resulta ser el eje del problema general planteado en esta tesis.

Dada función $\varphi \in \Phi_{(0,d]}$ y $0 < \alpha \leq 1$, entonces φ pertenece a la clase Bari – Stechkin parametrizada en adelante denotado por Φ_α si cumple las siguientes condiciones:

$B_\alpha)$ $\sup\limits_{\sigma > 0} \dfrac{1}{\varphi_\alpha(\sigma)} \displaystyle\int_0^\sigma \frac{\varphi_\alpha(t)}{t} dt = A_{\varphi_\alpha} < \infty;$

$C_\alpha)$ $\sup\limits_{\sigma>0} \dfrac{\sigma}{\varphi_\alpha(\sigma)} \displaystyle\int\limits_\sigma^d \dfrac{\varphi_\alpha(t)}{t^2} dt = B_{\varphi_\alpha} < \infty;$

donde $\varphi_\alpha = \dfrac{\varphi(t)}{t^{1-\alpha}}$.

Dentro de las característica de la clase Φ_α tenemos, dado $\varphi \in \Phi_\alpha$ [14]

a) $\dfrac{\varphi_\alpha(t)}{t}$ es casi–decreciente.

b) Existen $0 < \nu, \eta < 1$ tales que $\dfrac{\varphi(t)}{t^\nu}$ es casi–creciente y $\dfrac{\varphi(t)}{t^\eta}$ casi–decreciente.

c) $\overline{\varphi}(t) := \dfrac{t}{\varphi(t)} \in \Phi_\alpha$

Obsevación. Si $\alpha = 1$ tenemos Φ_1 (en adelante indentificado sólo como Φ) y $\varphi_\alpha \equiv \varphi$ la cual es conocida como la clase Bari – Stechkin. Más aún $\Phi \subset \Phi_\alpha$ pues si tomamos $\varphi(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Tenemos que $\varphi \in \Phi_{(0,d]}$ y la propiedad B_1 de la clase Φ no se cumple, pues

$$\frac{\sigma}{\sigma^{\frac{3}{2}}} \int\limits_\sigma^d \frac{t^{\frac{3}{2}}}{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int\limits_\sigma^d \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \left(\sqrt{d} - \sqrt{\sigma}\right) \to \infty \quad \text{cuando } \sigma \to 0.$$

Pero si tomamos $\varphi_{\frac{1}{3}}(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{2}{3}}} = t^{\frac{5}{6}}$, la cual pertenece a la clase Φ_α.

Obsevación. Φ está dentro de la clase de módulos de continuidad.

Demostración. Tenemos que para $\alpha = 1$, de la condición C_1 se sigue que $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ es casi–decreciente, entonces $\varphi \in \Phi_1$, luego es un módulo de continuidad. □

Ejemplos de la clase Φ [14]

1. $\varphi(t) = t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$
2. $\varphi(t) = t^\alpha |\ln(t)|^p, \quad \varphi(0) = 0, \quad$ con $0 < \alpha < 1$, $p > 0$, $t \in [0, 1/2]$.
3. $\varphi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n t^{\delta_n}$, con $K_n > 0$, $0 < \delta_n < 1$, $\lim\limits_{n\to 0} \delta_n = \delta > 0$, $\delta_n > \delta \; \forall n \geq 1$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n < \infty$.

4.
$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{\alpha}, & \text{si} \quad 0 \leq t \leq d/2, \\ t^{\alpha} + 1, & \text{si} \quad d/2 \leq t \leq d. \end{cases}$$

La clase Φ resulta ser una clase más práctica para mostrar ejemplos, además a partir de ella podemos construir algunos ejemplos de la clase Φ_α.

Ejemplos de la clase Φ_α

- Sean $0 < \nu < 1$, $\varphi(t) := t^{\nu}$ tomando $\varphi_\alpha(t) := t^{\nu-(1-\alpha)}$ cumple B_α y C_α con $1 < \nu + \alpha < 2$, entonces $\varphi \in \Phi_\alpha$
- Si $\varphi(t) := t \ln|\frac{1}{t}|$ tomando $\varphi_\alpha(t) := t^{\alpha} \ln|\frac{1}{t}|$ cumple B_α y C_α para todo α con $0 < \alpha < 1$.

A continuación se presentará la rectificación de la caracteristica de continuidad que asegurará que se comporta como un módulo de continuidad. Estos estudios fueron realizados por Barin y Stechkin en [20].

Para $f \in \mathcal{C}(\gamma)$ introducimos la característica de continuidad rectificada como
$$\omega_f(\delta) = \delta \sup_{\xi \geq \delta} \sup_{t_1,t_2 \in \gamma, |t_1 - t_2| \leq \xi} |f(t_1) - f(t_2)|, \quad \delta \in (0, d].$$

Obsevación. La característica de continuidad rectificada pertenece a la clase Φ.

Sea γ una curva rectificable cerrada de Jordán y $\varphi \in \Phi_{(0,d]}$ se define el espacio de funciones continuas de Hölder generalizadas
$$\mathcal{H}_\varphi(\gamma) := \{ f \in \mathcal{C}(\gamma) \ : \ \omega_f(\xi) \ \leq \ c\varphi(\xi), \ \xi \in (0, d] \ \},$$
donde $d = diam(\gamma)$. Y dotado con la norma
$$\|f\|_{\mathcal{H}_\varphi} := \|f\|_\infty \ + \ \sup_{\xi \,\in\, (0,d]} \frac{\omega_f(\xi)}{\varphi(\xi)},$$
para todo $f \in \mathcal{H}_\varphi(\gamma)$.

Nota. Si $\varphi \in \Phi$ es tal que $\varphi(t) := t^{\nu}$ con $0 < \nu \leq 1$ se reduce al espacio de funciones continuas de Hölder clásico.

Teorema 10. *El espacio de funciones continuas de Hölder generalizadas es completo.*

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones generalizados de Cauchy – Riemann.

"El camino mas corto entre dos verdades del analisis real, pasan con frecuencia por el analisis complejo"
Hadamard

Dado un sistema de ecuaciones reales cuyos coeficientes A, B son matrices reales de orden $2r \times 2r$ y C un vector columna real valuado de longitud $2r$ con $r \in \mathbb{N}$,

$$A(x,y)\frac{\partial}{\partial x}U(x,y) + B(x,y)\ \frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = C(x,y) \tag{3.1}$$

en la cual

$$U^T := \left(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_{r-1}, v_{r-1}\right)$$

y las $u_i{}'s, v_i{}'s$ son funciones de $\mathbb{R}^2$ de valores reales.

Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden se dice elíptico en un dominio $\mathfrak{G} \subset \mathbb{R}^2$ si la matriz $A^{-1}B$ no tiene autovalores en ningún punto de $\mathfrak{G}$.

Obsevación. Para matrices real-valuadas esto puede pasar solamente si el sistema es de dimensión par.

Para la parte principal de este trabajo se tomaron las siguientes condiciones sobre el sistema (3.1):

$$A := \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
a_1 & -b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
b_1 & a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
a_2 & -b_2 & a_1 & -b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
b_2 & a_2 & b_1 & a_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_l & -b_l & a_{l-1} & -b_{l-1} & a_{l-2} & -b_{l-2} & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
b_l & a_l & b_{l-1} & a_{l-1} & b_{l-2} & a_{l-2} & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_{r-1} & -b_{r-1} & a_{r-2} & -b_{r-2} & a_{r-3} & -b_{r-3} & \cdots & a_{r-1-l} & -b_{r-1-l} & \cdots & 1 & 0\\
b_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-2} & a_{r-2} & b_{r-3} & a_{r-3} & \cdots & b_{r-1-l} & a_{r-1-l} & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
b_1 & a_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
-a_1 & b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
b_2 & a_2 & b_1 & a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
-a_2 & b_2 & a_1 & b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
b_l & a_l & b_{l-1} & a_{l-1} & b_{l-2} & a_{l-2} & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\\
-a_l & b_l & -a_{l-1} & b_{l-1} & -a_{l-2} & b_{l-2} & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
b_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-2} & a_{r-2} & b_{r-3} & a_{r-3} & \cdots & b_{r-1-l} & a_{r-1-l} & \cdots & 0 & -1\\
-a_{r-1} & b_{r-1} & b_{r-2} & b_{r-2} & -a_{r-3} & b_{r-3} & \cdots & -a_{r-1-l} & b_{r-1-l} & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

donde $a_k s, b_k s$ son elementos en $\mathbb{R}$.

$$C^T := \left(g_0,\, h_0,\, g_1, h_1,\, \ldots,\, g_{r-1},\, h_{r-1}\right),$$

con g_k, h_k son funciones de $\mathbb{R}^2$ con valores reales.

En el caso 2–dimensional ($r = 1$) el sistema (3.1) con las siguientes condiciones

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} y \quad C := \begin{pmatrix} g_0\\ h_0\end{pmatrix}$$

genera el sistema no homogéneo de Cauchy – Riemman dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = g_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = h_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

el cual es transformado a la siguiente ecuación compleja

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = w, \tag{3.3}$$

donde

- $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$,
- $f = u + iv$,
- $w = g_0 + ih_0$.

La parte principal de (3.3) es el conocido operador de Cauchy– Riemann.

Para el caso de la alta dimensión ($r > 2$) la simplificación del sistema (3.1), se dará utilizando el número hipercomplejo

$$q := \sum_{m=1}^{r-1} (a_m + ib_m)e^m$$

en combinación lineal con los operador de Cauchy – Riemann y su conjungado resultando el operador diferencial generalizado de Cauchy – Riemann en el sentido Douglis:

$$\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial\,\bar{z}} + q\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.4}$$

Obsevación. Tomando $f := \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} (u_k + iv_k)e^k$, el sistema (3.1) toma la forma

$$\mathcal{D}f = w, \quad \text{donde}\, w := \sum_{k=0}^{r-1} (g_k + ih_k)e^k. \tag{3.5}$$

en efecto,

Operando (3.4) sobre f y distribuyendo tenemos que

$$\mathcal{D}f = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, u_k}{\partial\, \overline{z}} e^k + i \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, v_k}{\partial\, \overline{z}} e^k + q \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, u_k}{\partial z} e^k + q\, i \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, v_k}{\partial z} e^k \tag{3.6}$$

Distribuyendo al operador de Cauchy – Riemann y sustituyendo q en (3.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f \quad = \quad & \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, u_k}{\partial x} e^k + i \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, u_k}{\partial y} e^k + i \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, v_k}{\partial x} e^k - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, v_k}{\partial y} e^k + \\ & \sum_{m=1}^{r-1} (a_m + i b_m) e^m \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, u_k}{\partial x} e^k - i \sum_{m=1}^{r-1} (a_m + i b_m) e^k \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, u_k}{\partial y} e^k + \\ & i \sum_{m=1}^{r-1} (a_m + i b_m) e^m \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, v_k}{\partial x} e^k + \sum_{m=1}^{r-1} (a_m + i b_m) e^k \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, v_k}{\partial y} e^k \end{aligned} \tag{3.7}$$

Distribuyendo q en (3.7) y agrupando parte real y compleja tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f \quad = \quad & \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, u_k}{\partial x} e^k + \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_m \frac{\partial\, u_k}{\partial x} e^{k+m} - \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} b_m \frac{\partial\, v_k}{\partial x} e^{k+m} \\ & - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, v_k}{\partial y} e^k + \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} b_m \frac{\partial\, u_k}{\partial y} e^{k+m} + \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_m \frac{\partial\, v_k}{\partial y} e^{k+m} + \\ & i \left[\sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} b_m \frac{\partial\, u_k}{\partial x} e^{k+m} + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, v_k}{\partial x} e^k + \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_m \frac{\partial\, v_k}{\partial x} e^{k+m} \right. \\ & \left. \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial\, u_k}{\partial y} e^k - \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} a_m \frac{\partial\, u_k}{\partial y} e^{k+m} + \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} b_m \frac{\partial\, v_k}{\partial y} e^{k+m} \right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

ya que el producto en el álgebra de Douglis esta bien definido tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}f \;=\; & \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\sum_{m=1}^{r-1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}+\sum_{k=0}^{m}a_{m-k}\frac{\partial u_k}{\partial x}-\sum_{k=0}^{m}b_{m-k}\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)e^m\right)+ \\
& \left(-\frac{\partial v_0}{\partial y}-\sum_{m=1}^{r-1}\left(\frac{\partial v_k}{\partial y}+\sum_{k=0}^{m}b_{m-k}\frac{\partial u_k}{\partial y}+\sum_{k=0}^{m}a_{m-k}\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)e^m\right)+ \\
& i\left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\sum_{m=1}^{r-1}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}+\sum_{k=0}^{m}b_{m-k}\frac{\partial v_k}{\partial x}+\sum_{k=0}^{m}a_{m-k}\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)e^m\right)+\right. \\
& \left.\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\sum_{m=1}^{r-1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y}-\sum_{k=0}^{m}a_{m-k}\frac{\partial u_k}{\partial y}+\sum_{k=0}^{m}b_{m-k}\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)e^m\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

(3.9) genera el siguiente sistema de $2r-2$ ecuaciones reales.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_0}{\partial x}-\dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\
\dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x} \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+a_1\dfrac{\partial u_0}{\partial x}-b_1\dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\
\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+a_1\dfrac{\partial v_0}{\partial x}+b_1\dfrac{\partial u_0}{\partial y} \\
\vdots \\
\dfrac{\partial u_l}{\partial x}+\displaystyle\sum_{k=0}^{l}a_{l-k}\dfrac{\partial u_k}{\partial x}-\sum_{k=0}^{l}b_{l-k}\dfrac{\partial v_k}{\partial y} \\
\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+\displaystyle\sum_{k=0}^{l}a_{l-k}\dfrac{\partial v_k}{\partial x}+\sum_{k=0}^{l}b_{l-k}\dfrac{\partial u_k}{\partial y} \\
\vdots \\
\dfrac{\partial u_{r-1}}{\partial x}+\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}a_{r-1-k}\dfrac{\partial u_k}{\partial x}-\sum_{k=0}^{r-1}b_{r-1-k}\dfrac{\partial v_k}{\partial y} \\
\dfrac{\partial v_{r-1}}{\partial x}+\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}a_{r-1-k}\dfrac{\partial v_k}{\partial x}+\sum_{k=0}^{r-1}b_{r-1-k}\dfrac{\partial u_{r-1}}{\partial y}
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

el sistema (3.10) toma la forma matricial (3.1). A las funciones que satisfacen $\mathcal{D}f=0$ se le dice hiperanalíticas.

3.1. Núcleo de Cauchy Generalizado

Gilbert y Buchanan en [9, págs. 7–11] estudia las soluciones de los sistemas de ecuaciones elípticos, centrándose en el operador diferencial generalizado de Douglis. A continuación describiremos una de las más importantes soluciones de este sistema también llamada solución generadora del operador $\mathcal{D}$.

Definición 8. [7] Una función hipercompleja $w(z)$ será llamada solución generadora del operador D si

- w tiene la forma $w(z) = z + \sum_{m=1}^{r-1} w_m(z) e^k$,
- $\sum_{m=1}^{r-1} w_m(z) e^k \in \mathcal{B}^1(\mathbb{C})$ y
- w es hiperanálitica en $\mathbb{C}$.

El Operador de Pompeiu para dominios acotados $(\mathfrak{G})$ se define como

$$\boldsymbol{J}_{\mathfrak{G}}[f(z)] := \int\limits_{\mathfrak{G}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi \; d\eta, \quad \text{donde} \quad \zeta = \xi + i\eta \tag{3.11}$$

Para el cálculo de una solución generadora del operador $\mathcal{D}$ son necesarias las siguientes propiedades [5]

1. Si $f \in \mathcal{B}^{n,\alpha}(\mathfrak{G})$ para algún $0 < \alpha < 1$, $n \geq 0$, y $f \in \mathbf{L}^p(\mathfrak{G})$ para algún $p, 1 \leq p < 2$, entonces $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{G}} f \in \mathcal{B}^{n+1,\alpha}(\mathfrak{G})$
2. $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \boldsymbol{J}_{\mathfrak{G}}[f(z)] = f(z), \quad z \in \mathfrak{G}$.

Sean $q_k \in \mathcal{B}^{0,\alpha}(\mathfrak{G})$ $k = 1, \ldots, r-1$, para algún $0 < \alpha < 1$, y puede ser extendidas $\mathcal{B}^{0,\alpha}(\mathbb{C})$ y se anulan fuera de un circulo suficientemente grande.

Sean

$$\begin{aligned} w_0(z) &:= z, \\ w_k(z) &:= \sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{J}_{\mathbb{C}} \left(-q_{k-j} \frac{\partial\, w_j(z)}{\partial z} \right), \quad k = 1, \ldots, r-1. \end{aligned}$$

de la propiedad 1) del operador de Pompeiu tenemos que

$$W := \sum_{k=1}^{r-1} w_k e^k \in \ \mathcal{B}^{0,\alpha}(\mathbb{C}). \tag{3.12}$$

Por otra parte de (3.4) se tiene que si

$$w = w_0 + W \quad \& \quad q = \sum_{k=1}^{r-1} q_k e^k \tag{3.13}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}w &= \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + q\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\partial w_k}{\partial \overline{z}} + \sum_{k=1}^{r-1} q_k e^k \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial w_k}{\partial z} e^k \\
&= \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \boldsymbol{J}_{\mathbb{C}} \left(-q_{k-j} \frac{\partial w_j(z)}{\partial z} \right) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{k} q_{k-j} \frac{\partial w_j}{\partial z} e^k
\end{aligned}$$

de la propiedad 2) del operador de Pompeiu tenemos

$$\mathcal{D}w = -\sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{k} q_{k-j} \frac{\partial t_j(z)}{\partial z} + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{k} q_{k-j} \frac{\partial t_j}{\partial z} e^k = 0. \tag{3.14}$$

Se sigue de (3.12), (3.13) y (3.14) que $w(z)$ es una solución generadora del operador $\mathcal{D}$.

Nota. Si $w(z)$ es una solución generadora del operador $\mathcal{D}$ y E es número hipercomplejo nilpotente, entonces $w(z) + E$ es también una solución generadora del operador $\mathcal{D}$.

En vista de la existencia de la solución generadora del operador $\mathcal{D}$ estamos en condiciones de definir el núcleo generalizado de Cauchy

$$e_z(\tau) := \frac{1}{2\pi} \frac{w_\tau(\tau)}{w(\tau) - w(z)}, \quad \tau \neq z, \tag{3.15}$$

donde $w_\tau = \dfrac{\partial w(\tau)}{\partial \tau}$.

El núcleo de Cauchy Generalizado posee la siguiente propiedad empleada frecuentemente [7]:

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2$ se cumple

$$|w(z_1) - w(z_2)|^{-1} \leq c|z_1 - z_2|^{-1} \tag{3.16}$$

donde c es una constante que solo depende de q.

La identidad de Green puede ser formulada en la teoría de funciones hipercomplejas de la siguiente manera [9]

$$\int\limits_{\gamma} fgdw = i \int\limits_{\Omega^+} w_z \left(f\mathcal{D}g + g\mathcal{D}f \right) d\Omega^+,$$

donde f y g son funciones continuamente diferenciables en Ω^+, continuas sobre $\overline{\Omega^+}$ y $dw := w_{\overline{z}} d\overline{z} + w_z dz$. Puesto que $w_{\overline{z}} + qw_z = 0$, para $\tau \in \gamma$ podemos escribir

$$dw(\tau) = iw_z(\tau)(n(\tau) + \overline{n}(\tau)q(\tau))ds,$$

donde $n(\tau)$ representa el vector unitario exterior normal a γ en el punto τ y ds es el diferencial de longitud de arco.

Podemos simplificar la notación considerando $n_q(\tau)$ como una función Douglis valuada la cual cumple $n_q(\tau) = n(\tau) + \overline{n}(\tau)q(\tau)$. Más aún $|n_q(\tau)| \leq c$.

La identidad de Green podría escribirse entonces como x

$$\int\limits_{\gamma} w_z(\tau) f(\tau) n_q(\tau) g(\tau) \, dw = i \int\limits_{\Omega^+} w_z \left(f\mathcal{D}g + g\mathcal{D}f \right) \, d\Omega^+.$$

Sean $z \in \Omega^+$, $B_\varepsilon(z)$ la bola cerrada centrada en z con radio $\varepsilon > 0$. Tomemos $\Omega_\varepsilon := \Omega^+ \backslash B_\varepsilon(z)$. Aplicando la identidad de Green y eligiendo

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(w(\tau) - w(z))},$$

se sigue

$$\int\limits_{\gamma} e_z(\tau) n_q(\tau) g(\tau) \, ds - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(z)} e_z(\tau) n_q(\tau) g(\tau) \, ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} e_z(\tau) \mathcal{D}g(\tau) \, d\Omega^+$$

Si $\varepsilon \to 0$ tenemos

$$\int_{\gamma} e_z(\tau) n_q(\tau) g(\tau)\, ds - \int_{\Omega^+} e_z(\tau) \mathcal{D} g(\tau)\, d\Omega^+ = g(z). \tag{3.17}$$

De forma análoga para $z \in \Omega^-$ se cumple

$$\int_{\gamma} e_z(\tau) n_q(\tau) g(\tau)\, ds = \int_{\Omega^+} e_z(\tau) \mathcal{D} g(\tau)\, d\Omega^+. \tag{3.18}$$

De (3.17) (3.18) y obtenemos la fórmula integral de Borel – Pompeiu

$$\int_{\gamma} e_z(\tau) n_q(\tau) g(\tau)\, ds - \int_{\Omega^+} e_z(\tau) \mathcal{D} g(\tau)\, ds = \begin{cases} g(z), & z \in \Omega^+ \\ 0, & z \in \Omega^- \end{cases}$$

en el caso particular de considerar g hiperanalítica tenemos la fórmula integral de Cauchy.

$$g(z) = \int_{\gamma} e_z(\tau) n_q(\tau) g(\tau)\, ds, \quad z \in \Omega^+. \tag{3.19}$$

3.2. Operadores integrales de Cauchy

Puesto que en general los problemas con valores en la frontera se han considerado hasta ahora en curvas cerradas, el objeto de nuestra investigación serán los operadores integrales de Cauchy (llamados así pues estos operadores están asociados a un núcleo de Cauchy), cuyas integrales se calculan en curvas semejantes. Los trabajos previos a esta tesis fueron realizados por Bory *et al* en [21**?**] entre otros, en los cuales describen dos tipos de operadores integrales de Cauchy para curvas del tipo Carleson.

3.2.1. Integral del tipo de Cauchy

La integral del tipo de Cauchy ha sido estudiada por diversos autores a lo largo de la historia pues presenta una solución a los problemas de frontera. Para funciones hiperanalíticas (3.19) es conocida como fórmula integral de Cauchy, pero si ahora tomamos una curva rectificable de Jordan dispuesta íntegramente en la parte finita de $\mathbb{C}$, y además $f \in \mathcal{C}(\gamma)$ tenemos

$$\mathbf{C}_{\gamma} f(z) := \int_{\gamma} e_t(\tau) n_q(\tau) f(\tau) ds, \quad z \notin \gamma,$$

llamada Integral del tipo de Cauchy.

Proposición 6. [?] *La integral del tipo de Cauchy* $\mathbf{C}_{\gamma} f$ *es una función hiperanalítica en* $\mathbb{C} \setminus \gamma$ *y se anula en infinito.*

Denotamos por $\mathbf{C}_{\gamma}^{\pm} f(t)$, $t \in \gamma$ los valores límite de la Transformada de Cauchy (si es que existen) cuando z se aproxima a t desde $\Omega^{\pm}$.

Terminaremos esta sección con el siguiente hecho, que será esencial para el curso del trabajo

Lema 4. *Sean* $\varphi \in \Phi_{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ *y* $f \in \mathcal{H}_{\varphi}(\gamma)$, *donde* γ *es la curva* α *– Carleson. Dado* $\varepsilon \in (0, d]$ *se cumple la siguiente estimación*

$$\left| \int_{\gamma_{\varepsilon}(t)} e_t(\tau) n_q(\tau) \left(f(\tau) - f(t) \right) ds \right| \leq c \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi_{\alpha}(\tau)}{\tau} d\tau$$

Demostración.

$$\left| \int_{\gamma_{\varepsilon}(t)} e_t(\tau) n_q(\tau) \left(f(\tau) - f(t) \right) ds \right| \leq \int_{\gamma_{\varepsilon}(t)} \left| e_t(\tau) n_q(\tau) \left(f(\tau) - f(t) \right) \right| ds$$

dadas las condiciones del núcleo de Cauchy hipercomplejo, que $|n_q(\tau)| \leq c$ y $f \in \mathcal{H}_{\varphi}(\gamma)$ se tiene que

$$\overbrace{\left| \int_{\gamma_{\varepsilon}(t)} e_t(\tau) n_q(\tau) \left(f(\tau) - f(t) \right) ds \right|}^{\mathcal{R}(\varepsilon)} \leq c \int_{\gamma_{\varepsilon}(t)} \frac{\omega_f \left(|\tau - t| \right)}{|\tau - t|} ds$$

por el Lema 1 tenemos que

$$\mathcal{R}(\varepsilon) \leq c \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\omega_f(\tau)}{\tau} d\theta_t(\tau)$$

como γ es una curva α – Carleson

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varepsilon) &\leq c \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\omega_f(\tau)}{\tau} d\theta_t(\tau) \leq c \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} \\ &\leq c \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \frac{d\tau}{\tau} \leq c \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varphi_\alpha(\tau)}{\tau} d\tau \end{aligned}$$

□

Obsevación. En vista del Lema 4, la familia $\{\mathcal{R}(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ converge a cero, cuando $\varepsilon \to 0$, independientemente de t.

3.2.2. Integral singular

El Teorema 2 puede ser extendido al caso de curvas suaves [22], pero si a una curva γ se le permite tener esquinas, entonces la integral singular $\mathbf{S}_\gamma 1$ no es una función continua sobre γ. Ciertamente, si denotamos al salto en el ángulo tangente en el punto de la esquina $t \in \gamma$ por $w(t)$, es claro que $w(t) \neq 0$. Usando el teorema integral de Cauchy se verifica que $\mathbf{S}_\gamma 1(t) = 1 - \frac{w(t)}{\pi}$, $t \in \gamma$. La manera de salir de esta dificultad será introduciendo una nueva integral singular de Cauchy dada por

$$f(t) \mapsto \frac{1}{\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} d\tau + f(t). \tag{3.20}$$

sin embargo se puede notar que para el caso donde γ es una curva suave entonces la integral singular coíncide con la definición usual.

Sea $f \in \mathcal{C}(\gamma)$, el operador integral singular de Cauchy se define como

$$\mathbf{S}_\gamma f(t) := 2 \int\limits_\gamma e_t(\tau) n_q(\tau)(f(\tau) - f(t)) ds + f(t), \quad t \in \gamma, \tag{3.21}$$

en donde la integral que se define en el operador $\mathbf{S}_\gamma$ tiene que ser tomada en el sentido de valor principal Cauchy, con las condiciones del Lema 4 la integral singular $\mathbf{S}_\gamma$ esta definida para todo t y define una función continua sobre γ, por ser límite uniforme de funciones continuas.

Capítulo 4

Propiedades de Continuidad y Acotamiento

"La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples."
S. Gudder

4.1. Acotamiento de la integral singular

El problema del acotamiento del operador integral singular, ha sido estudiado por un grupo prominente de matemáticos, ente otros, A. P. Calderon, Y. Meyer, R. Coifman, A. McIntoch, G. David, P. Matitla y S. Semmes.

Si γ es una gráfica de una función de Lipschitz, el acotamiento de operador singular integral fue probado primero en 1977 por Calderon, para curvas con una constante Lipschitz pequeña y extendido al caso general en 1982 por Coifman, McIntoch y Meyer [23]. David [24] demostró que el operador singular integral es acotado si y sólo si γ es una curva Carleson todo lo anterior en el contexto de funciones $\mathbb{L}^p$.

Por otra parte Bory *et al* en [21] estudiaron el acotamiento de la integral singular para el caso de curvas Carleson sobre funciones continuas generalizadas de Hölder. Entre otros estudios realizados sobre curvas no rectificables.

Tomando las condiciones dadas sobre espacios generalizados de Hölder tenemos la siguientes proposiciones para curvas α – Carleson.

Teorema 11. *Sean $\varphi \in \Phi_{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ y $f \in \mathcal{H}_{\varphi}(\gamma)$ donde γ es una curva α – Carleson entonces $\mathbf{S}_{\gamma} f$ es acotado sobre $\mathcal{H}_{\varphi_\alpha}$, además*

$$\|\mathbf{S}_{\gamma} f\|_{\mathcal{H}_{\varphi_\alpha}} \ \leq \ c\|f\|_{\mathcal{H}_{\varphi}},$$

donde $\varphi_\alpha(t) := \dfrac{\varphi(t)}{t^{1-\alpha}}$.

Demostración. Sean $f \in \mathcal{H}_{\varphi}(\gamma)$ y $t_1, t_2 \in \Gamma$ tal que $|t_1 - t_2| = 2\nu \leq d$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{\gamma} f(t_1) - \mathbf{S}_{\gamma} f(t_2) \ &= \ 2\left(\overbrace{\int_{\gamma} e_{t_1}(\tau) n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_1))ds}^{I_1} - \underbrace{\int_{\gamma} e_{t_2}(\tau) n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_2))ds}_{I_2}\right) \\
&+ \ f(t_1) - f(t_2).
\end{aligned}$$

Puesto que $\gamma = \gamma_\nu(t_1) \cup \gamma_\nu(t_2) \cup \gamma \backslash (\gamma_\nu(t_1) \cup \gamma_\nu(t_2))$,

entonces para $i = 1, 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
I_i \ &= \ \int_{\gamma_\nu(t_1)} e_{t_i}(\tau) n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_i))ds + \int_{\gamma_\nu(t_2)} e_{t_i}(\tau) n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_i))ds \\
&+ \underbrace{\int_{\gamma \backslash (\gamma_\nu(t_1) \cup \gamma_\nu(t_2))} e_{t_i}(\tau) n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_i))ds}_{B_i}.
\end{aligned}$$

Por otra parte podemos observar que

$$
\begin{aligned}
B_1 - B_2 &= \int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} (e_{t_1}(\tau) - e_{t_2}(\tau) + e_{t_2}(\tau))n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_1))ds \\
&\quad - \int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} e_{t_2}(\tau)n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_2))ds \\
&= \int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} (e_{t_1}(\tau) - e_{t_2}(\tau))n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_1))ds \\
&\quad + \int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} e_{t_2}(\tau)n_q(\tau)(f(t_2) - f(t_1))ds.
\end{aligned}
$$

De donde se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_\gamma f(t_1) - \mathbf{S}_\gamma f(t_2) &= 2\Bigg(\overbrace{\int\limits_{\gamma_\nu(t_1)} e_{t_1}(\tau)n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_1))\,ds}^{C_1} - \overbrace{\int\limits_{\gamma_\nu(t_2)} e_{t_2}(\tau)n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_2))ds}^{C_2} \\
&\quad + \overbrace{\int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} (e_{t_1}(\tau) - e_{t_2}(\tau))n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_1))ds}^{C_3} \\
&\quad + \overbrace{\int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} e_{t_2}(\tau)n_q(\tau)(f(t_2) - f(t_1))ds}^{C_4} \\
&\quad + \overbrace{\int\limits_{\gamma_\nu(t_2)} e_{t_1}(\tau)n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_1))ds}^{C_5} - \overbrace{\int\limits_{\gamma_\nu(t_1)} e_{t_2}(\tau)n_q(\tau)(f(\tau) - f(t_2))ds}^{C_6}\Bigg) \\
&\quad + \overbrace{(t_1) - f(t_2)}^{C_7} \\
&=: \sum_{i=1}^{7} C_i.
\end{aligned}
$$

Ahora procederemos a realizar estimaciones sobre los sumandos $C_i's$, comencemos con C_1 y C_2 simultáneamente:

$$|C_k| \leq \int\limits_{\gamma_\nu(t_k)} |e_{t_k}(\tau)||n_q(\tau)|(f(\tau)-f(t_k))|ds \ \leq \int\limits_{\gamma_\nu(t_k)} \frac{\omega_f\left(|\tau-t_k|\right)}{|\tau-t_k|}ds, \quad i=1,2.$$

Pues $|n_q(\tau)| \leq c$ y la propiedad (3.16) del núcleo de Cauchy hipercomplejo, por otra parte

$$|e_{t_1}(\tau)-e_{t_2}(\tau)| = \left|\frac{1}{2\pi}\left(\frac{W_{t_1}(\tau)}{W(t)-W(t_1)} - \frac{W_{t_2}(\tau)}{W(t)-W(t_2)}\right)\right| \leq c\frac{|t_1-t_2|}{|\tau-t_1||\tau-t_2|}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} |C_3| \ &\leq \int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} |e_{t_1}(\tau)-e_{t_2}(\tau)||n_q(\tau)|(f(\tau)-f(t_k))|ds \\ &\leq \ c\,|t_1-t_2| \int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} \frac{\omega_f\left(|\tau-t_1|\right)}{|\tau-t_1||\tau-t_2|}d\,\tau, \end{aligned}$$

si $|\tau-t_1| \leq |\tau-t_2|$ entonces

$$\frac{\omega_f\left(|\tau-t_1|\right)}{|\tau-t_1||\tau-t_2|} \leq \frac{\omega_f\left(|\tau-t_1|\right)}{|\tau-t_1|^2}.$$

Por otro lado como $\omega_f \in \Phi$, entonces

$$\frac{\omega_f\left(|\tau-t_1|\right)}{|\tau-t_1||\tau-t_2|} \leq \frac{\omega_f\left(|\tau-t_2|\right)}{|\tau-t_2|^2},$$

además como $\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2)) \subset \gamma\setminus\gamma_\nu(t_k)$ $k=1,2$ tenemos:

$$|C_3| \leq \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\nu(t_k)} \frac{\omega_f\left(|\tau-t_k|\right)}{|\tau-t_k|^2}d\,\tau.$$

Por el Lema 4 obtenemos

$$|C_4| \leq \int\limits_{\gamma\setminus(\gamma_\nu(t_1)\cup\gamma_\nu(t_2))} |e_{t_2}(\tau) n_q(\tau)||f(\tau - t_1)|ds \leq c\ \omega_{_f}\left(|\tau - t_1|\right) \leq c\ \omega_{_f}\left(\frac{|\tau - t_1|}{2}\right),$$

puesto que

$$|\tau - t_1| \leq |\tau - t_2| + |t_2 - t_1| \leq \frac{3}{2}|t_1 - t_2| \text{ para } \tau \ \in \gamma_{_\nu}(t_2)$$

así pues $\gamma_{_\nu}(t_2) \subset \gamma\setminus\gamma_{_\nu}(t_1)$, luego

$$\begin{aligned}
|C_5| &= \int\limits_{\gamma_\nu(t_2)} |e_{t_1}(\tau)||n_q(\tau)||f(\tau) - f(t_1)|ds \\
&\leq c\ |t_2 - t_1| \int\limits_{\gamma_\nu(t_2)} \frac{\omega_{_f}\left(|\tau - t_1|\right)}{|t_2 - t_1||\tau - t_1|} d\,\tau \\
&\leq c\ |t_2 - t_1| \int\limits_{\gamma_\nu(t_2)} \frac{\omega_{_f}\left(|\tau - t_1|\right)}{|\tau - t_1|^2} d\,\tau.
\end{aligned}$$

similarmente ocurre

$$|C_6| \leq c\ |t_2 - t_1| \int\limits_{\gamma_\nu(t_2)} \frac{\omega_{_f}\left(|\tau - t_2|\right)}{|\tau - t_2|^2} d\,\tau,$$

finalmente

$$|C_7| \leq \omega_{_f}\left(|t_2 - t_1|\right) \leq 2\ \omega_{_f}\left(\frac{|t_2 - t_1|}{2}\right),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
|\mathbf{S}_\gamma f(t_1) - \mathbf{S}_\gamma f(t_2)| \ &\leq \ c\sum_{k=1}^{2}\left(\int\limits_{\gamma_\nu(t_k)} \frac{\omega_{_f}\left(|\tau - t_k|\right)}{|\tau - t_k|} ds \ + \ \frac{|t_2 - t_1|}{2} \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\nu(t_k)} \frac{\omega_{_f}\left(|\tau - t_k|\right)}{|\tau - t_k|^2} ds\right) \\
&\qquad + c\,\omega_{_f}\left(\frac{|t_2 - t_1|}{2}\right).
\end{aligned}$$

Como $\gamma = \gamma_{_d}(t)$ y aplicando el Lema 1 a $\dfrac{\omega_{_f}(\delta)}{\delta}$

$$|\mathbf{S}_\gamma f(t_1) - \mathbf{S}_\gamma f(t_2)| \leq c \left(\int\limits_0^\nu \frac{\omega_{_f}(\tau)}{\tau} d\theta(\tau) \ + \ \nu \int\limits_\nu^d \frac{\omega_{_f}(\tau)}{\tau^2}\, d\theta(\tau) + \ \omega_{_f}(\nu) \right),$$

como el miembro derecho de la desigualdad anterior representa una función no decreciente en la variable ν tenemos

$$|\mathbf{S}_\gamma f(t_1) - \mathbf{S}_\gamma f(t_2)| \leq c \left(\int\limits_0^{2\nu} \frac{\omega_{_f}(\tau)}{\tau} d\theta(\tau) \ + \ 2\nu \int\limits_{2\nu}^d \frac{\omega_{_f}(\tau)}{\tau^2}\, d\theta(\tau) + \ \omega_{_f}(2\nu) \right).$$

Tomando en cuenta que γ es una curva $\alpha -$ Carleson se desprende que

$$\omega_{\mathbf{s}_\gamma f}(\varepsilon) \leq c \left(\int\limits_0^\varepsilon \frac{\omega_{_f}(\tau)}{\tau} \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} \ + \ \varepsilon \int\limits_\varepsilon^d \frac{\omega_{_f}(\tau)}{\tau^2} \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} + \ \omega_{_f}(\varepsilon) \right),$$

además dado que $f \in \mathcal{H}_{_\varphi}(\gamma)$, entonces

$$\omega_{_f}(\varepsilon) \leq \|f\|_{\mathcal{H}_\varphi} \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, d],$$

así pues

$$\omega_{\mathbf{s}_\gamma f}(\varepsilon) \leq \|f\|_{\mathcal{H}_\varphi}\, c \left(\int\limits_0^\varepsilon \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \frac{d\tau}{\tau} \ + \ \varepsilon \int\limits_\varepsilon^d \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \frac{d\tau}{\tau^2} + \ \omega_{_f}(\varepsilon) \right),$$

además como

$$\omega_{_f}(\varepsilon) \leq \int\limits_0^\varepsilon \frac{\varphi_\alpha(\tau)}{\tau} d\tau,$$

entonces

$$\omega_{\mathbf{S}_\gamma f}(\varepsilon) \leq \|f\|_{\mathcal{H}_\varphi}\, c \left(\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varphi_\alpha(\tau)}{\tau}\, d\tau \;+\; \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{d} \frac{\varphi_\alpha(\tau)}{\tau^2}\, d\tau \right),$$

ya que $\varphi_\alpha \in \Phi$, obtenemos

$$\omega_{\mathbf{S}_\gamma f}(\varepsilon) \leq c\, \|f\|_{\mathcal{H}_\varphi} \varphi_\alpha(\varepsilon).$$

Por otro lado

$$|\mathbf{S}_\gamma f(t)| \leq c\, \|f\|_{\mathcal{H}_\varphi} \int\limits_0^{d} \frac{\varphi_\alpha(\tau)}{\tau} d\tau + \|f\|_\infty \leq c\, \|f\|_{\mathcal{H}_\varphi},$$

del desarrollo anterior concluimos

$$\|\mathbf{S}_\gamma f\|_{\mathcal{H}_{\varphi_\alpha}} \leq c\|f\|_{\mathcal{H}_\varphi} \qquad \tau \in (0, d]. \tag{4.1}$$

Lo que prueba que el operador $\mathbf{S}_\gamma$ es un operador acotado sobre $\mathcal{H}_{\varphi_\alpha}(\gamma)$.

Corolario 1. *Dado $\varphi \in \Phi$, si $f \in \mathcal{H}_\varphi(\gamma)$, donde γ es una curva Carleson, entonces $\mathbf{S}_\gamma f$ es acotado sobre $\mathcal{H}_\varphi(\gamma)$, es decir*

$$\|\mathbf{S}_\gamma f\|_{\mathcal{H}_\varphi} \;\leq\; c\|f\|_{\mathcal{H}_\varphi},$$

más aún $\mathbf{S}_\gamma$ es un operador invariante, i. e., $\mathbf{S}_\gamma : \mathcal{H}_\varphi(\gamma) \to \mathcal{H}_\varphi(\gamma)$. □

Demostración. Si $\varphi \in \Phi_\alpha$, tomando $\alpha = 1$ entonces $\varphi_\alpha \equiv \varphi$. Aplicando directamente el teorema anterior se obtiene la demostración del corolario. □

4.2. Fórmulas de Sohotski–Plemelj.

Babaev y Salaev [25] entre otros, realizaron estudios sobre la posible extensión continua del operador integral de Cauchy (desde el interior Ω^+ y desde el exterior Ω^-) así como la caracterización entre el acotamiento del operador singular integral y la existencia de los valores límite del operador mencionado. Por lo que el estudio de existencia de los valores límites del operador integral de Cauchy debe ser llevado a una apropiada forma que garantice la continuidad del valor principal de la integral singular.

La existencia de los valores límite del operador integral de Cauchy son bien conocidos para el caso donde γ es una curva suave a trozos o simplemente suave y la función $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\gamma)$(el espacio de funciones continuas de Hölder). Las aproximaciones clásicas para este tipo de estudio fueron realizados por Muskhelishvili [22] y Gakhov [10]. Mientras que estudios más complejos sobre curvas rectificable fueron realizados en [21**?**] donde analizan funciones continuas generalizadas de Hölder sobre curvas del tipo Carleson, así como para curvas no rectificables [26].

Comencemos por definir el siguiente operador, dada $f \in \mathcal{C}(\gamma)$

$$\mathcal{L}_{\varepsilon}^{k}(f,t,z) := \mathbf{C}_{\gamma} f(z) - \left(\int\limits_{\gamma \setminus \gamma_{\varepsilon}(t)} e_t(\tau) n_q(\tau)(f(\tau) - f(t)) ds + (2-k) f(t) \right) \quad k = 1, 2,$$

z $\in \Omega^{\pm}$ respectivamente, además $t \in \gamma, \varepsilon \in (0, d]$.

Lema 5. *Sea* $f \in \mathcal{C}(\gamma),\ |z-t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, *entonces para* $k = 1, 2$

$$|\mathcal{L}_{\varepsilon}^{k}(f,t,z) \leq c \left(\frac{\theta_t(\varepsilon)}{\rho(z,\gamma)} \omega_f(\varepsilon) + |z-t| \int\limits_{\varepsilon}^{d} \frac{\omega_f(\xi)}{\xi^2} d\theta_t(\xi) \right).$$

Demostración. Notemos que en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\varepsilon}^{k}(f,t,z) &= \mathbf{C}_{\gamma} f(z) - \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{\varepsilon}(t)} \left(e_t(\tau) - e_z(\tau) + e_z(\tau)\right) n_q(\tau)(f(\tau)-f(t))ds - (2-k)f(t) \\
&= \underbrace{\mathbf{C}_{\gamma} f(z) - \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{\varepsilon}(t)} e_z(\tau) n_q(\tau)(f(\tau)-f(t))ds}_{B} \\
&+ \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{\varepsilon}(t)} \left(e_z(\tau) - e_t(\tau)\right) n_q(\tau)(f(\tau)-f(t))ds - \overbrace{(2-k)f(t)}^{J},
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
B &= \mathbf{C}_{\gamma} f(z) - \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{\varepsilon}(\tau)} e_z(\tau) n_q(\tau)(f(\tau))ds + \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{\varepsilon}(t)} e_z(\tau) n_q(\tau)(f(t))ds \\
&= \int\limits_{\gamma_{\varepsilon}(\tau)} e_z(\tau) n_q(\tau) f(\tau) ds + \underbrace{\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{\varepsilon}(t)} e_z(\tau) n_q(\tau)(f(t))ds}_{I}.
\end{aligned}
$$

El valor I esta íntimamente relacionado con la ubicación de z, pues si $z \in \overline{\Omega^{+}},\ I = f(t)$ y es cero de lo contrario. En ambos casos $I + J = 0$. Por lo tanto

$$
\mathcal{L}_{\varepsilon}^{k}(f,t,z) = \overbrace{\int\limits_{\gamma_{\varepsilon}(\tau)} e_z(\tau) n_q(\tau) f(\tau) ds}^{I_1} + \overbrace{\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_{\varepsilon}(t)} e_t(\tau) n_q(\tau)(f(\tau)-f(t))ds}^{I_2}.
$$

Como ω_f es una función no decreciente y $|\tau - t| \leq \varepsilon$ para $t \in \gamma_{\varepsilon}(t)$, tenemos

$$
|I_1| \leq c \int\limits_{\gamma_{\varepsilon}(t)} \frac{\omega_f\left(|\tau - t|\right)}{|\tau - z|} ds \leq c\, \omega_f\left(\varepsilon\right) \frac{\theta_t(\varepsilon)}{\rho(z,\gamma)},
$$

además
$$|I_2| \leq C\ |z-t| \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(t)} \frac{\omega_{_f}(|\tau - t|)}{|\tau - z||\tau - t|}\, d\theta_t(\tau).$$

Como $|\tau - t| \geq \varepsilon/2$ para todo $t \in \gamma\setminus\gamma_{_\varepsilon}(t)$ por lo tanto $|\tau - t| \leq 2|\tau - z|$ tomando en cuenta esto y el lema 5 tenemos
$$|I_2| \leq C\ |z-t| \int\limits_{\varepsilon}^{d} \frac{\omega_{_f}(\xi)}{\xi^2}\, d\theta_t(\tau).$$

Teniendo así la estimación deseada.

Obsevación. Del lema (5), si $\varphi \in \Phi_{_\alpha}$ y $f \in \mathcal{H}_{_\varphi}(\gamma)$, siendo γ la curva α – Carleson, entonces

$$|\mathcal{L}^1_{_\varepsilon}(f, t_{_z}, z)| \leq c \left(\frac{\varepsilon^\alpha}{p(z,\gamma)} \omega_{_f}(\varepsilon) + \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{d} \frac{\omega_{_f}(\xi)}{\xi^2} d\theta_t(\xi) \right),$$

similarmente
$$|\mathcal{L}^1_{_\varepsilon}(f, t_{_z}, z)| \leq c \left(\frac{\varepsilon}{p(z,\gamma)} \frac{\omega_{_f}(\varepsilon)}{\varepsilon^{1-\alpha}} + \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{d} \frac{\omega_{_f}(\xi)}{\xi^2} d\theta_t(\xi) \right),$$

entonces
$$|\mathcal{L}^1_{_\varepsilon}(f, t_{_z}, z)| \leq c\|f\|_{\mathcal{H}_\varphi(\gamma)} \left(\frac{\varepsilon}{p(z,\gamma)} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^{1-\alpha}} + \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{d} \frac{d\xi}{\xi^2} \frac{\varphi(\xi)}{\xi^{1-\alpha}} \right),$$

ademas $\varphi \in \Phi_{_\alpha}$ tenemos que
$$|\mathcal{L}^1_{_\varepsilon}(f, t_{_z}, z)| \leq c\|f\|_{\mathcal{H}_\varphi(\gamma)} \left(\frac{\varepsilon}{p(z,\gamma)} \varphi_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon \int\limits_{\varepsilon}^{d} \frac{\varphi_\alpha(\xi)}{\xi^2} d\xi \right).$$

Teorema 12. *Sean $\varphi \in \Phi_{_\alpha}$, sea $f \in \mathcal{H}_{_\varphi}(\gamma)$ donde γ es una curva α – Carleson, entonces, $\mathbf{C}_{_\gamma} f(t)$ tiene valores límite $\mathbf{C}^{\pm}_{_\gamma} f(t)$, y se cumplen las fórmulas*
$$\mathbf{C}^{\pm}_{_\gamma} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{S}_{_\gamma} f(t) \pm f(t)\right) \quad \forall t \in \gamma.$$

Demostración. Sea t un punto fijo de $\gamma, z \in \Omega^+$. En adelante tomaremos $|z-t| = \varepsilon$ entonces se cumple la siguiente condición

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_\gamma f(z) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{S}_\gamma f(t) + f(t)\big) &= \mathcal{L}^1_\varepsilon(f,t,z) - \int\limits_{\gamma_\varepsilon(t)} e_t(\tau) n_q(\tau)\,(f(\tau) - f(t))\,ds \\ &+ \frac{1}{2}\big(\mathbf{S}_\gamma f(t) - \mathbf{S}_\gamma f(t)\big) + \frac{1}{2}(f(t - f(t)),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{C}_\gamma f(z) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{S}_\gamma f(t) + f(t)\big)\right| &\leq |\mathcal{L}^1_\varepsilon(f,t,z)| + \left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon(t)} e_t(\tau) n_q(\tau)\,(f(\tau) - f(t))\,ds\right| \\ &+ |\mathbf{S}_\gamma f(t) - \mathbf{S}_\gamma f(t)| + |f(t) - f(t)|. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

En vista de la observación de lema 4, de la continuidad del operador $\mathbf{S}_\gamma$ y que $f \in \mathcal{H}_\varphi(\gamma)$. Tenemos que

$$\left|\mathbf{C}_\gamma f(z) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{S}_\gamma f(t) + f(t)\big)\right| \to 0 \qquad (4.3)$$

cuando $z \to t$. Por lo tanto

$$\lim_{z\to t} \mathbf{C}_\gamma f(z) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{S}_\gamma f(t) + f(t)\big) \quad z \in \Omega^+. \qquad (4.4)$$

de manera análoga podemos demostrar que

$$\lim_{z\to t} \mathbf{C}_\gamma f(z) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{S}_\gamma f(t) - f(t)\big) \quad z \in \Omega^-. \qquad (4.5)$$

De las ecuaciones (4.4) y (4.5) garantizamos la existencia de los valores limite $\mathbf{C}^\pm_\gamma$.

Corolario 2. *Sea $\varphi \in \Phi$ tal que $f \in \mathcal{H}_\varphi(\gamma)$ y γ es una curva Carleson entonces, $\mathbf{C}_\gamma f(t)$ tiene valores límite $\mathbf{C}^\pm_\gamma f(t)$, y se cumplen las formulas*

$$\mathbf{C}^\pm_\gamma = \frac{1}{2}\big(\mathbf{S}_\gamma f(t) \pm f(t)\big) \quad \forall t \in \gamma.$$

Demostración. Si $\varphi \in \Phi_\alpha$ y tomando $\alpha = 1$ entonces $\varphi_\alpha \equiv \varphi$. Aplicando directamente el teorema anterior se obtiene la demostración del corolario.

□

Conclusiones

"Si la gente no cree que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicado que es la vida."
John Louis von Neumann.

EL operador de Douglis resulta ser una generalización de operador de Cauchy – Riemann complejo, el cual lleva un sistema de 2r x 2r ecuaciones con 2 variables independientes a una simple ecuación hipercompleja y no solo eso también permitió crear la teoría de los operadores de tipo de Cauchy que pertenecen a la médula de los problemas de la teoría de funciones con valores en la frontera.

También cabe aclarar que el estudio de las propiedades de continuidad y acotamiento de los operadores del tipo de Cauchy es ya de interés tradicional sin contar todas las aplicaciones que se desprenden de ellos, así mismo estudiar la clase Φ permite llevar las propiedades de continuidad y acotamiento a un ambiente de teoría de aproximaciones ya conocido.

Es importante notar que en el trabajo se dan tanto ejemplos no triviales de la clase de curvas α – Carleson como de la clase Φ_{α} que muestran que las clases son no vacías, pues no basta con crear un conjunto y dotarlo de propiedades.

La metodología del desarrollo de los teoremas aquí expuestos se basa en los trabajos previos de Salaev, llevados al contexto hipercomplejo por Bory et. al., que resultan de la relación de la clase Φ_{α} con las curvas α – Carleson. Así como los trabajos de Bears, Vekua y Pholozii permitieron a Douglis trabajar con sistemas de ecuaciones mas complejos.

Finalmente, se exploró una clase de curvas más amplia que la clase de Bari–Stechkin.

Bibliografía

[1] H. Begehr. *Complex analaytic methods for partial differential equations: An introductory text.* World Scientific, 1994.

[2] B. Bojarski. Old and new on beltrami equations. *World Scientific*, pages 173 – 187, 1988.

[3] T. Iwaniec and G. Martin. What's the new for the beltrami equations? *Proc. Center Math. Appl. Aus. Nat. Univ.*, 39:132 – 148, 2001.

[4] L. Bears. Theory of pseudoanalytics functions. *Institute for Math and Mech., New York University*, MR 15(2):211, 1953.

[5] I. N. Vekua. Generalized analytic functions. *Fitzmatgiz, Moscow, 1959; English transl., Pergamon Press, London and Addison–Wesley, Reading, Mass., 1962*, (MR 21).

[6] G. N. Polozhii. Afine transformations of p – analytic and (p, q) – analaytic functions of a complex variable. *T. H. Shevshenko Kiev State University. Transtale from Ukrainskii Mathematicheskii Zhurnal*, 20(3):325 – 339, 1967.

[7] A. Douglis. A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Comm. Pure Appl. Math.*, 6(12):259 – 289, 1953.

[8] I Privaloff. *Conjugate hyperharmonic functions and Cauhy type integrals in Douglis analysis*, volume 48. Moscow–Leningrad, 2003.

[9] R. P. Gilbert and J. Buchanan. *First order elliptic systems: a function theoretic approach*, volume 163. Mathematics in Science and Engineering, 1983.

[10] F. D. Gajov. *Problemas de Contorno.* Editorial MIR, 1980.

[11] R. A. Silverman. *Introductory Complex Analysis.* Dover, 1983.

[12] Nicola; Pallara Diego Ambrosio, Luigi; Fusco. Functions of bounded variation and free discontinuity problems. *Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York*, 2000.

[13] Natasha Samko. Singular integral operators in weighted spaces of continuous functions with oscillating continuity moduliand oscillating weights. *Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland*, 171:323 – 347, 2006.

[14] A. I. Guseinov. and H. Sh. Mukhtarov. *Introduction to the theory of nonlinear singular integral equations (in Russian)*. Walters–Nordhooff Publishing, 1980.

[15] V. V. Salaev. Direct and inverse estimations for the special cauchy's integral along a closed curve. *Mathematics Notes*, 19(3):365– 380, 1983.

[16] V. V. Salaev and A. O. Tokov. Necessary and suffiient conditions for the continuity of cauchy type integral in closed domains. *Doklady Academic Nauk Azer*, 39(12):7 – 11, 1983.

[17] A. Böttcher and Y. I. Karlovich. *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*. Birkhäuser, 2007.

[18] González B. and Seifullaev R. K. The relation between two characteristics of jordan rectifiable curves. *Scientific Reports. Mathematics and Physics Series*, (3):3 – 9, 1979.

[19] V. A. Paatashvili and G. A. Khuskivadze. Boundness of a singular cauhy operator in lebesgue space in the case of nonsmooth countors (in russian). *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk. Gruzin. SSR*, (69):93–107, 1982.

[20] N. K. Bari and S. B. Stehking. The best approximations and the differential porperties of two conjugate functions. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 5:483 – 552, 1956.

[21] R. A. Blaya, B. Kats, and J. B. Reyes. Cauchy integral and singular integral operator over closer jordan curves. *Monatsh Math.*, 176(1), 2014.

[22] N. I. Muskhelishvili. *Singular Integral Equations (English)*. Walters–Nordhooff Publishing, 3ra edition, 1967.

[23] R. R. Coifman, A. McIntoch, and Y Meyer. The cauchy integral defines a bounded operator on l^2 for lipschitz curves (french). *Ann. Math.*, 116(2):361 – 387, 1982.

[24] G David. Singular integral operators over certain curves in to complex plane (french). *Ann. Sic. cole Norm. Sup. (4)*, 17(1):157 – 189, 1984.

[25] A.A. Babaev and V. V. Salaev. Necessary and suffiient conditions for the continuity of cauchy type integral in closed domains. *Azer. State University. Transtale from Matematicheskie Zametki (Original article submitted May 6,1979*, 31(4):571 – 580, 1983.

[26] R. A. Blaya, J. B. Reyes, and Jean-Marie Vilaire. Hölder norm of a fractal hilbert transform in douglis analysis. *Communications in Mathematical Analysis*, 16(2):1–8, 2014.