



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**Modelo de Gutkowicz–Procaccia–Ross a máxima potencia
eficiente**

*Tesis para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias
Fisicomatemáticas*

Presenta:

Lic. BERNANDO FUENTES HERRERA

**Director:
FERNANDO ANGULO BROWN**

U.P. ADOLFO LÓPEZ MATEOS

2021





TESIS MAESTRÍA DE BERNARDO.pdf
Feb 7, 2021
11481 palabras/48113 caracteres

Bernardo Puentes

TESIS MAESTRÍA DE BERNARDO.pdf

Resumen de fuentes

6%

COINCIDENCIA

1	display.in	1%
2	www.scribd.com	<1%
3	ibidem.pub	<1%
4	pl.scribd.com	<1%
5	tesis.pu.ve	<1%
6	ibidem.pub	<1%
7	M.A. Ramírez-Moreno, S. González-Hernández, F. Angulo-Brown. "The role of the Stefan-Boltzmann law in the thermodynamic optima-	<1%
8	A. Gango-García, M.A. Ramírez-Jirónes, F. Angulo-Brown. "Thermodynamic and thermoeconomic optimization of isothermal endere-	<1%
9	Ying Sun, Zhenshi Han. "Existence of solutions for sequential fractional differential equations with boundary conditions", 2020 39th CN-	<1%
10	moam.info	<1%
11	www.scribd.c	<1%
12	es.scribd.com	<1%
13	Subramaniam Kotheshakota, Kathleen Kotheshakota. "Worship: Concepts and Practices". Wiley, 2016	<1%
14	trinity.lat	<1%

15	doi.org	Abstract	<1%
16	doi.org	Abstract	<1%
17	doi.org	Abstract	<1%
18	doi.org	Abstract	<1%
19	Rhee, C. H. "Geostrophically driven thermal convection at high Prandtl numbers". <i>Physica D: Nonlinear Phenomena</i> , 255(1):101-110, 2012.		<1%
20	G. Aragón-Corralés. "The fundamental optimal relations of the allocation, cost and effectiveness of the heat exchangers of a Carnot-ER". <i>2020</i> .		<1%
21	M.A. Ramirez-Moreno, F. Angulo-Brown. "Topological optimization of a family of four-math adding- 10^3 g 2 display- 10^3 overflow- 10^3 ". <i>2020</i> .		<1%
22	doi.org	Abstract	<1%
23	doi.org	Abstract	<1%
24	doi.org	Abstract	<1%
25	doi.org	Abstract	<1%
26	M.A. Barreira, A. Coaracy, J. C. Pacheco, F. Angulo. "Thermoeconomical analysis of an endoreversible chemical engine model with a g^2 ". <i>2020</i> .		<1%
27	Russell DeVine, Christina Ridley, Brian Spies, T. Meyers. "Applications of a time correlation function theory for the fifth-order Raman res...". <i>2020</i> .		<1%

Se incluyeron los depósitos de bitácora:

- Ninguno

Escudo del Informe de Similitud:

- Ninguno

Se incluyeron las fuentes:

- Ninguno

Dedicatoria

A la memoria del Maestro Dip.

Agradecimientos

Agradezco al UNO plotiniano pero, eso puede parecer muy filosóficamente abstracto y sin sentido solo como agradecimiento y por lo que, para dar sentido aquí.

Agradezco a los profesores Alfonso Queijeiro y Francisco Turrubiates porque atravesando el momento oscuro desde antes tuve su apoyo y soporte en deficiencias que tuve a un poco más de la mitad de maestría y supieron con quien canalizarme.

Agradezco al profesor Fernando Angulo Brown, su sabiduría hasta de mis inquietudes y orientandolas han concluido hasta el trabajo que aquí se presenta y dentro de ello, también agradezco en gran medida al candidato al doctorado, el M. EN C. MARCO ANTONIO RAMÍREZ MORENO, por su paciencia y ayuda.

Agradezco a mis padres y a mi hermano menor que al verme en mi enfermedad y precariedad, me han tolerado y apoyado, la enfermedad COVID 19 nos pego duro pero, también nos ha unido a la distancia.

Agradezco a CONACyT porque no podría haber llegado hasta aquí pese a mis percances si inicialmente no me hubieran apoyado, me hizo falta sabiduría y paz para la beca pero, gracias.

Agradezco a mis amigos correligionarios al doctor Raúl Cruz Mireles que me apoyo en cuanto a mi espiritualidad e inquietudes personales, al escritor Carlos Martínez que en estas inquietudes siempre me brindo un libro que leer junto con el estudiante de psicología Oscar Jaime Dominguez que brindo con los libros preguntas en que pensar al ingeniero Mario Martínez Valencia y a Samuel Fernandez Estrada.

Y agradezco a los no necesariamente correligionarios Agni Galicia Corral, Christian, Daniel Grimaldi, Cesar Davalos, Andrés Serrano, Ana María Aguilar, Liliana Castelan, Nathalia Jemima Pedroza Cruz, Jorge y Yair amigos nobles de UPIITA, a quienes incluso ya no me reconocen como amigo Luis Corona y a Verónica, uno yerra.

Resumen

En 1975 Curzon y Ahlborn (CA) publicaron un artículo, considerado pionero de una rama de la termodinámica fuera del equilibrio, llamada termodinámica de tiempo finito (TTF), en ese artículo estos autores analizaron un ciclo térmico tipo Carnot en el que no hay equilibrio térmico entre las isothermas del ciclo y los reservorios externos de temperaturas absolutas T_1 y T_2 . Este hecho permite que un flujo irreversible de calor ocurra entre los reservorios y la sustancia de trabajo implicando un término de producción de entropía. Sin embargo, se deja a la sustancia de trabajo realizar ciclos reversibles.

Los flujo irreversibles agregados constituyen un pequeño paso ligeramente más realista que un modelo reversible del ciclo de Carnot. Interesantemente, con este modelo simple, Curzon y Ahlborn calcularon la eficiencia térmica en el régimen de máxima potencia encontrando la ahora famosa fórmula, $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_2/T_1}$, que da valores razonablemente cercanas a las eficiencias de las algunas plantas de potencia reales. A posteriori muchos autores publicaron diversos modelos CA modificados agregándoles algunas características más reales ligadas a las plantas de potencia. El ciclo CA también fue optimizado por medio de diferentes funciones objetivo tales como la función ecológica y la potencia eficiente. En la presente tesis aplicamos el criterio de potencia eficiente a un ciclo tipo CA siguiendo el modelo de Gutkowicz, Procaccia and Ross (GPR) que incluyen términos inerciales. Como era de esperarse, la eficiencia del ciclo GPR bajo el criterio de máxima potencia eficiente es mayor que la eficiencia-CA bajo condiciones de máxima potencia.

Abstract

In 1975, Curzon and Ahlborn (CA) published a paper which is considered as pioneering of a branch of non equilibrium thermodynamics called finite-time thermodynamics. In that article these authors analyzed a Carnot-type thermal cycle in which there is not thermal equilibrium between the isotherms of the cycle and the external heat reservoirs at absolute temperatures T_1 and T_2 . This fact permits that an irreversible heat transfer flux occurs between the reservoirs and the working substance implying a term of entropy production. However, it is allowed that the working substance performs internal reversible cycles. The irreversible fluxes added constitute a small step towards a slightly more realistic model than the Carnot cycle. Interestingly, with this simple model Curzon and Ahlborn calculated the thermal efficiency at the maximum power regime finding the famous formula of the CA-efficiency, which is reasonably close to efficiencies of actual power plants. Later, many authors published several modified CA models by adding some realistic features linked to power plants. The CA cycle also was optimized by means of diverse objective functions such as the ecological function and the efficient power. In the present thesis we applied the efficient power criterion to a CA-type cycle following the Gutkowicz, Procaccia and Ross (GPR) model which includes inertial terms. As expected, the efficiency of the GPR cycle under maximum efficient power criterion is largest than the CA-efficiency under maximum power conditions.

Índice general

Índice general	XI
Índice de figuras	XII
Introducción	XIII
1. Modelo Curzon y Ahlborn	1
1.1. Condición de Endorreversibilidad	1
1.2. Potencia	2
1.3. Enfoque de De Vos a la máquina de Curzon y Ahlborn	6
2. Modelo Gutkowicz, Procaccia y Ross (GPR)	14
2.1. Modelo GPR al tomar en cuenta la eficiencia interna	14
2.2. Procesos irreversibles en la máquina GPR	15
2.3. Procesos adiabáticos	15
2.4. Relación de volúmenes (previo a relación de compresión).	16
2.5. Trabajo y tiempo de las isothermas	17
2.6. Eficiencia interna	17
2.7. Tiempo de adiabatas y razón de temperaturas exteriores	18
2.8. Procesos Endorreversibles de Máquina GPR	19
2.9. Potencia	20
3. Ciclo de Curzon-Ahlborn a máxima potencia eficiente.	25
3.1. Máxima Potencia Eficiente con base a Curzon y Ahlborn	25
3.2. Modelo de máquina TTF tipo GPR a Máxima Potencia Eficiente.	26
Bibliografía	32
Bibliografía	33

Índice de figuras

1.1. Modelo de Curzon–Ahlborn	2
1.2. Eficiencia η contra $\theta = T_{2w}/T_{1w}$	3
1.3. Eficiencia η contra $\tau = T_2/T_1$	7
1.4. Gráfica de la $\dot{W} \rightarrow P$	10
1.5. Disipación $\sigma \times T_2$ contra η	12
1.6. Calor \dot{Q}_1 contra η	13
2.1. Diagrama P-V de una máquina de Curzon y Ahlborn.	15
2.2. Gráfica de la Potencia P vs eficiencia η	21
2.3. Gráfica de comportamiento de eficiencia η vs λ y τ	24
3.1. Comparación de las funciones características del criterio potencia eficiente con las funciones del modelo de CA.	26
3.2. Comparación de la máxima potencia eficiente con respecto a la máxima potencia	28
3.3. Gráfica de eficiencias vs λ con base a la serie (3.5).	29
3.4. Eficiencia $\eta_{P_\eta}(\tau, \lambda)$ en contraste de λ variable y τ	29
3.5. Eficiencias $\eta_C, \eta_{CA}, \eta_{GPR}$ y η_{P_η} en contraste de λ variable y τ	30

Introducción

En 1975, Curzon y Ahlborn (CA) [1] publicaron un artículo que se considera pionero de la termodinámica de tiempos finitos (TTF). En este artículo CA propusieron un ciclo térmico tipo Carnot en el que, no había equilibrio entre las isothermas del ciclo y los almacenes térmicos correspondientes. Ellos supusieron una diferencia de temperaturas entre el almacén caliente a temperatura T_1 y la isoterma caliente del ciclo a T_{1w} produciendo un flujo de calor del almacén a la sustancia de trabajo dado por la ley de enfriamiento de Newton. Para la parte inferior del ciclo hicieron suposiciones equivalentes para T_2 y T_{2w} . De este modo, integrando la ecuación de transferencia de calor pudieron estimar la duración del ciclo (periodo del ciclo) y por lo tanto pudieron calcular la potencia producida por el ciclo, a diferencia del ciclo de Carnot que es de potencia nula. CA maximizaron la potencia de este modelo y encontraron que la eficiencia a potencia máxima quedaba expresada por $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_2/T_1}$. Esta fórmula se ha vuelto célebre apareciendo ahora en algunos libros de texto [2–4]. Es conveniente aclarar que esta expresión para la eficiencia llamada de Curzon y Ahlborn ya había sido reportada desde la década de los 50's del siglo pasado [5, 6]; sin embargo, lleva el nombre de Curzon y Ahlborn porque después de estos autores la TTF inició un desarrollo continuo y sistemático [7, 8]. El éxito del resultado de Curzon y Ahlborn consistió en que con datos de varias plantas de potencia en el mundo real mostraron que su simple modelo se acercaba muy razonablemente a eficiencias reales. Posteriormente en 1978 Gutkowicz, Procaccia y Ross (GPR) [9] publicaron un artículo en el que añadieron algunos efectos realistas adicionales al modelo de CA. Por ejemplo, tomaron en cuenta la masa de los pistones, la fricción entre las piezas metálicas del cilindro y las adiabáticas no instantáneas. Bajo estas consideraciones GPR mostraron que la fórmula de CA es sólo válida en el límite de altas relaciones de compresión; es decir el modelo GPR es más completo que el simple modelo de CA. En los primeros años de desarrollo de la TTF después de 1975 el criterio de mérito más utilizado fue el de máxima potencia; sin embargo, después se fueron proponiendo otros criterios de optimización, tales como el criterio ecológico [10], la función Omega [11] y la llamada potencia eficiente [12]. En la presente tesis por primera vez se va a aplicar el criterio de la potencia eficiente para optimizar el modelo GPR. Para ello he organizado la tesis de la siguiente manera: en el capítulo 1 se hace un repaso del modelo de Curzon y Ahlborn tanto en la versión original como en la versión de De Vos [4]; en el capítulo 2 se presenta el modelo de Gutkowicz, Procaccia y Ross [9]; en el capítulo 3 se presenta la optimización del modelo GPR mediante el criterio de la potencia eficiente y finalmente se dan las conclusiones.

Capítulo 1

Modelo Curzon y Ahlborn

Previó a lo por venir debe mencionarse que emplearemos según convenga en el trabajo la notación de conducción de calor Q como,

$$\dot{Q} \equiv \frac{d}{dt}Q.$$

En 1975 se publicó un artículo por Curzon y Ahlborn (CA) [1] considerado pionero de una rama de la termodinámica irreversible (TI), llamada termodinámica de tiempos finitos (TTF) que estudia modelos de máquinas térmicas como la ilustrada en la Fig. 1.1. En esta figura se ilustra un proceso termodinámico en el que una máquina de dos temperaturas internas $T_{1w} > T_{2w}$ realiza un ciclo de Carnot que se recibe calor de un reservorio de temperatura T_1 y entrega calor a un reservorio de temperatura T_2 , tal que finalmente se satisface la siguiente desigualdad $T_1 > T_{1w} > T_{2w} > T_2$. En la Fig. 1.1, α_1 representa una conductancia térmica tal que impide que $T_1 = T_{1w}$, y a través de ella pasa un flujo del calor Q_1 que obedece la ley de enfriamiento de Newton, dada por

$$\dot{Q}_1 = \alpha_1(T_1 - T_{1w}) > 0, \quad (1.1)$$

de manera similar, hay una segunda isoterma corresponde a una temperatura de trabajo T_{2w} que está conectada a través de una conductancia térmica α_2 con el reservorio frío de temperatura T_2 y por ella pasa una cantidad de calor Q_2 dada por,

$$\dot{Q}_2 = \alpha_2(T_{2w} - T_2) > 0. \quad (1.2)$$

1.1. Condición de Endorreversibilidad

Debe decirse que lo expuesto en esta sección sigue el desarrollo del paper de Curzon y Ahlborn [1]. Como se puede ver de la Fig. 1.1, hay dos temperaturas T_{1w} y T_{2w} tal que $T_{1w} > T_{2w}$, que funcionan como las isothermas de una máquina de Carnot (véase el marco punteado en Fig. 1.1), que como es bien sabido es un modelo reversible. Por otro lado, el trabajo W producido por este ciclo se obtiene de la primera ley de la termodinámica.

$$W = |Q_1| - |Q_2|, \quad (1.3)$$

En esta máquina de Carnot $\Delta U = 0$, siendo ΔU el cambio de la energía interna de la sustancia de trabajo, por lo que de la Ec. (1.3),

$$|Q_2| = |Q_1| - W. \quad (1.4)$$

Ahora bien, sabemos que el ciclo interno es de Carnot y por lo tanto con eficiencia η dada por,

$$\eta = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}. \quad (1.5)$$

Dadas estas ecuaciones, podemos obtener la gráfica de la eficiencia contra la razón de temperaturas de la sustancia de trabajo $\theta \equiv T_{2w}/T_{1w}$, como se ve en la Fig. 1.2 al cuadro punteado que contiene a T_{1w} y T_{2w} . También de la definición general de eficiencia $\eta = W/Q_1$ y usando la Ec. (1.3) se obtiene $\eta = (|Q_1| - |Q_2|)/|Q_1| = 1 - |Q_2|/|Q_1|$ y comparando la Ec. (1.5),

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_{2w}}{T_{1w}}, \quad (1.6)$$

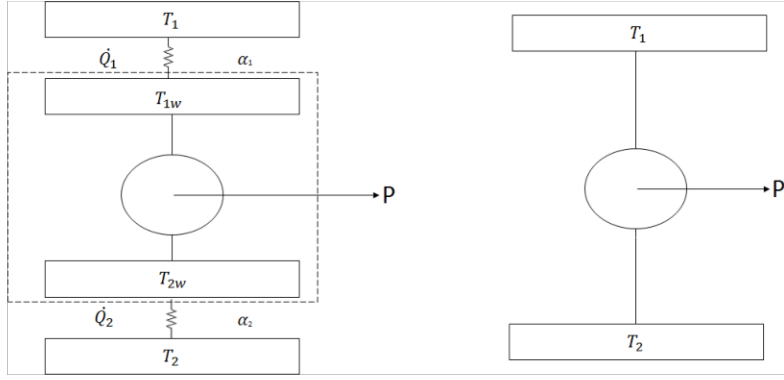


Figura 1.1: Modelo de Curzon–Ahlborn en el lado izquierdo de la figura se ilustra un diagrama de isothermas de la máquina térmica de Curzon y Ahlborn con una *conductancia térmica finita* entre el fluido de trabajo y los reservorios de calor, en el lado derecho de la figura se simplifica la máquina pues, lo expuesto en el marco punteado del lado izquierdo junto con las conductancias de la figura (sin corto circuito) corresponde con la máquina (que se ilustra como un círculo) del lado derecho de la figura.

por lo que,

$$\frac{Q_1}{T_{1w}} = \frac{Q_2}{T_{2w}}, \quad (1.7)$$

este resultado se conoce como condición de endorreversibilidad [13].

1.2. Potencia

Por otro lado, el tiempo t en que le lleva a la máquina realizar el ciclo (ver Fig. 1.1), es.

$$t \propto (t_1 + t_2) = \gamma(t_1 + t_2), \quad (1.8)$$

γ : constante de proporcionalidad.

t_1 : tiempo para absorber Q_1 .

t_2 : tiempo para ceder Q_2 .

La constante de proporcionalidad γ da cuenta de la posible duración de las adiabatas del ciclo interno de Carnot, aunque se suele tomar como $\gamma = 1$; es decir adiabatas instantáneas. Sabemos que la potencia $P = W/t$, por lo que usando las ecuaciones (1.31.3) y (1.8),

$$P = \frac{W}{t} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{\gamma(t_1 + t_2)}. \quad (1.9)$$

Tomando las ecuaciones (1.1) y (1.2) se tiene,

$$P = \frac{\alpha_1(T_1 - T_{1w})t_1 - \alpha_2(T_{2w} - T_2)t_2}{\gamma(t_1 + t_2)}. \quad (1.10)$$

Además, se tiene que $Q_1 \approx \dot{Q}_1 t_1$ y $Q_2 \approx \dot{Q}_2 t_2$ tal que, al sustituir (1.1) y (1.2) en (1.7) y usar la condición de endorreversibilidad dada por la Ec. (1.7) se tiene,

1.2. Potencia

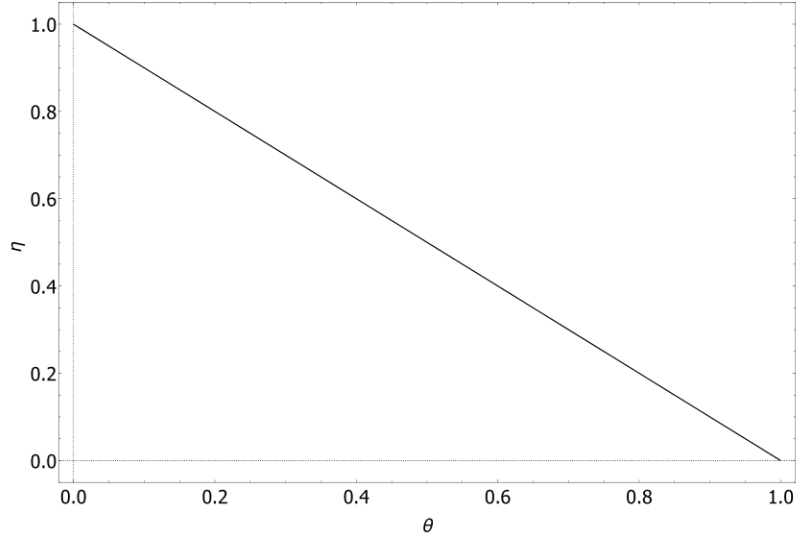


Figura 1.2: Eficiencia η contra la razón de temperaturas $\theta = T_{2w}/T_{1w}$ tal que $T_{1w} > T_{2w}$ y $\eta = 1 - \theta$.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\alpha_2(T_{2w} - T_2)T_{1w}}{\alpha_1(T_1 - T_{1w})T_{2w}}. \quad (1.11)$$

al multiplicar la ecuación anterior por t_2 ,

$$t_1 = \frac{\alpha_2(T_{2w} - T_2)T_{1w}}{\alpha_1(T_1 - T_{1w})T_{2w}} t_2, \quad (1.12)$$

o también al calcular el inverso multiplicativo de la ec. 1.11 y multiplicar por t_1 ,

$$t_2 = \frac{\alpha_1(T_1 - T_{1w})T_{2w}}{\alpha_2(T_{2w} - T_2)T_{1w}} t_1. \quad (1.13)$$

Definimos las variables,

$$x = T_1 - T_{1w}, \quad (1.14)$$

$$y = T_{2w} - T_2, \quad (1.15)$$

y al sustituir (1.14) y (1.15) en (1.12) y (1.13) se obtiene,

$$t_1 = \frac{\alpha_2 y T_{1w}}{\alpha_1 x T_{2w}} t_2, \quad (1.16)$$

$$t_2 = \frac{\alpha_1 x T_{2w}}{\alpha_2 y T_{1w}} t_1. \quad (1.17)$$

Podemos expresar a la potencia en términos de la variable x e y tal que, tomando los tiempos como en (1.16) y (1.17), la potencia toma la forma siguiente,

$$P = \frac{(\alpha_1 x \frac{\alpha_2 y T_{1w}}{\alpha_1 x T_{2w}} - \alpha_2 y) t_2}{\gamma (\frac{\alpha_2 y T_{1w}}{\alpha_1 x T_{2w}} t_2 + t_2)}, \quad (1.18)$$

al factorizar,

$$P = \frac{(\alpha_1 x \frac{\alpha_2 y T_{1w}}{\alpha_1 x T_{2w}} - \alpha_2 y) t_2}{\gamma \left(\frac{\alpha_2 y T_{1w}}{\alpha_1 x T_{2w}} + 1 \right) t_2}, \quad (1.19)$$

de las fracciones en el denominador y factorizar,

$$P = \frac{\left(\frac{T_{1w}}{T_{2w}} - 1 \right) \alpha_2 y}{\gamma \left(\frac{\alpha_2 y T_{1w} + \alpha_1 x T_{2w}}{\alpha_1 x T_{2w}} \right)}, \quad (1.20)$$

al arreglar los términos (1.14), (1.15) entre parentesis de (1.20) se tiene

$$P = \frac{\alpha_1 \alpha_2 xy (T_1 - T_2 - x - y)}{\gamma (\alpha_2 y (T_1 - x) + \alpha_1 x (y + T_2))}, \quad (1.21)$$

de lo que obtenemos,

$$P = \frac{\alpha_1 \alpha_2 xy (T_1 - T_2 - x - y)}{\gamma (\alpha_2 y T_1 + \alpha_1 x T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) xy)}, \quad (1.22)$$

esta es la potencia de la máquina de CA [1], la cual fue optimizada respecto a las variables x e y , es decir se tiene $\partial_x P = 0$ que nos da una función $f(x, y) = 0$ de que cumple que,

$$f(x, y) = -x^2 (T_2 + y) \alpha_1 + \alpha_2 (T_1^2 + x^2 + T_1 (T_2 + 2x + y)) = 0, \quad (1.23)$$

a su vez $\partial_y P = 0$ nos da una función $g(x, y) = 0$ dada por,

$$g(x, y) = -\alpha_2 y^2 (x - T_1) + \alpha_1 x (y^2 + 2T_2 y + T_2 (x + T_2) - T_1 T_2) = 0, \quad (1.24)$$

encontramos así dos ecuaciones con dos incognitas por lo que de la ec. (1.23),

$$\alpha_2 y (T_1 (T_1) - T_1 (T_2 + 2x + y) + x^2) - \alpha_1 x^2 T_2 - \alpha_1 x^2 y = 0, \quad (1.25)$$

al factorizar y arreglar los términos entre paréntesis llegamos a

$$\alpha_2 y (T_1 (T_1 - T_2 - x - y) - x T_1 + x^2) = \alpha_1 x^2 T_2 + \alpha_1 x^2 y, \quad (1.26)$$

prosiguiendo con el desarrollo, en el caso de la multiplicación por factor común,

$$\alpha_2 y T_1 (T_1 - T_2 - x - y) - \alpha_2 y x T_1 + \alpha_2 y x^2 = \alpha_1 x^2 T_2 + \alpha_1 x^2 y, \quad (1.27)$$

acomodamos los términos a la izquierda del lado derecho de la ecuación por lo que,

$$\alpha_2 y T_1 ((T_1 - T_2 - x - y)) = \alpha_1 x^2 T_2 + \alpha_1 x^2 y + \alpha_2 y x T_1 - \alpha_2 y x^2, \quad (1.28)$$

al factorizar x obtenemos,

$$\alpha_2 y T_1 (T_1 - T_2 - x - y) = x [\alpha_1 x T_2 + \alpha_1 x y + \alpha_2 y T_1 - \alpha_2 y x], \quad (1.29)$$

por lo que,

$$\alpha_2 y T_1 (T_1 - T_2 - x - y) = x [\alpha_1 x T_2 + \alpha_2 y T_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) xy], \quad (1.30)$$

similarmente a lo hecho de la ecuación (1.23) hacemos lo mismo con la ec. (1.24) tal que,

$$\alpha_2 y^2 (T_1 - x) = -\alpha_1 x (T_2 (-T_1 + T_2 + x) + T_2 y + T_2 y + y^2), \quad (1.31)$$

observamos de la ecuación anterior que,

$$\alpha_2 y^2 (T_1 - x) = -\alpha_1 x T_2 (-T_1 + T_2 + x) - \alpha_1 x T_2 y - \alpha_1 x T_2 y - \alpha_1 x y^2, \quad (1.32)$$

se prosigue que,

$$\alpha_2 y^2 (T_1 - x) + \alpha_1 x T_2 y + \alpha_1 x y^2 = \alpha_1 x T_2 (T_1 - T_2 - x - y), \quad (1.33)$$

al factorizar,

$$y [\alpha_2 y T_1 - \alpha_2 x y + \alpha_1 x T_2 + \alpha_1 x y] = \alpha_1 x T_2 (T_1 - T_2 - x - y), \quad (1.34)$$

por lo que,

$$y [\alpha_2 y T_1 + \alpha_1 x T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) x y] = \alpha_1 x T_2 (T_1 - T_2 - x - y), \quad (1.35)$$

ahora bien al multiplicar por x^{-1} y $(T_1 - T_2 - x - y)^{-1}$ en (1.30),

$$\frac{\alpha_2 y T_1}{x} = \frac{[\alpha_1 x T_2 + \alpha_2 y T_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) x y]}{(T_1 - T_2 - x - y)}, \quad (1.36)$$

similarmente al multiplicar por y^{-1} como a $(T_1 - T_2 - x - y)^{-1}$ en (1.35),

$$\frac{[\alpha_2 y T_1 + \alpha_1 x T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) x y]}{(T_1 - T_2 - x - y)} = \frac{\alpha_1 x T_2}{y}. \quad (1.37)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\alpha_2 y T_1}{x} = \frac{\alpha_1 x T_2}{y}, \quad (1.38)$$

al despejar y se tiene,

$$y^2 = x^2 \frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}, \quad (1.39)$$

de lo que al extraer la raíz cuadrada de la ecuación anterior,

$$y = x \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}, \quad (1.40)$$

y también,

$$x = y \sqrt{\frac{\alpha_2 T_1}{\alpha_1 T_2}}, \quad (1.41)$$

al sustituir (1.40) en (1.30) se obtiene,

$$\alpha_2 x \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} T_1 \left(T_1 - T_2 - x - x \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} \right) = x \left[\alpha_1 x T_2 + \alpha_2 x \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} T_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) x \cdot x \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} \right], \quad (1.42)$$

que implica que,

$$\alpha_2 x \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} T_1 \left(T_1 - T_2 - x \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} \right) \right) = x \left[\alpha_1 x T_2 + \alpha_2 x \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} T_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) x^2 \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} \right], \quad (1.43)$$

multiplicamos por α_2^{-1} y desarrollamos los términos de la derecha de la última ecuación

$$\sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} \left(T_1 - T_2 - x \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} \right) \right) = x \frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1} + x \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1 \right) \frac{x^2}{T_1} \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}, \quad (1.44)$$

por lo que

$$\left(T_1 - T_2 - x \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right)\right) = x \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right) + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\right) \frac{x^2}{T_1}, \quad (1.45)$$

al restar el primer sumando de la derecha de la ecuación anterior en ambos lados obtenemos,

$$\left(T_1 - T_2 - 2x \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right)\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\right) \frac{x^2}{T_1}, \quad (1.46)$$

y al restar el termino de la izquierda,

$$\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{x^2}{T_1} + \left(T_1 - T_2 - 2x \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right)\right) = 0, \quad (1.47)$$

multiplicando por $1/T_1$,

$$\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{x^2}{T_1^2} + \left[-\left(2 \frac{x}{T_1} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right)\right)\right] + \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 0, \quad (1.48)$$

al quitar los parentesis cuadrados se obtiene,

$$\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{x^2}{T_1^2} - 2 \frac{x}{T_1} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right) + \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 0. \quad (1.49)$$

Observamos que x/T_1 es una forma de x normalida por T_1 que sustituiremos por $x_N = x/T_1$ tal que $\lim_{x \rightarrow T_1} x_N = 1$ donde,

$$\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) x_N^2 + \left[-2x_N \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right)\right] + \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 0, \quad (1.50)$$

tal que $x_N < 1 \Rightarrow x_N^2 \ll 1$ de lo que $x_N^2 \approx 0$, así la ecuación anterior implica que,

$$x_N = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{2 \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right)}. \quad (1.51)$$

Al sustituir (1.51) en (1.41)

$$y_N = \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}} \left[\frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{2 \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}}\right)} \right]. \quad (1.52)$$

Al retomar las ecuaciones (1.14) y (1.15) en la expresión de la eficiencia Ec. (1.5), que en términos de las variables x e y , tal ecuación toma la forma,

$$\eta = 1 - \frac{y + T_2}{T_1 - x}. \quad (1.53)$$

Para las condiciones de máxima potencia, es decir, al tomar las expresiones en x_{max} como y_{max} la eficiencia a máxima potencia es

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \quad (1.54)$$

La cuál es llamada eficiencia de Curzon y Ahlborn (CA) denotada por η_{CA} la cual puede observarse en la Fig. 1.3.

1.3. Enfoque de De Vos a la máquina de Curzon y Ahlborn

De Vos [4] usó un enfoque diferente de la máquina CA, que está basado en una estructura axiomática cuyos postulados son:

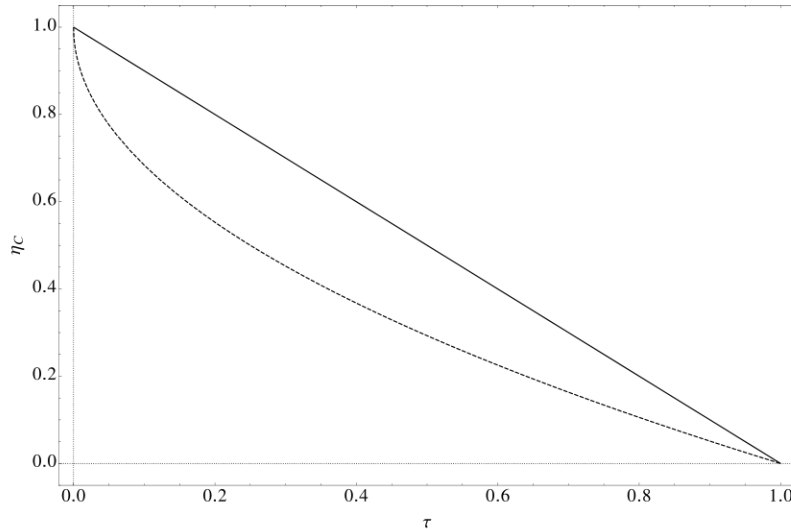


Figura 1.3: Eficiencia η contra $\tau = T_2/T_1$, la línea continua corresponde a la máquina de Carnot; la línea punteada corresponde con la eficiencia de Curzon y Ahlborn η_{CA} de la Ec. (1.54).

1.3.1. Conservación de la energía

El proceso que ocurre entre las isotermas T_{1w} y T_{2w} (ver Fig. 1.1) es un ciclo de Carnot, tal que $\Delta U = 0$ cuando se cierra al ciclo por lo tanto, de la primer ley de la termodinámica se tiene

$$\sum \dot{Q} + \sum \dot{W} = 0, \quad (1.55)$$

tal que $\sum \dot{Q}$ es el flujo neto de calor y $\sum \dot{W}$ es el flujo neto de trabajo realizado por el ciclo o potencia P , pues $\dot{W} = \dot{Q}$, siendo \dot{Q} el flujo de calor neto y así obtenemos de la Ec. (1.4) al derivar con respecto al tiempo respecto al tiempo, obtenemos.

$$\dot{Q}_1 = \dot{W} + \dot{Q}_2. \quad (1.56)$$

Luego incluimos el segundo axioma.

1.3.2. Conservación de la Entropía

De la primer de la 1a ley de la termodinámica se tiene que,

$$\Delta U = 0, \quad (1.57)$$

que en su forma diferencial queda como

$$dU = dW + dQ = 0. \quad (1.58)$$

Y por la segunda ley de la termodinámica, donde no hay cambio de entropía para los procesos reversibles tal que,

$$\sum \frac{\dot{Q}}{T} = 0, \quad (1.59)$$

es decir: la entropía se conserva $\Delta S = 0$ para el ciclo interior de la Fig. 1.1.

1.3.3. Endorreversibilidad según De Vos

Aplicando (1.7) al ciclo interno de la Fig. 1.1

$$\frac{\dot{Q}_1}{T_{1w}} = \frac{\dot{Q}_2}{T_{2w}}, \quad (1.60)$$

por lo que de (1.1) y de (1.2) en (1.60), se obtiene,

$$\frac{\alpha_1(T_1 - T_{1w})}{T_{1w}} = \frac{\alpha_2(T_{2w} - T_2)}{T_{2w}}, \quad (1.61)$$

que es la así llamada condición de endorreversibilidad [4]. En la Ec. (1.5) tenemos la eficiencia η del ciclo reversible entre T_{1w} y T_{2w} que puede escribirse como

$$T_{2w} = (1 - \eta)T_{1w}, \quad (1.62)$$

al sustituir (1.62) en (1.41),

$$\frac{\alpha_1(T_1 - T_{1w})}{T_{1w}} = \frac{\alpha_2((1 - \eta)T_{1w} - T_2)}{(1 - \eta)T_{1w}}, \quad (1.63)$$

al multiplicar por $(1 - \eta)$, obtenemos,

$$(1 - \eta)(\alpha_1 T_1 - \alpha_1 T_{1w}) = \alpha_2((1 - \eta)T_{1w} - T_2), \quad (1.64)$$

desarrollando al segundo paréntesis del término de la izquierda se tiene,

$$\alpha_1 T_1(1 - \eta) - \alpha_1 T_{1w}(1 - \eta) = \alpha_2(1 - \eta)T_{1w} - \alpha_2 T_2, \quad (1.65)$$

que se puede escribir como

$$\alpha_1 T_1(1 - \eta) + \alpha_2 T_2 = \alpha_2(1 - \eta)T_{1w} + \alpha_1 T_{1w}(1 - \eta), \quad (1.66)$$

al factorizar $(1 - \eta)$,

$$\alpha_1 T_1(1 - \eta) + \alpha_2 T_2 = (\alpha_2 T_{1w} + \alpha_1 T_{1w})(1 - \eta), \quad (1.67)$$

al despejar T_{1w} obtenemos,

$$T_{1w} = \frac{\alpha_1 T_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2 T_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \eta)}, \quad (1.68)$$

también de (1.5), se concluye que,

$$T_{1w} = \frac{T_{2w}}{(1 - \eta)}, \quad (1.69)$$

de lo obtenido en la ecuación (1.69) al sustituirlo en (1.7)

$$\frac{\alpha_1(T_1 - \frac{T_{2w}}{(1 - \eta)})}{\frac{T_{2w}}{(1 - \eta)}} = \frac{\alpha_2(T_{2w} - T_2)}{T_{2w}}, \quad (1.70)$$

de la suma de fracciones del primer término de la izquierda, obtenemos,

$$\frac{\alpha_1((1 - \eta)T_1 - T_{2w})}{(1 - \eta)\frac{T_{2w}}{(1 - \eta)}} = \frac{\alpha_2(T_{2w} - T_2)}{T_{2w}}, \quad (1.71)$$

lo cual conduce a

$$\alpha_1((1 - \eta)T_1 - T_{2w}) = \alpha_2(T_{2w} - T_2), \quad (1.72)$$

que se puede escribir,

$$\alpha_2(T_{2w} - T_2) = \alpha_1(1 - \eta)T_1 - \alpha_1 T_{2w}, \quad (1.73)$$

o también al desarrollar del término el paréntesis izquierdo para no necesitar el paréntesis, tenemos,

$$\alpha_2 T_{2w} - \alpha_2 T_2 = \alpha_1((1 - \eta)T_1 - T_{2w}), \quad (1.74)$$

y así de ambos términos,

$$\alpha_2 T_{2w} + \alpha_1 T_{2w} = \alpha_1(1 - \eta)T_1 + \alpha_2 T_2, \quad (1.75)$$

por propiedad distributiva en la parte izquierda de la ecuación anterior,

$$T_{2w}(\alpha_2 + \alpha_1) = \alpha_1(1 - \eta)T_1 + \alpha_2 T_2, \quad (1.76)$$

al despejar la temperatura T_{2w} , obtenemos,

$$T_{2w} = \frac{(1 - \eta)\alpha_1 T_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2 T_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad (1.77)$$

al sustituir (1.68) en (1.1) se tiene,

$$\dot{Q}_1 = \alpha_1 \left(T_1 - \frac{\alpha_1 T_1}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{\alpha_2 T_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \eta)} \right), \quad (1.78)$$

que se puede escribir como,

$$\dot{Q}_1 = \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) T_1 - \alpha_1 T_1 - \frac{\alpha_2 T_2}{(1 - \eta)} \right], \quad (1.79)$$

y al desarrollar halamos,

$$\dot{Q}_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[T_1 - \frac{T_2}{(1 - \eta)} \right]. \quad (1.80)$$

Definiendo a $g \equiv (\alpha_1 \alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2)$, se tiene que,

$$\dot{Q}_1 = \frac{g}{(1 - \eta)} [T_1(1 - \eta) - T_2], \quad (1.81)$$

y al desarrollar se obtiene,

$$\dot{Q}_1 = \frac{g}{(1 - \eta)} [T_1 - \eta T_1 - T_2], \quad (1.82)$$

por lo que obtenemos finalmente al calor \dot{Q}_1 cuya ilustración de este en la figura 1.6 concuerda con la Figura 3.3(a) en [1] y el eje de las abscisas es propiamente de la eficiencia interna η y concuerda con nuestra eficiencia de Carnot de nuestra figura 1.6,

$$\dot{Q}_1 = \frac{g}{(1 - \eta)} [T_1 - T_2 - \eta T_1], \quad (1.83)$$

ahora bien, al definir eficiencia η como,

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|, \quad (1.84)$$

Así de sustituir (1.4) en (1.84),

$$\eta = 1 - \frac{|Q_1| - W}{|Q_1|}, \quad (1.85)$$

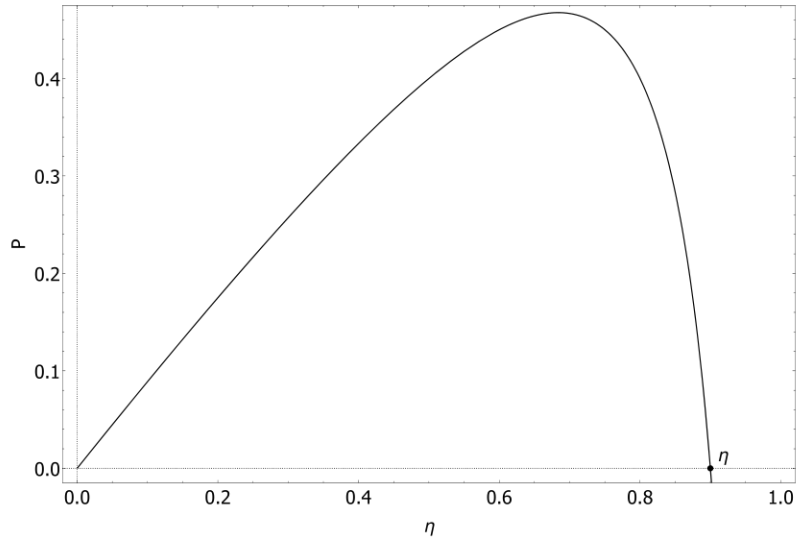


Figura 1.4: Potencia P contra eficiencia η , tal que la eficiencia η corresponde al eje de las abscisas es propiamente la interna y la potencia P es unitaria.

$$\eta = 1 - 1 + \frac{W}{|Q_1|}, \quad (1.86)$$

así

$$\eta = \frac{W}{|Q_1|}, \quad (1.87)$$

puesto que $Q_1 > 0$ y la eficiencia η en forma explícita es independiente del tiempo, la ecuación anterior implica,

$$\dot{W} = \eta \dot{Q}_1, \quad (1.88)$$

al sustituir (1.83) en (1.88),

$$\dot{W} = \eta \frac{g}{(1-\eta)} [T_1 - T_2 - \eta T_1], \quad (1.89)$$

en la Fig. 1.4 (que concuerda con la Fig. 3.3 (b) de De Vos [4]), observamos el comportamiento de la potencia \dot{W} con respecto a la eficiencia η para T_1 y T_2 dadas. Como la conducción térmica de T_1 a T_{1w} es irreversible.

$$-\frac{\dot{Q}_1}{T_1} + \frac{\dot{Q}_1}{T_{1w}} > 0. \quad (1.90)$$

Así de la extensividad de la entropía para estos procesos se tiene que,

$$\Delta \dot{S} = \sum_j \frac{\dot{Q}_j}{T} = -\frac{\dot{Q}_1}{T_1} + \frac{\dot{Q}_1}{T_{1w}} - \frac{\dot{Q}_2}{T_{2w}} + \frac{\dot{Q}_2}{T_2}, \quad (1.91)$$

lo implica que, por la hipótesis de endorreversibilidad se tiene,

$$\Delta \dot{S} = -\frac{\dot{Q}_1}{T_1} + \frac{\dot{Q}_2}{T_2}, \quad (1.92)$$

al sustituir (1.56) en (1.92),

$$\Delta\dot{S} = -\frac{\dot{Q}_1}{T_1} + \frac{\dot{Q}_1 - \dot{W}}{T_2}. \quad (1.93)$$

de lo que,

$$\Delta\dot{S} = \dot{Q}_1 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) - \frac{\eta\dot{Q}_1}{T_2}, \quad (1.94)$$

y por lo tanto,

$$\Delta\dot{S} = \frac{\dot{Q}_1}{T_2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{\eta\dot{Q}_1}{T_2}. \quad (1.95)$$

Ahora bien, en cuanto a la eficiencia, observamos que si decimos que el proceso involucra a T_{1w} , T_{2w} y W , tenemos una máquina de Carnot.

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}, \quad (1.96)$$

Por lo que al tomar en cuenta la eficiencia de circuito abierto [4] en (1.95) es decir con $T_{1w} \rightarrow T_1$ y $T_{2w} \rightarrow T_2$ dicho de otra forma, al hacer un corto circuito a la máquina de CA en conectar la isoterma T_1 con la máquina de Carnot y a su vez ésta a la isoterma T_2 de seguir la figura izquierda de la figura 1.1, en que la eficiencia η anteriormente redactada a (1.96) por (1.5) se toma como eficiencia de Carnot η_c pero, la eficiencia η ahora aquí es de la sustancia de trabajo propia a la máquina CA, por lo que de lo dicho con base a (1.95) y la definición clásica de eficiencia η_c de Carnot propia de circuito abierto, obtenemos para la ec. (1.95) que,

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}_1}{T_2} \eta_c - \frac{\eta\dot{Q}_1}{T_2}, \quad (1.97)$$

es decir,

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}_1}{T_2} (\eta_c - \eta), \quad (1.98)$$

de sustituir (1.83) en (1.98),

$$\dot{S} = \frac{g[T_1 - T_2 - \eta T_1]}{(1 - \eta)T_2} (\eta_c - \eta), \quad (1.99)$$

o bien del valor de la eficiencia a circuito abierto,

$$\dot{S} = \frac{g[T_1 - T_2 - \eta T_1]}{(1 - \eta)T_1 T_2} (T_1 - T_2 - T_1 \eta), \quad (1.100)$$

por lo tanto,

$$\dot{S} = \frac{g[T_1 - T_2 - \eta T_1]^2}{(1 - \eta)T_2 T_1}. \quad (1.101)$$

tal que $\dot{S} \equiv \sigma$ donde σ corresponde denota a la disipación de la máquina de la que se ilustra la figura 1.5 que concuerda en [1] con la Figura 3.3(c) y el eje de las abcisas es propiamente de la eficiencia. También de sustituir (1.83) en 1.88,

$$\dot{W} = \frac{g\eta}{(1 - \eta)} [T_1 - \eta T_1 - T_2]. \quad (1.102)$$

Ahora bien, derivando (1.102) respecto a la eficiencia η .

$$\frac{d}{d\eta} \dot{W} = \frac{g}{T_1} \frac{d}{d\eta} \left\{ \frac{\eta}{(1 - \eta)} [T_1 - \eta T_1 - T_2] \right\}, \quad (1.103)$$

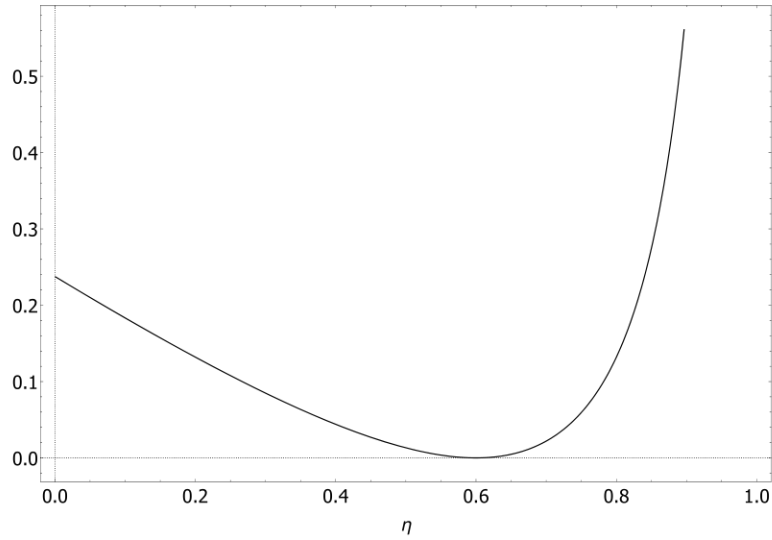


Figura 1.5: $\sigma \times T_2$ normalizado conforme a la ecuación (1.101) con $g = 0,66$ y temperaturas $T_2 = 0,1^\circ K$ y $T_1 = 1^\circ K$.

y así existe una función f tal que $f(\eta)=dW(\eta)/\eta$, por lo que

$$f(\eta) = \eta^2 T_1 - 2T_1 \eta + T_1 + T_2 = 0, \quad (1.104)$$

se resuelve

$$\eta = \frac{2T_1 - \sqrt{4T_1^2 + 4T_1(T_2 - T_1)}}{2T_1}, \quad (1.105)$$

del denominador

$$\eta = \frac{T_1 - \sqrt{T_1^2 + T_1 T_2 - T_1^2}}{T_1}, \quad (1.106)$$

del término en la raíz

$$\eta = 1 - \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1} = 1 - \frac{\sqrt{T_1 T_2 \left(\frac{T_1}{T_1}\right)}}{T_1}, \quad (1.107)$$

al hallar que está T_1 al cuadrado

$$\eta = 1 - \frac{T_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{T_1}, \quad (1.108)$$

obtenemos finalmente

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad (1.109)$$

al comparar (1.109) con (1.54), obtenemos que la eficiencia η buscada es la eficiencia η_{CA} de Curzon y Ahlborn.

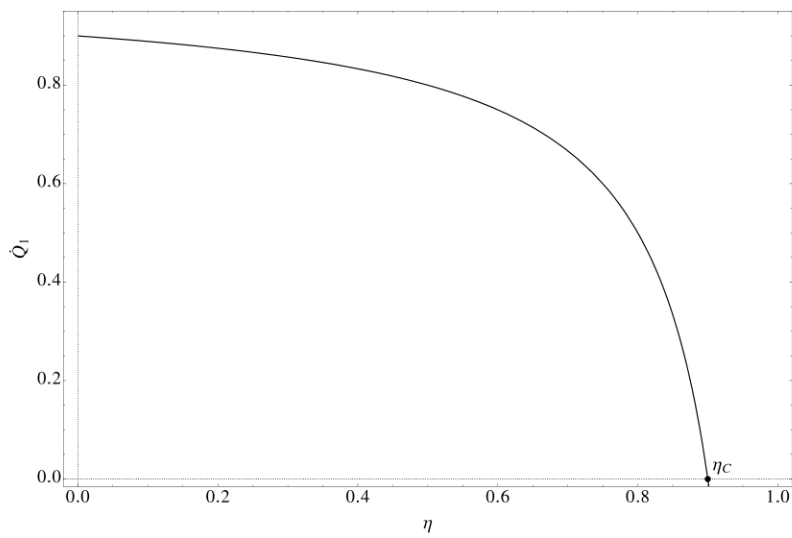


Figura 1.6: Con el valor de la eficiencia η de 0.3 y $g = 1$, graficamos la transferencia de calor \dot{Q}_1 .

Capítulo 2

Modelo Gutkowicz, Procaccia y Ross (GPR)

2.1. Modelo GPR al tomar en cuenta la eficiencia interna

En 1978, poco tiempo después de publicado el trabajo de CA [1], Gutkowicz, Procaccia y Ross (GPR) [9] tomaron el modelo de CA para una máquina que opera entre dos reservorios térmicos de temperaturas T_1 y T_2 , tal que $T_1 > T_2$, ilustrada en la Fig. 2.1. Conforme a esta figura, el modelo GPR está en el marco de las máquinas de reversibilidad interna (endorreversibles), tal que éste en particular, toma el acoplamiento de un cilindro a los reservorios térmicos de temperaturas $T_1 > T_2$ que en su interior tiene un gas que se mueve en un cilindro con pistón entre los volúmenes ilustrados en la Fig.2.1. El ciclo interno de esta figura es un ciclo de Carnot con 2 isothermas de temperaturas T_{1w} y T_{2w} tal que se cumple la siguiente desigualdad $T_1 > T_{1w} > T_{2w} > T_2$ propia de máquinas endoreversibles.

Con base en la primer ley de la termodinámica tenemos,

$$\Delta U = Q + W, \quad (2.1)$$

derivando con respecto al tiempo,

$$\Delta \dot{U} = \dot{Q} + \dot{W}, \quad (2.2)$$

para un proceso ciclico $\Delta U = \Delta \dot{U} = 0$, ya que U es una función de estado y por lo tanto,

$$|\dot{Q}| = |\dot{W}|, \quad (2.3)$$

a lo largo de la isoterma T_{1w} la temperatura es constante y como la sustancia de trabajo es un gas ideal entonces, la energía interna U solo depende de la temperatura y por lo tanto $\Delta U = 0$, lo cual nos lleva a

$$\frac{d}{dt}Q_1 = P \frac{d}{dt}V, \quad (2.4)$$

de lo que,

$$dQ_1 = PdV, \quad (2.5)$$

correspondiendo la presión a gas ideal

$$dQ = \frac{RT_{1w}}{V}dV, \quad (2.6)$$

al integrar y usar la ecuación de gas ideal y la ley de enfriamiento de Newton inmediatamente se obtiene

$$\dot{Q}_1 = RT_{1w} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \quad (2.7)$$

y análogamente, se obtiene para la isoterma inferior a T_{2w}

$$\dot{Q}_2 = RT_{2w} \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right), \quad (2.8)$$

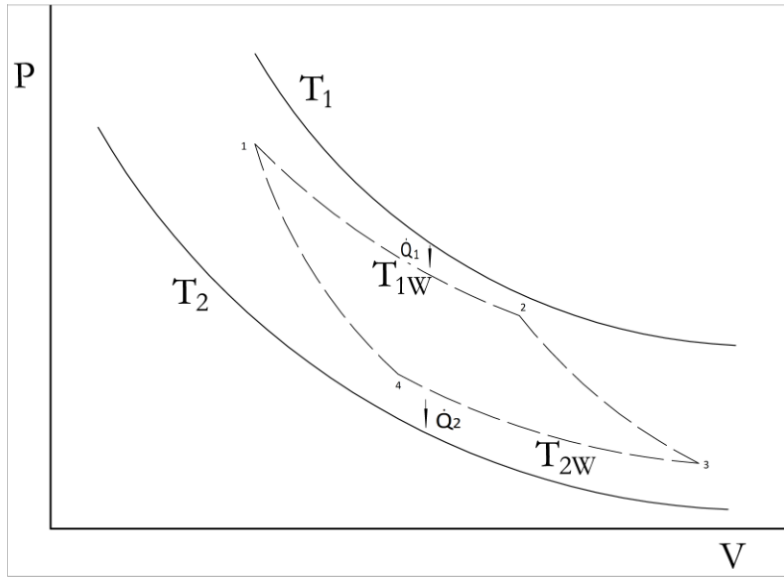


Figura 2.1: Diagrama P-V de una máquina de Curzon y Ahlborn que utiliza a un gas ideal como sustancia de trabajo.

2.2. Procesos irreversibles en la máquina GPR

Las transferencias de calor son procesos irreversibles como observamos en la Fig. 2.1. De lo que ya vimos en analogía a la Fig 1.1, \dot{Q}_1 corresponde a una conducción lineal del calor dada por una ecuación diferencial de primer orden en el tiempo. Como sabemos ecuaciones de este tipo no tienen el mismo valor ante inversión temporal (no se revierten así mismos [9]), véase la Fig. 2.1.

2.3. Procesos adiabáticos

Utilizando la Ec. (2.2) para la primer ley de la termodinámica, inmediatamente podemos incorporar la condición de adiabaticidad; es decir, $Q = 0$ lo que nos lleva a

$$\Delta U = W, \quad (2.9)$$

para un proceso infinitesimal el trabajo queda dado por,

$$\delta W = -PdV, \quad (2.10)$$

sin embargo; conocemos también la ecuación de estado del gas ideal; es decir;

$$PV = nRT, \quad (2.11)$$

que en notación molar queda.

$$P\left(\frac{V}{n}\right) = Pv' = RT, \quad (2.12)$$

al multiplicar por el inverso multiplicativo del volumen molar v' ,

$$P = \frac{RT}{v'}, \quad (2.13)$$

al considerar al volumen molar en la Ec. (2.10) y sustituir (2.13) en (2.10), obtenemos,

2.4. Relación de volúmenes (previo a relación de compresión).

$$\delta W = -\frac{RT}{v'} dv', \quad (2.14)$$

como hemos partido de un proceso cuasiestático, en una curva proceso en el espacio de estados P-V une a dos puntos (estados) [3] que también se puede ver como proceso reversible [2] y la diferencial de energía en expresión molar como,

$$du = \frac{3}{2}RdT = c_V dT, \quad (2.15)$$

luego, al tomar las expresiones diferenciales y sustituir (2.14) y (2.13) en (2.9),

$$c_V dT = -\frac{RT}{v} dv, \quad (2.16)$$

de lo que al integrar la ecuación anterior se da,

$$c_V \ln(T) = -R \ln(v) + \ln(K), \quad (2.17)$$

con K constante de integración pero, $R = C_p - C_V$ en que $\gamma = C_p/C_V$, tenemos,

$$Tv^{\gamma-1} = C' \quad (2.18)$$

tal que es C' constante, por lo que para ambas adiabatas del ciclo de Carnot propias de la Fig. 2.1 se cumple que,

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_{1w}}{T_{2w}}\right), \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_{1w}}{T_{2w}}\right). \quad (2.20)$$

2.4. Relación de volúmenes (previo a relación de compresión).

De las ecuaciones anteriores se tiene que,

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \quad (2.21)$$

extrayendo la raíz $\gamma - 1$ de la ecuación anterior,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}, \quad (2.22)$$

al multiplicar por V_4 tenemos que,

$$V_3 = V_4 \frac{V_2}{V_1} = V_2 \frac{V_4}{V_1}, \quad (2.23)$$

también del inverso multiplicativo de la ec. (2.22) al multiplicar por V_2 la ecuación nos da,

$$V_1 = V_4 \frac{V_2}{V_3} = V_2 \frac{V_4}{V_3}, \quad (2.24)$$

y de la ec. (2.22) al multiplicar por V_1 a su vez,

$$V_2 = V_1 \frac{V_3}{V_4} = V_3 \frac{V_1}{V_4}, \quad (2.25)$$

finalmente del inverso multiplicativo de la ec. (2.22) al multiplicar por V_3 damos,

$$V_4 = V_1 \frac{V_3}{V_2} = V_3 \frac{V_1}{V_2}. \quad (2.26)$$

2.5. Trabajo y tiempo de las isotermas

Ahora bien, de la condición de endorreversibilidad vista en la sección 1.1 y utilizando como sustancia de trabajo a un gas ideal; es decir, usando las ecuaciones (1.1) y (2.7), se tiene,

$$t_1 = \frac{RT_{1w}}{\alpha_1(T_1 - T_{1w})} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \quad (2.27)$$

como en la ecuación anterior pero, usando ahora (1.2) en (2.8) se tiene,

$$t_3 = \frac{RT_{2w}}{\alpha_2(T_{2w} - T_2)} \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right), \quad (2.28)$$

evidentemente de las ecuaciones anteriores obtenemos que $Q_1 = \dot{Q}_1 t_1$ y $Q_3 = \dot{Q}_3 t_3$, entonces aplicando la primer ley de la termodinámica al ciclo endorreversible obtenemos,

$$W = RT_{1w} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - RT_{2w} \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right). \quad (2.29)$$

2.6. Eficiencia interna

Consideremos que la eficiencia η del ciclo de Carnot interno de la Fig.. 2.1 es

$$\eta = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}, \quad (2.30)$$

por lo que,

$$T_{2w} = (1 - \eta)T_{1w}, \quad (2.31)$$

y dividiendo T_{1w} obtenemos,

$$\frac{T_{2w}}{T_{1w}} = (1 - \eta), \quad (2.32)$$

Al sustituir (2.19) en (2.32),

$$(1 - \eta)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{V_3}{V_2}, \quad (2.33)$$

y al sustituir (2.22) en (2.29) se tiene,

$$W = R[T_{1w} - T_{2w}] \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right), \quad (2.34)$$

de (2.31) y de (2.26) se tiene,

$$W = R\eta T_{1w} \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_3}\right) \right]. \quad (2.35)$$

Al definir, $\nu \equiv 1/(\gamma - 1)$ tal que, de (2.19) en (2.35), como al sustituirle (2.32) y del valor de ν , además de la Ec. (2.31), el trabajo anteriormente calculado puede escribirse como,

$$W = R[T_{1w} - T_{2w}] \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \nu \ln\left(\frac{T_{2w}}{T_{1w}}\right) \right], \quad (2.36)$$

que corresponde con el trabajo de GPR [9], se mencionará aquí que conforme se ve en la figura 2.1 que al ser V_3 el máximo volumen de expansión en el que se mueve el pistón en el interior del cilindro y V_1 el volumen mínimo de compresión en el interior del cilindro que, la razón de V_3 sobre V_1 es la relación de compresión.

2.7. Tiempo de adiabatas y razón de temperaturas exteriores

De (2.4) y al estar manejando el gas ideal, se tiene,

$$\alpha_1 (T_1 - T_{1w}) = \frac{RT}{V} \frac{d}{dt} V, \quad (2.37)$$

por lo que,

$$\alpha_1 (T_1 - T_{1w}) = \int_0^{t_2} dt = RT_{1w} \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V}, \quad (2.38)$$

así

$$t_2 = \frac{RT_{1w}}{\alpha_1 (T_1 - T_{1w})} \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right), \quad (2.39)$$

de (2.22) y (2.20) se tiene,

$$t_4 = \frac{RT_{1w}}{\alpha_2 (T_{2w} - T_{2w})} \ln \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{-1}, \quad (2.40)$$

ahora bien, de (2.8), la ecuación de estado de gas ideal con (2.22) en (2.40), se tiene,

$$t_4 = \frac{RT_{2w}}{\alpha_2 (T_{2w} - T_{2w})} \ln (1 - \eta)^v, \quad (2.41)$$

de la aproximación en serie de logaritmos para el tiempo t_2 observamos que,

$$t_2 = \frac{RT_{1w}}{\alpha_1 (T_1 - T_{1w})} v \eta, \quad (2.42)$$

para el tiempo t_4 tenemos que,

$$t_4 = \frac{-RT_{2w}}{\alpha_2 (T_{2w} - T_{2w})} v \eta, \quad (2.43)$$

por lo que el tiempo total t_{Tot} al sumar todos los tiempos de (2.27), (2.39), (2.28) y (2.40) obtenemos,

$$t_{Tot} = \frac{RT_{1w}}{\alpha_1 (T_1 - T_{1w})} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + \frac{RT_{1w}}{\alpha_1 (T_1 - T_{1w})} \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) + \frac{-RT_{2w}}{\alpha_2 (T_{2w} - T_2)} \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) + \frac{-RT_{1w}}{\alpha_2 (T_{2w} - T_{2w})} \ln \left(\frac{V_1}{V_4} \right), \quad (2.44)$$

y al factorizar en la ecuación anterior nos da,

$$t_{Tot} = \frac{RT_{1w}}{\alpha_1 (T_1 - T_{1w})} \left[\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) \right] + \left[\ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) + \ln \left(\frac{V_1}{V_4} \right) \right] \frac{-RT_{2w}}{\alpha_2 (T_{2w} - T_2)}, \quad (2.45)$$

de lo que por leyes de los logaritmos observamos,

$$t_{Tot} = \frac{RT_{1w}}{\alpha_1 (T_1 - T_{1w})} \ln \left(\frac{V_3}{V_1} \right) + \frac{-RT_{2w}}{\alpha_2 (T_{2w} - T_2)} \ln \left(\frac{V_1}{V_3} \right), \quad (2.46)$$

por leyes de los logaritmos nuevamente obtenemos finalmente,

$$t_{Tot} = \left(\frac{RT_{1w}}{\alpha_1 (T_1 - T_{1w})} + \frac{RT_{2w}}{\alpha_2 (T_{2w} - T_2)} \right) \left[\ln \left(\frac{V_3}{V_1} \right) \right]. \quad (2.47)$$

2.8. Procesos Endorreversibles de Máquina GPR

Al definir τ , la razón de temperaturas externas al ciclo de Carnot de la siguiente manera,

$$\tau \equiv \frac{T_2}{T_1}, \quad (2.48)$$

que al multiplicarla por T_1 obtenemos,

$$T_2 = \tau T_1, \quad (2.49)$$

para facilidad de comprensión conviene observar de (2.49) que para la máquina GPR hay una dependencia lineal del aumento de temperaturas en que, τ es la pendiente.

Ahora bien, al sustituir (2.33) en el trabajo (2.35)

$$W = R\eta T_{1w} \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \ln(1-\eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right]. \quad (2.50)$$

Pero, del valor definido ν previamente,

$$W = R\eta T_{1w} \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \ln(1-\eta)^\nu \right], \quad (2.51)$$

al darse la máquina GPR en funcionamiento de Carnot como se ilustra en la Fig. 2.1, resulta que se cumplen las ecuaciones (1.7) y (1.60) de endorreversibilidad por los proceso de la máquina de Carnot, también $Q_1 \approx \dot{Q}_1 t_1$ y $Q_2 \approx \dot{Q}_2 t_3$ en que hallamos,

$$\frac{\dot{Q}_1 t_1}{T_{1w}} = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right), \quad (2.52)$$

y así de la endorreversibilidad y del funcionamiento de la máquina como se ilustra en la figura 2.1 obtenemos,

$$-\frac{\dot{Q}_2 t_3}{T_{2w}} = \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) = -\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right), \quad (2.53)$$

en que también al sustituir (2.30) y (2.31) en la ecuación de endorreversibilidad (1.61), ya que como dijimos hay reversibilidad interna en la máquina GPR permitiendo el mismo tratamiento que en CA (pero, aquí $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$) de lo que observamos que,

$$T_1 - T_{1w} = \frac{(1-\eta)T_{1w} - \tau T_1}{(1-\eta)}, \quad (2.54)$$

al multiplicar por $(1-\eta)$ obtenemos que,

$$(1-\eta)(T_1 - T_{1w}) = (1-\eta)T_{1w} - \tau T_1, \quad (2.55)$$

y distribuimos multiplicativamente el termino de la izquierda para acomodar términos semejantes, de lo que obtenemos,

$$-(1-\eta)T_{1w} - (1-\eta)T_{1w} = -(1-\eta + \tau)T_1, \quad (2.56)$$

al simplificar lo anterior obtenemos que,

$$(1-\eta + \tau)T_1 = 2(1-\eta)T_{1w}, \quad (2.57)$$

al multiplicar por el inverso multiplicativo de $2(1-\eta)$, obtenemos que,

$$T_{1w} = \frac{(1-\eta + \tau)}{2(1-\eta)} T_1, \quad (2.58)$$

con base a la ecuación anterior calculamos,

$$T_1 - T_{1w} = \left(1 - \frac{(1 - \eta + \tau)}{2(1 - \eta)}\right) T_1, \quad (2.59)$$

de lo que al hacer suma de fracciones en el termino entre paréntesis de la izquierda,

$$T_1 - T_{1w} = \left(\frac{2(1 - \eta) - (1 - \eta + \tau)}{2(1 - \eta)}\right) T_1, \quad (2.60)$$

también de (2.31), (2.58) y (2.49) con base a la endorreversibilidad,

$$T_{2w} - T_2 = \left((1 - \eta) \frac{(1 - \eta + \tau)}{2(1 - \eta)}\right) T_1 - \tau T_1, \quad (2.61)$$

siguiéndose que,

$$T_{2w} - T_2 = \frac{T_1}{2} ((1 - \eta + \tau) - 2\tau). \quad (2.62)$$

2.9. Potencia

Ahora bien al sustituir (2.58) en (2.51)

$$W = R\eta \frac{(1 - \eta + \tau)}{2(1 - \eta)} T_1 \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + v \ln(1 - \eta) \right], \quad (2.63)$$

también así de sustituir (2.31), (2.58), (2.60) y (2.62) en (2.47) obtenemos que,

$$t_{Tot} = \left(\frac{R \frac{(1 - \eta + \tau)}{2(1 - \eta)} T_1}{\alpha_1 \left(\frac{2(1 - \eta) - (1 - \eta + \tau)}{2(1 - \eta)} \right) T_1} + \frac{R(1 - \eta) \frac{(1 - \eta + \tau)}{2(1 - \eta)} T_1}{\alpha_2 \frac{T_1}{2} ((1 - \eta + \tau) - 2\tau)} \right) \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \right], \quad (2.64)$$

prosiguiendo en buscar el expresar en forma sencilla obtenemos que,

$$t_{Tot} = \left(\frac{R(1 - \eta + \tau)}{\alpha_1 ((1 - \eta - \tau))} + \frac{R(1 - \eta + \tau)}{\alpha_2 ((1 - \eta - \tau))} \right) \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \right], \quad (2.65)$$

así para el tiempo total hallamos que,

$$t_{Tot} = \frac{2R}{\alpha} \left(\frac{(1 - \eta + \tau)}{(1 - \eta - \tau)} \right) \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \right]. \quad (2.66)$$

Ahora bien, el tiempo también depende de la eficiencia reconociendo de la definición de potencia P que,

$$P = \frac{W}{t_{Tot}} = \frac{R\eta \frac{(1 - \eta + \tau)}{2(1 - \eta)} T_1 \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + v \ln(1 - \eta) \right]}{\frac{2R}{\alpha} \left(\frac{(1 - \eta + \tau)}{(1 - \eta - \tau)} \right) \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \right]}, \quad (2.67)$$

por lo que,

$$P = \frac{W}{t_{Tot}} = \frac{\alpha \eta (1 - \eta - \tau) T_1 \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + v \ln(1 - \eta) \right]}{4(1 - \eta) \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \right]}, \quad (2.68)$$

tomando en cuenta el tratamiento matemático usual de las adiabatas del valor de v en (2.68),

$$P = \frac{\alpha \eta (1 - \eta - \tau) T_1 \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{1}{\gamma - 1} \ln(1 - \eta) \right]}{4(1 - \eta) \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \right]}, \quad (2.69)$$

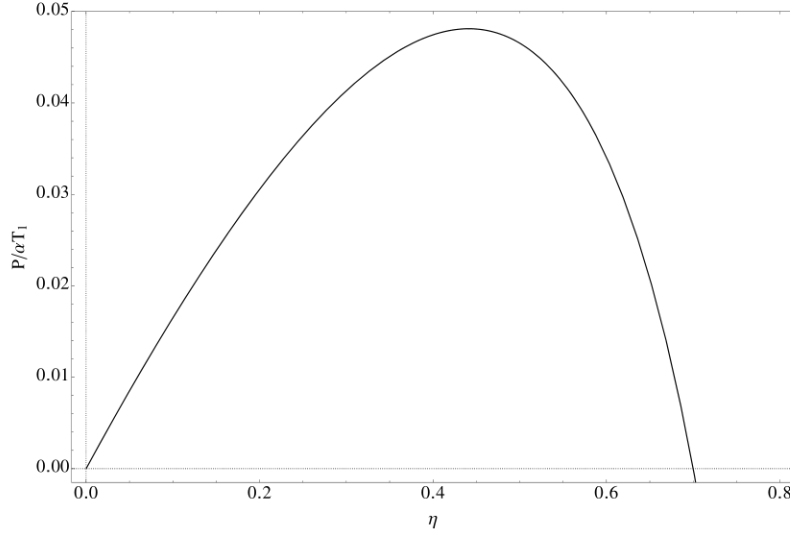


Figura 2.2: Gráfica de la Potencia P vs eficiencia η con base a la Ec. (2.71) habiéndose fijado a la razón de temperaturas τ en 0.3 y λ en 0.1.

al definir la variable λ tal que,

$$\lambda \equiv \frac{1}{(\gamma-1)} \frac{1}{\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)}, \quad (2.70)$$

por lo que al sustituir (2.70) en (2.69), la potencia que se obtiene que,

$$P_{GPR} = \alpha T_1 \frac{\eta(1-\eta-\tau)(1+\lambda \ln(1-\eta))}{4(1-\eta)}. \quad (2.71)$$

al fijar τ a 0.3 y λ a 0.1 en esta última ecuación, se obtiene la Fig. 2.2. Ahora, hemos de optimizar respecto a la eficiencia η i.e. con $dP_{GPR}/d\eta = 0$, obtenemos la función de optimización $g(\eta)$, por lo que hacemos a $g(\eta) = 0$ en que,

$$g(\eta) = \frac{((-1+\eta)(-1+\eta+\eta\lambda) + (-1+\eta\lambda)\tau + ((-1+\eta)^2 - \tau)\lambda \ln(1-\eta))}{(4(-1+\eta)^2)}, \quad (2.72)$$

luego,

$$g(\eta) = (-1+\eta)(-1+\eta+\eta\lambda) + (-1+\eta\lambda)\tau + \lambda((-1+\eta)^2 - \tau)\ln(1-\eta) = 0. \quad (2.73)$$

Ahora bien, tomando la expresión lineal de (2.72) que viene de la optimización de (2.71), dividiendo entre αT_1 , recuperamos la Ec. (2.71), puesto que $\eta < 1$ de los métodos matemáticos garantizamos expresar a η en serie de MacLaurin en que con $\lambda < \infty$ que es equivalente a una de recurrencia que podemos expresar esta serie también con la forma de la que denotaremos como $\eta \rightarrow \eta_{GPR}$ tal que,

$$\eta_{GPR} = a_0 \times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n\right), \quad (2.74)$$

tal que $\lambda < \infty$, por lo que al sustituir (2.74) en (2.73),

$$(-1 + a_0 \times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n\right)) \left(-1 + a_0 \times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n\right) \lambda\right) + (-1 + a_0 \times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n\right) \lambda) \tau =$$

$$-\lambda \left(\left(-1 + a_0 \times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n \right) \right)^2 - \tau \right) \ln \left(1 - a_0 \times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n \right) \right), \quad (2.75)$$

sin embargo debido a la equivalencia a la recurrencia de los elementos de la serie de la eficiencia; en forma explicita obtenemos que,

$$\begin{aligned} & (-1 + (a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots))) (-1 + (a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots))) + \\ & + (a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) \lambda + (-1 + (a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots))) \lambda \tau = \\ & - \lambda ((-1 + (a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)))^2 - \tau) \ln(1 - (a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots))). \end{aligned} \quad (2.76)$$

tal que de lado izquierdo de la ecuación escrita (2.76) le llamaremos $i(\lambda)$ tal que,

$$\begin{aligned} i(\lambda) = & 1 - 2a_0 + a_0^2 - a_0 \lambda + a_0^2 \lambda - 2a_0 a_1 \lambda + 2a_0^2 a_1 \lambda - a_0 a_1 \lambda^2 + \\ & 2a_0^2 a_1 \lambda^2 + a_0 a_1^2 \lambda^2 - 2a_0 a_2 \lambda^2 + 2a_0^2 a_2 \lambda^2 + a_0^2 a_1^2 \lambda^3 - \\ & a_0 a_2 \lambda^3 + 2a_0^2 a_2 \lambda^3 + 2a_0^2 a_1 a_2 \lambda^3 - 2a_0 a_3 \lambda^3 + 2a_0^2 a_3 \lambda^3 + \\ & 2a_0^2 a_1 a_2 \lambda^4 + a_0^2 a_2^2 \lambda^4 - a_0 a_3 \lambda^4 + 2a_0^2 a_3 \lambda^4 + 2a_0^2 a_1 a_3 \lambda^4 + \\ & a_0^2 a_2^2 \lambda^5 + 2a_0^2 a_1 a_3 \lambda^5 + 2a_0^2 a_2 a_3 \lambda^5 + 2a_0^2 a_2 a_3 \lambda^6 + \\ & a_0^2 a_3^2 \lambda^6 + a_0^2 a_3^2 \lambda^7 - \tau + a_0 \lambda \tau + a_0 a_1 \lambda^2 \tau + a_0 a_2 \lambda^3 \tau + a_0 a_3 \lambda^4 \tau + \dots, \end{aligned} \quad (2.77)$$

y como al lado derecho de la ec. (2.76) definimos como $d(\lambda)$ tal que,

$$\begin{aligned} d(\lambda) = & -\lambda \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) + 2a_0 \lambda \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - \\ & a_0^2 \lambda \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) + 2a_0 a_1 \lambda^2 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - \\ & 2a_0^2 a_1 \lambda^2 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - a_0^2 a_1^2 \lambda^3 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) + \\ & 2a_0 a_2 \lambda^3 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - 2a_0^2 a_2 \lambda^3 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - \\ & 2a_0^2 a_1 a_2 \lambda^4 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) + 2a_0 a_3 \lambda^4 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - \\ & 2a_0^2 a_3 \lambda^4 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - a_0^2 a_2^2 \lambda^5 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - \end{aligned}$$

$$2a_0^2 a_1 a_3 \lambda^5 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) - 2a_0^2 a_2 a_3 \lambda^6 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) -$$

$$a_0^2 a_3^2 \lambda^7 \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)) + \lambda \tau \ln(1 - a_0 \times (1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots)), \quad (2.78)$$

observamos de la forma finita de (2.75) al igualar (2.78) con (2.77) que a_0 y τ son coeficiente que no multiplican λ por lo que al ser parte de la solución de (2.75), tenemos para los términos de la serie que no multiplican a λ ,

$$1 - 2a_0 + a_0^2 - \tau = 0, \quad (2.79)$$

implica que una solución puede ser

$$a_0 = 1 - \sqrt{\tau}. \quad (2.80)$$

Luego para el coeficiente lineal de la serie, propio a los términos que multiplican a λ en las ecs. (2.77) y (2.78) que observa que,

$$-a_0 \lambda + a_0^2 \lambda - 2a_0 a_1 \lambda + 2a_0^2 a_1 \lambda = (-a_0 + a_0^2 - 2a_0 a_1 + 2a_0^2 a_1) \lambda, \quad (2.81)$$

de (2.80) en (2.81)

$$\begin{aligned} & -(1 - \sqrt{\tau}) \lambda + (1 - \sqrt{\tau})^2 \lambda - 2(1 - \sqrt{\tau}) a_1 \lambda + 2(1 - \sqrt{\tau})^2 a_1 \lambda = \\ & (- (1 - \sqrt{\tau}) + (1 - \sqrt{\tau})^2 - 2(1 - \sqrt{\tau}) a_1 + 2(1 - \sqrt{\tau})^2 a_1) \lambda, \end{aligned} \quad (2.82)$$

así al distribuir multiplicativamente el término cuadrático del primer término entre paréntesis de la derecha de la ecuación (2.82) obtenemos que,

$$\begin{aligned} & -(1 - \sqrt{\tau}) \lambda + (1 - \sqrt{\tau})^2 \lambda - 2(1 - \sqrt{\tau}) a_1 \lambda + 2(1 - \sqrt{\tau})^2 a_1 \lambda = \\ & (- (1 - \sqrt{\tau}) + (1 - 2\sqrt{\tau} + 2\tau) - 2(1 - \sqrt{\tau}) a_1 + 2(1 - 2\sqrt{\tau} + 2\tau) a_1) \lambda, \end{aligned} \quad (2.83)$$

luego por propiedad distributiva de los términos entre paréntesis de la derecha de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} & -(1 - \sqrt{\tau}) \lambda + (1 - 2\sqrt{\tau} + 2\tau) \lambda - 2(1 - \sqrt{\tau}) a_1 \lambda + 2(1 - 2\sqrt{\tau} + 2\tau) a_1 \lambda \\ & = (- (1 - \sqrt{\tau}) + (1 - 2\sqrt{\tau} + 2\tau) - 2(1 - \sqrt{\tau}) a_1 + 2(1 - 2\sqrt{\tau} + 2\tau) a_1) \lambda, \end{aligned} \quad (2.84)$$

y ya que λ está en ambos términos de la ecuación anterior factorizamos y distribuimos obtener,

$$a_1 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\tau})^2, \quad (2.85)$$

para el coeficiente de λ^2 debido a sustituir la serie con el coeficiente de a_1 en (2.78) y (2.77) obtenemos,

$$a_2 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{\tau})^2 \ln(\tau) - \frac{(1 - \sqrt{\tau})^4}{8\sqrt{\tau}}, \quad (2.86)$$

y en forma similar de la obtención de (2.86),

$$a_3 = \frac{3(\sqrt{\tau} - 1)^4 + (\sqrt{\tau} - 1)^2 \ln(\tau) \left((\sqrt{\tau} - 1)^2 - \sqrt{\tau} \ln(\tau) \right)}{8\sqrt{\tau}}. \quad (2.87)$$

2.9. Potencia

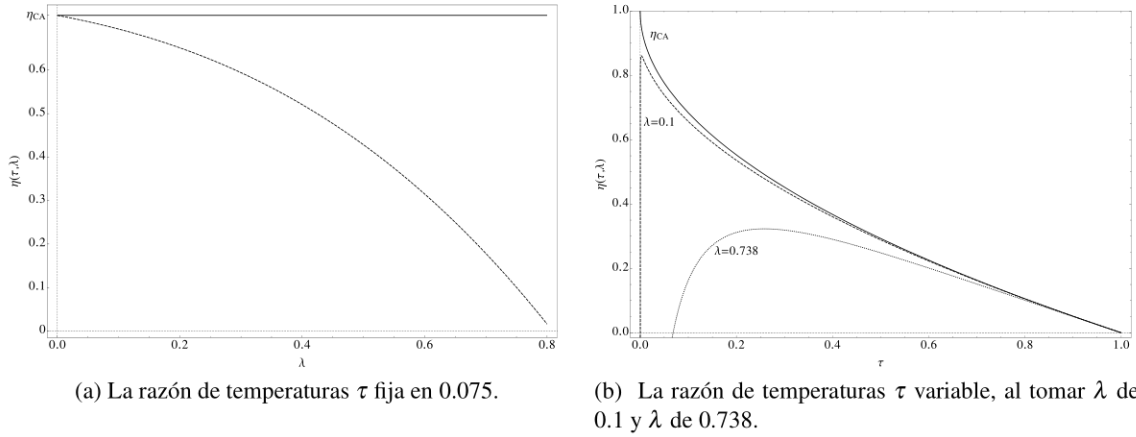


Figura 2.3: Gráfica de comportamiento de eficiencia η con base a la Ec. (2.88).

Sustituyendo (2.86), (2.80) y (2.85) en (2.74) η valor de la eficiencia se obtiene que,

$$\begin{aligned} \eta_{GPR}(\tau, \lambda) = & 1 - \sqrt{\tau} - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\tau})^2 \lambda + \left(\frac{1}{4} (1 - \sqrt{\tau})^2 \ln(\tau) - \frac{(1 - \sqrt{\tau})^4}{8\sqrt{\tau}} \right) \lambda^2 \\ & + \left(\frac{3(\sqrt{\tau} - 1)^4 + (\sqrt{\tau} - 1)^2 \ln(\tau) \left((\sqrt{\tau} - 1)^2 - \sqrt{\tau} \ln(\tau) \right)}{8\sqrt{\tau}} \right) \lambda^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.88)$$

Ahora bien para $\lambda \rightarrow 0$, finalmente observamos que,

$$\eta_{GPR} = 1 - \sqrt{\tau}, \quad (2.89)$$

es decir,

$$\eta = \eta_{CA}. \quad (2.90)$$

Pero, con los valores de los coeficientes de la serie dados, la Ec. (2.88) y la última ecuación de la potencia (2.71) hallamos que la máxima potencia es,

$$P_{Max}^{GPR} = P = \alpha T_1 \frac{\eta(\tau, \lambda)(1 - \eta(\tau, \lambda) - \tau)[1 + \lambda \ln(\eta(\tau, \lambda))]}{4(1 - \eta(\tau, \lambda))}, \quad (2.91)$$

para el caso de η_{GPR} y para esta con $\lambda \rightarrow 0$,

$$P_{Max}^{GPR} = \alpha T_1 \frac{(1 - \sqrt{\tau})[1 + \lambda \ln[\sqrt{\tau}]]}{4}, \quad (2.92)$$

por lo tanto.

$$P_{Max}^{GPR} = \frac{\alpha T_1}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{v}{\ln \left(\frac{V_3}{V_1} \right)} \right) \right], \quad (2.93)$$

Capítulo 3

Ciclo de Curzon-Ahlborn a máxima potencia eficiente.

3.1. Máxima Potencia Eficiente con base a Curzon y Ahlborn

Como se observó en el capítulo anterior tuvimos el objetivo de encontrar la óptima potencia de salida de la máquina GPR en función de la eficiencia, conforme a esto dicho, optimizaremos la llamada potencia eficiente definida por Yilmaz [12] la cual está dada por,

$$P_\eta = \eta P. \quad (3.1)$$

Si en la ecuación anterior utilizamos la potencia para el ciclo de Curzon y Ahlborn dada en el capítulo 1 Ec. (1.10), y además usamos las variables reducidas $\theta = T_{2w}/T_{1w}$ y $\tau = T_2/T_1$, entonces obtenemos que,

$$P = \frac{T_1 (\theta - \tau) (1 - \theta)}{\theta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)},$$

la eficiencia interna es

$$\eta = 1 - \theta,$$

así que la Ec. (3.1) queda como,

$$P_\eta = \frac{T_1 (\theta - \tau) (1 - \theta)^2}{\theta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)}.$$

Para maximizar la función objetivo P_η procedemos como es usual; es decir,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_\eta = (-1 + \theta)(\tau + \theta(-2\theta + \tau)) = 0,$$

obteniendo así que la razón θ de temperaturas internas reducida que maximiza al producto $\eta \times P$

$$\theta_M(\tau) = \frac{1}{4} \left(\tau + \sqrt{\tau} \sqrt{8 + \tau} \right),$$

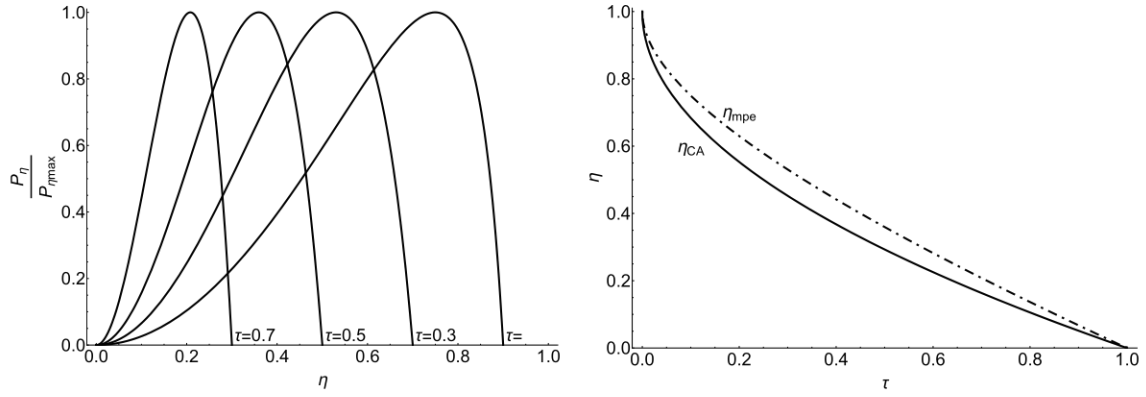
al sustituir este resultado en la expresión de la potencia eficiente P_η , obtenemos:

$$P_{\eta_{max}} = \frac{\alpha\beta T_1}{8(\alpha + \beta)} \left[8 - (\tau + 8) \sqrt{\tau^2 + 8\tau} - \tau(\tau - 20) \right],$$

y la eficiencia correspondiente al máximo de P_η es

$$\eta_{Yil} = 1 - \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 + 8\tau}}{4}. \quad (3.2)$$

Esta última ecuación es una eficiencia evidentemente mayor que la eficiencia de Curzon y Ahlborn, ver Fig. (3.1b). Aunque el criterio de máxima potencia eficiente fue propuesto por Yilmaz en 2006, en realidad fue Stucki quién en 1982 propuso este criterio entre otros más para estudiar el desempeño energético en la síntesis de la adenosintrifosfato (ATP) [14]. Otros autores también han usado el criterio



(a) Potencia eficiente normalizada en función de η para distintos valores de τ .

(b) Eficiencia de Curzon y Ahlborn (η_{CA}) comparada con la eficiencia de máxima potencia eficiente ($\eta_{\eta_{il}}$).

Figura 3.1: Comparación de las funciones características del criterio potencia eficiente con las funciones del modelo de CA.

de optimización de potencia eficiente tales como Ariás-Hernández, *et al* [15],[16] y Barranco- Jiménez [16] quienes lo aplicaron a la optimización termoeconómica tipo TTF de un modelo máquina de calor solar [14] entre otros más.

3.2. Modelo de máquina TTF tipo GPR a Máxima Potencia Eficiente.

Ahora procedemos a aplicar el criterio de optimización de máxima potencia eficiente al modelo GPR visto en el capítulo 2 [9]. Así, para el modelo GPR y tomando la eficiencia interna, $\eta = 1 - T_{2w}/T_{1w}$; y reconociendo que ya habíamos calculado la potencia P de la máquina GPR conforme a la condición de endorreversibilidad de la Ec. (2.71), la potencia eficiente normalizada por la Ec. (3.1) tiene la forma

$$p_\eta = \frac{P_\eta^{max}}{\alpha T_1} = \eta^2 \frac{(1 - \eta - \tau)[1 + \lambda \ln(1 - \eta)]}{4(1 - \eta)}, \quad (3.3)$$

en que λ está definida con base a la Ec. (2.70) y τ como la razón de temperaturas de los reservorios exteriores con base a la Ec. (2.48), buscamos la óptima potencia eficiente normalizada y como en el capítulo pasado procederemos a obtener la función de restricción de nuestra máxima potencia normalizada que corresponde con

$$\frac{dp_\eta}{d\eta} = g(\eta) = \frac{\eta}{4(-1 + \eta)^2} ((-1 + \eta)(-2 + \eta(2 + \lambda)) + (-2 + \eta + \eta\lambda)\tau + \lambda(2(-1 + \eta)^2 + (-2 + \eta)\tau)\ln(-1 + \eta)) = 0. \quad (3.4)$$

Como en el capítulo anterior se obtiene a la función de optimización $g(\eta)$ con base a expresar a la eficiencia η como serie de potencias de un valor finito; es decir con $\lambda < \infty$ podemos expresar a la eficiencia η en serie de recurrencias, como se hizo para llegar a la Ec. (2.88) tal que

$$\eta_{P_\eta} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots, \quad (3.5)$$

donde,

$$a_0 = 1 - \frac{1}{4}\tau \left(1 + \sqrt{\frac{\tau + 8}{\tau}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{1}{4} \left(\tau + \tau \sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}} \right) = 1 - \frac{1}{4} \left(\tau + \sqrt{\tau^2 \left(\frac{\tau+8}{\tau} \right)} \right) = \\
 &= 1 - \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 + 8\tau}}{4}, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{\tau^2 + \left(10 - (10 - \tau) \sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}}\right) \tau + 16}{8(\tau + 8)}, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{4} \frac{(-10\sqrt{\tau} + \tau^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{8+\tau} + \sqrt{\tau}\sqrt{8+\tau})}{(8\sqrt{\tau} + \tau^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{8+\tau} + \sqrt{\tau}\sqrt{8+\tau})} \times \\
 &\times \left(\frac{(-10\sqrt{\tau} + \tau^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{8+\tau} + \sqrt{\tau}\sqrt{8+\tau})}{(2(8\sqrt{\tau} + \tau^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{8+\tau} + \sqrt{\tau}\sqrt{8+\tau}))} - 2\ln \left(\frac{1}{4} (4 - \tau - \sqrt{\tau}\sqrt{8+\tau}) \right) \right), \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

y finalmente para el cúbico,

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{1}{16(\tau+8)^2} \left((\tau+2) \left(\left(\sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}} + 1 \right) \tau^2 - 4 \left(5\sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}} - 4 \right) \tau - 8\sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}} + 64 \right) \right. \\
 &\left. 2(\tau+8) \left(\left(\sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}} + 1 \right) \tau^2 - 10 \left(\sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}} - 1 \right) \tau + 16 \right) \log \left(\frac{1}{4} \tau \left(\sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}} + 1 \right) \right) \right), \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

en forma similar al capítulo anterior, hallamos en este régimen a la eficiencia $\eta_{P_\eta} \equiv \eta(\tau, \lambda)$.

Ahora bien, al sustituir la eficiencia ecn (3.5) que es correspondiente de optimizar la potencia eficiente P_η , obtenemos una expresión la potencia eficiente máxima (o también llamada máxima potencia eficiente), es decir

$$\begin{aligned}
 P_\eta^{max}(\tau, \lambda) &\approx \frac{\alpha T_1}{4} \frac{\left(\left(1 - \frac{1}{4} (\tau + \sqrt{8\tau + \tau^2}) - \frac{\tau^2 + (10 - (10 - \tau) \sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}}) \tau + 16}{8(\tau+8)} \right) \lambda \right)^2}{\left[(\tau + \sqrt{8\tau + \tau^2}) - \frac{\tau^2 + (10 - (10 - \tau) \sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}}) \tau + 16}{2(\tau+8)} \right] \lambda} \times \\
 &\times \left(1 - \left(\left(1 - \frac{1}{4} (\tau + \sqrt{8\tau + \tau^2}) - \frac{\tau^2 + (10 - (10 - \tau) \sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}}) \tau + 16}{8(\tau+8)} \right) \lambda \right) - \tau \right) \times \\
 &\times \left(1 + \lambda \ln \left(\left(1 - \left(1 - \frac{1}{4} (\tau + \sqrt{8\tau + \tau^2}) - \frac{\tau^2 + (10 - (10 - \tau) \sqrt{\frac{\tau+8}{\tau}}) \tau + 16}{8(\tau+8)} \right) \lambda \right) \right) \right). \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

La figura 3.2 muestra el comportamiento de la expresión anterior comparandola con la potencia obtenida por GPR.

Esta comparación se realizó tomando un valor para $\lambda = 0,1$. Como podemos observar la eficiencia corresponde al modelo de potencia eficiente mayor a la proporcionada del modelo GPR.

Se observa con base de la figura 3.2 con $P_{GPR}^{max}(\eta_P; 0,3; 0,1)$ y $P_\eta^{max}(\eta_{Yil}; 0,3; 0,1)$ que al trabajar con la máxima potencia eficiente se obtiene mayor eficiencia pues, $\eta_{P_\eta}(0,3; 0,1) = 0,524288$ y la eficiencia de potencia de salida $\eta_{GPR}(0,3; 0,1) = 0,441319$ de lo que la razón de ganancia de eficiencias $g = \eta_{P_\eta} / \eta_{GPR} = 1,188$, puesto que $\eta_{P_\eta} = 1,188 \times \eta_{GPR}$, mientras que, $P_{GPR}^{max}(\eta_{GPR}(0,3; 0,1); 0,3; 0,1) = 0,0481109$ y $P_\eta^{max}(\eta_{P_\eta}(0,3; 0,1); 0,3; 0,1) = 0,0234969$ cuya razón de potencia perdida $t = P_{GPR}^{max} / P_\eta^{max} = 2,04755$ tal que, $P_{max}(\eta_{GPR}(0,3; 0,1); 0,3; 0,1) = 2,04755 P_\eta^{max}(\eta_{P_\eta}(0,3; 0,1); 0,3; 0,1)$.

Al comparar la máxima potencia eficiente P_η^{max} con la máxima potencia P_{GPR}^{max} se tiene una perdida de potencia de aproximadamente 50%, sin embargo; podemos alcanzar eficiencias mayores, es decir: existe

3.2. Modelo de máquina TTF tipo GPR a Máxima Potencia Eficiente.

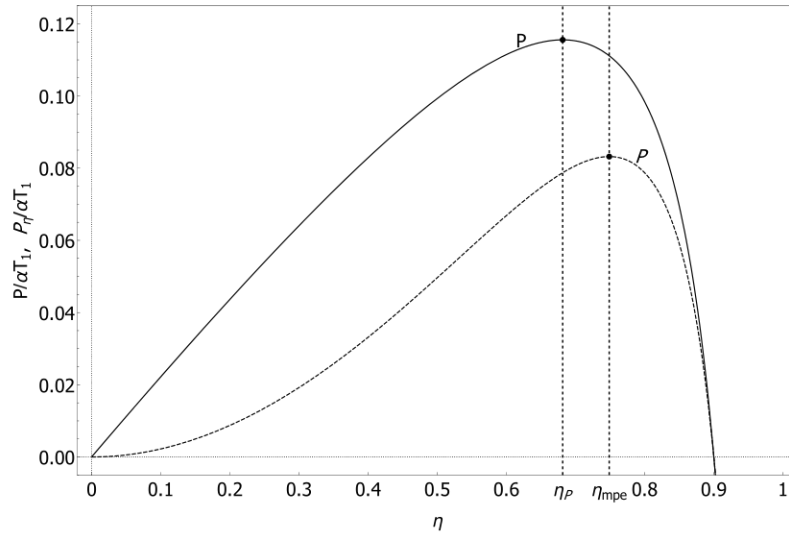


Figura 3.2: Comparación de la máxima potencia eficiente P_{η}^{max} , Ec. (3.10), línea punteada con respecto a la máxima potencia de GPR P_{GPR}^{max} , Ec. (2.93), línea continua. En ambos casos se tomo valores de $\tau = 0,3$ y $\lambda = 0,1$

una ganancia de eficiencia de 18. Este comportamiento se puede observar en la figura 3.2. Por otro lado la eficiencia a máxima potencia eficiente P_{η}^{max} en el límite de $\lambda \rightarrow 0$ es decir para sustancias de trabajo incompresibles esta eficiencia se aproxima a la de Yilmaz, i.e. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \eta(\tau, \lambda) = \eta_{Yil}$ la cual evidentemente es mayor que que la eficiencia CA i.e. $\eta_{CA} < \eta_{Yil}$, como se puede observar de la figura 3.3 donde se exhibe el comportamiento de la ecuación (3.6), además de observarse dependencia con λ , en este caso se utilizó $\tau = 0,783$. Donde además se compara con la eficiencia a máxima potencia η_{GPR}^{max} observándose que independientemente del valor de λ , $\eta_{P_{\eta}^{max}} > \eta_{GPR}^{max}$ y este resultado también se observa con la dependencia de τ eficiencias donde además se compara la eficiencia de CA, para tener un punto de referencia puede verse la figura 3.4.

Debe decirse de rápida observación de la figura 3.5 que la eficiencia carnot η_C es la mayor eficiencia termodinámica posible que se pueda obtener por debajo a eficiencia mayor a la eficiencia η_{Yil} de Yilmaz conforme a la figura y a posterior la máxima potencia eficiente $\eta_{P_{\eta}}$ aun con el parametro $\lambda = 0,1$ es de mayor eficiencia que la eficiencia de Curzon y Ahlborn η_{CA} .

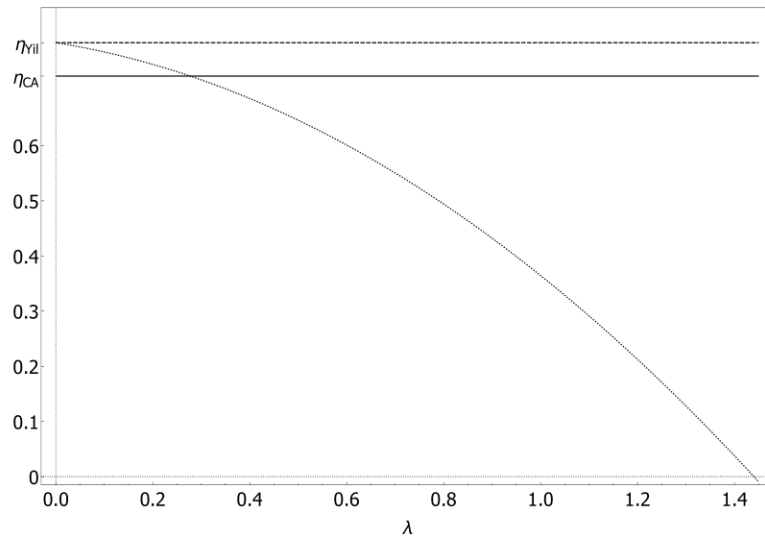


Figura 3.3: Gráfica de eficiencias η vs λ ; la línea sólida corresponde a la ec. (3.6), la línea entre cortada corresponde a la ec. (2.88) y la curva punteada a la ec. (3.5), aquí se uso $\tau = 0,784$.

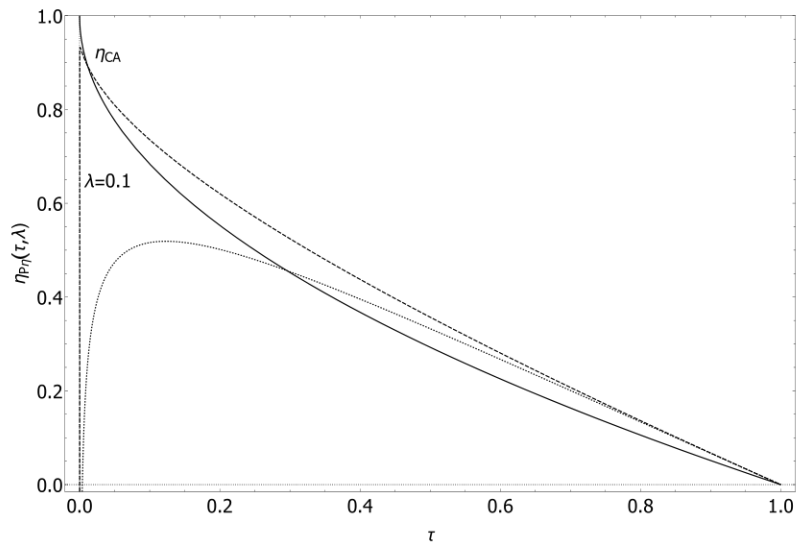


Figura 3.4: Gráfica de la eficiencia η vs τ para diferentes valores de λ que son $\lambda = 0,1$ dibujada en línea entre cortada y de $\lambda = 0,738$ dibujada con puntos.

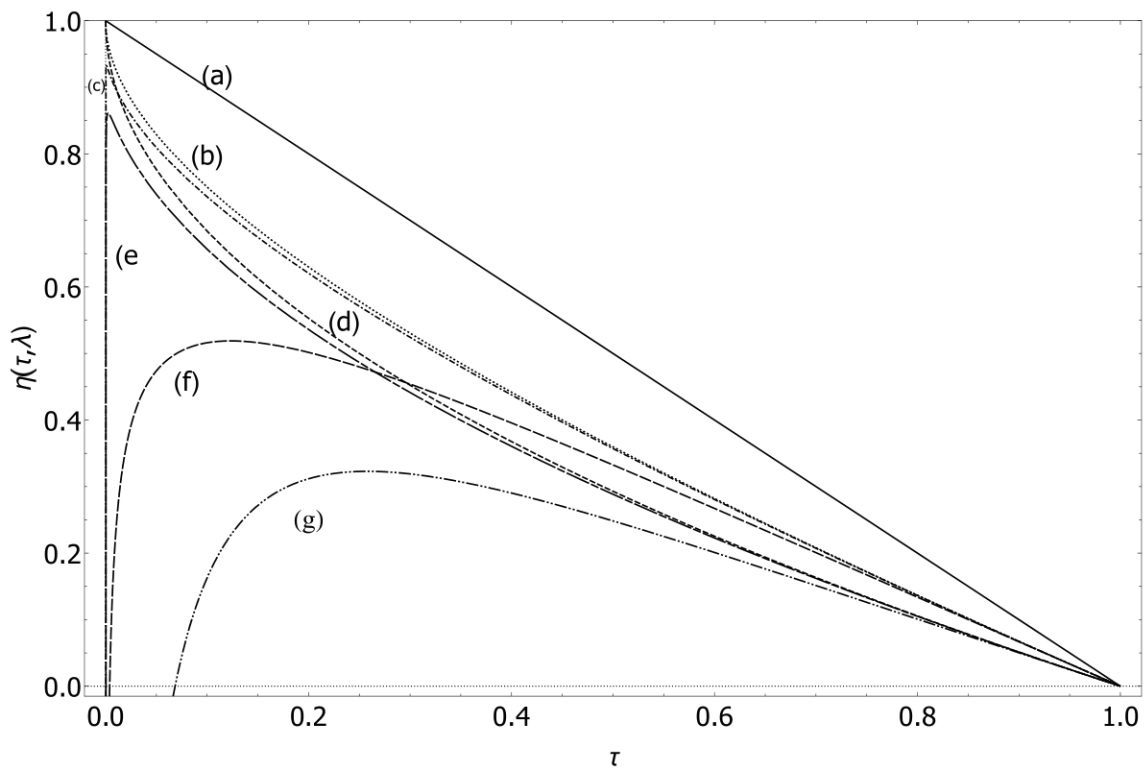


Figura 3.5: Gráfica de las eficiencias η vs τ . Se observa la eficiencia de carnot η_C con la etiqueta (a), la eficiencia de Yilmaz η_{Yil} con la etiqueta (b), la eficiencia de Curzon y Ahlborn η_{CA} con la etiqueta (d), el valor de la serie de eficiencia (2.88) η_{GPR} con las etiquetas (e y (g) al emplear diferentes valores de λ de 0.1 y 0.783 respectivamente y la serie de eficiencia de este capítulo η_{P_η} con las etiquetas (c) y (f) al emplear diferentes valores de λ de 0.1 y 0.783.

Por último del capítulo.

Debe decirse de la figura (3.5) que, debido a la dependencia del parámetro λ de las eficiencias en las ecs. (2.88) y (3.5) basada en coeficientes dependientes de λ expresados en las ecs. (3.7) a (3.9) en la figura dicha, hay temperaturas en que existe un máximo de eficiencia en que cuando $\tau \rightarrow 0$, se tiene $\eta_C, \eta_{GPR}, \eta_{Yil} \rightarrow 1$ pero, ello es con $T_1 \rightarrow \infty$ algo no posible o también $T_2 \rightarrow 0$ pero, en éste último caso no se hablaría de la existencia de trabajo de dos reservorios térmicos por lo tanto, ello es absurdo, no así observado con las etiquetas (c), (e), (f) y (g) de la figura mencionada, correspondientes a diferentes valores de λ .

Conclusiones.

La termodinámica de tiempos finitos (TTF) nació con el trabajo pionero de Curzon y Ahlborn en 1975, aunque el resultado principal de ese artículo; es decir, la llamada eficiencia de Curzon y Ahlborn (CA) ya había sido deducida desde los 1950's por Novikov y Chambadal. Estos resultados, de algun modo no tuvieron mucho impacto; sin embargo, los resultados de CA provocaron una explosión de trabajos en TTF. Curzon y Ahlborn maximizaron la potencia de un ciclo tipo Carnot en el que no hay equilibrio térmico entre los almacenes de calor y las isothermas del ciclo. De hecho, este modelo de ciclo solo produce entropía en los acoplamientos entre los almacenes térmicos y la sustancia de trabajo. Es decir el ciclo interno se sigue considerando reversible, por eso a estos modelos se les llama endorreversibles.

Después del criterio de optimización empleado por CA es decir el de máxima potencia, otros criterios de optimización fueron propuestos. Como el de la máxima función ecológica que fue propuesta en 1991 [10] como un criterio de compromiso entre alta potencia de salida y baja producción de entropía. Muchos años después fue propuesto el criterio de optimización llamado el de máxima potencia eficiente (P_η) propuesto por Yilmaz 2007. Esta función P_η está formada por el producto de la potencia y eficiencia del ciclo a optimizar. Aunque Yilmaz publicó esto en 2007, Stucki ya había propuesto una función equivalente en 1982. Después del artículo de CA en 1975 otros autores mejoraron el modelo de CA proponiendo atributos realistas adicionales a la modelación del ciclo. Un modelo particularmente completo fue el de Dina Gutkowicz et al. el cuál añadió la masa de los pistones y la relación de compresión del ciclo. GPR encontraron que la fórmula de Curzon y Ahlborn para la eficiencia era tan solo un límite superior para un ciclo operando a la máxima potencia en el regimen de las grandes relaciones de compresión. Lo mismo encontraron para la potencia del ciclo. Ladino-Luna analizo de nuevo el ciclo de GPR operando a máxima función ecológica [10]. Por alguna razón este ciclo GPR no había sido estudiado a máxima potencia eficiente. En esta tesis hemos analizado el ciclo GPR a máxima potencia eficiente y encontramos como era de esperarse que la eficiencia del ciclo a máxima potencia eficiente es mayor que la eficiencia a máxima potencia.

En esta tesis podemos comparar el regimen de máxima potencia del ciclo GPR en contraste con el regimen de máxima potencia eficiente de GPR, resultando que en el régimen de la máxima potencia eficiente P_η^{max} se tiene una perdida de potencia de aproximadamente 50% con respecto al régimen la máxima potencia P_{GPR}^{max} ; sin embargo, en el régimen P_η^{max} podemos alcanzar eficiencias mayores, de hecho 18 más grandes que la eficiencia a máxima potencia η_{GPR}^{max} .

Por esta razón, al régimen de máxima potencia eficiente se le puede clasificar entre los criterios de optimización tipo función ecológica o tipo función Omega [11]. Estos regímenes sacrifican una cierta cantidad de potencia para disminuir apreciablemente la producción de entropía del ciclo y por lo tanto aumentar considerablemente su eficiencia térmica.

Bibliografía

- [1] F. L. Curzon and B. Ahlborn. Efficiency of a carnot engine at maximum power output. *American Journal of Physics*, 43(1):22–24, 1975.
- [2] Herbert B Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley & Sons, 1998.
- [3] Leopoldo García Colín. *Introducción a la Termodinámica Clásica*. Trillas, 2005.
- [4] A. De Vos. *Thermodynamics of Solar Energy Conversion*. Oxford University Press, 1992.
- [5] Paul Chambadal. *Les Centrales Nucléaires*. Armand Colin: Paris, France, 1957.
- [6] I. I. Novikov. Atom energy 1957; 3: 409. *English translation J Nucl Energy II*, 7:125, 1958.
- [7] Lingen Chen, Chih Wu, and Fengrui Sun. *Finite time thermodynamic optimization or entropy generation minimization of energy systems*, volume 24. Walter de Gruyter, 1999.
- [8] Peter Salamon and Abraham Nitzan. Finite time optimizations of a newton’s law carnot cycle. *The Journal of Chemical Physics*, 74(6):3546–3560, 1981.
- [9] Dina Gutkowitz-Krusin, Itamar Procaccia, and John Ross. On the efficiency of rate processes. power and efficiency of heat engines. *The Journal of Chemical Physics*, 69(9):3898–3906, 1978.
- [10] F. Angulo-Brown. An ecological optimization criterion for finite-time heat engines. *Journal of Applied Physics*, 69(11):7465–7469, 1991.
- [11] A Calvo Hernández, A Medina, JMM Roco, JA White, and S Velasco. Unified optimization criterion for energy converters. *Physical Review E*, 63(3):037102, 2001.
- [12] T Yilmaz. A new performance criterion for heat engines: efficient power. *Journal of the Energy Institute*, 79(1):38–41, 2006.
- [13] Rubin. Optimal configurations of a class of irreversible engine. *American Journal of Physics*, volume 19, pp 1272-1273, 1972.
- [14] Jörg W Stucki. The optimal efficiency and the economic degrees of coupling of oxidative phosphorylation. *European Journal of Biochemistry*, 109(1):269–283, 1980.
- [15] L. A. Arias-Hernandez, F. Angulo-Brown, and R. T. Paez-Hernandez. First-order irreversible thermodynamic approach to a simple energy converter. *Phys. Rev. E*, 77:011123, Jan 2008.
- [16] Marco A Barranco-Jimenez, Norma Sanchez-Salas, and Fernando Angulo-Brown. Finite-time thermoeconomic optimization of a solar-driven heat engine model. *Entropy*, 13(1):171–183, 2011.
- [17] Brian Green. Ash Tree - geograph.org.uk - 590710.jpg. Wikipedia Article: Tree, February 2017.
- [18] Ladino Luna Delfino. *Análisis del criterio ecológico de optimización mediante diversas leyes de transferencia de calor*. PhD thesis, UAM-Iztapalapa, 2006.
- [19] L. A. Arias-Hernandez, M. A. Barranco-Jiménez, and F. Angulo-Brown. Comparative analysis of two ecological type modes of performance for a simple energy converter. *Journal of the Energy Institute*, 2009.