



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Un modelo termodinámico de tiempos finitos de las posibles futuras temperaturas de la superficie terrestre

TESIS PRESENTADA POR

Sebastián Vázquez Ramírez

PARA OBTENER EL GRADO DE: Maestro en ciencias fisicomatematicas

DIRECTORES DE TESIS: DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Fernando Angulo Brown
Dr. Marco Antonio Barranco Jiménez

CDMX

Diciembre, 2019

Agradecimientos

Agradezco la ayuda prestada a mis asesores, el doctor Fernando Angulo Brown y el doctor Marco Antonio Barranco Jiménez que me han orientado en el desarrollo de esta investigación.

Resumen

La termodinámica de tiempos finitos (TTF) inició con el trabajo publicado por Curzon y Ahlborn en 1975 al modelar un ciclo Carnot con transferencia finita de calor entre los almacenes térmicos y la sustancia de trabajo bajo un régimen de operación de máxima potencia. Posteriormente, la TTF se ha desarrollado tomando en cuenta otros regímenes de operación como eficiencia, potencia, función ecológica y otros más. Los modelos desarrollados con la TTF proporcionan cotas de operación más realistas de los convertidores de energía del mundo real. En 1989 Gordon y Zarmi (GZ) propusieron un modelo de convección atmosférica, para calcular la temperatura de la capa más baja de la atmósfera de la Tierra y un límite superior de la potencia media de los vientos. El modelo de GZ está constituido por una celda de convección, un ciclo de Carnot endorreversible y dos reservorios térmicos externos a la sustancia de trabajo (aire). Este tipo de modelos GZ fueron usados para proponer una posible solución de la llamada paradoja del joven y débil Sol, que fue propuesta inicialmente por Carl Sagan y George Mullen en 1972. En la presente tesis se aplica el modelo de GZ y el modelo de Gough de la evolución de la constante solar para estudiar los posibles escenarios futuros de la temperatura del planeta Tierra usando diferentes funciones objetivo como la potencia máxima, la potencia eficiente y la función ecológica.

Abstract

The finite time thermodynamics (FTT) began with the work published by Curzon and Ahlborn in 1975 by modeling a Carnot cycle with finite heat transfer between the heat reservoir and the working substance under a maximum power operating regime. Subsequently, the FTT has been developed taking into account other operating regimes such as efficiency power, ecological function and others. Models developed with FTT provide more realistic operating levels of real-world power converters. In 1989 Gordon and Zarmi (GZ) proposed an atmospheric convection model, to calculate the temperature of the lowest layer of the Earth's atmosphere and an upper limit of the average wind power. The GZ model consists of a convection cell, an irreversible Carnot cycle and two thermal reservoirs external to the working substance (air). These types of GZ models were used to propose a possible solution to the so-called paradox of the young and weak Sun, which was initially proposed by Carl Sagan and George Mullen in 1972. In this thesis the GZ model and the Gough model are applied to the evolution of the solar constant to study the possible future scenarios of the planet Earth's temperature using different objective functions such as maximum power, efficient power and ecological function.

Índice general

1. Propiedades físicas de la atmósfera	1
1.1. Información esencial	1
1.1.1. Equilibrio Térmico	6
1.1.2. Equilibrio térmico en los planetas	7
2. Termodinámica clásica de equilibrio.	11
2.1. Apuntes preliminares de termodinámica.	11
2.1.1. Primera Ley de la termodinámica	13
2.1.2. Segunda ley de la termodinámica	14
2.1.3. Máquinas térmicas	16
2.1.4. Máquina de Carnot	18
3. Termodinámica de tiempos finitos.	21
3.1. Termodinámica de tiempos finitos (Maquinas térmicas tipo Curzon y Ahlborn)	21
3.1.1. Termodinámica de tiempos finitos(TTF)	21
3.1.2. Motor de Curzon y Ahlborn	22
3.1.3. Criterio ecológico de optimización termodinámico	26
3.1.4. Modelo de Gordon y Zarmi (GZ)	26
3.1.5. Parámetro de noendorreversibilidad en G-Z	29
3.1.6. Factor de invernadero	31
3.1.7. Potencia eficiente	36
3.1.8. Criterio Ecológico	38
3.1.9. Función ecológica con factor invernadero	39
3.1.10. Eficiencia solar modelo De Vos- P.van der Well	40
4. Temperaturas futuras de la superficie terrestre	47
4.1. Paradoja del joven y débil Sol	47
4.2. Futuras temperaturas superficiales usando Termodinámica de tiempos finitos	50

4.2.1. Temperaturas futuras con el aumento del factor γ , ρ y I_{sc}	51
--	----

Bibliografía	59
---------------------	-----------

Introducción

Esta tesis utiliza un modelo de la Termodinámica de Tiempos Finitos (TTF), para estimar la temperatura superficial de la Tierra derivada de las celdas de convección que ocurren en la atmósfera manejadas por los gradientes de temperatura producidos por el calentamiento solar, este modelo fue propuesto originalmente por Gordon y Zarmi (GZ) publicado en 1989 [13]. El modelos de GZ fue posteriormente modificado de distintas maneras. Por ejemplo, cambiando la función objetivo a maximizar que en el caso de (GZ) fue la potencia de la sustancia de trabajo (el aire). En otros casos, la función objetivo fue la llamada función ecológica [14,15]. Por otro lado, De Vos y colaboradores [1,2,3] tambien elaboraron versiones modificadas del modelo (GZ). En las celdas de conveccion de (GZ) se considera ciclo de Carnot endorreversible entre dos reservorios térmicos de temperaturas extremas: La temperatura T_1 de la superficie terrestre en equilibrio térmico con la parte mas baja de las atmósfera y como reservorio frío GZ tomaron la temperatura de la radiación cósmica de fondo de $T_2 = 3K$ [17]. Solo con estos dos datos el modelo GZ puede estimar la isoterma fría del ciclo de carnot y la potencia de dicho ciclo. Los resultados de GZ fueron $T_1 = T_{1w} = 277K$, $T_2 = T_{2w} = 192K$ y $P_{max} = 17,1W/m^2$. Siendo T_1 y T_{1w} las temperaturas de trabajo del modelo GZ. Evidentemente los valores numéricos de T_{1w} y P_{max} no son dramáticamente diferentes a los valores medidos. Sin embargo, el valor de T_{2w} solo existe a alturas de 75km-90km y este dato es notoriamente absurdo, porque no existen celdas de conveccion de este tamaño que excede notablemente la altura de la troposfera (0-12km). Los modelos modificados mencionados arriba [1,2,3,14,15] lograron valores mas cercanos para las distintas variables involucradas. En 2012 [6] se utilizó un modelo tipo GZ para calcular las temperaturas de la superficie terrestre desde etapas tan antiguas como 4Gyr hasta nuestros dias utilizando la curva de Gough[5] para la evolución temporal de la luminosidad solar.

En la presente tesis utilizaremos la curva de Gough, además de considerar distintas funciones objetivo y varios escenarios posibles de combinaciones del efecto invernadero gamma con el parámetro de albedo, para estimar la futura evolución de las temperaturas de la superficie terrestre.

Con estas consideraciones se modela una convección atmosférica manejada por la irradiación solar, la constante solar, los efectos albedo ρ e invernadero γ en los regímenes termodinámicos de potencia, potencia eficiente y Ecológica.

Capítulo 1

Propiedades físicas de la atmósfera

Para hacer un estudio de la atmósfera se puede hacer uso de los marcos teóricos de la física de fluidos, termodinámica, física-química, ecuaciones diferenciales, sistemas complejos, biofísica, para generar predicciones realistas[9]. En el presente capítulo se definen las características que determinan el medio ambiente de los planetas, tomando en cuenta algunos parámetros como el **albedo**, **la constante solar**, la composición química entre otros.

1.1. Información esencial

Aquellos parámetros que determinan el ambiente superficial de los planetas, son en su mayoría fenómenos físicos. Siendo, la composición química de la atmósfera de los planetas otro factor importante para determinar las características planetarias. La actividad biológica en el caso de la Tierra, juega un papel en la distribución de componentes químicos.[9]

- **Constante Solar**.-Es la potencia de la radiación solar recibida en la órbita del planeta por unidad de superficie, se puede relacionar con la temperatura media del planeta.
- **Albedo**.-Es la fracción incidente de energía solar que es reflejada de regreso por el planeta y la atmósfera.
- **Características orbitales** pueden ser importantes a largo plazo, dando paso a variaciones climáticas. Estas pueden ser
 - **Inclinación del eje de rotación**
 - **Movimiento de precesión**

- Rotación del planeta
- Número de Rossby
- **Composición química de las nubes.**- Nos indica los procesos que toman lugar en la atmósfera. Por ejemplo, Venus tiene nubes ricas en ácido sulfúrico por lo que su atmósfera es seca. La Tierra es rica en agua y sus nubes están formadas de este compuesto. Por otro lado Marte tiene nubes hechas de CO_2 .

La siguiente tabla muestra las características atmosféricas de Venus, Tierra y Marte.

Quantity	Venus	Earth	Mars
Solar constant ($kW m^{-2}$)	2.62	1.36	0.59
Albedo	0.77	0.3	0.14
Cloud cover (%)	100	50	Variable
Cloud chemical composition	H_2SO_4	H_2O	H_2O, CO_2
Orbit eccentricity	0.007	0.017	0.093
Inclination of the axis	$2^{\circ}36'$	$23^{\circ}27' \pm 1^{\circ}$	$25^{\circ}12' \pm 13^{\circ}$
Orbital period (days)	225	365	687
Length of the day (days)	243	1	1.03
Solar day (days)	117 (retrograde)	1	1.03
Gravity acceleration ($m s^{-2}$)	8.87	9.81	3.72
Radius (km)	6051	6378	3394
Surface pressure ($10^4 Pa$)	95	1	0.007-0.01
Vertical temperature gradient ($K km^{-1}$)	7.5	6	3
Surface temperature (K)	737	288	220
ΔT (equator-pole) (K)	5-15	45	90
Δh (topography) (km)	13	9	25
Rossby number	20	0.1	0.1

Tabla 1.- Parámetros Atmosféricos para los planetas[9].

La composición química de la atmósfera, es una mezcla de los gases existentes. En la Tierra se tiene que cerca del 99 por ciento es Nitrógeno y Oxígeno, mientras que el otro 1 por ciento es una mezcla de diferentes gases, responsables de la mayoría de efectos que alteran el clima de la Tierra. Un ejemplo de ello es el gas de Ozono que absorbe radiación ultravioleta, generando así un escudo biológico de la radiación peligrosa para la vida[9].

La estabilidad del ambiente durante millones de años en nuestro planeta, se ha debe a la amplia difusión de formas de vida, estas regulan la presencia de O_2 , CO_2 y ozono en la atmósfera terrícola. Sin embargo, en últimos años la presencia humana ha alterado este equilibrio.[9]

GAS	MIXING RATIO	SOURCE	SINK
EARTH			
N ₂ (nitrogen)	0.781	Biologic	Biologic
O ₂ (oxygen)	0.209	Biologic	Biologic
Ar (argon)	0.0093	Degassing	
H ₂ O (water vapor)	<0.04	Evaporation	Condensation
CO ₂ (carbon dioxide)	0.0034	Combustion, biologic	Biologic
³⁶ Ar	0.000037	Degassing	
²⁰ Ne (neon)	0.0000182	Degassing	
CH ₄ (methane)	1.7-3×10 ⁻⁴	Biologic	Photooxidation
N ₂ O (nitrous oxide)	3.1×10 ⁻⁷	Biologic	Photodissociation
CO (carbon monoxide)	0.4-2×10 ⁻⁷	Photochemical	Photochemical
O ₃ (ozone)	0.1-1×10 ⁻⁷	Photochemical	Photochemical
NO, NO ₂ (nitrogen oxides)	0.2-5×10 ⁻⁹	Combustion, biologic	Photooxidation
SO ₂ (sulfur dioxide)	3×10 ⁻¹⁰	Combustion	Photooxidation
VENUS			
CO ₂	0.965	Degassing	Carbonates for.
N ₂	0.035	Degassing	
CO	0.00002	Photochemical	Photooxidation
SO ₂	0.00015	Photochemical	Formation CaSO ₄
H ₂ O	0.0001	Degassing	Hydrates
MARS			
CO ₂	0.953	Degassing, evaporation.	Condensation
N ₂	0.027	Degassing	Escape
³⁶ Ar	0.016	Degassing	
O ₂	0.0013	Photochemical	Photoreduction
H ₂ O	0.0003	Evaporation desorbption.	Condensation adsorption
O ₃	Photochemical	Photochemical	
NO	7×10 ⁻⁵ (120 km)	Photochemical	Photochemical

Tabla 2.- Composición química Atmosférica de los planetas [9].

La composición atmosférica, determina la temperatura de la superficie y su tasa de cambio relacionada con la altitud. Los perfiles de la temperatura como función de la presión muestra que existe un continuo decrecimiento de la temperatura con la altura. La curva de temperatura de la Tierra tiene un comportamiento diferente a los otros planetas, debido a la actividad biológica que existe [9]. La distribución de temperaturas en la atmósfera de la Tierra nos permite dividir esta en 4 capas (**troposfera, estratosfera, mosoósfera y termosfera**) donde los limes de cada una de ellas las denotamos con el sufijo **pausa**.

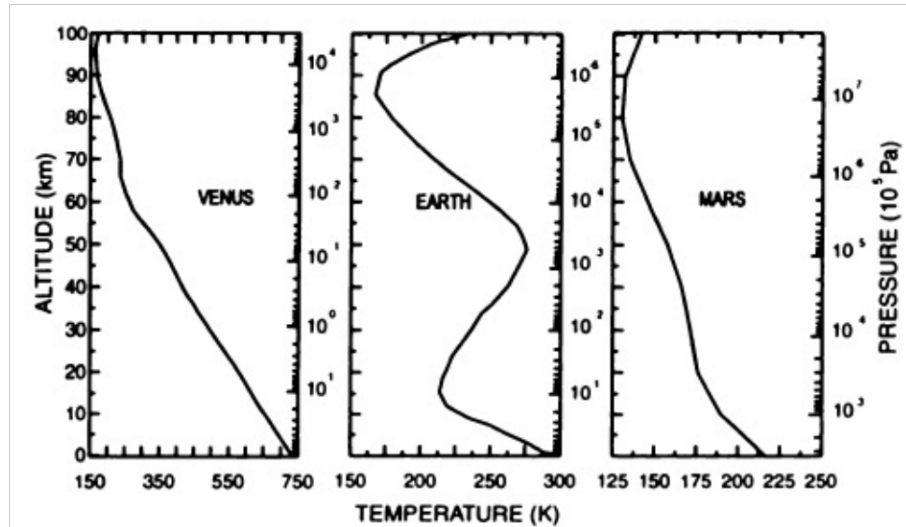


Figura 1.- Temperatura como funcion de la presión de los planetas Venus, Tierra y Marte [9].

Se observan que la atmósfera se calienta en una cantidad mayor por la superficie del planeta y en menor medida por el efecto directo de la radiación solar. Se sabe que la superficie absorbe la radiación solar y la radiación infrarroja que llega a la atmósfera se calienta a los valores mostrados. La atmósfera en contacto con la superficie se calienta y las masas de aire caliente se elevan y se expanden, enfriándose adiabáticamente, podemos resumir este sistema Sol- Tierra- Viento como un ciclo formado por dos ramas isotérmicas y dos ramas adiabáticas[4,9,13]. Se puede inferir que nuestro sistema atmosférico trabaja como una maquina de calor de Carnot[4,13].

En una descripción de las capas, podemos decir con exactitud el cambio de temperatura dependiente de la altitud, en al menos la capa mas baja conocida como troposfera. La troposfera es dominada por movimientos convectivos donde los fluidos existentes se mueven formando corrientes ascendentes y descendentes[4,9,13]. Mientras que en las capas superiores de la atmósfera los cambios de Temperatura dependen de la composición química y la distribución de nubes[9]. En el intercambio de capa de la troposfera encontramos la región de la (**tropopausa**) donde la temperatura alcanza un mínimo, el cual se muestra constante por al menos 50km hasta llegar a la siguiente capa conocida como **estratosfera**[9]. Las dos regiones donde se llevan acabo la mayoría de las actividades humanas junto con la mayoría de fenomenos climáticos, son la troposfera y tropopausa. Mientras que la estratosfera es la región donde se encuentra el gas de ozono que mantiene un equilibrio muy delicado, facilmente perturbado por las actividades humanas que se producen en las capas inferiores.

Sobre la estratosfera hay una capa, la **mesósfera**, en la cual la temperatura vuelve a decrecer con la altitud, y no vuelve a incrementarse hasta las regiones conocidas como **termosfera** y **exosfera**.

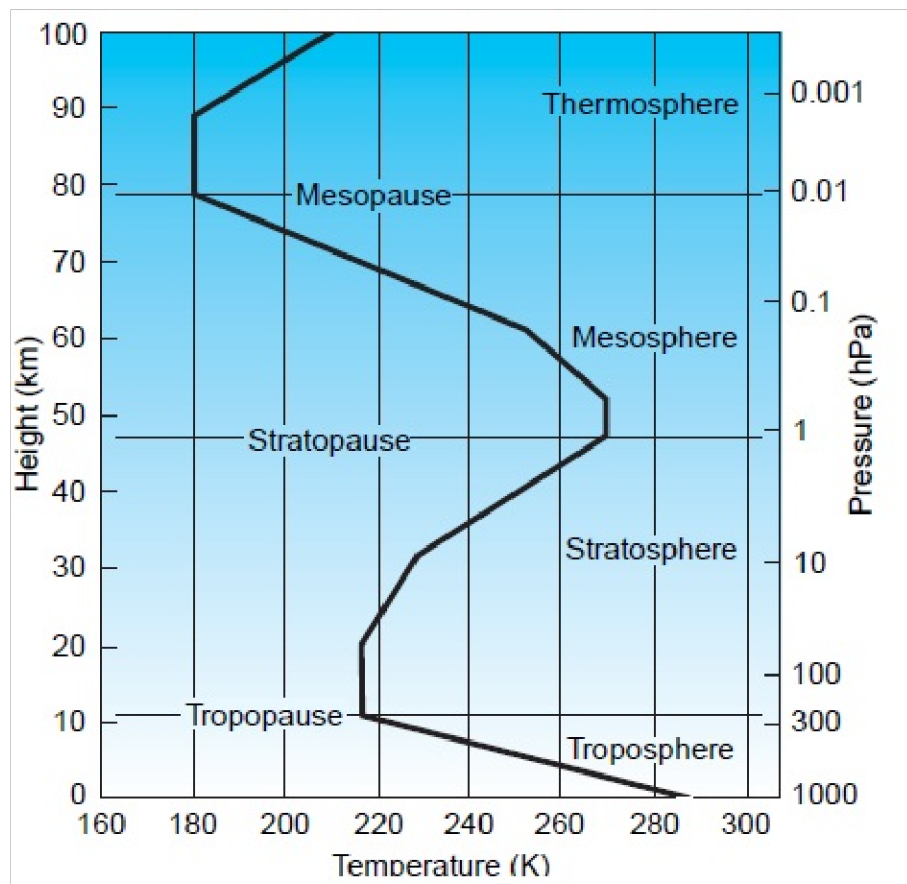


Figura 2.- Representación gráfica de la temperatura de la Tierra en función de la altura y de las capas de su atmósfera [9].

Las variaciones de temperatura en las capas existentes, se explica si se toma en cuenta que nuestra atmósfera es una mezcla de gases como el vapor de agua y ozono que absorben la radiación y calientan la atmósfera. Otros compuestos como el dióxido de carbono y ozono, emiten radiación infrarroja y enfrían el entorno. Ambos procesos se encuentran en balance uno con otro estableciendo el **equilibrio radiativo** sobre la troposfera.[9]

1.1.1. Equilibrio Térmico

La temperatura de equilibrio radiativo de un planeta esta determinada por el balance entre la energía absorobida desde el sol y la emisión en el infrarrojo para calcular la energía absorbida por el planeta[2,9].

Para calcular la energía absorbida por el planeta, tomemos la situación en la que el planeta recibe los rayos solares sobre su superficie de una manera paralela. De tal forma que la potencia total recibida por el hemisferio iluminado se puede expresar

$$\frac{1}{2} \int_v I_{sc} f(r, \phi, \theta) dv = \frac{1}{2} \int_v I_{sc} r^2 \sin\phi \cos\phi d\phi d\theta \quad (1.1)$$

Siendo el ángulo phi la latitud, r el radio del planeta y I_{sc} es el flujo de radiación normal incidente con un valor de $1372,7(Wm^{-2})$, mientras el $1/2$ representa la parte del hemisferio iluminada, al resolver esta integral se obtiene que el promedio de energía abosrbida es proporcional a $\frac{I_{sc}}{2}$.

Se ha calculado el promedio de energía absorbida de acuerdo al flujo de radiación normal. Sin embargo, hace falta agregar la parte de enrgía reflejada debido al albedo ρ , para el equilibrio termodinámico. De modo que el promedio anual del flujo de radiación solar por unidad de area sobre la superficie de la Tierra esta dado por

$$\bar{q}_s = \frac{I_{sc}(1 - \rho)}{4} \quad (1.2)$$

Donde el factor de un cuarto se agrega al considerar el tiempo promedio sobre el cual el hemisferio esta iluminado. La temperatura de equilibrio del sistema, se obtiene asumiendo la radiación solar emitida y absorbida. Entonces de la ley de Stefan Boltzman se puede inferir

$$\bar{q}_s = \frac{I_{sc}(1 - \rho)}{4} = \sigma T_e^4 \quad (1.3)$$

De la expresión 1.3 se calcula la temperatura promedio sobre la superficie del planeta dando un valor de **253.622K**. Sin emabrgo, este cálculo esta muy alejado del valor real que es aproximadamente 290K. Considerando que el planeta no es un cuerpo negro perfecto, sino más bien un objeto real con una emisividad menor que 1, por lo que nuestra ecuación 1.3 se modificara tal que:

$$\bar{q}_s = \frac{I_{sc}(1 - \rho)}{4} = \epsilon \sigma T_e^4 \quad (1.4)$$

De la ecuación 1.4 la temperatura de equilibrio sobre la superficie del planeta sera **254.688K**, lo cual sigue alejado de la temperatura real de la superficie de la Tierra. Por lo que se

atribuyese esta gran diferencia de temperatura al efecto invernadero que existe sobre el planeta. La siguiente tabla muestra las temperaturas de equilibrio de los planetas del sistema solar, usando unicamente la emisividad.

Planet	Albedo	T_e (K)	T_s (K)	Emissivity (ϵ)
Mercury	0.058	440	440	1
Venus	0.77	227	737	0.009
Earth	0.3	254	288	0.60
Mars	0.14	217	220	0.94
Jupiter	0.73	88	129	-
Saturn	0.76	63	97	-

Tabla 3.- Temperatura como funcion de la presión de los planetas Venus, Tierra y Marte [9].

1.1.2. Equilibrio térmico en los planetas

La radiación solar que llega a los planetas es más debil que la radiación emitida por el Sol originalmente, donde el flujo total de calor emitido es $4\pi R_s^2 Q_s$ con R_s el radio del Sol. Cuando los rayos del Sol alcanzan el planeta, esta flujo se distribuye en una superficie $4\pi r^2$ siendo r el radio de la orbita planetaria alrededor del Sol, por lo que la densidad de energía es

$$\rho_e = \frac{R_s^2}{r^2} Q_s = f Q_s \quad (1.5)$$

Con f un factor de dilución de nuestra densidad. La irradiación total de la atmósfera superior del planeta debido al sol, tiene el nombre de constante solar S y se expresa

$$I_{sc} = f \sigma T_s^4 \quad (1.6)$$

Para calcular la temperatura superficial del planeta T_p se asume que existe un equilibrio térmico entre la radiación que surge de la superficie del planeta y la irradiancia que llega al planeta como una proyección superficial de area del planeta en un plano, perpendicular a los rayos del sol, siendo así el flujo total

$$Q = 4\pi R^2 \sigma \left(\frac{f}{4} T_s^4 - T_p^4 \right) \quad (1.7)$$

Para el equilibrio térmico se requiere $Q=0$ y entonces de la ecuación (1.7)

$$T_p = \frac{f^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} T_s \quad (1.8)$$

Dando como resultado la siguiente tabla para la tempetaturas de los planetas

Planeta	r (Gm)	f	S (W/m ²)	T _p (K)	T _{exp} (K)
Mercurio	57.91	1.44x10 ⁻⁴	9082.7	448	440
Venus	108.21	4.13x10 ⁻⁵	2601.3	328	737
Tierra	150	9.32x10 ⁻⁵	1361	278	288
Marte	227.92	8x10 ⁻⁶	586.2	225	210
Jupiter	778.57	2.35x10 ⁻⁷	50.26	122	124
Saturno	1433.53	5.87x10 ⁻⁸	14.82	90	95
Urano	2872.46	2.87x10 ⁻⁸	3.64	64	59
Neptuno	4495	2.4x10 ⁻⁸	1.508	51	59
Pluton	5906	1.38x10 ⁻⁸	0.72	44	39

Tabla 4.- Temperatura planetaria usando equilibrio radiativo [1,19].

A pesar de la sencillez del modelo, se observa una muy buena relación entre los datos teóricos y los experimentales, dando un error significativo en el caso del planeta Venus, esta gran desigualdad de calculo, igual que en la sección pasada se atribuyea la gran cantidad de gases invernadero que se encuentran localizados en la atmósfera. Se modifica el modelo considerando la emisividad como una contante $(1 - \gamma)$ que atenúa la radiación emitida por el planeta, por otro lado al considerar el efecto albedo sobre el flujo incidente solar, tenemos que el flujo total

$$Q = 4\pi R^2 \sigma \left((1 - \rho) \frac{f}{4} T_s^4 - (1 - \gamma) T_p^4 \right) \quad (1.9)$$

Siendo γ el coeficiente de efecto invernadero y T_p las temperaturas superficiales de cada planeta.

$$T_p = \frac{(1 - \rho)^{\frac{1}{4}} f^{\frac{1}{4}}}{(1 - \gamma)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2}} T_s \quad (1.10)$$

A continuación se muestra una tabla con los valores de albedo y del coeficiente de gases invernaderos para diferentes planetas del sistema solar.

Planeta	Albedo	γ	S (W/m ²)	T _p (K)	T _{exp} (K)
Mercury	0.068	0.004	9082.7	440.21	440
Venus	0.71	0.99	2601.3	737.61	737
Earth	0.3	0.3	1372.7	287.59	288
Marts	0.25	0.17	586.2	220.26	220
Jupiter	0.343	0.38	50.26	124.18	124
Saturn	0.342	0.47	14.82	95.04	95
Uranus	0.3	0.07	3.64	59.28	59
Neptune	0.29	0.61	1.508	59.08	59
Pluto	0.7	0.61	0.72	40.91	39

Tabla 5.- Temperatura planetaria usando equilibrio radiativo y coeficiente de gases invernadero [1,19].

Con el modelo desarrollado podemos encontrar una aproximación para ρ en función de la gamma, de la forma

$$\rho = a\gamma^2 + b\gamma + c \quad (1.11)$$

Con $a=0.072$, $b=0.4955$ y $c=0.1527$

Capítulo 2

Termodinámica clásica de equilibrio.

2.1. Apuntes preliminares de termodinámica.

Una descripción termodinámica comienza por la división del universo en una parte aislada "*sistema*" y todo aquello exterior al sistema. La definición de **sistema termodinámico** depende de la existencia de "*fronteras*", estas separan al sistema de interés del exterior y determinan el camino con el cual este interactúa con los alrededores. Por lo que podemos clasificar nuestros sistemas en tres tipos: aislados, cerrados y abiertos[4,12].

Sistemas aislados:No intercambia ni materia ni energía con el exterior. Tales sistemas son considerados ideales y no existen en la naturaleza[4].

Sistemas cerrados:Intercambian energía con el exterior pero no materia[4].

Sistemas abiertos:Existe un intercambio de energía y materia con el exterior, todos los seres vivos y sistemas ecológicos son sistemas abiertos[4].

En termodinámica el estado de un sistema está especificado en términos macroscópicos que se relacionan con el estado interno del sistema (V, N_K, T, P, \dots) **variables de estado**, que sirven para hacer una adecuada descripción del sistema, la cual se realiza mediante las leyes de la termodinámica que se encuentran bajo los conceptos de energía y entropía denominadas **funciones de estado**[4].

Es conveniente clasificar las variables termodinámicas en dos categorías

- **Intensivas.**-Aquellas variables que son independiente del tamaño sistema.
- **Extensiva.**-dependen de las propiedades locales del sistema.

La termodinámica tiene como objetivo fundamental establecer relaciones entre las variables de un sistema cuando este sufre cambios de estado. En particular entre los estados de equilibrio a través de diferentes procesos térmicos. Dichos estados de equilibrio son aquellos que se alcanzan cuando todas las variables termodinámicas X_j son constantes en el tiempo.

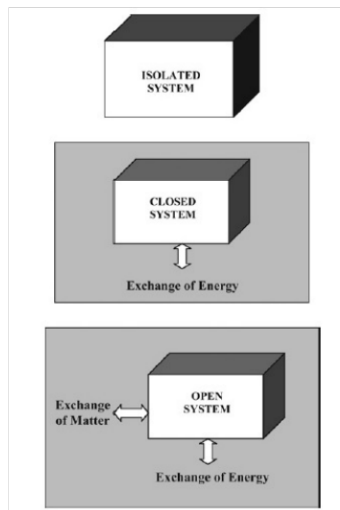


Figura 3.-Sistemas termodinámicos [4].

Una precisa descripción de este estado está dada por los valores de energía interna U y entropía S que son especificados por la temperatura T , el volumen y el número de moles de los constituyentes químicos N_k .

$$U = U(T, V, N_k) \quad o \quad S = S(T, V, N_k) \quad (2.1)$$

Los valores de una variable extensiva como la energía interna U , o la entropía S , pueden ser especificadas por otras variables extensivas:

$$U = U(S, V, N_k) \quad o \quad S = S(U, V, N_k) \quad (2.2)$$

Se define un **proceso** como el mecanismo mediante el cual un sistema cambia de estado. En el contexto de un espacio de estados un proceso podrá visualizarse como una trayectoria entre dos puntos cualquiera del espacio. Si, en particular, los dos puntos coinciden decimos que el proceso es *cíclico*. Si esta curva puede trazarse en el espacio de estados, cada punto de ella corresponde a un estado termodinámico del sistema y el proceso en este caso consiste de una sucesión de estados de equilibrio, este proceso recibe el nombre de **proceso cuasi-estático**. Sin embargo, si el proceso no tiene una representación geométrica hablaremos de un **proceso irreversible o no cuasi-estático**[2]

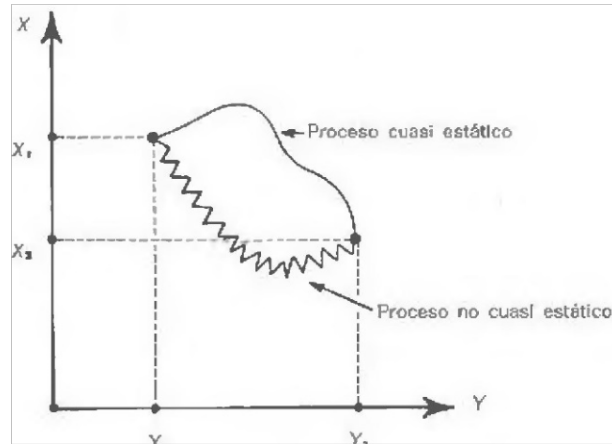


Figura 4.-Procesos termodinámicos [11].

En termodinámica el concepto de **trabajo** es una extensión de su significado en mecánica clásica, es decir un producto de una fuerza que actúa a lo largo de un desplazamiento. En un sistema termodinámico el trabajo esta asociado a los intercambios de energía interna, en los cuales las variables intensivas X , actuan como las fuerzas mecánicas produciendo cambios en las variables extensivas Y . La definición anterior debe cumplir que el producto tenga las dimensiones de energía y las variables X Y sean conjugadas. Si en general, un sistema intercambia energía de varios modos, cada uno es representado por un trabajo para un proceso infinitesimal y reversible de la forma $X dY$ el trabajo realizado por todo el sistema sera:

$$d'W = \sum_{i=1}^n X_i dY_i \quad (2.3)$$

El concepto de **calor** desde un punto de vista microscópico se entiende como una medida de agitación térmica de las moléculas que constituyen al sistema. Sin embargo, macroscópicamente una diferencia de temperaturas genera una transferencia o flujo de energía en forma de calor (energía térmica). Igual que el trabajo, la cantidad de calor que un sistema intercambia en su paso entre dos estados de equilibrio también depende de la trayectoria que une dichos estados. Si $d'Q < 0$ entonces el sistema cede calor a sus alrededores, y si $d'Q > 0$, el sistema absorbe calor.

2.1.1. Primera Ley de la termodinámica

La ley de la conservación de la energía puede ser declarada y utilizada en términos de las variables macroscópicas, donde una transformación de estado puede ocurrir debido al intercambio de calor, el intercambio de trabajo con los alrededores o un cambio en la

composición química, donde cada uno de ellos están asociados a una cambio de energía. Por lo que la primera ley queda declarada de la siguiente forma:

Cuando un sistema experimenta una transformación de estado la suma algebraica de los diferentes cambios energéticos es independiente de la manera de dicha variación y depende solo de los estados iniciales y finales.[4]

Podemos resumir la primera ley de la siguiente forma: Para todo sistema termodinámico contenido en un recipiente de paredes adiabáticas, que sufre un proceso durante el cual intercambia con los alrededores una cantidad de trabajo W , el cambio de energía interna es igual a dicha cantidad de trabajo. Sin embargo, si el mismo proceso ocurre para un proceso no adiabático se experimenta un cambio de estado resultado del intercambio de trabajo y calor con los alrededores, donde para un proceso infinitesimal y reversible se tiene:

$$dU = dQ + \sum_{i=1}^n X_i dY_i \quad (2.4)$$

o equivalentemente

$$dU = dQ + dW \quad (2.5)$$

Esta expresión representan el principio de conservación de energía para sistemas cerrados, donde para cualquier proceso cíclico tenemos que el estado inicial coincide con el final por lo que cambio de energía interna es cero $\Delta U = 0$, en este caso el trabajo realizado por el sistema es igual al calor absorbido por él $Q = -W$.

$$\oint dU = 0 \quad (2.6)$$

Puede considerar la ecuación anterior como una declaración de la primera ley, donde si el cambio de U es independiente del camino de la transformación, entonces U es una función de estado.

$$U = U(T, V, N_k, \dots) + U_0 \quad (2.7)$$

2.1.2. Segunda ley de la termodinámica

De acuerdo a la primera ley de la termodinámica, todo proceso que ocurre en un sistema dado debe satisfacer el principio de conservación de la energía. Donde la variación de energía interna debe ser igual a la suma algebraica de las cantidades de calor y trabajo que el sistema intercambia con sus alrededores.

Sin embargo, esta ley nada nos dice acerca de la dirección en que un proceso debe o

puede ocurrir. Así, dentro del contexto de dicha ley no existe limitación alguna para transformar energía de una forma a otra. Sin embargo, todos los procesos que se realizan espontáneamente ocurren en una dirección, nunca siguen una dirección contraria, por lo que no es la energía del sistema lo que controla la configuración de la dirección de los procesos sino más bien otra variable llamada **entropía** descrita en la segunda ley de la termodinámica, la cual se puede formular de la siguiente manera:

Para un sistema termodinámico σ que opera entre una distribución continua de fuentes de temperatura T , la desigualdad de Clausius establece:

En cualquier transformación cíclica a través de toda temperatura definida se sigue la siguiente desigualdad:

$$\int \frac{d'Q}{T} \leq 0 \begin{cases} < 0 & \text{si proceso irreversible} \\ = 0 & \text{si proceso reversible} \end{cases} \quad (2.8)$$

Donde $d'Q$ es la cantidad de calor que intercambia con la fuente de temperatura T .

Por lo que podemos definir la entropía de un sistema como una función de las coordenadas termodinámicas, cuyo cambio es igual a la integral $d'Q/T$ entre los estados extremos, calculado a través de una trayectoria. Por ejemplo, si A y B son estados de equilibrio del sistema entonces para el caso reversible se tiene

$$\int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T} = S(B) - S(A) \quad (2.9)$$

Si el proceso es infinitesimal, el cambio de entropía será $dS = d'Q/T$, derivando entonces de la primera ley de la termodinámica se tiene que para un proceso infinitesimal y reversible

$$dU = TdS + \sum_{i=1}^n X_i dY_i \quad (2.10)$$

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n X_i dY_i \quad (2.11)$$

Del mismo modo para la ecuación (1.8) podemos escribir la desigualdad de Clausius para cualquier proceso entre dos estados de equilibrio A y B de un sistema termodinámico σ , donde la igualdad solo se cumple para un proceso reversible.

$$\int_A^B \frac{d'Q}{T} \leq S(B) - S(A) \quad (2.12)$$

De la ecuación (3.8) y (3.12) se define el **principio del aumento de entropía**: para todo proceso que ocurre en un sistema aislado d'Q=0 la entropía no disminuye. Por lo que:

$$S(B) \geq S(A) \quad (2.13)$$

Donde A y B representan las variables que caracterizan los estados de equilibrio. Esta desigualdad establece el criterio para determinar cuando puede ocurrir un proceso en el sistema. Aunque un sistema puede intercambiar calor (sistema cerrado) con sus alrededores, se puede asumir el sistema completo o universo como un sistema aislado, así:

$$(\Delta S)_{univ} = (\Delta S)_\sigma + (\Delta S)_\alpha \geq 0 \quad (2.14)$$

Donde $(\Delta S)_\sigma$ es el cambio de entropía del sistema y $(\Delta S)_\alpha$ es el cambio de entropía de los alrededores. Por consiguiente, para **"todo proceso que ocurra en un sistema aislado y cerrado la entropía del universo no disminuye"**, donde es fácil notar de lo anterior que para cualquier sistema si ocurre $S_f < S_i$ este proceso será imposible.

La desigualdad de Clausius se puede reescribir usando nuestro concepto de entropía de manera que para un cambio infinitesimal.

$$dS \geq \int \frac{d'Q}{T} \quad (2.15)$$

En un proceso irreversible, el cambio de entropía es mayor que d'Q/T, donde d'Q es el intercambio de calor con los alrededores. Esto significa que parte del calor se pierde y se compensa con un aumento entrópico, dicha cantidad es conocida como calor no compensado por lo que la entropía total S puede variar por dos modos de interacción entre dS_e y dS_i . Ésta última declaración puede expresar la entropía de la siguiente manera:

$$dS = d_e S + d_i S \quad (2.16)$$

Siendo dS_e el cambio entrópico del sistema debido al intercambio de materia y energía; y dS_i el cambio entrópico debido a los procesos irreversibles internos del sistema; de forma que la entropía (S) sea mayor o igual que cero, exceptuando para valores cíclicos donde nuestra entropía sea cero.

2.1.3. Máquinas térmicas

Las máquinas térmicas tienen la finalidad de producir trabajo (W) a partir de fuentes de calor mediante una serie de procesos, sin suponer cambios en el estado del mismo, es decir, que el sistema sea llevado a su estado inicial, dando lugar a un ciclo. En cada uno de

los pasos del ciclo se puede absorber calor (Q_H) o ceder calor (Q_C). Si el calor absorbido (Q_H) es mayor que el calor cedido (Q_C) y el trabajo (W) es realizado por el sistema, el dispositivo mecánico se denomina motor térmico cuya finalidad es la de proporcionar trabajo al exterior, realizando una y otra vez el mismo ciclo.

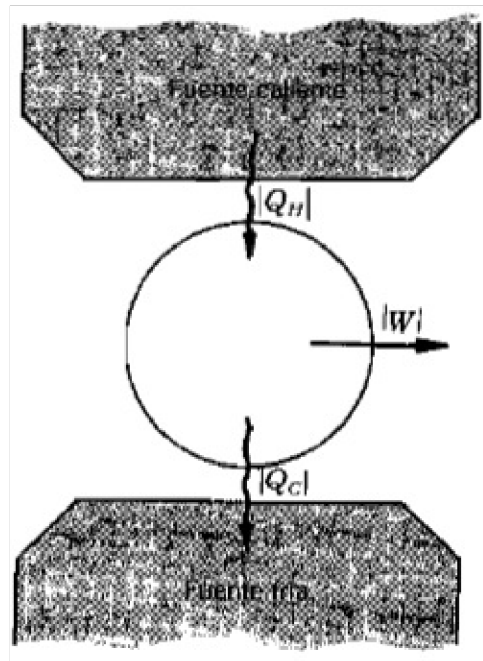


Figura 5.-Motor térmico, se observan dos reservorios térmicos (fuente caliente y fría, además de el trabajo suministrado al exterior [12]

Anteriormente se ha mencionado que el cambio de energía interna es cero por ser un ciclo, en consecuencia el trabajo neto del ciclo se expresa como una relación del calor cedido y absorbido.

$$|W| = |Q_H| - |Q_C| \quad (2.17)$$

Así ahora podemos definir el rendimiento térmico como el trabajo producido durante el ciclo, entre el calor absorbido en el ciclo

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|} \quad (2.18)$$

De la ecuación 3.18 se observa que el límite de eficiencia de un motor térmico será la unidad ($\eta \leq 1$) cuando el calor cedido Q_c sea nulo, es decir que exista un motor que trabaje en forma cíclica de modo que el sistema no ceda calor y la transformación de calor absorbido en trabajo de un rendimiento del 100 por ciento. Sin embargo esto es imposible

debido al postulado de Kelvin-Planck, que nos dice:

”Toda transformación cíclica cuya unica finalidad sea absorber calor de un cuerpo o fuente térmica a temperatura dada y convertirla íntegramente en trabajo es imposible”

2.1.4. Máquina de Carnot

Con lo anterior podemos decir que la termodinámica clásica de equilibrio (TCE) se desarrolló para proporcionar un mejor conocimiento de las máquinas térmicas, que absorben calor desde una fuente alta de temperatura y producen trabajo útil. Carnot describe el funcionamiento de dichas máquinas térmicas en el principio que lleva su nombre.

Cualquier proceso cíclico operando a una temperatura absoluta máxima T_1 y una temperatura absoluta mínima T_2 tiene una eficiencia térmica que es menor o igual a $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

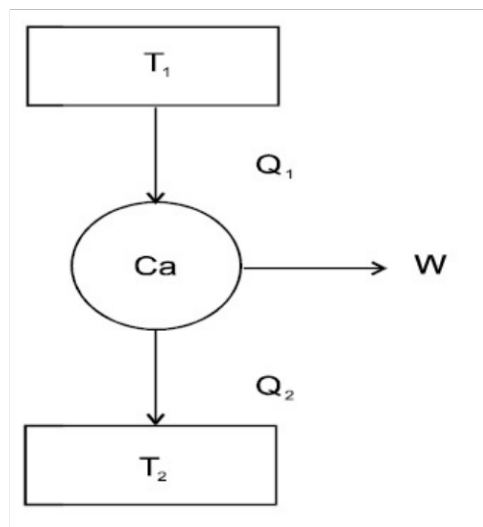


Figura 6.-Máquina Carnot

Teorema de Carnot: No existe ninguna máquina (proceso) que opere entre dos temperaturas dadas que tenga mayor eficiencia que una máquina reversible de Carnot operando a las mismas fuentes térmicas.

Del teorema de Carnot tenemos que la igualdad en la eficiencia η_c se cumple sólo para el ciclo reversible de Carnot. El cual absorbe una cantidad de calor Q_1 del almacén T_1 , parte de él lo convierte en trabajo mecánico (W) y cede una cantidad de calor Q_2 al almacén T_2 . De la primera y segunda ley de la termodinámica tenemos que el cambio de

energía interna y el cambio de entropía del ciclo son nulas ($\delta U = 0, \delta S = 0$ por lo que se obtienen las siguientes relaciones:

$$Q_1 = W - Q_2 \quad (2.19)$$

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (2.20)$$

Ciclo de Carnot: El ciclo de Carnot es un proceso que hace pasar a un sistema cualquiera, sea gas, líquido, sólido, radiación electromagnética, etc por una sucesión de estados de equilibrio definido por 4 procesos reversibles:

- una expansión isotérmica a cierta temperatura T_2
- una expansión adiabática hasta otra temperatura $T_1 < T_2$
- una compresión isotérmica a la temperatura T_1
- una compresión adiabática hasta el estado inicial a la temperatura T_2 .

Su representación en diagramas P-V y TS es de la siguiente forma:

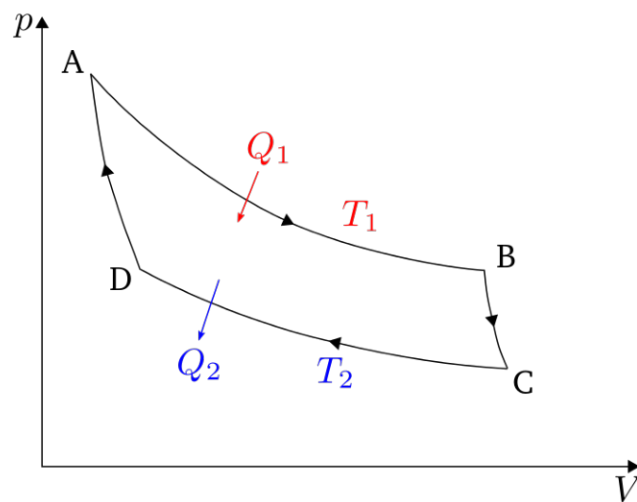


Figura 7.-Diagrama P-V de un ciclo de Carnot [18]

Para un proceso adiabático reversible, la entropía permanece constante; o en otras palabras experimenta un proceso isoentrópico, la representación de un proceso isoentrópico sobre un diagrama TS es una línea vertical, mientras que para un proceso isotérmico se representan mediante una línea horizontal, así el diagrama TS de un ciclo de Carnot es un rectángulo.

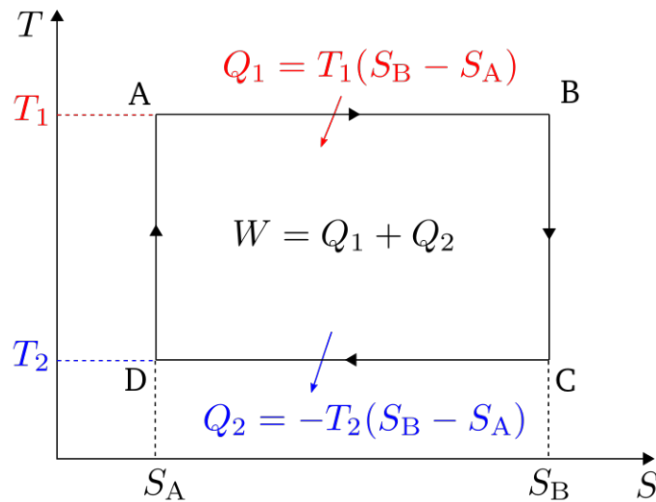


Figura 8.-Diagrama T-S de un ciclo de Carnot [18]

Del diagrama T-S es fácil notar que la eficiencia que es el trabajo que se aplica al ciclo y el calor que ingresa al sistema se puede expresar como:

$$\eta = \frac{W_T}{Q_1} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (2.21)$$

Las máquinas térmicas reales no tienen una eficiencia tan buena como un ciclo de Carnot clásico, debido a ineficiencias que ocurren por fugas de calor, degradación, pérdidas de fricción etc.[7] Para lograr la eficiencia teórica, las partes de la isoterma del ciclo se deben llevar a cabo infinitamente lenta así que la sustancia de trabajo puede heredar el equilibrio termodinámico de los reservorios térmicos y entonces no existen gradientes de temperatura ocurriendo a través de los muros que encapsula la sustancia de trabajo.

Bajo estas condiciones la potencia de salida es claramente cero tomando un tiempo infinito para hacer una cantidad finita de trabajo.

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W}{t} = 0 \quad (2.22)$$

La ecuación anterior no representa el caso más realista, para observar un caso más realista se ven las construcciones tipo Curzon y Ahlborn.

Más adelante se usarán construcciones tipo máquina de Carnot para modelar el movimiento y temperaturas de la atmósfera.

Capítulo 3

Termodinámica de tiempos finitos.

3.1. Termodinámica de tiempos finitos (Maquinas térmicas tipo Curzon y Ahlborn)

3.1.1. Termodinámica de tiempos finitos(TTF)

La termodinámica de tiempos finitos (TTF) se ha desarrollado colocando límites realistas en los procesos que son irreversibles y se proceden a tiempo finito a diferencia de la termodinámica clásica de equilibrio (TCE)[13].

El enfoque incorpora las restricciones de la operación en tiempo finito; restricciones en las variables del sistema (como la velocidad máxima alcanzable o la aceleración en motores alternativos); y modelos genéricos para las fuentes de irreversibilidad y, por lo tanto, la producción de entropía (como la transferencia de calor de tasa finita, la fricción, las fugas de calor, etc.) [7]. Luego, se calcula un extremo u óptimo de una variable termodinámicamente significativa, como la minimización de la producción de entropía, la maximización de la energía o disponibilidad, maximización de potencia, maximización de eficiencia, etc [7].

La termodinámica de tiempos finitos (TTF) puede ser considerada una extensión de la termodinámica clásica de equilibrio (TCE), en la que se buscan modelos termodinámicos más afines al mundo real que los dados por la termodinámica clásica (TCE), estos modelos se realizan considerando las irreversibilidades del sistema. El trabajo pionero de la TTF es el de Curzon y Ahlborn [7,13] en el que se estudian los límites reales de de una planta de potencia usando un modelo de *máquina endoreversible*, esta se conforma de un ciclo de Carnot endoreversible donde los procesos irreversibles del ciclo son lo que involucran el intercambio de calor entre los reservorios térmicos y la sustancia de trabajo

La máquina de Carnot endoreversible no esta en equilibrio termodinámico con los reservorios y la sustancia de trabajo. Está separación entre los procesos reversibles internos y las irreversibilidades en las fronteras del sistema. Donde los procesos internos con tiempos de relajación rapidos pueden considerarse reversibles y la variación de entropía para el universo termodinámico ΔS_u de la maquina es positivo, siendo la entropía de nuestra sustancia de trabajo nula $\Delta S_w = 0$. Esto se conoce como hipotesis de endoreversibilidad. Al evolucionar a tiempo finito el modelo propuesto por Curzon y Ahlborn la potencia del modelo es no nula a diferencia de lo dado por la TCE [22].

3.1.2. Motor de Curzon y Ahlborn

La máquina térmica está formada de dos almacenes de temperatura T_1 y T_2 donde $T_1 > T_2$, dos componentes irreversibles que son las 2 resistencias térmicas, que producen flujos termicos hacia la máquina de Carnot reversible con temperaturas intermedias T_{1w} y T_{2w} con $T_{1w} > T_{2w}$, colocado entre los almacenes intermedios. Se considera que las conductancias térmicas, cumplen con la ley de Fourier para la conducción de calor ($\dot{Q} = -\lambda \nabla T$) [8], en el presente trabajo se usara la siguiente notacion para referirse a los flujos de calor $Q = \dot{Q}$, tal que:

$$Q_1 = \alpha(T_1 - T_{1w}) = \alpha x \quad (3.1)$$

$$Q_2 = \beta(T_{2w} - T_2) = \beta y \quad (3.2)$$

donde

$$x = \alpha(T_1 - T_{1w}) \quad (3.3)$$

$$y = \beta(T_{2w} - T_2) \quad (3.4)$$

Una forma de de solución al motor de Curzon y Ahlborn y el esquema de la máquina fue porpuesta por Alexis De Vos[6]. De la conservación de la energía se tiene que el flujo de calor Q_1 del reservorio superior, hacia la máquina reversible con potencia P al flujo de salida Q_2 [8].

$$Q_1 = W + Q_2 \quad (3.5)$$

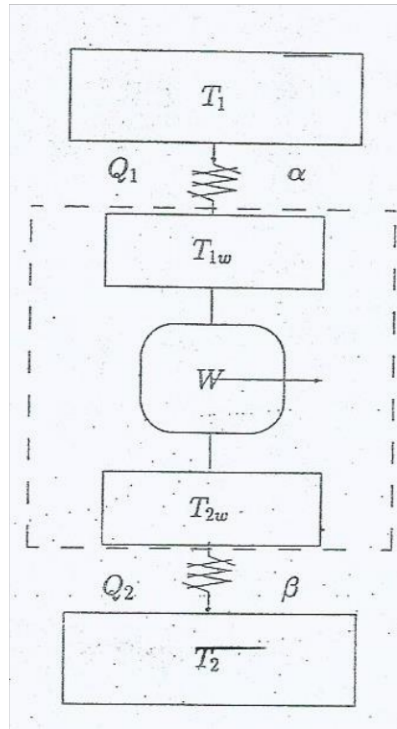


Figura 9.- Esquema propuesto por De Vos [10].

Por la conservación entrópica del sistema $\Sigma S = 0$. Por lo que la producción de entropía debe ser nula, donde para la máquina interna reversible suponemos que sus cambios entrópicos son cero (*hipotesis de endoreversibilidad*). [2,8,10,22]

$$\sigma = \frac{Q_1}{T_{1w}} - \frac{Q_2}{T_{2w}} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{Q_1}{T_{1w}} = \frac{Q_2}{T_{2w}} \quad (3.7)$$

De la ecuación (3.5) y (3.7) en (2.19) se observa que eficiencia para la máquina endoreversible sin contar las conductancias térmicas es:

$$\eta = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \quad (3.8)$$

Tomando (3.1) y (3.2) con la segunda ley de la termodinámica (3.7) tenemos la siguiente relación para los conductores térmicos.

$$\frac{\alpha(T_1 - T_{1w})}{T_{1w}} = \frac{\beta(T_{2w} - T_2)}{T_{2w}} \quad (3.9)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.8) y (3.9) tenemos para T_{1w} y T_{2w} .

$$T_{1w} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} T_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{1}{1 - \eta} T_2 \quad (3.10)$$

$$T_{2w} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (1 - \eta) T_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} T_2 \quad (3.11)$$

Sustituyendo T_{1w} ecuación (3.10) con nuestro flujo Q_1 (3.1).

$$Q_1 = \gamma \frac{T_1 - T_2 - T_1 \eta}{1 - \eta} \quad (3.12)$$

con

$$\gamma = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} \quad (3.13)$$

De la definición de eficiencia multiplicado por la ecuación (3.12) podemos obtener una expresión para la potencia dada por,

$$P = \gamma \frac{\eta(T_1 - T_2 - T_1 \eta)}{1 - \eta} \quad (3.14)$$

La ecuación 3.14 nos presenta una curva concava con un único máximo, que se conoce resolviendo $\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0$

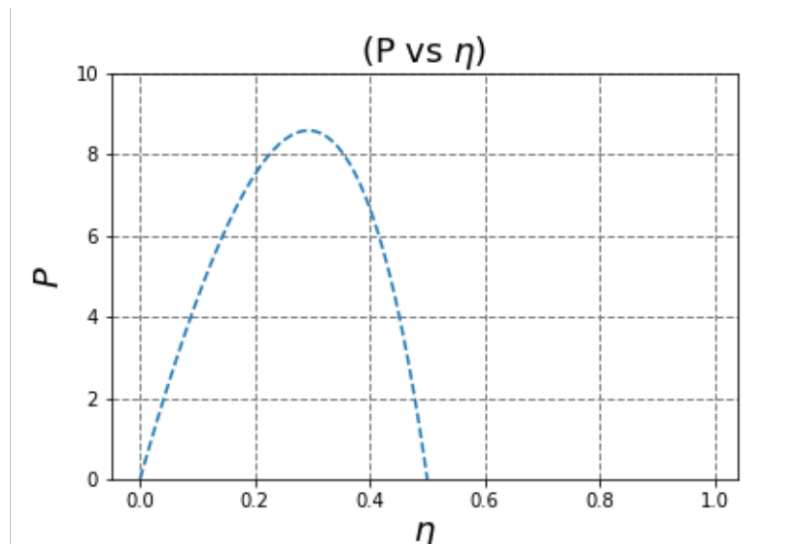


Figura 10.- Ploteo de la potencia contra eficiencia

Dando como resultado una eficiencia a máxima potencia para la máquina de Curzon-Ahlborn conocida en la Termodinámica de tiempos finitos como η_{ca} que satisface $0 < \eta_{ca} < \eta_c$.

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (3.15)$$

Para demostrar que el Motor de Curzon y Ahlborn no es reversible, Alexis De Vos[5] calcula ΣS sobre una superficie cerrada alrededor de todo el motor[8]. Tenemos así:

$$\Sigma S = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \quad (3.16)$$

El signo menos Q_1 tiene en cuenta el hecho de que el calor Q_1 entra en la superficie Σ en lugar de abandonarlo. Así de la ecuación (3.5) y (3.16)

$$\Sigma S = \frac{Q_1}{T_2}(\eta_c - \eta) \quad (3.17)$$

Donde η_c denota la eficiencia de Carnot $1 - T_1/T_2$, siendo así la producción de entropía.

$$\Sigma S = \gamma \frac{(T_1 - T_2 - T_1\eta)^2}{T_2 T_1 (1 - \eta)} \quad (3.18)$$

Bajo condiciones reversibles, la eficiencia de Carnot $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, el flujo Q y la Potencia son cero, tal como se espera de que procesos reversibles ocurren infinitamente lento, por otro lado usando este valor de η la producción de entropía se vuelve igual cero, consistente con la reversibilidad del proceso.[8]

Con la eficiencia dada por un análisis en TTF (3.15), bajo condiciones de máxima potencia, se encuentra que las cantidades Q , P , ΣS toman valores no cero[2,8].

$$Q = \gamma \sqrt{T_1}(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \quad (3.19)$$

$$P = \gamma(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 \quad (3.20)$$

$$\Sigma S = \gamma \frac{(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad (3.21)$$

Hemos derivado hasta aquí las formulas de Curzon-Ahlborn[6] que muestra la eficiencia de este motor bajo condiciones máxima potencia.

3.1.3. Criterio ecológico de optimización termodinámico

En 1991, el criterio de optimización ecológico fue propuesto para ciclos térmicos en el régimen de la termodinámica de tiempos finitos (TTF)[8,10]. Este criterio consiste de la maximización de la función E que es un compromiso entre la potencia de salida y la producción de entropía.

$$E = P - T_2\sigma \quad (3.22)$$

En la ecuación (3.17) se expreso la producción de entropía como

$$\Sigma S = \frac{Q_1}{T_2}(\eta_c - \eta) \quad (3.23)$$

Por lo que la función ecológica puede ser expresada

$$E = (2\eta - \eta_c)Q_1 \quad (3.24)$$

Cuando la función ecológica es maximizada, el ciclo de CA tiene una configuración que produce alrededor de 80 % y solo 30 % de entropía producida. Otra importante propiedad del régimen de máxima ecológica es que la eficiencia en este régimen, η_e [8,10], esta dado por

$$\eta_E \approx \frac{1}{2}(\eta_C - \eta_{CA}) \quad (3.25)$$

3.1.4. Modelo de Gordon y Zarmi (GZ)

El modelo de convección atmosférica propuesto por GZ, consiste en una celda como un ciclo de Carnot endorreversible entre dos reservorios térmicos de temperaturas extremas, la temperatura T_1 de la superficie terrestre en equilibrio térmico con la parte más baja de la atmósfera y como reservorio frio la temperatura de la radiación cosmica de fondo $T_2 = 3K$ [13]. La energía de entrada es la radiación solar, la sustancia de trabajo es la atmósfera y el trabajo realizado por el fluido de la máquina térmica es la potencia media de los vientos. Los componentes de la celda de convección de GZ son: Dos ramas isotermas, en las cuales la atmósfera recibe calor a bajas altitudes y en la otra cede calor a altas altitudes del universo; y dos ramas adiabáticas intermedias que se toman como instantaneas[17].GZ, maximizaron el trabajo por ciclo W, sujeta a las restricciones termodinámicas[17]y al promedio de flujo de radiación solar q_s (1.4) [13].

$$\bar{q}_s = \frac{I_{sc}(1 - \rho)}{4}$$

El modelo de GZ trabaja con un sistema Sol-Tierra-Viento como un motor endorreversible, donde el calor de entrada es la radiación solar, la sustancia de trabajo es la atmósfera de

la Tierra y el trabajo producido por este ciclo es la potencia media de los vientos. El almacén frío para esta máquina es el espacio exterior con la temperatura de la radiación cósmica de fondo de 3K.[13]En la Fig. 11 se muestra una vista esquemática del sistema simplificado, mostrando sus ramas isotérmicas y adiabáticas.

1. Dos ramas isotérmicas, en una la atmósfera absorbe radiación solar a bajas altitudes y la otra en la que la atmósfera rechaza calor a grandes altitudes [13].
2. Dos adiabatas instantaneas intermedias con corrientes de aire ascendentes y descendentes[13].

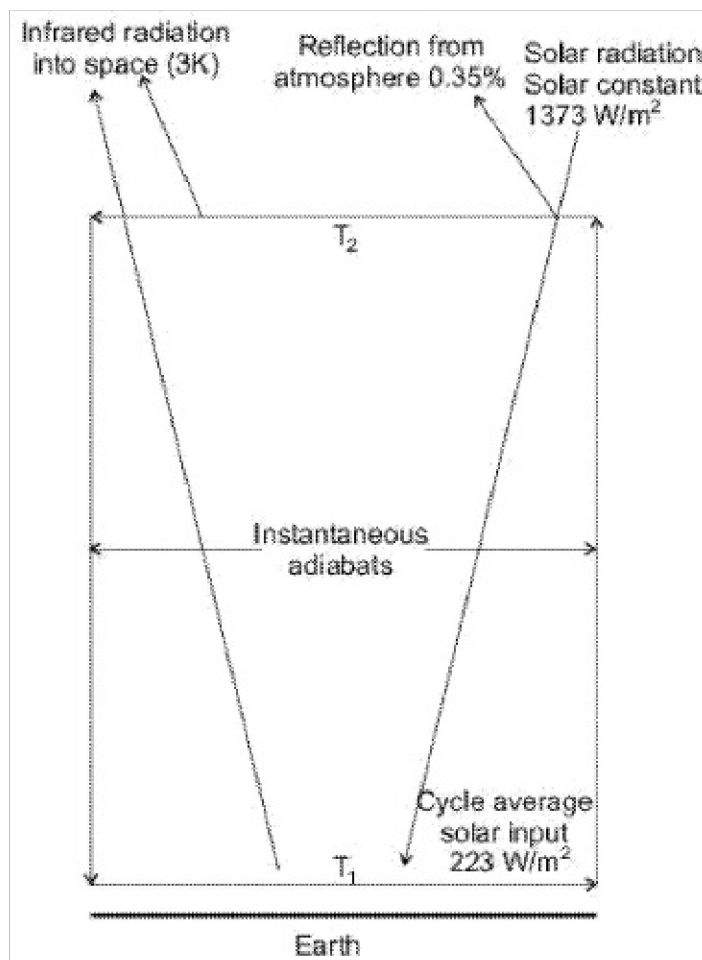


Figura 11.- Esquema simplificado de un motor térmico impulsado por energía solar[13]

Las temperaturas de las 4 ramas del ciclo son tomadas de la siguiente forma: T_1 es la temperatura del fluido de trabajo en la rama isotérmica en la altitud más baja donde el

fluido de trabajo absorbe radiación solar cada medio ciclo. Durante la segunda mitad del ciclo, el calor se rechaza a través de la radiación de cuerpo negro del fluido de trabajo a temperatura T_2 (altitud más alta de la celda) hasta el depósito frío a la temperatura T_{ex} (3K radiación de fondo del universo) [13,14].

El objetivo de este modelo es maximizar el trabajo por ciclo (potencia media) sujeto a ciertas restricciones termodinámicas. De la primera ley de la termodinámica para este modelo se tiene:

$$\Delta U = -W + \int_{t=0}^{t=t_c} q_s(t) - \sigma[T^4(t) - T_{ex}^4(t)]dt = 0 \quad (3.26)$$

Donde ΔU es el cambio de energía interna de la sustancia de trabajo, σ la constante de Stefan-Boltzman ($5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$), t_c el tiempo del ciclo y T la temperatura de la sustancia de trabajo.

El cambio de entropía esta sujeto a la restricción de endoreversibilidad.

$$\Delta S = \int_{t=0}^{t=t_c} \left(\frac{q_s(t) - \sigma[T^4(t) - T_{ex}^4(t)]}{T(t)} \right) dt = 0 \quad (3.27)$$

Las variables T , T_{ext} son funciones del tiempo

$$T(t) = \begin{cases} T_1 & 0 \leq t \leq t_c/2 \\ T_2 & t_c/2 \leq t \leq t_c \end{cases} \quad (3.28)$$

$$T_{ex}(t) = 3k \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (3.29)$$

La variable q_s es función del tiempo, I_{sc} es la constante solar promedio sobre la superficie de la Tierra ($1372,7W/m^2$), el promedio del albedo $\rho = 0,35$ y los valores promedio son:

$$q_s(t) = \begin{cases} I_{sc}(1 - \rho)/2 & 0 \leq t \leq t_c/2 \\ 0 & t_c/2 \leq t \leq t_c \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\bar{T} = (T_1 + T_2)/2 \quad (3.31)$$

$$\bar{T}^n = (T_1^n + T_2^n)/2 \quad (3.32)$$

$$\bar{q}_s = I_{sc}(1 - \rho)/4 = 223W/m^2 \quad (3.33)$$

De las ecuaciones (3.26), (3.28), (3.29) se obtiene la potencia media de los vientos

$$P = \frac{W}{t_0} = \bar{q}_s + \sigma \bar{T}_{ex}^4 - \sigma \bar{T}^4 \quad (3.34)$$

El modelo usando por GZ considera la siguiente aproximación $\bar{q}_s \gg \sigma T_{ex}^4$ se tiene

$$P = \bar{q}_s - \sigma \bar{T}^4 \quad (3.35)$$

De la condición de endorreversibilidad, las variables T T_{ex} y los valores promedios tenemos

$$\Delta S_{int} = \frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{\sigma}{2}(T_1^3 + T_2^3) \quad (3.36)$$

Para maximizar P sujeto a la condición de endorreversibilidad, se define la lagrangiana en términos del multiplicador de Lagrange λ y la restricción termodinámica dada por $L = P - \lambda \Delta S$ de modo que:

$$L = T^4(t) + \lambda[q_s(t)/T(t) - \sigma T^3(t)] \quad (3.37)$$

Encontrando el extremo de L , es decir resolviendo $\frac{\partial L(t)}{\partial T(t)} = 0$ para el cual se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$T_1^5(t) + 3\sigma\lambda T_1^4/4 - \lambda q_s(t)/4 = 0 \quad (3.38)$$

$$T_2^5(t) + 3\sigma\lambda T_2^4/4 = 0 \quad (3.39)$$

GZ encontraron los siguientes valores de temperatura para las capas más baja y más alta de la atmósfera de la Tierra

- $T_1 = 277K$
- $T_2 = 192K$
- $P_{max} = 17,1 \frac{W}{m^2}$

Estos valores no están alejados de la literatura $P_{max} = 7 \frac{W}{m^2}$, $T_1 = 290K$ (en la superficie) y $T_2 = 195K$ (entre 75 y 90km). Gordon y Zarmi afirman que su potencia media de los vientos debe tomarse como un límite superior.

3.1.5. Parámetro de noendorreversibilidad en G-Z

En recientes artículos el parámetro de noendorreversibilidad R ha sido utilizado para estudiar las máquinas térmicas de la TTF. Este parámetro ha sido introducido a partir de la desigualdad de Clausius (3.40), considerándolo como una medida de depuración en el régimen endoreversible [14]

$$\Delta S_{w1} + \Delta S_{w2} \leq 0 \quad (3.40)$$

ΔS_{w1} cambio en la isoterma caliente y ΔS_{w2} en la isoterma de compresión fría, en el caso endorreversible:

$$\Delta S_{w1} + \Delta S_{w2} = 0 \quad (3.41)$$

$$\Delta S_{w1} + \Delta S_{w2} < 0 \quad (3.42)$$

Así esta inequidad se convierte en igualdad en

$$\Delta S_{w1} + R\Delta S_{w2} = 0 \quad (3.43)$$

Donde R esta dado por:

$$R = \frac{\Delta S_{w1}}{\|\Delta S_{w2}\|} \quad (3.44)$$

Donde $R = \frac{\Delta S_{w1}}{\|\Delta S_{w2}\|}$ parámetro de no-endorreversibilidad se encuentra en el intervalo $0 \leq R \leq 1$, siendo $R=1$ el límite endorreversible [8].

El proceso anterior de celdas de convección de GZ se ve enriquecido usando el parámetro R. De este modo la ecuación (3.27) para el cambio de entropía viene dada por:

$$\Delta S = \int_{t=0}^{t=t_c} \left(\frac{q_s(t) - R\sigma[T^4(t) - T_{ex}^4(t)]}{T(t)} \right) dt = 0 \quad (3.45)$$

Y la condición de endorreversibilidad se expresa como:

$$\Delta S = \frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{R\sigma(T_1^3 + T_2^3)}{2} = 0 \quad (3.46)$$

Para maximizar P sujeto a la condición de endorreversibilidad mas el parámetro R la lagrangeana $L = P - \lambda\Delta S$ a ocupar esta dada de la siguiente forma

$$L = \frac{\sigma}{2}(T_1^4 + T_2^4) + \lambda \left[\frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{R\sigma(T_1^3 + T_2^3)}{2} \right] \quad (3.47)$$

Se resuelve $\frac{\partial L(t)}{\partial T(t)} = 0$ para encontrar los extremo del Lagrangiano, dando por consiguiente el siguiente sistema de ecuaciones

Para $\frac{\partial L_R}{\partial T_1} = 0$

$$T_1^5 - \frac{3}{4}\lambda RT_1^4 - \frac{\bar{q}_s}{2\sigma}\lambda = 0 \quad (3.48)$$

para $\frac{\partial L_R}{\partial T_2} = 0$

$$T_2 - \frac{3}{4}R\lambda = 0 \quad (3.49)$$

para $\frac{\partial L_R}{\partial \lambda} = 0$

$$\Delta S = \frac{I_{sc}(1 - \rho)}{4T_1} - \frac{R\sigma(T_1^3 + T_2^3)}{2} = 0 \quad (3.50)$$

Eliminando el parámetro λ se tiene

$$T_1^5 - T_2 T_1^4 - \frac{4\bar{q}_s}{6R\sigma_2} = 0 \quad (3.51)$$

Resolviendo el sistema numéricamente se encuentran que para un parámetro de noendoreversibilidad $R=0.953[14]$ para $\rho = 0,35$, $I_{sc} = 1372,7W/m^2$

- $T_1 = 280,562K$
- $T_2 = 194,293K$
- $P_{max} = 7 \frac{W}{m^2}$

Los valores obtenidos se encuentran muy cerca de los valores actuales en los límites propuestos para la atmósfera. $P \approx 7W/m^2$, $T_1 \approx 290$ y $T_2 \approx 195$ (a una altitud alrededor de 75-90km)

3.1.6. Factor de invernadero

Los cálculos de la temperatura superficial del planeta se ven modificadas al agregar el parámetro invernadero γ , como se observa en el cálculo básico del capítulo 1. Por lo que es necesario agregar el efecto invernadero a las ecuaciones propuestas por la termodinámica de tiempos finitos, para obtener las temperaturas de la capa más baja y superior de nuestra sustancia de trabajo (aire). Así las ecuaciones para la entropía y la energía interna se ven modificadas.

La ecuación (3.26) se convierte

$$\Delta U = -w + \int_{t=0}^{t=t_c} q_s(t) - \sigma(1 - \gamma)[T^4(t) - T_e x^4(t)] dt = 0 \quad (3.52)$$

La ecuación (3.27) queda expresada en términos del parámetro de noendoreversibilidad y el factor invernadero dando como resultado

$$\Delta S = \int_{t=0}^{t=t_c} \left(\frac{q_s(t) - R(1 - \gamma)\sigma[T^4(t) - T_{ex}^4(t)]}{T(t)} \right) dt = 0 \quad (3.53)$$

De la seccion de G-Z la potencia media de los vientos $P = \frac{w_c}{t}$ en la cual $\bar{q}_s \gg \sigma T_{ex}^4$ la expresi3n de potencia de salida para el caso de efecto invernadero queda de la forma:

$$P = \bar{q}_s - \frac{\sigma}{2}(1 - \gamma)[T_1^4 + T_2^4] \quad (3.54)$$

Las ecuaciones (3.53)(3.54) nos presentan un factor invernadero actuando sobre las dos capas de la atm3sfera con temperaturas T_1 y T_2 . Por otra lado de la hip3tesis de endoreversibilidad

$$\Delta S_{int} = \frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{\sigma}{2}(1 - \gamma)[T_1^3 + T_2^3] = 0 \quad (3.55)$$

Para maximizar P sujeto a la condici3n de endorreversibilidad, definimos la lagrangiana en t3rminos del multiplicador de Lagrange λ y la restricci3n termodin3mica dada por $L = P - \lambda \Delta S$ de modo que:

$$L = \bar{q}_s - \frac{\sigma}{2}(1 - \gamma)[T_1^4 + T_2^4] - \lambda \left\{ \frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{\sigma}{2}(1 - \gamma)[T_1^3 + T_2^3] \right\} \quad (3.56)$$

Donde λ es un multiplicador de Lagrange al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial L(t)}{\partial T(t)} = 0$ se obtiene un sistema de ecuaciones, que permite calcular los extremos de la potencia.

Para $\frac{\partial L(t)}{\partial T_1(t)} = 0$:

$$T_1^5 - \frac{3}{4}R\lambda T_1^4 - \frac{\bar{q}_s}{2\sigma(1 - \gamma)} = 0 \quad (3.57)$$

Para el caso $\frac{\partial L(t)}{\partial T_2(t)} = 0$:

$$T_2 = \frac{3R}{4}\lambda \quad (3.58)$$

Finalmente para $\frac{\partial L(t)}{\partial \lambda} = 0$ se tiene:

$$\frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{\sigma}{2}(1 - \gamma)[T_1^3 + T_2^3] = 0 \quad (3.59)$$

Eliminando λ y dando el valor de $q_s \approx 229W/m^2$ [15] se tiene dos ecuaciones cuya soluci3n num3rica proporciona las temperaturas superficiales de la capa m3s alta y m3s baja de la atm3sfera de la Tierra bajo un r3gimen de m3xima potencia en terminos del par3metro de no endoreversibilidad R, el albedo ρ , el efecto invernadero γ y la constante solar actual I_sc .

$$T_1^5 - T_2 T_1^4 - \frac{2q_s}{3R\sigma(1 - \gamma)} T_2 = 0 \quad (3.60)$$

$$T_1^4 + T_2^3 T_1 - \frac{2\bar{q}_s}{R\sigma(1-\gamma)} = 0 \quad (3.61)$$

Resolviendo numéricamente con los valores de albedo $\rho = 0,33$ y $\gamma = 0,3$, $R=1$ y $q_s \approx 229W/m^2$ [15]

$$T_1 = 305,387K$$

$$T_2 = 211,482K$$

$$P = 17,5W/m^2$$

Considerando el parámetro de endoreversibilidad $R=0.9533$, dando así los siguientes resultados

$$T_1 = 309,06K$$

$$T_2 = 214,026K$$

$$P = 7W/m^2$$

Como era de esperar los límites de temperatura aumentaron al incluir el factor de efecto invernadero. Sin embargo, al comparar los resultados de la sección anterior se observa que los cálculos de la temperatura están más alejados, esto se debe a que se ha considerado que el factor de invernadero actúa sobre los dos límites de temperatura del ciclo. Se hará un tratamiento como se muestra en la referencia [15] para ver el comportamiento de conversión de energía solar al agregar el efecto invernadero sobre las dos capas de la atmósfera T_1 y T_2

Tomando la eficiencia de Carnot [15] y de la ecuación (3.55)

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{RT_1} \quad (3.62)$$

Rescribiendo con (3.62) y (3.55) se obtienen los valores para T_1 y T_2 , valores que posteriormente serán sustituidos en la Potencia del ciclo (3.54) para obtener la eficiencia de conversión solar.

$$T_1^4 = \frac{2\bar{q}_s}{\sigma} \left(\frac{1}{R[1 + R^3(1-\eta)^3](1-\gamma)} \right) \quad (3.63)$$

Y

$$T_2^4 = \frac{2\bar{q}_s}{\sigma} \left(\frac{R^4(1-\eta)^4}{R[1 + R^3(1-\eta)^3](1-\gamma)} \right) \quad (3.64)$$

Sustituyendo T_1 (3.63) y T_2 (3.64) en la Potencia (3.54) obtenemos

$$P = \bar{q}_s \left(\frac{(R-1) + R^4(1-\eta)^3\eta}{R[1 + R^3(1-\eta)^3]} \right) \quad (3.65)$$

donde la eficiencia solar esta definida $w=P/\bar{q}_s$ [1,2,15]

$$w = \frac{(R-1) + R^4(1-\eta)^3\eta}{R[1 + R^3(1-\eta)^3]} \quad (3.66)$$

Para el caso endoreversible $R=1$ se reduce [15]

$$w = \frac{(1-\eta)^3\eta}{1 + (1-\eta)^3} \quad (3.67)$$

De (3.67) se puede obtener el máximo de eficiencia solar al resolver $dw/d\eta=0$.

$$(\eta-1)^2(\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2 - 8\eta + 2)$$

El unico resultado que satisface $0 < \eta < 1$ es $\eta = 0,3075$. Por lo que la eficiencia de conversión es $w = 0,0767$ igual que el reportado por De Vos [2,15].

Para un régimen a máxima potencia 7.67% de la energía solar \bar{q}_s puede ser convertida en energía, independientemente del planeta y del sistema solar, puesto que (3.67) no involucra los valores de albedo ρ y de efecto invernadero γ . Por otro lado (3.66) sugiere que w depende del parámetro R el cual abarca las perdidas internas del fluido de trabajo. Podemos aproximar la maximización de la potencia de salida del modelo de Gordon y Zarmi considerando que el factor $(1-\gamma)$ que corresponde al efecto de gases invernadero solo participa en la mitad baja del ciclo como sugieren Barranco y Angulo [12]. Por lo que, la condición de endoreversibilidad (3.46) tendra que reescribirse considerando el efecto invernadero en la parte baja de nuestro modelo.

$$\Delta S = \frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{R\sigma}{2} [(1-\gamma)T_1^3 + T_2^3] = 0 \quad (3.68)$$

Se obtiene así T_1 y T_2 considerando (3.62), (3.68)

$$T_1^4 = \frac{2\bar{q}_s}{\sigma} \left(\frac{1}{R[(1-\gamma) + R^3(1-\eta)^3]} \right) \quad (3.69)$$

$$T_2^4 = \frac{2\bar{q}_s}{\sigma} \left(\frac{R^3(1-\eta)^4}{[(1-\gamma) + R^3(1-\eta)^3]} \right) \quad (3.70)$$

La potencia para el modelos de G-Z esta dado por $P = \frac{w_c}{t}$, donde para $T_{ex} = 3K$ $\bar{q}_s \gg \sigma T_{ex}^4$ la expresión de potencia de salida con efecto invernadero en la parte baja es:

$$P = \bar{q}_s - \frac{\sigma R}{2} [(1-\gamma)T_1^4 + T_2^4] \quad (3.71)$$

donde la eficiencia solar para este caso acorde con lo publicado por Barranco y Angulo (2003)[15].

$$w = \frac{(1 - \gamma)(R - 1) + R^4(1 - \eta)^3[1 - R(1 - \eta)]}{R[(1 - \gamma) + R^3(1 - \eta)^3]} \quad (3.72)$$

Para el caso endoreversible $R=1$ [12]

$$w = \frac{\eta(1 - \eta)^3}{(1 - \gamma) + (1 - \eta)^3} \quad (3.73)$$

La ecuación (3.73) muestra que para un caso endoreversible, la eficiencia de energía solar depende del efecto invernadero donde para $\gamma = 0$ se reproduce la ecuación (3.66) dada por De Vos[1] y mencionada en el artículo de Barranco y Angulo[15]. Sin embargo, esto no representa un modelo realista de la atmósfera de los planetas.

Es necesario maximizar P (3.71) sujeto a la condición de endoreversibilidad y al efecto invernadero en la parte baja, por lo que se define la lagrangiana en términos del multiplicador de Lagrange λ y la restricción termodinámica mostrando el siguiente lagrangiano:

$$L = \bar{q}_s - \frac{\sigma}{2}[(1 - \gamma)T_1^4 + T_2^4] - \lambda \left\{ \frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{\sigma}{2}[(1 - \gamma)T_1^3 + T_2^3] \right\} \quad (3.74)$$

Al Resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial L(t)}{\partial T(t)} = 0$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

Para $\frac{\partial L(t)}{\partial T_1(t)} = 0$:

$$T_1^5 - \frac{3}{4}R\lambda T_1^4 - \frac{\bar{q}_s}{2\sigma(1 - \gamma)} = 0 \quad (3.75)$$

Para $\frac{\partial L(t)}{\partial T_2(t)} = 0$:

$$T_2 = \frac{3R}{4}\lambda \quad (3.76)$$

Para $\frac{\partial L(t)}{\partial \lambda} = 0$ se tiene:

$$\frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{\sigma}{2}[(1 - \gamma)T_1^3 + T_2^3] = 0 \quad (3.77)$$

De (3.75), (3.76), (3.77) eliminando el parámetro λ se obtiene

$$T_1^5 - T_2 T_1^4 - \frac{2\bar{q}_s}{3R\sigma(1 - \gamma)} T_2 = 0 \quad (3.78)$$

$$T_1^4 + \frac{1}{(1 - \gamma)} T_2^3 T_1 - \frac{2\bar{q}_s}{R\sigma(1 - \gamma)} = 0 \quad (3.79)$$

Resolviendo (3.78) y (3.79) numéricamente con los valores albedo $\rho = 0,33$ y $\gamma = 0,3$ y $R=1$.

$$T_1 = 299,3K$$

$$T_2 = 202,2K$$

3.1.7. Potencia eficiente

En la presente sección se trabaja con la función objetivo de la potencia eficiente, donde la Potencia eficiente del sistema se define como la multiplicación de la potencia (3.71) por la eficiencia de Carnot noendorreversible (3.62)

$$P_e = \bar{q}_s - q_s \frac{T_2}{RT_1} - \frac{\sigma}{2R} \left((1 - \gamma)RT_1^4 - RT_2^4 - (1 - \gamma)T_1^3T_2 - \frac{T_2^5}{T_1} \right) \quad (3.80)$$

Optimizando nuestra potencia eficiente P_e que esta restringida a nuestra condición de endorreversibilidad tenemos que la lagrangeana sera de la forma $L = P_e - \lambda \Delta S$

$$L = \bar{q}_s - \frac{q_s T_2}{RT_1} - \frac{\sigma}{2R} \left((1 - \gamma)RT_1^4 - RT_2^4 - (1 - \gamma)T_1^3T_2 - \frac{T_2^5}{T_1} \right) - \lambda \left[\frac{q_s}{T_1} - \frac{R\sigma}{2} (T_1^3 + T_2^3) \right] \quad (3.81)$$

Encontrando el extremo de L, es decir resolviendo $\frac{\partial L(t)}{\partial T(t)} = 0$ para el cual se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

Para $\frac{\partial L_R}{\partial T_1} = 0$

$$T_1^5 - \frac{3}{4}\lambda RT_1^4 - \frac{3}{4R}T_1^4T_2 - \frac{q_s T_2}{2\sigma R(1 - \gamma)} - \frac{T_2^5}{4R(1 - \gamma)} - \frac{\lambda q_s}{2(1 - \gamma)\sigma} = 0 \quad (3.82)$$

para $\frac{\partial L_R}{\partial T_2} = 0$

$$T_1^4 + \frac{4RT_2^3T_1}{1 - \gamma} - \frac{5}{1 - \gamma}T_2^4 + \frac{3R^2}{1 - \gamma}T_1 - \frac{2q_s}{\sigma(1 - \gamma)} = 0 \quad (3.83)$$

para $\frac{\partial L_R}{\partial \lambda} = 0$

$$T_1^4 + \frac{T_2^3T_1}{1 - \gamma} - \frac{2q_s}{\sigma R(1 - \gamma)} = 0 \quad (3.84)$$

Resolviendo numericamente con los valores actuales del albedo $\rho = 0,3$ $\gamma = 0,3$ y $R=1$.

$$T_1 = 324,261K$$

$$T_2 = 73,60K$$

$$P = 6,73W/m^2$$

La eficiencia solar para este sistema se deriva de las temperaturas T_1 (3.69) y T_2 (3.70), con P_e (3.80) así

$$w = \frac{(1 - \gamma)(R - 1)(1 - \eta) + R^3(1 - \eta)^4[1 - R(1 - \eta)]}{R[(1 - \gamma) + R^3(1 - \eta)^3]} \quad (3.85)$$

Para el caso endoreversible $R=1$

$$w = \frac{\eta(1 - \eta)^4}{(1 - \gamma) + (1 - \eta)^3} \quad (3.86)$$

De (3.86)se puede obtener el máximo de eficiencia solar al resolver $dw/d\eta=0$ y tomar $\gamma = 0$. El unico resultado que satisface $0 < \eta < 1$ es $\eta = 0,24418$. Por lo que la eficiencia de conversión es $w = 0,05565$.

La ecuación (3.86) nos muestra el caso endorreversible, en el régimen de potencia eficiente, la eficiencia de energía solar depende del efecto invernadero. Se muestra una comparativa de la eficiencia solar de los modelos anteriores.

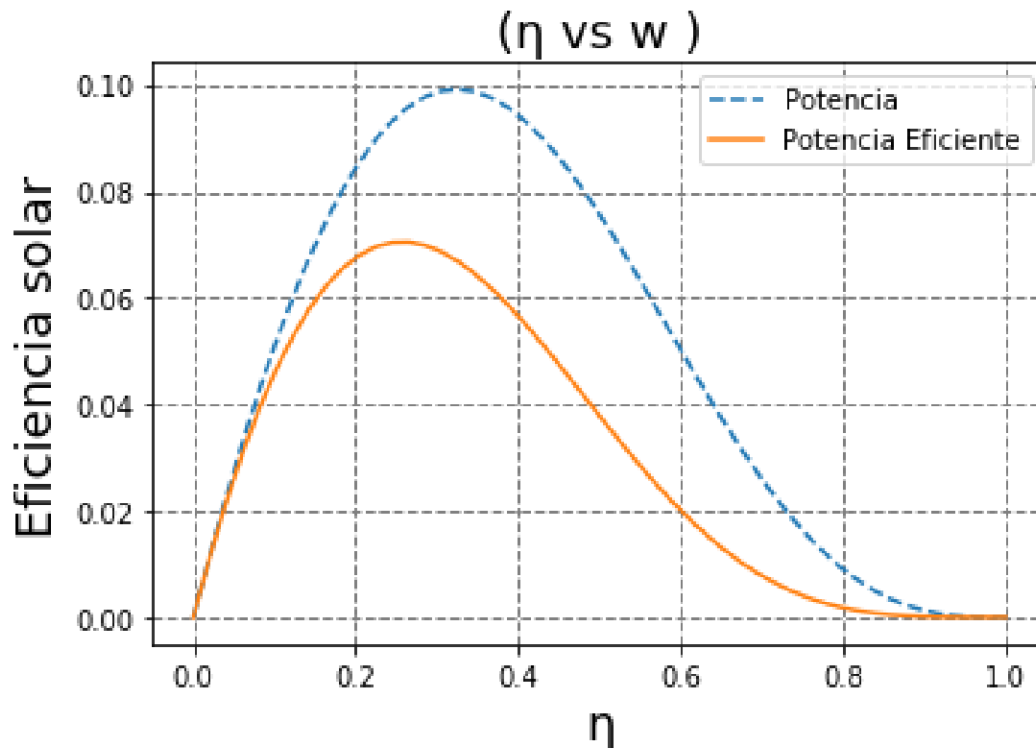


Figura 12.- Conversión de eficiencia solar para los regímenes de Potencia y Potencia eficiente

3.1.8. Criterio Ecológico

Debido a las propiedades de la función ecológica dadas en la sección 3.1.3 podemos aplicarla al modelo de Gordon y Zarmi maximizando la función E en lugar de P, tomando el T_2 de la ecuación 4.22 como un T_{ex} dado por el reservorio frío de temperatura.

$$E = P - T_{ex}\sigma \quad (3.87)$$

Primero calculemos ΔS_u el cambio total de entropía por ciclo.

$$\Delta S_u = \int_{t=0}^{t=t_c} \left(\frac{q_s(t) - \sigma[T^4(t) - T_{ex}^4(t)]}{T(t)} \right) dt = 0 \quad (3.88)$$

De las ecuaciones (4.28),(4.29) y (4.30) obtenemos:

$$\Delta S_u = \int_{t=0}^{t=\frac{t_0}{2}} \left[-\frac{q_s(t)}{T_1} + \sigma \left(T_1^3(t) - \frac{T_{ex}^4}{T_1} \right) \right] dt - \int_{t=\frac{t_0}{2}}^{t=t_0} \frac{\sigma(T_2^4 - T_{ex}^4)}{T_{ex}} dt \quad (3.89)$$

Entonces, la producción de entropía esta dada por

$$\Sigma = \frac{\Delta S_u}{t_0} \approx -\frac{q_s(t)}{T_1} + \frac{\sigma}{2} \left(T_1^3(t) - \frac{T_2^4}{T_{ex}} \right) \quad (3.90)$$

Nosotros tomamos la aproximación para $T_{ex} = 3K$

$$q_s \gg \sigma T_{ex}^4 \quad (223W/m^2 \gg 4,59 \times 10^6 W/m^2) \quad (3.91)$$

De la expresión de la potencia

$$P \approx \bar{q}_s - \sigma \bar{T}^4$$

Dada la ecuación (3.87), (3.90) podemos construir la función ecológica como

$$E = \bar{q}_s - \sigma \bar{T}^4 - T_{ex} \left[-\frac{\bar{q}_s}{T_1} + \frac{\sigma}{2} \left(T_1^3 - \frac{T_2^4}{T_{ex}} \right) \right] \quad (3.92)$$

De la condición de endorreversibilidad dada por la ecuación (4.36) tenemos

$$\Delta S_{int} = I_{sc}(1 - \rho)/(4T_1) - \sigma(T_1^3 + T_2^3)/2 = 0 \quad (3.93)$$

Se puede construir una nueva lagrangiana para calcular el extremo de E sujeta a la restricción de endorreversibilidad.

$$L = \bar{q}_s - \sigma \bar{T}^4 - T_{ex} \left[-\frac{q_s}{T_1} + \frac{\sigma}{2} \left(T_1^3 - \frac{T_2^4}{T_{ex}} \right) \right] - \lambda \left(\frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{\sigma}{2} (T_1^3 + T_2^3) \right) \quad (3.94)$$

Donde λ es un multiplicador de Lagrange y resolviendo con las ecuaciones de Euler-Lagrange para este caso $\frac{\partial L(t)}{\partial T(t)} = 0$ se tiene:

Tenemos así las siguientes ecuaciones

$$T_1^5 - \left(\frac{9}{4}R - (1 + R)T_2 \right) T_1^4 - \left(\frac{I_{sc}(1 - \rho)(1 + R)}{6R\sigma} \right) T_2 - \frac{3I_{sc}(1 - \rho)}{8\sigma} = 0 \quad (3.95)$$

Y

$$\frac{q_s}{T_1} - \frac{R\sigma(T_1^3 + T_2^3)}{2} = 0 \quad (3.96)$$

Usando el parámetro $R=1$ tenemos

$$T_1 = 294,058K$$

$$T_2 = 109,973K$$

$$P = 6,94W/m^2$$

De esta sección se observa la exactitud del modelo ecológico incluso si se usa un parámetro R igual a 1. Sin embargo esto no es un modelo realista ya que hace falta considerar el efecto invernadero en la parte baja de la atmósfera como se ha visto en casos anteriores cambiado significativamente con respecto al que se presenta para los casos de potencia máxima.

3.1.9. Función ecológica con factor invernadero

Maximizando la función E en lugar de P y usando el factor invernadero en la capa más baja de la atmósfera, ΔS_u el cambio total de entropía por ciclo.

$$\Delta S_u = \int_{t=0}^{t=t_c} \left(\frac{q_s(t) - \sigma(1 - \gamma)[T^4(t) - T_{ex}^4(t)]}{T(t)} \right) dt = 0 \quad (3.97)$$

De las ecuaciones (3.88),(3.89),(3.90) se obtiene:

$$\Delta S_u = \int_{t=0}^{t=\frac{t_0}{2}} \left[-\frac{q_s(t)}{T_1} + \sigma \left((1 - \gamma)T_1^3(t) - \frac{T_{ex}^4}{T_1} \right) \right] dt - \int_{t=\frac{t_0}{2}}^{t=t_0} \frac{\sigma(T_2^4 - T_{ex}^4)}{T_{ex}} dt$$

Por lo que, la producción de entropía esta dada por

$$\Sigma = \frac{\Delta S_u}{t_0} \approx -\frac{q_s(t)}{T_1} + \frac{\sigma}{2} \left((1 - \gamma)T_1^3(t) - \frac{T_2^4}{T_{ex}} \right)$$

Sustituyendo en la función ecológica se tiene

$$E = \bar{q}_s - \frac{\sigma}{2}[(1 - \gamma)T_1^4 - T_2^4] - T_{ex} \left[-\frac{q_s(t)}{T_1} + \frac{\sigma}{2} \left((1 - \gamma)T_1^3(t) - \frac{T_2^4}{T_{ex}} \right) \right] \quad (3.98)$$

Así la lagrangiana para calcular el extremo de E sujeta a la restricción de endorreversividad, al factor invernadero en la capa más baja es de la forma

$$L_E = \bar{q}_s - \frac{\sigma}{2}[(1 - \gamma)T_1^4 - T_2^4] + \frac{3\bar{q}_s}{T_1} - \frac{3\sigma R}{2}(1 - \gamma)T_1^3 - \frac{\sigma R}{2}T_2^4 - \lambda \left[\frac{\bar{q}_s}{T_1} - \frac{\sigma}{2}((1 - \gamma)T_1^3 + T_2^4) \right] \quad (3.99)$$

Donde λ es un multiplicador de Lagrange y resolviendo con las ecuaciones de Euler-Lagrange para este caso $\frac{\partial L(t)}{\partial T(t)} = 0$ se tiene:

$$T_1^5 - \left(\frac{9}{4}R - (1 + R)T_2 \right) T_1^4 - \left(\frac{I_{sc}(1 - \rho)(1 + R)}{6R\sigma(1 - \gamma)} \right) T_2 - \frac{3I_{sc}(1 - \rho)}{8\sigma(1 - \gamma)} = 0 \quad (3.100)$$

Y

$$T_1^4 + \frac{T_2^3 T_1}{(1 - \gamma)} - \frac{I_{sc}(1 - \rho)}{2R\sigma(1 - \gamma)} = 0 \quad (3.101)$$

Usando el parámetro $R=1$ tenemos

$$T_1 = 319,893K$$

$$T_2 = 118,923K$$

$$P = 9,5815W/m^2$$

Usando el parámetro R de la sección anterior $R=0.9982$ tenemos

$$T_1 = 328,264K$$

$$T_2 = 122,62K$$

$$P = 7,9W/m^2$$

3.1.10. Eficiencia solar modelo De Vos- P.van der Well

El sistema atmosférico de la tierra consiste de seis celdas de Hadley, donde para el modelo de conversión solar de De Vos y P. van der Well se considera una sola celda de Hadley dividiendo al planeta en dos partes: una capa esférica en el norte y una en el sur separadas por un paralelo con altitud φ , a causa de esto el intercambio de calor del planeta con el Sol consiste de 4 contribuciones:

Lo recibido por el sol en la capa caliente de la atmósfera $\Pi_1(1 - \rho)f_s^4$

Lo que la capa emite $\Sigma_1(1 - \rho)f_s^4$

Lo recibido por la capa fría $\Pi_2(1 - \rho)f_1^4$

Lo emitido por la capa fría $\Sigma_1(1 - \rho)f_2^4$

Por lo que los flujos de calor Q_1 y Q_2 son de la forma

$$Q_1 = \Pi_1(1 - \rho)f_s^4 - \Sigma_1(1 - \rho)f_1^4 \quad (3.102)$$

y

$$Q_2 = \Pi_2(1 - \rho)f_1^4 - \Sigma_2(1 - \rho)f_2^4 \quad (3.103)$$

Las cantidades Σ_1 y Σ_2 son el area superficial de las dos capas esfericas mientras Π_1 y Π_2 son las secciones transversales donde los rayos solares inciden, siendo así $\Sigma_1 = 2\pi R^2(1 - \cos\varphi)$, $\Sigma_2 = 2\pi R^2(1 - \cos\theta)$, $\Pi_1 = \pi R^2 \sin^2\theta$ ($\theta \leq \pi/2$), $\Pi_2 = \pi R^2 \cos^2\theta$ ($\theta \leq \pi/2$)

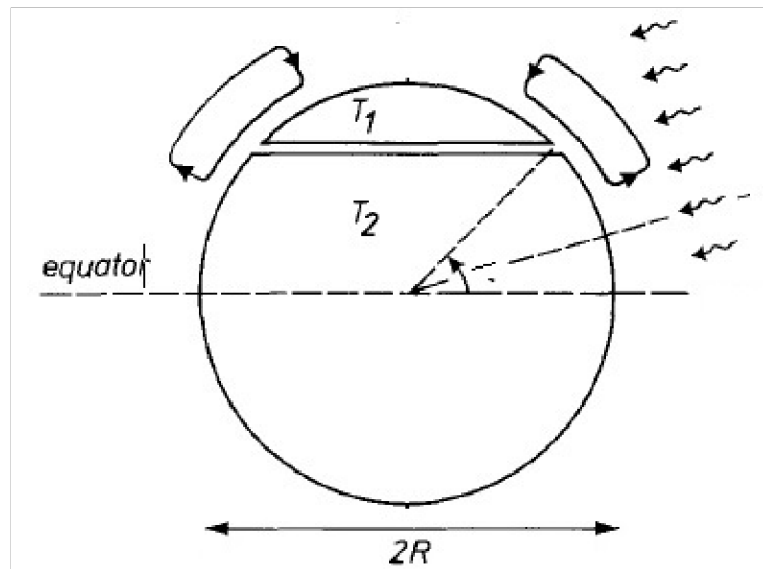


Figura 13.- Modelo de la atmósfera terrestre con una celda de Hadley [2]

Otra consideración dentro del modelo presente es que el trabajo producido por unidad de tiempo "W" que se degrada como calor en el mismo planeta por diversos medios o fricción.

La parte αW es disipada al hemisferio norte, la parte $(1-\alpha)W$ es disipada al hemisferio sur[2]. Siendo $0 \leq \alpha \leq 1$. La eficiencia de carnot esta ahora definida como:

$$W = \eta(Q_1 + \alpha W) \quad (3.104)$$

de donde se deduce

$$W = \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} Q_1 \quad (3.105)$$

De Vos and van der Wel rescribieron Q_1 y Q_2 dados en (3.102) y (3.103) como:

$$Q_1 = g_1(T_{s1}^4 - T_1^4) \quad (3.106)$$

y

$$Q_2 = g_2(T_{s2}^4 - T_2^4) \quad (3.107)$$

Donde g_1 y g_2 son las conductancias térmicas del modelo, $g_1 = \Sigma_1(1 - \gamma)\sigma$ y $g_2 = \Sigma_2(1 - \gamma)\sigma$, mientras que las temperaturas efectivas de la atmósfera T_{s1} y T_{s2} estan dadas por [2,15]

$$T_{s1} = \left(\frac{\Pi_1}{\Sigma_1} \frac{1 - \rho}{1 - \gamma} f \right)^{\frac{1}{4}} T_s \quad (3.108)$$

$$T_{s2} = \left(\frac{\Pi_2}{\Sigma_2} \frac{1 - \rho}{1 - \gamma} f \right)^{\frac{1}{4}} T_s \quad (3.109)$$

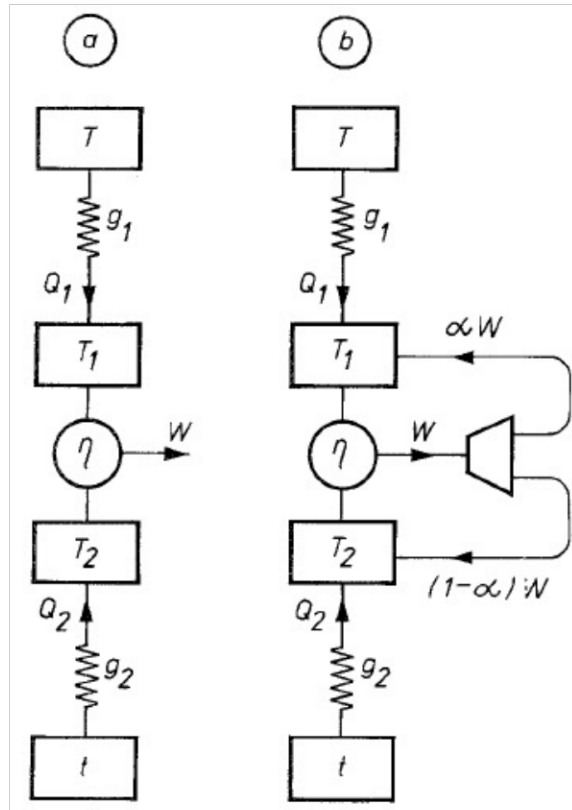


Figura 14.- Motores endoreversibles: a) Motor de Curzon-Ahlborn, b) motor planetario con disipación [2].

con las definiciones anteriores se puede definir la potencia de salida "W" [13]

$$W = \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \left[\Pi_1 - \frac{\pi R^2 \Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2 (1 - \eta)^4} \right] (1 - \rho) f \sigma T_s^4 \quad (3.110)$$

y la eficiencia de conversión

$$w = \frac{W}{\pi R^2 (1 - \rho) f \sigma T_s^4} = \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \left[\Pi_1 - \frac{\pi R^2 \Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2 (1 - \eta)^4} \right] \frac{1}{\pi R^2} \quad (3.111)$$

El máximo trabajo producido es para el caso $\alpha = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ presentado por De Vos y Flater en la referencia [2,13] se obtiene

$$w = \frac{(1 - \eta)^3 \eta}{1 + (1 - \eta)^4} \quad (3.112)$$

Maximizando la expresión se obtiene una eficiencia de $\eta = 0,307$ con una eficiencia solar $w = 8,3\%$. Sin embargo, este resultado no es del todo correcto puesto que la ecuación (3.111) es una función de α, η y θ donde para $\alpha = 1$, el máximo de w se obtiene al aplicar las derivadas $\partial w / \partial \theta = 0$ y $\partial w / \partial \eta = 0$ resultando $w = 9,64\%$ para $\theta = 77,8$ y $\eta = 0,291$ valores que se encuentran en los límites de la literatura [15]. El modelo presentado por De Vos y van der Well será utilizado para calcular la eficiencia solar en la función ecológica para ello se necesita determinar la producción de entropía por ciclo, donde la entropía interna junto con la hipótesis de endorreversibilidad [15]

$$\Delta S_{int} = \frac{Q_1 + \alpha W}{T_1} + \frac{(1 - \alpha)W - Q_2}{T_2} = 0 \quad (3.113)$$

Siendo así la entropía del universo ΔS_u

$$\Delta S_u = \frac{Q_2}{T_{s2}} - \frac{Q_1}{T_{s1}} \quad (3.114)$$

Por lo que la función ecológica $E = W - T_{s2}\Delta S_u$

$$E = \left[\frac{\eta}{1 - \alpha\eta} + \left(\frac{\Pi_2 \Sigma_1}{\Pi_1 \Sigma_2} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \left[\Pi_1 - \frac{\pi R^2 \Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2 (1 - \eta)^4} \right] (1 - \rho) f \sigma T_s^4 \quad (3.115)$$

Se define la eficiencia solar ecológica como

$$w_E = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\pi R^2 (1 - \rho) f \sigma T_s^4}$$

Con Z la cantidad de calor absorbido.

$$w_e = \left[\frac{\eta}{1 - \alpha\eta} + \left(\text{ctg}^2 \theta \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \left[\text{sen}^2 \theta - \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta + (1 + \cos \theta)(1 - \eta)^4} \right] \quad (3.116)$$

Esta función tiene un máximo para $\alpha = 1$, el máximo de E se obtiene al aplicar las derivadas $\partial w / \partial \theta = 0$ y $\partial w / \partial \eta = 0$ resultando $w_E \approx 0,02012$ ($W_E \approx 2\%$ para $\theta = 82,41$ y $\eta = 0,516$ resultados obtenidos en la referencia [15]).

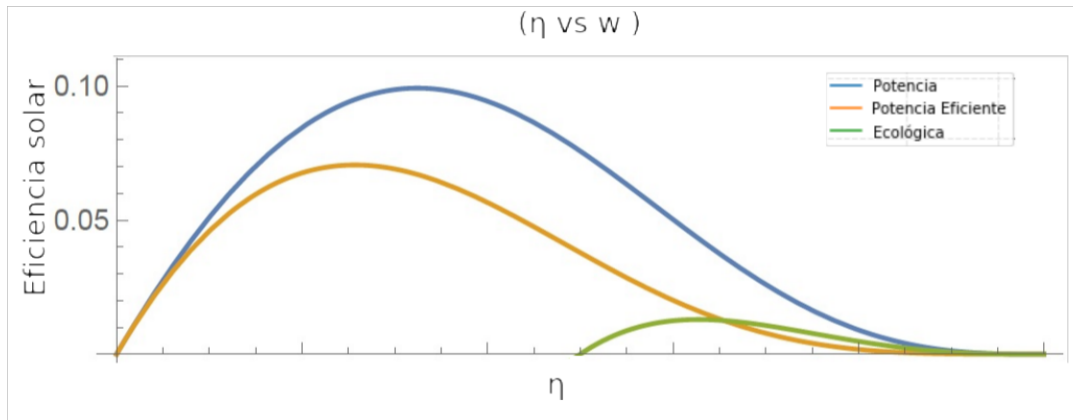


Figura 15.- Eficiencia solar vs eta de potencia en azul, potencia eficiente en naranja y ecológica.

La grafica número 15 nos permite observar que la eficiencia de conversión solar es mayor en la potencia, reduciendose de manera significativa en a potencia eficiente y ecológica.

Capítulo 4

Temperaturas futuras de la superficie terrestre

4.1. Paradoja del joven y débil Sol

La llamada paradoja del joven y débil Sol propuesta por Sagan y Mullen [20] presenta un inconveniente para el entendimiento de la etapas primigenias del planeta Tierra, puesto que la luminosidad del Sol hace aproximadamente 4.5 Gyr era alrededor de 70-80 por ciento del de su valor actuar [6,20,21]. Lo que representa una temperatura terrestre por debajo del punto de congelamiento del agua. Se sabe que la temperatura superficial del planeta esta manejada por la radiación solar que recibe y la interacción con los gases de la atmósfera. Suponiendo un equilibrio radiativo de cuerpo negro entre el joven Sol y la Tierra resulta una temperatura superficial $T=255K$, la suficientemente baja para mantener la mayoría de la superficie del planeta en un estado congelado hasta 1-2 Gyr[6]. Sin embargo, varios estudios, juntos con los registros sedimentarios, sugieren la existencia de una temperatura superficial promedio capaz de tener agua líquida durante casi toda la historia del planeta[6].

Para resolver tal paradoja, se toma la primera hipótesis de que la radiación solar se ha incrementado en el tiempo de vida del Sol, debido al incremento de densidad del núcleo solar[6]. La luminosidad del joven Sol ha sido estimada en un 30% menos que el valor presente que se recibe del Sol según lo dicho por Gough[5,6]. La ecuación se expresa de la siguiente forma:

$$I(t) = \left[1 + 0,4 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) \right]^{-1} I_{sc} \quad (4.1)$$

Donde I_{sc} es la presente luminosidad del sol y $t_0 \approx 4,56Gyrs$ que es la edad presente del Sol.

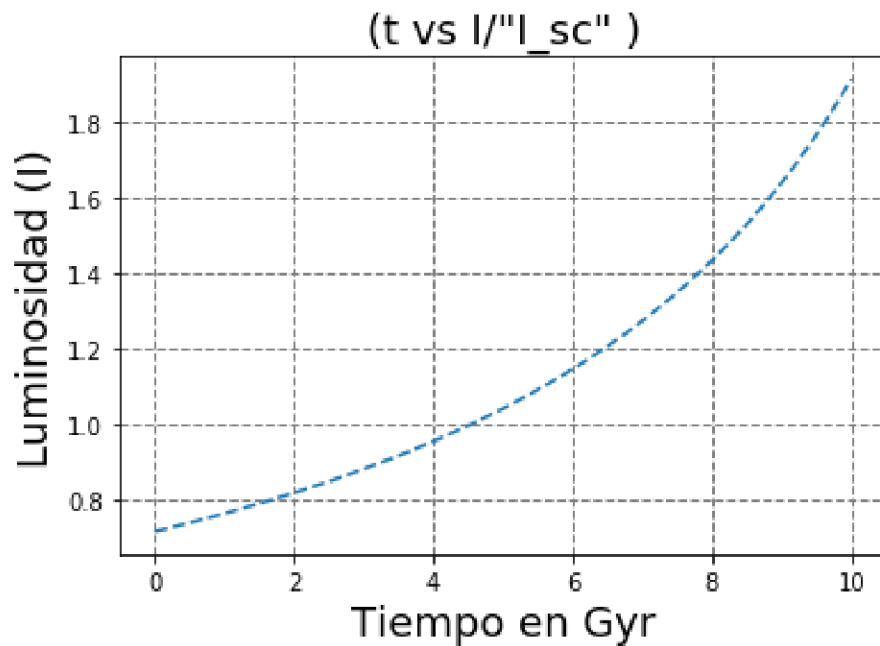


Figura 16.- Luminosidad del Sol como función del tiempo en Gyr.

La gráfica anterior nos muestra la evolución de la luminosidad del Sol, la cual va afectar la cantidad de radiación solar promedio $\bar{q}_s = I_{sc}(1 - \rho)/4$ que recibe el planeta. Para un tratamiento jifo a la TTF en los diferentes regímenes de operación se tienen que tomar en cuenta el albedo y el factor de invernadero tal como lo hicieron Barranco-Jiménez y Angulo-Brown en la referencia [6]. Los resultados para los regímenes de máxima potencia y máxima función ecológica obtenidos se muestran en las siguientes tablas 6, 7 y 8.

Para el caso de potencia máxima, tomando en cuenta la constante solar normalizada I/I_{sc} , el tiempo en Gyr hacia el pasado y la temperatura superficial del planeta[6], además de utilizar el modelo de GZ [13] con las modificaciones propuestas por Barranco-Jiménez y Angulo-Brown[6,15].

$$T_1^5 - T_2 T_1^4 - \frac{2\bar{q}_s}{3R\sigma(1-\gamma)} T_2 = 0.$$

$$T_1^4 + \frac{1}{(1-\gamma)} T_2^3 T_1 - \frac{\bar{q}_s}{R\sigma(1-\gamma)} = 0.$$

ρ	γ	I/I_{sc}	Tiempo (Gyr)	$T_1(K)$
0.17	0.06	0.7-0.8	4.5-3.6	273.1-283.04
0.25	0.15	0.72	4.47	273.7
0.30	0.20	0.74	4.04	273.1
0.35	0.30	0.72	4.47	273.8
0.4	0.35	0.73	4.255	273.1

Tabla 6.- Datos de temperaturas pasadas bajo régimen de potencia máxima con efecto invernadero[6]

Se presenta ahora el escenario donde la atmósfera trabaja bajo un régimen de máxima función ecológica (3.100), (3.101). Tomando en cuenta los valores de albedo, factor invernadero y luminosidad.

$$T_1^5 - \left(\frac{9}{4}R - (1+R)T_2\right)T_1^4 - \left(\frac{I_{sc}(1-\rho)(1+R)}{6R\sigma(1-\gamma)}\right)T_2 - \frac{3I_{sc}(1-\rho)}{8\sigma(1-\gamma)} = 0,$$

y

$$T_1^4 + \frac{T_2^3 T_1}{(1-\gamma)} - \frac{I_{sc}(1-\rho)}{2R\sigma(1-\gamma)} = 0$$

ρ	γ	I/I_{sc}	Tiempo (Gyr)	$T_1(K)$
0.17	0.06	0.7-0.8	4.5-3.6	293.6-303.6
0.40	0.1	0.73	4.253	273.0
0.45	0.15	0.76	3.631	273.4
0.50	0.25	0.74	4.045	273.1

Tabla 7.- Datos temperaturas pasadas bajo el régimen de máxima ecológica con efecto invernadero[6]

Para el caso de potencia eficiente máxima (3.82), (3.83), (3.84), mostradas a continuación

$$T_1^5 - \frac{3}{4}\lambda RT_1^4 - \frac{3}{4R}T_1^4 T_2 - \frac{q_s \bar{T}_2}{2\sigma R(1-\gamma)} - \frac{T_2^5}{4R(1-\gamma)} - \frac{\lambda q_s}{2(1-\gamma)\sigma} = 0,$$

$$T_1^4 + \frac{4RT_2^3 T_1}{1-\gamma} - \frac{5}{1-\gamma}T_2^4 + \frac{3R^2}{1-\gamma_2}T_1 - \frac{2q_s}{\sigma(1-\gamma)} = 0,$$

y

$$T_1^4 + \frac{T_2^3 T_1}{1 - \gamma} - \frac{2q}{\sigma R(1 - \gamma)} = 0.$$

Resolviendo numéricamente se tienen los siguientes valores

ρ	γ	I/I_{sc}	Tiempo (Gyr)	$T_1(K)$
0.18	0.06	0.72	4.5-3.6	293.702
0.22	0.15	0.72	4.44	297.059
0.25	0.20	0.74	4.04	300.872
0.30	0.30	0.72	4.47	303.182
0.33	0.35	0.73	4.255	306.768

Tabla 8.- Datos temperaturas pasadas bajo el régimen máxima potencia eficiente con efecto invernadero[6]

De las tablas anteriores se puede observar que los parámetros de albedo y efecto invernadero, combinados con la luminosidad del Sol, son capaces de producir temperaturas sobre el punto de congelación del agua. Debido a los buenos resultados obtenidos para la solución de la paradoja del joven y débil Sol, en la sección siguiente se analizarán los futuros escenarios del planeta Tierra, tomando como límite la temperatura de 373 K, ya que ésta es la temperatura de ebullición del agua.

4.2. Futuras temperaturas superficiales usando Termodinámica de tiempos finitos

Con la herramienta propuesta por Gordon y Zarmi se pueden calcular las temperaturas de la atmósfera de un periodo pasado tal como se hizo en la propuesta de solución de la paradoja del joven y débil Sol de Angulo-Brown y Barranco-Jiménez [6] donde se calculan las temperaturas de una época primigenia. En la tesis presente se trabajara de forma similar pero para una época futura de la atmósfera.

Con la sección 1 del presente trabajo se realizó una aproximación del albedo dependiente del efecto invernadero (1.11) de la forma:

$$\rho = a\gamma^2 + b\gamma + c \quad (1,11)$$

Con $a=0.072$, $b=0.4955$ y $c=0.1527$

4.2.1. Temperaturas futuras con el aumento del factor γ , ρ y I_{sc}

El modelo de celdas de convección atmosférica de GZ, es útil para obtener las temperaturas superficiales para las capas más alta y baja de la atmósfera, bajo diferentes funciones objetivo, en términos de la luminosidad recibida del Sol, el parámetro de noen-dorreversibilidad R , el efecto albedo ρ , el parámetro invernadero γ , la cantidad de energía solar por metro cuadrado que recibe el planeta anualmente q_s .

El efecto invernadero γ aumenta la temperatura superficial del planeta en las capas más baja y más alta de la atmósfera. De igual modo la relación (1.11) nos permite tener una relación del efecto albedo en función del efecto invernadero. Bajo las diferentes funciones objetivo con ayuda de la ecuación de Gough describimos la evolución futura de las temperaturas superficiales T_s calculando el tiempo necesario para que $T_s > 373K$, temperatura de evaporación del agua.

Para la Potencia maxima usando las ecuaciones (3.78), (3.79).

$$T_1^5 - T_2 T_1^4 - \frac{2\bar{q}_s}{3R\sigma(1-\gamma)} T_2 = 0,$$

$$T_1^4 + \frac{1}{(1-\gamma)} T_2^3 T_1 - \frac{\bar{2}q_s}{R\sigma(1-\gamma)} = 0.$$

Obtenemos diferentes gráficas de la evolución térmica del planeta debido a un aumento de la constante solar I_{sc} y el aumento del factor γ .

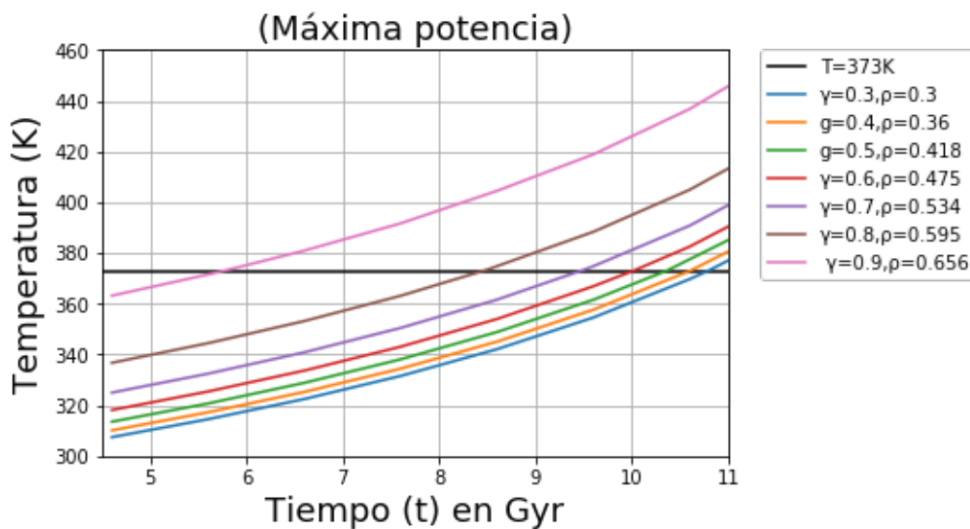


Figura 17.- Evolución de la temperatura en el tiempo a potencia máxima, se usa la ecuación (1.11) para el albedo.

Se puede observar que para la función objetivo de la potencia, el máximo periodo en el que la tierra obtiene temperaturas mayores a 373 K es en 10.8Gyr con un factor invernadero $\gamma = 0,3$, mientras que el menor periodo de tiempo para este marco de temperaturas sera en 5.8 Gyr con un factor gamma de $\gamma = 0,9$. Para valores superiores de $\gamma = 0,9$ incluso para luminosidad actual ($I_0 = 1372,7W/m^2$) se obtienen temperaturas superiores a 373K. Podemos observar tales datos en la tabla 9, en la cuarta columna se muestra el tiempo que se tiene que transcurrir para alcanzar $T_s = 373K$ en la capa más baja de la atmósfera.

ρ	γ	I/I_{sc}	Tiempo (Gyr)	$T_1 \approx 373(K)$
0.3	0.3	2.16	6.24	373
0.36	0.4	2.09	6.04	373
0.41	0.5	2	5.8	373
0.47	0.6	1.92	5.46	373
0.53	0.7	1.74	4.94	373
0.59	0.8	1.51	3.94	373
0.65	0.9	1.11	1.25	373

Tabla 9.- Tiempo necesario para alcanzar la temperatura superficial de $T_s = 373K$ en el régimen de potencia máxima, con diferentes valores de γ y ρ dados por la ecuación (1.11).

Para el caso de Potencia eficiente con la ecuaciones (3.82), (3.83), (3.84)

$$T_1^5 - \frac{3}{4}\lambda RT_1^4 - \frac{3}{4R}T_1^4 T_2 - \frac{q_s \bar{T}_2}{2\sigma R(1-\gamma)} - \frac{T_2^5}{4R(1-\gamma)} - \frac{\lambda q_s}{2(1-\gamma)\sigma} = 0,$$

$$T_1^4 + \frac{4RT_2^3 T_1}{1-\gamma} - \frac{5}{1-\gamma}T_2^4 + \frac{3R^2}{1-\gamma_2} T_1 - \frac{2q_s}{\sigma(1-\gamma)} = 0,$$

y

$$T_1^4 + \frac{T_2^3 T_1}{1-\gamma} - \frac{2q}{\sigma R(1-\gamma)} = 0,$$

junto con las ecuaciones de la luminosidad dadas por la ecuación de Gough (4.1), se obtiene el comportamiento de la temperatura a tiempos futuros.

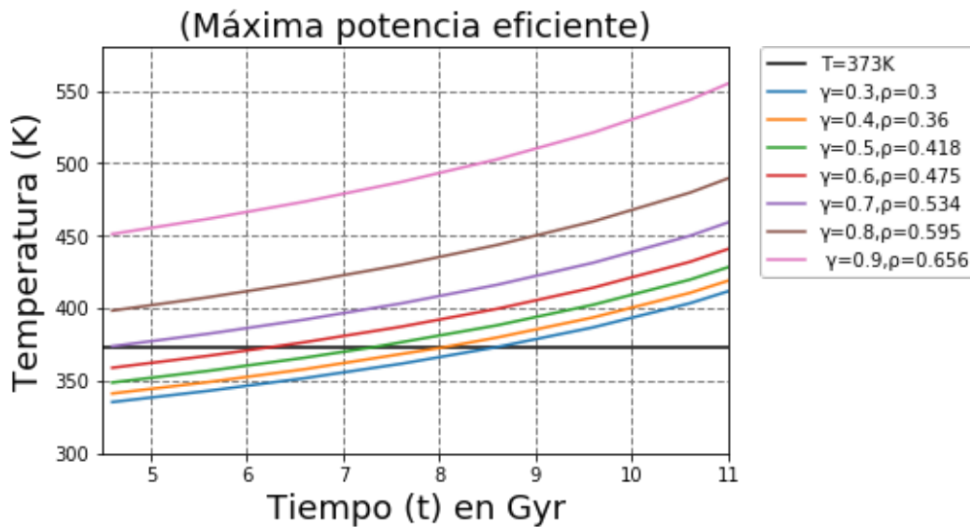


Figura 18.- Evolución de la temperatura en el tiempo en un régimen de máxima potencia eficiente, se usa la ecuación (1.11) para el albedo.

Para la función objetivo de la potencia eficiente, el máximo periodo en el que la Tierra obtiene temperaturas mayores a 373 K es en 8.36Gyr con $\gamma = 0,3$, mientras que el menor periodo de tiempo se da con un factor $\gamma = 0,6$ a un tiempo de de 5.7 Gyr , esto nos da una relación de 1.14 Gyr al futuro tomando en cuenta $t_0 \approx 4,56$. Para valores superiores a $\gamma = 0,6$ se obtienen temperaturas superiores a 373K.

ρ	γ	I/I_{sc}	Tiempo (Gyr)	$T_1(K) \approx 373$
0.3	0.3	1.52	4.02	373
0.36	0.4	1.42	3.47	373
0.41	0.5	1.30	2.74	373
0.47	0.6	1.16	1.66	373

Para el caso ecológico (3.100), (3.101) mostradas a continuación

$$T_1^5 - \left(\frac{9}{4}R - (1 + R)T_2\right)T_1^4 - \left(\frac{I_{sc}(1 - \rho)(1 + R)}{6R\sigma(1 - \gamma)}\right)T_2 - \frac{3I_{sc}(1 - \rho)}{8\sigma(1 - \gamma)} = 0,$$

y

$$T_1^4 + \frac{T_2^3 T_1}{(1 - \gamma)} - \frac{I_{sc}(1 - \rho)}{2R\sigma(1 - \gamma)} = 0.$$

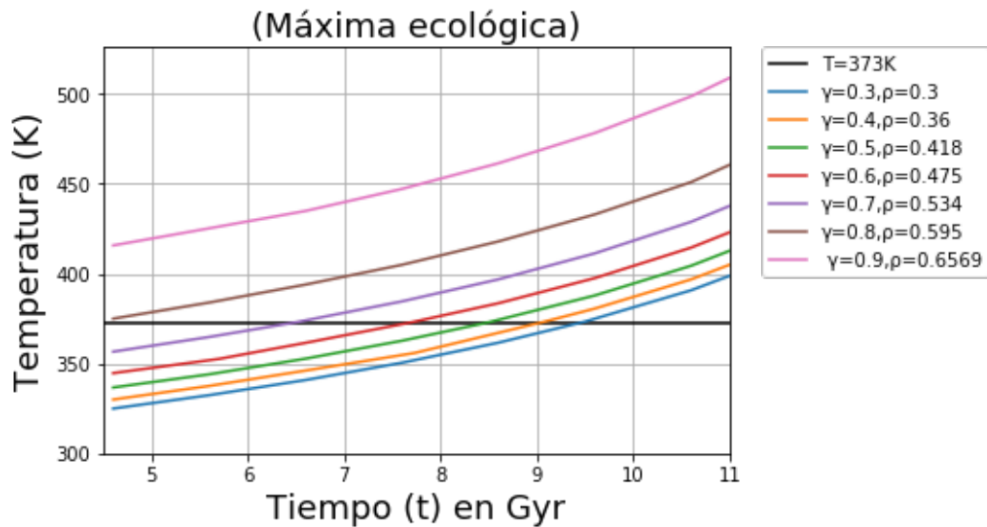


Figura 18.- Evolución de la temperatura en el tiempo en un régimen de máxima función ecológica, se usa la ecuación (1.11) para el albedo.

Presentando los datos en el régimen máxima función ecológica se tiene lo siguiente

ρ	γ	I/I_{sc}	Tiempo (Gyr)	$T_1 \approx 373(K)$
0.3	0.3	1.74	4.94	373
0.36	0.4	1.63	4.5	373
0.41	0.5	1.51	3.94	373
0.47	0.6	1.36	3.14	373
0.53	0.7	1.19	1.94	373

Al observar la evolución de las curvas de temperatura se observa que los escenarios más benignos para el futuro térmico de la Tierra están dados para el caso de máxima potencia, ya que los escenarios de máxima función ecológica y máxima potencia eficiente, alcanzan la temperatura de 373 K a valores de efecto invernadero menores que en el régimen de potencia máxima.

Se puede concluir que los valores que más afectan al cálculo de la temperatura superficial del planeta, en diferentes funciones objetivo de la TTF son el parámetro de gases invernadero, la constante solar y el parámetro de albedo.

Analicemos un caso ficticio donde el efecto albedo tiene un valor fijo alto $\rho = 0,6$, en

el cual la mayoría de la energía solar es reflejada hacia afuera del planeta. Las funciones objetivo a tratar serán los regímenes de máxima potencia, máxima potencia eficiente y máxima función ecológica, para las cuales se verá el comportamiento de las temperaturas T_1 para los parámetros $\gamma = 0,3$, $\gamma = 0,4$ y $\gamma = 0,5$ más altas. Buscamos el límite de 373K.

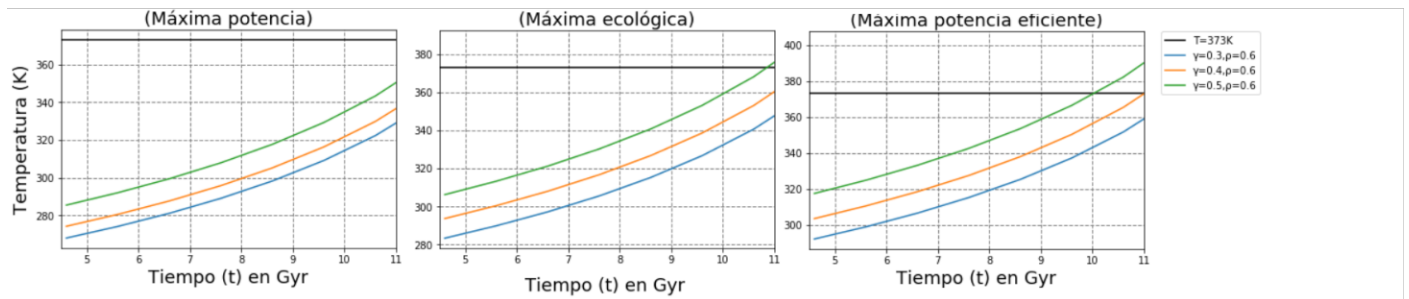


Figura 19.- Escenario con un alto valor de $\rho = 0,6$ para diferentes funciones objetivo.

Para alcanzar la temperatura de ebullición del agua, para los distintos escenarios es necesario altos valores del parámetro de invernadero γ ya que a mayor albedo, mayor disipación.

Conclusiones

El clima terrestre ocurre principalmente en la tróposfera, es decir, en la capa de la atmósfera más proxima a la superficie terrestre que va desde cero hasta aproximadamente 12 kilometros de altura (ver figura 2). La dinámica del aire en la tróposfera es un fenomeno muy complejo que obedece ecuaciones no lineales sensibles a las condiciones iniciales. Sin embargo, existen métodos aproximados para describir el comportamiento del aire tróposferico sin recurrir a la solución de ecuaciones diferenciales. En 1989, Gordon y Zarmi publicaron un artículo basado en la metodología en la termodinámica de tiempos finitos en el que modelan las celdas de convección del aire producidas por el sistema Sol-Tierravientos. El modelo de celda de convección es un ciclo térmico tipo Carnot que opera entre la temperatura alta de la superficie y la temperatura baja toma como la temperatura 3K de la radiación de fondo. Entre estos dos almacenes térmicos evoluciona las celdas de convección []. Evidentemente el baño frío de 3K es poco realista para la dinámica del aire de la tróposfera ya que esta temperatura se encuentra en el espacio exterior a 100 o más kilometros de la superficie terrestre. Posteriormente otros autores [] publicaron modificaciones del modelo de Gordon y Zarmi que resultaron en varios sentidos más realistas. En 2012 se publicó un artículo [] en el que utilizando el modelo de Gordon y Zarmi junto con la ecuación de Gough para la evolución temporal de la luminosidad del Sol, se estimaron las temperaturas de la superficie de la Tierra en tiempos ancestrales cercanos a la formación de la Tierra $\approx 4,5Gyr$. Estos cálculos estaban dirigidos a la búsqueda de escenarios factibles que explicaran la existencia de temperaturas propicias para el agua líquida ($T \geq 273K$), apesar de que un simple balance radiativo entre el Sol y la Tierra solo explicaba una T superficial de 255K a este fenomeno se le conoce como la paradoja del joven y débil Sol.

En la presente tesis hemos usado de nuevo este procedimiento (GZ + Gough) para estimar la evolución futura de las temperaturas superficiales de la Tierra con el fin de calcular de manera aproximada cuándo podría alcanzarse una temperatura superficial mayor o igual que la temperatura de ebullición del agua; es decir, $T = 373K$. Nuestros resultados muestran que el modelo de Gordon y Zarmi con $T_{ex} = 3K$ predice escenarios muy inciertos bajo el régimen de máxima potencia y esto provoca además que las comparaciones con

las optimizaciones de la función ecológica y de la potencia eficiente se vuelvan difíciles de interpretar. Creemos que tal como ocurrió con las modificaciones mencionadas del modelo GZ mencionadas antes, podremos mejorar los valores estimados para escenarios de temperaturas mayor o igual a 373K. Como es sabido, el Sol es una estrella que la astrofísica sugiere que hoy en día se encuentra a la mitad de su vida, lo cual significa que faltan aproximadamente 4.5 Gyr para que se convierta en gigante roja acabando necesariamente con cualquier vestigio de vida en el planeta Tierra. Hasta ahora nuestros cálculos para los distintos escenarios considerados nos llevan a resultados numéricos para alcanzar T de ebullición que están más allá de 4.5 Gyrs

Bibliografía

- [1] A de. Vos (1992) *A endorreversinle Thermodynamics of Solar Energy* (Oxford: Oxford University Press, Oxford 1992)
- [2] A de. Vos ans P. van der Wel (1993) *The effieciency of the conversion of solar energy into Wind energy by mean of Hadley Cells* , Theor. Appl. Climatol, 46, 193-202 (1993)
- [3] De Vos, A., Flater, G. (1991). *The maximum efficiency of the conversion of solar energy into wind energy*. American Journal of Physics, 59(8), 751–754. (1991)
- [4] Dilip Kondepudi and Ilya Prigogine (1998) *Modern Thermodynamics From heat engines to dissipative structures*(New York: John Wiley Sons,Inc.) (1998)
- [5] D.O. Gough, (1981), *Solar interior structure and luminosity variations*, Solar Physics, vol. 74 no.1, pp.21-34,(1981).
- [6] F.Angulo-Brown, Marco A. Rosales and M.A. Barranco-Jiménez (2012) *The faint young Sun Paradox: A simplified Thermodynamic Approach*. Advances in Astronomy, volume 2012, Article ID 478957 (2012)
- [7] F.L. Curzon and B. Ahlborn, am. J. Phys. 43 (1975) 22.
- [8] Garcia Ocampo Armando. (2015). Optimización termoeconómica de un modelo de máquina química endorreversible (tesis de maestria). Instituto Politecnico Nacional,(2015).
- [9] Guido Visconti(2001) *Fundamentals of physics and chemistry of the Atmosphere*(Springer)(2001)
- [10] L.A. Arias-Hernández and F. Angulos-Brown.(1997) *A general property of endoreversible thermal engines*. J. Phys. 81(7) (1997) 22.
- [11] Leopoldo García- Colín Scherer *Introducción a la termodinámica clásica*(Trillas) (1976)

-
- [12] Mark W. Zemansky and Richard H. Dittman *Calor y Termodinámica*(McGraw-Hill) 6ta. edición, (1961)
- [13] M. Gordon and Zarmi,(1989), *Wind energy as a solar-driven heat engine: a thermodynamic approach*, American Journal of Physics, vol 57, p.p 995-998, (1989)
- [14] M.A. Barranco Jiménez and F. Angulos-Brown. (1996) *A nonendoreversible model for wind energy as a solar-driven heat engine*. J. Appl. Phys. 80(9) (1996) 22.
- [15] M.A. Barranco Jiménez and F. Angulos-Brown.(2003) *A simple model on the influence of the greenhouse effect on efficiency of solar-to-wind energy conversion*, Il nuovo Cimento Vol. 26 C.N. 5, September-October (2003).
- [16] M.A. Barranco-Jiménez, J.C. Chimal-Eguía and F.Angulo-Brown. (2006) *The Gordon and Zarmi model for convective atmospheric cell under the ecological criterion applied to the planets of solar system*, Revista mexicana de física 52(3) 205-212 (2006)
- [17] Norma Sánchez F.Angulo-Brown and M.A. Barranco-Jiménez. (2007) *Posibles futuros escenarios de la temperatura superficial de la Tierra con la evolución de la constante solar*, XXII Congreso Nacional de termodinámica (2007).
- [18] Figura 1 y figura 2 https://es.wikipedia.org/wiki/Ciclo_de_Carnot
- [19] <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html>
- [20] C. Sagan and G.Mullen, (1972) *Earth and Mars: evolution of atmospheres and surface temperatures*, Science, vol. 177, no.4043, pp.52-56,(1972)
- [21] J. F. Kasting and D. H. Grinspoon, (1991) *The faint young Sun problem in The Sun in Time*, pp.447-462, The university of Arizona, Tucson, Ariz, USA, (1991).
- [22] F. Angulo- Brown,L.A. Arias-Hernandez and M. Santillan, (2002) *On some connections between first order irreversible thermodynamics and finite-time thermodynamics* Revista mexicana de física, 48 suplemento 1, 182-192, (2002)