



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

---

---

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**“MÉTODO DE FACTORIZACIÓN DE GREEN EN  
MECÁNICA CUÁNTICA”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS  
FISICOMATEMÁTICAS**

PRESENTA

**ENRIQUE CHOREÑO ORTIZ**

DIRECTORES DE TESIS

**VÍCTOR DAVID GRANADOS GARCÍA**

**ROBERTO DANIEL MOTA ESTEVES**



CDMX, Junio 2016

# RESUMEN

## MÉTODO DE FACTORIZACIÓN DE GREEN EN MECÁNICA CUÁNTICA

Se da una introducción a la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY-QM) y al método con el cual en SUSY-QM se factoriza un hamiltoniano en una dimensión para construir un hamiltoniano supersimétrico. Posteriormente se desarrolla la jerarquía de hamiltonianos de Sukumar de los problemas cuánticos del oscilador armónico y pozo de potencial infinito unidimensionales.

Se muestra el método de factorización de Green y se aplica a los problemas cuánticos del oscilador armónico unidimensional y pozo de potencial infinito unidimensional. Además, se hace una comparación entre el método de factorización de Green y la forma en la que se construye la jerarquía de Sukumar.

Se obtienen las soluciones cuánticas del oscilador armónico 3-D resolviendo de forma directa la ecuación radial de Schrödinger. Como una forma alternativa se encuentran las funciones de onda y el espectro de energía para este problema usando los operadores de creación y aniquilación de Dirac. También se muestra la factorización de la ecuación radial del oscilador armónico 3-D mediante el método de Green, usando los operadores de la factorización se encuentran las eigenfunciones

Se obtiene las soluciones cuánticas del átomo de hidrógeno 3-D resolviendo de forma directa la ecuación radial de Schrödinger. Se factoriza la ecuación radial mediante el método de Green y se obtienen las eigenfunciones mediante los operadores de la factorización

Se muestra la forma en la que actúan los operadores de la factorización de Green sobre las funciones de onda del oscilador armónico 3-D y átomo hidrógeno 3-D. Se obtienen los operadores que factorizan estos potenciales a través del método de Infeld y Hull, y se comparan los operadores obtenidos con los operadores del método de Green. Se muestra que los operadores del método de factorización de Green se reducen a los operadores del método de factorización de Infeld y Hull para los potenciales del oscilador armónico 3-D y átomo de hidrógeno 3-D cuando se deja a un lado el índice  $j$  que se relaciona con la jerarquía de Sukumar.

# ABSTRACT

## FACTORIZATION METHOD GREEN IN QUANTUM MECHANICS

An introduction is given to the supersymmetry quantum mechanics (SUSY-QM) and the method with which in SUSY-QM a Hamiltonian is factored in one dimension to construct a supersymmetry Hamiltonian. Later the hierarchy of Hamiltonians Sukumar quantum harmonic oscillator problems and one-dimensional infinite potential well is developed.

The factorization method shown Green and applies to one-dimensional quantum harmonic oscillator problems and dimensional infinite potential well. Furthermore, a comparison between the method of Green and factorization way the hierarchy is built Sukumar done.

Solutions quantum harmonic oscillator 3-D directly solving the radial Schrödinger equation are obtained. As an alternative form are the wave functions and energy spectrum for this problem using the creation and annihilation operators of Dirac. the factorization of the radial equation of the harmonic oscillator 3-D is also shown by the method of Green, using the factorization operators are eigenfunctions

Quantum solutions hydrogen atom 3-D directly solving the radial Schrödinger equation is obtained. the radial equation is factorized by the method of Green and eigenfunctions are obtained by operators factorization

As operators acting factoring Green on the wave functions of the harmonic oscillator 3-D and 3-D hydrogen atom shown. operators factored these potential through Infeld and Hull method are obtained, and the obtained operators operators Green method are compared. It is shown that operators factorization method of Green are reduced to operators factorization method of Infeld and Hull for potential harmonic oscillator 3-D and hydrogen atom 3-D when left aside the index  $j$  it relates to the hierarchy of Sukumar.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero dar gracias a mis padres y hermano por todo el amor y comprensión que me han dado. Sobre todo quiero darles las gracias por creer en mí, sin ellos no sería la persona que soy.

A los amigos hechos durante todos estos años, especialmente quiero agradecer aquellos con los que tuve la oportunidad que vivir y conocer un poco mejor,

Quiero agradecer también a T. Syned la persona quien marcó un antes y un después en mi vida, quiero agradecerle por enseñarme con el ejemplo lo que es vivir con pasión, trabajar duro y siempre dejar un poco de mí en todo lo que hago.

A mis directores de tesis, el Dr. Víctor David Granados García y el Dr. Roberto Daniel Mota Esteves por todo el apoyo y confianza, además del tiempo empleado en mí para sacar adelante éste trabajo.

Por último, agradecer al Programa Institucional de Formación de Investigadores (PIFI), la Beca Institucional del IPN y la Beca Conacyt, por el apoyo económico otorgado para la realización de la tesis.

# Dedicatorias

A mi padre Evaristo Choreño Bravo  
A mi madre Marina Ortiz Ramírez  
Y  
A mi hermano Gustavo Choreño Ortiz

# ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	VII
CAPITULO I .....	1
Oscilador armónico unidimensional y pozo de potencial unidimensional infinito supersimétricos (SUSY-QM)	
1.1 Mecánica cuántica supersimétrica .....	1
1.2 Factorización de un hamiltoniano y superpotenciales en una dimensión. ....	3
1.3 Potenciales asociados y degeneración del espectro de energía. ....	4
1.4 Jerarquía de hamiltonianos en SUSY-QM. ....	7
1.5 Factorización supersimétrica y jerarquía del oscilador armónico unidimensional. ....	9
1.6 Factorización supersimétrica y jerarquía del pozo de potencial infinito unidimensional. ....	13
CAPITULO II .....	18
Método de factorización de Green	
2.1 Método de Factorización de Green. ....	18
2.2 Oscilador armónico unidimensional. ....	20
2.3 Pozo de potencial infinito unidimensional. ....	22
2.4 Método de factorización de Green y la mecánica cuántica supersimétrica. ....	27
CAPITULO III .....	31
Oscilador armónico 3-D	
3.1 Forma directa. ....	31
3.1.1 Polinomios asociados de Laguerre. ....	35
3.2 Operadores de creación y aniquilación de Dirac. ....	40

3.3	Factorización de Green. ....	49
CAPITULO IV. ....		<b>55</b>
Átomo de Hidrógeno 3-D		
4.1	Forma directa. ....	55
4.2	Factorización de Green. ....	59
CAPITULO V. ....		<b>66</b>
Analogías entre los operadores del Método de Factorización de Green y los operadores del método de Factorización de Infeld y Hull para los potenciales del Oscilador Armónico y Átomo de Hidrógeno		
5.1	Operadores $a_j^{(l)+}$ del oscilador armónico 3-D y átomo de hidrógeno. ....	66
5.2	Método de factorización de Infeld y Hull. ....	74
5.3	Analogías entre los operadores del método de Green y los operadores del método de IH. ....	78
5.3.1	Oscilador armónico 3-D. ....	78
5.3.2	Átomo de hidrógeno 3-D. ....	81
CONCLUSIONES. ....		<b>84</b>
LISTAS DE TABLAS Y FIGURAS. ....		<b>86</b>
REFERENCIAS. ....		<b>88</b>

## INTRODUCCIÓN

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en la presencia de un potencial  $V$  se puede escribir como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi,$$

donde  $\psi$  es la función de onda,  $m$  la masa de la partícula y  $E$  la energía. Como es bien conocido, la ecuación Schrödinger independiente del tiempo puede resolverse de forma exacta solo para algunos potenciales.

En el presente trabajo se consideran los potenciales solubles del átomo de hidrógeno 3-D y oscilador armónico 3-D.

El potencial del átomo de hidrógeno es básico en los libros de texto de mecánica cuántica. Debido a sus características al tener un núcleo pesado formado por un protón y un electrón ligero orbitando alrededor de éste el núcleo básicamente se considera en reposo, lo cual hace que sea más fácil solucionar para la mecánica cuántica. El oscilador armónico 3-D tiene varias aplicaciones importantes, entre ellas, su empleo en calcular propiedades termodinámicas en sólidos y sus aplicaciones en la química.

La ecuación Schrödinger representa un problema de eigenvalores. Existe un método operacional para encontrar las eigenfunciones y eigenvalores de la ecuación Schrödinger, este método se conoce como método de factorización. Este método fue propuesto por Schrödinger [1] y Dirac [2], el primero para resolver algebraicamente el problema del átomo de hidrógeno.

Posteriormente este método fue desarrollado más afondo para una amplia gama de diversos potenciales solubles por Infeld y Hull [3], y más tarde H.S. Green [4] retomaría el método. El método de factorización consiste en separar la ecuación diferencial de segundo orden en dos ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir, el método de factorización busca escribir al operador hamiltoniano  $H$  como un producto de dos operadores lineales formados por un operador de derivada de primer orden, donde estos operadores son el adjunto uno del otro. Una vez que la ecuación de Schrödinger ha sido factorizada se pueden utilizar los operadores de la factorización para encontrar las soluciones a esta. A su vez, el conjunto de eigenfunciones normalizadas se generan mediante la aplicación sucesiva de los operadores sobre las soluciones exactas de la ecuación diferencial de primer orden obtenidas de la factorización. Algunas características importantes de este método son:

- Se aplica principalmente para espectros discretos de energía.
- Es posible encontrar simetrías ocultas del sistema a través de construir una adecuada algebra de Lie gracias a los operadores de la factorización.

Como se ha mencionado los métodos de factorización son una herramienta útil para resolver problemas en la mecánica cuántica. Sin embargo, este método no

se limita solo a problemas mecánico cuánticos sino a problemas que involucran ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones del método.

En un intento de crear una teoría de campos en 1981 Witten [5,6] introdujo un modelo mecánico cuántico llamado “Mecánica cuántica supersimétrica” o por sus siglas en inglés SUSY-QM. En este modelo, desarrollado para la física de partículas se postula una simetría entre fermiones (espín semi entero) y bosones (espín entero), donde a cada bosón y fermión tiene una “super-pareja” con la misma masa. Es decir, el modelo crea una teoría de campos cuánticos que contenga multipletes de bosones y fermiones. En teoría de campos, la supersimetría es una simetría que genera transformaciones entre bosones y fermiones. A diferencia de los generadores de otras simetrías cuya álgebra implica conmutadores, los generadores de las transformaciones en la supersimetría son cargas cuya álgebra implica anticonmutadores [7,8]. La supersimetría ha planteado la posibilidad de proporcionar un marco para una descripción unificada de bosones y fermiones que son combinados en multipletes.

En esta tesis se da el formalismo básico de SUSY-QM y se muestra la aplicación del formalismo sobre algunos problemas básicos en la mecánica cuántica, como son, el oscilador armónico unidimensional y pozo de potencial infinito unidimensional.

La supersimetría es un concepto matemático que surgió de argumentos teóricos y dio lugar a una extensión del Modelo Estándar como un intento de unificar las fuerzas de la naturaleza. Cuando la supersimetría se introdujo en la mecánica cuántica (SUSY-QM) los físicos comenzaron a darse cuenta que este campo era interesante por sí mismo y no sólo como un campo de pruebas para la teoría cuántica de campos. Se hizo evidente que SUSY-QM da una visión más profunda en el método de factorización introducido por Infeld y Hull [3] y a la solución de los potenciales. Además conduce al descubrimiento de nuevos potenciales que tienen solución.

La SUSY-QM para sistemas en una dimensión muestra que en mecánica cuántica para cada hamiltoniano  $H_1$  unidimensional puede tener un socio  $H_2$  tal que  $H_1$  y  $H_2$  juntos pueden ser vistos como las componentes de un hamiltoniano supersimétrico  $H$ , para esto el hamiltoniano  $H_1$  tiene que ser factorizado, y a partir de los operadores de la factorización de  $H_1$  se construye el hamiltoniano  $H_2$ , estos hamiltonianos son isoenergéticos y sus funciones de onda se pueden obtener a partir de los operadores de la factorización. El término “hamiltoniano supersimétrico” se refiere a que el hamiltoniano se define en termino de cargas que obedecen la misma algebra que los generadores de supersimetría en teoría de campos.

La supersimetría nos permite crear hamiltonianos asociados con el mismo espectro de energías. De este modo, para un hamiltoniano  $H_1$  se puede construir su hamiltoniano asociado  $H_2$ . Similarmente se puede construir el hamiltoniano  $H_3$  asociado a  $H_2$  y posteriormente un hamiltoniano  $H_4$  asociado a  $H_3$ . Al repetir esto obtenemos una cadena de hamiltonianos asociados con casi el mismo espectro, esto se debe a que siempre se pierde el estado

fundamental cuando se construye el hamiltoniano asociado, el espectro se reduce en un nivel cada vez que se construye hamiltoniano asociado del asociado. A esta cadena de hamiltonianos asociado se le conoce como jerarquía [9].

En este trabajo se hará una comparación entre el método de factorización de Green y la jerarquía. También se comparan los operadores de la factorización de Green y del método de factorización de Infeld y Hull para los potenciales del átomo de hidrógeno 3-D y oscilador armónico 3-D.

Infeld y Hull [2,10] desarrollaron un método para resolver problemas de eigenvalores en la mecánica cuántica, que es aplicable a todos los problemas importantes que se pueden resolver de forma exacta. Este método se aplica a problemas cuánticos en más de una dimensión, siempre y cuando la ecuación diferencial se pueda escribir en una sola variable. En el método de IH se pone en juego la dependencia explícita de un parámetro en el potencial, el cual aparece también en las eigenfunciones. Una característica importante del método es la construcción de operadores que al aplicarse a los estados dependientes del parámetro, actúan como operadores de ascenso y descenso en dicho parámetro.



# Capítulo 1

## OSCILADOR ARMÓNICO UNIDIMENSIONAL Y POZO DE POTENCIAL UNIDIMENSIONAL INFINITO SUPERSIMÉTRICOS (SUSY-QM)

En este capítulo daremos una breve introducción a la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY-QM) y a la jerarquía de hamiltonianos. Se encuentran los operadores de la factorización supersimétrica para el oscilador armónico unidimensional y el pozo de potencial infinito unidimensional. Además se encuentran los primeros hamiltonianos de la jerarquía junto con sus funciones de onda y espectros de energía.

### 1.1 Mecánica cuántica supersimétrica (SUSY-QM).

La mecánica cuántica supersimétrica estudia los sistemas mecánico-cuántico cuyo hamiltoniano  $\mathbf{H}$  es construido por los operadores  $Q$  y  $Q^+$  [7, 8], tales que:

$$\mathbf{H} = \{Q, Q^+\} = QQ^+ + Q^+Q,$$

donde los operadores  $Q$  y  $Q^+$  son tales que cumplen las relaciones de conmutación y anticonmutación

$$\{Q, Q\} = 0, \quad \{Q^+Q^+\} = 0, \quad [Q, \mathbf{H}] = 0.$$

El Hamiltoniano  $\mathbf{H}$  está construido por coordenadas que se cuantizan por conmutadores y coordenadas que se cuantizan por anticonmutadores, las cuales están relacionadas por transformaciones unitarias.

La forma explícita de los operadores  $Q$  y  $Q^+$  esta dada por:

$$Q = (P + i\phi(x))\psi^+, \quad Q^+ = (P - i\phi(x))\psi,$$

en donde  $x$  y  $P$  son los grados de libertad de Bose, que obedecen la regla de conmutación:

$$[x, P] = i, \quad (\hbar = \mu = 1)$$

mientras que  $\psi$  y  $\psi^+$  son los grados de libertad de Fermi, que obedecen las reglas de anticonmutación:

$$\{\psi^+ \psi\} = 1, \quad \{\psi^+, \psi^+\} = \{\psi, \psi\} = 0.$$

Con lo anterior se tiene que el Hamiltoniano supersimétrico  $\mathbf{H}$  toma la forma

$$\mathbf{H} = (P^2 + \phi(x)^2) - [\psi^+ \psi] \phi(x)'$$

Usando la representación matricial (2x2)

$$\psi^+ = \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\psi^+, \psi] = -\sigma_z,$$

se encuentra que

$$\mathbf{H} = (P^2 + \phi(x)^2) + \sigma_z \phi(x)'. \quad (1.1a)$$

Por otro parte, en la construcción de un hamiltoniano supersimétrico  $\mathbf{H}$  se introduce un método de factorización del operador hamiltoniano en una dimensión, donde a partir de los operadores de factorización se construyen las cargas  $Q$  y  $Q^+$ .

## 1.2 Factorización de un hamiltoniano y superpotenciales en una dimensión.

Consideremos un sistema cuántico en una dimensión descrito por un Hamiltoniano  $H_1$  independiente del tiempo

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x),$$

del cual fácilmente se puede conocer la relación que existe entre la función de onda del estado base y el potencial. En lugar de partir de un potencial dado  $V_1(x)$  uno puede igualmente comenzar especificando la función de onda del estado base  $\psi_0(x)$ . Una vez conocida dicha función de onda se puede conocer el potencial  $V_1(x)$  a partir de ésta.

El potencial  $V_1(x)$  puede ser desplazado por una constante, tal que la energía del estado base del hamiltoniano sea  $E_0^{(1)} = 0$ . Esto no afecta a las funciones de onda y propiedades de dispersión del potencial, sólo resulta en un espectro de energía desplazado por una constante. Así, sin pérdida de generalidad se escoge que

$$H_1 \psi_0^{(1)}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_0^{(1)}}{dx^2} + V_1(x) \psi_0^{(1)} = 0, \quad (1.2)$$

de donde se obtiene

$$V_1(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0^{\prime\prime(1)}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)}.$$

Esto significa que podemos determinar el potencial a partir de conocer la función de onda del estado base del sistema.

Por otro lado, esto permite factorizar de forma simple el hamiltoniano [11] como sigue

$$H_1 = A_1^\dagger A_1, \quad (1.3)$$

con los operadores

$$A_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad A_1^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.4)$$

sustituyendo la ecuación (1.4) en la ecuación (1.3) y comparando con el hamiltoniano  $H_1$ , se identifica al potencial  $V_1(x)$  como

$$V_1(x) = W(x)^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (1.5)$$

La cantidad  $W(x)$  es referida como el superpotencial en SUSY-QM. La solución de la ecuación (1.5) en términos de la función de onda del estado base se escribe como

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0^{(1)'}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)}. \quad (1.6)$$

### 1.3 Potenciales asociados y degeneración del espectro de energía.

La teoría de SUSY-QM relaciona al hamiltoniano original  $H_1$  con un operador  $H_2$ . Dado que el hamiltoniano  $H_1$  puede ser factorizado según (1.3), intercambiando el orden de los operadores  $A_1$  y  $A_1^\dagger$  se construye el operador  $H_2$  como

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger, \quad (1.7)$$

a este operador se le conoce como hamiltoniano asociado a  $H_1$ . Sustituyendo los operadores  $A_1$  y  $A_1^\dagger$  el hamiltoniano asociado  $H_2$  se escribe como

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W(x)^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x),$$

donde el potencial  $V_2(x)$  esta dado por

$$V_2(x) = W(x)^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (1.8)$$

Los potenciales  $V_1(x)$  y  $V_2(x)$  se conocen como potenciales asociados supersimétrico y están relacionados por el mismo superpotencial  $W(x)$ . No obstante los hamiltonianos asociados no están solo relacionados por el mismo superpotencial, sino también por sus eigenvalores de la energía y sus funciones de onda.

Dada la ecuación de Schrödinger para el primer hamiltoniano  $H_1$  se tiene que

$$H_1 \psi_n^{(1)} = A_1^\dagger A_1 \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}. \quad (1.9a)$$

Del hamiltoniano asociado  $H_2$  aplicado al estado  $A_1 \psi_n^{(1)}$  se encuentra que

$$H_2(A_1 \psi_n^{(1)}) = A_1 A_1^\dagger A_1 \psi_n^{(1)} = A_1 (H_1 \psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)} (A_1 \psi_n^{(1)}). \quad (1.9b)$$

Haciendo un tratamiento para el hamiltoniano  $H_2$

$$H_2 \psi_n^{(2)} = A_1 A_1^\dagger \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)} \quad (1.10a)$$

implica que para el estado  $A_1^\dagger \psi_n^{(2)}$  se tiene que

$$H_1(A_1^\dagger \psi_n^{(2)}) = A_1^\dagger A_1 A_1^\dagger \psi_n^{(2)} = A_1^\dagger (H_2 \psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)} (A_1^\dagger \psi_n^{(2)}). \quad (1.10b)$$

Las ecuaciones (1.9b) y (1.10b) muestran que  $A_1 \psi_n^{(1)}$  es eigenfunción de  $H_2$  con eigenvalor  $E_n^{(1)}$  y  $A_1^\dagger \psi_n^{(2)}$  es eigenfunción de  $H_1$  con eigenvalor  $E_n^{(2)}$  respectivamente. Usando estos resultados, las ecuaciones (1.9b)-(1.10b) y del hecho que  $E_0^{(1)} = 0$  se sigue que los espectros de energía de  $H_1$  y  $H_2$  son iguales excepto para el estado base de  $H_1$ . Las relaciones entre las funciones de onda y las energías asociadas a  $H_1$  y  $H_2$  son:

$$E_0^{(1)} = 0, \quad E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad (1.11)$$

$$\psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} A_1 \psi_{n+1}^{(1)}, \quad (1.12)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = [E_n^{(2)}]^{-\frac{1}{2}} A_1^+ \psi_n^{(2)}. \quad (1.13)$$

$$(n = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

Nótese que los operadores  $A_1$  ( $A_1^+$ ) convierten eigenfunciones de  $H_1$  ( $H_2$ ) en eigenfunciones de  $H_2$  ( $H_1$ ) con la misma energía, excepto para el estado base ya que  $A_1 \psi_0^{(1)} = 0$ . Con lo anterior se tiene que conociendo las eigenfunciones de  $H_1$  podemos determinar las eigenfunciones de  $H_2$  usando el operador  $A_1$ , y viceversa, usando el operador  $A_1^+$  podemos reconstruir todos los eigenfunciones de  $H_1$ . Esto se ilustra en la Figura 1.1.

Finalmente, para el caso general del hamiltoniano supersimétrico se describen los operadores  $Q$  y  $Q^+$  como  $Q = A\psi^+$ ,  $Q^+ = A^+\psi$ . Por lo que la ecuación (1.1) se puede reescribirse como sigue

$$H = \left( -\frac{d^2}{dx^2} + W(x)^2 \right) I - [\psi, \psi^+] W(x)'. \quad (1.1b)$$

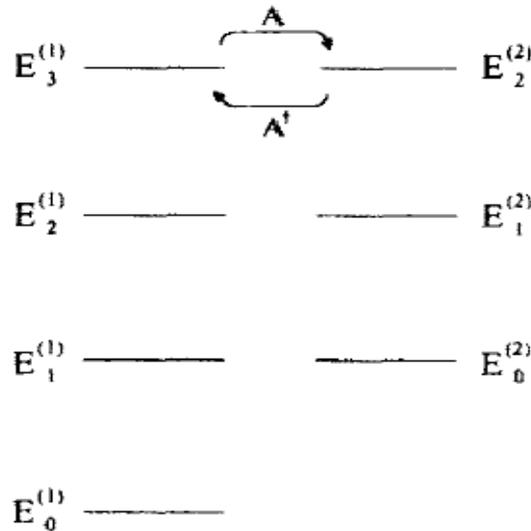


Figura 1.1. En esta figura se muestra los niveles de energía de dos potenciales supersimétricos asociados  $V_1(x)$  y  $V_2(x)$ . Se muestra la acción de los operadores  $A_1$  y  $A_1^+$ .

## 1.4 Jerarquía de hamiltonianos en SUSY- QM.

En la sección 1.2 vimos que si la energía del estado base de un hamiltoniano es cero se puede factorizar como un producto de dos operadores lineales con un operador derivada, es decir admite una factorización de la forma (1.3). Además, se introduce en la mecánica cuántica supersimétrica el hamiltoniano  $H_2$  asociado al hamiltoniano  $H_1$ , dado por las ecuaciones (1.7) y (1.8). En esta sección se muestra la forma en la que se construye la Jerarquía [12].

Similarmente podemos ahora introducir un tercer hamiltoniano  $H_3$  como el hamiltoniano asociado a  $H_2$ , por lo que:

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = A_2^\dagger A_2 + E_1^{(1)}, \quad (1.14)$$

con  $\hbar = m = 1$

$$A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad A_2^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_2(x), \quad W_2(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(2)}}{dx}. \quad (1.15)$$

Para el Hamiltoniano  $H_3$  asociado a  $H_2$  se tiene que

$$H_3 = A_2 A_2^\dagger + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x). \quad (1.16)$$

Sustituyendo los operadores  $A_2$  y  $A_2^\dagger$  se identifica al potencial  $V_3(x)$  en términos del superpotencial como

$$\begin{aligned} V_3(x) &= W_2(x)^2 + W_2'(x) + E_1^{(1)} = V_2(x) - 2 \frac{d^2 \ln \psi_0^{(2)}}{dx^2} \\ &= V_1(x) - 2 \frac{d^2 \ln(\psi_0^{(2)} \psi_0^{(1)})}{dx^2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Además, la degeneración del espectro de energía y la relación que existe entre las funciones de onda de los hamiltonianos  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  esta dada por las expresiones

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \quad (1.18)$$

$$\psi_n^{(3)} = \left(E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_2 A_1 \psi_{n+2}^{(1)}. \quad (1.19)$$

De este modo, si un hamiltoniano  $H_1$  tiene  $k$  estados con eigenfunciones  $\psi_n^{(1)}$ , con  $0 \leq n \leq k-1$ , podemos generar una jerarquía de  $(k-1)$  hamiltonianos con el mismo espectro de energías de  $H_1$  a excepción de que los primeros  $(m-1)$  eigenvalores de  $H_1$  faltan en el  $m$ -ésimo hamiltoniano de la jerarquía  $H_m$ . En particular se tiene que

$$H_m = A_m^+ A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x), \quad (1.20)$$

con los operadores

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad W_m(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(m)}}{dx}. \quad (1.21)$$

Los eigenvalores de energía y las eigenfunciones de los hamiltonianos de la jerarquía están relacionadas de la siguiente forma:

$$E_n^{(m)} = E_{m+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)}, \quad (1.22)$$

$$\psi_n^{(m)} = \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \dots \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} A_{m-1} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)}. \quad (1.23)$$

Así, conociendo los eigenvalores y eigenfunciones de  $H_1$  podemos saber inmediatamente todos los valores propios de energía y las eigenfunciones propias de la jerarquía de los  $k-1$  hamiltonianos.

## 1.5 Factorización supersimétrica y jerarquía del oscilador armónico unidimensional.

En este capítulo se hará énfasis en los operadores que factorizan el hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional y en la construcción de los hamiltonianos que forman la jerarquía de éste. Por consiguiente, supondremos conocida la función de onda del estado base.

Considerando una partícula de masa  $m$  que se mueve bajo el potencial  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega x^2$ , el hamiltoniano que describe este sistema es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega x^2.$$

La normalizada función de onda del estado base está dada por

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \quad \text{con} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (1.24)$$

y la energía del estado base es

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (1.25)$$

De acuerdo a la ecuación (1.2) la energía del estado base tiene que ser cero, por lo que sustraemos la energía del estado base. De este modo, se define el Hamiltoniano  $H_1 = H - E_0$  con eigenvalores de energía iguales a

$$E_n^{(1)} = n\hbar\omega, \quad n = 0,1,2,3 \dots, \quad (1.26)$$

con las eigenfunciones de onda normalizadas

$$\psi_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} x_0}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right). \quad n = 0,1,2,3 \dots, \quad (1.27)$$

Usando la ecuación (1.6) se obtiene el superpotencial

$$W(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x. \quad (1.28)$$

De la ecuación (1.8) y de  $H_1$  encontramos los potenciales asociados

$$V_1(x) = \frac{1}{2} m \omega x^2 - \frac{1}{2} \hbar \omega, \quad V_2(x) = \frac{1}{2} m \omega x^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega, \quad (1.29)$$

que son iguales al potencial  $V(x)$  desplazado por las constante  $\pm 1/2 \hbar \omega$ .

A partir de (1.29) se observa que segundo Hamiltoniano  $H_2$  describe el mismo sistema físico que  $H_1$ , a excepción que la energía del estado base esta desplazada por una cantidad  $E_0^{(2)} - E_0^{(1)} = \Delta E = \hbar \omega$  respecto al estado base de  $H_1$  el cual corresponde al primer estado excitado de  $H_1$ . Con la ecuación (1.11) se encuentran los eigenvalores de energía de  $H_2$

$$E_n^{(2)} = (n + 1) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad (1.30)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (1.4) y (1.28) se calculan los operadores de la factorización supersimétrica de  $H_1$

$$A_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x, \quad A_1^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x. \quad (1.31)$$

de la ecuación (1.12) se encuentran las eigenfunciones del hamiltoniano  $H_2$

$$\psi_n^{(2)}(x) = C_n^{(2)} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad (1.32)$$

donde  $C_n^{(2)}$  es una constate de normalización que depende de los eigenvalores de la energía de  $H_1$ .

Siguiendo el mismo procedimiento para el hamiltoniano  $H_2$  podríamos obtener un tercer hamiltoniano ( $H_3$ ) con un potencial asociado  $V_3(x)$  a  $V_2(x)$  el cual estaría desplazado por una constante, por lo que describiría el mismo sistema físico. Así, de igual modo el espectro de energías de  $H_3$  estaría

desplazado por una cantidad igual a  $\hbar\omega$  respecto al espectro de energías de  $H_2$ , donde la energía del estado base de  $H_3$  correspondería al primer estado excitado de  $H_2$  y a su vez al segundo estado excitado de  $H_1$ .

Por otra parte, debido a que el hamiltoniano  $H_3$  describen el mismo sistema físico que  $H_1$  y  $H_2$  las funciones de onda de este serían proporcionales a

$$\psi_n^{(3)}(x) \propto e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad n = 0,1,2,3 \dots, \quad (1.33)$$

mientras el espectro energía estaría dado por

$$E_n^{(3)} = (n + 2)\hbar\omega, \quad n = 0,1,2,3 \dots, \quad (1.34)$$

Finalmente, si procediéramos de la misma forma para un cuarto, quinto o sexto hamiltoniano, estos describirían el mismo sistema físico que  $H_1$  (desplazados por una constante). Por lo que de igual forma sus funciones de onda serían proporcionales y sus espectros de energía estarían descritas por la ecuación (1.22), de este modo el  $k$ -ésimo miembro de la serie de hamiltonianos que conforman la jerarquía de  $H_1$  esta dado por

$$H_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega x^2 + \frac{(2k-3)}{2} \hbar\omega, \quad k = 2,3,4, \dots \quad (1.35)$$

con eigenfunciones y eigenvalores de energía

$$\psi_n^{(k)}(x) = C_n^{(k)} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad n = 0,1,2,3 \dots, \quad (1.36)$$

$$E_n^{(k)} = (n + k - 1)\hbar\omega, \quad k = 2,3,4, \dots$$

donde  $C_n^{(k)}$  es una constate de normalización que depende de los eigenvalores de la energía de  $H_1$ .

Nótese que al calcular las funciones de onda del estado base de los hamiltonianos que conforman la jerarquía encontramos que estas funciones de onda son igual para todos, y están dadas por

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad \text{con } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (1.37)$$

Además, los operadores de la factorización supersimétrica están dados por

$$A_k = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( \frac{d}{dx} + C_0^{(k)} \frac{x}{x_0} \right) \quad \text{con } C_0^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}}. \quad (1.38)$$

De lo anterior se observa que los operadores  $A_k$  de la jerarquía son iguales (quitando el subíndice  $k$  a los  $A_k = A$ ) y la función de onda del estado base de los hamiltoniano de la jerarquía son iguales a  $\psi_0(x)$  por lo que podemos encontrar todas las eigenfunciones de  $H_1$  a través de

$$\psi_n^{(1)}(x) = N(A^+)^n \psi_0(x). \quad (1.39)$$

Los hamiltonianos de la jerarquía y sus correspondientes espectros de energía se muestran en la Figura 1.2.

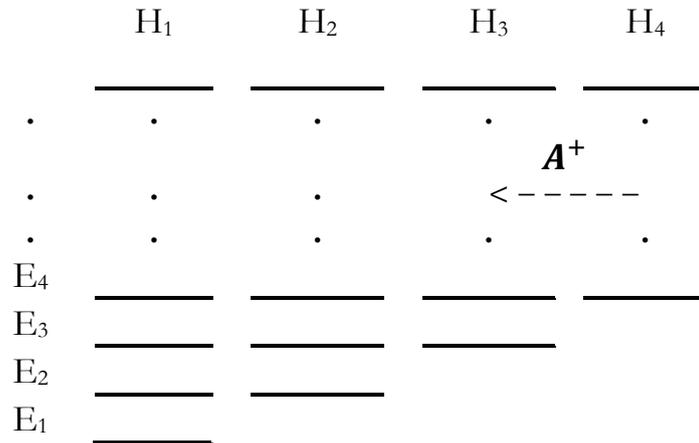


Figura 1.2. Diagrama ilustrativo de los niveles de energía de los Hamiltonianos que forman parte de la jerarquía.

## 1.6 Factorización supersimétrica y jerarquía del pozo de potencial infinito unidimensional.

Veamos ahora un problema en el cual el potencial esta dado de la siguiente forma:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & \text{en cualquier otro lugar} \end{cases} \quad (1.40)$$



Figura 1.3. Pozo de potencial infinito unidimensional

El hamiltoniano para una partícula de masa  $m$  bajo este potencial es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}.$$

La normalizada función de onda es conocida y está dada por

$$\psi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.41)$$

con el correspondiente eigenvalor de energía

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

Substrayendo la energía del estado base al hamiltoniano  $H$  se define el hamiltoniano  $H_1 = H - E_0$ , con eigenvalores de energía y eigenfunciones iguales a

$$E_n^{(1)} = \frac{n(n+2)}{2ma^2} \hbar^2 \pi^2, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (1.42)$$

$$\psi_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{a}\right). \quad 0 \leq x \leq a. \quad (1.43)$$

De la ecuación (1.6) y (1.8) se obtiene el superpotencial y el potencial supersimétrico asociado  $V_2(x)$

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{a} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad (1.44)$$

$$V_2(x) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \left[ 2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - 1 \right]. \quad (1.45)$$

Las eigenfunciones de onda de  $H_2$  se obtienen de la aplicación del operador  $A_1$  a las eigenfunciones de onda de  $H_1$ , el operador  $A_1$  se encuentra a partir de la (1.4) y (1.44) y está dado por

$$A_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( \frac{d}{dx} - \frac{\pi}{a} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right). \quad (1.46)$$

La función de onda del estado base y del primer estado excitado del hamiltoniano  $H_2$

$$\psi_0^{(2)}(x) = -2 \sqrt{\frac{2}{3a}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad \psi_1^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right).$$

Así, hemos generando dos potenciales diferentes correspondientes a  $H_1$  y  $H_2$  que tienen exactamente los mismos espectro de energía, excepto por el estado base de  $H_1$ . En la Tabla 1 se muestran algunos potenciales supersimétricos, funciones de onda del estado base y primer estado excitado de los primeros hamiltonianos de la jerarquía. Además se muestran los operadores de la factorización supersimétrica de estos Hamiltonianos.

En la tabla 1 se observa que las eigenfunciones de onda del estado base de los primeros 4 Hamiltonianos de la jerarquía son funciones que dependen de una potencia de  $\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ . No es muy difícil ver que la función de onda del estado base del siguiente hamiltoniano ( $H_5$ ) de la jerarquía es proporcional a una potencia de  $\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$  por lo que podemos intuir que las funciones de onda del estado base de los hamiltoniano que forman parte de la jerarquía son de la forma

$$\psi_0^{(k)}(x) = C_0^k \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]^k, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1.47)$$

donde los  $C_0^k$  son constantes de normalización.

De igual forma se observa que los operadores de la factorización supersimétrica  $A_k$  se pueden escribir de forma general como

$$A_k = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( \frac{d}{dx} - \frac{k\pi}{a} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right). \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1.47)$$

Hagamos algunos comentarios finales a este capítulo. Hemos encontrado expresiones generales para los operadores de la factorización supersimétrica y para las funciones de onda del estado base de los hamiltonianos de la jerarquía del pozo de potencial. Esto se logró usando reiteradamente el método de factorización supersimétrica buscando los potenciales y hamiltonianos asociados de SUSY-QM. Para el caso del oscilador armónico encontramos que las funciones de onda del estado base de los hamiltonianos de la jerarquía y operadores de la factorización supersimétrica son todos iguales por lo que solo necesitamos un solo operador  $A$  y su adjunto  $A^+$  para generar las

eigenfunciones de los hamiltonianos de la jerarquía. Además, también se observa que los operadores de la factorización supersimétrica tienen una gran semejanza a los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^+$  de creación y aniquilación de Dirac [2]

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{X} + \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right),$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{X} - \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right).$$

$H_m$	$W_m(x)$	$A_m$	$\psi_m^{(1)}(x)$	$\psi_m^{(2)}(x)$	$\psi_m^{(3)}(x)$	$\psi_m^{(4)}(x)$ , .....
$H_1$	$-\frac{\hbar\pi}{a\sqrt{2\mu}} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	$\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( \frac{d}{dx} - \frac{\pi}{a} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right)$	$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	$-2\sqrt{\frac{2}{3a}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	$-\frac{48}{15} \sqrt{\frac{2}{15a}} \sin^4\left(\frac{\pi x}{a}\right)$
$H_2$	$-\frac{2\hbar\pi}{a\sqrt{2\mu}} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	$\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( \frac{d}{dx} - \frac{2\pi}{a} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right)$	$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$	$-\frac{2}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$	$\frac{24}{15} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$	.....
$H_3$	$-\frac{3\hbar\pi}{a\sqrt{2\mu}} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	$\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( \frac{d}{dx} - \frac{3\pi}{a} \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right)$	$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$	$4\sqrt{\frac{2}{15a}} \left( 1 - 6\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	.....	.....
$H_4$	.....	.....	$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)$	.....	.....	.....

Tabla 1.1. Se muestran las funciones de onda del estado base y del primer estado excitado para los primeros Hamiltonianos de la jerarquía además de sus potenciales supersimétricos correspondientes y los operadores de la factorización.

## Capítulo 2

### MÉTODO DE FACTORIZACIÓN DE GREEN

En este capítulo explicaremos en forma breve en que consiste el método de factorización de Green [4], introducido para tratar el problema de eigenvalores en la mecánica cuántica. Además se dará solución al pozo de potencial infinito unidimensional y al oscilador armónico unidimensional a través de este método.

#### 2.1 Método de factorización de Green.

Para resolver el problema de eigenvalores de la ecuación de Schrödinger, podemos usar un método algebraico llamado método de factorización. En este método el hamiltoniano que contiene una derivada de segundo orden se escribe como el producto de dos operadores, donde cada operador contiene una derivada de primer orden. Estos operadores se utilizan para obtener las eigenfunciones de cada uno de los estados cuánticos y en general se requiere un nuevo operador para cada estado. El método de factorización Green [16] consiste en encontrar operadores  $a_1, a_2, a_3, \dots$  y constantes reales  $E_1, E_2, E_3, \dots$  tales que

$$a_1^+ a_1 + E_1 = H \quad (2.1a)$$

$$a_2^+ a_2 + E_2 = a_1 a_1^+ + E_1 \quad (2.1b)$$

$$a_3^+ a_3 + E_3 = a_2 a_2^+ + E_2 \dots \quad (2.1c)$$

y en general

$$a_{n+1}^+ a_{n+1} + E_{n+1} = a_n a_n^+ + E_n \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones relacionan a los operadores  $a_n$  con las constantes reales  $E_n$ . Además se escogen a los operadores  $a_n$  de tal manera que las constantes  $E_n$  tengan el valor más grande posible, de este modo las soluciones a las ecuaciones (2.1) serán únicas. Además, se asume que los operadores  $a_n$  tienen un eigenvector  $|\chi_n\rangle$  con eigenvalor igual a cero

$$a_n|\chi_n\rangle = 0. \quad (2.3)$$

De las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) se tiene que el correspondiente eigenvector no normalizado de H esta dado como

$$|E_n\rangle = a_1^+ a_2^+ \dots a_{n-1}^+ |\chi_n\rangle \quad (2.4a)$$

Multiplicando por una constante de normalización  $N_n$  tenemos los estados normalizados de H

$$|E_n\rangle = N_n a_1^+ a_2^+ \dots a_{n-1}^+ |\chi_n\rangle, \quad (2.4b).$$

donde la constante de normalización  $|N_n|$  para los estados  $|E_n\rangle$  se puede calcular por inducción usando las relaciones de recurrencia (2.2) y de la condición (2.3). De modo que:

$$|N_n| = [(E_n - E_{n-1})(E_n - E_{n-2}) \dots (E_n - E_1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

De las ecuaciones (2.1) se tiene que  $a_1^+ a_1$  es igual a H más una constante esto implica que  $a_1$  estaría formado por el operador de momento lineal P. De las relaciones de recurrencia (2.2) se tiene que cada operador  $a_n$  debe tener un término de momento lineal, con lo cual los operadores  $a_n$  se pueden escribir de forma general

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2m}} (P + if_n(x)), \quad (2.5)$$

donde  $f_n(x)$  es una función real que depende de la forma del potencial  $V(x)$ .

Usando la expresión general para los operadores  $a_n$  se tiene que

$$a_n^+ a_n = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{1}{2m} f_n^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{df_n}{dx}, \quad (2.6)$$

$$a_n a_n^+ = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{1}{2m} f_n^2 - \frac{\hbar}{2m} \frac{df_n}{dx}. \quad (2.7)$$

Solo resta hacer algunas observaciones importantes acerca del método de factorización de Green.

Dado que se asume la existencia de un eigenvector de  $a_n$  con eigenvalor cero se sigue que las constantes reales  $E_n$  son eigenvalores de  $H$ , pero esto también implica que no existe ningún valor entre  $E_{n-1}$  y  $E_n$ . En otras palabras el método de factorización conduce a un conjunto discreto de eigenvalores de energía. Generalmente el método de factorización de Green aplica a problemas mecánico-cuánticos de más de una dimensión, siempre que se logre reducir el hamiltoniano a una ecuación diferencial de una sola variable.

## 2.2 Oscilador armónico unidimensional.

En este capítulo se encontrarán las eigenfunciones y eigenvalores de energía del oscilador armónico unidimensional a través del método de factorización de Green. Por consiguiente, para un hamiltoniano con potencial  $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ , de las ecuaciones (2.1a), (2.5) y (2.6) para  $n = 1$  se encuentra la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{1}{2m} f_1^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{df_1}{dx} + E_1 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2. \quad (2.8)$$

Esta ecuación tiene como soluciones

$$f_1 = \pm m \omega x \quad \text{con} \quad E_1 = \mp \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (2.9)$$

Debido a que los operadores  $a_n$  se escogen de tal modo que las constantes reales  $E_n$  tengan el valor más grande escogemos para  $n = 1$  la solución

$$f_1 = -m\omega x \quad \text{con} \quad E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (2.10)$$

Sustituyendo la solución anterior en la ecuación (2.5) para  $n = 1$  encontramos los operadores

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(P - im\omega x), \quad a_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}}(P + im\omega x). \quad (2.11)$$

Usando la ecuación (2.1b) y sustituyendo (2.10) y (2.11) en esta, se obtiene la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{1}{2m}f_2^2 + \frac{\hbar}{2m}\frac{df_2}{dx} + E_2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \hbar\omega, \quad (2.12)$$

donde la solución a esta ecuación diferencial con la cual  $E_2$  toma el valor mas grande es:

$$f_2 = -m\omega x \quad \text{con} \quad E_2 = \frac{3}{2}\hbar\omega. \quad (2.10)$$

De la relación de recurrencia (2.2) se puede calcular  $f_3, f_4, f_5, \dots$  las cuales resultan tener el mismo valor, esto implica que la forma general de las funciones  $f_n$  y las constantes  $E_n$  esta dadas como

$$f_n = -m\omega x, \quad E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

De esto se tiene que todos los operadores  $a_n$  son iguales a

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2m}}(P - im\omega x). \quad (2.12)$$

al sustituir en (2.4) se tiene que eigenvectores se encuentran a partir de la expresión

$$|E_n\rangle \propto (P + im\omega x)^{n-1} |\chi_n\rangle, \quad (2.13)$$

donde de acuerdo a la ecuación (2.3) y (2.12)  $|\chi_n\rangle$  es solución de la ecuación diferencial

$$\left(-i\hbar \frac{d}{dx} - im\omega x\right) |\chi_n\rangle = 0. \quad (2.14)$$

Con esto, la solución a la ecuación diferencial en el espacio de posiciones es

$$\chi_n(x) = \langle x | \chi_n \rangle = e^{-m\omega x^2/2\hbar}. \quad (2.15)$$

Finalmente, las funciones  $\chi_n(x) = \langle x | \chi_n \rangle$  corresponden a funciones no normalizadas, estas funciones se conocen como funciones auxiliares. Las correspondientes eigenfunciones de onda de  $H$  se pueden obtener sustituyendo (2.15) en la ecuación (2.13).

### 2.3 Pozo de potencial infinito.

Veamos ahora un problema el cual tiene un potencial de la forma

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{en cualquier otro lugar} \end{cases}$$

El hamiltoniano para una partícula que se encuentra en este potencial ( $0 < x < L$ ) esta dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (2.16)$$

Usando la ecuación (2.1a) y (2.6) con  $n = 1$  para este hamiltonianos obtenemos la ecuación diferencial de primer orden para función  $f_1$

$$\frac{1}{2m} f_1^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{df_1}{dx} + E_1 = 0, \quad (2.17)$$

esta ecuación puede ser integrada de forma directa

$$x = -\frac{1}{\hbar} \int \frac{df_1}{2mE_1 + f_1^2} + C,$$

por lo que:

$$f_1 = \sqrt{2mE_1} \cot \left[ \frac{\sqrt{2mE_1}}{\hbar} (x - c) \right], \quad (2.18)$$

donde  $c$  es una constante de integración.

Debido a que  $f_1$  tiene que ser elegida de tal modo que el operador  $a_1$  nos de el valor más grande posible de la constante  $E_1$  y que la función  $f_1$  debe cumplir con las mismas condiciones del potencial  $V(x)$  las constantes  $c$  y  $E_1$  serán restringidas por el comportamiento de la función cotangente. Esto implica que físicamente pedimos que la función cotangente tenga valores finitos en el intervalo  $0 < x < L$  mientras que en  $x = 0$  y  $x = L$  deben existir singularidades debido a que el potencial es infinito en estos puntos, ya que la cotangente tiene singularidades en  $\theta = n\pi$  radiales obtenemos que  $E_1$  toma el su valor más grande si las singularidades se encuentra en  $x = 0$  y  $x = L$ . Esto significa que

$$c = 0 \quad y \quad \frac{\sqrt{2mE_1}L}{\hbar} = \pi,$$

despejando a la constante  $E_1$  y sustituyendo en la ecuación (2.18) se encuentra que

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad f_1 = \frac{\pi \hbar}{L} \cot \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad (2.19)$$

y

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left( P + \frac{i\pi \hbar}{L} \cot \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right). \quad (2.12)$$

Debido a las relaciones de recurrencia entre los operadores  $a_n$  podemos suponer que las funciones  $f_n$  tienen la misma forma salvo algunas constantes.

De la forma de la función  $f_1$  se propone la forma general de las funciones  $f_n$  y de los operadores  $a_n$  como:

$$f_n = b_n \cot(c_n x), \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{2m}}(P + i b_n \cot(c_n x)), \quad (2.13)$$

donde  $c_n$  y  $b_n$  son constante reales que determinaremos a partir de las relaciones de recurrencia (2.2) entre los operadores  $a_n$ .

De la expresión (2.13) encontramos que

$$a_n^+ a_n = \frac{1}{2m} (P^2 - b_n c_n \hbar + b_n (b_n - c_n \hbar) \cot^2 c_n x), \quad (2.14)$$

$$a_n a_n^+ = \frac{1}{2m} (P^2 + b_n c_n \hbar + b_n (b_n + c_n \hbar) \cot^2 c_n x) \quad (2.15)$$

Al sustituir estas expresiones en la relación (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} (P^2 - b_{n+1} c_{n+1} \hbar + b_{n+1} (b_{n+1} - c_{n+1} \hbar) \cot^2 c_{n+1} x) + E_{n+1} \\ &= \frac{1}{2m} (P^2 + b_n c_n \hbar + b_n (b_n + c_n \hbar) \cot^2 c_n x) + E_n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Igualando los coeficientes de las diferentes potencias de la función cotangente

$$b_{n+1} (b_{n+1} - c_{n+1} \hbar) \cot^2 c_{n+1} x = b_n (b_n + c_n \hbar) \cot^2 c_n x, \quad (2.17)$$

$$2\mu E_{n+1} - b_{n+1} c_{n+1} \hbar = b_n c_n \hbar + 2m E_n. \quad (2.18)$$

Para que la igualdad (2.17) se cumpla requiere que el coeficiente y el argumento de la cotangente coincidan, por lo que

$$c_{n+1} = c_n. \quad (2.19)$$

$$b_{n+1} (b_{n+1} - c_{n+1} \hbar) = b_n (b_n + c_n \hbar). \quad (2.20)$$

Restando la ecuación (2.20) de la ecuación (2.18) obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$2mE_{n+1} - (b_{n+1})^2 = 2mE_n - (b_n)^2. \quad (2.21)$$

De esta ecuación se observa que

$$2mE_n - (b_n)^2 = 2mE_1 - (b_1)^2. \quad (2.22)$$

Por lo que al sustituir los valores de  $E_1$  y  $b_1$  obtenemos  $2mE_n - (b_n)^2 = 0$ ,

por lo tanto

$$E_n = \frac{(b_n)^2}{2m}. \quad (2.23)$$

De la ecuación (2.19) encontramos que  $c_n = c_1 = \frac{\pi}{L}$  sustituyendo este en la ecuación (2.20) obtenemos la ecuación cuadrática

$$b_{n+1} \left( b_{n+1} - \frac{\pi}{L} \hbar \right) = b_n \left( b_n + \frac{\pi}{L} \hbar \right), \quad (2.24)$$

con soluciones

$$b_{n+1} = -b_n, \quad (2.25a)$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\pi}{L} \hbar. \quad (2.25b)$$

De las dos soluciones anteriores es fácil ver que la solución (2.25b) da el valor mas grande de  $E_n$ .

Debido a que el cambio  $\Delta b = b_{n+1} - b_n = \frac{\pi \hbar}{L}$  tenemos que  $b_n = \frac{n\pi \hbar}{L}$  y por lo tanto sustituyendo en (2.23) se tiene que

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu L^2}. \quad (2.26)$$

la cual corresponder a los eigenvalores del espectro de energía del pozo de potencial infinito.

Por otro lado, la condición  $a_n|\chi_n\rangle = 0$  en la representación de posición  $\chi_n(x) = \langle x|\chi_n\rangle$  se escribe de forma explícita como

$$\left(-i\hbar\frac{d}{dx} + \frac{i\pi\hbar}{L}\cot\frac{\pi x}{L}\right)\chi_n(x) = 0, \quad (2.27)$$

esta ecuación se resuelve de forma directa por lo que es fácil probar que las funciones auxiliares  $\chi_n(x)$  son de la forma

$$\chi_n(x) = \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^n. \quad (2.28)$$

La eigenfunciones de H se obtienen de la expresión (2.4b)

$$\psi_n \propto a_1^+ a_2^+ \dots a_{n-1}^+ \chi_n(x),$$

donde el operador  $a_n$  esta dado como

$$a_n = -i\hbar\frac{d}{dx} + \frac{i\pi\hbar}{L}\cot\frac{\pi x}{L}. \quad (2.29)$$

De lo anterior se pueden encontrar las correspondientes eigenfunciones de onda no normalizadas para los primeros estados del pozo de potencial infinito unidimensional

$$\psi_1(x) \propto \chi_1(x) = \left(\sin\frac{\pi}{L}\right),$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x) \propto a_1^+ \chi_2(x) &= \left(-i\hbar\frac{d}{dx} - \frac{i\pi\hbar}{L}\cot\frac{\pi x}{L}\right)\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2 \\ &= -\frac{3i\pi\hbar}{2L}\left(\sin\frac{2\pi x}{L}\right), \end{aligned}$$

$$\psi_3(x) \propto a_1^+ a_2^+ \chi_3(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \left( -i\hbar \frac{d}{dx} - \frac{i\pi\hbar}{L} \cot \frac{\pi x}{L} \right) \left( -i\hbar \frac{d}{dx} - \frac{2i\pi\hbar}{L} \cot \frac{\pi x}{L} \right) \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right)^3 \\
&= -\frac{5\pi^2\hbar^2}{L^2} \left( \sin \frac{3\pi x}{L} \right). \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Finalmente, si calculamos  $\psi_4(x), \psi_5(x), \psi_6(x) \dots$  encontramos que las eigenfunciones son proporcionales a la función  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  por lo que las eigenfunciones onda normalizadas para el pozo de potencial infinito unidimensional se pueden escribir como

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{2.31}$$

## 2.4 Método de factorización de Green y la mecánica supersimétrica.

Una de las ideas clave de la factorización en supersimetría es la conexión entre la función de onda del estado base y el potencial, esta conexión se establece a partir de elegir a la energía del estado base a ser cero. Esto permite una reconstrucción del potencial y facilita la factorización del hamiltoniano en la forma  $H_1 = A_1^\dagger A_1$ . Además, se define el operador  $H_2 = A_1 A_1^\dagger$  como hamiltoniano asociado de  $H_1$ , los eigenvalores de la energía y las funciones de onda de  $H_1$  y  $H_2$  están relacionadas a través de los potenciales asociados  $V_1(x)$  y  $V_2(x)$  que están dados por el mismo superpotencial  $W_1(x)$ . De tal modo, se tiene que  $H_1$  y  $H_2$  tienen el mismo espectro de energías a excepción del estado base. Además, siguiendo la misma idea podemos obtener un tercer hamiltoniano  $H_3$  con un potencial  $V_3(x)$  asociado a  $V_2(x)$  que están dados por un superpotencial  $W_2(x)$ , de igual modo, este nuevo hamiltoniano tiene el mismo espectro de energía que  $H_2$  a excepción del estado base y a su vez tiene el mismo espectro de energía que  $H_1$  a excepción del estado base y su primer estado excitado, así si el hamiltoniano  $H_1$  tiene  $n$  niveles de energía se pueden

generar  $n - 1$  hamiltonianos isoespectrales, donde el  $m$ -ésimo hamiltoniano  $H_m$  tiene el mismo espectro de energía que  $H_1$  a excepción de los primeros  $m - 1$  niveles de energía, a este conjunto de hamiltonianos se le conoce en mecánica cuántica supersimétrica como la jerarquía.

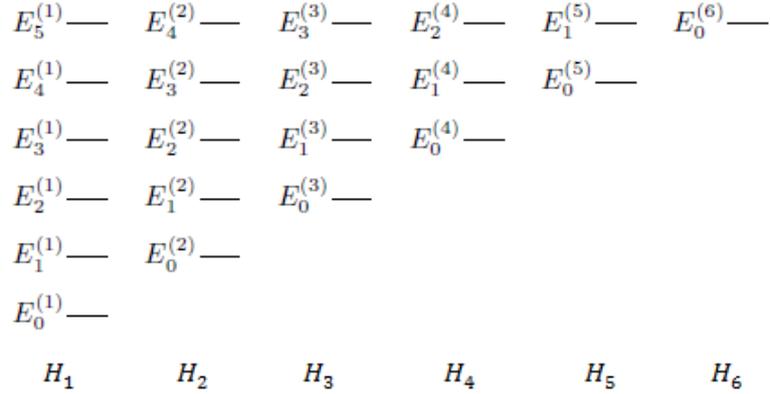


Figura 2.1. Se muestra el espectro de energía de los Hamiltonianos de la Jerarquía

Por otro lado, el método de factorización de Green consiste en encontrar operadores diferenciales de primer orden  $a_1, a_2, a_3, \dots$  y constantes reales  $E_1, E_2, E_3, \dots$  tales que cumplan la relación:

$$a_{n+1}^+ a_{n+1} + E_{n+1} = a_n a_n^+ + E_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Además, se asume como condición que los operadores  $a_n$  tienen un eigenvector  $|\chi_n\rangle$  con eigenvalor igual a cero por lo que implica que las constantes reales  $E_1, E_2, E_3, \dots$  son eigenvalores de  $H$  y sus correspondientes eigenvectores no normalizados están dados como  $|E_n\rangle = a_1^+ a_2^+ \dots a_{n-1}^+ |\chi_n\rangle$ .

Nótese que la relación entre los operadores  $a_n$  en el método de factorización de Green son la forma general de la jerarquía en la mecánica cuántica supersimétrica ya que desde el punto de vista de SUSY-QM el operador  $a_{n+1}^+ a_{n+1}$  es el  $(n + 1)$ -ésimo hamiltoniano de la jerarquía y el operador  $a_n a_n^+$  es el  $n$ -ésimo hamiltoniano asociado al  $(n - 1)$ -ésimo hamiltoniano de la jerarquía, por lo que las ecuaciones (2.1a - 2.1c) están relacionadas con la construcción de los primeros tres hamiltonianos de la

jerarquía. De este modo el método de factorización Green está directamente relacionado con la supersimetría a través de construcción de hamiltonianos isoespectrales cuyos potenciales son invariantes en forma. Solo resta hacer algunas observaciones acerca del método de factorización supersimétrica y el método factorización de Green.

Como se dijo antes los operadores  $a_n$  tienen un eigenvector  $|\chi_n\rangle$  con eigenvalor cero, esto es equivalente en supersimetría a la condición de tomar a la energía del estado base como cero, por lo cual, las eigenfunciones auxiliares  $\chi_n(x)$  en el método de Green se pueden interpretar como las funciones de onda del estado base de los hamiltonianos que conforman la jerarquía.

Por último, en la factorización supersimétrica para un hamiltoniano  $H$  del cual se conoce la función de onda del estado base se pueden construir los operadores  $A_m$  y  $A_m^+$  con los cuales se puede generar una sucesión de hamiltonianos con el mismo espectro de energía que  $H$ , mientras que en el método de factorización de Green se encuentran los operadores  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , y las constantes reales  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , de forma algebraica a partir de las ecuaciones (2.1a - 2.1c) y (2.2) y con ello se encuentran las funciones auxiliares  $\chi_n(x)$  resolviendo la ecuación diferencial (2.3) y así generar con los operadores  $a_n^+$  las eigenfunciones del hamiltoniano  $H$ .

Por lo tanto, se puede concluir que el método de factorización de Green se enfoca únicamente en descomponer el espectro de energías y sus eigenfunciones de un hamiltoniano en estados base (funciones auxiliares) de hamiltonianos con el mismo espectro de energía (Figura 2.2), mientras que la jerarquía en SUSY-QM construye todo el espectro de energía y eigenfunciones Figura 2.1.

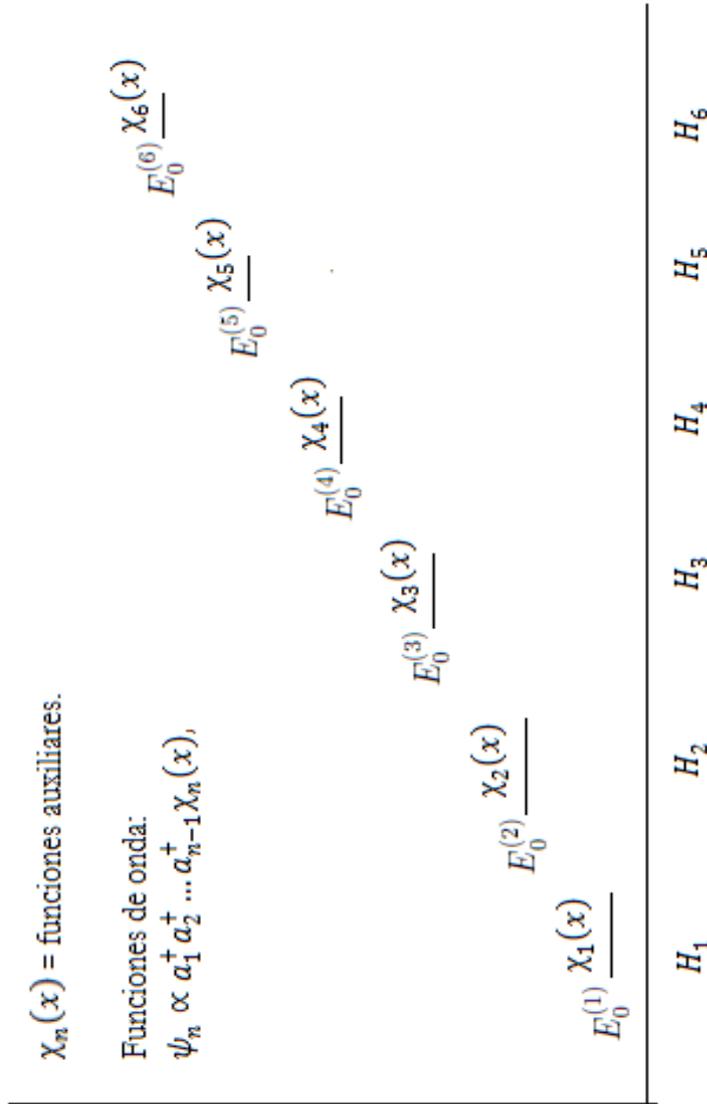


Figura 2.2. Funciones auxiliares del Método de Green como funciones de onda de los estados base de los Hamiltonianos de la Jerarquía.

## Capítulo 3

### EL OSCILADOR ARMÓNICO TRIDIMENSIONAL

En este capítulo se dan las soluciones cuánticas del potencial del oscilador armónico tridimensional. Las soluciones se obtienen mediante tres métodos distintos, resolviendo directamente la ecuación de Schrödinger, usando los operadores de creación y aniquilación de Dirac y por el método de factorización de Green.

#### 3.1 Forma directa.

La ecuación de Schrödinger para una partícula de masa  $m$  que se mueve bajo el potencial  $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$  (del oscilador armónico tridimensional) es

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{1}{2}m\omega^2r^2\psi = E\psi.$$

Al describir la ecuación anterior, haciendo el cambio  $E = \frac{1}{2}\hbar\omega\lambda$  y tomando la medición de  $r$  en las unidades  $(\hbar/\mu\omega)^{1/2}$  esta toma la forma adimensional

$$\nabla^2\psi + (\lambda - r^2)\psi = 0. \quad (3.1)$$

En coordenadas esféricas la solución a la ecuación diferencial es de la forma

$$\psi_l^m = R(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.2)$$

donde la ecuación diferencial de  $R(r)$  para la parte radial [13] es

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R = 0. \quad (3.3)$$

Ya que en coordenadas cartesianas la ecuación (3.1) es fácilmente separable, la solución  $\psi$  es de la forma  $\psi = X(x)Y(y)Z(z)$ , donde  $X(x)$ ,  $Y(y)$ ,  $Z(z)$  son las soluciones del oscilador armónico unidimensional en las dirección  $x, y, z$ .

De esto se tiene que cada solución  $\psi$  contiene el factor  $e^{-r^2/2}$ , por lo cual, se propone una solución de la forma

$$R(r) = e^{-r^2/2} \phi(r), \quad (3.4)$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.3) se reduce a

$$\phi'' + \left(\frac{2}{r} - 2r\right) \phi' + \left(\lambda - 3 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \phi = 0. \quad (3.5)$$

Esta ecuación se puede resolver por el método de series de potencias proponiendo a  $\phi(r)$  como:

$$\phi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{n+s}. \quad (3.6)$$

Sustituyendo esta función en (3.5), se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} (c_n [(n+s)(n+s-1) + 2(n+s) - l(l+1)] \\ & + a_{n-2} [\lambda - 3 - 2(n+s-2)]) r^{n+s-2} = 0, \end{aligned}$$

donde  $s = l$  y  $c_1 = 0$  son los valores que satisfacen las condiciones del sistema. Esto lleva a la fórmula de recurrencia

$$c_n [2(n+l) - (\lambda - 3)] = c_{n+2} [(n+2+l)(n+3+l) - l(l+1)]. \quad (3.7)$$

De esta fórmula de recurrencia se observa que todos los coeficientes  $c_n$  correspondientes a valores impares de  $n$  son cero, ya que  $c_1 = 0$ . Por lo tanto,

$$\phi(r) = r^l \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} r^{2n} = \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} c_k r^k, \quad (3.8)$$

donde todas las constantes  $c_{2n}$  son proporcionales a  $c_0$ .

Nótese, que cuando  $n \rightarrow \infty$  la función  $\phi(r)$  diverge, por su comportamiento asintótico como  $e^{r^2}$ . Para obtener una solución finita se requiere que todos los términos de la serie sean cero a partir de un cierto valor  $k$ ; por lo tanto  $\phi(r)$  debe ser un polinomio. Para esto se requiere que  $c_{k+2} = 0$ . Así de la ecuación (3.7) se obtiene que

$$c_k[2(k+l) - (\lambda - 3)] = 0. \quad (3.9)$$

Sustituyendo el valor de  $\lambda$  y despejando la energía se encuentra que

$$E_{kl} = \left(k + l + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega, \quad (3.10)$$

donde  $k$  es un número par, denotado por  $k = 2N$  y  $N = 0, 1, 2, \dots$ , reescribiendo la expresión de la energía como

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.11)$$

con  $n = k + l$ .

Las eigenfunciones para el oscilador armónico tridimensional son

$$\psi_{n,l,m} = e^{-r^2/2} \phi_n^l(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (n \geq l), \quad (3.12)$$

donde  $n$  y  $l$  tiene la misma paridad y  $\phi_n^l(r)$  es un polinomio en  $r$  de grado  $n$ , en el cual el menor potencia de  $r$  es  $r^l$ . Estas eigenfunciones pueden ser clasificadas de acuerdo a  $n$  y  $l$  como se indica en la Tabla 2. El número total de estados para un valor dado de  $l$  se encuentra fácilmente por inspección. En general, son  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  para cada valor de  $n$ .

$l$	0	1	2	3	4	5
$n$						
5		3		7		11
4	1		5		9	
3		3		7		
2	1		5			
1		3				
0	1					

Tabla 2. Degeneración del oscilador armónico caracterizada por los números cuánticos  $n$  y  $l$

Además, de la ecuación (3.8) se tiene que  $\phi$  se puede escribir como

$$\phi_n^l(r) = r^l v(r), \quad (3.13)$$

donde  $v(r)$  es un polinomio de grado  $k = \frac{1}{2}(n - l)$ .

Sustituyendo (3.13) en la ecuación (3.5) la ecuación diferencial toma la forma

$$r^2 \phi'' + 2(r - r^3) \phi' + (2nr^2 - l(l + 1)) \phi = 0. \quad (3.14)$$

Haciendo el cambio de variable  $t = r^2$  en términos de  $v$  y  $t$  la ecuación diferencial anterior se reduce a:

$$t \frac{d^2 v}{dt^2} + \left( l + \frac{3}{2} - t \right) \frac{dv}{dt} + kv = 0. \quad (3.15)$$

Este es un caso especial de la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios de Laguerre.

### 3.1.1 Polinomios asociados de Laguerre.

Las soluciones a la ecuación diferencial

$$t \frac{d^2 v}{dt^2} + (\alpha + 1 - t) \frac{dv}{dt} + kv = 0, \quad (3.16)$$

con  $\alpha > -1$  y  $k$  un entero se llaman polinomios asociados de Laguerre

$$v = L_k^\alpha(t), \quad (3.17)$$

que son polinomios linealmente independientes de grado  $k$  ortogonales en  $[0, \infty)$  con respecto a una función de peso. Los polinomios asociados de Laguerre se dan de forma explícita a través de la fórmula

$$L_k^\alpha(t) = \sum_{v=0}^k \binom{k+\alpha}{k-v} \frac{(-t)^v}{v!}. \quad (3.18)$$

Los primeros tres polinomios son:

$$L_0^\alpha(t) = 1, \quad L_1^\alpha(t) = -t + \alpha + 1,$$

$$L_2^\alpha(t) = \frac{1}{2} [t^2 - 2(\alpha + 2)t + (\alpha + 1)(\alpha + 2)].$$

Derivando la ecuación diferencial (3.16) respecto a  $t$  se encuentra la relación

$$\frac{dL_k^\alpha}{dt} = -L_{k-1}^{\alpha+1}. \quad (3.19)$$

Otras relaciones de recurrencia son

$$t \frac{dL_k^\alpha}{dt} - kL_k^\alpha = -(k + \alpha)L_{k-1}^\alpha \quad \text{y} \quad L_k^\alpha(t) = L_k^{\alpha+1}(t) - L_{k-1}^{\alpha+1}(t). \quad (3.20)$$

Usando las relaciones (3.19), (3.20) y la ecuación diferencial (3.16) se muestra que la función generatriz

$$g(t, h) = \sum_{K=0}^{\infty} L_k^\alpha(t) h^k \quad (3.21)$$

satisface las ecuaciones diferenciales

$$(1-h) \frac{\partial g}{\partial t} + ht = 0, \quad (1-h) \frac{\partial g}{\partial h} = t \frac{\partial g}{\partial t} + (\alpha + 1 - t)g. \quad (3.22)$$

De estas ecuaciones y del hecho que

$$g(t, 0) = L_0^\alpha = 1, \quad (3.23)$$

se obtiene que  $g(t, h)$  se puede escribir como

$$g(t, h) = \frac{1}{(1-h)^{\alpha+1}} e^{-th/(1-h)}. \quad (3.24)$$

Tomando la función

$$\omega_k = e^{-t/2} t^{(\alpha+1)/2} L_k^\alpha(t) \quad (3.25)$$

y sustituyendo en la ecuación (3.16) se encuentra que esta satisface la ecuación diferencial

$$t \frac{d^2 \omega_k}{dt^2} + \left( k + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{1-\alpha^2}{4t} \right) \omega_k = 0, \quad (3.26)$$

que no contiene el termino  $d\omega_k/dt$ . Si  $k \neq k'$  se sigue que

$$\omega_{k'} \frac{d^2 \omega_k}{dt^2} - \omega_k \frac{d^2 \omega_{k'}}{dt^2} + \frac{k-k'}{t} \omega_k \omega_{k'} = 0, \quad (3.27)$$

o'

$$\frac{d}{dt} \left( \omega_{k'} \frac{d\omega_k}{dt} - \omega_k \frac{d\omega_{k'}}{dt} \right) = \frac{k'-k}{t} \omega_k \omega_{k'}. \quad (3.28)$$

Si esta ecuación es integrable en  $[0, \infty)$  el dado izquierdo de (3.28) se elimina ( $\alpha > -1$ ), por lo que se tiene

$$(k' - k) \int_0^{\infty} \omega_k \omega_{k'} \frac{dt}{t} = 0, \quad (3.29)$$

es decir

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} L_k^{\alpha}(t) L_{k'}^{\alpha}(t) dt = 0 \quad (k \neq k'). \quad (3.30)$$

Los polinomios son ortogonales en  $[0, \infty)$  con respecto a la función de peso  $t^{\alpha} e^{-t}$ . La integral (3.30) cuando  $k = k$  puede ser evaluada con ayuda de la función generatriz. Así, de las relaciones (3.21) y (3.30) se encuentra que

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} g^2(h, t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} [L_k^{\alpha}(t)]^2 h^{2k} dt, \quad (3.31)$$

usando la función generatriz (3.23) y sustituyendo en (3.30) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-h)^{2\alpha+2}} \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t(1+h)/(1-h)} dt &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-h^2)^{\alpha+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(\alpha+1) \binom{\alpha+k}{k} h^{2k}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Comparado las series de (3.32) y (3.31) tenemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} [L_k^{\alpha}(t)]^2 dt = \Gamma(\alpha+1) \binom{\alpha+k}{k}. \quad (3.33)$$

De este modo, las funciones de Laguerre

$$\Lambda_k^{\alpha}(t) = \left[ \Gamma(\alpha+1) \binom{\alpha+k}{k} \right]^{-1/2} e^{-t/2} t^{\alpha/2} L_k^{\alpha}(t) \quad (3.34)$$

son ortonormales en  $[0, \infty)$ . Es decir,

$$\int_0^{\infty} \Lambda_k^\alpha(t) \Lambda_{k'}^\alpha(t) dt = \delta_{kk'}. \quad (3.35)$$

De acuerdo con la ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14), las funciones de onda del oscilador armónico son

$$\psi_{n,l,m} = N e^{-r^2/2} r^l L_k^{l+1/2}(r^2) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.36)$$

en donde N es una constante de normalización determinada por

$$(\psi_{n,l,m}, \psi_{n,l,m}) = 1 = \frac{N}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{l+1/2} [L_k^\alpha(t)]^2 dt. \quad (3.37)$$

Evaluando la integral se tiene que

$$1 = \frac{|N|^2}{2} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \binom{k+l+\frac{1}{2}}{k}$$

$$1 = \frac{|N|^2}{2k!} \frac{[2(k+l)+1]}{2} \cdot \frac{[2(k+l)-1]}{2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (3.38)$$

Por lo tanto, las funciones de onda para el oscilador armónico tridimensional están dadas por

$$\psi_{n,l,m} = \sqrt{\frac{2}{r}} \Lambda_k^{l+\frac{1}{2}}(r^2) Y_l^m(\theta, \phi) \quad \left[ k = \frac{1}{2}(n-l) \right]. \quad (3.39)$$

Las funciones  $L_k^{l+1/2}(t)$  para  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  se muestran en la tabla 3

$n = 0, l = 0, k = 0$	$L_0^{1/2} = 1$
$n = 1, l = 1, k = 0$	$L_0^{3/2} = 1$
$n = 2, l = 0, k = 1$	$L_1^{1/2} = \frac{3}{2} - t$
$l = 2, k = 0$	$L_0^{5/2} = 1$
$n = 3, l = 1, k = 1$	$L_1^{3/2} = \frac{5}{2} - t$
$l = 3, k = 0$	$L_0^{7/2} = 1$
$n = 4, l = 0, k = 2$	$L_2^{1/2} = \frac{15}{8} - \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}t^2$
$l = 2, k = 1$	$L_1^{5/2} = \frac{7}{2} - t$
$l = 4, k = 0$	$L_0^{9/2} = 1$
$n = 5, l = 1, k = 2$	$L_2^{3/2} = \frac{35}{8} - \frac{7}{2}t + \frac{1}{2}t^2$
$l = 3, k = 1$	$L_1^{7/2} = \frac{9}{2} - t$
$l = 5, k = 0$	$L_0^{11/2} = 1$

*tabla 3. Polinomios de Laguerre  $L_k^{l+1/2}(t)$*

Además, para cada valor de  $l$  hay  $2l + 1$  estados degenerados, esto se fundamenta y surge de la simetría del sistema. Sin embargo, en este problema se ve que estados con diferentes valores de  $l$  pueden tener la misma energía de modo que la degeneración total es mayor que  $2l + 1$ . Por ejemplo, el estado con  $n = 2$  tiene momento angular 0 y 2. Esta degeneración es asociada con la especial forma del potencial  $\frac{1}{2}kr^2$  y es llamada accidental.

### 3.2 Operadores de creación y aniquilación de Dirac.

El hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2}, \quad \text{para } i = x, y \text{ o } z, \quad (3.40)$$

fue factorizado por Dirac [4] con los operadores de creación y aniquilación

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_i + iP_i), \quad a_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_i - iP_i), \quad (3.41)$$

para  $i = x, y$  ó  $z$ ,

donde  $P_i = p_i/\sqrt{m\hbar\omega}$ ,  $Q_i = q_i\sqrt{m\hbar\omega}$  y los operadores de posición  $q_i$  y de momento lineal  $p_i$  satisfacen el conmutador  $[q_i, p_i] = i\hbar$ .

De esto se sigue, que los operadores creación y aniquilación satisfacen el conmutador

$$[a_i, a_i^+] = 1, \quad \text{para } i = x, y \text{ ó } z. \quad (3.42)$$

Si se sustituye  $p_i$  y  $q_i$  en términos de  $a_i$  y  $a_i^+$  en la ecuación (3.40), se llega a que

$$H_i = \left(a_i^+ a_i + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega = \left(N_i + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad \text{con } N_i = a_i^+ a_i, \quad (3.43)$$

para  $i = x, y$  ó  $z$  y donde  $N_i$  es el operador de número o de ocupación.

Nótese que  $H_i$  dado por el ecuación (3.43) conmuta con  $N_i$  ya que  $H_i$  es lineal en  $N_i$ . Así,  $H_i$  y  $N_i$  tienen un conjunto de vectores propios en común dados por  $|n_i\rangle$ :

$$N_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle, \quad \text{para } i = x, y \text{ ó } z, \quad (3.44)$$

y

$$H_i |n_i\rangle = E_{n_i} |n_i\rangle \quad \text{para } i = x, y \text{ ó } z; \quad (3.45)$$

los estados  $|n_i\rangle$  son llamados valores propios de energía. Combinando las ecuaciones (3.43) y (3.45) obtenemos los valores propios de energía

$$E_{n_i} = \left(n_i + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (\text{para } i = x, y \text{ ó } z). \quad (3.46)$$

Usando el hecho de que la ecuación Schrödinger para el oscilador armónico tridimensional en coordenadas cartesianas es fácilmente separable, podemos encontrar estados que son el producto de tres unidimensionales estados de oscilador armónico. Por lo que, el hamiltoniano para el oscilador armónico tridimensional es la suma de tres términos:

$$H = H_x + H_y + H_z, \quad (3.47)$$

donde 
$$H_i = \frac{P_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2}, \quad (\text{para } i = x, y \text{ ó } z).$$

Los eigenvalores propios de H vienen dados por la fórmula

$$\left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \quad \text{con} \quad n = n_x + n_y + n_z \quad (3.48)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

y están  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  veces degenerados. Los observables  $N_x$ ,  $N_y$ , y  $N_z$  forman un conjunto completo de constantes de movimiento con vectores propios en común  $|n_x n_y n_z\rangle$  con valores propios  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$ . Estos vectores se obtienen a partir de la formula

$$|n_x n_y n_z\rangle = (n_x! n_y! n_z!)^{-1/2} (a_x^+)^{n_x} (a_y^+)^{n_y} (a_z^+)^{n_z} |000\rangle \quad (3.49)$$

del vector fundamental  $|000\rangle$ , el cual esta a su vez definido (salvo una constante) por las tres ecuaciones

$$a_x |000\rangle = a_y |000\rangle = a_z |000\rangle = 0. \quad (3.50)$$

Por otro lado, en coordenadas esféricas para un potencial central,  $H$ ,  $L^2$  y  $L_z$  forman un conjunto completo de observables que conmutan. Por lo que, existe un conjunto de vectores propios  $|nlm_l\rangle$  comunes a estos tres

observables, con valores propios  $(n + 3/2)\hbar\omega$ ,  $l(l + 1)\hbar^2$  y  $m_l\hbar$ , respectivamente. Los vectores  $|nlm_l\rangle$  forman un sistema ortonormal completo de vectores propios de  $\mathbf{H}$ ; estos se deducen de los vectores  $|n_x n_y n_z\rangle$  mediante una transformación unitaria.

Ahora bien, se da la solución a este problema tridimensional en términos de los operadores de Dirac del oscilador armónico unidimensional. Usando los operadores de creación y aniquilación para el oscilador armónico unidimensional (ecuación 3.41) se introducen los operadores  $a_1$ ,  $a_0$  y  $a_{-1}$  definidos como

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \quad b_0 = a_z, \quad b_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), \quad (3.51)$$

y los correspondientes hermíticos conjugados  $b_1^+$ ,  $b_0^+$  y  $b_{-1}^+$ . Estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[b_i, b_j] = 0 = [b_i^+, b_j^+], \quad [b_i, b_j^+] = \delta_{ij}, \quad (3.52)$$

donde  $i, j$  pueden ser 1, 0 y  $-1$  [14].

Calculando los operadores de número  $N_1$  y  $N_{-1}$  con los nuevos operadores  $b_j$  y  $b_j^+$

$$N_1 = b_1^+ b_1 = \frac{1}{2}(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2) + \frac{i}{2}(a_1 a_2^+ - a_2 a_1^+), \quad (3.53)$$

$$N_{-1} = b_{-1}^+ b_{-1} = \frac{1}{2}(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2) - \frac{i}{2}(a_1 a_2^+ - a_2 a_1^+). \quad (3.54)$$

Nótese que el segundo término del lado derecho de las ecuaciones anteriores expresado en términos de las coordenadas y de los momentos lineales corresponde al operador de la componente del momento angular  $L_z$

$$\frac{i}{2}(a_1 a_2^+ - a_2 a_1^+) = \frac{1}{2}L_z. \quad (3.55)$$

Con los operadores (3.51) y la relación (3.55) encontramos que

$$H = \left( N_1 + N_0 + N_{-1} + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \quad (3.56)$$

y

$$L_z = (N_1 - N_{-1})\hbar. \quad (3.57)$$

De las relaciones anteriores es evidente que  $N_1$ ,  $N_0$ ,  $N_{-1}$  y  $H$  forman un conjunto completo de observables que conmutan, por lo que existe un conjunto completo y ortonormal de vectores propios  $|n_1 n_0 n_{-1}\rangle$ . También, debido a que los operadores  $b$ 's y  $b^+$ 's satisfacen las mismas relaciones de conmutación que los operadores de creación y de aniquilación de Dirac y aparecen en la misma forma en el hamiltoniano, se tiene que

$$b_{\pm 1}^+ |N_{\pm 1}\rangle = \sqrt{N_{\pm 1} + 1} |N_{\pm 1} + 1\rangle, \quad (3.58)$$

$$b_{\pm 1} |N_{\pm 1}\rangle = \sqrt{N_{\pm 1}} |N_{\pm 1} - 1\rangle. \quad (3.59)$$

De forma general los vectores propios  $|n_1 n_0 n_{-1}\rangle$  están dados por

$$|n_1 n_0 n_{-1}\rangle = (n_1! n_0! n_{-1}!)^{-1/2} (b_1^+)^{n_1} (b_0^+)^{n_0} (b_{-1}^+)^{n_{-1}} |000\rangle. \quad (3.60)$$

Por otro lado, es fácil verificar las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores  $b$ 's,  $b^+$ 's [15] y la componente de momento angular  $L_z$

$$[L_z, b_{\pm 1}^+] = \pm b_{\pm 1}^+, \quad [L_z, b_{\pm 1}] = \mp b_{\pm 1} \quad (3.61)$$

con estas relaciones junto a las relaciones (3.52) se pueden interpretar a los operadores  $b_j$  y  $b_j^+$  como operadores de aniquilación y de creación de cuantos del tipo  $m$ , respectivamente. Así, para el estado base se tiene que

$$b_1 |000\rangle = b_{-1} |000\rangle = b_0 |000\rangle = 0. \quad (3.62)$$

Los operadores pueden escribir en forma adimensional y en coordenadas cartesianas como:

$$b_{\pm 1} = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{\partial}{\partial x} \mp i \left( y + \frac{\partial}{\partial y} \right) \right], \quad (3.63)$$

$$b_{\pm 1}^{\dagger} = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\partial}{\partial x} \mp i \left( y - \frac{\partial}{\partial y} \right) \right], \quad (3.64)$$

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( z + \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad b_0^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( z - \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3.65)$$

En coordenadas esféricas se describen como

$$b_{\pm 1} = \frac{e^{\mp i\varphi}}{2} \left[ r \sin \theta + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mp \frac{i}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (3.66)$$

$$b_{\pm 1}^{\dagger} = \frac{e^{\mp i\varphi}}{2} \left[ r \sin \theta - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mp \frac{i}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (3.67)$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \left[ r \cos \theta + \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right], \quad (3.68)$$

$$b_0^{\dagger} = \frac{1}{2} \left[ r \cos \theta - \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]. \quad (3.69)$$

Denotando a las funciones de onda para el hamiltoniano del oscilador armónico tridimensional como  $\Phi_{n,l,m}$ , de las relaciones (3.61), (3.56) y (3.57) tenemos que

$$b_{\pm 1} \Phi_{n,l,m} = \sqrt{\frac{1}{2} (n \pm m)} \Phi_{n-1,l',m \mp 1}, \quad (3.70)$$

$$b_{\pm 1}^{\dagger} \Phi_{n,l,m} = \sqrt{\frac{1}{2} (n \pm m) + 1} \Phi_{n+1,l',m \pm 1}, \quad (3.71)$$

si los estados  $\Phi_{n,l,m}$  son normalizados. De la relación (3.62), (3.66) y (3.68) la función de onda del estado base satisface la ecuación

$$\left( r + \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi_{000} = 0 \quad (3.72)$$

por lo cual, la función de onda normalizada es

$$\Phi_{000} = \frac{1}{\pi^{3/4}} e^{-r^2/2}. \quad (3.73)$$

Las funciones de onda para el caso en el que  $n = l = 1$  se obtienen de la aplicación de los  $b_{\pm 1}^+$  y  $b_0^+$  al estado base  $\Phi_{000}$ , es decir

$$\Phi_{111} = b_1^+ \Phi_{000}, \quad \Phi_{110} = b_0^+ \Phi_{000}, \quad \Phi_{11,-1} = b_{-1}^+ \Phi_{000}, \quad (3.74)$$

Aplicando los operadores en coordenadas esféricas a (3.73) es fácil verificar que

$$\Phi_{111} = \frac{1}{\pi^{3/4}} \sin\theta e^{i\varphi} r e^{-r^2/2}, \quad (3.75)$$

$$\Phi_{110} = \frac{1}{\pi^{3/4}} \cos\theta r e^{-r^2/2}, \quad (3.76)$$

$$\Phi_{11,-1} = \frac{1}{\pi^{3/4}} \sin\theta e^{-i\varphi} r e^{-r^2/2}. \quad (3.77)$$

Aplicando el operador  $b_1^+$   $n$ -veces a la función de onda del estado base encontramos las funciones de onda para las cuales  $n = l = m$  ya que el operador aumenta los numero cuánticos  $n$  y  $m$  en una unidad y por lo tanto  $l = n$

$$\Phi_{nnn} = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b_1^+)^n \Phi_{000}. \quad (3.78)$$

Una vez conocidos estos estados podemos obtener los estados para los cuales  $n = l$  y  $m$  toma cualquier valor entre  $-n \leq m \leq n$  usando los operadores de acenso y descenso de momento angular  $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ . Expresando estos operadores en términos de los operadores  $b$ 's y  $b^+$ 's tenemos que

$$L_{\pm} = \sqrt{2}(b_0^+ b_{\mp 1} - b_0 b_{\pm 1}^+). \quad (3.79)$$

Por lo tanto, podemos escribir al estado  $\Phi_{nn,n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}L_-\Phi_{nn,n}$ . Así por virtud de (3.79), (3.78) y del hecho de que  $b_0$  aniquila el estado base, se tiene que

$$\Phi_{nn,n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}b_0^+(b_1^+)^{n-1}\Phi_{000}. \quad (3.80)$$

Para encontrar los estados  $\Phi_{nn,n-2}$  basta con aplicar el operador  $L_-$  al estado  $\Phi_{nn,n-1}$ . Así es fácil verificar que el estado  $\Phi_{nn,n-2}$  está dado por la expresión

$$\Phi_{nn,n-2} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)!}}[(b_0^+)^2 - (n-1)b_{-1}^+b_1^+](b_1^+)^{n-2}\Phi_{000}. \quad (3.81)$$

Por otro lado, los estados con  $n$  impar tienen momento angular impar, mientras aquellos con  $n$  par tienen momento angular par. Esto se sigue del hecho de que bajo una transformación de paridad las funciones de onda de estados de momento angular impar cambian de signo, mientras aquellos con momento angular par permaneces igual.

Fácilmente se puede mostrar que, para un valor dado de  $n$ ,  $l$  toma los valores  $n, n-2, n-4, \dots, 0$  o  $1$ .

Fijémonos ahora en como obtener los estados para los cuales  $l = n - 2s$ . Para esto encontremos los estados  $\Phi_{n,l,l}$  ya que conociendo estos estados se pueden calcular los estados  $\Phi_{n,l,m}$  a partir de la aplicación sucesiva del operador  $L_-$  a la función  $\Phi_{n,l,l}$ .

A partir del hecho de que  $l = n - 2s$  y las relaciones que existen entre los numero cuánticos  $N_1, N_0, N_{-1}, n, m$  y  $l$ , para el estado  $\Phi_{n,l,l}$  se tienen que cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} l &= m, \\ N_1 + N_0 + N_{-1} &= n, \\ N_1 - N_{-1} &= n - 2s \end{aligned} \quad (3.82)$$

las cuales se satisfacen tomando

$$\begin{aligned}
N_0 &= 2r, \\
N_{-1} &= s - r, \\
N_1 &= n - s - r,
\end{aligned}$$

donde  $r = 0, 1, 2, \dots, s$ .

Como existen  $s$  posibles valores de  $r$ , hay  $s$  estados  $\Phi$  para los cuales se cumplen las condiciones (3.82) por lo que el estado  $\Phi_{n,l,l}$  tiene que estar dado como una combinación lineal de todos estos estados, así, existen constantes  $c_r$  tales que

$$\Phi_{n,l,l} = \left[ \sum_{r=0}^s c_r (b_0^+)^{2r} (b_{-1}^+)^{s-r} (b_1^+)^{n-s-r} \right] \Phi_{000}. \quad (3.83)$$

Como  $l = m$  se tiene que  $L_+ \Phi_{n,l,l} = 0$  ya que  $m$  se encuentra en su valor máximo, por lo que la condición para encontrar las constantes  $c_r$  es

$$(b_0^+ b_{-1} - b_0 b_1^+) \left[ \sum_{r=0}^s c_r (b_0^+)^{2r} (b_{-1}^+)^{s-r} (b_1^+)^{n-s-r} \right] \Phi_{000} = 0. \quad (3.84)$$

Usando las relaciones de conmutación de los operadores  $b_{-1}, b_0, b_1^+$  se tiene

$$\sum_{r=0}^{s-1} c_r (s-r) (b_0^+)^{2r+1} (b_{-1}^+)^{s-r-1} (b_1^+)^{n-s-r} \Phi_{000} - \quad (3.85)$$

$$- \sum_{r=1}^s c_r 2r (b_0^+)^{2r-1} (b_{-1}^+)^{s-r} (b_1^+)^{n-s-r+1} \Phi_{000} = 0. \quad (3.85)$$

Haciendo un cambio de variable en la segunda sumatoria se encuentra la relación de recurrencia para coeficientes  $c_r$  que está dada por

$$c_r = \frac{s-r+1}{2r} c_{r-1}, \quad (3.86)$$

del cual se obtiene

$$c_r = \frac{s!}{r!(s-r)! 2^r} c_0. \quad (3.87)$$

Finalmente se tiene que

$$\Phi_{n,l,l} = c_0 \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} \frac{1}{2^{s-r}} (b_0^+)^{2(s-r)} (b_{-1}^+)^r (b_1^+)^{n-2s+r} \Phi_{000}, \quad (3.83)$$

donde  $c_0$  es una constante de normalización y  $\binom{s}{r}$  el coeficiente binomial.

De este modo, a través de los operadores de creación y aniquilación de Dirac se han construido las funciones  $\Phi_{n,l,l}$  del oscilador armónico tridimensional, partir de estas funciones se encuentran las funciones  $\Phi_{n,l,m}$  al aplicar el operador  $L_-$  sobre las funciones  $\Phi_{n,l,l}$  Fig. 3.1.

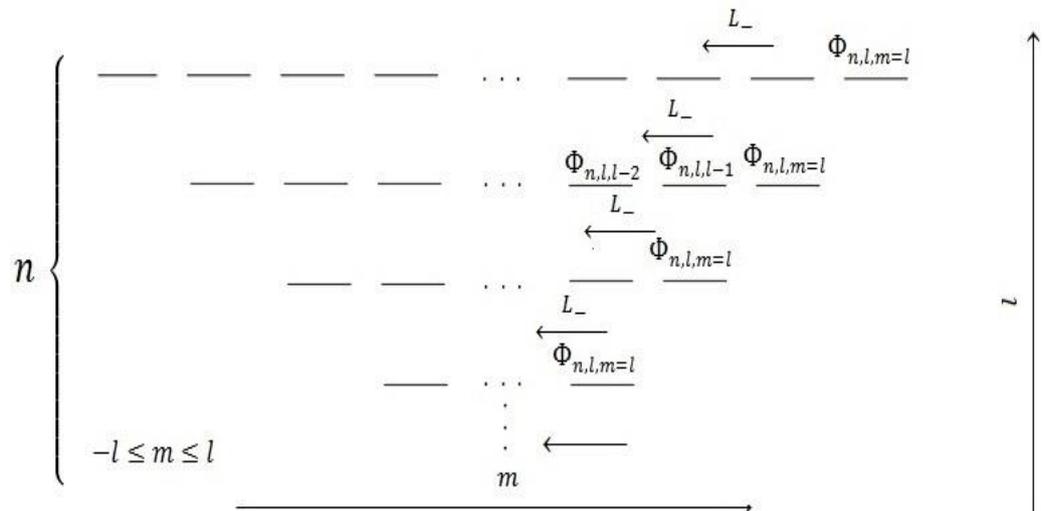


Figura 3.1. Construcción de las funciones de onda del oscilador armónico para un valor de  $n$  fijo a través de la aplicación del operador  $L_-$  a las funciones  $\Phi_{n,l,l}$ .

### 3.3 Factorización de Green.

El hamiltoniano del oscilador armónico tridimensional en coordenadas esféricas es:

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} L^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2. \quad (3.84)$$

Escrito de esta manera, el hamiltoniano involucra un potencial central  $V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$ , de modo que el hamiltoniano conmuta con el operador de momento angular, formando así los operadores  $H, L^2$  y  $L_z$  un conjunto completo de observables que conmutan. En consecuencia, el momento angular se conserva, y existen simultáneos estados de energía y de momento angular  $|nlm_l\rangle$  que tiene como respectivos valores propios  $m_l \hbar$ ,  $l(l+1)\hbar^2$  y  $E_{nlm_l}$ . Así, el correspondiente problema de valores propios para el oscilador armónico tridimensional se reduce a:

$$H|nlm_l\rangle = E_{nlm_l}|nlm_l\rangle \quad (3.85)$$

$$\left( \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} l(l+1)\hbar^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \right) |nlm_l\rangle = E_{nlm_l} |nlm_l\rangle. \quad (3.86)$$

El operador  $p_r$  depende únicamente de la variable  $r$ , por lo tanto el problema de eigenvalores tridimensional se reduce a un problema en una variable, en la variable radial. Haciendo uso del método de factorización de Green se resuelve el problema de eigenvalores, encontrando operadores  $a_n$  y constantes reales  $E_n$  tales que satisfacen las relaciones de recurrencia

$$a_1^+ a_1 + E_1 = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} l(l+1)\hbar^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2, \quad (3.87)$$

$$a_{k+1}^+ a_{k+1} + E_{k+1} = a_k a_k^+ + E_k. \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (3.88)$$

Tomando en cuenta que el lado derecho de la ecuación (3.87) tiene una dependencia en  $1/r^2$  y  $r^2$  proponemos a los operadores  $a_n$  como

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ p_r + i \left( b_k r + \frac{c_k}{r} \right) \right], \quad (3.89)$$

donde  $b_k, c_k$  son constantes reales a determinar y  $p_r$  un operador diferencial lineal en la variable  $r$  dado por  $p_r = (-i\hbar)(d/dr + 1/r)$  que cumple con la relación de conmutación

$$[f(r), p_r] = i\hbar \frac{df(r)}{dr}. \quad (3.90)$$

Usando (3.89) y (3.90) se muestra que

$$a_k^+ a_k = \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + b_k^2 r^2 + b_k(2c_k + \hbar) + \frac{c_k}{r^2}(c_k - \hbar) \right] \quad (3.91)$$

y

$$a_k a_k^+ = \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + b_k^2 r^2 + b_k(2c_k - \hbar) + \frac{c_k}{r^2}(c_k + \hbar) \right]. \quad (3.92)$$

Sustituyendo  $a_1^+ a_1$  en la relación de recurrencia (3.87), encontramos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + b_1^2 r^2 + b_1(2c_1 + \hbar) + \frac{c_1}{r^2}(c_1 - \hbar) \right] + E_1 \\ &= \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} l(l+1)\hbar^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2, \end{aligned} \quad (3.93)$$

donde, igualando los coeficientes de iguales potencias de  $r$  en ambos lados de la igualdad, se encuentran las siguientes relaciones entre los coeficientes

$$c_1(c_1 - \hbar) = l(l+1)\hbar^2, \quad (3.94)$$

$$b_1^2 = m^2\omega^2, \quad (3.95)$$

$$b_1(2c_1 + \hbar) + 2mE_1 = 0. \quad (3.96)$$

La ecuación (3.94) corresponde a la ecuación cuadrática

$$c_1^2 - c_1\hbar - l(l+1)\hbar^2 = 0,$$

con soluciones  $c_1 = \hbar(l+1)$  y  $c_1 = -\hbar l$ .

De las soluciones (3.95) y (3.96) se obtiene que

$$b_1 = \pm m\omega \quad y \quad E_1 = -\frac{b_1}{2m}(2c_1 + \hbar).$$

Así, las soluciones que llevan al valor más grande de la constante  $E_1$  son:

$$c_1 = (l + 1)\hbar, \quad (3.97)$$

$$b_1 = -m\omega, \quad (3.98)$$

$$E_1 = \hbar\omega \left( l + \frac{3}{2} \right). \quad (3.99)$$

Considerando ahora el caso general (3.88) y sustituyendo en esta los operadores  $a_{k+1}^+ a_{k+1}$  y  $a_k a_k^+$  se encuentra la relación:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + b_{k+1}^2 r^2 + b_{k+1}(2c_{k+1} + \hbar) + \frac{c_{k+1}}{r^2}(c_{k+1} - \hbar) \right] + E_{k+1} \\ &= \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + b_k^2 r^2 + b_k(2c_k - \hbar) + \frac{c_k}{r^2}(c_k + \hbar) \right] + E_k. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Igualando los coeficientes en cada lado de la igualdad correspondientes a las mismas potencias de  $r$  se encuentran las siguientes relaciones entre las constantes

$$c_{k+1}(c_{k+1} - \hbar) = c_k(c_k + \hbar), \quad (3.101)$$

$$b_{k+1}^2 = b_k^2, \quad (3.102)$$

$$b_{k+1}(2c_{k+1} + \hbar) + 2mE_{k+1} = b_k(2c_k - \hbar) + 2mE_k. \quad (3.103)$$

Las expresiones anteriores son relaciones de recurrencia entre las constantes  $b_k$ ,  $c_k$  y  $E_k$ . Usando las soluciones (3.97), (3.98) y (3.99) las soluciones a estas ecuaciones para las que se tiene el valor más grande de la constante  $E_k$  son

$$c_k = (l + k)\hbar, \quad (3.104)$$

$$b_k = -m\omega, \quad (3.105)$$

$$E_k = \hbar\omega \left( l + 2k - \frac{1}{2} \right). \quad (3.106)$$

Para que las constantes  $E_k$  sean valores propios de la energía se debe verificar que  $a_k|\chi_k\rangle = 0$  posee una solución. Ya que la constante  $E_k$  y los operadores  $a_k$  tiene una dependencia de  $l$  denotamos a estos como  $E_k^{(l)}, a_k^{(l)}$  y  $\chi_k^{(l)}(r) = \langle r|\chi_k^{(l)}\rangle$  como las funciones auxiliares.

Hallemos ahora las funciones  $\chi_k^{(l)}(r)$  que son soluciones de la ecuación diferencial en el espacio de posición

$$a_k^{(l)}|\chi_k^{(l)}\rangle = \left[ -i\hbar \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) + i \left( -m\omega r + \frac{(l+k)\hbar}{r} \right) \right] \chi_k^{(l)}(r) = 0.$$

Agrupando términos la ecuación toma la forma

$$\left[ \frac{d}{dr} + \frac{m\omega}{\hbar} r - \frac{(l+k-1)}{r} \right] \chi_k^{(l)}(r) = 0, \quad (3.107)$$

fácilmente se puede demostrar que esta ecuación diferencial tiene la solución no normalizada

$$\chi_k^{(l)}(r) = r^{l+k-1} e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}, \quad (3.108)$$

por lo cual la constante  $E_k^{(l)} = (l + 2k - 1/2)\hbar\omega$  corresponden al  $k$ -ésimo eigenvalor de la energía con momento angular  $l$ . El correspondiente diagrama de energías se muestra en la Figura 3.2.

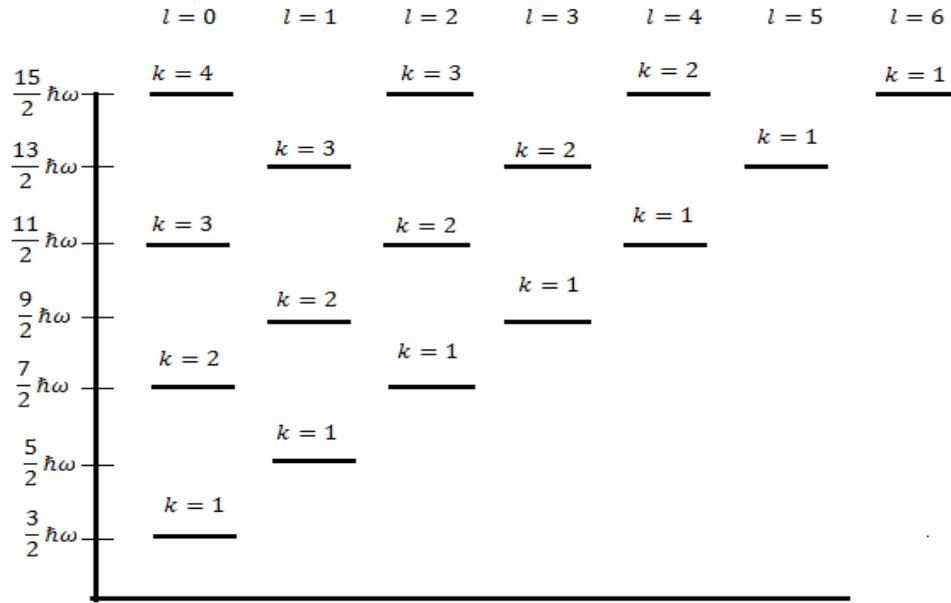


Fig. 3.2. Diagrama de los niveles de energía del oscilador tres dimensional.

Las eigenfunciones no normalizadas para el oscilador armónico tridimensional están dadas por la expresión

$$\psi_k^{(l)}(r) \propto a_1^{(l)+} a_2^{(l)+} \dots a_{k-1}^{(l)+} \chi_k^{(l)}(r), \quad (3.109)$$

donde

$$a_k^{(l)+} = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{d}{dr} - \frac{m\omega}{\hbar} r + \frac{(l+k+1)}{r} \right].$$

En la tabla 4 se muestran los primeros estados del oscilador armónico 3-D obtenidos a través de (3.109), los estados que se muestran en la tabla están degenerados a excepción del estado base, la degeneración que se muestra es respecto al número cuántico  $l$  sin considerar la degeneración respecto a  $m$  ya que  $-l \leq m \leq l$ .

$E$	$l$	$k$	$\chi_k^{(l)}(r)$	$\psi_k^{(l)}(r) \propto a_1^{(l)+} a_2^{(l)+} \dots a_{k-1}^{(l)+} \chi_k^{(l)}(r)$	$\psi_k^{(l)}(r)$
$\frac{3}{2} \hbar \omega$	0	1	$\chi_1^{(0)}(r)$	$\psi_1^{(0)}(r) \propto \chi_1^{(0)}(r)$	$e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$
$\frac{5}{2} \hbar \omega$	1	1	$\chi_1^{(1)}(r)$	$\psi_1^{(1)}(r) \propto \chi_1^{(1)}(r)$	$r e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$
$\frac{7}{2} \hbar \omega$	0	2	$\chi_2^{(0)}(r)$	$\psi_2^{(0)}(r) \propto a_1^{(0)+} \chi_2^{(0)}(r)$	$\left(\frac{3}{2} - \frac{m\omega}{\hbar} r^2\right) e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$
	2	1	$\chi_1^{(2)}(r)$	$\psi_1^{(2)}(r) \propto \chi_1^{(2)}(r)$	$r^2 e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$
$\frac{9}{2} \hbar \omega$	1	2	$\chi_2^{(1)}(r)$	$\psi_2^{(1)}(r) \propto a_1^{(1)+} \chi_2^{(1)}(r)$	$\left(\frac{5}{2} - \frac{m\omega}{\hbar} r^2\right) e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$
	3	1	$\chi_1^{(3)}(r)$	$\psi_1^{(3)}(r) \propto \chi_1^{(3)}(r)$	$r^3 e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$
$\frac{11}{2} \hbar \omega$	0	3	$\chi_3^{(0)}(r)$	$\psi_3^{(0)}(r) \propto a_1^{(0)+} a_2^{(0)+} \chi_3^{(0)}(r)$	$\left(\frac{15}{8} - \frac{m\omega}{\hbar} r^2 + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 r^4\right) e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$
	2	2	$\chi_2^{(2)}(r)$	$\psi_2^{(2)}(r) \propto a_1^{(2)+} \chi_2^{(2)}(r)$	$\left(\frac{7}{2} - \frac{m\omega}{\hbar} r^2\right) e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$
	4	1	$\chi_1^{(4)}(r)$	$\psi_1^{(4)}(r) \propto \chi_1^{(4)}(r)$	$r^4 e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}$

Tabla 4. Funciones de onda no normalizadas para primeros estados degenerados del oscilador armónico tridimensional obtenidas a través del Método de factorización de Green.

Finalmente, la general solución radial del oscilador armónico está dada por

$$\psi_k^{(l)}(r) \propto x^{l/2} L_{k-1}^{l+1/2}(x) e^{-x}, \quad (3.110)$$

donde  $x = (m\omega/2\hbar)r^2$  y  $L_{k-1}^{l+1/2}(x)$  son los polinomios de Laguerre ya mencionados (sección 3.1.1), la completa función de onda es por lo tanto

$$\Psi_{klm} = Y_l^m(\theta, \phi) \psi_k^{(l)}(r). \quad (3.108)$$

Nótese que todos los estados son degenerados a excepción del estado base (Figura 3.2), para un valor fijo de la energía existen varios valores de  $l$  y  $k$  además para cada valor de  $l$  hay  $2l + 1$  estados con diferente valor de  $m$  de esto se tiene que el número total de los estados es  $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ .

## Capítulo 4

### EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

En este capítulo se dan las soluciones cuánticas del potencial del átomo de hidrógeno tridimensional. Las soluciones se obtienen resolviendo directamente la ecuación de Schrödinger y por el método de factorización de Green.

#### 4.1 Forma directa.

La ecuación de Schrödinger para el problema cuántico de dos partículas cuyo potencial de interacción depende solo de la posición relativa  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  es

$$H\psi = \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m_1} - \frac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \psi = E\psi,$$

donde los subíndices 1 y 2 denota a cada una de las partículas,  $\nabla_1^2$  y  $\nabla_2^2$  son los Laplacianos con respecto a la partícula uno y dos respectivamente.

Ya que el potencial  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  depende solo de la posición relativa entre partículas, es más conveniente escribir la ecuación anterior en las coordenadas relativas y centro de masa [17],

$$\left[ -\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{R}}^2}{2M} - \frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \right] \psi = E\psi,$$

donde  $M = m_1 + m_2$  y  $\mu$  es la masa reducida de las partículas. La transformación de  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  a  $(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  están dadas por

$$\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

La ecuación de Schrödinger en las coordenadas de centro de masa y relativas se resuelve por el método de separación de variables, se propone una solución de la forma

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r}),$$

donde  $\Phi(\mathbf{R})$  y  $\psi(\mathbf{r})$  son las funciones de onda del centro de masa y del movimiento relativo. Sustituyendo la función de onda  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  en la ecuación de Schrödinger en las coordenadas de centro de masa y relativas lleva a las ecuaciones

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 \Phi(\mathbf{R}) = E_{\mathbf{R}} \Phi(\mathbf{R}),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}),$$

con la condición

$$E_{\mathbf{R}} + E_{\mathbf{r}} = E,$$

la energía del centro de masa, más la energía de la energía de las partículas alrededor de él. De las ecuaciones anteriores se muestra que el centro de masa se mueve como una partícula libre. Luego entonces, podemos escoger un nuevo sistema de referencia inercial en el cual el centro de masa se entre en reposo (sistema de centro de masa). Por esto, el problema cuántico de dos partículas que interactúan bajo un potencial central  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  en el sistema centro de masas, se reduce a resolver la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa  $\mu$  y coordenadas relativa  $\mathbf{r}$ , que se mueve bajo el potencial  $V(\mathbf{r})$

$$H_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}).$$

Por comodidad se omitirá el subíndice  $r$  de aquí en adelante. Escribiendo la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas y en términos del operador  $L^2$  la ecuación toma la forma

$$H \psi(r, \theta, \phi) = \left[ \frac{1}{2\mu} p_r^2 + \frac{1}{2\mu r^2} L^2 + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi),$$

donde

$$p_r^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Si se sustituye  $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_l^m(\theta, \phi)$  y usando la expresión

$$L^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi),$$

la ecuación de Schrödinger se reescribe como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (4.1)$$

Considerando el potencial del átomo de hidrogeno  $V(r) = -e^2/r$ , y tomando el cambio de variable y definiendo la constante

$$\epsilon = \frac{2\mu RE}{\hbar^2}, \quad R(r) = \frac{U(r)}{r},$$

la ecuación (4.1) toma la forma

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left[ \epsilon + \frac{2\mu e^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U(r) = 0.$$

Haciendo el cambio de variable  $x = 2kr$ , con  $k = \sqrt{-2\mu E}/\hbar$  y  $v = (e^2/\hbar)\sqrt{-\mu/2E}$ , la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{v}{x} - \frac{1}{4} \right] U(x) = 0. \quad (4.2)$$

Examinando el comportamiento asintótico de la función de onda de la ecuación anterior para valores muy pequeños de  $x$  se encuentra una solución de la forma  $U(x) = Ax^{l+1} + Bx^{-l}$ , mientras que para valores muy grandes de  $x$   $U(x)$  toma la forma  $U(x) = e^{\pm x/2}$ . Así tomando las soluciones que cumplan con las condiciones del sistema,  $U(x)$  debe ser de la forma,

$$U(x) = x^{l+1}e^{-x/2}\Phi(x),$$

con la cual, la ecuación (4.2) se reduce a la ecuación diferencial para  $\Phi(x)$

$$\left[ x \frac{d^2}{dx^2} + (2l + 2 - x) \frac{d}{dx} - (l + 1 - \nu) \right] \Phi(x) = 0. \quad (4.3)$$

Esta ecuación tiene como soluciones a los polinomios asociados de Laguerre (Sección 3.1.1) [18]

$$\Phi(x) = L_{\nu-1-l}^{2l+1}(x),$$

con la condición de que  $2l + 1 > -1$  y que  $\nu - 1 - l = 0, 1, 2, \dots$  de donde el número cuántico principal  $\nu \equiv n = 1, 2, 3, \dots$  y  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ .

Por lo tanto, la función de onda radial para el átomo de hidrogeno tridimensional

$$R_{n,l}(x) = N_{n,l} x^l e^{-x/2} L_{n-1-l}^{2l+1}(x) \quad (4.4)$$

con  $x = 2r\mu e^2/n\hbar^2$  y con  $N_{n,l}$  una constante de normalización que depende de  $n$  y  $l$ .

De la definición de  $\nu \equiv n$ , se encuentra que el espectro de energía viene dado por la ecuación,

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (n = l + 1, l + 2, l + 3 \dots). \quad (4.5)$$

La función de onda completa es

$$\psi_{n,l,m}(\mathbf{r}, \theta, \phi) = C_{n,l,m} R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \phi),$$

con  $C_{n,l,m}$  la constante de normalización.

El principal número cuántico  $n$  determina la energía, y para cada nivel  $E_n$ ,  $l$  puede tomar cualquier valor positivo menor que  $n$ . La coincidencia de las energías de los estados que pertenecen a diferente  $l$  es accidental. La degeneración total de los estados de energía  $E_n$  es

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

## 4.2 Factorización de Green.

Un hecho importantes que conviene recalcar es que al considerar el cambio de coordenadas al sistema de centro de masa y relativas el problema del átomo de hidrogeno se reduce a resolver la ecuación radial

$$H_r \psi(\mathbf{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E_r \psi(\mathbf{r})$$

en las coordenadas relativas con el potencial  $V(\mathbf{r}) = -e^2/r$  y masa reducida  $\mu$ . Omitiendo el subíndice  $r$  y escribiendo el hamiltoniano en coordenadas esféricas

$$H = \frac{1}{2\mu} P_r^2 + \frac{1}{2\mu r^2} L^2 - \frac{e^2}{r}. \quad (4.6)$$

Designamos a las funciones  $\psi_{n,l,m}$  como las simultaneas eigenfunciones de  $L^2, L_z$  y  $H$ . Al actuar el operador  $H$  sobre las funciones  $\psi_{n,l,m}$  podemos remplazar el operador  $L^2$  por  $l(l+1)\hbar^2$ , con lo cual se obtiene el problema de eigenvalores para la energía:

$$\left[ \frac{1}{2\mu} P_r^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} \right] \psi_{n,l,m} = E \psi_{n,l,m}. \quad (4.7)$$

En esta ecuación se observa únicamente una dependencia de la variable  $r$  y del operador  $P_r$ , por lo que el problema 3-dimensional se reduce a un problema unidimensional en la variable  $r$ .

Usando el método de factorización de Green encontramos los eigenvalores y eigenfunciones de la ecuación (4.7). Para esto, se encuentran los operadores  $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots$  y las constantes reales  $E_1, E_2, \dots, E_j, \dots$  que cumplan con las relaciones de recurrencia

$$a_1^\dagger a_1 + E_1 = \frac{1}{2\mu} P_r^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r}, \quad (4.8)$$

$$a_{k+1}^\dagger a_{k+1} + E_{k+1} = a_k a_k^\dagger + E_k. \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (4.9)$$

Si se propone el operador  $a_k$  de la forma

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ P_r + i \left( b_k + \frac{c_k}{r} \right) \right], \quad (4.10)$$

donde  $b_k, c_k$  constantes reales y  $P_r$  un operador diferencial lineal dado por  $P_r = (-i\hbar)(d/dr + 1/r)$ .

Se calculan los operadores  $a_k a_k^\dagger$  y  $a_k^\dagger a_k$  a partir de (4.10), fácilmente se puede mostrar que estos operadores están dados por:

$$a_k^\dagger a_k = \frac{1}{2\mu} \left[ P_r^2 + b_k^2 + 2b_k \frac{c_k}{r} + \frac{c_k}{r^2} (c_k - \hbar) \right] \quad (4.11)$$

y

$$a_k a_k^\dagger = \frac{1}{2\mu} \left[ P_r^2 + b_k^2 + 2b_k \frac{c_k}{r} + \frac{c_k}{r^2} (c_k + \hbar) \right]. \quad (4.12)$$

Si se sustituye  $a_1^\dagger a_1$  en la ecuación (4.8), se tiene

$$\frac{1}{2\mu} \left[ P_r^2 + b_1^2 + 2b_1 \frac{c_1}{r} + \frac{c_1}{r^2} (c_1 - \hbar) \right] + E_1 = \frac{1}{2\mu} P_r^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r}. \quad (4.12)$$

Comparando los coeficientes de las mismas potencias de  $r$  de cada lado de la igualdad se encuentran las relaciones

$$\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} = \frac{c_1}{2\mu}(c_1 - \hbar), \quad (4.13)$$

$$\frac{b_1 c_1}{\mu} = -e^2, \quad (4.14)$$

y

$$\frac{b_1^2}{2\mu} + E_1 = 0. \quad (4.15)$$

De la ecuación (4.13) se obtiene la ecuación cuadrática

$$c_1^2 - \hbar c_1 - l(l+1)\hbar^2 = 0,$$

que tiene como soluciones

$$c_1 = (l+1)\hbar \quad \text{y} \quad c_1 = -\hbar l.$$

Al sustituir estas soluciones en la ecuación (4.14) obtenemos los valores para  $b_1$

$$b_1 = -\frac{\mu e^2}{(l+1)\hbar} \quad \text{y} \quad b_1 = -\frac{\mu e^2}{l\hbar}.$$

Sustituyendo los valores de  $b_1$  en la ecuación (4.15) se obtiene la constante  $E_1$ , donde el valor más grande que puede tomar es:

$$E_1 = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\mu e^2}{(l+1)\hbar} \right)^2, \quad (4.16)$$

con  $c_1 = (l+1)\hbar$  y  $b_1 = -\mu e^2 / (l+1)\hbar$ .

De la relación de recurrencia (4.9) y de las ecuaciones (4.11) y (4.12) obtenemos la expresión general:

$$\frac{1}{2\mu} \left[ P_r^2 + b_{k+1}^2 + 2b_{k+1} \frac{c_{k+1}}{r} + \frac{c_{k+1}}{r^2} (c_{k+1} - \hbar) \right] + E_{k+1} =$$

$$\frac{1}{2\mu} \left[ P_r^2 + b_k^2 + 2b_k \frac{c_k}{r} + \frac{c_k}{r^2} (c_k + \hbar) \right] + E_k.$$

comparando los coeficientes con la misma potencia de  $r$  en cada lado de la igualdad tenemos que

$$c_{k+1}(c_{k+1} - \hbar) = c_k(c_k + \hbar), \quad (4.17)$$

$$\mathbf{b}_{k+1}c_{k+1} = \mathbf{b}_k c_k, \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{2\mu} \mathbf{b}_{k+1}^2 + E_{k+1} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{b}_k^2 + E_k. \quad (4.19)$$

La ecuación (4.17) es una ecuación cuadrática con las soluciones  $c_{k+1} = c_k + \hbar$  y  $c_{k+1} = -c_k$ , con lo cual obtenemos los valores para  $c_k$

$$c_k = (l+k)\hbar \quad \text{y} \quad c_k = (-1)^{k+1}(l+1)\hbar. \quad (4.20)$$

Con la relación de recurrencia (4.18) encontramos que  $\mathbf{b}_k c_k = \mathbf{b}_1 c_1 = -\mu e^2$ , y por lo tanto  $\mathbf{b}_k = -\mu e^2 / c_k$  el cual toma los valores

$$\mathbf{b}_k = -\frac{\mu e^2}{(l+k)\hbar} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_k = -\frac{\mu e^2}{(-1)^{k+1}(l+1)\hbar}. \quad (4.21)$$

Por último, de la relación de recurrencia (4.19) se encuentra que  $\frac{1}{2\mu} \mathbf{b}_k^2 + E_k = \frac{1}{2\mu} \mathbf{b}_1^2 + E_1 = 0$ , por lo que la expresión para la constante  $E_k$  está dada como

$$E_k = -\frac{1}{2\mu} \mathbf{b}_k^2. \quad (4.22)$$

Sustituyendo los valores de  $\mathbf{b}_k$  en la expresión anterior se encuentra que el valor mas grande que puede tomar la constante  $E_k$  esta dado por:

$$E_k = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\mu e^2}{(l+k)\hbar} \right)^2, \quad (4.23)$$

con los valores de las constantes  $c_{k+1} = (l+k)\hbar$  y  $\mathbf{b}_k = -\mu e^2 / (l+k)\hbar$ .

Para que las constantes  $E_k$  sean eigenvalores de la energía se tiene que satisfacer la condición  $a_k |\chi_k\rangle = 0$ , tomando al número cuántico principal  $n \equiv l+k$  la expresión (4.23) tiene la misma forma de la de los niveles de energía del átomo de hidrogeno de la sección 4.1

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.24)$$

El diagrama de los niveles de energía se muestra en la Figura 4.1, donde se observa que los niveles de energía a excepción del estado base son degenerados.

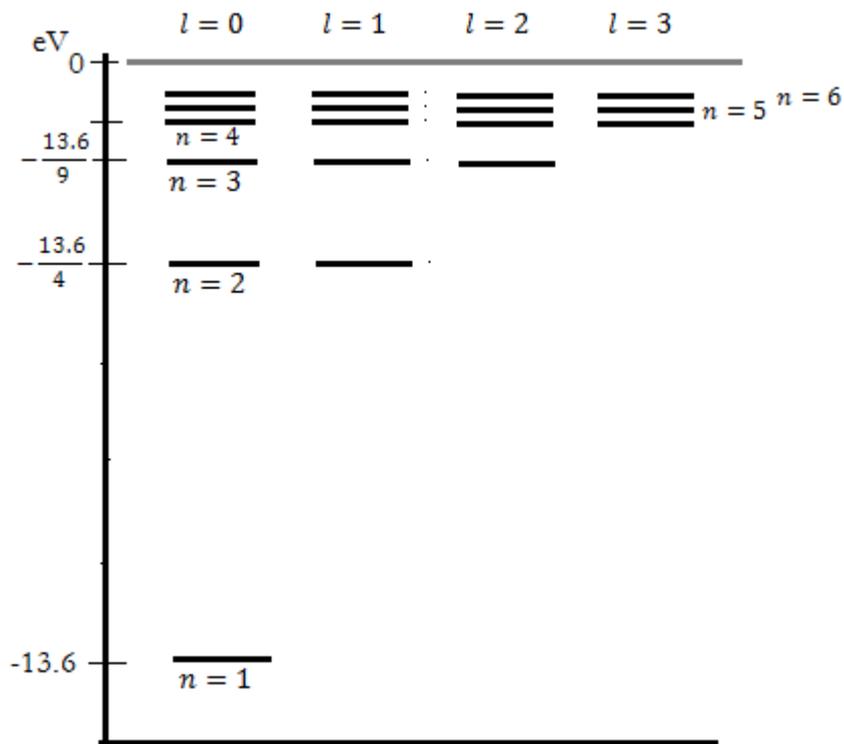


Figura 4.1 Diagrama de los niveles de energía del Átomo de Hidrogeno

Por otro lado, de la condición para los operadores  $a_k^{(l)}|\chi_k\rangle = 0$  se encuentran las funciones auxiliares, donde el operador  $a_k$  tiene la forma explícita

$$a_k^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ P_r - \frac{i\hbar}{(l+k)a_0} + \frac{i(l+k)\hbar}{r} \right], \quad (4.25)$$

con  $a_0 = \hbar^2/\mu e^2$  (radio de Bohr).

Sustituyendo el operador  $P_r = -i\hbar \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right)$  y escribiendo la ecuación  $a_k^{(l)}|\chi_k\rangle = 0$  en la representación de posición se tiene la ecuación diferencial

$$\left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{(l+k)a_0} - \frac{(l+k)\hbar}{r} \right] \chi_k^{(l)}(r) = 0. \quad (4.26)$$

Esta ecuación tiene la solución no normalizada

$$\chi_k^{(l)}(r) = r^{l+k-1} e^{-r/((l+k)a_0)}. \quad (4.27)$$

Las correspondientes eigenfunciones no normalizadas para la parte radial se obtienen de la expresión

$$\psi_k^{(l)}(r) \propto a_1^{(l)+} a_2^{(l)+} \dots a_{k-1}^{(l)+} r^{l+k-1} e^{-r/((l+k)a_0)}, \quad (4.28)$$

donde  $a_k^{(l)+}$  es el operador dado por:

$$a_k^{(l)+} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \left[ -i\hbar \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) + \frac{i\hbar}{(l+k)a_0} - \frac{(l+k)i\hbar}{r} \right].$$

Usando las expresiones anteriores (4.27) y (4.28) se obtienen las funciones de onda del estado base y los dos primeros estados excitados los cuales esta degenerados, estos estados se muestran en la tabla 5.

$E$ (eV)	$l$	$k$	$\chi_k^{(l)}(r)$	$\psi_k^{(l)}(r) \propto a_1^{(l)+} a_2^{(l)+} \dots a_{k-1}^{(l)+} \chi_k^{(l)}(r)$	$\psi_k^{(l)}(r)$
-13.6	0	1	$\chi_1^{(0)}(r)$	$\psi_1^{(0)}(r) \propto \chi_1^{(0)}(r)$	$e^{-r/a_0}$
13.6	1	1	$\chi_1^{(1)}(r)$	$\psi_1^{(1)}(r) \propto \chi_1^{(1)}(r)$	$r e^{-r/2a_0}$
	0	2	$\chi_2^{(0)}(r)$	$\psi_2^{(0)}(r) \propto a_1^{(0)+} \chi_2^{(0)}(r)$	$\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$
-13.6 9	2	1	$\chi_1^{(2)}(r)$	$\psi_1^{(2)}(r) \propto \chi_1^{(2)}(r)$	$r^2 e^{-r/3a_0}$
	1	2	$\chi_2^{(1)}(r)$	$\psi_2^{(1)}(r) \propto a_1^{(1)+} \chi_2^{(1)}(r)$	$r \left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-r/3a_0}$
	0	3	$\chi_3^{(0)}(r)$	$\psi_3^{(0)}(r) \propto a_1^{(0)+} a_2^{(0)+} \chi_3^{(0)}(r)$	$\left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$

Tabla 5. Funciones de onda del estado base y de los primeros 2 estados excitados del Átomo de Hidrogeno.

Así, de la tabla anterior y al calcular los siguientes estados se observa que la general solución para la parte radial está dada por:

$$\psi_{n,l}(r) = N_{n,l} x^l e^{-x/2} L_{n-l-1}^{2l+1}(x), \quad (4.29)$$

donde  $x = 2r/a_0n$  y  $a_0 = \hbar^2/\mu e^2$  es el radio de Bohr. Además se define al número cuántico principal como  $n \equiv l + k$  y el espectro de energías se puede escribir como

$$E_n = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2}. \quad (4.30)$$

La función de onda completa es

$$\Psi_{n,l,m} = C_{n,l,m}\psi_{n,l}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \quad ,$$

Con  $C_{n,l,m}$  una constante de normalización.

Como es bien conocido, la degeneración de los niveles de energía es  $n^2$ . También recordemos que los estados  $\Psi_{n,l,m}$  del átomo de hidrogeno son de paridad definida. La paridad de estos estados es  $(-1)^l$ .

## Capítulo 5

### ANALOGÍAS ENTRE LOS OPERADORES DEL MÉTODO DE FACTORIZACIÓN DE GREEN Y LOS OPERADORES DEL MÉTODO DE FACTORIZACIÓN DE INFELD Y HULL PARA EL OSCILADOR ARMÓNICO Y ÁTOMO DE HIDRÓGENO 3-D

En este capítulo se muestra cómo actúan los operadores del método de factorización de Green para construir los estados del oscilador armónico y átomo de hidrogeno 3-D. Se da en forma breve el método de factorización desarrollado por Infeld y Hull para resolver el problema de eigenvalores en la mecánica cuántica. Además, se obtienen los operadores de la factorización de Infeld y Hull para los potenciales del átomo de hidrogeno y del oscilador armónico tridimensionales. Comparando estos operadores con los operadores obtenidos por el método de factorización de Green.

#### 5.1 Operadores $a_k^{(l)+}$ del Oscilador armónico 3-D y átomo de hidrógeno.

En lo que resta de este capítulo se hará énfasis en los operadores del método de factorización de Green y en la forma en la que actúan estos para construir los estados para el caso del oscilador armónico 3-D y átomo de hidrógeno 3-D.

Haciendo el cambio de subíndice de  $k = 1,2,3, \dots$  a  $j = 0,1,2,3 \dots$  podemos reescribir la expresión de las eigenfunciones con la constante de normalización  $N_j^l$  de la siguiente forma:

$$\psi_j^{(l)}(r) = N_j^l a_0^{(l)+} a_1^{(l)+} \dots a_{j-1}^{(l)+} \chi_j^{(l)}(r). \quad (5.1)$$

De la forma de los operadores  $a_j^{(l)+}$  y de las funciones auxiliares  $\chi_j^{(l)}(r)$  es fácil ver que para el átomo de hidrógeno 3-D y oscilador armónico 3-D estos cumplen con las relaciones

$$\chi_{j+n}^{(l)}(r) = \chi_j^{(l+n)}(r), \quad a_{j+n}^{(l)+} = a_j^{(l+n)+}, \quad (5.2)$$

donde  $n$  puede tomar los valores  $0,1,2,3 \dots$ .

Veamos cómo a partir de los operadores  $a_j^{(l)+}$  y de las funciones auxiliares se generan los estados  $\psi_j^{(l)}(r)$ .

1) El subíndice  $j$  se puede asociar a la jerarquía de SUSY-QM, las funciones  $\chi_j^{(l)}(r)$  corresponden a los estados base de los hamiltonianos  $H_j^{(l)} = a_j^{(l)+} a_j^{(l)}$  que conforman la jerarquía (Figura 5.1). Es decir, para cada valor fijo de  $l$  existe una jerarquía. Por ejemplo; para el caso de  $l = 0$  las funciones  $\chi_j^{(0)}(r)$  son los estados base de los hamiltonianos  $H_j^{(0)} = a_j^{(0)+} a_j^{(0)}$  de la jerarquía, los operadores  $a_j^{(0)+}$  convierten los estados de  $H_{j+1}^{(0)}$  en estados de  $H_j^{(0)}$ , por lo que podemos encontrar los estados de  $H_0^{(0)}$ . Por otro parte, nótese que los  $H_0^{(l)} = a_0^{(l)+} a_0^{(l)}$  son los hamiltonianos a partir de los cuales se generan las jerarquías para diferentes valores de  $l$ , estos hamiltonianos  $H_0^{(l)} = a_0^{(l)+} a_0^{(l)}$  corresponden a la expresión del hamiltoniano del oscilador armónico 3-D (ecuación 3.86) o del átomo de hidrógeno 3-D (ecuación 4.7) según sea el caso. Los términos

$$\frac{1}{2mr^2} l(l+1)\hbar^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad \text{y} \quad \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r}$$

se pueden pensar como sucesiones  $V(r, l)$  de potenciales a los cuales para cada valor de  $l$  se genera una jerarquía. Así, aplicando los operadores  $a_j^{(l)+}$  a los estados de los hamiltonianos de la jerarquía podemos encontrar los estados de  $H_0^{(l)} = a_0^{(l)+} a_0^{(l)}$  que en conjunto son los estados del oscilador armónico o del átomo de hidrógeno tridimensionales. En las Figuras 5.1 y 5.2 se muestran los estados del oscilador armónico 3-D y átomo de hidrógeno 3-D a partir de la jerarquía de SUSY-QM

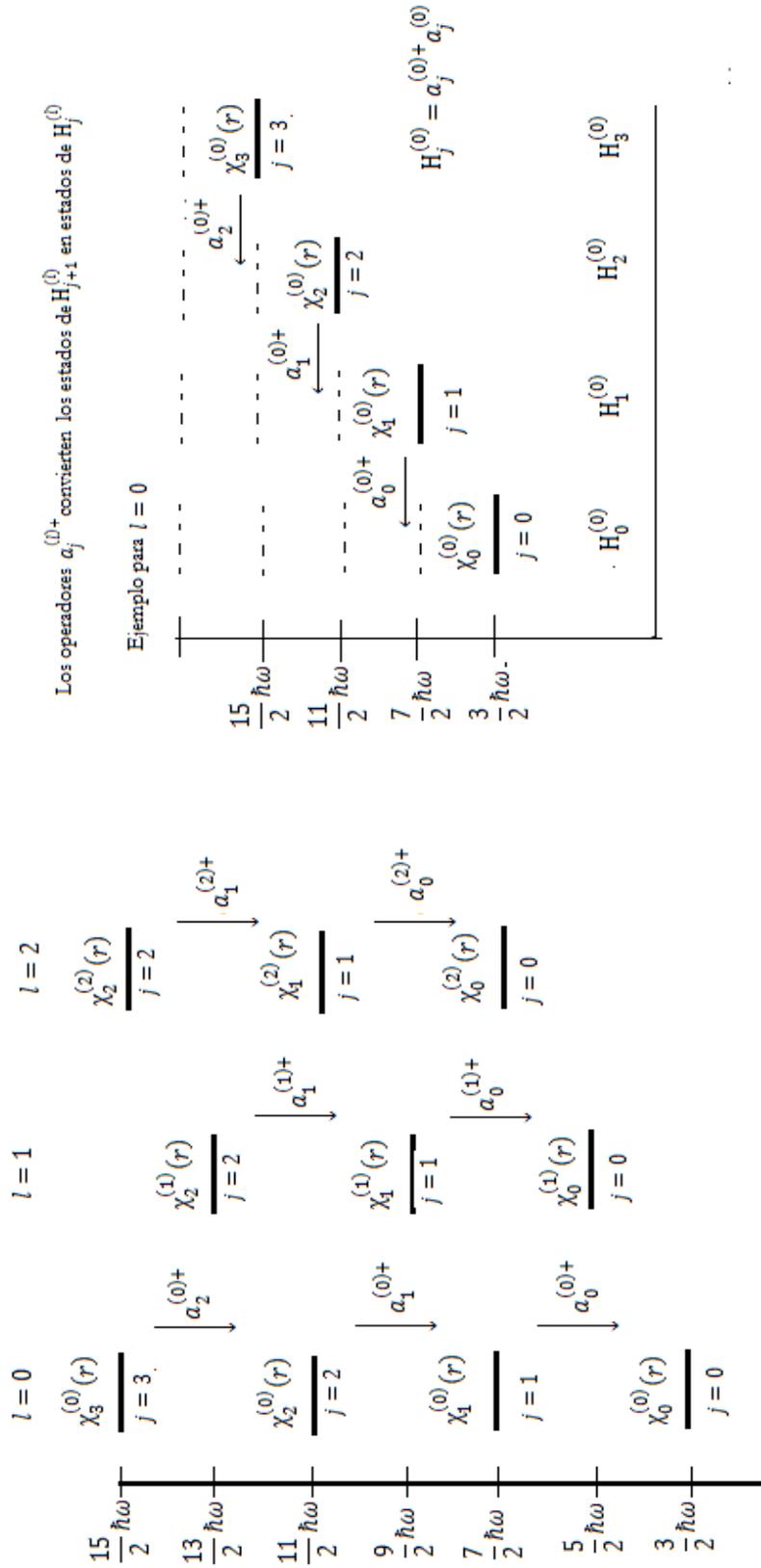


Figura 5.1. Funciones auxiliares  $\chi_j^{(l)}(r)$  como funciones de onda de los estados base de los Hamiltonianos  $H_j^{(l)} = a_j^{(l)+} a_j^{(l)}$  de la jerarquía para un valor fijo de  $l = 0, 1, 2$ , para el caso de Oscilador Armónico 3-D.

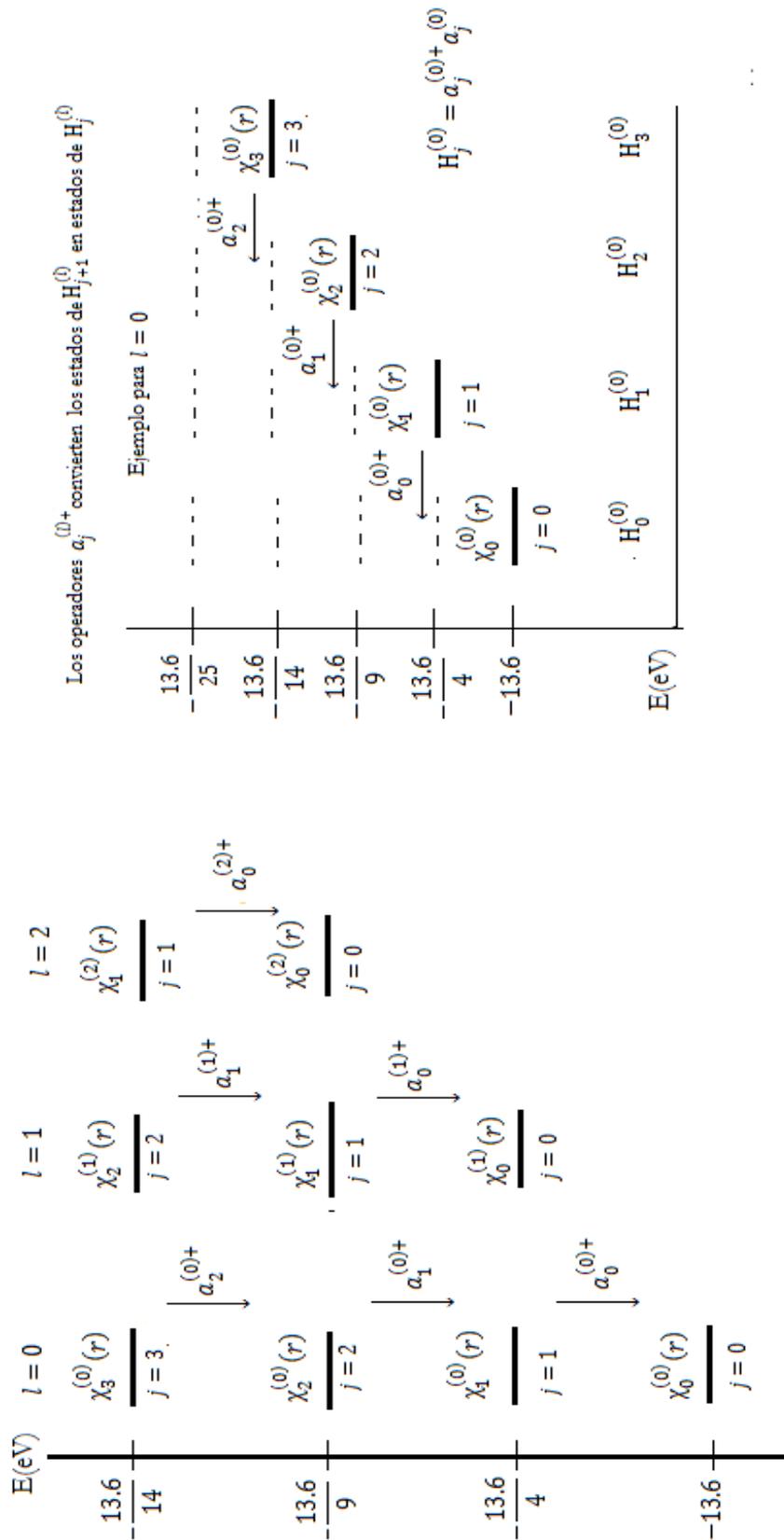


Figura 5.2. Funciones auxiliares  $\chi_j^{(l)}(r)$  como funciones de onda de los estados base de los Hamiltonianos  $H_j^{(l)} = a_j^{(l)+} a_j^{(l)}$  de la jerarquía para un valor fijo de  $l = 0, 1, 2$ , para el caso del Atomo de hidrogeno 3-D.

2) Usando las relaciones (5.2) podemos escribir la expresión (5.1) como

$$\psi_j^{(l)}(r) = N_{j,l} a_0^{(l)+} a_0^{(l+1)+} a_0^{(l+2)+} \dots a_0^{(l+j-1)+} \chi_0^{(l+j)}(r). \quad (5.3)$$

La función auxiliar  $\chi_0^{(l+j)}(r)$  corresponde al estado  $\psi_0^{(l+j)}(r)$ , por lo que (5.3) toma la forma

$$\psi_j^{(l)}(r) = N_{j,l} a_0^{(l)+} a_0^{(l+1)+} a_0^{(l+2)+} \dots a_0^{(l+j-1)+} \psi_0^{(l+j)}(r). \quad (5.4)$$

Por virtud de las relaciones (5.2) en (5.1), el término  $a_0^{(l+j-1)+} \psi_0^{(l+j)}(r)$  se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_0^{(l+j-1)+} \psi_0^{(l+j)}(r) &= a_0^{(l+j-1)+} \chi_0^{(l+j)}(r) = a_0^{(l+j-1)+} \chi_1^{(l+j-1)}(r) = \psi_1^{(l+j-1)}(r), \\ a_0^{(l+j-1)+} \psi_0^{(l+j)}(r) &= \psi_1^{(l+j-1)}(r), \end{aligned}$$

y así

$$\psi_j^{(l)}(r) = N_{j,l} a_0^{(l)+} a_0^{(l+1)+} a_0^{(l+2)+} \dots a_0^{(l+j-2)+} \psi_1^{(l+j-1)}(r).$$

Análogamente, usando las ecuaciones (5.2) y (5.1) el término  $a_0^{(l+j-2)+} \psi_1^{(l+j-1)}(r)$  se reescribe como

$$\begin{aligned} a_0^{(l+j-2)+} \psi_1^{(l+j-1)}(r) &= a_0^{(l+j-2)+} a_0^{(l+j-1)+} \psi_0^{(l+j)}(r) = a_0^{(l+j-2)+} a_1^{(l+j-2)+} \psi_2^{(l+j-2)}(r), \\ a_0^{(l+j-2)+} \psi_1^{(l+j-1)}(r) &= \psi_2^{(l+j-2)}(r), \end{aligned}$$

y con esto

$$\psi_j^{(l)}(r) = N_{j,l} a_0^{(l)+} a_0^{(l+1)+} a_0^{(l+2)+} \dots a_0^{(l+j-3)+} \psi_2^{(l+j-2)}(r).$$

Realizando este procedimiento reiteradamente usando (5.2) encontramos que el término de  $a_0^{(l+1)+} a_0^{(l+2)+} \dots a_0^{(l+j-1)+} \chi_0^{(l+j)}(r)$  de (5.3) se transforma en

$$a_0^{(l+1)+} a_1^{(l+1)+} \dots a_{j-2}^{(l+1)+} \chi_{j-1}^{(l+1)}(r) = \psi_{j-1}^{(l+1)}(r),$$

y así, (5.3) se escribe como

$$\psi_j^{(l)}(r) = N_{j,l} a_0^{(l)+} \psi_{j-1}^{(l+1)}(r). \quad (5.5)$$

Usando las expresiones anteriores la función de onda del  $j$ th estado de momento angular  $l$  está dada por

$$\psi_j^{(l)}(r) = N_{j,l} a_0^{(l)+} \psi_{j-1}^{(l+1)}(r). \quad \text{para } j \geq 1 \quad (5.6)$$

La ecuación anterior nos dice que el operador  $a_0^{(l)+}$  es un operador de ascenso en  $j$  y descenso en  $l$ . El operador  $a_0^{(l)+}$  desciende al número cuántico  $l$  a  $(l - 1)$  y pasa del estado  $j$  al estado  $j + 1$ . Un análisis similar nos muestra que los operadores  $a_0^{(l)}$  cambian el número cuántico  $l$  a  $l + 1$  y al estado  $j$  al estado  $j - 1$ , de esto se tiene que es suficiente conocer a los operadores  $a_0^{(l)+}$  y a las funciones auxiliares  $\chi_0^{(l)}(r)$  para construir las funciones de onda  $\psi_j^{(l)}(r)$ . En la Figura 5.3 se muestra la forma en la que actúan los operadores  $a_0^{(l)+}$  para construir las funciones de onda  $\psi_j^{(l)}(r)$ . La figura 5.1 es un caso particular en el cual los operadores  $a_0^{(l)+}$  y  $a_0^{(l)}$  construyen las funciones de onda para el mismo nivel de energía, para el átomo de hidrógeno 3-D este es el caso (Figura 5.3), mientras que para el oscilador armónico 3-D los operadores  $a_0^{(l)+}$  y  $a_0^{(l)}$  construyen las funciones de onda para diferentes niveles de energía. Esto se debe a que la expresión de los valores de la energía para el átomo de hidrógeno contiene el término lineal  $l + j$  el cual no cambia al aplicarse el operador  $a_0^{(l)+}$  sobre las funciones de onda, ya que este pasa a la función de onda  $\psi_j^{(l)}$  a la función  $\psi_{j'}^{(l')}$  donde el término  $l' + j' = l + j$  es el mismo al de la función  $\psi_j^{(l)}$ , por lo cual los estados obtenidos a través de  $a_0^{(l)+}$  se encuentra en el mismo nivel de energía. Para el caso de oscilador armónico 3-D en la expresión de los valores de la energía se encuentra el término  $2j + l$  el cual al aplicar el operador  $a_0^{(l)+}$  a una función de onda este término se escribe como  $2j + l + 1$ . La diferencia entre los niveles de energía del oscilador armónico 3-D es 1, por lo tanto esto nos sigue que el operador  $a_0^{(l)+}$  cambia el número cuántico  $l$  a  $l - 1$  y cambia el nivel de energía  $n$  a  $n + 1$  (Figura 5.4).

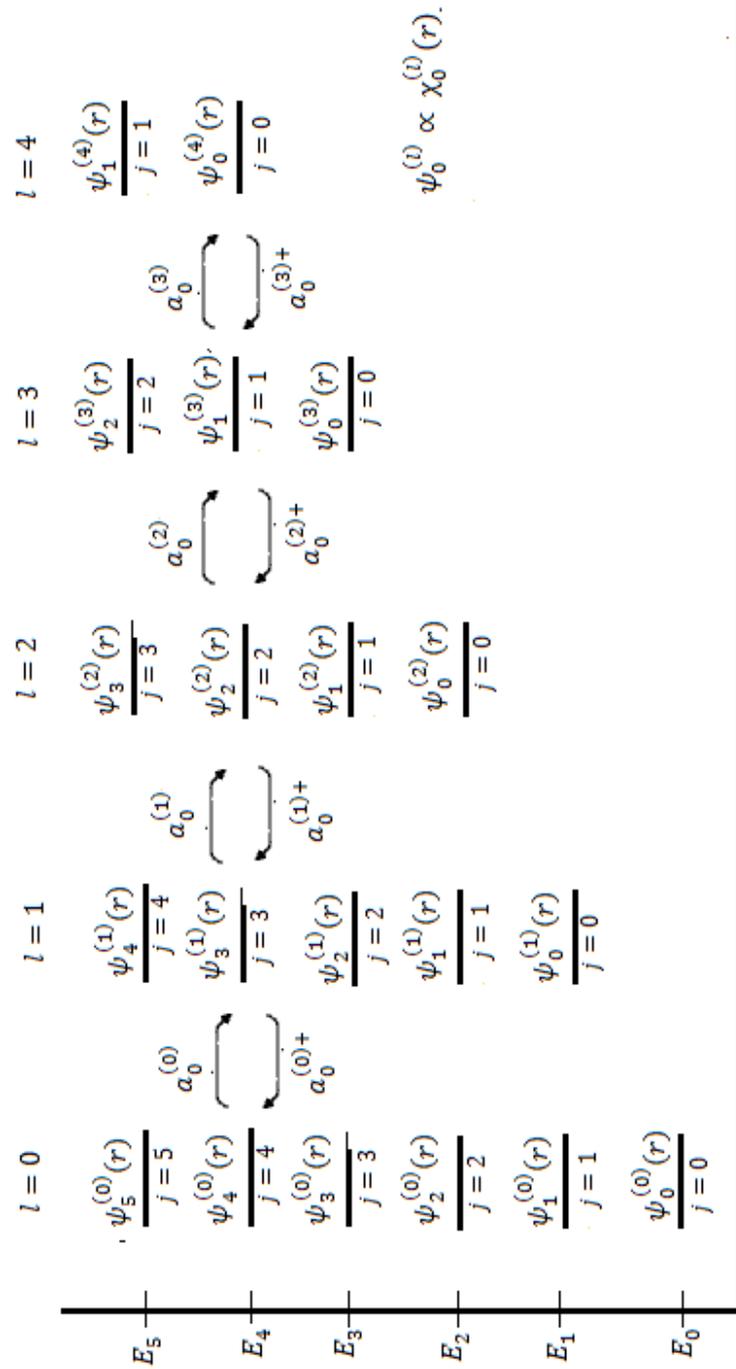


Figura 5.3. Se muestra la forma en la que actúan los operadores  $a_j^{(l)+}$  y  $a_j^{(l)}$  sobre los estados  $\psi_j^{(l)}$  para los casos en los que  $l = 0, 1, 2, 3, 4$ . Los estados  $\psi_0^{(l)} \propto \chi_0^{(l)}(r)$ .

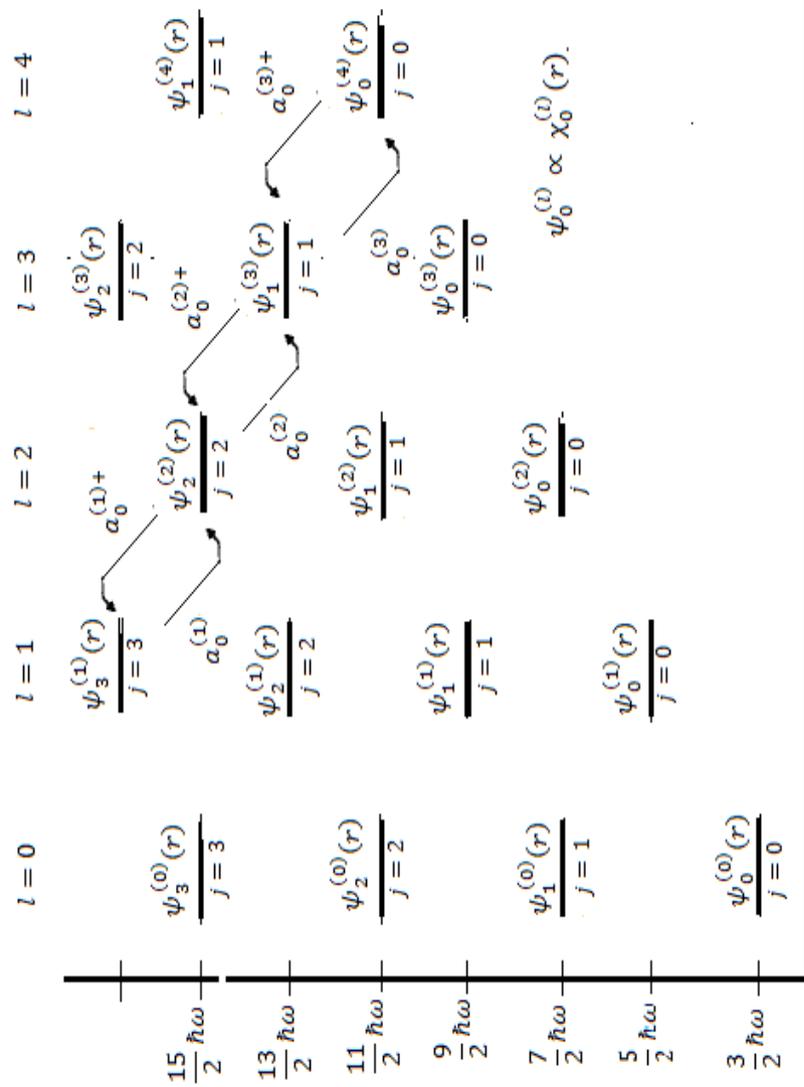


Figura 5.4. Forma en la que actúan los operadores  $a_j^{(l)+}$  sobre los estados del Oscilador armónico 3-D. Estos operadores cambian el número cuántico  $l$  a  $l - 1$  y el número cuántico principal  $n$  a  $n + 1$ .

## 5.2 Método de factorización de Infeld y Hull.

El método de factorización de Infeld y Hull es aplicable en general a problemas de eigenvalores de la forma

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + r(x, m)\right)u_{\lambda m}(x) = \lambda u_{\lambda m}(x). \quad (5.7)$$

A este tipo de ecuaciones diferenciales se les conoce como ecuaciones de Sturm-Lioville. En este tipo de ecuaciones se pone en evidencia la dependencia de un parámetro  $m$ , que es un parámetro real que toma valores que se incrementan (decrementan) en pasos de una unidad de un valor mínimo (máximo).

Es fácil verificar que la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi(x, m)}{dx^2} + V(x, m)\psi(x, m) = E\psi(x, m)$$

tomando el cambio de variable  $V(x, m) = \frac{2\mu}{\hbar^2}v(x, m)$  y definiendo la constante  $\lambda = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$  toma la forma que de la (5.1), y por lo tanto es un caso particular de esta.

La ecuación (5.7) es factorizable por el método de Infeld y Hull si existen los operadores lineales [19]

$$O_+(m) = -\frac{d}{dx} + k(x, m), \quad O_-(m) = \frac{d}{dx} + k(x, m),$$

que satisfacen las ecuaciones

$$O_+(m)O_-(m)u_{\lambda m}(x) = [\lambda - \mathcal{L}(m)]u_{\lambda m}(x), \quad (5.8)$$

$$O_-(m+1)O_+(m+1)u_{\lambda m}(x) = [\lambda - \mathcal{L}(m+1)]u_{\lambda m}(x),$$

donde  $\mathcal{L}(m)$  es independiente de  $x$  y  $\lambda$  es independiente de  $x$  y  $m$ . De las ecuaciones anteriores se puede demostrar que  $O_-(m)u_{\lambda m}(x)$  es una eigenfunción de la ecuación (5.7) con parámetro  $m-1$ , y con el mismo

eigenvalor  $\lambda$  (es decir, para la misma energía en el caso de la ecuación de Schrödinger unidimensional), de igual modo se puede mostrar que  $O_+(m+1)u_{\lambda m}(x)$  es una eigenfunción de (5.7) con parámetro  $m+1$ , y el mismo eigenvalor  $\lambda$

$$O_-(m)u_{\lambda m}(x) = C_1 u_{\lambda(m-1)}(x), \quad (5.9)$$

$$O_+(m+1)u_{\lambda m}(x) = C_2 u_{\lambda(m+1)}(x),$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. De estas ecuaciones se ve que los operadores  $O_-(m)$  y  $O_+(m)$  son operadores de acenso y descenso del parámetro  $m$  para el mismo valor de  $\lambda$  (o de la energía).

Como los operadores  $O_{\pm}(m)$  factorizan la ecuación (5.7) cada una de las ecuaciones (5.8) deben ser equivalentes a ésta, por lo que se obtienen las expresiones [20]

$$k^2(x, m) - k'(x, m) + \mathcal{L}(m) = V(x, m), \quad (5.10)$$

$$k^2(x, m+1) + k'(x, m+1) + \mathcal{L}(m+1) = V(x, m), \quad (5.11)$$

de donde se encuentra

$$k(x, m) = \frac{1}{2} \frac{V'(x, m-1) + V'(x, m)}{V(x, m-1) - V(x, m)}, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{L}(m) = \frac{1}{2} (V(x, m-1) + V(x, m)) - (k(x, m))^2. \quad (5.13)$$

Fácilmente se puede probar que los operadores  $O_-(m)$  y  $O_+(m)$  son el adjunto uno del otro, es decir,

$$O_-(m)^+ = O_+(m) \text{ y } O_+(m)^+ = O_-(m).$$

Asumiendo que la función  $u_{\lambda m}(x)$  es cuadráticamente integrable sobre un intervalo  $(a, b)$ , se tiene que las funciones  $u_{\lambda(m\pm 1)}(x)$  son cuadráticamente integrables si las cantidades  $[\lambda - \mathcal{L}(m+1)]$  y  $[\lambda - \mathcal{L}(m)]$  toman valores positivos o iguales a cero

$$\int_a^b u_{\lambda m+1}(x)^* u_{\lambda m+1}(x) dx = |C_2|^2 [\lambda - \mathcal{L}(m+1)] \int_a^b u_{\lambda m}(x)^* u_{\lambda m}(x) dx \geq 0,$$

$$\int_a^b u_{\lambda m-1}(x)^* u_{\lambda m-1}(x) dx = |C_1|^2 [\lambda - \mathcal{L}(m)] \int_a^b u_{\lambda m}(x)^* u_{\lambda m}(x) dx \geq 0.$$

(5.14)

De lo anterior se tiene que las cantidades  $[\lambda - \mathcal{L}(m+1)]$  y  $[\lambda - \mathcal{L}(m)]$  pueden ser negativas para un cierto valor de  $m$ , lo cual no puede ser, ya que contradice la suposición que la solución  $u_{\lambda m}(x)$  es cuadráticamente integrable. Considérense los siguientes casos:

1) Suponiendo que  $\mathcal{L}(m)$  es creciente, es decir,  $\mathcal{L}(m+1) > \mathcal{L}(m)$ , entonces al suponer que  $u_{\lambda m}(x)$  es cuadráticamente integrable, se encuentra que existe un valor máximo  $m_0$  de  $m$  tal que:

$$O_+(m_0 + 1)u_{\lambda m_0}(x) = 0, \quad (5.15)$$

lo cual requiere

$$\lambda = \mathcal{L}(m_0 + 1). \quad (5.16)$$

De la ecuación (5.15) se encuentra la función de onda  $u_{\lambda m_0}(x)$  que está dada por la expresión

$$u_{\lambda m_0}(x) = C_{m_0} \exp\left(\int k(x, m_0 + 1) dx\right) \quad (5.17)$$

con la constante de normalización

$$C_{m_0} = \left[ \int_a^b \exp\left(-2 \int k(x, m_0 + 1) dx\right) dx \right]^{-1/2}.$$

De las expresiones (5.14) se tiene que las constantes de normalización  $C_1$  y  $C_2$  están dadas por:

$$C_2 = \sqrt{\lambda - \mathcal{L}(m+1)} \quad \text{y} \quad C_1 = \sqrt{\lambda - \mathcal{L}(m)}.$$

Así, se tiene que los estados normalizados  $u_{\lambda(m\pm 1)}(x)$  se encuentran mediante

$$u_{\lambda(m-1)}(x) = \frac{O_-(m)u_{\lambda m}(x)}{\sqrt{\lambda - \mathcal{L}(m)}}, \quad (5.18)$$

$$u_{\lambda(m+1)}(x) = \frac{O_+(m+1)u_{\lambda m}(x)}{\sqrt{\lambda - \mathcal{L}(m+1)}}.$$

Mediante la aplicación sucesiva del operador  $O_-(m)/\sqrt{\lambda - \mathcal{L}(m)}$  sobre el estado  $u_{\lambda m_0}(x)$  podemos encontrar los estados normalizados para el mismo valor de  $\lambda$  (energía)

$$u_{\lambda m}(x) = C_{m_0} \frac{O_-(m+1)O_-(m+2) \dots O_-(m_0)u_{\lambda m_0}(x)}{\sqrt{(\lambda - \mathcal{L}(m+1))(\lambda - \mathcal{L}(m+2)) \dots (\lambda - \mathcal{L}(m_0))}}. \quad (5.19)$$

2) Un procedimiento análogo al anterior para una función  $\mathcal{L}(m)$  decreciente,  $\mathcal{L}(m) > \mathcal{L}(m+1)$  lleva a encontrar que existe un valor mínimo de  $m = m'_0$  tal que

$$O_-(m'_0)u_{\lambda m'_0}(x) = 0, \quad (5.20)$$

$$\lambda = \mathcal{L}(m'_0),$$

esto quiere decir que  $m'_0$  es el valor más bajo que  $m$  puede tomar.

Las eigenfunciones normalizadas para un valor fijo de  $\lambda$  (energía) están dadas por

$$u_{\lambda m}(x) = C_{m'_0} \frac{O_+(m)O_+(m-1) \dots O_+(m_0+1)u_{\lambda m'_0}(x)}{\sqrt{(\lambda - \mathcal{L}(m))(\lambda - \mathcal{L}(m-2)) \dots (\lambda - \mathcal{L}(m'_0+1))}}, \quad (5.21)$$

donde

$$u_{\lambda m'_0}(x) = C_{m'_0} \exp\left(\int k(x, m'_0) dx\right), \quad (5.22)$$

con

$$C_{m'_0} = \left[ \int_a^b \exp\left(-2 \int k(x, m'_0) dx\right) dx \right]^{-1/2}. \quad (5.23).$$

Finalmente, nótese que para la ecuación de Schrödinger unidimensional, las ecuaciones (5.15), (5.16) y (5.20) determinan el espectro de energía. Además, el espectro de energías y las eigenfunciones dependen completamente de la forma de la función  $\mathcal{L}(m)$  como función de  $m$ .

### 5.3 Analogías entre los operadores del método de Green y los operadores del método de IH.

En este capítulo se usará el método de factorización de IH para encontrar los estados del oscilador armónico 3-D y átomo de hidrógeno 3-D. Se hará una comparación entre los operadores obtenidos por el método de IH y los operadores obtenidos por el método de factorización de Green para estos potenciales.

#### 5.3.1. Oscilador armónico 3-D.

Un tratamiento general para potenciales centrales en coordenadas esféricas es fácil demostrar que la ecuación de Schrödinger se puede escribir como la ecuación radial [21]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] U(r) = EU(r), \quad (5.24)$$

donde  $U(r) = rR(r)$ .

Escribiendo la ecuación anterior para el particular caso del oscilador armónico tridimensional en el cual el potencial  $V(r)$  es de la forma  $m\omega^2 r^2/2$ . Tomando la medición de  $r$  en las unidades  $(\hbar/m\omega)^{1/2}$  y definiendo a  $\epsilon = E/\hbar\omega$  tenemos que la ecuación radial de Schrödinger se reduce a

$$-\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + r^2 \right] U(r) = 2\epsilon U(r).$$

Tomando a  $V(r, l) = r^2 + l(l + 1)/r^2 + 2l + 1$ ,  $\lambda = 2\epsilon + 2l + 1$  y usando las expresiones (5.12) y (5.13) encontramos que

$$k(r, l) = \frac{l}{r} - r.$$

Los operadores de IH están dados como:

$$O_{\pm}(l) = -\left(\mp \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} - r\right). \quad (5.25)$$

Sustituyendo los operadores  $O_{\pm}(l)$  en las ecuaciones (5.7) se encuentra que  $\mathcal{L}(l + 1) - \mathcal{L}(l) = 4$ . Esto lleva a escribir

$$\mathcal{L}(l) = 4l - 1 \quad (5.26)$$

y rescribir a  $\lambda$  como

$$\lambda = 2\epsilon + 2l. \quad (5.27)$$

La expresión anterior de  $\lambda$  nos sugiere que los operadores  $O_{\pm}(l)$  son operadores de acenso y descenso de  $l$  y  $\lambda$ .

Ya que  $l \geq 0$ . La función  $\mathcal{L}(l)$  es creciente para todo  $l$ . Así, usando la ecuación (5.15), y definiendo el valor máximo que toma  $l$  como  $n$  encontramos que

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega. \quad (5.28)$$

La función de onda normalizada se encuentra de

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{n+1}{r} + r\right) u_{\lambda_n, l=n}(r) = 0,$$

donde la ecuación diferencial de primer orden tienen la solución

$$u_{n, l=n}(r) = \sqrt{\frac{2^{n+3}}{(2n+1)!! \sqrt{\pi}}} r^{n+1} e^{-\frac{r^2}{2}}. \quad (5.29)$$

Como el operador  $O_-(l)$  desciende al número cuéntico  $l$  a  $(l - 1)$  y  $\lambda$  debe ser invariante en su forma  $\lambda = 2\epsilon + 2l$ , esto implica que el número cuántico principal  $n$  debe pasar a  $n + 1$ . Similarmente,  $O_+(l + 1)$  pasa de  $l \rightarrow l + 1$  y de esto se tiene que  $n$  pasa a  $n - 1$ .

$$O_-(l)u_{n,l}(r) = u_{n+1,l-1}, \quad (5.30)$$

$$O_+(l+1)u_{n,l}(r) = u_{n-1,l+1}.$$

Veamos a la relación entre los operadores del método de factorización de Green y los operadores de IH.

Los operadores  $a_0^{(l)+}$  y  $O_-(l)$  actúan del mismo modo sobre las funciones de onda  $\psi(r)$  del oscilador armónico 3-D, ambos incrementan el número cuántico  $n$  por una unidad y decrementan el número cuántico  $l$  en una unidad. Las funciones  $\chi_0^{(l)}(r)$  del método de factorización de Green son iguales a las funciones  $u_{n,l=n}/r$  del método de factorización de IH. Estas funciones corresponden a los valores de energía que se encuentran en la diagonal (Figura 5.4) que acota el espectro de energía. Esto se traduce de las respectivas condiciones

$$a_j^{(l)}\chi_0^{(l)}(r) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \mathcal{L}(l_{max} + 1).$$

Las funciones de onda  $\psi_n^{(l)}(r)$  se pueden obtener aplicando sucesivamente los operadores  $a_j^{(l)+}$  o  $O_-(l)$  sobre las funciones auxiliares  $\chi_0^{(l)}(r)$  o  $u_{n,l=n}$  respectivamente.

Cabe mencionar que con el método de factorización de IH se pueden encontrar otros 2 operadores  $\bar{O}_\pm(l)$  tomando el caso  $\mathcal{L}(l_{min}) = \lambda$  con  $\mathcal{L}(l) = -4l + 1$  y  $\lambda = 2\epsilon - 2l$ . Con estos nuevos operadores se pueden encontrar las funciones  $\psi_n^{(l)}(r)$  de igual modo. El operador  $\bar{O}_+(l)$  cambia el número cuántico  $l$  a  $l + 1$  y el número cuántico principal  $n$  a  $n + 1$  mientras que el operador  $\bar{O}_-(l)$  pasa el número cuántico  $l$  a  $l - 1$  y el número cuántico principal  $n$  a  $n - 1$ .

Para el caso de del método de factorización Green, al resolver las ecuaciones de recurrencia de los coeficientes (ecuaciones 3.101 - 3.103) se encuentra 2 soluciones para cada una de las constantes  $\mathbf{b}_k$  y  $\mathbf{c}_k$ . De las 2 soluciones obtenidas para  $\mathbf{b}_k$  y  $\mathbf{c}_k$  se tomó solo aquella que da el valor más grande de  $E_k$  que corresponde al espectro de energías. Usando las soluciones

para  $j = 0$  de las constantes  $b_1 = -m\omega$  y  $c_1 = -l\hbar$  se encuentran otros 2 operadores  $\bar{a}_0^{(l+1)+}$  y  $\bar{a}_0^{(l)}$  que actúan del mismo que los operadores  $\bar{O}_\pm(l)$  de IH sobre funciones de onda  $\psi_n^{(l)}(r)$  del oscilador armónico 3-D.

Una observación importante es que los operadores  $a_j^{(l)+}$ ,  $a_j^{(l)}$ ,  $O_\pm(l)$  y  $\bar{O}_\pm(l)$  tienen la forma

$$a = A \frac{d}{dr} + Br + \frac{C}{r},$$

donde A, B y C son constantes diferentes para cada operador. en el método de factorización de Green se encuentra el índice  $j$  el cual se asocia en el método a la Jerarquía ya que el método de Green descompone a los estado y a los niveles de energía en hamiltonianos isoenergéticos.

### 5.3.2. Átomo de hidrógeno 3-D

Usando (5.4) para el potencial  $V(r) = -e^2/r$  y tomando la medición de  $r$  en las unidades  $a_0$  (radio de Bohr), con las constantes  $a_0 = \hbar^2/\mu e^2$  y  $E = (\mu e^4/\hbar^2)\epsilon$ , la ecuación radial adimensional para el átomo de hidrogeno 3-D se puede escribir como

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_{\lambda,l}(r) = 2\epsilon u_{\lambda,l}(r). \quad (5.31)$$

Usando (5.12) y (5.13) con  $V(r, l) = -\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2}$  encontramos que

$$k(r, l) = \frac{l}{r} - \frac{1}{l}, \quad \mathcal{L}(l) = -\frac{1}{l^2}. \quad (3.32)$$

La ecuación (5.31) es factorizable a través de los operadores

$$O_\pm(l) = \mp \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} - \frac{1}{l}. \quad (3.33)$$

La función  $\mathcal{L}(l)$  es creciente, por lo que  $2\epsilon = \lambda = \mathcal{L}(l_{max} + 1)$ , así definiendo a  $n \equiv l_{max} + 1$  se encuentra el espectro de energías

$$\epsilon = -\frac{1}{2n^2} \longrightarrow E = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (3.34)$$

La condición  $\lambda = \mathcal{L}(l_{max} + 1)$  nos lleva a encontrar las funciones de onda acotan los estados un nivel de energía fijo (Figura 5.3)

$$O_+(l_{max} + 1)u_{\lambda, l_{max}} = O_+(n)u_{\lambda, n-1} = \left(-\frac{d}{dr} + \frac{n}{r} - \frac{1}{n}\right)u_{\lambda, n-1} = 0.$$

Esta ecuación tiene la normalizada solución

$$u_{n, n-1} = \sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n)!}} r^n e^{-\frac{r}{n}}. \quad (3.35)$$

Aplicando sucesivamente el operador

$$O_-(l) = \frac{nl}{\sqrt{(n-l)(n+l)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{n}{r} - \frac{1}{n}\right) \quad (3.36)$$

sobre las funciones  $u_{n, n-1}$  se pueden encontrar las funciones  $u_{n, l}$  para el mismo nivel de energía..

Hablemos sobre los operadores del método de factorización de Green y los operadores de IH.

Los operadores  $a_j^{(l)+}$  y  $O_-(l)$  actúan del mismo modo sobre las funciones de onda  $\psi(r)$  del oscilador armónico 3-D. Ambos decrementan el número cuántico  $l$  en una unidad para el mismo valor de la energía. Las funciones de onda para el mismo valor de la energía se obtienen de la aplicación de los operadores  $a_j^{(l)+}$  y  $O_-(l)$  sucesivamente sobre las funciones  $\chi_0^{(l)}(r)$  y  $u_{n, n-1}$  respectivamente. Las funciones  $\chi_0^{(l)}(r)$  y  $u_{n, n-1}$  corresponde a las funciones de onda que acotan a los estados para el mismo nivel de energía, estos estados se encuentran en la diagonal (Figura 5.3). Abajo de esta diagonal no existen estados, esto se debe a las condiciones

$$a_j^{(l)} \chi_0^{(l)}(r) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \mathcal{L}(l_{max} + 1).$$

Los operadores  $a_j^{(l)+}$  y  $O_-(l)$  tienen la misma forma salvo algunas constantes, en los operadores  $a_j^{(l)}$  el índice  $j$  se asocia a la jerarquía de SUSY-QM ya que descompone el problema en hamiltonianos isoespectrales.

Una observación importante es que la jerarquía en SUSY-QM se reduce al método de factorización de Green. Esta jerarquía se introdujo en 1985 por C.V Sukumar y el método de factorización de Green en 1968. Es decir, el método de factorización de Green ya hablaba de sistemas supersimétricos, la construcción de hamiltonianos isoespectrales a partir de operadores como en la jerarquía de Sukumar ya estaba implícita en el método de Green. También cabe mencionar que el método de Green se reduce al método de factorización de Infeld y Hull desarrollado en 1951. El método de factorización de IH es el método más general de factorización ya que muchos otros métodos se reducen a este. También existe una relación con la mecánica cuántica supersimétrica, ya que un sistema acepta un tratamiento de mecánica cuántica supersimétrica si es factorizable según el método de IH.

## Conclusiones

En este trabajo se desarrolla la jerarquía de Sukumar de los potenciales del oscilador armónico unidimensional y el pozo de potencial unidimensional.

Se mostró el método de factorización de Green introducido para tratar problemas de eigenvalores en la mecánica cuántica. Usando este método en primera instancia se resolvieron los problemas del oscilador armónico unidimensional y pozo de potencial unidimensional. Se compararon los resultados obtenidos a través de este método con los obtenidos por la jerarquía de Sukumar.

Se hizo una comparación entre el método de factorización de Green con la forma en la que se construye la jerarquía de Sukumar. Una vez hecha la comparación se dio la relación entre estos métodos, se mostró que el método de Green construye de forma directa los hamiltonianos de la jerarquía. Usando los estados base de los hamiltonianos que conforman la jerarquía (funciones auxiliares) y los operadores de la factorización el método de factorización de Green se encuentran las funciones de onda.

Además se dieron las soluciones cuánticas del potencial del oscilador armónico 3-D y del átomo de hidrógeno 3-D, en el caso del oscilador armónico 3-D. Se dio una solución adicional usando los operadores de creación y aniquilación de Dirac.

Se obtuvieron los operadores de la factorización de Green para las ecuaciones de Schrödinger radiales de los potenciales tridimensionales del átomo de hidrógeno y oscilador armónico. Con los operadores y con las funciones auxiliares del método de Green se encuentran las funciones de onda para estos potenciales respectivamente. Se muestra que una forma en la que actúan los operadores  $a_j^{(l)+}$  y  $a_j^{(l)}$  de la factorización de Green para obtener las funciones de onda es considerándolo desde el punto de vista de la jerarquía, donde los potenciales del oscilador armónico 3-D y átomo de hidrógeno 3-D son considerados como sucesiones de potenciales a los cuales para cada valor de  $l$  se le desarrolla una jerarquía. Por otro lado, los operadores

$a_j^{(l)+}$  y  $a_j^{(l)}$  para el caso en el que  $j = 0$  los operadores  $a_0^{(l)+}$  y  $a_0^{(l)}$  actúan como operadores que incrementan o decrementan los índices  $l$  y  $j$  en una unidad y las funciones auxiliares  $\chi_0^{(l)}$  corresponde a las funciones de onda con el máximo valor que puede tomar  $l$  para un nivel de energía fijo. Para el caso del átomo de hidrógeno el operador  $a_0^{(l)+}$  pasa de  $l$  a  $l - 1$  manteniéndose en el mismo nivel de energía, mientras que para el oscilador armónico el operador  $a_0^{(l)+}$  pasa de  $l$  a  $l - 1$  y pasa del nivel de energía  $n$  al  $n + 1$ .

Se dio una comparación entre los operadores  $a_j^{(l)+}$  y  $a_j^{(l)}$  del método de factorización de Green con los operadores  $O_{\pm}(l)$  del método de factorización de Infeld y Hull. En esta comparación se encuentra que los operadores actúan del mismo modo sobre las funciones de onda para el caso en el que  $j = 0$ . Para el caso del oscilador armónico 3-D usando el método de IH se pueden encontrar otro juego de operadores que actúan de diferente forma que los operadores  $O_{\pm}(l)$  sobre las funciones de onda. Estos operadores también se pueden encontrar usando el método de factorización de Green usando los valores de las constantes  $b_1$  y  $c_1$  que fueron descartados. Por último, los operadores del método de IH y Green tienen la misma forma salvo algunos signos y el índice  $j$  el cual se asocia a la jerarquía de Sukumar.

# LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

## Figuras

Figura 1.1

- En esta figura se muestran los niveles de energía de 2 potenciales supersimétricos asociados  $V_1(x)$  y  $V_2(x)$ . Se muestra la acción de los operadores  $A_1$  y  $A_1^\dagger$ .

Figura 1.2

- Diagrama ilustrativo de los niveles de energía de los hamiltonianos de la jerarquía.

Figura 1.3

- Pozo de potencial infinito unidimensional.

Figura 2.1

- Se muestra el espectro de energía de los hamiltonianos de la jerarquía.

Figura 2.2

- Funciones auxiliares del método de factorización de Green como funciones de onda de los estados base de los hamiltonianos de la jerarquía.

Figura 3.1

- Construcción de las funciones de onda del oscilador armónico a través de la aplicación del operador  $L_-$  sobre las funciones  $\Phi_{n,l,l}$  para un valor fijo de  $n$  y  $l$ .

Figura 3.2

- Diagrama de los niveles de energía del oscilador armónico 3-D.

Figura 4.1

- Diagrama de los niveles de energía del átomo de hidrógeno.

Figura 5.1

- Funciones auxiliares  $\chi_j^{(l)}$  como funciones de onda de los estados base de los hamiltonianos  $H_j^{(l)} = a_j^{(l)\dagger} a_j^{(l)}$  de la jerarquía para un valor fijo de  $l = 0,1,2$  para el caso del oscilador armónico 3-D.

Figura 5.2

- Funciones auxiliares  $\chi_j^{(l)}$  como funciones de onda de los estados base de los hamiltonianos  $H_j^{(l)} = a_j^{(l)+} a_j^{(l)}$  de la jerarquía para un valor fijo de  $l = 0,1,2$  para el caso del átomo de hidrógeno 3-D.

Figura 5.3

- Se muestra la forma en la que actúan los operadores  $a_j^{(l)+}$  y  $a_j^{(l)}$  sobre las funciones  $\psi_j^{(l)}$  para los casos en los que  $l = 0,1,2,3,4$ . Los estados  $\psi_0^{(l)} \propto \chi_0^{(l)}$ .

Figura 5.4

- Se muestra la forma en la que actúan los operadores  $a_j^{(l)+}$  sobre los estados del oscilador armónico 3-D. estos operadores cambian el número cuántico  $l$  a  $l - 1$  y el número cuántico principal  $n$  a  $n + 1$ .

## Tablas

Tabla 1

- En esta tabla se muestran las funciones de onda del estado base y del primer estado excitado para los primeros hamiltonianos de la jerarquía además de sus potenciales supersimétricos correspondientes y los operadores de la factorización.

Tabla 2

- Degeneración del oscilador armónico caracterizada por los números cuánticos  $n$  y  $l$ .

Tabla 3

- Polinomios asociados de Laguerre.

Tabla 4

- Funciones de onda no normalizadas para los primeros estados degenerados del oscilador armónico 3-D, obtenidas a través del método de factorización de Green.

Tabla 5

- Funciones de onda del estado base y de los primeros dos estados excitados del átomo de hidrógeno.

## REFERENCIAS

- [1] E. Schrödinger, Proc. Roy. Irish Acad **A46, 9** (1940); Proc. Roy Irish Acad A46. 183 (1941); Proc. Roy Irish Acad **A47. 53** (1941).
- [2] L. Infeld and T.E. Hull, Rev. Mod. Phys.**23.21** and reference cited therein (1951).
- [3] H.S. Green, Matrix Methods in Quantum Mechanics Barnes & Noble, Newyork, (1968).
- [4] P.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics Oxford University Press, Oxford. (1958).
- [5] Witte E. Nuc. Phys. **B180, 513**, (1981).
- [6] Witte E. Nuc. Phys. **B202, 253**, (1982).
- [7] S.P. Misra, Introduction to Supersymmetry and Supergravity, John Wiley & Sons, New Dehli, India (1992).
- [8] Franz Schwabl, Quantum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [9] C. V. Sukumar, Supersymmetry, Factorization of the Schrödinger Equation and Hamiltonian Hierarchy, J. Phys. **A18, L57-L61**,(1985).
- [10] L. Infeld, On a New Treatment of Some Eigenvalue Problems, Phys Rev. **59** (1941).
- [11] Supersymmetry in Quantum Mechanics; Fred Cooper, Avinash Khare Uday Sukhatme. World scientific, Singapore New Jersey. London Hong Kong (2001).

- [12] Bagachin B. Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics, Chapman and Hall, London (2000).
- [13] J. L. Powell & B. Crasemann Quantum Mechanics Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, U.S.A. London, England, (1961).
- [14] A. Messiah. Mecánica Cuántica Volumen I. Editorial Tecnos Madrid (1965).
- [15] P.R Wallace, Mathematical Analysis of Physical Problems, Dover Publications, New York (1993).
- [16] H.C. Ohanian, Principles of Quantum Mechanics Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. (1990).
- [17] Luis de la Peña, Introducción a la Mecánica Cuántica, Fondo de cultura Económica, México (1991).
- [18] N. N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Dover Publications, New York (1972).
- [19] K.T. Hecht Quantum Mechanics, Springer-Berlin.
- [20] Philip M. Morse and Herman Feshbach, Methods of Theoretical Physics vol 1. Mc. Graw-Hill, (1953).
- [21] Nouredine Zettili, Quantum Mechanics. Concepts and Applications, Wiley (2009).

