



**INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y  
MATEMÁTICAS**



**ECUACIÓN DE VLASOV MODIFICADA**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS

**PRESENTA:**

Juan Francisco García Camacho

Directores de tesis

Dr. Gonzalo Ares de Parga Álvarez

Dr. Encarnación Salinas Hernández

Ciudad de México, Junio de 2016

## **Resumen**

Los efectos de frenado por radiación a niveles no relativistas son considerados en un plasma. Se encuentra que los electrones decaen rápidamente y por sí solos no permitirían la ignición. Se trata de estudiar entonces los efectos colectivos por medio de modificar la ecuación de Vlasov a una que incluye al frenado por radiación. Se estudia la estabilidad en la propagación de ondas electromagnéticas encontrando que el frenado por radiación tiende a acrecentar la onda. Sin embargo, tales efectos se encuentran dentro de los órdenes de magnitud de la relatividad especial o de materia degenerada (efectos cuánticos).

## **Abstract**

The effects of the reaction force are analyzed in a non-relativistic plasma. It is deduced that the electrons rapidly decay and they will not permit the ignition by them selves. The collective effects are studied by means of modifying the Vlasov equation where such reaction force is considered. The stability of the electromagnetic wave propagation is studied finding that the reaction force tends to increase the wave. However, such effects are within the order of magnitude of special relativity or degenerated matter.



# Índice

Introducción.....	1
Capítulo 1: El plasma.....	2
1.1    Introducción.....	2
1.2    Plasma.....	2
1.3    Longitud de Debye.....	3
1.4    Logaritmo de Coulomb.....	6
Capítulo 2: Termodinámica.....	10
2.1    Función de distribución y la ecuación de Liowille.....	10
2.2    Variables macroscópicas de un plasma.....	11
2.2.1    Densidad.....	11
2.2.2    Flujo de partículas y velocidad.....	12
2.2.3    Densidad de corriente.....	12
2.2.4    Flujo de calor.....	12
2.2.5    Tensor de presión.....	12
2.2.6    Ecuación de continuidad.....	12
2.3    Aproximación de 2 fluidos.....	15
2.3.1    Fluido simple y MHD.....	16
2.4    Colisiones.....	20
2.4.1    Colisiones en plasmas totalmente ionizados.....	20
2.4.2    Ecuación de Fokker-Planck.....	23
2.5    Tiempos de relajación en plasmas.....	25
2.5.1    Plasmas fríos.....	25

2.6	Plasmas maxwellianos.....	28
2.7	Resistividad en plasmas.....	29
2.8	Oscilaciones en plasmas.....	31
2.9	Equilibrio.....	33
2.10	Estabilidad.....	36
Capítulo 3: Ecuación de Vlasov.....		39
3.1	Aproximación de Vlasov.....	39
3.2	Ondas en los plasmas y el amortiguamiento de Landau.....	42
3.3	Amortiguamiento de Landau en ondas iónico-acústicas.....	43
3.4	Inestabilidad en 2 haces.....	45
Capítulo 4: Relatividad especial.....		48
4.1	Introducción.....	48
4.2	Postulados de la relatividad.....	48
4.3	Transformada de Lorentz.....	48
4.4	4- Vectores.....	51
4.5	Invariante de separación.....	52
4.6	Tiempo propio.....	52
4.7	La 4-velocidad.....	52
4.8	Propiedades matemáticas del espacio-tiempo en relatividad.....	54
4.9	Representación matricial de las transformaciones de Lorentz, generadores infinitesimales.....	57
4.10	Invariancia de la carga eléctrica, covariancia de la electrodinámica.....	61
4.11	Lagrangeano para campos electromagnéticos.....	63
4.12	Tensor de esfuerzo simétrico.....	65
	4.12.1 Generalización del hamiltoniano: tensor de esfuerzos canónico.....	65
	4.12.2 Tensor de esfuerzos simétrico.....	68
4.13	Los campos asociados con el electrón.....	70
4.14	Las ecuaciones de movimiento del electrón.....	72

Capítulo 5: La ecuación de Vlasov modificada.....	77
5.1 Introducción.....	77
5.2 Ecuación de Vlasov modificada.....	77
5.3 Ondas en los plasmas.....	80
5.4 Ondas iónico-acústicas.....	84
Conclusiones.....	89
Apéndice A.....	91
Apéndice B.....	102
Apéndice C.....	111
Bibliografía.....	114





## Introducción

En el pasado siglo se desarrolló la física de plasmas con la esperanza de construir reactores de fusión capaces de generar energía abundante y limpia. Sin embargo, a la hora de confinar un plasma para obtener las reacciones nucleares buscadas aparecían los problemas de inestabilidades[1]. Estos últimos provocan que el plasma se disperse y no se le pueda contener lo suficiente para lograr los objetivos[2]. De hecho, el problema está casi resuelto pues se cree que al construir un reactor llamado TOKAMAK, de dimensiones mucho más grandes que los construidos anteriormente tales inestabilidades se controlarán. Tal aparato se conoce como el ITER. Por otro lado, el efecto por frenado de radiación en las trayectorias de las partículas cargadas fue estudiado durante todo el siglo pasado, llegando a la conclusión que la ecuación de Eliezer[19] o la de Landau-Lifshitz son las adecuadas para describir el movimiento de partículas cargadas en relatividad especial. Los órdenes de magnitud de validez de tales ecuaciones se encuentran en la llamada zona de Shen [3] a la cual pertenece la física de plasmas.

En la tesis hacemos notar que tales ecuaciones son equivalentes pues sus diferencias son del orden de magnitud cuántico que se aleja del alcance de la física de plasmas. Por otro lado, demostramos también que en un campo magnético típico de un TOKAMAK, los electrones decaen rápidamente antes del tiempo de ignición. Lo cual impide obtener una estabilidad de confinamiento. Nuestra preocupación ahora es a nivel global y para ello modificaremos la ecuación de Vlasov que permite supuestamente encontrar a la distribución de velocidades y posiciones para describir al plasma. Tal modificación se obtendrá usando a la ecuación de Ford [14,15,16] que puede considerarse como la forma no relativista de describir el movimiento de una carga eléctrica pero a niveles no relativistas.

Finalmente, buscamos efectos indirectos del frenado por radiación calculando el decaimiento de una onda electromagnética propagándose a lo largo de un plasma confinado. Sin embargo, concluimos que tal decaimiento no existe por este efecto. Al contrario, existe un incremento en la onda debido al frenado por radiación. Pero los niveles de energía donde se puede detectar tales incrementos son a nivel relativista o los niveles de densidad corresponden a la materia degenerada. Lo cual nos obligará en un futuro, posiblemente en la tesis doctoral a estudiar el caso en forma relativista o la materia degenerada.

# Capítulo 1

## El plasma

### 1.1 Introducción

El plasma, el cuarto estado de la materia, esta idea proviene de que al aumentar la temperatura de un sólido, éste sufre a un cambio de fase, por lo regular un líquido, si a un líquido le aumentamos la temperatura éste ira a un estado gaseoso, si seguimos aumentando la energía, algunos átomos del material se empezaran a ionizar, es por eso que al plasma se le llama el cuarto estado de la materia.

Gran parte de la materia en el universo visible es plasma (90%>), hay varios ejemplos de ellos, por ejemplo por citar unos, el sol, y en general las estrellas son cúmulos de plasma, otro ejemplo más terrenal podría ser la ionósfera, una atmósfera que nos protege de la radiación espacial, sin embargo cuando uno piensa en los estados de la materia, por lo regular solo pensamos en los primeros 3 estados, y no es que solo existan 4 estados de agregación, pero en particular, el plasma siendo tan abundante en el universo, ¿por qué nos parece tan extraño?, una respuesta natural podría ser que, la vida como la conocemos para que exista, se tienen que cumplir ciertas condiciones, por ejemplo, la temperatura promedio de la tierra es aproximadamente de alrededor de 15 °C , las temperaturas donde se crean los plasmas son muy variadas, sin embargo estamos hablando de aproximadamente 100,000 K, es claro que un mundo donde abunde el plasma no es el más adecuado para la vida como la conocemos. Sin embargo convivimos con ellos, y es mas, tenemos aplicaciones para ellos, pero la dificultad de poder manipularlos y nuestro poco conocimiento acerca de ellos hacen que el estado plasmático aún sea una fuente de varios enigmas y fantasías.

A continuación se hablará con mayor profundidad acerca , de ¿qué es un plasma? Y sus características.

### 1.2 Plasma

Un plasma es un estado de la materia donde las cargas eléctricas son tales que se podría decir que es casi neutro, sin embargo, al tener partículas cargadas la fuerza de Coulomb tiene que ser importante en el comportamiento del plasma, y éstas deben existir con cierta densidad, sin embargo el plasma tiene que tener una densidad tal que las partículas cercanas a una partícula no ejerzan

demasiada fuerza, en pocas palabras diríamos que en el plasma el principal efecto a tomar en cuenta es el de fuerzas de largo alcance, es decir, la interacción de Coulomb.

### 1.3 Longitud de Debye

Como hemos comentado anteriormente, el plasma es un estado de la materia en donde tenemos 2 tipos de especies eléctricas, en el caso más sencillo, que son los electrones y los iones, con esto en mente consideremos un plasma con equilibrio mecánico, es decir donde la fuerza eléctrica sea igual a la que se obtiene de la presión, es decir:

$$\begin{aligned} -T\nabla n_e + n_e \nabla \phi &= 0 \\ -T\nabla n_i - Zn_i \nabla \phi &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

En donde  $n_e$  es la densidad volumétrica de electrones y  $n_i$  es la densidad volumétrica de iones con carga  $Ze$ , se ha considerado la temperatura en unidades de energía, es decir  $kT$ , también hemos supuesto que la temperatura es uniforme.

Por otro lado el potencial eléctrico tiene que cumplir con la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.2)$$

Ahora consideremos que tenemos una carga  $Q$  rodeada por unas densidades de la forma:

$$\begin{aligned} n_e &= n_{e0} e^{\frac{e\phi}{T}} \\ n_i &= n_{i0} e^{\frac{-Ze\phi}{T}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

De esta manera tenemos que la ecuación 1.2 se escribe como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{-1}{\epsilon_0} \left\{ Q\delta(x) - en_{e0} e^{\frac{e\phi}{T}} + Zen_{i0} e^{\frac{-Ze\phi}{T}} \right\}. \quad (1.4)$$

Como esperamos que el campo eléctrico sea cero en la lejanía, debido a la expresión 1.4 tenemos que:

$$Zn_{i0} = n_{e0}. \quad (1.5)$$

La expresión 1.4 es muy difícil de resolver por lo tanto usando simetría esférica, se hará una aproximación a primer orden de manera que la expresión 1.4 se transforma en:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{-Q\delta(r)}{4\pi r^2} + (1 + Z) \frac{n_{e0} e^2 \phi}{T} \right\}. \quad (1.6)$$

Cuya solución es:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}. \quad (1.7)$$

Donde se ha definido la longitud de Debye como:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T\epsilon_0}{n_{e0} e^2 (1+Z)}}. \quad (1.8)$$

Esto quiere decir que a distancias más grandes que la longitud de Debye la carga estará fuertemente apantallada, por otro lado, alrededor de la carga Q se formará una esfera, la esfera de Debye, con cargas opuestas a la carga Q, donde las cargas que están en el cascarón, podrán escapar de este si la energía térmica se lo permite, es decir:

$$e\phi < T. \quad (1.9)$$

Que de hecho es una consideración importante para la aproximación de la expresión 1.4.

Otro factor importante en el estudio de los plasmas es la esfera de Debye, esta esfera nos dice la cantidad de partículas que tendría una esfera con radio  $\lambda_D$ , esto es:

$$N_D = \frac{4}{3} \pi n_{e0} \left( 1 + \frac{1}{Z} \right) \lambda_D^3. \quad (1.10)$$

Vale la pena mencionar que esto es solo una idea, ya que esta supuesta esfera, tendría un radio definido, sin embargo hay que recordar que para llegar a aquí se ha realizado una aproximación, de manera que esto podría verse como una zona donde la concentración de las partículas sería mayor, ya que en esta zona

el efecto del potencial es mayor, fuera de la esfera la presencia del potencial sobre las partículas disminuye.

Un  $N_D$  grande nos diría que la cantidad de partículas que interactúan de manera eléctrica es grande, esto es, que mientras más grande sea la cantidad es mejor la teoría que se está ocupando, por lo regular esta cantidad en los plasmas es grande.

Este parámetro  $N_D$  podría ser una cantidad útil para el desarrollo de la física de plasmas, sin embargo no lo es del todo, por la razón de que en los desarrollos posteriores se necesitará una cantidad pequeña, con esto en mente se crea el parámetro de plasma “g” que es el inverso de  $N_D$ .

$$g = \frac{1}{N_D}. \quad (1.11)$$

Hay que notar que la distancia entre las partículas es del orden:

$$d \approx n^{-1/3}. \quad (1.12)$$

De manera que la energía promedio de interacción de la partícula es:

$$\langle U \rangle \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} n^{1/3}. \quad (1.13)$$

Así que al comparar la energía de interacción con la energía cinética tenemos:

$$\frac{\langle W \rangle}{\langle U \rangle} \approx \frac{T}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 T}{e^2 n^{1/3}} \approx N_D \gg 1. \quad (1.14)$$

De manera que la energía de interacción media es mucho menor que la energía cinética, así que es una muy buena consideración tomar al plasma como un gas ideal.

## 1.4 Logaritmo de Coulomb

A lo largo del trayecto que la partícula recorre ésta interactúa con aproximadamente  $N_D$ , de manera que debido a esto la trayectoria de la partícula cambiará. Para entender esto consideraremos la interacción de Coulomb como si fueran colisiones, para esto primero hay que saber a qué distancia hay una interacción importante, para esto nos valdremos de la expresión 1.13, de manera que sabremos cuál es la distancia:

$$T \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 b_c} \therefore b_c \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 T}. \quad (1.15)$$

Ahora tenemos que la sección eficaz de esto es:

$$\sigma_c \approx \pi b_c^2 \approx \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 T^2}. \quad (1.16)$$

De la misma manera se define la longitud de camino libre medio como:

$$\lambda_c = \frac{1}{n\sigma_c}. \quad (1.17)$$

Ahora consideraremos las interacciones débiles, para esto estimaremos el ángulo de desviación que siente una partícula al pasar por una distancia  $b$ , para esto tenemos que la variación en la velocidad perpendicular será aproximadamente el producto de la aceleración por el tiempo de interacción, que es:

$$\Delta u_{\perp} \approx \frac{e^2}{m4\pi\epsilon_0 b^2} \Delta t \approx \frac{e^2}{m4\pi\epsilon_0 b^2} \frac{b}{u}. \quad (1.18)$$

De manera que la desviación es:

$$\delta\theta \approx \frac{\Delta u_{\perp}}{u} \approx \frac{e^2}{m4\pi\epsilon_0 b^2} \frac{b}{u^2} = \frac{b_0}{b}. \quad (1.19)$$

Donde se ha definido a  $b_0$  como:

$$b_0 = \frac{e^2}{m4\pi\epsilon_0 u^2}. \quad (1.20)$$

La desviación que se ha calculado es al considerar la interacción con una sola partícula ahora si se superponen todas las interacciones, el valor medio de la desviación se anulara ya que son equiprobables, sin embargo, al considerar la desviación cuadrática tenemos:

$$\langle (\delta\theta)^2 \rangle \approx \int_{b_c}^{\lambda_D} \left(\frac{b_0}{b}\right)^2 2\pi n b db L = 2\pi n L b_0^2 \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_c}\right). \quad (1.21)$$

Lo más destacable de la expresión 1.21 son los límites de la integral que fueron considerados de la manera siguiente, el límite superior  $\lambda_D$ , es considerando que las partículas interactúan dentro de la esfera de Debye, fuera de ella el potencial está apantallado. El límite inferior  $b_c$  es la distancia necesaria para que exista una interacción apreciable con otra partícula.

En donde se define:

$$\ln\left(\frac{\lambda_D}{b_c}\right) = \ln(\Lambda), \quad (1.22)$$

como logaritmo de Coulomb.

Vemos entonces que la partícula se desvía apreciablemente después de recorrer una distancia:

$$\lambda_{\perp} \approx \frac{1}{2\pi n b_0^2 \ln\Lambda}. \quad (1.23)$$

Por lo que  $\lambda_{\perp}$  es el camino libre medio para desviaciones perpendiculares por interacciones simultáneas de baja desviación individual, pero con un número grande de partículas blanco, así que ocupando la expresión 1.17 con la expresión 1.23 tenemos:

$$\sigma_{\perp} = \frac{1}{n\lambda_{\perp}} \approx 2\pi b_0^2 \ln\Lambda = \frac{e^4}{8\pi\epsilon_0^2 (mu^2)^2} \ln\Lambda. \quad (1.24)$$

Para partículas con energías  $mu^2 \approx T$ , tenemos que la expresión 1.24 se transforma en:

$$\sigma_{\perp} \approx \frac{e^4}{8\pi\epsilon_0^2 T^2} \ln\Lambda \approx \sigma_c \ln\Lambda. \quad (1.25)$$

De manera que es más importante considerar las pequeñas desviaciones que las desviaciones más grandes.





## Capítulo 2

### Termodinámica

#### 2.1 Función de distribución y la ecuación de Liouville

La descripción estadística completa de un sistema es obtenida mediante la función de distribución:

$$F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (2.1)$$

De manera que:

$$\int F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_n = 1. \quad (2.2)$$

Para un plasma con igual cantidad de iones y electrones, en el equilibrio térmico, la distribución  $F$  se convierte en la función de distribución de Gibbs, sin embargo para un plasma fuera de equilibrio el cálculo de la función  $F$  es imposible. Sin embargo, el plasma puede ser descrito de una manera más simple, en términos de cantidades obtenidas por  $F$  más simples. Estas cantidades reducidas pueden ser calculadas, lo cual significa encontrar cómo evoluciona el sistema a partir de un estado inicial.

La descripción más detallada y sencilla de un plasma puede ser la distribución de una sola partícula. Integrando  $F$  sobre todo el espacio de velocidades y posiciones de las partículas salvo una, es decir:

$$\tilde{n}_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t) = N_\alpha \int F d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_n d\mathbf{v}_2 \dots d\mathbf{v}_n, \quad (2.3)$$

donde:

$$\tilde{n}_\alpha = \frac{N_\alpha}{V}. \quad (2.4)$$

No se ha mencionado, pero en un plasma pueden existir distintos tipos de partículas, en este momento pensaremos que existe un tipo de partículas  $\alpha$ , y  $N_\alpha$  representa la cantidad total de partículas  $\alpha$  y  $V$  es el volumen del sistema.

La cantidad  $\tilde{n}_\alpha f_\alpha d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1$  representa la cantidad de partículas  $\alpha$  que se encuentran en  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{v}_1$ , en un hipervolumen  $d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1$ , para un plasma en equilibrio térmico  $f_\alpha$  es una distribución maxweliana.

Tenemos que la función de distribución tiene que cumplir con la ecuación de Liouville, es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i^n \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_i} = 0. \quad (2.5)$$

El término de  $\mathbf{a}_i$  lo podemos dividir en 2, las que son debidas a fuerzas externas y las que son debidas a la interacción de las partículas, por otro lado la expresión 2.5 ha de integrarse sobre todo el espacio de velocidades y coordenadas salvo una, de manera que la expresión 2.5 se puede escribir de la forma:

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t)}{\partial \mathbf{x}_1} + \mathbf{a}_{ext} \cdot \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t)}{\partial \mathbf{v}_1} = \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t)}{\partial t} \quad col. \quad (2.6)$$

## 2.2 Variables macroscópicas de un plasma

La distribución de una sola partícula es una descripción reducida del plasma, sin embargo no es un observable macroscópico.

Las cantidades macroscópicas son encontradas por los momentos de la distribución de una partícula.

### 2.2.1 Densidad

El número de partículas en el punto  $\mathbf{X}$  y al tiempo  $t$  está dado por la relación:

$$n_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int \tilde{n}_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.7)$$

De nuevo el subíndice  $\alpha$  designa a la especie.

De la misma manera podemos definir la densidad de masa así como la densidad de carga.

$$\rho_{m\alpha}(\mathbf{x}, t) = \tilde{n}_\alpha m_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (2.8)$$

$$\rho_{q\alpha}(\mathbf{x}, t) = \tilde{n}_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.9)$$

## 2.2.2 Flujo de partículas y velocidad

El flujo de partículas de la especie  $\alpha$  cruzando un área unitaria en la configuración del espacio por unidad de tiempo en el punto  $\mathbf{X}$  y al tiempo  $t$ , se define como:

$$\Gamma_\alpha(\mathbf{x}, t) = \tilde{n}_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = n_\alpha(\mathbf{x}, t) \mathbb{V}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2.10)$$

Donde  $\mathbb{V}_\alpha$  está definido como la velocidad promedio de las partículas:

$$\mathbb{V}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}} = \frac{\tilde{n}_\alpha}{n_\alpha(\mathbf{x}, t)} \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.11)$$

## 2.2.3 Densidad de corriente

La corriente eléctrica se define como:

$$J_\alpha(\mathbf{x}, t) = \tilde{n}_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.12)$$

## 2.2.4 Flujo de calor

El flujo de energía cinética debido a partículas de la especie  $\alpha$  cruzando un área unitaria en el espacio de configuración por unidad de tiempo en el punto  $\mathbf{X}$  al tiempo  $t$  es:

$$\mathbb{H}_\alpha = \frac{1}{2} \tilde{n}_\alpha m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbb{V}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbb{V}_\alpha)^2 f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.13)$$

## 2.2.5 Tensor de presión

El tensor de presión se define como:

$$P_\alpha = \tilde{n}_\alpha m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbb{V}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbb{V}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2.14)$$

## 2.2.6 Ecuación de continuidad

Si integramos la ecuación 2.6 sobre todo el espacio de velocidades, considerando que el término de colisiones no cambiará el número de partículas en un diferencial de espacio tendremos:

$$\int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d\mathbf{v} + \int \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{v} + \int \mathbf{a}_{ext} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}_{col} d\mathbf{v} = 0. \quad (2.15)$$

Suponemos que  $f_\alpha \rightarrow 0$  lo suficientemente rápido cuando  $v \rightarrow \infty$ , de manera que la ecuación 2.15 se transforma en:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbb{V}_\alpha) = 0. \quad (2.16)$$

Donde se ha considerado:

$$\int \mathbb{V} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} d\mathbb{V} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int f_\alpha \mathbb{V} d\mathbb{V} = \nabla \cdot (n_\alpha \mathbb{V}_\alpha). \quad (2.17)$$

La expresión 2.16 es la ecuación de continuidad, si esta expresión es multiplicada por la masa de las partículas o la carga, obtenemos las ecuaciones de continuidad para la masa y la carga:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbb{V}_\alpha) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_{q\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{q\alpha} \mathbb{V}_\alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Por conservación de la cantidad de movimiento, colisiones con la misma especie no cambian la cantidad de movimiento total de dicha especie; es decir

$$\int \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col}^\alpha m_\alpha \mathbb{V} d\mathbb{V} = 0. \quad (2.19)$$

Por otro lado, hay un intercambio de cantidad de movimiento en colisiones entre especies distintas, que denotamos de la siguiente manera:

$$\int \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col}^\beta m_\alpha \mathbb{V} d\mathbb{V} = m_\alpha n_\alpha (\mathbb{V}_\alpha - \mathbb{V}_\beta) \nu_{\beta\alpha}, \quad (2.20)$$

donde  $\nu_{\beta\alpha}$  es la frecuencia de colisión de la especie  $\alpha$  con  $\beta$ , de manera que el momento cedido por la especie  $\alpha$  a la  $\beta$  es menos el momento cedido por la especie  $\beta$  a la  $\alpha$ , es decir:

$$m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha\beta} = m_\beta n_\beta \nu_{\beta\alpha}. \quad (2.21)$$

Por otro lado, tenemos que al multiplicar por  $\mathbb{V}$  e integrar el segundo término de la expresión 2.6, tenemos:

$$\int \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int f_\alpha \mathbf{v} \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (2.22)$$

Ahora consideremos una pequeña perturbación sobre la velocidad, es decir:

$$\mathbf{v} = \mathbb{V}_\alpha + \delta \mathbf{v}. \quad (2.23)$$

De manera que al sustituir en la expresión 2.22, tenemos:

$$\int \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_\alpha \mathbb{V}_\alpha \mathbb{V}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_\alpha \langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle). \quad (2.24)$$

Donde por definición de promedio tenemos:

$$n_\alpha \langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle = \int f_\alpha \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (2.25)$$

De manera que al multiplicar por  $\mathbf{v}$  e integrar la expresión 2.6, usando los resultados previamente obtenidos y al usar  $\mathfrak{a}_{ext}$ , como la obtenida por la fuerza de Lorentz, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{V}_\alpha + \left( \mathbb{V}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbb{V}_\alpha = \frac{-1}{n_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_\alpha \langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbb{E} + \mathbb{V}_\alpha \times \mathbb{B}) + \sum_{\beta \neq \alpha} (\mathbb{V}_\alpha - \mathbb{V}_\beta) \nu_{\alpha\beta}. \quad (2.26)$$

Para tener ecuaciones cerradas en la expresión 2.26, es necesario conocer  $\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle$  y los  $\nu_{\alpha\beta}$ .

Sin embargo en el caso en que estemos cerca del equilibrio termodinámico el promedio de las velocidades serán:

$$\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{3} \langle \delta \mathbf{v}^2 \rangle \mathbb{I} = \frac{T_\alpha}{m_\alpha} \mathbb{I}, \quad (2.27)$$

Donde se ha considerado la equipartición en cada grado de libertad, por otro lado se ha considerado una temperatura  $T_\alpha$  propia de la especie  $\alpha$ .

Sin embargo, en presencia de un campo magnético fuerte la distribución de velocidades no será isotrópica, de manera que las velocidades será:

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle &= \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{v}_\perp^2 \rangle \mathbb{I} + \left( \langle \delta \mathbf{v}_\parallel^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{v}_\perp^2 \rangle \right) \mathbb{b}\mathbb{b} \\ &= \frac{T_\perp}{m} \mathbb{I} + \frac{1}{m} (T_\parallel - T_\perp) \mathbb{b}\mathbb{b}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Donde se considera  $\mathbb{b}$  un vector unitario en la dirección del campo magnético, por otro los subíndices  $\parallel$  y  $\perp$  se refieren al hecho de que se consideran velocidades paralelas y perpendiculares al campo.

Las expresiones 2.27 y 2.28 son distintas, sin embargo están relacionadas, saber cuándo ocupar la expresión 2.27 o la expresión 2.28, tiene que ver con la frecuencia de ciclotrón y con la frecuencia de colisiones, de manera que si tenemos que  $\sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} \gg \omega_{\alpha}$ , considerar la expresión 2.27 será lo más adecuado, sin embargo si  $\sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} \ll \omega_{\alpha}$ , es decir la especie está magnetizada lo mejor será considerar la expresión 2.28.

Recordemos que la energía de interacción media de las partículas, es mucho menor que la energía cinética media, de manera que la aproximación del gas ideal es adecuada llevándonos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} p_{\parallel} &= nT_{\parallel} \\ p_{\perp} &= nT_{\perp} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Así la ecuación de movimiento más general será:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{V}_{\alpha} = \frac{-1}{n_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( p_{\perp} \mathbb{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbb{b} \mathbb{b} \right) + q_{\alpha} (\mathbb{E} + \mathbb{V}_{\alpha} \times \mathbb{B}) + \sum_{\beta \neq \alpha} m_{\alpha} (\mathbb{V}_{\alpha} - \mathbb{V}_{\beta}) \nu_{\alpha\beta}. \quad (2.30)$$

En general para resolver la expresión 2.30 es necesario considerar una ecuación de estado [4], en la práctica se consideran ecuaciones barotrópicas:

$$\begin{aligned} p_{\parallel} n_{\parallel}^{-\gamma_{\parallel}} &= cte, \\ p_{\perp} n_{\perp}^{-\gamma_{\perp}} &= cte, \end{aligned} \quad (2.31)$$

### 2.3 Aproximación de 2 fluidos

Ecuaciones de continuidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbb{V}_i) &= 0 \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbb{V}_e) &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ecuaciones de transporte de momento:

$$\begin{aligned}
m_e n_e \frac{d}{dt} \mathbb{V}_e &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (p_{\perp e} I + (p_{\parallel e} - p_{\perp e}) \mathbb{b} \mathbb{b}) - e n_e (\mathbb{E} + \mathbb{V}_e \times \mathbb{B}) + \mathbb{R}_{ei} \\
m_i n_i \frac{d}{dt} \mathbb{V}_i &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (p_{\perp i} I + (p_{\parallel i} - p_{\perp i}) \mathbb{b} \mathbb{b}) + Z e n_i (\mathbb{E} + \mathbb{V}_e \times \mathbb{B}) + \mathbb{R}_{ie}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbb{E} &= \frac{\rho_c}{\epsilon_0}; & \nabla \times \mathbb{E} &= -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}, \\
\nabla \cdot \mathbb{B} &= 0; & \nabla \times \mathbb{B} &= \mu_0 \mathbb{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

En las expresiones 2.33 y 2.34 se han considerado las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{ie} &= -\mathbb{R}_{ei} = m_e n_e (\mathbb{V}_i - \mathbb{V}_e) \nu_{ei}, \\
\rho_c &= Z e n_i - e n_e, \\
\mathbb{J} &= Z e n_i \mathbb{V}_i - e n_e \mathbb{V}_e.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

### 2.3.1 Fluido simple y MHD

El caso anterior de los 2 fluidos puede simplificarse, aprovechando la diferencia de masa de iones y electrones, además, si consideramos que todas las magnitudes que se están considerando son grandes con respecto a la longitud de Debye, podemos entonces considerar la cuasi neutralidad, es decir:

$$0 \approx Z e n_i - e n_e. \tag{2.36}$$

De manera que podemos escribir el vector corriente como:

$$\mathbb{J} = e n_e (\mathbb{V}_i - \mathbb{V}_e). \tag{2.37}$$

Por otro lado, al introducir la velocidad del centro de masa tenemos:

$$\mathbb{U} = \frac{m_e n_e \mathbb{V}_e + m_i n_i \mathbb{V}_i}{m_e n_e + m_i n_i} = \frac{Z m_e \mathbb{V}_e + m_i \mathbb{V}_i}{Z m_e + m_i}. \tag{2.38}$$

La densidad de masa:

$$\rho = m_e n_e + m_i n_i. \tag{2.39}$$

De manera que  $\mathbb{V}_i$  y  $\mathbb{V}_e$  en función de  $\mathbb{U}$  será:



$$\mathbb{V}_i = \mathbb{u} + \frac{\frac{Zm_e}{m_i} \mathbb{J}}{1 + \frac{Zm_e}{m_i} en_e} \approx \mathbb{u} + \frac{Zm_e}{m_i} \frac{\mathbb{J}}{en_e}, \quad (2.40a)$$

$$\mathbb{V}_e = \mathbb{V}_i - \frac{\mathbb{J}}{en_e} \approx \mathbb{u} - \frac{\mathbb{J}}{en_e}. \quad (2.40b)$$

De manera que al combinar estas expresiones podemos llegar a una ecuación de continuidad para ambas especies:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbb{u}) = 0. \quad (2.41)$$

Si sumamos las expresiones 2.32, obtenemos la siguiente ecuación de transporte :

$$\rho \frac{d\mathbb{u}}{dt} = -\nabla \cdot (p_{\perp} I + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbb{b}\mathbb{b}) - \frac{m_e}{e^2} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbb{J}\mathbb{J}}{n_e} \right) + \rho_c \mathbb{E} + \mathbb{J} \times \mathbb{B}, \quad (2.42)$$

En donde hemos usado:

$$n_{e,i} \frac{d\mathbb{u}_{e,i}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (n_{e,i} \mathbb{u}_{e,i}) + \nabla \cdot (n_{e,i} \mathbb{u}_{e,i} \mathbb{u}_{e,i}). \quad (2.43)$$

En la expresión 2.42 hemos definido:

$$\begin{aligned} p_{\perp} &= p_{\perp e} + p_{\perp i} \\ p_{\parallel} &= p_{\parallel e} + p_{\parallel i} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Si comparamos los términos,  $\frac{m_e}{e^2} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbb{J}\mathbb{J}}{n_e} \right)$  y  $\nabla \cdot (\rho \mathbb{u}\mathbb{u})$ , vemos que:

$$\frac{\frac{m_e |\mathbb{J}\mathbb{J}|}{e^2 n_e}}{|\rho \mathbb{u}\mathbb{u}|} \approx \frac{m_e |\mathbb{u}_i - \mathbb{u}_e|^2}{m_i u^2} \ll 1, \quad (2.45)$$

por lo que el término puede ser despreciado.

Ahora comparemos el término de la fuerza eléctrica con el término convectivo:

$$\frac{|\rho_c \mathbb{E}|}{|\nabla \cdot (\rho \mathbb{u}\mathbb{u})|} \approx \frac{\rho_c E}{\frac{\rho u^2}{L}}, \quad (2.46)$$

Donde  $L$  es una longitud característica de variación de las magnitudes, para estimar  $\rho_c$  ocupemos la ecuación de Poisson:

$$\rho_c = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbb{E} \approx \frac{\varepsilon_0 E}{L}, \quad (2.47)$$

Por otro lado  $u$  será considerado como el que se obtendría de la deriva eléctrica, es decir:

$$u \approx \frac{|\mathbb{E} \times \mathbb{B}|}{B^2} \approx \frac{E}{B}, \quad (2.48)$$

De manera que al sustituir 2.48 y 2.47 en 2.46 tenemos:

$$\frac{|\rho_c \mathbb{E}|}{|\nabla \cdot (\rho \mathbb{u} \mathbb{u})|} \approx \frac{\varepsilon_0 B^2}{\rho}. \quad (2.49)$$

El término 2.49 es de la magnitud del cociente de la energía magnética y la densidad de energía de masa.

Por lo general la expresión 2.49 es del orden de  $10^{-3}$ , de manera que también podemos despreciar la fuerza eléctrica.

Por otro lado al considerar variaciones temporales podemos escribir que:

$$\rho \frac{\partial \mathbb{u}}{\partial t} \approx \mathbb{j} \times \mathbb{B}. \quad (2.50)$$

Donde podemos escribir:

$$\mathbb{j} = \frac{\rho u}{\tau B}. \quad (2.51)$$

Donde  $\tau$  es un tiempo característico de variación de las magnitudes.

Ahora al comparar la corriente de desplazamiento con la corriente tenemos:

$$\frac{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \right|}{\mu \mathbb{j}} \approx \frac{\varepsilon_0 B^2}{\rho}. \quad (2.53)$$

Al igual que en el caso de la fuerza eléctrica la corriente de desplazamiento podrá ser despreciada.

Cabe destacar que esto implica que podemos despreciar  $\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$  en la ecuación de la conservación de la carga, sin embargo esto no es así en la ecuación de Poisson.

Para calcular  $\mathbf{j}$  se consideran procesos lentos, de manera que los electrones tengan un equilibrio mecánico, por lo que podemos despreciar su inercia, con lo que la expresión 2.33 se puede escribir como:

$$\mathbb{E} + \mathbb{u} \times \mathbb{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en_e} \left( \mathbf{j} \times \mathbb{B} - \nabla \cdot (p_{\perp e} I + (p_{\parallel e} - p_{\perp e}) \mathbb{b} \mathbb{b}) \right), \quad (2.54)$$

a la expresión 2.54 se le llama ley de Ohm generalizada, donde se ha definido la resistividad del plasma como:

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e}. \quad (2.55)$$

Al término  $\frac{\mathbf{j} \times \mathbb{B}}{en_e}$  se le llama término de Hall.

La densidad da como:

$$\rho \approx \frac{n_e m_i}{z}.$$

Al realizar las consideraciones previas, la ecuación de movimiento se transforma en:

$$\rho \frac{d\mathbb{u}}{dt} = -\nabla \cdot (p_{\perp} I + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbb{b} \mathbb{b}) + \mathbf{j} \times \mathbb{B}. \quad (2.56)$$

Tomando en cuenta que:

$$\nabla \cdot (p_{\perp} I + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbb{b} \mathbb{b}) = \nabla p_{\perp} + (\mathbb{B} \cdot \nabla) \left( (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\mathbb{B}}{B^2} \right). \quad (2.57)$$

Así al escribir la expresión 2.56, al considerar la expresión 2.57 y todo en función del campo magnético tenemos:

$$\rho \frac{d\mathbb{u}}{dt} = -\nabla \left( p_{\perp} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + (\mathbb{B} \cdot \nabla) \left( \frac{\mathbb{B}}{\mu_0} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\mathbb{B}}{B^2} \right). \quad (2.58)$$

La expresión 2.58 es llamada ecuación de Parker.

## 2.4 Colisiones

### 2.4.1 Colisiones en plasmas totalmente ionizados.

Hemos hablado anteriormente que cuando el número de partículas es grande en la esfera de Debye, al estudiar los choques, los que más relevancia tendrán serán los que tengan una pequeña desviación, por otro lado para un estudio con mayor profundidad de los choques, empezaremos por definir la velocidad relativa y la de centro de masa:

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \mathbb{V}_\alpha - \mathbb{V}_\beta, \\ \mathbb{V} &= \frac{m_\alpha \mathbb{V}_\alpha + m_\beta \mathbb{V}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Donde los subíndices en las velocidades indican especie  $\alpha$  y especie  $\beta$ .  
Ahora  $\mathbb{V}_\alpha$  y  $\mathbb{V}_\beta$  en términos de  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{V}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\alpha &= \mathbb{V} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbb{V}, \\ \mathbb{V}_\beta &= \mathbb{V} - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mathbb{V}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ahora podemos trabajar el problema con una partícula de masa reducida  $\mu$ , bajo la acción del potencial  $U$ .

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \\ U &= \frac{-q_\alpha q_\beta}{4\pi \epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Donde  $r$  es la distancia relativa entre las partículas verdaderas. Esta partícula equivalente se desvía luego de la interacción un ángulo  $\theta$  respecto de la dirección original, que es una función del parámetro de impacto dado por:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b_0}{b}, \quad (2.63)$$

Donde:

$$b_0 = \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi \epsilon_0 \mu v^2}. \quad (2.64)$$

Dado que la velocidad  $v$  no cambia después de la interacción, esto por la conservación de la energía.

Ahora calcularemos las desviaciones paralelas y perpendiculares a la velocidad original, es decir:

$$\begin{aligned}\Delta v_{\parallel} &= v \cos(\theta) - v = \frac{-2\frac{b_0^2}{b^2}}{1+\frac{b_0^2}{b^2}}, \\ \Delta v_{\perp} &= v \sin(\theta) = \frac{2\frac{b_0}{b}}{1+\frac{b_0^2}{b^2}}.\end{aligned}\tag{2.65}$$

Lo siguiente es calcular la cantidad de partículas desviadas, para esto sumaremos todas las desviaciones, que se encuentran entre los parámetros  $b_{min}$  y  $b_{max}$ , mientras la partícula recorre una distancia  $v\Delta t$ , en el tiempo  $\Delta t$ . Ha de considerarse que la densidad de centros dispersores es igual al de las partículas blanco con velocidad  $v_{\beta}$ , que se puede expresar como:

$$dn_{\beta} = f_{\beta}(v_{\beta})dv_{\beta}.\tag{2.66}$$

Ahora la cantidad de partículas dispersadas será:

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \Delta v_{\parallel} 2\pi b db dn_{\beta} v \Delta t = -4\pi v^2 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta} \Delta t,\tag{2.67}$$

Donde:

$$\Lambda = \frac{b_{max}}{b_{min}}.\tag{2.68}$$

Por otro lado tenemos:

$$\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle = \int_{b_{min}}^{b_{max}} (\Delta v_{\perp})^2 2\pi b db dn_{\beta} v \Delta t = 8\pi v^3 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta} \Delta t.\tag{2.69}$$

Así, las derivadas con respecto al tiempo se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \Delta v_{\parallel} \rangle &= -4\pi v^2 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta}, \\ \frac{d}{dt} \langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle &= 8\pi v^3 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta}.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Así, la desviación en forma tensorial será:

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v} \rangle = -4\pi v^2 b_0^2 \ln \Lambda dn_\beta \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{-(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2} \left( \frac{\mathbf{v}}{v^3} \right) dn_\beta. \quad (2.71)$$

De la misma manera para la desviación cuadrática:

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle = 4\pi v^3 b_0^2 \ln \Lambda dn_\beta \left( I - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^2} \right) = \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2 v} \left( I - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^2} \right). \quad (2.72)$$

Considerando los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{v} \right) &= \frac{-\mathbf{v}}{v^3}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} &= \frac{1}{v} \left( I - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^2} \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ocupando las expresiones 2.73 en las expresiones 2.71 y 2.72, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v} \rangle &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{v} \right) dn_\beta, \\ \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} dn_\beta. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ahora calculemos las desviaciones de la partícula  $\alpha$ .

En el problema la velocidad del centro de masa se conserva durante la interacción por lo que el cambio de velocidad  $\Delta \mathbf{v}_\alpha$  es:

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \mathbf{v}, \quad (2.75)$$

De manera que ahora podemos expresar las relaciones de las desviaciones en función de las variables reales, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle &= \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right) \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} \right) dn_\beta, \\ \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle &= \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| dn_\beta. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Por ultimo sumemos todas las desviaciones de las partículas blanco, para esto se definirán los potenciales de Rosenbluth:

$$g_{\alpha\beta} = \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| dn_\beta = \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d\mathbf{v}_\beta, \quad (2.77)$$

$$h_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}} \int \frac{dn_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} = \frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}} \int \frac{f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d\mathbf{v}_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|}.$$

Así las expresiones 2.76 se transforman en:

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_\alpha^2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{v}_\alpha}, \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} g_{\alpha\beta}.$$

Como se ha mencionado en el capítulo 1,  $b_{max}$  será la longitud de Debye, ya que mas allá de esta longitud el potencial está fuertemente apantallado, por otro lado,  $b_{min}$  será una distancia característica de una colisión fuerte, que es cuando  $b_0$  tiene una energía característica  $\mu_{\alpha\beta} v^2/2 = 3T/2$ , es decir:

$$b_{min} = \frac{q_\alpha q_\beta}{12\pi \epsilon_0 T}. \quad (2.79)$$

#### 2.4.2 Ecuación de Fokker-Plank.

Con lo que hemos hecho, ahora podemos ocupar las expresiones 2.78 para poder estudiar con mayor profundidad el término de colisiones en la expresión 2.6.

Es necesario decir que debido al gran número de colisiones dentro de la esfera de Debye, cambiará el estado dinámico de la partícula que entre en la esfera, en un tiempo  $t + \Delta t$ , de manera que la información previa a  $t$  dejará de importar, así la función de distribución será:

$$f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t + \Delta t) = \int f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha - \Delta \mathbf{v}_\alpha, t) P(\mathbf{v}_\alpha - \Delta \mathbf{v}_\alpha, \Delta \mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d\Delta \mathbf{v}_\alpha. \quad (2.80)$$

Donde  $P$  es la densidad de probabilidad de que la partícula con velocidad  $\mathbf{v}_\alpha - \Delta \mathbf{v}_\alpha$ , sufra un cambio de velocidad  $\Delta \mathbf{v}_\alpha$ , en un tiempo  $\Delta t$ . Desarrollando en serie de Taylor la expresión 2.80, tenemos:

$$f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t) + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{col} \Delta t = f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t) \int P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta \mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d\Delta \mathbf{v}_\alpha - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot [f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t) \int \Delta \mathbf{v}_\alpha P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta \mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d\Delta \mathbf{v}_\alpha] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} [f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t) \int \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta \mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d\Delta \mathbf{v}_\alpha]. \quad (2.82)$$

Recordemos que  $P$  tiene que cumplir con:

$$\int P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta \mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d\Delta \mathbf{v}_\alpha = 1. \quad (2.83)$$

De manera que el promedio de  $\Delta \mathbf{v}_\alpha$  será:

$$\int \Delta \mathbf{v}_\alpha P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta \mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d\Delta \mathbf{v}_\alpha = \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle. \quad (2.84)$$

Por lo que podemos escribir:

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle = \Delta t \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle, \quad (2.85)$$

De manera similar:

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle = \Delta t \frac{d}{dt} \int \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta \mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d\Delta \mathbf{v}_\alpha. \quad (2.86)$$

Así, al sustituir las expresiones 2.85 y 2.86 en la expresión 2.82 y obtener el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{col} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \left(f_\alpha \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} \left[f_\alpha \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle\right]. \quad (2.87)$$

Ahora al considerar las interacciones con todas las especies cargadas, y recordando las expresiones 2.78, tenemos que el término total de colisión será:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} = \sum_\beta \xi_{\alpha\beta} \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \left(f_\alpha \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} \left[f_\alpha \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} g_{\alpha\beta}\right] \right], \quad (2.88)$$

Donde hemos definido:

$$\xi_{\alpha\beta} = \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_\alpha^2}. \quad (2.89)$$

Al considerar el término 2.88, en la expresión 2.6, obtenemos un mejor análisis del plasma.



## 2.5 Tiempos de relajación en plasmas

### 2.5.1 Plasmas fríos

Las expresiones 2.78 dependen de la función de distribución de las partículas blanco, sin embargo para partículas blanco frías, es decir que no tienen velocidad de deriva, tenemos que las funciones de distribuciones de estas partículas son de la siguiente forma:

$$f(\mathbf{v}_\beta) = n_\beta \delta(\mathbf{v}_\beta), \quad (2.90)$$

de manera que los potenciales de Rosenbluth, se transforman en:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= n_\beta |\mathbf{v}_\alpha|, \\ h_{\alpha\beta} &= \frac{n_\beta m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta} |\mathbf{v}_\alpha|}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

por lo tanto las desviaciones en las velocidades (expresiones 2.78), se transforman en:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle &= \frac{-(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_\alpha^2 \mu_{\alpha\beta} |\mathbf{v}_\alpha|^3} \mathbf{v}_\alpha, \\ \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_\alpha^2 |\mathbf{v}_\alpha|} \left[ I - \frac{\mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{|\mathbf{v}_\alpha|^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Las expresiones 2.92 también son válidas cuando la velocidad  $|\mathbf{v}_\alpha|$  de la partícula es mayor que la velocidad térmica de las partículas blanco. En términos de las desviaciones paralelas y perpendiculares las expresiones 2.92 son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta |\mathbf{v}_\alpha|_{\alpha\parallel} \rangle &= \frac{-(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_\alpha^2 \mu_{\alpha\beta} |\mathbf{v}_\alpha|^2}, \\ \frac{d}{dt} \langle (\Delta |\mathbf{v}_\alpha|_{\alpha\perp})^2 \rangle &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 m_\alpha^2 |\mathbf{v}_\alpha|}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

De manera que podemos obtener las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta\parallel} &= \frac{|\mathbb{v}_\alpha|}{\left|\frac{d}{dt}\langle\Delta|\mathbb{v}_\alpha|_{\alpha\parallel}\rangle\right|} = \frac{4\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha^2 \mu_{\alpha\beta} |\mathbb{v}_\alpha|^3}{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln\Lambda}, \\ \tau_{\alpha\beta\perp} &= \frac{|\mathbb{v}_\alpha|^2}{\left|\frac{d}{dt}\langle(\Delta|\mathbb{v}_\alpha|_{\alpha\perp})^2\rangle\right|} = \frac{2\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha^2 |\mathbb{v}_\alpha|^3}{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln\Lambda}.\end{aligned}\quad (2.94)$$

Las expresiones 2.94 son los tiempos de relajación longitudinal y de dispersión, respectivamente.

Ahora estimemos los tiempos de variación de la energía en este tipo de colisiones.

Tenemos que la energía cinética es:

$$k_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}. \quad (2.95)$$

De manera que:

$$\Delta k_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} [(v_\alpha^2 + \Delta v_{\alpha\parallel}^2) + \Delta v_{\alpha\perp}^2 - v_\alpha^2] = \frac{m_\alpha}{2} [\Delta v_{\alpha\perp}^2 + \Delta v_{\alpha\parallel}^2] + m_\alpha v_\alpha \Delta v_{\alpha\parallel}. \quad (2.96)$$

Dado que:

$$\frac{d}{dt}\langle(\Delta v_{\alpha\parallel})^2\rangle \approx 0. \quad (2.97)$$

Por lo tanto 2.96 se convierte en:

$$\frac{d}{dt}\langle\Delta k_\alpha\rangle = \frac{m_\alpha}{2} \frac{d}{dt}\langle\Delta v_{\alpha\perp}^2\rangle + m_\alpha v_\alpha \frac{d}{dt}\Delta v_{\alpha\parallel}, \quad (2.98)$$

Sustituyendo las expresiones 2.93 en la expresión 2.98 tenemos:

$$\frac{d}{dt}\langle\Delta k_\alpha\rangle = -\frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0^2 m_\beta |\mathbb{v}_\alpha|}. \quad (2.99)$$

Así el tiempo característico es entonces:

$$\tau_{\alpha\beta}^k = \frac{k_\alpha}{\frac{d}{dt}\langle\Delta k_\alpha\rangle} = \frac{2\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha m_\beta |\mathbf{v}_\alpha|^3}{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln\Lambda}. \quad (2.100)$$

Ahora comparando los tiempos de variación de las partículas  $\alpha$  con las partículas  $\beta$  con el tiempo de variación de las partículas  $\alpha$  con  $\alpha$ , tenemos:

$$\frac{\tau_{\alpha\alpha}^k}{\tau_{\alpha\beta}^k} = \frac{m_\alpha q_\beta^2}{m_\beta q_\alpha^2}. \quad (2.101)$$

Lo que la expresión 2.101 nos dice es que las partículas livianas son más rápidamente afectadas por partículas de su propia especie, mientras que para partículas pesadas pasa lo contrario, así en un plasma tanto los electrones como los iones muy rápidos pierden su energía principalmente por los electrones en el plasma.

Ahora consideremos un plasma que tiene una distribución maxwelliana, de manera que:

$$T_\alpha = \frac{2}{3n_\alpha} \int k_\alpha f(\mathbf{v}_\alpha) d\mathbf{v}_\alpha, \quad (2.102)$$

Con lo que la variación de la temperatura debida a los choques de las partículas  $\beta$  será:

$$\frac{dT_\alpha}{dt} = \frac{2}{3n_\alpha} \int \frac{d}{dt} \langle\Delta k_\alpha\rangle f(\mathbf{v}_\alpha) d\mathbf{v}_\alpha = \frac{2}{3} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{3/2} \int \frac{d}{dt} \langle\Delta k_\alpha\rangle e^{-m_\alpha v_\alpha^2 / 2T_\alpha} dv_\alpha. \quad (2.103)$$

Así al sustituir la expresión 2.99 en la expresión 2.103, tenemos:

$$\frac{dT_\alpha}{dt} = -\frac{2(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln\Lambda T_\alpha}{3\varepsilon_0^2 m_\beta m_\alpha} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{3/2}. \quad (2.104)$$

Así el tiempo de relajamiento será:

$$\tau_{\alpha\beta}^T = \frac{T_\alpha}{\left|\frac{dT_\alpha}{dt}\right|} = \frac{3\varepsilon_0^2 m_\beta m_\alpha}{2(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln\Lambda} \left(\frac{2\pi T_\alpha}{m_\alpha}\right)^{3/2}. \quad (2.105)$$

De manera que si comparamos los tiempos de termalización entre ión-ión, electrón-electrón y ión-electrón, tendremos:

$$\frac{\tau_{ee}^T}{\tau_{ii}^T} \approx \frac{\tau_{ii}^T}{\tau_{ie}^T} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \quad (2.106)$$

Es decir que los electrones tienden a termalizarse más rápidamente que los iones, y éstos a su vez se termalizan más rápido que la combinación de electrones y iones.

## 2.6 Plasmas maxwellianos

Ahora consideremos que las partículas blanco tienen una función de distribución maxwelliana sin deriva, es decir:

$$f_{\beta}(\mathbf{v}_{\beta}) = n_{\beta} \left( \frac{m_{\beta}}{2\pi T_{\beta}} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_{\beta} v_{\beta}^2}{2T_{\beta}}}. \quad (2.107)$$

Para poder evaluar los potenciales de Rosenbluth se ponen las siguientes funciones:

$$\int \frac{e^{-\mathbf{x}^2} d^3\mathbf{x}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} = \pi^{3/2} \frac{\text{erf}(y)}{y} \quad (2.108)$$

$$\int |\mathbf{y}-\mathbf{x}| e^{-\mathbf{x}^2} d^3\mathbf{x} = \pi e^{-y^2} + \frac{\pi^{3/2}(1+2y^2)}{2y} \text{erf}(y).$$

Donde  $\text{erf}(y)$  es la función error:

$$\text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx \quad (2.109)$$

$$\text{erf}(\infty) = 1$$

Donde:

$$y = \sqrt{\frac{m_{\beta}}{2T_{\beta}}} v_{\alpha}, \quad (2.110)$$

De manera que los potenciales se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
 h_{\alpha\beta} &= n_{\beta} \left( \frac{m_{\beta}}{2\pi T_{\beta}} \right)^{3/2} \frac{m_{\alpha} + m_{\beta}}{m_{\beta}} \frac{\text{erf}(y)}{y} \\
 g_{\alpha\beta} &= n_{\beta} \sqrt{\frac{2T_{\beta}}{\pi m_{\beta}}} \left( e^{-y^2} + \frac{\sqrt{\pi}(1+2y^2)}{2y} \text{erf}(y) \right)
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

Con lo que obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta | \nabla_{\alpha} | \alpha_{\parallel} \rangle = \frac{(q_{\alpha} q_{\beta})^2 n_{\beta} \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_{\alpha}^2} \left( \frac{m_{\alpha} + m_{\beta}}{m_{\beta}} \right) \frac{m_{\beta}}{2T_{\beta}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y^2}}{y} - \frac{\text{erf}(y)}{y^2} \right]. \tag{2.112}$$

y

$$\frac{d}{dt} \langle (\Delta | \nabla_{\alpha} | \alpha_{\perp})^2 \rangle = \frac{(q_{\alpha} q_{\beta})^2 n_{\beta} \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_{\alpha}^2 |\nabla_{\alpha}|} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y^2}}{y} + \left( 2 - \frac{1}{y^2} \right) \text{erf}(y) \right]. \tag{2.113}$$

En el límite de velocidades  $v_{\alpha}$  grandes comparadas con la velocidad térmica de las partículas blanco  $\beta$ ,  $y \gg 1$ , es inmediato recuperar los resultados 2.93. Una derivación similar a la que llevó a la expresión 2.103, usando ahora las expresiones 2.112 y 2.113, lleva a que:

$$\frac{dT_{\alpha}}{dt} = - \frac{T_{\alpha} - T_{\beta}}{\tau_{\alpha\beta}^T}, \tag{2.114}$$

con la expresión 2.105, que, como corresponde, indica el proceso de tendencia a igualación de temperaturas por colisiones.

## 2.7 Resistividad en plasmas

Vamos a considerar un plasma, con una distribución maxwelliana, y con una velocidad relativa entre iones y electrones de  $\mathbb{u}_e$ .

El objetivo es calcular la resistividad en un plasmas, la cual es:

$$\eta = \frac{m_e v_{ie}}{e^2 n_e}. \tag{2.115}$$

Para esto empecemos por escribir el cambio de momento debido a las colisiones entre electrones e iones:

$$\mathbb{R}_{ei} = m_e n_e (\mathbb{w}_i - \mathbb{w}_e) v_{ei} = -m_e n_e \mathbb{w}_e v_{ei} = \int m_e \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbb{v}_e \rangle_i f_e(\mathbb{v}_e) d\mathbb{v}_e \quad (2.116)$$

En la expresión 2.116 estamos considerando que la velocidad de los iones es cero o muy pequeña con respecto a la de los electrones.

Así la función de distribución es:

$$f_e(\mathbb{v}_e) = n_e \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_e |\mathbb{v}_e - \mathbb{w}_e|^2}{2T_e}}. \quad (2.117)$$

Consideremos que la velocidad de deriva  $\mathbb{w}_e$  es menor que la velocidad térmica, entonces podemos escribir la expresión 2.117:

$$f_e(\mathbb{v}_e) \approx n_e \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \left( 1 + \frac{m_e}{T_e} \mathbb{v}_e \cdot \mathbb{w}_e \right) e^{-\frac{m_e |\mathbb{v}_e|^2}{2T_e}}. \quad (2.118)$$

Ocupando la expresión 2.94 en 2.116, y la aproximación 2.118, 2.116 se convierte en:

$$\mathbb{R}_{ei} = -m_e n_e \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \frac{m_e}{T_e} \mathbb{w}_e \cdot \int \frac{\mathbb{v}_e \mathbb{v}_e}{\tau_{ei\parallel}} e^{-\frac{m_e |\mathbb{v}_e|^2}{2T_e}} d\mathbb{v}_e. \quad (2.119)$$

Por isotropía tenemos:

$$\int \frac{\mathbb{v}_e \mathbb{v}_e}{\tau_{ei\parallel}} e^{-\frac{m_e |\mathbb{v}_e|^2}{2T_e}} d\mathbb{v}_e = \frac{1}{3} I \int \frac{v_e^2}{\tau_{ei\parallel}} e^{-\frac{m_e |\mathbb{v}_e|^2}{2T_e}} d\mathbb{v}_e. \quad (2.120)$$

De esta manera la expresión 2.119 se convierte en:

$$\mathbb{R}_{ei} = \frac{-m_e n_e}{3} \left( \frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \frac{m_e}{T_e} \mathbb{w}_e \int \frac{v_e^2}{\tau_{ei\parallel}} e^{-\frac{m_e |\mathbb{v}_e|^2}{2T_e}} d\mathbb{v}_e. \quad (2.121)$$

Por otro lado tenemos que:

$$\tau_{ei\parallel} = \frac{4\pi \epsilon_0^2 m_e \mu_{ie} v_e^3}{z^2 e^4 n_i \ln(\Lambda)} \approx \frac{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}{z^2 e^4 n_i \ln(\Lambda)}. \quad (2.122)$$

Por lo que comparando con la expresión 2.116 tenemos que la frecuencia de choque es:

$$\nu_{ei} = \frac{z^2 e^4 n_i \ln(\Lambda)}{3(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0^2 T_e^{3/2} \sqrt{m_e}}. \quad (2.123)$$

Así la resistencia en el plasma será:

$$\eta = \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{z^2 e^4 n_i \ln(\Lambda)}{3(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0^2 T_e^{3/2} \sqrt{m_e}}. \quad (2.124)$$

## 2.8 Oscilaciones en plasmas.

En este apartado se estudiarán de manera muy rápida la propagación de ondas en un plasma, para esto se considerará un plasma, homogéneo en densidades, temperatura y campos electromagnéticos, para esto también consideraremos como evoluciona el sistema empezando del estado base.

Por otro lado consideraremos al plasma con la descripción de 2 fluidos, de manera que las ecuaciones con las que trataremos serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_\alpha}{\partial t} + n_{0\alpha} \nabla \cdot \mathbb{u}_\alpha &= 0 \\ \frac{\partial \mathbb{u}_\alpha}{\partial t} &= -\frac{c^2_{0\alpha}}{n_{0\alpha}} \nabla \delta n_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbb{E} + \mathbb{u}_\alpha \times \mathbb{B}) - \nu_{\alpha\beta} (\mathbb{u}_\alpha - \mathbb{u}_\beta). \end{aligned} \quad (2.125)$$

El símbolo  $\delta$  en este caso representa una pequeña variación, en este caso de la densidad de partículas, sin embargo ésta solo cambiara en el tiempo y no en la posición, en este contexto  $n_{0\alpha}$  es la densidad de partículas en el estado base, se ha usado que  $c^2_{0\alpha} = \frac{\gamma_\alpha p_{0\alpha}}{\rho_{0\alpha}}$ , al considerar procesos barotrópicos, es decir:

$$p_\alpha n_\alpha^{-\gamma_\alpha} = cte. \quad (2.126)$$

Así para las perturbaciones obtenemos:

$$\delta p_\alpha = \gamma_\alpha \frac{p_{0\alpha}}{n_{0\alpha}} \delta n_\alpha = m_\alpha c^2_{0\alpha} \delta n_\alpha. \quad (2.127)$$

Para mayor profundidad ver [4].

Otras ecuaciones que han de ser consideradas son las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbb{E} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (z\delta n_i - \delta n_e), \\ \nabla \times \mathbb{E} &= -\frac{\partial \delta \mathbb{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \delta \mathbb{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.128}$$

$$\nabla \times \delta \mathbb{B} = \mu_0 e n_{0e} (\mathfrak{w}_i - \mathfrak{w}_e) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}.$$

Consideraremos que las cantidades se pueden escribir mediante una transformada de Fourier, es decir que tienen la forma:

$$a(\mathfrak{x}, t) = a^* e^{i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x} - \omega t)},\tag{2.129}$$

De manera que los operadores nabla se transforman en lo siguiente:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot &\rightarrow i\mathfrak{k} \cdot \\ \nabla \times &\rightarrow i\mathfrak{k} \times, \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega\end{aligned}\tag{2.130}$$

Así las expresiones 2.125 junto con las expresiones 2.128 se transforman en:

$$\begin{aligned}i\mathfrak{k} \cdot \mathbb{E} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (z\delta n_i - \delta n_e), \\ \mathfrak{k} \times \mathbb{E} &= \omega \delta \mathbb{B}, \\ \mathfrak{k} \cdot \delta \mathbb{B} &= 0, \\ i\mathfrak{k} \times \delta \mathbb{B} &= \mu_0 e n_{0e} (\mathfrak{w}_i - \mathfrak{w}_e) - \frac{i\omega}{c^2} \mathbb{E}, \\ -\omega \delta n_\alpha + n_{0\alpha} \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{w}_\alpha &= 0, \\ -i\omega \mathfrak{w}_\alpha &= -\frac{c^2_{0\alpha}}{n_{0\alpha}} i\mathfrak{k} \delta n_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbb{E} + \mathfrak{w}_\alpha \times \mathbb{B}) - \nu_{\alpha\beta} (\mathfrak{w}_\alpha - \mathfrak{w}_\beta)\end{aligned}\tag{2.131}$$

Reescribiendo el sistema tenemos:



$$\begin{aligned}
i\mathbf{k} \cdot \mathbb{E} &= \frac{en_{0e}}{\omega\epsilon_0} \mathbf{k} \cdot (\mathbb{w}_i - \mathbb{w}_e), \\
i\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbb{E}}{\omega} &= \mu_0 en_{0e} (\mathbb{w}_i - \mathbb{w}_e) - \frac{i\omega}{c^2} \mathbb{E}, \\
-i\omega \mathbb{w}_\alpha &= -\frac{c^2_{0\alpha}}{n_{0\alpha}} i\mathbf{k} \frac{n_{0\alpha} \mathbf{k} \cdot \mathbb{w}_\alpha}{\omega} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbb{E} + \mathbb{w}_\alpha \times \mathbb{B}) - \nu_{\alpha\beta} (\mathbb{w}_\alpha - \mathbb{w}_\beta),
\end{aligned} \tag{2.132}$$

De esta manera hemos eliminado  $\delta n_\alpha$  y  $\delta \mathbb{B}$ , sin embargo, todavía podemos simplificar un poco mas, usando la siguiente identidad:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbb{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbb{E}) - \mathbf{k}^2 \mathbb{E}, \tag{2.133}$$

sobre las expresiones 2.132 tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbb{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbb{E}) &= i\mu_0 en_{0e} \omega (\mathbb{w}_i - \mathbb{w}_e), \\
-i\omega \mathbb{w}_\alpha &= -\frac{c^2_{0\alpha}}{n_{0\alpha}} i\mathbf{k} \frac{n_{0\alpha} \mathbf{k} \cdot \mathbb{w}_\alpha}{\omega} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbb{E} + \mathbb{w}_\alpha \times \mathbb{B}) - \nu_{\alpha\beta} (\mathbb{w}_\alpha - \mathbb{w}_\beta),
\end{aligned} \tag{2.134}$$

Las expresiones 2.134 son de esta manera la base para el estudio de pequeñas oscilaciones en un plasma.

## 2.9 Equilibrio.

Gran parte de lo elaborado hasta ahora, es necesario para entender la dinámica de un plasma, esto a su vez es necesario para poder confinar un plasma, ya que esto último es el objetivo final de la física de plasmas, poder confinar un plasma y de aquí llevarlo a las condiciones donde la fusión nuclear se lleve a cabo.

El tiempo en que el plasma está confinado a de ser mucho mayor que el de los tiempos de colisión .

Para empezar el estudio del confinamiento del plasma, comenzaremos por hacer algunas consideraciones, como que la configuración ha de ser estacionaria, y también estática , hemos de considerar una presión isótropa, por otro lado dadas las altas temperaturas del sistema, la resistividad del plasma será despreciada.

Así, según la descripción de un fluido tenemos que:

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbb{B}. \tag{2.135}$$

De manera que esta ecuación ha de ser completada con las ecuaciones de Maxwell, que son:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbb{B} &= \mu_0 \mathbb{j}, \\ \nabla \cdot \mathbb{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.136}$$

Así al combinar la expresiones 2.136 con 2.135 tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{j} \cdot \nabla p &= 0, \\ \mathbb{B} \cdot \nabla p &= 0.\end{aligned}\tag{2.137}$$

De manera que las superficies con  $p$  constante, han de contener a  $\mathbb{j}$  y  $\mathbb{B}$ .

Si consideramos que la presión magnética es mucho más grande que la presión  $p$ , entonces podemos escribir 2.135 como:

$$\mathbb{j} \times \mathbb{B} = 0.\tag{2.138}$$

Ha esto se le llama equilibrio libre de fuerzas.

De manera que al combinar las expresiones 2.138 con 2.136 tenemos:

$$\mathbb{B} \times (\nabla \times \mathbb{B}) = 0.\tag{2.139}$$

Para resolver 2.139 se propone:

$$\nabla \times \mathbb{B} = \gamma \mathbb{B},\tag{2.140}$$

En la expresión 2.140  $\gamma$  es una función escalar, a esta expresión se le conoce como ecuación de Beltrami.

La ecuación de equilibrio, se puede escribir como:

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbb{B}) \times \mathbb{B} = \frac{1}{\mu_0} \left[ (\mathbb{B} \cdot \nabla) \mathbb{B} - \nabla \left( \frac{\mathbb{B}^2}{2} \right) \right],\tag{2.141}$$

Que se puede escribir como:

$$\nabla \left( p - \frac{\mathbb{B}^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbb{B} \cdot \nabla) \mathbb{B}.\tag{2.142}$$

Así al integrar 2.142 tenemos:

$$\left(p - \frac{\mathbb{B}^2}{2\mu_0}\right)_i = \left(\frac{\mathbb{B}^2}{2\mu_0}\right)_e. \quad (2.143)$$

Donde los subíndices  $i$  y  $e$  significan interior y exterior, respectivamente.

Tanto la presión termodinámica como la presión magnética pueden ser discontinuas en la interfase, pero su suma es continua. Recordemos que la componente normal del campo magnético es continua, por lo que una discontinuidad en la presión magnética requiere discontinuidad en la componente tangencial del campo, lo que es causado por corrientes superficiales en el plasma.

Un ejemplo importante del equilibrio puede encontrarse en los Tokamak, donde se tiene una distribución del plasma en forma toroidal, y en este se generan campos magnéticos toroidales y poloidales.

En este caso, una aproximación para resolver el problema es empezar por considerar al toro como un cilindro, es decir que de manera local veremos que el toro en lugar de curvarse sigue recto.

Con esto en mente, trataremos el problema con una geometría cilíndrica, de manera que tenemos una corriente  $I(r)$  en la dirección  $z$ , por lo que tendremos un campo magnético en la dirección  $\theta$ , también existirá un campo magnético en la dirección  $z$  debido al propio aparato.

De manera que el campo magnético en la dirección  $\theta$  será:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}, \quad (2.144)$$

Así de la expresión 2.137 tenemos:

$$\frac{d}{dr}(B_z^2 + B_\theta^2) + \frac{2}{r}B_\theta^2 = 0. \quad (2.145)$$

Ahora, si suponemos que el plasma tiene un radio  $R_0$  y que la corriente total que circula por él es  $I_0$  y está uniformemente distribuida, es  $I(r) = \frac{I_0 r^2}{R_0^2}$ , de

manera que  $B_z$  puede ser calculado, simplemente sustituyendo en 2.143, los siguientes datos:

$$\left. \begin{aligned} B_\theta(r) &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R_0^2} r & r \leq R_0 \\ B_\theta(r) &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} & r \geq R_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.146)$$

Obtenemos el valor de  $B_z$  para  $r \geq R_0$ :

$$B_z^2 = B_{zext}^2 + \frac{\mu_0^2 I_0^2}{2\pi^2 R_0^4} \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right). \quad (2.147)$$

## 2.10 Estabilidad.

Una configuración de equilibrio puede no realizarse en la práctica si la misma es inestable, esto es si a partir de un estado de equilibrio ésta empieza a evolucionar en un estado que no lo es.

Estudiaremos el plasma bajo el marco de un solo fluido, en el que el detalle de las distribuciones microscópicas no es muy importante.

Por otro lado en la teoría de un solo fluido tendremos características macroscópicas, estas últimas, son las que nos dirán sobre la estabilidad del plasma.

Con esto en mente consideremos las ecuaciones magneto hidrodinámicas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho \mathbb{u}), \\ \rho \frac{d\mathbb{u}}{dt} &= -\nabla p + \mathbb{j} \times \mathbb{B}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\gamma p \nabla \cdot \mathbb{u}, \\ \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbb{u} \times \mathbb{B}), \\ \nabla \cdot \mathbb{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbb{B} &= \mu_0 \mathbb{j}. \end{aligned} \right\} \quad (2.148)$$

Consideraremos pequeñas perturbaciones, con respecto a un equilibrio estático, es decir:

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{u}_0 &= 0, \\ \nabla p_0 &= \mathbb{j}_0 \times \mathbb{B}_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.149)$$

Propongamos la siguiente función:

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{x}, t) = \frac{d}{dt} \zeta(\mathfrak{x}, t). \quad (2.150)$$

También tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + \delta p(\mathfrak{x}, t), \\ \mathfrak{j} &= \mathfrak{j}_0 + \delta \mathfrak{j}(\mathfrak{x}, t), \\ \mathbb{B} &= \mathbb{B}_0 + \delta \mathbb{B}(\mathfrak{x}, t), \\ \rho &= \rho_0 + \delta \rho(\mathfrak{x}, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.151)$$

Así al sustituir las expresiones 2.151 y la expresión 2.150, en las expresiones 2.148, y dejar todo en términos lineales tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left( \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= -\nabla \delta p + \delta \mathfrak{j} \times \mathbb{B}_0 + \mathfrak{j}_0 \times \delta \mathbb{B}, \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \delta \mathbb{B}}{\partial t} &= \nabla \times \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \times \mathbb{B}_0 \right), \\ \nabla \cdot \delta \mathbb{B} &= 0, \\ \nabla \times \delta \mathbb{B} &= \mu_0 \delta \mathfrak{j}. \end{aligned} \right\} \quad (2.152)$$

Así podemos integrar las expresiones 2.152 con respecto a t, con lo que obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \delta \rho &= -\nabla \cdot (\rho_0 \zeta), \\ \delta p &= -\zeta \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \zeta, \\ \delta \mathbb{B} &= \nabla \times (\zeta \times \mathbb{B}_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.153)$$

Con lo que llegamos a la siguiente ecuación:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \nabla (\zeta \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \zeta) + \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times (\nabla \times (\zeta \times \mathbb{B}_0)) \right) \times \mathbb{B}_0 + \frac{1}{\mu_0} \mathfrak{j}_0 \times (\nabla \times (\zeta \times \mathbb{B}_0)). \quad (2.154)$$

La ecuación 2.154 es la base para el estudio de la estabilidad en las MHD, en punto de equilibrio.



## Capítulo 3

### Ecuación de Vlasov

#### 3.1 Aproximación de Vlasov

La aproximación de Vlasov consiste en despreciar el término de colisiones en la ecuación de transporte, esto debido a que los fenómenos que se estudian evolucionan más rápido, en comparación al término de colisión.

Con esto en mente nuestro sistema de ecuaciones, compuesto por las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de transporte será:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbb{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v} \\ \nabla \times \mathbb{E} &= -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbb{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbb{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} + \mu_0 \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Para una primera aproximación al problema consideraremos varias cosas:

1. No habrá un campo magnético, es decir  $\mathbb{B} = 0$ .
2. Supondremos que el campo eléctrico solo existe en una coordenada, en este caso supondremos que esa coordenada será el eje x,  $\mathbb{E} = E_x \hat{\mathbf{i}}$ .
3. En la ecuación de transporte consideraremos solo la componente en el eje x, es decir el problema es unidimensional.
4. Solo existe una especie eléctrica, que es  $Ze$ .
5. Se cumple la condición de neutralidad.

Por otro lado las funciones de distribución son:

$$F_\alpha(x, v_x, t) = \int f_\alpha(x, \mathbf{v}, t) dv_y dv_z. \quad (3.2)$$

De manera que las ecuaciones con las que trataremos son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_e}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_e}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E_x \frac{\partial F_e}{\partial v_x} &= 0 \\ \frac{\partial F_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{Ze}{m_i} E_x \frac{\partial F_i}{\partial v_x} &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{e}{\epsilon_0} (Z \int F_i dv_x - \int F_e dv_x) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Otra consideración que tomaremos para resolver el problema será que consideraremos perturbaciones cerca de un estado base estacionario y homogéneo tanto en  $F_i$  como en  $F_e$ , es decir:

$$F_{i,e}(x, v_x, t) = F_{i,e0}(v_x) + F_{i,e1}(x, v_x, t). \quad (3.4)$$

Donde  $F_{i,e0}$  es el estado base y  $F_{i,e1}$  el estado perturbado.

Con lo que las expresiones 3.3 se transforman en:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{e1}}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_{e1}}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E_x \frac{dF_{e0}}{dv_x} &= 0 \\ \frac{\partial F_{i1}}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_{i1}}{\partial x} + \frac{Ze}{m_i} E_x \frac{dF_{i0}}{dv_x} &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{e}{\epsilon_0} (Z \int F_{i1} dv_x - \int F_{e1} dv_x) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Ahora aplicaremos transformada de Laplace en el tiempo, y transformada de Fourier en el espacio en las expresiones 3.5:

$$\left. \begin{aligned} E_{\mathcal{FL}x}(k, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} E_x(x, t) e^{-st} e^{-ikx} dx dt \\ F_{\mathcal{FL}e,i1}(k, v, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F_{e,i1}(x, v, t) e^{-st} e^{-ikx} dx dt \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Después de algo de álgebra:

$$\left. \begin{aligned} (s + ikv)F_{\mathcal{FL}e1} &= E_{\mathcal{FL}x} \frac{e}{m_e} \frac{dF_{e0}}{dv_x} + F_{\mathcal{FL}e1}(k, v, 0) \\ (s + ikv)F_{\mathcal{FL}i1} &= -E_{\mathcal{FL}x} \frac{Ze}{m_i} \frac{dF_{i0}}{dv_x} + F_{\mathcal{FL}i1}(k, v, 0) \\ ikE_{\mathcal{FL}x} &= \frac{e}{\epsilon_0} (Z \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mathcal{FL}i1} dv - \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mathcal{FL}e1} dv) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Con las expresiones 3.7 encontramos una expresión para el campo eléctrico:



$$E_{\mathcal{FL}x} = \frac{N(k,s)}{D(k,s)}, \quad (3.8)$$

Con  $N(k, s)$  y  $D(k, s)$  definidos como:

$$\left. \begin{aligned} N(k, s) &= \frac{ie}{k\varepsilon_0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\mathcal{F}e1}(k, v, 0)}{s+ikv} dv - Z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\mathcal{F}i1}(k, v, 0)}{s+ikv} dv \right] \\ D(k, s) &= 1 - \frac{ie^2}{k\varepsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{dF_{e0}}{dv_x}}{s+ikv} dv - \frac{Zie^2}{k\varepsilon_0 m_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{dF_{i0}}{dv_x}}{s+ikv} dv \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Como queremos estudiar la evolución temporal del campo eléctrico, invertiremos la expresión 3.8, es decir:

$$E_{\mathcal{F}x}(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} E_{\mathcal{FL}x}(k, s) e^{-st} ds = \sum_{s_n} \text{Res}(E_{\mathcal{FL}x}(k, s_n)) e^{s_n t}, \quad (3.10)$$

Si  $\text{Re}(s_n) > 0$ , estamos hablando de una inestabilidad, por otro lado si  $\text{Re}(s_n) < 0$ , estamos hablando de un modo amortiguado.

Otra condición que se considerará será que:

$$F_{\mathcal{F}e1}(k, v, 0) = 0. \quad (3.11)$$

Esto principalmente por que para poder llevar a cabo las expresiones 3.9, es necesario tomar un contorno en forma de semi círculo que contenga  $\text{Im}(s_n) > 0$  y el eje real.

Por otro lado nos interesa el amortiguamiento de Landau, y este está relacionado con  $D(k, s)$ .

Lo que implicará que la expresión 3.8 se pueda escribir como:

$$D(k, s)E_{\mathcal{FL}x}(k, s) = 0, \quad (3.12)$$

Con lo que dado que  $E_{\mathcal{FL}x}(k, s) \neq 0$ , es decir el campo tiene una perturbación, que impide que sea 0, con lo que tenemos:

$$D(k, s) = 0, \quad (3.13)$$

Para poder realizar las integrales 3.9 consideraremos el semiplano superior, de manera que las singularidades de las integrales, se encuentran en los puntos  $v = iS/k$ , con esto en mente podemos pensar en tres posibles casos:

1.  $Re(s) > 0$ .
2.  $Re(s) = 0$ .
3.  $Re(s) < 0$ .

El caso 3, no es de nuestro interés, ya que es una singularidad fuera del contorno, el caso 1, es sencillo ya que solo basta con calcular los residuos, por otro lado para el caso 2, ya que la singularidad está sobre el eje real, es necesario rodear a la singularidad para poder llevar a cabo la integral.

De esta manera tenemos que[20]:

$$\oint \frac{\frac{dF_{ei0}}{dv_x}}{s+ikv} dv = Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{dF_{ei0}}{dv_x}}{s+ikv} dv + \frac{\pi}{k} \frac{dF_{ei0}}{dv_x} \Big|_{v=iS/k}. \quad (3.14)$$

### 3.2 Ondas en los plasmas y el amortiguamiento de Landau.

Tomando en cuenta las altas frecuencias en los plasmas, es posible despreciar el efecto de los iones, debido a la gran inercia de estos, de manera que su función de distribución no se ve perturbada por las perturbaciones del campo eléctrico, por otro lado consideraremos oscilaciones puras, es decir  $Re(S)=0$ , de manera que usaremos  $s = i\omega$ .

Con lo anterior dicho, podemos escribir la expresión 3.9 como:

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{e^2}{k\epsilon_0 m_e} \left( Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{dF_{e0}}{dv_x}}{\omega-kv} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} \right). \quad (3.15)$$

Por parte del plasma esperamos una frecuencia similar a la frecuencia de los electrones en el plasma, es decir que  $\omega \approx \omega_e$ , por otro lado, tenemos que  $\omega_e \approx v_{te}/\lambda_D$ , con esto en mente podemos concluir que:

$$\frac{\omega}{k} \approx \frac{v_{te}}{k\lambda_D} \gg v_{te}. \quad (3.16)$$

Como la mayor parte de los electrones tienen la velocidad  $v_{te}$ , podemos decir que  $v \sim v_{te}$ , por lo que podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\frac{1}{\omega - kv} = \frac{1}{\omega} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{kv}{\omega} \right)^n \right). \quad (3.17)$$

Por lo que podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \frac{1}{\omega} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{kv}{\omega} \right)^n \right) dv = -\frac{n_{0e}}{\omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{k}{\omega} \right)^n \langle v^{n-1} \rangle \right), \quad (3.18)$$

Donde:

$$\langle v^{n-1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v^n F_{e0} dv. \quad (3.19)$$

Para poder proseguir con el problema cortaremos la serie de 3.18 hasta el segundo término, por otro lado consideraremos que no hay corrientes, es decir,  $\langle v^1 \rangle = 0$ , también tenemos  $\langle v^2 \rangle = v_{te}^2$ , con lo que al final tenemos:

$$D(k, \omega) = 0 = 1 - \frac{e^2}{k \epsilon_0 m_e} \left( -\frac{n_{0e}}{\omega} \left( \sum_{n=1}^2 n \left( \frac{k}{\omega} \right)^n \langle v^{n-1} \rangle \right) - \frac{i\pi\omega}{kn_{0e}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} \right). \quad (3.20)$$

Para poder resolver 3.20, consideraremos que  $\omega$  puede ser escrito como  $\omega = \omega_R + i\omega_i$ , donde la parte imaginaria será muy pequeña comparada con la parte real, por otro lado suponemos que el último término en 3.20 es pequeño, de manera que tenemos que:

$$\begin{aligned} \omega_R^2 &= \omega_e^2 + 3k^2 v_{te}^2, \\ \omega_i &= \frac{\pi\omega_e^3}{2k^2 n_{0e}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Cuando  $\frac{dF_{e0}}{dv_x} < 0$ , el término  $\omega_i$  representa un amortiguamiento en la onda que se propaga, a este amortiguamiento se le conoce como amortiguamiento de Landau.

### 3.3 Amortiguamiento de Landau en ondas iónico-acústicas.

Tenemos que la relación de dispersión es:

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{e^2}{k\varepsilon_0 m_e} \left( Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{e0}}{dv_x} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} \right) + \frac{Z^2 e^2}{k\varepsilon_0 m_i} \left( Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{i0}}{dv_x} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} \right). \quad (3.22)$$

En este caso a diferencia del caso anterior consideraremos que las frecuencias a tratar no son tan altas, de manera que los iones podrán ser afectados por la onda, así las frecuencias ha estudiar tendrán que cumplir con:

$$kv_i \ll \omega \ll kv_e. \quad (3.23)$$

Así la integral para el caso iónico puede ser aproximada como, (la aproximación más baja):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{i0}}{\omega - kv} dv \approx \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{kv}{\omega} \right) \frac{dF_{i0}}{dv_x} dv = \frac{k}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{dF_{i0}}{dv_x} dv = \frac{-n_{0i}k}{\omega^2}. \quad (3.24)$$

De manera similar para el caso electrónico:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{e0}}{\omega - kv} dv = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{v} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{\omega}{kv}} \right) \frac{dF_{e0}}{dv_x} dv \approx \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{v} \right) \frac{dF_{e0}}{dv_x} dv = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{e0}}{v^2} dv \approx \frac{n_{e0}}{kv_t e^2}. \quad (3.25)$$

De manera que la expresión 3.22 se escribe como:

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{e^2 n_{e0}}{k^2 \varepsilon_0 m_e v_{te}^2} - \frac{Z^2 e^2 n_{0i}}{\varepsilon_0 m_i \omega^2} - \frac{i\pi e^2}{k^2 \varepsilon_0} \left( \frac{1}{m_e} \frac{dF_{e0}}{dv_x} + \frac{Z^2}{m_i} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \right) \Big|_{v=\omega/k}. \quad (3.26)$$

Sustituyendo la frecuencia de los electrones y la frecuencia de los iones:

$$\left. \begin{aligned} \omega_e^2 &= \frac{e^2 n_{e0}}{\varepsilon_0 m_e} \\ \omega_i^2 &= \frac{Z^2 e^2 n_{0i}}{\varepsilon_0 m_i} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

De manera que la expresión 3.26 se escribe como:

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_e^2}{k^2 v_{te}^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{i\pi}{k^2} \left( \frac{\omega_e^2}{n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} + \frac{\omega_i^2}{n_{0i}} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \right) \Big|_{v=\omega/k}, \quad (3.28)$$

Ahora si despreciamos el término de Landau y el 1, tendremos la dispersión para una onda ión-acústica, es decir:

$$\omega^2 = \frac{\omega_i^2}{\omega_e^2} k^2 v_{te}^2 = k^2 c_s^2. \quad (3.29)$$

Donde  $c_s$  es la velocidad de la onda en el medio.

Sin embargo para el caso donde se considera el efecto de Landau, supondremos que  $\omega$  se puede escribir como  $k^2 c_s^2 + i\gamma$ , donde  $\gamma$  es pequeño, al considerar esto, es fácil ver que:

$$\gamma = \frac{\pi k c_s^3}{2 \omega_i^2} \left( \frac{\omega_e^2}{n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} + \frac{\omega_i^2}{n_{i0}} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \right)_{v=c_s}. \quad (3.30)$$

### 3.4 Inestabilidad en 2 haces.

Hasta este momento las inestabilidades que hemos estudiado, son tales que los tiempos en los que se desarrollan son largos comparados con los tiempos de colisión, lo que nos ha hecho trabajarlas con distribuciones maxwellianas, sin embargo esto no siempre es así, existen inestabilidades que crecen muy rápido, de manera que estas distribuciones difieran de las distribuciones maxwellianas, en este apartado comenzaremos por tratar estos casos.

Para esto imaginaremos que tenemos 2 haces de electrones que están puestos uno enfrente del otro, es decir que uno tiene velocidad  $v_0$  y el otro velocidad  $-v_0$ , ambos están en la dirección x.

De las secciones anteriores sabemos que existen inestabilidades si  $Re(s) > 0$ , de la relación de Vlasov tenemos:

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{e^2}{k^2 \epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{dF_{e0}}{dv_x}}{v - \frac{\omega}{k}} dv, \quad (3.31)$$

Donde la función de distribución de los haces será:

$$F_{e0} = \frac{n_{e0}}{2} (\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)). \quad (3.32)$$

Así, al sustituir la expresión 3.32 en 3.31 tenemos:

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{2} \left( \frac{1}{(\omega + kv_0)^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right), \quad (3.33)$$

Vemos que  $D(k, \omega) = 0$ , nos da un polinomio de cuarto grado en  $\omega$ , por otro lado notemos que  $\omega \rightarrow \pm\infty$  nos da  $D(k, \omega) = 1$ , mientras  $\omega \rightarrow \pm kv$  nos da  $D(k, \omega) \rightarrow -\infty$ , nos dice que la curva  $D(k, \omega)$ , función de  $\omega$ , cruza el eje  $D(k, \omega) = 0$  al menos dos veces en  $|\omega| > kv_0$ , con lo que al menos 2 raíces serán reales. Las otras 2 raíces serán reales o complejas. Como

$$\frac{\partial}{\partial \omega} D(k, \omega) = \omega_e^2 \left( \frac{1}{(\omega + kv_0)^3} - \frac{1}{(\omega - kv_0)^3} \right), \quad (3.34)$$

sólo se anula en  $\omega = 0$ , el máximo de  $D(k, \omega)$  se encuentra allí. Para que existan raíces complejas este máximo debe ser negativo, de manera que en  $|\omega| < kv_0$  es  $D(k, \omega) < 0$  y la curva sólo cruza el eje en los puntos vistos con  $|\omega| > kv_0$ . Así la condición de inestabilidad es  $D(k, \omega = 0) < 0$ , o sea  $\omega_e > kv_0$ . Tenemos así inestabilidad para ondas con:

$$\lambda > \frac{2\pi v_0}{\omega_e}, \quad (3.35)$$

las perturbaciones que satisfacen esta condición generan acumulaciones de carga que crecen con el tiempo.



## Capítulo 4.

### Relatividad especial

#### 4.1 Introducción

La teoría especial de la relatividad, se ha convertido en una piedra angular en la física moderna, se ha aplicado al estudio preciso de la física nuclear, como también en la física de altas energías.

Los orígenes de la teoría de la relatividad especial yacen en el electromagnetismo, de hecho uno podría decir que el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell con la unificación de la electricidad, magnetismo y óptica, forzó al desarrollo de la teoría de la relatividad.

#### 4.2 Postulados de la relatividad

La teoría de la relatividad esta basada en 2 postulados :

- “ Las leyes de la naturaleza y los resultados de los experimentos desarrollados en un determinado marco de referencia son independientes del movimiento translacional de un sistema como un todo”.
- “La velocidad de la luz es independiente de la velocidad de su fuente”.

De los 2 postulados mencionados anteriormente el que más afectó el modo como se ven las cosas es el segundo, de hecho forzó a un replanteamiento de las ideas del espacio y tiempo.

#### 4.3 Transformaciones de Lorentz

Si consideramos 2 marcos de referencia  $K$  y  $K'$  que se mueven con una velocidad relativa  $v$  entre ellos, con un punto cuyas coordenadas espacio-temporales son  $(t, x, y, z)$  y  $(t', x', y', z')$  en los marcos  $K$  y  $K'$  respectivamente. Supongamos ahora que el eje  $z'$  se mueve paralelo y en la dirección positiva al eje  $z$  con una velocidad  $v$ , y que los otros dos ejes permanecen paralelos.



Supongamos también que al tiempo  $t=t'=0$  los orígenes de ambos marcos coinciden.

Si una fuente de luz en reposo con respecto al marco  $K$  emitiera luz e inmediatamente después dejara de hacerlo al tiempo  $t=t'=0$ , el segundo postulado implica que ambos observadores en  $K$  y  $K'$  verán una esfera de luz que se expande desde el origen con velocidad  $c$ .

De manera que los frentes de onda para el observador del marco  $K$ , estarán definidos por la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2. \quad (4.1)$$

De manera similar para el frente de onda del marco de referencia  $K'$  tendremos:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = ct'^2. \quad (4.2)$$

En este caso como solo estamos considerando el movimiento en una sola dirección, que es la dirección  $z$ , y ocupando la homogeneidad del espacio, así como la isotropía, tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} z' &= az + bct \\ t' &= bz + act \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

considerando  $z'=0$ , y que  $z/t=v$ , las ecuaciones 4.3 se transforman en:

$$\left. \begin{aligned} z' &= a(z - vt) \\ t' &= a \left( t - \frac{vz}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

ahora al invertir el sistema 4.4 tenemos:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{a \left( 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right)} (z + vt) \\ t &= \frac{1}{a \left( 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right)} \left( t + \frac{vz}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Hay que notar que:

$$a^2 = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}, \quad (4.6)$$

de manera que al final las ecuaciones 4.4 quedan como:

$$\left. \begin{aligned} z' &= \frac{(z-vt)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \\ t' &= \frac{\left(t - \frac{vz}{c^2}\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \end{aligned} \right\}. \quad (4.7)$$

Así las transformaciones de Lorentz para este caso son:

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{\left(t - \frac{vz}{c^2}\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \\ z' &= \frac{(z-vt)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \\ x' &= x \\ y' &= y \end{aligned} \right\}. \quad (4.8)$$

Comúnmente se toma la siguiente notación:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} \\ \boldsymbol{\beta} &= \frac{\mathbf{v}}{c} \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

Hasta este momento se ha considerado el hecho de que el marco  $\mathbf{K}$  se mueve de forma paralela al eje  $z$  del marco  $\mathbf{K}'$ , sin embargo en general  $\mathbf{v}$  es un vector arbitrario, para este caso las transformaciones son de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} x_0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.10)$$

En las expresiones 4.10 se ha considerado  $x_0=ct$ ,  $x_1=z$ ,  $x_2=x$ ,  $x_3=y$ , también se tiene que decir que la primera ecuación se obtiene de forma inmediata de la ecuación 4.8, solo basta considerar las 3 componentes espaciales, la segunda pudiendo verse más complicada, solo hay que recordar lo siguiente, que el vector  $\mathbf{x}$  se puede descomponer en la parte paralela y perpendicular al vector  $\boldsymbol{\beta}$ , es decir:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{x} \perp \boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{x} \parallel \boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{x} \parallel \boldsymbol{\beta} &= \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Vale la pena mencionar que las parte perpendiculares al movimiento no se ven afectadas.

De manera que al considerar la expresión 4.11 es clara la ecuación 4.10.

Una forma de parametrizar las expresiones 4.9 es de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \tanh(\zeta) \\ \gamma &= \cosh(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

en donde al parámetro  $\zeta$  se le conoce como parámetro de empuje o rapidez, de manera que las expresiones 4.8 en función del parámetro quedan como:

$$\left. \begin{aligned} x_0' &= x_0 \cosh(\zeta) - x_1 \sinh(\zeta) \\ x_1' &= -x_0 \sinh(\zeta) + x_1 \cosh(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

#### 4.4 4- Vectores

Las transformaciones de Lorentz (ecuaciones 4.10), describen el cambio de coordenadas de un punto en un marco de referencia inercial, con respecto a otro marco de referencia inercial.

Para describir los puntos en este espacio, hemos de usar 4-vectores, es decir cuaternas,  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  donde  $A_1, A_2$  y  $A_3$  forman parte de un 3-vector.

El hecho de que las leyes de la física no dependan del marco de referencia, es decir que sean invariantes, nos implica que:

$$A_0'^2 - |\mathbf{A}'|^2 = A_0^2 - |\mathbf{A}|^2, \quad (4.14)$$

donde  $(A_0', \mathbf{A}')$  y  $(A_0, \mathbf{A})$  pertenecen a 2 marcos de referencia. Para dos 4-vectores  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  y  $(B_0, B_1, B_2, B_3)$ , tenemos que el producto interno es un invariante es decir:

$$A'_0 B'_0 - \mathbb{A}' \cdot \mathbb{B}' = A_0 B_0 - \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}. \quad (4.15)$$

#### 4.5 Invariante de separación

Al igual que en otros espacios necesitamos una forma de medir, en este caso dados 2 puntos  $P_1(t_1, \mathbf{x}_1)$  y  $P_2(t_2, \mathbf{x}_2)$ , la distancia entre ellos será:

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2. \quad (4.16)$$

#### 4.6 Tiempo propio

Otro importante concepto en la relatividad es el tiempo propio.

Consideremos un sistema, que por definición pensemos que es una partícula, que se mueve con una velocidad  $\mathbf{u}(t)$  relativa a algún marco de referencia  $\mathbf{K}$ .

En un intervalo de tiempo  $dt$  su posición cambia  $dx = \mathbf{u}(t) dt$  de manera que  $ds$ , queda como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt^2 - u^2(t) dt^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta^2). \quad (4.17)$$

Ahora en el sistema  $\mathbf{K}'$  donde el sistema está en reposo, los incrementos son  $dt' = d\tau$  y  $dx' = 0$ , de manera que el invariante en este caso es  $ds = c d\tau$ , así debido a la invariancia de la transformación tenemos:

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt. \quad (4.18)$$

De manera que  $\tau$ , es llamado el tiempo propio.

#### 4.7 La 4-Velocidad

Hasta el momento hemos visto que la forma en cómo se ven los puntos de un marco  $\mathbf{K}$ , con respecto a uno  $\mathbf{K}'$  es un poco distinto de cómo se verían considerando las transformaciones galileanas, de manera que es fácil pensar que la suma de velocidades no será la excepción.

En la sección 4.3 hemos visto que las transformaciones de las coordenadas siguen las siguientes reglas:

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{\left(t - \frac{vz}{c^2}\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \\ z' &= \frac{(z - vt)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \\ x' &= x \\ y' &= y \end{aligned} \right\}$$

Ahora pensemos en cómo es la velocidad de una partícula en el marco de referencia  $\mathbf{K}$ , en este marco de referencia la velocidad será:

$$z = v_z t. \quad (4.19)$$

De manera que al sustituir la ecuación 4.19 en las expresiones 4.8, tenemos los siguientes resultados:

$$\left. \begin{aligned} z' &= \frac{(v_z t - vt)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \\ t' &= \frac{\left(t - \frac{vv_z t}{c^2}\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} \end{aligned} \right\}. \quad (4.20)$$

Es claro que la velocidad en el marco de referencia  $\mathbf{K}'$  se define como:

$$v_{z'}' = \frac{z'}{t'}. \quad (4.21)$$

De manera que al usar las expresiones 4.20 en la expresión 4.21 tenemos:

$$v_{z'}' = \frac{z'}{t'} = \frac{v_z - v}{1 - \frac{vv_z}{c^2}}, \quad (4.22)$$

en general el vector 4-velocidad se define como:

$$\mathbb{V}' = (v_0', \mathbb{V}') = \left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right) = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau}\right) = \gamma(c, \mathbf{v}). \quad (4.23)$$

En la expresión 4.23 hay que notar que  $\mathbf{v}$  representa la velocidad que hay en el marco de referencia  $\mathbf{K}$ , y que  $\gamma$  esta en función de la velocidad relativa entre los marcos de referencia.

## 4.8 Propiedades matemáticas del espacio tiempo en relatividad

Podemos decir que las transformaciones de Lorentz dejan invariante a la cantidad  $s^2$ .

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (4.24)$$

Al tipo de transformaciones que dejan invariante esta forma le decimos grupo homogéneo de Lorentz, por otro lado también tenemos el grupo de transformaciones que dejan invariante la siguiente cantidad:

$$s^2(x, y) = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2, \quad (4.25)$$

a este grupo se le conoce como el grupo inhomogéneo de Lorentz o grupo de Poincaré, sin embargo por sencillez restringiremos nuestra atención al grupo de Lorentz.

Empecemos ahora por decir que el continuo del espacio-tiempo está definido por 4 coordenadas,  $x^0, x^1, x^2, x^3$ . Suponemos que existe una transformación que nos da las siguientes coordenadas,  $x'^0, x'^1, x'^2, x'^3$ , de manera que:

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (4.26)$$

De momento no especificaremos la regla de transformación.

Los tensores de rango  $k$  asociados con un punto  $x$  son definidos por las propiedades de sus transformaciones  $x \rightarrow x'$ .

Un escalar, por ejemplo, es un tensor de rango cero, una cantidad que no cambia bajo la transformación, la cantidad  $s^2$  es un escalar. Para tensores de rango 1, llamados vectores, tenemos 2 tipos, los llamados contravariantes y los llamados covariantes.

Los vectores contravariantes, están formados por 4 cantidades,  $A^0, A^1, A^2, A^3$ , estas cantidades se transforman de acuerdo a la siguiente regla:

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta. \quad (4.27)$$

En la ecuación 4.27 se ha considerado la suma de índices repetidos.

Los vectores covariantes se transforman bajo la siguiente regla:

$$A'_{\alpha} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} A_{\beta}. \quad (4.28)$$

Con esto en mente, un tensor contravariante de rango 2 será:

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta}, \quad (4.29)$$

la ecuación 4.29 tiene 16 elementos.

De manera similar un tensor covariante tendrá la siguiente estructura:

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} G_{\gamma\delta}. \quad (4.30)$$

Otra característica importante es el producto interno que se define de la siguiente manera:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = A_{\alpha} B^{\alpha}. \quad (4.31)$$

Con esta definición nos podemos dar cuenta de que el producto interno es un invariante:

$$\mathbb{A}' \cdot \mathbb{B}' = A'_{\alpha} B'^{\alpha} = \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A_{\gamma} B^{\beta} = \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x^{\beta}} A_{\gamma} B^{\beta} = \delta_{\beta}^{\gamma} A_{\gamma} B^{\beta} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}. \quad (4.32)$$

Ahora en general podemos escribir el elemento diferencial  $ds^2$  como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \quad (4.33)$$

donde en el caso del espacio plano tenemos:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

A la expresión 4.34 se le conoce como tensor métrico.

El tensor contravariante  $g^{\alpha\beta}$ , se define como el cofactor de  $g_{\alpha\beta}$ , normalizado, en el caso del espacio plano tenemos:

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}. \quad (4.35)$$

Hay que notar que la contracción de los tensores covariantes y contravariantes da la delta de Kronecker:

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}. \quad (4.36)$$

Para realizar las transformaciones entre los elementos covariantes y contravariantes, tenemos las siguientes relaciones:

$$x_{\alpha} = g_{\alpha\beta}x^{\beta}, x^{\alpha} = g^{\alpha\beta}x_{\beta}. \quad (4.37)$$

De manera que si tenemos un vector contravariante  $A^{\alpha}$ , el vector covariante  $A_{\alpha}$  será:

$$A^{\alpha} = (A^0, \mathbb{A}), A_{\alpha} = (A_0, -\mathbb{A}). \quad (4.38)$$

Así el producto interno en este espacio se define como:

$$B \cdot A = B_{\alpha}A^{\alpha} = B^0A^0 - \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}. \quad (4.39)$$

Otra característica importante en el tema, es la transformación del operador derivada parcial, este operador se transforma de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}. \quad (4.40)$$

Vale la pena mencionar lo siguiente, la diferenciación con respecto a una componente contravariante de un vector coordenado, se transforma como el componente de un vector operador covariante.

De manera que tenemos los siguientes operadores:

$$\partial^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right), \quad (4.41)$$

o en su forma covariante:

$$\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right). \quad (4.42)$$

La divergencia de un 4-vector es un invariante.



$$\partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A_0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbb{A}. \quad (4.43)$$

Otro operador importante, es el operador D'ambertiano, definido de la siguiente manera:

$$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2. \quad (4.44)$$

#### 4.9 Representación matricial de las transformaciones de Lorentz, generadores infinitesimales

Ahora para hacer las manipulaciones más explícitas hemos de usar una representación matricial con las componentes de un 4-vector contravariante, cuyas componentes son:

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Los productos matriz-escalar de los 4-vectores (a,b) son definidos por la suma sobre todos los productos de elementos de a y b, o equivalentemente por la multiplicación matricial de la transpuesta de a sobre b:

$$(a, b) = \tilde{a}b. \quad (4.46)$$

El tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  tiene la siguiente forma matricial (ecuación 4.34):

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

con la propiedad de  $g^2=I$ . El vector covariante es entonces:

$$gx = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

La expresión 4.47 es obtenida por la multiplicación matricial de la expresión 4.34, sobre la expresión 4.45.

Ahora, nosotros tenemos que encontrar una matriz de transformación A, tal que la norma de  $\mathbf{x}g\mathbf{x}$ , quede invariante, es decir:

$$\tilde{x}gx = (x, gx) = (x', gx') = \tilde{x}'gx', \quad (4.48)$$

donde:

$$x' = Ax. \quad (4.49)$$

Así que al sustituir la expresión 4.49 en la expresión 4.48, tenemos:

$$\tilde{x}gx = \tilde{x}\tilde{A}gAx, \quad (4.50)$$

ya que esta cantidad debe permanecer invariante para cualquier vector  $\mathbf{x}$ , entonces se debe cumplir que:

$$g = \tilde{A}gA. \quad (4.51)$$

Lo primero que podemos decir de la expresión 4.51, es que el determinante de A ha de ser  $\pm 1$ , de esta característica podemos clasificar las transformaciones de Lorentz como propias o impropias, donde el determinante de las transformaciones propias es 1, sin embargo para las impropias es necesario pero no suficiente que el determinante de la transformación sea -1.

Lo segundo que podemos mencionar acerca de A es el número de elementos libres que tiene.

Ya que A es una matriz  $4 \times 4$ , tiene 16 elementos, pero no todos son libres, esto por que A debe cumplir 4.51, es decir que hay 6 parámetros libres.

La forma de A puede ser obtenida de la siguiente manera.

Primero supongamos lo siguiente:

$$A = e^L, \quad (4.52)$$

de manera que el determinante de A será:

$$\det(A) = e^{Tr(L)}. \quad (4.53)$$

Para las transformaciones propias de Lorentz la matriz L es una matriz 4×4, sin traza, ahora, la ecuación 4.51 puede escribirse como:

$$g\tilde{A}g = A^{-1}. \quad (4.54)$$

Debido a la expresión 4.52, y al hecho de que  $g^2=I$  podemos escribir:

$$\tilde{A} = e^{\tilde{L}}, \quad g\tilde{A}g = e^{g\tilde{L}g}, \quad A^{-1} = e^{-L}. \quad (4.55)$$

Por lo tanto, la expresión 4.54 es equivalente a:

$$g\tilde{L}g = L^{-1}. \quad (4.56)$$

Si proponemos L, como:

$$L = \begin{pmatrix} a^0 & b^0 & c^0 & d^0 \\ a^1 & b^1 & c^1 & d^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

debido a la expresión 4.56, L tendrá la siguiente forma:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ a^1 & 0 & -b^2 & -b^3 \\ a^2 & b^2 & 0 & -c^3 \\ a^3 & b^3 & c^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Existen 6 matrices que sirven como base para la expresión 4.58, las cuales son:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde las matrices  $s_i$  representan rotaciones, y las matrices  $K_i$  representan impulsos, aparte de esto, estas matrices tienen la siguiente característica:

$$s_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} s_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} s_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$k_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} k_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} k_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general la expresión 4.58, se escribe como:

$$L = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{S} - \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbb{K}, \quad (4.61)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\zeta}$  son dos 3-vectores, de hecho comparando el resultado 4.61 con la expresión 4.13, nos damos cuenta de que llegamos al mismo resultado haciendo  $\boldsymbol{\omega}=0$ , y  $\boldsymbol{\zeta}=\zeta\mathbf{r}_1$ , así la transformación A será:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(\zeta) & -\sinh(\zeta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\zeta) & \cosh(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

El término de impulso puede ser escrito como:

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\beta} \tanh^{-1}(\beta). \quad (4.63)$$

Suponiendo que no hay rotación, la matriz A en general será:

$$A_{boost}(\boldsymbol{\beta}) = e^{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbb{K} \tanh^{-1}(\beta)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Así el vector  $\mathbf{x}'$  será:

$$\mathbf{x}' = A_{boost}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{x}. \quad (4.65)$$

## 4.10 Invariancia de la carga eléctrica, covariancia de la electrodinámica

La invariancia de las ecuaciones de la electrodinámica bajo las transformaciones de Lorentz fue mostrada por Lorentz y Poincaré antes de la formulación de la teoría especial de la relatividad.

Consideremos la fuerza de Lorentz para una carga  $q$ :

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = q \left( \mathbb{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbb{B}}{c} \right). \quad (4.66)$$

Ahora tenemos que el momento en su forma contravariante es:

$$\mathbf{P}^\alpha = (p_0, \mathbb{P}) = m(U_0, \mathbb{U}), \quad (4.67)$$

donde  $p_0 = \frac{E}{c}$  y  $\mathbf{U}^\alpha$  es la 4-velocidad, ahora si ocupamos el tiempo propio  $\tau$ , tendremos:

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\tau} = \frac{q}{c} (U_0 \mathbb{E} + \mathbb{U} \times \mathbb{B}). \quad (4.68)$$

En la expresión 4.68 tenemos que el término temporal es:

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{q}{c} \mathbb{U} \cdot \mathbb{E}. \quad (4.69)$$

La expresión 4.69, es la razón de cambio de la energía de la partícula. Consideremos las ecuaciones microscópicas de Maxwell, de manera que solo usaremos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , ahora recordando la ecuación de continuidad que es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{J} = 0. \quad (4.70)$$

Del resultado de la expresión 4.42, es natural el pensar que las cantidades  $\rho$  y  $\mathbb{J}$  son elementos de un 4-vector que cumple con lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}^\alpha &= (c\rho, \mathbb{J}) \\ \partial_\alpha \mathbb{J}^\alpha &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{J} = 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Donde el 4-vector  $\mathbf{J}^\alpha$  se le conoce como la 4-corriente.

Por otro los elementos de volumen  $dx^4$  y  $dx'^4$ , son invariantes como a continuación podemos ver:

$$dx'^4 = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} dx^4 = \det A dx^4 = dx^4. \quad (4.72)$$

También tenemos las ecuaciones de onda:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbb{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbb{J} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi &= 4\pi \rho \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

Con la condición de Lorentz:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{A} = 0. \quad (4.74)$$

Si consideramos el siguiente 4- vector:

$$\mathbf{A}^\alpha = (\Phi, \mathbb{A}), \quad (4.75)$$

Entonces, tenemos que al aplicar las expresiones 4.43 y 4.44, sobre 4.75, tenemos las expresiones 4.73:

$$\left. \begin{aligned} \square \mathbf{A}^\alpha &= \partial_\alpha \partial^\alpha \mathbf{A}^\alpha = \frac{4\pi}{c} \mathbb{J}^\alpha \\ \partial_\alpha \mathbf{A}^\alpha &= \frac{\partial \mathbf{A}^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.76)$$

La relación entre los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  con respecto a los potenciales  $\mathbf{A}$  y  $\Phi$  es la siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{E} &= \frac{-1}{c} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \\ \mathbb{B} &= \nabla \times \mathbb{A} \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

Por ejemplo la componente x de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{-1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 + \partial^1 A^0) \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

De esta manera tenemos que tanto el campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  pertenecen a un tensor contravariante de rango 2, anti simétrico, es decir:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

La expresión 4.79 se le conoce como el tensor de campo-fuerza antisimétrico. Ahora el tensor en su forma covariante es:

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Con esta definición podemos escribir las ecuaciones de Maxwell:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbb{E} &= 4\pi\rho; & \nabla \times \mathbb{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}; & \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{c} \mathbb{J}^\beta \\ \nabla \cdot \mathbb{E} &= 4\pi\rho; & \nabla \times \mathbb{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}; & \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

Donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son enteros 0,1,2 y 3.

De esta manera podemos escribir la fuerza Lorentz en forma contravariante:

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (4.82)$$

## 4.11 Lagrangeano para campos electromagnéticos

Examinaremos la descripción Lagrangeana de un campo electromagnético en interacción con fuentes externas de carga y corriente.

En el caso de campos continuos, las cantidades  $q_i(t)$  y  $\dot{q}_i(t)$ , con  $i=1,2,3,\dots,n$ , son reemplazadas por un número infinito de grados de libertad. Cada punto en el espacio tiempo  $x^\alpha$  corresponde a un número finito de valores del índice discreto  $i$ . La coordenada generalizada  $q_i$  es reemplazada por un campo un campo continuo  $\Phi_k(x)$ , con un índice discreto  $k$  y un índice continuo ( $x^\alpha$ ). La velocidad generalizada  $\dot{q}_i(t)$ , es cambiada por el 4-vector gradiente,  $\partial^\beta \Phi_k$ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange siguen de la propiedad estacionaria de la integral de acción con respecto a las variaciones  $\delta\Phi_k(x)$  y  $\delta(\partial^\beta\Phi_k)$  alrededor de los valores físicos, así obtenemos las siguientes correspondencias:

$$\begin{aligned}
 i &\rightarrow x^\alpha, k \\
 q_i &\rightarrow \phi_k(x) \\
 \dot{q}_i &\rightarrow \partial^\beta\Phi_k
 \end{aligned}
 \tag{4.83}$$

$$L = \sum_i L_i(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \int \mathcal{L}(\phi_k, \partial^\beta\Phi_k) d^3x$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow \partial^\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta\Phi_k)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}$$

Donde  $\mathbb{L}$  es la densidad Lagrangeana correspondiente a un punto definido en el espacio-tiempo y equivalente a los términos individuales en una partícula Lagrangeana discreta. Para el campo electromagnético las “coordenadas” y las “velocidades” son  $A^\alpha$  y  $\partial^\beta A^\alpha$ .

La acción toma la siguiente forma:

$$A = \int \int \mathcal{L} d^3x dt = \int \mathcal{L} d^4x.
 \tag{4.84}$$

La naturaleza invariante de Lorentz de la acción es preservada por la densidad Lagrangeana  $\mathbb{L}$  que es un escalar de Lorentz.

En analogía con la situación con partículas discretas nosotros esperamos que el Lagrangeano de partícula libre sea cuadrático en las velocidades, esto es en  $\partial^\beta A^\alpha$  ó  $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ . Esto último es un escalar bajo transformaciones propias de Lorentz, pero un pseudoescalar bajo inversiones. Si nosotros pedimos un escalar  $\mathbb{L}$  bajo inversiones como en transformaciones propias de Lorentz, tenemos que tener que el lagrangeano de partícula libre  $\mathbb{L}_{\text{libre}}$  tiene que ser múltiplo de  $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ , y el término de interacción  $\mathbb{L}_{\text{interacción}}$  tiene que ser múltiplo de  $J_\alpha A^\alpha$ , de manera que se propone que la densidad de lagrangeano sea:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha.
 \tag{4.85}$$

Con el fin de usar la ecuaciones de Euler-Lagrange con la forma dada por 4.84 sustituyamos la definición de los campos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} (\partial^\mu A^\sigma - \partial^\sigma A^\mu) (\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda) - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha.
 \tag{4.86}$$



Tenemos que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)}$  es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} \left\{ \begin{array}{l} \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\sigma F^{\lambda\nu} - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\mu F^{\lambda\nu} \\ + \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\nu F^{\mu\sigma} - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\lambda F^{\mu\sigma} \end{array} \right\}. \quad (4.87)$$

Debido a la simetría de  $g_{\alpha\beta}$  y a la antisimetría de  $F^{\alpha\beta}$ , tenemos que 4.87 se transforma en:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{4\pi} F_{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta}. \quad (4.88)$$

La otra parte de la ecuación Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = -\frac{1}{c} J_\alpha. \quad (4.89)$$

Así las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{1}{4\pi} \partial^\beta F_{\beta\alpha} = \frac{1}{c} J_\alpha. \quad (4.90)$$

Así 4.90 es la forma covariante de las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell.

## 4.12 Tensores de esfuerzo canónicos y simétricos

### 4.12.1 Generalización del hamiltoniano: tensor de esfuerzos canónico.

La transición de la formulación hamiltoniana y la conservación de la energía es hecha primeramente definiendo el momento canónico:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.91)$$

Y después introduciendo el hamiltoniano,

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (4.92)$$

Al igual que pasó con la densidad de lagrangeano, nosotros esperamos encontrar una densidad hamiltoniana que integrada sobre todo el espacio nos dé el hamiltoniano del sistema.

Ya que la energía de la partícula es la componente temporal del 4-vector, el hamiltoniano se debe transformar de la misma manera. Ya que  $H = \int \mathcal{H} d^3x$ , el elemento del 4-volumen es,  $d^4x = d^3x dx_0$ , es necesario que la densidad de hamiltoniano se transforme como la componente tiempo a tiempo de un tensor de segundo rango.

Si la densidad lagrangeana está en función de variables  $\Phi_k(x)$ ,  $\partial^\beta \Phi_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , la densidad hamiltoniana está definida en analogía con 4.92 como:

$$\mathcal{H} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial t} \right)} \frac{\partial \phi_k}{\partial t} - \mathcal{L}. \quad (4.93)$$

El primer miembro de la suma es el momento canónico del campo, conjugado de  $\Phi_k(x)$  y  $\frac{\partial \phi_k}{\partial t}$ , es el equivalente de  $\dot{q}_i$ .

Las propiedades derivadas de las transformaciones de Lorentz de  $\mathcal{H}$  sugieren que la generalización covariante de la densidad hamiltoniana es el tensor de esfuerzos canónicos:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta \phi_k - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (4.94)$$

Así para el campo electromagnético libre tenemos que la densidad lagrangeana es:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.95)$$

De manera que el tensor de esfuerzos es:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (4.96)$$

Por lo tanto usando el resultado 4.88 en 4.96 tenemos:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{-1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (4.97)$$

Para ver el significado del tensor, obtengamos algunos de sus componentes, usando que  $\mathcal{L} = \frac{(E^2 - B^2)}{8\pi}$ , tenemos:

$$\left. \begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2) + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\phi \mathbb{E}) \\ T^{0i} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbb{E} \times \mathbb{B})_i + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (A_i \mathbb{E}) \\ T^{i0} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbb{E} \times \mathbb{B})_i + \frac{1}{4\pi} \left( \nabla \times (\phi \mathbb{B})_i - \frac{\partial}{\partial x_0} (\phi \mathbb{E}) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

Para deducir esto hemos considerado un espacio libre de carga y corriente. Ahora si integramos las primeras 2 expresiones de 4.98 sobre todo el volumen, y tomando en cuenta que las contribuciones de los segundo sumandos será 0, ya que al pasar las integrales de volumen a superficie las integrales desaparecerán, de manera que obtenemos los siguientes resultados:

$$\left. \begin{aligned} \int T^{00} d^3x &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2) d^3x = E_{campo} \\ \int T^{0i} d^3x &= \frac{1}{4\pi} \int (\mathbb{E} \times \mathbb{B})_i d^3x = cP_{campo}^i \end{aligned} \right\} \quad (4.99)$$

Las expresiones 4.99 nos sugieren que la forma covariante del teorema de Poynting ha de ser de la siguiente manera:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.100)$$

La prueba de 4.100 es sencilla, para esto ocupemos 4.94, así:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta \phi_k - \partial_\alpha g^{\alpha\beta} \mathcal{L} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\phi_k)} \partial^\beta \phi_k + \partial_\alpha \partial^\beta \phi_k - \partial^\beta \mathcal{L}. \quad (4.101)$$

Considerando que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_k, \partial^\alpha \phi_k)$ , recordando 4.83 y aplicando regla de la cadena tenemos que 4.101 es cero.

De manera que si integramos 4.100 sobre todo el espacio tenemos la conservación de la energía y momento:

$$0 = \int \partial_\alpha T^{\alpha\beta} d^3x = \partial_0 \int T^{0\beta} d^3x + \partial_i \int T^{i\beta} d^3x. \quad (4.102)$$

$$\frac{d}{dt} E_{campo} = 0, \quad \frac{d}{dt} P_{campo} = 0. \quad (4.103)$$

Para campos localizados la segunda integral no contribuye y obtenemos 4.103.

### 4.12.2 Tensor de esfuerzos simétrico

El tensor de esfuerzos canónicos  $T^{\alpha\beta}$ , es adecuado en ciertas situaciones, pero tiene ciertas deficiencias. Hemos visto que  $T^{00}$  y  $T^{0i}$ , difieren de las expresiones para las densidades de energías y momentos, otra inconveniencia del tensor, es la falta de simetría.

La densidad de momento tiene una generalización covariante en términos de un tensor de grado 3:

$$M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} x^\beta. \quad (4.104)$$

Así la conservación del momento angular, se puede ver como:

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (4.105)$$

De manera explicita podemos escribir la expresión 4.105 como:

$$(\partial_\alpha T^{\alpha\beta}) x^\gamma + T^{\gamma\beta} - (\partial_\alpha T^{\alpha\gamma}) x^\beta - T^{\beta\gamma} = 0. \quad (4.106)$$

Ocupando el teorema de Poynting en 4.106, vemos que para que la igualdad se cumpla es necesario que  $T^{\alpha\beta}$  sea un tensor simétrico, además de esto el tensor no es un invariante de norma y la traza no es cero como se requiere para un fotón.

De manera que construiremos un tensor  $\Theta^{\alpha\beta}$ , que sea simétrico y sin traza a partir del tensor  $T^{\alpha\beta}$ .

Si sustituimos  $\partial^\beta A^\lambda = -F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda A^\beta$ , en 4.97, tenemos:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[ g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] - \frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta. \quad (4.107)$$

Definamos:

$$T_D^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta = \frac{1}{4\pi} F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta = \frac{1}{4\pi} (F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta + A^\beta \partial_\lambda F^{\lambda\alpha}). \quad (4.108)$$

En la expresión 4.108 hemos usado el hecho de que estamos en un espacio libre de carga:

$$\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} = \frac{4\pi}{c} J^\alpha = 0. \quad (4.109)$$

Por lo tanto podemos escribir la expresión 4.108 como:

$$T_D^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \partial_\lambda (F^{\lambda\alpha} A^\beta). \quad (4.110)$$

Así la expresión 4.107 puede ser escrita como:

$$T^{\alpha\beta} = \Theta^{\alpha\beta} + T_D^{\alpha\beta}. \quad (4.111)$$

Con:

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (4.112)$$

Al igual que para  $T^{\alpha\beta}$ , estos son sus elementos:

$$\left. \begin{aligned} \Theta^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2) \\ \Theta^{0i} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbb{E} \times \mathbb{B})_i \\ \Theta^{ij} &= \frac{-1}{4\pi} \left[ E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.113)$$

De manera que en forma matricial al tensor  $\Theta^{\alpha\beta}$  es:

$$\Theta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & cg \\ cg & -T_{ij}^M \end{pmatrix} \quad (4.114)$$

Donde  $u$  es la densidad de energía,  $cg$  la densidad de momento y  $T_{ij}^M$  el tensor de esfuerzos de Maxwell.

Diferentes formas del tensor  $\Theta^{\alpha\beta}$ :

$$\Theta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & -cg \\ -cg & -T_{ij}^M \end{pmatrix} \quad \Theta^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} u & -cg \\ cg & T_{ij}^M \end{pmatrix} \quad \Theta_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} u & cg \\ -cg & T_{ij}^M \end{pmatrix} \quad (4.115)$$

Así la ley de conservación de energía se puede escribir como:

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.116)$$

Por ejemplo para los casos en que  $\beta=0$  y  $\beta=i$ , componentes espaciales, tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \Theta^{\alpha 0} &= \frac{1}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{S} \right) = 0 \\ \partial_\alpha \Theta^{\alpha i} &= \frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^M = 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

Donde hemos considerado  $\mathbb{S} = c^2 g$ .

Recapitulando, lo que se hizo fue encontrar un tensor simétrico, de traza nula e invariante de norma, a partir del tensor  $T^{\alpha\beta}$ , esto último con el fin de que se cumpliera la conservación de la energía [5].

### 4.13 Los campos asociados con el electrón.

Empecemos por discutir el problema, de un electrón que se mueve en un campo electromagnético.

Consideremos que la línea mundo de nuestro electrón en el espacio-tiempo, es conocida y descrita por las ecuaciones:

$$z_\mu = z_\mu(s). \quad (4.118)$$

Donde  $z_\mu$  es una función del tiempo propio  $s$ . Tenemos que  $dz_0/ds > 0$ .

Por otro lado sabemos que los campos cumplen con:

$$\left. \begin{aligned} \square A^\mu &= 4\pi J^\mu \\ \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.119)$$

Donde en nuestro caso  $J^\alpha$  desaparece en todas partes salvo en la línea mundo del electrón, donde es infinitamente grande, en otras palabras podemos escribir a la 4-corriente como:

$$\mathbb{J}_\mu = e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta(x_0 - z_0) \delta(x_1 - z_1) \delta(x_2 - z_2) \delta(x_3 - z_3) ds. \quad (4.120)$$

Sabemos que:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}. \quad (4.121)$$

Ya hemos hablado de las soluciones de las ecuaciones 4.119, sabemos que las soluciones son los potenciales de Liernard-Wiechert, por nombrarlos, a estas soluciones les llamaremos  $F_{ret}^{\mu\nu}$ , además nosotros podemos obtener otras soluciones mediante la suma de las soluciones de  $\square A^\mu = 0$ .

Así nuestro campo total se dividirá en 2 partes:

$$F_{act}^{\mu\nu} = F_{ret}^{\mu\nu} + F_{in}^{\mu\nu}, \quad (4.122)$$

donde  $F_{in}^{\mu\nu}$  es la solución de  $\square A^\mu = 0$ .

Donde el prefijo in, se refiere a las ondas electromagnéticas incidentes sobre nuestro electrón, de la misma manera podemos escribir:

$$F_{act}^{\mu\nu} = F_{adv}^{\mu\nu} + F_{out}^{\mu\nu}. \quad (4.123)$$

También es necesario decir que los subíndices, adv y ret, se refieren a las soluciones avanzadas y retrasadas de los potenciales de Liernard-Wiechert. Ahora el campo relacionado con la radiación se puede escribir de la siguiente manera:

$$F_{rad}^{\mu\nu} = F_{out}^{\mu\nu} - F_{in}^{\mu\nu}. \quad (4.124)$$

Que al combinar las expresiones 4.122 y 4.123 obtenemos:

$$F_{rad}^{\mu\nu} = F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu}. \quad (4.125)$$

De tal modo que:

$$F_{\mu\nu rad} = \frac{4e}{3} \left( \frac{d^3 z_\mu}{ds^3} \frac{dz_\nu}{ds} - \frac{d^3 z_\nu}{ds^3} \frac{dz_\mu}{ds} \right). \quad (4.126)$$

Para ver el cálculo explícito de 4.126 ver [6].

De acuerdo con la teoría usual, la radiación emitida por un electrón mientras esté acelerado será obtenida por el primer término de la expresión 4.125, siempre y cuando se consideren grandes distancias y largos tiempos, pero hemos de mencionar que en esta zona el término avanzado será cero, de manera que el resultado 4.125 para la radiación producida por un electrón acelerado concuerda con el resultado usual.

El resultado también da un significado al campo de radiación antes del tiempo de emisión, donde no tiene significado físico, sin embargo esto es inevitable si nosotros queremos tener el campo de radiación definido cerca del electrón.

De momento se definirá un tensor que se ocupará después.

$$f^{\mu\nu} = F_{act}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_{ret}^{\mu\nu} + F_{adv}^{\mu\nu}). \quad (4.127)$$

Otra forma de escribir la expresión 4.127 en términos de  $F_{out}^{\mu\nu}$  y  $F_{in}^{\mu\nu}$ :

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{out}^{\mu\nu} + F_{in}^{\mu\nu}). \quad (4.128)$$

#### 4.14 Las ecuaciones de movimiento del electrón

Para completar la teoría de interacción entre el electrón y el campo electromagnético, requerimos ecuaciones de movimiento para el electrón, ecuaciones que determinen la línea mundo que consideramos dadas en la sección anterior. Podemos obtener información de esto mediante la conservación de la energía momento. Rodeando la línea mundo, con un tubo de radio despreciable, calcularemos el flujo de energía a través de la superficie de este tubo, usando el tensor de esfuerzos de Maxwell, tenemos:

$$4\pi T_{\mu\rho} = F_{\mu\nu}F_{\rho}^{\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\rho}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (4.129)$$

Ahora el flujo de energía en el tubo tiene que ser igual a la diferencia de energía entre las tapas del tubo, y deberá depender sólo de las condiciones en las tapas de los tubos.

En un lenguaje matemático, la razón de flujo de energía que sale del tubo tiene que ser una diferencial exacta.



La información que se obtiene aquí, es independiente de la forma del cilindro, siempre y cuando sea lo suficientemente pequeño para que sea válida una expansión en serie de Taylor.

Si nosotros tomamos 2 tubos que rodean la línea mundo, la divergencia del tensor de Maxwell desaparecerá entre la región de los tubos, ya que no hay singularidades en esta región.

Expresando la integral:

$$\int \int \int \int \frac{\partial T_{\mu\rho}}{\partial x_\rho} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.130)$$

sobre la región del espacio-tiempo entre una cierta longitud de 2 tubos como una superficie integral sobre la superficie de esta región, nosotros obtenemos inmediatamente que la diferencia en los flujos de energía a través de la superficie de los 2 tubos depende sólo en las condiciones en las tapas.

Los cálculos relacionados con esto, pueden ser checados con mayor detalle en el artículo de Dirac [6].

Escogiendo la forma más simple del tubo, un tubo que es esférico de radio constante  $\epsilon$ , para cada valor del tiempo propio, para cada marco de referencia en el cual el electrón está en reposo.

Para un cálculo futuro consideremos las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{v}^2 &= 1 \\ \mathbb{v} \cdot \dot{\mathbb{v}} &= 0 \\ (\mathbb{v}\ddot{\mathbb{v}}) + \mathbb{v}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.131)$$

Ahora el flujo de energía y momento que sale de la superficie del tubo, está dado por el vector:

$$\int \left[ \frac{1}{2} e^2 \epsilon^{-1} \dot{v}_\mu - e v_\nu f_\mu^\nu \right] ds. \quad (4.132)$$

Integrado sobre la longitud del tubo, donde los términos con  $\epsilon$  desaparecen. Esto debe depender solamente de las condiciones de las 2 terminales del tubo, así que el integrando debe de ser una diferencial exacta:

$$\frac{1}{2}e^2\epsilon^{-1}\dot{v}_\mu - ev_\nu f_\mu{}^\nu = \dot{B}_\mu. \quad (4.133)$$

Esto es lo más lejos que podemos llegar usando las ecuaciones de conservación de energía y momento. Para fijar nuestras ecuaciones de movimiento para el electrón, nosotros debemos tomar otras consideraciones sobre  $B_\mu$ .

El caso más sencillo es proponer:

$$B_\mu = kv_\mu. \quad (4.134)$$

Donde  $k$  es una constante, esta es la hipótesis mas sencilla, sin embargo hay otras formas de proponer a  $B_\mu$ .

De manera que al sustituir la expresión 4.134 en la expresión 4.133, vemos que:

$$k = \frac{1}{2}e^2\epsilon^{-1} - m, \quad (4.135)$$

donde  $m$  es otra constante independiente de  $\epsilon$ , al considerar que  $\epsilon$  es muy pequeño tenemos que:

$$m\dot{v}_\mu = ev_\nu f_\mu{}^\nu. \quad (4.136)$$

Donde en 4.136, tendríamos la expresión usual para la fuerza electromagnética sin embargo en este caso el campo es  $f_\mu{}^\nu$ , sin embargo por cuestiones prácticas expresaremos a  $f_\mu{}^\nu$  como sigue:

$$f_\mu{}^\nu = F_{\mu in}{}^\nu + \frac{1}{2}F_{\mu rad}{}^\nu = F_{\mu in}{}^\nu + \frac{2}{3}e(\ddot{v}_\mu v^\nu - \ddot{v}_\nu v^\mu). \quad (4.137)$$

Ocupando 4.126, en 4.137 y usando 4.136, tenemos:

$$m\dot{v}_\mu - \frac{2}{3}e^2\ddot{v}_\mu - \frac{2}{3}e^2\dot{v}^2 v_\mu = ev_\nu F_{\mu in}{}^\nu. \quad (4.138)$$

La expresión 4.138 es la ecuación de Lorentz-Dirac.

Esta ecuación por ser una ecuación de tercer orden presenta ciertas soluciones no físicas; a saber: las preaceleraciones y las autoaceleraciones. Estas son debido a que cuando una fuerza es súbita o nula, las soluciones de la ecuación

de Lorentz-Dirac son tales que las partículas se aceleran antes de sentir la fuerza, en el caso de las fuerzas súbitas, y se aceleran sin sentir ninguna fuerza, en el caso de fuerza nula. Por ello han aparecido en la literatura varias propuestas diferentes. En nuestros días la ecuación de Eliezer y la de Landau-Lifshitz [7,8,9,10,11,12,13] son las dos ecuaciones más aceptadas por la comunidad que además de ser derivadas como una variación de la ecuación de Lorentz-Dirac, son ecuaciones de segundo orden donde las inconsistencias ya mencionadas desaparecen. En realidad, las dos ecuaciones, aunque matemáticamente son diferentes, físicamente predicen resultados semejantes pues las diferencias matemáticas pueden ser detectadas en niveles de energías y campos que pertenecen a la mecánica cuántica [17]. De hecho, si consideramos la ecuación de Lorentz-Dirac a niveles no relativistas llegamos a la ecuación de Abraham:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \tau m\dot{\vec{a}},$$

con  $\tau = \frac{2q^2}{3mc^3}$  [5]. Como esta ecuación presenta soluciones no físicas pues es la versión no relativista de la ecuación de Lorentz-Dirac, esta última se ha cambiado por la versión de la ecuación de Eliezer [19] en forma no relativista, conocida como la ecuación de Ford [14,15,16]. Esta última ecuación es:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \tau\dot{\vec{F}},$$

que la utilizaremos más adelante.

Podemos hacer notar que en trabajos previos y en el apéndice C se demuestra que el tiempo de decaimiento de electrones sometidos a un campo magnético es más pequeño que el tiempo de ignición. Por lo que no se podría obtener la ignición. Sin embargo es importante estudiar los efectos colectivos antes de llegar a ninguna conclusión.



## Capítulo 5

### La ecuación de Vlasov modificada

#### 5.1 Introducción

A lo largo del desarrollo de este trabajo, se ha realizado un estudio del plasma, empezando por algunas de sus generalidades como la longitud de Debye ó el parámetro de plasma, después se estudio la relación que tiene con la física estadística y la ecuaciones hidrodinámicas y por último la dispersión de campos eléctricos en él, sin embargo en todo el desarrollo, siempre se consideró la ecuación de Vlasov, sin considerar los efectos de frenado por radiación, en este capítulo se estudiará cómo cambia la relación de dispersión para una onda eléctrica, si se modifica la ecuación de Vlasov.

#### 5.2 Ecuación de Vlasov modificada

En el capítulo 3 se realizó un estudio de cómo se dispersa un campo eléctrico en un plasma, para eso utilizamos la ecuación de Vlasov (expresión 5.1):

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.1)$$

también se ocuparon las ecuaciones de Maxwell, pero por el momento centraremos nuestra atención solo a la ecuación de Vlasov.

Hay que notar que el término de la fuerza de la expresión 5.1, es simplemente la ecuación para la fuerza de Lorentz, sin embargo esta expresión no toma en cuenta los fenómenos del frenado por radiación, para considerar estos fenómenos ocuparemos la ecuación de Ford.

Fuerza de Lorentz:

$$\mathbb{F} = q(\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B}), \quad (5.2)$$

Ecuación de Ford:

$$m_{\alpha} \mathbf{a} = \mathbb{F} + \tau \dot{\mathbb{F}} = q(\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B}) + \tau \frac{d}{dt} (q(\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B})) \quad (5.3)$$

Con  $\tau = \frac{2q^2}{3mc^3}$ , donde  $q$  es la carga de la partícula,  $m$  es la masa de la partícula y  $c$  la velocidad de la luz.

Ahora si ocupamos la expresión 5.3 en 5.1 tendremos:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbb{F} + \tau \dot{\mathbb{F}}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.4)$$

Si comparamos las ecuaciones vemos que la diferencia viene de adherir el término relacionado con el efecto de radiación.

De esta manera se realizará lo mismo que se hizo en el capítulo 3 pero con la diferencia de que en esta ocasión se ocupará la expresión 5.4.

Así el sistema de ecuaciones que tendremos será:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B} + \tau_\alpha \frac{d}{dt} ((\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B})) \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v} \\ \nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbb{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} + \mu_0 \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

De manera que igual que en capítulo 3 se tiene que cumplir que:

1. No habrá un campo magnético, es decir  $\mathbb{B} = 0$ .
2. Supondremos que el campo eléctrico solo existe en una coordenada, en este caso supondremos que esa coordenada será el eje  $x$ ,  $\mathbb{E} = E_x \hat{\mathbf{i}}$ .
3. En la ecuación de transporte consideraremos sólo la componente en el eje  $x$ , es decir el problema es unidimensional.
4. Sólo existe una especie eléctrica, que es  $Ze$ .
5. Se cumple la condición de neutralidad.

Las funciones de distribución son:

$$F_\alpha(x, v_x, t) = \int f_\alpha(x, \mathbf{v}, t) dv_y dv_z. \quad (5.6)$$

Por otro lado consideramos lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} F_\alpha(x, v_x, t) &= F_{0\alpha}(v_x) + F_{1\alpha}(x, v_x, t) \\ \mathbb{E}(x, t) &= \mathbb{E}_{0\alpha} + \mathbb{E}_{1\alpha}(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Donde los subíndices 0 son para estados base del sistema y los subíndices 1 representan perturbaciones al sistema, de manera que al tomar en cuenta las consideraciones y las expresiones 5.7, nuestras expresiones 5.5 se transforman en:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{e1}}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_{e1}}{\partial x} - \frac{e}{m_e} \left( E_{1x} + \tau_e \frac{dE_{1x}}{dt} \right) \frac{dF_{e0}}{dv_x} &= 0 \\ \frac{\partial F_{i1}}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_{i1}}{\partial x} + \frac{Ze}{m_i} \left( E_{1x} + \tau_i \frac{dE_{1x}}{dt} \right) \frac{dF_{i0}}{dv_x} &= 0 \\ \frac{\partial E_{x1}}{\partial x} &= \frac{e}{\epsilon_0} \left( Z \int F_{i1} dv_x - \int F_{e1} dv_x \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Sobre el sistema de ecuaciones 5.8 aplicaremos la transformada de Fourier para el espacio, mientras que el tiempo se aplicará la transformada de Laplace, quedándonos lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} E_{\mathcal{FL}1x}(k, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} E_{1x}(x, t) e^{-st} e^{-ikx} dx dt \\ F_{\mathcal{FL}e,i1}(k, v, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F_{e,i1}(x, v, t) e^{-st} e^{-ikx} dx dt \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Como condiciones iniciales para la transformada de Laplace, vamos a hacer que:

$$\left. \begin{aligned} F_{\mathcal{FL}e1}(k, v, 0) &= 0 \\ E_{\mathcal{FL}e1x}(k, v, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Con lo que obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} (s + ikv)F_{\mathcal{FL}e1} &= E_{\mathcal{FL}x} \frac{e}{m_e} \frac{dF_{e0}}{dv_x} + E_{\mathcal{FL}x} \tau_e s \frac{e}{m_e} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \\ (s + ikv)F_{\mathcal{FL}i1} &= -E_{\mathcal{FL}x} \frac{Ze}{m_i} \frac{dF_{i0}}{dv_x} - \frac{Ze}{m_i} \tau_i s E_{\mathcal{FL}x} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \\ ikE_{\mathcal{FL}x} &= \frac{e}{\epsilon_0} \left( Z \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mathcal{FL}i1} dv - \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mathcal{FL}e1} dv \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

De manera que obtenemos la siguiente relación:

$$D(k, s)E_{\mathcal{FL}x}(k, s) = 0, \quad (5.12)$$

Con  $D(k, s)$ , como:

$$D(k, s) = 1 - \frac{ie^2(1+\tau_e s)}{k\varepsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{e0}}{s+ikv} dv - \frac{Zie^2(1+\tau_i s)}{k\varepsilon_0 m_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{i0}}{s+ikv} dv. \quad (5.13)$$

Como  $E_{\mathcal{FL}x}(k, s) \neq 0$ , se tiene que cumplir que:

$$D(k, s) = 0. \quad (5.14)$$

Por último hay que mencionar que las integrales de la expresión 5.13 se escriben de la siguiente manera (ver capítulo 3):

$$\oint \frac{dF_{ei0}}{s+ikv} dv = Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{ei0}}{s+ikv} dv + \frac{\pi}{k} \frac{dF_{ei0}}{dv_x} \Big|_{v=is/k}. \quad (5.15)$$

### 5.3 Ondas en los plasmas.

Como se vio en el capítulo 3 una onda eléctrica se puede propagar en un plasma, como se vió en la sección 3.2, en una primera aproximación es suficiente con estudiar sólo el comportamiento de los electrones en presencia de un campo eléctrico externo.

Al igual que se estudió en la sección 3.2, tomaremos las mismas aproximaciones y condiciones, la diferencia será que en este caso se ocupará la expresión 5.13.

De esta manera tenemos que la expresión a estudiar será:

$$0 = D(k, \omega) = 1 + \frac{e^2(1-i\omega\tau_e)}{k\varepsilon_0 m_e} \left( Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{e0}}{\omega-kv} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} \right), \quad (5.16)$$

que de igual manera que en la sección 3.2, se considerará:

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{e^2(1-i\omega\tau_e)}{k\varepsilon_0 m_e} \left( \frac{n_{0e}}{\omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{k}{\omega} \right)^n \langle v^{n-1} \rangle \right) + \frac{i\pi\omega}{kn_{0e}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} \right), \quad (5.17)$$



donde:

$$\begin{aligned}\langle v^{n-1} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} v^{n-1} F_{e0} dv \\ \langle v^1 \rangle &= 0 \\ \langle v^2 \rangle &= v_{te}^2\end{aligned}\tag{5.18}$$

Así la expresión 5.17 se escribe como:

$$0 = 1 - \frac{e^2(1-i\omega\tau_e)}{k\varepsilon_0 m_e} \left( \frac{n_{0e}k}{\omega^2} + \frac{3n_{0e}k^3 v_{te}^2}{\omega^4} + i\pi \frac{dF_{e0}}{dv_x v=\omega/k} \right),\tag{5.19}$$

Donde sustituiremos:

$$\omega_e^2 = \frac{e^2 n_{e0}}{\varepsilon_0 m_e}\tag{5.20}$$

Con lo que 5.19 se puede reescribir como:

$$0 = 1 - (1 - i\tau_e \omega) \left( \frac{\omega_e^2}{\omega^2} + \frac{3\omega_e^2 k^2 v_{te}^2}{\omega^4} + \frac{i\pi \omega_e^2}{k^2 n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x v=\omega/k} \right),\tag{5.21}$$

Por comodidad realizaremos el siguiente cambio:

$$\begin{aligned}a &= \omega_e^2 \\ b &= 3\omega_e^2 k^2 v_{te}^2 \\ c &= \frac{\pi \omega_e^2}{k^2 n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x v=\omega/k}\end{aligned}\tag{5.22}$$

De manera que 5.19 es un polinomio de quinto grado, el cual es:

$$0 = \omega^4(1 - ic) - \omega^2 a - b + i\tau_e a \omega^3 + i\tau_e b \omega - \tau_e c \omega^5.\tag{5.23}$$

Considerando que el producto de  $\tau_e c$  es pequeño comparado con los demás, sólo estaremos interesados en resolver el polinomio de grado 4, es decir:

$$0 = \omega^4(1 - ic) - \omega^2 a - b + i\tau_e a \omega^3 + i\tau_e b \omega.\tag{5.24}$$

Para resolver la expresión 5.24, consideraremos una solución de la siguiente forma:

$$\omega_n = \omega_0 + i\omega_i, \quad (5.25)$$

donde  $\omega_0$  es la solución al problema sin considerar el efecto de nuevo, esta solución ya se estudió en el capítulo 3, la solución es:

$$\omega_0 = \omega_R + i \frac{\pi\omega_e^3}{k^2 n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x}_{v=\omega/k}, \quad (5.26)$$

donde  $\omega_R^2$  es:

$$\omega_R^2 = \omega_e^2 + 3k^2 v_{te}^2, \quad (5.27)$$

sin embargo,  $\omega_R$  será:

$$\omega_R \approx \omega_e. \quad (5.28)$$

Por comodidad, haremos el siguiente cambio:

$$\frac{\pi\omega_e^3}{2k^2 n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x}_{v=\omega/k} = \frac{\omega_e c}{2} = \gamma. \quad (5.29)$$

Hay que mencionar que consideramos  $\omega_i^n \approx 0$ , para todo  $n$  mayor a 1, es decir que estamos realizando una aproximación a primer orden en  $\omega_i$ , de esta manera al sustituir 5.25 en 5.24, obtendremos el siguiente resultado:

$$0 = \omega_n^4(1 - ic) - \omega_n^2 a - b + i\tau_e a \omega_n^3 + i\tau_e b \omega_n, \quad (5.30)$$

donde consideramos:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &\approx \omega_0^2 + 2i\omega_0\omega_i \\ \omega_n^3 &\approx \omega_0^3 + 3i\omega_0^2\omega_i \\ \omega_n^4 &\approx \omega_0^4 + 4i\omega_0^3\omega_i \end{aligned} \quad (5.31)$$

De manera que, al sustituir 5.31 en 5.30 y despejar  $\omega_i$ , obtenemos:

$$\omega_i = \frac{-i\tau_e\omega_0(a\omega_0^2+b)}{4i\omega_0^3(1-ic)-2i\omega_0a-3\tau_ea\omega_0^2-\tau_eb}, \quad (5.32)$$

Ahora separaremos 5.32 en parte real y parte imaginaria, para esto consideraremos la siguiente aproximación:

$$\omega_0^2 \approx \omega_R^2 + 2i\omega_R\gamma, \quad (5.33)$$

es decir:

$$\gamma^2 \approx 0. \quad (5.34)$$

De esta manera el numerador de 5.32 será:

$$-i\tau_e\omega_0(a\omega_0^2 + b) = \tau_e((3a\omega_R^2\gamma + \gamma b) - i(a\omega_R^3 + \omega_R b)). \quad (5.35)$$

De la misma manera el denominador será:

$$(-12\omega_R^2\gamma + 4c\omega_R^3 + 2\gamma a - 3\tau_e a\omega_R^2 - \tau_e b) + i(4\omega_R^3 - 6\tau_e\omega_R a\gamma + 12c\omega_R^2\gamma - 2a\omega_R) \quad (5.34)$$

En este razonamiento le daremos mayor importancia a la parte real de 5.32, que será:

$$Re(\omega_i) = \frac{AC-BD}{C^2+D^2}, \quad (5.35)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} A &= \tau_e\gamma(3a\omega_R^2 + b) \\ B &= \tau_e\omega_R(a\omega_R^2 + b) \\ C &= -12\omega_R^2\gamma + 4c\omega_R^3 + 2\gamma a - 3\tau_e a\omega_R^2 - \tau_e b \\ D &= 4\omega_R^3 - 6\tau_e\omega_R a\gamma + 12c\omega_R^2\gamma - 2a\omega_R \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

De la parte C y D, despreciaremos todos los términos donde aparezca  $\tau_e$ , y donde aparezca  $c^2$ , de esta manera tendremos:

$$\left. \begin{aligned} -12\omega_R^2\gamma + 4c\omega_R^3 + 2\gamma a - 3\tau_e a\omega_R^2 - \tau_e b &\approx -c\omega_R^3 \\ 4\omega_R^3 - 6\tau_e\omega_R a\gamma + 12c\omega_R^2\gamma - 2a\omega_R &\approx 2\omega_R^3 \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

De la parte A y B, despreciaremos  $b$  con respecto a  $a$ , así tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \tau_e \gamma (3a\omega_R^2 + b) &\approx 3a^2 \tau_e \gamma \\ \tau_e \omega_R (a\omega_R^2 + b) &\approx \omega_R a^2 \tau_e \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

De esta manera  $Re(\omega_i)$  será:

$$\gamma' = Re(\omega_i) = \frac{AC-BD}{C^2+D^2} \approx \frac{(3a^2 \tau_e \gamma)(-c\omega_R^3) - (\omega_R a^2 \tau_e)(2\omega_R^3)}{(-c\omega_R^3)^2 + (2\omega_R^3)^2} \approx \frac{-(a^2 \tau_e)}{2\omega_R^2} \approx -\frac{\tau_e}{2} \omega_e^2. \quad (5.39)$$

La expresión 5.39 será la corrección debida a los efectos de radiación.

Por lo que el término total de amortiguamiento será:

$$\gamma_T = \gamma + \gamma' = \gamma - \frac{(a^2 \tau_e)}{2\omega_R^2} = \frac{\pi \omega_e^3}{2k^2 n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} - \frac{\tau_e}{2} \omega_e^2. \quad (5.40)$$

#### 5.4 Ondas iónico-acústicas

En esta ocasión analizaremos cómo se propaga una onda, en un plasma que cumple con la siguiente condición:

$$kt_i \ll \omega \ll kt_e.$$

Es decir que la frecuencia del campo es tal que responde tanto a los electrones y iones, de manera que la relación de dispersión será:

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{e^2(1-i\omega\tau_e)}{k\epsilon_0 m_e} \left( Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{e0}}{dv_x} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} \right) + \frac{Z^2 e^2(1-i\omega\tau_i)}{k\epsilon_0 m_i} \left( Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{i0}}{dv_x} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \Big|_{v=\omega/k} \right). \quad (5.41)$$

El tratamiento que se le dará a la expresión 5.41 será el mismo que se hizo en la sección 3.3, la diferencia radica en que en este caso se han considerado los efectos de  $\tau_e$  y  $\tau_i$ .

Una vez dicho esto, la expresión 5.41 se escribe como:

$$D(k, \omega) = Re(D(k, \omega)) + i Im(D(k, \omega)), \quad (5.42)$$

donde:

$$\begin{aligned}
Re(D(k, \omega)) &= 1 + \frac{\omega_e^2}{k^2 v_{te}^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{\omega \pi}{k^2} \left( \frac{\tau_e \omega_e^2}{n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} + \frac{\tau_i \omega_i^2}{n_{i0}} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \right)_{v=\omega/k} \\
Im(D(k, \omega)) &= -\frac{\pi}{k^2} \left( \frac{\omega_e^2}{n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} + \frac{\omega_i^2}{n_{i0}} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \right)_{v=\omega/k} + \frac{\omega}{k} \left( \frac{\omega_i^2 k \tau_i}{\omega^2} - \frac{\omega_e^2 \tau_e}{k v_{te}^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

El objetivo de la expresión 5.42 es resolver el polinomio en  $\omega$ , cuando se hace  $D(k, \omega) = 0$ .

Antes de avanzar más, hay que decir que sólo consideraremos las expresiones donde aparece  $\tau_e$ , ya que comparadas con las expresiones donde aparece  $\tau_i$ , hay una diferencia de tres órdenes, por otro lado consideraremos los siguientes cambios:

$$\begin{aligned}
a &= \omega_i^2 \\
b &= \frac{\omega_e^2}{k^2 v_{te}^2} \\
c &= \frac{\pi}{k^2} \left( \frac{\omega_e^2}{n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} + \frac{\omega_i^2}{n_{i0}} \frac{dF_{i0}}{dv_x} \right)_{v=\omega/k} \\
d &= \frac{\pi}{k^2} \left( \frac{\omega_e^2}{n_{e0}} \frac{dF_{e0}}{dv_x} \right)_{v=\omega/k}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Con estos pequeños cambios podemos escribir la expresión 5.42 como:

$$0 = D(k, \omega) = 1 - \frac{a}{\omega^2} + b - ic - i\omega\tau_e b - \omega\tau_e d, \tag{5.45}$$

Despreciando el 1 con respecto a los demás términos, obtenemos un polinomio en  $\omega$  de la siguiente forma:

$$0 = \omega^3 - \frac{(b-ic)}{\tau_e(d+ib)} \omega^2 + \frac{a}{\tau_e(d+ib)}. \tag{5.46}$$

En el capítulo 3 vimos que la solución a este problema sin considerar el tiempo característico del electrón era:

$$\omega_0 = \omega_R + i\gamma, \tag{5.47}$$

donde:

$$\gamma = \frac{\left. \begin{array}{l} \omega_R = kc_s \\ \omega_i^2 \frac{\pi}{k^2} \left( \frac{\omega e^2 dF_{e0}}{n_{e0} dv_x} + \frac{\omega_i^2 dF_{i0}}{n_{o0} dv_x} \right)_{v=\omega/k} \end{array} \right\}}{2kc_s \left( \frac{\omega e^2}{k^2 v_{te}^2} \right)^2} \quad (5.48)$$

Suponemos  $\gamma^2 \approx 0$ .

De la misma manera que en el caso de los electrones consideraremos una perturbación pequeña para resolver el caso cuando existe el término del tiempo característico, así consideraremos que la solución al problemas es:

$$\omega_n = \omega_0 + i\omega_i, \quad (5.49)$$

Por otra lado consideraremos:

$$\left. \begin{array}{l} \omega_n^2 \approx \omega_0^2 + 2i\omega_0\omega_i \\ \omega_n^3 \approx \omega_0^3 + 3i\omega_0^2\omega_i \end{array} \right\} \quad (5.50)$$

De manera que al considerar las expresiones 5.49 y 5.50 en 5.46, obtenemos:

$$\frac{1}{\tau_e(d+ib)} (2i\omega_0\omega_i(b-ic)) - \omega_0^3 - 3i\omega_0^2\omega_i = 0. \quad (5.51)$$

Al despejar  $\omega_i$  en 5.51 obtenemos:

$$\omega_i = \frac{-i\omega_0^2}{\frac{2(b-ic)}{\tau_e(d+ib)} - 3\omega_0}, \quad (5.52)$$

Por otro lado, como ya hemos considerado, haremos:

$$\omega_0^2 \approx \omega_R^2 + 2i\omega_R\gamma, \quad (5.53)$$

Con lo que al sustituir 5.53 en 5.52 tendremos:

$$\omega_i = \frac{\tau_e\omega_R((\omega_R b + 2\gamma d) - i(\omega_R d + 2\gamma b))}{(2b - 3\tau_e\omega_R d + 3\tau_e\gamma b) - i(2c + 3\tau_e\omega_R b + 3\tau_e\gamma d)}, \quad (5.54)$$

Ahora realizando los siguientes cambios a 5.54:

$$\left. \begin{aligned} A &= \tau_e \omega_R (\omega_R b + 2\gamma d) \\ B &= \tau_e \omega_R (\omega_R d + 2\gamma b) \\ C &= 2b - 3\tau_e \omega_R d + 3\tau_e \gamma b \\ D &= 2c + 3\tau_e \omega_R b + 3\tau_e \gamma d \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

Ocupando las expresiones 5.55 podemos escribir 5.54 como:

$$\omega_i = \frac{A-iB}{C-iD}, \quad (5.56)$$

Al igual que en el caso anterior estamos interesados en obtener la parte real de 5.54, ya que ésta será la parte relacionada con el amortiguamiento debido a la radiación, de manera que la parte real de 5.54 será:

$$Re(\omega_i) = \frac{AC+BD}{C^2+D^2}. \quad (5.57)$$

Ahora antes de sustituir, consideraremos que tanto como en A y B, los términos que lleven  $\gamma$  serán despreciables con respecto a  $\omega_R^2$ , por otro lado tanto como para C y D se desprecian los términos con  $3\tau_e$ , de esta manera la expresión 5.57 será:

$$Re(\omega_i) \approx \frac{\tau_e \omega_R^2 (b^2 + cd)}{2(b^2 + c^2)} \approx \frac{\tau_e \omega_R^2}{2}. \quad (5.58)$$

El término 5.58 es el amortiguamiento debido a la radiación:

$$\gamma' = \frac{\tau_e \omega_R^2}{2}. \quad (5.59)$$

Así el amortiguamiento total será:

$$\gamma_T = \gamma + \gamma' = \gamma + \frac{\tau_e (kc_s)^2}{2} = \frac{\omega_i^2 \frac{\pi}{k^2} \left( \frac{\omega_e^2 dF_{e0}}{n_{e0} dv_x} + \frac{\omega_i^2 dF_{i0}}{n_{o0} dv_x} \right)_{v=\omega/k}}{2kc_s \left( \frac{\omega_e^2}{k^2 v_{te}^2} \right)^2} + \frac{\tau_e (kc_s)^2}{2}. \quad (5.60)$$

De manera más explícita se mostrarán estos datos en el apéndice B.





## **Conclusiones**

En el desarrollo de la tesis, aunque las trayectorias de los electrones sometidos a campos magnéticos decaen rápidamente, cuando se consideran efectos colectivos con frenado por radiación las inestabilidades crecen a niveles relativistas o de materia degenerada. Por lo tanto esto abre nuevas líneas de investigación. Primero, se tendrán que estudiar los efectos a niveles relativistas es decir: la ecuación de Vlasov deberá ser modificada y expresada en forma relativista. Segundo, se tendrá que analizar el plasma en materia degenerada.



## Apéndice A

Para el entendimiento de la dinámica de los plasmas, una primera aproximación es estudiar cómo interactúa una partícula con un campo magnético o eléctrico, sin considerar cómo interactúa una partícula con las demás, a lo largo de este apéndice se estudiarán varios casos, en la práctica para estudiar la dinámica de los plasmas, se combinarán los efectos que a continuación se mencionan.

### Movimiento de partículas en presencia de campos eléctricos y magnéticos uniformes.

Caso 1:  $\mathbb{E} = 0$ , y  $\mathbb{B} = B\mathbf{k}$  con  $B = cte$ .

Consideremos una partícula en presencia de un campo magnético uniforme  $\mathbb{B}$ , de manera que la ecuación de movimiento está definida como:

$$m \frac{dv}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbb{B}. \quad (\text{A.1})$$

Si tomamos  $\mathbb{B}$  en dirección  $\hat{z}$  tenemos que A.1 se convierte en:

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x \\ m\dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Derivando las expresiones A.2, se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Definimos la frecuencia del ciclotrón como,  $\omega_c = |q|B/m$ .

De manera que las soluciones a las expresiones A.3 son:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= r_L \sin(\omega_c t) \\ y - y_0 &= r_L \cos(\omega_c t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

De donde definimos a  $r_L$  como el radio de Larmor como,  $r_L = v/\omega_c$ .

Y de las expresiones A.2 lo que podemos notar es que  $v_z$  es constante.

Lo que podemos decir gracias a las expresiones A.4 es que la partícula se mueve en una circunferencia en el plano xy, centrada en el punto  $(x_0, y_0)$ , y que se mueve con una velocidad constante en el eje z, de manera que el movimiento general es helicoidal.

Algo que vale la pena notar es que el giro de la partícula va a ser tal que va a generar un campo magnético que va a disminuir el campo externo.

Ahora consideremos el caso donde la partícula está en presencia de un campo eléctrico uniforme en el plano xz.

Caso 2:  $\mathbb{E} = E\mathbb{u}$ , con  $E = cte$  y  $\mathbb{u} \in$  al plano xz.

La expresión que nos describirá el movimiento de la partícula es:

$$m \frac{dv}{dt} = q(\mathbb{E} + \mathbb{v} \times \mathbb{B}). \quad (\text{A.5})$$

Si el campo eléctrico se escribe de la forma  $(E_x, 0, E_z)$  las expresiones que obtenemos son de la forma:

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \frac{qE_z}{m} t + v_{z0} \\ v_x &= \frac{qE_x}{m} + \omega_c v_y \\ v_y &= -\omega_c v_x \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

Las soluciones a las ecuaciones A.6, para  $v_x$  y  $v_y$  son de la forma:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos(\omega_c t) \\ v_y &= -v \sin(\omega_c t) - \frac{E_x}{B} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$

De manera que:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= r_L \sin(\omega_c t) \\ y - y_0 &= r_L \cos(\omega_c t) - \frac{E_x}{B} t \\ z - z_0 &= \frac{qE_z}{2m} t^2 + V_z t \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

Ahora combinando las ecuaciones A.8 tenemos:

$$z - z_0 = \frac{qE_z B^2}{2mE_x^2} \left( \sqrt{r_L^2 - (x - x_0)^2} - (y - y_0) \right)^2 + \frac{Bv_z}{E_x} \left( \sqrt{r_L^2 - (x - x_0)^2} - (y - y_0) \right). \quad (\text{A.9})$$

La expresión A.9 nos describirá la trayectoria que sigue la partícula.

Si nos damos cuenta, las soluciones a las expresiones A.8, son semejantes a las expresiones A.4 sólo que en la expresión A.8 para  $y$ , a diferencia de A.4 para  $y$ , que tiene el término  $-\frac{E_x}{B} t$ , esto nos dice que el centro del círculo se está moviendo en el plano.

Al término  $-\frac{E_x}{B}$ , se le llama velocidad de deriva del campo eléctrico, para obtener este resultado hacemos que el lado izquierdo de la ecuación A.5 sea cero, esto lo podemos hacer ya que la velocidad de deriva es una constante.

$$\mathbb{E} + \mathbb{v} \times \mathbb{B} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Realizando  $\mathbb{B}$  rot en la ecuación A.10 y tomando las componentes transversales tenemos:

$$\mathbb{V}_{gc} = \frac{\mathbb{E} \times \mathbb{B}}{B^2} = \frac{(E_x, 0, E_z) \times (0, 0, B)}{B^2} = -\frac{E_x}{B} \hat{j} = \mathbb{V}_{\mathbb{E}}. \quad (\text{A.11})$$

Es importante notar que  $\mathbb{V}_{\mathbb{E}}$  es independiente de las propiedades de la partícula.

Ahora cuando la partícula va a la mitad del ciclo gana energía debido al campo eléctrico, sin embargo luego en la otra mitad pierde energía debido a la presencia del campo magnético.

### Fuerzas perpendiculares.

En general en la ecuación A.11 podemos aplicar otras fuerzas, en general la velocidad de deriva a una fuerza es:

$$\mathbb{V}_{\mathbb{F}} = \frac{\mathbb{F} \times \mathbb{B}}{qB^2}. \quad (\text{A.12})$$

Esto se ve de la siguiente manera:

$$m \frac{d\mathbb{v}}{dt} = \mathbb{F} + q(\mathbb{E} + \mathbb{v} \times \mathbb{B}). \quad (\text{A.13})$$

Ahora haciendo un cambio de variable de la forma:

$$\mathbb{v} = \mathbb{v}' + \mathbb{v}_D. \quad (\text{A.14})$$

Recordemos que la  $\mathbb{F}$  es constante de manera que podemos hacer que  $\mathbb{v}_D$  cumpla con:

$$\mathbb{F} + q\mathbb{v}_D \times \mathbb{B} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Recordando que:

$$\mathbb{A}_{\perp} = \frac{\mathbb{B} \times (\mathbb{A} \times \mathbb{B})}{\mathbb{B}^2}. \quad (\text{A.16})$$

Tenemos que:

$$\mathbb{v}_{\perp} = \frac{\mathbb{F} \times \mathbb{B}}{qB^2}. \quad (\text{A.17})$$

Que es el resultado general de la expresión A.11.

### Velocidad de deriva debida a un campo magnético no uniforme.

En el caso anterior pudimos encontrar una solución exacta para el movimiento de una partícula en presencia de campos  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{B}$  uniformes, sin embargo cuando uno trata de encontrar las soluciones al movimiento de partículas en campos no uniformes empezamos a tener problemas en encontrar las soluciones.

Ahora consideraremos el caso donde el campo magnético no es constante y esté es paralelo al eje z, de manera que la fuerza de Lorentz para las componentes perpendiculares al campo magnético es:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_\perp = q \mathbf{v}_\perp \times \mathbb{B}. \quad (\text{A.18})$$

Ahora al desarrollar una expansión en series del campo magnético centrada en  $(x_0, y_0)$ , tenemos que la expresión A.18 se puede escribir de la forma:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_\perp \approx q \mathbf{v}_\perp \times \left( \mathbb{B}_0 + (x - x_0) \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial y} \right). \quad (\text{A.19})$$

Esto es porque estamos considerando pequeñas variaciones en el campo magnético.

De manera que la expresión A.19 se puede escribir de la manera:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_\perp \approx q \mathbf{v}_\perp \times \mathbb{B}_0 + q \mathbf{v}_{\perp 0} \times \left( (x - x_0) \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial y} \right). \quad (\text{A.20})$$

Donde hemos considerado que tanto el campo magnético, como la velocidad tienen pequeñas perturbaciones, es decir que tienen la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\perp &= \mathbf{v}_{\perp 0} + \mathbf{v}_{\perp 1} \\ \mathbb{B} &= \mathbb{B}_0 + \mathbb{B}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Los subíndices 0 significan que es la parte no perturbada y los subíndices 1 significan que son la parte perturbada.

Ahora si obtenemos el promedio de la expresión A.20 con la ayuda de las expresiones 1.4, para tiempos más grandes que el periodo de ciclotrón, recordando que el periodo de ciclotrón es  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ , tenemos:

$$\mathbb{F}_\perp = \langle q \mathbf{v}_{\perp 0} \times \left( (x - x_0) \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial y} \right) \rangle = -\frac{1}{2} q r_L^2 \omega_c \left( \frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{e}_y \right). \quad (\text{A.22})$$

Al sustituir la expresión A.22 en la expresión A.17, tenemos que la velocidad de deriva será:

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbb{F} \times \mathbb{B}}{q B^2} = \frac{\left( -\frac{1}{2} q r_L^2 \omega_c \left( \frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{e}_y \right) \right) \times \mathbb{B}}{q B^2} = \frac{-W_\perp}{q B^3} \nabla_\perp B \times \mathbb{B}. \quad (\text{A.23})$$

Donde se ha definido:

$$W_\perp = \frac{m r_L^2 \omega_c^2}{2}. \quad (\text{A.24})$$

### **Campo magnético curvado, curvatura de deriva.**

Ahora a diferencia del caso anterior consideraremos que las líneas de campo magnético tienen un radio de curvatura constante, y también consideraremos que la magnitud del campo es constante.

Este movimiento se debe a que las partículas se mueven en las líneas del campo, esto va a generar una fuerza centrífuga de la siguiente forma:

$$\mathbb{F}_{cf} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \mathbb{I} = \frac{mv_{\parallel}^2 \mathbb{R}_c}{R_c^2}, \quad (\text{A.25})$$

donde:

$v_{\parallel}$  es la velocidad promedio de las partículas.

$R_c$  es el radio de las líneas del campo.

Ahora sustituyendo la ecuación A.25 en la ecuación A.17 tenemos:

$$\mathbb{V}_R = \frac{\mathbb{F} \times \mathbb{B}}{qB^2} = \frac{\mathbb{F}_{cf} \times \mathbb{B}}{qB^2} = \frac{mv_{\parallel}^2 \mathbb{R}_c \times \mathbb{B}}{R_c^2 qB^2}. \quad (\text{A.26})$$

A la expresión A.26 se le conoce como curvatura de deriva.

Ahora veamos cómo es la velocidad debida a las velocidades de deriva, tanto la de curvatura como a la de la divergencia del campo magnético.

Para esto, primero calculemos cómo es la divergencia de  $\mathbb{B}$ .

Tenemos que el rotacional de  $\mathbb{B}$  es 0, según la ley de Ampere-Maxwell, si estamos en el vacío, esto es:

$$0 = \vec{\nabla} \times \mathbb{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_{\theta}). \quad (\text{A.27})$$

De la ecuación A.27 tenemos que  $B_{\theta}$  es proporcional al inverso de  $r$ , de manera que:

$$\frac{\nabla |\mathbb{B}|}{|\mathbb{B}|} = -\frac{\mathbb{R}_c}{R_c^2}. \quad (\text{A.28})$$

Esto se debe a que el campo magnético sólo tiene componente en  $\theta$  y no en  $r$  o  $z$ , esto quiere decir que en la superficie de un cilindro, el campo magnético no depende del eje  $z$ , y que estamos considerando que en la superficie el campo magnético es perpendicular al radio del círculo, y que el radio del cilindro es constante.

Ahora sustituyendo la ecuación A.28 en la ecuación A.23 tenemos:

$$\mathbb{V}_{\nabla \mathbb{B}} = \frac{\mathbb{F} \times \mathbb{B}}{qB^2} = \frac{1}{2} v r_L \frac{\mathbb{B} \times \vec{\nabla} B}{B^2} = \frac{-v_{\perp} r_L}{2B^2} \mathbb{B} \times |\mathbb{B}| \frac{\mathbb{R}_c}{R_c^2} = \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \frac{\mathbb{R}_c \times \mathbb{B}}{R_c^2 B^2}. \quad (\text{A.29})$$

Así que sumando las ecuaciones A.29 y A.26 tenemos el movimiento total en el vacío:

$$\mathbb{V}_R + \mathbb{V}_{\nabla \mathbb{B}} = \frac{mv_{\parallel}^2 \mathbb{R}_c \times \mathbb{B}}{R_c^2 qB^2} + \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \frac{\mathbb{R}_c \times \mathbb{B}}{R_c^2 B^2} = \frac{m}{q} \frac{\mathbb{R}_c \times \mathbb{B}}{R_c^2 B^2} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right). \quad (\text{A.30})$$

## Espejos magnéticos.

Ahora consideráremos un campo magnético dirigido en la dirección  $z$ , y que cambia de magnitud en la dirección  $z$ , como se ve en la figura 1.1.

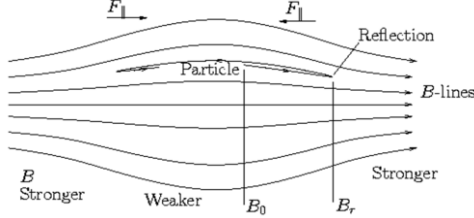


Figura 1.1: En la figura se puede ver el diagrama del campo magnético.

Calculemos  $\vec{\nabla} \cdot \mathbb{B} = 0$  de manera que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z) = 0. \quad (\text{A.31})$$

El hecho de que no aparezca el término angular, se debe a la simetría del problema.

Supongamos que el campo magnético cambia muy poco en  $z$  y que tenemos

$\frac{\partial}{\partial z} (B_z)$  en  $r=0$ , de manera que aproximadamente A.31 es:

$$rB_r = - \int_0^r r \frac{\partial}{\partial z} (B_z) dr \approx \frac{-r^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (B_z) \right]_{r=0}. \quad (\text{A.32})$$

De la expresión A.32 podemos obtener el valor aproximado de  $B_r$ , de manera que la fuerza de Lorentz es:

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= q\mathbb{v} \times \mathbb{B} = q(v_r, v_\theta, v_z) \\ &\quad \times (B_r, 0, B_z) \end{aligned}$$

En forma escalar:

$$\left. \begin{aligned} F_r &= qv_\theta B_z \\ F_\theta &= qv_z B_r - qv_r B_z \\ F_z &= -qv_\theta B_r \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.33})$$

La ecuación A.33 para  $z$  es la expresión que estamos interesados en estudiar, ahora sustituyendo la expresión A.32 en A.33 para  $y$  tenemos:

$$F_z = -qv_\theta B_r = \frac{qv_\theta r}{2} \frac{\partial}{\partial z} (B_z). \quad (\text{A.34})$$

Ahora promediando A.34 se convierte en:

$$\bar{F}_z = \frac{-qv_\perp r_L}{2} \frac{\partial}{\partial z} (B_z) = \frac{-qv_\perp^2}{2\omega_c} \frac{\partial}{\partial z} (B_z) = \frac{-mv_\perp^2}{2B} \frac{\partial}{\partial z} (B_z). \quad (\text{A.35})$$

En donde  $r = r_L$  y  $v_\theta = v_\perp$ .

Ahora definamos el momento magnético:



$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}. \quad (\text{A.36})$$

Así:

$$\bar{F}_z = -\mu \frac{\partial}{\partial z}(B_z). \quad (\text{A.37})$$

En general podemos escribir la ecuación A.35 como:

$$\mathbb{F}_{\parallel} = -\mu \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial s} = -\mu \vec{\nabla}_{\parallel} \mathbb{B}. \quad (\text{A.38})$$

Donde  $d\mathbb{S}$  es un elemento de línea a lo largo de  $\mathbb{B}$ .

Si consideramos un electrón, que describe un círculo con el radio de Larmor tenemos que su momento magnético es:

$$\mu = IA = \frac{e\omega_c}{2\pi} \pi r_L^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2 e}{\omega_c} = \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}. \quad (\text{A.39})$$

Ahora mostraremos que el momento se conserva.

De la ecuación de movimiento tenemos:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (\text{A.40})$$

Ahora multiplicamos la expresión A.40 por  $v_{\parallel}$  y recordamos que es lo mismo que  $\frac{ds}{dt}$ , de manera que tenemos:

$$mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}. \quad (\text{A.41})$$

Ahora el sistema es conservativo de manera que la variación de la energía es 0:

$$\frac{d}{dt} W = \frac{d}{dt} (W_{\parallel} + W_{\perp}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 + \mu B \right) = 0. \quad (\text{A.42})$$

Utilizando la expresión A.41 tenemos:

$$-\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt} (\mu B) = 0. \quad (\text{A.43})$$

De manera que:

$$\frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (\text{A.44})$$

La invariancia del momento magnético es fundamental para el confinamiento del plasma.

Cuando una partícula se mueve de una zona de campo magnético débil a una de campo magnético fuerte, hay un incremento en  $\mathbb{B}$ , de manera que la velocidad perpendicular aumenta, para que se conserve el momento magnético, la velocidad paralela disminuye, eventualmente esta velocidad puede ser 0, ahora la fuerza en z hará que la partícula regrese a la zona de campo magnético débil.

Con campos esencialmente axiales cuya intensidad es mínima en una zona central y crece en ambos sentidos al apartarse de ésta. La expresión A.37 tiende a mantener las partículas las partículas en la zona de menor campo, confinándolas así en la zona central del espejo. Llamemos  $B_0$  al valor mínimo

del campo (zona central) y  $B_M$  al valor máximo . Una partícula que en la zona con  $B_0$  tenga valores de energías cinéticas  $W_{\parallel 0}$  y  $W_{\perp 0}$  , tendrá entonces  $W_{\parallel M}$  y  $W_{\perp M}$  en la zona  $B_M$ , relacionados de la siguiente manera:

De la expresión A.39 obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{W_{\perp 0}}{B_0} = \frac{W_{\perp M}}{B_M}. \quad (\text{A.45})$$

Por otro lado de la expresión A.42 ,que es la conservación de la energía vemos que:

$$W_{\parallel 0} + W_{\perp 0} = W_{\parallel M} + W_{\perp M}. \quad (\text{A.46})$$

Ahora al combinar las expresiones A.45 y A.46 encontramos la siguiente relación :

$$\frac{W_{\parallel M}}{W_{\parallel 0}} = 1 + \frac{W_{\perp 0}}{W_{\parallel 0}} \left(1 - \frac{B_M}{B_0}\right). \quad (\text{A.47})$$

La condición de pérdida de la partícula es:

$$1 + \frac{W_{\perp 0}}{W_{\parallel 0}} \left(1 - \frac{B_M}{B_0}\right) > 0. \quad (\text{A.48})$$

Que al ocupar la expresión A.42, tenemos que:

$$\frac{v_{\parallel 0}}{v_{\perp 0}} > \sqrt{\frac{B_M}{B_0} - 1}. \quad (\text{A.49})$$

Que en términos del ángulo  $\alpha$  entre el campo  $\mathbf{B}$  y el vector  $\mathbf{v}$ , A.49 se puede escribir como:

$$\tan(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\frac{B_M}{B_0} - 1}}. \quad (\text{A.50})$$

### **Invariantes adiabáticos**

En la física de plasmas hay una gran cantidad de invariantes, de manera que hablar de todos nos llevaría bastante tiempo, sin embargo por mencionar uno, se hablará con mayor detalle del momento magnético, que es un invariante.

Tenemos que cuando se pueden definir variables de acción es decir:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (\text{A.51})$$

en los movimientos periódicos de la coordenada generalizada  $q_i$ , con momento conjugado  $p_i$  ,estas variables son constantes ante cambios lentos de los parámetros del sistema considerado.

Se probó que el momento magnético era un invariante, el movimiento periódico envuelto en este caso es el giro de Larmor.

Si tomamos  $p$  como el momento angular  $mv_{\perp}r_L$  y  $dq$  como la coordenada  $d\theta$ , la integral de acción es:

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint mv_{\perp}r_L d\theta = \frac{mv_{\perp}^2}{\omega_c} = 2 \frac{m}{|q|} \mu. \quad (\text{A.52})$$

Esto es  $\mu$  es un invariante siempre y cuando la razón  $\frac{m}{|q|}$  no cambie.

También tenemos el caso de la velocidad paralela.

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint m v_{\parallel} \cdot d\mathbb{l} = \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} m \sqrt{\frac{2(W-\mu B)}{m}} dz. \quad (\text{A.53})$$

Donde  $z_1$  y  $z_2$  son los puntos tales que:

$$W = \mu B. \quad (\text{A.54})$$

Supongamos que el campo magnético es constante en toda la región salvo en los puntos  $z_{1,2}$ , de manera que A.53 se puede aproximar a:

$$J_2 \approx \frac{m}{2\pi} \sqrt{\frac{2(W-\mu B)}{m}} (z_2 - z_1). \quad (\text{A.55})$$

Consideremos que la distancia entre los puntos de retorno “L”, varía lentamente, y recordemos que  $\mu$  y  $J_2$  son constantes, de manera que si variamos en el tiempo a A.55 tenemos:

$$L^2 \frac{dW}{dt} + (W - \mu B) \frac{dL}{dt} = 0. \quad (\text{A.56})$$

Que al integrar A.56 nos da:

$$W_f = \left(\frac{L_0}{L_f}\right)^2 (W_0 - \mu B) + \mu B. \quad (\text{A.57})$$

### **Deriva debida a un campo eléctrico que varia lentamente en el tiempo y un campo magnético constante**

Como hemos venido haciendo hasta ahora, lo importante es calcular la velocidad de deriva, según la expresión A.17, para esto en este caso empecemos por considerar la ecuación de movimiento:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbb{E}(t) + q\mathbf{v} \times \mathbb{B}. \quad (\text{A.58})$$

Para esto propondremos el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \quad (\text{A.59})$$

Así al sustituir la expresión A.59 en la expresión A.58, tenemos:

$$m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}' + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = q\mathbb{E}(t) + q\mathbf{v}' \times \mathbb{B} + q\mathbf{v}_1 \times \mathbb{B} + q\mathbf{v}_2 \times \mathbb{B}. \quad (\text{A.60})$$

Ahora tenemos que  $\mathbf{v}_1$  se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbb{E}(t) \times \mathbb{B}}{\mathbb{B}^2}, \quad (\text{A.61})$$

esto con el fin de que la expresión A.60 sea más sencilla, para notar la simplificación basta recordar la expresión A.16, una vez hecho esto la expresión A.62 se transforma en:

$$m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}' + \mathbf{v}_2) = -m \frac{\left(\frac{d\mathbb{E}(t)}{dt} \times \mathbb{B}\right)}{\mathbb{B}^2} + q\mathbf{v}' \times \mathbb{B} + q\mathbf{v}_2 \times \mathbb{B}. \quad (\text{A.62})$$

Ahora si consideramos que la segunda derivada del campo eléctrico como cero, lo cual es válido por que el campo eléctrico varía muy lentamente, se puede hacer el lo mismo que en la expresión A.6, así la velocidad  $\mathbf{v}_2$  es:

$$\mathbb{V}_2 = \frac{-m \left( \frac{d\mathbb{E}(t)}{dt} \times \mathbb{B} \right) \times \mathbb{B}}{q \mathbb{B}^4} = \frac{m}{q \mathbb{B}^4} \frac{d\mathbb{E}(t)}{dt}. \quad (\text{A.63})$$

A la expresión A.63 se le llama deriva de polarización.



## Apéndice B

Como se mencionó en la sección 5.4 del capítulo 5, en este apéndice se mostrará el fenómeno nuevo debido a los efectos de radiación.

Primero recordemos cómo son nuestros términos de frenado en cada caso:

Caso 1: No se considera en cuenta el frenado por radiación

$$\gamma = \frac{\omega_i^2 \frac{\pi}{k^2} \left( \frac{\omega_e^2 dF_{e0}}{n_{e0} dv_x} + \frac{\omega_i^2 dF_{i0}}{n_{i0} dv_x} \right)_{v=\omega/k}}{2kc_s \left( \frac{\omega_e^2}{k^2 v_{te}^2} \right)^2}. \quad (\text{B1})$$

Para poder graficar B1 es necesario tener una función de distribución, en este caso se considerará una distribución maxwelliana es decir:

$$F_{e0,i0} = \frac{n_{e0,i0}}{v_{te,ti} \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2v_{te,ti}^2}}, \quad (\text{B2})$$

los subíndices “e0” o “i0” se refieren a que se habla de electrones o iones, respectivamente.

De esta manera si sustituimos B2 en B1 obtenemos la siguiente expresión:

$$\gamma = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_e \pi}{2m_i}} k \left\{ \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} + \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{\frac{-T_e}{2T_i}} \right\}, \quad (\text{B3})$$

donde hemos considerado que:

$$v_{te,ti} = \sqrt{\frac{T_{e,i}}{m_{e,i}}}. \quad (\text{B4})$$

Sin embargo, ya que la velocidad de los electrones es mucho mayor a la velocidad de los iones, solo consideraremos el siguiente término de B3:

$$\gamma = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_e \pi}{2m_i}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} k, \quad (\text{B5})$$

Por otro lado es necesario delimitar el rango de  $k$ , este será:

$$\frac{\omega_i}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{e^2 n_{i0}}{\epsilon_0 m_i}} < k < \frac{\omega_e}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{e^2 n_{e0}}{\epsilon_0 m_e}}. \quad (\text{B6})$$

Otras cosas importantes que se tienen que decir:

- Estamos considerando un plasma neutro, es decir:

$$n_{e0} = n_{i0}.$$

- Se está considerando un plasma hecho de átomos de hidrógeno, de un solo electrón y un solo protón, por lo que la masa de los iones será la masa del protón.

Por otro lado la relación que existe entre la temperatura de los electrones (joules), y el número de partículas en la esfera de Debye ( $N_D$ ) es:

$$T_e = 1.6 \times 10^{-19} \frac{N_D^2 n_{e0}}{\sqrt{1.72 \times 10^{24}}}. \quad (\text{B7})$$

Se definirá un parámetro  $\alpha$ , que relacionará el cociente de la velocidad térmica de los electrones y la velocidad de la luz:

$$\alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}, \quad (\text{B8})$$

Por último se tiene una relación entre la densidad de electrones, el número de partículas en la esfera de Debye y el parámetro  $\alpha$ , que es:

$$n_{e0} = \frac{1.72 \times 10^{24} m_e^3 c^6 \alpha^6}{N_D^2 (1.6 \times 10^{-19})^3}. \quad (\text{B9})$$

Algo importante de mencionar es que un plasma es un plasma si se tiene un valor  $N_D$  al menos de 100.

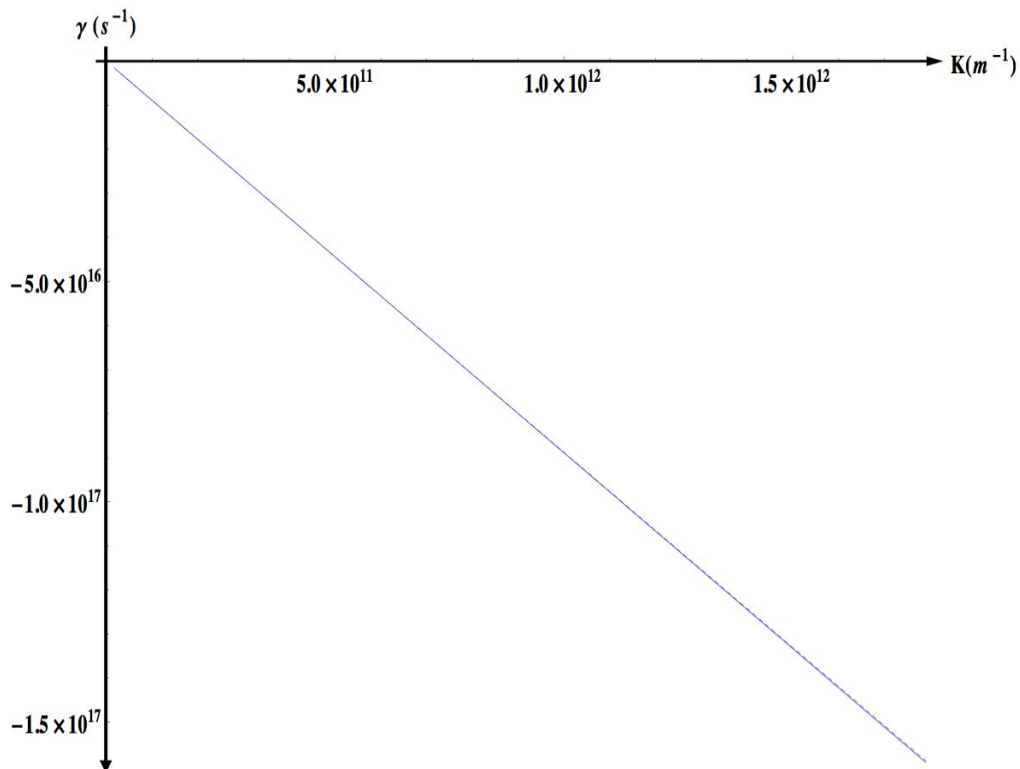
Por otro lado tenemos el término nuevo debido al frenado por radiación que es:

$$\gamma' = \frac{\tau_e T_e}{2m_i} k^2, \quad (\text{B10})$$

de manera que el término total debido a las 2 contribuciones será:

$$\gamma_T = \gamma + \gamma' = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_e \pi}{2m_i}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} k + \frac{\tau_e T_e}{2m_i} k^2. \quad (\text{B11})$$

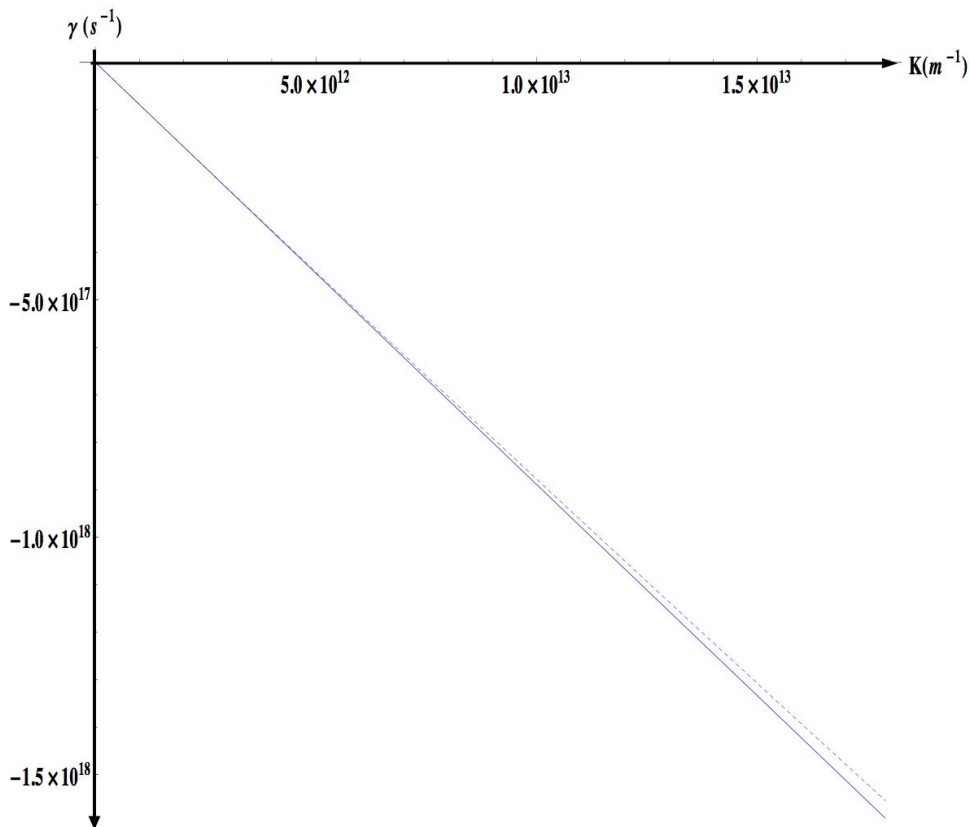
A continuación se muestran algunas gráficas variando los parámetros  $n_{e0}$ ,  $N_D$  y  $\alpha$ .



**Gráfica 1:** Esta gráfica se obtuvo con los siguientes valores:  $n_{e0} = 1.667 \times 10^{37} \text{ e/m}^3$ ,  $T_e = 6.182 \times 10^{-14} \text{ J}$ ,  $N_D = 100$ ,  $\alpha = 0.869$ , la gráfica azul es la de B5 y la gráfica punteada es la gráfica de B11, en el rango definido por B6. ( $1.79 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} < k < 1.79 \times 10^{12} \text{ m}^{-1}$ )

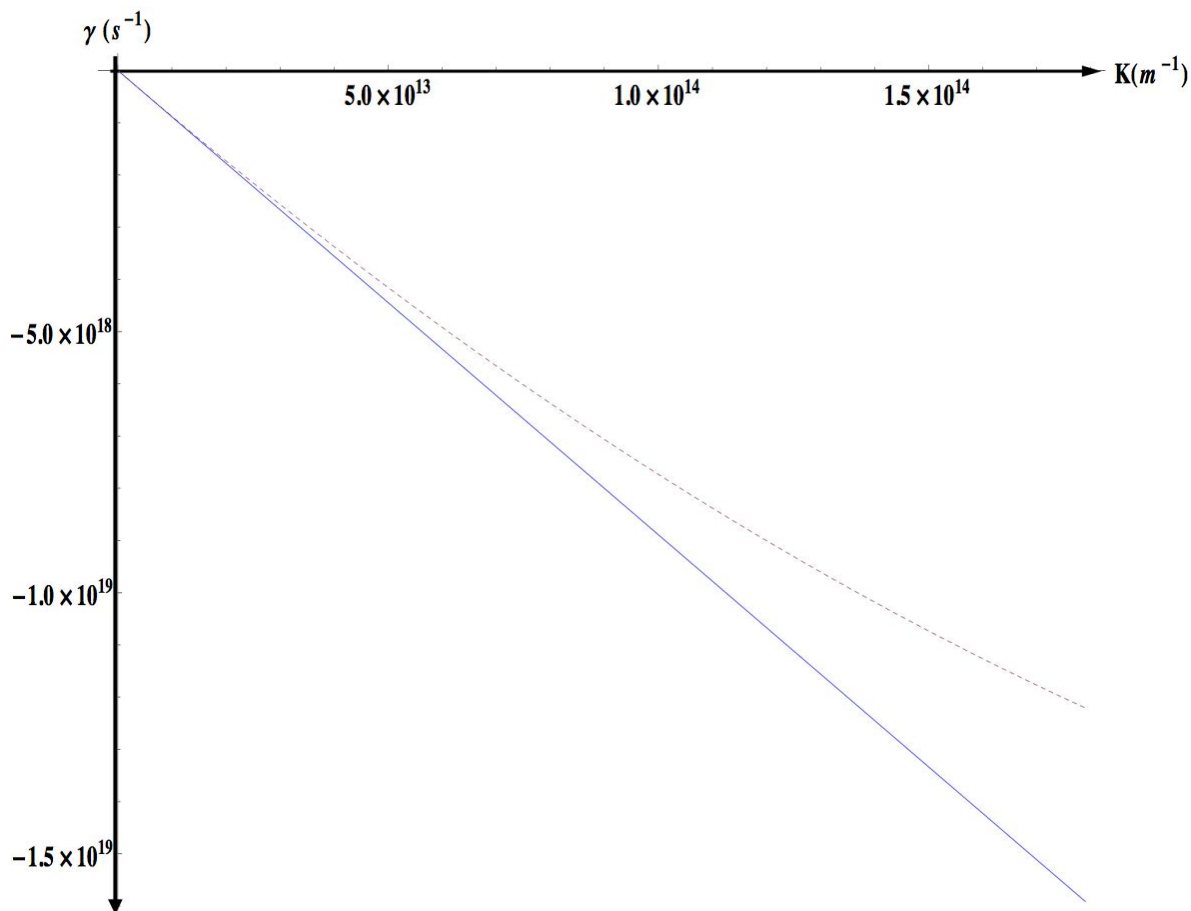


Se puede ver que el fenómeno no es muy apreciable sin embargo conforme aumenta  $k$  se empieza a ver una diferencia, a continuación se exponen 2 gráficas con los mismos valores de  $n_{e0} = 1.667 \times 10^{37} \text{ e/m}^3$ ,  $T_e = 6.182 \times 10^{-14} \text{ j}$ ,  $N_D = 100$  y  $\alpha = 0.869$ , pero en donde se han considerado fuera del rango impuesto por B6.



**Gráfica 2:** Esta gráfica se obtuvo con los siguientes valores:  $n_{e0} = 1.667 \times 10^{37} \text{ e/m}^3$ ,  $T_e = 6.182 \times 10^{-14} \text{ j}$ ,  $N_D = 100$ ,  $\alpha = 0.869$ , la gráfica azul es la de B5 y la gráfica punteada es la gráfica de B11, sin embargo, esta gráfica está fuera del rango permitido, ( $1.79 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} < k < 1.79 \times 10^{13} \text{ m}^{-1}$ ) pues ha sido ampliado por un factor de 10.

El objetivo de la gráfica 2 es mostrar con un rango más amplio el fenómeno va adquiriendo mayor peso en la gráfica, es decir una manera de especular sobre el fenómeno, sin embargo hay que mencionar que esta gráfica se sale del rango teórico, por último siguiendo con la misma línea de la especulación tenemos la gráfica 3, en la cual se tienen los mismos datos, pero se ha agrandado el rango de B6 por un factor de 100.



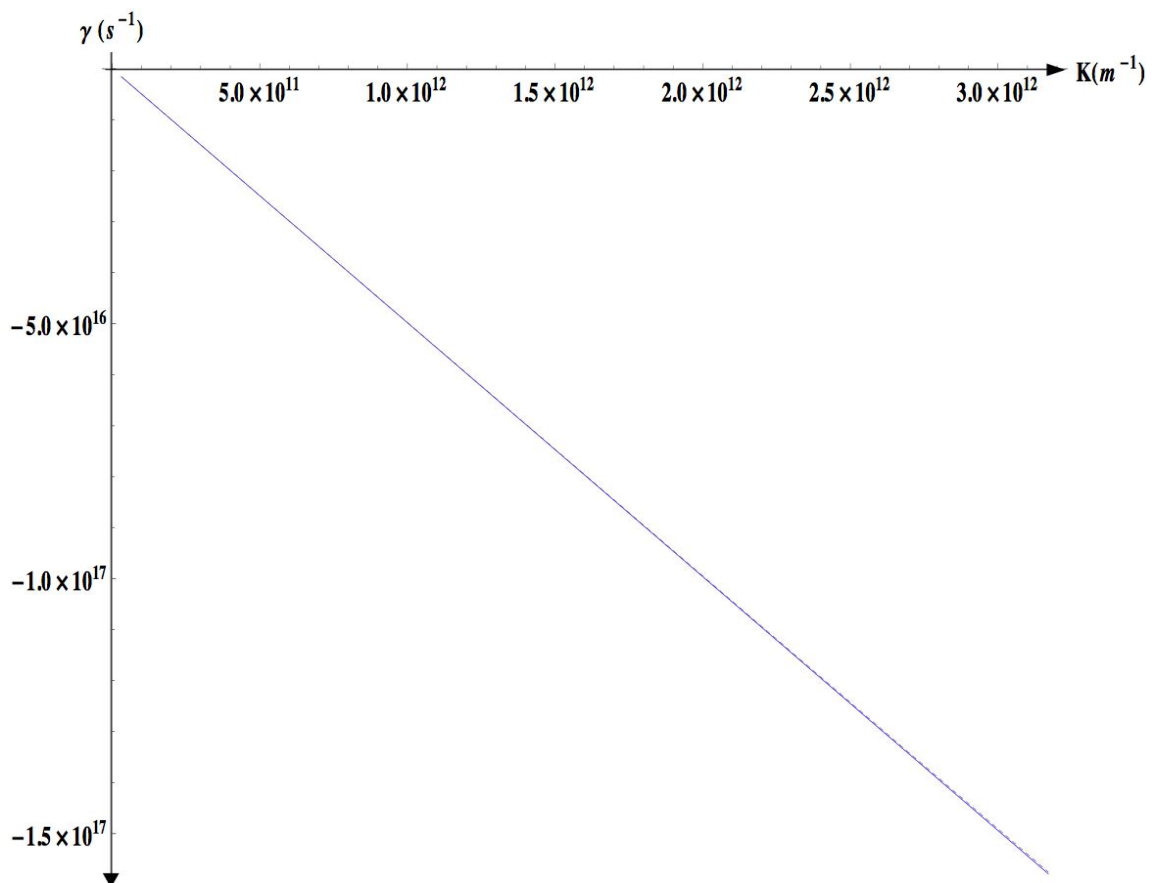
**Gráfica 3:** Esta gráfica se obtuvo con los siguientes valores:

$n_{e0} = 1.667 \times 10^{37} \text{ e/m}^3$ ,  $T_e = 6.182 \times 10^{-14} \text{ J}$ ,  $N_D = 100$ ,  $\alpha = 0.869$ , la gráfica azul es la de B5 y la gráfica punteada es la gráfica de B11, en el rango definido por B6 ( $1.79 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} < k < 1.79 \times 10^{14} \text{ m}^{-1}$ ) ha sido multiplicado por un factor de 100.

Se cambiarán los valores de los parámetros  $n_{e0}$ ,  $N_D$  y  $\alpha$ , en las siguientes gráficas.

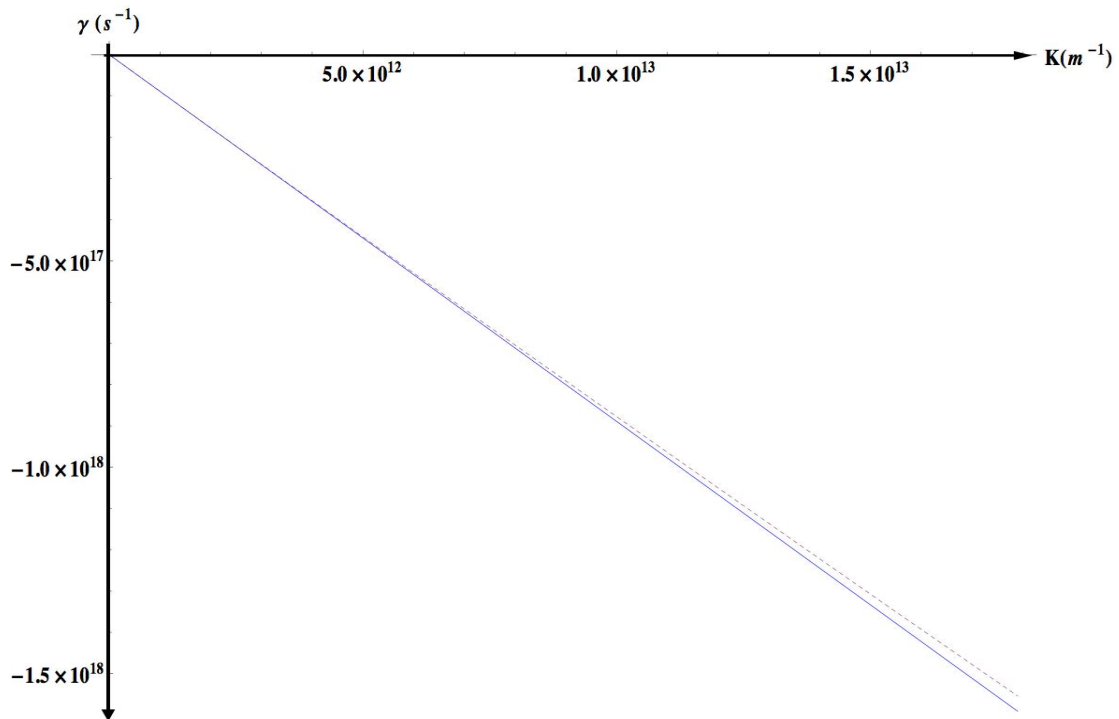
Conjunto de gráficas con los datos:

$$n_{e0} = 5.229 \times 10^{37} \text{ e/m}^3, T_e = 1.94 \times 10^{-14} \text{ j}, N_D = 10, \alpha = 0.488$$

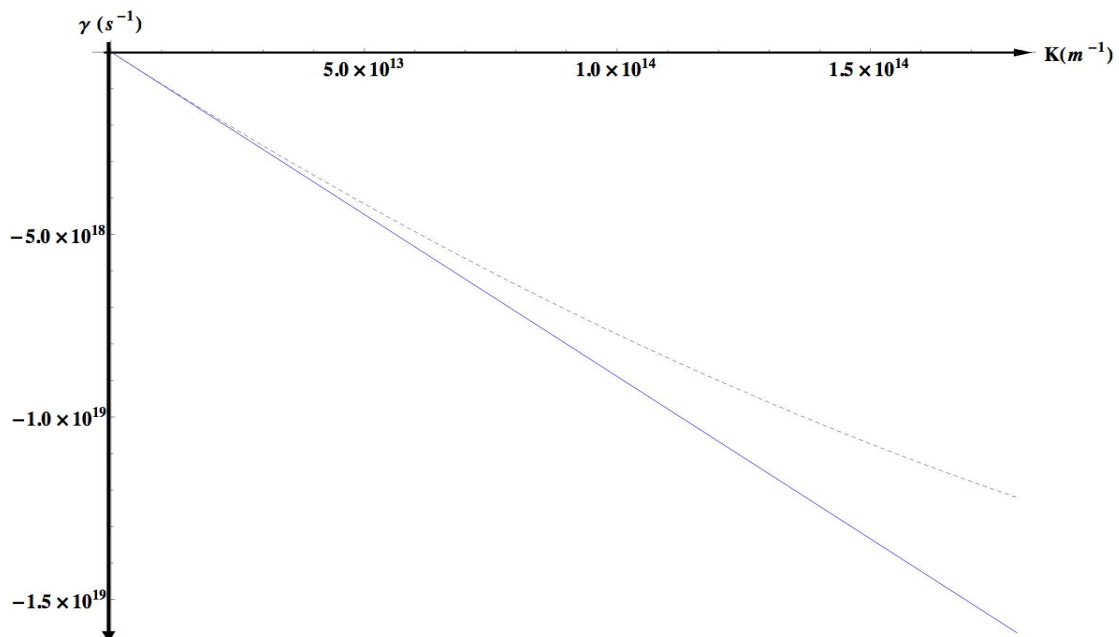


Gráfica 4: Esta gráfica se obtuvo con los siguientes valores:

$n_{e0} = 5.229 \times 10^{37} \text{ e/m}^3$ ,  $T_e = 1.94 \times 10^{-14} \text{ j}$ ,  $N_D = 10$ ,  $\alpha = 0.488$ , la gráfica azul es la de B5 y la gráfica punteada es la gráfica de B11, en el rango definido por B6. ( $3.17 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} < k < 3.17 \times 10^{12} \text{ m}^{-1}$ )



**Gráfica 5:** Esta gráfica se obtuvo con los siguientes valores:  $n_{e0} = 5.229 \times 10^{37} \text{ e/m}^3$ ,  $T_e = 1.94 \times 10^{-14} \text{ j}$ ,  $N_D = 10$ ,  $\alpha = 0.488$ , la gráfica azul es la de B5 y la gráfica punteada es la gráfica de B11, en el rango definido por B6 multiplicado por un factor de 10 ( $3.17 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} < k < 3.17 \times 10^{13} \text{ m}^{-1}$ ).



**Gráfica 6:** Esta gráfica se obtuvo con los siguientes valores:  $n_{e0} = 5.229 \times 10^{37} \text{ e/m}^3$ ,  $T_e = 1.94 \times 10^{-14} \text{ j}$ ,  $N_D = 10$ ,  $\alpha = 0.488$ , la gráfica azul es la de B5 y la gráfica punteada es la gráfica de B11, en el rango definido por B6 multiplicado por un factor de 100 ( $3.17 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} < k < 3.17 \times 10^{14} \text{ m}^{-1}$ ).

Lo mas importante de este fenómeno es el hecho de que puede tomar mayor peso si:

- Se aumenta la densidad de los electrones.
- Se aumenta la velocidad de los electrones.

Sin embargo:

- Si se aumenta la densidad de los electrones:

Por encima de los  $10^6 \text{ gr/cm}^3$  es necesario considerar efectos de lo que se llama materia degenerada, esto en nuestro trabajo implica una densidad de electrones de  $1 \times 10^{36} \text{ e/m}^3$ , lo cual muestra que el trabajo ya está en ese rango.

- Si se aumenta la velocidad de los electrones:

El trabajo hasta este punto no ha considerado efectos relativistas, por lo cual tiene que tomar en cuenta esas correcciones [18].



## Mathematical Differences and Physical Similarities Between Eliezer-Ford-O'Connell Equation and Landau-Lifshitz Equation

<sup>1</sup>Juan Francisco García-Camacho, <sup>2</sup>Encarnación Salinas,

<sup>1</sup>Adriana Avalos-Vargas and <sup>1\*</sup>Gonzalo Ares de Parga

<sup>1</sup>Dpto. de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas,  
Instituto Politécnico Nacional, U. P. Adolfo López Mateos,  
Zacatenco, C.P. 07738, México D.F., México.

<sup>2</sup>Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional,  
Av. Miguel Othón de Mendizábal s/n. Col. La Escalera. C.P. 07738,  
México D.F., México.

E-mail: gadpau@hotmail.com

March 16, 2015

### Abstract

Recently, for high intensity electromagnetic waves, it was proved that the solutions of the Eliezer-Ford-O'Connell equation and the Landau-Lifshitz equation coincide within a physically detectable range. For large-scale time effects, similar results are obtained for the central force problem. However, in the case of constant magnetic field, the frequencies which describe the motion in both equations, differ. However, quantum constraints prevent to measure such difference making to the two equations physically equivalent in all the scale of energies and fields within Classical Mechanics.

Keywords: Reaction force; Classical Electrodynamics; Special Relativity

Pacs: 03.30.+p; 03.50.-z; 03.50.De; 11.10.-z

## 1 Introduction

For more than a century, the knowledge of the reaction force for a charged particle has represented an open problem due to the unphysical results derived from the different existent proposals. An interesting article which describes the distinct equations and their own physical problematic was recently done by Hammond [1]. Among all the different approaches and despite the new one done by Hammond [2], [3], [4], nowadays, the Landau-Lifshitz equation of motion is

considered as the better option to describe the motion of a spinless charged point particle [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. In order to avoid Quantum effects [13], the charge must be constrained to the so-called Shen's zone[14]. This zone represents an area in an Energy *versus* Field diagram where Relativistic and Non Relativistic Classical Mechanics drive the motion of a charged particle without being affected by quantum aspects. Indeed, the energies and fields that appear in Plasma Physics belong to the Shen's zone. Therefore, not only relativistic situations have to be analyzed, but also non relativistic cases are of major importance. As an example of this, the central force has been recently studied by Rajeev [15]. His objective was twofold: to allow to go beyond perturbation theory in the calculation of line-widths of a hydrogenic atom; to understand in a simple model the capture of a star by a black hole. The necessity of deriving a non relativistic version of the Landau-Lifshitz equation emerges in a natural way. The method seems to be simple because it consists in neglecting all the terms depending on  $v/c$ . Or in a different way, solving the Landau-Lifshitz equation and then taking the limit  $v/c$  to zero. A very roughly method will lead to the Ford Equation [16]. Ford and O'Connell derived a non relativistic equation of motion for charged particles by using a generalized quantum Langevin equation, giving a structure to the electron with a factor form and a finite parameter cut-off. They generalized the equation to Special Relativity [17] obtaining an equation which has been derived by Eliezer [18] fifty years before using distinct arguments. Both equations, Landau-Lifshitz and Eliezer-Ford-O'Connell, are second order differential equations which do not present unphysical solutions as the runaway solutions and the preaccelerations. However, even if these equations are considered by many authors as the same one, they come from different physical assumptions. Indeed, for Spohn [6] and Rohrlich [7], [8], the Lorentz-Dirac equation must be restricted to its critical surface yielding the Landau-Lifshitz equation which indicates a fundamental origin distinct from Eliezer-Ford-O'Connell equation, as we mentioned above. For Parrot [19], the Eliezer equation and other equations, as Mo and Papas equation [20], were derived as variants of the Lorentz-Dirac by approximating the acceleration in some terms of it to be proportional to the applied force. Moreover, Landau and Lifshitz derived their equation by substituting the Lorentz equation in the Lorentz-Dirac reaction term and consequently it could be also considered as an approximation or a first order expansion in  $\tau_o$  ( $\tau_o = 2q^2/3mc^3$  is called the characteristic time). As we will see in the paper, although Landau-Lifshitz and Eliezer-Ford-O'Connell equations are mathematically different, they physically coincide. Some authors have made a comparison between the Lorentz-Abraham-Dirac equation and the non relativistic Landau-Lifshitz equation, as for example Griffiths [12]. Both, Rajeev [15] and Griffiths [12], consider Ford equation as the non-relativistic case of the Landau-Lifshitz equation which is true for the examples used by them. Although comparisons between the Landau-Lifshitz equation and Eliezer-Ford-O'Connell equations have been done for high intense pulses and high energies [21], [22], a face-off between Ford equation and the non-relativistic Landau-Lifshitz equation has not been done for large-scale time effects. Indeed, it seems that many authors consider that Ford equation and



the non relativistic Landau-Lifshitz equations are identical. Kravets et al [21] mentioned that the Eliezer-Ford-O'Connell equation has received less attention than it perhaps deserves, due in part to confusion arising from its apparent equivalence to the Landau-Lifshitz approximation (for an intense laser pulse, Landau-Lifshitz and Eliezer-Ford-O'Connell solutions are in good agreement).

In recent years, the appearance of higher laser intensities has meant that the reaction force is studied in the relativistic case [21], [13], [22], [2]. Moreover, in order to avoid the lack of balance of energy apparently present in the solution of the Lorentz-Dirac equation, of the Landau-Lifshitz equation and Eliezer-Ford-O'Connell equation in the case of a constant electric field, an interesting approach has been developed by Hammond [4], [3], [2], [1]. In particular, he found an interesting solution which explains the radiated energy and the motion of the charge for the electric constant case. The solution is found for low and high velocities.

Albeit radiation reaction force effects are very significant in the regime of very high intensities which lead to relativistic particle motion, the focus on non-relativistic equations apparently cannot be justified in first instance. However, the non-relativistic effects can be detected for large-scale time as it is proved in many articles [15], [23]. Moreover, in order to deal with trajectories, quantum restrictions indicate that for relativistic situations the fields must be less intense and consequently the large-scale time effects are easier detected in the non relativistic cases [14], [24].

The paper consists of showing that Ford equation (Eliezer-Ford-O'Connell equation in the relativistic case) and the non relativistic Landau-Lifshitz equation (Landau-Lifshitz equation in the relativistic case) are not mathematically equal but they are physically equivalent. Even if it is noted that both equations are equivalent to first order in  $\tau_o$  (the characteristic time of the particle) [1], the velocity dependence in the applied force is the source of the difference. This will be twofold showed by demonstrating the difference between both equations and by giving a counterexample: the constant magnetic case. First, we find the Landau-Lifshitz solution taking the limit to zero of  $v/c$  and then we solve the problem by means of Ford equation. The results are different. From this, we will be able to understand the difference between both equations. The generalization to Special Relativity will be done. However, the quantum constraints prevent to measure the large-scale time effects making both equations physically equivalent.

The paper is organized as follows: in Sec. 2, the Landau-Lifshitz equation is exposed and a simple representation of it is presented. The solutions for the constant electric and constant magnetic cases are found. In Sec. 3, the non-relativistic Landau-Lifshitz equation is deduced. The comparison with Ford equation shows that both equations are mathematically different when the force depends on the speed. In Sec. 4, Ford equation is solved for the constant electric and the constant magnetic cases. An analysis between both results, the non relativistic Landau-Lifshitz and Ford solutions, is done. In Sec. 5, by using a special representation of Eliezer equation [19], the equivalence between Eliezer equation and Ford-O'Connell equation is showed and in the same time

the mathematical difference with the Landau-Lifshitz equation is exposed. A simplified representation of both equation is deduced. In Sec. 6, the expression for the large distance radiated power is analyzed giving the same result for both equations even if the force depends on the speed. However, since each equation possesses different solutions the corresponding evaluated radiated powers are distinct. In Sec. 7, concluding remarks, the differences between both equations are summarized and numerical physical situations are studied considering the quantum constraints.

## 2 Landau-Lifshitz Equation

In 1938, Dirac [25] proposed an equation of motion which pretends to relativistically describe the motion of a spinless point-like charged particle including the reaction force; that is:

$$ma^\mu = (q/c)F^{\mu\nu}v_\nu + \tau_o m \left[ \overset{\circ}{a}^\mu + \frac{a^2}{c^2}v^\mu \right], \quad (1)$$

where  $q$ ,  $c$  and  $F^{\mu\nu}$  represent the charge particle, the speed of light and the field-strength tensor, respectively. The dot "." means derivative with respect to the proper time of the particle. Since many unphysical results can be derived from this equation, as for example the runaway solutions and the preaccelerations, many others proposals appeared in order to avoid such inconveniences. The Landau-Lifshitz equation [5] represents the most acceptable model since it is a second order differential equation which does not possess none of the problems just cited above [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Let us consider,

$$ma_L^\mu = (q/c)F^{\mu\nu}v_\nu, \quad (2)$$

where  $a_L^\mu$  represents the acceleration of a charged particle driven by Lorentz equation. Then, substitute in the Lorentz-Dirac radiation term,  $\tau_o m \left[ \overset{\circ}{a}^\mu + \frac{a^2}{c^2}v^\mu \right]$ ,  $a^\mu$  and  $\overset{\circ}{a}^\mu$  by the Lorentz acceleration  $a_L^\mu$ . The result is

$$ma^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}v_\nu + \tau_o \left[ \frac{d}{d\tau_L} \left[ \frac{q}{c}F^{\mu\nu}v_\nu \right] + \frac{q^2}{c^4 m} F^2 v^\mu \right], \quad (3)$$

where  $F^\mu = F^{\mu\beta}v_\beta$ ,  $F^2 = F^\mu F_\mu = F^{\alpha\beta}v_\beta F_{\alpha\eta}v^\eta$  and  $\tau_L$  represents an invariant quantity defined in each point of the real trajectory of the particle which coincides with the proper time of a virtual charged particle whose motion is in accordance with Lorentz equation and with the same 4-velocity  $v^\mu$  at the crossing point between the real and Lorentz trajectories. That is:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau_L} = \frac{q}{cm} F^{\mu\nu}v_\nu. \quad (4)$$

The Lorentz-proper time,  $\tau_L$ , is different from the real proper time of the charged particle since it just indicates that the derivative of the 4-velocity

with respect to itself satisfies Lorentz equation. Therefore, it is used in order to calculate the term  $d \left[ \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu \right] / d\tau_L$  of Eq. (3) which represents the main point to deduce the Landau-Lifshitz equation. We also obtain,

$$\frac{dF^{\mu\nu}}{d\tau_L} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau_L}. \quad (5)$$

Since by definition of the Lorentz-proper time,  $\tau_L$ , the 4-velocity  $v^\mu$  coincides with  $dx^\mu/d\tau_L$  in each point of the trajectory of the charge, we have

$$\frac{dF^{\mu\nu}}{d\tau_L} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} v^\alpha. \quad (6)$$

Then,

$$\tau_o \frac{d}{d\tau_L} \left[ \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu \right] = \tau_o \frac{q}{c} \left[ \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} v^\alpha v_\nu + F^{\mu\nu} \frac{dv_\nu}{d\tau_L} \right]. \quad (7)$$

By using Eq. (4), we obtain

$$\tau_o \frac{d}{d\tau_L} \left[ \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu \right] = \tau_o \frac{q}{c} \left[ \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} v^\alpha v_\nu + \frac{q}{cm} F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} v^\alpha \right]. \quad (8)$$

Finally, due to the antisymmetry property of the field-strength tensor  $F^{\mu\nu}$ , we arrive at

$$\tau_o \frac{d}{d\tau_L} \left[ \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu \right] = \tau_o \frac{q}{c} \left[ \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} v^\alpha v_\nu - \frac{q}{cm} F^{\mu\nu} F_{\alpha\nu} v^\alpha \right]. \quad (9)$$

Introducing this last result in Eq. (3), we obtain the Landau-Lifshitz equation of motion,

$$ma^\mu = (q/c)F^{\mu\nu}v_\nu + \tau_o \left[ \frac{q}{c} \left[ \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} v^\alpha v_\nu - (q/cm)F^{\mu\nu}F_{\alpha\nu}v^\alpha \right] + (q^2/c^4m)F^2v^\mu \right], \quad (10)$$

where  $F^2 = F^{\mu\nu}v_\nu F_{\mu\lambda}v^\lambda$ . This last equation seems very difficult to be solved. However, Eq. (3) represents the same equation as the Landau-Lifshitz equation, Eq. (10), but it is presented in such a manner that it is simpler to be solved. Moreover, starting from Eq. (3), another representation of the Landau-Lifshitz equation can be deduced in order to simplify the technique to obtain its solutions.

## 2.1 Simple representation of the Landau-Lifshitz equation

By defining the constant  $k = q/cm$ , Eq. (3) can be rewritten as

$$a^\mu = kF^{\mu\nu}v_\nu + \tau_o \frac{d}{d\tau_L} [kF^{\mu\nu}v_\nu] + \frac{\tau_o k^2}{c^2} F^2 v^\mu. \quad (11)$$

In order to develop a technique to solve the Landau-Lifshitz equation of motion in a simpler form, we will define two 4-vectors in each point of the trajectory

of the particle. Indeed, as for the Lorentz-proper time,  $\tau_L$ , by using Eqs.(2) and (9), we can define two 4–vectors  $a_L^\mu$  and  $da_L^\mu/d\tau_L$ , in the following way:

$$a_L^\mu = kF^{\mu\nu}v_\nu, \quad (12)$$

and

$$\frac{da_L^\mu}{d\tau_L} = \frac{d}{d\tau_L} [kF^{\mu\nu}v_\nu] = k \left[ \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} v^\alpha v_\nu - kF^{\mu\nu}F_{\alpha\nu}v^\alpha \right]. \quad (13)$$

These vectors represent the acceleration and the rate of acceleration with respect the proper time of a charged particle that moves following the trajectory generated by the Lorentz force in each point of the real trajectory of the charge. Substituting these vectors in Eq. (11), we obtain the following equation,

$$a^\mu = a_L^\mu + \tau_o \left[ \frac{da_L^\mu}{d\tau_L} + \frac{a_L^2}{c^2} v^\mu \right]. \quad (14)$$

This last equation is also a representation of the Landau-Lifshitz equation and it is the desired equivalent form of the equation. It has to be pointed out that Landau-Lifshitz equation has the same form than the Lorentz-Dirac equation but with  $a^\mu$  substituted by  $a_L^\mu$  in the right member of the equation. In order to obtain a solution for the Landau-Lifshitz equation, it is necessary to firstly solve the Lorentz equation and this represents a strong simplification. Indeed, it has to be noticed that Eq. (14) is a second order equation because the term  $da_L^\mu/d\tau_L$  is just a 4–vector which depends on the 4–vector position  $x^\mu$  and the 4–vector velocity  $v^\mu$  of the charge (see Eq. (13)). Consequently, since we have noticed its equivalence with the Landau-Lifshitz equation, runaway solutions and preaccelerations are avoided. The interesting property of this representation consists of not having to calculate all the terms that appear in the regular expression of Landau-Lifshitz equation. This point will be showed in the next subsections.

## 2.2 The constant electric field

As we have mentioned before, the solutions of the constant electric field case have already been found by many authors for the Lorentz-Dirac and the Landau-Lifshitz equations. For both equations, the motion of the charged particle is not affected by the reaction force which vanishes. This has led to a series of discussions from the interpretation of the principle of equivalence [3] or interpretation of the role of the attached fields [9] to new proposals as the one done by Hammond [2], [3], [4], [1]. However, in order to apply our new representation of the Landau-Lifshitz equation, we want to discuss the simple case of one charged particle in a constant electric field with intensity given by  $E$ . Let us constrain the motion and the field to the  $x$  axis. We begin by solving the Lorentz equation for this case. We obtain the two Lorentz coordinate equations,

$$\begin{aligned} a_L^0 &= \frac{d^2 ct}{d\tau_L^2} = wE \frac{d}{d\tau_L} x \\ a_L^x &= \frac{d^2 x}{d\tau_L^2} = wEc \frac{d}{d\tau_L} t \end{aligned} \quad (15)$$

By using the last result,  $a_L^2$  is

$$a_L^2 = \left[ c \frac{d^2}{d\tau_L^2} t \right]^2 - \left[ \frac{d^2}{d\tau_L^2} x \right]^2 = -w^2 E^2 c^2. \quad (16)$$

Then,

$$\frac{a_L^2}{c^2} = -w^2 E^2. \quad (17)$$

On the other hand, noticing that in order to calculate  $d^2x/d\tau_L^2$  and  $d^2ct/d\tau_L^2$ , Eqs. (15) must be used, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_L} a_L^0 &= wE \frac{d^2}{d\tau_L^2} x = w^2 E^2 \dot{c}t \\ \frac{d}{d\tau_L} a_L^x &= wE \frac{d^2}{d\tau_L^2} ct = w^2 E^2 \dot{x} \end{aligned} \quad (18)$$

where it is necessary to remember that the dot “.” represents the real proper time derivative ( $d/d\tau$ ) and by definition  $dx^\mu/d\tau_L$  coincides with the 4-velocity  $v^\mu$  at each point of the real trajectory. Therefore, we obtain

$$\tau_o \left[ \frac{da_L^\mu}{d\tau_L} + \frac{a_L^2}{c^2} v^\mu \right] = 0. \quad (19)$$

This means that the reaction term vanishes in this case. Therefore, when a constant electric field parallel to the motion of a charge is applied to it, the solution of Landau-Lifshitz equation coincides with the Lorentz’s one. It has to be noticed that for Lorentz-Dirac equation, the Lorentz-Dirac reaction term also vanishes in this case [26], [27].

### 2.3 The constant magnetic field

In order to also show the simplicity of the method, let us consider a constant magnetic field  $B$  in the  $z$  axis. Without losing generality, we can constrain the problem to two dimensions and by putting  $w = qB/cm$ , the three components of the Lorentz equation of motion are

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau_L^2} ct &= 0 \\ \frac{d^2}{d\tau_L^2} x &= w\dot{y} \\ \frac{d^2}{d\tau_L^2} y &= -w\dot{x} \end{aligned} \quad (20)$$

Therefore,

$$a_L^2 = -w^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (21)$$

So the Landau-Lifshitz equation of motion can be expressed as

$$\begin{aligned} \ddot{c}t &= -\tau_o w^2 \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \dot{c}t \\ \ddot{x} &= w\dot{y} - \tau_o w^2 \dot{x} \left( 1 + \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right), \\ \ddot{y} &= -w\dot{x} - \tau_o w^2 \dot{y} \left( 1 + \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

As we can notice these equations do not depend on the position,  $x$  and  $y$ . Therefore, we can define the vectors,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= x\hat{i} + y\hat{j} = v(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}), \\ \hat{e}_v &= \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right|^{-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \\ \hat{e}_\theta &= \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \right|^{-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}.\end{aligned}\quad (23)$$

where  $v$  represents the magnitude of the relativistic velocity, that is,  $v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ , and  $\theta$  is the angle of the vector  $\vec{v}$  with the  $x$  axis. Eq. (22) can be written as

$$\left[ \dot{v} \right] \hat{e}_v + \left[ v\dot{\theta} \right] \hat{e}_\theta = -\tau_o w^2 v \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \hat{e}_v - wv\hat{e}_\theta. \quad (24)$$

Consequently, we can assure that

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -w = \text{constant} \\ \frac{1}{v(1+\frac{v^2}{c^2})} dv &= -\tau_o w^2 d\tau.\end{aligned}\quad (25)$$

By integrating the last equation, we arrive at

$$v = \frac{v_o c \exp -\tau_o w^2 \tau}{\left[ c^2 + v_o^2 [1 - \exp -2\tau_o w^2 \tau] \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (26)$$

Similar results for the Lorentz-Dirac equation have been found [24], [28].

Finally, the speed of the charge is

$$\vec{v} = \frac{v_o c \exp -\tau_o w^2 \tau}{\left[ c^2 + v_o^2 [1 - \exp -2\tau_o w^2 \tau] \right]^{\frac{1}{2}}} \left[ \cos(w\tau + \delta)\hat{i} + \sin(w\tau + \delta)\hat{j} \right], \quad (27)$$

where  $v_o$  and  $\delta$  represent the initial speed of the particle (with respect to the proper time) and the phase of the trigonometric functions at  $\tau = 0$ , respectively. It has to be noticed that this last solution implies that a drift of the center of motion of the charged particle appears [24]. Moreover, in a typical TOKAMAK environment, the magnetic field is around  $10^5 G$  ( $10T$ ) [29], the decay time is around  $10^{-1}$  sec for the electrons ( $t_{ed} \simeq 1/\tau_{eo}w^2$ , with  $\tau_{eo} = 2e^2/3m_e c^3$  and  $m_e$  the electron mass), the electrons will lose all the energy and the confinement of the plasma could be affected due to the fact that the electron energy will decay faster than the energy of a proton (or a similar ion) around  $10^9$  sec ( $t_{pd} \simeq 1/\tau_{po}w^2$  with  $\tau_{po} = 2e^2/3m_p c^3$  and  $m_p$  the proton mass).

### 3 Deduction of the Non Relativistic Landau-Lifshitz Equation

If we consider the reaction term in the new notation of the Landau-Lifshitz equation,

$$\tau_o \left[ \frac{da_L^\mu}{d\tau_L} + \frac{a_L^2}{c^2} v^\mu \right] \quad (28)$$

It is clear, as it happens with the Lorentz-Dirac reaction term when it is considered the non relativistic case the reaction term turns to  $\tau_o d\mathbf{a}/dt$  [30], for the Landau-Lifshitz reaction term in the non-relativistic case, the expression is

$$\tau_o \frac{d\mathbf{a}_L}{dt_L} = \frac{\tau_o}{m} \frac{d\mathbf{F}}{dt_L}, \quad (29)$$

where  $t_L$  represents the Lorentz time such that

$$\frac{dv^i}{dt_L} = \frac{F^i}{m}. \quad (30)$$

This gives the following non relativistic equation for a charged particle,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \tau_o \frac{d\mathbf{F}}{dt_L}. \quad (31)$$

This equation can be called the non-relativistic Landau-Lifshitz equation. Apparently, this is the Ford equation but it is not due the presence of the Lorentz-time  $t_L$ . Indeed, when the force only depends on the time and the coordinates,  $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}(\mathbf{v})$ , and considering that  $dx^i/dt_L = dx^i/dt$ , we have

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt_L} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt_L} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}. \quad (32)$$

In this case Eq. (31) coincides with Ford equation. It has to be noted, Ford and O'Connell just consider forces depending on the time [16] in their first articles, but later they generalized their proposal to the relativistic case obtaining the Eliezer equation of motion [18] where no constraint appears about the force dependence [17]. Therefore, the generalization of Ford equation including forces depending on the coordinates is natural. However, when the force depends on the velocity, things are different. For such a dependence in the velocity, the non relativistic Landau-Lifshitz equation, Eq. (31), must be expressed as

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \tau_o \frac{d\mathbf{F}}{dt_L} = \mathbf{F} + \tau_o \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt_L} \right]. \quad (33)$$

Using Eq. (30), arrives at

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \tau_o \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v^i} \frac{F^i}{m} \right]. \quad (34)$$

On the other side, Ford equation will be represented by

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \frac{\tau_o}{m} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt} \right]. \quad (35)$$

The difference between both equations consists in noticing that

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt_L} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v^i} \frac{F^i}{m} \neq \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt}, \quad (36)$$

because

$$\frac{dv^i}{dt_L} = \frac{F^i}{m} \neq \frac{dv^i}{dt} = a^i. \quad (37)$$

The reason of the difference is because the acceleration of the trajectories are driven by the Landau-Lifshitz equation or by Ford equation, according the choice of the equation, and not by the Lorentz equation. In the following section, some examples of this will be exposed.

## 4 Ford Equation vs Non Relativistic Landau-Lifshitz Equation in Typical Cases.

Let us confirm these results in two typical cases.

### 4.1 Ford equation with constant electric field

Let us consider a non relativistic charged particle submitted to a constant electric field in the  $x$ -axis and use Ford equation.

$$m\mathbf{a} = qE\hat{i} + \tau_o \frac{d(qE)\hat{i}}{dt}. \quad (38)$$

Since  $E$  is constant, the solution is the regular constant acceleration due to the corresponding Lorentz equation,

$$m\mathbf{a} = qE\hat{i}. \quad (39)$$

Even if the reaction force vanishes, as we will see in the next section, there exists some radiated power.

For the non relativistic Landau-Lifshitz equation,

$$m\mathbf{a} = qE\hat{i} + \tau_o \frac{d(qE)\hat{i}}{dt_L}. \quad (40)$$

Since the Lorentz force is a constant and consequently it does not depend on the velocity, we have that Eq. (40) coincides with the Lorentz equation solution too as it happens when Ford equation is used. Therefore, as we have predicted, in this case since the force does not depend on the velocity, the results coincide for both equations, Ford equation and the non relativistic Landau-Lifshitz equation; actually, with the four equations since it is the same solution for the Lorentz and the Abraham equation.

### 4.2 Ford Equation with constant magnetic field

Consider now a non relativistic charged particle submitted to a constant magnetic field,  $\mathbf{B} = B\hat{k}$ . By using Ford equation, we obtain

$$m\ddot{x} = w\dot{y} + \tau_o w \frac{d\dot{y}}{dt} \quad \text{and} \quad \ddot{y} = -w\dot{x} - \tau_o w \frac{d\dot{x}}{dt}. \quad (41)$$



Notice that  $\ddot{y} = d\dot{y}/dt$  cannot be identified with  $-w\dot{x}$  since this will imply that the motion of the particle will be Lorentz-like. Eq. (41) can be solved by putting

$$\dot{x} = a \exp -iw_m t \quad \text{and} \quad \dot{y} = b \exp -iw_m t. \quad (42)$$

Therefore, a secular equation is obtained getting

$$w_m^2 - w^2(1 - i\tau_o w_m)^2 = 0. \quad (43)$$

Finally, the motion can be described by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \exp \left[ -\tau_o \frac{w^2}{1 + \tau_o^2 w^2} t \right] \sin \left[ \frac{w}{1 + \tau_o^2 w^2} t + \delta \right] \\ \dot{y} &= A \exp \left[ -\tau_o \frac{w^2}{1 + \tau_o^2 w^2} t \right] \cos \left[ \frac{w}{1 + \tau_o^2 w^2} t - \delta \right], \end{aligned} \quad (44)$$

where  $A$  and  $\delta$  are real constant determined by the initial conditions. The interesting fact is that the oscillating term possesses a frequency

$$\Omega_F = \frac{w}{1 + \tau_o^2 w^2} \quad (45)$$

and a decay time

$$t_{Fd} = \frac{1 + \tau_o^2 w^2}{\tau_o w^2} \quad (46)$$

If we analyze the expression of the relativistic case using Landau-Lifshitz equation, Eq. (27), and we take the non relativistic limit, the frequency and the decay time are given by

$$\Omega_{LL} = w \quad (47)$$

and

$$t_{LLd} = \frac{1}{\tau_o w^2} \quad (48)$$

which differ by the factor  $\tau_o^2 w^2$ .

Our principal purpose is to compare Ford equation with the non relativistic Landau-Lifshitz equation. In order to confirm our solution, let us solve Eq. (34) and check that it coincides with the result of Eqs. (47) and (48). The non relativistic Landau-Lifshitz equation in this case is

$$m\ddot{x} = w\dot{y} + \tau_o w \frac{d\dot{y}}{dt_L} \quad \text{and} \quad \ddot{y} = -w\dot{x} - \tau_o w \frac{d\dot{x}}{dt_L}. \quad (49)$$

It has to be noticed that in this case  $d\dot{x}/dt_L$  and  $d\dot{y}/dt_L$  must be replaced by the Lorentz force that is

$$\frac{d\dot{x}}{dt_L} = w\dot{y} \quad \text{and} \quad \frac{d\dot{y}}{dt_L} = -w\dot{x} \quad (50)$$

Therefore,

$$m\ddot{x} = w\dot{y} - \tau_o w^2 \dot{x} \quad \text{and} \quad m\ddot{y} = w\dot{x} - \tau_o w^2 \dot{y} \quad (51)$$

Obtaining the secular equation

$$w_m^2 + 2iw_m\tau_o w^2 + w^2(1 - \tau_o^2 w^2) = 0, \quad (52)$$

which implies

$$w_m = w + i\tau_o w^2 \quad (53)$$

Therefore, the solution is of the type

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \exp[-\tau_o w^2 t] \cos(wt + \delta) \\ \dot{y} &= A \exp[-\tau_o w^2 t] \sin(wt - \delta), \end{aligned} \quad (54)$$

where  $A$  and  $\delta$  are also constant given by the initial conditions. The frequency and the decay time coincide, as we expected, with Eqs. (47) and (48).

Finally, it has been highlighted that the Ford solution and the non relativistic Landau-Lifshitz solution differ as it is proved in Eq. (36).

## 5 Equivalence between Eliezer and Ford-O'Connell Equation

In 1948, by making an approximation of the Lorentz-Dirac equation, Eliezer [18] deduced a second order equation which does not present unphysical solutions. In the other hand, by using a generalized quantum Langevin equation, giving a structure to the electron with a factor form and a finite parameter cut-off, Ford and O'Connell obtained a non relativistic equation, the so-called Ford equation and by generalizing it to Special Relativity a relativistic equation was deduced, the Ford-O'Connell equation [17], [16]. However, Ford and O'Connell obtained the same Eliezer equation but they claimed a much physical deduction based on quantum principles and not as an approximation. The reason why Eliezer equation and Ford-O'Oconnell equation are frequently not recognized as equivalent is because they are sometimes differently expressed. Let us proof that both equation are the same starting by using Parrot [19] expression of the Eliezer equation,

$$ma^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu + \tau_o \left[ \frac{q}{c} \frac{d(F^{\mu\nu} v_\nu)}{d\tau} + \frac{q}{c} (F^{\nu\lambda} v_\lambda a_\nu) \frac{v^\mu}{c^2} \right]. \quad (55)$$

If we develop the second part of the radiation term,  $(q/c^3) (F^{\nu\lambda} v_\lambda a_\nu) v^\mu$ , and noticing that  $v_\nu v_\lambda dF^{\nu\lambda}/d\tau$  vanishes due to the antisymmetry of the Strength

Tensor,  $F^{\nu\lambda}$ , we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{q}{c} (F^{\nu\lambda} v_\lambda a_\nu) \frac{v^\mu}{c^2} &= \frac{q}{c} (F^{\nu\lambda} v_\lambda a_\nu) \frac{v^\mu}{c^2} - \frac{v^\mu}{c^2} \left[ v_\nu \frac{dF^{\nu\lambda}}{d\tau} v_\lambda \right] \\
&= \frac{q}{c} (F_{\nu\lambda} v^\lambda a^\nu) \frac{v^\mu}{c^2} - \frac{q}{c} \frac{v^\mu}{c^2} \left[ v^\nu \frac{dF_{\nu\lambda}}{d\tau} v^\lambda \right] \\
&= -\frac{q}{c^3} v^\mu v^\nu \frac{d(F_{\nu\lambda} v^\lambda)}{d\tau}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Therefore, we arrive at

$$ma^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu + \tau_o \left[ \frac{q}{c} \frac{d(F^{\mu\nu} v_\nu)}{d\tau} - \frac{q}{c} \frac{v^\mu v^\nu}{c^2} \frac{d(F_{\nu\lambda} v^\lambda)}{d\tau} \right], \tag{57}$$

which represents the Ford-O'Connell equation. Therefore, since both representations of the same equation were deduced by using different physical arguments, the equation may be called the Eliezer-Ford-O'Connell equation.

By using the same method of subsection 2.1, we can express the Eliezer-Ford-O'Connell equation as

$$a^\mu = a_L^\mu + \tau_o \left[ \frac{da_L^\mu}{d\tau} - \frac{v^\mu v^\nu}{c^2} \frac{da_\nu^L}{d\tau} \right]. \tag{58}$$

Analyzing the second part of the radiation term, we have

$$v^\nu \frac{da_\nu^L}{d\tau} = \frac{dv^\nu a_\nu^L}{d\tau} - a^\nu a_\nu^L = \frac{q}{cm} \frac{d(v^\nu F_{\nu\lambda} v^\lambda)}{d\tau} - a^\nu a_\nu^L = -a^\nu a_\nu^L, \tag{59}$$

where the antisymmetry of  $F_{\nu\lambda}$  has been used. Therefore a better representation of the Eliezer-Ford-O'Connell equation is

$$a^\mu = a_L^\mu + \tau_o \left[ \frac{da_L^\mu}{d\tau} + \frac{v^\mu}{c^2} a^\nu a_\nu^L \right]. \tag{60}$$

This representation of the Eliezer-Ford-O'Connell equation is very similar to the expression of the Landau-Lifshitz equation in Eq. (14) but differs in the following points: first, in Eq. (60) the derivative with respect to the Lorentz-proper time does not appear; secondly,  $a_L^2$  in Eq. (14) is substituted by  $a^\nu a_\nu^L$  in Eq. (60). These differences show the non equivalence between the Landau-Lifshitz and the Eliezer-Ford-O'Connell equations.

## 6 Expressions For the Radiated Power

Let us analyze the physical consequences of the reaction term in each equation. Some authors have proposed a new radiation rate of energy (or a radiated power expression) [9][31][10][11] for the Landau-Lifshitz equation which differs from the classical relativistic Larmor formula. Indeed, when the Lorentz-Dirac equation is

considered, the time coordinate of the reaction term corresponds to the radiated power. However, it is composed of two terms, as Rohrlich has interpreted [30], one corresponds to the attached fields,  $\tau_o m \dot{a}^0$ , which follows the charge and the other that can be measured experimentally, the large distance radiated power  $\tau_o m \frac{a_L^2}{c^2} v^0$ . Following Rohrlich ideas and taking into account the 0-component of the Landau-Lifshitz reaction term,

$$G^0 = \tau_o \left[ \frac{d}{d\tau_L} \frac{q}{c} F^{0\nu} v_\nu + \frac{q^2}{c^4 m} F^2 v^0 \right] = \tau_o m \left[ \frac{da_L^0}{d\tau_L} + \frac{a_L^2}{c^2} v^0 \right], \quad (61)$$

we can propose the large distance radiated power as

$$P_{lar} = -\tau_o \frac{q^2}{c^3 m} F^2 v^0 = -\tau_o m \frac{a_L^2}{c} v^0, \quad (62)$$

and the attached radiated power

$$P_{att} = -\tau_o c \frac{d}{d\tau_L} \left[ \frac{q}{c} F^{0\nu} v_\nu \right] = -\tau_o m c \frac{da_L^0}{d\tau_L} \quad (63)$$

The new expressions for the large distance and the attached radiated powers were introduced to show that there is a consistence between the radiated power and the Landau-Lifshitz equation [9], [10]. When the constant electric field case is analyzed, since the reaction term vanishes, it can be thought that there is no radiation. Nevertheless, the large distance radiated power does not vanish. The attached energy provides the energy to the large distance radiated power. This means that there is an arrangement of the energy [9]. The essential idea consists of proposing that the radiation emitted by a point charge is due exclusively to the external exerted electromagnetic forces on the charge.

On the other hand, based on conservation of the energy, Ford and O'Connell have proposed a radiated power for their equation [32], and it is expressed as

$$P = \tau_o \frac{F^2}{m}. \quad (64)$$

If we take the limit of Eq. (62) when  $v/c$  tends to 0, the corresponding radiated power for the non relativistic Landau-Lifshitz case coincides with Ford proposal, Eq. (64). Therefore, even if Ford equation and the non relativistic Landau-Lifshitz equation are different, they have in common the radiated power. For example, in the case of the constant magnetic case, in the Ford case, the force must be considered as

$$F^2 = w^2 v^2. \quad (65)$$

For Landau-Lifshitz case,

$$F^2 = w^2 v^2. \quad (66)$$

In both cases the expression are the same as it has been expected but since the trajectories differ, the power will be distinct. Indeed, the Ford power will be

$$P_F = \tau_o \frac{F^2}{m} = \tau_o \frac{A \exp \left[ -2\tau_o \frac{w^2}{1+\tau_o^2 w^2} t \right]}{m}, \quad (67)$$

and the Landau-Lifshitz power will be

$$P_{LLF} = \tau_o \frac{F^2}{m} = \tau_o \frac{A \exp[-2\tau_o w^2 t]}{m}. \quad (68)$$

Even if both expressions are not equal, they must be evaluated in physical situations. This will be done, among other remarks, in the following section. However, for the 0-component of the Eliezer-Ford-O'Connell radiation term,

$$G_{EFO}^0 = \tau_o m \left[ \frac{da_L^0}{d\tau} + \frac{v^0}{c^2} a^\nu a_\nu^L \right], \quad (69)$$

we can propose the large distance radiated power as

$$P_{lar}^{EFO} = -\tau_o m \frac{v^0}{c^2} a^\nu a_\nu^L, \quad (70)$$

and the attached radiated power as

$$P_{att}^{EFO} = -\tau_o m \frac{da_L^0}{d\tau}. \quad (71)$$

It is obvious that for the relativistic case the difference between both proposals are bigger than in the non relativistic case. A fine experimental measurement of the large distance radiated power will select which is the better equation. However, as we will see in the conclusion section, quantum constraints prevent comparison.

By reviewing Eq. (62) it is easy to deduce that the non relativistic case of the Landau-Lifshitz equation will lead us to a non relativistic radiated power equal to the expression described in Eq. (64), but looking at Eq. (70) the corresponding radiated power for Ford equation must be expressed as

$$P^F = \tau_o \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}, \quad (72)$$

and not by using Eq. (26) as Ford claimed [32].

## 7 Concluding Remarks

It has been demonstrated that the Ford equation coincides with the non-relativistic Landau-Lifshitz equation just in the case when the force acting on the particle does not depend on the velocity of the particle. In the case of velocity depending forces, the trajectories predicted by Ford equation or by the non relativistic Landau-Lifshitz equation are distinct. However, at the moment of measuring such a difference, physical constraints prevent to detect them. Indeed, trying to measure the decay time, the frequency, the radiated power or the critical frequency of each solution, for the proportional differences  $\Delta w/w_{LL}$ ,  $\Delta t_{dec}/t_{dec}$ ,  $\Delta P/P_{LL}$ ,  $\Delta w_c/w_{cLL}$ , the term  $\tau_o^2 w^2$  makes the difference; that is:

$$\frac{\Delta w}{w_{LL}} = \frac{w_{LL} - w_F}{w_{LL}} = \frac{w - \frac{w}{1 + \tau_o^2 w^2}}{w} = \frac{1}{1 + \tau_o^2 w^2}.$$

In order to detect the difference,  $\tau_o^2 w^2$  must be at least  $10^{-3}$ . This identify also holds for relativistic motion. This implies that

$$\tau_o^2 w^2 \simeq 10^{-4}. \quad (73)$$

That is,

$$\tau_o w = \frac{2q^3 B}{3m^2 c^4} \simeq 10^{-2}. \quad (74)$$

For electrons,  $\tau_{eo} \simeq 6.26 \times 10^{-24}$  sec, this means that we have to deal with magnetic fields of the order of

$$B \simeq 10^{14} G \quad (75)$$

and for protons,

$$B \simeq 10^{20} G. \quad (76)$$

Nevertheless, in order to be able of dealing with a trajectory, quantum effects must be negligible. This is accomplished if the magnetic field satisfies the following requirements [24]:

De Broglie wavelength  $\ll$  Characteristic length

$$\frac{B}{B_q} \ll \gamma^2 \quad (77)$$

with  $B_q \simeq 4.4 \times 10^{13} G$

Radiation effects

$$\frac{B}{B_q} \ll \frac{1}{\gamma} \quad (78)$$

For relativistic case the second identity outweighs, Eq. (78). More energy requires less field. This is the reason why it is better to analyze the non relativistic case. Therefore, it is necessary to deal with magnetic fields smaller than  $B_q$ ; that is:

$$B \ll 10^{13} G.$$

For protons the situation is worth and it will not be possible to experimentally differentiate the two solutions. Even if in some astrophysical situations some magnetic fields have been found to be of the order of  $10^{13} G$  (see for example, Camilo et al [33]), quantum effects will dominate the behavior of the charge and it will be no-sense to analyze the trajectories.

Finally, the purpose of the article was to check if, even if the two equations were different to first order in  $\tau_o$ , the large-scale time behaviors of the solutions were able to differentiate between both equations. For High relativistic motion, the electric constant case, high intense planes waves and crossed electric field do not present such differences [21], [22], For central forces, the equations coincide even if the large-scale time effects can be studied [15]. For low energy motion, physically, both electric or magnetic fields, quantum restrictions prohibit to find experimentally a difference. We can conclude Eliezer-Ford- O'Connell and

Landau-Lifshitz equations are physically equivalent within the Shen's Zone [14], [24].

Finally, after 100 hundred years of discussion about the correct equation of motion for a charged particle, the Landau-Lifshitz equation (or the equivalent Eliezer-Ford-O'Connell) represents the most acceptable approach. Even more, Quinn and Wald [34] proposed a general relativistic equation including the reaction force with the tail term which coincides with Landau-Lifshitz equation for Minkowski space. However, the Hammond method [1], [2], [3], [4] which appeared in order to discuss the balance of energy of the electric constant case, represents an interesting alternative to be discussed. For the followers of Landau-Lifshitz equation, there exists a rearrangement of the radiated energy between the large distance radiation and the radiation term due to the attached fields. For Hammond, the energy loss comes from Larmor formula and this leads to another representation of the equation. However, an equivalent method for Hammond proposal for the general relativistic case has to be improved and compared with Hobbs [35] and Quinn and Wald approaches [34], [36].

**Acknowledgement** This work was partially supported by C.O.F.A.A and E.D.I.,I.P.N, and CONACYT.

## References

- [1] R. T. Hammond, EJTP **7**, 23 (2010) 221.
- [2] R. T. Hammond, Phys. Rev. A **81** (2010) 062104 .
- [3] R. T. Hammond, Adv. Studies Theor. Phys. **5**, 6 (2011) 275.
- [4] R. T. Hammond, arXiv:0902.4231v2 [physics.class-ph] 21 Jul 2009.
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, 2nd ed. (Pergamon, London, ,1962) § 76.
- [6] H. Spohn, Europhys. Lett. **50** (2000) 287.
- [7] F. Rohrlich, Am. J. Phys. **68** (2000) 1109.
- [8] F. Rohrlich, Phys. Lett. A **283** (2001) 276.
- [9] G. Ares de Parga, Found. Phys. **36**, 10 (2006) 1474.
- [10] R. Medina, J. Phys. A **39** (2006) 3801.
- [11] F. Rohrlich, Classical Charged Particles, Supplement (World Scientific, New Jersey, 2007) 257.
- [12] D. J. Griffiths, T. C. Proctor, D. F. Schroeter, Am. J. Phys. **78**, 4, (2010) 391.
- [13] A. Di Piazza, C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel, Rev. Mod. Phys. **84** (2012) 1177.

- [14] C. S. Shen, Phys. Rev. D **6** (1972) 2736.
- [15] S. G. Rajeev, Ann. Phys. **323**, 11 (2008) 2654.
- [16] G. W. Ford, R. F. O'Connell, Phys. Lett. A **157**, 4, 5 (1991) 217.
- [17] G. W. Ford, R. F. O'Connell, Phys. Lett. A **174** (1993) 182.
- [18] C. J. Eliezer, Proc. Roy. Lond. A **194**, 1039 (1948) 543.
- [19] S. Parrot, Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry (Springer-Verlag, New York, 1986) Chap. 5.
- [20] T. C. Mo, C. H. Papas, Phys. Rev. D **4** (1971) 3566.
- [21] Y. Kravets, A. Noble, D. Jaroszynski, Phys. Rev. E **88** (2013) 011201(R).
- [22] A. Di Piazza, Lett. Math. Phys. **83** (2008) 305.
- [23] M. Dehghani, J. of Mod. Phys. **2** (2011) 1415.
- [24] G. Ares de Parga, Il Nuovo Cimento **114 B**, 10 (1999) 1179.
- [25] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **167** (1938) 148.
- [26] H. Spohn, Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field (Cambridge University Press, 2004) Chap. 9.
- [27] G. Ares de Parga, R. Mares, S. Domínguez, Ann. Fond. Louis de Broglie **30** (2005) 283.
- [28] G. Ares de Parga, R. Mares, J. Math. Phys. **40** (1999) 4807.
- [29] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, Principles of Plasma Physics (McGraw Hill, 1973).
- [30] F. Rohrlich, Classical Charged Particles (Addison, Reading, 1965) Chaps. 5 and 6 .
- [31] G. Ares de Parga, M. Ortiz-Domínguez, R. Mares, Indian J. Phys. **82**, 9 (2008) 927.
- [32] G. W. Ford, R. F. O'Connell, Phys. Lett. A **158** 1–2 (1991) 31.
- [33] F. Camilo, V. M. Kaspi, A. G. Lyne, R. N. Manchester, J. F. Bell, N. D'Amico, N. P. F. McKay, F. Crawford, The Astrophysical Journal **18** (2000).
- [34] T. C. Quinn and R. M. Wald, Phys. Rev. D **56**, 6 (1997) 3381.
- [35] J. M. Hobbs, Annals of Physics **47** (1968) 141.
- [36] M. J. Pfenning and E. Poisson, *Phys. Rev. D.* **65** (2002) 084001.







## Bibliografía

- [1] Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece, Principles of plasma physics, McGraw-Hill Inc., first edition 1973,
- [2]<http://www.lfp.uba.ar/es/notas%20de%20cursos/notasfisicaplama/notasfisicaplama.php>
- [3] C.S. Shen, *Phys. Rev. D* **6**(1972)2736.
- [4] O'Neil, Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece, Principles of plasma physics, McGraw-Hill Inc., first edition 1973, page 66.
- [5] Jackson J.D. Classical electrodynamics, Wiley, second edition, 1976,
- [6] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **167** (1938) 148.
- [7] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 2nd ed. (Pergamon, London, 1962) 76.
- [8] F. Rohrlich, *Am. J. Phys.* **68** (2000) 1109.
- [9] F. Rohrlich, *Phys. Lett. A* **283** (2001) 276.
- [10] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles, Supplement* (World Scientific, New Jersey, 2007) p. 257.
- [11] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles* (Addison, Reading, 1965) Chaps. 5 and 6 .
- [12] H. Spohn, *Europhys. Lett.* **50**(2000)287.
- [13] H. Spohn, *Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field* (Cambridge University Press, 2004) Chap. 9.
- [14] G. W. Ford, R. F. O'Connell, *Phys. Lett. A* **157** (1991) 217.
- [15] G. W. Ford, R. F. O'Connell, *Phys. Lett. A* **174** (1993) 182.
- [16] G. W. Ford, R. F. O'Connell, *Phys. Lett. A* **158** (1991) 31.
- [17] J.F. García, E. Salinas, A. Avalos and G. Ares de Parga, *RMF* **61**(5) (2015) 363.

[18]R. Hakim and A. Mangeney, Journal of mathematical physics, Vol9 (1968) 116.

[19]C.J.Eliezer, *Proc.Roy.Lond. A***194**(1948) 543.

[20] Jackson J.D. Classical electrodynamics, Wiley, second edition, 1976, page 310.