



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMÍA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**PROCESOS DE LÉVY EN EL ANÁLISIS DE VARIABLES FINANCIERAS, BAJO UN
ENFOQUE DE PROCESOS VARIANZA GAMA.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS ECONÓMICAS
(ECONOMÍA FINANCIERA)

P R E S E N T A

NALLELY JACQUELINE REYES GARCÍA



MÉXICO, CDMX.

DICIEMBRE 2021.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS Y DESIGNACIÓN DE DIRECTORES DE TESIS

México, Ciudad de México, 9 de noviembre de 2018

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la SEPI ESE-IPN en su sesión Ordinaria No. ccciii celebrada el día 9 del mes de noviembre de 2018 conoció la solicitud presentada por el(la) alumno(a):

Reyes

Apellido paterno

García

Apellido materno

Nallely Jacqueline

Nombre (s)

Con registro:

A	1	8	0	0	2	9
---	---	---	---	---	---	---

Aspirante de: Doctor en Ciencias Económicas

1.- Se designa a la aspirante el tema de tesis titulado:

Procesos de Lévy en el análisis de variables financieras, bajo un enfoque de procesos varianza gama.

De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos:

Un modelo con procesos varianza gama aplicado a rendimientos sobre los índices bursátiles. Un modelo de volatilidad estocástica con procesos varianza gama. Calibración del modelo.

2.- Se designan como Directores de Tesis a los Profesores:

Dr. Francisco Venegas Martínez y Dra. María Teresa Verónica Martínez Palacios.

3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesis será elaborado por el alumno en: SEPI ESE-IPN

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

Directores de Tesis

Dr. Francisco Venegas Martínez

Dra. María Teresa Verónica Martínez Palacios

Aspirante

C. Nallely Jacqueline Reyes García

Presidente del Colegio

Dr. Adrián Hernández Del Valle



S.E.P.
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
E.S.E.
SECCION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACION



COMITÉ TUTORIAL Y DE TESIS:

NOMBRE DEL PROFESOR	FUNCIÓN
Dr. Francisco Venegas Martínez	Director de Tesis
Dr. Ambrosio Ortiz Ramírez	Asesor
Dra. María Teresa Verónica Martínez Palacios	Director de Tesis
Dr. José Carlos Trejo García	Asesor
Dr. Salvador Cruz Aké	Asesor
Dra. Alicia Bazarte Martínez	Asesor suplente

México, Ciudad de México, 9 de noviembre de 2018.

"LA TÉCNICA AL SERVICIO DE LA PATRIA"



DR. ADRIÁN HERNÁNDEZ DEL VALLE
JEFE DE LA SECCIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACIÓN
ESE-IPN

S.E.P.
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
E.S.E.
SECCION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACION

*AHV*HAC*blpm

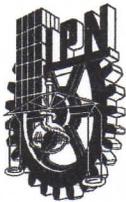
[Faint signature]
Dr. María Teresa Verónica
Martínez Palacios

[Faint signature]
Dr. Francisco Venegas Martínez



[Faint signature]
Dr. Adrián Hernández Del Valle

[Faint signature]
C. Hallyer J. Reyes García



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14
REP 2017

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de siendo las horas del día del mes de del se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Posgrado de: para examinar la tesis titulada:

el (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	Reyes	Apellido Materno:	García	Nombre (s):	Nallely Jacqueline
--------------------------	-------	--------------------------	--------	--------------------	--------------------

Número de registro:

Aspirante del Programa Académico de Posgrado:

Una vez que se realizó un análisis de similitud de texto, utilizando el software antiplagio, se encontró que el trabajo de tesis tiene 0% de similitud. **Se adjunta reporte de software utilizado.**

Después que esta Comisión revisó exhaustivamente el contenido, estructura, intención y ubicación de los textos de la tesis identificados como coincidentes con otros documentos, concluyó que en el presente trabajo SI NO **SE CONSTITUYE UN POSIBLE PLAGIO.**

Se excluyeron del informe de similitud la bibliografía, citas textuales y coincidencias menores a 15 palabras. La coincidencia detectada por el análisis se refiere a tecnicismos financieros irremplazables que refieren eventos históricos y es menor al 1%.

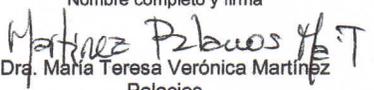
****Es responsabilidad del alumno como autor de la tesis la verificación antiplagio, y del Director o Directores de tesis el análisis del % de similitud para establecer el riesgo o la existencia de un posible plagio.**

Finalmente y posterior a la lectura, revisión individual, así como el análisis e intercambio de opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR** **SUSPENDER** **NO APROBAR** la tesis por **UNANIMIDAD** o **MAYORÍA** en virtud de los motivos siguientes:

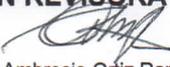
La comisión avala que la tesis fue concluida satisfactoriamente porque cumple los requisitos de calidad científica y de innovación. El trabajo de investigación mejoró el entendimiento y uso de técnicas y herramientas alternativas para pronosticar índices bursátiles mediante procesos de Lévy de tipo varianza-gamma. Es importante destacar que a partir de la tesis se publicó un artículo en revista indizada.

COMISIÓN REVISORA DE TESIS



Dr. Francisco Veregas Martínez
Director de Tesis
Nombre completo y firma


Dra. María Teresa Verónica Martínez Palacios
2° Director de Tesis (en su caso)
Nombre completo y firma



Dr. Ambrosio Ortiz Ramírez
Nombre completo y firma

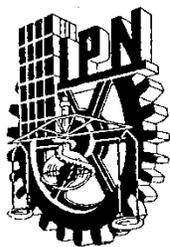

Dr. Salvador Cruz Aké
Nombre completo y firma



Dr. José Carlos Trejo García
Nombre completo y firma


M. en C. Godfrey Ortezco Lara
Nombre completo y firma

**S.E.P.
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
PRESIDENTE DEL COLEGIO DE
PROFESORES DE LA COMISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACION**



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, siendo las 10:00 horas el día 21 del mes de diciembre del año 2021, el que suscribe **Nallely Jacqueline Reyes García** alumna del Programa de Doctorado en Ciencias Económicas, con número de registro A180029, adscrita a la SEPI ESE-IPN, manifiesta que es la autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Francisco Venegas Martínez** y de la **Dra. María Teresa Verónica Martínez Palacios** y cede los derechos del trabajo intitulado **PROCESOS DE LÉVY EN EL ANÁLISIS DE VARIABLES FINANCIERAS, BAJO UN ENFOQUE DE PROCESOS VARIANZA GAMA**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director(es) del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección electrónica njacqueline.reyesg@gmail.com Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

D. EN C. (C) NALLELY JACQUELINE REYES GARCÍA
Nombre y firma del alumno(a)

ÍNDICE

RESUMEN	1
ABSTRACT	3
CAPÍTULO 1. REVISIÓN TEÓRICA Y METODOLÓGICA SOBRE LOS PROCESOS DE LÉVY	5
1.1. INTRODUCCIÓN	5
1.2. PROCESOS DE LÉVY	8
1.2.1. <i>Caminata aleatoria</i>	8
1.2.2. <i>Movimiento Browniano</i>	8
1.2.3. <i>Divisibilidad infinita</i>	10
1.3. PROCESOS GAMA.....	11
1.4. PROCESOS VARIANZA GAMA	12
1.5. PROCESOS VARIANZA GAMA CON DRIFT.....	14
CAPÍTULO 2. MODELO CARMA CONDUCTIDO POR PROCESOS LÉVY	16
2.1. INTRODUCCIÓN	16
2.2. PRERREQUISITOS PARA EL MODELO LEVY-CARMA	18
2.3. MODELO LEVY-CARMA	19
CAPÍTULO 3. ESTIMACIÓN DEL MODELO CARMA	21
3.1. APLICACIÓN EMPÍRICA	21
3.2. MODELO ARIMA	21
3.3. MODELO LÉVY-CARMA	26
3.4. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN	32
3.5. CONCLUSIONES.....	35
CAPÍTULO 4. MODELO COGARCH CONDUCTIDO POR PROCESOS LEVY.....	36
4.1. INTRODUCCIÓN	36
4.2. PRERREQUISITOS DEL MODELO LEVY-COGARCH	37
4.3. MODELO LEVY-COGARCH	39
CAPÍTULO 5. ESTIMACIÓN DEL MODELO LÉVY-COGARCH.....	41
5.1. SIMULACIÓN	42
5.2. COMPARACIÓN GARCH(1,1) Y COGARCH(1,1).....	46
5.3. ESTIMACIÓN	48
CONCLUSIONES	49
BIBLIOGRAFÍA.....	51
ÍNDICE DE GRÁFICAS	54
ÍNDICE DE TABLAS	54

Resumen

En este trabajo de tesis se considera que las metodologías o los modelos existentes para el pronóstico de precios, no son lo más realistas que se esperaría, incluso esa debilidad técnica es reconocida por economistas de todo el mundo. Por ejemplo, después de la crisis del año 2008, en *The Financial Crisis and the Systemic Failure of Academic Economics*, se dijo que...“por supuesto que se ha logrado un progreso considerable al pasar a modelos más refinados, por ejemplo, impulsados por procesos de Lévy de ‘colas pesadas’...” (Colander, y otros, 2009) Pues capturan mejor la volatilidad intrínseca de los mercados.

En modelos como el de Black-Scholes (1997) no se refleja la realidad completa del mercado, lo que imposibilita el considerar los saltos de las variables; por ejemplo, de los precios de activos. Al no considerar dichos saltos, tampoco se capturan las colas pesadas y los excesos de curtosis. Para mejorar el modelo de Black-Scholes, se propusieron los modelos de Lévy a finales de la década de 1980, y se han perfeccionado para tener en cuenta las diferentes características de los mercados. Por lo que las investigaciones sobre los procesos de Lévy logran describir la dinámica de los rendimientos de activos.

Bajo el contexto anterior, el objetivo de este trabajo es capturar la dinámica del mercado de forma realista, considerando las características que presentan las series financieras como excesos de curtosis y colas pesadas, mediante modelos que de acuerdo con su evidencia estadística muestren buenas propiedades analíticas. Una forma de hacerlo fue considerar procesos estocásticos de Lévy dados sus incrementos estacionarios e independientes que tienen buenas propiedades analíticas y reproducen bastante bien las características estadísticas de los datos financieros.

Con la hipótesis de esta investigación se considera que es posible modelar series financieras con problemas de colas pesadas y excesos de curtosis de una forma más realista al replicar las propiedades estadísticas y cumplir con el principio de ergodicidad cuando se incorporan procesos estocásticos de Lévy tipo varianza gama.

El hecho de incorporar procesos Lévy para variables financieras es una tendencia que ha aportado mayores beneficios que otro tipo de metodologías que son más limitadas y aunque existen diferentes procesos de Lévy, esta tesis considera únicamente procesos de Lévy de tipo VG porque dentro de los modelos son muy útiles ya que son más amplios que el movimiento browniano al considerar la asimetría y curtosis.

En vista de que el supuesto que se asume cuando se emplea la varianza de una variable aleatoria normal no considera el problema de las colas pesadas al modelar la volatilidad, en el capítulo 1 se analiza la metodología de un modelo conducido bajo un proceso varianza gama que si considera ese problema al modelar la volatilidad.

Por otra parte, el supuesto de Gauss donde distribución Gaussiana capta bien la distribución del ruido ya no es suficiente a la hora de modelar series cuyas características en el mundo real no asumen un

comportamiento normal, incluso cuando la evidencia empírica muestra la presencia volatilidad no constante y clusters de volatilidad por lo que en el capítulo 2 y 3 se logra evidenciar que los procesos lineales impulsados por procesos de Levy pueden mostrar saltos y así permitir el modelado de cambios abruptos a través de un modelo de media móvil autorregresivo continuo CARMA conducido por un proceso varianza gama.

Dado que la mayoría de las metodologías en tiempo discreto no permiten dar a conocer en sus pronósticos cuántas veces se pueden presentar los saltos abruptos de la volatilidad, además de las otras características que presentan las series financieras en su pronóstico, incluida la autocorrelación. En los capítulos 4 y 5 se aborda dicho desafío, en donde se comprueba si un modelo en tiempo continuo como el COGARCH puede mejorar los pronósticos obtenidos por las metodologías anteriores y si es más realista de acuerdo con su evidencia y las series financieras empleadas.

En la sección final se describen los hallazgos obtenidos con la investigación y desarrollo de esta tesis.

Abstract

In this thesis is considered that existing methodologies or models for price forecasting are not as realistic as one would expect; economists worldwide recognize even that technical weakness. For example, after the crisis of 2008, *The Financial Crisis and the Systemic Failure of Academic Economics* said that...“ Of course, considerable progress has been made by moving to more refined models with, e.g., ‘fat-tailed’ Levy processes as their driving factors...” Colander, *et al.* (2009) because such models better capture the intrinsic volatility of markets.

Models such as Black-Scholes (1997) do not reflect the whole reality of the market, which makes it impossible to consider the jumps of variables; for example, in asset prices. By not considering such jumps, heavy tails and excess kurtosis are also not captured. To improve the Black-Scholes model, Lévy models were proposed in the late 1980, and have been refined to consider the different characteristics of the markets. So researches on Lévy's processes can describe the dynamics of asset returns.

Conforming to the previous, the objective of this work is to capture market dynamics realistically, considering the characteristics presented in the financial series such as excess kurtosis and heavy tails, using models that, according to their statistical evidence, show good analytical properties. One way to do this was to consider Lévy's stochastic processes given their stationary and independent increments that have good analytical properties and reproduce the statistical characteristics of the financial data quite well.

With the hypothesis of this research, it is considered that it is possible to model financial series with problems of heavy tails and excess kurtosis in a more realistically through replicate the statistical properties, complying with the ergodicity principle when incorporating Lévy stochastic processes like variance gamma process.

Driving Lévy processes in financial variables is a trend with more significant benefits than other methodologies, which are more limited and although there are different Lévy processes, This thesis considers only Lévy-VG processes because they are beneficial within the models as they are broader to consider asymmetry and kurtosis than Brownian motion.

Because the assumption that is assumed when using the variance of a normal random variable does not consider the problem of heavy tails when is modeling volatility, then chapter 1 analyzed the methodology of a model driven by a variance process that considers the above problem when modeling volatility.

On the other hand, the Gauss assumption where the Gaussian distribution captures the distribution of noise well is no longer sufficient when modeling series whose real-world characteristics do not assume normal behavior. Even when empirical evidence shows the presence of non-constant volatility and clusters of volatility, so in Chapter 2 and 3, it is achieved to prove that linear processes driven by Levy processes can show jumps and thus allow the modeling of abrupt changes through a continuous autoregressive moving average CARMA model driven by a variance gamma process.

Since most discrete-time methodologies do not allow to know in forecasts how many times abrupt volatility jumps can occur, in addition to the other characteristics that financial series present in their forecast, including autocorrelation. Chapters 4 and 5 approach this challenge, which shows if a continuous-time model such as COGARCH can improve the forecasts obtained by previous methodologies and if it is more realistic, based on its evidence and the financial series used.

The final section describes the findings obtained from the research and the progress linked to the aim of this thesis.

CAPÍTULO I. Revisión teórica y metodológica sobre los procesos de Lévy

1.1. Introducción

Un mejor modelado sobre la dinámica de los precios de los activos en los mercados financieros es una necesidad constante por parte de inversionistas y autoridades. En los mercados financieros han ocurrido hechos como la crisis financiera asiática¹ de 1997, la crisis hipotecaria que comenzó a mediados de 2007, la crisis bursátil de enero de 2008, antecedente de la crisis bursátil mundial de octubre de 2008, fueron un conjunto de caídas violentas en los mercados de valores mundiales que iniciaron a finales del 2007 y todas son recordatorios constantes para los administradores de riesgos y/o de cartera y reguladores de la frecuencia con la que ocurren los eventos extremos.

Es interesante saber que las crisis sub-prime y dot.com fueron teorizadas por un economista mucho antes de que aparecieran (Coulon, 2019), donde los ciclos, la evolución de los sectores reales de la economía capitalista y la expansión del sector financiero se interrelacionan, ese economista es Hyman Minsky quien sostiene que la inestabilidad es consecuencia directa de los procesos dinámicos inherentes a la acumulación de capital. Lo anterior significa que los inversionistas tienden a sobrestimar las buenas noticias cuando una economía de ese tipo se encuentra en una fase de auge, lo que conlleva a una exagerada confianza futura y a sostener excedentes de inversión y deuda como patrones. (Minsky, 1992)

De acuerdo con Minsky, sobrestimar las buenas noticias implica consecuencias graves para la economía, por lo que es importante no hacerlo. En finanzas, esas noticias se observan en el comportamiento de los precios de los activos, cuando se trata de inversiones, el comportamiento de los precios de los activos debe ser previsto considerando toda la información del mercado. Aunque esto muchas veces es complicado, ya que las metodologías no consideran las innovaciones del mercado por el hecho de no incorporarlas en sus metodologías para el pronóstico de precios, lo que implica que los precios se sobrestimen o subestimen, y tiendan a dar información errónea a los inversionistas para su toma de decisiones, lo que afecta directamente a la acumulación de capital.

El dinamismo que tienen los mercados financieros es importante no solo para sus participantes, sino también para todos los sectores de la economía que dependen de él. En la historia mundial ha sido posible observar las consecuencias que han dejado los eventos acontecidos descritos anteriormente, que implican problemas de liquidez, altos niveles de inflación que impactan en el nivel de vida de las personas, desempleo, entre otros.

Las irrupciones como eventos extremos en los mercados financieros han llevado a los investigadores a aumentar sus esfuerzos para mejorar la flexibilidad y confiabilidad estadística de los modelos existentes

¹ Conocida también como la primera gran crisis de la globalización, La crisis monetaria y bursátil de economías asiáticas como Tailandia, Indonesia y Corea del Sur en 1997 y 1998. Inició con la devaluación de la moneda bath(TBH) tailandesa seguida por devaluaciones en Malasia(MYR), Indonesia y Filipinas, también afectó Hong Kong, Taiwán y Corea del Sur.

que buscan capturar la dinámica de las variables económicas y financieras. Incluso si no se puede predecir una catástrofe, el objetivo de los gestores de riesgos, gestores de cartera y reguladores es limitar los daños y perjuicios potenciales. (Shin Kim, T. Rachev, Leonardo Bianchi, & J. Fabozzi, 2011).

El modelo de precios de activos es un problema relevante en la coyuntura actual de la pandemia de COVID-19 dada la incertidumbre generada en los mercados financieros que ocasiona caídas abruptas que afectan a los mercados, los grandes saltos afectan las colas de la distribución de los rendimientos e influyen en los precios de los activos. Trabajos como el de Corbet, S., Hou, G., Hu, Y., & Oxley, L. (2020) para el caso de China donde obtienen que la mayoría de las acciones chinas que se negocian presentan evidencia de flujos de información significativos en una etapa mucho más temprana que las comparativas que se negocian a nivel internacional, lo que sugiere que los inversionistas chinos reconocieron los peligros asociados con COVID-19 mucho antes del resto del mundo, ya que la gravedad de las noticias chinas informadas a nivel nacional no fue reconocida por inversionistas internacionales.

Existen muchas críticas hacia los modelos financieros y su fracaso al no reflejar de forma realista el comportamiento de los mercados financieros en el mundo real, esto significa que para la crisis del 2008...“el supuesto subyacente con respecto a los rendimientos de los activos y los precios no reflejó los movimientos reales de estas cantidades.” (Shin Kim, T. Rachev, Leonardo Bianchi, & J. Fabozzi, 2011).

El supuesto referido es el que se hace en la mayoría de los modelos financieros al considerar que la distribución de los precios y rendimientos se distribuyen normalmente², lo que se conoce popularmente como el "modelo normal" el cual se opone a lo que ha sido documentado con respecto al comportamiento de los precios de los activos y los rendimientos.

En modelos como el de Black-Scholes (1997) donde los activos son conducidos por el movimiento browniano, no reflejan completamente la realidad del mercado, lo que les imposibilita considerar los saltos de las variables; por ejemplo, los precios de los activos. En tanto no se consideren dichos saltos. Las colas pesadas y los excesos de curtosis no se podrán capturar de forma real.

Aunque el modelo Black-Scholes asume que no hubo fricción en el mercado, como impuestos y costos de transacción, y que no hubo restricciones en la tenencia de acciones, etc., la evidencia empírica sugiere que el modelo clásico de Black-Scholes no describe muy bien las propiedades estadísticas de las series de tiempo financieras.

Los rendimientos logarítmicos no se comportan de acuerdo con una distribución Normal y las volatilidades o los parámetros de incertidumbre estimados cambian estocásticamente con el tiempo y se agrupan. Lo cual

² Se refiere a el modelo normal, donde la distribución de probabilidad, también conocida como la distribución de Gauss o gaussiana tiene forma de campana, en la literatura francesa se sigue llamando Ley de Gauss-Laplace.

se puede comprobar observando las estadísticas reales de algunas variables financieras como índices y rendimientos y se confrontan contra los valores que deberían mostrar según la distribución normal que se muestran en la tabla 1.

Así que la mayoría de los activos financieros no siguen una distribución normal, están sesgados y tienen una curtosis real más alta que la de la distribución Normal por lo que necesitan considerar otras distribuciones más flexibles que se adecúen a su comportamiento.

El hecho de considerar una distribución estática más flexible no es suficiente, sino que, para modelar el comportamiento a través del tiempo, se necesita de procesos estocásticos más flexibles capaces de generalizar el movimiento browniano.

Al considerar una generalización del movimiento browniano se contempla una distribución más general que la normal, aunque sería importante tener un proceso estocástico³ similar, que considere incrementos independientes y estacionarios por lo cual la distribución debe ser infinitamente divisible.

En finanzas, para que resulten útiles las distribuciones infinitamente divisibles deben ser capaces de representar la asimetría y el exceso de curtosis. A fines de la década de 1980 y en la década de 1990, se propusieron modelos con estas características para modelar datos financieros. La distribución normal subyacente fue reemplazada por una más sofisticada infinitamente divisible. (Schoutens, 2003)

Según Schoutens, algunas de esas distribuciones pueden ser como ejemplo: la Varianza Gamma (VG), la gaussiana inversa normal (NIG), la CGMY (llamada así por Carr, Geman, Madan y Yor), el modelo hiperbólico (generalizado) y las distribuciones de Meixner. Madan y Seneta (1987, 1990) han propuesto un proceso de Lévy con incrementos distribuidos de VG.

La propuesta de investigación respecto a la literatura actual será retomar la definición de un proceso CARMA gaussiano, permitiendo que los procesos de Lévy reemplacen el movimiento browniano como lo ejemplifica Brockwell. Pero, se vinculará un modelo de media móvil autorregresivo continuo (CARMA) conducido por un proceso varianza gama, lo que no existe en las metodologías aplicadas al mercado accionario mexicano. Con lo cual se podría evidenciar que los procesos lineales impulsados por procesos de Levy pueden mostrar saltos y así permitir el modelado de cambios abruptos, lo que servirá de base para la construcción de un proceso más general como el COGARCH que también será conducido por un proceso varianza gama. Y como ambas versiones son continuas, se realizará una comparación respecto a los resultados de versiones discretas ARMA Y GARCH obtenidos en el artículo “Un análisis comparativo entre GARCH-M, EGARCH y PJ-RS-EV para

³ Tales procesos se denominan procesos de Lévy, en honor de Paul Lévy quien es pionero de la teoría y obtuvo su doctorado en matemáticas en la Universidad Politécnica de París.

modelar la volatilidad de Índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.” (Reyes García, Venegas Martínez, & Cruz Aké, 2018).

1.2. Procesos de Lévy

Son procesos estocásticos que deben su nombre a Paul Lévy quien ha sido uno de los más grandes matemáticos del siglo XX por sus aportaciones como pionero en la teoría de procesos estocásticos y la teoría de la probabilidad, su demostración más aclamada es la realizada sobre el Teorema del límite central⁴ utilizando funciones características, independientemente de Lindeberg⁵, que usó técnicas de convolución. Uno de sus descubrimientos es respecto a la clase de distribuciones estables al estudiar varias propiedades del movimiento browniano. Se detallarán más características de los procesos de Levy en capítulo dos, debido a su estrecha relación con la metodología de Brockwell.

Levy demostró la ley del arco-seno y también fue el primero en considerar las integrales estocásticas, con la fórmula del área, sus ideas han sido el origen de una gran cantidad de trabajos posteriores, que aún continúan desarrollándose.

1.2.1. Caminata aleatoria

El modelo más básico del precio logarítmico de un activo riesgoso es una caminata aleatoria. Se construye sumando variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) c_0, c_1, \dots para lo cual:

$$z_{n+1} = \sum_{s=0}^n c_s \quad (\text{Ec. 1})$$

donde:

$$z_0 = 0, \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$

El proceso se escribe en tiempo discreto y se mueve por incrementos (i.i.d.)

$$z_{n+1} - z_n = c_n \quad (\text{Ec. 2})$$

Lo que implica que los cambios futuros en una caminata aleatoria sean impredecibles.

1.2.2. Movimiento Browniano

El primer enfoque se basa sobre un tipo de resultado del límite central. Nuevamente se supone $\{c_s\}$ es una secuencia (i.i.d.) cuyos dos primeros momentos existen, entonces la suma parcial

⁴ Es un teorema de probabilidad y estadística que formalmente se enuncia: Si todas las muestras de un tamaño en particular se seleccionan de cualquier población, la distribución muestral de la media se aproxima a una distribución normal; esta mejora con muestras más grandes.

⁵ J. W. Lindeberg en 1922, estableció una condición suficiente para la cual es válida la aproximación de la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas por una variable aleatoria normal.

se define como:

$$z_T(t) = \sqrt{T} \frac{1}{T} \sum_{s=1}^{tT} \{c_s - E(c_s)\}, \quad t \geq 0 \quad (\text{Ec. 3})$$

donde t representa el tiempo y significa que, en cualquier intervalo fijo para t , es decir, el tiempo, el proceso se compone de sumas centradas y normalizadas de eventos (i.i.d.). Cuando se permite que T , el número de estos eventos en cualquier intervalo fijo por duración de unidad de tiempo, tiende a infinito (a menudo se denominan asintóticos de dominio fijo⁶). Como resultado, $z_T(t)$ obedece a una teoría del límite central y se convierte en Gaussiana. (O.E. & N., 2002)

⁶ Se basan en observaciones que se vuelven cada vez más densas en alguna región fija y delimitada a medida que aumenta su número, es decir, es donde se recopilan más datos mediante un muestreo más denso en un dominio fijo.

1.2.3. Divisibilidad infinita

Tal como lo muestran en su libro manuscrito Barndorff-Nielsen & Shephard, al suponer que el objetivo es diseñar un proceso en tiempo continuo en el tiempo 1, $z(1)$, que tiene una distribución D . Puede ser posible dividir el tiempo desde cero hasta uno en T partes, cada una de las cuales tiene incrementos independientes de una distribución común $D^{(T)}$ tal que la suma:

$$z(t) = \sum_{s=1}^{tT} c_s^{(T)}, \quad \text{donde } c_s^{(T)} \text{ i.i.d. } D^{(T)} \quad (\text{Ec. 4})$$

Tiene la distribución D cuando $t=1$. Entonces, a medida que T aumenta, al imaginar que la división del tiempo entre cero y uno se vuelve más constante. En respuesta, los incrementos y su distribución $D^{(T)}$ también cambia, pero en la construcción D la distribución de la suma, se deja sin cambios, un ejemplo de esto es donde $z(1) \sim P_0(1)$ entonces sí:

$$z(t) = \sum_{s=1}^{tT} c_s^{(T)}, \quad \text{donde } c_s^{(T)} \text{ i.i.d. } P(1/T) \quad (\text{Ec. 5})$$

esto produce una caminata aleatoria válida debido al hecho de que los incrementos independientes de Poisson se suman a un Poisson. Por lo tanto, este proceso tiene sentido siempre y cuando T vaya a infinito y, por lo tanto, este tipo de construcción puede usarse como un modelo de tiempo continuo—el proceso de Poisson. La clase de distribuciones para las cuales es posible esta construcción son aquellas para las que D es infinitamente divisible.

Los procesos resultantes se denominan procesos de Lévy.

Definición de un proceso de Lévy

Tal proceso estocástico:

$$z(t), \quad t \in [0, \infty], \quad z(0)=0 \quad (\text{Ec. 6})$$

es un proceso de Lévy si y solo si tiene incrementos independientes y (estrictamente) estacionarios.

Considere los siguientes supuestos:

- Los choques al proceso son independientes a lo largo del tiempo y se suman por lo que para cualquier valor el $\Delta > 0$
- La distribución de $z(t+\Delta) - z(t)$ puede cambiar con Δ pero depende de t . La independencia y la estacionariedad de los incrementos del proceso de Lévy significan que:

$$\begin{aligned}
C\{\theta \ddagger z(t)\} &= \log[E \exp\{i\theta z(t)\}] \\
&= t \log[E \exp\{i\theta z(1)\}] \\
&= tC\{\theta \ddagger z(1)\}
\end{aligned}$$

Se obtiene lo siguiente:

$$C\{\theta \ddagger z(t)\} = tC\{\theta \ddagger z(1)\} \quad (\text{Ec. 7})$$

por lo que la distribución de $z(t)$ está completamente gobernada por los cumulantes de $z(1)$, el valor del proceso en el momento uno.

Si se utiliza un proceso de Lévy como modelo para el precio logarítmico de un activo subyacente, entonces los incrementos se pueden considerar como rendimientos. En consecuencia, los modelos basados en procesos de Lévy proporcionan un marco potencialmente flexible para modelar la distribución marginal de los rendimientos. Sin embargo, los rendimientos se medirán en un valor fijo de Δ , independientes e idénticamente distribuidos. Esta importante observación implicará que los procesos de Lévy solo pueden ser un modelo bastante realista de los precios de los activos, ya que los rendimientos de los precios de los activos tienen importantes dependencias en serie, como el agrupamiento de volatilidad.

1.3. Procesos Gama

Para números positivos δ y γ la distribución Gama $\Gamma(\delta, \gamma)$ con densidad:

$$p\Gamma(x) = \frac{\gamma^\delta}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} e^{-\gamma x} 1_{(0, \infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{Ec. 8})$$

Tiene la función característica:

$$\varphi\Gamma(u) = (1 - iu / \gamma)^{-\delta} \quad (\text{Ec. 9})$$

$\Gamma(\delta, \gamma)$ es infinitamente divisible, en particular:

$$\Gamma(\delta_1, \gamma) * \Gamma(\delta_2, \gamma) = \Gamma(\delta_1 + \delta_2, \gamma) \quad (\text{Ec. 10})$$

Existe un proceso de Lévy tal que:

$$\varphi x_t = (1 - iu / \gamma)^{-\delta t} \quad (\text{Ec. 11})$$

Y $L\{Xt\} = \Gamma(\delta t, \gamma)$ por el desarrollo de la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
\log(1 - iu / \gamma) &= \int_0^1 \frac{-iu}{\gamma} (1 - ius / \gamma)^{-1} ds \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty (-iu) e^{iusx} e^{-\gamma x} dx ds = \int_0^1 \int_0^\infty (-iu) e^{iusx} e^{-\gamma x} dx ds \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 (-iu) e^{iusx} ds e^{-\gamma x} dx = \int_0^\infty (1 - e^{iux}) \frac{e^{-\gamma x}}{x} dx
\end{aligned}$$

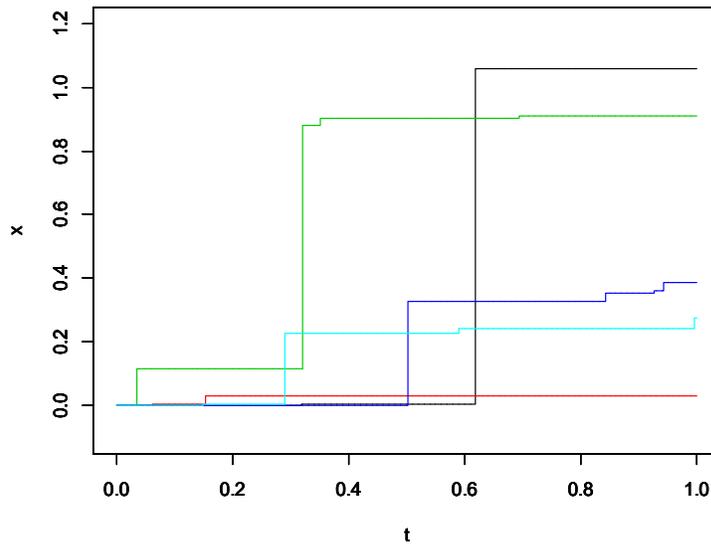
Se obtiene lo siguiente:

$$\varphi_{X_t}(u) = \exp \left(t \int_0^\infty (e^{iux} - 1) \frac{\delta e^{-\gamma x}}{x} dx \right) \quad (\text{Ec. 12})$$

Por lo tanto, $b_- = 0$, $C = 0$ y $dv/dx(x) = \delta x^{-1} e^{-\gamma x} 1_{\{x>0\}}$. El proceso de Lévy X con esas características es llamado un proceso Gama con parámetros $\delta, \gamma > 0$.

A continuación, se pueden observar trayectorias de procesos de Lévy, de tipo Gama (GP).

Gráfica 1 Trayectorias simuladas de un proceso de Lévy tipo Gama (GP)



Fuente: elaboración propia con RGui y paquete YUIMA.

1.4. Procesos Varianza Gama

Un proceso $X^0 = (X_t^0)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es llamado un proceso Varianza Gama (VG) $VGP^0(\delta, \gamma_-, \gamma_+)$ si este tiene una descomposición

$$X_t^0 = X_t^+ - X_t^-, \quad (\text{Ec. 13})$$

Donde $X^+ = (X_t^+)_{t \in \mathbb{R}_+}$ y $X^- = (X_t^-)_{t \in \mathbb{R}_+}$ son procesos gama independientes con medidas de Lévy $dv_{X^+} / dx(x) = \delta x^{-1} e^{-\gamma_- x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ y, $dv_{X^-} / dx(x) = \delta x^{-1} e^{-\gamma_+ x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ respectivamente. Aquí δ y γ_{\pm} son constantes positivas.

Por definición la función característica $\varphi_{x_t^0}$ está dada por:

$$\varphi_{x_t^0}(u) = \varphi_{x_t^+}(u) \varphi_{x_t^-}(-u) = \left[1 - \left(\frac{1}{\gamma_+} - \frac{1}{\gamma_-} \right) iu + \frac{1}{\gamma_+ \gamma_-} u^2 \right]^{-\delta t} \quad (\text{Ec. 14})$$

El proceso X^0 es un proceso de Lévy con características $b_- = 0$, $C = 0$ y

$\frac{dv}{dx}(x) = \delta |x|^{-1} e^{-\gamma_- |x|} \mathbf{1}_{\{x<0\}} + \delta x^{-1} e^{-\gamma_+ x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$. La parametrización:

$$(\lambda, \alpha, \beta) = \left(\delta, \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2}, \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} \right), \quad (\text{Ec. 15})$$

Que regularmente se usa como $(\delta, \gamma_-, \gamma_+) = (\lambda, \alpha + \beta, \alpha - \beta)$ y:

$$\varphi_{x_t^0}(u) = \left[\frac{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right]^{-\lambda t} \quad (\text{Ec. 16})$$

Para una constante $\mu \in \mathbb{R}$, el proceso $X_t = \mu t + X_t^0$ es llamado un proceso normal gama (NGP)

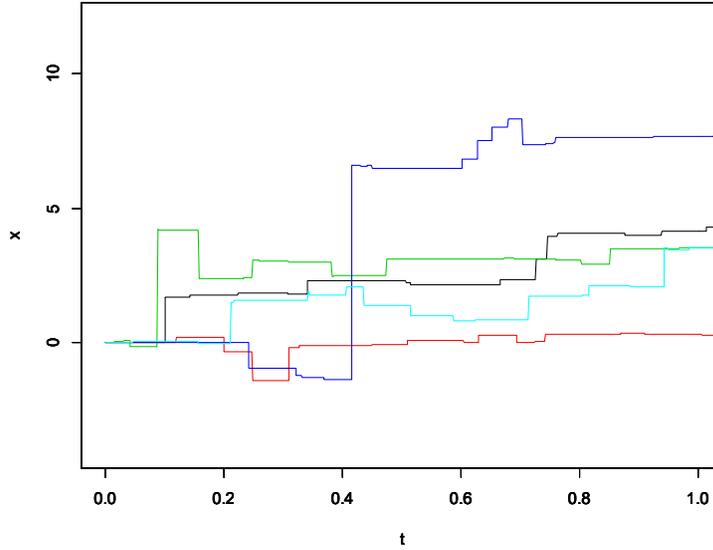
$(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$ o un proceso Varianza Gama (VG) $(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$.

Considerando que la función de densidad de X_t está dada por:

$$PX_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda t)} (\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda t} \left(\frac{|x - \mu t|}{2\alpha} \right)^{\lambda t - \frac{1}{2}} K_{\lambda t - \frac{1}{2}}(\alpha |x - \mu t|) \exp(\beta(x - \mu t)) \quad (\text{Ec. 17})$$

A continuación, se pueden observar trayectorias de procesos de Lévy, de tipo Varianza Gama (VG).

Gráfica 2 Trayectorias simuladas de un proceso de Lévy tipo Varianza Gama (VG)



Fuente: elaboración propia con RGui y paquete YUIMA.

1.5. Procesos Varianza Gama con Drift

Sea $\lambda, \alpha \in (0, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha > |\beta|$) y $\mu \in \mathbb{R}$. Para un proceso Gama $S = (S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tal que:

$$S_t \sim \Gamma(\lambda t, (\alpha^2 - \beta^2)/2), \quad (\text{Ec. 18})$$

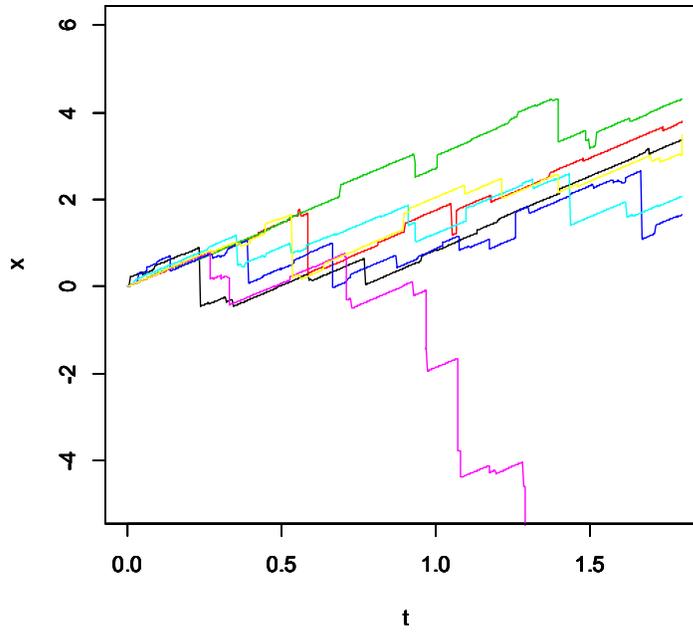
Sea $X_t = \mu t + \beta S_t + W_{S_t}$, entonces $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es un proceso de Lévy con:

$$\varphi X_t(u) = e^{i\mu tu} \left[\frac{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right]^{-\lambda t} \quad (\text{Ec. 19})$$

Para $\mu \in \mathbb{R}$. Vamos a llamar a X un proceso Varianza Gama VGP $(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$, y la distribución de X_1 la distribución Varianza Gama VG $(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$, consistentemente se obtiene la (Ec. 17).

A continuación, se pueden observar trayectorias de procesos de Lévy, de tipo Varianza Gama (VG) como subordinador de Wiener.

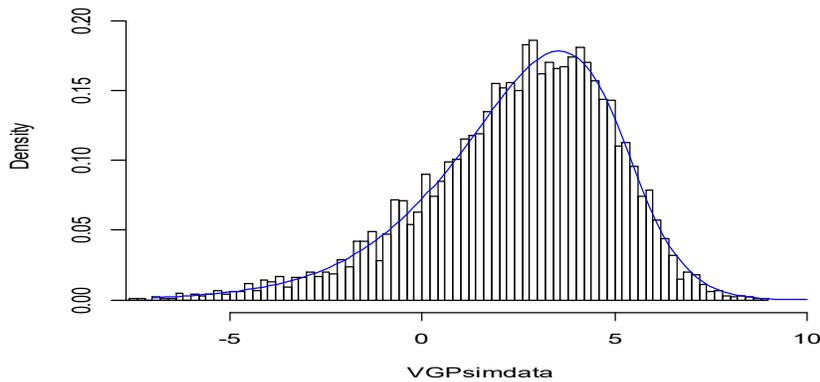
Gráfica 3 Trayectorias de un proceso Varianza Gama (VG) como subordinador de Wiener



Fuente: elaboración propia con RGui y paquete YUIMA.

A continuación, se puede observar una simulación de X_t y su histograma se compara con la función de densidad de $VG(\lambda t, \alpha, \beta, \mu t)$, es decir se muestra la distribución varianza gama teórica y empírica.

Gráfica 4 Distribución varianza gama (VG) teórica y empírica



Fuente: elaboración propia con RGui y paquete YUIMA.

CAPÍTULO 2. Modelo CARMA conducido por procesos Lévy

2.1. Introducción

Las metodologías tradicionales de series temporales como lo son modelos autorregresivos y de medias móviles ARMA⁷(p,q) o ARIMA⁸(p,d,q) tienen algunas ventajas como herramientas sobre datos financieros, en la medida que utilizan únicamente el pasado de la serie para predecir, lo cual los hace muy baratos y rápidos de construir. Sirven de punto de referencia para otro tipo de metodologías mejoradas, como se sugiere en el trabajo de Reyes (2018), que permiten incorporar la varianza (no constante), como lo es el modelo ARCH. Además, en el trabajo se utilizan otras extensiones de la familia ARCH como lo son el GARCH generalizado por Bollerslev, donde reduciendo a 2 el número de parámetros a estimar de infinito, igual que el modelo anterior también considera excesos de curtosis y los clusters de volatilidad. Incluso, el trabajo incorpora un e-GARCH y saltos estocásticos con cambio de régimen para la volatilidad (SJ-RS-Vol⁹) al modelar los rendimientos de un índice bursátil. (Reyes García, Venegas Martínez, & Cruz Aké, 2018).

Aunque la bondad en el pronóstico de las metodologías mencionadas anteriormente es alta, también son de memoria corta y pobres para predecir en momentos de cambios estructurales y puntos de quiebre o cambios de régimen, su horizonte de pronóstico es a muy corto plazo, y al trabajar con series no estacionarias con una distribución diferente a la normal, se obliga a diferenciar la serie para hacerla estacionaria y así trabajar con el supuesto de normalidad. Por lo que no es suficiente para el cumplimiento del objetivo general de este trabajo que es encontrar una metodología econométrica que considere características que presentan las series financieras y pueda capturar la dinámica del mercado de forma realista, lo cual no se cumple asumiendo una distribución normal.

Se ha observado que los saltos juegan un papel importante en el modelado realista de Precios de activos y series derivadas como la volatilidad. Por lo que necesita de procesos estocásticos más flexibles capaces de generalizar el movimiento browniano. De acuerdo con la revisión de la literatura como lo ejemplifica Brockwell, se encontró que al permitir que los procesos de Lévy reemplacen el movimiento browniano en la definición de un proceso CARMA gaussiano, se podría evidenciar que los procesos lineales impulsados por procesos de Levy pueden mostrar saltos y así permitir el modelado de cambios abruptos a través de un modelo de media móvil autorregresivo continuo (CARMA) conducido por un proceso varianza gama, lo que será útil para el cumplimiento del objetivo específico número dos de este trabajo.

⁷ A la combinación de procesos autorregresivos y medias móviles se conoce como proceso ARMA o proceso mixto, con p términos autorregresivos y q términos de medias móviles.

⁸ Procesos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles

⁹ Son las siglas en inglés del modelo regime-switching in volatility of volatility. Ver (Reyes García, Venegas Martínez, & Cruz Aké, 2018)

A los llamados modelos CARMA se les otorgó su nombre, debido a que son la versión continua de los modelos autorregresivos de media móvil (en inglés Auto Regressive Moving Average models, abreviados (ARMA)), y al ser la versión continua (en inglés Continuous-time Auto Regressive Moving Average (CARMA)).

Las propiedades y el análisis estadístico de los procesos autorregresivos en tiempo continuo (CAR) cada vez son más utilizados, aunque en particular los primeros trabajos más citados dentro de la literatura sobre el tema son el trabajo de Doob (1944), Bartlett (1946), Phillips (1959) y Durbin (1961) quienes se interesaron en los procesos generales de media móvil autorregresiva en tiempo continuo (CARMA)) de acuerdo con (Brockwell, 2001).

De acuerdo con (Brockwell, 2001), en los últimos años ha habido un resurgimiento del interés en los procesos de tiempo continuo, en parte como resultado de la muy exitosa aplicación de modelos de ecuaciones diferenciales estocásticas a problemas en finanzas, ejemplificada por la derivación de la fórmula de precios de opción de Black-Scholes y sus generalizaciones (Hull, J., & White, A., 1987).

Los modelos de umbral ARMA de Tong (1983, 1990), han sido particularmente exitosos al representar una amplia variedad de conjuntos de datos, y los modelos ARCH y GARCH de Engle (1982) y Bollerslev (1986), respectivamente, han tenido un gran éxito en el modelado de Datos financieros. Nelson (1990) ha desarrollado versiones en tiempo continuo de los modelos ARCH y GARCH. (Brockwell, 2001)

En el trabajo de Brockwell (2011) se realiza un análisis de los modelos ARMA de tiempo continuo, sus propiedades básicas, su relación con los modelos ARMA de tiempo discreto, la inferencia basada en observaciones hechas en tiempos discretos y procesos no lineales que incluyen análogos de tiempo continuo de los modelos ARMA de umbral de Tong.

Brockwell en otro de sus trabajos, examina las propiedades y ejemplos de procesos ARMA en tiempo continuo (CARMA) impulsados por los procesos de Lévy. Al permitir que los procesos de Lévy reemplacen el movimiento browniano en la definición de un proceso CARMA gaussiano, obtiene una clase mucho más rica de procesos estacionarios de tiempo continuo posiblemente de colas pesadas, donde tales colas pesadas se observan con frecuencia en la práctica de las distribuciones de variables financieras. También encuentra que, si, el proceso de Lévy tiene momentos finitos de segundo orden, la estructura de la correlación del proceso CARMA es la misma que la del proceso CARMA gaussiano correspondiente.

Por otra parte, Stefano M. Iacus y Lorenzo Mercuri, muestran cómo usar el paquete R YUIMA disponible en CRAN para la simulación y la estimación de un modelo general de Lévy-CARMA. La flexibilidad del paquete se debe al hecho de que el usuario puede elegir varias distribuciones paramétricas de Lévy para los

incrementos, lo que resulta bastante útil para la realización de esta tesis, puesto que el tipo de distribución que se pretende incorporar será la que sigue a un proceso Varianza gama VG.

Otros que han trabajado con modelos CARMA son Barndorff-Nielsen y Shephard (2001) que utilizaron un proceso de Lévy CAR (1) (o Ornstein Uhlenbeck) para construir un modelo de volatilidad estocástica mientras que Todorov y Tauchen (2006) y Todorov (2011) aplicaron el modelo Lévy CARMA (2,1) para modelar la volatilidad del tipo de cambio diario Deutsche Mark / Dólar estadounidense. Además, Brockwell y Marquardt (2005) propusieron el modelo CARMA integrado fraccionalmente para capturar la dependencia a largo plazo que se suele observar en las series de tiempo financieras.

Las bondades del modelo Levy-CARMA son útiles ya permiten que la distribución marginal del proceso CARMA sea asimétrica y de colas pesadas por lo que puede usarse para modelar algunas series de tiempo con esas características que generalmente son observadas en finanzas, pero también es un bloque principal para la construcción de un proceso más general como el COGARCH¹⁰ (p, q) visto en Brockwell (2006), pero introducidos por primera vez por Claudia Klüppelberg.

2.2. Prerrequisitos para el modelo Levy-CARMA

Para la construcción del modelo, primero se necesitan describir algunos hechos fundamentales respecto a los procesos de Levy. Para lo cual se retoma el trabajo de Peter Brockwell.

Dado un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t < \infty}, P$, donde F_0 contiene todos los conjuntos nulos P de F y (F_t) continua por la derecha.

Definición 1: proceso de Levy. Un proceso adaptado $\{(L(t), t \geq 0)\}$ se dice que es un proceso de Levy si:

- i. $L(0) = 0$ como.
- ii. $L(t) - L(s)$ es independiente de F_s , $0 \leq s < t < \infty$,
- iii. $L(t) - L(s)$ tiene la misma distribución que $L(t - s)$ y
- iv. $L(t)$ es continua en probabilidad

Cada proceso tiene una modificación única la cual es càdlàg¹¹ (continuo a la derecha con límites izquierdos) Y que también es un proceso de Levy Por lo tanto, asumiremos que nuestro proceso de Levy tiene estas propiedades. La función característica de $L(t)$, $\phi_t(\theta) := E(\exp(i\theta L(t)))$, tiene la representación Levy-Khintchine.

$$\phi_t(\theta) = \exp(t\xi(\theta)), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (\text{Ec. 20})$$

¹⁰ Es la versión continua del modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizado por Bollerslev como GARCH.

¹¹ Es la denominación a funciones definidas sobre los números reales e indica una clase de objetos para los que se tiene continuidad lateral por la derecha y simultáneamente existen sus límites por la izquierda en todos sus puntos. Las funciones càdlàg son útiles para los procesos estocásticos donde se admite la existencia de saltos, en contraste con el movimiento browniano, que exhibe realizaciones que son trayectorias continuas.

donde
$$\xi(\theta) = i\theta m - \frac{1}{2}\theta^2 s^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \left(e^{i\theta x} - 1 - ix\theta I_{\{|x|<1\}} \right) \nu(dx), \quad (\text{Ec. 21})$$

para algún $m \in \mathbb{R}, s \geq 0$, la medida ν en los subconjuntos de Borel $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ν es conocida como la medida de Levy del proceso L y satisface la condición $\int_{\mathbb{R}_0} \min(1, |u|^2) \nu(du) < \infty$. Si ν es la medida cero entonces $\{L(t)\}$ es un movimiento Browniano con $E(L(t)) = mt$ y $Var(L(t)) = s^2 t$. Si $m = s^2 = 0$ y $\nu(\mathbb{R}_0) < \infty$, entonces $L(t) = at + P(t)$ donde $\{P(t)\}$ es un proceso de Poisson compuesto con tasa del salto $\nu(\mathbb{R}_0)$ y distribución del tamaño del salto $\nu/\nu(\mathbb{R}_0)$, y $a = -\int_{\mathbb{R}_0} \frac{u}{1+u^2} \nu(du)$.

Una gran cantidad de distribuciones para $L(t)$ es alcanzable por elección adecuada de la medida.

Teorema 1 Lévy-Itô sea X un proceso de Levy, la distribución de X_1 parametrizada por (β, σ^2, ν) , entonces X se descompone en $X_t = \beta t + \sigma B_t + J_t + M_t$ donde B es un movimiento browniano y $\Delta X_t = X_t - X_{t-}, t \geq 0$ un proceso de punto de Poisson independiente con medida de intensidad ν ,

$$J_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s| > 1\}} \quad (\text{Ec. 22})$$

y M es una martingala con saltos

$$\Delta M_T = \Delta X_T 1_{\{|\Delta X_T| > 1\}}. \quad (\text{Ec. 23})$$

Por ejemplo, se tienen que:

$$Z \geq 0 \Leftrightarrow E(e^{-\lambda Z}) = \exp \left\{ -\beta' \lambda - \int_{0, \infty} (1 - e^{-\lambda x}) \nu(dx) \right\} \quad (\text{Ec. 24})$$

De modo que para un proceso gama

$\beta' = 0, \nu(x) = f(x)dx$ con $f(x) = ax^{-1} \exp\{-bx\}, x > 0$. Entonces $X_t \sim \text{Gamma}(at, b)$.

2.3. Modelo Levy-CARMA

La extensión de Brockwell (2001) del modelo CARMA Gaussiano por procesos de Lévy con momentos finitos de segundo orden será empleado para permitir incrementos asimétricos y de colas pesadas observados en series temporales como los precios de activos o índices bursátiles. Considerando la revisión que se realiza en M. Iacus, S., & Yoshida, N. (2018), se retomará su definición.

Sean p y q enteros no negativos tal que $p > q \geq 0$, por lo que el proceso CARMA(p, q) está definido

como:
$$a(D)Y_t = b(D)DL_t \quad (\text{Ec. 25})$$

Donde a y b son polinomios

$$a(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p$$

$$b(z) = b_0 + b_1 z^1 + \dots + b_{p-1} z^{p-1}$$

Con a_1, \dots, a_p y b_0, \dots, b_{p-1} son coeficientes tal que $b_q \neq 0$ y $b_j = 0$

$\forall j > q$ y D es el operador de diferenciación con respecto a t .

El modelo CARMA(p, q) tiene la siguiente representación espacio-tiempo.

$$Y_t = b^T X_t \quad (\text{Ec. 26})$$

Donde X_t es solución al proceso p-dimensional para:

$$dX_t = AX_t dt + e dL_t \quad (\text{Ec. 27})$$

Y la matriz A p X p está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \dots & -a_p & \end{bmatrix}$$

e y b son vectores p x 1 definidos como

$$e = [0, \dots, 0, 1]^T$$

$$b = [b_0, \dots, b_{p-1}]^T$$

Dadas las X_s la solución de la Ec. 27 tiene esta forma:

$$X_t = e^{A(t-s)} X_s + \int_s^t e^{A(t-u)} e dL_u, \forall t > s \quad (\text{Ec. 28})$$

Donde e^A es la matriz exponencial $e^A = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{h!} A^h$

Si la parte real de los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de A son negativos, entonces X_t en la Ec. 27 tiene una solución estacionaria de covarianza (Brockwell 2001).

$$X_t = \int_{-\infty}^t e^{A(t-u)} e dL_u \stackrel{d}{=} \int_0^{+\infty} e^{Au} e dL_u \quad (\text{Ec. 29})$$

Con $E[X_t] = \frac{\mu}{a_p} e$

$Cov[X_{t+h}; X_t] = \sigma^2 e^{Ah} \int_0^{+\infty} e^{Au} e e^T e^{ATu} du$ para $h \geq 0$

Donde $\mu = E[L_1]$ y $\sigma^2 = Var[L_1]$

CAPÍTULO 3. Estimación del Modelo CARMA

3.1. Aplicación empírica

La aplicación empírica se realizó con el lenguaje de programación R, para los modelos ARIMA se utilizó el paquete tseries, también se contrastaron los resultados mediante el software E-views.

Una gran motivación para considerar los modelos Lévy CARMA, está vinculada con el trabajo de Stefano M. lacus y Lorenzo Mercuri, quienes muestran cómo usar el paquete R YUIMA disponible en CRAN para la simulación y la estimación de modelos Lévy-CARMA. El paquete es muy flexible en el sentido de que se puede elegir específicamente una distribución paramétrica de Lévy para los incrementos, lo que resulta bastante útil para la realización de este trabajo de tesis, puesto que el tipo de distribución que se pretende incorporar será la que sigue a un proceso Varianza gama VG.

Un proceso CARMA (p, q) puede ser impulsado por diferentes tipos de ruido de Lévy, pero únicamente se mostrará la modelación, simulación y estimación que sigue a un proceso Varianza gama VG.

3.2. Modelo ARIMA

La teoría de las series temporales se basa en el supuesto de "estacionariedad de segundo orden". Los datos de la vida real a menudo no son estacionarios: exhiben una tendencia lineal a lo largo del tiempo, o tienen un efecto estacional.

Con la metodología Box-Jenkins se puede trabajar con una serie estacionaria o si la serie es no estacionaria se puede diferenciar.

Los pasos a seguir son:

1. Verificar la estacionariedad de la serie. Si ésta no es estacionaria, diferenciarla hasta alcanzar estacionariedad.
2. Identificar un modelo tentativo.
3. Estimar el modelo.
4. Comprobar el diagnóstico (si no es adecuado, regresar al segundo paso).
5. Usar el modelo para pronosticar.

Antes de empezar con la aplicación del modelo ARIMA para el caso del IPC, se revisan algunos estadísticos sobre otros índices que se refieren en la introducción de la tesis, con lo cual se observa que la mayoría de los activos financieros no siguen una distribución normal, están sesgados y tienen una curtosis real más alta que la de la distribución Normal.

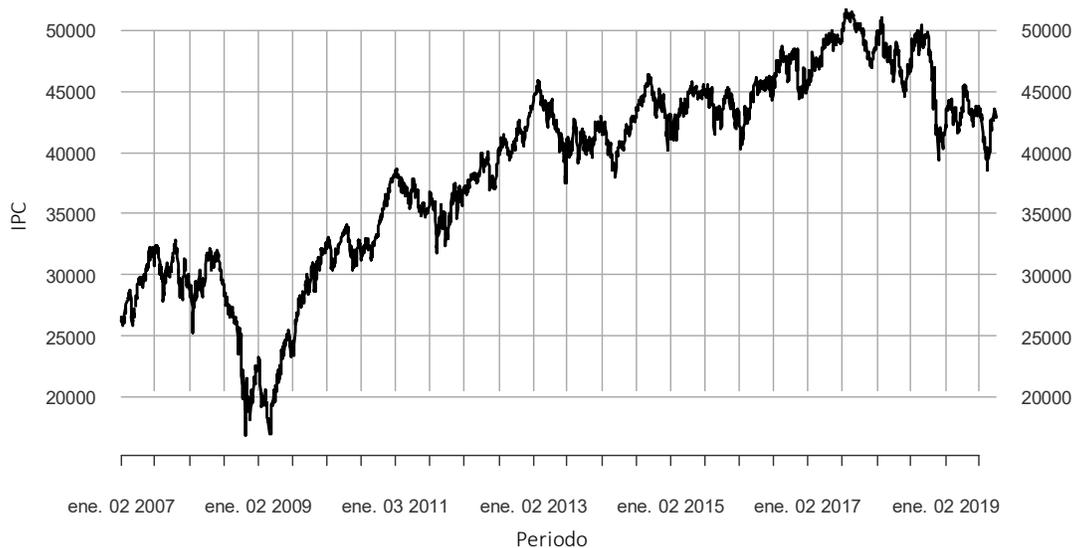
Tabla 1 Comparación de estadísticos contra la distribución normal

Distribución	Normal (μ, σ^2)	Índice IPC (1991-2018)	Rendimientos del índice IPC (1991-2018)	Índice S&P500 (1950-2018)	Rendimientos del Índice S&P500 (1950-2018)	índice VIX (2004-2008)	Índice Dow Jones (1985-2018)	Rendimientos del Índice Dow Jones (1985-2018)
Media	μ	20054.59	0.051429	564.2224	0.029422	18.36912	9273.608	0.034927
Varianza	σ^2	291973087.3	2.078735336	449006.6703	0.930158016	78.03383167	34075670.73	1.208730933
Sesgo	0	0.421863	0.028071	1.320719	-1.017043	2.670432	0.634687	-1.688359
Curtosis	3	1.54885	9.87397	3.911685	30.11144	12.6937	3.004292	45.29759

Fuente: elaboración propia.

También podemos describir que para el supuesto de estacionariedad no se cumple para el caso del IPC ya que ni la media y varianza son constantes a lo largo del periodo observado en la gráfica 5 de acuerdo con los datos de la tabla 1.

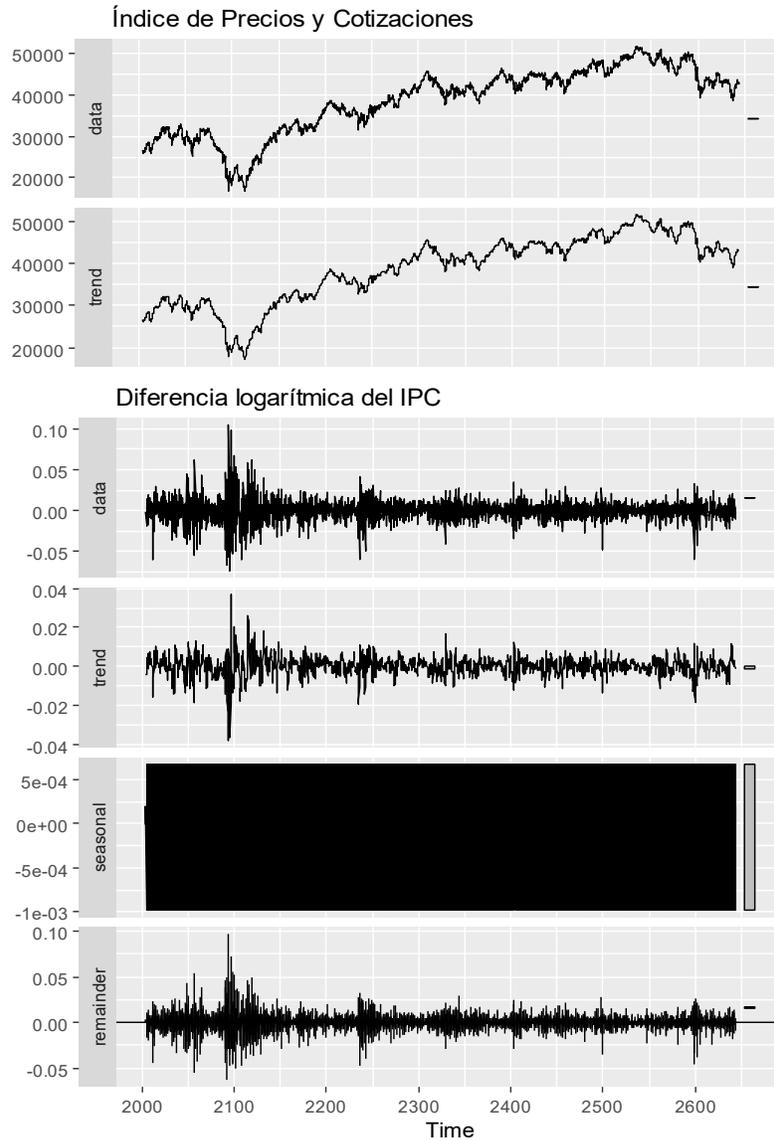
Gráfica 5 Índice de Precios y Cotizaciones 01/2007-09/2019



Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos de Yahoo Finance.

Entonces, para aplicar el supuesto de estacionariedad se considera después de que se hayan eliminado las tendencias porque como se puede observar en la gráfica 5, el IPC no es estacionario.

Gráfica 6 Descomposición de serie temporal IPC



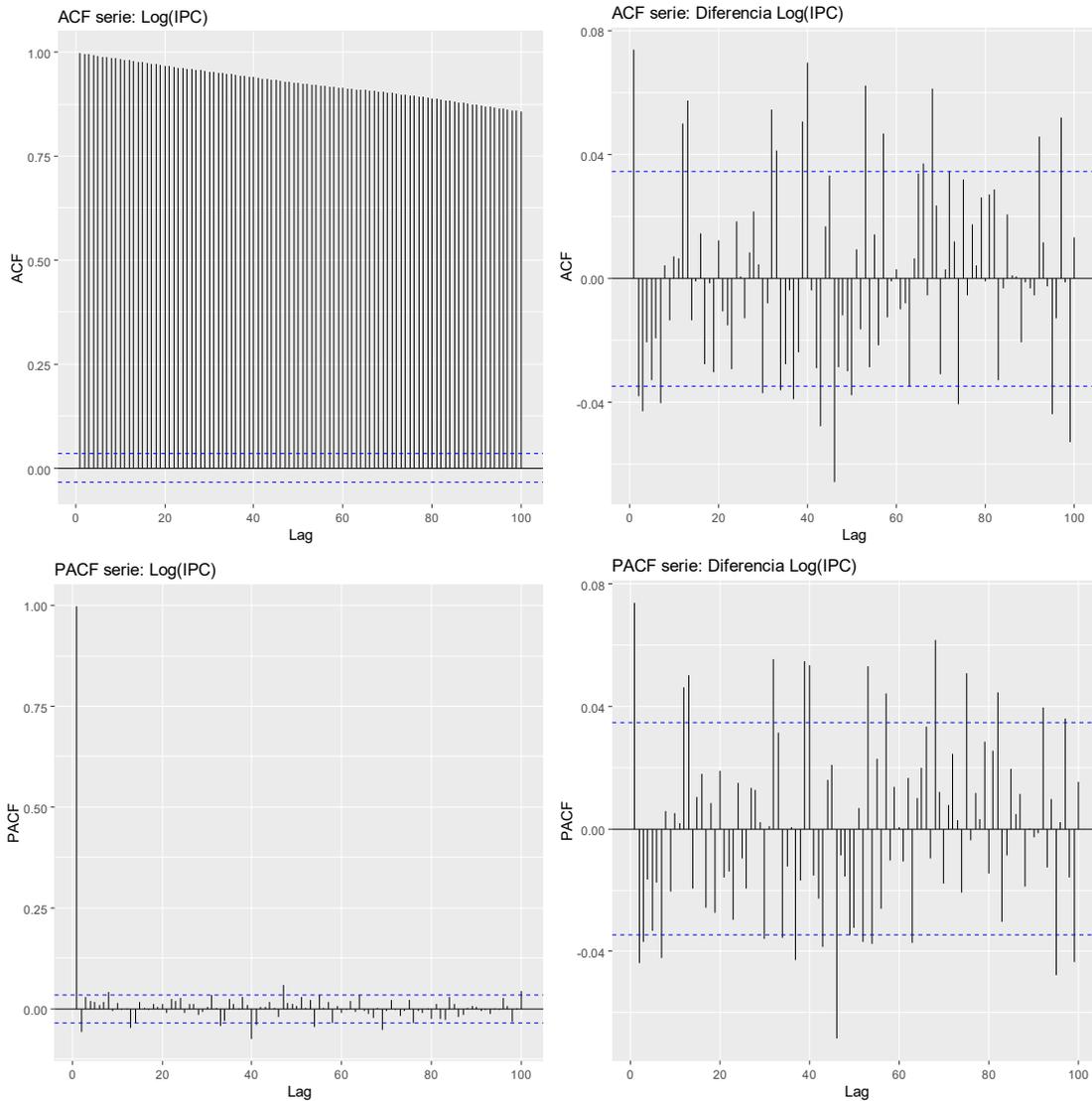
Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica 6 la serie original muestra una tendencia creciente como se observa en el primer panel, además de que se debe eliminar el componente estacional. Por lo que se observa que cuando se trabaja con la diferencia logarítmica en el segundo panel, la tendencia desaparece y de esta manera se vuelve estacionaria. Lo que resulta útil a propósito del supuesto de la metodología Box-Jenkins.

Al realizar la prueba de Dickey-Fuller aumentada con un nivel de significancia del 95% se obtiene: en la transformación logarítmica del IPC un p. valor= 0.4309 y en la primera diferencia de dicha transformación un p. valor= 0.01, con lo que se comprueba que al utilizar un orden de diferencia de uno sobre el logaritmo del IPC es suficiente para eliminar la tendencia.

Se observó la función de autocorrelación y en el caso de la serie logarítmica tiene una caída lenta lo que indica que la serie no es estacionaria, en comparación con la serie diferenciada podemos observar que la serie si es estacionaria.

Gráfica 7 Comparación ACF y PACF



Fuente: Elaboración propia.

En la Gráfica 7, en los paneles de residuos, se estimó el modelo ARIMA a través de las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) tanto de logaritmos del IPC como de sus diferencias. También se encontró que, de acuerdo con el criterio de Akaike, como se muestra en la tabla 2 el modelo que mejor se ajustó fue el ARIMA(2,1,1)

Al elegir el número de parámetros que minimiza el valor de los criterios de información, se consideran los tres criterios de información más populares son el criterio de información de Akaike (AIC), el criterio de información bayesiano de Gideon E. Schwarz (BIC) y el criterio de Hannan-Quinn (HQ).

De acuerdo Brooks (2014), ningún criterio es superior a otros, por lo que al elegir el criterio BIC es consistente pero ineficiente, AIC no es consistente, pero es más eficiente, por lo que se muestran los tres criterios en la tabla 2.

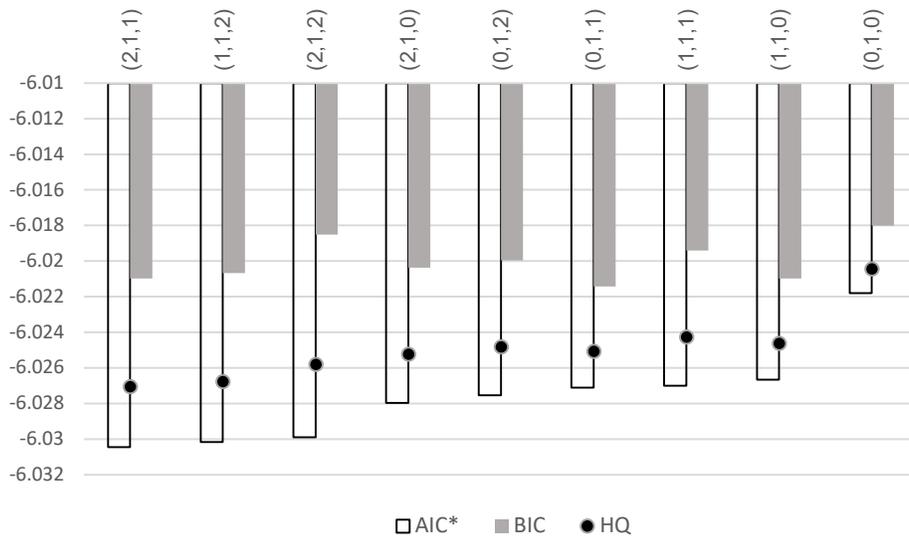
Tabla 2 Criterios de selección por modelo

Variable dependiente: Diferencia Log(IPC)				
Modelo	LogL	AIC	BIC	HQ
(2,1)(0,0)	9653.738106462414	-6.030461316539009	-6.020975525775276	-6.02706048605576
(1,2)(0,0)	9653.272303445466	-6.030170189653416	-6.020684398889685	-6.026769359170169
(2,2)(0,0)	9653.835203172779	-6.029897001982988	-6.01851405306651	-6.02581600540309
(2,0)(0,0)	9648.740046468654	-6.027962529042909	-6.020373896431925	-6.02524186465631
(0,2)(0,0)	9648.073006364806	-6.027545628978004	-6.01995699636702	-6.024824964591405
(0,1)(0,0)	9646.383472455579	-6.027114670284736	-6.021423195826498	-6.025074171994788
(1,1)(0,0)	9647.194619428562	-6.02699663714285	-6.019408004531866	-6.024275972756251
(1,0)(0,0)	9645.664692486652	-6.026665432804156	-6.020973958345918	-6.024624934514208
(0,0)(0,0)	9636.894301406278	-6.021808938378924	-6.018014622073431	-6.020448606185625

Fuente: elaboración propia.

Como se puede identificar de una forma más rápida en la gráfica 8, de acuerdo con los resultados, el modelo que mostró menores criterios AIC, BIC y HQ fue el ARIMA(2,1,1).

Gráfica 8 Comparación de criterios AIC, BIC y HQ por Modelo



Fuente: Elaboración propia.

3.3. Modelo Lévy-CARMA

Para realizar esta aplicación sobre el Índice de Precios y Cotizaciones, se tomó la versión adaptada por Brouste, A., *et al.* (2014) en el paquete YUIMA quienes retomaron de Iacus, S. M. y Mercuri, L. (2014)

En vista de que el componente X_t de la ec. 27 en el modelo en los procesos CARMA no es observable, el procedimiento para la estimación con datos reales consta de tres etapas las cuales se pueden realizar de forma sistemática en el paquete YUIMA.

Primero se simula la trayectoria de un proceso CARMA (2,1) conducido por un proceso varianza gamma y posteriormente se utiliza esa trayectoria para el procedimiento de estimación. Dado que el modelo es considerado una mezcla de normales, la estimación de máxima verosimilitud se logra mediante un algoritmo Esperanza-Maximización EM¹² en el trabajo de Karlis, D. (2002) se observa el desarrollo, pero de acuerdo con lo propuesto por Iacus, S. M., y Mercuri, L. (2015) quienes se basan en el trabajo de Loregian A., *et al.* (2012) para el caso de varianza gamma.

La causa de emplear dicho algoritmo es porque el problema de maximización de verosimilitud se vuelve más difícil en la presencia de datos faltantes, en este caso el componente X_t en los procesos CARMA.

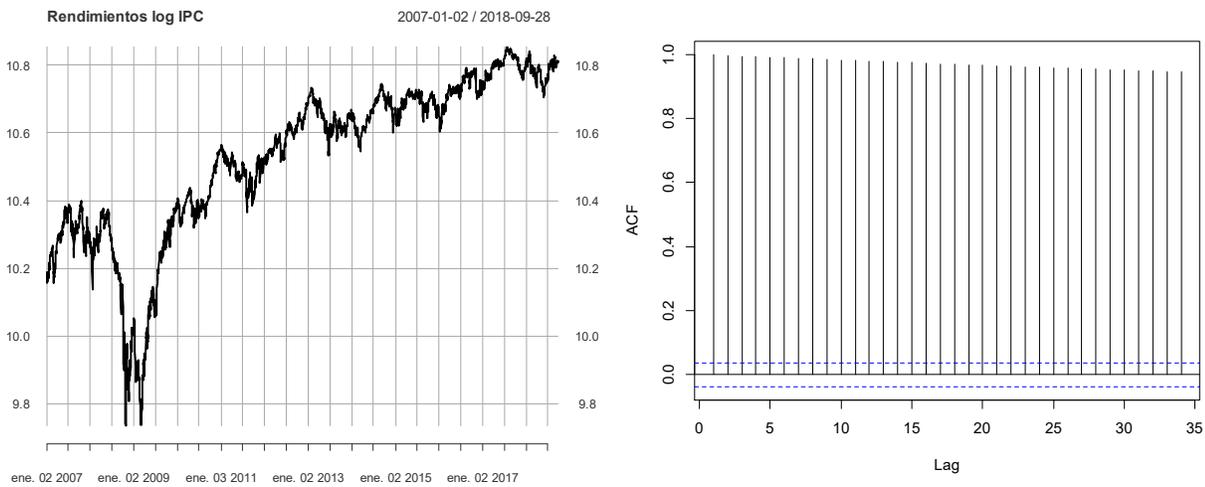
En contraste con la estimación mencionada anteriormente, en un proceso CARMA Gaussiano, se puede realizar la estimación de máxima verosimilitud como se muestra en Brouste, A., *et al.* (2014), quienes además realizan una estimación adaptativa de Bayes y muestran la comparación entre las estimaciones adaptativas de Bayes con las estimaciones de QMLE.

Luego de estimar los parámetros CARMA, se extraen los incrementos del proceso subyacente Lévy tipo VG y finalmente, con los incrementos, se pueden estimar los parámetros de la medida de Lévy, en el paquete YUIMA se utiliza el enfoque de máxima verosimilitud.

A continuación, se muestra en la gráfica 9 los rendimientos logarítmicos sobre el IPC del periodo utilizado y su función de autocorrelación.

¹² El algoritmo EM es un método para encontrar una estimación de Mezclas Gaussianas, debido a su utilidad, es una herramienta importante en muchos procesos de aprendizaje automático o Machine Learning por su capacidad para manejar información faltante y observar variables ocultas de acuerdo con McLachlan, G. J., y Krishnan, T. (2008).

Gráfica 9 Rendimientos logarítmicos sobre el IPC y su ACF



Fuente: elaboración propia con RGui y paquete YUIMA.

Como ya se sabe que el mejor modelo ARMA que se ajusta a los datos del índice bursátil IPC es un ARIMA(2,1,1), de acuerdo con lo revisado en la sección 3.2., entonces se ajustará un modelo CARMA(2,1) a los rendimientos logarítmicos del IPC utilizando un ruido Varianza Gama VG. y se contrastará con un ruido Gaussiano para verificar que el mejor ajuste es cuando se consideran los procesos de Lévy, en este caso del tipo VG, a su vez se puede demostrar que el hecho permitir incrementos asimétricos y de colas pesadas observadas en series temporales como los precios de activos o índices bursátiles, en este caso el IPC permite obtener aproximaciones más realistas en el sentido de dejar de considerar el supuesto de normalidad gaussiano.

Se comienza con la estimación del modelo CARMA Gaussiano y como se observa a continuación, las condiciones de estacionariedad se satisfacen para poder realizar la estimación de los incrementos.

Empezando la estimación qmle para carma ...

Condición de estacionariedad se satisface...

Empezando la estimación de los incrementos...

Ahora se estiman mediante QMLE y a continuación se muestra el resumen de la estimación.

Calcular en dos etapas el estimador de Cuasi Máxima Verosimilitud

Call:

```
qmle(yuima = Normal.CARMA, start = Normal.start, Est.Incr = "Incr")
```

Estimación de coeficientes:

b1 0.1910688

b0 11.4253403

a2 28.2850248

a1 62.1404339

```
mu 10.5144779
-2 log L: -17723.47
Número de incrementos: 2948
Promedio de incrementos: 0.000667
Desviación estándar de incrementos: 0.070140
Resumen de estadísticas para los incrementos:
  Min.  1st Qu.  Median   Mean  3rd Qu.  Max.
-1.7013946 -0.0266781  0.0032160  0.0006672  0.0320139  0.5366796
Modelo Carma(2,1): satisface las condiciones de estacionariedad.
```

Seguidamente, se extraen los incrementos y se puede comprobar mediante el test de normalidad de Shapiro-Wilk si son gaussianos o no.

```
Test de normalidad de Shapiro-Wilk
data: as.numeric(inc)
W = 0.77955, p-value < 2.2e-16
```

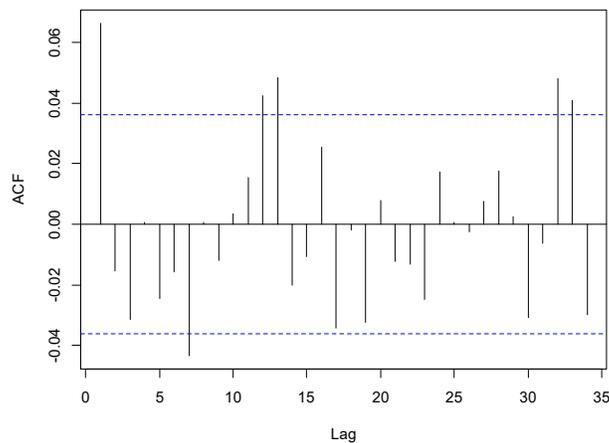
De acuerdo con las hipótesis estadísticas:

H0: La variable presenta una distribución normal

H1: La variable presenta una distribución no normal

La prueba de Shapiro-Wilk rechaza la hipótesis nula de normalidad para estos datos. También podemos verificar si el modelo CARMA pudo eliminar la autocorrelación residual al graficar la función de autocorrelación de los incrementos.

Gráfica 10 Función de autocorrelación de los incrementos



Fuente: elaboración propia con RGui y paquete YUIMA.

De acuerdo con la gráfica 10, se puede pensar que hay un efecto de autocorrelación en el rezago 1, 5, 7, 12, 13, 32 y 33.

A continuación, se realiza la alternativa del modelo CARMA conducido por un proceso de Lévy tipo VG.

```
Empezando la estimación qmle para carma ...
```

```
Condición de estacionariedad se satisface...
```

```
Empezando la estimación de los incrementos...
```

Nuevamente se estima mediante QMLE y se muestra el resumen de la estimación.

```
Estimación de coeficientes:
```

```
b0 11.3327572
```

```
b1 0.1911715
```

```
a2 15.1580120
```

```
a1 61.8421920
```

```
mu 10.5589391
```

```
lambda 240.7823576
```

```
alpha 22.7252920
```

```
beta -1.6252881
```

```
mu0 1.5993870
```

```
-2 log L: -17724.36
```

```
Número de incrementos: 2948
```

```
Promedio de incrementos: 0.000297
```

```
Desviación estándar de incrementos: 0.072118
```

```
-2 log L de incrementos: -8570.284159
```

```
Resumen de estadísticas para los incrementos:
```

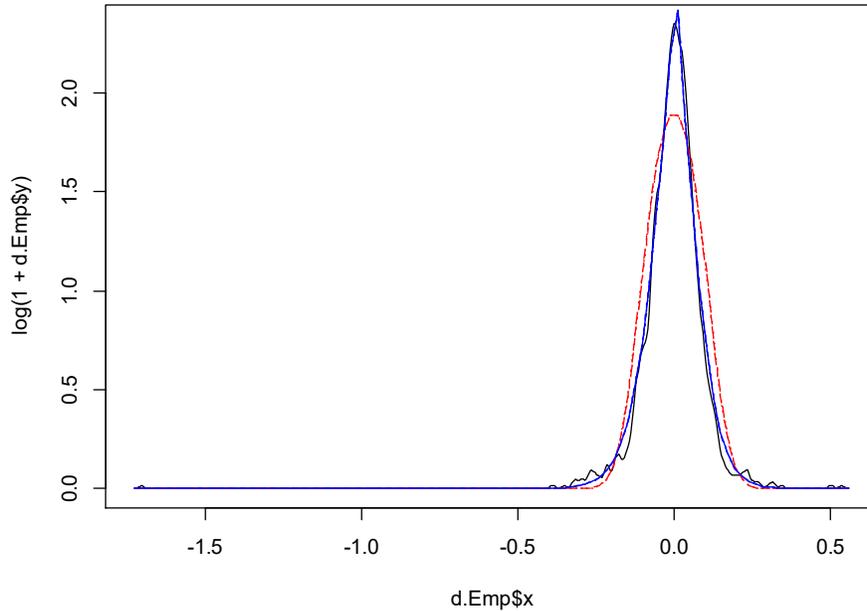
```
Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
```

```
-1.9330528 -0.0270902 0.0026186 0.0002972 0.0313899 0.5380362
```

```
Modelo Carma(2,1): satisface las condiciones de estacionariedad.
```

Ahora se compara la densidad empírica de los incrementos de Lévy con las densidades teóricas gaussianas y de varianza gama. Para realizarlo se utiliza el método empleado en Iacus, S. M., y Yoshida, N. (2017), donde se considera para cada densidad d como $\log(1 + d)$ para graficar y agregan 1 porque la mayor parte de la estimación de la densidad regresa a 0, lo que no afecta a la estimación.

Gráfica II Densidades Gaussiana y VG estimadas de los incrementos de Lévy

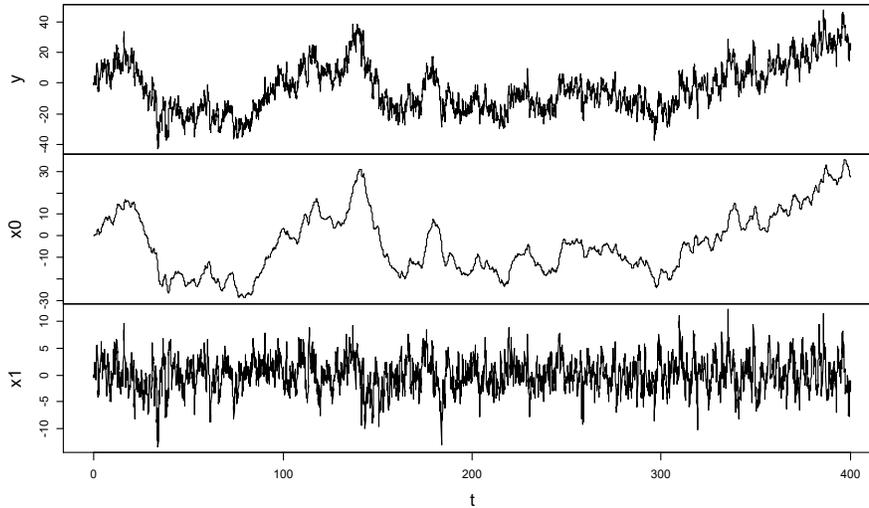


Fuente: elaboración propia con RGui y paquete YUIMA.

La gráfica II muestra las densidades estimadas de los incrementos de Lévy. Cada densidad d se representa como $\log(1 + d)$, anteriormente ya se ha justificado porqué y se aprecia que la línea negra es la densidad empírica de los datos, la línea punteada roja es la distribución gaussiana, mientras que la línea azul representa la densidad ajustada VG y al observar la gráfica se puede concluir que la VG se ajusta mejor a los datos que la distribución gaussiana.

Con fines comparativos, se realizaron 400 simulaciones de incrementos de Lévy para el modelo VG CARMA, lo cual se muestra en la gráfica 9 y también se hizo el cálculo promedio de saltos para determinar $\lambda=12$, los cuales se obtuvieron dividiendo los 139 saltos entre 11.5 años que fue el tiempo que sirvió de muestra, para finalmente introducirlos a la simulación.

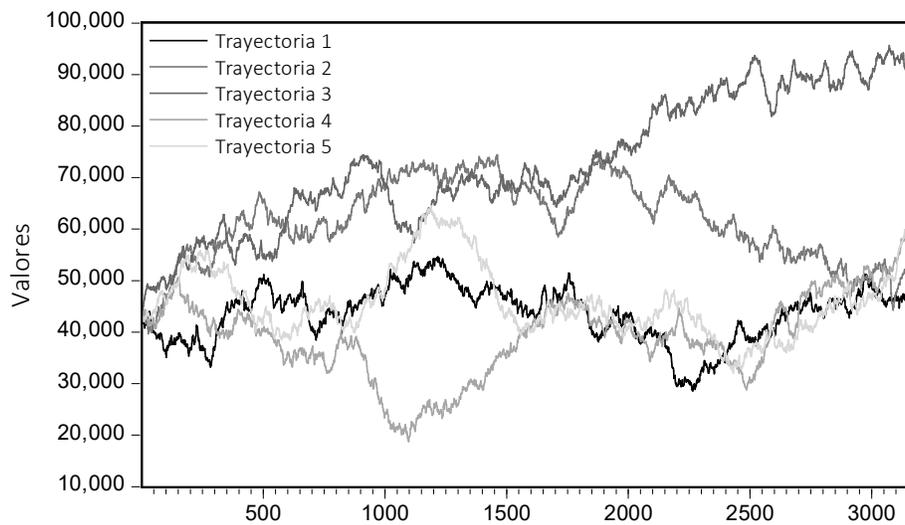
Gráfica 12 Modelo VG CARMA (2,1)



Fuente: Elaboración propia con el paquete YUIMA en R¹³.

Se realizó el pronóstico de 100 simulaciones con el modelo, de las cuales, por cuestiones de estética, únicamente se muestran gráficamente sólo cinco de las cien trayectorias que se obtuvieron.

Gráfica 13 Simulación CARMA (2,1) $Y_0 = 43011.27$



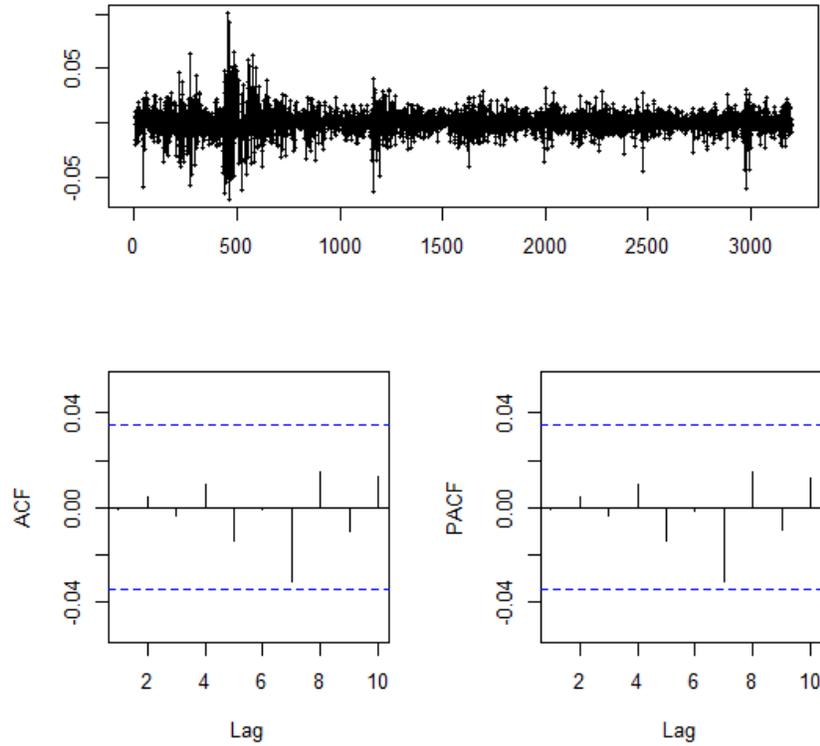
Datos de simulación para cada trayectoria
Elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

¹³ Alexandre Brouste, Masaaki Fukasawa, Hideitsu Hino, Stefano M. Iacus, Kengo Kamatani, Yuta Koike, Hiroki Masuda, Ryosuke Nomura, Teppei Ogihara, Yasutaka Shimuzu, Masayuki Uchida, Nakahiro Yoshida (2014). The YUIMA Project: A Computational Framework for Simulation and Inference of Stochastic Differential Equations. Journal of Statistical Software, 57(4), 1-51. URL <http://www.jstatsoft.org/v57/i04/>.

3.4. Resultados de la estimación

A través de los gráficos de residuos del modelo se pudo corroborar el ajuste de la serie IPC diferenciada de orden 1, tal como se muestra en la siguiente gráfica.

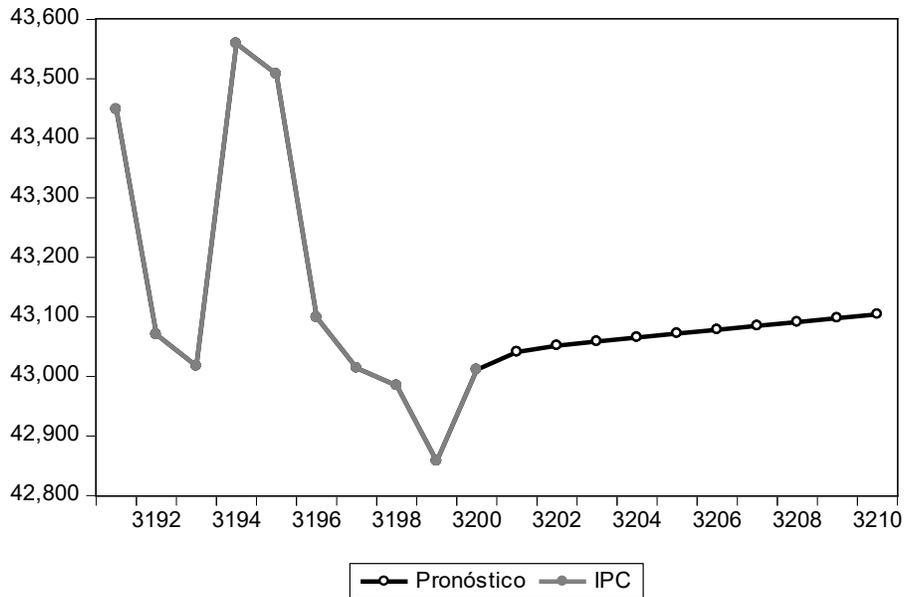
Gráfica 14 Residuos del Modelo ARIMA(2,1,1)



Fuente: Elaboración propia.

Con el fin de corroborar los resultados obtenidos con R , también se utilizó Econometric View (EViews) y aunque incorporando más términos AR y MA se obtuvo que el mejor modelo que se ajustaba a la serie del IPC era un modelo ARIMA(3,1,4). Se realizó un pronóstico con el modelo ARIMA(2,1,1) para diez valores a futuro, es decir 2 semanas en los mercados financieros y se obtuvo lo siguiente:

Gráfica 15 Pronóstico ARIMA(2,1,1) en Eviews



Fuente: Elaboración propia.

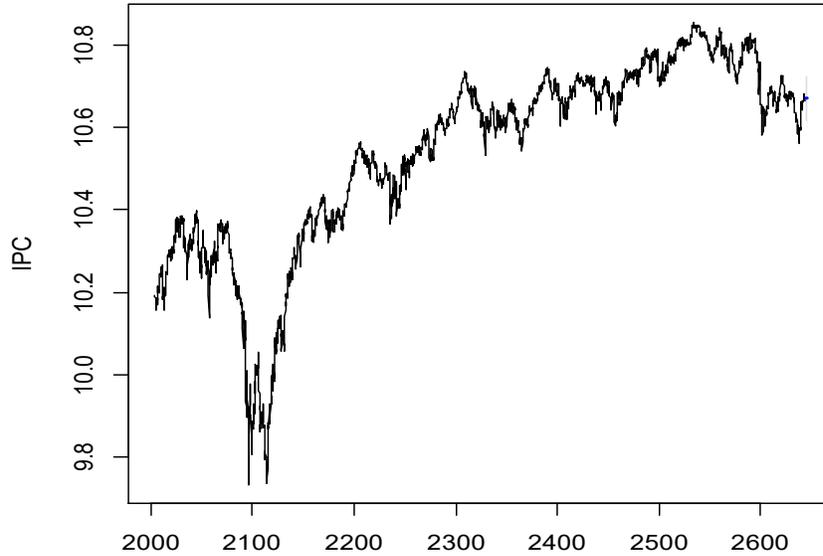
Considerando que el promedio de los precios de cierre del IPC del 01/10/2019 al 14/10/2019 fue de 42845.3511721 puntos, entonces se concluye que los valores obtenidos por el pronóstico están sobrestimados de acuerdo a los resultados de la tabla 3.

Tabla 3 Resultados del pronóstico ARIMA(2,1,1) en Eviews

Día	Precio de cierre IPC	Estimación del IPC Eviews
01/10/2019	42937.16	43041.16711
02/10/2019	42222.90	43051.49851
03/10/2019	42443.31	43058.69698
04/10/2019	43416.90	43065.36401
07/10/2019	42952.29	43071.92198
08/10/2019	42535.14	43078.4464
09/10/2019	42501.92	43084.95511
10/10/2019	42929.76	43091.45484
11/10/2019	43214.60	43097.94918
14/10/2019	43299.53	43104.44039

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 16 Pronóstico ARIMA(2,1,1) en R



Fuente: Elaboración propia.

Considerando los valores del intervalo obtenidos por el pronóstico en R vistos en la tabla 4, se puede decir que todos los precios de cierre del IPC del 01/10/2019 al 14/10/2019 ocurrieron dentro del intervalo pronosticado. Pero si se realiza la comparación con el promedio del intervalo, se obtiene que los días 4, 11 y 14 de octubre se subestimaron los puntos del IPC, mientras que los demás días tuvieron un pronóstico sobrestimado.

Tabla 4 Resultados del pronóstico ARIMA(2,1,1) en R

Día	Precio de cierre IPC	Pronóstico del IPC	
		Promedio	Intervalo pronosticado
01/10/2019	42937.16	43034.1816	42046.44 - 44044.6865
02/10/2019	42222.9	43036.7637	41595.6137 - 44527.8449
03/10/2019	42443.31	43036.3334	41281.5109 - 44866.1997
04/10/2019	43416.9	43035.903	41037.4359 - 45132.144
07/10/2019	42952.29	43035.903	40833.9858 - 45356.102
08/10/2019	42535.14	43035.4727	40655.9307 - 45554.2863
09/10/2019	42501.92	43035.4727	40496.0614 - 45734.1243
10/10/2019	42929.76	43035.4727	40348.5202 - 45900.8998
11/10/2019	43214.6	43035.0423	40211.1661 - 46057.2285
14/10/2019	43299.53	43035.0423	40081.8944 - 46205.7718

Fuente: Elaboración propia.

Realizando la comparación de estadísticos sobre los datos obtenidos, se encuentran en la tabla 5 donde se muestra el resumen de todos los pronósticos.

Tabla 5 Comparación estadística sobre los pronósticos

Parámetros	Precio de cierre IPC	Pronóstico ARIMA(2,1,1) Eviews	Pronóstico ARIMA(2,1,1) R	Pronóstico trayectorias CARMA
Promedio	42845.351	43074.58945	43035.55873	51815.8471
Desviación estándar	402.7046475	20.65203519	0.725814337	10462.87983
Sesgo	-0.091810902	-0.144274651	-0.215349736	-0.086870307
Kurtosis	-1.289332021	-0.994656373	0.564577259	-0.659214883

Fuente: Elaboración propia.

3.5. Conclusiones

De acuerdo con la tabla 5, se puede observar que los momentos de sesgo y kurtosis se pudieron capturar como características del IPC. El modelo CARMA que se modeló para el caso aplicado al mercado accionario mexicano está bien logrado, en vista de que nos permite aprovechar las bondades estadísticas que puede replicar. Se logró mejorar el modelado de forma más realista al considerar procesos de Lévy tipo VG.

Los resultados que arroja la investigación son consistentes con la hipótesis inicial del trabajo, lo cual se comprueba con la gráfica II y la tabla 5 y aunque la asimetría fue mejor capturada que la kurtosis, deberían considerarse otros procesos y modelos más robustos que se adapten a la realidad de las series financieras, y no realizar lo contrario, implementando tratamiento estadístico a las series para adaptarlas a modelos. Conviene mencionar que este modelo es útil ya que es capaz de replicar las propiedades estadísticas y cumple con el principio de ergodicidad.

A pesar de que la tarea de los gestores de riesgo a veces es complicada, debemos considerar que la toma de decisiones se haga lo más honesta al incorporar las herramientas más adecuadas para la estimación de indicadores que implican tomar decisiones que afectan a muchas personas, sectores o economías.

CAPÍTULO 4. Modelo COGARCH Conducido Por Procesos Levy

4.1. Introducción

Para explicar los modelos COGARCH, se necesita recordar algunos elementos descritos en el capítulo 2 de esta tesis, en donde se habló sobre metodologías muy conocidas como son los modelos ARMA y ARIMA. Pero que tienen limitaciones para modelar de forma realista a las series financieras que presentan características como los hechos estilizados. Algunas de las restricciones, fueron consideradas por modelos mejorados por Robert F. Engle (1982) quien introdujo los modelos de Heteroscedasticidad condicional autorregresiva ARCH por su acrónimo en inglés (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) los cuales no consideran la varianza constante y dependen del cuadrado de las innovaciones pasadas.

Posteriormente, Bollerslev (1986) los generaliza al incluir un término autorregresivo para modelar la varianza del proceso. Los modelos GARCH por su acrónimo en inglés (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) permiten la estimación de la volatilidad y la primera ecuación explica la evolución del rendimiento (variable subyacente) en función de rendimientos pasados y la segunda ecuación modela la evolución de la varianza del rendimiento, mediante la varianza se realiza la estimación de la volatilidad.

La expresión matemática de este modelo es:

Sea $\{y_t\}$ una serie de observaciones diarias, y_t está definido en función de los valores pasados de la variable

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots + \beta_n y_{t-n} + U_t \quad (\text{Ec. 30})$$

donde

$$U_t = \sqrt{h_t} v_t \quad (\text{Ec. 31})$$

v_t es un conjunto de variables $v_t \sim i.i.d.N(0,1)$

$h_t = \hat{E}_{t-1}(u_t^2)$ lo que implica Heteroscedasticidad condicionada

Un proceso GARCH se define de la siguiente forma:

$U_t \sim GARCH(r, m)$ si

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-2} + \dots + \alpha_r h_{t-r} + \delta_1 u_{t-1}^2 + \delta_2 u_{t-2}^2 + \dots + \delta_m u_{t-m}^2 \quad (\text{Ec. 32})$$

Dado que la varianza condicionada responde de la misma manera a los residuos positivos que a los negativos, se contradice el comportamiento observado en las series financieras reales y debido a esa limitación de los modelos GARCH, Nelson (1990) propuso un modelo GARCH continuo y derivó un modelo GARCH limitante

(1,1) agregando innovaciones GARCH. Dicho modelo fue conducido por dos movimientos brownianos diferentes e independientes, uno como proceso impulsor y el otro en la varianza.

De acuerdo con Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2016) "los hechos estilizados" asociados con series de tiempo observadas sobre rendimientos financieros son los siguientes:

- i. las distribuciones marginales tienen colas gruesas,
- ii. persiste la volatilidad,
- iii. los rendimientos exhiben una gaussianidad agregada,
- iv. hay asimetría con respecto a las perturbaciones negativas y positivas y
- v. la volatilidad exhibe con frecuencia una dependencia de largo plazo.

Aunque los modelos GARCH son capaces de explicar muy bien las propiedades (i), (ii) y (iii). Incluso, son una de las metodologías más utilizadas en series de tiempo financieras debido a que son aplicados en datos igualmente espaciados. Sin embargo, largos periodos de tiempo presentan días festivos y fines de semana que pueden afectar el comportamiento de las series, por lo que es conveniente introducir modelos con períodos de tiempo continuos o desigualmente espaciados.

4.2. Prerrequisitos del modelo Levy-COGARCH

En los procesos GARCH y COGARCH, la idea es centrarse en una única fuente de ruido que afecta tanto al rendimiento como a los procesos de volatilidad. Para la construcción del modelo COGARCH conducido por procesos de Lévy, Klüppelberg, C., Lindner, A., & Maller, R. (2004) adaptaron la idea de un proceso de ruido único y sugieren un nuevo modelo GARCH de tiempo continuo (COGARCH), que captura todos los hechos estilizados como lo hace el GARCH de tiempo discreto. Como proceso de ruido es posible introducir cualquier proceso de Lévy.

Es decir que el modelo COGARCH (1, 1) es la contraparte continua del GARCH (1, 1) que fue desarrollado en el trabajo de Klüppelberg (2004).

Retomando el modelo GARCH (1, 1) de Bollerslev (1986) en donde se considera lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \varepsilon_i \sigma_i \\ \sigma_i^2 &= \beta + \lambda_1 Y_{i-1}^2 + \delta_1 \sigma_{i-1}^2 \quad i \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \tag{Ec. 33}$$

Donde β , λ_1 , δ_1 son estrictamente positivos y para el caso de ε_0 y σ_0 son independientes de los valores futuros de ε y posiblemente aleatorios.

Como se mencionó anteriormente, el trabajo de Klüppelberg (2004) realiza la contraparte del modelo, en tiempo continuo y aunque el propósito de este apartado no es desarrollar la metodología que ellos implementaron, sí es importante mostrar de forma general la idea sobre la que fue construido con el fin de comprender posteriormente cómo se reemplaza cualquier proceso de Lévy por un proceso de Lévy tipo VG para el modelo COGARCH que se estimará en el capítulo 5.

Lo cual se hizo reemplazando el proceso de ruido de tiempo discreto $\{\varepsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ mediante los incrementos ΔL_t de un proceso de Lévy $\{L_t, t \geq 0\}$.

Un modelo COGARCH (1, 1), es el límite de una representación explícita de un GARCH (1, 1), como lo refieren Iacus, S. M., Mercuri, L., & Rroji, E. (2017). En términos muy generales, primero se considera la representación explícita del proceso de volatilidad para el GARCH (1, 1):

$$\sigma_i^2 = \beta \sum_{k=0}^{i-1} \prod_{j=k+1}^{i-1} (\delta + \lambda \varepsilon_j^2) + \sigma_0^2 \prod_{j=0}^{i-1} (\delta + \lambda \varepsilon_j^2). \quad (\text{Ec. 34})$$

Extendiendo la ecuación (34) a tiempo continuo, entonces:

$$\sigma_i^2 = \beta \int_{k=0}^{i-1} \exp \left[\sum_{j=[u]+1}^{i-1} \log(\delta + \lambda \varepsilon_j^2) \right] du + \sigma_0^2 \exp \left[\sum_{j=0}^{i-1} \log(\delta + \lambda \varepsilon_j^2) \right] \quad (\text{Ec. 35})$$

Donde $[u]$ representa el valor entero de u . Así que con los incrementos de un proceso de Lévy se reemplaza la secuencia $\{\varepsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ y se requiere introducir el siguiente proceso auxiliar $\{X_t, t \geq 0\}$.

$$X_t = \eta t - \sum_{0 < s \leq t} \log(1 + \phi \Delta L_s^2)$$

Para lo cual $\mathbb{E} b e^{-cX_t} = e^{t\Psi(c)}$ donde $\Psi(c)$ es el exponente de Laplace.

$$\Psi(c) = -\eta c + \int_{\mathbb{R}} \left[(1 + \phi x^2)^c - 1 \right] \nu_L(dx)$$

Donde $\nu_L(\cdot)$ es la medida de Lévy del proceso L , entonces para cada $u \geq 0$ y $t > u$, el proceso de varianza se puede reescribir como:

$$\sigma_i^2 = \beta e^{-(X_t - X_u)} \int_u^t e^{-(X_u - X_s)} ds + e^{-(X_t - X_u)} \sigma_u^2.$$

El proceso $\{\sigma_t^2, t \geq 0\}$ satisfacen¹⁴ la siguiente ecuación diferencial:

$$d\sigma_t^2 = \beta dt + \sigma_{t-}^2 e^{X_{t-}} d(e^{-X_t}).$$

Cuya solución está dada por:

$$\sigma_t^2 = \beta t + \log \delta \int_0^t \sigma_s^2 ds + \frac{\lambda}{\delta} \sum_{0 < s < t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 + \sigma_0^2. \quad (\text{Ec. 36})$$

Al considerar $\eta = -\log \delta$ y $\phi = \frac{\lambda}{\delta}$ entonces se puede reescribir la ecuación (36) como:

$$d\sigma_t^2 = (\beta - \eta \sigma_{t-}^2) dt + \phi \sigma_{t-}^2 d[L, L]_t^d \quad (\text{Ec. 37})$$

Donde $[L, L]_t^d$ es la parte discreta de la variación cuadrática del proceso de Lévy definida como

$$[L, L]_t^d := \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta L_s)^2. \quad (\text{Ec. 38})$$

Los pasos anteriores conllevan a definir al modelo COGARCH(1, 1) como la solución $G = (G_t)_{t \geq 0}$ para la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$\begin{aligned} dG_t &= \sigma_{t-} dL_t \\ d\sigma_t^2 &= (\beta - \eta \sigma_{t-}^2) dt + \phi \sigma_{t-}^2 d[L, L]_t^d \end{aligned} \quad (\text{Ec. 39})$$

donde $\beta > 0$, $\eta \geq 0$, $\phi \geq 0$, $G_0 = 0$, y σ_0^2 son independientes del proceso de Lévy L .

4.3. Modelo Levy-COGARCH

Para la construcción del modelo COGARCH (p, q) en Brockwell, P., Chandraa, E., & Lindner, A. (2006) plantean que el proceso $\{G_t, t \geq 0\}$ es un modelo COGARCH (p, q) si se satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

¹⁴ El desarrollo completo de esa condición es probado en el trabajo de Klüppelberg, C., Lindner, A., & Maller, R. (2004)

$$\begin{cases} dG_t &= \sqrt{V_t} dL_t \\ V_t &= a_0 + a_1 Y_{1,t-} + \dots + a_p Y_{p,t-} \\ dY_{1,t} &= Y_{2,t-} dt \\ \vdots &= \vdots \\ dY_{q-1,t} &= Y_{q,t-} dt \\ dY_{q,t} &= (-b_q Y_{1,t-} - \dots - b_q Y_{1,t-}) dt + V_t d[L, L]_t^d \end{cases}$$

donde $\{L_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy de variación finita de salto puro, la cantidad $\{[L, L]_t^d, t \geq 0\}$ es la parte discreta de la variación cuadrática del proceso Lévy L .

Y por lo tanto, el modelo se define mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{cases} dG_t &= \sqrt{V_t} dL_t \\ V_t &= a_0 + \mathbf{a}^T Y_{t-} \\ dY_t &= AY_{t-} dt + \mathbf{e}(a_0 + \mathbf{a}^T Y_{t-}) d[L, L]_t^d \end{cases} \quad (\text{Ec. 40})$$

donde p y q son números enteros tales que $q \geq p \geq 1$. El proceso de espacio de estados Y_t es un vector con q componentes:

$$Y_t = [Y_{1,t}, \dots, Y_{q,t}]^T \quad (\text{Ec. 41})$$

El vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^q$ es definido como:

$$\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_q]^T$$

con $a_{p+1} = \dots = a_q = 0$. y la matriz A acompañante $q \times q$ es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_q & -b_{q-1} & \dots & -b_1 \end{bmatrix}$$

El vector $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^q$ contiene cero entradas excepto el último componente que es igual a uno, y $[L, L]_t^d$ es como en la ecuación (38).

CAPÍTULO 5. Estimación del Modelo Lévy-COGARCH

El proceso COGARCH (q, p) de Brockwell et al. (2006) se introdujo con el objetivo de permitir una gama más amplia de estructuras de autocorrelación para el proceso de volatilidad que las permitidas por el modelo COGARCH (1,1) según lo descrito por Brockwell, P. J. (2014).

Como se explicó en el capítulo anterior, en el trabajo de Brockwell et al. (2006) se construyó el modelo COGARCH (p, q) utilizando la representación en el espacio de estados de un modelo CARMA (q, p-1) para el proceso de la varianza.

El proceso de la volatilidad está definido por $(V(t))_{t \geq 0}$ con parámetros $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \beta$ y un proceso de Lévy M por

$$V(t) = \beta + \mathbf{b}'\mathbf{X}(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{Ec. 42})$$

donde el proceso de estado $\mathbf{X} = (\mathbf{X}(t))_{t \geq 0}$ es la única solución de la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t-)dt + \mathbf{e}_p V(t-)d[M, M]_t^{(d)} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t-)dt + \mathbf{e}_p (\beta + \mathbf{b}'\mathbf{X}(t-))d[M, M]_t^{(d)} \end{aligned}$$

Con valor inicial $\mathbf{X}(0)$, independiente de M . Si el proceso $(V(t))_{t \geq 0}$ es seguramente no negativo, entonces

$G = (G(t))_{t \geq 0}$ definido por

$$G(0) = 0, \quad dG(t) = \sqrt{V(t-)}dM(t), \quad (\text{Ec. 43})$$

es un proceso COGARCH (q, p) con parámetros $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \beta$ y que impulsa el proceso Lévy M .

De acuerdo con Brockwell, P. J. (2014) se puede demostrar que para $p = q = 1$ esta definición es equivalente a la definición anterior del proceso COGARCH (1,1).

En el trabajo de Brockwell et al. (2006) se garantiza la existencia de una solución estrictamente estacionaria $(V(t))_{t \geq 0}$ y su positividad, y también muestran que $(V(t))_{t \geq 0}$ tiene la misma estructura de autocorrelación que un proceso CARMA (p, q - 1). En condiciones adecuadas, se muestra además que los incrementos no superpuestos de G no están correlacionados, mientras que sus cuadrados no lo están. Esto es,

$$\text{Cov}\left((G_t - G_{t-r})^2, (G_{t+h} - G_{t+h-r})^2\right) = \mathbf{b}'\mathbf{e}^{(A+EM_t^2\mathbf{e}\mathbf{b}')h}H_r, \quad h \geq r > 0, \quad (\text{Ec. 44})$$

donde $H_r \in \mathbb{C}^p$ es independiente de h .

De acuerdo con Brockwell, P. J. (2014) al observar que la volatilidad (V_n) de un proceso GARCH(q, p) se puede considerar como un proceso ARMA (p, q - 1) "self-exciting" conducido por $(V_{n-1}\varepsilon_{n-1}^2)$ junto con la "corrección media" β . Lo anterior motivó la definición del proceso de volatilidad $(V(t))_{t \geq 0}$ de un proceso GARCH (q, p) de tiempo continuo como un proceso CARMA (p, q - 1) de "autoexcitación media corregida" impulsado por un ruido apropiado. De ahí que, en congruencia con el desarrollo de esta tesis, se puede introducir un ruido de Lévy tipo VG. Incluso cualquier otro tipo como los mencionados en el capítulo 1.

5.1. Simulación

Aunque Stefano M. Iacus y Lorenzo Mercuri, implementaron en su trabajo dos esquemas diferentes para la simulación del modelo COGARCH (p, q). Mediante el primer esquema, se muestran dos casos, uno en donde las condiciones de estacionariedad y no negatividad para el proceso de varianza V_n no son las del proceso original, mientras que en el segundo caso el proceso de varianza discretizada V_n asume valores negativos en tanto que el proceso verdadero es no negativo con probabilidad uno.

El primero se trata de un esquema simple de Euler-Maruyama que se basa en la discretización del sistema de la (Ec. 40) sobre una cuadrícula regular en $[0, T]$ con N intervalos de longitud Δt .

A continuación, se enlistan los pasos que siguen los algoritmos:

- I. Generar la trayectoria del proceso Lévy subyacente L_t muestreado en la cuadrícula $t_i = i \cdot \Delta t, i = 0, 1, \dots, N$;
- II. dadas las condiciones iniciales $Y_0 = y_0$ y $G_0 = 0$ se itera la siguiente ecuación

$$Y_n = (I + B\Delta t)Y_{n-1} + \mathbf{e}(a_0 + \mathbf{a}^T Y_{n-1})\Delta[LL]_n^d, \quad (\text{Ec. 45})$$

donde $\Delta[LL]_n^d$ se aproxima como $\Delta[LL]_n^d = (L_n - L_{n-1})^2$;

- III. ya que se tiene la trayectoria del proceso de estado Y_n , el proceso de varianza y el proceso COGARCH G_n se obtienen mediante las siguientes ecuaciones:

$$V_n = a_0 + \mathbf{a}^T Y_n, \quad (\text{Ec. 46})$$

y

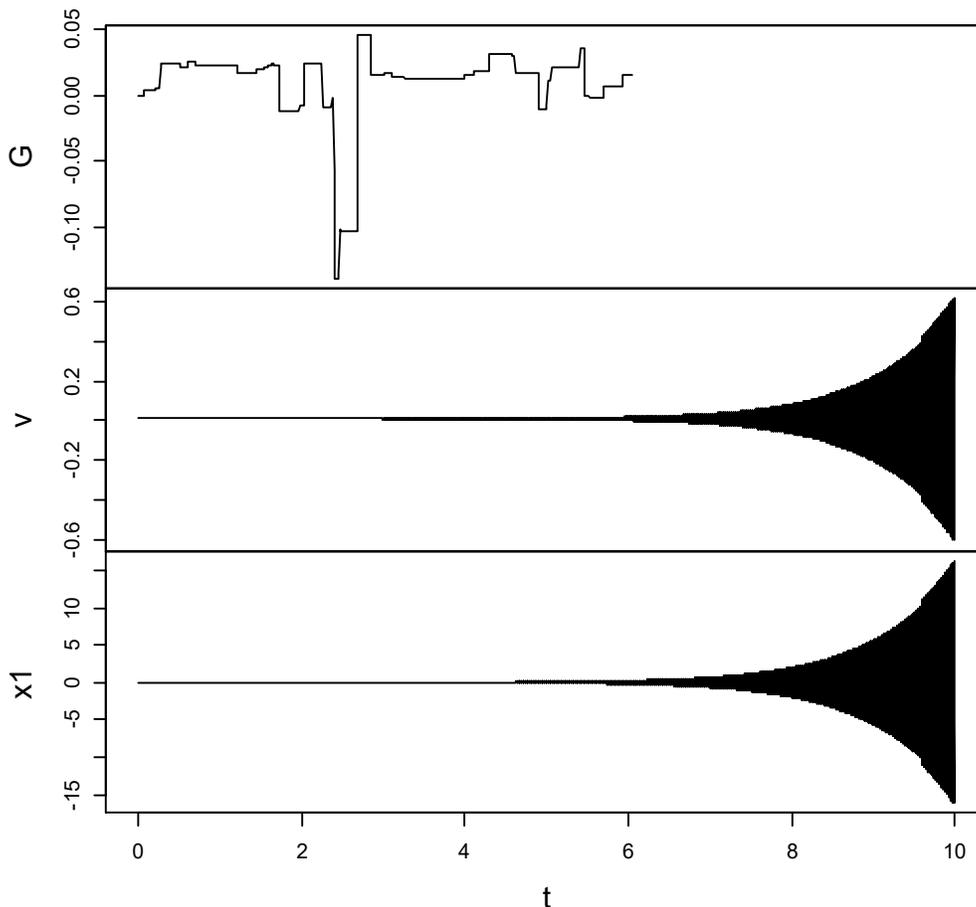
$$G_n = G_{n-1} + \sqrt{V_n}(L_n - L_{n-1}). \quad (\text{Ec. 47})$$

Lo anterior se muestra en el primer caso y, por otra parte, en cuanto al segundo caso del primer esquema, se necesita verificar que $a_0 > 0$ y $a_1 > 0$, para tener una solución no negativa para el proceso de varianza V_n .

Uno de los modelos en donde se cumple esto y en donde además la condición de estacionariedad estricta para el proceso COGARCH (1,1) está asegurada por $E[L^2] = 1$ y $a_1 - b_1 < 0$, con ambos requisitos se garantiza la existencia de la media incondicional estacionaria del proceso de varianza V_t , es en el modelo COGARCH (1,1) conducido por un proceso de Lévy tipo VG de Madan y Seneta (1988, 1990).

A continuación, se muestra mediante la siguiente gráfica, el efecto de la discretización en la simulación de un proceso COGARCH (1, 1) conducido por un proceso de Lévy tipo VG, de acuerdo con el primer esquema descrito anteriormente de Euler-Maruyama.

Gráfica 17 Modelo VG-COGARCH(1,1) con el esquema de Euler-Maruyama



Fuente: Elaboración propia con el paquete YUIMA en R¹⁵.

¹⁵ Alexandre Brouste, Masaaki Fukasawa, Hideitsu Hino, Stefano M. Iacus, Kengo Kamatani, Yuta Koike, Hiroki Masuda, Ryosuke Nomura, Teppei Ogihara, Yasutaka Shimuzu, Masayuki Uchida, Nakahiro Yoshida (2014). The YUIMA Project: A Computational

En trayectoria simulada en la gráfica 17, se puede ver cómo la discretización afecta la simulación, aunque el proceso de varianza es teóricamente positivo.

Este problema puede evitarse utilizando una discretización diferente¹⁶ de Y aplicando el Lema de Itô para semimartingalas a la transformación $e^{-Bt}Y_t$ de acuerdo con (Protter 1990), como se muestra en el trabajo de Stefano M. Iacus y Lorenzo Mercuri (2018).

Al reescribir la ecuación con dicho procedimiento, se tiene lo siguiente:

$$Y_n = a_0 e^{B\Delta t} e \Delta [LL]_n^d + e^{B\Delta t} (I + e a^T \Delta [LL]_n^d) Y_{n-1}, \quad (\text{Ec. 48})$$

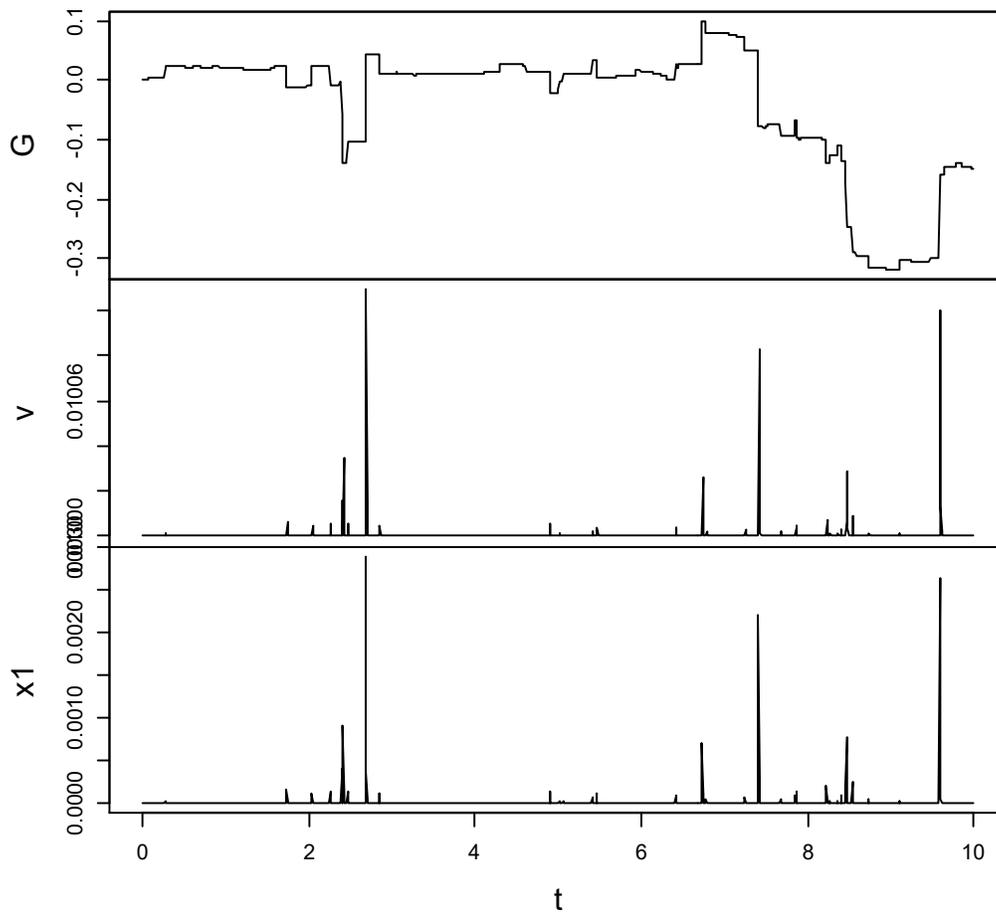
con $\Delta [LL]_n^d = [LL]_n^d - [LL]_{n-1}^d$ entonces, en el sistema de la (Ec. 40) se utiliza la Ec. 48 para reemplazarse en el esquema de Euler original.

Framework for Simulation and Inference of Stochastic Differential Equations. Journal of Statistical Software, 57(4), 1-51. URL <http://www.jstatsoft.org/v57/i04/>.

¹⁶ Lo que hacen es sustituir la definición de Y_t en el sistema de la (Ec. 40).

Con el procedimiento anterior, se obtiene el segundo esquema de discretización al cual Stefano M. Iacus y Lorenzo Mercuri lo nombran como método de argumento="mixto" en el método de simulación.

Gráfica 18 Modelo VG-COGARCH(1,1) con esquema Mixto



Fuente: Elaboración propia con el paquete YUIMA en R¹⁷.

A diferencia de la trayectoria simulada en la gráfica 17, con el esquema Mixto expuesto en la trayectoria simulada de la gráfica 18, se muestra la estabilidad del método.

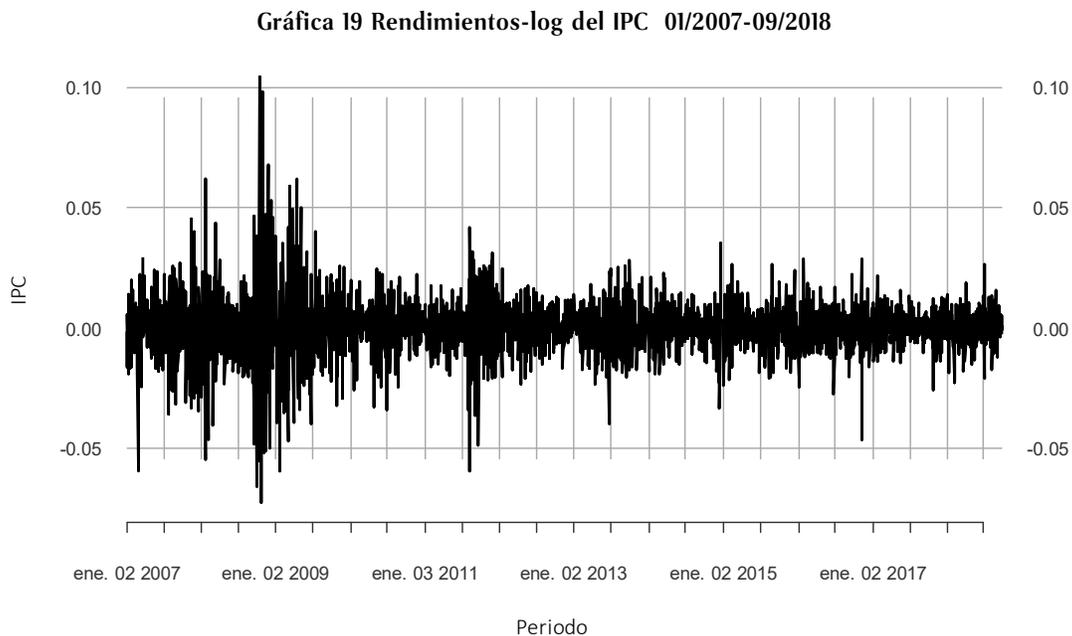
¹⁷ Alexandre Brouste, Masaaki Fukasawa, Hideitsu Hino, Stefano M. Iacus, Kengo Kamatani, Yuta Koike, Hiroki Masuda, Ryosuke Nomura, Teppei Ogihara, Yasutaka Shimuzu, Masayuki Uchida, Nakahiro Yoshida (2014). The YUIMA Project: A Computational Framework for Simulation and Inference of Stochastic Differential Equations. Journal of Statistical Software, 57(4), 1-51. URL <http://www.jstatsoft.org/v57/i04/>.

5.2. Comparación GARCH(1,1) y COGARCH(1,1)

Siguiendo el ejemplo que muestran Stefano M. Iacus y Lorenzo Mercuri, adaptado de Bianchi et al. (2016), donde se verifica la relación que existe entre los modelos GARCH(1,1) y COGARCH(1,1) en las estimaciones a partir de datos reales.

Entonces, para estos dos modelos se consideran los datos reales del IPC hasta el 28/09/2018. Lo que se hace es descargar los datos del IPC mediante quantmod, y se trata de ajustarlos a los rendimientos-log sin tendencia GARCH (1,1) usando el paquete rugarch (Ghalanos 2015) y luego un COGARCH (1,1) usando yuima como se muestra a continuación.

Un hecho notable dentro del comportamiento de los rendimientos-log sobre el IPC, es que exhiben un efecto de agrupamiento de la volatilidad (clusters de volatilidad) como se muestra en la siguiente gráfica.



Una vez que se obtienen los primeros valores, después se usan los valores convertidos como punto inicial del optimizador QMLE y se aplica la transformada inversa de COGARCH (1,1) a GARCH (1,1).

```
getSymbols("^MXX",from="2006-12-31",to="2018-09-29")
S <- MXX$MXX.Close
X <- na.omit(diff(log(S)))
mX <- mean(X)
X <- X - mX
plot(X, main="Rendimientos-Log del IPC")
require(rugarch)
spec <- ugarchspec(variance.model =
```

```

list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = FALSE))
fit_GARCH <- ugarchfit(data = X, spec = spec)
GARCH11_param <- coef(fit_GARCH)
GARCH11_param
  omega      alpha1      beta1
1.271485e-06 8.045779e-02 9.105472e-01
-----
Delta <- 1/252
Par_GarToCog<- function(GARCH11_param, dt, names=NULL){
  if(is.null(names))
    names <- names(GARCH11_param)
  my.omega <- GARCH11_param["omega"]
  my.alpha <- GARCH11_param["alpha1"]
  my.beta <- GARCH11_param["beta1"]
  a1 <- my.alpha/dt
  b1 <- -log(my.beta)/dt
  a0 <- my.omega/(b1*dt^2)
  qmleparlnGARCH <- c(a0, a1, b1)
  names(qmleparlnGARCH) <- c("a0", "a1", "b1")
  return(qmleparlnGARCH) }
-----
Par_GarToCog(GARCH11_param, Delta)
a0      a1      b1
0.003419234 20.275089580 23.614636638
start <- as.list(Par_GarToCog(GARCH11_param, Delta))
modelCog11 <- setCogarch(p=1, q=1, measure =
list(intensity="1", df=list("dnorm(z, 0, 1)")), measure.type="CP")
IP.data <- setData(cumsum(X), delta = Delta)
Cog11 <- setYuima(data = IP.data, model = modelCog11)
Cog11.fit <- qmle(yuima = Cog11, grideq=TRUE,
start = c(start, y1 = 0.1),
aggregation = FALSE, method = "Nelder-Mead")
COGARCH11_par <- coef(Cog11.fit)
COGARCH11_par
a0      a1      b1
0.003257337 21.688828306 23.135529548
-----
Par_CogToGar<- function(COGARCH11_param, dt, names=NULL){
  a0 <- COGARCH11_param["a0"]
  a1 <- COGARCH11_param["a1"]
  b1 <- COGARCH11_param["b1"]
  my.omega <- a0*b1*dt^2
  my.alpha <- a1*dt
  my.beta <- exp(-b1*dt)
  qmleparlnGARCH <- c(my.omega, my.alpha, my.beta)
  names(qmleparlnGARCH) <- c("omega", "alpha1", "beta1")
  return(qmleparlnGARCH) }
Par_CogToGar(COGARCH11_par, Delta)
omega      alpha1      beta1
0.0000011867 0.0860667790 0.9122806035
-----
GARCH11_param
  omega      alpha1      beta1
1.271479e-06 8.045670e-02 9.105478e-01

```

Con lo anterior se puede comprobar que después de la reparametrización, los parámetros estimados(en negritas) para los dos modelos tanto COGARCH (1,1) como GARCH (1,1) son muy cercanos y su diferencia es mínima.

5.3. Estimación

De acuerdo con la revisión de la literatura descrita en capítulos anteriores, se sabe que existen diferentes métodos para estimar los parámetros del modelo COGARCH(1, 1). Por ejemplo, Stefano M. Iacus y Lorenzo Mercuri muestran que es posible emplear los que se describen a continuación:

- 1) Estimación de verosimilitud cuasimáxima¹⁸ (QMLE) por sus siglas en inglés, la cual se basa en una secuencia de aproximaciones de procesos estocásticos discretos al proceso COGARCH y cuando se obtiene la función de pseudo-verosimilitud para el caso del modelo COGARCH (p, q), entonces las estimaciones QMLE del modelo se pueden obtener como solución del problema de optimización¹⁹.
- 2) Método generalizado de estimación de momentos (GMM) por sus siglas en inglés, cuyo procedimiento de estimación es similar al caso CARMA (p, q) empleado en el capítulo anterior. Y una vez obtenidas las estimaciones del vector θ mediante el método GMM, es posible estimar los parámetros en la distribución de Lévy utilizando los incrementos estimados.

Ambos métodos se pueden utilizar, pero como se revisó en la sección anterior de este capítulo. Se tomó como punto de referencia el ejemplo aplicado a los precios de acciones de Next Plc y el de datos intradía para el índice S&P500 como se muestra en los ejemplos de los trabajos de Iacus y Mercuri; para poder adaptarlo a los datos del IPC se realizó lo siguiente:

- i. Primero se consideró un conjunto de datos correspondientes a la trayectoria de los precios diarios de cierre del IPC.
- ii. También se requirió el paquete rugarch (Ghalanos 2015) para especificar el modelo GARCH y poderlo comparar con el COGARCH-VG mediante el paquete YUIMA.
- iii. Ya que se obtuvieron los parámetros del modelo GARCH(1,1), se convirtieron los parámetros a un modelo COGARCH(1,1) con un ruido VG.
- iv. Posteriormente se utilizaron los valores convertidos del modelo continuo como punto inicial del optimizador para la estimación verosimilitud cuasimáxima QMLE.
- v. Mediante la transformación inversa se pasó de COGARCH(1,1) a GARCH(1,1) para recuperar nuevamente los parámetros y poder compararlos.

Los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla, en donde se puede observar que después de la reparametrización de la metodología aplicada, son tan aproximados que en el caso de beta 1 el valor del parámetro es el mismo.

¹⁸ La extensión del método para el modelo COGARCH (p, q) fue propuesto en Iacus et al. (2015)

¹⁹ Para ver la solución completa del problema de optimización, se sugiere revisar la ecuación (58) de Iacus, S. M., Mercuri, L., y Rroji, E. (2018).

Tabla 6 Comparación de Parámetros estimados

Parámetros	GARCH (1,1)	Estimación reparametrizada de GARCH(1,1) a COGARCH-VG(1,1)
Omega	1.271485e-06	1.271479e-06
Alfa 1	8.045779e-02	8.045670e-02
Beta 1	9.105472e-01	9.105478e-01

Fuente: Elaboración propia.

Con lo anterior, se podría decir que se cumple el objetivo 3 de esta tesis. Es decir, que es posible mejorar los pronósticos obtenidos por las metodologías anteriores, empleando un modelo en tiempo continuo como el COGARCH-VG siendo más realista por sus características ya descritas anteriormente.

CONCLUSIONES

Al inicio de este trabajo se contextualizó sobre las crisis ocurridas como consecuencia de caídas en los mercados financieros. Pero no se habló sobre la reciente crisis económica de 2020 causada por la repentina propagación mundial del coronavirus COVID-19, que sin lugar a duda afectó a la economía mundial de acuerdo con datos de la OCDE; aún no se han recuperado las economías del mundo, dado que han sido afectados diversos sectores. “Pero aunque el PIB mundial ha aumentado ahora por encima de su nivel prepandémico, la recuperación sigue siendo desigual y los países que salen de la crisis se enfrentan a diferentes desafíos.”(OCDE, 2021)

Aunque todavía sigue en recuperación la economía mundial, se siguen combatiendo los efectos del desempleo, la caída del PIB, y las presiones inflacionarias que preocupan principalmente a economías como México y Estados Unidos.

Sigue habiendo fenómenos que son difíciles o casi imposibles de pronosticar como lo fue esta pandemia, pero que su evidencia del impacto en los mercados financieros como el caso del índice S&P500 el cual perdió un tercio de sus puntos en menos de una semana tras confirmarse el primer caso de COVID-19 en Estados Unidos, dejó como antecedente su trayectoria a la baja en los mercados, algo similar sucedió para el caso del IPC en México unos días después. Que sirve como información útil para considerarla al realizar pronósticos de eventos extremos y aminorar los efectos negativos al tomar decisiones tras un fenómeno atípico.

El IPC sirve como referencia y subyacente de productos financieros, además de ser un indicador clave del mercado accionario mexicano, utilizado como referencia para comparar desempeños de portafolios de inversión, etc. Por lo que la responsabilidad de su pronóstico atinado es primordial, siendo referencia para otros productos financieros que implican decisiones de inversión. Recordemos que en el capítulo 1 se

mencionó que de acuerdo con Minsky, sobrestimar las buenas noticias implica consecuencias graves para la economía, por lo que es importante no hacerlo. Y como en finanzas, esas noticias se observan en el comportamiento de los precios de los activos, cuando se trata de inversiones, el comportamiento de los precios de los activos debe ser previsto considerando toda la información del mercado.

Para el caso del modelo CARMA, la ergodicidad del sistema es capaz de capturar los efectos de curtosis y asimetría que suceden dentro del mercado, por lo que el análisis permite formarse expectativas más realistas sobre el comportamiento del precio de cierre del IPC y sus rendimientos futuros ante efectos asimétricos en su volatilidad, como se pretendía en la hipótesis de este trabajo.

Emplear modelos que incorporen elementos, lo cuales nos permitan considerar características reales de las series financieras, es un gran avance para la investigación aplicada en este campo de la econometría financiera. Como en el caso del Modelo COGARCH-VG(1,1) aplicado a el IPC, en donde al ser una serie financiera con datos espaciados irregularmente debido a los días inoperables de la Bolsa Mexicana de Valores, ó interrupciones en su horario de operación del mercado, incluso fines de semana y días festivos. Lo que implican datos faltantes dentro del periodo de análisis comprendido.

Se hubiese requerido emplear técnicas para omitir los datos faltantes, y aunque en el periodo analizado fueron 10, parecen no ser muchos. Sin embargo, con los beneficios de ajustar el modelo continuo a nuestros datos hizo posible que se realizara la estimación de los parámetros para poderlos comparar.

Los avances en la investigación de la econometría financiera aún tienen muchos desafíos por resolver y deberían estar encaminados en encontrar los mejores modelos que sean capaces de considerar en sus metodologías, elementos que permitan adaptarse a las características reales de las series financieras. Se entiende que muchas veces los impedimentos son requisitos técnicos o computacionales para lograrlo.

Sin embargo, el esfuerzo de muchas áreas como el caso de la computación y programación son un elemento importante como punto de partida. Con investigaciones y la creación de herramientas como paquetes dentro de los lenguajes de programación, o software como los empleados en el desarrollo de este trabajo, hacen parecer las cosas un poco menos complicadas a la hora de implementar métodos econométricos robustos como el caso de los procesos de Lévy.

Quedan muchos elementos a considerar fuera de esta investigación como la aplicación de procesos estocásticos de Lévy diferentes a el caso Varianza Gama, utilizando otras fuentes de ruido para el proceso de Lévy, incluso aplicaciones a modelos de riesgo para el caso de otras variables financieras.

BIBLIOGRAFÍA

- Applebaum, D. (2004). Lévy processes and stochastic calculus. Cambridge: Cambridge University Press
- Asante, P. K. (2020). Lévy Processes: Characterizing Volcanic and Financial Time Series.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Jensen, J. L., & Sørensen, M. (1998). Some stationary processes in discrete and continuous time. *Advances in Applied Probability*, 30(4), 989-1007.
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2002). Financial volatility, Lévy processes and power variation. *Unpublished book, Nuffield College*.
- Bartlett, M. S. (1946). On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 8(1), 27-41.
- Bertoin, J. (1996). *Lévy processes* (Vol. 121, pp. x+265). Cambridge: Cambridge university press.
- Bianchi, F., Mercuri, L., & Rroji, E. (2016). Measuring risk with cogarch (p, q) models. *Disponibile en SSRN 2852858*.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637-654.
- Black, F. (1976). "The pricing of commodity contracts". En: *Journal of Financial Economics*, 3
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
- Bouzianis, G., Hughston, L. P., Jaimungal, S., & Sánchez-Betancourt, L. (2021). Lévy-Ito models in finance. *Probability Surveys*, 18, 132-178.
- Box, G. E., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., & Ljung, G. M. (2015). *Time series analysis, control, and forecasting*. Hoboken.
- Brandt, A. (1986). The stochastic equation $y_{n+1} = a_n y_n + b_n$ with stationary coefficients. *Advances in Applied Probability*, 18(1), 211-220.
- Brockwell, P. J. (2001). Continuous-time ARMA processes. *Handbook of statistics*, 19, 249-276.
- Brockwell, P. J., & Marquardt, T. (2005). Lévy-driven and fractionally integrated ARMA processes with continuous time parameter. *Statistica Sinica*, 477-494.
- Brockwell, P., Chadraa, E., & Lindner, A. (2006). Continuous-time GARCH processes. *Annals of Applied Probability*, 16(2), 790-826.
- Brockwell, P. J. (2009). Lévy-driven continuous-time ARMA processes. In *Handbook of financial time series* (pp. 457-480). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Brockwell, P. J., Davis, R. A., & Yang, Y. (2011). Estimation for non-negative Lévy-driven CARMA processes. *Journal of Business & Economic Statistics*, 29(2), 250-259.
- Brockwell, P., & Lindner, A. (2013). Integration of CARMA processes and spot volatility modelling. *Journal of Time Series Analysis*, 34(2), 156-167.
- Brockwell, P. J. (2014). Recent results in the theory and applications of CARMA processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 66(4), 647-685.
- Brooks, C. (2014). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge university press.
- Brouste, A., Fukasawa, M., Hino, H., Iacus, S. M., Kamatani, K., Koike, Y., ... Yoshida, N. (2014). The YUIMA project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations. *Journal of Statistical Software*, 57(4), 1-51. <https://doi.org/10.18637/jss.v057.i04>
- Chadraa, E. (2009). *Statistical modeling with COGARCH (p, q) processes*. Colorado State University.

- Chandra, P. (2017). *Investment analysis and portfolio management*. McGraw-hill education.
- Colander, D., Föllmer, H., Haas, A., Goldberg, M. D., Juselius, K., Kirman, A., ... & Sloth, B. (2009). The financial crisis and the systemic failure of academic economics. *Univ. of Copenhagen Dept. of Economics Discussion Paper*, (09-03).
- Corbet, S., Hou, G., Hu, Y., & Oxley, L. (2020). The influence of the COVID-19 pandemic on asset-price discovery: Testing the case of Chinese informational asymmetry.
- Coulon, Y. (2019). *Rational Investing with Ratios: Implementing Ratios with Enterprise Value and Behavioral Finance*. Springer Nature.
- Doob, J. L. (1944). The elementary Gaussian processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 15(3), 229-282.
- Durbin, J. (1960). *Efficient fitting of linear models for continuous stationary time series from discrete data* (No. MS249). North Carolina Univ At Chapel Hill Dept Of Statistics.
- Durbin, J. (1961). Efficient fitting of linear models for continuous stationary time series from discrete data. *Bull. Int. Statist. Inst.* 38, 273-281
- Durbin, J., & Koopman, S. J. (2012). *Time series analysis by state space methods*. Oxford University Press.
- Engle RF (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
- Ghalanos, A. (2015). rugarch: Univariate GARCH models. R package version 1.3-6
- Guerrero Guzmán, V. M. (2003). *Análisis estadístico de series de tiempo económicas* (No. 04; Q280, G8 2003.).
- Gyöngy, I., & Wu, S. (2021). Itô's formula for jump processes in L_p -spaces. *Stochastic Processes and their Applications*, 131, 523-552.
- Haug S, Klüppelberg C, Lindner A, Zapp M (2007). "Method of Moment Estimation in the COGARCH(1, 1) Model." *Econometrics Journal*, 10(2), 320-341.
- Iacus, S. M. & Mercuri, L. (2014). Estimation of Lévy CARMA models in the yuima package: Application on the financial time series. In *COMPSTAT 2014 21st International Conference on Computational Statistics*, 451-458.
- Iacus, S. M., & Mercuri, L. (2015). Implementation of Lévy CARMA model in Yuima package. *Computational Statistics*, 30(4), 1111-1141.
- Iacus, S. M., Mercuri, L., & Rroji, E. (2015). Discrete time approximation of a COGARCH (p, q) model and its estimation (Preliminary Version). *Disponibile en SSRN 2684726*.
- Iacus, S. M., & Yoshida, N. (2017). *Simulation and inference for stochastic processes with YUIMA*. Springer Series in Statistics, Springer NY.
- Iacus, S. M., Mercuri, L., & Rroji, E. (2018). Discrete-Time Approximation of a Cogarch (p, q) Model and its Estimation. *Journal of Time Series Analysis*, 39(5), 787-809.
- Karlis, D. (2002). An EM type algorithm for maximum likelihood estimation of the normal-inverse Gaussian distribution. *Statistics & probability letters*, 57(1), 43-52.
- Klüppelberg, C., Lindner, A., & Maller, R. (2004). A continuous-time garch process driven by a Lévy process: Stationarity and second-order behaviour. *Journal of Applied Probability*, 41(3), 601-622.
- Kumari, S. N. (2020). Lévy Processes in Gold Option Modeling. *International Journal of Economics and Finance*, 12(2).
- Loregian, A., Mercuri, L., & Rroji, E. (2012). Approximation of the variance gamma model with a finite mixture of normals. *Statistics & Probability Letters*, 82(2), 217-224
- Madan, D. B., & Seneta, E. (1990a). The variance gamma (v.g.) model for share market returns. *Journal of Business*, 64(4), 511-524.

- Madan, D. B., & Seneta, E. (1990b). The variance gamma (v.g.) model for share market returns. *The Journal of Business*, 63(4), 511-524.
- Madan, D. B., Carr, P. P., & Chang, E. C. (1998). The variance gamma process and option pricing. *Review of Finance*, 2(1), 79-105.
- Madan, D. B., & Wang, K. (2021). Implied Price Processes Anchored in Statistical Realizations. *Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3864562> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3864562>*
- Marín, J. M., Rodríguez-Bernal, M. T., & Romero, E. (2015). Data cloning estimation of GARCH and COGARCH models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(9), 1818-1831.
- Martínez-Palacios, T., Martínez-Sánchez, J. F., & Venegas-Martínez, F. (2015). Consumption and portfolio decisions of a rational agent that has access to an American put option on an underlying asset with stochastic volatility. *International Journal on Pure and Applied Mathematics*.
- McLachlan, G. J., & Krishnan, T. (2008). *The EM algorithm and extensions*. John Wiley and Sons.
- Minsky, H. P. (1992). The financial instability hypothesis. *The Jerome Levy Economics Institute Working Paper*, (74).
- Nelson, D. B. (1990). ARCH models as diffusion approximations. *Journal of econometrics*, 45(1-2), 7-38.
- O.E., B.-N., & N., S. (2002). Financial volatility, Lévy processes and power variation. Nuffield College, Oxford: Unpublished book. Retrieved from www.levyprocess.org
- OCDE. (2021, septiembre). *OECD Economic Outlook, Interim Report | Keeping the recovery on track*. OECD. <https://www.oecd.org/economic-outlook/>
- Ortiz-Ramírez A., Daza, A. S., & Venegas-Martínez, F. (2011). Un modelo GARCH de valuación de derivados: una aplicación a opciones europeas sobre el IPC. *Análisis Económico*, 26(62), 31-50.
- Phillips, A. W. (1959). The estimation of parameters in systems of stochastic differential equations. *Biometrika*, 46(1-2), 67-76.
- Protter, P. (1990). *Stochastic integration and differential equations*. New York: Springer.
- Qu, Y., Dassios, A., & Zhao, H. (2021). Exact simulation of gamma-driven Ornstein-Uhlenbeck processes with finite and infinite activity jumps. *Journal of the Operational Research Society*, 72(2), 471-484.
- Rachev, S. T., Kim, Y. S., Bianchi, M. L., & Fabozzi, F. J. (2011). *Financial models with Lévy processes and volatility clustering* (Vol. 187). John Wiley & Sons.
- Reyes-García, N. J., Venegas-Martínez, F., & Cruz-Aké, S. (2018). Un análisis comparativo entre GARCH-M, EGARCH y PJ-RS-EV para modelar la volatilidad de Índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. *Panorama Económico*, 14(27), 34-34.
- Rojas, O., & Trejo-Pech, C. (2014). Financial time series: Stylized facts for the Mexican stock exchange index compared to developed markets. *arXiv preprint arXiv:1412.3126*.
- Sato, K. I., Ken-Iti, S., & Katok, A. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge university press.
- Shirvani, A., Rachev, S. T., & Fabozzi, F. J. (2019). Multiple subordinated modeling of asset returns. *arXivpreprint arXiv:1907.12600*.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. England: John Wiley & Sons, Ltd.
- Shin Kim, Y., T. Rachev, S., Leonardo Bianchi, M., & J. Fabozzi, F. (2011). *Financial Models with Lévy Processes and Volatility Clustering*. United States of America: John Wiley & Sons.

- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models* (Vol. II). Springer Science & Business Media.
- Todorov, V., & Tauchen, G. (2006). Simulation methods for Lévy-driven continuous-time autoregressive moving average (CARMA) stochastic volatility models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 24(4), 455-469.
- Todorov, V. (2011). Econometric analysis of jump-driven stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, 160(1), 12-21.
- Tong, H. (1983). Threshold models in non-linear time series analysis. Lecture notes in statistics, No. 21.
- Tong, H. (1990). *Non-linear time series: a dynamical system approach*. Oxford University Press.
- Venegas-Martínez, F. (2007). Una introducción a los procesos de Lévy y su aplicación a la valuación de opciones. *Panorama Económico*, 4(2), 35-68.
- Venegas-Martínez, F. (2008). Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. Segunda edición. Cengage Learning. Mexico.

Índice de gráficas

Gráfica 1 Trayectorias simuladas de un proceso de Lévy tipo Gama (GP).....	12
Gráfica 2 Trayectorias simuladas de un proceso de Lévy tipo Varianza Gama (VG).....	14
Gráfica 3 Trayectorias de un proceso Varianza Gama (VG) como subordinador de Wiener	15
Gráfica 4 Distribución varianza gama (VG) teórica y empírica	15
Gráfica 5 Índice de Precios y Cotizaciones 01/2007-09/2019	22
Gráfica 6 Descomposición de serie temporal IPC.....	23
Gráfica 7 Comparación ACF y PACF.....	24
Gráfica 8 Comparación de criterios AIC, BIC y HQ por Modelo	25
Gráfica 9 Rendimientos logarítmicos sobre el IPC y su ACF	27
Gráfica 10 Función de autocorrelación de los incrementos.....	28
Gráfica 11 Densidades Gaussiana y VG estimadas de los incrementos de Lévy.....	30
Gráfica 12 Modelo VG CARMA (2,1)	31
Gráfica 13 Simulación CARMA (2,1) $Y_0 = 43011.27$	31
Gráfica 14 Residuos del Modelo ARIMA(2,1,1)	32
Gráfica 15 Pronóstico ARIMA(2,1,1) en Eviews	33
Gráfica 16 Pronóstico ARIMA(2,1,1) en R.....	34
Gráfica 17 Modelo VG-COGARCH(1,1) con el esquema de Euler-Maruyama	43
Gráfica 18 Modelo VG-COGARCH(1,1) con esquema Mixto	45
Gráfica 19 Rendimientos-log del IPC 01/2007-09/2019.....	46

Índice de tablas

Tabla 1 Comparación de estadísticos contra la distribución normal.....	22
Tabla 2 Criterios de selección por modelo.....	25
Tabla 3 Resultados del pronóstico ARIMA(2,1,1) en Eviews.....	33
Tabla 4 Resultados del pronóstico ARIMA(2,1,1) en R.....	34
Tabla 5 Comparación estadística sobre los pronósticos	35
Tabla 6 Comparación de Parámetros estimados.....	49