



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
UNIDAD ZACATENCO**

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS

**DINÁMICA DE SÓLIDOS POR EL MÉTODO DIRECTO DE
ECUACIONES INTEGRALES DE FRONTERA**

**TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN ESTRUCTURAS**

PRESENTA:

ROGELIO ARIAS HERNÁNDEZ

**DIRECTORES DE TESIS: JUAN JOSÉ PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE
FRANCISCO CASANOVA DEL ANGEL**

México D. F. 2008



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D.F. siendo las 18:00 horas del día 20 del mes de Agosto del 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A.-U.Z. para examinar la tesis de grado titulada: "DINÁMICA DE SÓLIDOS POR EL MÉTODO DIRECTO DE ECUACIONES INTEGRALES DE FRONTERA".

Presentada por el alumno:

ARIAS

Apellido paterno

HERNÁNDEZ

Apellido materno

ROGELIO

Nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	6	5	7
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

DR. FRANCISCO CASANOVA DEL ANGEL

Director Externo

DR. JUAN JOSÉ PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE

DR. HÉCTOR AURELIANO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

DR. ESTEBAN FLORES MÉNDEZ

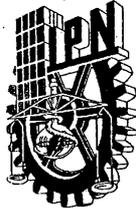
DR. NORBERTO DOMÍNGUEZ RAMÍREZ

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

M. EN C. PINO DURÁN ESCAMILLA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACIÓN





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 03 del mes de septiembre del año 2008, el que suscribe Rogelio Arias Hernández alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Estructuras con número de registro A050657, adscrito a la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Juan José Pérez Gavilán Escalante y del Dr. Francisco Casanova del Angel, y cede los derechos del trabajo titulado: "*Dinámica de Sólidos por el Método Directo de Ecuaciones Integrales de Frontera*", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección "ing_arias2003@yahoo.com.mx". Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Rogelio Arias Hernández

Nombre y firma

Dedicatoria

A mis padres Alfonso Arias y Ma. Sara Hernández por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi carrera.

A mis hermanos Alfonso, Juan, José Guadalupe, Juan Ricardo y Beatriz, que han sido participes en esta etapa de mi vida.

A todas aquellas personas que enriquecieron con sus ideas, este trabajo mi agradecimiento.

Agradecimientos

Agradezco a las instituciones y personas que participaron en la realización del trabajo, especialmente:

- Al Instituto Politécnico Nacional (IPN), por darme la oportunidad de concluir esta meta, a través de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura. Unidad Adolfo López Mateos (Esia-Zac.)
- A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por el financiamiento destinado, a través del programa de Apoyo de Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT).
- A mi tutor, Dr. Juan José Pérez Gavilán de la UNAM, por su apoyo y confianza, que fueron de gran ayuda en la realización de este trabajo.
- A mi tutor, Dr. Francisco Casanova del Angel del IPN, por enriquecer con sus ideas este trabajo.
- A los profesores de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Estructuras, por compartir su conocimiento a lo largo del programa de estudios.

Resumen

En el presente de trabajo, se estudia el modelo de múltiples regiones para la solución dinámica de sólidos por el método directo de ecuaciones integrales de frontera. Se desarrolla un algoritmo general y se realiza su implantación en un programa existente generalizándolo a múltiples regiones. Se valida la formulación y la implantación comparando la solución de algunos problemas con los resultados obtenidos utilizando elementos finitos y soluciones analíticas.

Al utilizar un programa existente de la literatura hecho para una sola región, se organiza la implantación de modo de aprovechar todos aquellos aspectos que tienen que ver con la integración y solución de las ecuaciones. Esto se logra haciendo que, inicialmente, cada región se analice en forma separada y como una sola. Los coeficientes de cada región se acomodan estratégicamente en las matrices de rigidez y en un paso final se imponen las condiciones de compatibilidad para los desplazamientos y las tracciones.

El trabajo está estructurado en tres capítulos que muestran el contenido descrito previamente, se hace una breve reseña histórica de los estudios realizados con el método y se estudia el modelo de múltiples regiones para la solución dinámica de sólidos. Finalmente, se presentan apéndices con aspectos de la integración numérica, la solución fundamental dinámica y sus derivadas y la organización de las variables que intervienen en el programa con multi-regiones.

Abstract

This work presents a study of multiple regions model for dynamic solution of solids using direct method of the boundary integral equations. A general algorithm is designed and implemented in an existing program with generalization on multiple regions. The formulation and the implementation are validated comparing some of the results with those obtained using finite element and analytical methods.

Using the existing program, from literature, for just a región, the implementation was organized in such a way as to make good use of all aspects related on integration and equations solutions. This is done by first analyzing each of the regions separately. The coefficients of each region are strategically accommodated in the rigidity matrix and the compatibility conditions for displacements and stresses are imposed as the final step.

This work contains 3 chapters, as earlier shown in the table of contents. A brief historical background of the studies earlier made using the method is made. The multiple regions model for dynamic solution of solids is studied. Finally the appendix, containing numerical integrations, fundamental dynamic solution, its proof and the organization of variables from the multi-region program is presented.

DINÁMICA DE SÓLIDOS POR EL MÉTODO DIRECTO DE ECUACIONES INTEGRALES DE FRONTERA

CONTENIDO GENERAL

RESUMEN ABSTRACT

	Pág.
Capítulo I: Generalidades	
I.1 Introducción	1
I.2 Estado del arte	3
I.3 Método de ecuaciones integrales de frontera	5
I.3.1 Ecuaciones de elasticidad lineal	5
I.3.2 Problema estático del método de ecuaciones integrales de frontera	7
I.3.3 Problema dinámico del método de ecuaciones integrales de frontera	8
I.3.4 Implantación del método para una región	11
I.4 Objetivo	14
I.5 Justificación	14
I.6 Alcances y metas	15
Capítulo II: Modelo de múltiples regiones por el BEM	
II.1 Generalización del modelo para múltiples regiones	16
II.2 Modelos de análisis	22
II.2.1 Modelo de dos regiones	22
II.2.2 Modelo de tres regiones	25
II.3 Planteamiento del algoritmo para problemas con múltiples regiones	31
II.4 Diagrama de flujo del modelo de múltiples regiones	34
Capítulo III: Validación y ejemplos	
III.1 Implantación del BEM para problemas con múltiples regiones	39
III.2 Validación del modelo de múltiples regiones	39
III.2.1 Viga en cantiliver con movimiento axial en la base	40
III.2.2 Viga en cantiliver sujeta con movimiento transversal en la base	47
III.3 Problema con dos regiones	49

Conclusiones	Pág.
	51
Trabajos futuros	53
Referencia bibliográficas	54
Apéndice A: Expresiones matemáticas	
A.1: Notación índice	A.1
A.2: Delta de Kronecker	A.2
A.3: Símbolo de permutación	A.2
A.4: Algebra tensorial	A.3
A.5: Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano	A.4
A.6: Teorema de la integral de la divergencia de Gauss	A.5
A.7: La función delta de Dirac	A.6
Apéndice B: Fundamentos de las ecuaciones integrales de frontera	
B.1 Introducción a la mecánica de sólidos	
B.2 Equilibrio de fuerzas de un medio continuo	B.1
B.3 Estado de deformación	B.2
B.4 Estado de esfuerzos	B.4
B.5 Relaciones constitutivas	B.7
B.5.1 Medio elástico	B.10
B.5.2 Medio visco elástico	B.10
B.6 Problema estático	B.11
B.6.1 Solución fundamental de desplazamientos de Kelvin	B.13
B.6.2 Ecuación integral de tracciones	B.15
B.6.3 Ecuación integral de desplazamientos (Somigliana)	B.15
B.7 Problema dinámico	B.17
B.7.1 Ecuación de movimiento en el dominio del tiempo	B.17
B.7.2 Ondas elásticas	B.18
B.7.3 Ecuación de movimiento en el dominio de la frecuencia	B.19
B.7.4 Formulación del problema elastodinámico en términos de potencial	B.20
B.7.5 Solución fundamental de desplazamientos (Stokes)	B.22
B.8 Formulación integral de frontera	B.26
Apéndice C: Programa GCE	
C.1 Variables del programa	C.1
C.2 Función de subrutinas	C.2
C.3 Datos principales de modelos con múltiples regiones	C.4
C.4 Programa GCE para modelos con múltiples regiones	C.6

	Pág.
<i>Lista de figuras</i>	
<i>Capítulo I: Generalidades</i>	
Figura I.1 Problema de Kelvin.	7
Figura I.2 Discretización de la frontera de un cuerpo	12
Figura I.3 Integración de los elementos	12
<i>Capítulo II: Modelo de múltiples regiones por el BEM</i>	
Figura II.1 Subdivisión de un medio en múltiples regiones	16
Figura II.2 Subdivisión del problema de las fronteras $\Gamma^i \cap \Gamma^j$	19
Figura II.3 Proceso de integración	19
Figura II.4 Modelo de dos regiones	22
Figura II.5 Modelo de tres regiones	25
Figura II.6 Esquema del programa Condthem	
Figura II.7 Esquema de programación para múltiples regiones	
Figura II.8 Parte uno, variables principales del modelo a resolver	
Figura II.9 Partes dos, modelo de múltiples regiones	
Figura II.10 Partes tres, modelo de múltiples regiones	
Figura II.11 Parte cuatro, solución y resultados del modelo	
<i>Capítulo III: Implementación del modelo de múltiples regiones</i>	
Figura III.1 Viga en cantiliver con movimiento axial	40
Figura III.2 Viga en cantiliver discretizada para una región en 76 elementos	41
Figura III.3 Espectro de respuesta para una región	42
Figura III.4 Espectro de respuesta para múltiples regiones	43
Figura III.5 Viga en cantiliver discretizada en 24 elementos sólidos	44
Figura III.6 Modelo de viga en cantiliver en elementos finitos	44
Figura III.7 Espectro de respuesta para una región	45
Figura III.8 Espectro de respuesta para dos regiones	45
Figura III.9 Espectro de respuesta para tres regiones	46
Figura III.10 Viga en cantiliver con movimiento transversal	48
Figura III.11 Espectro de respuesta de una región con 76, 262 y 304 elementos	49
Figura III.12 Bloque de concreto con elemento sólido interior	50
Figura III.13 Discretización del problema en elementos de frontera	50
Figura III.14 Espectro de respuesta de bloque en vibración axial	51
Figura III.15 Modelo de bloque en elementos finitos	52
<i>Apéndice A: Expresiones matemáticas</i>	
Figura A.1 Base ortonormal	A.1
Figura A.2 Función de pulso rectangular unitario	A.6

	Pág.
Apéndice B: Fundamentos de las ecuaciones integrales de frontera	
Figura B.1 Fuerzas ejercidas sobre un medio continuo	B.2
Figura B.2 Fuerzas y deformaciones de un cuerpo	B.4
Figura B.3 Deformación infinitesimal de un elemento diferencial	B.5
Figura B.4 Deformaciones de un elemento diferencial en el plano	B.7
Figura B.5 Fuerzas externas actuando en la frontera de un cuerpo	B.7
Figura B.6 Fuerzas distribuidas en un elemento diferencial de área	B.8
Figura B.7 Fuerzas en un elemento diferencial de área	B.8
Figura B.8 Tetraedro para establecer el equilibrio de fuerzas en un punto P	B.9
Figura B.9 Solución fundamental de desplazamientos de Kelvin	B.14
Figura B.10 Sistema de fuerzas dinámicas	B.18
Figura B.11 Transmisión de ondas P, S, Love y Rayleigh	B.19
Figura B.12 Semicircunferencia y punto de integración	B.26

Lista de tablas

Capítulo III: Implementación del modelo de múltiples regiones	
Tabla III.1 Propiedades de las regiones de la viga en cantiliver	40
Tabla III.2 Periodos y frecuencias teóricas de viga en cantiliver con carga axial	41
Tabla III.3 Frecuencias naturales de viga en cantiliver con 24 sólidos.	44
Tabla III.4 Periodos y frecuencias máximas de viga en cantiliver	46
Tabla III.5 Comparativa de periodos y frecuencias naturales (una región)	47
Tabla III.6 Comparativa de periodos y frecuencias naturales (dos regiones)	47
Tabla III.7 Comparativa de periodos y frecuencias naturales (tres regiones)	47
Tabla III.8 Frecuencias naturales de viga en flexión en cantiliver en flexión	48
Tabla III.9 Propiedades de las regiones de la viga en cantiliver	50
Tabla III.10 Frecuencias naturales de viga en cantiliver con 1217 sólidos.	52
Tabla III.11 Periodos y frecuencias máximas del bloque con 717 elementos	53
Tabla III.12 Comparativa de periodos y frecuencias naturales de bloque	53

Capítulo I

Generalidades

I.1 Introducción

El método de elementos de frontera (BEM) (por sus siglas en inglés “Boundary Element Method”) es una técnica basada en la formulación de ecuaciones integrales para problemas mecánicos en el continuo. Existen dos formulaciones de las ecuaciones integrales, la directa que utiliza como variables del problema los esfuerzos y desplazamientos en la frontera, y la indirecta que no utiliza dichas variables.

Ambos métodos incluyen integrales de soluciones fundamentales, lo cual implica que se tendrán integrales con singularidades de distinto orden. Para resolver estas integrales numéricamente, es necesario utilizar técnicas de integración especiales para lograr una precisión adecuada, o bien hacer uso de las llamadas formulaciones regulares, que evitan la singularidad, pero que actualmente en la literatura han caído en desuso por su falta de generalidad, es decir, las formulaciones regulares son en general hechas *ad-hoc* dependiendo del problema y geometría de que se trate.

Un aspecto importante de los métodos integrales de frontera es que dan lugar a sistemas de ecuaciones que no son simétricos. Por otra parte, se ha publicado el método simétrico de Galerkin de ecuaciones integrales de frontera que genera matrices de coeficientes que son simétricas y que tienen propiedades matemáticas adicionales. Pero estas formulaciones simétricas hacen uso de derivadas de las funciones fundamentales lo que da lugar a integrales con singularidades de orden superior por lo que su integración representa un reto aún mayor.

El método de integrales de frontera es una técnica muy reconocida para la solución de problemas dinámicos, especialmente del tipo de dominios infinitos, ya que cumple con la condición de la radiación de Sommerfeld, es decir no se tendrán ondas que vienen desde el infinito.

En la ingeniería mecánica, los problemas dinámicos son una constante más, que en general trata de partes mecánicas sujetas a acciones variables y a su interacción con otros sólidos. En el campo de la ingeniería civil los problemas dinámicos están

relacionados normalmente con el análisis de estructuras ante acciones debidas al funcionamiento de maquinaria, de acciones accidentales como las debidas al viento y a sismo, o bien problemas de propagación de ondas en medios semi infinitos, de ondas sísmicas, interacción fluido-estructura u otro tipo de acciones como explosiones.

Existen en general, dos grandes estrategias para abordar los problemas dinámicos, una de ellas trata de resolver el problema directamente haciendo la integración en el tiempo de las ecuaciones diferenciales. Este método es conocido como solución en el dominio del tiempo. La estrategia alternativa es hacer un cambio de variable, mediante la transformada de Fourier, del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Resolviendo el problema transformado para cargas armónicas de distinta frecuencia se obtiene la función de transferencia. La solución en el dominio del tiempo se obtiene multiplicando la transformada de Fourier de la excitación y la función de transferencia y antitransformando el resultado al tiempo.

La solución en el dominio de la frecuencia, no constituye sólo un medio para lograr la solución en el tiempo. Por el contrario, la solución revela aspectos fundamentales del comportamiento de la estructura, por medio de espectros de respuesta (curvas de frecuencia contra alguna variable de interés).

Los métodos para la solución de problemas dinámicos incluyen una gran variedad de técnicas todas ellas numéricas entre las que se cuentan, las diferencias finitas. El método de diferencias finitas es apropiado en el caso de geometrías simples. En caso de medios semi infinitos el método debe complementarse con estrategias numéricas adicionales destinadas a simular el efecto de la parte del continuo que no se incluye explícitamente en el modelo. El método de diferencias finitas es una técnica muy general que contempla la simulación de efectos no lineales.

El método de elementos finitos es otra metodología para la solución de este tipo de problemas, por su flexibilidad para modelar geometrías complejas y la sencillez con la que se pueden incorporar efectos no lineales. Sin embargo, existen algunos inconvenientes, entre los cuales pueden señalarse que para problemas en los que se tienen gradientes elevados de deformaciones o esfuerzos, las mallas requeridas son muy densas y por ende se traduce en grandes sistemas de ecuaciones a resolver.

En problemas de propagación de ondas en medios semi infinitos, en el caso de diferencias finitas, requiere de incorporar fronteras absorbentes para evitar el fenómeno de ondas espurias en el sistema.

El método de elementos de frontera, consiste en transformar el conjunto de ecuaciones diferenciales que involucren solamente las fronteras del medio, obteniendo las ecuaciones integrales de frontera.

Existen algunas características generales del método de elementos de frontera que representan algunas ventajas para el análisis estático y dinámico de problemas de mecánica en el continuo. Primeramente el problema se resuelve discretizando la

frontera, a diferencia de otras técnicas como el método de elementos finitos y el método de diferencias finitas en los cuales se requiere discretizar el dominio. Como consecuencia, el sistema de ecuaciones es más pequeño cuando se usa el BEM. Otra consecuencia es el proceso de generación de mallas, ya que al involucrar solamente la superficie estas son más simples que las generadas en el dominio.

El uso apropiado de los conceptos matemáticos, en el método de elementos de frontera reduce la dimensión del problema en un grado. Esta reducción en dimensiones en un grado tiene ventajas respecto a la discretización del dominio ya que reduce el tiempo de análisis del objeto para geometrías complejas.

El BEM representa una herramienta eficaz para el análisis de problemas dinámicos en el continuo que se presentan con frecuencia en los diferentes campos de la investigación, teniendo como base los fundamentos teóricos del método.

Una de las desventajas del BEM es el modelado de medios continuos con propiedades de material no lineal, que actualmente se encuentra en investigación y por lo tanto se puede utilizar como una alternativa de análisis en conjunto con métodos conocidos.

I.2 Estado del arte

El método de elementos de frontera BEM, el cual data del siglo XIX, se basa en los principios de la teoría de elasticidad lineal y en los conceptos matemáticos como lo son el principio de superposición, las funciones de influencia, relaciones de reciprocidad y algunas soluciones como la fundamental de Kelvin.

La representación del problema estático con integrales de frontera utilizando el principio de superposición fue establecido por Somigliana (1886). El estudio de las ecuaciones integrales fue publicado por Fredholm (1905).

La formulación directa del BEM para problemas de potencial estático fue publicada por Jaswon (1963) y para problemas de elasticidad estática por Rizzo (1967). En estos trabajos se lleva a cabo por primera vez la discretización de la frontera y la solución numérica de la ecuación integral transformada en un sistema de ecuaciones algebraicas.

El siguiente avance importante en el desarrollo del BEM como técnica numérica, en el cual se incorporaron las funciones de forma utilizadas en el método de elementos finitos, como un sistema para la representación de las variables en la frontera fue presentado por Lachat y Watson (1976).

Los avances del problema dinámico del BEM fueron presentados por Friedman y Shaw (1962). La primera solución numérica del BEM en acústica de problemas de elasticidad dinámica utilizando la formulación de la ecuación integral fue presentada por Banaugh y Goldsmith (1963).

El método directo de las ecuaciones integrales de frontera en conjunto con la transformada de Laplace para resolver problemas de elasticidad dinámica fue derivado por Cruse y Rizzo (1968). La teoría básica de BEM en elasticidad dinámica, en particular de aspectos relacionados con dominios infinitos fue establecida por Wheeler y Sternberg (1968).

La solución transitoria de problemas de elasticidad dinámica en combinación con Laplace fue realizada por Manolis y Beskos (1981) y la solución de problemas transitorios relacionados con la transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia fue obtenida por Niwa (1975). Los primeros estudios de problemas dinámicos de interacción suelo estructura utilizando la formulación en el dominio de la frecuencia los realizó Domínguez (1978).

La formulación del método de ecuaciones de frontera en el dominio del tiempo para elasticidad dinámica en 2D, fue presentada por Cole (1978) y la formulación en el dominio del tiempo para el análisis de esfuerzos en el plano la utilizó Niwa (1980).

La formulación y la implementación de problemas de propagación de ondas elásticas en 2D en el dominio del tiempo la presentaron Mansur y Brebbia (1982a, 1982b, 1985) y los estudios de elasticidad dinámica para problemas en 3D fueron realizados por Karabalis y Beskos (1984).

La formulación aproximada para la solución de problemas dinámicos donde las matrices de masas y de rigideces son obtenidas utilizando las integrales de la formulación dinámica fue derivada por Nardini y Brebbia (1985).

La formulación de la frontera es obtenida solamente para problemas de elasticidad lineal y en la ausencia de fuerzas de cuerpo. Progresos del BEM, incluyendo los estudios como la integral particular fueron realizados por Ahmad y Banerjee (1986), Henry y Banerjee (1988), el método de reciprocidad dual por Niku y Brebbia (1988), el método de reciprocidad múltiple por Neves y Brebbia (1991), Nowak y Neves (1994), Sladek y Sladek (1996), la formulación para problemas armónicos en 2D utilizando el modelo simétrico de Galerkin por J. J. Perez Gavilán y M.H. Aliabadi (2001) y con reciprocidad Dual para placas en (2003).

La formulación del método del elemento finito, conduce a matrices de banda simétricas, por lo cual se tiene una solución eficiente en los procedimientos de análisis numéricos. Sin embargo el método de elementos de frontera conduce a matrices no simétricas según Banerjee (1994).

Los efectos debidos a la simetría pueden incluirse con formulaciones analíticas de elementos de frontera Kaljevic y sargal (1995), eliminando la necesidad de proporcionar elementos de frontera en ejes de simetría.

I.3 Método de ecuaciones integrales de frontera (BEM)

Los fundamentos teóricos del método directo de ecuaciones integrales de frontera para la solución de problemas dinámicos en tres dimensiones, se presentan brevemente a continuación, no obstante el estudio detallado del método se puede leer en el apéndice B.

I.3.1 Ecuaciones de elasticidad lineal

La ecuación de movimiento de un medio continuo respecto a un punto de un elemento diferencial se escribe como

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (I. 1)$$

donde b_i son las fuerzas de cuerpo, ρ la densidad de masa, \ddot{u}_i son las fuerzas dinámicas y σ_{ij} es el tensor de esfuerzos.

En un estado estático de un medio, las componentes de esfuerzo relacionan las ecuaciones de equilibrio en dos tipos: Equilibrio estático de fuerzas y de momentos.

La ecuación de equilibrio en ausencia de fuerzas de cuerpo se define como

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \text{ para } i, j \in \{1,2,3\} \quad (I. 2)$$

El equilibrio de momentos se escribe, haciendo momentos de los esfuerzos respecto a un punto de un medio de tal forma que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

El tensor de deformación infinitesimal de Cauchy ε_{ij} , aplicado en un punto x se escribe en términos del campo de desplazamientos \mathbf{u} de la forma

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (I. 3)$$

Las componentes de esfuerzo producidas en un medio en la frontera, están dados por el tensor de tracciones de Cauchy como

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (I. 4)$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos y n_j es el vector normal unitario.

La ecuación que relaciona las componentes de esfuerzo y deformaciones de un medio homogéneo, isótropo y de material elástico lineal, se denomina la ley

generalizada de Hooke, la cual se escribe en términos de la ecuación (I.3) como

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} u_{k,l} \quad \text{para } i, j \in \{1,2,3\} \quad (\text{I. 5})$$

donde $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij} = E_{klji}$ es el tensor de las constantes elásticas de cuarto orden, σ_{ij} es el tensor de esfuerzos y $u_{k,l}$ son las derivadas de los desplazamientos.

El tensor de constantes elásticas es expresado en función de las constantes de Lamé λ, μ y de la delta de Kronecker δ_{ij} como

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \text{para } i, j, k, l \in \{1,2,3\} \quad (\text{I. 6})$$

con

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{I. 7})$$

donde E es el módulo de Young y ν es el módulo de Poisson.

A partir de las ecuaciones (I.5) y (I.6) la ecuación constitutiva se define como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{I. 8})$$

La ecuación (I.8) se reescribe en términos de los módulos de Young E , Poisson ν y del tensor de deformaciones de Cauchy de tal forma que

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{I. 9})$$

La ecuación constitutiva en el dominio de la frecuencia se escribe de manera similar que la ecuación (I.8) como

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda(\omega) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x, \omega) + 2\mu(\omega) \varepsilon_{ij}(x, \omega) \quad (\text{I. 10})$$

Las constantes de Lamé ahora en general dependen de la frecuencia $\lambda(\omega)$ y $\mu(\omega)$ para la solución de problemas visco-elásticos y se escriben independientemente de la frecuencia como

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(1 + 2i\beta_\mu) \\ \lambda &= \lambda(1 + 2i\beta_\lambda) \end{aligned} \quad (\text{I. 11})$$

donde $\beta = \beta_\mu = \beta_\lambda$ es el factor de amortiguamiento viscoso.

I.3.2 Problema estático del método de ecuaciones integrales de frontera

El problema de Kelvin, figura (I.1) para una carga concentrada δ_{ik} aplicada en \mathbf{y} , con efecto en un punto de observación \mathbf{x} , es requerido en la implantación numérica del método.

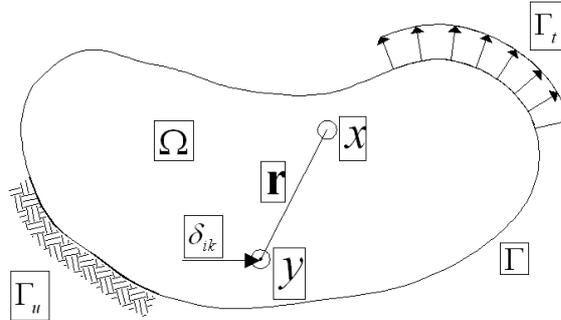


Figura I.1. Problema de Kelvin.

A partir de la ecuaciones (I.2) y (I.5) la ecuación de Navier de un espacio infinito se define como

$$L_{im} u_m + b_i = 0 \quad (I. 12)$$

donde $L_{im} = E_{ijmn} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_j}$ es el operador de Navier.

La ecuación (I.12) para una carga concentrada δ_{ik} en \mathbf{y} en dirección k , puede escribirse como

$$L_{im} u_{km} + \delta_{ik} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0 \quad (I. 13)$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronecker, δr es la función delta de Dirac.

La solución fundamental de desplazamientos de Kelvin $U_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, para un cuerpo homogéneo, elástico e isótropo de un medio infinito se define a partir de la ecuación (I.13) como

$$U_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,i} r_{,k}] \quad (I. 14)$$

donde μ es el coeficiente de cortante, ν es el modulo de Poisson, $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ es la distancia del punto x al punto fuente y , $r_{,i} = r_i / r$ es el coseno director del vector \mathbf{r} .

La ecuación de las tracciones se obtiene a partir de las ecuaciones (I.4), (I.5) y del gradiente de desplazamientos de la solución fundamental de la ecuación (I.14) de tal forma que

$$T_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{8r^2\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(n_k r_{,i} - n_i r_{,k}) + \{3r_{,i} r_{,k} + (1-2\nu)\delta_{ki}\} n_n r_{,n} \right] \quad (I. 15)$$

donde n_i es la normal unitaria al plano.

Los problemas de valores de frontera gobernados por la ecuación de Navier, son representados a partir de las ecuaciones integrales de frontera. La ecuación integral de frontera se obtiene utilizando el teorema de reciprocidad, como lo hizo Somigliana o bien utilizando residuos pesados.

A partir de las ecuaciones (I.2) y (I.14) se tiene

$$\int_{\Omega} U_{ki} (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (I. 16)$$

donde U_{ki} es una función de peso.

La ecuación de desplazamientos Somigliana se define a partir de la ecuación (I.16) como

$$\int_{\Gamma} U_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma - u_k(\mathbf{y}) = 0 \quad (I. 17)$$

donde U_{ki} es la solución fundamental de desplazamientos, T_{ki} es la ecuación de tracciones, $u_k(\mathbf{y})$ el desplazamiento debido a la carga aplicada en \mathbf{y} , u_i, t_i son tracciones y desplazamientos preescritos.

I.3.3 Problema dinámico del método de ecuaciones integrales de frontera

En el problema dinámico, el equilibrio de fuerzas en el dominio del tiempo es representado por la ecuación de Navier a partir de las ecuaciones (I.1) y (I.8) de la forma

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho(b_i - \ddot{u}_i) = 0 \quad (I. 18)$$

La ecuación de Navier (I.18) se escribe en forma de vector de la forma

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (I. 19)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé, $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ es una función de desplazamientos que depende del punto fuente en \mathbf{x} y del tiempo t , ρ es la densidad del material, b_i son las fuerzas de cuerpo y \ddot{u}_i son las fuerzas de inercia.

La ecuación de equilibrio dinámico de Stokes para una carga armónica $e^{-i\omega t}$, se obtiene a partir de las ecuaciones (I.18) y (I.19), de tal forma que

$$c_1^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (\text{I. 20})$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

donde $u = u(\mathbf{x}, \omega)$ es ahora una función de desplazamientos en el dominio de la frecuencia, c_1 es la velocidad de onda P , c_2 es la velocidad de onda S , ρ es la densidad y ∇ es un operador vectorial (ver apéndice A).

La respuesta de un medio infinito es determinada considerando la aplicación de una carga armónica de frecuencia ω en un punto i , y se define como

$$\delta(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{b} = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{e}$$

donde $\delta(\mathbf{r})$ es la función delta de Dirac, \mathbf{r} es la distancia de la carga en el punto $\boldsymbol{\varepsilon}$ y \mathbf{e} es un vector unitario en la dirección de la carga aplicada.

El campo de desplazamientos $u = \nabla \phi + \nabla \times \psi$ para la solución del problema de Stokes queda definido a partir de los potenciales $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ en sus componentes rotacional y volumétrica de la forma

$$u = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_2 \quad (\text{I. 21})$$

donde $\phi = \nabla \cdot \mathbf{A}_1$ es un potencial escalar y $\psi = -\nabla \times \mathbf{A}_2$ es un potencial vectorial.

Si las fuerzas de cuerpo se escriben en términos del potencial \mathbf{U} se tiene que

$$\rho \mathbf{b} = \nabla^2 \mathbf{U} \mathbf{e} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{e} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} \mathbf{e} \quad (\text{I. 22})$$

Sustituyendo las fuerzas de cuerpo \mathbf{b} , y las expresiones (I.21), (I.22) en (I.20) se obtiene

$$c_1^2 \nabla \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}_1 - k_1^2 \mathbf{A}_1 + \mathbf{U} \mathbf{e} / \rho c_1^2) + c_2^2 \nabla \times \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}_2 - k_2^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{U} \mathbf{e} / \rho c_2^2) = 0 \quad (\text{I. 23})$$

donde $k_1 = i(\omega/c_1)$, $k_2 = i(\omega/c_2)$.

Si se asume que los potenciales \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 siguen la dirección de la carga, entonces $\mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{e}$, $\mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{e}$, la ecuación (I.23) se satisface para

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A}_1 - k_1^2 \mathbf{A}_1 + \mathbf{U} / \rho c_1^2 &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A}_2 - k_2^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{U} / \rho c_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores son del tipo

$$\nabla^2 \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} + \mathbf{U} / \rho c^2 = 0 \quad (\text{I. 24})$$

La solución fundamental de desplazamientos de Stokes para una carga concentrada armónica aplicada con dirección K y con desplazamiento en i , se obtiene sustituyendo a partir de la ecuación (I.24), la cual tiene la forma

$$U_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi \delta_{ki} - \chi r_{,i} r_{,k}] \quad (\text{I. 25})$$

y la expresión de tracciones para una superficie con normal \mathbf{n} , con carga aplicada en \mathbf{K} es dada por la ecuación

$$\begin{aligned}T_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega) &= -\frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) \left(\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_k \right) + \left(\frac{4}{r} \chi - 2 \frac{d\chi}{dr} \right) r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{4}{2r} \chi \right) - \frac{2}{r} \chi \right\} r_{,k} n_i \right]\end{aligned}$$

La ecuación anterior puede escribirse en término de las variables A, B y C, que representan la suma de los términos singulares, más una serie de expansión no singular como

$$T_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \left[\left(\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_k \right) A + r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} B + r_{,k} n_i C \right] \quad (\text{I. 26})$$

con

$$A = \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right), B = \left(\frac{4}{r} \chi - 2 \frac{d\chi}{dr} \right), C = \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{4}{2r} \chi \right) - \frac{2}{r} \chi \quad (\text{I. 27})$$

donde

$$\psi = \left(1 + \frac{1}{k_2^2 r^2} + \frac{1}{k_2 r} \right) \frac{\exp(-k_2 r)}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{1}{k_1^2 r^2} + \frac{1}{k_1 r} \right) \frac{\exp(-k_1 r)}{r}$$

$$\chi = \left(1 + \frac{3}{k_2^2 r^2} + \frac{3}{k_2 r}\right) \frac{\exp(-k_2 r)}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(1 + \frac{3}{k_1^2 r^2} + \frac{3}{k_1 r}\right) \frac{\exp(-k_1 r)}{r} \quad (I. 28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dr} &= \left(-2 - k_2 r - \frac{3}{k_2 r} - \frac{3}{k_2^2 r^2}\right) \frac{\exp(-k_2 r)}{r^2} + \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(1 + \frac{3}{k_1 r} + \frac{3}{k_1^2 r^2}\right) \frac{\exp(-k_1 r)}{r^2} \\ \frac{d\chi}{dr} &= \left(-4 - k_2 r - \frac{9}{k_2 r} - \frac{9}{k_2^2 r^2}\right) \frac{\exp(-k_2 r)}{r^2} + \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(4 + k_1 r + \frac{9}{k_1 r} + \frac{9}{k_1^2 r^2}\right) \frac{\exp(-k_1 r)}{r^2} \end{aligned} \quad (I. 29)$$

con $\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}$, $k_1 = i(\omega/c_1)$, $k_2 = i(\omega/c_2)$, $r = |x_i - y_i|$, $r_{,k} = \frac{r_k}{r}$.

Cuando el argumento $i\omega r/c_1 > 0.4$ las funciones dinámica y estática **T**, **Ts** son de tipo singular y la diferencia **T-Ts** se calcula directamente y ninguna evaluación de la serie de expansión es requerida. Cuando c_1/c_2 es un valor muy alto, entonces $i\omega r/c_1 < 0.4$ y $i\omega r/c_2 > 2\pi$, en tal caso la serie no es adecuada y se requiere una discretización más apropiada para la solución del problema.

La solución fundamental de desplazamientos depende de las funciones ψ , χ . Estas escritas en términos de exponenciales, si se utilizan series de expansión para los términos con exponenciales que presentan en el libro de Domínguez, J. (1993), las funciones de la ecuación (I.26) se transforman en

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{r^2} \frac{c_2^2}{c_1^2} + k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2 [1 + (c_2/c_1)^{n+4}]}{(n+2)(n+4)} \frac{(k_2 r)^n}{n!} \\ B &= -\frac{3}{r^2} \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) - k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+4)} [1 - (c_2/c_1)^{n+4}] \frac{(k_2 r)^n}{n!} \\ C &= \frac{1}{r^2} \frac{c_2^2}{c_1^2} + k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2 + (n+4)(c_2/c_1)^{n+2} - 2(n+3)(c_2/c_1)^{n+4}}{(n+2)(n+4)} \frac{(k_2 r)^n}{n!} \end{aligned} \quad (I. 30)$$

La representación de la ecuación integral cuando el punto fuente **y**, se encuentra en la frontera contiene un salto y puede escribirse de la forma

$$c_{ki} u_i + \int_{\Gamma} T_{ki} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma \quad (I. 31)$$

donde las integrales son representadas en función del valor principal de Cauchy $c = 1/2$ si el punto fuente se encuentra en la frontera y $c = 1$ si está en el interior del sólido, cabe señalar que la solución del problema es válido para fronteras suaves.

I.3.4 Implantación del método para una región

La solución numérica del BEM consiste en plantear y resolver un número determinado de ecuaciones, en las cuales existe una relación entre los desplazamientos y las tracciones.

La integración numérica del método de ecuaciones integrales de frontera, se obtiene discretizando la frontera del medio en un número finito de elementos como se muestra en la figura I.2. El BEM discretiza el dominio en un conjunto de elementos de formas geométricas sencillas, tales como triángulos y cuadriláteros.

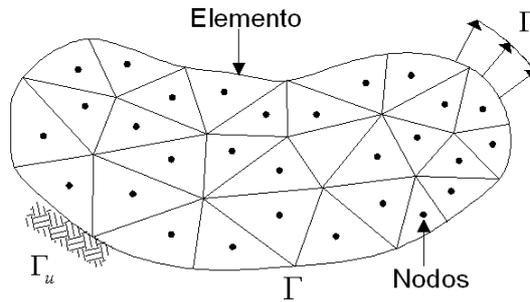


Figura I.2. Discretización de la frontera de un cuerpo.

La discretización de la frontera es dividida en N elementos, los valores de los desplazamientos u_i y de las tracciones t_i , para un elemento i que se integra en la frontera Γ^j , figura I.3, se consideran constantes sobre cada elemento e igual al valor en el nodo a la mitad del elemento.

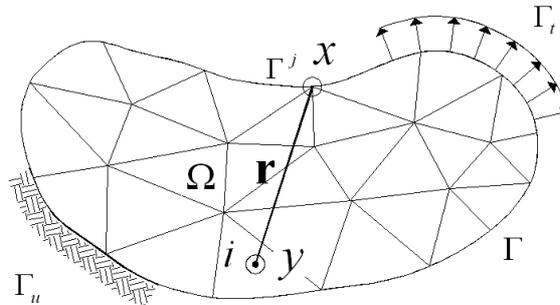


Figura I.3. Integración de los elementos.

La ecuación integral de frontera se puede escribir a partir de la ecuación (I.31) como

$$c_{kl}^i u_l^i + \int_{\Gamma_j} T_{kl} u_l^j d\Gamma = \int_{\Gamma_j} U_{kl} t_l^j d\Gamma \quad (I. 32)$$

donde $U_{kl}(\mathbf{y}^i, \mathbf{x})$ es la solución fundamental, $T_{kl}(\mathbf{y}^i, \mathbf{x})$ es la ecuación de tracciones, $u_l^i(\mathbf{y}^i, \mathbf{x})$ son los desplazamientos, $t_l^i(\mathbf{y}^i, \mathbf{x})$ son las tracciones preescritos y c_{kl}^i son los coeficientes de Cauchy.

$$c_{kl}^i u_l^i + \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} T_{kl} u_l^j d\Gamma = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} U_{kl} t_l^j d\Gamma \quad (I. 33)$$

donde i es el elemento fuente, j es el elemento que se integra en la frontera Γ^j y el valor principal de Cauchy c_{kl}^j para un punto i de una frontera suave es $c = 1/2$ si el punto fuente está en la frontera y en el dominio $c = 1$ en el interior del sólido.

Los valores de u_l^i y t_l^i se obtienen de las integrales de los elementos tales que

$$c_l^i u_l^i + \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} T_{kl} d\Gamma \right) u_l^j = \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} U_{kl} d\Gamma \right) t_l^j \quad (I. 34)$$

donde $\int_{\Gamma_j} T_{kl} d\Gamma$ y $\int_{\Gamma_j} U_{kl} d\Gamma$ son integrales que relacionan el punto fuente i con la solución fundamental del elemento que actúa en un punto j , estas integrales son llamadas coeficientes de influencia y se expresan de la forma

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} T_{kl} d\Gamma \quad \text{y} \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} U_{kl} d\Gamma \quad (I. 35)$$

Para un punto en particular de i , la ecuación (I.34) se escribe como

$$c_{kl}^i u_l^i + \sum_{j=1}^{Ne} \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{Ne} G_{ij} t_j \quad (I. 36)$$

La solución aplicada para cada punto j en la frontera se define como

$$H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{donde } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{donde } i = j \end{cases}$$

Ahora bien , a partir de la ecuación (I.34) se tiene

$$\sum_{j=1}^{Ne} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{Ne} G_{ij} t_j \quad \text{para } i = 1, \dots, Ne \quad (I. 37)$$

donde \mathbf{H} , \mathbf{G} son matrices de $N \times N$ y \mathbf{u} , \mathbf{t} son vectores de tamaño \mathbf{N} , con valores de frontera de u_u y t_u en Γ ($\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$).

A partir de los valores en la frontera es posible determinar los desplazamientos internos. Los desplazamientos de u_k^i son calculados para un punto interno i , utilizando la expresión

$$u_k^i = \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} U_{kl} d\Gamma \right) t_l^j - \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} T_{kl} d\Gamma \right) u_l^j \quad (I. 38)$$

o bien como

$$u_k^i = \sum_{j=1}^{Ne} G_{ij} t_l^j - \sum_{j=1}^{Ne} H_{ij} u_l^j \quad (I. 39)$$

Los coeficientes H_{ij} y G_{ij} se calculan para diferentes puntos internos de i .

Conocidos los desplazamientos y las tracciones u_i, t_i , los valores de los esfuerzos de algún punto interno pueden calcularse a partir de la ecuación (I.9) y utilizando la representación integral de frontera (I.17), de tal forma que

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \int_{\Gamma} E_{ijkl} U_{ki,\bar{l}} t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} E_{ijkl} T_{ki,\bar{l}} u_i d\Gamma \\ \sigma_{ij} &= \int_{\Gamma} \left(\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} U_{ki,\bar{l}} + \mu(U_{ki,\bar{j}} + U_{kj,\bar{i}}) \right) t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} T_{ki,\bar{l}} + \mu(T_{ki,\bar{j}} + T_{kj,\bar{i}}) \right) u_i d\Gamma \\ \sigma_{ij} &= \int_{\Gamma} D_{kij} t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_i d\Gamma \end{aligned}$$

donde $(\cdot)_{,\bar{i}} = \partial(\cdot) / \partial y_i$, D_{kij}, S_{kij} se conocen como tensores de tercer orden.

I.4 Objetivo

Desarrollar una metodología para el análisis dinámico de modelos multi-regiones, que permita conocer el comportamiento elástico lineal de sólidos mediante el método directo de las ecuaciones integrales de frontera.

I.5 Justificación

En la ingeniería mecánica y en la ingeniería civil se desean con frecuencia nuevas formas de análisis, que permitan conocer el comportamiento dinámico de sólidos de

diferentes geometrías, las cuales consideran modelos matemáticos que son frecuentemente utilizados durante la investigación.

El método puede utilizarse para una gran variedad de problemas y no sólo en la mecánica de sólidos de ahí su relevancia, además las integrales singulares hacen del método un reto, al que se atribuye un limitado número de programas comerciales de elementos de frontera.

El empleo del método directo de ecuaciones integrales de frontera para la solución de problemas dinámicos presenta algunas ventajas desde el punto de vista teórico y práctico, tal es el caso del programa existente en Fortran Condthem, el cual analiza problemas dinámicos de sólidos en 3D de regiones simples, no obstante si se desea dar solución a problemas dinámicos de múltiples regiones será necesario realizar modificaciones al programa original.

I.6 Alcances y metas

- Determinar un modelo para el análisis de problemas con múltiples regiones sujetos a cargas dinámicas impuestas como condiciones de frontera.
- Realizar un algoritmo del modelo que permita relacionar un número indeterminado de regiones de sólidos con propiedades mecánicas distintas.
- Implementar un programa para el análisis dinámico de problemas con múltiples regiones, a partir de uno existente, el cual analiza problemas dinámicos para una sola región.
- Aplicar el programa a problemas de sólidos, de tal forma que permita obtener el comportamiento dinámico por medio de espectros de respuesta (curvas de frecuencia contra desplazamientos).
- Comparar los resultados obtenidos con la aplicación del método, respecto a resultados obtenidos mediante la aplicación de otros métodos analíticos conocidos, con la finalidad de evaluar las características del método propuesto.

Capítulo II

Modelo de múltiples regiones por el BEM

II.1 Generalización del modelo para múltiples regiones

En la práctica con frecuencia se encuentran problemas que relacionan múltiples componentes con propiedades diferentes, tal es el caso del modelado de suelos. El modelado para la solución de problemas con múltiples componentes es la subdivisión del dominio en una o más regiones.

La solución del problema por el método de directo de las ecuaciones integrales de frontera es aplicable a sub dominios homogéneos, es decir, la solución fundamental utilizada asume que las propiedades del material no cambian en el sub dominio analizado.

Sea la figura II.1 un medio homogéneo, isótropo y de comportamiento elástico lineal dividido en múltiples regiones, el cual consta de un dominio Ω^* ($\Omega^* = \Omega^i \dots \Omega^m$), fronteras Γ^* ($\Gamma^* = \Gamma^i \dots \Gamma^m$) y con condiciones de frontera u_u^* , t_t^* que representan los desplazamientos y las tracciones prescritas en la frontera $\Gamma^* = \Gamma_u^* + \Gamma_t^*$.

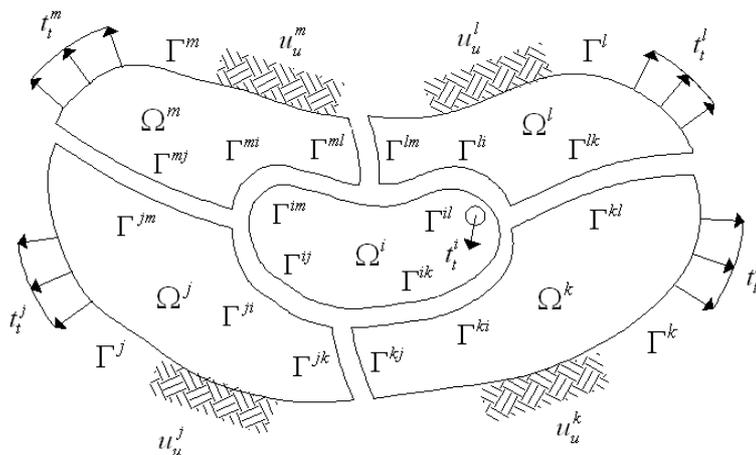


Figura II.1. Subdivisión de un medio en múltiples regiones.

Las condiciones de interfase entre dos regiones se definen como $\Gamma^{ij} = \Gamma^i \cap \Gamma^j$ y entre múltiples regiones como $\Gamma^{i*} = \Gamma^i \cap (\Gamma^{a1} + \dots + \Gamma^{an})$ donde $a1 \dots an$ son todas las posibles intercepciones con la región Γ^i .

En la formulación del problema las propiedades de las múltiples regiones son diferentes, y la interfase entre dos regiones debe cumplir con la condición de compatibilidad, tal que $\Gamma^{ij} = \Gamma^i \cap \Gamma^j$.

La ecuación de desplazamientos en el dominio de la frecuencia para resolver el problema por el método directo de ecuaciones integrales de frontera se escribe como en la ecuación (I.32) del capítulo uno de la forma

$$c_{kl}^i u_l^i + \int_{\Gamma_j} T_{kl} u_l^j d\Gamma = \int_{\Gamma_j} U_{kl} t_l^j d\Gamma \quad (II.1)$$

y matricialmente como en la ecuación (I.37)

$$\sum_{j=1}^{Ne} G_{ij} t_j = \sum_{j=1}^{Ne} H_{ij} u_j \quad \text{para } j = 1, \dots, Ne \quad (II.2)$$

Teóricamente, el problema de múltiples regiones en el dominio es la interconexión de las regiones, la solución se obtiene a partir de las condiciones de reciprocidad dada por la ecuación (II.1) para cada región y de la compatibilidad entre sub dominios.

En el procedimiento del modelo de análisis para una sola región, sólo se pueden plantear tres ecuaciones por nodo y en el caso de dos regiones en contacto, sin embargo, cuando la fuente está sobre un elemento de interfase se generan ecuaciones independientes cuando se integra sobre cada una de las regiones vecinas, dando lugar a seis ecuaciones independientes, a los desplazamientos y a las tracciones.

Para poder utilizar, en lo posible, el algoritmo existente para una sola región, los elementos de interfase para dos regiones, se definen de forma independiente y con orientaciones opuestas, tales que permitan integrar cada sub-región.

Posteriormente se imponen las condiciones de compatibilidad y utilizando el mismo esquema de integración de una región, se define que uno de los elementos de la región en contacto que contiene los desplazamientos prescritos, tendrá como incógnitas las tracciones del elemento vecino. En la región vecina, el elemento correspondiente tendrá como condición de frontera las tracciones prescritas y por lo tanto se tendrán en dicha región los desplazamientos como incógnitas.

El imponer las condiciones de compatibilidad, consiste simplemente en colocar los coeficientes que multiplican a los desplazamientos prescritos en una interfase de una

región, para que multipliquen a los desplazamientos de la región vecina y similarmente en el caso de las tracciones: los coeficientes que multiplican a las tracciones prescritas en un elemento de interfase de una región se colocan dentro de la matriz del sistema de modo de que multipliquen a las tracciones de la región vecina, solo que en este caso adicionalmente debe cambiarse de signo a los coeficientes, ya que las tracciones de la región vecina van en dirección opuesta.

Finalmente las condiciones de frontera del sistema se imponen reorganizando la matriz de coeficientes en forma idéntica a como se hace con una sola región. Esto es posible sin hacer casos especiales gracias a las condiciones de frontera mencionadas de los elementos de interfase.

Con esto es posible definir las características del modelo para múltiples regiones, a partir del concepto original para una sola región. Por lo tanto, el sistema matricial para cada región de Ω^i y cualquier región Ω^* , cuya frontera intercepta con cada frontera de Ω^i y además si $\Gamma^{i*} = \Gamma^i \cap \Gamma^*$ se define a partir de la ecuación (II.2) como

$$\begin{bmatrix} G_{i,i} & G_{i,i^*} \\ G_{i^*,i} & G_{i^*,i^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i \\ t_{i^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{i,i} & H_{i,i^*} \\ H_{i^*,i} & H_{i^*,i^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i^*} \end{bmatrix} \quad (II.3)$$

Para Ω^i y cualquier región Ω^j , cuya frontera intercepta con alguna frontera de Ω^j y además $\Gamma^{ij} = \Gamma^i \cap \Gamma^j$ se tiene

$$\begin{bmatrix} G_{i,i} & G_{i,jj} \\ G_{ij,i} & G_{ij,jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i \\ t_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{i,i} & H_{i,jj} \\ H_{ij,i} & H_{ij,jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{ij} \end{bmatrix} \quad (II.4)$$

Matricialmente cada región se representa en función de las regiones de interfase, si se consideran las regiones Ω^i, Ω^* para la generalización del problema de múltiples regiones el sistema matricial se escribe como

$$\begin{bmatrix} G_{i,i} & G_{i,i^*} & \dots & 0 & 0 \\ G_{i^*,i} & G_{i^*,i^*} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & G_{*,*} & G_{*,*i} \\ 0 & 0 & \dots & G_{*,*} & G_{*,*i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i \\ t_{i^*} \\ \dots \\ t_m \\ t_{mi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{i,i} & H_{i,i^*} & \dots & 0 & 0 \\ H_{i^*,i} & H_{i^*,i^*} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_{*,*} & H_{*,*i} \\ 0 & 0 & \dots & H_{*,*} & H_{*,*i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i^*} \\ \dots \\ u_* \\ u_{*i} \end{bmatrix} \quad (II.5)$$

Si $\Gamma^i \cap \Gamma^* = \Gamma^i \cap \Gamma^j$, la subdivisión del problema es el mostrado en la figura II.2 y la representación matricial para estas regiones se expresa a partir del sistema matricial (II.4).

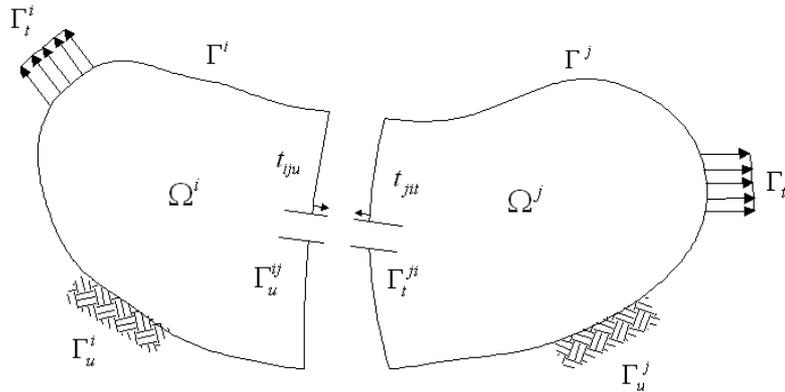


Figura II.2. Subdivisión del problema de las fronteras $\Gamma^i \cap \Gamma^j$.

La relación entre regiones permite establecer las condiciones de compatibilidad, definidas a partir de la relación entre desplazamientos y tracciones en la frontera de interfase. Si $\Gamma^{ij} = \Gamma^i \cap \Gamma^j$ las condiciones son

$$u_{ji} = u_{ij} \quad \text{y} \quad t_{ij} = -t_{ji}$$

A partir de las condiciones de interfase se definen las condiciones del sistema matricial, por convención si $i < j$ no hay cambio en el sistema matricial y si $i > j$ utilizar las tracciones de la otra región, de tal forma que

$$G_{i,ij} = -G_{i,ji} \quad \text{y} \quad H_{i,ij} = H_{i,ji}$$

donde $G_{i,ij} = \int_{\Gamma^{ij}} U_{kl}(\mathbf{y}^i, \mathbf{x}) d\Gamma$, $H_{i,ij} = \int_{\Gamma^{ij}} T_{kl}(\mathbf{y}^i, \mathbf{x}) d\Gamma$. En el proceso de integración, el índice i es el punto donde se encuentra la fuente y se integra sobre cada elemento de la frontera Γ^{ij} , figura II.3.

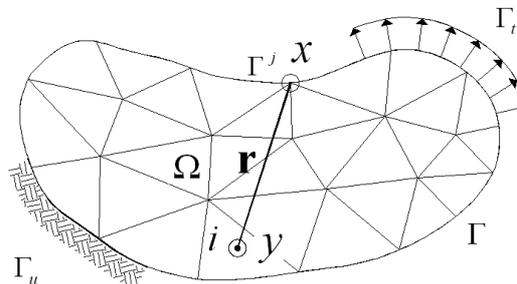


Figura II.3. Proceso de integración.

Aplicando las condiciones de frontera en el sistema de ecuaciones (II.5) para cada región Ω^i que relaciona la región de interfase Ω^j , se define el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} G_{i,i} & G_{i,j} & \dots & 0 & 0 \\ G_{ij,i} & G_{ij,j} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -G_{j,j} & \dots & G_{j,j} & 0 \\ 0 & -G_{ji,j} & \dots & G_{ji,j} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i \\ t_{ij} \\ \dots \\ t_j \\ t_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{i,i} & 0 & \dots & 0 & H_{i,j} \\ H_{ij,i} & 0 & \dots & 0 & H_{ij,j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_{j,j} & H_{j,ji} \\ 0 & 0 & \dots & H_{ji,j} & H_{ji,ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{ij} \\ \dots \\ u_j \\ u_{ji} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Las condiciones de contorno de las fronteras de $\Gamma^i = \Gamma_u^i + \Gamma_t^i$, $\Gamma^j = \Gamma_u^j + \Gamma_t^j$, para los desplazamientos y las tracciones prescritas son

$$G_{i,i} = \begin{bmatrix} G_{iu,iu} & G_{iu,it} \\ G_{it,iu} & G_{it,it} \end{bmatrix}, \quad H_{i,i} = \begin{bmatrix} H_{iu,iu} & H_{iu,it} \\ H_{it,iu} & H_{it,it} \end{bmatrix}$$

$$G_{i,j} = [G_{iu,iju} \quad G_{it,iju}]^T, \quad H_{i,j} = [H_{iu,iju} \quad H_{it,iju}]^T$$

$$G_{ij,i} = [G_{iju,iu} \quad G_{iju,it}]^T, \quad H_{ij,i} = [H_{iju,iu} \quad H_{iju,it}]^T$$

Haciendo lo mismo para la frontera Γ^j y aplicando dichas condiciones en el sistema de ecuaciones (II.6) se tiene

$$\begin{bmatrix} G_{iu,iu} & G_{iu,it} & G_{iu,iju} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ G_{it,iu} & G_{it,it} & G_{it,iju} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ G_{iju,iu} & G_{iju,it} & G_{iju,iju} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -G_{ju,jit} & \dots & G_{ju,ju} & G_{ju,jt} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{jt,jit} & \dots & G_{jt,ju} & G_{jt,jt} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{jit,jit} & \dots & G_{jit,ju} & G_{jit,jt} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{iu} \\ t_{it} \\ t_{iju} \\ \dots \\ t_{ju} \\ t_{jt} \\ t_{jit} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{iu,iu} & H_{iu,it} & 0 & \dots & 0 & 0 & H_{iu,iju} \\ H_{it,iu} & H_{it,it} & 0 & \dots & 0 & 0 & H_{it,iju} \\ H_{iju,iu} & H_{iju,it} & 0 & \dots & 0 & 0 & H_{iju,iju} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_{ju,ju} & H_{ju,jt} & H_{ju,jit} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_{jt,ju} & H_{jt,jt} & H_{jt,jit} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_{jit,ju} & H_{jit,jt} & H_{jit,jit} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{iu} \\ u_{it} \\ u_{iju} \\ \dots \\ u_{ju} \\ u_{jt} \\ u_{jit} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

En los sistemas de ecuaciones (II.7), los desplazamientos u_{iu}, u_{ju} y las tracciones t_{it}, t_{jt} son conocidos, además se puede ver que u_{iju}, t_{jiu} multiplican a coeficientes nulos, con esto se puede definir un nuevo sistema de ecuaciones, tal que las variables de las ecuaciones desconocidas sean guardadas en la matriz H , mientras que los valores conocidos se guarden en la matriz G , obteniéndose así un sistema de ecuaciones $AX = B$, de tal forma que

$$\begin{bmatrix} -G_{iu,iu} & H_{iu,it} & -G_{iu,iju} & \dots & 0 & 0 & H_{iu,iju} \\ -G_{it,iu} & H_{it,it} & -G_{it,jt} & \dots & 0 & 0 & H_{it,jt} \\ -G_{iju,iu} & H_{iju,it} & -G_{iju,iju} & \dots & 0 & 0 & H_{iju,iju} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & G_{ju,jt} & \dots & -G_{ju,iu} & H_{ju,jt} & H_{ju,iju} \\ 0 & 0 & G_{jt,jt} & \dots & -G_{jt,iu} & H_{jt,jt} & H_{jt,iju} \\ 0 & 0 & G_{jiu,jt} & \dots & -G_{jiu,iu} & H_{jiu,jt} & H_{jiu,iju} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{iu} \\ u_{it} \\ t_{iju} \\ \dots \\ t_{ju} \\ u_{jt} \\ u_{ijt} \end{bmatrix} = \quad (II.8)$$

$$\begin{bmatrix} -H_{iu,iu} & G_{iu,it} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -H_{it,iu} & G_{it,it} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -H_{iju,iu} & G_{iju,it} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -H_{ju,iju} & G_{ju,jt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -H_{jt,iu} & G_{jt,jt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -H_{jiu,iu} & G_{jiu,jt} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{iu} \\ t_{it} \\ u_{iju} \\ \dots \\ u_{ju} \\ t_{jt} \\ t_{ijt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{iu} \\ f_{it} \\ f_{iju} \\ \dots \\ f_{ju} \\ f_{jt} \\ f_{ijt} \end{bmatrix} \quad (II.9)$$

En el sistema H (II.8) se puede ver que las tracciones son igualadas al vector de fuerzas correspondientes a los desplazamientos, reordenando el sistema de fuerzas de el sistema G (II.9) para la solución del sistema se define el vector de fuerzas como

$$f = [f_{it} \quad f_{iu} \quad f_{iju} \quad \dots \quad f_{jt} \quad f_{ju} \quad f_{ijt}]^T$$

Finalmente el sistema general de ecuaciones de la forma $AX = B$ a resolver, se define como

$$\begin{bmatrix}
 -G_{iu,iu} & H_{iu,it} & -G_{iu,iju} & \dots & 0 & 0 & H_{iu,iju} \\
 -G_{it,iu} & H_{it,it} & -G_{it,ijt} & \dots & 0 & 0 & H_{it,ijt} \\
 -G_{iju,iu} & H_{iju,it} & -G_{iju,iju} & \dots & 0 & 0 & H_{iju,iju} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & G_{ju,jit} & \dots & -G_{ju,ju} & H_{ju,jt} & H_{ju,jiu} \\
 0 & 0 & G_{jt,jit} & \dots & -G_{jt,ju} & H_{jt,jt} & H_{jt,jit} \\
 0 & 0 & G_{ju,jiu} & \dots & -G_{jit,ju} & H_{jit,jt} & H_{jiu,jiu}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 t_{iu} \\
 u_{it} \\
 t_{iju} \\
 \dots \\
 t_{ju} \\
 u_{jt} \\
 u_{ijt}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_{it} \\
 f_{iu} \\
 f_{iju} \\
 \dots \\
 f_{jt} \\
 f_{ju} \\
 f_{ijt}
 \end{bmatrix}
 \quad (II.10)$$

La generalización del problema de múltiples regiones es posible si se cumple con lo establecido en el presente apartado. Básicamente la solución al problema se obtiene relacionando la región fuente en Γ^i con alguna otra región en la frontera Γ^* , tal que $\Gamma^{i*} = \Gamma^i \cap \Gamma^*$.

II.2 Modelos de análisis

En la validación del modelo de múltiples regiones será necesario analizar problemas particulares, tal es el caso los modelos para dos y tres regiones. No obstante, es posible verificar las ecuaciones o sistemas matriciales del problema para más de tres regiones, desarrollando la generalización de los modelos a estudiar aplicando lo señalado en el apartado II.1.

II.2.1 Modelo de dos regiones

En la figura II.4 se muestra el modelo de dos regiones, el cual consta de un medio dividido en regiones Ω^1, Ω^2 y con fronteras Γ^1, Γ^2 , con condiciones de frontera para los desplazamientos y las tracciones prescritas en las fronteras $\Gamma^1 = \Gamma_u^1 + \Gamma_t^1$, $\Gamma^2 = \Gamma_u^2 + \Gamma_t^2$ y condiciones de interfase en las fronteras Γ^{12}, Γ^{21} .

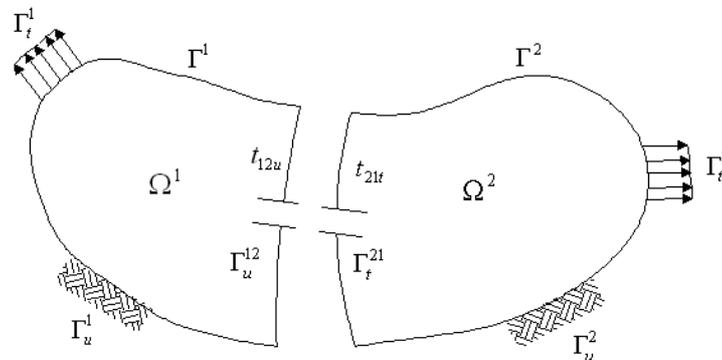


Figura II.4. Modelo de dos regiones.

En el problema de dos regiones las ecuaciones integrales para las regiones Ω^1 y Ω^2 se definen como

$$c_{kl}^i u_l^i + \int_{\Gamma_{1j}} T_{kl} u_l^j d\Gamma = \int_{\Gamma_{1j}} U_{kl} t_l^j d\Gamma$$

$$c_{kl}^i u_l^i + \int_{\Gamma_{2j}} T_{kl} u_l^j d\Gamma = \int_{\Gamma_{2j}} U_{kl} t_l^j d\Gamma$$

Matricialmente el sistema de ecuaciones para las regiones Ω^1, Ω^2 y considerando las regiones de interfase de las fronteras Γ^{12}, Γ^{21} , se escribe a partir de los sistemas (II.4), de tal forma que para $\Omega^i = \Omega^1$ y cualquier región $\Omega^j = \Omega^2$, cuya frontera intercepta con cada frontera de Ω^2 y además $\Gamma^{12} = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$ los sistemas son:

para $\Omega^i = \Omega^1$

$$\begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,12} \\ G_{21,1} & G_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,12} \\ H_{12,1} & H_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

para $\Omega^j = \Omega^* = \Omega^2$

$$\begin{bmatrix} G_{2,2} & G_{2,21} \\ G_{21,2} & G_{21,21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{2,2} & H_{2,21} \\ H_{21,2} & H_{21,21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_{21} \end{bmatrix}$$

El sistema general considerando ambas regiones se escribe a partir del sistema (II.5) como

$$\begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,12} & 0 & 0 \\ G_{12,1} & G_{12,12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{2,2} & G_{2,21} \\ 0 & 0 & G_{21,2} & G_{21,21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_{12} \\ t_2 \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,12} & 0 & 0 \\ H_{12,1} & H_{12,12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{2,2} & H_{2,21} \\ 0 & 0 & H_{21,2} & H_{21,21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{12} \\ u_2 \\ u_{21} \end{bmatrix} \quad (II.11)$$

Las condiciones de compatibilidad se definen a partir de la relación entre desplazamientos y tracciones en la zona de interfase. Si $\Gamma^{12} = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$ se define que

$$u_{21} = u_{12} \quad \text{y} \quad t_{12} = -t_{21}$$

Aplicando las condiciones de compatibilidad en la interfase del sistema de ecuaciones para el modelo de dos regiones el sistema (II.11) es

$$\begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,12} & 0 & 0 \\ G_{12,1} & G_{12,12} & 0 & 0 \\ 0 & -G_{2,21} & G_{2,2} & 0 \\ 0 & -G_{21,21} & G_{21,2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_{12} \\ t_2 \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,1} & 0 & 0 & H_{1,12} \\ H_{12,1} & 0 & 0 & H_{12,12} \\ 0 & 0 & H_{2,2} & H_{2,21} \\ 0 & 0 & H_{21,2} & H_{21,21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{12} \\ u_2 \\ u_{21} \end{bmatrix} \quad (II.12)$$

Sustituyendo las condiciones de contorno de las fronteras $\Gamma^1 = \Gamma_{1u} + \Gamma_{1t}$ y $\Gamma^2 = \Gamma_{2u} + \Gamma_{2t}$ en (II.12), como se definió en los sistemas de ecuaciones (II.7) y (II.8) se tiene

$$\begin{bmatrix} G_{1u,1u} & G_{1u,1t} & G_{1u,12u} & 0 & 0 & 0 \\ G_{1t,1u} & G_{1t,1t} & G_{1t,12u} & 0 & 0 & 0 \\ G_{12u,1u} & G_{12u,1t} & G_{12u,12u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{2u,21t} & G_{2u,2u} & G_{2u,2t} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{2t,21t} & G_{2t,2u} & G_{2t,2t} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{21t,21t} & G_{21t,2u} & G_{21t,2t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{1u} \\ t_{1t} \\ t_{12u} \\ t_{2u} \\ t_{2t} \\ t_{21t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} H_{1u,1u} & H_{1u,1t} & 0 & 0 & 0 & H_{1u,12u} \\ H_{1t,1u} & H_{1t,1t} & 0 & 0 & 0 & H_{1t,12u} \\ H_{12u,1u} & H_{12u,1t} & 0 & 0 & 0 & H_{12u,12u} \\ 0 & 0 & 0 & H_{2u,2u} & H_{2u,2t} & H_{2u,21t} \\ 0 & 0 & 0 & H_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,21t} \\ 0 & 0 & 0 & H_{21t,2u} & H_{21t,2t} & H_{21t,21t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1u} \\ u_{1t} \\ u_{12u} \\ u_{2u} \\ u_{2t} \\ u_{21t} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.13})$$

En los sistemas de ecuaciones (II.13), los desplazamientos u_{1u}, u_{2u} y las tracciones t_{1t}, t_{2t} son conocidos, además se puede ver u_{12u}, t_{21u} multiplican a coeficientes nulos, por lo tanto el sistema de ecuaciones H con las variables desconocidas se define como

$$H = \begin{bmatrix} -G_{1u,1u} & H_{1u,1t} & -G_{1u,12u} & 0 & 0 & H_{1u,12u} \\ -G_{1t,1u} & H_{1t,1t} & -G_{1t,12u} & 0 & 0 & H_{1t,12u} \\ -G_{12u,1u} & H_{12u,1t} & -G_{12u,12u} & 0 & 0 & H_{12u,12u} \\ 0 & 0 & G_{2u,21t} & -G_{2u,2u} & H_{2u,2t} & H_{2u,21t} \\ 0 & 0 & G_{2t,21t} & -G_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,21t} \\ 0 & 0 & G_{21t,21t} & -G_{21t,2u} & H_{21u,2t} & H_{21u,21t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{1u} \\ u_{1t} \\ t_{12u} \\ t_{2u} \\ u_{2t} \\ u_{21t} \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

y el sistema de ecuaciones G con las variables conocidas es

$$G = \begin{bmatrix} -H_{1u,1u} & G_{1u,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -H_{1t,1u} & G_{1t,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -H_{12u,1u} & G_{12u,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H_{2u,2u} & G_{2u,2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H_{2t,2u} & G_{2t,2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H_{12t,2u} & G_{21t,2t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1u} \\ t_{1t} \\ u_{12u} \\ u_{2u} \\ t_{2t} \\ t_{21t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1u} \\ f_{1t} \\ f_{12u} \\ f_{2u} \\ f_{2t} \\ f_{21t} \end{bmatrix} \quad (II.15)$$

El sistema de fuerzas reordenado para dos regiones considerando las condiciones de interfase de los sistemas (II.14) y (II.15) se escribe como

$$f = [f_{1t} \quad f_{1u} \quad f_{12u} \quad f_{2t} \quad f_{2u} \quad f_{21t}]^T$$

Finalmente el sistema de ecuaciones para dos regiones de la forma $AX = B$ a resolver, se escribe como

$$\begin{bmatrix} -G_{1u,1u} & H_{1u,1t} & -G_{1u,12u} & 0 & 0 & H_{1u,12u} \\ -G_{1t,1u} & H_{1t,1t} & -G_{1t,12u} & 0 & 0 & H_{1t,12u} \\ -G_{12u,1u} & H_{12u,1t} & -G_{12u,12u} & 0 & 0 & H_{12u,12u} \\ 0 & 0 & G_{2u,21t} & -G_{2u,2u} & H_{2u,2t} & H_{2u,21t} \\ 0 & 0 & G_{2t,21t} & -G_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,21t} \\ 0 & 0 & G_{21t,21t} & -G_{21t,2u} & H_{21u,2t} & H_{21u,21t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{1u} \\ u_{1t} \\ t_{12u} \\ t_{2u} \\ u_{2t} \\ u_{21t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1u} \\ f_{1t} \\ f_{21t} \\ f_{2u} \\ f_{2t} \\ f_{12u} \end{bmatrix}$$

II.2.2 Modelo de tres regiones

La figura II.5, se muestra el modelo de tres regiones $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ con fronteras $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$, todas conectadas entre sí y con condiciones de frontera para los desplazamientos y las tracciones preescritas en las fronteras $\Gamma^1 = \Gamma_u^1 + \Gamma_t^1$, $\Gamma^2 = \Gamma_u^2 + \Gamma_t^2$, $\Gamma^3 = \Gamma_u^3 + \Gamma_t^3$ y de condiciones de interfase en las fronteras $\Gamma^{12}, \Gamma^{21}, \Gamma^{13}, \Gamma^{31}, \Gamma^{23}, \Gamma^{32}$.

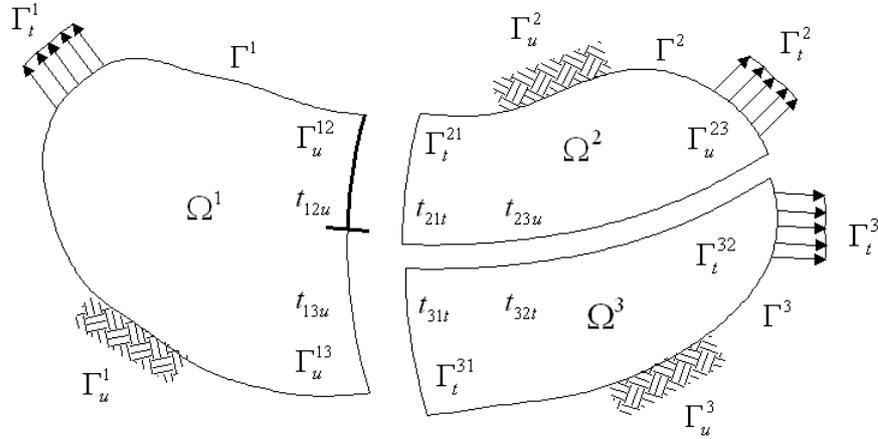


Figura II.5. Modelo de tres regiones.

En el problema para tres regiones las ecuaciones integrales para las regiones Ω^1 , Ω^2 y Ω^3 se definen como

$$c_{kl}^i u_l^i + \int_{\Gamma_{1j}} T_{kl} u_l^j d\Gamma = \int_{\Gamma_{1j}} U_{kl} t_l^j d\Gamma, \quad c_{kl}^i u_l^i + \int_{\Gamma_{2j}} T_{kl} u_l^j d\Gamma = \int_{\Gamma_{2j}} U_{kl} t_l^j d\Gamma,$$

$$c_{kl}^i u_l^i + \int_{\Gamma_{3j}} T_{kl} u_l^j d\Gamma = \int_{\Gamma_{3j}} U_{kl} t_l^j d\Gamma$$

donde $\Omega^i = \Omega^1$ es la región fuente y $\Omega^* = (\Omega^2, \Omega^3)$ son las regiones de interface, tales que $\Gamma^{1*} = \Gamma^1 \cap (\Gamma^2 + \Gamma^3)$.

Matricialmente el sistema general de ecuaciones para las regiones $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ y considerando las regiones de interfase de las fronteras $\Gamma^{12}, \Gamma^{21}, \Gamma^{13}, \Gamma^{31}, \Gamma^{23}, \Gamma^{32}$, se escriben a partir del sistema general (II.3) como

$$\begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,12} & G_{1,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{12,1} & G_{12,12} & G_{12,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{13,1} & G_{13,12} & G_{13,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{2,2} & G_{2,21} & G_{2,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{21,2} & G_{21,21} & G_{21,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23,2} & G_{23,21} & G_{23,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{3,3} & G_{3,31} & G_{3,32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31,3} & G_{31,31} & G_{31,32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{32,3} & G_{32,31} & G_{32,32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_2 \\ t_{21} \\ t_{23} \\ t_3 \\ t_{31} \\ t_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,12} & H_{1,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{12,1} & H_{12,12} & H_{12,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{13,1} & H_{13,12} & H_{13,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{2,2} & H_{2,21} & H_{2,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{21,2} & H_{21,21} & H_{21,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{23,2} & H_{23,21} & H_{23,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{3,3} & H_{3,31} & H_{3,32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{31,3} & H_{31,31} & H_{31,32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{32,3} & H_{32,31} & H_{32,32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_2 \\ u_{21} \\ u_{23} \\ u_3 \\ u_{31} \\ u_{32} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.16})$$

En el problema existen tres zonas de interfases, las condiciones de compatibilidad entre desplazamientos y tracciones en la frontera de interfase, se cumple si $\Gamma^{12} = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$, $\Gamma^{13} = \Gamma^1 \cap \Gamma^3$ y $\Gamma^{23} = \Gamma^2 \cap \Gamma^3$ se define que

$$u_{12} = u_{21}, u_{13} = u_{31}, u_{23} = u_{32} \quad \text{y} \quad t_{12} = -t_{21}, t_{13} = -t_{31}, t_{23} = -t_{32}$$

Aplicando las condiciones de compatibilidad en la interfase del sistema de ecuaciones para el modelo de tres regiones de los sistemas (II.16) se tiene

$$\begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,12} & G_{1,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{12,1} & G_{12,12} & G_{12,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{13,1} & G_{13,12} & G_{13,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{2,21} & 0 & G_{2,2} & 0 & G_{2,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{21,21} & 0 & G_{21,2} & 0 & G_{21,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{23,21} & 0 & G_{23,2} & 0 & G_{23,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{3,31} & 0 & 0 & -G_{3,32} & G_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{31,31} & 0 & 0 & -G_{31,32} & G_{31,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{32,31} & 0 & 0 & -G_{32,32} & G_{32,3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_2 \\ t_{21} \\ t_{23} \\ t_3 \\ t_{31} \\ t_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
 H_{1,1} & 0 & 0 & 0 & H_{1,12} & 0 & 0 & H_{1,13} & 0 \\
 H_{12,1} & 0 & 0 & 0 & H_{12,12} & 0 & 0 & H_{12,13} & 0 \\
 H_{13,1} & 0 & 0 & 0 & H_{13,12} & 0 & 0 & H_{13,13} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & H_{2,2} & H_{2,21} & 0 & 0 & 0 & H_{2,23} \\
 0 & 0 & 0 & H_{21,2} & H_{21,21} & 0 & 0 & 0 & H_{21,23} \\
 0 & 0 & 0 & H_{23,2} & H_{23,21} & 0 & 0 & 0 & H_{23,23} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{3,3} & H_{3,31} & H_{3,32} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{31,3} & H_{31,31} & H_{31,32} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{32,3} & H_{32,31} & H_{32,32}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_{12} \\
 u_{13} \\
 u_2 \\
 u_{21} \\
 u_{23} \\
 u_3 \\
 u_{31} \\
 u_{32}
 \end{bmatrix}
 \quad (II.17)$$

Sustituyendo las condiciones de contorno de las fronteras $\Gamma^1 = \Gamma_{1u} + \Gamma_{1t}$, $\Gamma^2 = \Gamma_{2u} + \Gamma_{2t}$ y $\Gamma^3 = \Gamma_{3u} + \Gamma_{3t}$ en los sistemas (II.17), como se definió para los sistemas de ecuaciones (II.7) y (II.8) se tiene

$$\begin{bmatrix}
 G_{1u,1u} & G_{1u,1t} & G_{1u,12u} & G_{1u,13u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{1t,1u} & G_{1t,1t} & G_{1t,12u} & G_{1t,13u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{12u,1u} & G_{12u,1t} & G_{12u,12u} & G_{12u,13u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{13u,1u} & G_{13u,1t} & G_{13u,12u} & G_{13u,13u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -G_{2u,21t} & 0 & G_{2u,2u} & G_{2u,2t} & 0 & G_{2u,23u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -G_{2t,21t} & 0 & G_{2t,2u} & G_{2t,2t} & 0 & G_{2t,23u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -G_{21t,21t} & 0 & G_{21t,2u} & G_{21t,2t} & 0 & G_{21t,23u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -G_{23t,21t} & 0 & G_{23u,2u} & G_{23t,2t} & 0 & G_{23u,23u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -G_{3u,31t} & 0 & 0 & 0 & -G_{3u,32t} & G_{3u,3u} & G_{3u,3t} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -G_{3t,31t} & 0 & 0 & 0 & -G_{3t,32t} & G_{3t,3u} & G_{3t,3t} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -G_{31t,31t} & 0 & 0 & 0 & -G_{31t,32t} & G_{31t,3u} & G_{31t,3t} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -G_{32t,31t} & 0 & 0 & 0 & -G_{32t,32t} & G_{32t,3u} & G_{32t,3t} & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 t_{1u} \\
 t_{1t} \\
 t_{12u} \\
 t_{13u} \\
 t_{2u} \\
 t_{2t} \\
 t_{21t} \\
 t_{23u} \\
 t_{3u} \\
 t_{3t} \\
 t_{31t} \\
 t_{32t}
 \end{bmatrix}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 H_{1u,1u} & H_{1u,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{1u,12u} & 0 & 0 & 0 & H_{1u,13t} & 0 \\
 H_{1t,1u} & H_{1t,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{1t,12u} & 0 & 0 & 0 & H_{1t,13t} & 0 \\
 H_{12u,1u} & H_{12u,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{12u,12u} & 0 & 0 & 0 & H_{12u,13t} & 0 \\
 H_{13u,1u} & H_{13u,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{13u,12u} & 0 & 0 & 0 & H_{13u,13t} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & H_{2u,2u} & H_{2u,2t} & H_{2u,2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{2u,23u} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & H_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{2t,23u} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & H_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{2t,23t} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & H_{23t,2u} & H_{23t,2t} & H_{23t,2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{23t,23u} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{3u,3u} & H_{3u,3t} & H_{3u,3t} & H_{3u,32t} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{3t,3u} & H_{3t,3t} & H_{3t,3t} & H_{3t,32t} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{3t,3u} & H_{3t,3t} & H_{3t,3t} & H_{3t,32t} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{32t,3u} & H_{32t,3t} & H_{32t,3t} & H_{32t,32t}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{1u} \\
 u_{1t} \\
 u_{12u} \\
 u_{13u} \\
 u_{2u} \\
 u_{2t} \\
 u_{2t} \\
 u_{23u} \\
 u_{3u} \\
 u_{3t} \\
 u_{3t} \\
 u_{32t}
 \end{bmatrix}
 \quad (II.18)$$

En los sistemas de ecuaciones (II.18), los desplazamientos u_{1u}, u_{2u}, u_{3u} y las tracciones t_{1t}, t_{2t}, t_{3t} son conocidos, además se puede ver que $u_{12u}, u_{13u}, t_{21u}, t_{31u}, t_{32u}$ multiplican a coeficientes nulos. El sistema de ecuaciones H con las variables desconocidas se define como

$$\begin{bmatrix}
 -G_{1u,1u} & H_{1u,1t} & -G_{1u,12t} & -G_{1u,13t} & 0 & 0 & H_{1u,12t} & 0 & 0 & 0 & H_{1u,13} & 0 \\
 -G_{1t,1u} & H_{1t,1t} & -G_{1t,12t} & -G_{1t,13t} & 0 & 0 & H_{1t,12t} & 0 & 0 & 0 & H_{1t,13} & 0 \\
 -G_{12t,1u} & H_{12t,1t} & -G_{12t,12t} & -G_{12t,13t} & 0 & 0 & H_{12t,12t} & 0 & 0 & 0 & H_{12t,13} & 0 \\
 -G_{13t,1u} & H_{13t,1t} & -G_{13t,12t} & -G_{13t,13t} & 0 & 0 & H_{13t,12t} & 0 & 0 & 0 & H_{13t,13} & 0 \\
 0 & 0 & G_{2t,2t} & 0 & -G_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,2t} & -G_{2t,23u} & 0 & 0 & 0 & H_{2t,23u} \\
 0 & 0 & G_{2t,2t} & 0 & -G_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,2t} & -G_{2t,23u} & 0 & 0 & 0 & H_{2t,23t} \\
 0 & 0 & G_{2t,2t} & 0 & -G_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,2t} & -G_{2t,23t} & 0 & 0 & 0 & H_{2t,23u} \\
 0 & 0 & G_{23t,2t} & 0 & -G_{23t,2u} & H_{23t,2t} & H_{23t,2t} & -G_{23t,23u} & 0 & 0 & 0 & H_{23t,23u} \\
 0 & 0 & 0 & G_{3t,3t} & 0 & 0 & 0 & G_{3t,32} & -G_{3t,3u} & H_{3t,3t} & H_{3t,3t} & H_{3t,32} \\
 0 & 0 & 0 & G_{3t,3t} & 0 & 0 & 0 & G_{3t,32} & -G_{3t,3u} & H_{3t,3t} & H_{3t,3t} & H_{3t,32} \\
 0 & 0 & 0 & G_{3t,3t} & 0 & 0 & 0 & G_{3t,32} & -G_{3t,3u} & H_{3t,3t} & H_{3t,3t} & H_{3t,32} \\
 0 & 0 & 0 & G_{32t,3t} & 0 & 0 & 0 & G_{32t,32} & -G_{32t,3u} & H_{32t,3t} & H_{32t,3t} & H_{32t,32}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 t_{1u} \\
 u_{1t} \\
 t_{12u} \\
 t_{13u} \\
 t_{2u} \\
 u_{2t} \\
 u_{2t} \\
 t_{23u} \\
 t_{3u} \\
 u_{3t} \\
 u_{3t} \\
 u_{32t}
 \end{bmatrix}
 \quad (II.19)$$

y el sistema de ecuaciones G con las variables conocidas es

$$\begin{bmatrix}
 -H_{1u,1u} & G_{1u,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -H_{1t,1u} & G_{1t,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -H_{12u,1u} & G_{12u,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -H_{13u,1u} & G_{13u,1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{2u,2u} & G_{2u,2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{2t,2u} & G_{2t,2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{21t,2u} & G_{21t,2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{23u,2u} & G_{23t,2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{3u,3u} & G_{3u,3t} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{3t,3u} & G_{3t,3t} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{31t,3u} & G_{31t,3t} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{32t,3u} & G_{32t,3t} & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{1u} \\
 t_{1t} \\
 u_{12u} \\
 u_{13u} \\
 u_{2u} \\
 t_{2t} \\
 t_{21t} \\
 u_{23u} \\
 u_{3u} \\
 t_{3t} \\
 t_{31t} \\
 t_{32t}
 \end{bmatrix}
 \quad (II.20)$$

El sistema de fuerzas reordenado para tres regiones considerando las condiciones de interfase para los sistemas (II.14) y (II.15) es

$$f = [f_{1u} \quad f_{1t} \quad f_{12u} \quad f_{13u} \quad f_{2u} \quad f_{2t} \quad f_{21t} \quad f_{23u} \quad f_{3u} \quad f_{3t} \quad f_{31t} \quad f_{32t}]^T$$

Finalmente el sistema de ecuaciones para tres regiones de la forma $AX = B$ a resolver, se escribe como

$$\begin{bmatrix}
 -G_{1u,1u} & H_{1u,1t} & -G_{1u,12t} & -G_{1u,13t} & 0 & 0 & H_{1u,12t} & 0 & 0 & 0 & H_{1u,13t} & 0 \\
 -G_{1t,1u} & H_{1t,1t} & -G_{1t,12t} & -G_{1t,13t} & 0 & 0 & H_{1t,12t} & 0 & 0 & 0 & H_{1t,13t} & 0 \\
 -G_{12t,1u} & H_{12t,1t} & -G_{12t,12t} & -G_{12t,13t} & 0 & 0 & H_{12t,12t} & 0 & 0 & 0 & H_{12t,13t} & 0 \\
 -G_{13t,1u} & H_{13t,1t} & -G_{13t,12t} & -G_{13t,13t} & 0 & 0 & H_{13t,12t} & 0 & 0 & 0 & H_{13t,13t} & 0 \\
 0 & 0 & G_{2u,2t} & 0 & -G_{2u,2u} & H_{2u,2t} & H_{2u,2t} & -G_{2u,23t} & 0 & 0 & 0 & H_{2u,23t} \\
 0 & 0 & G_{2t,2t} & 0 & -G_{2t,2u} & H_{2t,2t} & H_{2t,2t} & -G_{2t,23t} & 0 & 0 & 0 & H_{2t,23t} \\
 0 & 0 & G_{21t,2t} & 0 & -G_{21t,2u} & H_{21t,2t} & H_{21t,2t} & -G_{21t,23t} & 0 & 0 & 0 & H_{21t,23t} \\
 0 & 0 & G_{23t,2t} & 0 & -G_{23t,2u} & H_{23t,2t} & H_{23t,2t} & -G_{23t,23t} & 0 & 0 & 0 & H_{23t,23t} \\
 0 & 0 & 0 & G_{3u,3t} & 0 & 0 & 0 & G_{3u,32t} & -G_{3u,3u} & H_{3u,3t} & H_{3u,3t} & H_{3u,32t} \\
 0 & 0 & 0 & G_{3t,3t} & 0 & 0 & 0 & G_{3t,32t} & -G_{3t,3u} & H_{3t,3t} & H_{3t,3t} & H_{3t,32t} \\
 0 & 0 & 0 & G_{31t,3t} & 0 & 0 & 0 & G_{31t,32t} & -G_{31t,3u} & H_{31t,3t} & H_{31t,3t} & H_{31t,32t} \\
 0 & 0 & 0 & G_{32t,3t} & 0 & 0 & 0 & G_{32t,32t} & -G_{32t,3u} & H_{32t,3t} & H_{32t,3t} & H_{32t,32t}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 t_{1u} \\
 u_{1t} \\
 t_{12t} \\
 t_{13t} \\
 t_{2u} \\
 u_{2t} \\
 t_{21t} \\
 t_{23t} \\
 t_{3u} \\
 u_{3t} \\
 t_{31t} \\
 u_{32t}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_{1u} \\
 f_{1t} \\
 f_{12t} \\
 f_{13t} \\
 f_{2u} \\
 f_{2t} \\
 f_{21t} \\
 f_{23t} \\
 f_{3u} \\
 f_{3t} \\
 f_{31t} \\
 f_{32t}
 \end{bmatrix}
 \quad (II.2)$$

II.3 Planteamiento del algoritmo para problemas con múltiples regiones

El planteamiento del algoritmo para la solución de problemas con múltiples regiones por el método directo de ecuaciones integrales de frontera, se define a partir del programa existente para la solución de problemas con una región.

El programa Condthem existente, utiliza elementos constantes para la solución dinámica de problemas de propiedades elásticas en tres dimensiones escrito por Domínguez, J., (1993) y tiene como base los fundamentos que se presentan en los apéndices A y B.

En la figura (II.6), se muestra el esquema simplificado del programa existente Condthem compuesto por un conjunto de subrutinas y básicamente se distinguen tres partes:

- Pre procesador: El objetivo principal es la construcción del modelo a resolver, a partir de la geometría, sus cargas, propiedades del material y de las condiciones de frontera, para una frecuencia dada.
- Controlador principal: Es la parte interna del proceso encargada de formar y evaluar numéricamente el sistema de ecuaciones, a partir de los condiciones de frontera del problema.
- Postprocesador: Resultados del modelo.

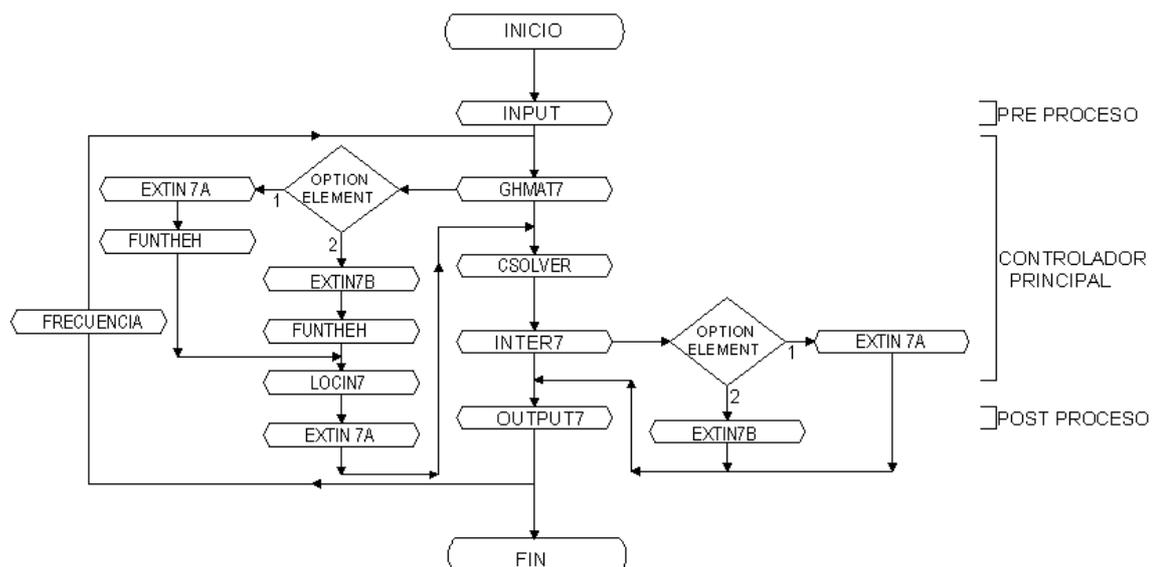
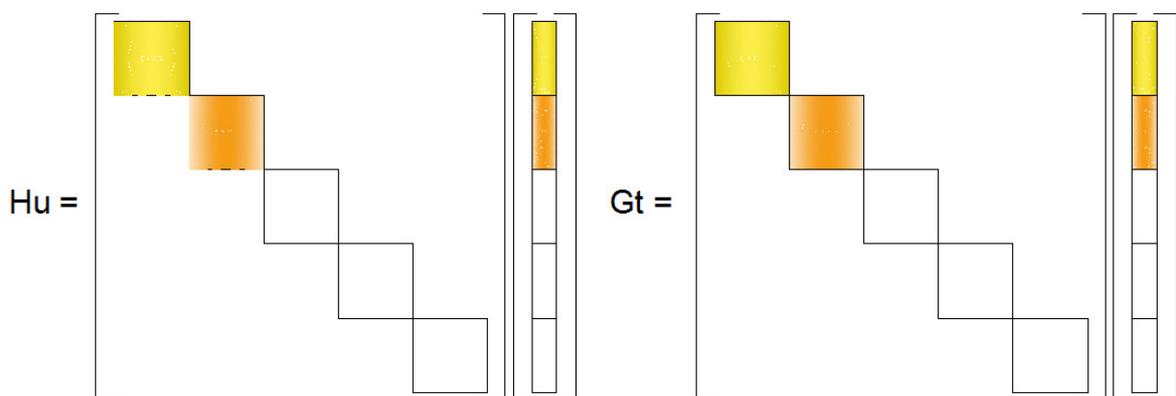


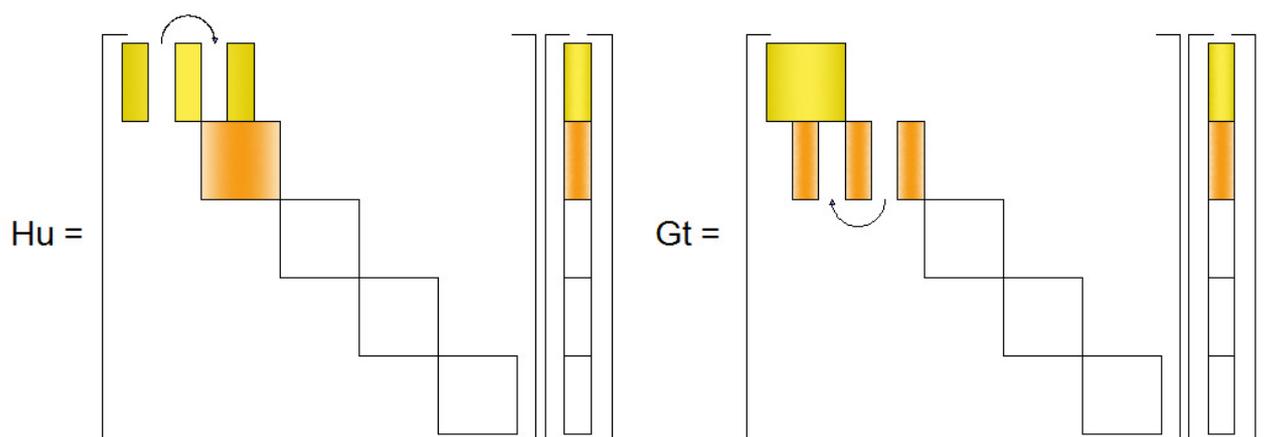
Figura II.6. Esquema del programa Condthem.

Con lo anterior y con el modelo estudiado en el presente capítulo para la solución dinámica de problemas con múltiples regiones, se define la secuencia de pasos lógicos a seguir para la modificación del programa existente Condthem, por lo tanto el Pseudo código simplificado se escribe como:

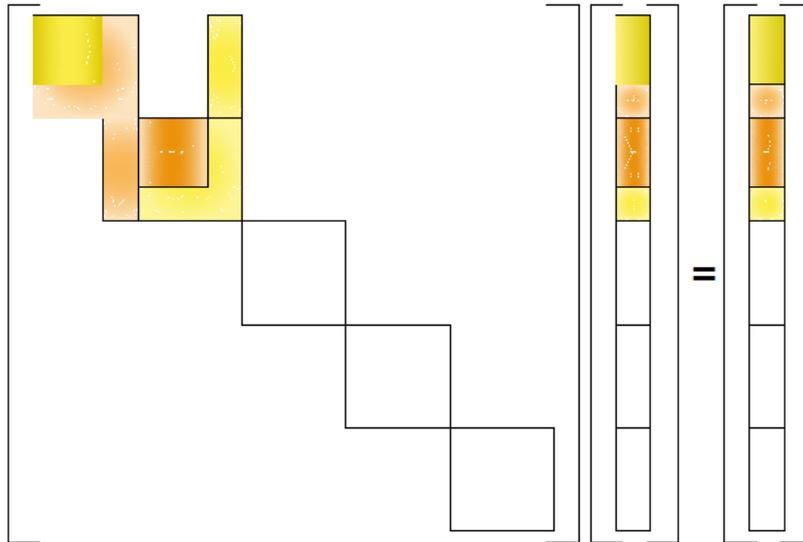
1. Inicio
2. Inicializar número de frecuencias $I = 1, NF$
3. Inicializar numero de regiones $IREG = 1, NR$
 - o Calcula las matrices por región (programa existente Condthem)



- o Se imponen las condiciones de compatibilidad en la interfase del sistema de ecuaciones.



4. Se aplican las condiciones de contorno y se reordenan los coeficientes del sistema de ecuaciones H con las variables desconocidas y G con variables conocidas, obteniéndose así el sistema de ecuaciones a resolver de la forma $AX = B$.



5. Resuelve el sistema de ecuaciones.
6. Calcula y guarda los desplazamientos de los puntos internos para las múltiples regiones por elemento.
7. Inicializar número de elementos $J = 1, 3N$ y número de regiones $IREG = 1, NR$
8. Reportar los desplazamientos por elementos para un determinado número de frecuencias.
9. Fin.

El programa GCE modificado aplicando el método directo de ecuaciones integrales de frontera que se presenta en este trabajo, es una herramienta útil para la solución dinámica de problemas con múltiples regiones.

En la figura (II.7), se muestra el esquema general del programa GCE, el cual se compone de un conjunto de subrutinas modificadas (INPUT, DOR, INTER7, OUTPUT7), así como la parte correspondiente al modelo de múltiples regiones estudiado en el presente capítulo.

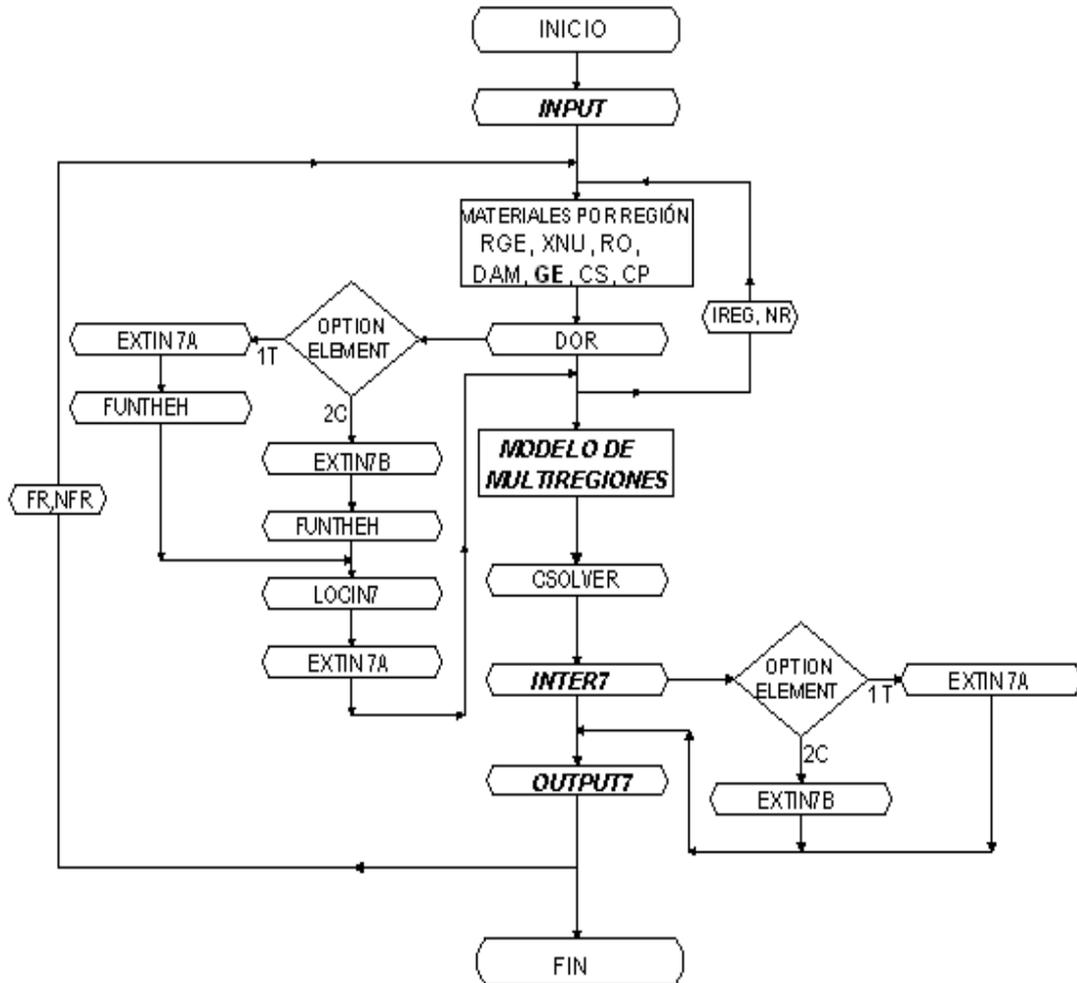


Figura II.7. Esquema de programación para múltiples regiones.

II.4 Diagrama de flujo del modelo de múltiples regiones

El diagrama de flujo para la solución dinámica de modelos con múltiples regiones por el método directo de ecuaciones integrales de frontera se presenta en cuatro partes, figuras II.8, II.9, II.10, II.11 y el significado de las variables del programa GCE en Fortran 90 se presentan en el apéndice C.

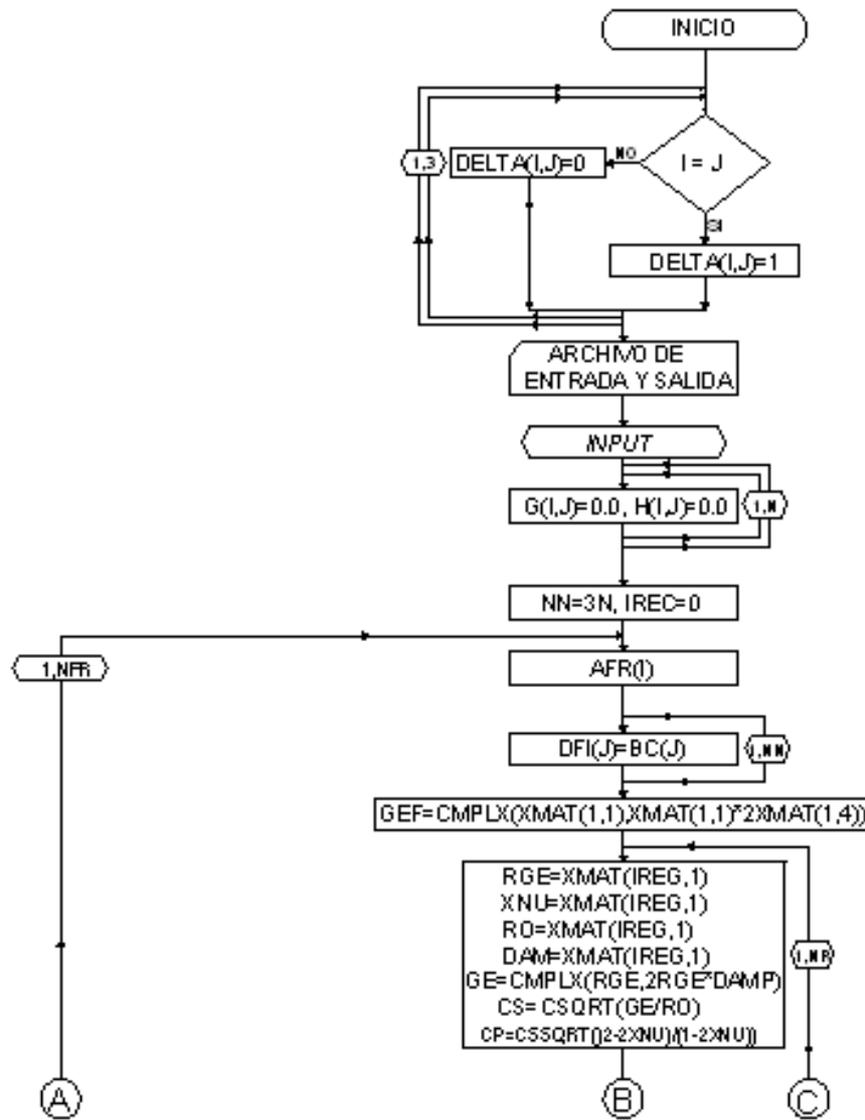


Figura II.8. Parte uno, variables principales del modelo a resolver.

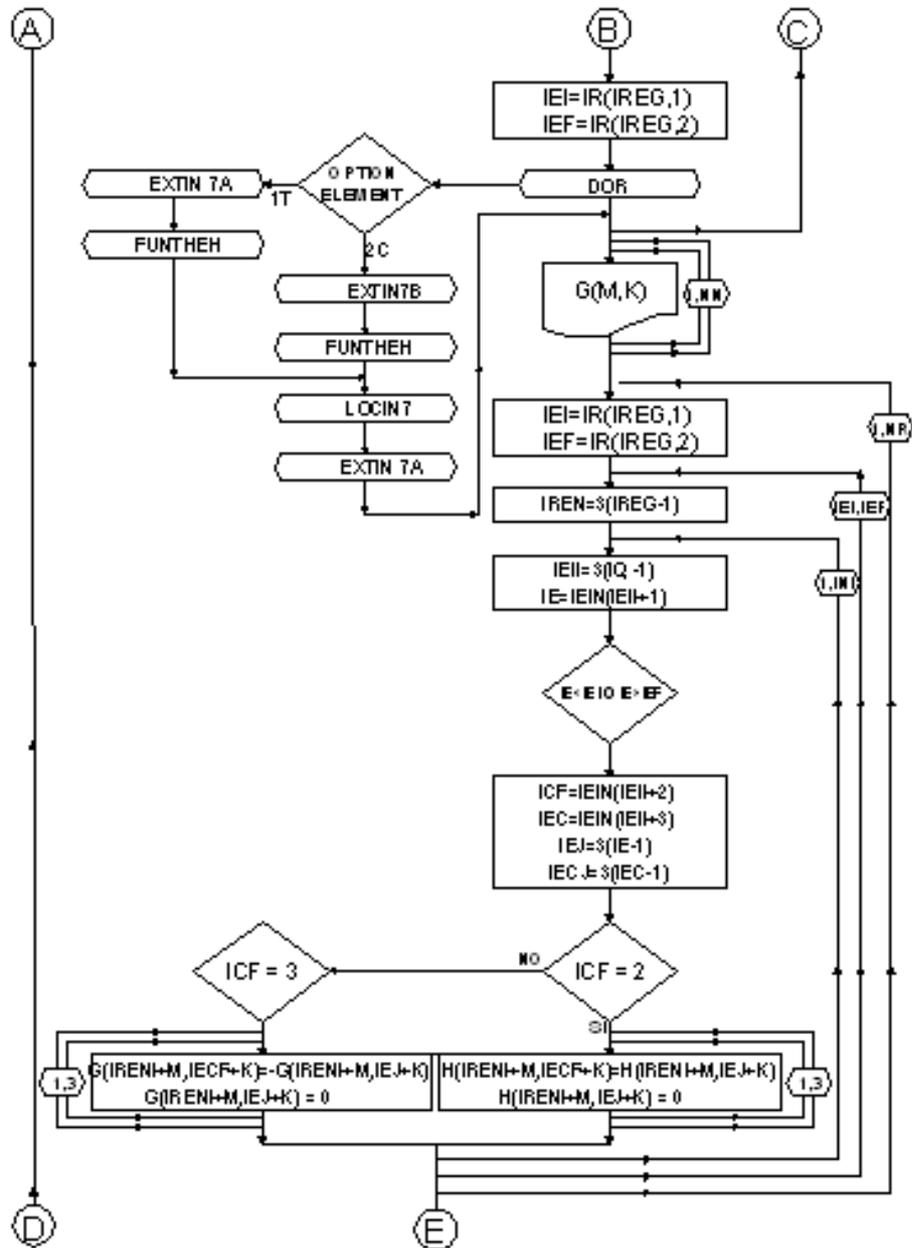


Figura II.9. Partes dos, modelo de múltiples regiones.

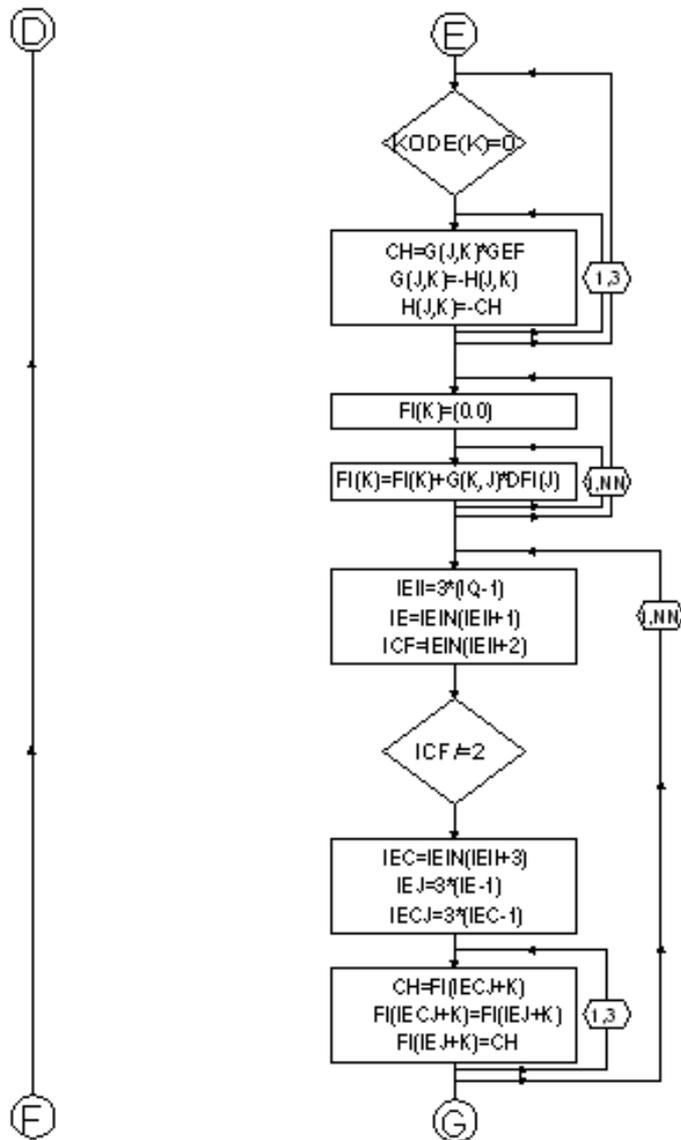


Figura II.10. Partes tres, modelo de múltiples regiones.

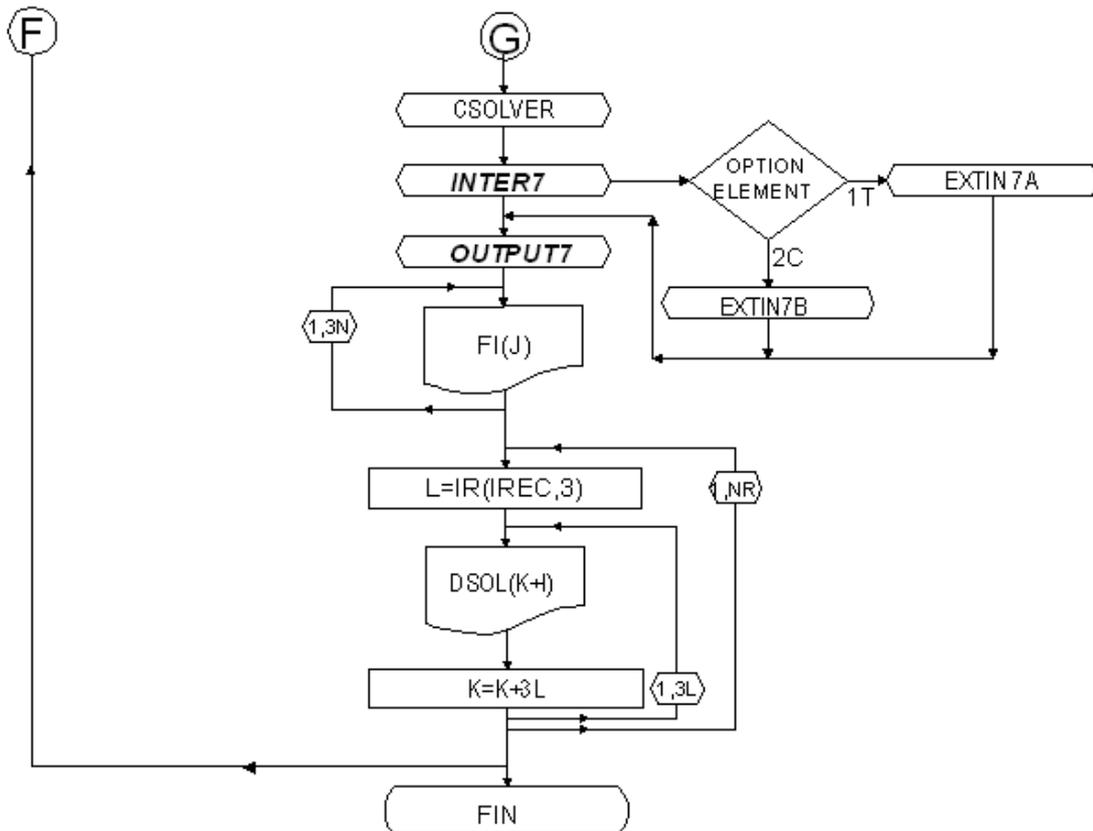


Figura II.11. Parte cuatro, solución y resultados del modelo.

Capítulo III

Validación y aplicaciones

III.1 Implantación del BEM para problemas con múltiples regiones

Las ideas presentadas en capítulo dos para el modelo de múltiples regiones se implantaron en el programa CONDTHEM, Domínguez, J., (1993). Realizando las modificaciones pertinentes. El programa generalizado utilizando elementos constantes (GCE) se presenta en el apéndice C.4, mostrándose con negritas los cambios realizados al programa existente. El formato del archivo de entrada y la explicación de los parámetros están en el apéndice C.3.

En la validación de modelo de múltiples regiones se propone estudiar una viga en cantiliver compuesta de tres regiones con propiedades de material distinto, la cual es excitada axialmente y transversalmente por un desplazamiento unitario en la base del empotramiento. En este análisis se verifica que los resultados para una región, utilizando los programas antes mencionados sean los mismos

Se definen las frecuencias teóricas del problema para una región, mientras que las frecuencias numéricas para dos y tres regiones se obtienen numéricamente con el programa SAP2000 v. 9.01, siendo estas comparadas con las obtenidas para los dos primeros modos de vibración generadas de los resultados obtenidos con el programa GCE.

Finalmente se plantea un problema de un bloque de concreto, el cual contiene una barra ahogada en el mismo, obteniéndose resultados similares al primer problema, quedando verificado el modelo de análisis.

III.2 Validación del modelo de múltiples regiones

La validación del programa GCE para el análisis de problemas con múltiples regiones por el método directo de ecuaciones integrales de frontera, se realiza definiendo un problema de análisis tal que permita obtener los resultados deseados y para esto es necesario verificar lo siguiente:

- Comprobar que los resultados generados del programa GCE del problema propuesto, con las soluciones del programa original que resuelve problemas para una sola región (CONDTHEM) sean los mismos.
- Obtener las frecuencias de vibración teórica y numérica para los primeros dos modos de vibración del problema para una, dos y tres regiones, con la finalidad de compararlos con los modos de los espectros de respuesta del problema analizado por el método de ecuaciones integrales de frontera.

III.2.1 Viga en cantiliver con movimiento axial en la base

El problema de análisis en estudio, es una viga en cantiliver de $25 \times 50 \times 300$ cm ($b \times h \times L$) dividida en una, dos y tres regiones, la geometría del problema se muestra en la figura III.1. La viga es excitada axialmente por un desplazamiento unitario en la base.

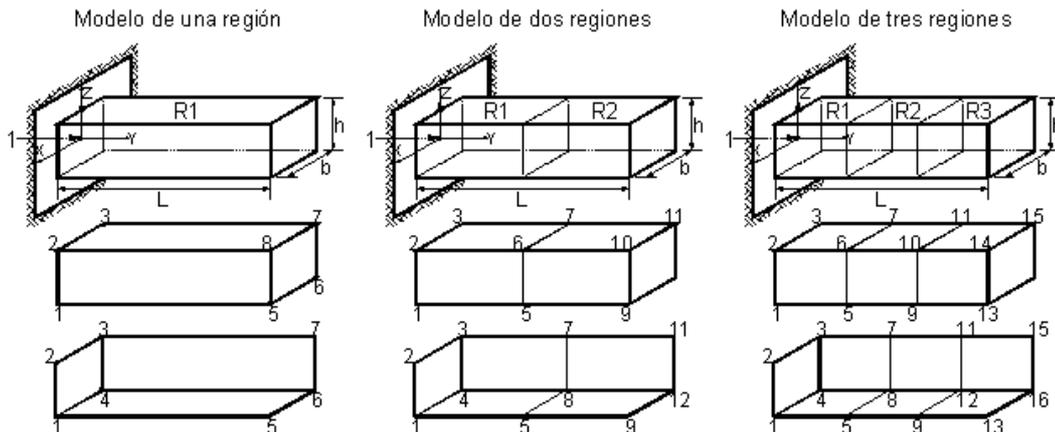


Figura III.1. Viga en cantiliver con movimiento axial.

Las propiedades del material del problema de múltiples regiones se compone de tres materiales distintos, estos se presentan en la tabla III.1.

Tabla III.1. Propiedades de las regiones de la viga en cantiliver con módulo de elasticidad E , $2E$ y $3E$.

Materiales	E (Nw/m ²)	G (Nw/m ²)	Γ (kg/m ³)	μ (adim)	Damp (adim)
R1 = E	2.1715.E+10	9.4415.E+09	2400	0.15	0
R2 = 2E	4.3431.E+10	1.8883.E+10	2400	0.15	0
R3 = 3E	6.5146.E+10	2.8324.E+10	2400	0.15	0

Un parámetro necesario para la validación del modelo de múltiples regiones es la frecuencia natural de vibración teórica de la viga en cantiliver sometida carga axial.

La frecuencia natural de la viga se determina a partir de la expresión (III.1) y los resultados se presentan en la tabla III.3.

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (III.1)$$

donde $n = 1,2,3,\dots,\infty$, representa el modo natural, E es el módulo de elasticidad, ρ es la densidad y L la longitud de la viga.

Tabla III.2. Periodos y frecuencias teóricas de viga en cantiliver con carga axial.

CANTILIVER	MODO 1		MODO 2	
	T (seg)	ω (rad/s)	T (seg)	ω (rad/s)
E	0.003989	1574.99	0.00133	4724.96
2E	0.00282	2227.37	0.00094	6682.10
3E	0.00230	2727.95	0.00077	8183.86

La discretización del problema será tal, que permita obtener una representación adecuada del problema en estudio, por lo que se propone en dividir la viga en 76 elementos rectangulares constantes en la frontera para una sola región, como se muestra en la figura III.2.

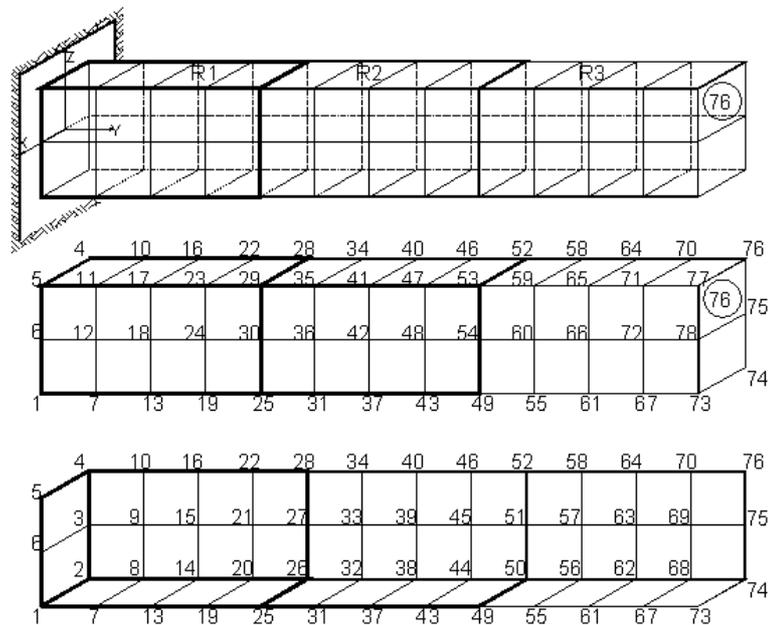


Figura III.2. Viga en cantiliver discretizada para una región en 76 elementos.

Una vez determinados los parámetros necesarios para la solución del problema, los espectros de respuesta se obtienen a partir de los resultados generados del programa modificado para múltiples regiones GCE, considerando 160 frecuencias tales que permitan representar los dos primeros modos de vibración axial.

En la figura III.3, se muestran el espectro de respuesta de la viga discretizada en 6, 20, 40, 76 y 296 elementos constantes. Cabe mencionar que las frecuencias se encuentran normalizadas con respecto a la frecuencia teórica del primer modo (Tabla III.1).

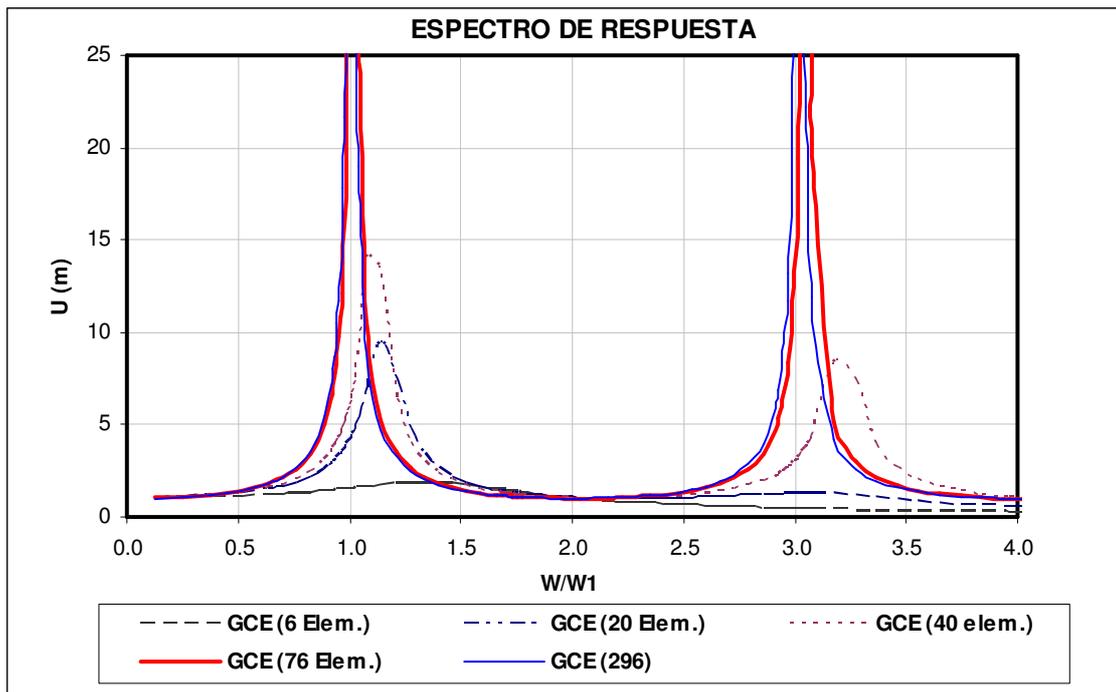


Figura III.3. Espectro de respuesta para una región.

En los espectros de respuesta anteriores, se puede ver que la discretización más adecuada para la representación de los modos de la viga en cantiliver con múltiples regiones es de 76 elementos (efecto de malla). De aquí en adelante los espectros de respuesta se generan para el mismo elemento de análisis.

En la figura III.4, se muestra la comprobación del programa GCE modificado, con respecto al programa CONDTHEM (existente) para una región y los espectros de respuesta de la viga en cantiliver discretizada para una, dos y tres regiones considerando un solo material E en el análisis.

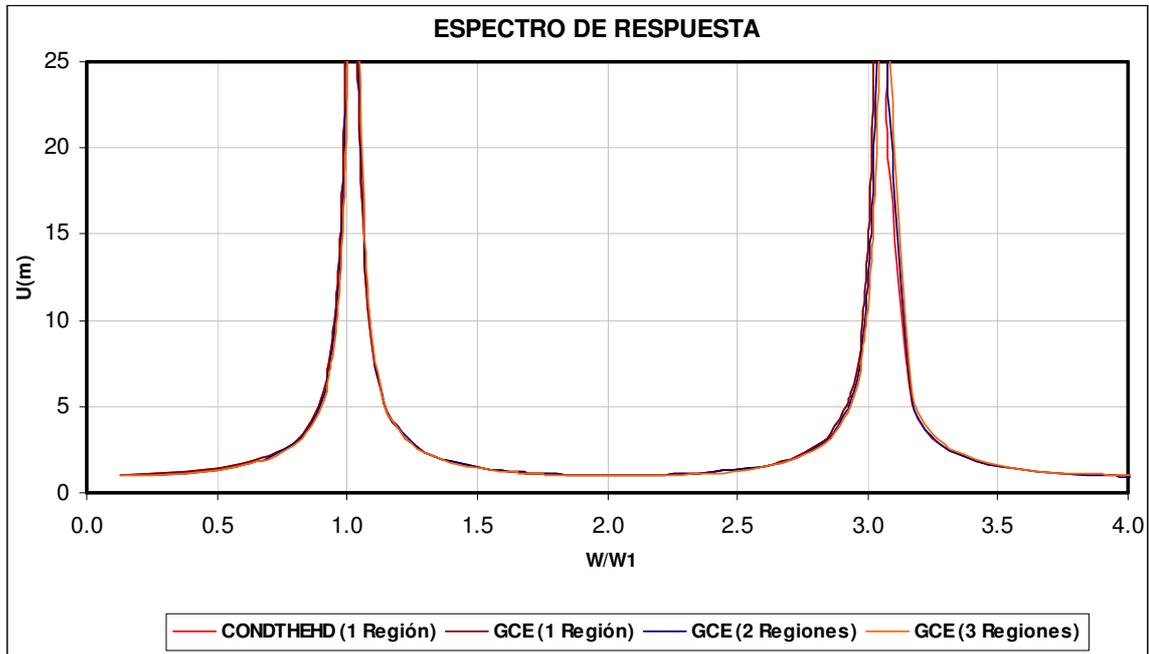


Figura III.4. Espectro de respuesta para múltiples regiones.

En el espectro de respuesta de las regiones se puede observar que los resultados al aplicar los programas existente y modificado son los mismos. Los resultados aplicando el programa GCE para una, dos y tres regiones para la frecuencia donde se presenta la amplitud máxima son muy similares, con esto se admite que la transmisión de efectos entre regiones es adecuada para su solución.

La solución consiste en obtener los espectros de respuesta, a partir del análisis del problema para una, dos y tres regiones. Para esto es necesario conocer las frecuencias teóricas u analíticas del problema para los dos primeros modos de vibración axial.

La frecuencia teórica para una región se obtiene con la expresión (III.1), y para dos o más regiones se calcula numéricamente realizando un análisis modal de la viga en cantiliver en el programa SAP2000 v. 9.01, obteniendo los periodos y las frecuencias de vibración para cada modo axial, para así poder compararlas con las frecuencias máximas generadas del análisis del modelo de múltiples regiones.

Las características del análisis de la viga en cantiliver en elementos finitos son las mismas que las generadas para elementos de frontera, con la diferencia que la discretización de los elementos se realiza en el volumen del sólido, por lo que se consideran 24 elementos sólidos de igual dimensión como se muestran en la figura III.5.

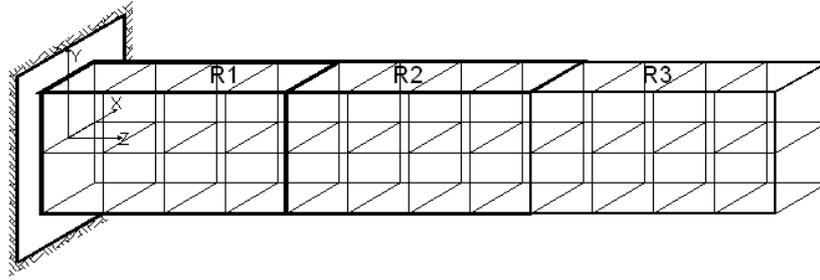


Figura III.5. Viga en cantiliver discretizada en 24 elementos sólidos.

La viga en cantiliver analizada en elementos finitos, se muestra en la figura III.6, de esta se verifican los primeros dos modos de vibración axial, siendo los resultados mostrados en la tabla III.3.

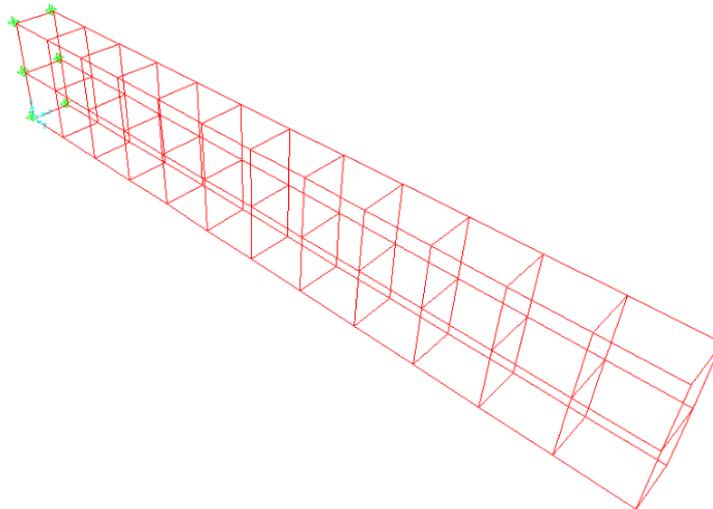


Figura III.6. Modelo de viga en cantiliver en elementos finitos.

Tabla III.3. Frecuencias naturales de viga en cantiliver con 24 sólidos.

CANTILIVER	MODO 1		MODO 2		ω_2/ω_1
	T (seg)	ω (rad/s)	T (seg)	ω (rad/s)	
1 Región	0.00399	1574.73	0.00133	4724.20	3.00
2 Regiones	0.00381	1649.13	0.00111	5660.53	3.43
3 Regiones	0.00357	1760.00	0.001	6283.19	3.57

El problema se analizó con 96 sólidos, siendo los periodos y las frecuencias mencionadas las mismas, por lo que se tomarán en cuenta los resultados obtenidos con 24 sólidos para la validación del modelo de múltiples regiones.

En las figuras III.7, III.8, III.9, se muestran los espectros de respuesta generados del análisis del problema para una, dos y tres regiones respectivamente. Nótese que para el caso de dos y tres regiones, se visualiza un tercer modo de vibración de la estructura, para la propiedad de material correspondiente.

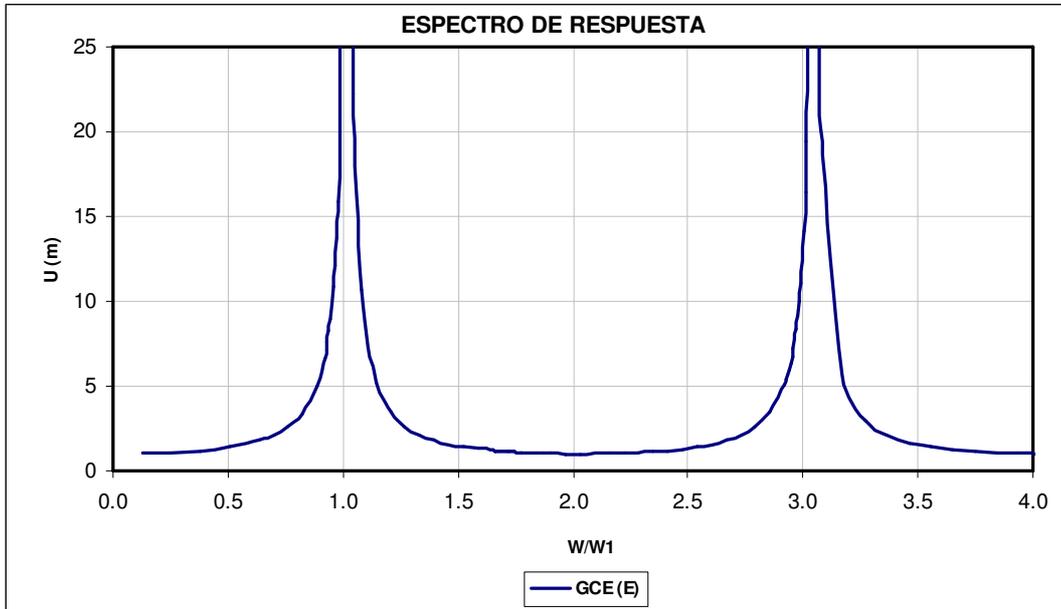


Figura III.7. Espectro de respuesta para una región, con módulo de elasticidad E .

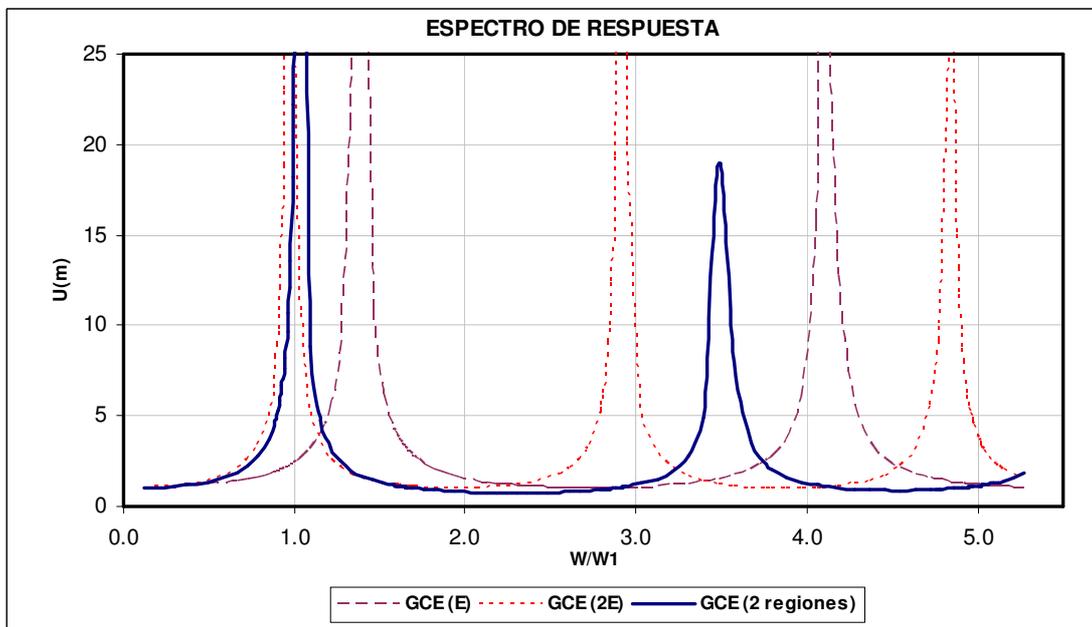


Figura III.8. Espectro de respuesta para dos regiones. La viga para dos regiones con material E y $2E$, corresponden a las curvas punteadas.

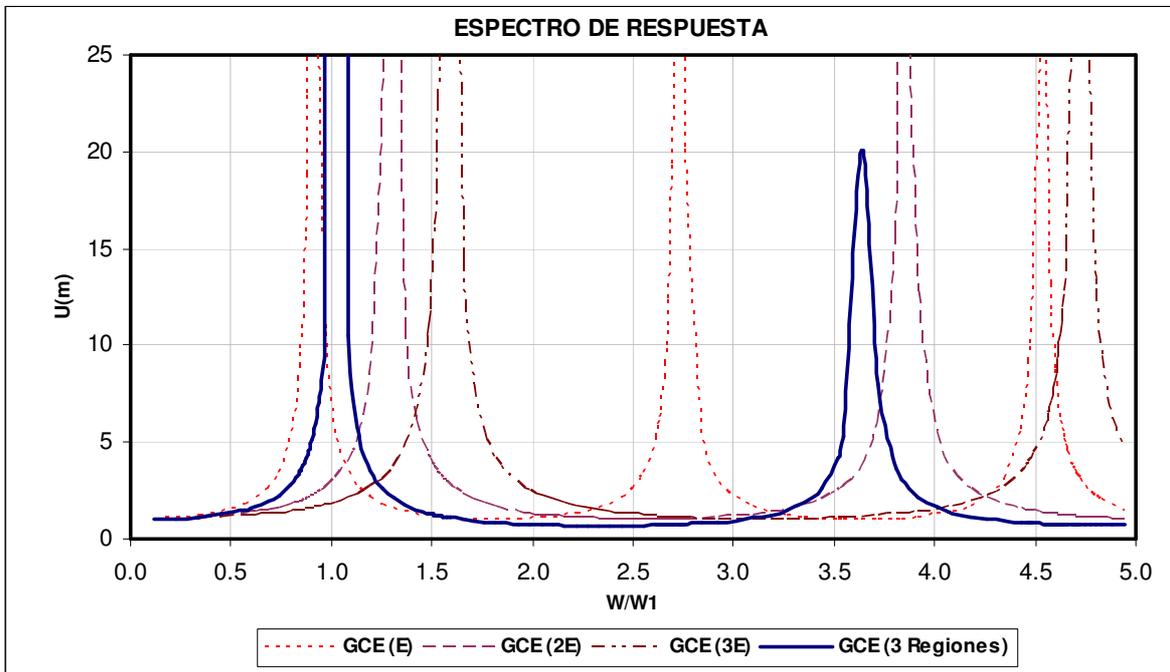


Figura III.9. Espectro de respuesta para tres regiones. La viga para tres regiones con material E , $2E$ y $3E$, corresponden a las curvas punteadas.

El periodo y la frecuencia del análisis del problema para múltiples regiones, se obtienen a partir de la amplitud máxima generada en cada caso de análisis y estos se muestran en la tabla III.4.

Tabla III.4. Periodos y frecuencias máximas de viga en cantiliver.

VIGA EN CANTILIVER	MODO 1		MODO 2		ω_2/ω_1
	T(seg)	ω (rad/s)	T(seg)	ω (rad/s)	
GCE (1 región)	0.00393	1600	0.00131	4800	3.00
GCE (2 regiones)	0.00370	1700	0.00109	5750	3.38
GCE (3 regiones)	0.00349	1800	0.00098	6400	3.56

La comparación de los resultados para los dos primeros modos de vibración axial del modelo de múltiples regiones, con respecto a los valores teóricos y analíticos obtenidos previamente se muestran en las tablas III.5, III.6 y III.7.

Tabla III.5. Comparativa de periodos y frecuencias naturales (una región).

CANTILIVER	MODO 1		MODO 2	
	T (seg)	ω (rad/s)	T (seg)	ω (rad/s)
Teórica (1 Región)	0.003989	1574.99	0.00133	4724.96
SAP2000 (1 Región)	0.00399	1574.73	0.001331	4724.20
GCE (1 Región)	0.00393	1600.00	0.00131	4800.00
Er (%)	1.5	1.6	1.5	1.6

Tabla III.6. Comparativa de periodos y frecuencias naturales (dos regiones).

CANTILIVER	MODO 1		MODO 2	
	T (seg)	ω (rad/s)	T (seg)	ω (rad/s)
SAP2000 (2 Regiones)	0.003810	1649.13	0.00111	5660.53
GCE (2 Regiones)	0.00370	1700.00	0.00109	5750.00
Er (%)	2.9	3.1	1.8	1.6

Tabla III.7. Comparativa de periodos y frecuencias naturales (tres regiones).

CANTILIVER	MODO 1		MODO 2	
	T (seg)	ω (rad/s)	T (seg)	ω (rad/s)
SAP2000 (3 Regiones)	0.003570	1760.00	0.00100	6283.19
GCE (3 Regiones)	0.00349	1700.00	0.00098	6400.00
Er (%)	2.2	3.4	2.0	1.9

La respuesta del modelo es aproximada, esto si observa que el error relativo obtenido máximo es de 3.4 en frecuencia para el caso de tres regiones, con respecto al valor analítico obtenido en SAP200 v 9.0.1, con estos resultados el modelo de múltiples regiones para la solución dinámica de sólidos por el método directo de ecuaciones integrales de fronteras es válido para las condiciones del presente apartado.

III.2.2 Viga en cantiliver con movimiento transversal en la base

El problema de análisis es la viga en cantiliver que se estudió en el apartado III.2.1, las propiedades del material para las múltiples regiones son las mismas, con la diferencia que es excitada transversalmente por un desplazamiento unitario en la base, como se muestra en la figura III.10.

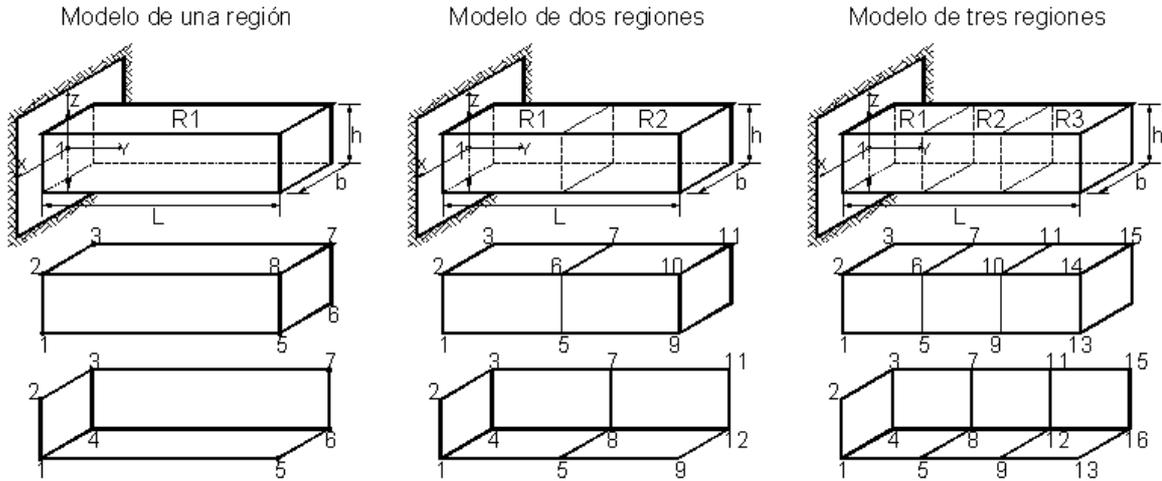


Figura III.10. Viga en cantiliver con movimiento transversal.

La frecuencia natural y el período natural de vibración teórica de una viga prismática en cantiliver en flexión para los dos primeros modos se obtiene fácilmente de las expresiones siguientes

$$\omega_1 = 3.533 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad \omega_2 = 22.4 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (\text{III.2})$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la viga, L es la longitud de la viga, A es el área de la sección de la viga y ρ es la densidad del material.

En la tabla III.8, se indican los períodos y las frecuencias naturales del problema.

Tabla III.8. Frecuencias naturales de viga en cantiliver con carga transversal.

CANTILIVER	MODO 1		MODO 2	
	T (seg)	ω (rad/s)	T (seg)	ω (rad/s)
R1 = E	0.0370	169.78	0.0058	1080.41

La representación del espectro de respuesta de la viga en cantiliver discretizada en 76, 262 y 304 elementos constantes para una región, aplicando el programa GCE para 65 frecuencias, tales que permitan representar el primer modo de vibrar en flexión, se muestra en la figura III.11.

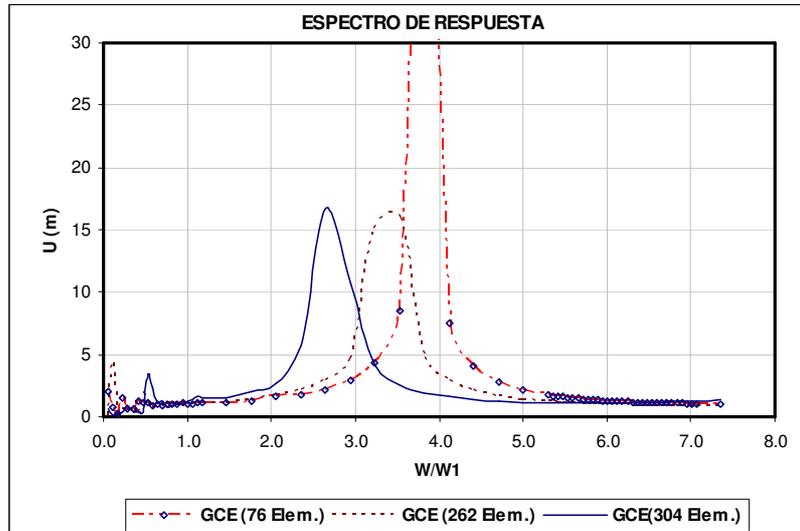


Figura III.11. Espectro de respuesta de una región con 76, 262 y 304 elementos.

El espectro de respuesta obtenido, no representa el comportamiento esperado y esto es debido al tipo de elementos empleado para el análisis de este problema en particular, no obstante un estudio que incluya elementos de aproximación del tipo lineal o cuadrático sería más satisfactorio para la representación del problema.

III.3 Problema con dos regiones

El problema de análisis siguiente representa la interacción entre dos regiones y se trata de un bloque de concreto $110 \times 110 \times 100 \text{ cm}$ ($b \times l \times h$) con empotramiento en su base, en la cual una barra rectangular de $0.10 \times 0.10 \times 0.70$ se encuentra sumergida en el interior del bloque, la geometría del problema se muestra en la figura III.12. El bloque es excitado axialmente en la parte superior de la barra de acero por un desplazamiento armónico.

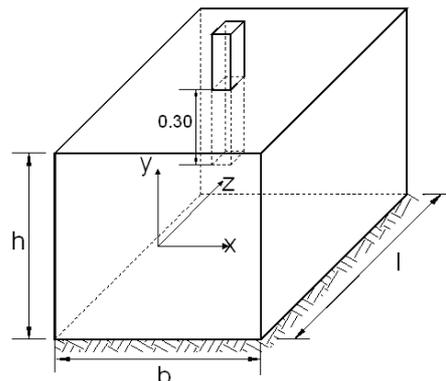


Figura III.12. Bloque de concreto con elemento sólido interior.

Las propiedades del material del problema para ambas regiones se presentan en la tabla III.9.

Tabla III.9. Propiedades de las regiones del bloque.

Materiales	E (Nw/m²)	G (Nw/m²)	ρ (kg/m³)	μ (adim)	Damp (adim)
Acero	2.0800.E+11	8.0000.E+10	7800	0.3	0
Concreto	2.1715.E+10	9.4415.E+09	2400	0.15	0

La discretización del problema es una consideración importante para la representación del mismo. Los elementos discretos se plantean a partir del elemento más pequeño de la barra sólida de acero; por tanto, se definen 717 elementos rectangulares constantes de 0.1×0.1 en la frontera entre ambas regiones, como se muestra en la figura III.13.

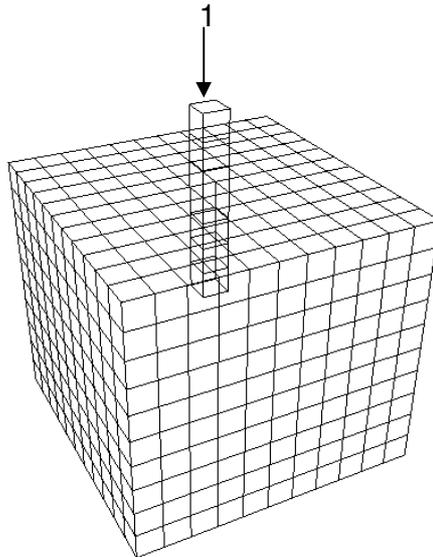


Figura III.13. Discretización del problema en elementos de frontera.

La representación del espectro de respuesta del bloque de concreto, interactuando con la barra de acero para 717 elementos constantes, aplicando el programa GCE para 70 frecuencias, tales que permitan representar los primeros modos de vibración axial, se muestra en la figura III.14.

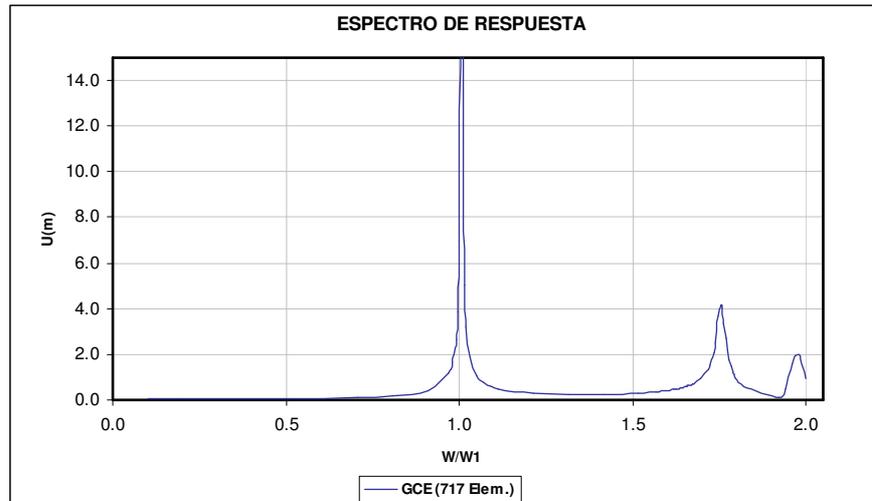


Figura III.14. Espectro de respuesta de bloque en vibración axial.

Los valores de los periodos y frecuencias analíticas de vibración axial para los primeros modos del problema se obtienen al realizar un análisis modal del problema en el programa SAP2000 v. 9.01. Las características del análisis en elementos finitos para la solución analítica son las mismas que las generadas para elementos de frontera. Con esto la discretización del volumen de ambas regiones se compone de 1213 elementos sólidos de igual dimensión.

El bloque analizado en elementos finitos, se muestra en la figura III.15. De esta se verifican los primeros modos de vibración axial, siendo los resultados mostrados en la tabla III.10.

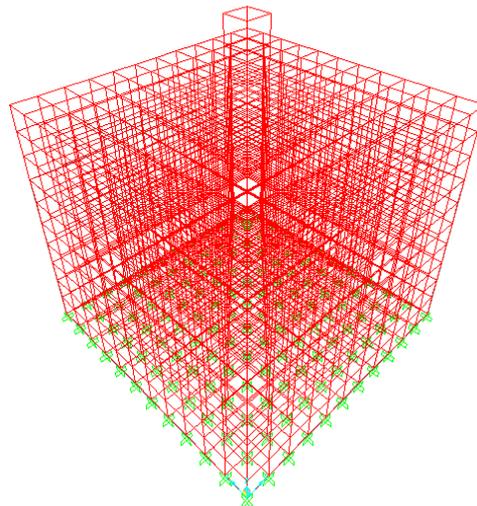


Figura III.15. Modelo de bloque en elementos finitos.

Tabla III.10. Frecuencias naturales del bloque con 1217 sólidos.

BLOQUE	MODO 1		MODO 2		ω_2/ω_1
	T (seg)	ω (rad/s)	T (seg)	ω (rad/s)	
2 Regiones	0.00127	4947.39	0.00077	8125.16	1.64

Los valores obtenidos son comparados con las frecuencias máximas generadas del análisis con el modelo de múltiples regiones.

El periodo y la frecuencia del análisis del problema para múltiples regiones, se obtienen a partir de la amplitud máxima generada en cada caso de análisis y estos se muestran en la tabla III.11.

Tabla III.11. Periodos y frecuencias máximas del bloque con 717 elementos.

BLOQUE	MODO 1		MODO 2		ω_2/ω_1
	T(seg)	ω (rad/s)	T(seg)	ω (rad/s)	
GCE (2 regiones)	0.001263	4975	0.0007243	8675	1.74

La comparación de los resultados para los dos primeros modos de vibración axial del modelo de múltiples regiones, con respecto a los valores teóricos y analíticos obtenidos previamente se muestran en las tablas III.12

Tabla III.12. Comparativa de periodos y frecuencias naturales de bloque.

BLOQUE	MODO 1		MODO 2	
	T (seg)	ω (rad/s)	T (seg)	ω (rad/s)
SAP2000 (2 Regiones)	0.001270	4947.39	0.0007733	8125.16
GCE (2 Regiones)	0.00126	4975.00	0.0007243	8675.00
Er (%)	0.6	0.6	6.3	6.8

El error relativo para el primer modo resulta del 0.6 % y del 6.3 % para el modo dos del análisis, comparado con respecto al valor numérico obtenido en SAP200 v 9.0.1, se puede ver la similitud en periodo para el primer modo.

Conclusiones

- Se desarrolló un modelo de análisis para la solución dinámica de problemas con múltiples regiones por el método directo de ecuaciones integrales de frontera, utilizando elementos constantes.
- El algoritmo propuesto e implementado en el programa GCE para múltiples regiones con el método directo de elementos de frontera (BEM) y elementos constantes, dio excelentes resultados. La validez del procedimiento pudo corroborarse mediante experimentos numéricos.
- Se comprobó que los resultados obtenidos del problema para una región con el programa CONDTHEM (existente), son los mismos que utilizando el programa GCE (modificado) para múltiples regiones. Esto sirvió para corroborar que no se introdujeron errores al modificar el programa.
- Al analizar el problema con una, dos y tres regiones con un solo material, se observó que las diferencias en frecuencia son mínimas al interactuar las regiones en estudio, por lo que se pudieron reproducir los modos de vibración axial del problema. Eran de esperarse estas diferencias ya que los sistemas de ecuaciones resultantes utilizando o no subregiones son muy distintos en cuanto a estructura. Si se utilizan subregiones se generan matrices que tienen una estructura de bloques bien definida, mientras que usando una sola región el sistema matricial no sufren modificaciones.
- En el problema de múltiples regiones para distintos materiales, el comportamiento dinámico observado en los espectros de respuesta para los primeros dos modos de vibración axial, no varió con respecto al generado para una región, presentándose el comportamiento esperado.
- La relación de frecuencias obtenidas de los resultados del análisis con elementos finitos con respecto al programa GCE para múltiples regiones, son las mismas para el primer modo que cuando se tiene una sola región. Para los siguientes modos se obtuvieron diferencias mínimas en los resultados.

- Debido a que se trata de modelos definidos teóricamente, se obtuvo un error relativo en frecuencia del 1.6% para una región y un máximo del 3.4 % para tres regiones.
- Para el caso de carga transversal del problema analizado para un número finito de elementos de frontera, se observó la convergencia del mismo, pero no fue posible representar su comportamiento, debido al tipo de elementos considerado en el presente trabajo.
- Al considerar elementos constantes, la representación del problema en flexión es posible si se refina mucho la malla, esto es, a un muy alto costo, por lo que una aproximación lineal o cuadrática, sería más apropiado para definir el comportamiento en este tipo de problemas.
- En el proceso de discretización del problema de validación expuesto a carga axial como condición de frontera, se pudo observar que los elementos deben ser de tamaño similar para las regiones en interacción.
- En el segundo problema analizado para la condición de carga axial como condición de frontera, el comportamiento fue el esperado, ya que se obtuvo un error del 0.6% para el primer modo de vibración, a diferencia del segundo modo donde el error fue mayor en frecuencia.

Trabajos futuros

- Estudio de problemas de propagación de ondas en medios semi-infinitos, con la finalidad de relacionar múltiples regiones en medios estratificados. Ya que solo requerirá de representar el campo de desplazamientos como la suma del campo incidente y el campo refractado.
- Estudiar aproximaciones de tipo lineal y cuadrático en el modelo de múltiples regiones, con la finalidad poder abordar problemas más generales en sólidos.
- Con el análisis de los puntos anteriores, realizar el estudio de los problemas en el dominio del tiempo por medio de un análisis de Fourier y comparar los resultados del problema, con otros métodos conocidos.

Referencias bibliográficas

Somigliana, C., (1886). Sopra l' Equilibrio de un Corpo Elastico Isotropo. Il Nuovo Cimento, serie III, 20: 181 – 185.

Fredholm, I., (1905). Solution d' un Problème Fondamental de la Theorie de L'elasticité. Arch. Mat. Astronom. Fysik., Vol. 2.

Jaswon, M. A., (1963). Integral Equation Methods in Potential Theory I", Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 275, pp. 23-32.

Rizzo, F. J., (1967). An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. Quart. Appl. Math., Vol. 25, pp. 83-95.

Lachat, J.C. y Watson, J.O., (1976). "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for three Dimensional Elastostatics", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 991-1005.

Friedman, M.B. y Shaw R.P., (1962). Diffraction of Pulses by Cylindrical Obstacles of Arbitrary Cross Section. J. Appl. Mech., Vol. 29, pp. 40-46.

Banaugh, R.P. y Goldsmith W., (1963). Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape. J. Appl. Mech., Vol. 30, pp. 589-597.

Cruse, T.A. y Rizzo, F.J., (1968). A direct Formulation and Numerical Solution for the General Transient Elastodynamic Problem I. J. Math Anal. Appl., Vol. 22, pp. 244-259.

Wheeler, L.T. y Sternberg, E., (1968). Some Theorems in Classical Elastodynamics. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 31, pp. 51-90.

Manolis, G.D. y Beskos, D.E., (1981). Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, pp. 573-599.

Niwa, Y., Kobayashi, S. y Azuma N., (1975). A Analysis Transient Stresses Produced Around Cavities of Arbitrary Shape During Passage of Travelling Waves. Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., Vol. 37, pp. 28-46.

Domínguez, J., (1978). Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations. Repor. 78-20, Dept. of Civil Engineering, Massachuserrrs Institute of Technology, Cambridge, Mass.

Cole, D.M., Kosloff, D.D. y Minster, J.B., (1978). A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics I. Bull. Seismol. Soc. Am., Vol. 68, pp. 1331-1357.

Niwa, Y., Fukui, T., Kato, S. y Fujiki., (1980). An Application of the Integral Equation Method to Two Dimensional Elastodynamics. Theor. Appl. Mech., Vol. 28, pp. 281-290.

Mansur, W.J. y Brebbia, C.A., (1982a). Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two Dimensional Transient Scalar Wave Propagation Problems. Appl. Mathh. Modelling, Vol. 6 pp. 299-306.

Mansur, W.J. y Brebbia, C.A., (1982b). Formulation of the Boundary Element Method for Transient Problems Governed by the Scalar Wave Equation. Appl. Mathh. Modelling, Vol. 6 pp. 307-311.

Mansur, W.J. y Brebbia, C.A., (1985). Transient Elastodynamics. In Topics In Boundary Element Research, Vol. 2, C.A. Brebbia, pp. 124-155, Springer Verlang, Berling.

Karabalis, D.L. y Beskos, D.E., (1984). Dynamic Response of 3D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method. Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 12, pp. 73-93.

Nardini, D. y Brebbia, C.A., (1985). Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis. In Topics In Boundary Element Research, Vol. 2, C.A. Brebbia, pp. 191-208, Springer Verlang, Berling.

Ahmad, S., y Banerjee, P.K., (1986). Free Vibration Analysis by BEM Using Particular Integrals. ASCE J, Eng. Mech., Vol. 112, pp. 682-695.

Henry, D., y Banerjee, P.K., (1988). A New Boundary Element Formulation for Two and Three Dimensional Problems of Elastoplasticity Using Particular Integrals. Int. J. Numer Methods Eng., Vol. 26, pp. 2079-2096.

Niku, S.M. y Brebbia, C.A., (1988). Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Potential Problems with Arbitrarily Distributed Sources. Eng. Analysis, Vol. 5, pp. 46-48.

Neves, A.C. y Brebbia, C.A., (1991). Multiple Reciprocity Boundary Element Method in Elasticity: A New Approach for Transforming Domain Integrals to the Boundary. Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 31, pp. 709-727.

Nowak, A.J. y Neves, A.C., (1994). The Multiple Reciprocity Boundary Element Method. Wessex Institute of Technology, Ashurst, Southampton, England.

Sladek, V. y Sladek. J., (1996). Multiple Reciprocity Method in BEM formulations for Solution of Plate Bending Problems. Eng. Anal. Boundary Elements, Vol. 17, pp. 161-173.

J. J. Perez Gavilán y M. H. Aliabadi., (2003). Symetric Galerkin BEM for Shear Deformable Plates. Int. J. Numer. Meth. Eng.; Vol. 57, pp. 1661-1693.

J. J. Perez Gavilán y M. H. Aliabadi., (2001). A Symmetric Galerkin BEM for Problems and Multiconnected Bodies. Mechanical, Vol. 36, pp. 449-462.

Banerjee, P. K., (1994). The Boundary Elements in Engineering. Editorial McGraw-Hill, London.

Kaljevic, I. y Sargal, S., (1995). Analysis of Symmetric Domains in Advanced Aplicacyions with the Boundary Element Method. Int.J. Numer, Methods Eng., Vol. 38, pp. 2375-2388.

Domínguez, J., (1993). "Boundary Elements in Dynamics", Computational Mechanics Publications Southampton and Boston, Elsevier.

Brebia, C. A. y Domínguez, J., (1989). "Boundary Elements An Introductory Course", McGraw-Hill, New York.

Oliver O. Xavier, y Agelet, Carlos, (2000). "Mecánica de medios continuos para ingenieros", Edicions, UPC.

Kane H. James (1994). "Boundary Elements Analysis", Mechanics and Aeronautical Engineering, Prentice Hall.

Enzo Levi, (1998). " Elementos de Mecánica del Medio Continuo", Editorial Limusa, México, D.F.

Murray R. Spiegel, (2001). "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería y Ciencias", Editorial McGraw-Hill, México, D.F.

Rowland, Richards, J., (2001). "Principles of Solid Mechanics", CRC Press, London, New York and Washington, D.C.

Bálas J., Sládek J. y Sládek V., (1989). "Stress Analysis by Boundary Element Methods", Department of Mechanics, Amsterdam, Elsevier.

Páginas Web

<http://w3.mecanica.upm.es/cmecanica.php>

Apéndice A

Expresiones matemáticas

La representación de las expresiones matemáticas es una aplicación, donde la notación índice es muy práctica. La notación índice utilizada en la mecánica de sólidos, es una abreviación que puede utilizarse en expresiones de la mecánica [<http://w3.mecanica.upm.es/cmecanica.php>].

A.1 Notación índice

Sean tres vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, correspondientes a una base ortonormal, figura A.1.

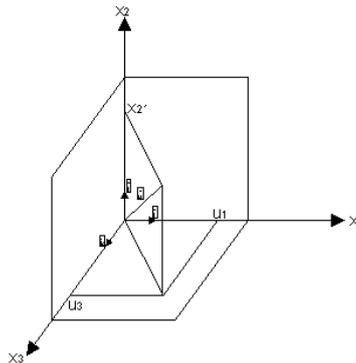


Figura A.1. Base ortonormal.

Por definición los vectores deben satisfacer las siguientes propiedades:

Los vectores que forman esta base son unitarios, es decir

$$\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1$$

o bien

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

Los vectores de esta base son ortogonales entre si, es decir

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

El producto vectorial entre los vectores que conforman la base es

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}; \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Consideremos un sistema de ecuaciones de grado 3x3, la forma de escribir usando notación índice es utilizando el símbolo de sumatoria y se representa como

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (i = 1,2,3, j = 1,2,3)$$

En la sumatoria se involucran dos índices i, j , donde el índice repetido es simulado y al no repetido como índice libre.

A.2 Delta de Kronecker

Un tensor de segundo orden que comúnmente permite fácilmente relacionar expresiones en notación índice, es la delta de Kronecker y se define como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

La longitud al cuadrado de un segmento de coordenadas x_1, x_2, x_3 en términos de la delta de Kronecker puede escribirse como

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_k x_k = \delta_{ij} x_i x_j, (i = 1,2,3, j = 1,2,3)$$

A.3 Símbolo de permutación

El símbolo de permutación es un tensor de tercer orden, el cual se representa como el producto de un vector definido como

$$e_{ijk} = \begin{cases} -1 & \text{Si } ijk \text{ forman permutación impar } (e_{321}, e_{213}, e_{132}) \\ 0 & \text{Si no existe permutación } (i = j) \\ 1 & \text{Si } ijk \text{ forman permutación par } (e_{123}, e_{231}, e_{312}) \end{cases}$$

La delta de Kronecker y el símbolo de permutación son expresiones muy importantes en la formulación de expresiones matemáticas y se relacionan con la siguiente identidad

$$e_{ijk} e_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}$$

A.4 Algebra tensorial

En la mecánica de medios continuos muchos de los conceptos físicos son representados por tensores, los cuales tienen varias componentes y pueden clasificarse según su orden [<http://w3.mecanica.upm.es/cmecanica.php>].

Tensor de orden cero: El escalar que es una cantidad caracterizada por su magnitud pero no por su dirección.

Tensor de orden uno (tres componentes): El vector es una cantidad caracterizado por su magnitud y su dirección.

Tensor de orden dos (nueve componentes): Es una cantidad que tiene magnitud y dos direcciones.

En la tabla A.1, se presentan expresiones comúnmente utilizadas en el algebra tensorial expresadas en notación índice.

TABLA A.1. Tabla de algebra tensorial.

Expresión	Notación tensorial	Notación índice
Igualdad de vectores	$u = v$	$u_i = v_i$
Igualdad de tensores	$T = S$	$T_{ij} = S_{ij}$
Suma de vectores	$w = u + v$	$w_i = u_i + v_i$
Suma de tensores	$R = S + T$	$R_{ij} = S_{ij} + T_{ij}$
Producto escalar	$u \cdot v$	$u_i v_i$
Producto vectorial	$w = u \times v$	$w_i = e_{ijk} u_j v_k$
Triple producto escalar	$u \cdot v \times w$	$e_{ijk} u_i v_j w_k$
Triple producto vectorial	$u \times v \times w$	$e_{ijk} e_{irs} u_j v_i w_r$
Producto tensor-vector	$v = T \cdot u$	$v_i = T_{ij} u_j$
Producto tensor trans.-vector	$v = T^T u$	$v_i = T_{ji} u_j$
Producto tensorial	$R = S \cdot T$	$R_{ij} = S_{ik} T_{kj}$
Producto externo	$T = u \otimes v$	$T_{ij} = u_i v_j$
Traza de un tensor	$tr(T)$	T_{ii}
Doble contracción	$S : T$	$S_{ij} T_{ij}$
Gradiente de una función escalar	$u = grad[f]$	$u_i = f_{,i}$
Gradiente de un vector	$T = grad[u]$	$T_{ij} = u_{i,j}$
Divergencia de un vector	$f = div[u]$	$f_i = u_{i,j}$

Continúa tabla

Divergencia de un tensor	$u = \text{div}[T]$	$u_i = T_{ij},j$
Rotacional de un vector	$v = \text{rot}[u]$	$v_i = e_{ijk}u_{k,j}$
Divergencia y gradiente de f	$\text{Divgrad}(f)$	$f_{,ii}$

A.5 Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Las expresiones utilizadas en la mecánica de sólidos, al igual que sus identidades son aplicaciones prácticas en el desarrollo de las expresiones matemáticas Murray, (2001).

El operador vectorial ∇ , llamado operador nabla se define como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{k}$$

Si $f(x_1, x_2, x_3)$ y $u(x_1, x_2, x_3)$ son funciones continuas y válidas para

$$\text{grad}f(x_1, x_2, x_3) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{k}$$

$$\text{div}\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial u_{x2}}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial u_{x3}}{\partial x_3} \mathbf{k}$$

$$\text{rot}\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_{x3}}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x_3} - \frac{\partial u_{x3}}{\partial x_1} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{x1}}{\partial x_2} \right) \mathbf{k}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \mathbf{k}$$

En notación índice el gradiente, la divergencia y rotacional de un campo vectorial se expresan como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} = \delta_{ij} u_{i,j}$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = e_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ijk} u_{k,j}$$

$$\nabla^2 f = f_{,ii}$$

donde la coma, delante del subíndice significa diferenciación con respecto a las

coordenadas x_i , para $i = 1, 2, 3$.

De las expresiones anteriores, se puede definir fácilmente que el rotacional de un gradiente f (*rotgradf*) y la divergencia del rotacional de \mathbf{u} (*divrotu*) son igual a cero.

El Laplaciano de una función f , se expresa como

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Y en notación índice como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f_{,ii}$$

El uso de identidades en la aplicación de los conceptos matemáticos son de gran utilidad, una identidad importante es

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$$

A.6 Teorema de la divergencia de Gauss

El teorema de la divergencia de Gauss que relaciona una superficie cerrada S que limita una región de volumen V se define como

$$\int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dV = \int_S f_i n_i$$

donde la normal n_i es válida para $i = 1, 2, 3$ y se puede escribir como

$$\int_V \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_S (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV = \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) ds$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la relación de cauchy (ecuación B.19) se obtiene la integral de superficie que relaciona la integral de un volumen Kane, (1994).

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} d\Omega$$

A.7 La función Delta de Dirac

La función Delta de Dirac es una propiedad utilizada en el análisis del método de ecuaciones integrales de frontera. En algunos problemas de ingeniería las excitaciones son idealizadas en la ocurrencia de un punto. La idealización de la carga en un punto depende de su posición y del punto fuente de la excitación, matemáticamente la excitación del punto fuente esta dado por la función f que se muestra en figura A.2. La función llamada pulso rectangular en d y de ancho a . La función es configurada de modo que la integral sea igual a la unidad sobre el dominio, Kane(1994).

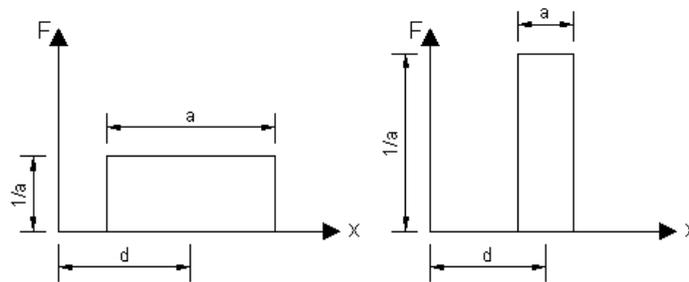


Figura A.2. Función de pulso rectangular unitario.

$$F(x, d, a) = \begin{cases} 0 & x < d - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a} & d - \frac{a}{2} \leq x \leq d + \frac{a}{2} \\ 0 & x > d + \frac{a}{2} \end{cases}$$

La función Delta de Dirac se define como el límite de la función rectangular del pulso unitario como

$$\delta(x - d) = \lim_{a \rightarrow 0} F(x, d, a)$$

Apéndice B

Fundamentos del método de las ecuaciones integrales de frontera

B.1 Introducción a la mecánica de sólidos

El problema principal de la mecánica de medios continuos es el estudiar los esfuerzos y las deformaciones que se presentan en sólidos, líquidos y gases. Un medio continuo es un conjunto infinito de partículas de un cuerpo en estudio, olvidando su estructura molecular, es decir, no existen discontinuidades en su estado de deformación y sus propiedades constituyen una masa continua.

En la mecánica de sólidos se estudia la interacción entre los cuerpos, formulando las leyes generales que rigen su estado de equilibrio o de movimiento. Los sólidos bajo la acción de fuerzas actuantes sufren deformaciones; la intensidad de deformación depende de las propiedades del material del cuerpo, de su forma geométrica, de sus dimensiones y de la forma de aplicar las cargas.

El estudio de la deformación de los sólidos constituye el objetivo de la teoría de la elasticidad. La teoría de la elasticidad lineal estudia aspectos y propiedades de los sólidos, lo que interesa es el analizar e interpretar su comportamiento cuando se someten a un sistema de fuerzas que actúan sobre el cuerpo en estudio, debido a efectos estáticos o dinámicos, variaciones de temperatura: además de sus condiciones de equilibrio, su estabilidad o inestabilidad, sus deformaciones y esfuerzos.

Al aplicar las fuerzas exteriores el sólido se deforma en todos sus puntos, en la mecánica de los cuerpos rígidos, el resultado que interesa al aplicar una fuerza es el desplazamiento del cuerpo; por el contrario, la mecánica del medio continuo enfoca su estudio a las deformaciones que el cuerpo puede sufrir, pueden ser deformaciones momentáneas con duración de las fuerzas que las ocasiona, o bien permanentes que se mantienen una vez que las fuerzas desaparecen.

B.2 Equilibrio de fuerzas de un medio continuo

En la mecánica del medio continuo las fuerzas ejercidas sobre medio continuo son de cuerpo (f_{ci}) y de superficie (f_{Si}), figura B.1. Las fuerzas de cuerpo que se ejercen en el interior de un medio, son las fuerzas gravitacionales y las dinámicas, la resultante total de tales fuerzas por unidad de volumen, Enzo (1998).

$$f_{ci} = \int_{\Omega} b_i d\Omega \quad (\text{B. 1})$$

y la resultante total de las fuerzas de superficie que se presentan en el contorno Γ del cuerpo, se define como

$$f_{Si} = \int_{\Gamma} t_i d\Gamma \quad (\text{B. 2})$$

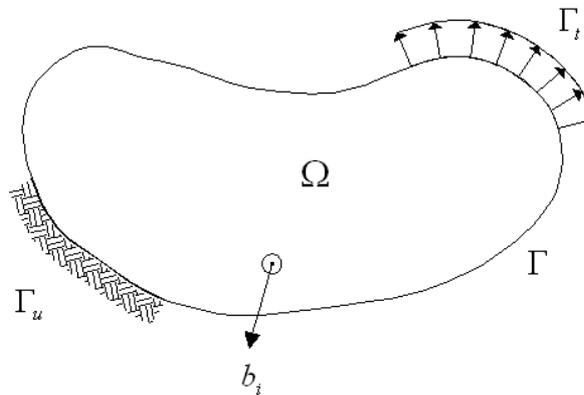


Figura B. 1. Fuerzas ejercidas sobre un medio continuo.

El equilibrio de fuerzas ejercidas sobre el cuerpo Ω de frontera $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$ se determina a partir de la segunda ley de Newton, de las expresiones (B.1), (B.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_i f_i &= \sum_i \rho \ddot{u}_i \\ \int_{\Gamma} t_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B. 3})$$

donde las t_i son las tracciones normales al cuerpo, b_i las fuerzas de cuerpo, ρ la densidad de masa y \ddot{u}_i las fuerzas dinámicas.

En un estado estático de un medio, las componentes de esfuerzo relacionan las ecuaciones de equilibrio en dos tipos: equilibrio estático de fuerzas y de momentos, Kane (1994).

- a) El equilibrio estático de fuerzas de un cuerpo se define a partir de la ecuación (B.3) en la ausencia de las fuerzas de inercia \ddot{u}_i como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_i d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (B. 4)$$

donde $t_i = \sigma_{ij} n_j$ es la relación de Cauchy.

Aplicando el teorema de Gauss (apéndice A) al primer término de la ecuación (B.4) se obtiene la ecuación diferencial de equilibrio de la forma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega &= 0 \\ \sigma_{ij,j} + b_i &= 0, \text{ para } i, j \in \{1,2,3\} \end{aligned} \quad (B. 5)$$

donde $\sigma_{ij,j}$ es la componente diferencial del tensor de esfuerzos y b_i es la componente de las fuerzas de cuerpo.

- b) El equilibrio de momentos de los esfuerzos respecto a un punto de un elemento diferencial se escribe como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{b} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} e_{ijk} r_j t_k d\Gamma + \int_{\Omega} e_{ijk} r_j b_k d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} e_{ijk} r_j \sigma_{km} n_m d\Gamma + \int_{\Omega} e_{ijk} r_j b_k d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (B. 6)$$

donde \mathbf{r} es la posición del vector del cuerpo y $t_k = \sigma_{km} n_m$, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss en primer término de la ecuación (B.6) e integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e_{ijk} r_j \sigma_{km,m} d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} r_j b_k d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} e_{ijk} (r_j \sigma_{km,m} + r_{j,m} \sigma_{km}) d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} r_j b_k d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (B. 7)$$

Se sabe que $r_{j,m} = \delta_{jm}$ y de la ecuación de equilibrio (B.5) se define que $\sigma_{km,m} = -b_k$,

sustituyendo en ecuación (B.7) se obtiene

$$\int_{\Omega} e_{ijk} (r_j (-b_k) + \delta_{jm} \sigma_{km}) d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} r_j b_k d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} e_{ijk} \delta_{jm} \sigma_{km} d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} e_{ijk} \sigma_{kj} d\Omega = 0 \quad \text{para } i, j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B. 8})$$

La ecuación (B.8) se cumple para cada valor de i , en la cual se puede comprobar fácilmente la simetría del tensor de esfuerzos como $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$.

B.3 Estado de deformación

El estado de deformación de un medio se establece por un campo de desplazamientos, el cual es provocado por fuerzas en la frontera, momentos, temperatura, fuerzas de cuerpo y otras perturbaciones como condiciones, Kane (1994).

El estado de deformación es representado por $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$, figura B.2.

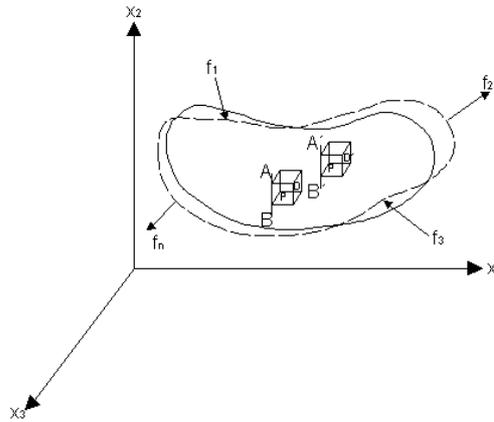


Figura B. 2. Fuerzas y deformaciones de un cuerpo.

Las deformaciones del medio se obtienen a partir de la diferencial total, la cual se expresa de la forma

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = u_{i,j} dx_j \quad (\text{B. 9})$$

Consideremos la configuración no deformada de un medio continuo de un sistema de coordenadas x_i para cada punto y la configuración deformada $x_i + dx_i$ que describe

la posición del medio en movimiento, figura B.3.

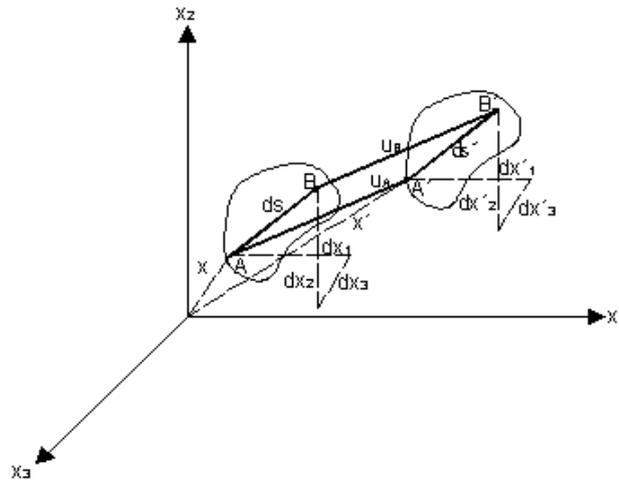


Figura B. 3. Deformación infinitesimal de un elemento diferencial.

El estado de deformación del medio situado en el entorno diferencial de A , está dado por los puntos A y B . En la configuración de referencia no deformada los puntos son:

$$A(x_1, x_2, x_3) = x_i$$

$$B(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) = x_i + dx_i$$

Estos puntos después de la deformación son A' en $x_i + u_i$ y B' en $(x_i + dx_i) + (u_i + du_i)$. La relación de la longitud del elemento infinitesimal antes y después de la deformación se expresa como una suma de vectores de la forma

$$x' = x_i + u_i \tag{B. 10}$$

Derivando la expresión (B.10) se obtiene

$$dx' = dx_i + du_i = dx_i + u_{i,j} dx_j = \delta_{ij} dx_j + u_{i,j} dx_j = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j \tag{B. 11}$$

La magnitud del segmento \overline{AB} que se deformó hasta ser el segmento $\overline{A'B'}$, definida como ds se expresa de la forma

$$ds^2 = \|d\mathbf{x}\|^2 = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j \tag{B. 12}$$

y longitud deformada al cuadrado se puede expresar a partir de la ecuación (B.11) de la forma

$$ds'^2 = \|d\mathbf{x}'\|^2 = dx'_i dx'_i = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j (\delta_{ik} + u_{i,k}) dx_k \tag{B. 13}$$

El cambio de longitud del segmento infinitesimal \overline{AB} del elemento diferencial, antes y después de la deformación está dada por la diferencia de las longitudes de las expresiones (B.12) y (B.13) y se escribe como

$$\begin{aligned}
 ds'^2 - ds^2 &= (\delta_{ij} + u_{i,j})dx_j(\delta_{ik} + u_{i,k})dx_k - \delta_{ij}dx_i dx_j \\
 ds'^2 - ds^2 &= (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k})dx_j dx_k - \delta_{ij}dx_i dx_j \\
 ds'^2 - ds^2 &= \delta_{ij}\delta_{ik}dx_j dx_k + \delta_{ik}u_{i,j}dx_j dx_k + \delta_{ij}u_{i,k}dx_j dx_k + u_{i,j}u_{i,k}dx_j dx_k - \delta_{ij}dx_i dx_j \\
 ds'^2 - ds^2 &= \delta_{ik}u_{i,j}dx_j dx_k + \delta_{ij}u_{i,k}dx_j dx_k + u_{i,j}u_{i,k}dx_j dx_k \\
 ds'^2 - ds^2 &= u_{k,j}dx_j dx_k + u_{j,k}dx_j dx_k + u_{i,j}u_{i,k}dx_j dx_k \\
 ds'^2 - ds^2 &= (u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j}u_{i,k})dx_j dx_k \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el tensor de la deformación de Green-Lagrange, expresión (B.14), se define como

$$\begin{aligned}
 ds'^2 - ds^2 &= (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})dx_i dx_j \\
 ds'^2 - ds^2 &= 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j \\
 2\varepsilon_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \\
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})
 \end{aligned}$$

Considerando deformaciones infinitesimales, es decir si $\|u_{i,j}\| \ll 1$ entonces $u_{k,i}u_{k,j} \rightarrow 0$.

Por lo tanto se obtiene el tensor de deformación infinitesimal de Cauchy en términos del campo de desplazamientos \mathbf{u} definido como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{B.15}$$

En la figura B.4 se presenta la definición de las componentes de deformaciones normales y angulares para el plano x_1, x_2 , cuyas deformaciones son $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}$, Rowland (2001).

El tensor de deformaciones ε_{ij} para el plano x_1, x_2, x_3 se escribe a partir de la ecuación (B.15) como

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3}.$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}), \quad \varepsilon_{13} = \frac{\gamma_{13}}{2} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}), \quad \varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{23}}{2} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2})$$

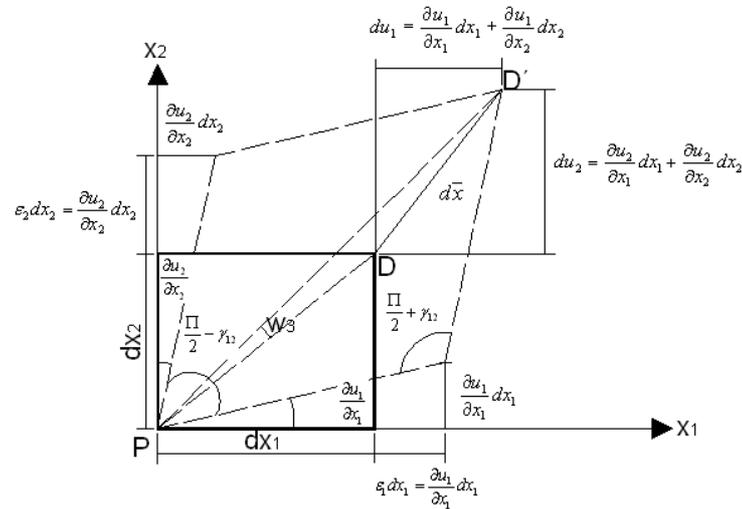


Figura B. 4. Deformaciones de un elemento diferencial en el plano x_1, x_2 .

B.4 Estado de esfuerzos

El concepto de fuerza interna por unidad de área o esfuerzo, parte del equilibrio de fuerzas y del límite, es decir, de los esfuerzos en un punto del cuerpo, Rowland (2001).. Sea la figura B.5, un cuerpo en equilibrio sometido a un conjunto de fuerzas externas actuando en la frontera de una superficie S , por la cual pasa un plano normal a la superficie de corte.

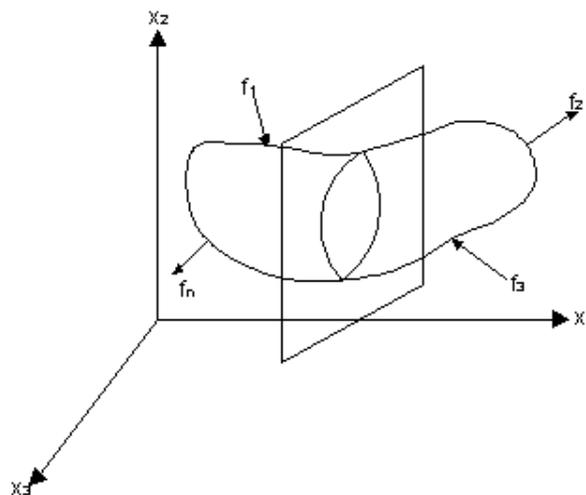


Figura B. 5. Fuerzas externas actuando en la frontera de un cuerpo.

Las fuerzas ΔF definidas en una dirección arbitraria pueden expresarse en función de sus componentes $\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3$, como se muestra en figura B.6.

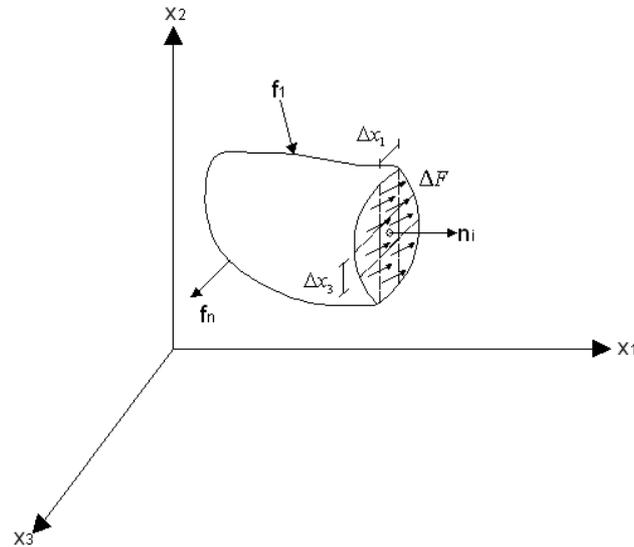


Figura B. 6. Fuerzas distribuidas en un elemento diferencial de área.

En la figura B.7, a una pequeña área $\Delta S = \Delta x_1 \Delta x_2$ le corresponde una pequeña fuerza ΔF , llevando al límite $\Delta S \rightarrow 0$ para cada uno de los planos $x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3$, la intensidad de esfuerzo se define como

$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta S_j}$$

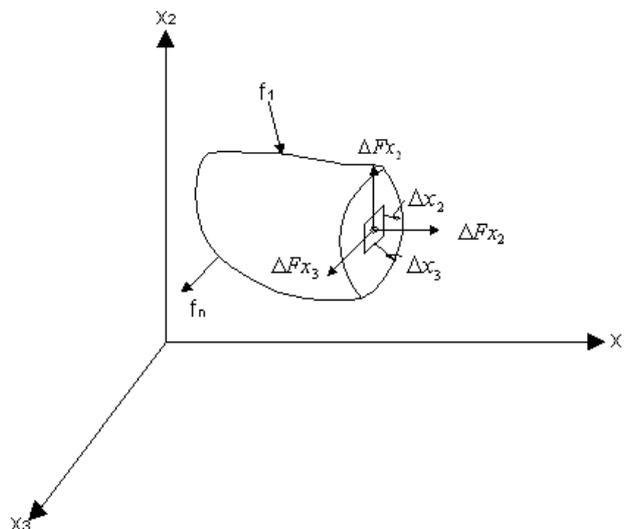


Figura B. 7. Fuerzas en un elemento diferencial de área.

Sea la figura B.8 un tetraedro de volumen V situado alrededor de un vértice O y de aristas OA, OC, OB , paralelas a los ejes coordenados x_1, x_2, x_3 .

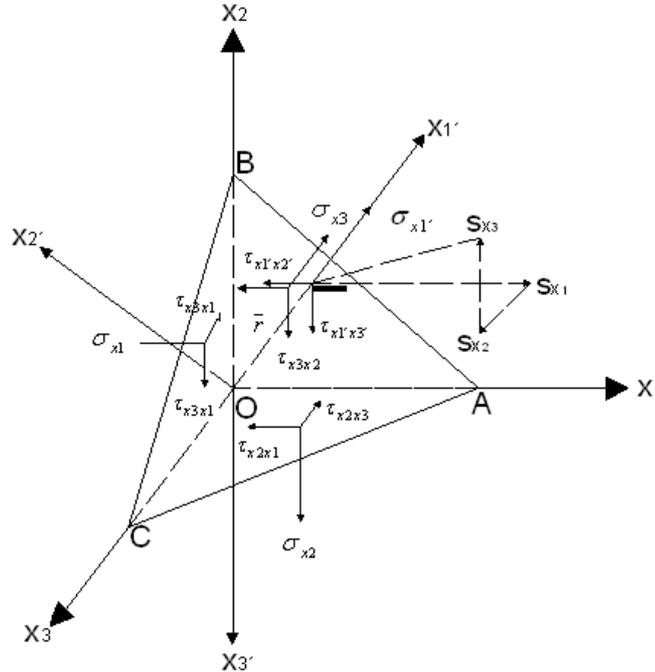


Figura B. 8. Tetraedro para establecer el equilibrio de fuerzas en un punto P.

El tetraedro tiene su origen en O y sus caras quedan definidas mediante un plano normal $n = \{n_1, n_2, n_3\}^T$ que intercepta con los planos coordenados de la superficie ΔS y donde las áreas de las caras del tetraedro son $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$.

Sea n el vector unitario normal a la base ABC , con vectores normales a las otras tres caras negativas. Definamos el área de la base del tetraedro ABC como ΔS y las áreas de las caras OBC, OAC, OAB como $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ y sea Δh su altura. El equilibrio de fuerzas del tetraedro de masa m , densidad ρ y aceleración a sujeto a una fuerza F , se puede escribir a partir de la segunda ley de Newton de la forma

$$F = ma = \rho \Delta V a = \frac{1}{3} \rho (\Delta h \Delta S) a \tag{B. 16}$$

La fuerza resultante F producida por los esfuerzos actuantes en las caras de tetraedro se calcula a partir de las áreas laterales del tetraedro proyectadas por los cósenos directores definidos como

$$S_1 = \Delta S n_1, S_2 = \Delta S n_2 \text{ y } S_3 = \Delta S n_3$$

De la tercera ley de Newton de acción y reacción se define que $\mathbf{t} = -\mathbf{t}$, aplicando el equilibrio de fuerzas actuantes se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= t_i \Delta S - t_1 \Delta S n_1 - t_2 \Delta S n_2 - t_3 \Delta S n_3 \\ \mathbf{F} &= t_i \Delta S - t_i \Delta S n_j \end{aligned} \quad (\text{B. 17})$$

De las ecuaciones (B.16) y (B.17), el equilibrio de fuerzas del tetraedro queda definido como

$$\begin{aligned} t_i \Delta S - t_i \Delta S n_j &= \frac{1}{3} \rho \Delta h \Delta S \mathbf{a} \\ t_i - t_i n_j &= \frac{1}{3} \rho \Delta h \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{B. 18})$$

Llevando al límite los puntos $A, B, C \rightarrow O$ del tetraedro, se define que $\Delta h \rightarrow 0$, obteniéndose así la relación de Cauchy, la cual se expresa de la forma

$$t_i - t_i n_j = 0$$

La relación de Cauchy en términos del vector de tracciones t_i en un punto se escribe en función de las componentes de esfuerzos de la forma

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{B. 19})$$

donde n_j es el vector normal unitario de la componente j y σ_{ij} son los esfuerzos actuantes del cuerpo en estudio.

B.5 Relaciones constitutivas

B.5.1 Medio elástico

En la teoría de la elasticidad para problemas multidimensionales, la linealidad entre los esfuerzos (σ) y las deformaciones (ε), a través de la constante de proporcionalidad denominada módulo de elasticidad se denomina la ley generalizada de Hooke, Domínguez (1993), la cual se escribe en términos de la ecuación (B.15) como

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} u_{k,l}, \quad \text{para } i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B. 20})$$

donde $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij} = E_{klji}$ es el tensor de las constantes elásticas de cuarto orden de un medio homogéneo, σ_{ij} es el tensor de esfuerzos y $u_{k,l}$ son las derivadas de los desplazamientos.

El estado de esfuerzos y deformaciones en un cuerpo tienen relación con las ecuaciones constitutivas del material. Para el caso de un cuerpo del medio continuo isótropo y de material elástico lineal, se definen dos constantes λ, μ , llamadas constantes de Lamé, las cuales pueden expresarse en términos de los módulos de Young E y Poisson ν de la forma

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{B. 21})$$

El tensor de constantes elásticas es expresado en función de dichas constantes y de la delta de Kronecker δ_{ij} como

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad \text{para } i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B. 22})$$

Sustituyendo la ecuación (B.22) en (B.20) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\}\epsilon_{kl} \\ \sigma_{ij} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\epsilon_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\epsilon_{kl} \\ \sigma_{ij} &= \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + \mu(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}) \end{aligned} \quad (\text{B. 23})$$

Sustituyendo $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ en la ecuación (B.23) se obtiene la relación de esfuerzos y desplazamientos para un medio homogéneo, elástico lineal e isótropo de la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (\text{B. 24})$$

La ecuación (B.24) se puede escribir en términos de las ecuaciones (B.15) y (B.21) como

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2 \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \epsilon_{ij} \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij}\epsilon_{kk} + \epsilon_{ij} \right] \\ \sigma_{ij} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \quad (\text{B. 25})$$

B.5.2 Medio visco elástico

El análisis de un medio de comportamiento visco-elástico depende de la velocidad de amortiguamiento, los esfuerzos y las deformaciones se relacionan linealmente en un cierto instante t , no solamente del valor presente, sino también de la historia de estos.

En un elemento infinitesimal de material viscoelástico lineal los esfuerzos son

proporcionales a las deformaciones en un instante $t = 0$, si la deformación se mantiene por un tiempo los esfuerzos decrecen hasta llegar a un estado de relajación.

La relación constitutiva para un medio visco-elástico lineal actuando en los tiempos $t = 0$ y $t = \tau$ se define como

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = G_{ijkl}(t)\varepsilon(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t G_{ijkl}(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{B. 26})$$

donde $G_{ijkl}(t)$ es llamado el tensor de relajación.

La ecuación (B.26) puede escribirse de una forma compacta para cuando $t > \tau$ como

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \int_0^t G_{ijkl}(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{B. 27})$$

Para un medio visco elástico, homogéneo e isótropo el tensor de relajación puede escribirse en término de las constantes de Lamé de la forma

$$G_{ijkl}(t) = \lambda(t)\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu(t)\varepsilon_{ij} \quad (\text{B. 28})$$

Si se asume que el tensor de relajación es

$$G_{ijkl}(t) = G_{ijkl}^0(t) + G_{ijkl}^t(t)$$

donde $G_{ijkl}^t(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

Relacionando las ecuaciones (B.27) y (B.28) se obtiene

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \lambda(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} d\tau \delta_{ij} + \int_{-\infty}^t 2\mu(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} d\tau \delta_{ij} \quad (\text{B. 29})$$

Si la deformación es una función armónica tal que

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \varepsilon_{ij}(x)e^{i\omega\tau} \text{ y } \frac{d\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = i\omega\varepsilon_{ij}(x)e^{i\omega\tau}$$

Sustituyendo esta relación y haciendo $\eta = t - \tau$, la ecuación (B.29) reescribe como

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = i\omega \left[\int_0^t \lambda(\eta)e^{-i\omega\eta} d\eta \right] \varepsilon_{kk}(x) \delta_{ij} e^{i\omega t} + i\omega \left[\int_0^t 2\mu(\eta)e^{-i\omega\eta} d\eta \right] \varepsilon_{ij}(x) e^{i\omega t} \quad (\text{B. 30})$$

donde $\lambda(\eta) = \mu(\eta) = 0$ cuando $t < 0$, los límites de las integrales se reemplazan por $-\infty$, esto haciendo la transformada de Fourier de $\lambda(\eta), 2\mu(\eta)$ obteniendo

$$\begin{aligned}\lambda(\omega) &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta \\ \mu(\omega) &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta\end{aligned}\tag{B. 31}$$

donde $\lambda(\omega), \mu(\omega)$ representan los valores de las funciones complejas, de esta forma el tensor de constantes elásticas en el dominio del tiempo puede escribirse como

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = [\lambda(\omega)\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(x) + 2\mu(\omega)\varepsilon_{ij}(x)]e^{i\omega t}$$

Haciendo la transformada de Fourier del tensor en el dominio de la frecuencia es

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda(\omega)\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(x) + 2\mu(\omega)\varepsilon_{ij}(x)\tag{B. 32}$$

La ecuación (B.32) es la misma relación constitutiva para problemas elásticos lineales y es empleada para la solución de problemas visco-elásticos en el dominio de la frecuencia, con la diferencia de que las constantes de Lamé $\lambda(\omega), \mu(\omega)$ son funciones complejas que se escriben como

$$\begin{aligned}\mu &= RE(\mu)(1 + 2i\beta_{\mu}) \\ \lambda &= RE(\lambda)(1 + 2i\beta_{\lambda})\end{aligned}\tag{B. 33}$$

donde $\beta = \beta_{\mu} = \beta_{\lambda}$ es el factor de amortiguamiento viscoso.

B.6 Problema estático

El problema estático se define previamente, ya que su implantación numérica es utilizada en la solución del método, Bálás (1989).

B.6.1 Solución fundamental de desplazamientos de Kelvin

En la figura B.9, se muestra el problema de Kelvin aplicable a dominios infinitos, para una carga concentrada aplicada en y , con efecto en un punto de observación x .

La ley de Hooke puede escribirse en función del tensor de deformaciones de Cauchy a partir de las ecuaciones (B.15) y (B.20) de la forma

$$\sigma_{ij} = E_{ijmn}u_{m,n}\tag{B. 34}$$

Derivando la expresión (B.34) en j y sustituyendo en la ecuación de equilibrio (B.5) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= E_{ijmn} u_{m,nj} \\ E_{ijmn} u_{m,nj} + b_i &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B. 35})$$

El operador de Navier se escribe como una ecuación diferencial parcial de un sistema elíptico de la forma

$$L_{im} = E_{ijmn} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_j}$$

La ecuación de Navier (B.35), en términos de las componentes de los desplazamientos se escribe como

$$L_{im} u_m + b_i = 0 \quad (\text{B. 36})$$

Sea $b_i = \delta_{ik} \delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, las fuerzas de cuerpo en el punto P de dirección k , la solución del desplazamiento u_k se deriva de la ecuación diferencial (B.36) para un espacio infinito y se escribe como

$$L_{im} u_{km} + \delta_{ik} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0 \quad (\text{B. 37})$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronecker, δr es la función delta de Dirac y $U_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ representa el desplazamiento de un punto x de un medio infinito en la dirección de i en respuesta a una carga concentrada en y , que actúa en la dirección de k .

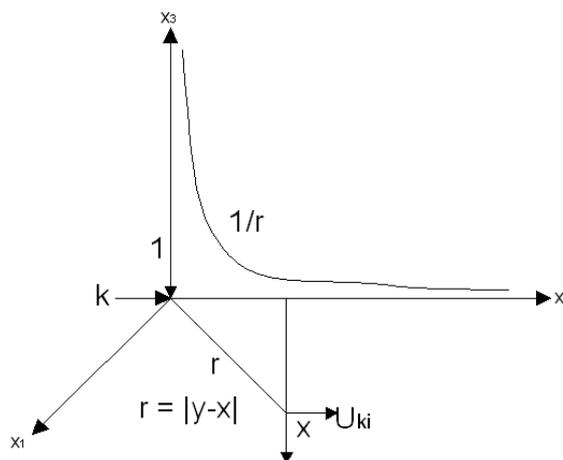


Figura B. 9. Solución fundamental de desplazamientos de Kelvin.

La solución fundamental de desplazamientos de Kelvin, para un cuerpo homogéneo, elástico e isótropo de un medio infinito se define a partir de la ecuación (B.37) y se

escribe como

$$U_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,i}r_{,k}] \quad \text{para } i, k \in \{1,2,3\} \quad (\text{B. 38})$$

donde μ es el coeficiente de cortante, ν es el módulo de Poisson, $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ es la distancia del punto x al punto fuente y , $r_{,i} = r_i / r$ es el coseno director del vector \mathbf{r} y δ_{ki} es la delta de Kronecker.

B.6.2 Ecuación integral de tracciones

La ecuación de las tracciones de un medio continuo, se obtiene a partir de la relación de Cauchy (B.19), de la ley de Hooke (B.20) y del gradiente de desplazamientos de la solución fundamental de la ecuación (B.38) de tal forma que

$$T_{ki} = E_{ijmn} U_{km,n} n_j \quad (\text{B. 39})$$

Sustituyendo el tensor de constantes elásticas de la ecuación (B.22) en (B.39), se tiene

$$T_{ki} = \{\lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu(\delta_{mi}\delta_{nj} + \delta_{mj}\delta_{ni})\} U_{km,n} n_j \quad (\text{B. 40})$$

derivando la solución fundamental de desplazamientos en términos de los subíndices m y n se obtiene

$$U_{km,n} = \frac{1}{16\mu\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r} (r_{,kn}r_{,m} + r_{,k}r_{,mn}) - \frac{r_{,n}}{r^2} ((3-4\nu)\delta_{km} + r_{,k}r_{,m}) \right\} \quad (\text{B. 41})$$

Sustituyendo el gradiente de desplazamientos de la ecuación (B.41), las constantes de Lamé λ, μ y simplificando términos se obtiene la ecuación de las tracciones definida como

$$T_{ki} = [n_i r_{,k} \{\lambda(1-(3-4\nu)) + 2\mu\} + \mu\{n_k r_{,i}(1-(3-4\nu)) + \delta_{ki} n_n r_{,n}(1-(3-4\nu)) - 6n_n r_{,n} r_{,i} r_{,k}\}]$$

$$T_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{8r^2\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)(n_k r_{,i} - n_i r_{,k}) + \{3r_{,i}r_{,k} + (1-2\nu)\delta_{ki}\} n_n r_{,n}] \quad (\text{B. 42})$$

donde n_i es la normal unitaria al plano

B.6.3 Ecuación integral de desplazamientos (Somigliana)

Los problemas de valores de frontera gobernados por la ecuación de Navier, son representados a partir de las ecuaciones integrales de frontera. El problema de valor de frontera preescrito por desplazamientos y tracciones en el dominio, se obtiene utilizando el teorema de reciprocidad, como lo hizo Somigliana o bien utilizando residuos pesados, con la ecuación de equilibrio y con una función de peso.

A partir de la ecuación de equilibrio (B.5) y de la solución Kelvin U_{ki} (B.38) como función de peso que se cumple punto a punto en el dominio de un medio continuo se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_{ki} (\sigma_{ij},j + b_i) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} U_{ki} \sigma_{ij},j d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki} b_i d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (B.43)$$

Integrando por partes el término de esfuerzo de la ecuación (B.43) y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (U_{ki} \sigma_{ij}),j d\Omega - \int_{\Omega} U_{ki},j \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki} b_i d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma - \int_{\Omega} U_{ki},j \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki} b_i d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma - \int_{\Omega} U_{ki},j E_{mnij} u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki} b_i d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma - \int_{\Omega} \Sigma_{kij} u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki} b_i d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (B.44)$$

donde $\sigma_{mn} = E_{mnij} u_{i,j}$ es la ley generalizada de Hooke, U_{ki} es la solución fundamental de desplazamientos, t_i son las tracciones en la frontera, b_i son las fuerzas de superficie en el cuerpo y $\Sigma_{kij} = E_{mnij} u_{ki,j}$ es el esfuerzo fundamental, integrando por partes el término del esfuerzo fundamental se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma - \int_{\Omega} (\Sigma_{kij} u_i),j d\Omega - \int_{\Omega} \Sigma_{kij,j} u_i d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki} b_i d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \Sigma_{kij} u_i n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ki} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_i d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki} b_i d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (B.45)$$

donde el esfuerzo fundamental $\Sigma_{kij} = -\delta_{ki} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, se define a partir de la ecuación (B.37).

La ecuación de desplazamientos Somigliana en ausencia de fuerzas de

cuerpo $\int U_{ki} b_i d\Omega = 0$, se escribe como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki} u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ki} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_i d\Omega = 0 \\ \int_{\Gamma} U_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma - u_k(\mathbf{y}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B. 46})$$

donde $T_{ki} = \sum_{kij} n_j$ es el tensor de tracciones de Cauchy.

B.7 Problema dinámico

El problema el dinámico se define las ecuaciones que intervienen en la solución por el método directo de ecuaciones integrales de frontera, Domínguez (1993).

B.7.1 Ecuación de movimiento en el dominio del tiempo

La ecuación de equilibrio dinámico de un medio continuo, se define con facilidad a partir de la ecuación (B. 47) y se expresa como

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{B. 48})$$

Para un cuerpo homogéneo, elástico e isótropo, se tiene que la ecuación (B.23) derivada respecto a j es

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ii} + \mu (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) \\ \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} u_{i,i} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} &= \lambda u_{j,i} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij,j} &= \lambda u_{j,ij} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ji}) \end{aligned} \quad (\text{B. 49})$$

El sistema de fuerzas dinámicas en el dominio del tiempo figura B.11, es representado por la ecuación de Navier, sustituyendo la ecuación (B.48) en (B.47) se obtiene dicha ecuación, la cual se expresa como

$$\begin{aligned} \lambda u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} + \rho b_i &= \rho \ddot{u}_i \\ \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i &= \rho \ddot{u}_i \\ \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho (b_i - \ddot{u}_i) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B. 50})$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé y $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ es una función que depende del punto \mathbf{x} y del tiempo t .

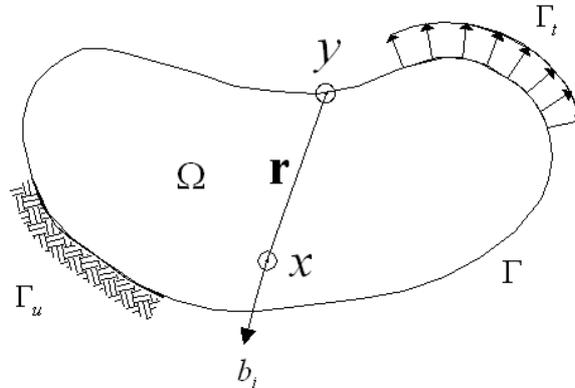


Figura B. 10. Sistema de fuerzas dinámicas.

La ecuación de Navier (B.49) se escribe en forma de vector como

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) &= 0 \\ \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (\text{B. 51})$$

Aplicando las identidades $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ y $\nabla \times \nabla \mathbf{u} = 0$ (apéndice A), en la ecuación (B.51) se obtiene la ecuación de movimiento en el dominio del tiempo de la forma

$$\begin{aligned} \mu(\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B. 52})$$

B.7.2 Ondas elásticas

En el estudio dinámico de un medio continuo elástico deformable, es necesario conocer las características de las ondas sísmicas y de su propagación. Cuando un medio es perturbado, las ondas se generan por la propagación de las fuerzas de la energía cinética y energía potencial.

El estudio de propagación de ondas elásticas aplicado en el sitio de amplificación de movimiento sísmico se puede representar por medios de ondas en términos de los planos homogéneo y no homogéneo.

Existe en general cuatro tipos de ondas las P , S y las ondas superficiales figura B.12.

La primera consiste en un movimiento longitudinal que provoca dilatación y compresión en el sentido en el que viaja. En el segundo tipo son ondas perpendiculares a las ondas P , es decir ondas de cortante y en el tercer tipo existen dos tipos de ondas superficiales: la onda Love u onda L , que es similar a las ondas S pero sin desplazamiento vertical y las ondas Rayleigh u ondas R , su movimiento es tanto vertical como horizontal.

En un medio homogéneo, isótropo y elástico, con densidad de masa ρ , las velocidades de la onda se define como $c_1 = P$ y $c_2 = S$:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1-\nu) E}{(1-\nu-2\nu^2) \rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé, ρ es la densidad, E , ν , son los módulos de Young y Poisson.

La relación de velocidades en función del coeficiente de Poisson se obtiene fácilmente y se escribe como

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}$$

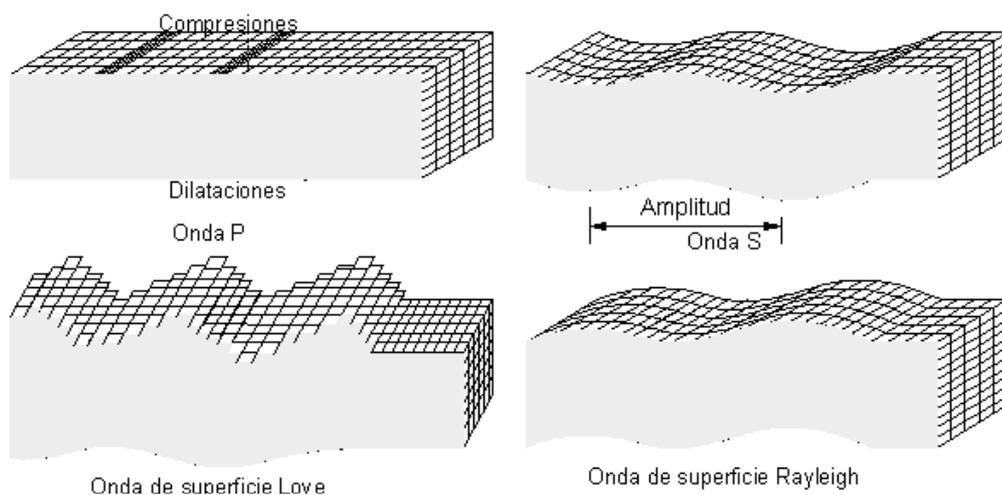


Figura B. 11. Transmisión de ondas P, S, Love y Rayleigh.

B.7.3 Ecuación de movimiento en el dominio de la frecuencia

Los problemas en el dominio del tiempo son representados generalmente por un cambio de variable del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia,

matemáticamente la transformada de Fourier en el dominio del tiempo es representada por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt$$

y la transformada de Fourier inversa en el dominio de la frecuencia se define como

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

donde $F(\omega)$ una función de distribución armónica llamada espectro de Fourier y $u(\mathbf{x},t)=e^{-i\omega t}$ es el campo de desplazamientos representado como una suma infinita de funciones de senos y cósenos.

La solución de ecuación de movimiento de Stokes en el dominio de la frecuencia se obtiene transformando la ecuación (B.51) definida en el dominio del tiempo, por medio de la transformada de Fourier. Considerando que $u(\mathbf{x},t)=e^{-i\omega t}$ es una solución armónica y derivando esta solución se tiene

$$\ddot{u} = -i\omega e^{-i\omega t}$$

y sustituyendo en ecuación (B.51) se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico en el dominio de la frecuencia de la forma

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \rho\omega^2 \mathbf{u} = \rho\mathbf{b} \quad (\text{B. 53})$$

Si $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ y $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$, la ecuación (B.52) de equilibrio dinámico en el dominio de la frecuencia se escribe como

$$c_1^2\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_2^2\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (\text{B. 54})$$

donde $u = u(\mathbf{x},\omega)$ es ahora una función que depende del punto fuente en x y de la frecuencia ω , c_1 es la velocidad de onda \mathbf{P} , c_2 es la velocidad de onda \mathbf{S} , ρ es la densidad y \mathbf{b} las fuerzas de cuerpo.

B.7.4 Formulación del problema elastodinámico en términos de potencial

Sea $\phi(\mathbf{x},t)$ un escalar y $\Psi(\mathbf{x},t)$ una función que se escribe como una combinación lineal de la forma

$$u = \nabla \phi + \nabla \times \psi \quad (\text{B. 55})$$

derivando la ecuación se obtiene el gradiente de velocidades y de aceleraciones de la forma

$$\dot{u} = \nabla \dot{\phi} + \nabla \times \dot{\psi}, \quad \ddot{u} = \nabla \ddot{\phi} + \nabla \times \ddot{\psi}$$

Si las fuerzas de cuerpo son representadas como una solución de la ecuación (B.54) de la forma $b = \nabla B + \nabla \times Q$, donde B es una función escalar, Q es un vector y u, b son diferenciables en una región infinita, la ecuación (B.50) en función de u, \ddot{u} se escribe como

$$\mu \nabla^2 (\nabla \phi + \nabla \times \psi) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot (\nabla \phi + \nabla \times \psi) + \rho (\nabla B + \nabla \times Q) = \rho (\nabla \ddot{\phi} + \nabla \times \ddot{\psi}) \quad (\text{B. 56})$$

aplicando las identidades $\nabla \cdot \nabla \times \psi = 0$, $\nabla \nabla \cdot \phi = \nabla^2 \phi + \nabla \times \nabla \times \phi$ y $\nabla \times \nabla \times \phi = 0$ en ecuación (B.55) se tiene

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 (\nabla \phi + \nabla \times \psi) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot (\nabla \phi) + \rho (\nabla B + \nabla \times Q) &= \rho (\nabla \ddot{\phi} + \nabla \times \ddot{\psi}) \\ \mu \nabla^2 (\nabla \phi + \nabla \times \psi) + (\lambda + \mu) \nabla^2 (\nabla \phi) + \rho (\nabla B + \nabla \times Q) &= \rho (\nabla \ddot{\phi} + \nabla \times \ddot{\psi}) \\ \nabla [\nabla^2 \phi (\lambda + 2\mu) + \rho B] + \nabla \times [\mu \nabla^2 \psi + \rho Q] &= \rho (\nabla \ddot{\phi} + \nabla \times \ddot{\psi}) \end{aligned} \quad (\text{B. 57})$$

esta ecuación se satisface término a término si ϕ y ψ son soluciones de tal forma que

$$\nabla^2 \phi (\lambda + 2\mu) + \rho B = \rho \ddot{\phi}, \quad \mu \nabla^2 \psi + \rho Q = \rho \ddot{\psi} \quad (\text{B. 58})$$

Las ecuaciones de onda no homogéneas con velocidades de onda $c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$, $c_2^2 = \mu / \rho$, en términos de la divergencia y el rotacional se escriben a partir de la expresión (B.57) como

$$c_1^2 \nabla^2 \phi + B = \ddot{\phi}, \quad c_2^2 \nabla^2 \psi + Q = \ddot{\psi} \quad (\text{B. 59})$$

Las ecuaciones de onda en términos de un escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ y de una función $\Psi(\mathbf{x}, t)$ se obtienen a partir de la ecuación (B.57) y se escriben como

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_1^2} \ddot{\phi}, \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_2^2} \ddot{\Psi} \quad (\text{B. 60})$$

donde c_1 es la velocidad de onda longitudinal u onda P y c_2 es la onda transversal o de corte, llamada onda S .

B.7.5 Solución fundamental de desplazamientos (Stokes)

La solución fundamental en el dominio de la frecuencia para tres dimensiones se obtiene a partir de la ecuación de Stokes (B.54) definida como

$$c_1^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (\text{B. 61})$$

La respuesta de un medio infinito es determinada considerando la aplicación de una carga armónica de frecuencia ω en un punto i , se obtiene de la ecuación (B.60) haciendo $\rho \mathbf{b} = \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}$

$$\delta(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{b} = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{e} \quad (\text{B. 62})$$

donde $\delta(\mathbf{r})$ es la función delta de Dirac, \mathbf{r} es la distancia de la carga en el punto $\boldsymbol{\varepsilon}$ y \mathbf{e} es un vector unitario en la dirección de la carga aplicada.

Los potenciales \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 se utilizan para descomponer el campo de desplazamientos $u = \nabla \phi + \nabla \times \psi$ en sus componentes rotacional y volumétrica de la forma

$$u = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_2 \quad (\text{B. 63})$$

donde $\phi = \nabla \mathbf{A}_1$ y $\psi = -\nabla \times \mathbf{A}_2$.

Considerando que \mathbf{b} puede escribirse en términos del potencial escalar \mathbf{U} de la forma

$$\rho \mathbf{b} = \nabla^2 \mathbf{U} \mathbf{e} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{e} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} \mathbf{e} \quad (\text{B. 64})$$

Sustituyendo las expresiones (B.61), (B.62) y (B.63) en (B.60) y simplificando expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} c_1^2 \nabla \nabla \cdot (\nabla \nabla \mathbf{A}_1 + \omega^2 \mathbf{A}_1 - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_2 + \mathbf{U} \mathbf{e} / \rho) - \\ c_2^2 \nabla \times \nabla \times (\nabla \nabla \mathbf{A}_1 - \omega^2 \mathbf{A}_2 - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_2 - \mathbf{U} \mathbf{e} / \rho) = 0 \end{aligned}$$

Si $k_1 = i(\omega/c_1)$, $k_2 = i(\omega/c_2)$ y $\nabla \cdot \nabla \times u = 0$ la expresión anterior se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} c_1^2 \nabla \nabla \cdot (\nabla \nabla \mathbf{A}_1 + \omega^2 \mathbf{A}_1 - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_2 + \mathbf{U} \mathbf{e} / \rho) - \\ c_2^2 \nabla \times \nabla \times (\nabla \nabla \mathbf{A}_1 - \omega^2 \mathbf{A}_2 - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_2 - \mathbf{U} \mathbf{e} / \rho) = 0 \end{aligned}$$

$$c_1^2 \nabla \nabla \cdot (\nabla \nabla \mathbf{A}_1 + \omega^2 \mathbf{A}_1 + \mathbf{U} \mathbf{e} / \rho) + c_2^2 \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_2 + \omega^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{U} \mathbf{e} / \rho) = 0$$

Aplicando la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 & c_1^2 \nabla \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}_1 + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_1 - k_1^2 \mathbf{A}_1 + \mathbf{Ue} / \rho c_1^2) \\
 & + c_2^2 \nabla \times \nabla \times (\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_2 - \nabla^2 \mathbf{A}_2 - k_2^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{Ue} / \rho c_2^2) = 0 \\
 & c_1^2 \nabla \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}_1 - k_1^2 \mathbf{A}_1 + \mathbf{Ue} / \rho c_1^2) + c_2^2 \nabla \times \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}_2 - k_2^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{Ue} / \rho c_2^2) = 0 \quad (\text{B. 65})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (B.62) se satisface para

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \mathbf{A}_1 - k_1^2 \mathbf{A}_1 + \mathbf{Ue} / \rho c_1^2 &= 0 \\
 \nabla^2 \mathbf{A}_2 - k_2^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{Ue} / \rho c_2^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Si se asume que los potenciales $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ siguen la dirección de la carga, entonces $\mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{e}, \mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{e}$ y el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 A_1 - k_1^2 A_1 + U / \rho c_1^2 &= 0 \\
 \nabla^2 A_2 - k_2^2 A_2 + U / \rho c_2^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores son del tipo

$$\nabla^2 \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} + \mathbf{U} / \rho c^2 = 0 \quad (\text{B. 66})$$

La solución fundamental en tres dimensiones de la ecuación (B.65) es

$$\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \Rightarrow \mathbf{U} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathbf{r}} \quad (\text{B. 67})$$

donde $-\delta(\mathbf{r})$ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace (Brebbia y Domínguez, 1992), de esta forma la ecuación (B.65) se escribe como

$$\nabla^2 \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} - \frac{1}{4\pi \rho c^2} \frac{1}{\mathbf{r}} = 0 \quad (\text{B. 68})$$

Una solución particular de la ecuación (B.67) es

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi \rho c^2 k^2} \frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi \rho \omega^2} \frac{1}{\mathbf{r}} \quad (\text{B. 69})$$

La solución general de la ecuación $\nabla^2 \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} = 0$, es dada por

$$\mathbf{A}_g = C_1 \frac{\exp(k\mathbf{r})}{\mathbf{r}} + C_2 \frac{\exp(-k\mathbf{r})}{\mathbf{r}} \quad (\text{B. 70})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{1}{\mathbf{r}} + C_{11} \frac{\exp(k_1\mathbf{r})}{\mathbf{r}} + C_{21} \frac{\exp(-k_1\mathbf{r})}{\mathbf{r}} \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{1}{\mathbf{r}} + C_{21} \frac{\exp(k_2\mathbf{r})}{\mathbf{r}} + C_{22} \frac{\exp(-k_2\mathbf{r})}{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (\text{B. 71})$$

De las cuatro constantes, dos pueden conocerse de la condición de radicación, si en un tiempo de variación se asume de tipo armónico, el término $\exp(k_i r)$ representa ondas a lo largo de la dirección \mathbf{r} negativa de un campo lejano al origen, entonces $C_{11} = C_{12} = 0$. El equilibrio en una pequeña región de la esfera alrededor de la carga, los valores de las constantes C_{21}, C_{22} pueden obtenerse fácilmente como

$$C_{21} = C_{22} = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \quad (\text{B. 72})$$

La solución fundamental de desplazamientos de Stokes para una carga concentrada armónica aplicada con dirección K y con desplazamiento en i , se obtiene sustituyendo las ecuaciones (B.71), (B.70) en (B.62), la cual se escribe como

$$U_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi\delta_{ki} - \chi r_{,i} r_{,k}] \quad (\text{B. 73})$$

y la expresión de tracciones para una superficie con normal \mathbf{n} , con carga aplicada en K es dada por la ecuación

$$\begin{aligned} T_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega) &= -\frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) \left(\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_k \right) + \left(\frac{4}{r} \chi - 2 \frac{d\chi}{dr} \right) r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{4}{2r} \chi \right) - \frac{2}{r} \chi \right\} r_{,k} n_i \right] \end{aligned} \quad (\text{B. 74})$$

La ecuación (B.74) puede escribirse en término de las variables A, B y C, que representan la suma de los términos singulares, más una serie de expansión no singular como

$$T_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \left[\left(\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_k \right) A + r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} B + r_{,k} n_i C \right] \quad (\text{B. 75})$$

con

$$A = \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right), B = \left(\frac{4}{r} \chi - 2 \frac{d\chi}{dr} \right), C = \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{4}{2r} \chi \right) - \frac{2}{r} \chi$$

donde

$$\begin{aligned}\psi &= \left(1 + \frac{1}{k_2^2 r^2} + \frac{1}{k_2 r}\right) \frac{\exp(-k_2 r)}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{1}{k_1^2 r^2} + \frac{1}{k_1 r}\right) \frac{\exp(-k_1 r)}{r} \\ \chi &= \left(1 + \frac{3}{k_2^2 r^2} + \frac{3}{k_2 r}\right) \frac{\exp(-k_2 r)}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(1 + \frac{3}{k_1^2 r^2} + \frac{3}{k_1 r}\right) \frac{\exp(-k_1 r)}{r}\end{aligned}\quad (\text{B. 76})$$

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dr} &= \left(-2 - k_2 r - \frac{3}{k_2 r} - \frac{3}{k_2^2 r^2}\right) \frac{\exp(-k_2 r)}{r^2} + \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(1 + \frac{3}{k_1 r} + \frac{3}{k_1^2 r^2}\right) \frac{\exp(-k_1 r)}{r^2} \\ \frac{d\chi}{dr} &= \left(-4 - k_2 r - \frac{9}{k_2 r} - \frac{9}{k_2^2 r^2}\right) \frac{\exp(-k_2 r)}{r^2} + \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(4 + k_1 r + \frac{9}{k_1 r} + \frac{9}{k_1^2 r^2}\right) \frac{\exp(-k_1 r)}{r^2}\end{aligned}\quad (\text{B. 77})$$

con $\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}$, $k_1 = i(\omega/c_1)$, $k_2 = i(\omega/c_2)$, $r = |x_i - y_i|$, $r_{,k} = \frac{r_k}{r}$.

Cuando el argumento $i\omega r/c_1 > 0.4$ las funciones dinámica y estática **T** y **Ts** son de tipo singular y la diferencia **T-Ts** se calcula directamente y ninguna evaluación de la serie de expansión es requerida. Cuando c_1/c_2 es un valor muy alto, entonces $i\omega r/c_1 < 0.4$ y $i\omega r/c_2 > 2\pi$, en tal caso la serie no es adecuada y se requiere una discretización más apropiada para la solución del problema.

La solución fundamental de desplazamientos depende de las funciones ψ , χ . Estas escritas en términos de exponenciales, si se utilizan series de expansión para los términos con exponenciales que presentan en el libro de Domínguez, J. (1993), las funciones de la ecuación (B.74) se transforman en

$$\begin{aligned}A &= -\frac{1}{r^2} \frac{c_2^2}{c_1^2} + k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2 [1 + (c_2/c_1)^{n+4}]}{(n+2)(n+4)} \frac{(k_2 r)^n}{n!} \\ B &= -\frac{3}{r^2} \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) - k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+4)} [1 - (c_2/c_1)^{n+4}] \frac{(k_2 r)^n}{n!} \\ C &= \frac{1}{r^2} \frac{c_2^2}{c_1^2} + k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2 + (n+4)(c_2/c_1)^{n+2} - 2(n+3)(c_2/c_1)^{n+4}}{(n+2)(n+4)} \frac{(k_2 r)^n}{n!}\end{aligned}\quad (\text{B. 78})$$

La ecuación (B.78) puede escribirse como

$$A = -\frac{1}{r^2} \frac{c_2^2}{c_1^2} + O(k_2^2), \quad B = -\frac{3}{r^2} \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) - O(k_2^2), \quad C = \frac{1}{r^2} \frac{c_2^2}{c_1^2} + O(k_2^2)\quad (\text{B. 79})$$

donde $k_2 \rightarrow 0$.

B.8 Formulación integral de frontera

Sea $u_k + \int_{\Gamma} T_{ki} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma$, válida para un punto en el dominio, para obtener la ecuación integral de frontera es necesario escribir la representación integral.

Sea i un punto en la frontera, cuyo dominio es una semicircunferencia de radio ϵ como se muestra en figura B.12.

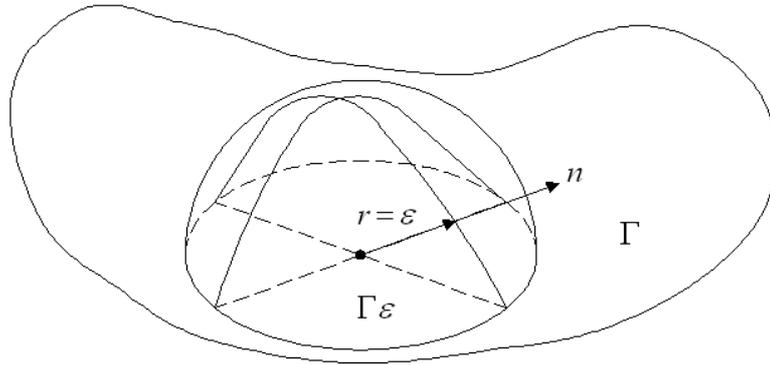


Figura B. 12. Semicircunferencia y punto de integración.

El punto i es considerado en el centro donde el radio es igual a cero, el punto entonces es un punto de frontera y el resultado es la representación integral para un punto en Γ . Cada integral de frontera se descompone en dos partes, una a lo largo de la frontera $\Gamma - \Gamma_\epsilon$ y la otra en Γ_ϵ .

La integral $\int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma$ se resuelve fácilmente ya que no existe singularidad, sustituyendo la solución fundamental de la ecuación (B.66) en la integral se tiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} U_{ki} t_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} U_{ki} t_i d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} U_{ki} t_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} t_i \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \frac{1}{4\pi\epsilon} d\Gamma + t_i \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{4\pi\epsilon} d\Gamma \quad (\text{B. 80})$$

Pero la superficie de la media esfera es $\int_{\Gamma} d\Gamma = 2\pi\epsilon^2$, aplicando (B.79) y haciendo que $\epsilon \rightarrow 0$ en la frontera Γ se obtiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} U_{ki} t_i d\Gamma = 0 \quad (\text{B. 81})$$

La integral $\int_{\Gamma} T_{ki} u_i d\Gamma$ se resuelve a partir de la ecuación (B.73) de las tracciones, la cual tiene una singularidad del orden de r^2 , la solución de la integral se expresa como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} T_{ki} u_i d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma\varepsilon} T_{ki} u_i d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma\varepsilon} T_{ki} u_i d\Gamma$$

El límite de estas integrales se puede escribir de la forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma\varepsilon} T_{ki} u_i d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_i \int_{\Gamma\varepsilon} T_{ki} d\Gamma$$

Haciendo que $\varepsilon \rightarrow 0$ en la frontera Γ y resolviendo la integral se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma\varepsilon} T_{ki} u_i d\Gamma = \frac{1}{2} \delta_{ki} u_i \quad (\text{B. 82})$$

donde la integral en la frontera Γ es ahora el valor principal de Cauchy.

Cuando el punto fuente y , está en la frontera la ecuación integral contiene un salto y puede escribirse como

$$c_{ki} u_i + \int_{\Gamma} T_{ki} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma \quad (\text{B. 83})$$

donde las integrales son representadas en función del valor principal de Cauchy $c = 1/2$ si el punto fuente se encuentra en la frontera y $c = 1$ si está en el interior del sólido, cabe señalar que la solución del problema es válido para fronteras suaves.

Apéndice C

Programa GCE

C.1 Variables principales

Las partes principales del programa modificado, teniendo como base los fundamentos escritos en la teoría del apéndice B se presentan a continuación:

Las principales variables que intervienen en el programa que son la máxima dimensión del sistema de ecuaciones ($NX = 3NE$), el número máximo de nodos de los elementos (NE), el número máximo de puntos internos $NPIX$, el número máximo de frecuencia $NFRX$, el número máximo de coordenadas $NCOX$, NRX el número máximo de regiones, $NEIX$ el número máximo de elementos de interfase, las propiedades del material de las múltiples regiones. Estos son ρ = densidad, GE = módulo de cortante (compleja), ν = módulo de Poisson, ζ = coeficiente de amortiguamiento, CP = velocidad de onda P (compleja) y CS = velocidad de onda S .

NR:	Número de regiones
N:	Número de elementos de frontera.
NP:	Número de vértices.
L:	Número de puntos internos
CP:	Velocidad de onda longitudinal P .
CS:	Velocidad de onda de cortante S .
GE:	Módulo de cortante.
GEF:	Factor que multiplica al sistema de ecuaciones para estabilidad numérica.
Dam:	Amortiguamiento.
Ro:	Densidad.
XNU:	Coeficiente de Poisson.
FR:	Frecuencia I .
NFR:	Número de frecuencias
DELTA:	Arreglo de 3×3 que contiene los valores de la delta de Dirac.
XMAT:	Arreglo de $(NRX, 4)$ que contiene los materiales por región RGE , XNU , RO , DAM .

- IR(NRX,3): Arreglo de los parámetros de los elementos de interfase EI, EF, L por región.
- IEIN(3NEIX): Elementos de interfase.
- IEI: Elemento inicial de la región.
- IEF: Elemento final de la región.
- X, Y, Z: Vector (NCOX) de coordenadas de los puntos de los elementos en la frontera.
- CX, CY, CZ: Vector (NPIX) de coordenadas de los puntos internos de los elementos.
- C1 a C5: Constantes de la solución fundamental de desplazamientos y tracciones.
- CONE: Arreglo de conectividad de los elementos de tamaño de (NE, 4) o de (NX3): Para elementos triangulares, donde $CONE(IX3) = CONE(IX4)$.
- XM, CM, CM: Coordenadas nodales de los elementos constantes (NE).
- AFR(NFRX): Arreglo que contiene el número de frecuencias en estudio.
- KODE(NX): Arreglo que indica el tipo de condición de frontera en los nodos. Si $KODE(J) = 0$ la condición de frontera en el nodo J es el desplazamiento preescrito y si $KODE(J) = 1$, la condición de frontera es la tracción.
- BC(NX): Arreglo que contiene los desplazamientos prescritos de las condiciones de frontera. Cada $BC(J)$ es una tracción o un desplazamiento que depende de $KODE(J)$. (Complex).
- DFI(NX): Contiene lo mismo que BC comenzando con la solución del proceso para cada frecuencia. AL final del análisis para cada frecuencia este contienen los valores de las tracciones en la frontera. (Complex).
- G(NX,NX): Matriz cuadrada que contienen los coeficientes de influencia obtenidos por la integración de la solución fundamental de desplazamientos. (Complex).
- H(NX,NX): Matriz cuadrada que contienen los coeficientes de influencia obtenidos por la integración de la solución fundamental de tracciones. (Complex).
- CH: Es una variable temporal.
- DSOL(*): Arreglo de (3NPIX) que contiene los valores de los desplazamientos de los puntos internos.

C.2 Función de subrutinas

El programa de cómputo GCE está compuesto por un conjunto de subrutinas, tales como:

- **INPUT**

Lectura de datos del modelo múltiples regiones a resolver, como se indica en el apartado C.3

- **DOR**

Calcula los coeficientes de las matrices **H**, **G** para la integración sobre los elementos de frontera. Esta llama otras subrutinas EXTIN7A o EXTIN7B para la integración de los puntos sobre elementos cuadriláteros o triangulares. Cuando el punto de

integración es en el nodo del elemento se presenta el caso singular y la subrutina LOCIN7 es llamada para la integración.

Las matrices **HW**, **GW** relacionan dos nodos diferentes, en las subrutinas EXTIN7A y EXTIN7B, se calcula la matriz estática **HS** que contiene las integrales de la solución fundamental estática para las tracciones. La diferencia entre las integrales de la solución dinámica y estática sobre el elemento donde la carga es aplicada (**HDIF=H-HS**) es calculada por LOCIN7.

- **EXTIN7A**

Calcula los coeficientes diagonales de las matrices **H**, **G** utilizando cuadratura de Gauss. Esta manda llamar a la subrutina FUTHEM para calcular la solución fundamental dinámica del tensor para cada punto de Gauss utilizando elementos cuadriláteros.

- **EXTIN7B**

Calcula los coeficientes diagonales de las matrices **H**, **G** utilizando cuadratura de Gauss. Esta manda llamar a la subrutina FUTHEM para calcular la solución fundamental dinámica del tensor para cada punto de Gauss utilizando elementos triangulares.

- **FUNTHEM**

Calcula el valor de la solución fundamental dinámica del tensor de desplazamientos **U** y de las tracciones dinámica **T** y estática **Ts**. Calcula la diferencia dinámica y estática de las tracciones (**T-Ts**) cuando ICOD>0.

La subrutina calcula **U**, **T** y **Ts** utilizando la solución fundamental de la ecuaciones dadas en el apéndice B.73, B.74 y con las funciones de las ecuaciones B.75. B.76 y B.77.

Cuando FUNTHEM es llamada con ICODE = 1 la diferencia **T-Ts** es calculada. Este cálculo se realiza utilizando las series de expansión de la función exponencial a partir de la ecuación B.74.

- **LOCIN7**

Evalúa los coeficientes de la diagonal de las submatrices de 3x3 de la matriz **G** por integración numérica de **U** sobre el elemento donde la carga unitaria es aplicada. La contribución de la diagonal de las submatrices de **H** son también evaluadas por integración de **T-Ts** calculando un arreglo **HDIF = H - Hs**.

Para hacer la integración el elemento es dividido en tres o cuatro elementos triangulares, figura C.1. Entonces la integración se realiza sobre cada subdominio triangular, tratando este como un rectángulo con dos esquinas comunes.

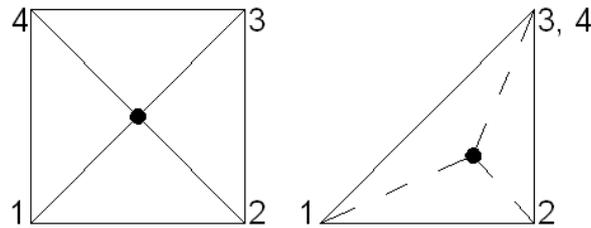


Figura C.1. Subdivisión del elemento para la integración de U .

○ **INTER7**

Calcula los valores de los desplazamientos de los puntos internos de las múltiples regiones utilizando la ecuación (I.39) del capítulo I

Esta reordena los arreglos **FI** y **DFI** para todas las direcciones nodales dentro de **FI** y al final todas las tracciones nodales en **DFI**. Al reordenar, el cálculo de las tracciones son multiplicadas por el módulo de cortante **GEF** para compensar la regularización de la columna correspondiente en el sistema matricial.

○ **OUTPUT7**

Imprime los resultados del problema para cada frecuencia analizada. Para cada frecuencia se imprimen tres desplazamientos y tres tracciones de los nodos del elemento y finalmente los desplazamientos de los puntos internos del elemento.

○ **CSOLVER**

Resuelve el sistema de ecuaciones $AX = B$ por factorización $A=LU$.

C.3 Datos principales de modelos con múltiples regiones

Análisis y salida de los desplazamientos para los elementos constantes.

El primer pasó consiste en definir la geometría de los elementos del problema a resolver, así como sus variables. Para el análisis de los modelos se consideran elementos rectangulares o triangulares con los nodos i numerados en sentido antihorario a las manecillas del reloj, figura (C.2).

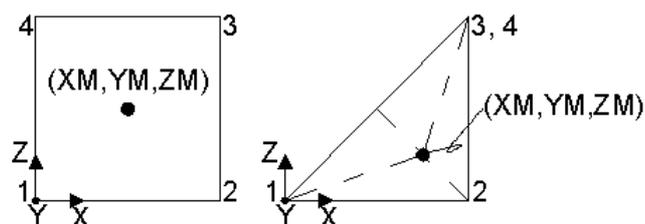


Figura C.2. Elemento rectangular y triangular.

La subrutina INPUT7 requiere de la entrada de un archivo de texto como se describe a continuación:

1. Título

2. Parámetros básicos del modelo a evaluar:

N NP NFR NR

3. Frecuencias:

AFR

I

. . . .

NFR

4. Vértices de los elementos de frontera:

I X Y Z

. . . .

NP

5. Conectividad de los elementos considerando la normal hacia fuera

I N1 N2 N3 N4

. . . .
 Elementos de interfase

. . . .
 N

6. Condiciones de frontera por elemento

I KODE VAL KODE VAL KODE VAL

. . . .
 Condiciones de frontera: CF 2 o CF3.

. . . .
 N

7. Elementos de interfase (INI)

I

I CF 2 K

. . . .

I CF 3 K

. . . .

INI

8. Regiones

```

N      e1      e2      L      G      NU      RO      DAM
|
.      .      .      ..     .      .      .      .
.      .      .      ..     .      .      .      .
.      .      .      ..     .      .      .      .

NR
-----
Coordenadas de los puntos internos
I      CX      CY      CZ
.      .      .      .
.      .      .      .
.      .      .      .
L
-----

```

C.4 Programa GCE de modelos con múltiples regiones

```

C-----
C      PROGRAM CE
C      THIS IS A B.E. PROGRAM THAT USES (CON)STANT ELEMENTS FOR THE
C      SOLUTION OF (D)YNAMIC (TH)REE-DIMENSIONAL (E)LASTIC OR VISCOELASTIC
C      TIME (H)ARMONIC PROBLEMS (Domínguez, J., (1993) [30])
C
C      SE GENERALIZÓ A MÚLTIPLES REGIONES (Rogelio Arias Hernández)
C      LOS CAMBIOS AL PROGRAMA SE MUESTRAN EN NEGRITAS
C      PARAMETER (NE=150, NX=3*NE, NPIX=50, NFRX=512, NCOX=150)
C      PARAMETER (NRX=5) !NÚMERO MÁXIMO DE REGIONES
C      PARAMETER (NEIX=NE/2) !NÚMERO MÁXIMO DE ELEMENTOS DE INTERFASE
C      CHARACTER*50 FILEIN, FILEOUT
C
C      COMPLEX      G (NX, NX) , H (NX, NX) , CH
C      COMPLEX      BC (NX) , FI (NX) , DFI (NX) , DSOL (3*NPIX)
C      COMMON/MATG/G
C      COMMON/MATH/H
C      DIMENSION    X (NCOX) , Y (NCOX) , Z (NCOX) , XM (NE) , YM (NE) , ZM (NE)
C      DIMENSION      XMAT (NRX, 4) !RGE, XNU, RO, DAM MATERIAL POR REGIÓN
C      DIMENSION      IR (NRX, 3) !EI, EF, L PARAMETROS POR REGIÓN
C      DIMENSION      IEIN (NEIX*3) !IE, CF, IEC ELEMENTOS DE INTERFASE
C      INTEGER      CONE (NE, 4)
C      DIMENSION    KODE (NX) , CX (NPIX) , CY (NPIX) , CZ (NPIX) , AFR (NFRX)
C
C      COMPLEX      CP, CS, GE, GEF, C1, C2, C3
C      DIMENSION    DELTA (3, 3)
C      COMMON      INI, NR, N, NP, L, CP, CS, GE, GEF, RO, XNU, FR, INP, IPR
C      COMMON      C1, C2, C3, C4, C5, C6, DELTA
C
C      NE = MAXIMUM NUMBER OF BOUNDARY ELEMENT
C      NX = MAXIMUM DIMENSION OF THE SYSTEM OF EQUATIONS
C      NPIX = MAXIMUM NUMBER OF INTERNAL POINTS
C      NFRX = MAXIMUM NUMBER OF FREQUENCIES
C      NCOX = MAXIMUM NUMBER OF CORNER POINTS

```

```

C   NRX  = NUMERO MAXIMO DE REGIONES
C
C   ASSIGN NUMBERS FOR INPUT AND OUTPUT FILES
C
C       INP=5
C       IPR=6
C
C   Inicializa la delta de Kroeneker
C   DO I=1,3
C       DO J=1,3
C           IF(I.EQ.J) THEN
C               DELTA(I,J)=1.
C           ELSE
C               DELTA(I,J)=0.
C           ENDIF
C       ENDDO
C   ENDDO
C
C
C   READ NAMES AND OPEN FILES FOR INPUT AND OUTPUT
C
C       WRITE(*,'(A,$)') ' NAME OF THE INPUT  FILE (MAX. 12 CHART.) : '
C       READ(*,'(A)') FILEIN
C       FILEIN='viga-1.1r.ce'
C       OPEN(INP,FILE=FILEIN,STATUS='OLD')
C       WRITE(*,'(A,$)') ' NAME OF THE OUTPUT FILE (MAX. 12 CHART.) : '
C       READ(*,'(A)') FILEOUT
C       FILEOUT='viga-1.1r.res'
C       OPEN(IPR,FILE=FILEOUT,STATUS='UNKNOWN')    !..UNKNOWN para que encime si es
necesario
C
C   binario con los resultados de todas la frecuencias
C   FILEOUT='viga-1.1r.bin'
C   OPEN(7,FILE=FILEOUT,STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',RECL=2)    !.. 8 bytes (un
complex)
C
C   READ DATA
C
C       CALL INPUT(CX,CY,CZ,X,Y,Z,KODE,BC,NFR,AFR,NE,CONE,
+           XM,YM,ZM,XMAT,IR,NRX,IEIN)
C       CALL INPUT7(CX,CY,CZ,X,Y,Z,KODE,BC,NFR,AFR,NE,CONE,XM,YM,ZM)
C
C   Inicializa las matrices del sistema
C   DO J=1,3*N
C       DO I=1,3*N
C           G(I,J)=(0.,0.)
C           H(I,J)=(0.,0.)
C       ENDDO
C   ENDDO
C
C
C   Inicia el proceso por frecuencia
C   NN=3*N
C   IREC=0
C   DO I=1,NFR
C       FR=AFR(I)
C       DO J=1,NN
C           DFI(J)=BC(J)
C       END DO
C
C
C   FORM SYSTEM OF EQUATIONS
C   por región
C
C       GEF=CMPLX(XMAT(1,1),XMAT(1,1)*2.*XMAT(1,4)) !Factor en todas la regiones

```

```

DO IREG=1,NR
c   Asigna el material de la región
      RGE= XMAT(IREG,1)
      XNU= XMAT(IREG,2)
      RO= XMAT(IREG,3)
      DAM= XMAT(IREG,4)
      GE=CMPLX(RGE,RGE*2.*DAM)
      CS=CSQRT(GE/RO)
      CP=CS*SQRT((2.-2.*XNU)/(1.-2.*XNU))
      IEI=IR(IREG,1)
      IEF=IR(IREG,2)

      CALL DOR(IEI,IEF,X,Y,Z,XM,YM,ZM,G,H,FI,DFI,KODE,
+           NX,NE,CONE,IEIN)
END DO

c
c   DO M=1,NN
c       WRITE(IPR,'(512G14.4)')(G(M,K),K=1,NN)
c   ENDDO
c
c   Se imponen las condiciones de compatibilidad
c   En los elementos de interfase (CF 2,3) se tienen las 6 incógnitas
c   desplazamientos y tracciones, las tracciones se guardan en el
c   elemento de interfase CF 2 y los desplazamientos en el elemento
c   coincidente con condición CF 3
      DO IREG=1,NR
          IEI=IR(IREG,1)
          IEF=IR(IREG,2)
c       renglones de la región
          DO IREN=IEI,IEF
              IRENI= (IREN-1)*3
              DO IQ=1,INI
                  IEII= (IQ-1)*3
                  IE= IEIN(IEII+1)
c               El elemento debe ser de la región, i.e. la columna
                  IF (IE.LT.IEI .OR. IE.GT.IEF) CYCLE
                  ICF=IEIN(IEII+2)
                  IEC=IEIN(IEII+3)
                  IEJ= (IE-1)*3
                  IECJ= (IEC-1)*3
                  IF(ICF.EQ.2) THEN
c                   Toma los desplazamientos del elemento coincidente
                      DO M=1,3
                          DO K=1,3
                              H(IRENI+M,IECJ+K)= H(IRENI+M,IEJ+K)
                              G(IRENI+M,IEJ+K)= (0.,0.)
                          END DO
                      END DO
                  ELSE IF (ICF.EQ.3) THEN
c                   Toma las tracciones del elemento coincidente
                      DO M=1,3
                          DO K=1,3
                              G(IRENI+M,IECJ+K)= -G(IRENI+M,IEJ+K)
                              H(IRENI+M,IEJ+K)= (0.,0.)
                          END DO
                      END DO
                  ENDIF
              ENDDO !IQ
          ENDDO !IREN
      ENDDO !IREG
c
c REORDER THE COLUMNS OF THE SYSTEM OF EQUATIONS IN ACCORDANCE WITH THE

```

```

C BOUNDARY CONDITIONS AND FORM SYSTEM MATRIX A WHICH IS STORED IN G
C   Los elementos de interfase con CF 3 guardan los desplazamientos, haciendo
c   KODE 1 de esos elementos hace que las columnas de H de ese elemento se
c   queden en su lugar (no hay movimiento de columnas)
      NN=3*N
      DO K=1, NN
        IF (KODE(K).EQ.0) THEN
          DO J=1, NN
            CH=G(J, K)*GEF
            G(J, K)=-H(J, K)
            H(J, K)=-CH
          ENDDO
        END IF
      ENDDO !K

C
C FORM THE RIGHT HAND SIDE VECTOR F WHICH IS STORED IN FI
C
      DO K=1, NN
        FI(K)=(0., 0.)
        DO J=1, NN
          FI(K)=FI(K)+G(K, J)*DFI(J)
        END DO
      END DO !K

c
c   Aplica las condiciones de compatibilidad en los términos independientes
c   solo hay que hacerlo para los elementos de interfase con CF=2.
Hacerlo también para CF=3 es redundante y desharía lo hecho
      DO IQ=1, INI
        IEII=(IQ-1)*3
        IE= IEIN(IEII+1)
        ICF=IEIN(IEII+2)
        if (ICF .NE. 2) CYCLE
        IEC=IEIN(IEII+3)
        IEJ= (IE-1) *3
        IECJ= (IEC-1)*3
        DO K=1, 3
          CH= FI(IECJ+K)
          FI(IECJ+K)= FI(IEJ+K)
          FI(IEJ+K)= CH
        ENDDO
      ENDDO

C
C SOLVE SYSTEM OF EQUATIONS
C
      CALL CSOLVER(H, FI, NN, NX)

C
C COMPUTE DISPLACEMENT OF INTERNAL POINTS
C
      CALL INTER7(FI, DFI, KODE, CX, CY, CZ, X, Y, Z, DSOL, NE, CONE,
*               IEIN, XMAT, IR, NRX)

C
C PRINT RESULTS AT BOUNDARY NODES AND INTERNAL POINTS
C
      CALL OUTPUT7(FI, DFI, DSOL, IR, NRX)

c
c   Desplazamientos, secuencialmente
      DO J=1, 3*N
        WRITE(7, REC=IREC+J) FI(J)
      ENDDO
      IREC=IREC+3*N

c
c   K=0
c   DO IREG=1, NR

```

```

c      L=IR(IREG,3)
c      WRITE(7,*) (DSOL(K+I),I=1,3*L)
c      K=K+3*L
c      ENDDO
c
c      END DO !I
C
CLOSE (INP)
CLOSE (IPR)
CLOSE (7)
C
STOP 'END CE'
END
-----
SUBROUTINE INPUT(CX,CY,CZ,X,Y,Z,KODE,BC,NFR,AFR,NE,CONE,
+              XM,YM,ZM,XMAT,IR,NRX,IEIN)
C
CHARACTER*80 TITLE
DIMENSION CX(1),CY(1),CZ(1),X(1),Y(1),Z(1),KODE(1),AFR(1)
DIMENSION XM(1),YM(1),ZM(1)
DIMENSION IEIN(1)
INTEGER CONE(NE,4)
COMPLEX BC(1)
DIMENSION XMAT(NRX,4) !RGE, RO, XNU, DAMP MATERIAL POR REGIÓN
DIMENSION IR(NRX,3) !EI,EF,L PARÁMETROS POR REGIÓN
C
COMPLEX CP,CS,GE,GEF,C1,C2,C3
DIMENSION DELTA(3,3)
COMMON INI,NR,N,NP,L,CP,CS,GE,GEF,RO,XNU,FR,INP,IPR
COMMON C1,C2,C3,C4,C5,C6,DELTA
C
c      N numero de elementos (son dos elementos en la iterfase)
c      NP numero de vertices
c      NFR numero de frecuencias
c      NR numero de regiones
c      AFR arreglo de frecuencias
c      CONE elementos (conectividades)
c      X,Y,Z coordenadas de vértices
c      XM,YM,ZM coordenadas de nudos (puntos medios de elementos)
c      KODE código de condición de frontera 0:desp, 1:trac 2:compatibilidad
c                                             3:compatibilidad, tracciones del
c                                             elemento contiguo
c
c      BC condiciones de frontera
READ(INP,'(A)') TITLE
READ(INP,*) !parámetros
READ(INP,*) N,NP,NFR,NR
READ(INP,*) !frecuencias
READ(INP,*) (AFR(I),I=1,NFR)
READ(INP,*) !vertices IN, dummy
READ(INP,*) (IN,X(I),Y(I),Z(I),I=1,NP)
READ(INP,*) !elementos, IE dummy
DO 18 I=1,N
READ(INP,*) IE,(CONE(I,J),J=1,4)
C
C COMPUTE NODAL COORDINATES AND STORE IN ARRAYS XM, YM AND ZM
C
IF(CONE(I,4).EQ.0) CONE(I,4)=CONE(I,3)
N1=CONE(I,1)
N2=CONE(I,2)
N3=CONE(I,3)
N4=CONE(I,4)
IF(N3-N4) 12,14,12

```

```

C
C QUADRILATERAL ELEMENTS
C
12 XM(I)=(X(N1)+X(N2)+X(N3)+X(N4))*0.25
   YM(I)=(Y(N1)+Y(N2)+Y(N3)+Y(N4))*0.25
   ZM(I)=(Z(N1)+Z(N2)+Z(N3)+Z(N4))*0.25
   GO TO 16
C
C TRIANGULAR ELEMENTS
C
14 XM(I)=(X(N1)+X(N2)+X(N3))*0.3333333
   YM(I)=(Y(N1)+Y(N2)+Y(N3))*0.3333333
   ZM(I)=(Z(N1)+Z(N2)+Z(N3))*0.3333333
16 CONTINUE
18 CONTINUE
c
  READ(INP,*) !Condiciones de frontera, IE es dummy
  DO 20 I=1,N
  READ(INP,*) IE, (KODE(3*(I-1)+J),BC(3*(I-1)+J),J=1,3)
20 CONTINUE
c
  READ(INP,*) !Elementos de interfase
  READ(INP,*) INI
  DO I=1,INI
    II=3*(I-1)
    READ(INP,*) IEIN(II+1),IEIN(II+2),IEIN(II+3) !E, CF(2 o 3) y El coincidente
  END DO
c
  READ(INP,*) !Regiones
  READ(INP,*) ! e1 e2 L G nu ro damp
  K=0
  DO I=1,NR
    READ(INP,*) II,IR(I,1), IR(I,2), IR(I,3),
+      XMAT(I,1),XMAT(I,2),XMAT(I,3),XMAT(I,4)
    L=IR(I,3)
    DO J=1,L
      READ(INP,*) II,CX(K+J),CY(K+J),CZ(K+J)
    ENDDO
    K=K+L
  END DO
c
  RETURN
  END

C-----
SUBROUTINE DOR(IEI,IEF,X,Y,Z, XM, YM, ZM, G, H, FI, DFI, KODE,
+           NX, NE, CONE, IEIN)
C
C THIS SUBROUTINE COMPUTES THE G AND H MATRICES AND
C FORM THE SYSTEM OF EQUATIONS A X = F
C
COMPLEX G(NX,NX),H(NX,NX),FI(1),DFI(1)
DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),XM(1),YM(1),ZM(1)
DIMENSION KODE(1)
  DIMENSION IEIN(1)
INTEGER CONE(NE,4)
DIMENSION ETA(3),CO(4,3),HS(3,3)
COMPLEX GW(3,3),HW(3,3),HDIF(3,3),CH
c
  COMPLEX CP,CS,GE,GEF,C1,C2,C3
  DIMENSION DELTA(3,3)
  COMMON INI,NR,N,NP,L,CP,CS,GE,GEF,RO,XNU,FR,INP,IPR
  COMMON C1,C2,C3,C4,C5,C6,DELTA

```

```

DATA      PI/3.141592654/
C
C COMPUTE GENERAL CONSTANTS
C
C1=(CP/CS)**2
C2=(CS/CP)**2
C3=(1.,0.)/(CPLX(4.*PI,0.)*GE)
C4=1./(4.*PI)
C5=-1./(8.*PI*(1.-XNU))
C6=1.-2.*XNU
C
C COMPUTE THE COEFICIENTS OF G AND H MATRICES
C
C Mueve el elemento de integración
C DO 220 J=IEI,IEF
C
C COMPUTE THE COMPONENTS OF THE NORMAL VECTOR TO A FLAT ELEMENT
C BY USING THE VECTOR PRODUCT OF SIDES 1-2 AND 1-3
C
N1=CONE(J,1)
N2=CONE(J,2)
N3=CONE(J,3)
N4=CONE(J,4)
A=(Y(N2)-Y(N1))*(Z(N3)-Z(N1))-(Z(N2)-Z(N1))*(Y(N3)-Y(N1))
B=(Z(N2)-Z(N1))*(X(N3)-X(N1))-(X(N2)-X(N1))*(Z(N3)-Z(N1))
C=(X(N2)-X(N1))*(Y(N3)-Y(N1))-(Y(N2)-Y(N1))*(X(N3)-X(N1))
R=SQRT(A*A+B*B+C*C)
ETA(1)=A/R
ETA(2)=B/R
ETA(3)=C/R
C
C STORE COORDINATES OF THE CORNER POINTS IN ARRAY CO
C
CO(1,1)=X(N1)
CO(1,2)=Y(N1)
CO(1,3)=Z(N1)
CO(2,1)=X(N2)
CO(2,2)=Y(N2)
CO(2,3)=Z(N2)
CO(3,1)=X(N3)
CO(3,2)=Y(N3)
CO(3,3)=Z(N3)
CO(4,1)=X(N4)
CO(4,2)=Y(N4)
CO(4,3)=Z(N4)
JJ=3*(J-1)
C
C Mueve el punto fuente
C DO 200 I=IEI,IEF
C
IF(I-J) 120,140,120
120 IF(N3-N4) 125,130,125
C
C QUADRILATERAL ELEMENTS
C
125 CALL EXTIN7A(GW,HW,HDIF,HS,CO,XM(I),YM(I),ZM(I),ETA,0)
GO TO 150
C
C TRIANGULAR ELEMENTS
C
130 CALL EXTIN7B(GW,HW,HS,CO,XM(I),YM(I),ZM(I),ETA)
GO TO 150

```

```

c   El caso coincidente (singular)
140 CALL LOCIN7(GW,HW,HDIF,XM(I),YM(I),ZM(I),ETA,X,Y,Z,N1,N2,N3,N4)
150 CONTINUE
C
    II=3*(I-1)
    GW(2,1)=GW(1,2)
    GW(3,1)=GW(1,3)
    GW(3,2)=GW(2,3)
    DO 190 JN=1,3
    DO 190 IN=1,3
    G(IN+IN,JJ+JN)=GW(IN,JN)
    IF(I-J) 160,170,160
160 H(IN+IN,JJ+JN)=HW(IN,JN)
    H(IN+IN,II+JN)=H(IN+IN,II+JN)-CMPLX(HS(IN,JN),0.)
    GOTO 190
170 H(IN+IN,II+JN)=H(IN+IN,II+JN)+HDIF(IN,JN)
190 CONTINUE
C
200 CONTINUE
220 CONTINUE
C
C   ADD ONE TO DIAGONAL TERMS FOR EXTERNAL PROBLEMS
C
    DO 225 I=IEI,3*IEF
    IF(REAL(H(I,I)).LT.0.) H(I,I)=H(I,I)+(1.,0.)
225 CONTINUE
c
    RETURN
    END
-----
C-----
SUBROUTINE EXTIN7A(GW,HW,HDIF,HS,CO,XP,YP,ZP,ETA,ICODE)
C
    COMPLEX    GW(3,3),HW(3,3),U(3,3),T(3,3),HDIF(3,3),TDIF(3,3)
    DIMENSION  ETA(3),CO(4,3),F(4),P(2,4),XJ(2,3)
    DIMENSION  OME(6),GI(6),HS(3,3),TS(3,3)
    COMPLEX    CP,CS,GE,GEF,C1,C2,C3
    DIMENSION  DELTA(3,3)
    COMMON    INI,NR,N,NP,L,CP,CS,GE,GEF,RO,XNU,FR,INP,IPR
    COMMON     C1,C2,C3,C4,C5,C6,DELTA
C
C   QUADRILATERAL ELEMENTS
C
C   THIS SUBROUTINE COMPUTES THE OFF-DIAGONAL COEFFICIENTS OF H AND G
C   MATRICES USING GAUSS QUADRATURE
C
    DATA OME/ .1713245, .3607616, .4679139, .4679139, .3607616, .1713245/
    DATA GI /-.9324695,-.6612094,-.2386192, .2386192, .6612094, .9324695/
C
C   ICODE .LE. 0   THE COLLOCATION POINT DOES NOT BELONG TO THE ELEMENT
C   ICODE .GT. 0   THE COLLOCATION POINT BELONGS TO THE ELEMENT
C
    DO 20 JN=1,3
    DO 20 IN=1,3
    GW(IN,JN)=(0.,0.)
    IF(ICODE) 10,10,15
10  HW(IN,JN)=(0.,0.)
    HS(IN,JN)=0.
    GOTO 20
15  HDIF(IN,JN)=(0.,0.)
20  CONTINUE
C
    DO 400 JG=1,6

```

```

C
  G2=GI(JG)
  P2=OME(JG)
  SP=1.0+G2
  SM=1.0-G2
  P(1,1)=-0.25*SM
  P(1,2)= 0.25*SM
  P(1,3)= 0.25*SP
  P(1,4)=-0.25*SP
C
  DO 300 IG=1,6
C
  G1=GI(IG)
  P1=OME(IG)
  RP=1.0+G1
  RM=1.0-G1
  F(1)=0.25*RM*SM
  F(2)=0.25*RP*SM
  F(3)=0.25*RP*SP
  F(4)=0.25*RM*SP
  P(2,1)=-0.25*RM
  P(2,2)=-0.25*RP
  P(2,3)= 0.25*RP
  P(2,4)= 0.25*RM
C
C COMPUTE THE RELATION BETWEEN CARTESIAN AND HOMOGENOUS COORDINATES
C
  DO 90 I=1,2
  DO 80 J=1,3
  TEMP=0.0
  DO 70 K=1,4
  TEMP=TEMP+P(I,K)*CO(K,J)
70 CONTINUE
  XJ(I,J)=TEMP
80 CONTINUE
90 CONTINUE
C
C COMPUTE THE JACOBIAN
C
  DET=SQRT( (XJ(1,2)*XJ(2,3)-XJ(2,2)*XJ(1,3))**2 +
1          (XJ(2,1)*XJ(1,3)-XJ(1,1)*XJ(2,3))**2 +
2          (XJ(1,1)*XJ(2,2)-XJ(2,1)*XJ(1,2))**2 )
  IF(DET-1.0E-5) 100,110,110
100 WRITE(IPR,1000) DET
  WRITE(IPR,1100) ((CO(I,J),J=1,3),I=1,4)
1000 FORMAT(///' EXTIN7A : ERROR, NULL OR NEGATIVE JACOBIAN =',G14.5)
1100 FORMAT(/1X,'COORDINATES OF CORNER POINTS '/(3G14.5))
  STOP ' EXTIN7A : ERROR, NULL OR NEGATIVE JACOBIAN'
110 CONTINUE
C
C COMPUTE THE COORDINATES OF THE INTEGRATION POINTS
C
  XG=0.0
  YG=0.0
  ZG=0.0
  DO 130 I=1,4
  XG=XG+CO(I,1)*F(I)
  YG=YG+CO(I,2)*F(I)
  ZG=ZG+CO(I,3)*F(I)
130 CONTINUE
C
  CALL FUNTHEH(U,T,TS,XP,YP,ZP,ETA,XG,YG,ZG,ICODE,TDIF)

```

```

C
  P12=P1*P2*DET
  DO 200 JN=1,3
  DO 200 IN=1,3
  GW(IN,JN)=GW(IN,JN)+U(IN,JN)*CMPLX(P12,0.)
  IF(ICODE) 150,150,160
150 HW(IN,JN)=HW(IN,JN)+T(IN,JN)*CMPLX(P12,0.)
  HS(IN,JN)=HS(IN,JN)+TS(IN,JN)*P12
  GOTO 200
160 HDIF(IN,JN)=HDIF(IN,JN)+TDIF(IN,JN)*CMPLX(P12,0.)
200 CONTINUE

C
300 CONTINUE
400 CONTINUE

C
  RETURN
  END
-----
C
  SUBROUTINE EXTIN7B(GW,HW,HS,CO,XP,YP,ZP,ETA)
C
C  TRIANGULAR ELEMENTS
C
C  THIS SUBROUTINE COMPUTES THE OFF DIAGONAL COEFFICIENTS OF H AND G
C  MATRICES USING GAUSS QUADRATURE
C
  COMPLEX  GW(3,3),HW(3,3),U(3,3),T(3,3),TDIF(3,3)
  DIMENSION ETA(3),CO(4,3),F(3),XJ(2,3)
  DIMENSION OMEI(4),OMEJ(4),GI(4),GJ(4),HS(3,3),TS(3,3)
  COMPLEX  CP,CS,GE,GEF,C1,C2,C3
  DIMENSION DELTA(3,3)
  COMMON  INI,NR,N,NP,L,CP,CS,GE,GEF,RO,XNU,FR,INP,IPR
  COMMON  C1,C2,C3,C4,C5,C6,DELTA

C
  DATA OMEI/.1739274226,.3260725774,.3260725774,.1739274226/
  DATA GI  /.0571041961,.2768430136,.5835904324,.8602401357/
  DATA OMEJ/.1355069134,.2034645680,.1298475476,.0311809709/
  DATA GJ  /.0694318422,.3300094782,.6699905218,.9305681558/

C
  DO 10 I=1,3
  XJ(1,I)=CO(1,I)-CO(3,I)
  XJ(2,I)=CO(2,I)-CO(3,I)
10 CONTINUE

C
C  COMPUTE THE JACOBIAN
C
  DET=SQRT( (XJ(1,2)*XJ(2,3)-XJ(2,2)*XJ(1,3))**2 +
&          (XJ(2,1)*XJ(1,3)-XJ(1,1)*XJ(2,3))**2 +
&          (XJ(1,1)*XJ(2,2)-XJ(2,1)*XJ(1,2))**2 )
  IF(DET-1.0E-5) 20,30,30
20 WRITE(IPR,1000) DET
  WRITE(IPR,1100) ((CO(I,J),J=1,3),I=1,3)
1000 FORMAT(///' EXTIN7B : ERROR, NULL OR NEGATIVE JACOBIAN =',G14.5)
1100 FORMAT(/1X,'COORDINATES OF EXTREME POINTS '/(3G14.5))
  STOP ' EXTIN7B : ERROR, NULL OR NEGATIVE JACOBIAN'
30 CONTINUE

C
  DO 35 JN=1,3
  DO 35 IN=1,3
  GW(IN,JN)=(0.,0.)
  HW(IN,JN)=(0.,0.)
35 HS(IN,JN)=0.

C
  DO 200 IG=1,4

```

```

      G1=GI(IG)
      GC1=1.-G1
      P1=OMEI(IG)
C
      DO 100 JG=1,4
      G2=GJ(JG)*GC1
      P2=OMEJ(JG)
      F(1)=G1
      F(2)=G2
      F(3)=1.-G1-G2
C
C COMPUTE COORDINATES OF THE INTEGRATION POINTS
C
      XG=0.0
      YG=0.0
      ZG=0.0
      DO 40 I=1,3
      XG=XG+CO(I,1)*F(I)
      YG=YG+CO(I,2)*F(I)
      ZG=ZG+CO(I,3)*F(I)
40 CONTINUE
C
      CALL FUNTHEH(U,T,TS,XP,YP,ZP,ETA,XG,YG,ZG,0,TDIF)
C
      P12=P1*P2*DET
      DO 90 JN=1,3
      DO 90 IN=1,3
      GW(IN,JN)=GW(IN,JN)+U(IN,JN)*CMPLX(P12,0.)
      HW(IN,JN)=HW(IN,JN)+T(IN,JN)*CMPLX(P12,0.)
      HS(IN,JN)=HS(IN,JN)+TS(IN,JN)*P12
C
100 CONTINUE
200 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C-----
      SUBROUTINE FUNTHEH(U,T,TS,XP,YP,ZP,ETA,XG,YG,ZG,ICODE,TDIF)
C
C THIS SUBROUTINE COMPUTES THE FUNDAMENTAL SOLUTION TENSORS
C AT EACH GAUSS POINT
C U()      : DISPLACEMENT
C T()      : TRACTION
C TS()     : STATIC TRACTION
C TDIF()   : T()-TS()
C
C ICODE .LE. 0   THE COLLOCATION POINT DOES NOT BELONG TO THE ELEMENT
C ICODE .GT. 0   THE COLLOCATION POINT BELONGS TO THE ELEMENT
C
      COMPLEX   U(3,3),T(3,3),TDIF(3,3)
      COMPLEX   C7,ZP2,ZS2,AA,BB,CC,TA,TB,TC
      COMPLEX   WI,ZKP,ZKS,ZZP,ZZS,EZP,EZS,FHI,CAPPA,FHIDR,CAPPADR
      DIMENSION RD(3),ETA(1),TS(3,3)
      COMPLEX   CP,CS,GE,GEF,C1,C2,C3
      DIMENSION DELTA(3,3)
      COMMON   INI,NR,N,NP,L,CP,CS,GE,GEF,RO,XNU,FR,INP,IPR
      COMMON    C1,C2,C3,C4,C5,C6,DELTA
C
      DATA PI/3.141592654/
      DATA TOL/1.E-15/
C
      C7=CS/CP

```

```

C
R1=XG-XP
R2=YG-YP
R3=ZG-ZP
R=SQRT(R1**2+R2**2+R3**2)
RDN=(R1*ETA(1)+R2*ETA(2)+R3*ETA(3))/R
RD(1)=R1/R
RD(2)=R2/R
RD(3)=R3/R

C
WI=CMPLX(0.,FR)
ZKP=-WI/CP
ZKS=-WI/CS
ZZP=ZKP*R
ZZS=ZKS*R
EZP=CEXP(ZZP)
EZS=CEXP(ZZS)
ZP2=ZZP*ZZP
ZS2=ZZS*ZZS

C
FHI=(1.+1./ZS2-1./ZZS)*EZS/R-
@ C2*(1./ZP2-1./ZZP)*EZP/R
CAPPA=(1.+3./ZS2-3./ZZS)*EZS/R-
@ C2*(1.+3./ZP2-3./ZZP)*EZP/R
FHIDR=(-2.+ZZS+3./ZZS-3./ZS2)*EZS/R**2-
@ C2*(-1.+3./ZZP-3./ZP2)*EZP/R**2
CAPPADR=(ZZS-4.+9./ZZS-9./ZS2)*EZS/R**2-
@ C2*(ZZP-4.+9./ZZP-9./ZP2)*EZP/R**2

C
C COMPUTE TENSORS U(),T() AND TS()
C
AA=FHIDR-CAPPA/R
BB=4.*CAPPA/R-2.*CAPPADR
CC=(C1-2.)*(AA+0.5*BB-3.*CAPPA/R)-2.*CAPPA/R

C
DO 10 II=1,3
DO 10 JJ=1,3
U(JJ,II)=DELTA(JJ,II)*FHI-CAPPA*RD(II)*RD(JJ)
U(JJ,II)=U(JJ,II)*C3
T(JJ,II)=AA*(RDN*DELTA(JJ,II)+RD(II)*ETA(JJ))+
1RD(II)*RD(JJ)*RDN*BB+RD(JJ)*ETA(II)*CC
T(JJ,II)=T(JJ,II)*C4
TS(JJ,II)=RDN*(C6*DELTA(JJ,II)+3.*RD(II)*RD(JJ))+
1C6*(ETA(JJ)*RD(II)-ETA(II)*RD(JJ))
TS(JJ,II)=C5*TS(JJ,II)/R**2
10 CONTINUE

C
C WHEN ICODE .GT. 0 , COMPUTE TDIF()
C
C TDIF() IS COMPUTED FROM THE SERIES EXPANSION OF THE DIFFERENCE
C BETWEEN THE DYNAMIC AND STATIC TRACTION TENSORS.
C
IF (ICODE) 700,700,30
30 IF (CABS(FR*R/CP)-0.4) 50,50,40

C
C THE VALUES OF THE TRACTION TENSOR ARE FAR FROM BEING SINGULAR
C
40 DO 45 II=1,3
DO 45 JJ=1,3
45 TDIF(JJ,II)=T(JJ,II)-TS(JJ,II)
RETURN

C
C THE MAXIMUM VALUE OF THE FREQUENCY IS LIMITED FOR AN

```

```

C ADEQUATE CONVERGENCE OF THE SERIES
C
50 IF (CABS(FR*R/CS)-2.*PI) 55,55,56
56 STOP 'FUNTHEH : FREQUENCY TOO HIGH'
55 AA=(0.,0.)
   BB=(0.,0.)
   CC=(0.,0.)
   FACTORIAL=1.
   DO 70 NA=0,100
   IF (NA.NE.0) FACTORIAL=FACTORIAL*NA
   TA=(NA+2.*(1.+C7**(NA+4)))*ZS**NA/
1 ((NA+2.)*(NA+4.)*FACTORIAL)
   AA=AA+TA
   TTA=CABS(TA)
   ABA=CABS(AA)
   IF((TTA/ABA).LE.TOL) GO TO 100
70 CONTINUE
C
100 FACTORIAL=1.
   DO 80 NB=0,100
   IF (NB.NE.0) FACTORIAL=FACTORIAL*NB
   TB=2.*(NB-1.)*(1.-C7**(NB+4))*ZS**NB/
1 ((NB+2.)*(NB+4.)*FACTORIAL)
   BB=BB+TB
   TTB=CABS(TB)
   ABB=CABS(BB)
   IF(((TTB/ABB).LE.TOL).AND.(NB.NE.1)) GO TO 101
80 CONTINUE
C
101 FACTORIAL=1.
   DO 90 NC=0,100
   IF (NC.NE.0) FACTORIAL=FACTORIAL*NC
   TC=(-2.+(NC+4.)*C7**(NC+2)-2.*(NC+3.)*C7**(NC+4))*ZS**NC/
1 ((NC+2.)*(NC+4.)*FACTORIAL)
   CC=CC+TC
   TTC=CABS(TC)
   ABC=CABS(CC)
   IF((TTC/ABC).LE.TOL) GO TO 102
90 CONTINUE
C
102 AA=ZKS*ZKS*AA
   BB=-ZKS*ZKS*BB
   CC=ZKS*ZKS*CC
C
   DO 110 II=1,3
   DO 110 JJ=1,3
   TDIF(JJ,II)=AA*(RDN*DELTA(JJ,II)+RD(II)*ETA(JJ))+
1 RD(II)*RD(JJ)*RDN*BB+RD(JJ)*ETA(II)*CC
110 TDIF(JJ,II)=TDIF(JJ,II)*C4
C
700 RETURN
   END
C-----
   SUBROUTINE LOCIN7(GW,HW,HDIF,XM,YM,ZM,ETA,X,Y,Z,N1,N2,N3,N4)
C
C THIS SUBROUTINE COMPUTES THE VALUE OF THE DIAGONAL COEFFICIENTS OF
C THE G MATRIX BY NUMERICAL INTEGRATION.
C
   COMPLEX GW(3,3),HW(3,3),GP(3,3),HP(3,3),HDIF(3,3),HDIFP(3,3)
   DIMENSION CO(4,3),X(1),Y(1),Z(1),HS(3,3)
   COMPLEX CP,CS,GE,GEF,C1,C2,C3
   DIMENSION DELTA(3,3)

```

```

COMMON      INI, NR, N, NP, L, CP, CS, GE, GEF, RO, XNU, FR, INP, IPR
COMMON      C1, C2, C3, C4, C5, C6, DELTA
C
C NUMERICAL INTEGRATION OVER INTERNAL TRIANGLES COLAPSING THE EDGE 3-4
C OF A QUADRILATERAL
C
      CO(3,1)=XM
      CO(3,2)=YM
      CO(3,3)=ZM
      CO(4,1)=XM
      CO(4,2)=YM
      CO(4,3)=ZM
C
      DO 10 JN=1,3
      DO 10 IN=1,3
      GW(IN,JN)=(0.,0.)
      HW(IN,JN)=(0.,0.)
10 HDIF(IN,JN)=(0.,0.)
C
      DO 500 IT=1,4
C
      GO TO (20,30,40,50),IT
20 CO(1,1)=X(N1)
   CO(1,2)=Y(N1)
   CO(1,3)=Z(N1)
   CO(2,1)=X(N2)
   CO(2,2)=Y(N2)
   CO(2,3)=Z(N2)
   GO TO 60
30 CO(1,1)=X(N2)
   CO(1,2)=Y(N2)
   CO(1,3)=Z(N2)
   CO(2,1)=X(N3)
   CO(2,2)=Y(N3)
   CO(2,3)=Z(N3)
   GO TO 60
40 CO(1,1)=X(N3)
   CO(1,2)=Y(N3)
   CO(1,3)=Z(N3)
   IF(N3-N4) 42,44,42
42 CO(2,1)=X(N4)
   CO(2,2)=Y(N4)
   CO(2,3)=Z(N4)
   GO TO 60
44 CO(2,1)=X(N1)
   CO(2,2)=Y(N1)
   CO(2,3)=Z(N1)
   GO TO 60
50 IF(N3-N4) 52,500,52
52 CO(1,1)=X(N4)
   CO(1,2)=Y(N4)
   CO(1,3)=Z(N4)
   CO(2,1)=X(N1)
   CO(2,2)=Y(N1)
   CO(2,3)=Z(N1)
60 CONTINUE
C
C INTEGRATE OVER THE COLAPSED QUADRILATERAL
C
      CALL EXTIN7A(GP,HP,HDIFP,HS,CO, XM, YM, ZM, ETA, 1)
C
      DO 70 JN=1,3
      DO 70 IN=1,3

```

```

      GW(IN,JN)=GW(IN,JN)+GP(IN,JN)
      HW(IN,JN)=HW(IN,JN)+HP(IN,JN)
      70 HDIF(IN,JN)=HDIF(IN,JN)+HDIFP(IN,JN)
C
      500 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C-----
      SUBROUTINE INTER7(FI,DFI,KODE,CX,CY,CZ,X,Y,Z,DSOL,NE,CONE,
*
      IEIN,XMAT,IR,NRX)
C
C THIS SUBROUTINE COMPUTES THE VALUES OF THE DISPLACEMENT COMPONENTS
C AT INTERNAL POINTS
C
      COMPLEX FI(1),DFI(1),DSOL(1),CH,GW(3,3),HW(3,3),HDIF(3,3)
      DIMENSION XMAT(NRX,4) !RGE, RO, XNU, DAMP material por región
      DIMENSION IR(NRX,3) !EI,EF,L parámetros por región
      DIMENSION KODE(1),X(1),Y(1),Z(1),CX(1),CY(1),CZ(1)
      DIMENSION CO(4,3),ETA(3),HS(3,3)
      DIMENSION IEIN(1)
      INTEGER CONE(NE,4)
      COMPLEX CP,CS,GE,GEF,C1,C2,C3
      DIMENSION DELTA(3,3)
      COMMON INI,NR,N,NP,L,CP,CS,GE,GEF,RO,XNU,FR,INP,IPR
      COMMON C1,C2,C3,C4,C5,C6,DELTA
C
C REARRANGE FI AND DFI ARRAYS TO STORE ALL THE VALUES OF THE
C DISPLACEMENTS IN FI AND ALL THE VALUES OF THE TRACTIONS IN DFI
C
      NN=3*N
      DO 20 I=1,NN
      IF(KODE(I)) 20,10,20
      10 CH=FI(I)*GEF !si desplazamientos prescritos, las variables son tracciones
      FI(I)=DFI(I)
      DFI(I)=CH
      20 CONTINUE
C
C Por las condiciones de compatibilidad acomoda los desplazamientos
C y tracciones de los elementos de interfaz
      DO IQ=1,INI
      IEII=(IQ-1)*3
      IE= IEIN(IEII+1)
      ICF= IEIN(IEII+2)
      IEC= IEIN(IEII+3)
      IEJ=(IE-1)*3
      IECJ=(IEC-1)*3
      DO K=1,3
      IF (ICF .EQ. 2) THEN !Incluye el caso ICF=3
      FI(IEJ+K)= FI(IECJ+K) !los desplazamientos son los mismos que los
del elemento coincidente
C las tracciones calculadas en el elemento de interfase con CF 3 son
C las del elemento coincidente con CF 2.
      DFI(IECJ+K)= DFI(IEJ+K)
      DFI(IEJ+K)= -DFI(IEJ+K)
      ENDIF
      ENDDO
      ENDDO
C
C COMPUTE THE VALUES OF THE DISPLACEMENTS AT INTERNAL POINTS
C Se calcula por región

```

```

c   los desplazamientos nudos internos se guardan todos
c   en un solo vector, en orden por región
L1= 0
L2= 0
DO IREG=1,NR
c   Asigna el material de la región
RGE= XMAT (IREG, 1)
XNU= XMAT (IREG, 2)
RO= XMAT (IREG, 3)
DAM= XMAT (IREG, 4)
GE=CMPLX (RGE, RGE*2. *DAM)
CS=CSQRT (GE/RO)
CP=CS*SQRT ((2. -2. *XNU) / (1. -2. *XNU))
IEI=IR (IREG, 1)
IEF=IR (IREG, 2)
L= IR (IREG, 3)
c
L1= L2+1
L2= L1+L-1
DO K=L1*3-2, L2*3
DSOL (K) = (0., 0.)
ENDDO

DO J=IEI, IEF
N1=CONE (J, 1)
N2=CONE (J, 2)
N3=CONE (J, 3)
N4=CONE (J, 4)
A= (Y (N2) -Y (N1)) * (Z (N3) -Z (N1)) - (Z (N2) -Z (N1)) * (Y (N3) -Y (N1))
B= (Z (N2) -Z (N1)) * (X (N3) -X (N1)) - (X (N2) -X (N1)) * (Z (N3) -Z (N1))
C= (X (N2) -X (N1)) * (Y (N3) -Y (N1)) - (Y (N2) -Y (N1)) * (X (N3) -X (N1))
R=SQRT (A*A+B*B+C*C)
ETA (1) =A/R
ETA (2) =B/R
ETA (3) =C/R
CO (1, 1) =X (N1)
CO (1, 2) =Y (N1)
CO (1, 3) =Z (N1)
CO (2, 1) =X (N2)
CO (2, 2) =Y (N2)
CO (2, 3) =Z (N2)
CO (3, 1) =X (N3)
CO (3, 2) =Y (N3)
CO (3, 3) =Z (N3)
CO (4, 1) =X (N4)
CO (4, 2) =Y (N4)
CO (4, 3) =Z (N4)
JJ=3 * (J-1)
DO K=L1, L2
IF (N3.EQ.N4) THEN
C
C   TRIANGULAR ELEMENTS
CALL EXTIN7B (GW, HW, HS, CO, CX (K), CY (K), CZ (K), ETA)
ELSE
C
C   QUADRILATERAL ELEMENTS
CALL EXTIN7A (GW, HW, HDIF, HS, CO, CX (K), CY (K), CZ (K), ETA, 0)
ENDIF
c
KK=3 * (K-1)
DO IN=1, 3
DO JN=1, 3
DSOL (KK+IN) =DSOL (KK+IN) +

```

```

+           DFI (JJ+JN) *GW (IN, JN) -FI (JJ+JN) *HW (IN, JN)
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
C
  RETURN
  END
C-----
  SUBROUTINE OUTPUT7 (FI, DFI, DSOL, IR, NRX)
C
C THIS SUBROUTINE PRINTS THE VALUES OF THE DISPLACEMENTS AND
C TRACTIONS AT BOUNDARY NODES. IT ALSO PRINTS THE VALUES OF
C THE DISPLACEMENTS AT INTERNAL POINTS
C
  DIMENSION IR (NRX, 3)           !EI, EF, L           parámetros por región
  COMPLEX   FI (1), DFI (1), DSOL (1)
  COMPLEX   CP, CS, GE, GEF, C1, C2, C3
  DIMENSION DELTA (3, 3)
  COMMON    INI, NR, N, NP, L, CP, CS, GE, GEF, RO, XNU, FR, INP, IPR
  COMMON    C1, C2, C3, C4, C5, C6, DELTA
C
  WRITE (IPR, 50)
  50 FORMAT ('1', 79 ('*')) /)
C
  WRITE (IPR, 700) FR
  700 FORMAT (30X, 'FREQUENCY = ', G14.7 /)
C
  WRITE (IPR, 100)
  100 FORMAT (' ', 79 ('*')) // 1X, 'RESULTS' // 2X, 'BOUNDARY NODES' // ' ELEM',
  16X, 'DISPLACEMENT X', 11X, 'DISPLACEMENT Y', 11X, 'DISPLACEMENT Z' /)
  DO 10 I=1, N
  WRITE (IPR, 200) I, (FI (3*(I-1)+J), J=1, 3)
  10 CONTINUE
C
  WRITE (IPR, 150)
  150 FORMAT (' ELEM', 8X, 'TRACTION X', 15X, 'TRACTION Y', 15X
  1, 'TRACTION Z' /)
  DO 15 I=1, N
  WRITE (IPR, 200) I, (DFI (3*(I-1)+J), J=1, 3)
  15 CONTINUE
  200 FORMAT (I5, 3(2X, G11.4, ' ', G11.4))
C
  IF (L.LE.0) GO TO 60
  WRITE (IPR, 300)
  300 FORMAT (// 2X, 'INTERNAL POINTS' // ' POINT', 5X,
  1 'DISPLACEMENT X', 11X, 'DISPLACEMENT Y', 11X, 'DISPLACEMENT Z')
c
c Hay que hacerlo por región
c K=0
c DO IREG=1, NR
c   L= IR (IREG, 3)
c   DO I=1, L
c     WRITE (IPR, 200) K+I, (DSOL (3*(K+I-1)+J), J=1, 3)
c   ENDDO
c   K=K+L
c ENDDO
C
  60 WRITE (IPR, 500)
  500 FORMAT (' ', 79 ('*'))
C

```

```

RETURN
END
C-----
SUBROUTINE CSOLVER(A,B,N,NX)
C
COMPLEX A(NX,NX),B(NX),X,CDOT
C
C A=L*U FACTORIZATION
C
DO 30 K=1,N
K1=K-1
DO 10 I=K,N
A(I,K)=A(I,K)-CDOT(K1,A(I,1),NX,A(1,K),1)
10 CONTINUE
X=A(K,K)
IF(ABS(REAL(X))+ABS(AIMAG(X)).EQ.0.) THEN
WRITE(6,*) ' SOLVER : STOP SINGULARITY IN ROW ',K
STOP ' SOLVER : STOP SINGULARITY '
END IF
X=(1.,0.)/X
DO 20 J=K+1,N
A(K,J)=X*(A(K,J)-CDOT(K1,A(K,1),NX,A(1,J),1))
20 CONTINUE
30 CONTINUE
C
C FORWARD AND BACK SUBSTITUTION L*U*X=B
C
C SOLVE L*Y=B
C
DO 40 I=1,N
B(I)=- (CDOT((I-1),A(I,1),NX,B,1)+B(I))/A(I,I)
40 CONTINUE
C
C SOLVE U*X=Y
C
DO 50 I=N,1,-1
B(I)=- (CDOT((N-I),A(I,I+1),NX,B(I+1),1)+B(I))
50 CONTINUE
C
RETURN
END
C-----
COMPLEX FUNCTION CDOT(N,U,IUX,V,IVX)
C
C THIS FUNCTION MAKES THE COMPLEX DOT PRODUCT OF TWO VECTORS
C
COMPLEX U(1),V(1)
C
CDOT=(0.,0.)
IF(N.LE.0) RETURN
IU=1
IV=1
IF(IUX.LT.0) IU=1-(N-1)*IUX
IF(IVX.LT.0) IV=1-(N-1)*IVX
DO 10 I=1,N
CDOT=CDOT+U(IU)*V(IV)
IU=IU+IUX
IV=IV+IVX
10 CONTINUE
RETURN
C
END

```