



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMÍA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**ANALOGÍA ENTRE UN SISTEMA
TERMODINÁMICO Y UN SISTEMA ECONÓMICO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS ECONÓMICAS

(ECONOMÍA FINANCIERA)

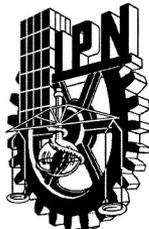
PRESENTA

REYNA SUSANA GARCÍA RUIZ



MÉXICO, DISTRITO FEDERAL.

ABRIL DE 2010



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En México D.F., siendo las **10:00** horas del día jueves **21** del mes de **enero** del año **2010**, se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la SEPI ESE-IPN, para examinar la tesis de grado titulada:

Analogía entre un sistema termodinámico y un sistema económico.

REYNA SUSANA GARCÍA RUIZ

con registro:

B	0	6	1	4	0	9
---	---	---	---	---	---	---

presentada por el alumno (a)

Maestría en Ciencias Económicas

aspirante al Grado de:

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifiestan SU APROBACIÓN DE LA TESIS, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Dr. Francisco Venegas Martínez
(Director de Tesis)

Dr. Humberto Ríos Bolívar

Dr. Miguel Flores Ortega

Dr. Salvador Cruz Aké

M.en C. Héctor Allier Campuzano

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. Gerardo Angeles Castro



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En México D. F., siendo las 10:00 horas del día 21 del mes de enero del año 2010, el (la) que suscribe REYNA SUSANA GARCÍA RUIZ alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias Económicas con número de registro B061409 adscrito a la SEPI ESE-IPN, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del Dr. Francisco Venegas Martínez y cede los derechos del trabajo intitulado Analogía entre un sistema termodinámico y un sistema económico, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección Eucalipto # 8 Colonia Vista Hermosa. Ecatepec, estado de México. (C.P. 55028) Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

M.EN C. © REYNA SUSANA GARCÍA RUIZ

Nombre y firma

Índice

Glosario	iv
Índice de tablas	vi
Índice de figuras	vi
Abreviaturas	vii
Resumen	viii
Abstract	xi
Introducción	xiv
1. Sistema termodinámico	1
1.1. La termodinámica	1
1.1.1. Leyes de la termodinámica	3
1.1.2. Energía y potenciales termodinámicos	6
1.1.3. Cambios en los potenciales	10
1.1.3.1. Cambios en energía interna	11
1.1.3.2. Cambios en entalpía	12
1.1.3.3. Cambios en entropía	14
1.1.4. Capacidades caloríficas	15
1.2. Termometría en termodinámica	17
1.3. Termodinámica estadística	20
1.4. Relación estadística-termodinámica	21
2. Sistema económico	35
2.1. Economía clásica	36
2.1.1. Fluctuaciones del nivel general de precios	46
2.1.2. Fluctuaciones de crédito	47
2.2. Economía neoclásica	48
2.3. Función de utilidad	49
2.4. Tipos de funciones de utilidad	50
3. Modelo termo-económico	53
3.1. Analogías	53
3.2. Construcción del modelo	55
3.3. Construcción de los potenciales	63
3.4. Cambios en los potenciales termo-económicos	66
3.4.1. Cambios en la utilidad	66

3.4.2.	Cambios en la entalpía económica	68
3.4.3.	Cambios en la entropía económica	69
3.5.	Calores específicos económicos	70
3.6.	Termometría en Economía	72
3.7.	Analogías para la mecánica estadística	74
Conclusiones		79
Recomendación para futuras investigaciones		81
Apéndice A.	Relaciones de Maxwell	82
Apéndice B.	Reglas de diferenciación y fórmula de Stirling	90
Bibliografía		94

Agradecimientos

A Dios, por darme una familia maravillosa de la que estoy orgullosa.

A mi madre, J. Reyna Ruiz González por ser una mujer inteligente que ha hecho un esfuerzo sobre-humano para brindarnos lo mejor, por ser la inspiración para alcanzar mis metas, y sobre todo, por ser una gran amiga y estar conmigo en todo momento.

A Gabriel García Robledo por darme la estabilidad económica y brindarme a cada instante una sonrisa que siempre llevo conmigo, y por ser un gran padre.

A mi hermano Gabriel, recuerdo aún como trabajábamos cuando regresabas de tu trabajo y me animabas a seguir con este proyecto, y por ser un ejemplo un ejemplo a seguir.

A mi hermano Daniel, por apoyarme siempre y ser paciente conmigo, se que aunque estuviera muy ocupado siempre había un espacio para mi, Te quiero mucho hermanito.

A Salvador Cruz Aké, por apoyarme en todo momento y ser el amor de mi vida. Te AMO

Todos han sido un ejemplo a seguir y me han dado la paz y el amor que me ha permitido llegar a este punto, a todos los quiero mucho.

Glosario

Calor: Energía en tránsito debido a un diferencial de temperatura entre dos sistemas, el cual siempre fluye del sistema con más alta temperatura hacia el sistema con más baja temperatura.

Entropía: Medida de un orden-desorden, cuando un sistema cambia de un estado de equilibrio a otro estado de equilibrio.

Presión: Magnitud física que mide la fuerza por unidad de superficie, y sirve para caracterizar como se aplica una determinada fuerza resultante sobre una superficie.

Proceso adiabático: Proceso en el cual el sistema (generalmente, un fluido que realiza un trabajo) no intercambia calor con su entorno. El término adiabático hace referencia a elementos que impiden la transferencia de calor con el entorno.

Procesos irreversibles: Ocurren *espontáneamente* en una dirección determinada con cambios drásticos del sistema y su entorno lo que hace imposible la reversibilidad.

Proceso isobárico: Proceso que ocurre a presión constante, en él, el calor transferido está relacionado con el resto de variables.

Proceso isocórico: Proceso en el cual el volumen permanece constante; $dV = 0$. Esto implica que el proceso no realiza trabajo presión-volumen, ya que este se define como: $dW = -PdV$, donde P es la presión (el trabajo es positivo, ya que es ejercido por el sistema).

Proceso isotérmico: Proceso en el que tiene lugar la máxima transferencia de calor, causando que la temperatura permanezca constante.

Proceso reversible: Es aquel en el que un sistema puede cambiar de un estado inicial a otro final a través de numerosas etapas de modo que la transferencia de W y Q hacia y desde el sistema sea tal que en cualquiera de las etapas sucesivas el sistema pueda retornar hacia su etapa original. Se dice que estas etapas sucesivas están en equilibrio permanente. Estos cambios son ideales porque requieren de tiempo infinito, sin embargo en la naturaleza los procesos reales ocurren a tiempos finitos.

Propiedades extensivas: Propiedades en las que su valor depende de la masa o volumen total del sistema (E, S, V, N).

Propiedades intensivas: Propiedades en las que su valor no depende de la masa o volumen total del sistema (T, P, μ).

Temperatura: Cantidad de calor retenida en un cuerpo.

Trabajo: El trabajo en termodinámica representa un intercambio de energía entre un sistema y su entorno, en donde hay desplazamiento sobre la frontera del sistema y el entorno. Dependiendo del origen físico de las fuerzas aplicadas al sistema se distinguen diferentes formas de trabajo realizado.

Variable de estado: Cantidad que es independiente de la trayectoria, ya que su variación sólo depende del estado inicial y final.

Índice de tablas

1.	Resumen de colectividades en física estadística	34
2.	Resumen de analogías entre sistemas termodinámicos y económicos	54
3.	Resumen de ecuaciones análogas en forma de Euler, sugeridas entre sistemas termodinámicos y económicos	65

Índice de figuras

1.	Espacio μ subdividido en celdas de tamaño arbitrario en energía E_i	22
2.	Aproximación de la formula de Stirling	92

Abreviaturas

Abreviatura	Palabra que en algunos casos es sustituida por una abreviatura
E	Energía
F	Energía libre de Helmholtz
G	Energía libre de Gibbs
M	Cantidad de dinero
N	Número de partículas
n	Número de bienes
P	Presión
p	Precio
Q	Calor absorbido o cedido
T	Temperatura
U	Utilidad
V	Volumen
W	Riqueza
λ	Valor del dinero
μ	Potencial químico
Ψ	Superávit

Resumen

El carácter interdisciplinario que la ciencia tiene hoy en día no es una extravagancia sino una necesidad. Cada vez es más frecuente que los investigadores requieran una opinión sobre sus ideas y reflexiones de especialistas entrenados en otras disciplinas y compartir, cuando así se pueda, las herramientas y metodologías que utilizan entre unos y otros.

Aparentemente, la física clásica podría considerarse como una ciencia lejana a la economía por la naturaleza determinista de la primera y el carácter aleatorio de la segunda. Un experimento en física clásica siempre producirá el mismo resultado en cualquier laboratorio del mundo, es decir, el experimento se puede replicar esencialmente bajo las mismas condiciones, mientras que las observaciones económicas no se pueden replicar ni mucho menos generar las mismas condiciones en las que éstas se generan. Y como consecuencia de lo anterior, se podría pensar que la física clásica y la economía neoclásica no tienen mucho que ver entre sí. No obstante, el intercambio de métodos, técnicas y modelos de otras disciplinas con la economía es cada vez mayor, esto se puede comprobar con el trabajo de numerosos autores, entrenados en muchas y muy diversas disciplinas, y sus contribuciones en revistas científicas especializadas en economía. Justo por estas razones esta tesis examinará más de cerca la relación entre la física, particularmente la termodinámica, y la teoría económica.

Es importante destacar que el concepto de entropía que se entiende como el grado de desorden de un sistema físico puede ser extendido a la noción de entropía económica o grado de desorden de un sistema económico. Un hecho fundamental es que la disipación de energía y materia que suele asociarse a la noción de pérdida y evolución hacia el desorden, se convierte, lejos del equilibrio en fuente de orden. De esta manera un agente económico puede tomar decisiones entrópicas que aumentarán el grado de desorden en el sistema económico o decisiones anentrópicas que disminuirán el grado de desorden. Un ejemplo muy ilustrativo es cuando la Secretaría de Hacienda, SH, aumenta impuestos a los ingresos en un ambiente de crisis, estaría tomando una decisión entrópica, ya que los contribuyentes afectados por esta decisión tienen muy distintos perfiles y con intereses incluso contrapuestos; por ejemplo, las empresas desearían que no hubiera un aumento de estos impuestos y los pobres y desempleados desearían que estos aumentaran para que el gobierno

tuviera más y mejores programas de asistencia social, subsanando los requerimientos financieros que tiene la SH provocada por las medidas contracíclicas.

Por lo anterior, el objetivo de la presente investigación, es proponer analogías entre sistemas económicos y termodinámicos, de tal forma que metodologías utilizadas para el estudio de sistemas de esta última, se puedan transportar como herramientas de análisis a fenómenos económicos.

En el capítulo 1 se llevó a cabo un análisis de la forma en que la termodinámica realiza el estudio de sistemas en equilibrio, y dado que ésta es una ciencia fenomenológica también se estudia la forma en la que encuentra relaciones entre las variables, obteniendo a partir de ellas ecuaciones fundamentales que describen el comportamiento del objeto de estudio. Asimismo, se hace uso de las relaciones de Maxwell, las cuales son un medio para determinar los cambios en función de variables que de acuerdo al sistema son más fáciles medir. De la termodinámica, se puede hacer referencia a la termodinámica clásica y a la termodinámica estadística. La termodinámica clásica estudia los balances de materia y energía en diferentes procesos a nivel macroscópico, ejemplo de ello, son cambios en la presión, temperatura, volumen, número de partículas, etc. La termodinámica estadística, por su parte, es un método macroscópico basado en el comportamiento promedio de grupos de partículas, es decir, a partir de consideraciones microscópicas y utilizando herramientas de la estadística junto con las leyes mecánicas se obtienen propiedades macroscópicas de la materia. Una de las variables fundamentales en los estudios microscópicos es la existencia de la entropía, considerada una medida de orden-desorden, y se puede interpretar en economía como una medida de la velocidad o flujo de dinero.

Posteriormente, en el capítulo 2 se explican algunas teorías fundamentales de la economía neoclásica, expuestas por Jevons, Walras y Menger, quienes centraron su atención en las preferencias de los consumidores y consideraban que el comportamiento agregado de los individuos describe el comportamiento macroeconómico. Dentro de sus supuestos consideraban que los consumidores son racionales, los cuales tratan de maximizar su utilidad con la información disponible, Gossen menciona, al respecto, que toda necesidad disminuye a medida que se satisface. Por su parte, Marshall desarrolló el concepto de excedente del consumidor y propuso una medida de la utilidad en función del precio.

En el capítulo 3 se construye una analogía con las variables que implican ambos sistemas, surgiendo de ellas relaciones fundamentales para el desarrollo del modelo

propuesto. Posteriormente, se establecen analogías de superávit, utilidad y riqueza definidos en economía con variables termodinámicas, basándose esta propuesta en conceptos fundamentales como: energía, entalpía, energía libre de Helmholtz y función de Gibbs, además de las ecuaciones fundamentales de Maxwell. De esta forma se pueden obtener representaciones alternativas para describir los estados de equilibrio. Por otra parte, haciendo uso de las capacidades caloríficas en termodinámica en el modelo termo-económico se plantea que el cambio en la utilidad en términos monetarios tiene un impacto sobre el bienestar. Así mismo, se plantea el cambio en la efectividad de la política pública en la función de la utilidad y la tenencia de saldos reales. También se proponen ecuaciones análogas a las de Slutsky. Por último, se propone una medida de temperatura económica en función del valor del dinero, número de bienes y tasa de interés.

Abstract

The interdisciplinary nature that science has in this days is not an extravagance but a necessity. Everyday is more frequent that researchers require an opinion on their ideas and reflections from other specialists trained in many other disciplines and sharing, when it is possible, tools and methodologies used by each other.

Apparently, classical physics could be considered a distant science from economics by the deterministic nature of the former and the random nature of the latter. An experiment in classical physics will always produce the same result in any laboratory on the world, that is, the experiment can be replicated under essentially the same conditions, while economic observations can not be replicated, much less create the same conditions in which these observations are generated. And as a consequence of the above reasons, it could be thought that classical physics and neoclassical economics have little to do with each other. However, the exchange of methods, techniques and models from other fields with economics is everyday bigger. This can be seen with the research of many authors, trained in various disciplines, and their contributions in scientific journals specialized in economics. Just for these reasons this thesis will examine more closely the relationship between physics, particularly thermodynamics and economic theory.

It is worthwhile to mention that the concept of entropy which is defined as the degree of disorder of a physical system can be extended to the notion of economic entropy or degree of disorder of an economic system. Is a fundamental fact that the energy and mass dissipation that is used to be associated with the loss and evolution towards order concept, is converted, far from equilibrium in an order source. In this way, an economic agent can make entropic decisions that will increase an economic system disorder degree or non-entropic decisions that will reduce the disorder degree. An illustrative example is when the treasury ministry increases taxes in a crisis enviroment, then it would be taking a entropic decision, since the taxpayers affected by this decision have very different profiles and can even have contrary nterests; firms would like not have a tax increase and the poor an unemployed would like to have an increase in taxes so that the government can provide more and better assistance programs.

Because the above reasons, the objective of this research is to propose analogies between economic and thermodynamic systems, so that methodologies used for the

study of the latter systems can be transported as tools of analysis to economic phenomena.

Chapter 1 provides an analysis of how that thermodynamics makes the study of equilibrium systems, and since thermodynamics is a phenomenological science, we also studied relations among variables, obtaining from them fundamental equations that describe the behavior of the object of study. Likewise, thermodynamics makes use of the Maxwell relations, which are the mean to determine changes in variables that according to the system are easier to measure. From thermodynamics can be referred to classical thermodynamics and statistical thermodynamics. The classical thermodynamics studies the material and energy balances in different processes at a macroscopic level, an example, are changes in pressure, temperature, volume, number of particles, etc. Statistical thermodynamics, by its side, is a macroscopic method, based on the average behavior of groups of particles, that is, from microscopic considerations using statistical tools with mechanical laws. One of the key variables in microscopic studies is the existence of entropy as a measure of the order-disorder of a physical system, and it can be interpreted as a measure of flow or the economic case a measure of the speed or cash flow.

Later, Chapter 2 explains some fundamental theories of neoclassical economics, given by Jevons, Walras and Menger, who focused on consumer preferences and believed that the aggregate behavior of individuals describe macroeconomic behavior. Within its assumptions they believed that consumers are rational, who try to maximize its utility subject to the available information, Gossen, in this regarding, mentioned that diminishes every need increase satisfaction. For his part, Marshall developed the concept of consumer surplus and proposed as a measure of the utility function of price.

In Chapter 3 an analogy is constructed with the variables that involve both systems, arising fundamental relations for development of the proposed model. Subsequently, economic variables such as surplus, utility, and wealth are defined as thermodynamic variables, this proposal is based on fundamental concepts such as energy, enthalpy, Helmholtz free energy, and Gibbs function, in addition to fundamental equations known as Maxwell relations. In this way it can be obtained alternative representations to describe the equilibrium states. In the other side, we will be applying heat capacities from thermodynamics in a thermo-economic model, which suggests that the utility in monetary terms has an impact on welfare. It is also studied the change of the effectiveness of public policy in terms of usefulness

and possession of real balances. Similar equations to that proposed by Slutsky are proposed. Finally, it is proposed an economic temperature measurement based on the value of money, number of goods and interest rate.

Introducción

En las últimas décadas, las fronteras en los estudios económicos rebasan los enfoques tradicionales de esta ciencia. Recientemente, muchos científicos se han dado a la tarea de investigar las relaciones entre la Física y la Economía. Cada uno de ellos se ha interesado por aspectos económicos específicos, por lo que se ha adoptado el término "Econofísica" el cual trata de la explicación de los fenómenos económicos a partir de los conocimientos de la Física, así como el conjunto de métodos que se utilizan para investigarlos, así mismo, se utiliza el término termo-Economía, que es la explicación de estos fenómenos a partir de los principios termodinámicos. Básicamente la termo-Economía analiza los sistemas desagregándolos, ya que la descomposición ayuda a encontrar como se forman los costos, como se interrelacionan los componentes y cuáles son sus verdaderas eficiencias.

Algunas relaciones que se han establecido son entre la actividad financiera y el comportamiento de las partículas, las fuerzas y las moléculas (tratados con modelos cuánticos). Otras de ellas han incorporado teoría avanzada (Econofísica), en la explicación de los sistemas complejos de la banca, patrones de comportamiento, rentabilidad por usuario, lealtad de los clientes, hábitos de consumo, sensibilidad a precios, etc. Entre las principales herramientas y teorías aplicadas son: la teoría de juegos (evolutivos, equilibrio de Nash, equilibrios estocásticos) y la Economía experimental (teorías de incitación, funciones de utilidad, entre otras).

Por otra parte, se han publicado algunos libros cuyo objetivo ha sido establecer las bases teóricas de la Econofísica, algunos de ellos son: *Introduction to Econophysics* (1999), de Mantegna, Rosario N. y Stanley, H. Eugene e; *Introducción a la Econofísica* (2003), de Ricardo Mansilla, quien es coordinador del Programa de Estudios Interdisciplinarios del Centro de Investigaciones en Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Así mismo, revistas de talla internacional que han publicado artículos en la materia, incluso algunas de ellas han designado un apartado especial en Econofísica.

Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, cuenta con un apartado en *Econophysics* y más de 1,000 artículos publicados en la materia, siendo 2 en 1996 año en que se iniciaron estas publicaciones y 110 artículos en promedio desde 2003.

Physical Review E., ha publicado 172 artículos en Econofísica desde 1999.

Brazilian Journal of Physics también ha publicado artículos en materia de Econofísica.

Physical Review Letters, ha publicado 20 artículos en Econofísica desde 1999.

Así mismo, también cada año, se realiza el "Econophysics Colloquim", enfocándose en la dinámica de los mercados financieros, llevándose a cabo desde 2005:

- ◇ "Econophysics Colloquim" 2010. Taipéi, Taiwán.
- ◇ "Econophysics Colloquim" 2009. Erice, Italia.
- ◇ "Econophysics Colloquim" 2008. Kiel, Alemania.
- ◇ "Econophysics Colloquim and beyond" 2007. Ancora, Italia.
- ◇ "Econophysics Colloquim" 2006. Tokio, Japón.
- ◇ "Econophysics Colloquim" 2005. Canberra, Australia.

A continuación se presentan algunos programas de posgrado en México y en el extranjero que cuentan con líneas de investigación en Econofísica:

Instituto Politécnico Nacional (IPN), Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM). Maestría y Doctorado en Ciencias Fisicomatemáticas, línea de investigación; Termodinámica, Física Estadística y Biofísica: Econofísica. Institución en el que un grupo de científicos se están enfocando en estudios económicos.

Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Posgrado en Dinámica no lineal y sistemas complejos, cuenta con líneas de investigación en Econofísica.

Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Posgrado en Física, entre sus materias optativas destaca: Econofísica.

Universidad Politécnica de Cataluña, Departamento de Física Aplicada. Maestría en Física Computacional y Aplicada, entre sus materias optativas: Econofísica.

Capítulo 1

Sistema Termodinámico

La Física es la ciencia que estudia las propiedades de la materia, los agentes naturales que influyen en ella sin alterar su composición, los fenómenos derivados de esta influencia y las leyes por las que se rigen. De esta, se suelen distinguir dos grandes ramas, la Física clásica y la Física moderna. La primera, abarca las disciplinas conocidas hasta principios del siglo XX, como la mecánica, la acústica, la termodinámica, la electrodinámica y la óptica. La Física moderna, por su parte, incluye como teorías fundamentales, la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad, y comprende ramas como la Física nuclear, la electrónica y la astrofísica.

La forma en que se establecen leyes reguladoras de los fenómenos es a partir de la experimentación, cuya validez siempre está expuesta al margen de error que deja la probabilidad científica, un margen variable, ya que el experimento da la medida circunstancial en que el fenómeno se produce.

Por lo anterior, la presente investigación inicia con un estudio del sistema termodinámico, a través de las ecuaciones fundamentales, las cuales fijan su atención en las propiedades de la materia cuando son afectadas por un cambio en las propiedades intensivas o extensivas, es decir desde el punto de vista macroscópico. Posteriormente, a través de la Física estadística, se establece una relación entre la naturaleza macroscópica y la entropía, la cual es proporcional al logaritmo del número total de microestados del sistema por una constante de ajuste. Este puente entre la naturaleza macroscópica y microscópica se conoce como la función de partición molecular.

1.1 Termodinámica

La termodinámica, nació en el siglo XIX como una necesidad de describir el funcionamiento de las máquinas de vapor y establecer límites a lo que éstas podían

hacer. Es así como el nombre mismo significa, potencia generada por el calor; y sus aplicaciones iniciales fueron las máquinas térmicas. Sin embargo, los principios observados como válidos para las máquinas, pronto se generalizaron en postulados, los cuales se conocen ahora como leyes de la termodinámica y postulan que la energía puede ser intercambiada entre sistemas en forma de calor o trabajo. Definiéndose el calor como la transferencia de energía a través de la frontera de un sistema, debido a la diferencia de temperatura entre el sistema y su entorno.

La termodinámica es una ciencia fenomenológica, es decir, una ciencia basada en leyes generales a partir de las cuales es posible deducir relaciones entre las propiedades y cantidades. La aplicación de esta ciencia a cualquier problema real comienza con el aislamiento de una región de espacio o de una porción finita de materia. La parte aislada (de forma imaginaria o real) sobre la cual se fija la atención se denomina sistema, y todo aquello exterior que tiene relación directa con el comportamiento de éste, se denomina entorno. Elegido el sistema, el paso siguiente es describirlo mediante magnitudes relacionadas con su comportamiento, sus interacciones con el entorno o ambas cosas a la vez.

Así mismo, la termodinámica comprende el estudio de transformaciones de energía y las relaciones entre las diferentes propiedades físicas de las sustancias que sufren esas transformaciones. Para hacer predicciones de las propiedades se analiza el comportamiento a gran escala (macroscópico) de una sustancia o se promedia estadísticamente el comportamiento de las partículas individuales que la forman.

Para poder llevar a cabo los procesos antes mencionados, se recurre a cuatro ecuaciones fundamentales representadas en términos de:

- ◇ Energía: $E = Q + W$
- ◇ Entalpía: $H = E + PV$
- ◇ Función de Helmholtz: $F = E - TS$
- ◇ Función de Gibbs: $G = H - TS$

Estas ecuaciones describen estados de equilibrio a través de propiedades intensivas o extensivas, dependiendo del grado de dificultad que presente el sistema para hacer mediciones, estas leyes serán explicadas a continuación.

1.1.1 Leyes de la termodinámica

La primera ley, mejor conocida como principio de conservación de la energía, establece que si se realiza trabajo, W , sobre un sistema o bien éste intercambia calor, Q , con otro, la energía interna, E del sistema cambiará, esto es:

$$\Delta E = Q + W \quad [1.1]$$

Una de las consecuencias importantes de [1.1] es que existe una cantidad conocida como energía interna cuyo valor está determinado por el estado del sistema. Cuando un sistema experimenta un cambio infinitesimal en un estado en el que una pequeña cantidad de energía, dE , es transferida por el calor, dQ , y se realiza una pequeña cantidad de trabajo, dW . Por lo tanto para procesos infinitesimales, es posible expresar la primera ley como

$$dE = dQ + dW$$

Considere un sistema aislado, es decir, aquel que no interactúa con su entorno. En este caso, no tiene lugar transferencia de energía por calor y el trabajo realizado sobre el sistema es cero; por lo tanto, la energía interna permanece constante. Esto es $Q = W = 0$, de ello se concluye que la energía interna, E , de un sistema aislado permanece constante.

Ahora considere el caso de un sistema (no aislado de su entorno) que se lleva a cabo a través de un proceso cíclico, es decir un proceso que se inicie y termine en el mismo estado. En este caso, el cambio en la energía interna debe ser de nuevo cero, ya que la energía, E , es una variable de estado, y por lo tanto, el calor, Q , agregada al sistema debe ser igual al negativo del trabajo, W , realizado sobre el sistema durante el ciclo. En un proceso cíclico el cambio en la energía interna está definido por:

$$\Delta E = 0 \quad y \quad Q = -W.$$

Se denomina *proceso* adiabático¹ a aquel donde se cumple que $dQ = 0$. En estos procesos el cambio en la energía estará definido como trabajo, i.e. $\Delta E = W$. En el caso de un proceso que ocurre a presión constante, (proceso isobárico), en

¹ Proceso en donde no se absorbe ni cede energía en forma de calor.

donde los valores de calor y trabajo son por lo general diferentes de cero, es posible definir el trabajo realizado como:

$$W = -P(V_f - V_i)$$

Mientras que un proceso a volumen constante se denomina proceso *isocórico*, en este, el valor del trabajo realizado es cero, porque el volumen no cambia, esto es:

$$\Delta W = Q$$

Esta expresión especifica que si se agrega energía por medio de calor a un sistema que se conserve a volumen constante, entonces toda la energía transferida permanece en el sistema como aumento de su energía interna.

En el caso de un proceso que ocurre a temperatura constante, (isotérmico), cualquier energía que entre al sistema por calor se transfiere fuera del sistema como trabajo; de tal forma que no ocurre cambio en la energía interna. De lo anterior se concluye que la energía, Q debe ser igual al negativo del trabajo realizado, esto es $Q = -W$.

La segunda ley impone restricciones para las transferencias de energía que hipotéticamente pudieran llevarse a cabo teniendo en cuenta sólo el primer principio. Explica que los procesos termodinámicos se efectúan naturalmente en una dirección, pero no en la opuesta. Por ejemplo, el calor fluye de un cuerpo caliente a uno más frío, nunca al revés. El flujo de un cuerpo frío a uno caliente no viola la primera ley, pues se conservaría la energía; sin embargo, es un fenómeno que no se presenta en la naturaleza. También es posible plantear la segunda ley en términos del concepto de entropía, que es una medida de orden-desorden, lo que significa la existencia de aleatoriedad en la posición y energía de las partículas. Aunque existen varias formas de enunciar la segunda ley, dos de ellas la exhiben de manera más directa, a saber:

Kevin-Planck: Toda transformación cíclica cuya única finalidad sea absorber calor de un cuerpo o fuente térmica a una temperatura dada y convertirlo íntegramente en trabajo, es imposible.

Clausius: Toda transformación cíclica cuya única finalidad sea transferir una cierta cantidad de calor de un cuerpo frío a uno caliente, es imposible.

Por otra parte, Carnot² demostró que una máquina térmica no puede tener un rendimiento del 100%, refiriéndose a los límites que existen al utilizar la energía en diferentes procesos, estas restricciones se establecen de acuerdo al grado de reversibilidad. Para todo proceso internamente reversible de un sistema cerrado, [1.1] puede escribirse en una base extensiva como

$$TdS = dE - dW \quad [1.2]$$

en donde el cambio en el calor es igual al producto de la temperatura por el cambio en la entropía en condiciones de equilibrio, $dQ = TdS$. Si se agrega calor, Q , durante un proceso isotérmico reversible a temperatura absoluta, T , el cambio de entropía, S , está dado por:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{dQ}{T}$$

La ecuación anterior explica que un proceso endotérmico³ implica una mayor aleatoriedad de movimiento de las partículas, por lo tanto una mayor entropía, S . De lo anterior se desprende que el cambio en la entropía, dS en un sistema cerrado se debe a dos efectos:

1. La transferencia de calor, hacia o desde el sistema, medido por dQ/T . Esta contribución al cambio en la entropía, dS se llama término de flujo de entropía.
2. La presencia de irreversibilidades dentro del sistema, recibe el nombre de término de producción de entropía, medidas por $(1/T)/(W_{\text{real}}/W_{\text{rev}})$. Esta contribución está relacionada con el trabajo mecánico, generado por variaciones en presión-volumen, (P, V) . Una variación en el volumen del sistema, indica en qué dirección será afectada la presión y por lo tanto, la entropía⁴, S .

Es importante aclarar que en el segundo punto, W_{rev} denota el trabajo que realiza el sistema en una situación ideal, esto es en un proceso reversible, $dW_{\text{real}} = W_{\text{rev}}$. Mientras que W_{real} denota al trabajo real que presenta el sistema. En caso de ser un proceso irreversible, se tiene que $dW_{\text{real}} > W_{\text{rev}}$. Lo anterior muestra que la

² Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832). Físico francés, pionero en el estudio de la termodinámica, estableció el principio que permite determinar el máximo rendimiento de una máquina térmica.

³ Proceso en el que se absorbe energía en forma de calor, por lo tanto aumenta la temperatura, ocasionando un aumento de entropía, por lo tanto, la dinámica molecular es creciente

⁴ A menor volumen, mayor presión, por lo tanto mayor entropía.

presencia de irreversibilidades reducen la producción o aumenta el consumo de trabajo, por lo que, para minimizar el trabajo necesario o maximizar la producción es necesario minimizar las irreversibilidades internas durante el proceso de un sistema cerrado.

Con respecto al trabajo, $dW = -PdV$ para una sustancia simple compresible en condiciones de equilibrio y tomando el diferencial de la energía, E se tiene que

$$dE = TdS - PdV \quad [1.3]$$

lo que implica que el cambio en la energía, dE está en función de variables extensivas, en condiciones de equilibrio.

La tercera ley indica que la entropía de una sustancia pura en el *cero absoluto*⁵ es cero. Por consiguiente, la tercera ley provee de un punto de referencia absoluto para la determinación de la entropía, denominada entropía absoluta.

La ley cero mide la concentración de la energía y es aquella que permite conocer si dos o más sistemas están en equilibrio; "Si el termómetro, identificado como el sistema C entra por separado en equilibrio térmico con los sistemas A y B e indica la misma temperatura, entonces es posible concluir que A y B están en equilibrio térmico y, por lo tanto, que tienen realmente la misma temperatura".

1.1.2. Energía y potenciales termodinámicos

Al hablar de potenciales termodinámicos se hace referencia a la energía en un sistema en equilibrio, en función no sólo de variables extensivas como se demostró con anterioridad, sino también de variables intensivas, relaciones determinadas por la energía libre de Gibbs, de Helmholtz y la entalpía. Esto se debe a que en muchos problemas pueden existir fenómenos termodinámicos para los cuales sea más fácil medir propiedades intensivas.

Para una sustancia simple compresible, en un sistema de composición fija, la función de la energía depende de dos variables extensivas e independientes, a saber, entropía, S y volumen, V . Sin embargo en un sistema abierto, de composición variable, también depende del número de partículas, N , por lo que una variación

⁵ Temperatura teórica más baja posible, en el que el nivel de energía del sistema también es el más bajo, por lo que las partículas, según la mecánica clásica, carecen de movimiento.

en el trabajo químico de una sustancia, se provoca cuando sufre un incremento o decremento en el número de partículas, N . El coeficiente de proporcionalidad, es la energía por mol de sustancia, (potencial químico) y se designa por μ . Al sustituir las condiciones de equilibrio en [1.1] y considerar un sistema abierto, se obtiene

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \quad [1.4]$$

en donde TdS representa la energía térmica, es decir, energía asociada con el movimiento aleatorio de las partículas, PdV es el trabajo mecánico y μdN trabajo químico. El trabajo químico también puede variar por un cambio en el potencial químico, μ esto depende de las condiciones del sistema y de la disponibilidad de cada partícula ante los cambios.

Habiéndose determinado la dependencia de la función de estado, E ,

$$E = E(S, V, N), \quad [1.5]$$

se hace explícito su diferencial

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V,N} dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N} dV + \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V} dN, \quad [1.6]$$

comparando los coeficientes de (1.5) y (1.6) se tiene que

$$T \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V,N}, \quad P \equiv - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N}, \quad \mu \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V}, \quad [1.7]$$

ahora se calculan las relaciones cruzadas, las cuales brindan un medio para determinar el cambio en la entropía que no puede medirse directamente (véase el apéndice B), lo que lleva a

$$- \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,N} = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,N}; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_{V,N} = \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_{S,V}; \quad - \left(\frac{\partial P}{\partial N} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{S,N}. \quad [1.8]$$

Por su parte la Entalpía⁶, H , también llamada contenido de calor, expresa una medida de la cantidad de energía absorbida o cedida por un sistema termodinámico,

⁶ Heike Kamerlingh Onnes, (1853-1926), físico francés que fue el primero quien utilizó el término de entalpía a principios del siglo XX, sin embargo el concepto tiene su origen con Émile Clapeyron y Rudolf Calusius (1850).

en otras palabras, la cantidad de energía que tal sistema puede intercambiar con su entorno, ya sea por disipación, resistencia al paso, etc. La entalpía, H , está dada por:

$$H \equiv E + PV \quad [1.9]$$

en donde el diferencial de la entalpía, H , es $dH = dE + PdV + VdP$. Sustituyéndolo en [1.4] se obtiene

$$dH = TdS + VdP + \mu dN, \quad [1.10]$$

y en la forma de Euler

$$H = H(S, P, N) = TS + VP + \mu N. \quad [1.11]$$

Repitiendo los pasos de [1.6] a [1.8] se obtienen las relaciones cruzadas para la entalpía, a saber:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{S,N}; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,P}. \quad [1.12]$$

Por su parte, la energía libre de Gibbs-Duhem⁷, G , definida como una función de estado extensiva, con unidades de energía que da la condición de equilibrio y de espontaneidad para una reacción a temperatura, T , y presión, P , constantes, representa el trabajo mínimo que tiene que hacerse sobre un sistema para efectuar un proceso y se define como

$$G \equiv H - TS \quad [1.13]$$

Tomando el diferencial de G , y sustituyendo [1.11] en [1.13] se obtiene

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN \quad \text{o} \quad -dG = SdT - VdP - \mu dN. \quad [1.14]$$

⁷ Josiah Willard Gibbs (1839-1903), físico y matemático estadounidense que contribuyó en forma destacada en la fundación teórica de la termodinámica y profundizó la teoría del cálculo vectorial; Pierre Maurice Marie Duhem (1861-1916), físico francés, profesor de Física teórica.

El signo negativo indica que el cambio de la función de Gibbs es el máximo trabajo posible que se puede obtener de un sistema que experimenta un proceso a temperatura, T , y presión, P , constantes. Por sus signos, los cambios en la función de Gibbs pueden clasificarse en:

$$\begin{aligned} \text{Proceso reversible,} & \quad dG|_{T,P,N} = 0, \text{ el sistema está en equilibrio.} \\ \text{Proceso espontáneo es posible,} & \quad dG|_{T,P,N} < 0. \\ \text{Equilibrio estable, no hay proceso} & \quad dG|_{T,P,N} > 0. \end{aligned}$$

Un proceso espontáneo significa que es un cambio que se produce irreversiblemente en una determinada dirección sin importar la velocidad con que este proceso ocurra.

Expresando la función de Gibbs-Duhem en formar de Euler:

$$G = G(T, P, N) = -ST + PV + \mu N \quad [1.15]$$

Se determinan nuevamente las relaciones cruzadas (Apéndice B), obteniendo:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right); \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right); \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right). \quad [1.16]$$

Considerando lo anterior y teniendo en cuenta que este estudio se basa en un sistema en equilibrio con proceso reversible, la función $G = G(T, P, N)$ se expresa como:

$$0 = SdT - VdP + \mu dN \quad [1.17]$$

Por último, la energía libre de Helmholtz⁸ o función de trabajo, mide la capacidad de un sistema para efectuar trabajo útil en un proceso isotérmico⁹, la cual está definida como

$$F \equiv E - TS \quad [1.18]$$

Sustituyendo [1.4] en [1.18] y considerando en un proceso reversible infinitesimal se tiene que

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN,$$

⁸ Hermann von Helmholtz (1821-1894). Medico y físico alemán, se interesó por el electromagnetismo, aunque también se interesó por temas como anatomía, psicología.

⁹ Proceso a presión constante.

en donde

$dT|_{T,V,N} = 0$ por tanto, el sistema está en equilibrio y el proceso es reversible.

Repetiendo los pasos de [1.6] a [1.8] para obtener las relaciones cruzadas de la energía libre de Helmholtz, $F = F(T, V, N)$, (véase el apéndice B), se tiene:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right); \quad -\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right); \quad -\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right). \quad [1.19]$$

Es conveniente hacer notar que la energía libre de Gibbs, G , y la energía libre de Helmholtz, F , no son equivalentes, ya que se refieren a estados de equilibrio más estables en condiciones diferentes. Esto implica que un sistema que se encuentre en un estado para el cual la energía libre de Gibbs, G , tenga su valor mínimo, no necesariamente se encuentra es su estado más estable respecto a cambios en la energía libre de Helmholtz, F , y viceversa.

A manera de resumen, se presentan las cuatro funciones fundamentales en la forma de Euler las cuales ayudarán a determinar un cambio en la entropía,

$$\begin{aligned} \text{a. } E(S, V, N) &= TS - PV + \mu N & ; \text{ donde } & -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} \\ \text{b. } H(S, P, N) &= TS + VP + \mu N & ; \text{ donde } & \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N} \\ \text{c. } G(T, P, N) &= -ST + VP + \mu N & ; \text{ donde } & \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} \\ \text{d. } F(T, V, N) &= -ST - PV + \mu N & ; \text{ donde } & \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} \end{aligned} \quad [1.20]$$

Las cuatro ecuaciones de la derecha al igual que [1.8], [1.12], [1.16] y [1.19], son las relaciones de Maxwell y ayudan a determinar relaciones entre magnitudes medibles y aquellas que no pueden medirse o lo son con mucha dificultad.

1.1.3 Cambios en los potenciales termodinámicos

Antes de establecer los cambios en los potenciales termodinámicos, es necesario definir un nuevo concepto, la capacidad calorífica, variable mediante la cual se puede

determinar los cambios de energía, E , y entalpía, H , a volumen, V , y presión, P , constante, respectivamente.

La capacidad calorífica, indica la mayor o menor dificultad que presenta un cuerpo para experimentar cambios de temperatura bajo el suministro de calor, quedando definida como

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_V \quad [1.21]$$

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_P \quad [1.22]$$

Las ecuaciones [1.21] y [1.22] determinan la cantidad de calor necesaria para elevar un grado la temperatura de una sustancia, a volumen constante [1.21] y a presión constante [1.22].

1.1.3.1 Cambios en la energía interna

Desde el punto de vista operacional, sólo es posible medir los diferenciales de las funciones termodinámicas, es decir, los valores absolutos de la energía, E , o de la entropía, S , siempre quedarán indeterminados hasta la constante aditiva. Su valor depende el estado de referencia adoptado, no siendo aplicable en algunos estudios de las propiedades de la materia. Eligiendo la ecuación de la energía $E = E(T, V)$ y tomando su diferencial se tiene que

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV, \quad [1.23]$$

sustituyendo en [1.22] en [1.23], se obtiene

$$dE = C_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV. \quad [1.24]$$

Ahora se elije la entropía como $S = S(T, V)$, de tal forma que

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV, \quad [1.25]$$

sustituyendo [1.25] en $dE = TdS - PdV$ produce

$$\begin{aligned} dE &= T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \right] - PdV \\ &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - P \right] dV. \end{aligned} \quad [1.26]$$

Igualar los coeficientes dT y dV de [1.24] y [1.26], permite concluir que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{T}, \quad y \quad [1.27a]$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - P, \quad [1.27b]$$

utilizando la tercera relación de Maxwell en [1.27b] se obtiene

$$dE = C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV. \quad [1.28]$$

Sustituyendo [1.28] en [1.24], se tiene que el cambio en la energía está dado por:

$$dE = C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV.$$

Concluyendo, el cambio en la energía interna de un sistema compresible simple asociado con un cambio de estado de (T_1, V_1) a (T_2, V_2) se determina mediante la integración de la ecuación anterior, esto es:

$$E_2 - E_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT + \int_{V_1}^{V_2} \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV, \quad [1.29]$$

despejando la capacidad calorífica a volumen constante, C_V de [1.28] se obtiene:

$$C_V = \frac{dE}{dT} - \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] \frac{dV}{dT}. \quad [1.30]$$

1.1.3.2 Cambios en la entalpía

La entalpía, H , es la cantidad de energía que un sistema termodinámico puede intercambiar con su entorno. Por ejemplo, en una reacción química a presión constante, el cambio de entalpía del sistema es el calor absorbido o desprendido en la reacción. La entalpía juega, para procesos a presión, P , constante, un análogo al de

la energía a volumen, V , constante. Como los procesos a presión, P , constante son muy comunes en química e ingeniería, el uso de la entalpía, H , está muy extendido en ambas.

La relación general para el cambio en la entalpía, dH , se determina de la misma manera que la energía interna. La entalpía es definida como $H = H(T, P)$, tomando la diferencial total, se llega a la expresión

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP, \quad [1.31]$$

sustituyendo la capacidad calorífica a presión constante [1.22], en la diferencial total de la entalpía [1.31], se tiene que

$$dH = C_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP, \quad [1.32]$$

ahora se usa la entropía como una función de la temperatura, T , y la presión, P , $S = S(T, P)$. Diferenciando se llega a:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP \quad [1.33]$$

Sustituyendo [1.33] en el diferencial de la energía $dE = TdS - PdV$, la diferencial de la entalpía toma la forma:

$$\begin{aligned} dH &= T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP \right] + V dP \\ &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T + V \right] dP \end{aligned} \quad [1.34]$$

igualando los coeficientes asociados a dT y dP de [1.32] y [1.34], se observa que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{C_P}{T} \quad [1.35a]$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T + V \quad [1.35b]$$

Utilizando las relaciones de Maxwell en [1.35b], se sigue que

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P,$$

sustituyendo en [1.32], se obtiene el cambio en la entalpía, dH , en función de conceptos medibles como la capacidad calorífica a presión constante, volumen, temperatura y presión:

$$dH = C_P dT + \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dP, \quad [1.36]$$

el cambio en la entalpía en un sistema compresible simple asociado con un cambio de estado de $(T_1, P, 1)$ a $(T_2, P, 2)$ se determina mediante la integración de [1.36], esto es:

$$H_2 - H_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT + \int_{P_1}^{P_2} \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_V \right] dP, \quad [1.37]$$

despejando la capacidad calorífica a presión constante, C_P de [1.36] se obtiene

$$C_P = \frac{dH}{dT} - \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] \frac{dP}{dT}. \quad [1.38]$$

En realidad, sólo se necesita determinar ya sea la diferencia en la energía, $E_2 - E_1$, de [1.29] o la diferencia de la entalpía, $H_2 - H_1$, de [1.37], según cuál sea más adecuada para los datos disponibles. La otra puede determinarse mediante la definición de entalpía, $H = E + PV$ dado que

$$H_2 - H_1 = E_2 - E_1 + (P_2 V_2 - P_1 V_1).$$

1.1.3.3. Cambios en la entropía

A continuación se desarrollarán dos relaciones generales para los cambios de entropía de un sistema compresible simple, utilizando las relaciones desarrolladas anteriormente. Para obtener la primera relación, se sustituye [1.27a] en [1.25], de donde se obtiene que

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV, \quad [1.37]$$

se utilizan las relaciones de Maxwell (véase el apéndice B), para obtener el diferencial en entropía, dS en términos de variables medibles, esto es

$$dS = \frac{C_v}{T}dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV, \quad [1.39]$$

y

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T}dT + \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV. \quad [1.40]$$

La segunda relación se obtiene al sustituir [1.35a] en [1.33], expresándose como

$$dS = \frac{C_P}{T}dT - \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP. \quad [1.41]$$

Nuevamente se utilizan las relaciones de Maxwell y se tiene

$$dS = \frac{C_P}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP, \quad [1.41]$$

lo cual, después de integrar, conduce a:

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_P}{T}dT + \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP. \quad [1.42]$$

Tanto [1.40], como [1.42] sirven para determinar el cambio en la entropía. La elección adecuada dependerá de lo apropiado que sean los datos a una relación particular.

1.1.4. Capacidades caloríficas C_V y C_P

Una de las cantidades más importantes que se utiliza para estudiar las propiedades termodinámicas de un sistema dado, es la capacidad calorífica, definida como la cantidad de calor necesaria para elevar un grado la temperatura de una cantidad determinada de sustancia. Para una sustancia pura, los calores específicos dependen del volumen específico o la presión, así como la temperatura. Una relación general deseable es la que implica calores específicos C_V y C_P . La ventaja de esta relación es clara, ya que sólo es necesario determinar un calor específico (casi siempre C_P) y calcular el otro mediante esta relación y los datos de presión, volumen y temperatura, $P - V - T$, de la sustancia. El inicio de este desarrollo es la igualación de las dos relaciones de cambios en la entropía, dS dadas en [1.39] y [1.41] y la resolución para cambios en la temperatura, dT .

$$\begin{aligned}\frac{C_V}{T}dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV &= \frac{C_P}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP, \\ \frac{dT}{T}(C_P - C_V) &= \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV, \\ dT &= \frac{T(\partial P/\partial T)_V}{C_P - C_V}dV + \frac{T(\partial V/\partial T)_P}{C_P - C_V}dP.\end{aligned}\quad [1.43]$$

Al elegir $T = T(V, P)$ y diferenciando, se puede expresar como

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP,$$

igualando los coeficientes de variación de volumen, dV , se convierte en

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P &= T\frac{(\partial P/\partial T)_V}{C_P - C_V} \\ C_P - C_V &= T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\end{aligned}$$

Ahora, al igualar los coeficientes de cambios en la presión, dP , se produce el mismo resultado que para cambios en volumen, dV , esto es

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V &= T\frac{(\partial V/\partial T)_P}{C_P - C_V} \\ C_P - C_V &= T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\end{aligned}\quad [1.44]$$

Una forma opcional de esta relación con la forma cíclica (véase el apéndice C), está dada como

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T &= -1 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T.\end{aligned}\quad [1.45]$$

Sustituyendo la forma cíclica [1.45] en [1.44], se obtiene que

$$C_P - C_V = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T.\quad [1.46]$$

Esta relación se expresa en términos de otras dos propiedades llamadas dilatación volumétrica (o expansibilidad), β , y compresibilidad isotérmica, α , las cuales se definen como

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad ; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = V\beta \quad [1.47]$$

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad ; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -V\alpha \quad [1.48]$$

Sustituyendo en [1.46] se sigue que

$$C_P - C_V = -\frac{VT\beta^2}{\alpha}. \quad [1.49]$$

Esta ecuación recibe el nombre de relación de Mayer. A partir de la cual se puede concluir que:

1. α es una cantidad positiva para todas las sustancias en cualquier fase, β podría ser negativa pero su cuadrado es positivo, T es, en esta relación, absoluta: $C_P \geq C_V$.
2. La diferencia entre las capacidades caloríficas C_P y C_V se aproximan a cero a medida que la temperatura se acerca a cero.
3. Los dos calores específicos son idénticos para sustancias realmente incompresibles, puesto que $V = \text{cte}$. La diferencia entre los dos calores específicos es muy pequeña y suele ignorarse para sustancias que son casi incompresibles, como líquidos y sólidos.

1.2 Termometría en termodinámica

La termometría, es la técnica usada para la medición de la temperatura en cuerpos o sistemas. En su desarrollo surgieron los termómetros cualitativos basados en la altura de una columna de fluido que esta apropiadamente calibrado en una escala de temperatura, T . La ley del gas ideal hace la determinación de la temperatura absoluta una tarea relativamente simple, pues cuando es aplicable a gases reales a baja densidad de partículas sobre volumen, N/V , y a alta temperatura absoluta, la ley del gas ideal, $PV = Nk_B T$, hace la termometría relativamente fácil (k_B es la constante de Boltzmann). Así, una medida de la presión, P , y densidad, N/V , da la temperatura, T .

Será difícil encontrar una analogía económica para el termómetro de gas ideal, puesto que la rapidez de las partículas de un gas ideal no tiene un límite superior ni inferior, mientras que un agente económico tiene valores límite para su riqueza y utilidad. Sin embargo, las sales magnéticas se comportan, para un rango limitado de temperaturas, como si ellas tuvieran solamente un número finito de niveles de energía, lo que queda como una posible línea de investigación futura.

Comúnmente la termometría envuelve lecturas de la altura de una columna de fluido o la posición de un indicador adherido a un rollo de alambre. Ambas cantidades dependen de un coeficiente de expansión térmica. Otras formas de termometría, dependen de variables dependientes de la temperatura. Para la temperatura de un cuarto esta puede ser calibrada por un termómetro basado en el gas ideal.

Para bajas temperaturas es conveniente el uso de un termómetro basado en resistencias de carbón; su resistencia eléctrica es una medida de la temperatura. En el rango de los milikelvins, las calibraciones son hechas con termómetros que usan ciertas sales magnéticas.

Por otro lado, a muy altas y muy bajas temperaturas, es difícil la realización de la termometría, por lo tanto se considerará el problema general, de cómo es posible calibrar una medición de una cantidad medida (por ejemplo la resistencia eléctrica), la cual se llamará , de nuevo en una temperatura termodinámica absoluta, T .

Hay que recalcar que $T = 0$ para todas las escalas de temperatura termodinámicas. Sin embargo, no hay una escala absoluta para la temperatura. Por iniciar (aproximadamente) en 273 grados para el punto de congelación del agua, o usando la temperatura del punto triple de un material ¹⁰puro, se determinará la escala Kelvin de temperatura T_k . En otro planeta, la escala termodinámica de temperatura debe ser diferente pero solamente por un factor de escala. Si los habitantes de otro planeta llaman al punto de congelación del agua 546 grados, debemos saber que sus temperaturas son todas dos veces más altas que la escala Kelvin.

En general, la propiedad termométrica τ depende de la temperatura, presión y número de partículas, $\tau = \tau(T, P, N)$. Para este termómetro se debe determinar la temperatura termodinámica T , como función de τ , V y N . Landau y Lifshits, consideraron un termómetro que midiera la cantidad τ dependiendo solamente de la temperatura T : $\tau = \tau(T)$.

¹⁰ Estado en el que las tres fases del agua coexisten en equilibrio, teniendo un valor de 0.01 C.

Considérese una cantidad medible, de nuevo el calor $dQ \equiv TdS$, y como varía con un cambio en la presión a temperatura, T , y número de partículas, N , fijas. Se encontrará la utilidad de emplear la siguiente relación de Maxwell (basado en la energía libre de Gibbs $G = (T, P, N) = E - TS + PV$), esto es:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} \quad [1.50]$$

A partir de [1.50] se puede escribir

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_{T,N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} = -T \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_{P,N} \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_{P,N}$$

La cual puede ser reacomodada para obtener

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_{P,N} = -\frac{(\partial V/\partial \tau)_{P,N}}{(\partial Q/\partial P)_{T,N}} \equiv f(\tau, P, N) \quad [1.51]$$

La ecuación [1.51] dice que el cambio fraccional en la temperatura puede ser expresado en términos de las cantidades medibles $f(\tau, P, N)$ y $d\tau$. En donde, el lado izquierdo está a temperatura, T , y número de partículas, N , fijos, y así explicar la notación $f(\tau, P, N)$.

Integrando [1.51] se tiene que:

$$\ln \frac{T}{T_0} = \int_{\tau_0}^{\tau} f(\tau, P, N) d\tau \quad f(\tau, P, N) = -\frac{(\partial V/\partial \tau)_{P,N}}{(\partial Q/\partial P)_{T,N}} \quad [1.52]$$

donde $dQ = TdS$. De esta forma es posible obtener la escala de temperatura, T , como $T = T(\tau, P, N)$ en términos de cantidades medibles. De la misma forma, usando un volumen, V , fijo y variando el número de partículas, N , es posible obtener la temperatura, $T(\tau, V, \mu)$ vía las relaciones de Maxwell, esto es:

$$\ln \frac{T}{T_0} = \int_{\tau_0}^{\tau} g(\tau, V, \mu) d\tau, \quad g(\tau, V, \mu) \equiv \frac{(\partial N/\partial \tau)_{\mu,V}}{(\partial Q/\partial \mu)_{T,V}}, \quad [1.53]$$

por lo que es posible concluir que hay más de una forma de obtener una escala de temperatura.

Las ecuaciones [1.52] y [1.53] deben ser consistentes una con la otra. La discusión anterior sugiere que hay al menos ocho formas de realizar termometría. A temperatura, T , fija, se medirá la dependencia de la diferencial respecto al calor,

dQ , en términos de cambios en el volumen, dV , o de cambios en la presión, dP . Mientras que, de fijar el número de partículas, N o μ , se medirá la dependencia de la diferencial en el calor, dQ en términos de la que quede libre, esto es $d\mu$ o dN . Dos pares de estas ocho medidas llevan a τ como una función de lagunas variables fijas.

1.3 Termodinámica estadística

En la última mitad del siglo XIX, gracias al trabajo de Maxwell¹¹, Clausius¹², Boltzmann¹³ y otros investigadores, se desarrolló la función de entropía en términos de parámetros microscópicos para un sistema macroscópico, todo ello basado en el uso de la mecánica cuántica y de diversas técnicas de análisis estadístico. A este enfoque microscópico de la termodinámica se le llama termodinámica estadística.

La utilidad de la termodinámica estadística consiste en ligar el comportamiento microscópico de los sistemas con su comportamiento macroscópico, de modo que, conociendo el comportamiento de uno se pueden averiguar detalles del comportamiento del otro.

Así mismo, por medio de la Física estadística es posible deducir las leyes termodinámicas que rigen el comportamiento macroscópico de un gas, ya que depende de tan sólo unas pocas variables macroscópicas (como la presión, el volumen y la temperatura). Este enfoque particular para estudiar el comportamiento de los gases se llama teoría cinética de los gases.

¹¹ James Clark Maxwell (1831-1879). Físico escocés, desarrolló la teoría electromagnética clásica. Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y hasta la luz son manifestaciones del mismo fenómeno: el campo electromagnético. Desde ese momento, todas las leyes y ecuaciones clásicas de estas disciplinas se convirtieron en casos simplificados de las ecuaciones de Maxwell. Fue una de las mentes matemáticas más claras de su tiempo, y muchos físicos lo consideran el científico del siglo XIX que más influencia tuvo sobre la Física del siglo XX.

¹² Rudolf Julius Emmanuel Clausius (1822-1888). Físico alemán que participó en la elaboración de la segunda ley de la termodinámica (1850), año en el que definió el concepto de entalpía. También dio el nombre de entropía y desarrolló el concepto en 1850.

¹³ Ludwig Edward Boltzmann (1884-1906). Físico austriaco, pionero de la Mecánica Estadística y autor de la llamada constante de Boltzmann, concepto fundamental en termodinámica.

Para predecir el comportamiento de un gas, la mecánica exigiría calcular la trayectoria exacta de cada una de las partículas que lo componen. La termodinámica, hace algo radicalmente opuesto, establece unos principios cualitativamente diferentes a los mecánicos para estudiar una serie de propiedades macroscópicas sin preguntarse en absoluto por la naturaleza real de la materia de estudio. La mecánica estadística media entre ambas aproximaciones: ignora los comportamientos individuales de las partículas, preocupándose en vez de ello por promedios. De esta se pueden calcular las propiedades termodinámicas de un gas a partir del conocimiento genérico de las moléculas que lo componen aplicando, leyes mecánicas.

Así mismo, se ha usado la Física estadística para deducir la distribución de la riqueza, así la distribución de Pareto para las rentas altas, puede ser deducida mediante la Mecánica Estadística suponiendo un estado de equilibrio estacionario para las mismas (Econofísica).

1.4 Relación estadística-termodinámica

Boltzmann parte de la idea fundamental de abandonar por completo la dinámica individual de cada molécula y concentrarse solo en la dinámica de cúmulos o grupos de moléculas. Para ello fija la atención en la dinámica instantánea del sistema a un tiempo arbitrario, y se congela en ese momento a las moléculas en el punto que ocupan en el espacio. El espacio es subdividido en pequeñas celdas a las cuales se les asigna arbitrariamente una energía ε_i , bajo la hipótesis de que las moléculas son distinguibles entre sí, se numeran arbitrariamente desde 1 hasta n .

El resultado de esta operación es que a un tiempo t en cada celda habrá una cierta población de moléculas, n_i cuya identidad es conocida (a través de sus números). Esta descripción del sistema, que es la más detallada a que se puede aspirar, se llamará microestado. En el microestado, no sólo se conoce cuantas moléculas (o puntos) están en la celda ε_i sino además cuales de ellas están en dicha celda. Claramente, cuales moléculas determinan la población de las diferentes celdas en un instante dado depende únicamente de las condiciones iniciales que son las que determinan la unicidad de las trayectorias. En otras palabras, si solo se conocen los tres atributos macroscópicos (energía, volumen y número de partículas, i.e. E , V y N) habrá una infinidad de microestados al tiempo t que sean consistentes con esta información.

Suponga que en un instante dado, existen:

- n_1 moléculas (o puntos) en la celda ε_1
- n_2 moléculas (o puntos) en la celda ε_2
- n_3 moléculas (o puntos) en la celda ε_3
- .etc.

El número total de microestados que corresponde a esta distribución (n_1, n_2, \dots, n_j) se denotará por $W_{\{n_j\}}$ y se llamará un microestado. Es decir, el número de formas es que se puede distribuir el microsistema, está dada por las combinaciones de los microestados, esto es:

$$W_{\{n_j\}} = \frac{N!}{\prod_j n_j!} \quad [1.54]$$

donde $W_{\{n_j\}}$ es el número total de microestados que se pueden obtener de la distribución $(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots)$, y N el número total de moléculas o puntos en el sistema.

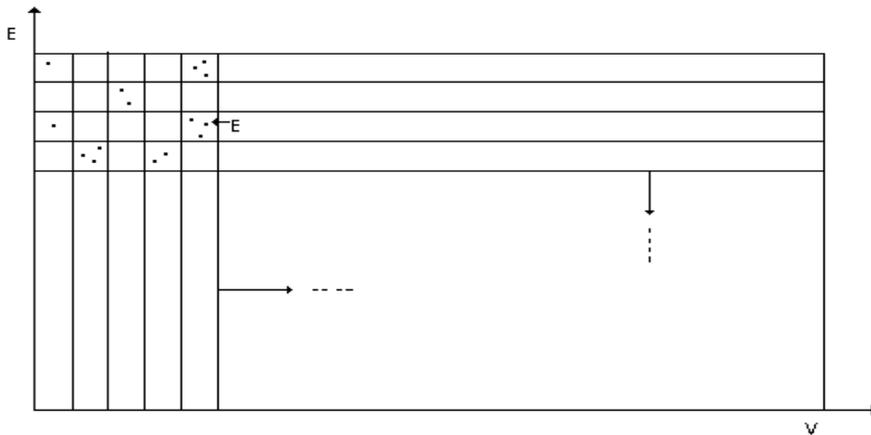


Figura 1. Espacio μ subdividido en celdas de tamaño arbitrario en energía E_i .

Es necesario aclarar que hay muchísimas distribuciones concebibles, tantas como condiciones iniciales factibles, su número total se denotará como $\Omega(N, E, V)$, y se obtiene sumando el número de microestados, $W_{\{n_j\}}$, para todas esas distribuciones.

El gran mérito de Boltzmann fue reconocer que todas esas distribuciones de puntos en celdas, las únicas relevantes son aquellas consistentes con la información

disponible al observador. En otras palabras, solo son relevantes aquellas distribuciones que obedecen a la condición de número de partículas, N , y energía, E , fijas. Todo lo cual puede resumirse en las siguientes restricciones:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_j + \cdots = \sum_i n_i = N, \quad [1.55a]$$

$$\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \cdots + \varepsilon_j n_j + \cdots = \sum_i n_i \varepsilon_i = E. \quad [1.55b]$$

Por consiguiente $\Omega(N, E, V)$ representa el número total de microestados consistentes con la información que especifica al sistema macroscópico, única controlable por el observador. Por tanto, el número total de microestados debe de cumplir con

$$\Omega(N, E, V) = \sum_{\{n_i\}} 'W_{\{n_i\}} = \sum_{\{n_i\}} ' \frac{N!}{\prod_j n_j!} \quad [1.56]$$

donde Σ' es la suma sobre todas aquellas distribuciones consistentes con [1.55a]. Nótese que es a través de ellas que aparece la dependencia del número total de microestados, Ω , con la energía, E , y el número de partículas, N . Por otro lado, la dependencia con el volumen, V , puede considerarse una dependencia geométrica que aparece a través de los valores de la energía dentro de cada celda, ε_i

La ecuación [1.56] conlleva a una hipótesis muy profunda. En efecto, al calcular el número total de microestados, $W_{\{n_j\}}$, se está suponiendo que todos los que aparecen en dicha ecuación son igualmente probables, de lo contrario, habría que multiplicar el factor numérico asociado a cada uno de ellos por una probabilidad $P_{\{n_j\}}$. La pregunta sería entonces, Qué valor se le asigna a esta probabilidad, $P_{\{n_j\}}$. Es justo en este punto donde se introducen los elementos de la estadística matemática, pues en ausencia de información que permitiese discernir entre la frecuencia relativa de estos microestados, se supondrá que todos ellos son igualmente probables, lo cual conduce al "Postulado fundamental de equiprobabilidad a priori", a saber:

"Dado un sistema aislado en equilibrio, el sistema tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de los microestados accesibles."

Este postulado afirma que un sistema en equilibrio no tiene ninguna preferencia por ninguno de los microestados disponibles para ese equilibrio. Si Ω es el número de microestados disponibles para una cierta energía, entonces la probabilidad de

encontrar el sistema en uno cualquiera de esos microestados está dada por: $P_{\{n_j\}} = 1/\Omega$.

El postulado anterior, es necesario para poder afirmar que dado un sistema en equilibrio, el estado termodinámico (macroestado) que está asociado a un mayor número de microestados es el macroestado más probable del sistema.

En resumen para cada instante t posterior al instante inicial de observación $t = 0$ habrá un número de microestados disponibles, Ω , que se determina a través de la ecuación [1.56]. Sin embargo, se supondrá que el sistema se encuentra en equilibrio, esto es, sus propiedades macroscópicas no varían con el tiempo, por lo que alguna propiedad adicional deberá tener las cantidades totales de microestados, $W_{\{n_j\}}$, para mantener el equilibrio del microestado. En efecto, puesto que estas son una medida de la frecuencia con que aparecen diferentes poblaciones, se supone que, en equilibrio, va a existir una población o distribución $(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots)$ que tendrá una frecuencia abrumadoramente mayor que cualquier otra posible y que, por lo tanto, dicha distribución es la única que va a contribuir efectivamente al valor del número de microestados disponibles, Ω . Matemáticamente esto equivale a preguntarse si para un número muy grande de partículas, N , existe un término máximo que sea el dominante de la ecuación [1.56], esto es:

$$t(n) = \frac{N!}{\prod_j n_j!} \quad [1.57]$$

El problema es entonces calcular que valores de n_i (el número de partículas por celdilla) hacen a $t(n)$ un máximo. Para pequeñas variaciones, δn_i a los números de partículas por celdilla, n_i parecería que

$$\delta t(n) = \sum_i \left(\frac{\partial t}{\partial n_i} \right)_{i \neq j} \delta n_i = 0, \quad [1.58]$$

conduce a la solución donde el número de microestados no cambia ante movimientos en el número de celdillas, $(\partial t / \partial n_i)_{i \neq j} = 0$. Pero este no es el caso pues hay dos condiciones restrictivas específicas dadas por [1.55a, b]. En efecto [1.58] está sujeta a que

$$\sum_i \delta n_i = \delta N = 0 \quad [1.59a]$$

y

$$\sum_i \varepsilon_i \delta n_i = \delta E = 0 \quad [1.59b]$$

esto es, no todas los números de partículas por celdilla, n_i son independientes.

Por lo tanto, si se tienen restricciones de la suma, se puede escoger un parámetro de tal forma que la variación resulte por conveniencia en variaciones independientes, y con ello se pueda encontrar la distribución más probable.

Para resolver el problema, se construye un lagrangeano para [1.58], con las funciones de restricción [1.59a] y [1.59b], con parámetros α y β respectivamente, siendo estos diferentes de los utilizados en las capacidades caloríficas e independientes a cualquier otra definición desarrollada anteriormente, lo que conduce a la expresión:

$$\delta t(n) = \left(\frac{\partial t}{\partial n_1} + \alpha + \beta \varepsilon_1 \right) \delta n_1 + \left(\frac{\partial t}{\partial n_2} + \alpha + \beta \varepsilon_2 \right) \delta n_2 + \dots + \left(\frac{\partial t}{\partial n_j} + \alpha + \beta \varepsilon_j \right) \delta n_j \quad [1.60]$$

Dado que se está en un óptimo, $\delta t(n) = 0$. Por lo que el miembro derecho debe anularse para un cambio, δn_i , arbitrario. Sin embargo, [1.59a] y [1.59b] pueden considerarse como dos ecuaciones que dan δn_1 y δn_2 en términos de δn_3 , δn_4 , etc.

Así se escoge α y β tales que

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial n_1} + \alpha + \beta \varepsilon_1 &= 0, \\ \frac{\partial t}{\partial n_2} + \alpha + \beta \varepsilon_2 &= 0, \end{aligned}$$

entonces el cambio en el número efectivo de estados, $\delta t = 0$, en [1.60] sólo contiene el tercer término en adelante y , , etc. son variaciones independientes luego todos los coeficientes de δn_3 , δn_4 , etc., pueden hacerse cero, esto es

$$\frac{\partial t}{\partial n_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i = 0 \quad i = 3, \dots$$

que junto con las dos ecuaciones anteriores, permite concluir que

$$\frac{\partial t}{\partial n_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i = 0, \quad i = 1, \dots \quad [1.61]$$

lo que constituye la solución del problema.

En este caso, los parámetros, α y β , son constantes desconocidas que se determinan al requerir que el número de partículas por celdilla, n_i , satisfagan a la

ecuación [1.61], obedeciendo las dos condiciones de restricción especificadas por las ecuaciones [1.55a, b]. A este resultado se le aplica a la expresión explícita para el número efectivo de microestados, $t(n)$ en [1.57] o mejor, por facilidad, su logaritmo (una transformación monotónica), para obtener

$$\ln t(n) = \ln N! - \sum_j \ln n_j!$$

De acuerdo con la aproximación de Stirling¹⁴ (véase el apéndice C) y suponiendo que el número de partículas en cada celdilla, es grande (mayor a 10), se sigue que

$$\begin{aligned} \ln t(n) &= N \ln N - N - \sum_j (n_j \ln n_j - n_j) \\ &= N \ln N - \sum_j n_j \ln n_j. \end{aligned}$$

Derivando con respecto del número de partículas en cada celdilla, n_i el óptimo toma la forma

$$\frac{d \ln t(n)}{dn_i} = -\frac{d}{dn_i} \sum_i (n_j \ln n_j - n_j) = -\sum_i \frac{d}{dn_i} (n_j \ln n_j - n_j),$$

sí $i \neq j$ entonces, por independencia, $d \ln(t)/dn_i = 0$, pero si $i = j$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d \ln t(n)}{dn_i} &= -\left(n_i \frac{d \ln n_i}{dn_i} + \ln n_i \frac{dn_i}{dn_i} \right), \\ &= -\left(n_i \frac{1}{n_i} + \ln n_i \right), \\ &= -\ln n_i - 1. \end{aligned}$$

Sustituyendo en [1.61], se sigue que

$$\ln n_i^* = \alpha + \beta \varepsilon_i + 1 \quad [1.62]$$

donde α absorbe a 1, ya que ambas son constantes, por lo tanto

$$\ln n_i^* = \alpha + \beta \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots$$

¹⁴ James Stirling (1692-1770). Matemático escocés. La fórmula de Stirling permite calcular el valor aproximado de $N!$ cuando N es muy grande, mediante la expresión: $\ln N! \approx N \ln N - N$.

donde n_i^* representa el número de partículas por celdilla buscado (óptimo), esto es, $\{n_i^*\}$ es la distribución que hace a $t(n)$ un extremal. Llamando $A = e^\alpha$, el valor óptimo se convierte en

$$\begin{aligned} n_i^* &= e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i}, \\ &= A e^{\beta \varepsilon_i}. \end{aligned} \tag{1.63}$$

que es la llamada distribución de Maxwell-Boltzmann¹⁵. En donde A es una constante y $e^{\beta \varepsilon_i}$ depende de la energía. Con esta distribución, el número de partículas por celdilla, n_i^* está en el máximo, por lo tanto, en equilibrio.

Claramente los valores del número óptimo de partículas, n_i^* están sujetos a obedecer dos restricciones, a saber:

$$\sum_i n_i^* = N$$

y

$$\sum_i n_i^* \varepsilon_i = E$$

Con respecto a este resultado, se ha visto que intentar describir al sistema a través de sus microestados, cuáles y cuantas moléculas pueden tener una energía determinada es inútil. Más aún al no poder distinguir entre un microestado y otro, se ha introducido lo que Bernoulli¹⁶ llamó el principio de la razón insuficiente. Este principio es el postulado fundamental de la mecánica estadística, a saber.

Postulado 1. "Todos los microestados distinguibles de un sistema caracterizado por su energía, volumen y número de partículas son igualmente probables."

En seguida se hizo la pregunta acerca del número de microestados que corresponden a una cierta distribución de moléculas en celdas sin importar cuales, pues

¹⁵ Distribución de un conjunto de partículas en función de los posibles valores de la energía. Esta distribución se ha aplicado especialmente a la teoría cinética de gases, y otros sistemas físicos, además en Econofísica para predecir la distribución de la renta. En realidad la Distribución Maxwell-Boltzmann es aplicable a cualquier sistema formado por N "partículas" o "individuos" que intercambian estacionariamente entre sí una cierta magnitud m y cada uno de ellos tiene una cantidad m_1 de la magnitud m a lo largo del tiempo se cumple que $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$.

¹⁶ Jakob Bernoulli (1654-1705). Matemático y científico suizo, el cual fue el primero en resolver ecuaciones diferenciales separables y pionero en la teoría de la probabilidad

todas son igualmente probables. Esto genera un macroestado que se distinguirá por $W_{\{n_i\}}$ y que contiene tantos microestados como lo indica [1.54]. Como para cada posible distribución hay un macroestado, se calcula finalmente el número total de macroestados, cuyo número ya no es general. En efecto, aquí se imponen las condiciones [1.55a, b].

Este es un paso general: de todas las posibles constantes del movimiento de Boltzmann, se intuye que las únicas relevantes para poder hacer predicciones macroscópicas sobre propiedades del sistema son la conservación de la masa ($mN = \text{const}$) y la energía, E . El resto de la información microscópica resulta totalmente innecesaria para tales fines. Así pues, el macroestado accesibles al sistema está dado por $\Omega(E, V, N)$.

Si finalmente, se asocia el concepto de equilibrio, donde las observables del sistema no varían con el tiempo, la existencia de una entre todas las posibles distribuciones o macroestados que es abrumadoramente mayor que el resto, la cual está dada por el término que hace un extremal a $t(n)$.

De acuerdo con [1.56], se obtiene

$$\Omega(E, V, N) = t(n)_{\max} = \frac{N!}{\prod_i n_i^*!}, \quad [1.64]$$

donde el número óptimo de partículas, n_i^* está dado por [1.63] y [1.55a, b].

La cuestión que surge ahora es como relacionar [1.64] con las propiedades observables del sistema. Para ello se introduce el segundo postulado de la mecánica estadística cuyas bases emanan de la segunda ley de la termodinámica y los postulados básicos de la teoría de las probabilidades.

En efecto, por una parte se sabe que para todo sistema aislado, la entropía $S = S(E_I, V, N)$ es una función de la energía interna, E_I , el volumen, V , y cualquier otra variable extensiva asociada con una restricción que caracteriza al sistema. Más aún, se sabe que para todo proceso que ocurra en el sistema aislado y cerrado ($N = \text{const}$), la entropía nunca disminuye y por consiguiente el estado de equilibrio es aquel para el cual la entropía, S , tiene un máximo consistente con dichas restricciones.

Por otra parte, se ha visto que el equilibrio de los macroestados posibles, $\Omega(E, V, N)$ contiene un mayor número de microestados del sistema compatibles con las mismas restricciones. Si se identifica la energía interna, E_I , con la energía,

E , lo cual es inmediato pues la única forma de energía en el sistema aislado es su energía mecánica, de donde se ve que tanto el número de macroestados posibles, Ω , y la entropía, S , son ambos máximos en el equilibrio y por lo tanto se antoja pensar que están relacionados entre sí. De aquí surge:

Postulado 2. "Para un sistema aislado y cerrado que se encuentre en un estado de equilibrio termodinámico, la entropía es una función de los macroestados posibles", esto es:

$$S = f(\Omega) \quad [1.65]$$

La forma de f no es difícil de adivinar. Si se tienen dos sistemas aislados e independientes cuyas entropías son S_1 y S_2 y sus correspondientes macroestados más probables son Ω_1 y Ω_2 que se unen para formar un solo sistema aislado, es evidente que

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2, \\ \Omega &= \Omega_1 + \Omega_2. \end{aligned}$$

la segunda ecuación siendo consecuencia de la naturaleza multiplicativa de la probabilidad. Entonces de acuerdo con [1.65] y estas dos condiciones de f se debe satisfacer la propiedad

$$f(\Omega_1\Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2). \quad [1.66]$$

Derivando respecto del primer microestado, Ω_1 , se tiene que

$$\Omega_2 \frac{df}{d\Omega} = \frac{df}{d\Omega_1},$$

multiplicando por Ω_1 ambos miembros, se sigue que

$$\frac{df}{d \ln \Omega} = \frac{df}{d \ln \Omega_1},$$

y si ahora se deriva respecto a Ω_2 se obtiene

$$\frac{df}{d\Omega_2} \left(\frac{df}{d \ln \Omega} \right) = 0,$$

o bien que

$$\frac{df}{d \ln \Omega} = \text{const},$$

al integrarse nuevamente toma la forma

$$f = k \ln \Omega + \Omega_0,$$

donde k y Ω_0 son constantes de integración. La condición [1.54] implica de inmediato que $\Omega_0 = 0$ y por lo tanto que¹⁷

$$S(E, V, N) = k \ln \Omega, \quad [1.67]$$

donde k ¹⁸ es llamada constante de Boltzmann. En el término de la izquierda se tiene la entropía definida en función de sus variables naturales, lo que da una información termo- dinámica completa del sistema. A la derecha se observan las configuraciones microscópicas que definen la entropía mediante esta fórmula. Además, [1.67] constituye el resultado más grandioso de la mecánica estadística para sistemas en equilibrio. La entropía de un sistema aislado y cerrado en equilibrio es proporcional al logaritmo del número total de microestados del sistema que corresponden a una distribución o macroestado que prevalece abrumadoramente sobre cualquier otra posible.

Esta relación, fue deducida por Boltzmann en 1872 y está grabada en su tumba en el panteón municipal de su ciudad natal, Viena. Los resultados inmediatos a lo que conduce son obtenidos de [1.64] y [1.67], es decir

$$\begin{aligned} S(E, V, N) &= k \ln t(n)_{\max} = k \ln \frac{N!}{\prod_i n_i^*!}, \\ &= k(N \ln N - N) - k \left(\sum_i n_i^* \ln n_i^* - n_i^* \right), \\ &= k \left(N \ln N - \sum_i n_i^* \ln n_i^* \right), \end{aligned}$$

¹⁷ Función macroscópica de la colectividad Microcanónica. Boltzmann expreso por vez primera la conexión logarítmica entre la entropía y la probabilidad.

¹⁸ Constante termodinámica obtenida experimentalmente que relaciona temperatura absoluta y energía, determinándose su valor como $k \approx 1.3806504 \times 10^{-23} J/K$.

donde se ha hecho uso de la aproximación de Stirling. Sustituyendo [1.62] en la ecuación anterior se tiene que

$$S(E, V, N) = k \left(N \ln N - \sum_i n_i^* (\alpha + \beta \varepsilon_i) \right). \quad [1.68]$$

El parámetro α se obtiene de [1.55a]. En donde

$$\sum_i n_i^* = \sum_i e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i} = N,$$

luego

$$e^\alpha = N \left(\sum_i e^{\beta \varepsilon_i} \right)^{-1},$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned} S(E, V, N) &= k \left(N \ln N - \sum_i n_i^* \left(\ln N - \ln \sum_j e^{\beta \varepsilon_j} + \beta \varepsilon_i \right) \right), \\ &= Nk \ln \sum_j e^{\beta \varepsilon_j} - k\beta E, \end{aligned} \quad [1.69]$$

donde se ha usado repetitivamente las restricciones dadas por [1.55a, b]. Puesto que se ha identificado la energía, E , con la energía interna, E_I , se tiene finalmente

$$S(E_I, V, N) + k\beta E_I = Nk \ln \sum_j e^{\beta \varepsilon_j} \quad [1.70].$$

Derivando con respecto a E_I , se obtiene

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E_I} \right)_{V,N} = -k\beta - kE_I \left(\frac{\partial \beta}{\partial E_I} \right)_{V,N} + kN \frac{\sum_j \varepsilon_j e^{\beta \varepsilon_j}}{\sum_j e^{\beta \varepsilon_j}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial E_I} \right)_{V,N}. \quad [1.71]$$

Si se introduce el valor del número de partículas óptimo, n_i^* dado en [1.63] en la restricción [1.55b] y se hace uso del valor para la constante, $A = e^\alpha$, obtenido anteriormente, se obtiene que la energía está dada por,

$$E \equiv N \frac{\sum_j \varepsilon_j e^{\beta \varepsilon_j}}{\sum_j e^{\beta \varepsilon_j}} \quad [1.72]$$

La ecuación [1.72] es el promedio aritmético de cada celdilla, ε_j , luego, la energía total del sistema está dada por la energía interna, $\langle E \rangle = E = E_I$, pues no hay otra energía y está es constante. Así, los dos últimos términos de [1.71] se cancelan y por lo tanto

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E_I} \right)_{V,N} = -k\beta = \frac{1}{T}, \quad [1.73]$$

la última igualdad sigue siendo una consecuencia directa de las leyes de la termostática. El resultado obtenido en [1.73], indica que

$$\beta = -\frac{1}{kT}, \quad [1.74]$$

que sustituida en [1.70] conduce a la expresión

$$\begin{aligned} S(E_I, V, N) + k\beta E_I &= Nk \ln \sum_j e^{\beta\varepsilon_j}, \\ S(E_I, V, N) - k\frac{1}{kT}E_I &= Nk \ln \sum_j e^{\beta\varepsilon_j}, \\ S(E_I, V, N) - \frac{1}{T}E_I &= Nk \ln \sum_j e^{\beta\varepsilon_j}, \\ TS - E &= NkT \ln \sum_j e^{\beta\varepsilon_j}. \end{aligned}$$

Recordando que la energía libre del Helmholtz, F , se define como $F = E - TS$ se llega a

$$F = -NkT \ln \sum_j e^{-\varepsilon_j/kT} \quad \text{o} \quad F = -NkT \ln \sum_j e^{\beta\varepsilon_j}. \quad [1.75]$$

Siendo la primera ecuación conocida como la función macroscópica de la Colectividad Canónica. [1.75] conjuntamente con [1.70], que expresa a la entropía, S , como una función de la energía, volumen y número de partículas, (E, V, N) , constituyen el resultado deseado, esto es, el puente mediante el cual se puede establecer una relación entre la naturaleza microscópica y la macroscópica de un sistema termodinámico. La esencia en este puente lo constituye la expresión

$$Z(T, V) \equiv \sum_j e^{\beta\varepsilon_j} \quad [1.76]$$

que se conoce como la función de partición molecular y que depende del volumen a través de los valores de las celdillas, ε_j .

Una forma intuitiva de ver esta dependencia es imaginando que se varia el volumen del sistema manteniendo la energía y el número de partículas constante. En este caso, el espacio de configuración accesible a las moléculas cambiará, lo cual se traduciría en una variación en los valores, aún arbitrarios, asignados a las celdas en el espacio μ .

Lo que es completamente cierto es que para calcular la función de partición molecular, $Z(T, V)$, se necesita especificar los valores de las energías asignadas a cada celda.

Reescribiendo [1.75], conduce a

$$F = -NkT \ln Z,$$

la función de partición molecular, Z es una magnitud que reúne las propiedades estadísticas de un sistema en equilibrio termodinámico. La energía libre de Helmholtz, representada en [1.77], representa la energía del ensemble, es decir un conjunto de macroestados. En el caso de un solo macroestado, se divide entre N , obteniendo

$$F = -kT \ln Z \quad [1.77]$$

A forma de conclusión, se puede decir que la formulación moderna de la termodinámica estadística, se basa en la descripción de sistemas físicos por un elenco de conjuntos o colectividad que representa la totalidad de configuraciones posibles y las probabilidades de realización de cada una de las configuraciones.

A cada colectividad se le asocia una función de partición que, por manipulaciones matemáticas permite extraer los valores termodinámicos del sistema. Según la relación del sistema con el resto del universo, se distinguen generalmente tres tipos de colectividades, en orden creciente de complejidad, de las cuales sólo se desarrollaron dos en esta investigación. Los tres tipos de colectividades son:

Colectividad microcanónica: Describe un sistema completamente aislado, por tanto con energía constante, no intercambia energía ni partículas con el resto del universo.

Colectividad canónica: Describe un sistema en equilibrio térmico, con un foco térmico exterior. Sólo puede intercambiar energía en forma de transferencia de calor con el exterior.

Colectividad gran-canónica: Reemplaza la colectividad canónica para sistemas abiertos que permiten el intercambio de partículas con el exterior.

TABLA 1.
RESUMEN DE COLECTIVIDADES EN FÍSICA ESTADÍSTICA

	Colectividades		
	Microcanónica	Canónica	Gran Canónica
Variables fijas	E, N, V o B	T, N, V o B	E, μ, V o B
Función microscópica	Número de microestados Ω	Fn de partición canónica $Z \equiv \sum_j e^{\beta \varepsilon_j}$	Fn de partición Gran-canónica $\Xi = \sum_j e^{-(\varepsilon_j - \mu N_j)/kT}$
Función macroscópica	$S = k_B \ln \Omega$	$F = -kT \ln Z$	$F - G = -PV$ $= -kT \ln \Xi$

García, Leopoldo y Colín Scherer, 1995, Termodinámica Estadística, México, UAM.

Capítulo 2

Sistema económico

La Economía es la ciencia social que estudia la forma en que las sociedades asignan sus recursos a la producción de los bienes y servicios que van a satisfacer sus necesidades infinitas. El estudio de la Economía puede dividirse en dos grandes campos: La Macroeconomía y la Microeconomía; en donde inicialmente se pretendía guardar cierto paralelismo a la distinción física entre el nivel macroscópico y microscópico de estudio.

El nivel macro estudia las propiedades emergentes asociadas a miles o millones de componentes autónomos en interacción, con respecto a la Economía, la Macroeconomía, es el estudio del funcionamiento de la Economía en su conjunto, tomando entre otras variables: el producto total de bienes y servicios de la economía o Producto Nacional Bruto, el precio medio de los bienes y servicios, así como los factores que lo determinan, inflación, desempleo, crecimiento, oferta monetaria y de bienes y servicios, etc.; en el caso de la Física, la termodinámica ayuda a estudiar los cambios en el sistema ante un cambio en las variables que lo definen: la presión, volumen, temperatura, entropía, etc.

Por la parte Microeconómica, se trata de describir el comportamiento de los componentes autónomos bajo las acciones a las que estaban sometidos, siendo por parte de la Economía, la Microeconomía, la cual está enfocada a la conducta de los agentes económicos individuales, principalmente de las economías domésticas, empresas, mercados e industrias específicas.

Su centro de atención son los precios y las cantidades producidas de bienes y servicios específicos a la manera en que los mercados determinan conjuntamente la distribución de los recursos escasos entre los millones de usos posibles. Con respecto a la Física, la termodinámica estadística es la rama encargada del estudio del comportamiento agregado de sistemas macroscópicos, a partir de consideraciones microscópicas, utilizando herramientas estadísticas. Entre sus aplicaciones está describir la dinámica de las partículas, posibles trayectorias, etc.

El presente capítulo inicia con la teoría neoclásica, mostrándose posteriormente el análisis microeconómico en la construcción de la función de utilidad, partiendo del supuesto de comportamiento racional, en el que los individuos gastarán su ingreso intentando obtener la máxima satisfacción posible, es decir, tratarán de maximizar su utilidad. Por su parte, los empresarios intentarán obtener el máximo beneficio posible por sobre sus costos de producción.

2.1 Economía neoclásica

A partir de la década de 1870, se produjo una ruptura con la línea del análisis económico tradicional, los economistas neoclásicos como William Stanley Jevons¹⁹ en Gran Bretaña, Léon Walras²⁰ en Suiza, y Karl Menger²¹ en Austria, imprimieron un giro a la Economía, al abandonar las limitaciones de la oferta para centrarse en la interpretación de las preferencias de los consumidores en términos psicológicos al fijarse en el estudio de la utilidad o satisfacción obtenida con la última unidad, descubrieron casi al mismo tiempo y cada uno por su lado el principio de la utilidad límite. Sin embargo, diferían de sus métodos, Jevons optó por las pruebas empíricas, Mengel se acercaba más a la lógica deductiva abstracta y por último Walras aplicó las matemáticas.

Jevons consideró que la utilidad sólo puede ser medida en términos ordinales y que la utilidad proporcionada por un bien es inversamente proporcional a la cantidad de ese bien previamente poseída. Jevons consideraba una utilidad ordinal, es decir, una ordenación lógica de las preferencias jerarquizadas entre ellas, (de la forma del silogismo), esto es:

¹⁹ William Stanley Jevons (1835-1882). Economista británico, en 1871 publicó la *Teoría de la Economía Política*.

²⁰ Léon Walras (1834-1910). Economista francés, publicó *Elementos de Economía Pura* en 1874. considerado a menudo el fundador de la Economía matemática, fue el primero en analizar y describir el equilibrio general de la competencia perfecta, para explicar cómo los precios se pueden determinar por las interacciones entre los mercados, para diversas mercancías.

²¹ Carl Menger (1840-1921). Economista austriaco, fundador de la Escuela Austriaca. 1871, *Principios de Economía*. Se abocó a estudiar los hechos relacionados con el mercado, se dio cuenta del marcado contraste existente entre las teorías tradicionales sobre los hechos que las personas de experiencia práctica consideraban decisivos para la determinación de los precios.

Si A se prefiere a B, y B se prefiere a C, por tanto A se prefiere a C. No obstante a las preferencias humanas existe la llamada utilidad cardinal que establece la lógica no ordinal siguiente: Si A se prefiere a B, y B se prefiere a C, no obstante C se prefiere a A. Desafortunadamente, muchas de las preferencias de los consumidores caen en utilidades cardinales, y es aquí donde la teoría marginalista no aporta al respectivo modelo económico para las preferencias cardinales.

Jevons estableció claramente la diferencia entre utilidad total y lo que llamó "grado final de utilidad", que después recibió el nombre de la utilidad marginal. Además afirmó que el valor del trabajo debe determinarse a partir del valor del producto y no el valor del producto a partir del valor del trabajo, contradiciendo así la teoría clásica de la tradición ricardiana y marxista. Durante su vida en Inglaterra escribió varias obras de contenido económico, en las cuales expuso los principios de la teoría marginalista, además de elaborar una hipótesis del ingreso, del interés y de la productividad del capital.

Jevons, Walras y Mengel, descubrieron que la teoría clásica del valor no llegaba a explicar satisfactoriamente los precios de las mercancías ya que existían excepciones que no podían asumirse adecuadamente. Los tres autores discutían sobre si los factores creaban el valor de los bienes finales, o si al contrario eran los bienes finales los que daban el valor a los bienes intermedios.

Los marginalistas explicaban que el valor de los factores era determinado por la utilidad marginal del bien final que se fabricaba con esos factores pero que estos a su vez no conferían valor alguno a los bienes finales. Ahora resulta sencillo decir que el error de los anteriores modelos radicaba en que el precio no depende de la utilidad total ni de la utilidad promedio sino de la utilidad marginal. Usando este concepto, es mucho más sencillo explicar las paradojas como la del agua y los diamantes de Smith, que expresa, que aunque el agua es más útil que los diamantes, estos tienen un precio más alto en el mercado, en donde la teoría de la utilidad marginal, hace un esfuerzo por resolver esta paradoja.

Entre los supuestos del enfoque neoclásico está que el comportamiento económico surge del comportamiento agregado de individuos (u otro tipo de agentes económicos) que son racionales y tratan de maximizar su utilidad o beneficio mediante elecciones basadas en la información disponible, por lo que las familias toman sus decisiones de consumo con respecto a la utilidad marginal que esperan recibir.

Al igual que los clásicos, los autores neoclásicos afirman que el mercado se

autorregula por sí mismo y que en el largo plazo, todos los mercados tienden al equilibrio. Lo que es semejante a la teoría clásica termodinámica, ya que esta estipula que en el largo plazo los sistemas tienden al equilibrio, y esto es cuando no experimenta cambios al haber sido aislado de su entorno, además el sistema es incapaz de experimentar espontáneamente algún cambio de estado cuando está sometido a determinadas condiciones que le imponen sus alrededores.

De lo anterior surge la pregunta, Qué es y cómo se determina la utilidad? Jevons, Mengel y Walras, se limitaron a dar por sentada su existencia y a delegar a los gustos y preferencias la decisión de diferenciar entre las utilidades de los bienes, dando a entender que consideraban la utilidad como un fenómeno psicológico no medible, pero que estaba en los bienes de consumo. Ahora bien, para los bienes intermedios y de intercambio se dio el concepto de utilidad adquirida.

Luego de estas concesiones, pasaron a dar por aceptado el concepto de la utilidad marginal disminuida que no es otra cosa que la idea de que conforme un bien es consumido su utilidad marginal disminuye; sin embargo esta afirmación acepta que la utilidad marginal puede medirse por lo que se supuso en sus ejemplos la mensurabilidad cardinal de la utilidad.

Walras y Jevons utilizaron funciones de utilidad continuas ya que con variaciones pequeñas en la cantidad y en la utilidad, la igualdad en las canastas de consumo continúa, no así con las curvas discontinuas donde se maximizaría pero no habría igualdad, así mismo, el primero derivó matemáticamente las ecuaciones que rigen la maximización, mientras Jevons y Menguel, con técnicas más rudimentarias, expusieron el concepto según el cual un consumidor maximiza su utilidad si gasta su ingreso de tal forma que la última unidad gastada en un bien le reditúe la misma utilidad marginal que si la hubiera gastado en cualquier otro bien. Este postulado es conocido como la segunda ley de Gossen²².

Con respecto a la primera ley, el autor explica que toda necesidad disminuye en intensidad a medida que se satisface, por lo que el principio de utilidad marginal es decreciente.

En cuanto a las funciones de utilidad que desarrollaron estos pensadores se debe decir que estaban de acuerdo pese a la diferencia en la metodología de exposi-

²² Herman Heinrich Gossen (1810-1858). Economista alemán. Utilitarista y liberal clásico, se oponía a la intervención del gobierno, especialmente en aquellos casos en que la iniciativa individual y la libre competencia bastaban como principios para la guía del orden económico.

ción. Según ellos, la utilidad que una persona recibía por el consumo de un bien, , dependía únicamente de la cantidad que de ese bien se haya consumido y no de las cantidades de otros bienes, lo que es similar al fenómeno físico de la energía, la cual está por el calor el trabajo, los cuales son propios del sistema aún si este permanece aislado.

Dado que la utilidad que un bien le produce al individuo es la causa de la demanda, entonces debe haber una relación entre las funciones de utilidad y las curvas de demanda. Solo Walras pudo solucionar este problema demostrando que el motor que mueve la demanda es la utilidad marginal, pero finalmente los tres trataron de hallar las relaciones entre la utilidad marginal, la maximización de la utilidad y el intercambio de bienes.

No se deben pasar por alto las diferencias en la concepción de causalidad de los precios, ya que Jevons y Mangler sostenían que el precio de los bienes intermedios estaba dado por la utilidad marginal de la mercancía final. La diferencia con Walras radica en que este asumió el análisis a través de un modelo de equilibrio general lo que le dió una gran ventaja en la comprensión de la causalidad que lo llevó a entender que las relaciones eran mucho más complejas.

Walras suponía que todos los mercados en los cuales un bien se demandaba u ofrecía funcionaban en el marco de la competencia perfecta, si bien su mención a este respecto no fue muy explícita. Esos mercados tenían un horario de apertura y de cierre diario durante el cual se efectuaban las transacciones de compra y venta del producto. Para dirigir esas operaciones había un árbitro que de viva voz daba los precios y cantidades para información de productores y compradores. Si en la jornada no se llegaba a un equilibrio final de igualación de la demanda y la oferta, tales transacciones eran postergadas hasta el día o días siguientes para lograr el equilibrio final general, esto es:

$$\sum_{\alpha=1_D}^N x = \sum_{\alpha=1_S}^N x.$$

Es decir que la sumatoria de los mercados $\alpha = 1$ hasta la n-ésima transacción de la demanda, D , y la oferta, S , se igualaban, para el bien x , así fuera en la jornada inicial o en las siguientes.

Walras, sabía que la formalización matemática, al aplicarse la interpretación económica, significaba que los precios de los productos eran la derivación de las

necesidades de los consumidores y a su vez, el valor de los servicios de bienes de capital y de los factores que se generaban a partir del uso productivo en la creación de los bienes de consumo, lo que emula el comportamiento del trabajo químico tal y como se explicó en la sección anterior.

Con respecto a la teoría del valor, los neoclásicos propusieron que dada una oferta, la demanda determina el precio, pero no la complementaron con la versión contrapuesta, pese a que a través de sus ejemplos pueda entenderse que tanto oferta y demanda juegan un papel fundamental. Más adelante, Jevons se retracta que el valor dependa por completo de la utilidad y demostró que con una oferta fija, (en un sistema de dos mercancías y dos agentes) los precios y las cantidades que se intercambian dependen de las utilidades marginales que ambas mercancías tengan para cada uno de los individuos. En el caso de la oferta variable, elabora la siguiente línea de causalidad.

1. La oferta está determinada por el costo de producción.
2. A su vez la oferta determina la utilidad.
3. Esta utilidad determina el valor de la mercancía.

Los tres desarrollaron el concepto de utilidad marginal (el análogo en Física sería el cambio marginal en la energía del sistema) pero Walras y Jevons aplicaron el análisis a la teoría de la empresa. Sin embargo sólo Walras fue más allá y formuló su análisis del equilibrio general, pero ninguno llega a los mercados de los factores ni desarrollaron la noción ni las aplicaciones de la productividad marginal. Esto quiere decir que por haber hecho tanto hincapié en el lado de la demanda cometieron el mismo error que los clásicos con la oferta. Esta omisión bien puede ser corregida mediante el enfoque econofísico que parte del supuesto de equilibrios en los sistemas, más aún, el enfoque termodinámico del problema puede ser una vía para dejar a un lado los equilibrios de cada individuo y concentrarse en el equilibrio de los mercados en general, es decir, utilizando los promedios de cada microestado (agente), sin importar lo que pase con cada agente, y maximizando la energía (utilidad) de todo el sistema (mercado).

Por otra parte, la optimización es la forma neoclásica de la racionalidad, en donde trata de ponderar entre distintas posibilidades y elegir entre ellas la mejor opción. La racionalidad económica, consiste en la optimización sistemática de las decisiones económicas, en donde los individuos, plantean sus objetivos y harán todo lo que este a su alcance para lograr dichos objetivos. Este concepto, fundamental

en la Economía neoclásica, tiene su símil en la Física, pues en ésta la naturaleza siempre busca optimizar el resultado del proceso analizado.

En 1988, Hayek²³ cuestionó la racionalidad al considerar el comportamiento instintivo como irracional y sugirió la existencia de una especie de racionalidad intermedia o semi-racionalidad situada, con sus propias palabras, "entre el instinto y la razón".

Cabe destacar, que las ideas de la escuela neoclásica, se encuentran vigentes en mayor proporción hoy en día y que esta teoría realiza una gran cantidad de abstracciones, entre ellas, supone que la Economía se encuentra en un estado de pleno empleo y el mercado en situación de competencia perfecta. Ambas, situaciones que en la realidad no se ven reflejadas.

Para la Economía neoclásica, la determinación de los precios del mercado, se convirtió en un problema fundamental, en donde, el análisis del funcionamiento del mercado para Marshall²⁴, empezaba con el estudio del comportamiento de los productores y los consumidores, ya que consideraba era la clave para analizar la determinación de los precios del mercado. Consideraba el concepto de demanda, como una tabla que relacionaba precio-cantidad, en donde una reducción de precio inducía a comprar más y consideraba al precio de equilibrio, como aquél que hiciera coincidir la cantidad que los compradores quieren comprar con la que los productores desean vender.

Los consumidores por su parte, tenían que tomar sus decisiones para maximizar su utilidad, ajustando de tal modo que no fuera posible aumentar su satisfacción mediante una distribución alternativa de los gastos entre diferentes bienes. Siguiendo con los símiles econofísicos, el párrafo anterior seguiría teniendo sentido si se plantea que cada punto en el sistema (celdilla) tiene que maximizar la energía (utilidad) mediante alguna distribución de cada microestado, es decir, se trata de problemas análogos.

Marshall, consideraba que en la formación de precios, influía tanto la demanda, como las condiciones en que los productores estaban dispuestos a vender sus bienes y servicios. En donde los empresarios al buscar racionalmente el máximo beneficio,

²³ Friedrich August von Hayek (1899-1992). Filósofo y economista austriaco. Es considerado padre del liberalismo moderno. Premio Nobel de Economía 1974.

²⁴ Alfred Marshall (1842-1924). Economista británico más destacado de su época. Obra principal, *Principios de Economía*, 1890. Antecesor de la Economía del bienestar.

implicarían minimizar los costos. Por lo tanto, de cualquier volumen de producción deseado que pudiera obtenerse con varias combinaciones diferentes de factores productivos, el empresario seleccionaría la combinación de más bajo costo, esto es con el mínimo gasto de energía posible.

La contribución más importante de Marshall a la teoría de la demanda, fue la formulación clara del concepto de elasticidad precio de la demanda, en el que precio y la cantidad demandada se relacionan inversamente y el grado de relación esta dado por

$$\eta_P = \frac{\Delta\% \text{cantidad demandada}}{\Delta\% \text{precio}}.$$

Sí el gasto o el ingreso total permanecieran sin cambio el coeficiente será igual a 1, sí el coeficiente es mayor a 1 se dirá que el precio es elástico y sí el coeficiente es menor a 1 entonces el precio será inelástico.

Además, planteó que los rendimientos de escala crecientes, asociados a la aplicación de tecnologías avanzadas, podían originar que un pequeño número de grandes productores podía funcionar a costos medios más bajos produciendo la misma cantidad que un gran número de pequeñas empresas, quedando en entredicho las premisas de un mercado competitivo, lo cual está fuera del alcance de la termodinámica, quedando como futura línea de investigación.

En cuanto a la utilidad, Marshall acuñó el término "excedente del consumidor" para definir la mayor utilidad que un sujeto obtiene en el intercambio de bienes. Observó que las personas rara vez deben entregar por un bien el precio que realmente estarían dispuestas a pagar por él, por lo que se produce una diferencia a su favor, que es lo que él llama excedente del consumidor.

El sobrante entre lo que las personas pagan y lo que estarían dispuestos a pagar surge por la disminución que tiene la utilidad que genera un bien en la medida que su consumo aumenta, que es lo que busca explicar el concepto de "utilidad marginal" por un bien. Por ejemplo, una botella con agua, un consumidor puede estar dispuesto a pagar veinte pesos por la primera botella que adquiere; estaría dispuesto a pagar sólo quince pesos por la segunda unidad de ese bien, y diez por la tercera (debido a que la utilidad que va generando es cada vez menor). Pero dado que los precios se fijan en el mercado de acuerdo a la utilidad marginal, dicho consumidor podrá probablemente comprar cada unidad de ese bien a un precio de

diez pesos, pagando un total de treinta, en vez de los cuarenta y cinco pesos que hubiera estado dispuesto a pagar en caso contrario. La diferencia, en este ejemplo es de $45-30=15$, es lo que Marshall llama "excedente del consumidor". De esta forma incursionó en la Economía del bienestar, ya que su objetivo principalmente, era encontrar la solución a los problemas sociales.

Para facilitar su trabajo, Marshall supuso que la utilidad era medible a través del precio, pero también señaló que la principal preocupación de la teoría de la demanda era determinar la forma de las curvas de la misma. Aceptó la utilidad marginal decreciente y formuló la condición de equilibrio que daría el máximo de utilidad a un individuo que consumiera muchas mercancías. Esto es que, en equilibrio, el consumidor gastará de modo que la última unidad monetaria gastada en cualquier bien final tenga la misma utilidad marginal que si la gastara en cualquier otro bien.

De lo anterior se desprende, que la utilidad marginal de un solo bien es igual a su precio multiplicado por la utilidad marginal del dinero. En efecto Marshall supuso que el efecto ingreso debido a pequeños cambios en la cantidad de dinero eran despreciables y no supo distinguirlo del efecto sustitución ya que no tenía las herramientas teóricas necesaria.

Sin embargo, el efecto sustitución si fue abordado por Slutsky, el cual explica, que ante una variación en el precio de un bien, se observan dos efectos: la tasa a la que puede intercambiar un bien por otro, denominado efecto-sustitución; y la variación en la cantidad demandada, provocada por una variación del poder adquisitivo, efecto-ingreso. En Física, se utiliza un concepto análogo que posteriormente se desarrollará, este es la energía libre de Helmholtz, la cual expresa los cambios en la energía (riqueza), ante cambios en las variables que definen al sistema, como son: temperatura (tasa de interés), entropía (flujo de dinero), volumen (cantidad de dinero), presión (inverso del deflactor del PIB), número de partículas (número de bienes) y potencial químico (precios).

Con respecto al efecto sustitución, se refiere a la variación que experimenta la demanda cuando varían los precios, manteniéndose el mismo nivel de utilidad. Este efecto siempre causa que el consumidor sustituya el producto que ha incrementado en precio por otro con el cual se está comparando.

Si es un bien normal (o superior) entonces el efecto renta va a reforzar el efecto sustitución. Si el bien es inferior, el efecto renta va a disminuir el efecto sustitución.

Si el efecto renta es opuesto y más fuerte que el efecto sustitución, el consumidor comprará más del bien cuando es más costoso. Este último ejemplo es generalmente aceptado como el de un bien Giffen. Haciendo un símil con la Física, esto será similar a la derivada de la energía respecto al potencial químico.

Con respecto al efecto renta, la variación de un precio, es la parte de ajuste de la cantidad demandada que depende de la variación del ingreso real. El excedente de Marshall es un medio válido para representar las ganancias en la utilidad obtenida por consumir el bien, pero dentro de los supuestos de su análisis, se encuentra una función de utilidad aditiva que ignora las relaciones de sustitución y complementariedad y que el efecto ingreso es despreciable o sea que la utilidad marginal del dinero es constante.

En cuanto a los impuestos y el bienestar, utilizó su excedente de los consumidores llegando a la conclusión que para empresas con costos constantes, los impuestos y los subsidios eran indeseables, sin embargo en el caso de una empresa con costos decrecientes los impuestos y los subsidios podían contribuir a un aumento del bienestar y la sociedad se vería beneficiada de gravar estas industrias. El motor de fondo que se quería mostrar era que los mercados libres no eran del todo eficientes y que la intervención podía acercarlos más al óptimo.

La teoría de la demanda de dinero de la escuela de Cambridge consiste en que la razón principal por la cual los individuos optan por tener una cierta fracción de su riqueza en forma de dinero era la facultad que tiene el dinero para llevar a cabo transacciones. La gente prefería mantener saldos monetarios ya que tiene la facultad de actuar como medio de pago, la existencia de costos de transacción en el intercambio y la necesidad de los agentes económicos de enfrentar contingencias de gasto. Entre mayor sea el volumen de transacciones que los individuos desean o deben realizar, mayor será la cantidad de dinero demandada por estos. Todo este razonamiento, tiene también su símil en la econofísica en la analogía del trabajo mecánico y el superávit a valor corriente explicado más adelante, incluso, al dividirlo entre la riqueza se obtendrá la velocidad del dinero.

Se creía que existía una relación estrecha y estable entre la riqueza, el nivel de transacciones y el ingreso de los individuos, lo que llevó a reformular la teoría cuantitativa, la ecuación de cambio se interpretaba como una ecuación de demanda de dinero expresada en términos de valor nominal del ingreso y no del valor de las transacciones, esto último, junto con la condición de equilibrio entre las cantidades

de dinero ofrecidas y demandadas y a los supuestos de que los valores de equilibrio de la velocidad-ingreso de circulación y del nivel de ingreso real eran relativamente constantes, daba también por resultado una teoría sobre la determinación del nivel general de los precios.

La distribución también fue tocada por los escritos de Marshall. En ellos, solucionó el problema de medir los productos marginales al calcular lo que él llamó producto neto en el margen, así que si se necesita un trabajador extra su producto neto es la adición del trabajador al ingreso total menos el costo agregado de la herramienta que usa.

Con su concepto de cuasi renta, no solo ayudó a la comprensión del funcionamiento del sistema de mercado sino que resolvió parte de la controversia entre clásicos y neoclásicos en cuanto a la línea de causa efecto de los precios. Mientras los clásicos argumentaban que los pagos de los factores de producción a excepción de la tierra determinaban los precios, Marshall proponía que los precios de los bienes finales dependían de los costos de producción en el margen debido a que no hay renta en el margen los salarios la ganancia y el interés determinaban los precios, esto es, que los precios se determinaban en el lado de la oferta. Por otra parte, para los marginalistas, los pagos de los factores de producción son determinados por el precio.

Para Marshall, ya sea que un pago del factor de producción determina el precio o que sea determinado por el precio, depende del tiempo que se considere y de la perspectiva que se asuma. Así que para la tierra, los salarios, la ganancia y el interés juegan un papel importante las elasticidades y los puntos de vista para determinar quién determina a quien y bajo qué circunstancias.

En cuanto al equilibrio, se puede diferenciar entre equilibrio estable e inestable pero lo más curioso es que Marshall, a diferencia de Walras, tomó como variable independiente la cantidad y no los precios con lo que él decía que los ajustes se darían a través de la oferta que se pusiera en el mercado y que el precio dependía de esta. Los conceptos de estable e inestable dependen de que los puntos de equilibrio bajo presiones que cambien este estado regresen o no a la posición de equilibrio o en un caso más especial se crea otro equilibrio. Este análisis es similar al realizado en Física cuando se aplica una fuerza externa al sistema original y se obtienen nuevos equilibrios los cuales son permanentes en función a la reversibilidad del proceso. Aunque en este trabajo, dado el enfoque termodinámico, el estudio se centrará en las cualidades macroscópicas del sistema y su equilibrio.

Pero no importa cómo se tome, es importante entender que las conclusiones son las mismas cuando la curva de demanda es descendente y la de oferta ascendente. No es lo mismo cuando la curva de oferta se sesga hacia abajo y a la derecha la estabilidad del equilibrio dependerá de los sesgos relativos de las curvas de oferta y demanda y de los supuestos de comportamiento utilizados.

Las sugerencias de Marshall en cuanto a política económica de empleo y depresión estaban inscritas en los pensamientos de J.S. Mill²⁵, primero sugirió que había que controlar los mercados para que el crédito no se expanda excesivamente en periodos de confianza empresarial, y la segunda cuando la recesión ocurre los gobiernos pueden ayudar a restaurar la confianza empresarial al garantizar a las empresas contra el riesgo.

Por lo anterior, Marshall destaca dos problemas: las fluctuaciones del nivel general de precios, y las fluctuaciones en el crédito.

2.1.1 Fluctuaciones del nivel general de precios

Para que el dinero desempeñe eficientemente las funciones de: facilitar las transacciones comerciales, ser un medio de cambio claramente definido, fácilmente transable y disponible; además de aceptado de forma general, medida de valor o patrón de pagos diferidos, la estabilidad de es una condición indispensable.

La inestabilidad del valor de la moneda influye en la determinación de los valores nominales de tipos de interés y de sueldos y salarios, afectando el bienestar económico del país, y especialmente, el bienestar de las clases trabajadoras. De esta forma, cuando la economía se enfrenta ante una situación cíclica de aumento en el nivel general de precios (con una caída de salarios reales), se pueden observar efectos de importancia sobre el empleo y la actividad a corto o medio plazo. Como resultado de tales ideas, Marshall defendió la estabilidad de precios frente a tendencias seculares crecientes o decrecientes en el nivel general de precios, si esto no era posible, recomendaba que se tratase de evitar que las fluctuaciones del nivel general de precios tuviesen consecuencias reales.

Haciendo uso del herramental teórico desarrollado en la Física (específicamente en la termodinámica) para comprender el efecto de un cambio en los precios sobre

²⁵ John Stuart Mill, (1806-1873). Economista inglés. En 1863 publicó *El utilitarismo*. Representante de la escuela económica clásica.

toda la economía, se propone usar; de nuevo; la analogía entre el potencial químico, μ , y el nivel de precios, p . Básicamente se propone obtener la derivada del potencial químico a través del tiempo (como un mero ejercicio teórico) para simular la inflación, calculando después sus efectos sobre el sistema en su conjunto.

El ejercicio puede ser planteado desde un aumento en la masa monetaria, M , la cual tiene su contraparte termodinámica en el volumen, V , donde un aumento en la masa monetaria (volumen) provocará una caída en la utilidad (energía) del sistema tal y como lo indica [1.23]. Si se desea hacer un puente al nivel de precios, será necesario definir el cambio en el potencial químico ante un cambio en el volumen, $\frac{d\mu}{dV}$, lo cual puede ser visto como un cambio en el nivel de precios ante un cambio en la masa monetaria, $\frac{dP}{dM}$. Todo ello recordando que el potencial químico está definido como el cambio en la energía del sistema ante un cambio en el número de partículas manteniendo la entropía y volumen constantes, es decir $\left(\frac{\partial E}{\partial n_i}\right)_{S,V}$. Este tratamiento tiene la ventaja de estar más estudiado en la literatura además de permitir varios enfoques al tratamiento de la inflación pues de mantener el potencial químico, μ , constante se plantea una economía donde la demanda agregada no ha cubierto toda la oferta agregada, mientras que de permitirse un cambio en el potencial químico, se estará planteando una economía sensible a la política monetaria. Todo este análisis será tratado en secciones subsecuentes del trabajo.

2.1.2 Fluctuaciones del crédito

Mill planteaba la importancia del crédito en la economía al percatarse de que el dinero dota de fluidez al capital real, teniendo una repercusión sobre el tipo de interés, aunque solo sea a corto plazo, generando procesos de prosperidad y depresión.

Este autor intuyó que un denominador común de las fluctuaciones económicas, es que: en la fase ascendente, el crédito ha sido otorgado un tanto temerariamente, e incluso a hombres cuya aptitud para los negocios no está probada. Cuando la actividad se encuentra animada y se realizan beneficios con facilidad, cualquiera -sin conocimiento o capacidad especiales para los negocios- puede sacar buen provecho de las transacciones que realice, por lo que las transacciones especulativas crecen por doquier.

Una vez que la demanda de productos industriales, y otros en general, aumenta en gran escala, se instala un proceso acumulativo de expansión del crédito, alzas de

precios, aumentos de beneficios y salarios, lo que hace crecer la demanda de préstamos y por tanto la tasa de interés, lo cual actúa como señal para los prestamistas. Aparece en ese momento la desconfianza y aquellos que han prestado llegan a anhelar su propia seguridad, y rehúsan renovar sus préstamos.

Algunos especuladores tienen que vender bienes con el fin de pagar sus deudas, lo que frena el alza de los precios. Esta restricción inquieta a los otros especuladores, y muchos se lanzan precipitadamente a vender, ya que los individuos que mantienen sus negocios sobre la base del crédito no pueden retener por mucho tiempo sus mercancías, pues podrían llegar a arruinarse. El fracaso y la quiebra de unos especuladores precipita el de otros muchos, que pudieran ser en realidad solventes, sin embargo, la causa real de la crisis no debe buscarse en esas pequeñas quiebras, sino en la poca solidez de la base sobre la que se dejó una gran cantidad de crédito, es decir, se crea una corrida financiera, la cual es un fenómeno que ha sido estudiado a través de la perspectiva de la Econofísica, pero que será dejado de lado en este trabajo.

2.2 Economía neoclásica

Las preferencias de un consumidor son descritas por la función de utilidad, la cuál es un instrumento para asignar un número a todas las cestas de consumo posibles de tal forma que las que se prefieren tengan un número más alto que las que no se prefieren. La única propiedad importante de una asignación de utilidad es la forma en que se ordena la cesta de bienes, los cuales se clasifican a continuación.

Uno de sus postulados esenciales es que el comportamiento del individuo se caracteriza por la racionalidad individual; en donde cada una de las unidades básicas es movida sólo por el deseo de maximizar su placer o su beneficio, habida cuenta de sus recursos disponibles. Para lograr tal objetivo, los individuos -es decir, las unidades básicas de la economía- procurarán efectuar intercambios tanto para el consumo como para la producción.

De esta manera, la teoría del consumidor supone que los consumidores eligen entre las mejores cestas de bienes que están a su alcance, denominadas como cestas de consumo, de la cual se desprende la idea de preferencia y las siguientes características:

\succ *Se prefiere estrictamente a.* El consumidor elegirá la cesta que prefiere si tiene la oportunidad de hacerlo.

\sim *Indiferente.* Cualquiera de las dos cestas dejaría satisfecho al consumidor por igual.

\succeq *Prefiere débilmente.*

Del lo anterior, se desprende que el problema del consumidor podría considerarse como el problema matemático de maximizar su función de utilidad, dentro del conjunto representado matemáticamente por todas las canastas de bienes (vectores) que cumplieran con la restricción presupuestaria

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$$

donde p_1 y p_2 , son los precios del bien 1 y 2, respectivamente, mientras que x_1 y x_2 , representan la cantidad del bien 1 y 2, dejando a m como ingreso disponible. En este caso, la función de utilidad es puramente ordinal, esto es, sirve para ordenar canastas, pero no para decir cuanto es mejor una canasta que otra (cardinal).

2.3 Función de utilidad

La utilidad es una forma de describir las preferencias del consumidor en base a sus elecciones. En lo que a elección se refiere es si una cesta tiene mayor utilidad que otra. La magnitud de la diferencia de utilidad entre dos canastas de consumo cualesquiera no importa. Pueden usarse distintas funciones de utilidad para representar las preferencias, todo dependiendo de las características del o los bienes.

Funciones de utilidad más utilizadas:

1. $U(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ x_1 y x_2 son bienes sustitutos $\alpha > 0$
y $\beta > 0$
2. $U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$ x_1 y x_2 son bienes complementarios $\alpha > 0$
y $\beta > 0$
3. $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ Función Cobb-Douglas $\alpha > 0$ y
 $\beta > 0$

Hay otros tipos de funciones:

4. $U(x_1, x_2) = x_1 + v(x_2)$ $v(x_2)$ función no lineal (cuasilineal)
5. $U(x_1, x_2) = x_1$ El bien 2 es neutral

6. $U(x_1, x_2) = x_2$ El bien 1 es neutral
 7. $U(x_1, x_2) = \max\{\alpha x_1, \beta x_2\}$ Preferencias cóncavas $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

A las representaciones gráficas de estas funciones de utilidad, se les conoce como curvas de indiferencia, las cuales no pueden cortarse pues eso supondría una inconsistencia en las preferencias del consumidor (véase la introducción a la Microeconomía de Varian).

A medida que se alejan del origen representan mayores niveles de utilidad, es decir contienen canastas de consumo más preferidas y a través de la curva todas las canastas representan la misma utilidad.

Dada la ordinalidad de las funciones, es posible realizar transformaciones monótonas de estas para realizar inferencias y optimizaciones sobre ellas. Se define como transformación monótona a una operación que transforma una serie de números de tal manera que se mantenga el orden de estos. Esta es representada mediante la función $f(u)$ y tiene el efecto de cambiar cada número u por algún otro número $f(u)$, de tal manera que si $u_1 > u_2$ entonces $f(u_1) > f(u_2)$.

Ejemplos de transformación monótona son la multiplicación por un número positivo $f(u) = 3u$, la suma $f(u) = u + 2$, la potencia impar $f(u) = u^3$, la tasa de variación $\frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$, etc. En el caso de transformaciones monótonas siempre tienen el mismo signo que las utilidades.

Una forma de construir la función de utilidad a partir de las curvas de indiferencia, consiste en que las curvas más altas tengan números más altos, una forma sencilla de hacerlo consiste en trazar una diagonal y etiquetar cada curva de indiferencia en función de su distancia desde el origen, medida a lo largo de la diagonal. No es difícil ver que si las preferencias son monótonas, la recta que pasa por el origen debe cortar todas las curvas de indiferencia exactamente una vez. Las curvas de indiferencia más elevadas reciben utilidades más altas.

2.4 Tipos de funciones de utilidad

$U(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 - 2$ (sustitutos perfectos) en donde α y β miden el valor que tienen los bienes 1 y 2 para el consumidor. Se dice que dos bienes son sustitutos

perfectos si el consumidor está dispuesto a sustituir un bien por otro a una tasa constante. Una característica importante de los sustitutos perfectos reside en que las curvas de indiferencia tienen una pendiente constante (Ej. Lápices de color rojo y azul, al consumidor solo le interesa el número de lápices). Se caracteriza porque la RMS²⁶ es constante e igual a -1.

En el caso del ejemplo, si $x_1 \sim x_2$, es posible adoptar la función $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, pero si el consumidor está dispuesto a sustituir el bien 2 por el 1, renunciando a dos unidades del 2, la función adoptaría la forma $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$.

$$U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\} \text{ (complementos perfectos)}$$

α y β son números positivos que indican las proporciones que se consume de cada bien. Son bienes que siempre se consumen juntos en proporciones fijas, los bienes se complementan en cierto sentido (Ej. Zapato del pie derecho y del pie izquierdo $(10, 10) \sim (11, 10)$). Las curvas de indiferencia tienen la forma de L, cuyo vértice se encuentra en el punto en el que el número de zapatos del pie izquierdo es igual al derecho. La característica más importante de los complementarios perfectos radica en que el consumidor prefiere consumir los bienes en proporciones fijas (no necesariamente la proporción es 1-1). En este caso la RMS no es más que cero o infinita.

En el ejemplo de los zapatos, el número de pares completos de los zapatos con que se cuenta, es el mínimo del número de zapatos del pie derecho y del pie izquierdo que se tenga. Tenemos una cesta inicial $(10, 10)$ si añadimos una unidad más del bien 1 se obtiene $(11, 10)$, que debería estar situada en la misma curva de indiferencia. $\{10, 10\} = \min\{11, 10\} = 10$. En el caso de un consumidor que siempre consume 2 cucharadas de azúcar por una de té, si x_1 es el número de tasa de té y x_2 es el número de cucharadas de azúcar. Si $x_1 = 2x_2$, entonces $x_2 = 1/2x_1$, por lo que el número de tasas correctamente azucaradas será $\min\{x_1, 1/2x_2\}$.

$$U(x_1, x_2) = x_1 + v(x_2) \text{ (preferencias cuasilineales)}$$

Es una utilidad representada por traslaciones verticales de las curvas de indiferencia, en donde k es una constante diferente para cada curva. Esta ecuación afirma que la altura de cada curva de indiferencia es una función de $x_1 + v(x_2)$ más una constante k . En este caso la función de utilidad es lineal al bien uno pero

²⁶ Relación Marginal de Sustitución, es el número de unidades de un bien a las que está dispuesto a renunciar un consumidor a cambio de una unidad adicional del otro bien, manteniendo constante el nivel de utilidad.

no en el bien dos; de ahí el nombre de utilidad cuasilineal, que significa utilidad "parcialmente lineal". i.e. $U(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$ o $U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$.

$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ Preferencias Cobb-Douglas

Aquí α y β son números positivos que describen las preferencias del consumidor. Las curvas de indiferencia Cobb-Douglas con transformaciones monótonas, representan las mismas preferencias. Tomando el logaritmo natural de la utilidad, el producto de los términos se convierte en una suma, por lo que se tendrá $U(x_1, x_2) = \ln(x_1^\alpha x_2^\beta) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$

Capítulo 3

Modelo termo-económico

En el presente capítulo se desarrolla un modelo económico con metodologías de estudio de la termodinámica y termodinámica estadística, el proceso a seguir es similar al capítulo 1, sin embargo es objeto del siguiente punto presentar las analogías entre ambos sistemas y de esta forma seguir con el desarrollo ya conocido.

Entre los resultados obtenidos se muestra la determinación de la utilidad en como una medida de la energía del sistema económico, así como de la riqueza análoga a la función libre de Helmholtz y el superávit, en función de tres conceptos importantes: el superávit generado por una mayor movilidad de flujos de dinero; en función del cambio en el valor económico, y ; el producido por los efectos de la política monetaria.

3.1 Analogías

Las analogías planteadas en el siguiente modelo se han establecido en función del efecto fenomenológico que presentan las variables en el sistema, es decir, no sólo se plantearon con base en las propiedades de las mismas, sino a la reacción e impacto que tiene cada una de ellas en el conjunto.

Otro factor que influyó al momento de plantear las analogías fue la interpretación en cada uno de los potenciales, considerando la congruencia de la información reflejada.

TABLA 2.
RESUMEN DE ANALOGÍAS ENTRE SISTEMAS ECONÓMICOS
Y TERMODINÁMICOS

Termodinámica	F	$-E$	TS	$-P$	V	μ	N
Economía	W	U	Ψ	λ	M	P	n

Wayne, Saslow, 1999, An economic analogy to thermodynamics, Texas, E.U., American Journal Physics, no. 67 (12).

En la tabla anterior se muestran claramente dos analogías principales alrededor de las cuales gira esta investigación, siendo la energía libre de Helmholtz, F , análogo de la riqueza, W , y la energía, E , análogo de la utilidad, U , el porque de este planteamiento será explicado a lo largo del capítulo, sentando las bases en este apartado.

Trabajo calorífico, TS , contra superávit por flujo de capitales, ψ

Se podría considerar al producto de la temperatura por la entropía, TS , como análogo del superávit ψ y mediante la termometría calcular una temperatura económica para el sistema, que proporcione el efecto deseado, ya que en la Economía no se encuentra definido un análogo para cada una de las variables termodinámicas (T, S). Sin embargo, a lo largo de esta investigación se encontró que el producto de la *tasa de interés* (en adelante denominada T_E) por la entropía, S , considerada como velocidad del dinero, tienen el efecto necesitado para explicar el superávit con base en estas variables. Por lo anterior, si no se quisiera considerar estas variables como un indicativo de temperatura económica, se puede recurrir a la termometría.

Trabajo mecánico $-PV$ contra superávit de valor corriente λM .

Un cambio en el sistema termodinámico también está en función del trabajo mecánico, generado por el producto de la presión, P , por el volumen, V . Cuando un sistema cerrado sufre de una expansión volumétrica, la presión disminuye, esto genera una disminución en la energía, por ello el signo negativo. En caso contrario, cuando la presión se ve afectada por un cambio positivo y el volumen permanece constante, el impacto es positivo en la energía, por ello VP es positivo. Por su parte, λM representa el inverso del deflactor del PIB por la cantidad de dinero, y el producto es definido como riqueza monetaria. Cuando se presenta un aumento

en M , genera una variación positiva en la riqueza o utilidad, sin embargo al haber un aumento en λ se presenta una disminución en los conceptos antes mencionados.

Trabajo químico μN contra superávit en el bien del consumidor pn .

El producto del potencial químico, μ , por el número de partículas, N , representa el trabajo químico. Un aumento en N , manteniendo constante μ , genera un aumento en la energía y viceversa. En la parte económica, si el número el precio, p , se mantiene constante y el número de bienes, n , aumenta genera una variación positiva en la riqueza y viceversa, definiéndose así el trabajo realizado en el mercado, bajo el supuesto que un aumento en el precio hace que la riqueza aumente ya que son bienes con que cuenta el sistema y no son bienes por adquirir.

Una vez explicadas las analogías en las variables independientes, a continuación se iniciará el desarrollo del modelo.

3.2 Construcción del modelo

Ejemplos de sistemas económicos de interés, son unos consumidores individuales o un país, cada uno de los cuales está encajado dentro de un sistema económico más grande. Una suposición fundamental en Economía es que el consumidor individual emplea una *función de utilidad*, la cual no es directamente medible y por tanto subjetiva, ya que depende de los gustos y preferencias de cada consumidor. Esta función de utilidad denota la capacidad de satisfacer una necesidad o deseo que un bien o servicio posee. Para explicar la analogía, es necesario analizar ciertas variables fundamentales, entre ellas la riqueza, la utilidad y el superávit.

La riqueza es definida como la totalidad de aquellos bienes de que dispone un sujeto económico, cuya cantidad es menor que la necesidad del mismo. Primero se consideran las cantidades económicas medidas conocidas como riqueza definida por

$$W = \lambda M + pN \quad [3.1]$$

donde λ y M representan el valor y la cantidad de dinero, y p y n representan vectores de precios y números de bienes. En principio, λ y M pueden ser considerados vectores, si el consumidor tiene valores habidos en más de un tipo de uso corriente.

De otro modo, se pueden agrupar ambos bienes y dinero dentro de p y n vectores. Considerando a $W = W(M, n)$, por lo tanto

$$dW = \lambda dM + p dn \quad [3.2]$$

Si se hace referencia a [1.20] en donde la energía libre de Helmholtz, $F(T, V, N) = -ST - PV + \mu N$ y acorde a la tercera ley de la termodinámica, en la que la entropía es igual a cero, $S = 0$, para un sistema que la temperatura es igual a cero, $T = 0$, en un sistema con n partículas (individuos) idénticas, se llega a la ecuación

$$F = -PV + \mu N$$

esta ecuación muestra que $F(T, V, N) = -PV + \mu N$, y [3.2] expresa $W(M, n) = \lambda M + pn$ ya que hasta ahora no se ha incluido el efecto del producto de la temperatura por la entropía, TS en donde el volumen, V , es análogo de la cantidad de dinero, M , y el número de partículas, N , es análogo al número de bienes, n . Por lo tanto, la analogía más apropiada para la energía libre de Helmholtz, F , es la riqueza, W .

Retomando nuevamente a las ecuaciones termodinámicas, en este caso [1.13], se muestra que $F \equiv E - TS$, dado despejando TS , se sigue que

$$TS = E - F \quad [3.3]$$

Por otra parte, la economía supone que el valor de la moneda y bienes de un consumidor individual está resumido por el valor de la utilidad, U , lo cual típicamente excede la riqueza, W . El excedente es conocido como el superávit (Alfred Marshall), para el cual se introduce la notación ψ . Así

$$\Psi = U - W \quad [3.4]$$

En una primitiva o muy pobre economía, no hay superávit, por lo que $\Psi = 0$. En este caso, cada individuo ejecuta la misma función económica con la misma eficiencia, y no hay beneficio de especialización y comercio, por lo tanto, los agentes son idénticos, con dotaciones idénticas. El superávit Ψ no puede ser negativo; para un típico sistema económico $\Psi > 0$, esto muestra la analogía con la tercera ley de la termodinámica ya mencionada. Aunque [3.4] aparece solamente para definir otra

cantidad desconocida, Ψ , en términos de U , esta relación económica es útil ya que se muestra su análogo termodinámico

$$\Psi = TS$$

sustituyendo lo anterior y [3.1] en [3.4] se genera

$$U = TS + W = TS + \lambda M + pn$$

Una comparación de [3.5] para la utilidad, U , y la ecuación [1.6] para la energía, E , sugiere que es posible establecer que la utilidad es una función de la entropía, los saldos reales y el número de bienes, esto es:

$$U = U(S, M, n) \quad [3.5a]$$

por lo tanto, el equivalente económico de [1.5] es

$$dU = TdS + \lambda dM + pdn \quad [3.6]$$

en donde

$$T \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{M,N}, \lambda \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{S,N}, p \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,M} \quad [3.7]$$

Adam Smith distinguió que la palabra valor tiene dos significados distintos: valor de uso y valor de cambio. Para ejemplificar lo anterior textualmente se cita la *Paradoja del valor* mencionada por Smith²⁷ en *la Riqueza de las Naciones*:

”Nada es más útil que el agua; pero ésta no comprará nada; nada de valor puede ser intercambiado por ella. Un diamante, por el contrario, tiene escaso valor de uso; pero una gran cantidad de otros bienes pueden ser frecuentemente intercambiados por este”.

Por lo que se identifica el valor de uso con la utilidad que brinda el bien, es decir la utilidad marginal $UMg = (\partial U / \partial n)_{S,M}$ y el valor de cambio con el precio, p . Siguiendo con el ejemplo anterior, se tiene que a bajos niveles de consumo el agua tiene una UMg mucho más alta que los diamantes.

²⁷ Adam Smith (1723-1790). Economista escocés, uno de los mayores exponentes de la economía clásica. Principales obras: 1759 *Teoría de los sentimientos morales* y en 1776 *La riqueza de las naciones*.

Considere ahora otro conjunto fijo de variables, en el que por simplicidad, se tomará la masa monetaria, M , como fija, pero no se puede hacer extensivo sobre la segunda variable, esto es, será fijada y simplemente se denotará como x . (Quizá la segunda variable es T ; la incertidumbre sobre cual variable es, será tomada fija como una convención económica, donde la imprecisión de la frase "ceteris paribus" es comúnmente invocada.) De [3.6] se obtiene la siguiente expresión

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{x,M} = T \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{x,M} + p \quad [3.8]$$

Un consumidor comprará bienes sujeto a la condición de que la razón del valor de cualquier bien en uso es su precio, p , tomado en un valor común.

Este enunciado sigue requiriendo que, para un mercado, los valores de los bienes sean fijos, por lo que la utilidad, U , debe ser maximizada para cada bien. Los valores fijos medios en el mercado de los bienes 1 y 2 son cambiados en el mercado sujetos a la condición

$$0 = p_1 dn_1 + p_2 dn_2. \quad [3.9]$$

Esta expresión implica que el valor total de la variación del consumo debe ser cero. La maximización de la utilidad, U , requiere que

$$0 = \frac{\partial U}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial U}{\partial n_2} dn_2. \quad [3.10]$$

De la ecuación [3.10], la maximización se aplica por medio de cada uno de los bienes, n , ya que es una propiedad extensiva, que proporciona la utilidad, U , que representa el bien. Si se desea expresar el valor de uso, considerando el dinero como una constante, es decir neutral, se combina [3.9] y [3.10] obteniéndose

$$\frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial N} = \text{constante}, \quad [3.11]$$

para cada bien. El primer cociente $1/p$ es explicado por los monetaristas, los cuales se enfocan en analizar en conjunto, la oferta y demanda monetaria, aceptando la neutralidad del dinero en el corto y largo plazo. Así, la razón del valor de uso para el precio es una constante. Usando [3.8] y [3.11] se puede expresar

$$\frac{1}{p} \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{x,M} = \frac{T}{p} \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{x,M} + 1 = \text{constante} \quad [3.12]$$

De la ecuación [3.12], se desprende la que, para todos los bienes, la utilidad no depende del precio de los bienes, sino de su relación. El presente formalismo ayuda a saber cuál es el valor constante, si m representa el valor de uso (utilidad marginal por bien, a x y M fijo), se deduce que las marginales obtenidas en Física servirán para construir la TMST ²⁸, las utilidades y en general, las condiciones de primer orden, esto es:

$$m \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{x,M} \quad [3.13]$$

De la ecuación [3.13] se desprende que, el cálculo de la utilidad que brinda el bien, no depende del precio, por lo que m representa el valor de uso (UMg). Note que m es especificado en unidades monetarias. De las ecuaciones [3.11] y [3.12], se deduce que la razón m/p tienen las mismas dimensiones para todos los bienes.

La razón m/p puede ser generalizada para incluir el valor de uso corriente, permitiendo así el estudio económico. Específicamente se define

$$m_\lambda \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{x,N} \quad [3.14]$$

Por lo tanto, la razón de valor de uso para el valor de cambio para el dinero, m_λ/λ toma el mismo valor como m/p para bienes. Se usa [3.7] para relacionar la riqueza, W , y la utilidad, U , por lo que la analogía para el desarrollo asociado con la energía de Helmholtz, F , lleva a

$$dW = SdT + \lambda dM + pdn,$$

lo que es análogo a sustituir [1.14] en [1.18], aunque ahora se tiene que:

$$S = \frac{\partial W}{\partial T}; \quad \lambda = \frac{\partial W}{\partial M}; \quad p = \frac{\partial W}{\partial n} \quad [3.16]$$

Es implícito que dos de las tres cantidades (T, M, n) son tomadas como constantes en las derivadas parciales. Por otra parte, en principio se definió la entropía, S , como una medida de la velocidad del dinero, la idea surge como una conveniencia para la simplificación del modelo.

A partir de [3.16] puede surgir otra analogía si se considera $\delta W/\delta T$ como una medida de la efectividad de la política monetaria, esto, ya que el objetivo de esta

²⁸ Tasa Marginal de Sustitución Técnica. Proporción en que un factor productivo debe ser sustituido por otro a manera de mantener invariante el producto.

es usar la cantidad de dinero como variable de control para asegurar y mantener la estabilidad económica a través de mecanismos basados en la tasa de interés.

Note que de [3.15] se puede escribir la dependencia funcional

$$W = W(T, M, n) \quad [3.17]$$

Otro estándar económico relaciona estados que, cuando un consumidor individual interactúa con el mercado, el precio (costo marginal por bien) es determinado por el mercado. Es posible obtener este resultado suponiendo que, en equilibrio, la riqueza del consumidor y del mercado es maximizada a una temperatura y moneda fija. Note que la ecuación [3.1] da la diferencial

$$dW_r = -S_r dT_r + \lambda_r dM_r + p_r dn_r.$$

sujeto a las condiciones de conservación de la temperatura económica, $dT = dT_r = 0$, conservación de la moneda $dM + dM_r = 0$, y conservación de los bienes $dn + dn_r = 0$. Añadiendo estas restricciones a la ecuación anterior y [3.15], se encuentra que

$$dW + dW_r = (\lambda - \lambda_r) dM + (p - p_r) dn.$$

El lado derecho de la ecuación anterior es cero para variaciones arbitrarias en la cantidad de dinero, dM , y número de bienes, dn solamente si el valor de la moneda para el consumidor es el mismo que el valor de la moneda para el mercado, esto es: $\lambda = \lambda_r$.

Similarmente, para el valor de un bien, se tiene $p = p_r$, esto es, el precio sombra, definido como el precio de referencia que tendría un bien en condiciones de competencia perfecta.²⁹

Note que la ecuación [3.1] da la diferencial

$$dW = \lambda dM + p dn + M d\lambda + n dp. \quad [3.20]$$

La consistencia de [3.20] y [3.15] requiere que los cambios entre el valor de la moneda, de los precios y la tasa de interés (temperatura económica) sean cero, esto es

²⁹ Costo de oportunidad de producir o consumir un bien o servicio.

$$0 = SdT + Md\lambda + ndp. \quad [3.21]$$

La ecuación [3.21] es el análogo de [1.12], esto es, de la relación de Gibbs-Duhem. Entre otras cosas, implica que un crecimiento en el precio del bien o en el valor de la moneda (como cuando el estado económico desarrolla intereses) es acompañado por un incremento en la temperatura económica.

Este comportamiento es esperado de un razonamiento económico convencional. Específicamente, si todos los precios y valores corrientes son incrementados por un factor común, entonces el sistema no tiene realmente un cambio ya que la temperatura es simplemente aumentada por el factor común.

Sin embargo, [3.21] es cierta para variaciones más generales. Note que escalando en un factor de ζ , una unidad monetaria cualquiera pasa a ζ unidades monetarias, etc.

Para que realmente cambie el valor de la unidad monetaria, se requiere imprimir más de ellas, lo cual es un costo real que no puede ser escalado sin cesar.

La ecuación [3.21] tiene una importante aplicación, en donde el cambio en el superávit marshalliano, esta definido por $\Psi = TS$, como

$$\Psi = TdS + SdT = TdS - Md\lambda - ndp. \quad [3.22]$$

Interpretando TdS como el cambio en el valor económico, ya que implica una mayor movilidad del flujo de capitales y permite una mayor utilidad. El término $-ndp$ es el cambio en el superávit del bien en el consumidor, la cual se llamará superávit de Marshall. Así mismo el término $-Md\lambda$ puede ser interpretado como un superávit de valor corriente, debido a las eficiencias producidas por la eficiencia en la política monetaria, también llamada superávit smithiano (por el economista Adam Smith).

Se verá que $-ndp$ es un superávit, note que el costo de incrementar bienes adquisitivos (donde los primeros bienes son escasos y, por tanto, costosos) es $\int_0^n p dn$, donde $p(n)$, el precio del n -ésimo bien, el cual decrece cuando n se incrementa (esto es, $dp/dn < 0$.)

Cuando compran todos a la vez el costo actual para el consumidor es np , el número de bienes al menor costo por bien. La diferencia es

$$\int_0^n p dn - np = - \int_{p(=0)}^{p(n)} ndp \quad [3.23]$$

De la ecuación anterior, es posible observar que la diferencia es positiva porque el límite de la integración, dp es negativo. Así $-ndp$ es el cambio en el superávit de los bienes para el consumidor.

La ecuación [3.22] demuestra que hay tres tipos de superávit, el superávit generado por un incremento en el flujo de capitales y el superávit smithiano de la eficiencia debido a la especialización y el superávit marshalliano comúnmente denominado superávit del consumidor. Estas ideas están presentes en la Economía, pero están ausentes de cualquier proposición formal previa que relaciona los superávits marshalliano y smithiano.

Las siguientes relaciones de Maxwell son una consecuencia inmediata del hecho de que el orden de las derivadas cruzadas de la utilidad, U , son iguales, esto es

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{M,n} = \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{S,M}, \quad [3.24]$$

$$- \left(\frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{M,n} = \left(\frac{\partial T}{\partial M} \right)_{S,n}, \quad [3.25]$$

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial M} \right)_{S,n}. \quad [3.26]$$

Estas relaciones brindan un medio para determinar el cambio en la entropía, que no puede medirse directamente. En Economía, estas relaciones son conocidas como condiciones de Slutsky, ellas garantizan que las integrales sobre la utilidad, dU , en el espacio generado por la entropía, número de bienes y masa monetaria, (S, n, M) , son trayectorias independientes.

Similarmente las condiciones de Slutsky pueden ser derivadas de la riqueza, W , para lo cual las variables naturales son la tasa de interés, masa monetaria y número de bienes (T, M, n) . Las ecuaciones [3.24] y [3.25] son nuevas; la ecuación [3.26] es ya conocida en una forma en donde la dependencia en la entropía no está hecha explícitamente. La adición de las variables de tasa de interés, T , y entropía, S , ayuda a hacer más preciso el significado de la frase "*ceteris paribus*".

3.3 Construcción de los potenciales termo-económicos

Otra forma de deducir las ecuaciones análogas a los potenciales termodinámicos es por medio del proceso que se siguió en el capítulo 1.

Se iniciará definiendo a la energía, E , la cual está representada por la suma del diferencial de calor, el trabajo mecánico y el trabajo químico, en donde su diferencial se obtiene con la suma de los cambios que presenta el sistema, $E = TS - PV + \mu N$, pero dado que se trata de una sistema en equilibrio; el diferencial de la energía, E , está definido por $dE = TdS - PdV + \mu dN$.

Este es el punto de partida de la obtención de los demás potenciales. En Economía el resultado obtenido coincide con la dependencia de su función análoga, pero el planteamiento es diferente. Se tiene que el superávit³⁰, es el monto en el que la utilidad, U , excede a la riqueza actual, W . Esto es, $\Psi = U - W$.

El análogo de este superávit está representado por TS , el cual en Economía representa el producto de la *tasa de interés* por la entropía, siendo esta última en Física la dinámica de las partículas y en Economía, la dinámica o velocidad del dinero, ocasionado por la dinámica del mercado. Si se despeja la utilidad se obtiene $U = \Psi + W$, haciendo esta función extensiva en forma de Euler, se tiene que la utilidad es una función de la velocidad del dinero, la masa monetaria y el número de bienes, esto es: $U = (S, M, n) = TS + \lambda M + pn$. Lo cual puede resumirse en el siguiente cuadro:

Termodinámico	
$E = E(S, V, N)$	$-dE = TdS - PdV + \mu dN$
Económico	
$U = U(S, M, n)$	$dU = TdS + \lambda dM + p dn$

en donde, la dependencia de las funciones es análoga. El producto TdS muestra que una variación positiva en la velocidad del dinero, tiene un efecto positivo en la

³⁰ Referida por Marshall como excedente del consumidor.

utilidad, U . El signo negativo frente al diferencial de la energía, E , será comprendido en [3.66], ecuación en donde se muestra claramente la naturaleza de los signos.

El siguiente potencial a determinar es la energía libre de Helmholtz, definida como la energía útil o aprovechable en un sistema y su análogo es la riqueza, W .

Termodinámico

$$F = F(T, V, N) \quad F = E - TS$$

Económico

$$\begin{aligned} W = W(T, M, n) \quad W = U - TS \quad dW &= dU - TdS - SdT \\ &= TdS + \lambda dM + pdn - TdS - SdT \\ &= -SdT + \lambda dM + pdn \end{aligned}$$

El signo negativo del producto SdT se debe a que ante un cambio positivo en la tasa de interés, T , impacta en forma negativa la riqueza, por el contrario, una disminución en la tasa de interés tiene un efecto positivo en la riqueza.

Con respecto a la entalpía, muestra la energía en forma de calor, que se puede absorber o ceder en un proceso, la cual no se aprovecha ya que se pierde por disipación, fricciones, etc. En Economía representa un tipo de utilidad no aprovechable, se puede ejemplificar mejor como el costo de ineficiencia en la efectividad de la política pública. Esto es, no todas las acciones de la autoridad pública son absorbidas por la sociedad en su totalidad, ejemplo de ello son los programas de apoyo popular, en donde, (considerando que todos los recursos son ejercidos en lo programado), gran parte se pierden gastos de promoción, de operación, financieros, etc. Definida a continuación como

Termodinámico

$$H = H(S, P, N) \quad H = E - PV$$

Económico

$$\begin{aligned} H_E = H_E(S, \lambda, n) \quad H_E = U - \lambda M \quad dH_E &= dU - \lambda dM - Md\lambda \\ &= TdS + \lambda dM + pdn - \lambda dM - Md\lambda \\ &= TdS - Md\lambda + pdn. \end{aligned}$$

Por último, se tiene otra función referida a la energía libre, siendo en este caso la de Gibbs, teniendo una conceptualización similar a la de Helmholtz, bajo diferentes supuestos, esto es:

Termodinámico
$G = G(T, P, N) \quad G = H - TS$
Económico
$G_E = G_E(T, \lambda, n) \quad G_E = H_E - TS \quad dG_E = dH - TdS - SdT$ $= TdS - Md\lambda + pdn - TdS - SdT,$ $= -SdT - Md\lambda + pdn.$

A continuación se presenta un resumen de las analogías utilizadas hasta el momento y de otras que no se necesitaron desarrollar en el texto, sin embargo son importantes para calcular las relaciones de Maxwell y posteriormente utilizar estas aproximaciones para determinar los cambios en la utilidad y entropía.

TABLA 3.
RESUMEN DE ECUACIONES ANÁLOGAS EN FORMA DE EULER,
SUGERIDAS ENTRE SISTEMAS TERMODINÁMICOS Y ECONÓMICOS

Termodinámicas	Termo-económicas
[1.6] Energía $-E(S, V, N) = TS - PV + \mu N$	$U(S, M, n) = TS + \lambda M + pn$ Utilidad [3.5a]
[1.14] Energía libre de $F(T, V, N) = -ST - PV + \mu N$ Helmholtz	$W(T, M, n) = -ST + \lambda M + pn$ Riqueza [3.17] $\Psi(S, \lambda, p) = TS + \lambda M + np$ Superávit [3.22]
[1.11] Energía libre de $G(T, P, N) = -ST + VP + \mu N$ Gibbs	$G_E(T, \lambda, n) = -ST - M\lambda + pn$ Utilidad Gibbs
[1.15] Entalpía $H(S, P, N) = TS + VP + \mu N$	$H_E(S, \lambda, n) = TS - M\lambda + pn$ Entalpía Económica

Fuente: Elaboración propia con información encontrada en: García, Leopoldo y Colín Scherer, 1995, Termodinámica Estadística, México, UAM. y el Capítulo 3 de esta investigación.

3.4. Cambios en los potenciales termo-económicos

Al igual que los potenciales termodinámicos, los potenciales termo-económicos también son ecuaciones de estado, por ello es importante poder realizar una medición de la magnitud de los cambios,

3.4.1 Cambios en la utilidad

Eligiendo una función de utilidad que depende de la tasa de interés y de la masa monetaria, $U = U(T, M)$ y tomando su diferencial, se tiene que

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_M dT + \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_T dM. \quad [3.27]$$

Por su parte la capacidad calorífica mencionada en termodinámica en [1.21], se presenta a continuación en términos de variables económicas y definida como la utilidad, U , necesaria para aumentar el crecimiento económico, medido por un cambio en la tasa de interés, dT en donde

$$C_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_M = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_M$$

Siendo C_M la capacidad a cantidad de dinero constante, M . Siguiendo los pasos de [1.23] a [1.30], el desarrollo en Economía es el siguiente:

Primero se sustituye la ecuación anterior en [3.27], de dónde se obtiene

$$dU = C_M dT + \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_T dM, \quad [1.28]$$

ahora se elige la entropía como $S = S(T, M)$, ya que en termodinámica $S = S(T, V)$, siendo la tasa de interés, T , y la temperatura, T , análogos, al igual que la cantidad de dinero, M , y el volumen, V . Tomando el diferencial de la velocidad del dinero, S , en Economía, se obtiene

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M dT + \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T dM. \quad [3.29]$$

Sustituyendo [3.29] en $dU = TdS + \lambda dM$ produce

$$\begin{aligned} dU &= T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M dT + \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T dM \right] - \lambda dM, \\ &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M dT + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T + \lambda \right] dM. \end{aligned} \quad [3.30]$$

Igualando los coeficientes dT y dM de [3.28] y [3.30] se obtiene

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M = \frac{C_M}{T} \quad [3.31a]$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T + \lambda \quad [3.31b]$$

Reescribiendo [3.31b], ya que se desea en términos de variables medibles, se utilizan las relaciones de Maxwell (véase el apéndice B), se tiene que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_T = T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_M + \lambda \quad [3.32]$$

Sustituyendo en [3.28] para obtener el cambio en la utilidad, dU , se tiene que

$$dU = C_M dT + \left[T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_M + \lambda \right] dM. \quad [3.33]$$

La ecuación [3.33] es una propuesta matemática de la teoría del bienestar, en términos monetarios, ya que permite comparar el efecto de las políticas monetarias de un tiempo a otro en la utilidad del individuo, cualidad no observable directamente, pero si, en cuanto al cambio en su utilidad, por lo tanto en su calidad de vida.

Un cambio en la utilidad de un sistema asociado con un cambio de estado de (T_1, M_1) a (T_2, M_2) se determina mediante la integración

$$U_2 - U_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_M dT + \int_{M_1}^{M_2} \left[T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_M + \lambda \right] dM. \quad [3.34]$$

En donde el cambio en la utilidad, dU , representa la utilidad asociada a un crecimiento en la tasa de interés y en la cantidad de dinero. Despejando el potencial monetario, C_M , de [3.32], se obtiene un análogo a la ecuación [1.38], a saber:

$$C_M = \frac{dU}{dT} - \left[T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_M + \lambda \right] \frac{dM}{dT}. \quad [3.35]$$

3.4.2 Cambios en la entalpía económica

La relación general para los cambios en la entalpía económica, dH_E , se determina de la misma manera que la utilidad. Sin embargo son conceptos diferentes, ya que la entalpía en un sistema, representa la energía que se pierde en un proceso, definida en Economía como la utilidad que se pierde por la ineficiencia de la política pública, la cual puede ser definida como: $H_E = H_E(T, \lambda)$. Tomando el diferencial se tiene que

$$dH_E = \left(\frac{\partial H_E}{\partial T} \right)_M dT + \left(\frac{\partial H_E}{\partial \lambda} \right)_T d\lambda, \quad [3.36]$$

en donde, la capacidad calorífica ahora se refiere a valor de dinero constante, C_λ definiéndose como

$$C_\lambda = \left(\frac{\partial H_E}{\partial T} \right)_\lambda = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_\lambda$$

Sustituyendo en [3.36] se tiene que el cambio en la entalpía económica puede medirse como

$$dH_E = C_\lambda dT + \left(\frac{\partial H_E}{\partial \lambda} \right)_T d\lambda, \quad [3.37]$$

ahora se elije la entropía como $S = S(T, \lambda)$, en este caso su análogo económico está definido por $S = S(T, P)$, tomando su diferencial se tiene que

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\lambda dT + \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)_T d\lambda, \quad [3.38]$$

sustituyendo en el cambio de la entalpía, $dH_E = TdS + Md\lambda$, se sigue que

$$\begin{aligned} dH_E &= T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\lambda dT + \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)_T d\lambda \right] + Md\lambda, \\ &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\lambda dT + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)_T + M \right] d\lambda, \end{aligned} \quad [3.39]$$

igualando los coeficientes dT y $d\lambda$ de [3.36] y [3.38], toma ahora la forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\lambda &= \frac{C_\lambda}{T}, \\ \left(\frac{\partial H_E}{\partial \lambda} \right)_T &= T \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)_T + M. \end{aligned} \quad [3.40]$$

Ahora, se reescribe [3.40] utilizando las relaciones de Maxwell, con lo que se llega a

$$\left(\frac{\partial H_E}{\partial \lambda}\right)_T = T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda + M \quad [3.41]$$

Sustituyendo en [3.36] se obtiene una expresión para la entalpía económica en función a factores fácilmente medibles como la tasa de interés o la masa monetaria, esto es:

$$dH_E = C_\lambda dT + \left[T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda + M \right] d\lambda, \quad [3.42]$$

lo que es un análogo (1.39). En donde el cambio en la entalpía en un sistema compresible simple asociado con un cambio de estado de (T_1, λ_1) a (T_2, λ_2) se determina mediante la integración de la ecuación anterior, esto es:

$$H_{E1} - H_{E2} = \int_{T_1}^{T_2} C_\lambda dT + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda + M \right] d\lambda. \quad [3.43]$$

despejando la capacidad económica del deflactor del PIB, C_λ de [3.42], se observa que

$$C_\lambda = \frac{dH_E}{dT} - \left[M + T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda \right] d\lambda. \quad [3.44]$$

En realidad, sólo se necesita determinar ya sea la diferencia en la utilidad, $U_2 - U_1$ de [3.34] o el diferencial en la entalpía económica, de (3.43), según cuál sea más adecuada para los datos disponibles. La otra puede determinarse mediante la definición de entalpía económica, $H_E = U + \lambda M$, lo que conduce a

$$H_{E2} - H_{E1} = U_2 - U_1 + (\lambda_2 M_2 - \lambda_1 M_1)$$

que es un análogo a la conclusión de [1.38] y expresa el cambio de la efectividad de la política pública como un cambio en la utilidad de los individuos, más un cambio en su tenencia de saldos reales, sus efectos y posibles políticas quedan como una futura línea de investigación.

3.4.3 Cambios en la entropía económica

A continuación se desarrollarán dos relaciones generales para los cambios de entropía económica (velocidad del dinero) de un sistema compresible simple.

La primera relación se obtiene al sustituir la primera derivada parcial en la diferencial total de la velocidad del dinero, dS [3.29] por [3.35] y la segunda derivada parcial por la relación de Maxwell, resultando

$$dS = \frac{C_M}{T} dT + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_M dM, \quad [3.45]$$

lo cual, después de integrar, resulta en

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_M}{T} dT + \int_{M_1}^{M_2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_M dM, \quad [3.46]$$

lo que no es otra cosa sino el mismo procedimiento usado para encontrar la entropía de un sistema físico aplicado a un sistema económico.

La segunda relación sustituye la primera derivada parcial en la diferencia total de dS [3.38] por [3.40] y la segunda derivada parcial por la cuarta relación de Maxwell, lo que produce

$$dS = \frac{C_\lambda}{T} dT + \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_\lambda d\lambda, \quad [3.47]$$

a partir de lo cual, mediante una integración, se obtiene la velocidad del dinero (entropía económica) como una función de la tasa de interés, del calor específico del deflactor y del deflactor mismo (del producto interno bruto), esto es:

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_\lambda}{T} dT + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_M d\lambda \quad [3.48]$$

Tanto [3.46] como [3.48] sirven para determinar el cambio en la velocidad del dinero (entropía económica). La elección adecuada dependerá de lo apropiado que sean los datos a una relación particular.

3.5 Calores específicos económicos C_M y C_λ

Para obtener los calores específicos económicos, se seguirá el mismo procedimiento usado para obtener sus análogos físicos, y al igual que sus contrapartes, representarán la capacidad del sistema para experimentar cambios en la tasa de interés ante

cambios en el valor del dinero (inverso del deflactor del PIB) y la masa monetaria, lo cual implica la capacidad de la política monetaria del banco central para afectar la economía.

Para llegar a estos resultados, es necesario igualar el cambio en la velocidad del dinero, dS , en [3.45] y [3.47], llegando a la ecuación

$$\frac{C_M}{T}dT + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_M dM = \frac{C_\lambda}{T}dT - \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda d\lambda$$

de donde es posible despejar

$$\frac{dT}{T}(C_M - C_\lambda) = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda d\lambda - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_M dM.$$

lo que finalmente conduce a una expresión referida a la tasa de interés, esto es:

$$dT = \frac{T(\partial M/\partial T)_\lambda}{C_M - C_\lambda}d\lambda - \frac{T(\partial\lambda/\partial T)_M}{C_M - C_\lambda}dM, \quad [3.49]$$

Al elegir una tasa de interés que es función de la masa monetaria y del valor del dinero, $T = T(M; \lambda)$ la ecuación anterior toma ahora la forma

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_\lambda dM + \left(\frac{\partial T}{\partial\lambda}\right)_M d\lambda, \quad [3.50]$$

Igualando los coeficientes del cambio en la masa monetaria, se obtiene el diferencial de los potenciales en función de variables conocidas, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial M} &= -\frac{T(\partial\lambda/\partial T)_M}{C_M - C_\lambda} \\ C_M - C_\lambda &= T \left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_M \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de cambio en el deflactor, $d\lambda$ la ecuación anterior puede expresarse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial\lambda} &= \frac{T(\partial M/\partial T)_\lambda}{C_M - C_\lambda} \\ C_M - C_\lambda &= T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda \left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_M \end{aligned} \quad [3.51]$$

Una forma opcional de esta relación con la forma cíclica (véase el apéndice C) está dada por

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_M \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_\lambda \left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)_T = -1 \quad [3.52]$$

de donde se puede despejar que

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_M = - \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial M}\right)_T \quad [3.53]$$

Sustituyendo [3.52] en [3.51], es evidente que

$$C_M - C_\lambda = -T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial M}\right)_T \quad [3.54]$$

Esta relación se expresa en términos de otras dos propiedades llamadas expansión de la cantidad de dinero (o expansibilidad) β y compresibilidad α , las cuales se definen como

$$\beta = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda \quad ; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\lambda = M\beta \quad [3.55]$$

$$\alpha = -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)_T \quad ; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)_T = -M\alpha \quad [3.56]$$

Sustituyendo la expansibilidad en [3.53], se producen expresiones de las capacidades en términos de las expansibilidades y compresibilidades del dinero, esto es:

$$C_M - C_\lambda = \frac{MT\beta^2}{\alpha} \quad [3.57]$$

en donde β es una medida de cambio en la cantidad de dinero con la temperatura a λ constante y α la respuesta con que un sistema modifica la cantidad de dinero al someterlo a cambios en el valor del dinero, λ , manteniendo la tasa de interés, T .

La ecuación [3.57] representa una entrada natural a valores monetarios en la teoría de la utilidad a masas monetarias, M y valores del dinero λ constantes.

3.6 Termometría en economía

Teniendo descritas algunas de las complejidades de la termometría en Física, se indicará como realizar termometría en Economía. Para hacer esto, es esencial que

en el modelo se pueda medir el calor económico, $dQ \equiv TdS$ y que se tenga por lo tanto una cantidad que pueda servir como un termómetro de la actividad económica. Por la ecuación [3.6], se tiene que

$$TdS = dU - \lambda dM - p dn, \quad [3.58]$$

de esta forma, si se puede medir el cambio en la utilidad, dU , el deflactor del PIB, λ , la masa monetaria, dM los precios, p y el cambio en el número de bienes, dn , es posible medir el cambio del calor económico, $dQ = TdS$.

Se asumirá que se tiene algún indicador económico τ que depende de T , λ y n . Para tal efecto, se propone el inverso de la acumulación de inventarios, pues cuando aumenta el poder adquisitivo, λ la velocidad del dinero, S , o la cantidad de dinero en la economía, M , estos disminuyen (relación inversa). Al tomar su inverso, la relación se vuelve directa y se tiene que aumentará ante cambios en las variables anteriores, tal y como en sus contrapartes físicas.

Para emplear la relación del inverso en el cambio en inventarios, $\tau(T, \lambda, n)$ se requerirá una nueva condición térmica de Slutsky, obtenida usando el análogo económico de la energía libre de Gibbs. En donde

$$V(T, p, M) = U - TS - \lambda M \quad [3.59]$$

siendo $V = pn$, obtenido usando la ecuación [3.5], la cual representa el valor monetario de los bienes. Su diferencial satisface

$$dV = (-SdT - Md\lambda + p dn), \quad [3.60]$$

la cual se sigue de la sustitución de la ecuación [3.6] en la diferencial de la ecuación [3.59]. Entonces

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial T} \right)_n = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial \lambda} \right)_n \quad [3.61]$$

Lo cual lleva a

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)_{\lambda, n} = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\lambda, n} \quad [3.62]$$

Usando la ecuación [3.53] y el cambio del calor económico, $dQ = TdS$, se observa que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)_{T,n} = T \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)_{T,n} = -T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\lambda,n} = -T \left(\frac{\partial M}{\partial \tau}\right)_{\lambda,n} \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_{\lambda,n} \quad [3.63]$$

Reorganizando los términos, se obtendrá

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_{\lambda,n} = \frac{(\partial M/\partial \tau)_{\lambda,n}}{(\partial Q/\partial \lambda)_{T,n}} \equiv f(\tau, \lambda, n) \quad [3.64]$$

El lado izquierdo de la ecuación [3.64] esta a valor del dinero, λ , y número de bienes, n , fijos, así que el lado izquierdo debe ser escrito en términos de las variables como el inverso del cambio en inventarios, τ , el valor del dinero, λ , y el número de bienes, n . Lo que explica la notación $f(\tau, \lambda, N)$. Integrando desde una tasa de interés inicial, T_0 , y la correspondiente medida para el inverso del cambio en inventarios, τ_0 , la ecuación anterior se convierte en

$$In \frac{T}{T_0} = \int_{\tau_0}^{\tau} f(\tau, \lambda, n) d\tau, \quad f(\tau, \lambda, n) = \frac{(\partial M/\partial \tau)_{\lambda,n}}{(\partial Q/\partial \lambda)_{T,n}}, \quad [3.65]$$

donde $dQ \equiv TdS$ como es usual.

A partir de la ecuación [3.65] se puede obtener, en principio, la escala de temperatura $T(\tau, \lambda, N)$ en términos de las cantidades medibles (τ, λ, N) . Es necesario poder medir las cantidades que aparecen en la expresión para $f(\tau, \lambda, N)$ especialmente es difícil medir el cambio en el calor económico, $dQ = TdS$.

Por la ecuación [3.7], esta cantidad es también el cambio en la utilidad a bienes y moneda fija. El presente trabajo únicamente trabaja con funciones de utilidad propias de la literatura neoclásica. Otras formas de la termometría económica son quizá más practicas para implementar son posibles por analogía a la termometría en termodinámica.

3.7 Analogía para la mecánica estadística

La mecánica estadística ha estudiado con éxito, durante más de un siglo las fluctuaciones de diversas magnitudes en sistemas complejos y es natural tratar de entender sus resultados en el mundo de la Economía, que es también un sistema complejo en el que las magnitudes fluctúan apreciablemente. Esta investigación se enfocará

en relacionar propiedades microeconómicas correspondientes a un modelo macroeconómico, observable en la vida diaria como resultado natural de la estadística y la mecánica. Una herramienta importante es la función de partición canónica obtenida en [1.76]:

$$Z(T, V) \equiv \sum_{j \text{ estados}} e^{\beta E_j} \quad [3.66]$$

en donde al sustituir el análogo de la energía, toma la forma

$$Z(T, V) \equiv \sum_{j \text{ estados}} e^{U_j/kT} \quad [3.67]$$

Siendo k una *constante de ajuste* determinada experimentalmente en termodinámica por Boltzmann (por tanto, posiblemente distinta para Economía), pero en base a la experimentación en las distintas funciones de utilidad, se puede llegar a determinarla.

En lo subsecuente, se le denominará a esta *constante* como constante de ajuste, k . Por lo que la función de partición canónica dependerá de la tasa de interés, T , y la utilidad de cada posible estado del sistema, U_j . Lo que conduce a que cada estado aporta una utilidad de la forma

$$e^{U_j/kT},$$

es decir, cada una de ellas es una medida de estados utilitarios de una utilidad particular que son próximos a ser ocupados a una tasa de interés, T dada, haciendo explícita la dependencia de la utilidad con la tasa de interés.

La función de partición canónica mostrada por [3.66], suministra una medida del número total de estados energéticos disponibles por el sistema a una tasa de interés fija, además permite la conexión entre el sistema macroeconómico y microeconómico, manifestando los cambios a través de este en la energía libre de Helmholtz, esto es:

$$F = -kT \ln Z \quad [1.76]$$

también representado por

$$Z = \sum_{j \text{ estados}} e^{F/kT} \quad [3.68]$$

El conocimiento de la riqueza, W , que es análoga a la energía libre de Helmholtz, F , lleva a las propiedades termodinámicas del sistema físico.

Para hacer la analogía con la Economía, es importante hacer notar que el número de estados económicos está limitado. Además, un agente económico buscará maximizar la utilidad o riqueza (de acuerdo a que variables se tomen constantes), mientras que un sistema físico buscará minimizar la energía o energía libre.

De acuerdo con [3.67] y [3.68], se presentan cuatro posibles estados económicos: (1) $e^{-U/T}$; (2) $e^{U/T}$; (3) $e^{-W/T}$ y (4) $e^{W/T}$. Si la relación de la utilidad con la riqueza, la tasa de interés y la velocidad del dinero, $U = W + TS$ es mantenida, entonces $e^{U/T}$ y $e^{-W/T}$ lleva a definiciones indeseables como el que la entropía es negativa.

De los dos pasos que permanecen, $e^{-U/T}$ aparenta ser el más natural, debido a la analogía termodinámica. Sin embargo la $e^{-U/T}$ es indeseable ya que favorece estados de baja utilidad (un principio de minimización) y emplea una cantidad que no está conservada en intercambios económicos. Por lo tanto, el peso dado por la $e^{W/T}$ favorece estados con alta riqueza (principio de maximización) y cantidades que son empleadas en intercambios económicos. Este paso también es consistente con la idea de que T es una medida de la tasa de interés. A baja temperatura (tasa de interés) la economía se esfuerza por alcanzar altos estados de riqueza, W , mientras que para alta temperatura (alta tasa de interés) la economía prefiere variar, esto es los estados económicos son igualmente probables.

Considere un micro estado T con riqueza W_S ahora se define la función de partición canónica

$$Z = \sum_{states} e^{W_S IT} \quad [3.68]$$

Si se define con base en la utilidad, U , por

$$Z = e^{UIT} \quad [3.70]$$

se tiene que la utilidad está dada como el logaritmo de la función de partición multiplicada por la tasa de interés, esto es:

$$U = T \ln Z \quad [3.71]$$

Haciendo la suposición usual de que la suma está dominado por el estado más probable (el peso más probable), la ecuación [3.71] conduce a

$$Z \approx \Gamma e^{W/T}, \quad \Gamma = \sum_{\text{estados}} 1, \quad [3.72]$$

donde la suma es sobre los estados económicos con riqueza $W_S = W$. Combinando las ecuaciones [3.70]-[3.72], se obtiene una expresión de la forma

$$U = W + T \ln \Gamma \quad [3.73]$$

Así, de acuerdo con la expresión usada para el superávit, $\Psi = TS$ que puede identificarse como

$$S = \ln \Gamma \quad [3.74]$$

La ecuación [3.74] es el análogo económico de la famosa relación debida a Boltzmann, la cual relaciona la entropía económica a la variedad económica. La cual es, evidentemente, un análogo a [1.67].

Sería imposible contar los posibles estados económicos, dada la complejidad que presenta la manipulación de información de tal magnitud, como la determinación del "espacio fase" (recalcando las dificultades asociadas con el conteo de estados en Física después de que la mecánica cuántica definió la celda unitaria del espacio fase.)

De la ecuación de la energía libre de Helmholtz, $F = E - TS$, se sabe que a bajas temperaturas se favorece la minimización de la energía, E , mientras que altas temperaturas favorecen la maximización de la entropía, S .

Correspondientemente, del análogo de la energía libre de Helmholtz, $U = W + TS$ se sigue que una baja temperatura económica favorece la maximización de la riqueza W , mientras que una alta temperatura económica favorece la maximización de la velocidad del dinero, S . Desde el punto de vista de la maximización, $-F$ y U son análogos. Esta analogía está en contraste con la discusión anterior, donde la energía, E y la utilidad, U son análogos desde el punto de vista de variables naturales. Note que la utilidad, U , calculada mediante la ecuación [3.71] está escrita en términos de la tasa de interés, T la cual no es una variable natural.

Para esta relación, $W = U - TS$ la velocidad del dinero puede ser obtenida mediante $S = \int_0^T (dT/T) X (\partial U / \partial T |_{M,N})$.

La ecuación [3.74] puede ser hecha de las bases de la teoría de fluctuaciones sobre una economía en equilibrio, lo que resulta en una analogía a la teoría de fluctuaciones sobre termodinámica en equilibrio. Por ejemplo, las fluctuaciones en el número de partículas, δn satisface

$$\overline{(\delta N)^2} = T \frac{\partial N}{\partial \mu} \quad [3.75]$$

Análogamente, el número de fluctuaciones δn en el número de bienes n tiene un valor medio cuadrático que satisface

$$\overline{(\delta N)^2} = -T \frac{\partial N}{\partial p} \quad [3.76]$$

La derivada que aparece en la ecuación [3.76], la cual aparece en la discusión anterior de la ecuación [3.23], es proporcional a *elasticidad-precio* (p/N) ($\partial N/\partial p$). Theil asumió que, para un agente económico dado, se satisface una relación similar a la ecuación [3.76]. Aunque no dio el coeficiente de proporcionalidad, su intuición económica lo llevó a sugerir que el coeficiente de proporcionalidad debe ser el mismo para todos los bienes. (No incluyo el concepto de temperatura en este contexto.)

La ecuación [3.76] va más allá de la predicción de que las fluctuaciones se incrementan por T fija, si la $\partial N/\partial p$ (semejante a la susceptibilidad o compresibilidad) se incrementa, y que las fluctuaciones se incrementan cuando T se incrementa, cuando $\partial N/\partial p$ es fija. Note que si $\overline{(\delta N)^2}$ y $\partial N/\partial p$ puede ser medido para un sistema en equilibrio con fluctuaciones gaussianas, entonces la ecuación [3.76] puede ser usada para determinar la temperatura económica.

Conclusiones

Dado que la termodinámica modela a partículas en base a la fenomenológica de los efectos producidos por una gran cantidad de pequeñas partículas, este trabajo estudia a la Economía como una ciencia fenomenológica, en base a los efectos producidos por una gran cantidad de pequeñas economías.

Suponiendo que la utilidad, U , puede ser dada en unidades monetarias, de modo que la termometría económica pueda ser realizada (en principio), se tiene desarrollada una analogía entre las cantidades económicas superávit, Ψ utilidad, U , y riqueza, W , en cantidades termodinámicas TS , energía, E y energía libre de Helmholtz, F .

En el capítulo 3, tentativamente, se hizo un lenguaje común para identificar la temperatura T con la tasa de interés y la velocidad del dinero, S . Aún cuando las cantidades T y S corresponden, en la última parte, a variables monetarias, las cuales son referidas en discusiones económicas de neutralidad del dinero.

Así mismo lleva aparentemente a nuevos resultados: una relación económica de Gibbs-Duhem; la ecuación del superávit marshalliana, Ψ para TS ; la ecuación TdS para el incremento en la utilidad a bienes, N y moneda, M , fijos. La interpretación de TdS como un superávit, nuevas y más precisas relaciones de Slutsky; y las relaciones entre las medidas de la utilidad y el establecimiento de una escala de temperatura económica.

Probablemente la mejor forma de probar esta analogía es desarrollando modelos microscópicos para el comportamiento de sistemas económicos específicos. Como un siguiente trabajo, se intenta realizar descripciones de comportamientos económicos reales en base a este modelo.

A finales del siglo XIX, Irving Fisher desarrolló una analogía mecánica entre la Economía y la Física, envolviendo fuerza y distancia para ser una analogía para el precio y el número de bienes, respectivamente. En el presente trabajo se hizo una analogía termodinámica, envolviendo el potencial químico y el número de bienes y especialmente la temperatura y entropía. Tal punto de vista podría ser reconocido inmediatamente por Fisher.

Es difícil saber si la suposición de una economía en equilibrio es correcta además no se sabe si las medidas econométricas son bastante exactas para probar la teoría, y por lo tanto, también saber si un sistema está en equilibrio. Sin embargo, si un sistema no económico esta de verdad en equilibrio, las analogías propuestas aquí pueden tener valor para sistemas que están ligeramente fuera de equilibrio.

Un número sorprendentemente grande de aparentemente nuevos resultados tiene que ser obtenido usando razonamientos microscópicos asociados con la termodinámica. De hecho es posible que mejores analogías puedan ser desarrolladas. Es posible suponer que sistemas económicos que son permanentes y están en equilibrio provocan que la riqueza sea conservada bajo intercambio con precios fijos. Estas suposiciones no pueden ser literalmente ciertas.

Probablemente la mejor forma para probar la analogía económica-termodinámica es aplicándola a las medidas económicas de un sistema que se piensa está en equilibrio económico, o cerca del equilibrio. Note que la Economía individualmente aparecerá en los micro-aspectos de la analogía económica-estadística-mecánica de la sección correspondiente. Es posible que la mejor forma de probar esta analogía es desarrollando modelos microscópicos para el comportamiento de sistemas económicos específicos. Igual si la analogía requiere modificación, ello sugerirá direcciones para futuras investigaciones.

Recomendación para futuras investigaciones

A lo largo de la presente investigación, surgieron muchas dudas respecto a si era correcto mantener la analogía entre sistemas termodinámicos y económicos dentro del equilibrio, sin embargo por simplicidad así se consideró, de lo que surgieron conclusiones importantes para la Economía en referencia a las ecuaciones fundamentales análogas a la Física.

A consideración del autor lo siguiente es extender la investigación en sistemas fuera del equilibrio, dado a que en los sistemas económicos hay una multitud de elementos individuales que influyen de manera no lineal en el estado general del mismo.

Por lo anterior, se propone el estudio mediante en análisis de sistemas complejos, siendo además utilizado este concepto anteriormente por medio del estudio de la entropía. La ciencia de los sistemas complejos, permite identificar patrones evolutivos o plantear conjeturas acerca de aspectos cualitativos esenciales en otros procesos, en donde, aparentemente, el predominio de lo azaroso hace vana la búsqueda de lo estructural.

Apéndice A

Relaciones de Maxwell

Las ecuaciones que relacionan a las derivadas parciales de propiedades S , T , P y V de un sistema compresible simple entre sí se conocen como *relaciones de Maxwell*. Se obtienen a partir de las cuatro ecuaciones fundamentales y representan igualdades de las segundas derivadas de cada uno de los potenciales termodinámicos con respecto a sus variables térmicas (temperatura T y entropía S) y sus variables mecánicas (presión P y volumen V), medio por el que se puede expresar la energía, energía libre de Helmholtz, energía libre de Gibbs y entalpía, en función de variables medibles, explotando la exactitud de las diferenciales de las propiedades termodinámicas

A.1 Relaciones de Maxwell en termodinámica

Considere a la energía como función de tres variables S , V y N , la cual es una magnitud abstracta que está ligada al estado dinámico de un sistema cerrado y que permanece invariante con el tiempo, según la primera ley de la termodinámica y representa la capacidad de un sistema para realizar trabajo.

$$E(S, V, N) = TS - PV + \mu N,$$

el cual nos muestra que diferenciando la energía E se obtiene

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} dV + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} dN, \quad [1.6]$$

en donde

$$T \equiv \frac{\partial E}{\partial S} \quad -P \equiv \frac{\partial E}{\partial V}; \quad \mu \equiv \frac{\partial E}{\partial N}$$

y por lo tanto se obtienen tres relaciones de Maxwell. Si se consideran las derivadas parciales respecto al par S y V ,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} = \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,N}$$

Las derivadas respecto a V y N se representan por medio

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial N} = \frac{\partial^2 E}{\partial N \partial V}; \quad - \left(\frac{\partial P}{\partial N} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{S,N}$$

Por último con las variables S y N ,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial N \partial S} = \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial N}; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_{V,N} = \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_{S,V}$$

En forma semejante pueden obtenerse relaciones de Maxwell para los diferentes potenciales termodinámicos, proceso que se seguirá a continuación.

La energía libre de Helmholtz, por su parte mide la capacidad de un sistema para efectuar trabajo útil en un proceso isotérmico, determinandose en función de T , V y N

$$F(T, V, N) = -ST - PV + \mu N$$

tomando el diferencial

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} dV + \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} dN,$$

en donde

$$-S \equiv \frac{\partial F}{\partial T}; \quad -P \equiv \frac{\partial F}{\partial V}; \quad \mu \equiv \frac{\partial F}{\partial N}$$

Al igual que en el desarrollo para determinar las derivadas cruzadas en la energía, E , se realiza ahora con la energía libre de Helmholtz, F , haciendose de igual manera en parejas. Determinando en relación a la T , y V , se obtiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N}.$$

Las derivadas cruzadas con V y N muestran que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial N} = \frac{\partial^2 F}{\partial N \partial V}; \quad - \left(\frac{\partial P}{\partial N} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{T,N}.$$

Así mismo, al calcular las relaciones entre N y T , se obtiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial N \partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial N}; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{V,N} = - \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{T,V}.$$

La energía libre de Gibbs el cual representa el trabajo mínimo que tiene que hacerse sobre un sistema para efectuar un proceso, esta en función de

$$G(T, P, N) = -ST + VP + \mu N,$$

haciendose explicito su diferencial por medio de

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,N} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,N} dP + \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,P} dN,$$

en el cual

$$-S \equiv \frac{\partial G}{\partial T}; \quad V \equiv \frac{\partial G}{\partial P}; \quad \mu \equiv \frac{\partial G}{\partial N},$$

en donde las relaciones cruzadas entre T y P se expresan

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P} = \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial T}; \quad - \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N}.$$

Derivando respecto a P y N

$$\frac{\partial^2 G}{\partial P \partial N} = \frac{\partial^2 G}{\partial N \partial P}; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial N} \right)_{T,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{T,N}.$$

En relación a N y T

$$\frac{\partial^2 G}{\partial N \partial T} = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial N}; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{P,N} = - \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{T,P}$$

De igual forma se determinan las relaciones cruzadas de la entalpía, la cual expresa una medida de la cantidad de energía absorbida o cedida por un sistema termodinámico. Estando determinada por

$$H(S, P, N) = TS + VP + \mu N,$$

en donde su diferencial se expresa por medio de

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{P,N} dS + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S,N} dP + \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{S,P} dN,$$

de donde se desprenden las siguientes definiciones

$$T \equiv \frac{\partial H}{\partial S}; \quad V \equiv \frac{\partial H}{\partial P}; \quad \mu \equiv \frac{\partial H}{\partial N}$$

las relaciones cruzadas respecto a S y P , muestran

$$\frac{\partial^2 H}{\partial S \partial P} = \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial S}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P,N}.$$

Las derivadas respecto a P y N implican

$$\frac{\partial^2 H}{\partial P \partial N} = \frac{\partial^2 H}{\partial N \partial P}; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial N} \right)_{S,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{S,N}.$$

Calculando la relación entre N y S se obtiene

$$\frac{\partial^2 H}{\partial N \partial S} = \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial N}; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_{P,N} = \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_{S,P}.$$

A.2 Relaciones de Maxwell para Economía

Una vez formulados los cuatro postulados básicos para economía: la utilidad U , análogo de la energía E ; la riqueza W análogo de la energía libre de Helmholtz F ; el superávit Ψ con con el trabajo térmico TS ; la entalpía económica o utilidad no aprovechable H_E , análogo de la entalpía H ; y por último la energía libre de Gibbs económica G_E generada o utilidad no aprovechable por efectos en la tasa de interés además de los representados en la entalpía, análogo de la energía libre de Gibbs G . Lo que sigue es la derivación parcial de estos y la obtención de las relaciones económicas de Maxwell.

Se iniciará por determinar las relaciones cruzadas en relación a la utilidad U , la cual representa la satisfacción obtenida por el consumo de un bien o servicio, definiéndose por:

$$U(S, M, n) = TS + \lambda M + pn.$$

en forma diferencial de la utilidad U se representa por

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{M,n} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{S,n} dM + \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{S,M} dn,$$

en donde

$$T \equiv \frac{\partial U}{\partial S}; \quad \lambda \equiv \frac{\partial U}{\partial M}; \quad p \equiv \frac{\partial U}{\partial n}.$$

El diferencial de S y M queda definido por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial M} = \frac{\partial^2 U}{\partial M \partial S}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial M} \right)_{S,n} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{M,n},$$

las relaciones cruzadas de M y n muestran

$$\frac{\partial^2 U}{\partial M \partial n} = \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial M}; \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n} \right)_{S,M} = \left(\frac{\partial p}{\partial M} \right)_{S,n},$$

y en donde las relaciones entre n y S

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial n}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{M,n} = \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{S,M}.$$

Por su parte, la riqueza W definida como la totalidad de aquellos bienes de que dispone un sujeto, siendo una cantidad es menor que la necesidad del mismo, queda expresada como

$$W(T, M, n) = ST + \lambda M + pn$$

diferenciando la riqueza W ,

$$dW = \left(\frac{\partial W}{\partial T} \right)_{M,n} dT + \left(\frac{\partial W}{\partial M} \right)_{T,n} dM + \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{T,M} dn,$$

expresando que

$$S \equiv \frac{\partial W}{\partial T}; \quad \lambda \equiv \frac{\partial W}{\partial M}; \quad p \equiv \frac{\partial W}{\partial n}.$$

Determinando las relaciones entre T y M se obtiene

$$\frac{\partial^2 W}{\partial T \partial M} = \frac{\partial^2 W}{\partial M \partial T}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_{T,n} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_{M,n},$$

en relación a M y n

$$\frac{\partial^2 W}{\partial M \partial n} = \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial M}; \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n} \right)_{T,M} = \left(\frac{\partial p}{\partial M} \right)_{T,n},$$

con respecto a n y T implica

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial T} = \frac{\partial^2 W}{\partial T \partial n}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{M,n} = \left(\frac{\partial S}{\partial n} \right)_{T,M}.$$

Así mismo, también se obtendrán las relaciones de Maxwell para el superávit, término económico que representa el excedente de la utilidad sobre la riqueza, quedando definido como

$$\Psi(S, \lambda, p) = TS + M\lambda + np$$

haciendo explícito $d\Psi$,

$$d\Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial S} \right)_{\lambda,p} dS + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right)_{S,p} d\lambda + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right)_{S,\lambda} dp,$$

en donde

$$T \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial S}; \quad M \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}; \quad n \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial p},$$

derivando respecto a S y λ

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial S \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial S}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda} \right)_{S,p} = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{\lambda,p}$$

las derivadas cruzadas de λ y p muestran

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial p} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial \lambda}; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial p} \right)_{S,\lambda} = \left(\frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)_{S,p},$$

por último al calcular las relaciones entre p y S se obtiene

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial S} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial S \partial p}; \quad \left(\frac{\partial n}{\partial S} \right)_{\lambda,p} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{S,\lambda}$$

Por otra parte, se tiene la entalpía económica H_E , definida como la utilidad que se pierde por la ineficiencia de la política pública, y representada por

$$H_E(S, \lambda, n) = TS + M\lambda + pn$$

mostrandose H_E diferenciado,

$$dH_E = \left(\frac{\partial H_E}{\partial S} \right)_{\lambda,n} dS + \left(\frac{\partial H_E}{\partial \lambda} \right)_{S,n} d\lambda + \left(\frac{\partial H_E}{\partial n} \right)_{S,\lambda} dn,$$

de lo que resulta

$$T \equiv \frac{\partial H_E}{\partial S}; \quad M \equiv \frac{\partial H_E}{\partial \lambda}; \quad p \equiv \frac{\partial H_E}{\partial n}; \quad \frac{\partial^2 H_E}{\partial S \partial \lambda} = \frac{\partial^2 H_E}{\partial \lambda \partial S}.$$

Calculando las relaciones entre S y λ , se muestra que

$$\frac{\partial^2 H_E}{\partial S \partial \lambda} = \frac{\partial^2 H_E}{\partial \lambda \partial S}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda} \right)_{S,n} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\lambda,n},$$

haciendo lo mismo en relación a λ y n ,

$$\frac{\partial^2 H_E}{\partial \lambda \partial n} = \frac{\partial^2 H_E}{\partial n \partial \lambda}; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial n} \right)_{S,\lambda} = \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{S,n},$$

Por último en relación a la entalpía económica, se relaciona n y S , obteniéndose

$$\frac{\partial^2 H_E}{\partial n \partial S} = \frac{\partial^2 H_E}{\partial S \partial n}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{\lambda, n} = \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{S, \lambda}.$$

La energía libre de Gibbs económica, G_E , muestra otro tipo de energía útil en el sistema económico, ya que es análogo a la energía libre de Helmholtz, F , la riqueza, W , en economía, sin embargo, la única variante es que toma como variable el deflactor del PIB, λ , y no la cantidad de dinero, M , por lo tanto queda definida como:

$$G_E(T, \lambda, n) = ST + M\lambda + pn,$$

diferenciado la ecuación,

$$dG_E = \left(\frac{\partial G_E}{\partial T} \right)_{\lambda, n} dT + \left(\frac{\partial G_E}{\partial \lambda} \right)_{T, n} d\lambda + \left(\frac{\partial G_E}{\partial n} \right)_{T, \lambda} dn,$$

lo cual muestra que

$$S \equiv \frac{\partial G_E}{\partial T}; \quad M \equiv \frac{\partial G_E}{\partial \lambda}; \quad p \equiv \frac{\partial G_E}{\partial n}.$$

Al derivar respecto a T y λ ,

$$\frac{\partial^2 G_E}{\partial T \partial \lambda} = \frac{\partial^2 G_E}{\partial \lambda \partial T}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)_{T, n} = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\lambda, n},$$

y relacionando λ y n ,

$$\frac{\partial^2 G_E}{\partial \lambda \partial n} = \frac{\partial^2 G_E}{\partial n \partial \lambda}; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial n} \right)_{T, \lambda} = \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{T, n},$$

y por último al diferenciar n y T se obtiene

$$\frac{\partial^2 G_E}{\partial n \partial T} = \frac{\partial^2 G_E}{\partial T \partial n}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\lambda, N} = \left(\frac{\partial S}{\partial n} \right)_{T, \lambda}.$$

Apéndice B

Reglas de diferenciación parcial y fórmula de Stirling

B.1 Reglas de diferenciación parcial

1. Identificar las variables independientes, por ejemplo S y V .
2. Si $E = E(S, V)$, la derivada parcial de E con respecto de S con V constante, es $\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V$,
3. por lo tanto

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_S = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_S = 1,$$

4. el orden de las diferenciación no tiene importancia para las propiedades,

$$\left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V\right]_S = \left[\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S\right]_V.$$

5. El cambio en E es resultado de cambios en S y V ,

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S dV \quad [1]$$

6. Se tomarán S y V como variables independientes, con $S = S(V, E)$. Ahora las derivadas parciales son

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V,$$

note que primero no es requerido para que sea E no S que se mantiene constante. En este caso

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E dV + \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V dE. \quad [2]$$

7. Comparando [1] y [2] con $dV = 0$,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V} \quad [3]$$

8. De [1] se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V dS &= - \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S dV && \text{para la constante } E \\ \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E &= - \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = - \left[\left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_S\right]^{-1} && \text{usando (3)} \\ \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E \left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_S &= -1 && [4] \end{aligned}$$

9. En la segunda línea, dividiendo dS por dV da $(\partial S/\partial V)_E$, no (dS/dV) porque la primera línea fue verdadera solamente para E constante. Reacomodando [4] se tiene

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E = - \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S}{\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V}{\left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_S} \quad [5]$$

Las ecuaciones [3], [4] y [5] son nuestros principales resultados.

B.2 Fórmula de Stirling

Esta fórmula permite calcular el valor aproximado de $\ln N!$, cuando N es muy grande, mediante la expresión

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

Para demostrar la fórmula de Stirling, se comenzará por desarrollar la función de $\ln N!$, de manera que

$$\ln N! = \ln \prod_{i=1}^N (N - i + 1) = \sum_{i=1}^N \ln (N - i + 1) = \ln N + \ln (N - 1) + \ln (N - 2) \dots$$

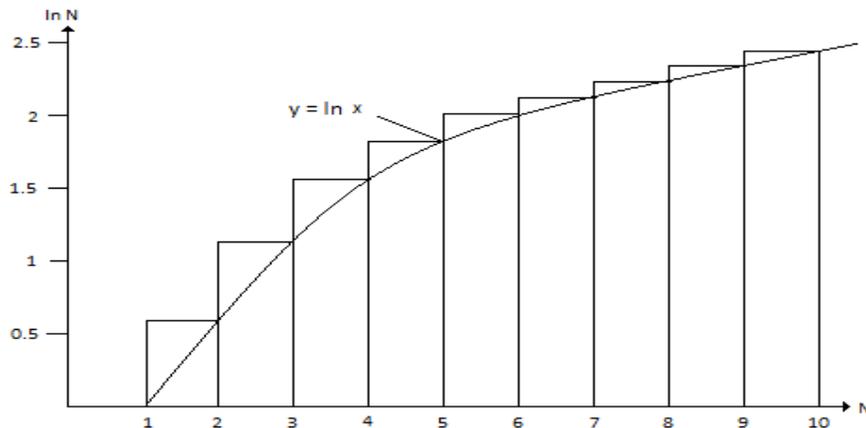


Figura 2. Aproximación de la fórmula de Stirling.

La suma de los términos del último miembro de esta expresión, corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos, indicados en la siguiente figura, todos ellos de base unitaria, cuyas alturas respectivas son $\ln 2, \ln 3, \ln 4, \dots, \ln N$. En el caso de que N sea muy grande, esta área es igual a la comprendida entre la curva $y = \ln x$ y las ordenadas extremas en los puntos $x = 1$ y $x = N + 1$, ya que en estas condiciones el área no considerada (sombreada) es despreciable en comparación con el área delimitada bajo la curva. Así pues, se tiene

$$\ln N! \approx \int_1^N \ln x dx$$

que integrada "por partes" conduce a

$$\ln N! \approx N \ln N - N + 1$$

y, puesto que estamos considerando valores de $N \gg 1$, puede despreciarse 1 frente a N en la expresión anterior, resultando:

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

que es la fórmula correspondiente a la aproximación de Stirling. Resulta útil en diversas áreas como la mecánica estadística, donde aparecen ecuaciones que contienen factoriales del número de partículas. Puesto que en la materia ordinaria los sistemas macroscópicos típicos tienen en torno a $N \approx 10^{23}$ partículas, la fórmula de Stirling resulta muy aproximada. Además la fórmula aproximante de Stirling es diferenciable, lo cual permite el cálculo muy aproximado de máximos y mínimos en expresiones con factoriales.

Bibliografía

- Arieh Ben-Naim, (2008), *Entropy Demystified*, World Scientific, Singapur.
- A. Carbone, G. Kaniadakis, A.M. Scarfone, (2007), Where do we stand on econophysics?, *Physica A* 382 xi-xiv.
- Bannock, Graham.; Baxter R. y Ray Rees, 1999, *Diccionario de Economía*, México, Trillas, 2e, 5r.
- B.K. Chakrabarti, A. Chakraborti, A. Chatterjee, (2006), *Econophysics and Sociophysics*, Wiley-VCH, Federal Republic of Germany.
- F. Reif, (1996), *Física estadística*, Ed. Reverte, España.
- García, Leopoldo y Colín Scherer, 1995, *Termodinámica Estadística*, México, UAM.
- García, Leopoldo y Colín Scherer, 1998, *Introducción a la Termodinámica Clásica*, México, Trillas, 4e.
- Georgescu, N y Roegen, 1972, *The Entropy law and the economic process*, Cambridge M. A , E.U., Harvard U. P.
- Giovani L. Vasconcelos, (2004) A guided walk down Wall Street: An introduction to Econophysics, *Brazilian Journal of Physics*, Vol. 34, No. 3b, September.
- Hull, Gutierrez-Sánchez José L., (2000), *Sociedad, política, cultura y sistemas complejos*, *Ciencias* 59, julio-septiembre.
- Hull, John, 2006, *Options, futures, and other derivatives*, Nueva Jersey, E.U., Person Prentice Hall.
- I. Prigogine, (1998), *Introduction to thermodynamics of irreversible process*, Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons, 3a. Edition.
- Jere H. Brophy, Robert M. Rose, John Wulff, (1984), *Ciencia de los materiales, propiedades termodinámicas*, México, Limusa.
- Joseph Kestin, J. R. Dorfman (1971), *A course in statistical thermodynamics*, Academic Press New York and London, USA.

- Mansilla, Ricardo, 2003, *Introducción a la Econofísica*, Madrid España, Equipo Sirius.
- Mantegna, Rosario and Eugene Stanley, 2000, *An introduction to econophysics correlations and complexity in finance*, Cambridge, Inglaterra, Cambridge University Press.
- McCauley, J., 2003, Thermodynamic analogies un economics and finance: stability of markets, *Physica A*. 329.
- Melanie Mitchell, (2009), *Complexity a guided tour*, Oxford University Press, USA.
- Philippe Jean y Marc Potters, 2003, *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, Cambridge Cambridge, 2e.
- Resnick; Halliday y Krane, 1996, *Física*, México, Continental, vol. 1, 4e.
- R. W. Christy, Agnar Pytte (1971) *Estructura de la materia*, Ed. reverte, Buenos Aires.
- Silberbeg, E. 1990, *The structure of economics: a mathematical analysis*, Nueva York, E.U., McGraw-Hill.
- Smith; Van Ness y Abbott 1997, *Introducción a la Termodinámica en Ingeniería Química*, México, Mc. Graw Hill, 5e.
- Sousa, Tânia y Tiago Domingos, 2006, *Equilibrium econophysics: A unified formalism for neoclassical economics and equilibrium thermodynamics*, Lisboa, Portugal, *Physica A*, no. 371.
- Stanley Fischer; Rudiger Dornbusch y Richard Schmalensee, 1994, *Economía*, México, McGraw-Hill, 2e.
- Stanley, H, y otros, 1999, *Econophysics: can physicists contribute to the science of economics?*, *Physica A*, no. 269.
- Vandewalle, N. y Ausloos M., 1997, *Coherent and random sequences in financial fluctuations*, *Physica A*, 246.
- Venegas, Francisco 2006, *Riesgos financieros y económicos*, México, Thomson.
- Wark, (1991), *Termodinamica*, Mexico, Mc. Graw-Hill, 5e.
- Wayne, Saslow, 1999, *An economic analogy to thermodynamics*, Texas, E.U., *American Journal Physics*, no. 67 (12).

W. Paul Cockshott, Allin F. Cottrell, Gregory J. Michaelson, Ian P. Wright and Victor M. Yakovenko, (2009), Classical Econophysics, Routledge advances in experimental and computable economics, New York, USA.

Yunus A. Cengel, Michael A. Boles (2002), Termodinámica, México, Mc. Graw-Hill, 4e.

Zemanasky, Marck y Richard Dittman, 1986, Calor y termodinámica, México, Mc. Graw-Hill, 6e.