

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS  
SECCIÓN DE GRADUADOS**

**“Mecánica cuántica supersimétrica a segundo orden confluyente y aplicaciones”**

TESIS  
que para obtener el grado de  
**DOCTOR EN CIENCIAS**  
de la especialidad  
**FÍSICA**  
presenta

**Encarnación salinas Hernández**

bajo la dirección de  
**Dr. David José Fernández Cabrera**

Lindavista, México

Octubre de 2009

Agradezco al **CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA (CONACYT)**, por el apoyo económico que he recibido durante mis estudios de Doctorado, así como a la **ESFM del IPN**, por la formación que me brindó y de la que estoy orgulloso de ser egresado.

Así mismo, deseo agradecer al **CINVESTAV**, las facilidades otorgadas para desarrollar esta tesis.



A mis padres: **Rodolfo Salinas Cruz y Juana Hernández Gonzaga**

Gracias por todo lo que me han dado en la vida y enseñarme a no olvidar mi origen

**“Con mucho amor y respeto”.**



A mi esposa: **Aida Pineda Tirado**

Que me motivó durante todo este tiempo y estuvo esperando con mucha ansia este momento.

**Gracias**

A mis hijos: **José Roberto y Felipe de Jesús**

Por los grandes momentos que hemos pasado y que siempre sean felices.



A mis hermanos: **Rodolfo, Felipe, Mario, Victoria, Juan, Guadalupe, Rafael, Jorge y María.**

Así como mis cuñadas: **Martha, Alicia, Chavela, Domitila y Lisbeth.**  
Mis sobrinos: **Marisol, Raúl, Veronica, Raquel, Mario, Karina, Ulises, Jamilet, Janet, Julio, Ivan, Daniel, Jessica y Valeria.** Por último a mis sobrinos nietos: **Libny Marisol, Jaciel, Joselin, María Luisa, Mauricio, Alan y Melisa.**

Aunque parezca un sueño: **“Ya se alcanzó un nuevo peldaño para la familia Salinas”.**



Al **Dr. David J. Fernández Cabrera** por su infinita paciencia, al dirigir esta tesis. También deseo expresar mi profunda admiración y respeto, a su gran capacidad y aguda intuición para hacer investigación, que de alguna forma me han motivado a continuar por este escabroso pero a la vez bello camino.

Al **Dr. José Oscar Rosas Ortiz**, por su apoyo e importantes sugerencias y comentarios.

“Gracias a ambos”



Al **Dr. Fernando Angulo Brown**, por su gran apoyo y motivación para continuar con esta tesis, que en algún momento quedó esperando a ser retomada.

A mis sinodales: **Dr. David Granados García, Dr. Jesús García Ravelo, Dr. Shi-Hai- Dong, Dr. Alfonso Queijeiro Fontana.**

Por su apoyo en la revisión y aceptación, así como importantes sugerencias para la finalización de esta tesis.

**Gracias**



A todos mis compañeros profesores del Departamento de Ciencias Básicas:  
**Carballo, Manríquez, Nuño, Trujillo, Luis, Florencia, Abel, Olvera,  
Chávez, Misael, Benjamín, Zelín, Ceballos, Cesar, Patricia, Karina  
y Jazmín.**

Gracias por todos esos gratos momentos que hemos pasado durante estos  
años

**Manríquez este arroz ya se coció !**



# Resumen

En esta tesis trabajamos el caso confluyente de la mecánica cuántica supersimétrica a segundo orden, en la cual las dos energías de factorización son la misma. Encontramos cuales son los comportamientos apropiados de las soluciones para evitar nuevas singularidades en el potencial generado. Mostramos después que la modificación al potencial inicial depende del wronskiano de las dos eigenfunciones generalizadas. Aplicamos nuestro método a la partícula libre, al potencial de *Pöschl – Teller*, al oscilador armónico estándar y a la parte radial del átomo de hidrógeno. Finalmente, resumimos nuestros resultados y discutimos algunas posibilidades de trabajos futuros.



# Abstract

In this thesis we address the confluent case of the second-order supersymmetric quantum mechanics, in which the two factorization energies are the same. We find the right behavior of the solutions to avoid new singularities in the generated potential. Then we show that the modification to the initial potential depends on the wronskian of two generalized eigenfunctions. We apply our method to the free particle, *Pöschl – Teller* potential, standard harmonic oscillator and the radial part of the hydrogen atom. Finally, we summarize our results and discuss some possibilities of further work.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>25</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>29</b>
2.1. El método de factorización . . . . .	29
<b>3. Mecánica cuántica supersimétrica de primer orden</b>	<b>39</b>
3.1. Entrelazamiento de primer orden . . . . .	39
<b>4. Mecánica Cuántica Supersimétrica a 2do orden</b>	<b>43</b>
4.1. Transf. 2-SUSY a partir de iteraciones 1-SUSY . . . . .	43
4.2. Método directo para la transformación 2 – <i>SUSY</i> . . . . .	46
4.3. Clasificación de las transformaciones 2-SUSY . . . . .	49
<b>5. El algoritmo confluyente y aplicaciones</b>	<b>53</b>
5.1. El algoritmo confluyente . . . . .	53
5.2. El Wronskiano . . . . .	55
5.3. Aplicaciones . . . . .	58
<b>6. Conclusiones, resultados y perspectivas</b>	<b>81</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>82</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>



# Capítulo 1

## Introducción

A principios del siglo 20 la Física comenzó a tener una serie de dificultades conceptuales al tratar de entender ciertos fenómenos. Problemas tales como la radiación de cuerpo negro, el calor específico de los cuerpos, el comportamiento Ondulatorio-Corpuscular de la luz, etc., pusieron en entredicho los fundamentos de la Física de Newton y la teoría electromagnética de Maxwell. Dicha problemática provocó que físicos de todo el mundo hicieran la proposición de nuevos postulados para poder resolver dichos problemas, así como otros que en su momento no tenían explicación. Fue así como nació la Mecánica Cuántica. Cabe señalar que algunos de los principios que la sustentan carecen de sentido común, como el principio de incertidumbre donde se establece que no se pueden medir la posición y el momento de la partícula al mismo tiempo, situación que en la mecánica Newtoniana resulta absurda. Las bases de la mecánica cuántica se fueron acumulando poco a poco hasta culminar con una de las mayores contribuciones en su desarrollo: la ecuación de *Schrödinger*.

Para un sistema caracterizado por un potencial  $V(x)$ , al resolverse la ecuación de *Schrödinger* se obtienen las funciones de onda que describen a tal sistema. Al multiplicarse éstas por su complejo conjugado e integrarse en un cierto intervalo, se obtiene la probabilidad de encontrar a una partícula en la región de integración. Así, el módulo al cuadrado de la función de onda es la densidad de probabilidad de la posición del sistema.

Además, de esa ecuación se obtiene información sobre el espectro de energía de tal sistema. Respecto a esto, es curioso notar que sólo se pueden en-

contrar soluciones analíticas de la ecuación de *Schrödinger* para un grupo selecto y reducido de problemas bien identificados en la literatura. Estos incluyen al oscilador armónico, la partícula libre, el potencial de *Pöschl–Teller*, el átomo de hidrógeno, entre otros. Para cada uno de estos problemas se requiere un tratamiento matemático específico, dependiente de las características peculiares que cada uno de los potenciales mencionados le otorga a la ecuación de *Schrödinger*. De hecho, el aventurarse a resolver tal ecuación para potenciales  $V(x)$  que no son del grupo selecto significa, en general, una complicación excesiva en el intento de encontrar soluciones analíticas de dicha ecuación.

La línea de investigación que sigue este trabajo consiste en generar nuevos potenciales, así como nuevas soluciones de la correspondiente ecuación de *Schrödinger*, a partir de potenciales que tienen soluciones analíticas. Para conseguirlo, haremos uso de lo que se conoce como mecánica cuántica supersimétrica de primero (1-SUSY QM) y segundo orden (2-SUSY QM) [1, 2] aunque ya existen algunos trabajos relativos al caso de tercer orden. La técnica se basa en la relación de entrelazamiento operatorial de primero y segundo orden, según sea el caso. Históricamente, las soluciones que se obtienen a primer orden son analíticas parcial o completamente dependiendo del potencial de arranque. Sin embargo, suelen aparecer singularidades adicionales en el nuevo potencial durante el proceso de transformación. Andrianov, Ioffe y Spiridonov [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] fueron los primeros que introdujeron la mecánica cuántica supersimétrica de segundo orden, primeramente para evitar las singularidades que surgen a primer orden y posteriormente para profundizar en el estudio de la supersimetría.

La palabra supersimetría originalmente fue empleada para denominar una simetría que aparece en teorías de campo, que permite transformaciones entre campos cuyos espines intrínsecos difieren por  $\hbar/2$ . Es a partir de 1981, con el trabajo desarrollado por Witten, cuando se reconoce que la supersimetría podría usarse en mecánica cuántica como un modelo de juguete de teoría del campo. Por ello, a partir de entonces se le conoce como mecánica cuántica supersimétrica.

El álgebra de la mecánica cuántica supersimétrica estándar involucra dos generadores  $Q_1$  y  $Q_2$ , también llamados supercargas, además de conmutadores y anticonmutadores de la forma siguiente:

$$\{Q_j, Q_k\} = Q_j Q_k + Q_k Q_j = \delta_{jk} H_{ss}, \quad (1.1)$$

$$[H_{ss}, Q_j] = H_{ss} Q_j - Q_j H_{ss} = 0, \quad j, k = 1, 2, \quad (1.2)$$

en donde

$$Q_1 = \frac{Q^\dagger + Q}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{Q^\dagger - Q}{i\sqrt{2}} \quad (1.3)$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Lo anterior define de manera natural al Hamiltonian supersimétrico:

$$H_{ss} = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & A A^\dagger \end{pmatrix}$$

En el caso que  $A$  y  $A^\dagger$  sean operadores diferenciales de primer orden adjuntos entre sí, se estará trabajando con la mecánica cuántica supersimétrica estándar, o 1-SUSY QM, en la cual existe una relación lineal entre el Hamiltoniano supersimétrico  $H_{ss}$  y la matriz  $H = \text{diag}\{H_1, H_0\}$  que involucra al par de Hamiltonianos tipo *Schrödinger*  $H_0, H_1$  los cuales están entrelazados por los operadores  $A$  y  $A^\dagger$  de la siguiente manera:

$$H_0 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x), \quad (1.5)$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad (1.6)$$

$$H_1 A^\dagger = A^\dagger H_0 \quad \text{o} \quad H_0 A = A H_1. \quad (1.7)$$

Para el caso 2-SUSY las expresiones (1.4), (1.5) y (1.6) son las mismas, sólo que en vez de que  $A$  y  $A^\dagger$  sean de primer orden serán ahora operadores diferenciales de 2o orden. Lo anterior conduce a tres casos distintos, en

donde dos energías de factorización  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  están involucradas. Ambas están relacionadas con una constante real  $c$  en la forma:

$$\epsilon_1 = \frac{d + \sqrt{c}}{2}, \quad \epsilon_2 = \frac{d - \sqrt{c}}{2}. \quad (1.8)$$

Cabe señalar que  $c$  juega un papel determinante, ya que si  $c > 0$  se tiene que  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \in \mathbb{R}$ , así como  $c < 0$  implica que  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \in \mathbb{C}$  mientras, si  $c = 0$  se tiene que  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \in \mathbb{R}$ . Este último caso es precisamente el llamado caso confluyente, alrededor del cual gira esta tesis.

En este trabajo se demuestra que en el caso confluyente se cuentan con dos soluciones linealmente independientes, cuyo wronskiano al igual que en el caso real y complejo, permite determinar la modificación que sufre el potencial inicial. La primera es solución directa de la ecuación de *Schrödinger* y la segunda es una eigenfunción generalizada de segundo orden. Posteriormente se analizaron el tipo de soluciones que son viables para poder construir el potencial supersimétrico, no sin antes estudiar con cuidado el dominio del parámetro  $w_0$  para evitar singularidades. Los resultados obtenidos se ejemplificaron con la partícula libre, el potencial de *Pöschl – Teller*, el oscilador armónico y la parte radial del átomo de Hidrógeno. Cabe notar que esto se realizó considerando tanto soluciones físicas como las no físicas de la ecuación de *Schrödinger*. Finalmente se expresan una serie de conclusiones y se comentan algunos trabajos futuros relacionados con 3 – *SUSYQM*.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1. El método de factorización

Como es bien sabido, en la literatura existen diversas técnicas para resolver los clásicos problemas que admiten soluciones exactas en Mecánica Cuántica. Una de estas técnicas es el llamado método de factorización, el cual fue introducido inicialmente por *Schrödinger* y estudiado en gran detalle por Infeld y Hull [13]. Este consiste básicamente en descomponer el Hamiltoniano (que conduce a una ecuación diferencial de 2o orden) como producto de dos operadores diferenciales de primer orden. Para ilustrar como funciona la técnica, consideremos el caso del oscilador armónico, es decir, cuando el potencial es  $V(x) = \frac{x^2}{2}$ . La ecuación de eigenvalores que resulta para  $H$  es:

$$H\psi = \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 \right) \psi = \epsilon \psi. \quad (2.1)$$

La ecuación anterior se puede expresar como:

$$\left( AA^\dagger - \frac{1}{2} \right) \psi = \epsilon \psi \quad (2.2)$$

con

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{\frac{x^2}{2}} \quad (2.3)$$

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} + x \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.4)$$

es decir, se satisface

$$A^\dagger A = H - \frac{1}{2}, \quad AA^\dagger = H + \frac{1}{2}, \quad (2.5)$$

lo cual implica que  $[A, A^\dagger] = 1$  y con ello tenemos que

$$HA^\dagger = A^\dagger(H + 1), \quad HA = A(H - 1). \quad (2.6)$$

Supongamos ahora que  $\psi(x)$  es una eigenfunción de  $H$  con eigenvalor  $\epsilon$ . Usando (2.6) se pueden obtener las eigenfunciones asociadas a los eigenvalores  $\epsilon + 1$  y  $\epsilon - 1$ , mediante la acción de  $A^\dagger$  y  $A$  sobre  $\psi(x)$  respectivamente, ya que:

$$H(A^\dagger\psi(x)) = A^\dagger(H + 1)\psi(x) = (\epsilon + 1)A^\dagger\psi(x) \quad (2.7)$$

$$H(A\psi(x)) = A(H - 1)\psi(x) = (\epsilon - 1)A\psi(x). \quad (2.8)$$

Al considerar el nivel más bajo posible de energía para  $\psi$ , tendremos que  $A\psi_0(x) = 0$ , lo que implica que  $\psi_0(x) = C_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Se puede verificar que el correspondiente eigenvalor es  $E_0 = \frac{1}{2}$ . Aplicando el operador  $A^\dagger$  de manera subsecuente a  $\psi_0(x)$  se pueden obtener las otras eigenfunciones

$$\psi_0(x) = C_0 e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.9)$$

$$\psi_n(x) = C_n (A^\dagger)^n \psi_0(x) = \tilde{C}_n \left[ e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]^n e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.10)$$

cuyos eigenvalores son  $E_n = n + 1/2$ . Hasta antes del año 1984, la aplicación de la técnica previa a los sistemas que admiten solución exacta parecía reproducir sólo resultados bien conocidos. No obstante, en 1984 Mielnik [14] hizo la siguiente pregunta: Acaso los operadores de factorización  $A$  y  $A^\dagger$  son únicos?, para analizar este punto, Mielnik propuso la existencia de nuevos

operadores de factorización:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + \beta(x) \right), \quad B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} + \beta(x) \right) \quad (2.11)$$

y exigió además que se siguiera cumpliendo que

$$H + \frac{1}{2} = BB^\dagger. \quad (2.12)$$

Lo anterior condujo a que

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \beta' + \beta^2 \right). \quad (2.13)$$

Como consecuencia, es claro que la condición anterior equivale a pedir que se satisfaga la ecuación de Riccati

$$\beta'(x) + \beta^2(x) = 1 + x^2. \quad (2.14)$$

Para hallar la solución general a dicha ecuación, primero se toma en cuenta que existe ya una solución particular  $\beta = x$ . Posteriormente se propone que  $\beta = x + \phi(x)$ , lo cual conduce a

$$\phi' + 2x\phi + \phi^2 = 0. \quad (2.15)$$

Si se introduce una nueva función  $y = 1/\phi$  podrá verificarse fácilmente que

$$-y' + 2xy + 1 = 0 \quad (2.16)$$

cuya solución general es

$$y = \left( \gamma + \int_0^x e^{-z^2} dz \right) e^{x^2} \quad (2.17)$$

con  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, si recordamos que  $\beta(x) = x + \phi(x) = x + 1/y$ , se tendrá que

$$\beta(x) = x + \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x e^{-z^2} dz}. \quad (2.18)$$

Una vez obtenida la expresión para  $\beta(x)$ , se puede observar que el conmutador de  $B$  y  $B^\dagger$  no es un número:

$$[B, B^\dagger] = \beta'(x) = 1 + \phi'(x). \quad (2.19)$$

Por consiguiente

$$B^\dagger B = BB^\dagger + [B^\dagger, B] = H + \frac{1}{2} - 1 - \phi'(x) = \tilde{H} - \frac{1}{2} \quad (2.20)$$

donde

$$\tilde{H} = H - \phi'(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}(x) \quad (2.21)$$

con

$$\tilde{V}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x e^{-z^2} dz} \right]. \quad (2.22)$$

Es interesante resaltar el hecho de que para  $|\gamma| > \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$  el potencial (2,22) no tendrá singularidades y será semejante a  $\frac{x^2}{2}$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Por tanto, se obtiene una familia uniparamétrica de Hamiltonianos autoadjuntos en  $L^2(\mathbb{R})$ . Ahora bien, como se satisface que

$$\tilde{H}B^\dagger = \left( B^\dagger B + \frac{1}{2} \right) B^\dagger = B^\dagger \left( BB^\dagger + \frac{1}{2} \right) = B^\dagger(H + 1), \quad (2.23)$$

denotando por  $\phi_n(x)$  a las eigenfunciones normalizadas de  $\tilde{H}$ , tendremos que

$$\phi_1 = B^\dagger \psi_0, \phi_2 = B^\dagger \frac{\psi_1}{\sqrt{2}}, \phi_3 = B^\dagger \frac{\psi_2}{\sqrt{3}}, \dots, \phi_n = B^\dagger \frac{\psi_{n-1}}{\sqrt{n}}, \dots \quad (2.24)$$

Los eigenvalores correspondientes serán  $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$  ya que

$$\tilde{H}\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{H}B^\dagger \psi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} B^\dagger (H + 1) \psi_{n-1} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \phi_n$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dichas funciones son cuadrado integrables y están normalizadas ya que las  $\phi$ 's tienen un comportamiento asintótico apropiado cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Además, ellas son ortogonales entre sí:

$$\begin{aligned} (\phi_j, \phi_k) &= \frac{1}{\sqrt{jk}} (B^\dagger \psi_{j-1}, B^\dagger \psi_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{jk}} (\psi_{j-1}, BB^\dagger \psi_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{jk}} (\psi_{j-1}, (H + \frac{1}{2}) \psi_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{j}}} (\psi_{j-1}, \psi_{k-1}) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

si  $k \neq j$ . Para analizar la completitud del conjunto de eigenfunciones  $\{\phi_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$  supongamos que existe un elemento que no pertenece al conjunto, denotado por  $\phi_0$ , que es ortogonal a todos los  $\phi_n$ :

$$(\phi_0, \phi_n) \propto (\phi_0, B^\dagger \psi_{n-1}) = (B\phi_0, \psi_{n-1}) = 0 \quad (2.26)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Por lo tanto

$$B\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{d}{dx} + \beta(x) \right] \phi_0 = 0 \quad (2.27)$$

lo que conduce a

$$\phi_0 = C_0 e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\int_0^x \phi(z) dz} \quad (2.28)$$

Este último elemento se debe agregar al conjunto de eigenfunciones  $\phi_n$  de  $\tilde{H}$  previamente obtenidas, por lo que se concluye que el conjunto  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$  es completo en  $L^2(\mathbb{R})$ . Además, el eigenvalor asociado a  $\phi_0$  es  $E_0 = \frac{1}{2}$  ya que

$$\tilde{H}\phi_0 = \left( B^\dagger B + \frac{1}{2} \right) \phi_0 = \frac{1}{2} \phi_0. \quad (2.29)$$

Notar que estos resultados coinciden con los obtenidos por Abraham y Moses usando el formalismo de Gelfand-Levitan [19].

Otro trabajo similar al del oscilador fue elaborado por Fernández [15], en donde se sigue el tratamiento previo pero considerando al potencial del átomo de hidrogeno  $V(r) = \frac{-e^2}{r}$ . En este caso, la ecuación de *Schrödinger* se expresa como

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} \right] \psi(\vec{r}) = \lambda \psi(\vec{r}). \quad (2.30)$$

Si se realiza la separación de variables estándar en coordenadas esféricas  $\psi(\vec{r}) = Y(\theta, \phi)R(r)$ , el problema de eigenvalores previo se reduce a resolver el problema unidimensional siguiente

$$\frac{1}{r} \left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{r} \right] rR = \lambda R \quad (2.31)$$

donde  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$  es el número cuántico azimutal,  $r$  es una nueva coordenada sin dimensiones y las funciones  $R = \{R(r), 0 \leq r < \infty\}$ , forman

un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_r$  con el producto escalar definido por

$$(R, R') = 4\pi \int_0^{+\infty} \overline{R(r)} R'(r) r^2 dr. \quad (2.32)$$

Podemos definir

$$H_\ell = \frac{1}{r} \left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{r} \right] r. \quad (2.33)$$

El operador anterior admite un par de factorizaciones de la forma

$$H_\ell = A_\ell^\dagger A_\ell - \frac{1}{\ell^2}, \quad (2.34)$$

$$H_\ell = A_{\ell+1} A_{\ell+1}^\dagger - \frac{1}{(\ell+1)^2}, \quad (2.35)$$

donde

$$A_\ell = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r} - \frac{1}{\ell} \right] r \quad (2.36)$$

y

$$A_\ell^\dagger = \frac{1}{r} \left[ -\frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r} - \frac{1}{\ell} \right] r. \quad (2.37)$$

Siguiendo ahora la técnica usada para el oscilador, se puede uno preguntar: ¿Son los operadores  $A_\ell^\dagger$  y  $A_\ell$  únicos?. Para encontrar la respuesta, nuevamente se propone la existencia de operadores más generales

$$B_\ell = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} + \beta_\ell(r) \right] r \quad (2.38)$$

$$B_\ell^\dagger = \frac{1}{r} \left[ -\frac{d}{dr} + \beta_\ell(r) \right] r \quad (2.39)$$

y se impone el cumplimiento de la relación

$$B_\ell^\dagger B_\ell = H_\ell + \frac{1}{\ell^2}. \quad (2.40)$$

Esto conduce a la ecuación de Riccati

$$-\beta_\ell'(r) + \beta_\ell^2(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{\ell^2}. \quad (2.41)$$

Como la solución particular es ahora  $\frac{\ell}{r} - \frac{1}{\ell}$ , la solución general puede proponerse en la forma  $\beta_\ell(r) = \frac{\ell}{r} - \frac{1}{\ell} + \frac{1}{X_\ell(r)}$ , de lo cual se obtiene

$$X'_\ell + \left( \frac{2\ell}{r} - \frac{2}{\ell} \right) X_\ell + 1 = 0 \quad (2.42)$$

cuya solución es

$$X_\ell = \left( \gamma_\ell - \int_0^r r'^{2\ell} e^{-\frac{2r'}{\ell}} dr' \right) r^{-2\ell} e^{\frac{2r}{\ell}} \quad \gamma_\ell \in \mathbb{R}. \quad (2.43)$$

Finalmente, la solución general que se buscaba adquiere la forma:

$$\beta_\ell(r) = \frac{\ell}{r} - \frac{1}{\ell} + \frac{r^{2\ell} e^{-\frac{2r}{\ell}}}{\gamma_\ell - \int_0^r r'^{2\ell} e^{-\frac{2r'}{\ell}} dr'}. \quad (2.44)$$

Como ocurrió para el caso del oscilador, el conmutador de los operadores  $B_\ell^\dagger$  y  $B_\ell$  no es ahora un número, es decir

$$[B_\ell, B_\ell^\dagger] = 2\beta'_\ell(r). \quad (2.45)$$

Entonces, al considerar el producto  $B_\ell B_\ell^\dagger$  se obtiene

$$B_\ell B_\ell^\dagger = B_\ell^\dagger B_\ell + [B_\ell, B_\ell^\dagger] = H_\ell + \frac{1}{\ell^2} + 2\beta'_\ell(r) = \tilde{H}_{\ell-1} + \frac{1}{\ell^2} \quad (2.46)$$

donde el nuevo Hamiltoniano es

$$\tilde{H}_{\ell-1} = H_\ell + 2\beta'_\ell(r) = \frac{1}{r} \left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \tilde{V}_{\ell-1} \right] r \quad (2.47)$$

con

$$\tilde{V}_{\ell-1} = -\frac{2}{r} + \frac{\ell(\ell-1)}{r^2} + \frac{d}{dr} \left[ \frac{2r^{2\ell} e^{-\frac{2r}{\ell}}}{\gamma_\ell - \int_0^r r'^{2\ell} e^{-\frac{2r'}{\ell}} dr'} \right], \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (2.48)$$

Obsérvese que si  $\gamma_l > (2l)! \left(\frac{l}{2}\right)^{2l+1}$  o  $\gamma_l < 0$  para un  $\ell$  fijo, el tercer término no tiene singularidades. Más aún,  $\tilde{V}_{l-1}(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$  y de esta forma se obtiene una familia uniparamétrica de Hamiltonianos autoadjuntos. Ahora bien, si deseamos encontrar el espectro de  $\tilde{H}_{\ell-1}$ , primeramente consideremos

la siguiente relación

$$\tilde{H}_{\ell-1}B_\ell = \left( B_\ell B_\ell^\dagger - \frac{1}{\ell^2} \right) B_\ell = B_\ell \left( B_\ell^\dagger B_\ell - \frac{1}{\ell^2} \right) = B_\ell H_\ell. \quad (2.49)$$

Esta expresión implica que si  $R_{n\ell}$  es eigenfunción de  $H_\ell$  con eigenvalor  $\lambda_n$ , entonces  $B_\ell R_{n\ell}$  será eigenfunción de  $\tilde{H}_{\ell-1}$  con el mismo eigenvalor. Además, estas últimas eigenfunciones son ortogonales debido a que:

$$(B_\ell R_{n\ell}, B_\ell R_{n'\ell}) = (B_\ell^\dagger B_\ell R_{n\ell}, R_{n'\ell}) = \left( \lambda_n + \frac{1}{\ell^2} \right) \delta_{nn'} \quad (2.50)$$

Es importante resaltar el hecho que el operador  $B_\ell$  no mapea necesariamente el espacio  $\mathcal{H}_r$  de funciones de onda radiales en todo  $\mathcal{H}_r$ . Lo que falta por averiguar es si existe un vector "extra"  $\tilde{R}_{\ell,\ell-1}$  que sea ortogonal a los vectores del tipo  $B_\ell R$  con  $R \in \mathcal{H}_r$ , es decir

$$(\tilde{R}_{\ell,\ell-1}, B_\ell R) = (B_\ell^\dagger \tilde{R}_{\ell,\ell-1}, R) = 0. \quad (2.51)$$

Esto conduce a la ecuación diferencial siguiente:

$$B_\ell^\dagger \tilde{R}_{\ell,\ell-1} = \frac{1}{r} \left[ -\frac{d}{dr} + \beta_\ell(r) \right] r \tilde{R}_{\ell,\ell-1} = 0 \quad (2.52)$$

cuya solución es

$$\tilde{R}_{\ell,\ell-1} = \frac{c_\ell r^{\ell-1} e^{-\frac{r}{\ell}}}{\gamma_\ell - \int_0^r r'^{2\ell} e^{-\frac{2r'}{\ell}} dr'}. \quad (2.53)$$

Esta última función será cuadrado integrable si  $\gamma_\ell > (2\ell)! \left(\frac{\ell}{2}\right)^{2\ell+1}$  o  $\gamma_\ell < 0$ , además de definir el estado base del potencial modificado con eigenvalor  $-\frac{1}{\ell^2}$ . El dominio de  $\gamma_\ell$  previo caracteriza también a una nueva familia de Hamiltonianos radiales autoadjuntos  $\tilde{H}_{\ell-1}$  que tienen el mismo espectro discreto que  $H_\ell$ .

Una situación interesante sucede en el caso  $\ell = 1$ , para el cual el nuevo potencial se reduce a

$$\tilde{V}_0 = -\frac{2}{r} + \frac{d}{dr} \left[ \frac{2r^2 e^{-2r}}{\gamma_1 - \frac{1}{4} + e^{-2r} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{r}{2} + \frac{1}{4} \right)} \right]. \quad (2.54)$$

Se puede observar que si  $\gamma_1 > \frac{1}{4}$ , dicho potencial tiene la misma singularidad en  $r = 0$  y el mismo comportamiento asintótico que  $V_0(r)$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Obsérvese también el comportamiento de  $\tilde{V}_0$  cuando  $\gamma_1 \rightarrow \frac{1}{4}$  que conduce a

$$\tilde{V}_0(r) = -\frac{2}{r} + \frac{16r(r+1)}{(2r^2+2r+1)^2} \quad (2.55)$$



# Capítulo 3

## Mecánica cuántica supersimétrica de primer orden

Lo analizado en el capítulo anterior se puede reformular en términos de lo que hoy se conoce como mecánica cuántica supersimétrica de primer orden, que se basa a su vez en la técnica de entrelazamiento operatorial. En esta última existe un operador de entrelazamiento que transforma las eigenfunciones de un operador (*inicial*) en las de un operador diferente (*final*). El operador de entrelazamiento operatorial puede ser muy general, pero los casos más sencillos sugieren cuando éste se toma como un operador diferencial de orden finito. A continuación vamos a analizar el caso no trivial más simple que nos permitirá recuperar de manera inmediata los resultados del capítulo previo y además generalizar la técnica allí presentada.

### 3.1. Entrelazamiento de primer orden

El entrelazamiento de primer orden parte de la existencia de tres operadores,  $H_0$ ,  $H_1$  y  $A_1^\dagger$ , los cuales satisfacen la siguiente relación de intercambio operatorial (conocida como entrelazamiento)

$$H_1 A_1^\dagger = A_1^\dagger H_0, \quad (3.1)$$

$$H_i = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_i(x), \quad i = 0, 1, \quad (3.2)$$

$$A_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{d}{dx} + \beta_1(x) \right]. \quad (3.3)$$

Sustituyendo ahora (3.2) y (3.3) en (3.1) y usando la identidad  $\frac{d}{dx}f(x) = f(x)\frac{d}{dx} + f'(x)$ , después de algunos cálculos se obtienen las siguientes dos relaciones

$$-\frac{\beta_1''(x)}{2} + V_1(x)\beta_1(x) = -V_0'(x) + \beta_1(x)V_0(x), \quad (3.4)$$

$$V_1(x) = V_0(x) - \beta_1'(x). \quad (3.5)$$

Posteriormente, si de (3.5) se toma  $V_1(x)$  y se sustituye en (3.4) obtenemos  $\frac{\beta_1''(x)}{2} + \beta_1(x)\beta_1'(x) = V_0'(x)$  que al integrarse genera una ecuación tipo *Riccati*

$$\beta_1'(x) + \beta_1^2(x) = 2[V_0(x) - \epsilon]. \quad (3.6)$$

Por otro lado, el suponer que  $\beta_1(x)$  es una función real implica que

$$(A_1^\dagger)^\dagger = A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{d}{dx} + \beta_1(x) \right]. \quad (3.7)$$

Por tanto

$$A_1 A_1^\dagger = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} [\beta_1'(x) + \beta_1^2(x)]. \quad (3.8)$$

Si usamos (3.6) obtendremos que

$$H_0 = A_1 A_1^\dagger + \epsilon. \quad (3.9)$$

Por otro lado

$$A_1^\dagger A_1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} [-\beta_1'(x) + \beta_1^2(x)]. \quad (3.10)$$

Si de (3.5) despejamos  $V_0$  y lo sustituimos en (3.6), tendremos

$$-\beta_1'(x) + \beta_1^2(x) = 2[V_1(x) - \epsilon], \quad (3.11)$$

la cual al sustituirse en (3.10) conduce a:

$$H_1 = A_1^\dagger A_1 + \epsilon. \quad (3.12)$$

La constante  $\epsilon$  es conocida como energía de factorización y su valor es crucial para la generación de potenciales con solución exacta. Ahora, supóngase que

$\beta_1(x) = \ln[\psi_\epsilon^{(0)}(x)]'$  con lo que

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = Ce^{\int \beta_1(x) dx} \quad (3.13)$$

lo cual transforma a (3.8) en

$$H_0\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \epsilon\psi_\epsilon^{(0)}(x). \quad (3.14)$$

Obsérvese que, a diferencia de las eigenfunciones de  $H_0$ ,  $\psi_\epsilon^{(0)}$  no necesita ser normalizable, ya que no tiene que ser necesariamente una solución física. No obstante,  $\psi_\epsilon^{(0)}$  no debe tener ceros para evitar nuevas singularidades en  $V_1(x)$ . Acerca de los ceros de  $\psi_\epsilon^{(0)}$ , se sabe que cuando  $\epsilon$  es mayor que  $E_0$ , siendo  $E_0$  la energía del estado base de  $H_0$ , las funciones  $\psi_\epsilon^{(0)}$  siempre tendrán ceros; en principio esto omite las soluciones en este dominio de  $\epsilon$  como candidatas para generar potenciales apropiados. Sin embargo, cuando  $\epsilon \leq E_0$  es posible que la solución  $\psi_\epsilon^{(0)}$  de (3.13) no tenga ceros.

Para fines prácticos, supongamos que  $\epsilon < E_0$  y que se han escogido soluciones  $\psi_\epsilon^{(0)}$  de (3.14) sin ceros en los reales. Ahora bien, de la relación de entrelazamiento (3.1) y las factorizaciones (3.9) y (3.12) se pueden encontrar las eigenfunciones y eigenvalores de  $H_1$ .

Denotemos por  $E_n$  y  $\psi_n^{(0)}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  a los eigenvalores y las eigenfunciones normalizadas de  $H_0$ . Con esto las eigenfunciones de  $H_1$  serán entonces

$$\psi_n^{(1)}(x) = \frac{A_1^\dagger \psi_n^{(0)}(x)}{\sqrt{E_n - \epsilon}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} H_1\psi_n^{(1)}(x) &= \frac{H_1 A_1^\dagger \psi_n^{(0)}(x)}{\sqrt{E_n - \epsilon}} = \frac{A_1^\dagger H_0 \psi_n^{(0)}(x)}{\sqrt{E_n - \epsilon}} \\ &= \frac{E_n A_1^\dagger \psi_n^{(0)}(x)}{\sqrt{E_n - \epsilon}} = E_n \psi_n^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Además

$$(\psi_n^{(1)}, \psi_n^{(1)}) = \int \bar{\psi}_n^{(1)}(x) \psi_n^{(1)}(x) dx = \int \bar{\psi}_n^{(0)}(x) \psi_n^{(0)}(x) dx = (\psi_n^{(0)}, \psi_n^{(0)}) = 1, \quad (3.17)$$

lo cual significa que las  $\psi_n^{(1)}(x)$  son eigenfunciones normalizadas de  $H_1$  con eigenvalores  $E_n$ . Sabiendo que el conjunto de eigenfunciones  $\{\psi_n^{(0)}(x), n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  es base en  $L^2(\mathbb{R})$ , podemos preguntarnos si el conjunto  $\{\psi_n^{(1)}, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  será también una base en  $L^2(\mathbb{R})$ . Para poder responder, busquemos funciones normalizables  $\psi_\epsilon^{(1)}(x)$  ortogonales a cualquiera de los  $\psi_n^{(1)}(x)$ , es decir,

$$0 = (\psi_\epsilon^{(1)}, \psi_n^{(1)}) \propto (\psi_\epsilon^{(1)}, A_1^\dagger \psi_n^{(0)}) = (A_1 \psi_\epsilon^{(1)}, \psi_n^{(0)}) \quad (3.18)$$

lo cual implica que

$$A_1 \psi_\epsilon^{(1)} = 0, \quad (3.19)$$

cuya solución está dada por:

$$\psi_\epsilon^{(1)} \propto e^{-\int \beta_1(x) dx} \propto 1/\psi_\epsilon^{(0)}(x). \quad (3.20)$$

Además,  $\psi_\epsilon^{(1)}$  es eigenfunción de  $H_1$  con eigenvalor  $\epsilon$ :

$$H_1 \psi_\epsilon^{(1)} = (A_1^\dagger A_1 + \epsilon) \psi_\epsilon^{(1)} = \epsilon \psi_\epsilon^{(1)}. \quad (3.21)$$

Entonces, si  $\psi_\epsilon^{(1)}(x) \propto 1/\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  es normalizable, se debe anexar al conjunto  $\{\psi_n^{(1)}(x), n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  para formar una nueva base de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Cabe notar que, si en las expresiones anteriores hacemos  $V_0(x) = \frac{x^2}{2}$  y  $\epsilon = -\frac{1}{2}$ , obtenemos nuevamente la factorización generalizada del oscilador armónico discutida en el capítulo 2. En particular, las ecuaciones de *Riccati* (2.14) y (3.6) son idénticas para esta selección de  $V_0$  y  $\epsilon$ . Dado que su solución general es conocida (ver (2.18)), resulta que el potencial final  $V_1(x)$  de (3.5) coincide (hasta una constante aditiva) con los potenciales de Abraham-Moses-Mielnik (2.22) allí derivados. Por otro lado, si hacemos  $V_0(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} - \frac{1}{r}$  y  $\epsilon = -\frac{1}{2\ell^2}$  se recupera también la factorización generalizada del Hamiltoniano radial del átomo de hidrogeno del capítulo 2. Mediante la identificación  $\beta_1(r) = -\beta_\ell(r)$  es claro que las ecuaciones de *Riccati* (2.41) y (3.6) son iguales, es decir, el potencial (3.5) es igual a la mitad del potencial (2.18), derivado mediante el método de factorización. Para otros potenciales y otras energías de factorización nuestro método representa una generalización del presentado en el capítulo 2.

# Capítulo 4

## Mecánica Cuántica Supersimétrica a 2do orden

### 4.1. Transf. 2-SUSY a partir de iteraciones 1-SUSY

En las transformaciones de segundo orden se requiere entrelazar a un Hamiltoniano inicial conocido con uno final mediante un operador diferencial de orden 2. Esto se puede lograr mediante dos transformaciones sucesivas de primer orden, como las usadas en la sección (3.1). Así, al denotar  $H_i, i = 1, 2$  a los Hamiltonianos generados a partir de  $H_0$ , y  $A_i^\dagger$  a los operadores que entrelazan al par  $H_i, H_{i-1}$  en el  $i$ ésimo paso se tiene:

$$H_i A_i^\dagger = A_i^\dagger H_{i-1}, \quad (4.1)$$

$$H_i = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_i(x), \quad (4.2)$$

$$A_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{d}{dx} + \beta_i(x, \epsilon_i) \right], \quad i = 1, 2. \quad (4.3)$$

Hemos de señalar que se ha introducido la notación  $\beta_i(x, \epsilon_i)$  para resaltar la dependencia en la energía de factorización de la solución de la ecuación de *Riccati*. Ahora bien, de acuerdo con la sección (3.1) se tiene:

$$\beta_i'(x, \epsilon_i) + \beta_i^2(x, \epsilon_i) = 2[V_{i-1}(x) - \epsilon_i], \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

El potencial  $V_i$  se puede encontrar si se conoce  $V_{i-1}$ , además de la solución de (4.4), es decir:

$$V_i(x) = V_{i-1}(x) - \beta'_i(x, \epsilon_i), \quad i = 1, 2. \quad (4.5)$$

Un resultado de suma importancia en este tratamiento es que la solución  $\beta_2(x, \epsilon_2)$  de (4.4) para  $i = 2$  se puede hallar de manera algebraica si se conocen dos soluciones  $\beta_1(x, \epsilon_1)$ ,  $\beta_1(x, \epsilon_2)$  de (4.4) para  $i = 1$ , asociadas a las energías de factorización  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , las cuales satisfacen:

$$\beta'_1(x, \epsilon_1) + \beta_1^2(x, \epsilon_1) = 2[V_0(x) - \epsilon_1], \quad (4.6)$$

$$\beta'_1(x, \epsilon_2) + \beta_1^2(x, \epsilon_2) = 2[V_0(x) - \epsilon_2]. \quad (4.7)$$

En términos de soluciones de la ecuación de *Schrödinger* correspondiente se tiene que:

$$H_0\psi_{\epsilon_1}^{(0)} = \epsilon_1\psi_{\epsilon_1}^{(0)}, \quad H_0\psi_{\epsilon_2}^{(0)} = \epsilon_2\psi_{\epsilon_2}^{(0)}, \quad (4.8)$$

$$\psi_{\epsilon_1}^{(0)} = C_1 e^{\int_0^x \beta_1(x', \epsilon_1) dx'}, \quad \psi_{\epsilon_2}^{(0)} = C_2 e^{\int_0^x \beta_1(x', \epsilon_2) dx'}. \quad (4.9)$$

Deseamos entonces encontrar una solución a la ecuación de *Riccati*

$$\beta'_2(x, \epsilon_2) + \beta_2^2(x, \epsilon_2) = 2[V_1(x) - \epsilon_2]. \quad (4.10)$$

Si recordamos ahora que  $\psi_{\epsilon_1}^{(0)}$  es la eigenfunción de  $H_0$  con eigenvalor  $\epsilon_1$  que se usa para implementar la primera transformación  $1 - SUSY$ , entonces la eigenfunción de  $H_1$  asociada a  $\epsilon_1$  estará dada por

$$\psi_{\epsilon_1}^{(1)}(x) \propto \frac{1}{\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)}. \quad (4.11)$$

Por otro lado, la eigenfunción de  $H_1$  asociada a  $\epsilon_2$  viene dada por:

$$\psi_{\epsilon_2}^{(1)}(x) = A_1^\dagger \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\psi_{\epsilon_2}^{(0)'}(x) + \beta_1(x, \epsilon_1) \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x) \right]. \quad (4.12)$$

Si además notamos que

$$\psi_{\epsilon_2}^{(0)'}(x) = \beta_1(x, \epsilon_2) C_2 e^{\int_0^x \beta_1(x', \epsilon_2) dx'} = \beta_1(x, \epsilon_2) \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x) \quad (4.13)$$

se obtiene que

$$\psi_{\epsilon_2}^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)] \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x). \quad (4.14)$$

Ahora, con el objeto de implementar la segunda transformación 1 – SUSY se puede expresar

$$\psi_{\epsilon_2}^{(1)}(x) = C_3 e^{\int_0^x \beta_2(x', \epsilon_2) dx'}. \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.14)

$$C_3 e^{\int_0^x \beta_2(x', \epsilon_2) dx'} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)] \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x). \quad (4.16)$$

Si aplicamos logaritmos tenemos

$$\int_0^x \beta_2(x', \epsilon_2) dx' = \ln \psi_{\epsilon_2}^{(0)} + \ln [\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)] + \text{constante}. \quad (4.17)$$

Derivando con respecto a  $x$  :

$$\begin{aligned} \beta_2(x, \epsilon_2) &= [\ln \psi_{\epsilon_2}^{(0)}]' + \frac{\beta_1'(x, \epsilon_1) - \beta_1'(x, \epsilon_2)}{\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)} \\ &= \beta_1(x, \epsilon_2) + \frac{\beta_1'(x, \epsilon_1) - \beta_1'(x, \epsilon_2)}{\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Debido a que  $\beta_1(x, \epsilon_i), i = 1, 2$  satisfacen las ecuaciones de *Riccati* (4.6) y (??), se obtiene que

$$\frac{\beta_1'(x, \epsilon_1) - \beta_1'(x, \epsilon_2)}{\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)} = -\beta_1(x, \epsilon_2) - \beta_1(x, \epsilon_1) - 2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)}. \quad (4.19)$$

Por lo tanto

$$\beta_2(x, \epsilon_2) = -\beta_1(x, \epsilon_1) - 2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)}. \quad (4.20)$$

Finalmente, después de dos transformaciones 1 – SUSY se obtiene para el potencial  $V_2(x)$

$$V_2(x) = V_1(x) - \beta_2'(x, \epsilon_2) = V_0(x) + \left[ \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\beta_1(x, \epsilon_1) - \beta_1(x, \epsilon_2)} \right]'. \quad (4.21)$$

Como se puede observar, sólo se necesitan dos soluciones de la ecuación de *Schrödinger* para poder construir el nuevo potencial  $V_2(x)$ .

## 4.2. Método directo para la transformación 2 – *SUSY*

Desarrollaremos ahora la teoría para la transformación 2 – *SUSY* de tal suerte que los operadores de entrelazamiento sean directamente operadores diferenciales de segundo orden, es decir de la forma

$$A^\dagger = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} - \eta(x) \frac{d}{dx} + \gamma(x) \right). \quad (4.22)$$

Se impone nuevamente la relación de entrelazamiento operatorial

$$H_2 A^\dagger = A^\dagger H_0 \quad (4.23)$$

con

$$H_0 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x), \quad H_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \quad (4.24)$$

Suponemos una vez más que  $V_0(x)$  es conocido y que se satisface la relación (4.23), así que claramente las funciones a encontrar son  $V_2(x)$ ,  $\eta(x)$  y  $\gamma(x)$ . Entonces, al sustituir (4.22) y (4.24) en (4.23) y después de realizar algunos cálculos llegamos a las siguientes relaciones

$$V_2(x) = V_0(x) - \eta'(x), \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{2} \eta''(x) - \gamma'(x) - V_2(x) \eta(x) = 2V_0'(x) - V_0(x) \eta(x), \quad (4.26)$$

$$V_2(x) \gamma(x) - \frac{1}{2} \gamma''(x) = V_0''(x) - \eta(x) V_0'(x) + \gamma(x) V_0(x). \quad (4.27)$$

Desde luego, la intención es resolver este sistema de ecuaciones por lo que sustituimos (4.25) en (4.26) y al despejar  $\gamma'(x)$  se obtiene

$$\gamma'(x) = \frac{1}{2} \eta''(x) + \eta(x) \eta'(x) - 2V_0'(x). \quad (4.28)$$

## 4.2. MÉTODO DIRECTO PARA LA TRANSFORMACIÓN 2 – SUSY 47

Si integramos con respecto a  $x$  resulta

$$\gamma(x) = \frac{1}{2}\eta'(x) + \frac{\eta^2(x)}{2} - 2V_0(x) + d, \quad (4.29)$$

donde  $d$  es una constante de integración real. Posteriormente sustituimos (4.25) en (4.27) y al despejar  $\gamma''(x)$  vemos que

$$\gamma''(x) = 2[\eta(x)V_0'(x) - V_0''(x) - \eta'(x)\gamma(x)]. \quad (4.30)$$

Derivando (4.28) con respecto a  $x$

$$\gamma''(x) = \frac{1}{2}\eta'''(x) + \eta(x)\eta''(x) + \eta'^2(x) - 2V_0''(x). \quad (4.31)$$

Sustituyamos ahora (4.31) y (4.29) en (4.30) para encontrar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\eta'''(x) + \eta(x)\eta''(x) + 2\eta'^2(x) &= 2[\eta(x)V_0'(x) + 2\eta'(x)V_0(x)] \\ &\quad - \eta^2(x)\eta'(x) - 2d\eta'(x). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Multiplicando esta expresión por  $\eta(x)$  y agrupando términos

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dx}[\eta^2(x)V_0(x)] &= \frac{1}{2}\eta(x)\eta'''(x) + \eta^2(x)\eta''(x) + 2\eta(x)\eta'^2(x) \\ &\quad + \eta^3(x)\eta'(x) + 2d\eta(x)\eta'(x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Integrando esta última fórmula

$$\frac{\eta(x)\eta''(x)}{2} - \frac{\eta'^2(x)}{4} + \frac{\eta^4(x)}{4} + \eta^2(x)\eta'(x) - 2V_0(x)\eta^2(x) + \eta^2(x)d + c = 0. \quad (4.34)$$

Para resolver esta ecuación diferencial no lineal de segundo orden en  $\eta(x)$ , proponemos que:

$$\eta'(x) = -\eta^2(x) + 2\alpha(x)\eta(x) + 2\xi(x), \quad (4.35)$$

donde  $\alpha(x)$  y  $\xi(x)$  son funciones a ser determinadas. Por lo tanto

$$\eta''(x) = -2\eta(x)\eta'(x) + 2\alpha'(x)\eta(x) + 2\alpha(x)\eta'(x) + 2\xi'(x). \quad (4.36)$$

Entonces

$$\frac{\eta(x)\eta''(x)}{2} = -\eta^2(x)\eta'(x) + \alpha'(x)\eta^2(x) + \alpha(x)\eta(x)\eta'(x) + \eta(x)\xi'(x), \quad (4.37)$$

además que

$$-\frac{\eta'^2(x)}{4} = -\frac{\eta^4(x)}{4} + \alpha(x)\eta^3(x) + [\xi(x) - \alpha^2(x)]\eta^2(x) - 2\alpha(x)\xi(x)\eta(x) - \xi^2(x). \quad (4.38)$$

Sustituyendo (4.37) y (4.39) en (4.34) se tiene que

$$\begin{aligned} &\alpha'(x)\eta^2(x) + \alpha(x)\eta(x)\eta'(x) + \eta(x)\xi'(x) + \alpha(x)\eta^3(x) \\ &+ [\xi(x) - \alpha^2(x)]\eta^2(x) - 2\alpha(x)\xi(x)\eta(x) - \xi^2(x) \\ &- 2V_0(x)\eta^2(x) + d\eta^2(x) + c = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Si nuevamente hacemos uso de (4.35) para eliminar  $\eta'(x)$  de la expresión anterior, se llega a:

$$[\alpha'(x) + \alpha^2(x) - 2V_0(x) + \xi(x) + d]\eta^2(x) + \eta(x)\xi'(x) - \xi^2(x) + c = 0. \quad (4.40)$$

De esta relación resulta que se debe satisfacer  $\xi^2(x) = c$  y  $\xi'(x) = 0$ . Además se cumple que

$$\alpha'(x) + \alpha^2(x) = 2[V_0(x) - \epsilon], \quad (4.41)$$

con

$$\epsilon = \frac{d + \xi}{2}. \quad (4.42)$$

La expresión (4.41) es nuevamente la ecuación de *Riccati* asociada al potencial inicial. Así, para hallar  $\eta$  basta con resolver dicha ecuación, aunque existe la alternativa de emplear la ecuación de *Schrödinger* que resulta del cambio  $\alpha(x) = \frac{\psi_\epsilon^{(0)}(x)'}{\psi_\epsilon^{(0)}(x)}$ , es decir:

$$-\frac{1}{2}\psi_\epsilon^{(0)''} + V_0(x)\psi_\epsilon^{(0)} = \epsilon\psi_\epsilon^{(0)}. \quad (4.43)$$

Desde luego que si  $c = 0$  se tendrá sólo una solución para (4.41). Sin embargo, si  $c$  es distinto de cero entonces  $\xi$  tomará evidentemente dos valores distintos  $\xi_1 = \sqrt{c}$ ,  $\xi_2 = -\sqrt{c}$  y en tal caso habrá dos ecuaciones del tipo (4.41) con energías de factorización

$$\epsilon_1 = \frac{d + \sqrt{c}}{2}, \quad (4.44)$$

$$\epsilon_2 = \frac{d - \sqrt{c}}{2}. \quad (4.45)$$

A continuación se presenta una clasificación más completa de las transformaciones 2-SUSY.

### 4.3. Clasificación de las transformaciones 2-SUSY

1. – Caso real con  $c > 0$ .

En tal situación se tienen dos soluciones  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$  con  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ . Esto implica tener que resolver dos ecuaciones tipo *Riccati* y en consecuencia también dos ecuaciones del tipo (4.35) para  $\eta(x)$  :

$$\eta'(x) = -\eta^2(x) + 2\alpha_1(x)\eta(x) + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad (4.46)$$

$$\eta'(x) = -\eta^2(x) + 2\alpha_2(x)\eta(x) + 2(\epsilon_2 - \epsilon_1). \quad (4.47)$$

Al restar (4.47) de (4.46) y despejando  $\eta(x)$ , se tiene que

$$\eta(x) = \frac{-2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}. \quad (4.48)$$

Ya que  $\alpha(x) = \frac{\psi_{\epsilon}^{(0)'(x)}}{\psi_{\epsilon}^{(0)}(x)}$  resulta que:

$$\eta(x) = \frac{-2(\epsilon_1 - \epsilon_2)\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)\psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x)}{\psi_{\epsilon_1}^{(0)'(x)}\psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x) - \psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)\psi_{\epsilon_2}^{(0)'(x)}}. \quad (4.49)$$

Si empleamos ahora la ecuación de *Schrödinger* se tiene

$$\eta(x) = \frac{\psi_{\epsilon_1}^{(0)''}(x)\psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x) - \psi_{\epsilon_2}^{(0)''}(x)\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)}{\psi_{\epsilon_1}^{(0)'}(x)\psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x) - \psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)\psi_{\epsilon_2}^{(0)'}(x)} = \frac{W'(\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x), \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x))}{W(\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x), \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x))} \quad (4.50)$$

donde  $W(\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x), \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x)) = \psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)\psi_{\epsilon_2}^{(0)'}(x) - \psi_{\epsilon_1}^{(0)'}(x)\psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x)$  es el wronskiano de  $\psi_{\epsilon_1}^{(0)}$  y  $\psi_{\epsilon_2}^{(0)}$ . Ahora bien, si uno desea que el nuevo potencial  $V_2(x)$  no tenga singularidades, se requiere que el wronskiano previo no tenga ceros. Existen diversas situaciones, para varias selecciones de  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , en las cuales el wronskiano es libre de ceros. .

Además, el espectro de  $H_2$ ,  $\text{Sp}(H_2)$ , dependerá de la normalizabilidad de las eigenfunciones  $\psi_{\epsilon_j}^2(x)$  de  $H_2$  con eigenvalor  $\epsilon_j$  que pertenecen al kernel de  $A^\dagger$ , cuyas expresiones explícitas están dadas por

$$\psi_{\epsilon_1}^2 \propto \frac{\psi_{\epsilon_2}^{(0)}}{W(\psi_{\epsilon_1}^{(0)}, \psi_{\epsilon_2}^{(0)})}, \quad \psi_{\epsilon_2}^2 \propto \frac{\psi_{\epsilon_1}^{(0)}}{W(\psi_{\epsilon_1}^{(0)}, \psi_{\epsilon_2}^{(0)})}. \quad (4.51)$$

2.– Caso complejo con  $c < 0$ .

En este caso se tiene que  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  son números complejos tales que  $\epsilon_1 = \epsilon_2^*$ . Considerando que buscamos que los nuevos potenciales  $V_2(x)$  sean reales, así también deberá serlo la correspondiente  $\eta(x)$ . Notemos que

$$\eta'(x) = -\eta^2(x) + 2\alpha_1(x)\eta(x) + 2(\epsilon_1 - \epsilon_1^*), \quad (4.52)$$

$$\eta'(x) = -\eta^2(x) + 2\alpha_2(x)\eta(x) + 2(\epsilon_1^* - \epsilon_1). \quad (4.53)$$

Haciendo la diferencia de (4.52) y (4.53) y despejando  $\eta(x)$  se obtiene que:

$$\eta(x) = -2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_1^*)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}. \quad (4.54)$$

Si elegimos ahora  $\alpha_2(x) = \alpha_1^*(x)$  se garantiza que  $\eta(x)$  será real y por lo tanto, el nuevo potencial también lo será. Finalmente, si se simplifica un poco se llega a que

$$\eta(x) = -2 \frac{\Im[\epsilon_1]}{\Im[\alpha_1(x)]} = -\frac{d}{dx} \ln[W(\psi_{\epsilon_1}^{(0)}, \psi_{\epsilon_1}^{(0)*})]. \quad (4.55)$$

Como en el caso previo, las singularidades que tenga  $\eta(x)$  aparecerán en los ceros del wronskiano  $W(\psi_{\epsilon_1}^{(0)}, \psi_{\epsilon_1}^{(0)*})$ . Sin embargo, existen nuevamente casos en los cuales el wronskiano es libre de ceros y consecuentemente tanto  $\eta(x)$  como el nuevo potencial  $V_2(x)$  no tendrán singularidades inducidas ( El lector interesado en conocer estos casos puede consultar [16, 17, 18]).

3.- Caso confluyente con  $c = 0$ .

En este caso, si  $c = 0$  implica que  $\xi = 0$  y, en consecuencia, se tiene que  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon \in \mathbb{R}$ . Partiendo de que se cuenta con la solución de la ecuación de *Riccati*  $\alpha(x)$ , para hallar  $\eta(x)$  se tiene que resolver:

$$\eta'(x) = -\eta^2(x) + 2\alpha(x)\eta(x). \quad (4.56)$$

Al realizar el siguiente cambio de variable  $y(x) = \frac{1}{\eta(x)}$  y posteriormente emplear el método del factor integrante, después de realizar algunos cálculos se llega a que

$$\eta(x) = \frac{e^{2 \int_0^x \alpha(x') dx'}}{w_0 + \int_{x_0}^x e^{2 \int_0^y \alpha(x') dx'} dy} \quad (4.57)$$

siendo  $w_0$  una constante de integración. Si hacemos  $\psi_\epsilon^{(0)}(x) = e^{\int_{x_0}^x \alpha(x') dx'}$  en la expresión anterior, resulta que

$$\eta(x) = \frac{\psi_\epsilon^{(0)2}(x)}{w_0 + \int_{x_0}^x \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy} = \frac{w'(x)}{w(x)} \quad (4.58)$$

con

$$w(x) = w_0 + \int_{x_0}^x \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy. \quad (4.59)$$

Ahora, para que  $V_2(x)$  no tenga singularidades inducidas por  $w(x)$  es claro que esta última función no deberá tener ceros en el dominio correspondiente, es decir,  $\int_{x_0}^x \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy \neq -w_0$  en el dominio de  $x$ . Un análisis detallado de estas consideraciones y la derivación de algunas fórmulas generales para este caso, lo cual es el tema de esta tesis, se hará a continuación.



# Capítulo 5

## El algoritmo confluyente y aplicaciones

### 5.1. El algoritmo confluyente

Vamos a analizar de manera más detallada el caso *confluyente*, que se mencionó en la clasificación de la sección anterior. Si sustituimos (4.58) en (4.25) se tiene que

$$V_2(x) = V_0(x) - \left[ \frac{w'(x)}{w(x)} \right]' \quad (5.1)$$

con

$$w(x) = w_0 + \int_{x_0}^x \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy. \quad (5.2)$$

Es claro que si deseamos evitar singularidades en el nuevo potencial  $V_2(x)$  inducidas por  $w(x)$ , tendremos que hacer uso de soluciones reales  $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  tales que  $w(x) \neq 0, \forall x$  en el dominio. Nótese en primer lugar que

$$w'(x) = \psi_\epsilon^{(0)2}(x), \quad (5.3)$$

lo cual significa que  $w(x)$  es una función monótona creciente. Por tanto, para evitar los ceros es necesario analizar primero el comportamiento asintótico de  $w(x)$ . Dos situaciones importantes se presentan:

i) Supóngase que  $\epsilon = E_m$  es uno de los eigenvalores de  $H_0$  y que la función de transformación es la correspondiente eigenfunción física *normalizada*, es decir

$$\psi_\epsilon^0(x) = \psi_m(x). \quad (5.4)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) &= w_0 + \int_{x_0}^{-\infty} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy \\ &= w_0 - \int_{-\infty}^{x_0} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy \\ &+ \int_{x_0}^{\infty} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy - \int_{x_0}^{\infty} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy \\ &= w_0 - 1 + \nu_+ = \nu - 1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

con

$$\nu_+ = \int_{x_0}^{\infty} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy, \quad (5.6)$$

además de que

$$\nu = w_0 + \nu_+. \quad (5.7)$$

Por otro lado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = w_0 + \int_{x_0}^{\infty} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy = w_0 + \nu_+ = \nu. \quad (5.8)$$

Ya que estos valores límite deben ser ambos positivos o ambos negativos para garantizar que  $w(x)$  no tenga ceros, el dominio de  $\nu$  para el cual  $\eta(x)$  es no-singular viene a ser:

$$\nu \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \quad (5.9)$$

ii) Supóngase ahora que la función de transformación  $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  es una solución *no-normalizable* de la ecuación de *Schrödinger*, con energía de factorización real  $\epsilon \notin \text{Sp}(H)$ , tal que se satisface alguna de las condiciones siguientes:

- Cuando  $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  se anula para  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_\epsilon^{(0)}(x) = 0, \quad \nu_+ \equiv \int_{x_0}^{\infty} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy < \infty, \quad (5.10)$$

tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = w_0 - \int_{-\infty}^{x_0} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy = -\infty \quad (5.11)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = w_0 + \int_{x_0}^{\infty} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy = w_0 + \nu_+ \equiv \nu. \quad (5.12)$$

Al comparar ambos límites puede concluirse que  $w(x)$  no tendrá ceros si  $\nu \leq 0$ , es decir,  $\nu \in (-\infty, 0]$ .

- Cuando  $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  se anula para  $x \rightarrow -\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_\epsilon^{(0)}(x) = 0, \quad \nu_- \equiv \int_{-\infty}^{x_0} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy < \infty, \quad (5.13)$$

tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = w_0 + \int_{x_0}^{\infty} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy = \infty \quad (5.14)$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = w_0 - \int_{-\infty}^{x_0} \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy = w_0 - \nu_- \equiv \nu. \quad (5.15)$$

Resulta que ahora  $w(x)$  no tendrá ceros si  $\nu \geq 0$ , es decir,  $\nu \in [0, \infty)$ .

## 5.2. El Wronskiano

Vimos en la sección 4.3 que, para los casos cuando  $c \neq 0$ , la transformación de segundo orden y, en particular, la modificación al potencial dependen

del wronskiano del par de soluciones  $\psi_{\epsilon_1}^{(0)}, \psi_{\epsilon_2}^{(0)}$  de la ecuación de *Schrödinger* inicial, asociadas a las dos energías de factorización  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ . Esto aparentemente no sucede en el caso confluyente, ya que ahora tenemos sólo una solución  $\psi_\epsilon^{(0)}$  de la ecuación de *Schrödinger* asociada a  $\epsilon$ . Sin embargo, sería interesante averiguar si de alguna manera el wronskiano está oculto en nuestro tratamiento y sacarlo a la luz para saber también cual es la segunda función involucrada. Con este objeto, consideremos dada la eigenfunción original de  $H_0$  asociada a la energía de factorización  $\epsilon$ , que satisface:

$$(H_0 - \epsilon)\psi_\epsilon^{(0)}(x) = 0. \quad (5.16)$$

Además, busquemos a la eigenfunción generalizada de segundo orden  $\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}(x)$  asociada a la misma  $\epsilon$ , que cumple

$$(H_0 - \epsilon)^2 \tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}(x) = 0. \quad (5.17)$$

El modo más natural de escoger tal  $\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}$  es exigiéndole que obedezca

$$(H_0 - \epsilon)\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}(x) = \psi_\epsilon^{(0)}(x), \quad (5.18)$$

lo cual garantiza que se satisface también (5.17). Haciendo uso de la teoría de ecuaciones diferenciales, se puede mostrar que la solución  $\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}$  de (5.18) está relacionada de la siguiente manera con  $\psi_\epsilon^{(0)}$ :

$$\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)} = c_1 \psi_\epsilon^{(0)}(x) + c_2 \psi_\epsilon^{(0)}(x) \int \frac{dx}{\psi_\epsilon^{(0)2}(x)} + \psi_p^{(0)}(x), \quad (5.19)$$

donde los dos primeros términos corresponden a la solución general de la ecuación homogénea (de *Schrödinger*) y el término  $\psi_p^{(0)}(x)$ , conocida como la solución particular, se puede encontrar a partir de la siguiente ecuación:

$$-\frac{1}{2}\psi_p^{(0)''}(x) + V_0(x)\psi_p^{(0)}(x) - \epsilon\psi_p^{(0)}(x) = \psi_\epsilon^{(0)}(x). \quad (5.20)$$

Haciendo  $\psi_p^{(0)}(x) = c(x)\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ , con  $c(x)$  una función por determinarse, las correspondientes derivadas resultan:

$$\psi_p^{(0)'}(x) = c'(x)\psi_\epsilon^{(0)}(x) + c(x)\psi_\epsilon^{(0)'}(x), \quad (5.21)$$

$$\psi_p^{(0)''}(x) = c''(x)\psi_\epsilon^{(0)}(x) + 2c'(x)\psi_\epsilon^{(0)'}(x) + c(x)\psi_\epsilon^{(0)''}(x). \quad (5.22)$$

Al sustituir en la expresión (5.20) y factorizando  $c(x)$  se obtiene:

$$-\frac{1}{2}c''(x)\psi_\epsilon^{(0)}(x) - c'(x)\psi_\epsilon^{(0)'}(x) + c(x)\left[-\frac{1}{2}\psi_\epsilon^{(0)''}(x) + V_0(x)\psi_\epsilon^{(0)}(x) - \epsilon\psi_\epsilon^{(0)}(x)\right] = \psi_\epsilon^{(0)}(x). \quad (5.23)$$

Ya que  $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  satisface la ecuación homogénea se tiene:

$$-c''(x)\psi_\epsilon^{(0)}(x) - 2c'(x)\psi_\epsilon^{(0)'}(x) = 2\psi_\epsilon^{(0)}(x) \quad (5.24)$$

que al multiplicarse por  $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  y reacomodando términos se reduce a

$$-[c'(x)\psi_\epsilon^{(0)2}(x)]' = 2\psi_\epsilon^{(0)2}(x). \quad (5.25)$$

Al integrar lo anterior se obtiene

$$c'(x) = -\frac{2 \int \psi_\epsilon^{(0)2}(x)dx}{\psi_\epsilon^{(0)2}(x)} = -\frac{2\tilde{w}(x)}{\psi_\epsilon^{(0)2}(x)} \quad (5.26)$$

donde  $\tilde{w}(x) = \int \psi_\epsilon^{(0)2}(x)dx$ . Por tanto:

$$c(x) = -2 \int \frac{\tilde{w}(x)}{\psi_\epsilon^{(0)2}(x)} dx. \quad (5.27)$$

Resulta entonces que la expresión final para  $\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}$  queda :

$$\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)} = c_1\psi_\epsilon^{(0)} + c_2\psi_\epsilon^{(0)}(x) \int \frac{dx}{\psi_\epsilon^{(0)2}(x)} - 2\psi_\epsilon^{(0)}(x) \int \frac{\tilde{w}(x)}{\psi_\epsilon^{(0)2}(x)} dx \quad (5.28)$$

que también se puede escribir como

$$\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)} = \psi_\epsilon^{(0)}(x) \left( c_1 - 2 \int \frac{w(x)}{\psi_\epsilon^{(0)2}(x)} dx \right) \quad (5.29)$$

con

$$w(x) = -\frac{c_2}{2} + \tilde{w}(x) = w_0 + \int_{x_0}^x \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy. \quad (5.30)$$

Una vez que se ha obtenido  $\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}$ , lo que procede es realizar el cálculo del Wronskiano, es decir

$$W[\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}(x), \psi_\epsilon^{(0)}(x)] = \psi_\epsilon^{(0)'}(x)\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}(x) - \psi_\epsilon^{(0)}(x)\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)'}(x) = 2w(x). \quad (5.31)$$

Notar que

$$\eta(x) = \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{W'[\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}, \psi_\epsilon^{(0)}]}{W[\tilde{\psi}_\epsilon^{(0)}, \psi_\epsilon^{(0)}]}. \quad (5.32)$$

Por tanto, la transformación de segundo orden confluyente queda determinada una vez más por el wronskiano de dos funciones, una de ellas siendo la eigenfunción estándar de  $H_0$  asociada a  $\epsilon$ , mientras que la otra es una eigenfunción generalizada de segundo orden para la misma  $\epsilon$ . Este resultado corrige la aparente asimetría que había entre del caso confluyente y los otros casos del entrelazamiento de segundo orden ([21]).

### 5.3. Aplicaciones

Analícemos ahora algunas aplicaciones del algoritmo confluyente. Los sistemas en los que emplearemos la técnica incluyen la partícula libre, el potencial de *Pöschl – Teller*, el oscilador armónico y el potencial de Coulomb.

- Partícula libre

Consideremos primeramente a la partícula libre, para la cual  $V_0(x) = 0$ . Tomando la energía de factorización negativa  $\epsilon = -k^2 < 0$ , la ecuación de *Schrödinger*

$$H_0\psi_\epsilon^{(0)}(x) = -k^2\psi_\epsilon^{(0)}(x) \quad (5.33)$$

se convierte en

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_\epsilon^{(0)}(x) - 2k^2\psi_\epsilon^{(0)}(x) = 0. \quad (5.34)$$

Es directo mostrar que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación previa están dadas por

$$\psi_{\epsilon}^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}k}e^{\pm\sqrt{2}kx}, \quad (5.35)$$

donde el factor que acompaña a las exponenciales se escogió para simplificar la integral que aparece en  $w(x)$  (ver abajo). La solución general es una combinación lineal arbitraria de las dos soluciones previas. En el espacio bidimensional asociado a la correspondiente  $\epsilon < 0$ , sin embargo, hasta un factor arbitrario constante existe sólo una solución que se anula para  $x \rightarrow -\infty$  y satisface la ecuación (5.13), la cual es precisamente

$$\psi_{\epsilon}^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}k}e^{\sqrt{2}kx}. \quad (5.36)$$

Similarmente, existe sólo una solución que se anula para  $x \rightarrow \infty$  y que satisface (5.10), la cual está dada por

$$\psi_{\epsilon}^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}k}e^{-\sqrt{2}kx}. \quad (5.37)$$

En el primer caso, la expresión general para  $w(x)$ ,

$$w(x) = w_0 + \int_{x_0}^x \psi_{\epsilon}^{(0)2}(y)dy \quad (5.38)$$

se reduce a

$$w(x) = w_0 + \int_{x_0}^x [\sqrt{2\sqrt{2}k}e^{\sqrt{2}ky}]^2 dy \quad (5.39)$$

$$= w_0 - e^{2\sqrt{2}kx_0} + e^{2\sqrt{2}kx}, \quad (5.40)$$

la cual no tiene ceros para  $w_0 - e^{2\sqrt{2}kx_0} \geq 0$ . Es conveniente hacer por tanto  $w_0 - e^{2\sqrt{2}kx_0} = e^{2\sqrt{2}kx_1}$ , lo que permite factorizar a  $w(x)$  en la forma

$$w(x) = e^{\sqrt{2}k(x+x_1)}[e^{\sqrt{2}k(x-x_1)} + e^{-\sqrt{2}k(x-x_1)}] \quad (5.41)$$

o equivalentemente

$$w(x) = 2e^{\sqrt{2}k(x+x_1)} \cosh[\sqrt{2}k(x-x_1)]. \quad (5.42)$$

Al sustituir dicha expresión en

$$V_2(x) = V_0(x) - \left[ \frac{w'(x)}{w(x)} \right]' \quad (5.43)$$

se obtiene que

$$V_2(x) = -\frac{d^2}{dx^2} \ln[2e^{\sqrt{2}k(x+x_1)} \cosh \sqrt{2}k(x-x_1)]. \quad (5.44)$$

Después de algunas simplificaciones algebraicas vemos que

$$V_2(x) = -\sqrt{2}k \left[ 1 + \tanh \sqrt{2}k(x-x_1) \right]'. \quad (5.45)$$

Finalmente, se llega al llamado potencial de *Pöschl – Teller*, es decir

$$V_2(x) = -2k^2 \operatorname{sech}^2[\sqrt{2}k(x-x_1)], \quad (5.46)$$

el cual tiene un estado ligado en  $\epsilon = -k^2$ .

De manera similar, tomando ahora  $\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}k}e^{-\sqrt{2}kx}$  en la expresión

$$w(x) = w_0 + \int_{x_0}^x \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy \quad (5.47)$$

se llega a

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 + \int_{x_0}^x \left[ \sqrt{2\sqrt{2}k}e^{-\sqrt{2}ky} \right]^2 dy \\ &= w_0 + e^{-2\sqrt{2}kx_0} - e^{-2\sqrt{2}kx} \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde claramente se evitarán los ceros para  $w_0 + e^{-2\sqrt{2}kx_0} \leq 0$ . Así, es conveniente hacer ahora  $w_0 + e^{-2\sqrt{2}kx_0} = -e^{-2\sqrt{2}kx_1}$ , lo que permite expresar  $w(x)$  en la forma

$$w(x) = -e^{-\sqrt{2}k(x+x_1)} [e^{\sqrt{2}k(x-x_1)} + e^{-\sqrt{2}k(x-x_1)}] \quad (5.49)$$

o de manera equivalente

$$w(x) = -2e^{-\sqrt{2}k(x+x_1)} \cosh[\sqrt{2}k(x-x_1)], \quad (5.50)$$

lo cual conduce a:

$$V_2(x) = V_0(x) - \left[ \frac{w'(x)}{w(x)} \right]' = -\frac{d^2}{dx^2} \ln[-2e^{-\sqrt{2}k(x+x_1)} \cosh[\sqrt{2}k(x-x_1)]]. \quad (5.51)$$

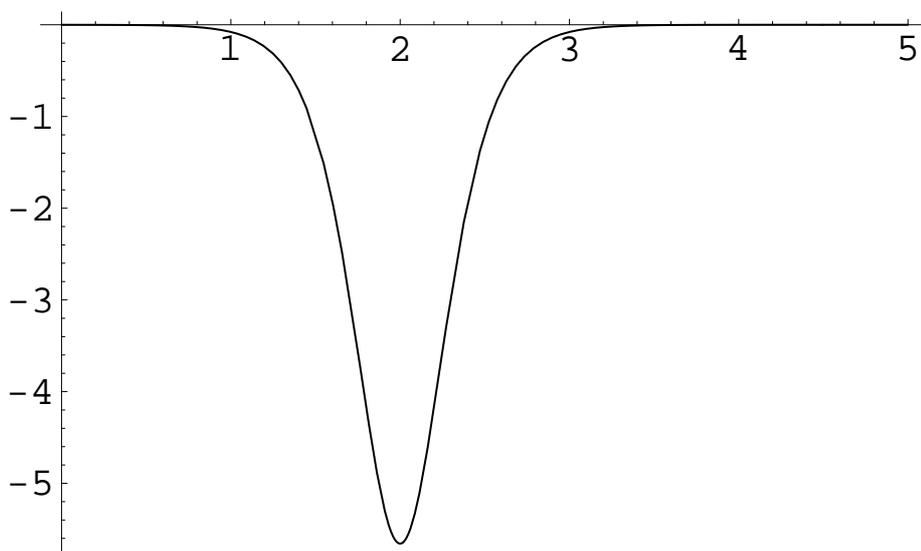


Figura 5.1: Algoritmo 2-SUSY confluyente aplicado a la partícula libre que genera el potencial de *Pöschl – Teller* con un estado ligado en  $\epsilon = -k^2 = -4$ .

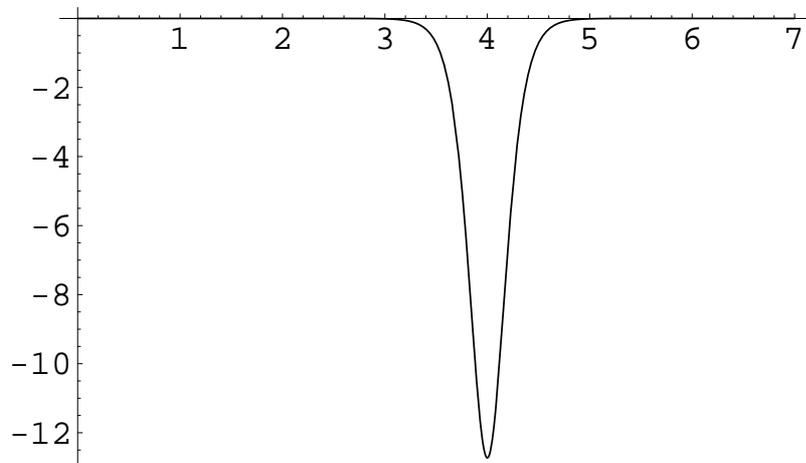


Figura 5.2: Potencial de *Pöschl – Teller* generado mediante el algoritmo 2-SUSY confluyente aplicado a la partícula libre. Ahora el estado ligado se encuentra en  $\epsilon = -k^2 = -9$ .

Después de realizar algunos cálculos, nuevamente se obtiene el potencial de *Pöschl – Teller*:

$$V_2(x) = -2k^2 \operatorname{sech}^2[\sqrt{2}k(x - x_1)]. \quad (5.52)$$

Algunas gráficas de los potenciales de *Pöschl – Teller* se pueden observar en las figuras (5.1) y (5.2).

- El potencial de *Pöschl – Teller*

Tomemos ahora el potencial de *Pöschl – Teller* como el potencial inicial, es decir

$$V_0(x) = -2k_0^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{2}k_0x) \quad (5.53)$$

cuya energía del estado base es  $E_0 = -k_0^2$  Observence la figura (5.3).

Considérese primero el caso cuando  $\epsilon = E_0$  y  $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  es la función de onda normalizada del estado base, es decir,

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{k_0}{\sqrt{2}}} \operatorname{sech}(\sqrt{2}k_0x). \quad (5.54)$$

Un cálculo directo de

$$w(x) = w_0 + \int_{x_0}^x \psi_\epsilon^{(0)2}(y) dy \quad (5.55)$$

con  $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$  dado en (5.54) conduce a

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 + \int_{x_0}^x \left[ \sqrt{\frac{k_0}{\sqrt{2}}} \operatorname{sech} \sqrt{2}k_0y \right]^2 dy \\ &= w_0 + \int_{x_0}^x \frac{k_0}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}^2(\sqrt{2}k_0y) dy. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Al efectuar la integral se obtiene que

$$w(x) = w_0 + \frac{1}{2} \tanh(\sqrt{2}k_0x) - \frac{1}{2} \tanh(\sqrt{2}k_0x_0). \quad (5.57)$$

Definiendo

$$w_0 - \frac{1}{2} \tanh(\sqrt{2}k_0x_0) = -\frac{1}{2} \coth(\sqrt{2}k_0x_1) \quad (5.58)$$

tenemos que

$$w(x) = -\frac{1}{2} \frac{\cosh[\sqrt{2}k_0(x - x_1)]}{\sinh(\sqrt{2}k_0x_1)\cosh(\sqrt{2}k_0x)}. \quad (5.59)$$

Al sustituir en la expresión

$$V_2(x) = V_0(x) - [\ln(w(x))]'' \quad (5.60)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} V_2(x) = -2k_0^2 \operatorname{sech}^2[\sqrt{2}k_0x] - \left[ \frac{w(x)'}{w(x)} \right]' &= -2k_0^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{2}k_0x) \\ &- \left( \ln \left[ \frac{\cosh[\sqrt{2}k_0(x - x_1)]}{\cosh[\sqrt{2}k_0x]} \right] \right)'' \end{aligned} \quad (5.61)$$

lo cual conduce nuevamente al potencial de *Pöschl - Teller*

$$V_2(x) = -2k_0^2 \operatorname{sech}^2[\sqrt{2}k_0(x - x_1)]. \quad (5.62)$$

- Supóngase ahora que  $\epsilon = -k^2 \neq E_0$  y  $k > k_0$  con  $k \in \mathbb{R}$ , es decir  $\epsilon < E_0$ .
- . Después de resolver la ecuación de *Schrödinger*

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - 2k_0^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{2}k_0x) \right] \psi_\epsilon^{(0)} = -k^2 \psi_\epsilon^{(0)}, \quad (5.63)$$

las dos soluciones que tienen el comportamiento asintótico apropiado resultan:

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}ke^{\pm\sqrt{2}kx}} [k_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x) \mp k]. \quad (5.64)$$

Tomemos en primer lugar

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}ke^{\sqrt{2}kx}} [k_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x) - k], \quad (5.65)$$

con lo que resulta

$$w(x) = w_0 + 2\sqrt{2}k \int_{x_0}^x e^{2\sqrt{2}ky} [k_0^2 \tanh^2(\sqrt{2}k_0y) - 2k_0k \tanh(\sqrt{2}k_0y) + k^2] dy. \quad (5.66)$$

Desarrollando un poco la expresión previa

$$w(x) = w_0 + 2\sqrt{2}kk_0^2 \int_{x_0}^x e^{2\sqrt{2}ky} \tanh^2(\sqrt{2}k_0y) dy - 4\sqrt{2}k^2k_0 \int_{x_0}^x e^{2\sqrt{2}ky} \tanh(\sqrt{2}k_0y) dy + 2\sqrt{2}k^3 \int_{x_0}^x e^{2\sqrt{2}ky} dy. \quad (5.67)$$

Aplicando ahora cuidadosamente integración por partes y simplificando un poco vemos que

$$w(x) = w_0 - e^{2\sqrt{2}kx_0} [k^2 + k_0^2 - 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x_0)] + e^{2\sqrt{2}kx} (k^2 + k_0^2) - 2kk_0 e^{2\sqrt{2}kx} \tanh(\sqrt{2}k_0x). \quad (5.68)$$

Si definimos

$$w_0 = -2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x_0) e^{2\sqrt{2}kx_0} + e^{2\sqrt{2}kx_0} (k^2 + k_0^2) + \nu, \quad (5.69)$$

con  $\nu = (k^2 - k_0^2) e^{2\sqrt{2}kx_2}$  se llega a

$$w(x) = \nu + e^{2\sqrt{2}kx} [k^2 + k_0^2 - 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x)] = (k^2 - k_0^2) e^{2\sqrt{2}kx_2} + e^{2\sqrt{2}kx} [k^2 + k_0^2 - 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x)], \quad (5.70)$$

que es equivalente a

$$w(x) = (k^2 - k_0^2) e^{2\sqrt{2}kx_2} + \frac{e^{2\sqrt{2}kx}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \left[ (k^2 + k_0^2) \cosh(\sqrt{2}k_0x) - 2kk_0 \sinh(\sqrt{2}k_0x) \right]. \quad (5.71)$$

Después de algunos ajustes

$$\begin{aligned}
 w(x) = & \{(k^2 - k_0^2)e^{-\sqrt{2}k(x-x_2)}\cosh(\sqrt{2}k_0x) \\
 & + e^{\sqrt{2}k(x-x_2)}[(k^2 + k_0^2)\cosh(\sqrt{2}k_0x) \\
 & - 2kk_0\sinh(\sqrt{2}k_0x)]\} \frac{e^{\sqrt{2}k(x+x_2)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x)}, \tag{5.72}
 \end{aligned}$$

lo cual conduce a

$$\begin{aligned}
 w(x) = & - \frac{2e^{\sqrt{2}k(x+x_2)}}{k\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \\
 & \{[(k\cosh[\sqrt{2}k(x-x_2)]][k\cosh(\sqrt{2}k_0x) - k_0\sinh(\sqrt{2}k_0x)] \\
 & - k_0\sinh[\sqrt{2}k(x-x_2)][k\sinh(\sqrt{2}k_0x) - k_0\cosh(\sqrt{2}k_0x)]\}
 \end{aligned}$$

Si sustituimos ahora la siguiente identidad

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\cosh(\sqrt{2}k_0x_1)}{\sinh(\sqrt{2}k_0x_1)} \tag{5.73}$$

es directo mostrar que

$$\begin{aligned}
 w(x) = & \frac{2e^{\sqrt{2}k(x+x_2)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \left\{ \frac{k^2\cosh[\sqrt{2}k(x-x_2)]\cosh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)]}{\cosh(\sqrt{2}k_0x_1)} \right. \\
 & \left. - \frac{k_0^2\sinh[\sqrt{2}k(x-x_2)]\sinh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)]}{\sinh(\sqrt{2}k_0x_1)} \right\}. \tag{5.74}
 \end{aligned}$$

Además, si se emplea nuevamente la relación

$$\frac{k}{\cosh(\sqrt{2}k_0x_1)} = \frac{k_0}{\sinh(\sqrt{2}k_0x_1)} \tag{5.75}$$

llegamos a

$$w(x) = \frac{2ke^{\sqrt{2}k(x+x_2)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x_1)\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \\ \{k\cosh[\sqrt{2}k(x-x_2)]\cosh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)] \\ -k_0\sinh[\sqrt{2}k(x-x_2)]\sinh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)]\}. \quad (5.76)$$

Recordando que  $V_2(x)$  está definido por

$$V_2(x) = V_0(x) - \ln[w(x)]'', \quad (5.77)$$

tomando en cuenta que el término  $-2k_0^2\operatorname{sech}^2(\sqrt{2}k_0x)$  se elimina con la parte  $\ln\left[\frac{2ke^{\sqrt{2}k(x+x_2)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x_1)\cosh(\sqrt{2}k_0x)}\right]''$ , al simplificar un poco tenemos

$$V_2(x) = \{\sqrt{2}(k^2 - k_0^2)\sinh[\sqrt{2}k(x-x_2)]\cosh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)]/ \\ \{k\cosh[\sqrt{2}k(x-x_2)]\cosh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)] \\ -k_0\sinh[\sqrt{2}k(x-x_2)]\sinh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)]\} \quad (5.78)$$

ahora bien, si multiplicamos y dividimos la expresión entre corchetes por

$$\sinh[\sqrt{2}k(x-x_2)]\cosh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)] \quad (5.79)$$

llegamos a

$$V_2(x) = -\left\{\frac{\sqrt{2}(k^2 - k_0^2)}{k\coth[\sqrt{2}k(x-x_2)] - k_0\tanh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)]}\right\}'. \quad (5.80)$$

Luego de un último cálculo, obtenemos los conocidos potenciales de *Bargmann*

$$V_2(x) = -\frac{2(k^2 - k_0^2)\{k_0^2\operatorname{sech}^2[\sqrt{2}k_1(x-x_1)] + k^2\operatorname{csch}^2[\sqrt{2}k_2(x-x_2)]\}}{\{k_0\tanh[\sqrt{2}k_0(x-x_1)] - k\coth[\sqrt{2}k(x-x_2)]\}^2} \quad (5.81)$$

-Ahora analicemos la segunda situación cuando

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}k}e^{-\sqrt{2}kx}[k_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x) + k] \quad (5.82)$$

donde también  $\epsilon < E_0$ , es decir,  $k > k_0$ . Luego de un cálculo sencillo

$$\begin{aligned} w(x) = w_0 + 2\sqrt{2}k \int_{x_0}^x e^{-2\sqrt{2}ky} [k_0^2 \tanh^2(\sqrt{2}k_0y) \\ + 2k_0k \tanh(\sqrt{2}k_0y) + k^2] dy. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Si desarrollamos un poco la expresión previa

$$\begin{aligned} w(x) = w_0 + 2\sqrt{2}kk_0^2 \int_{x_0}^x e^{-2\sqrt{2}ky} \tanh^2(\sqrt{2}k_0y) dy \\ + 4\sqrt{2}k^2k_0 \int_{x_0}^x e^{-2\sqrt{2}ky} \tanh(\sqrt{2}k_0y) dy \\ + 2\sqrt{2}k^3 \int_{x_0}^x e^{-2\sqrt{2}ky} dy. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Además, al aplicar nuevamente integración por partes y simplificando tenemos que

$$\begin{aligned} w(x) = w_0 + e^{-2\sqrt{2}kx_0} [k^2 + k_0^2 + 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x_0)] \\ - e^{-2\sqrt{2}kx} (k^2 + k_0^2) - 2kk_0 e^{-2\sqrt{2}kx} \tanh(\sqrt{2}k_0x). \end{aligned} \quad (5.85)$$

Si se define ahora

$$w_0 = -2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x_0) e^{-2\sqrt{2}kx_0} - e^{-2\sqrt{2}kx_0} (k^2 + k_0^2) - \nu \quad (5.86)$$

con  $\nu = (k^2 - k_0^2)e^{-2\sqrt{2}kx_2}$  se llega a

$$\begin{aligned} w(x) = -\nu - e^{-2\sqrt{2}kx} [k^2 + k_0^2 + 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x)] \\ = -(k^2 - k_0^2)e^{-2\sqrt{2}kx_2} - e^{-2\sqrt{2}kx} [k^2 \\ + k_0^2 + 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x)]. \end{aligned}$$

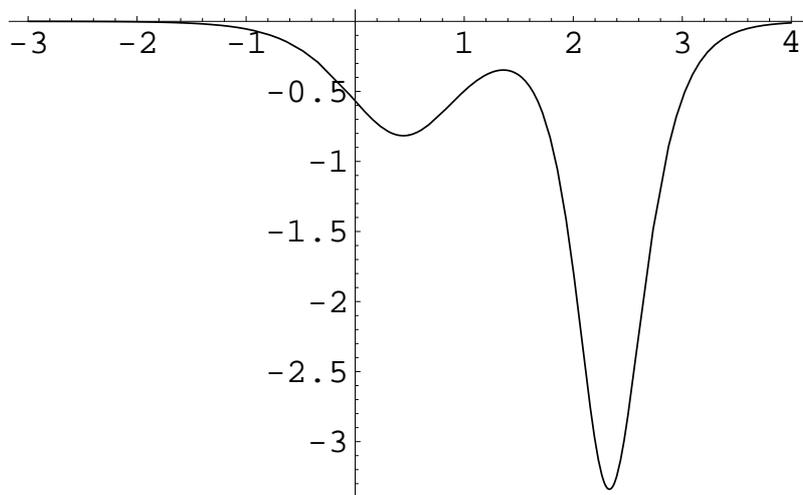


Figura 5.3: Gráfica que ilustra al potencial  $V_2(x)$  generado a partir de *Pöschl – Teller*, con  $\epsilon = -k^2 = -9/4$ ,  $E_0 = -k_0^2 = -1$  y  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

(5.87)

Sustituyendo dicha expresión en

$$V_2(x) = V_0(x) - [\ln(w(x))]'' \quad (5.88)$$

y desarrollando ligeramente tenemos

$$V_2(x) = -\left\{ \frac{\sqrt{2}(k^2 - k_0^2)}{k \coth[\sqrt{2}k(x - x_2)] - k_0 \tanh[\sqrt{2}k_0(x - x_1)]} \right\}'. \quad (5.89)$$

Luego de un último cálculo llegamos a los ya conocidos potenciales de *Bargmann*

$$V_2(x) = -\frac{2[k^2 - k_0^2]k_0^2 \operatorname{sech}^2[\sqrt{2}k_0(x - x_1)] + k^2 \operatorname{csch}^2[\sqrt{2}k(x - x_2)]}{\{k_0 \tanh[\sqrt{2}k_0(x - x_1)] - k \coth[\sqrt{2}k(x - x_2)]\}^2}. \quad (5.90)$$

algunos ejemplos de los potenciales de *Bargmann* (5.91), generado a partir de los de *Pöschl – Teller* se ilustran en las figuras (5.3) y (5.4)

- Supongamos ahora que  $\epsilon = -k^2 \neq E_0 = -k_0^2$   $k < k_0$ , es decir  $E_0 < \epsilon < 0$ . Resolviendo nuevamente la ecuación de *Schrödinger*

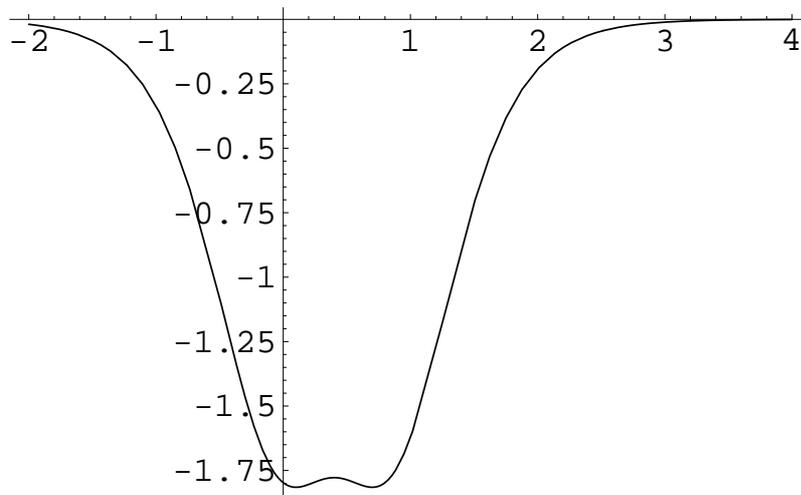


Figura 5.4: Potencial de *Bargmann* (5.91) generado partiendo de *Pöschl – Teller* con  $\epsilon = -k^2 = -9/4$ ,  $E_0 = -k_0^2 = -1$ , pero ahora con  $x_1 = x_2 = 0,4$ .

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - 2k_0^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{2}k_0x) \right] \psi_\epsilon^{(0)} = -k^2 \psi_\epsilon^{(0)} \quad (5.91)$$

se obtienen una vez más dos soluciones con el comportamiento asintótico adecuado,

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}k} e^{\pm\sqrt{2}kx} [k_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x) \mp k]. \quad (5.92)$$

Tomando en primer lugar:

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}k} e^{\sqrt{2}kx} [k_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x) - k], \quad (5.93)$$

el correspondiente cálculo de  $w(x)$  es igual al desarrollado en las ecuaciones (5.66)-(5.68), es decir, resulta

$$w(x) = w_0 - e^{2\sqrt{2}kx_0} [k^2 + k_0^2 - 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x_0)] + e^{2\sqrt{2}kx} (k^2 + k_0^2) - 2kk_0 e^{2\sqrt{2}kx} \tanh(\sqrt{2}k_0x). \quad (5.94)$$

Definiendo nuevamente

$$w_0 = -2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x_0) e^{2\sqrt{2}kx_0} + e^{2\sqrt{2}kx_0} (k^2 + k_0^2) + \nu \quad (5.95)$$

donde ahora  $\nu = (k_0^2 - k^2)e^{2\sqrt{2}kx_1}$  se obtiene

$$\begin{aligned} w(x) &= \nu + e^{2\sqrt{2}kx} [k^2 + k_0^2 - 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x)] \\ &= (k_0^2 - k^2)e^{2\sqrt{2}kx_1} + e^{2\sqrt{2}kx} [k^2 \\ &\quad + k_0^2 - 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x)]. \end{aligned} \quad (5.96)$$

lo anterior conduce a

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{e^{\sqrt{2}k(x+x_1)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \{ (k_0^2 - k^2)e^{-\sqrt{2}k(x-x_1)} \cosh(\sqrt{2}k_0x) \\ &\quad + e^{\sqrt{2}k(x-x_1)} [(k^2 + k_0^2) \cosh(\sqrt{2}k_0x) - 2kk_0 \sinh(\sqrt{2}k_0x)] \}, \end{aligned} \quad (5.97)$$

que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{2e^{\sqrt{2}k(x+x_1)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \{ [(k_0 \cosh[\sqrt{2}k(x-x_1)] [k_0 \cosh(\sqrt{2}k_0x) - k \sinh(\sqrt{2}k_0x)]) \\ &\quad + k \sinh[\sqrt{2}k(x-x_1)] [k \cosh(\sqrt{2}k_0x) - k_0 \cosh(\sqrt{2}k_0x)]] \} \end{aligned} \quad (5.98)$$

Si sustituimos la siguiente identidad

$$\frac{k_0}{k} = \frac{\cosh(\sqrt{2}k_0x_2)}{\sinh(\sqrt{2}k_0x_2)} \quad (5.99)$$

es directo mostrar que

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{2e^{\sqrt{2}k(x+x_1)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \left\{ \frac{k_0^2 \cosh[\sqrt{2}k(x-x_1)] \cosh[\sqrt{2}k_0(x-x_2)]}{\cosh(\sqrt{2}k_0x_2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2 \sinh[\sqrt{2}k(x-x_1)] \sinh[\sqrt{2}k_0(x-x_2)]}{\sinh(\sqrt{2}k_0x_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Empleando nuevamente la relación

$$\frac{k_0}{\cosh(\sqrt{2}k_0x_2)} = \frac{k}{\sinh(\sqrt{2}k_0x_2)} \quad (5.101)$$

llegamos a que

$$w(x) = \frac{2k_0e^{\sqrt{2}k(x+x_1)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x_2)\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \\ \{k_0\cosh[\sqrt{2}k(x-x_1)]\cosh[\sqrt{2}k_0(x-x_2)] \\ -k\sinh[\sqrt{2}k(x-x_1)]\sinh[\sqrt{2}k_0(x-x_2)]\}. \quad (5.102)$$

Calculando nuevamente  $V_2(x)$  mediante

$$V_2(x) = V_0(x) - [\ln(w(x))]'' \quad (5.103)$$

llegamos una vez más a los conocidos potenciales de *Bargmann*

$$V_2(x) = -\frac{2(k_0^2 - k^2)[k^2\operatorname{sech}^2[\sqrt{2}k(x-x_1)] + k_0^2\operatorname{csch}^2[\sqrt{2}k_0(x-x_2)]]}{\{k\tanh[\sqrt{2}k(x-x_1)] - k_0\coth[\sqrt{2}k_0(x-x_2)]\}^2} \quad (5.104)$$

-Segunda situación. Ahora tenemos

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sqrt{2\sqrt{2}k}e^{-\sqrt{2}kx}[k_0\tanh(\sqrt{2}k_0x) + k] \quad (5.105)$$

con  $k_0 > k$ , es decir  $\epsilon > E_0$ . El cálculo de  $w(x)$  es igual al realizado en (5.84)-(5.86) lo cual conduce a

$$w(x) = w_0 + e^{-2\sqrt{2}kx_0}[k^2 + k_0^2 + 2kk_0\tanh(\sqrt{2}k_0x_0)] \\ -e^{-2\sqrt{2}kx}(k^2 + k_0^2) - 2kk_0e^{-2\sqrt{2}kx}\tanh(\sqrt{2}k_0x). \quad (5.106)$$

Definiendo

$$w_0 = -2kk_0\tanh(\sqrt{2}k_0x_0)e^{-2\sqrt{2}kx_0} - e^{-2\sqrt{2}kx_0}(k^2 + k_0^2) - \nu \quad (5.107)$$

donde ahora  $\nu = (k_0^2 - k^2)e^{-2\sqrt{2}kx_1}$ , se llega a

$$\begin{aligned} w(x) &= -\nu - e^{-2\sqrt{2}kx} [k^2 + k_0^2 + 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x)] \\ &= -(k_0^2 - k^2)e^{-2\sqrt{2}kx_1} - e^{-2\sqrt{2}kx} [k^2 \\ &\quad + k_0^2 + 2kk_0 \tanh(\sqrt{2}k_0x)]. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Después de algunos ajustes

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{e^{-\sqrt{2}k(x+x_1)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \{ (k_0^2 - k^2)e^{\sqrt{2}k(x-x_1)} \cosh(\sqrt{2}k_0x) \\ &\quad + e^{-\sqrt{2}k(x-x_1)} [(k_0^2 + k^2) \cosh(\sqrt{2}k_0x) + 2kk_0 \sinh(\sqrt{2}k_0x)] \} \end{aligned} \quad (5.109)$$

lo cual conduce a

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{2e^{-\sqrt{2}k(x+x_1)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \{ k_0 \cosh[\sqrt{2}k(x-x_1)] [k_0 \cosh(\sqrt{2}k_0x) + k \sinh(\sqrt{2}k_0x)] \\ &\quad - k \sinh[\sqrt{2}k(x-x_1)] [k \cosh(\sqrt{2}k_0x) + k_0 \sinh(\sqrt{2}k_0x)] \}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Si sustituimos la siguiente identidad

$$\frac{k_0}{k} = -\frac{\cosh(\sqrt{2}k_0x_2)}{\sinh(\sqrt{2}k_0x_2)} \quad (5.111)$$

llegamos finalmente a

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{2k_0e^{-\sqrt{2}k(x+x_1)}}{\cosh(\sqrt{2}k_0x_2)\cosh(\sqrt{2}k_0x)} \\ &\quad \{ k_0 \cosh[\sqrt{2}k(x-x_1)] \cosh[\sqrt{2}k_0(x-x_2)] \\ &\quad - k \sinh[\sqrt{2}k(x-x_1)] \sinh[\sqrt{2}k_0(x-x_2)] \}. \end{aligned} \quad (5.112)$$

ya que

$$V_2(x) = V_0(x) - [\ln(w(x))]'' \quad (5.113)$$

al sustituir la expresión para  $w(x)$  y realizar los últimos cálculos, se llega nuevamente a los potenciales de *Bargmann*

$$V_2(x) = -\frac{2(k_0^2 - k^2)\{k^2 \operatorname{sech}^2[\sqrt{2}k(x - x_1)] + k_0^2 \operatorname{csch}^2[\sqrt{2}k_0(x - x_2)]\}}{\{k \tanh[\sqrt{2}k(x - x_1)] - k_0 \coth[\sqrt{2}k_0(x - x_2)]\}^2}. \quad (5.114)$$

- El Oscilador Armónico

Analicemos ahora al oscilador armónico, el cual está descrito por un potencial de la forma :

$$V_0(x) = \frac{x^2}{2}. \quad (5.115)$$

Al sustituir dicho potencial en la ecuación de *Schrödinger*

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) \right] \psi^{(0)} = E \psi^{(0)} \quad (5.116)$$

se observa que el correspondiente Hamiltoniano tiene un espectro puramente discreto, compuesto de eigenvalores  $E_n = n + 1/2, n = 0, 1, 2, \dots$  y eigenfunciones dadas por

$$\psi_n(x) = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.117)$$

donde  $H_n(x)$  son los polinomios de *Hermite*:

$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^s (2x)^{n-2s} \frac{n!}{(n-2s)! s!}. \quad (5.118)$$

Considérese primeramente que  $\epsilon = E_m$  con  $m$  fijo, y sea  $\psi^{(0)}(x)$  la correspondiente función propia normalizada de (5.117). Al sustituir esta última en:

$$w(x) = w_0 + \int_{x_0}^x \psi^{(0)2}(y) dy \quad (5.119)$$

con  $x_0 = 0$  se llega a que

$$w(x) = w_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^m m!} \int_0^x e^{-y^2} H_m^2(y) dy. \quad (5.120)$$

Sustituyendo ahora uno de los  $H_m(x)$  de  $H_m^2(x)$ , por su expresión correspondiente se obtiene:

$$w(x) = w_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}2^m m!} \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^s \frac{m!}{(m-2s)!s!} \int_0^y e^{-y^2} (2y)^{m-2s} H_m(y) dy \quad (5.121)$$

Haciendo uso de la siguiente fórmula integral (Ver [24])

$$\int_{x_2}^{x_1} x^\lambda e^{-a^2 x^2} H_{2n+\epsilon}(ax) dx = \pm (-1)^n \frac{2^{2n+\epsilon} a^{\epsilon x^{\lambda+\epsilon+1}}}{\lambda + \epsilon + 1} \left(\epsilon + \frac{1}{2}\right)_n {}_2F_2\left(\frac{2\epsilon + 2n + 1}{2}, \frac{\lambda + \epsilon + 1}{2}; \epsilon + \frac{1}{2}, \frac{\lambda + \epsilon + 3}{2}; -a^2 x^2\right) \quad (5.122)$$

se obtiene finalmente la expresión que estábamos buscando

$$w(x) = \nu + \frac{1}{2} - x \sum_{s=0}^{m_0} \frac{(-1)^{m_0+s} \Gamma(m_1) (2x)^{2m_1-2s-1}}{2^{\delta+1} \sqrt{\pi} (m_1-s) \Gamma(\delta + \frac{1}{2}) (m-2s)! s!} {}_2F_2\left(m_1; m_1-s; \delta + \frac{1}{2}; m_1+1-s; -x^2\right) \quad (5.123)$$

donde  ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z)$  es una función hipergeométrica generalizada dada por

$${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k z^k}{(b_1)_k (b_2)_k k!} \quad (5.124)$$

y  $m_0 = (m - \delta)/2$ ,  $m_1 = (m + \delta + 1)/2$ ,  $\delta = 0$  si  $m$  es par, pero  $\delta = 1$  si  $m$  es impar. Para  $\nu \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$  la función  $w(x)$  no tiene ceros si  $x \in \mathbb{R}$ . Así, para este dominio de  $\nu$  resulta que  $V_2(x)$  es isoespectral al potencial del oscilador, lo cual se ilustra en la fig (5.5) para  $\epsilon = 7/2$  ( $m = 3$ ) y  $\nu = -5/4$ .

Consideremos ahora que  $\epsilon \notin \text{Sp}(\mathbb{H})$ . En este caso las soluciones a la ecuación de *Schrödinger* adecuadas para implementar el algoritmo confluyente, ya que desvanecen asintóticamente para  $x \rightarrow \pm\infty$ , se expresan como:

$$\psi^{(0)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ {}_1F_1\left(\frac{1-2\epsilon}{4}; \frac{1}{2}; x^2\right) \pm 2x \frac{\Gamma(\frac{3-2\epsilon}{4})}{\Gamma(\frac{1-2\epsilon}{4})} {}_1F_1\left(\frac{3-2\epsilon}{4}; \frac{3}{2}; x^2\right) \right], \quad (5.125)$$

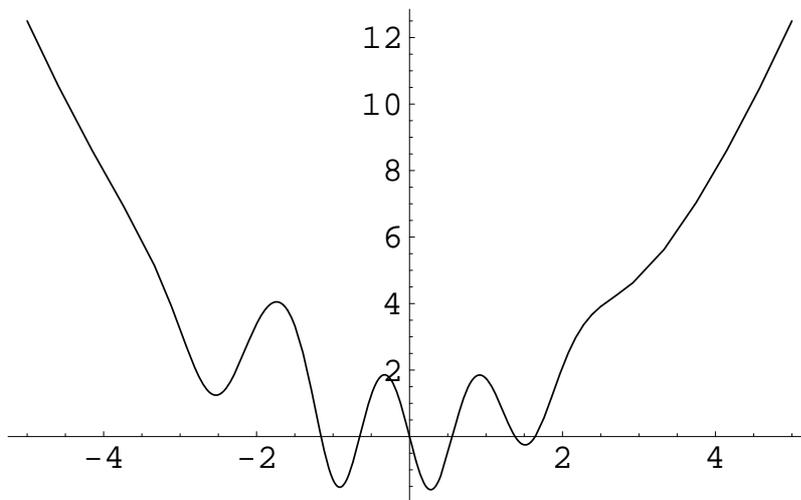


Figura 5.5: Potencial  $V_2(x)$  generado mediante 2-SUSY confluente, aplicado al oscilador armónico con valores de  $\epsilon = 3$  y  $w_0 = -5/2$

donde  ${}_1F_1(a; b; z)$  es la serie *hipergeométrica* de *Kummer* dada por:

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!}. \quad (5.126)$$

La expresión explícita para  $w(x)$  resulta ahora demasiado larga y poco interesante para ser mostrada aquí (de hecho en este caso surgen tres tipos de sumas infinitas similares a la de (5.126)). De manera alternativa realizamos un cálculo numérico de  $V_2(x)$  para  $\epsilon = 4$  partiendo de la solución anterior con  $w_0 = -5$  y  $x_0 = 0$  en (5.125), (observe la figura (5.6)). Entonces, el espectro del Hamiltoniano asociado a  $V_2(x)$  está compuesto de las energías del oscilador  $E_n = n + 1/2, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  mas un nuevo nivel en  $\epsilon = 4$ . Ello ilustra claramente la posibilidad ofrecida por el *algoritmo 2-SUSY confluente* de crear un nuevo nivel por arriba del estado base de  $H_0$  [20].

- El Potencial Coulombiano

Consideremos finalmente al potencial coulombiano, para el cual el problema unidimensional equivalente en coordenadas adimensionales, involucra a

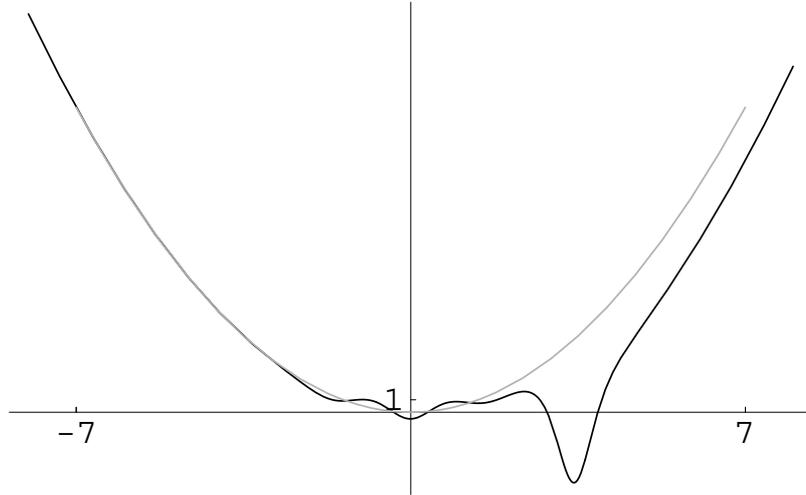


Figura 5.6: Aquí se puede observar el comportamiento del potencial super-simétrico del caso confluyente 2-SUSY, correspondiente al oscilador armónico con valores de  $\epsilon = 7$  y  $w_0 = 7/2$

un Hamiltoniano del tipo

$$H_0 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + V_0(r), \quad (5.127)$$

donde

$$V_0(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2}, \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.128)$$

Para un  $\ell$  fijo, resulta que el espectro del Hamiltoniano correspondiente es  $\text{Sp}(H_0) = E_n = -1/2n^2, n = \ell + 1, \ell + 2, \dots$ . Para implementar el algoritmo confluyente, primero encontramos la solución general a la ecuación de *Schrödinger* para una energía de factorización  $\epsilon < 0$ . Posteriormente, escogemos la solución que satisfaga la condición

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi^{(0)}(x) = 0. \quad (5.129)$$

Entonces, la solución que se anula en el origen se expresa como

$$\psi^{(0)}(r) = \sqrt{\frac{(-2\epsilon)\Gamma(\ell + 1 + \frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}})}{\Gamma(\frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}} - \ell)[\Gamma(2\ell + 2)]^2}} (2r\sqrt{-2\epsilon})^{\ell+1} e^{-r\sqrt{-2\epsilon}} \quad (5.130)$$

$${}_1F_1\left(\ell + 1 - \frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}}; 2\ell + 2; 2r\sqrt{-2\epsilon}\right)$$

donde  $\Gamma(z)$  y  ${}_1F_1(a; b; z)$  son las funciones Gama e hipergeométrica confluyente respectivamente. Nótese que  $\psi^{(0)}(r)$  se convierte en la eigenfunción normalizada de  $H$  para  $\epsilon = E_n$ . Un cálculo directo nos conduce entonces a la función  $w(r)$  buscada :

$$w(r) = w_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{-2\epsilon} B(\ell + 1 + \frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}}, \ell + 1 + m - \frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}}) (2r\sqrt{-2\epsilon})^{2\ell+m+3}}{2(2\ell + m + 3)(2\ell + 1)! m! B(\frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}} - \ell, \ell + 1 - \frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}})}$$

$${}_2F_2\left(2\ell + m + 3, \ell + 1 + \frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}}; 2\ell + m + 4, 2\ell + 2; -2r\sqrt{-2\epsilon}\right)$$
(5.131)

siendo  $B(x, y)$  y  ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z)$  las funciones Beta e hipergeométrica generalizada respectivamente. Para  $\epsilon = E_n = -1/2n^2$  esta serie infinita se trunca, quedando como:

$$w(r) = w_0 + \sum_{m=0}^{n-\ell-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{2r}{n}\right)^{2\ell+m+3}}{(2\ell + m + 3)(2\ell + m + 1)} \quad (5.132)$$

$$\frac{{}_2F_2(2\ell + m + 3, n + \ell + 1; 2\ell + m + 4, 2\ell + 2; -\frac{2r}{n})}{2n(2\ell + 1)! m! B(n - \ell - m, 2\ell + m + 1)},$$

en donde  $w(r)$  carecerá de ceros en  $[0, \infty)$  si  $w_0 \in [0, \infty)$  para  $\epsilon \neq E_n$  y  $w_0 \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$  para  $\epsilon = E_n$ .

Por tanto, el socio supersimétrico del potencial de Coulomb  $V_0(r)$  previo toma la forma :

$$V_2(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell + 1)}{2r^2} - \frac{2\psi^{(0)}(r)\psi^{(0)'}(r)}{w(r)} + \frac{\psi^{(0)4}(r)}{w^2(r)}. \quad (5.133)$$

Cabe resaltar el hecho de que  $\psi^{(0)}(r)$  es obtenida tanto de (5.116) como de (5.118) y  $w(r)$  de 5.119. Vease la figura (5.7).

i) *El caso con  $\ell = 0$  y  $n = 1$*

Los socios supersimétricos del potencial  $V_0(r) = -1/r$  están dados por:

$$V_2(r) = -\frac{1}{r} + \frac{8r[1 + r + (w_0 + 1)(r - 1)e^{2r}]}{[1 + 2r + 2r^2 - (w_0 + 1)e^{2r}]^2}. \quad (5.134)$$

Los potenciales  $V_0(r)$  y  $V_2(r)$  son isoespectrales cuando  $w_0 \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$  y difieren en el estado base para  $w_0 = 0, -1$ , por que  $E_1 = -1/2$  está ausente de  $H_2$  en el último caso. Los potenciales en (5.132) coinciden con una familia derivada hace tiempo mediante el método de factorización si tomamos  $w_0 = 4\gamma_1$  en (2.54).

ii) *El caso con  $\ell = 0$  y  $n = 2$*

Los *socios* del potencial  $V_0(x) = -1/r$  son ahora :

$$V_2(r) = -\frac{1}{r} + \frac{4r(r - 2)[-8 + 4r + 6r^2 + 2r^3 + r^4 + 2(w_0 + 1)(4 - 6r + r^2)e^r]}{[8 + 8r + 4r^2 + r^4 - 8(w_0 + 1)e^r]^2}. \quad (5.135)$$

Una vez más,  $V_0(r)$  y  $V_2(r)$  son isoespectrales cuando  $w_0 \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ , y para  $w_0 = 0, -1$  sus espectros difieren porque el nivel  $E_2 = -1/8$  no pertenece al espectro de  $H_2$ . Hasta donde sabemos, los potenciales en (5.132) no han sido derivados previamente.

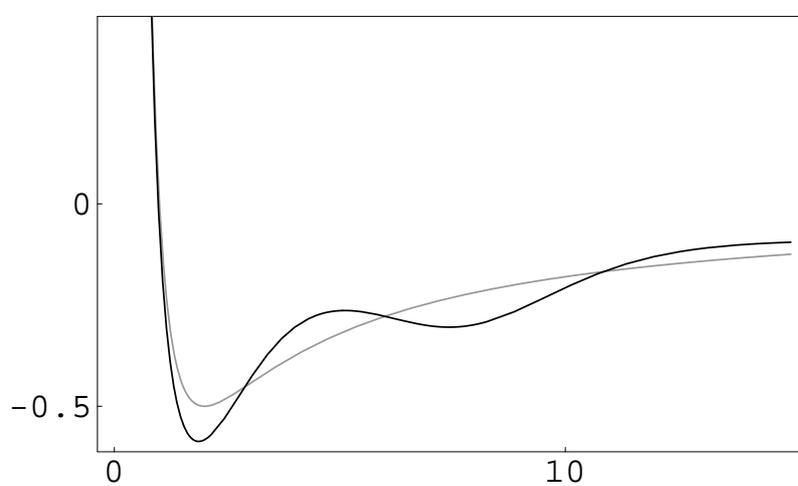


Figura 5.7: Potencial  $V_2(x)$  generado mediante 2-SUSY confluyente aplicado al átomo de hidrogeno (caso radial) con parámetros  $n = 4, w_0 = -0,1$  y  $\ell = 1$



# Capítulo 6

## Conclusiones, resultados y perspectivas

Hemos efectuado un estudio sistemático general de la mecánica cuántica supersimétrica de segundo orden confluyente para generar nuevos potenciales a partir de uno dado inicial cuya solución es exacta. La mencionada confluencia sucede cuando las dos energías de factorización involucradas en los casos de segundo orden tanto real como complejo tienden ambas a un valor común real. Entre los resultados originales que hemos obtenido de este acercamiento destacan los siguientes:

- Se encontró el tipo de soluciones de la ecuación de *Schrödinger* inicial que deben usarse para que la función  $w(x)$  que determina al nuevo potencial no introduzca singularidades adicionales a las que pudiera tener el potencial inicial. Tales soluciones deben desvanecerse asintóticamente cuando  $x$  tiende a alguno de los extremos de su dominio.

- Se determinó cual es el dominio del parámetro  $w_0$  para que, dada la solución con el comportamiento asintótico adecuado, la función  $w(x)$  no tenga ceros en el dominio de  $x$  que induzcan singularidades en el nuevo potencial.

- Se demostró que en el caso confluyente la función  $w(x)$  es proporcional al Wronskiano de una eigenfunción estándar y una eigenfunción generalizada de segundo orden, ambas del Hamiltoniano inicial y asociadas a la energía de factorización confluyente. Este resultado restituyó de algún modo la aparente asimetría que existía anteriormente, ya que tanto en el caso real como en el complejo el Wronskiano de dos eigenfunciones del Hamiltoniano inicial es la función determinante del método lo cual aparentemente no sucedía en el caso confluyente. Adicionalmente, una gran variedad de nuevos potenciales cuya

solución es exacta han sido derivados cuando se aplica la técnica confluyente a la partícula libre, al potencial de *Pöschl – Teller*, al oscilador armónico y a la parte radial del átomo de hidrogeno. En todos estos casos hemos aplicado con éxito el método confluyente tanto si se usan soluciones físicas como no físicas, con la condición que esta últimas cumplan el comportamiento asintótico apropiado.

Es importante mencionar que, como resultado de la investigación llevada a cabo durante el desarrollo de esta tesis, se publicaron tres artículos de investigación, dos de ellos en revistas de circulación internacional y uno de ellos en memorias de congresos internacionales :

D J Fernández C. and E. Salinas-Hernández, *J. Phys A: Math. Gen.* **36** (2003) 2537.

D J Fernández C. and E. Salinas-Hernández, *Phys Lett. A* **338** (2005) 13.

D J Fernández C. and E. Salinas-Hernández, *Inst. Phys. Conf. Ser.* **185** (2005) 255.

Finalmente, es importante mencionar que en el futuro se va a analizar si el caso confluyente de la mecánica cuántica supersimétrica de tercer orden, que involucra un operador de entrelazamiento diferencial de tercer orden, ofrece también resultados originales adicionales a los aquí presentados para el caso de segundo orden confluyente. Una vía adicional de investigación es analizar si el caso confluyente de segundo orden se puede aplicar con éxito a potenciales unidimensionales periódicos en  $x$ . Ambos temas ofrecen perspectivas interesantes de investigación a futuro, lo cual sugiere que los resultados aquí presentados constituyen sólo el punto de partida para el estudio de la mecánica cuántica supersimétrica confluyente de orden arbitrario.

# Índice de figuras

5.1. Algoritmo 2-SUSY confluyente aplicado a la partícula libre que genera el potencial de <i>Pöschl – Teller</i> con un estado ligado en $\epsilon = -k^2 = -4$ . . . . .	61
5.2. Potencial de <i>Pöschl–Teller</i> generado mediante el algoritmo 2-SUSY confluyente aplicado a la partícula libre. Ahora el estado ligado se encuentra en $\epsilon = -k^2 = -9$ . . . . .	61
5.3. Gráfica que ilustra al potencial $V_2(x)$ generado a partir de <i>Pöschl – Teller</i> , con $\epsilon = -k^2 = -9/4, E_0 = -k_0^2 = -1$ y $x_1 = 1, x_2 = 2$ . . . . .	68
5.4. Potencial de <i>Bargmann</i> (5.91) generado partiendo de <i>Pöschl–Teller</i> con $\epsilon = -k^2 = -9/4, E_0 = -k_0^2 = -1$ , pero ahora con $x_1 = x_2 = 0,4$ . . . . .	69
5.5. Potencial $V_2(x)$ generado mediante 2-SUSY confluyente, aplicado al oscilador armónico con valores de $\epsilon = 3$ y $w_0 = -5/2$ .	75
5.6. Aquí se puede observar el comportamiento del potencial supersimétrico del caso confluyente 2-SUSY, correspondiente al oscilador armónico con valores de $\epsilon = 7$ y $w_0 = 7/2$ . . . . .	76
5.7. Potencial $V_2(x)$ generado mediante 2-SUSY confluyente aplicado al átomo de hidrogeno (caso radial) con parámetros $n = 4, w_0 = -0,1$ y $\ell = 1$ . . . . .	79



# Bibliografía

- [1] O L De lange and R.E: Raab, " Operator Methods in Quantum Mechanics", Clarendon Press,Oxford (1991).
- [2] B K Bagchi, "Supersymmetry in Quantum and Clasical Mechanics", chapman 8 May , Boca Ratun (2001).
- [3] A A Andrianov, M.V Ioffe, V. Spiridonov, Phys. Lett.A **174** (1993) 273.
- [4] Andrianov AA, Ioffe M V, Cannata F and J.P.Dedonder, Int. J. Mod. Phys.A **10** (1995) 2683.
- [5] B F Samsonov, Mod. Phys. Lett. A **11** (1996) 15.
- [6] D J Fernández C.,Int. J. Mod. A **12** (1997) 171.
- [7] D J Fernández C.,M L Glasser L M and Nieto, Phys. Lett.A **240** (1998) 15.
- [8] J O Rosas-Ortíz, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) L507.
- [9] H Aoyama, N Nakayama, M Sato and T Tanaka, Phys Lett. B **521** (2001) 400.
- [10] B Mielnik, M Nieto and O Rosas-Ortíz, Phys. Lett. A **269** (2000) 70.
- [11] C V Sukumar, J. Phys. A: Math. Gen. (1985).
- [12] Mielnik B. and O Rosas-Ortiz, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 43.
- [13] L. Infeld and T.E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23** (1951) 21.
- [14] B Mielnik, J. Math.Phys. **25** (1984) 3387.

- [15] D J Fernández C. *Lett. Math. Phys* **8** (1984) 337.
- [16] D J Fernández C. and N. Fernández-García, *AIP Conf. Pro* **744** (2005) 236.
- [17] D J Fernández C., R. Muñoz and A. Ramos, *Phys. Lett. A* **308** (2003) 11.
- [18] O Rosas Ortíz and R. Muñoz, *J. Phys. A: Math Gen.* **36** (2003) 8497.
- [19] P B Abraham and H E Moses, *Phys. Rev. A* **22** (1980) 1333.
- [20] D J Fernández C. and E. Salinas-Hernández, *J. Phys A: Math. Gen.* **36** (2003) 2537.
- [21] D J Fernández C. and E. Salinas-Hernández, *Phys Lett. A* **338** (2005) 13.
- [22] D J Fernández C. and E. Salinas-Hernández, *Inst. Phys. Conf. Ser.* **185** (2005) 255.
- [23] Shi-Hai Dong, *Factorization Method in Quantum Mechanics*, Springer, Netherland, 2007.
- [24] A P Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O.I Morichev "Funciones Especiales Vol. 2 y 3 Integrales y Series" Gordon and Breach Science Publisher.