



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA  
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS" ZACATENCO**

**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS  
CONTINUOS ESTRATIFICADOS POR EL  
MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE  
FRONTERA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS**

**PRESENTA:**

**ALBERTO RITO RODRÍGUEZ**

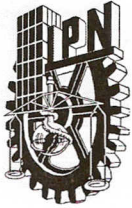
**DIRECTORES:**

**DR. ESTEBAN FLORES MÉNDEZ  
DR. ALEJANDRO RODRÍGUEZ CASTELLANOS**



**MÉXICO D.F.**

**AGOSTO 2009**



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de México D.F. siendo las 16:00 horas del día 04 del mes de agosto del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A.-U.Z.

para examinar la tesis de grado titulada:

“PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS CONTINUOS ESTRATIFICADOS POR EL MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA”.

Presentada por el alumno:

Rito

Apellido paterno

Rodríguez

Apellido materno

Alberto

Nombre(s)

Con registro:

B	0	6	1	6	0	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISIÓN REVISORA**

Director de tesis

Dr. Esteban Flores Méndez

Director de tesis

Dr. Alejandro Rodríguez Castellanos

Dr. Héctor Aureliano Sánchez Sánchez

Dr. Ramsés Rodríguez Rocha

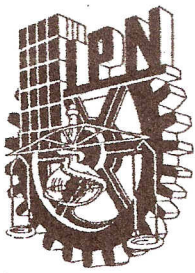
Dr. Norberto Domínguez Ramírez

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

M. en C. Pino Durán Escamilla



SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

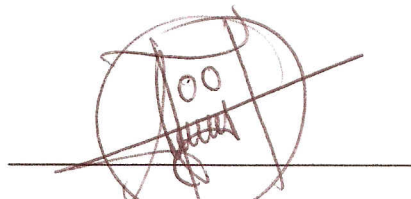


**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**CARTA CESION DE DERECHOS**

En la Ciudad de México D.F. el día 13 del mes Agosto del año 2009, el que suscribe **Alberto Rito Rodríguez** alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Estructuras con número de registro B061606, adscrito a Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura U.Z., manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Esteban Flores Méndez y el Dr. Alejandro Rodríguez Castellanos y cede los derechos del trabajo intitulado **“Propagación de ondas en medios continuos estratificados por el método indirecto de elementos de frontera”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [albertorito@gmail.com](mailto:albertorito@gmail.com). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



Alberto Rito Rodríguez

# *DEDICATORIA*

*Para mis padres con todo mi cariño y amor, quienes sin esperar nada, dieron todo su esfuerzo para ayudarme a seguir adelante, mostrándome el camino correcto. Por ustedes he logrado una meta más en mi vida que hoy les brindo, con admiración y respeto.*

# AGRADECIMIENTOS

*Al Dr. Esteban Flores Méndez por brindarme su confianza y su apoyo incondicional, pero sobre todo por su amistad.*

*Al Dr. Alejandro Rodríguez Castellanos por su amistad y su apoyo incondicional que hicieron posible el logro de esta meta.*

*A los Doctores Héctor A. Sánchez Sánchez, Ramsés Rodríguez Rocha y Norberto Domínguez Ramírez por sus valiosos comentarios que fueron de vital importancia para enriquecer este trabajo y además por brindarme un poco de su gran sabiduría.*

*Al Instituto Politécnico Nacional en particular a la SEPI de la ESIA-ZACATENCO por darme la oportunidad para el logro de una de las metas anheladas en mi vida.*

*A la Secretaria de la Defensa Nacional por apoyarme y brindarme la oportunidad de superarme continuamente.*

*A mis hermanos por confiar en mí y darme ánimos para seguir adelante.*

*A Elisa por su apoyo y sus valiosos consejos.*

*A José Juan por ser como de la familia.*

*A Susana por brindarme comprensión y apoyo incondicional.*

*Finalmente, a todos los que han contribuido a lo largo de mi vida en mi formación como persona y me han enseñado cuales son las cosas verdaderamente importantes de la vida, a todos ustedes GRACIAS.*

# Resumen

En el campo de la ingeniería se presentan problemas que tienen que ver con las características de los materiales que componen el medio en estudio, tal es el caso de las exploraciones petroleras, en donde se necesita un conocimiento preciso de las características del subsuelo, para llevar a cabo perforaciones y búsqueda de hidrocarburo, otro ejemplo se presenta en cimentaciones profundas donde las características del subsuelo son importantes para el análisis y diseño de dicha cimentación. Por estas razones se han desarrollado métodos numéricos (método de elemento finito y diferencias finitas) que tratan de simular el comportamiento real del subsuelo y determinar las características de los estratos que lo contienen. En este trabajo, se plantea el problema de calcular los desplazamientos y presiones en un medio estratificado, presentando dos casos de estudio: sólido-fluido y sólido-fluido-sólido. El problema planteado se resolvió realizando una formulación basada en el método de elementos de frontera indirectos, que utiliza como base las funciones de Green. Para validar los resultados obtenidos, se formula la solución para el mismo problema empleando el método del número de onda discreta.

Como resultado, se obtuvo el campo de presiones en el fluido y velocidades de propagación de ondas en los medios en estudio, con lo cual se puede caracterizar a los estratos que involucran el medio.

Las aportaciones de este trabajo fueron principalmente, la formulación basada en el método de elementos de frontera indirecto y su implementación en un programa de computadora, ya que este método ha sido poco estudiado en México y la experiencia obtenida puede ser de utilidad para trabajos posteriores.

Este trabajo servirá como base para la modelación de medios estratificados como el subsuelo, estructuras sumergidas y determinación de daño en medios heterogéneos entre otros.

# Abstract

In the field of engineering there are some problems that need know the characteristics of materials that compose the means of study, so is the case of the oil explorations, where a precise knowledge of the characteristics of the subsoil is needed to carry out perforations and hydrocarbon search, another example appears in deep foundations, where the characteristics of the subsoil are important for the analysis and design of foundations. For these reasons numerical methods have been developed (finite element method and finite differences method), this methods try to simulate the real behavior of the subsoil and to determine the characteristics of the layers. In this work the problem considers to calculate the displacements and pressures in stratified means, appear two cases of study: solid-fluid and solid-fluid-solid. The problem was solved realizing a based formulation in the indirect boundary elements that uses Green's functions as bases. To validate the obtained results, the same problem was solved using the discret wave number method.

The result obtained were the field of pressures in the fluid and speeds of the wave propagation in the study means, with this result is possible characterized to layers means.

The contributions of this work were mainly the formulation based on the indirect boundary elements methods and its implementation in a computer program, because this method has been less studied in Mexico and the obtained experience can be of utility for the later works.

This work will serve as bases for the modeling stratified means, like the subsoil, submerged structures and damage determination in heterogeneous means.

# CONTENIDO GENERAL

	<b>Pág.</b>
<b>DEDICATORIAS</b>	i
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	ii
<b>RESUMEN</b>	iii
<b>CONTENIDO GENERAL</b>	v
<b>SIMBOLOGÍA</b>	xi
<b>CAPÍTULO I GENERALIDADES</b>	1
I.1 Introducción	2
I.1.1 Simulaciones por computadora	2
I.1.2 Desarrollo del BEM	3
I.1.3 Aplicaciones del BEM	4
I.2 Planteamiento del problema	5
I.3 Objetivo, alcances y metas	6
<b>CAPÍTULO II SOLUCIÓN ANALÍTICA</b>	7
II.1 Fundamentos de la propagación de ondas elásticas	8
II.2 Generación de ondas por una fuente puntual en un medio elástico	9
II.3 Ecuaciones fundamentales en un medio elástico homogéneo e isótropo	10
II.4 Métodos Integrales de elementos de frontera	16
II.4.1 Métodos Integrales de elementos de frontera directos	17
II.4.2 Métodos Integrales de elementos de frontera indirectos	19
II.4.3 Funciones de Green en 2D	21
II.5 Formulación integral del IBEM	23
II.5.1 Campo de presiones y desplazamientos en el fluido	23
II.5.2 Campo de presiones y desplazamientos en el sólido	26
II.5.3 Condiciones de frontera	27
II.5.3.1 Condiciones de frontera para el semi-espacio fluido-sólido	31
II.5.3.2 Condiciones de frontera para el estrato sólido-fluido-sólido	32
II.5.3.3 Ecuaciones integrales para las regiones del semi-espacio fluido-sólido	33
II.5.3.4 Discretización de las ecuaciones integrales para el semi-espacio fluido-sólido	35



	<b>Pág.</b>	
II.5.3.5	Ecuaciones integrales para las regiones sólido-fluido-sólido	37
II.5.3.6	Discretización de las ecuaciones integrales para las regiones sólido-fluido-sólido	39
II.6	Formulación integral del DWN para el semi-espacio fluido- sólido	42
II.7	Formulación integral del DWN para el estrato sólido-fluido-sólido	46
II.8	Pulso de Ricker	49
 <b>CAPÍTULO III DESARROLLO DE SOFTWARE</b>		 51
III.1	Implementación del IBEM	52
III.2	Subrutina SISTEQ	54
III.3	Subrutina HANKELS	54
III.4	Subrutinas TRACT, GREENGA, GRESEX, GRENA, GRENAEX Y DERGRA	54
III.5	Subrutina DESFX Y	54
III.6	Subrutina SOLUCO	54
III.7	Programas en matlab para el tratamiento de datos	56
 <b>CAPÍTULO IV APLICACIÓN DE LA TEORÍA</b>		 57
IV.1	Caso de estudio 1: semi-espacio fluido- sólido	58
IV.1.1	Estudio del campo de ondas para receptores cercanas a la fuente en un semi-espacio fluido-sólido	58
IV.1.2	Estudio del campo de ondas en un semi-espacio fluido-sólido con velocidades de propagación de ondas lentas en el sólido	59
IV.1.3	Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-hierro	61
IV.1.4	Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-yeso	62
IV.1.5	Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-granito	64
IV.1.6	Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-piedra caliza	65
IV.1.7	Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-arena	66
IV.1.8	Simulación de la propagación de ondas en el semi-espacio fluido-sólido	67
IV.2	Caso de estudio 2: estrato sólido-fluido-sólido	71
IV.2.1	Estudio del campo de ondas en un estrato sólido-fluido-sólido con velocidades de propagación de ondas lentas en el sólido	71
IV.2.2	Estudio del campo de ondas en un estrato hierro-agua-hierro	73
IV.2.3	Estudio del campo de ondas en un estrato piedra caliza-agua-piedra caliza	74
 <b>CONCLUSIONES</b>		 77
 <b>BIBLIOGRAFÍA</b>		 81

## APÉNDICES

Apéndice A	Propiedades de las ondas mecánicas
Apéndice B	Fenómeno de atenuación
Apéndice C	Análisis de Fourier
Apéndice D	Principio de Huygens
Apéndice E	Funciones de Bessel

<b>LISTA DE FIGURAS</b>		<b>Pág</b>
Figura II.1	Propagación de ondas en el fluido debido a una perturbación en un punto dentro del medio	8
Figura II.2	Sólido sometido a una fuerza $F(t)$	10
Figura II.3	Componentes de esfuerzos en un paralelepípedo infinitesimal	12
Figura II.4	Propagación de ondas P	15
Figura II.5	Propagación de ondas S	16
Figura II.6	Espacio elástico definido por una superficie S	18
Figura II.7	Principio de Huygens	20
Figura II.8	Campo de ondas reflejado en el líquido provocado por el estrato sólido	25
Figura II.9	Campo difractado en el sólido	26
figura II.10	Interface entre dos materiales	28
Figura II.11	Diagrama de cuerpo libre sobre la interface entre dos medios	29
Figura II.12	Discontinuidad de esfuerzos entre dos medios	30
Figura II.13	Continuidad de desplazamientos semi-espacio fluido-sólido	31
Figura II.14	Continuidad de tracciones semi-espacio fluido-sólido	31
Figura II.15	Continuidad de desplazamientos estrato sólido-fluido-sólido	32
Figura II.16	Continuidad de tracciones estrato sólido-fluido-sólido	33
Figura II.17	Interface fluido-sólido para la formulación del IBEM	35
Figura II.18	Interface sólido-fluido-sólido para la formulación del IBEM	37
Figura II.19	Modelo para la formulación del DWN en un estrado solido-fluido	42
Figura II.20	Modelo para la formulación del DWN en estrato sólido-fluido-sólido	46
Figura II.21	Pulso de Ricker en el dominio del tiempo	50
Figura II.21	Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia	50
Figura III.1	Diagrama de flujo del programa IBEM	53
Figura IV.1	Semi-espacio fluido sólido con receptores cercanos a la fuente	58
Figura IV.2	Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio fluido-sólido con receptores cercanos a la fuente	58
Figura IV.3	Campo de presiones registrado por 30 receptores para el semi-espacio fluido-sólido con receptores cercanos a la fuente.	59
Figura IV.4	Semi-espacio fluido-sólido para el estudio de propagación de ondas lentas en el sólido.	60
Figura IV.5	Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio fluido-sólido considerando propagación de ondas lentas en el sólido.	60

	<b>Pág</b>	
Figura IV.6	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio fluido-sólido considerando propagación de ondas lentas en el sólido	61
Figura IV.7	Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-hierro	61
Figura IV.8	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-hierro	62
Figura IV.9	Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-yeso	63
Figura IV.10	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-yeso	63
Figura IV.11	Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-granito	64
Figura IV.12	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-granito	65
Figura IV.13	Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-piedra caliza	66
Figura IV.14	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-piedra caliza	66
Figura IV.15	Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-arena	67
Figura IV.16	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-arena	67
Figura IV.17	Modelo empleado para la simulación de la propagación de ondas en un semi-espacio fluido-sólido	68
Figura IV.18	Propagación de las ondas P en el fluido	68
Figura IV.19	Inicio de la transmisión de ondas al estrato sólido	69
Figura IV.20	Propagación de las ondas P en el sólido	69
Figura IV.21	La onda P en el sólido satisface la condición de irradiación al infinito	70
Figura IV.22	Estrato fluido-sólido-fluido para el estudio de propagación de ondas lentas en el sólido	71
Figura IV.23	Señal registrada por el receptor no. 1, para el estrato fluido-sólido-fluido para el estudio de propagación de ondas lentas en el sólido	71
Figura IV.24	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio fluido-sólido con propagación de ondas lentas en el sólido	72
Figura IV.25	Señal registrada por el receptor no. 1, para el estrato hierro-agua-hierro.	73
Figura IV.26	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el estrato hierro-agua-hierro.	73

		<b>Pág</b>
Figura IV.27	Señal registrada por el receptor no. 1, para el estrato piedra caliza-agua-piedra caliza	74
Figura IV.28	Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-piedra caliza	75
Figura A.1	Reflexión de ondas mecánicas	A-2
Figura A.2	Refracción de ondas mecánicas	A-3
Figura B.1	Fenómeno de atenuación	B-2
Figura D.1	Ondas producidas en un lago	D-2
Figura D.2	Método geométrico para explicar la propagación de las ondas propuesto por Cristian Huygens	D-3
Figura D.3	Rayos paralelos y frentes de onda planos a gran distancia de la fuente.	D-3
Figura D.4	Frentes de onda planos según el principio de Huygens	D-3

## SIMBOLOGÍA

BEM	Siglas en inglés del método de elementos de frontera.
IBEM	Siglas en inglés del método indirecto de elementos de frontera.
BIE	Siglas en inglés de las ecuaciones integrales de frontera.
FEM	Siglas en inglés del método de elementos finitos.
FDM	Siglas en inglés del método de diferencias finitas.
DWN	Siglas en inglés del método del número de onda discreto.
P	Ondas primarias.
S	Ondas secundarias.
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé.
$c$	Velocidad de propagación de las ondas mecánicas.
$\rho$	Densidad de masa del medio.
$\nabla^2$	Operador Laplaciano.
$\omega$	Velocidad angular del movimiento.
$\alpha$	Velocidad de las ondas P.
$\beta$	Velocidad de las ondas S.
$\mu$	Módulo de cortante.
$H_0^{(2)}$	Función de Hankel de segunda especie y orden cero.
$p^{0F}(\mathbf{x})$	Presión incidente provocado por la fuente puntual en el fluido.
$C(\omega)$	Coefficiente de escala de la presión incidente.
$c^F$	Velocidad de propagación de ondas en el fluido
$\rho_F$	Densidad del fluido.
$\sigma_{ij}$	Tensor de esfuerzos.
$\Psi$	Función de densidad de fuerza para el fluido.
$\phi_j(\xi)$	Función de densidad de fuerza para el sólido.
$p^{dF}$	Campo difractado de presiones en el fluido.
$u_1^{0F}$	Campo de desplazamiento en el fluido en la dirección 1.
$G^F(\mathbf{x}, \xi)$	Función de Green en el fluido.
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker.

# Capítulo I

## Generalidades

En este capítulo presenta una introducción sobre el método indirecto de elementos de frontera, sus características, ventajas y aplicaciones. Se plantea el problema a resolver y el método empleado para llegar a la solución, así como los objetivos propuestos. Se explica brevemente el contenido de cada capítulo que conforman el presente trabajo.

## I.1 Introducción

En la actualidad en diferentes áreas del conocimiento como la mecánica de sólidos, geofísica e ingeniería entre otros, se presentan problemas que pueden llegar a ser tan complejos, como es el caso del fenómeno de propagación de ondas en medios continuos estratificados, cuyo estudio ha generado el desarrollo de métodos numéricos tan complejos, que su implantación ha sido posible gracias al avance en recursos de computo de hoy en día.

### I.1.1 Simulaciones por computadora

Un aspecto importante en el desarrollo de la ciencia y la ingeniería es el costo para realizar pruebas ya sea en escala real o en laboratorio, es por eso que muchos de los investigadores se apoyan en las simulaciones realizadas por computadora, dichas simulaciones tratan de reemplazar esas pruebas tan costosas y obtener resultados preliminares, que posteriormente se van calibrando con la parte experimental. Lo anterior ha contribuido al avance y desarrollo de diferentes métodos numéricos para la búsqueda de solución eficiente de problemas.

Hoy en día existen diversos métodos numéricos para simular el comportamiento real de los problemas que se plantean a través de ecuaciones diferenciales, dentro de los cuales podemos mencionar al método de elemento finito (FEM por sus siglas en inglés), el método de diferencias finitas (FDM por sus siglas en inglés), el método de elementos de fronteras (BEM por sus siglas en inglés) y el método de volumen finito (FVM por sus siglas en inglés). Cada uno de estos métodos tienen sus ventajas y desventajas y todos se aplican en la práctica, por ejemplo el más popular es el FEM el cual ha abarcado muchos campos del conocimiento y tiene mayor aplicación que el resto de los métodos, y se puede aplicar casi a cualquier tipo de geometría empleando un mallado en todo el dominio que se pretende modelar; el método que se encuentra en segundo lugar es el FDM, el cual es ampliamente utilizado en problemas con geometrías regulares, este método al igual que el del FEM necesita un mallado en todo el dominio del problema; el BEM ocupa el tercer lugar en popularidad como método numérico para resolver problemas relacionados con elementos en la frontera. A diferencia de los métodos mencionados anteriormente el BEM en particular se distingue porque no necesita un mallado de todo el dominio en estudio, sino que únicamente es suficiente con un mallado en la frontera del dominio, reduciendo con esto una dimensión del problema. Aunque el BEM sea menos popular entre los usuarios es un método alternativo y especializado del FEM y FDM, inclusive se pueden llegar a combinar los diferentes métodos, dependiendo del tipo de problema a resolver.

Otro método muy utilizado para modelar medios estratificados es el método del número de onda discreto (DWN por sus siglas en inglés). En el DWN una onda sísmica irradiada de una fuente se expresa como integración del número de onda, mientras el medio no tenga amortiguamiento inelástico (Nozu Atsushi 2002). Este método es ampliamente utilizado en la simulación de terremotos y obtención de sismogramas sintéticos.



### I.1.2 Desarrollo del BEM

El origen de los métodos de elementos de frontera se remonta a mediados del siglo XVIII con las contribuciones de Leonhard Euler en 1755, Simeon-Denis Poisson en 1813, Jean Baptiste Joseph Fourier en 1822, entre otros, quienes formularon en forma teórica las bases para este método, pero no fue sino hasta mediados del siglo XIX en la década de los sesenta en que la aplicación práctica de las ecuaciones integrales de frontera se hiciera posible, gracias a la aparición de las primeras computadoras electrónicas.

Con el paso del tiempo, el BEM se ha posicionado en un lugar firme en el área de los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Comparando con los métodos numéricos más populares, tales como el FEM y el FDM, que se pueden clasificar como los métodos del dominio, los BEM se distinguen como método de frontera, lo cual significa que la discretización numérica está desarrollada en la dimensión espacial reducida. Por ejemplo, para los problemas en tres dimensiones espaciales, la discretización se realiza en la superficie de limitación solamente y en dos dimensiones espaciales, la discretización está en el contorno del límite únicamente. Esta dimensión reducida lleva a sistemas lineales de menor dimensión, a menos requisitos de recursos computacionales, y por consiguiente a un cómputo más eficiente, comparado con otros métodos como el FEM y el FDM. La eficiencia del BEM es notado en problemas en donde el dominio es infinito, ya que este dominio necesita ser truncado y ser aproximado en métodos del dominio. El BEM modela automáticamente el comportamiento en el infinito, por lo que las formulaciones de elementos de frontera son especialmente adecuados para modelar regiones fluidas semi-infinitas o el subsuelo (semi-espacio) (Estorff y Antes, 1991). También para los problemas que implican límites móviles el ajuste del acoplamiento es mucho más fácil con el BEM. Con estas ventajas, el BEM ha formado parte de las técnicas computacionales eficientes para la solución de ecuaciones diferenciales de hoy en día.

Desde un punto de vista particular, se puede decir que el BEM se refiere a la técnica numérica basada en el método de pesos residuales, semejante a la formulación del FEM, excepto que la función de peso usada es la solución fundamental de la ecuación que gobierna el sistema, lo cual permite eliminar la necesidad de discretización del dominio o también se puede ver como la implementación numérica de las ecuaciones integrales de frontera basadas en la formulación de Green.

El término “método de elementos de frontera” ha sido usado generalmente para una gran variedad de métodos numéricos que incluyen discretización en la frontera, tal como el método general de las ecuaciones integrales de frontera, conocido como método de ecuaciones integrales de frontera (BIEM por sus siglas en ingles); el método directo de elementos de frontera (BEM por sus siglas en ingles) que se caracteriza por emplear parámetros con sentido físico como desplazamientos y presiones; el método indirecto de elementos de frontera (IBEM por sus siglas en ingles) que emplea parámetros ficticios tales como la densidad de fuerza que permite visualizar intuitivamente la dinámica del problema desde el punto de vista de propagación de ondas (e.g. Sánchez-Sesma y Campillo, 1991).

A principios de 1990 fue desarrollada una formulación por medio del Método Indirecto de Elementos de Frontera, (IBEM, por sus siglas en ingles) aplicada exitosamente en la propagación de ondas SH, P, SV y Rayleigh en medios elásticos (*Sánchez-Sesma 1991, 1993 y 1995; Luzón et al., 1997; Vai et al., 1999*).

### **I.1.3 Aplicaciones del BEM**

El BEM ha demostrado su eficacia para resolver problemas específicos como por ejemplo, la simulación de problemas que tienen que ver con la concentración de esfuerzos, como es el caso de fractura o agrietamiento de un sólido, otro caso en el que el BEM ha tenido gran aplicación como método numérico es el de la propagación de ondas en medios continuos, en los cuales otros métodos numéricos tienen problemas para lograr que las ondas incidentes transiten y finalmente se disipen en el medio, estos métodos tienden a atrapar a las ondas en el volumen de observación, produciendo desplazamientos y esfuerzos que no corresponden a la física del problema, con el BEM este efecto no sucede debido a que satisface la condición de Sommerfeld, la cual considera que la energía que se irradia de las fuentes se dispersa hacia el infinito.

Los métodos sísmicos de exploración constituyen una herramienta imprescindible en la búsqueda de hidrocarburos mediante la obtención de secciones que permiten interpretar la configuración espacial de los sedimentos en el subsuelo; la teoría de la elasticidad y propagación de ondas en las que se basa esta técnica se rige por ciertas suposiciones con respecto al medio de propagación. Si bien es cierto que la consideración de un medio isótropo (no hay variación de la velocidad con la dirección de propagación) ha dado buenos resultados, la necesidad de descubrir yacimientos más pequeños y de optimizar la explotación en los que ya están en producción ha impulsado a la adopción de modelos más complejos.

Los métodos sísmicos de exploración también tiene aplicación en el campo de la mecánica de suelos para la determinación de la configuración de la estratigrafía y la detección de grietas y oquedades.

En sistemas mecánicos, como tuberías y edificios los métodos de propagación de ondas permiten la identificación de daño, corrosión y de elementos estructurales con densidad distinta a la de la matriz que lo soporta, entre otros.

Los métodos integrales de elementos de frontera han sido extensamente aplicados a modelos o simulaciones sísmicas de propagación de ondas en el subsuelo, y han ayudado a entender y a cuantificar los efectos de las irregularidades topográficas, como colinas, montañas o valles sujetos a grandes movimientos sísmicos (Bouchon,1973,1985; Wong and Jennings, 1975; Sánchez-Sesma, 1978, 1983;Sills, 1978; Sánchez-Sesma and Rosenblueth, 1979; Sánchez-Sesma et al., 1982; Kawase, 1988; Gaffet and Bouchon, 1989; Sánchez-Sesma and Campillo, 1991; Luzón et al, 1997; Yokoi and Sánchez-Sesma, 1998, Jonod and Coutant, 2000) y han sido de gran utilidad para investigar la respuesta sísmica de bases sedimentarias y valles aluviales, dos estructuras geológicas extensamente encontradas en donde se

concentra la mayor población del mundo (Aki and Larner, 1970; Sánchez-Sesma and Esquivel, 1979; Bard and Bouchon, 1980a, 1980b, 1985; Dravinski, 1982).

Los métodos integrales de elementos de fronteras también han tenido éxito en el modelado de propagación de ondas sísmicas en diferentes regiones del subsuelo cuyas propiedades varían lateralmente, en particular en el estudio de la propagación y atenuación de ondas superficiales (Campillo, 1987b; Campillo *et al.*, 1993; Bouchon and Cautant, 1994; Fu *et al.*, 2002)

Los métodos integrales de frontera de han ayudado al estudio de problemas de exploración sísmica ya sea modelando perfiles superficiales (Campillo, 1987a; Paul and Campillo, 1988; Bouchon *et al.*, 1989) o haciendo perforaciones en los estratos del subsuelo y estudiando las ondas incidentes y difractadas (Bouchon and Schmitt, 1989; Bouchon, 1993; Dong *et al.*, 1995).

El BEM es una herramienta para el análisis de propagación de ondas en medios continuos. Es por eso que este método se utiliza en este trabajo para obtener el campo de presiones en sistemas estratificados. Estableciendo las condiciones de frontera que satisfacen el campo en las superficies de dichos estratos, se determina la reflexión y difracción de las ondas incidentes, con ellas se predicen características de los estratos.

## **I.2 Planteamiento del problema**

En el presente trabajo se desarrolla una formulación integral para el problema de propagación de ondas en medios estratificados, esta formulación se denomina método indirecto de elementos de frontera (IBEM, por sus siglas en inglés) y consiste en la representación integral de ondas elásticas difractadas en términos de fuentes de frontera de capa simple. Para lograr lo anterior es necesario la discretización de la frontera de las diferentes capas propuestas y el planteamiento de las condiciones de frontera que prevalecen en ella, posteriormente se formula el sistema lineal de ecuaciones para obtener las soluciones en la frontera, una vez encontrada estas soluciones es posible determinar el campo de desplazamientos y presiones por medio de la superposición de las ondas generadas en la frontera. Este procedimiento se realiza para cada frecuencia y posteriormente se emplea la transformada discreta de Fourier (TDF) para observar el fenómeno de propagación de ondas en función del tiempo.

El problema planteado en este trabajo consiste en determinar el campo de presiones en el fluido en estratos formados por sólido y fluido, provocando una perturbación en el medio que consiste en una fuerza puntual aplicada en el estrato líquido, esta perturbación consiste en una fuente que es simulada por medio del pulso de Ricker y la función de Hankel de segunda especie y de orden cero. El campo de desplazamientos y esfuerzos es captado por medio de receptores colocados estratégicamente en todo el medio. El estudio del campo de ondas nos permitirá la caracterización de las propiedades mecánicas del mismo, como son: las constantes de Lamé, la densidad, y las regiones de discontinuidad.

### I.3 Objetivo, alcances y metas

El objetivo fundamental de este trabajo es ***“la formulación y la implementación de un método numérico denominado método de elementos de frontera, para el estudio de propagación de ondas en medios continuos estratificados, específicamente determinar el campo de desplazamientos y presiones que prevalece en el medio después de haber provocado un disturbio en el mismo”***. Este método tiene un gran potencial de aplicación práctica y podría servir como base para un estudio más profundo.

El alcance de este trabajo consiste en la determinación del campo de presiones que prevalecen después una perturbación en el medio para un estrato sólido-fluido y sólido-fluido-sólido empleando el IBEM y el DWN.

Las metas planteadas para el desarrollo de esta investigación consisten en:

- Formulación integral del IBEM y DWN.
- Desarrollo de programas en Fortran y Matlab para el IBEM y el DWN que simulen la propagación de ondas.
- Interpretación y discusión de los resultados obtenidos.

Para lograr el objetivo, el presente trabajo se ha dividido en 4 capítulos. En el Primer capítulo se da una introducción al tema, trabajos realizados por otros investigadores así como una breve introducción de los métodos de elementos de frontera; en el capítulo 2 se presenta la formulación analítica del método de elemento de frontera y el método de número de onda discreto, planteando dos casos de estudio que consisten en un semi-espacio sólido-fluido y un estrato sólido-fluido-sólido. En el capítulo 3 se aplica en detalle cada uno de los programas desarrolladas en este trabajo, incluyendo las subrutinas que dichos programas utilizan. El capítulo 4 se centra en la implementación del método, modelando dos casos de estudios que son sólido-líquido y sólido-líquido-sólido, en este capítulo también se incluye las comparaciones de ambos métodos y por último se presentan las conclusiones, recomendaciones y trabajos a futuro.

# Capítulo II

## Solución analítica

En este capítulo se formula el método indirecto de elementos de frontera y el método del número de onda discreta para estudiar la propagación de ondas en medios continuos estratificados, presentando dos casos de estudio que consisten en una región sólido-fluido-sólido y un semi-espacio fluido-sólido. Se determinarán las ecuaciones que satisfacen adecuadamente las condiciones de frontera para cada método y se transformará el sistema continuo en un sistema discreto con el objeto de modelar el fenómeno en un programa de computadora.

Desde la década de los sesenta el desarrollo del BEM se ha incrementado considerablemente, lo anterior se atribuye a que ofrece ventajas al resolver problemas específicos donde otros métodos no son tan eficientes. Su esencial característica radica en la reducción del mallado, que otros métodos como el FEM y diferencias finitas no pueden lograr. La reducción del mallado del IBEM consiste en que solo es suficiente discretizar la frontera del medio, con lo cual se obtiene una reducción significativa del sistema de ecuaciones a resolver.

Las soluciones singulares fundamentales utilizadas en las ecuaciones integrales de frontera modelan adecuadamente la condición de irradiación en el infinito, por lo tanto el IBEM es especialmente apropiado para el estudio de propagación de ondas en el subsuelo ya que podemos considerar a éste como un medio semi-infinito.

Con relación al aspecto técnico de los cálculos, el BEM presenta la ventaja de requerir menor cantidad de memoria de proceso por lo que se considera computacionalmente eficiente (Chen y Zhou 1992). Sin embargo aunque se logra reducir el sistema de ecuaciones éste forma una matriz densa y no simétrica.

## II.1 Fundamentos de la propagación de ondas elásticas

Una excitación local en un medio cualquiera no se detecta simultáneamente a diferentes distancias de la región perturbada, es necesario que transcurra el tiempo para que la perturbación se propague en el medio, este tipo de propagación se presenta en gran cantidad de fenómenos físicos como puede ser el caso de un temblor, que se registra a distancias remotas de la fuente después de que ha ocurrido, otro ejemplo muy ilustrativo sería la propagación de las ondas en la superficie del agua como se puede ver en la figura II.1.



Figura II.1 Propagación de ondas en el fluido debido a una perturbación en un punto dentro del medio.

Las ondas mecánicas se originan por la aplicación de una fuerza en una porción de un medio deformable, esta fuerza provoca perturbaciones que se transmiten de partícula en partícula, durante este proceso debe superarse la resistencia a la deformación debida a la consistencia del medio y la inercia.

Cuando una perturbación se propaga lleva consigo energía asociada en forma de energía cinética y potencial. La energía puede transmitirse de esta manera a distancias considerables. La transmisión de la energía se realiza con el movimiento de una partícula a otra y no por el transporte de la masa en el medio.

Las ondas mecánicas se caracterizan por el transporte de la energía mediante el movimiento de las partículas en torno a su posición de equilibrio estático. La deformabilidad y la inercia son las propiedades esenciales de un medio en el que se pueden propagar ondas mecánicas. Todos los materiales reales son deformables y poseen masa, por lo tanto todos los materiales transmiten ondas mecánicas.

Debido a la complejidad de la propagación de ondas en medios reales, la descripción del fenómeno se ha podido hacer recurriendo a simplificaciones e hipótesis que dan lugar a la formulación de modelos que representan sus aspectos más importantes. Por eso, es usual aceptar que la tierra es un medio elástico lineal, homogéneo e isótropo. En un medio elástico se pueden propagar dos tipos de ondas: las ondas P de compresión y S de cortante. Las primeras se propagan con mayor velocidad y por eso se les suele llamar primarias, mientras que las segundas reciben el nombre de secundarias. Existen diversas soluciones para las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de la propagación de ondas. Así para una fuente puntual se puede hablar de ondas esféricas, que a grandes distancias de la fuente se pueden representar como ondas planas. En algunos casos se modela el problema de la propagación como bidimensional y la solución puede quedar en términos de ondas cilíndricas, que también a grandes distancias son aproximadamente planas.

## II.2 Generación de ondas por una fuente puntual en un medio elástico

Supongamos que en un sólido se aplica una fuerza externa  $F(t)$  en un punto  $P$ , como se muestra en la figura II.2 y se requiere calcular los desplazamientos y esfuerzos como funciones de las coordenadas espaciales y el tiempo. Sea  $c$  la velocidad máxima con la que se propagan las perturbaciones mecánicas en el cuerpo. Si la fuerza se inicia en un tiempo  $t$  igual a 0, las regiones perturbadas en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  serán esferas con radio  $ct_1$  y  $ct_2$ , respectivamente, con centro en el punto  $P$ .

El cuerpo estará perturbado completamente en el tiempo  $r/c$ , donde  $r$  representa la dimensión del cuerpo medida desde el punto  $P$ . Como se indica en la figura II.2 la carga ha sido completamente aplicada en un tiempo  $t_a$ , definiendo a  $t_a$  en una forma más general como el tiempo en la que la fuerza  $F(t)$  sufre cambios significativos. Puede decirse que los cambios dinámicos son importantes si  $t_a$  y  $r/c$  son del mismo orden de magnitud. Si  $t_a \gg r/c$  el problema es cuasiestático y los efectos dinámicos son despreciables.

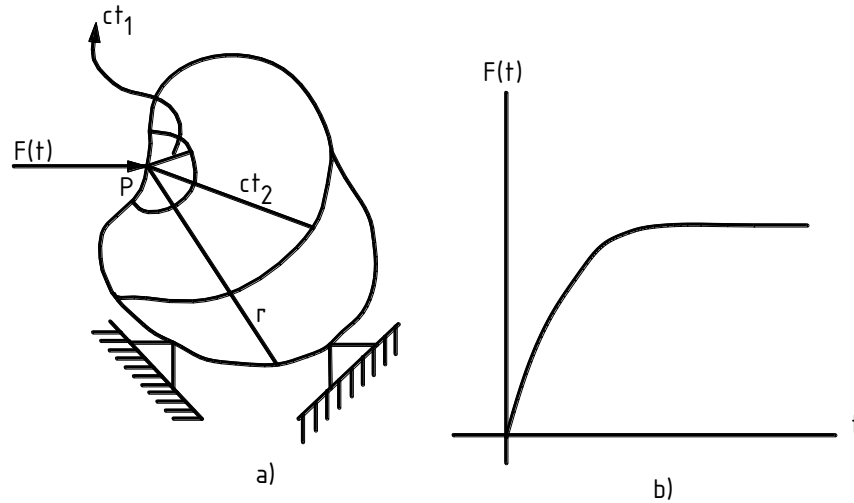


Figura II.2 a) Sólido sometido a una fuerza  $F(t)$   
 b) Variación de  $F(t)$  con respecto al tiempo.

### II.3 Ecuaciones fundamentales en un medio elástico homogéneo e isótropo

El problema a resolver se refiere a perturbaciones elásticas en medios estratificados, cada capa se considera continua e isótropa. Comenzaremos con una breve descripción de la teoría de movimiento en medios elásticos y la derivación de la ecuación de movimiento.

Cuando un cuerpo deformable sufre un cambio en su configuración debido a la aplicación de un sistema de fuerzas se dice que el cuerpo está deformado. Si  $P$  es un punto fijo cualquiera dentro del cuerpo con coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ , debido a la deformación dicho punto cambia de posición a  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  podemos llamar a los componentes de desplazamientos  $(u, v, w)$ ; estos desplazamientos se pueden expresar por medio de una expansión de Taylor de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u + \frac{du}{dx} \Delta x + \frac{du}{dy} \Delta y + \frac{du}{dz} \Delta z \dots \\
 v + \frac{dv}{dx} \Delta x + \frac{dv}{dy} \Delta y + \frac{dv}{dz} \Delta z \dots \\
 w + \frac{dw}{dx} \Delta x + \frac{dw}{dy} \Delta y + \frac{dw}{dz} \Delta z \dots
 \end{aligned}
 \tag{II.3.1}$$



introduciendo las siguientes expresiones para rotaciones y para las deformaciones lineales:

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right) \quad (II.3.2)$$

y considerando pequeñas deformaciones asociadas con ondas elásticas y además despreciando los términos de orden superior, podemos expresar la ecuación II.3.1 como:

$$\begin{aligned} u &+ (e_{xx}\Delta x + e_{xy}\Delta y + e_{xz}\Delta z) \\ v &+ (e_{yx}\Delta x + e_{yy}\Delta y + e_{yz}\Delta z) \\ w &+ (e_{zx}\Delta x + e_{zy}\Delta y + e_{zz}\Delta z) \end{aligned} \quad (II.3.3)$$

Los primeros términos de esta expresión son los componentes de desplazamientos en el punto  $P$ , podemos ver que los términos en el primer paréntesis corresponden a rotación pura de un volumen elemental y los términos en el segundo paréntesis están asociados con las deformaciones del elemento. Estas deformaciones las podemos representar mediante un arreglo de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (II.3.4)$$

que representa el tensor simétrico en el punto  $P$ , por lo que  $e_{xy} = e_{yx}$ ;  $e_{xz} = e_{zx}$ ;  $e_{yz} = e_{zy}$  representan los componentes del cortante de deformación y los componentes

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad (II.3.5)$$

representan extensiones paralelas a los ejes  $x, y, z$  respectivamente.

La dilatación cúbica  $\theta$  está definida como el límite de la relación del incremento de volumen y el volumen inicial cuando las dimensiones  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  tienden a cero, es decir

$$\theta = \lim \frac{(\Delta x + e_{xx} \Delta x)(\Delta y + e_{yy} \Delta y)(\Delta z + e_{zz} \Delta z) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

y despreciando términos de orden superior

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (II.3.6)$$

Para derivar la ecuación de movimiento consideramos el estado de equilibrio de un paralelepípedo infinitesimal con superficie paralela a los planos coordenados, tal como se muestra en la siguiente figura II.3, todas las expresiones están basadas en la continuidad de los esfuerzos.

La fuerza de inercia esta dado por

$$f = ma = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (II.3.7)$$

donde,

$$m = \rho V = \rho dx_1 dx_2 dx_3$$

$$a_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \ddot{u}$$

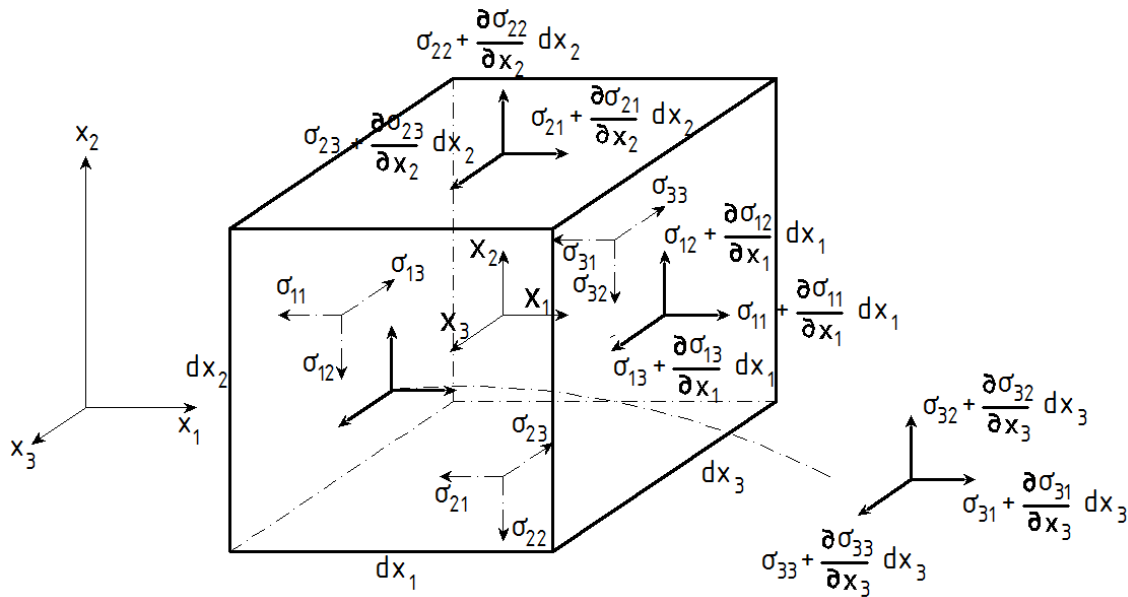


Figura II.3 Componentes de esfuerzos en un paralelepípedo infinitesimal.

El equilibrio de fuerzas demanda que la fuerza resultante sea cero. Considerando las fuerzas en la dirección  $x_1$  tenemos seis componentes de fuerzas de superficie, una componente de fuerza de cuerpo y además la fuerza de inercia.

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 - \sigma_{21} dx_3 dx_1 \\ & + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + F_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \end{aligned}$$

dividiendo por  $dx_1 dx_2 dx_3$  obtenemos

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + F_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (\text{II.3.8})$$

y una permutación cíclica de símbolos nos permite obtener las ecuaciones en las demás direcciones. Expresando la ecuación II.3.8 con notación indicial tenemos

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{II.3.9})$$

Para relacionar el equilibrio de fuerzas con las deformaciones debe asumirse que los esfuerzos que aparecen en la expresión II.3.9 son función de las deformaciones y para nuestro caso se introduce la ley de Hooke, que asume que cada uno de los seis componentes de esfuerzos es una función lineal de todas las componentes de deformación, por lo tanto en el caso general aparecen 36 constantes elásticas en la relación esfuerzo deformación. De acuerdo con la simetría asociada con un cuerpo isótropo el número de constantes elásticas se reduce a dos, y la relación esfuerzo-deformación para un sólido elástico e isótropo puede ser escrita de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \sigma_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \sigma_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.3.10})$$

Expresando las ecuaciones anteriores en notación indicial tenemos

$$\sigma_{ki} = \lambda e_{ij} \delta_{ki} + 2\mu e_{ki} \quad (\text{II.3.11})$$

y combinando las ecuaciones II.3.8 y II.3.10 tenemos

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (\text{II.3.12})$$

expresando la ecuación anterior en notación vectorial tenemos

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{II.3.13})$$

siendo  $\mathbf{u}$  una función que depende de un escalar  $\phi$  y un vector  $\boldsymbol{\psi}$

$$\mathbf{u} = \nabla \cdot \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (\text{II.3.14})$$

Por otro lado el Laplaciano lo podemos expresar de la siguiente manera

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{II.3.15})$$

sustituyendo II.3.15 en II.3.13 tenemos

$$\begin{aligned} -\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mu \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \nabla \mathbf{u} + \lambda \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \\ -\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.3.16})$$

pero se sabe que

$$\nabla \nabla = \nabla^2 \quad (\text{II.3.17})$$

por lo tanto la ecuación II.3.16 queda expresada como sigue

$$-\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{II.3.18})$$

si a  $\mathbf{u}$  lo definimos como  $\mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$  la ecuación anterior resulta

$$-\mu \nabla \times \nabla \times (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \quad (\text{II.3.19})$$

sea  $\phi = \nabla \cdot u$  de la ecuación anterior resulta que

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi$$

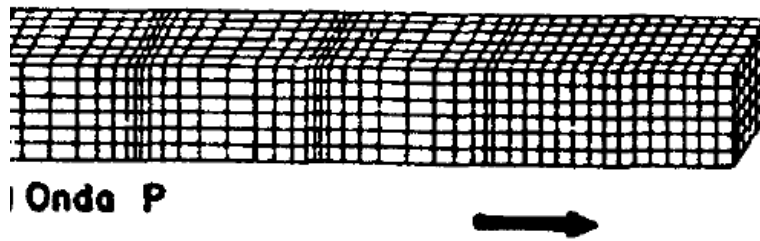
$$\nabla^2\phi = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (\text{II.3.20})$$

en donde

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{II.3.21})$$

la ecuación II.3.20 representa la ecuación de onda para pequeñas deformaciones para ondas P que se propagan con velocidad  $\alpha$ .



**Onda P**

Figura II.4 Propagación de ondas P.

Si a  $u$  lo definimos como  $u = \nabla \times \bar{\psi}$  la ecuación II.3.18 resulta

$$-\mu\nabla \times \nabla \times (\nabla \times u) + (\lambda + 2\mu)\nabla^2(\nabla \times u) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \times u) \quad (\text{II.3.22})$$

sea  $\phi = \nabla \times u$  de la ecuación anterior resulta que

$$\mu\nabla^2\bar{\psi} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\psi}$$

$$\nabla^2\bar{\psi} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\psi}$$

$$\nabla^2 \bar{\psi} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} \quad (\text{II.3.23})$$

en donde

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{II.3.24})$$

La ecuación II.3.23 representa la ecuación de onda para pequeñas deformaciones para las ondas de cortante S que se propagan con velocidad  $\beta$ .

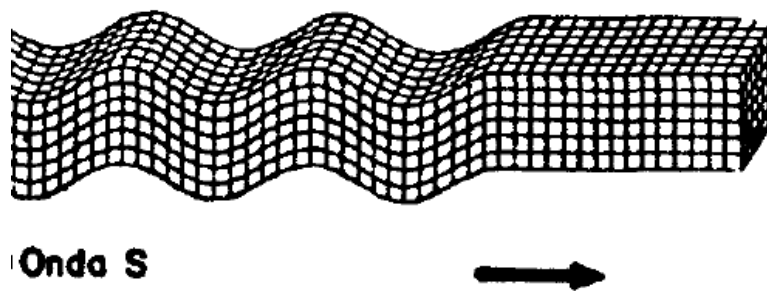


Figura II.5 Propagación de ondas S.

#### II.4 Métodos Integrales de elementos de frontera

En algunas áreas de la física, como mecánica de sólidos, electromagnetismo, dinámica de fluidos o termodinámica, la solución de un problema puede ser reducido a una ecuación integral definida sobre la frontera del dominio estudiado. Esto expresa que la totalidad de la información que se encuentra en el dominio es expresado a través de la frontera. Aparentemente esto fue descubierto por G. Green aunque algunos lo atribuyen a C.F. Gauss. Las Ecuaciones integrales de frontera (BIE, por sus siglas en inglés) formulan la solución de un problema en términos de valores en la frontera del dominio. Los BIE son presentados como la teoría del potencial y se han agrupado en dos familias: BIE directa que está relacionada con las variables físicas (campos de ondas de desplazamientos y tracciones en elastodinámica) y las BIE indirecta que está relacionada con unas incógnitas intermedias, las cuales son usualmente representadas como una distribución de fuentes ficticias o aparentes a lo largo de las fronteras.

La solución de los BIE ya sea directa o indirecta puede realizarse numéricamente a través de los siguientes pasos:

1. El primer paso consiste en discretizar las fronteras en un conjunto de puntos o en un conjunto de elementos.

2. Posteriormente se realiza la evaluación de las funciones de Green en el medio, al hacer esto debemos tener en cuenta las singularidades que se presenten al querer evaluar las funciones de Green en donde se localizan las fuentes, para lo cual se tiene que emplear técnicas especiales.
3. El tercer paso final consiste en resolver el sistema de ecuaciones resultantes a través de algún método numérico.

Los métodos BIE expresan directamente la física del problema que atacan, aunque no pueden manejar fácilmente los problemas no lineales, se adaptan muy bien al estudio de propagación de ondas acústicas o sísmicas presentadas bajo la superficie de la tierra los cuales pueden consistir en capas homogéneas separadas por diferentes configuraciones de fronteras.

La literatura disponible que tratan sobre los BEM en elastodinámica se pueden citar en Manolis and Beskos (1988), Brebbia and Domínguez (1992) y Domínguez (1993). Estos investigadores trataron principalmente con varias aplicaciones en ingeniería estructural en lo que respecta a aspectos sísmicos.

#### II.4.1 Métodos Integrales de elementos de frontera directos

La formulación del BIE directos en elastodinámica fueron realizados en los primeros trabajos de Somigliana (1886), hace más de un siglo. Esta formulación se basa en la teoría de los potenciales elásticos y establece que el campo de valores de un problema de elasticidad lineal en un dominio dado esta completamente determinado por los desplazamientos y tracciones a lo largo de las fronteras del dominio, esto puede ser visto como una aplicación del teorema recíproco de Maxwell-Betti. Los trabajos de Somigliana están basados en los trabajos de Stokes (1849) quien encontró la respuesta fundamental (o funciones de Green) para un medio elástico, isotrópico y homogéneo.

Considerando un volumen de material elástico  $V$  encerrado por una frontera  $S$  (véase figura II.6), el campo de desplazamiento  $u_i$  en un punto  $\vec{x}$  y en un tiempo  $t$  puede ser expresado como una función del desplazamiento y tracción  $t_j$  a lo largo de la frontera por medio del teorema de representación de Somigliana:

$$cu_i(x,t) = \int_0^t d\tau \int_S \left[ t_j(\xi, \tau) G_{ji}(\xi, t, x, \tau) - u_j(\xi, \tau) \sum_{j,k} (\xi, t, x, \tau) n_k(\xi) \right] dS(\xi) \quad (II.4.1)$$

donde  $G_{ji}(\xi, t, x, \tau)$  y  $\sum_{j,k} (\xi, t, x, \tau)$  son las respuestas en términos de desplazamientos y esfuerzos, en un tiempo  $t$  en el punto  $\xi$  de un medio infinito homogéneo debido a una fuerza de impulso aplicada en un tiempo  $\tau$  en el punto  $\vec{x}$  en la dirección  $i$ .  $n_k(\xi)$  es la normal a la frontera que apunta fuera de  $V$ . El

volumen de los elementos en la frontera se asumen nulas, pero en caso contrario las contribuciones de éstas pueden fácilmente ser sumadas. La constante  $c$  toma valores de 1, 0.5 or 0 dependiendo de la posición de  $\vec{x}$  dentro de  $V$ , sobre  $V$  o fuera de  $V$  respectivamente, asumiendo que  $S$  tiene una frontera suave. Estos valores de  $c$  se obtienen del volumen de integración del producto  $\delta(x - \xi, t - \tau)u_i(\xi, \tau)$ .

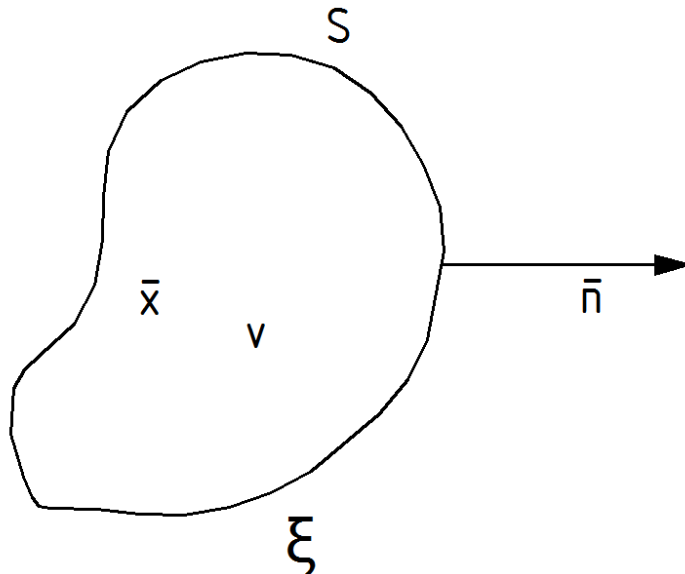


Figura II.6 Espacio elástico definido por una superficie S.

Las funciones de Green para un medio elástico, homogéneo e isótropo puede ser escrito como (véase por ejemplo Aki and Richards, 1980).

$$G_{ji}(\xi, t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi\mu r} (f_2 \delta_{ij} + (f_1 - f_2) \gamma_1 \gamma_2) \quad (II.4.2)$$

donde  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\gamma_i = (x_i - \xi_i)/r$  es el vector unitario que va de  $\xi$  a  $x$  y  $r$  es la distancia entre estos puntos. Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  están dadas por:

$$f_1(r, t) = \left[ \frac{\beta}{\alpha} \right]^2 \delta\left(r - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{2}{(r/\beta)^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \delta(t - \tau) r d\tau \quad (II.4.3)$$

y

$$f_2(r, t) = \delta\left(r - \frac{r}{\beta}\right) - \frac{1}{(r/\beta)^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \delta(t - \tau) r d\tau \quad (II.4.4)$$



donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las velocidades de las ondas P y S respectivamente y  $\mu$  es el modulo de cortante.  $f_1$  es proporcional al desplazamiento radial mientras que  $f_2$  es proporcional al desplazamiento transversal.

En la frecuencia dominante la transformada de Fourier nos permite encontrar las expresiones correspondientes de  $f_1$  y  $f_2$ , estas funciones pueden ser expresadas usando exponenciales complejos como esta descrito en Sánchez-Sesma and Luzón (1995).

La solución para el caso en 2D es similar al de 1D, podemos expresar las soluciones correspondientes en términos de radicales en el dominio del tiempo de acuerdo a la solución de Eason *et al.* (1956) y en el dominio de la frecuencia las funciones de Green se expresa en términos de las funciones cilíndricas de Hankel. En 2D la singularidad en el punto de aplicación de la carga es logarítmica (Sánchez-Sesma y Campillo 1991).

Las tracciones asociadas a las funciones de Green están dadas por:

$$T_{ji}(\xi, t, x, \tau) = \sum_{jik} (\xi, t, x, \tau) n_k(\xi)$$

por lo que la ecuación II.4.1 se puede reescribir como:

$$cu_i(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S [t_j(\xi, \tau) G_{ji}(\xi, t, x, \tau) - u_j(\xi, \tau) T_{ji}(\xi, t, x, \tau)] dS(\xi) \quad (II.4.5)$$

Esta ecuación es la base para los métodos integrales de frontera, discretizando esta integral, las ecuaciones integrales de frontera pueden ser transformados en un sistema lineal de ecuaciones con incógnitas de desplazamientos y tracciones en la frontera y si se proporcionan las suficientes condiciones de frontera el sistema puede ser resuelto. Un importante punto aquí es que este procedimiento implica que las funciones de Green tienen que ser evaluadas en la misma localización de las fronteras por lo que se presentan singularidades en dicha función. Para el caso de los desplazamientos de Green la singularidad es débil y puede ser tratada analíticamente, mientras que las singularidades asociadas a las tracciones de Green pueden ser tratadas con las ecuaciones de Cauchy implementando técnicas numéricas de aproximación.

Aplicando la ley de Hooke a las ecuaciones II.4.1 y II.4.5 se puede evaluar el campo de esfuerzos dentro del dominio, sin embargo; si requerimos el esfuerzo sobre S se necesita técnicas numéricas importantes que traten las singularidades generadas.

## II.4.2 Métodos Integrales de elementos de frontera indirectos

La formulación indirecta en problemas elastodinámicos expresa el campo de onda como una integral sobre las fronteras que contienen fuentes elementales de irradiación de onda.

Considérese una superficie  $S$ , finita o infinita, abierta o cerrada, en un espacio elástico tridimensional. Si en esta superficie se aplica una densidad de fuerza armónica, el campo generado se puede escribir despreciando las fuerzas de cuerpo, como:

$$u_i(x) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(x, \xi) ds_\xi \quad (II.4.6)$$

donde  $u_i(x)$  representa el  $i$ -ésimo componente del desplazamiento en  $x$ ,  $G_{ij}(x, \xi)$  es la función de Green y  $\phi_j(\xi)$  la densidad de fuerza armónica en la dirección  $j$ ; las cuales funcionan como una variable intermedia que tiene que resolverse con las ecuaciones integrales de frontera antes de poder calcular el campo de ondas. Esta representación integral permite calcular los esfuerzos y tracciones por aplicación directa de la ley de Hooke, con excepción de las singularidades de la función de Green en la frontera.

La ecuación II.4.6 puede ser vista como la transcripción matemática de los principios de Huygens, el cual establece que cada punto de una frontera actúa como fuente secundaria de irradiación de ondas. Este principio puede aplicarse a cualquier frente de onda. En la figura II.7 se muestra este principio, los puntos representan la discretización de la frontera, los cuales al recibir la señal de un frente de onda se transforman en fuentes de irradiación secundarias que se transmiten a todo el medio.

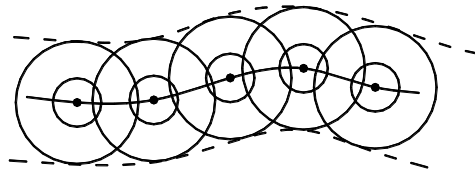


Figura II.7 Principio de Huygens.

Con base en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad de la frontera, es posible escribir el campo de tracciones para  $x$  sobre  $S$  como:

$$t_i(x) = c\phi_j(x) + \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(x, \xi) ds_\xi \quad (II.4.7)$$

donde  $t_i$  es el  $i$ -ésimo componente de la tracción en la frontera;  $c = 0.5, -0.5$  ó  $0.0$ , si  $\vec{x}$  tiende a  $S$  desde dentro del medio, desde fuera o si  $\vec{x}$  no está en  $S$  respectivamente;  $T_{ij}(\xi, x)$  es la función de tracción de Green. El subíndice  $\xi$  indica la variable sobre la cual se realiza la integración. Las funciones de Green para el caso bidimensional son funciones especiales de Hankel. Las expresiones detalladas se encuentran en el trabajo de Sánchez-Sesma y Campillo (1991) y para el caso tridimensional en Sánchez-Sesma y Luzón (1995).

Cuando se usan los métodos de frontera se discretizan únicamente las fronteras del medio. Estas se dividen en elementos, y en éstos se simula la aparición de fuerzas

ficticias para poder modelar los campos reflejado y difractado, según sea el caso. La exactitud de los resultados dependen del número de elementos y de la longitud de onda. Si se desea estudiar problemas en alta frecuencia, se tienen longitudes de onda pequeña. Esto implica una discretización fina y un mayor número de elementos, por lo que los sistemas de ecuaciones se incrementan; sin embargo, las matrices resultantes presentan un gran número de elementos que son prácticamente nulos. Esta característica ha permitido resolver el problema mediante la técnica de matrices (Ortiz, et al. 1998). Aunque en alta frecuencia el número de los elementos que son nulos tiende a disminuir, por lo que es necesario usar otras técnicas.

Como ejemplo de discretización se presentan las ecuaciones (II.4.6) y (II.4.7) discretizadas:

$$u_i(x) = \sum_{l=1}^N \phi_j(\xi_l) g_{ij}(x, \xi_l) \quad (II.4.8)$$

$$t_i(x) = \sum_{l=1}^N \phi_j(\xi_l) t_{ij}(x, \xi_l) \quad (II.4.9)$$

donde,

$$g_{ij}(x, \xi_l) = \int_{\xi_l - \Delta s/2}^{\xi_l + \Delta s/2} G_{ij}(x, \xi) ds_\xi \quad (II.4.10)$$

$$t_{ij}(x_n, \xi_l) = c \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\xi_l - \Delta s/2}^{\xi_l + \Delta s/2} T_{ij}(x_n, \xi) ds_\xi \quad (II.4.11)$$

Las integrales de la ecuación II.4.10 se calculan numéricamente con integración Gaussiana, excepto en el caso en el que  $\vec{x}$  esta en la vecindad de  $\xi_l$ , en cuyo caso las integrales tienen expresiones analíticas. Las integrales en la ecuación II.4.11 también se calculan numéricamente usando este tipo de integración, excepto cuando  $x_n = \xi_l$ , en tal caso se usará:

$$t_{ij}(x_n, \xi_n) = c \delta_{ij} \quad (II.4.12)$$

en cada uno de los segmentos en los que se divide la frontera y sobre la que se realiza la integración, la función de Green tiene un valor constante y este se asigna al centro de cada segmento.

### II.4.3 Funciones de Green en 2D

En matemáticas, una función de Green es un tipo de función usada como núcleo de un operador lineal integral y se emplea en la resolución de ecuaciones diferenciales homogéneas con condiciones de frontera especificadas.

Las funciones de Green juegan un papel importante en la solución de ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias y son la clave para el desarrollo de los métodos de ecuaciones integrales de frontera.

Considérese la ecuación diferencial lineal escrita en la forma general

$$L(x)u(x) = f(x) \quad (\text{II.4.13})$$

Donde  $L(x)$  es un operador diferencial lineal,  $u(x)$  es la función desconocida que queremos encontrar y  $f(x)$  es un término no homogéneo conocido. Así pues podemos escribir la solución de la ecuación II.4.13 como:

$$u(x) = L^{-1}(x)f(x) \quad (\text{II.4.14})$$

Donde  $L^{-1}$  es la inversa del operador diferencial  $L$  cuya propiedad es:

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I \quad (\text{II.4.15})$$

donde  $I$  es el operador identidad. Específicamente podemos definir el operador inverso como:

$$L^{-1}f = \int G(x;s)f(s)ds \quad (\text{II.4.16})$$

donde  $G(x;s)$  es la función de Green asociada con el operador diferencial  $L$ . Obsérvese que  $G(x;s)$  depende de dos puntos  $x$  y  $s$ . Para completar la idea del operador inverso  $L^{-1}$ , introduciremos la función Delta de Dirac cuyas propiedades son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-s)f(s)ds = f(x) \quad (\text{II.4.17})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)ds = 1 \quad (\text{II.4.18})$$

las funciones de Green satisfacen

$$L(x)G(x;s) = \delta(x-s) \quad (\text{II.4.19})$$

por lo tanto la solución de la ecuación II.4.13 puede escribirse en términos de las funciones de Green como:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x;s)f(s)ds \quad (\text{II.4.20})$$

para probar lo anterior podemos realizar lo siguiente

$$Lu(x) = L \int_{-\infty}^{\infty} G(x;s)f(s)ds$$

$$Lu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} LG(x;s)f(s)ds$$

$$\begin{aligned}
 Lu(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x; s) f(s) ds \\
 Lu(x) &= f(x)
 \end{aligned}
 \tag{II.4.21}$$

El uso principal del formalismo de la función de Green es la resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas con condiciones de frontera dadas.

El inconveniente de las funciones de Green consiste en las singularidades que se presentan al querer evaluarla en la fuente, para lo cual se han desarrollado varios trabajos encaminados a remover completamente las singularidades de la formulación de las integrales de frontera; uno de estos trabajos en lo que respecta a BEM indirectos fue introducido por Sánchez-Sesma y Campillo (1991), quienes expresan a las funciones de Green en términos de las funciones de Hankel, usando las expansiones de las series correspondientes de estas funciones y obteniendo expresiones analíticas para la integral de desplazamiento de las funciones de Green calculadas en las fuentes. La contribución aquí fue simplemente  $\pm 1/2\phi_i(x)$  ya que la integral de las funciones de tracciones de Green en la fuente tiene valores principales de Cauchy igual a cero. Para calcular la influencia de la distancia de los elementos de valores constantes se integró usando cuadratura Gaussiana. Este trabajo se ha desarrollado más a fondo por Sánchez-Sesma *et al.* (1993) y Luzón *et al.* (1995).

Kawase (1988) y Kawase and Aky (1989,1990) usaron el número de onda discreto para representar las funciones de Green en una formulación del BEM directo. Ellos mostraron que la integración analítica de estas expresiones en cada uno de los números de onda sobre los elementos de valores constantes elimina cualquier singularidad.

## II.5 Formulación integral del IBEM

La formulación del método de elementos de frontera en un medio estratificado requiere satisfacer las condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones entre los diferentes estratos. En cada una de estas condiciones se establece una ecuación integral, generada por la superposición de las contribuciones de las fuentes ficticias colocadas en la frontera, para el punto de estudio. Con el conjunto de ecuaciones integrales de frontera se establece un sistema lineal de ecuaciones. Al resolver este sistema se determina las fuerzas ficticias, con los que es posible calcular los desplazamientos en los puntos de interés.

### II.5.1 Campo de presiones y desplazamientos en el fluido

El campo de presiones en un fluido obedece ciertas propiedades para su tratamiento las cuales se enlistan a continuación:

- La presión en un punto de un fluido en reposo es igual en todas las direcciones

- La presión en todos los puntos situados en el mismo plano horizontal de un fluido en reposo es la misma.
- En un fluido en reposo la fuerza de contacto que ejerce, en el interior del fluido, una parte de éste sobre la otra, es normal a la superficie de contacto.
- En un fluido en reposo la fuerza de contacto que ejerce el fluido sobre la superficie sólida que lo contiene es normal a ésta.
- La fuerza asociada a la presión en un fluido ordinario en reposo se dirige siempre hacia el exterior del fluido, por lo que debido al principio de acción y reacción, resulta que el fluido está siempre a compresión y jamás en tracción.
- En los fluidos en reposo, un punto cualquiera de una masa líquida está sometida a una presión en función únicamente de la profundidad a la que se encuentra el punto.

Las presiones de campo libre en un fluido debidas a la acción de una fuente puntual, pueden ser expresadas como:

$$p^{0F}(\mathbf{x}) = C(\omega)H_0^{(2)}(\omega r/c^F) \quad (II.5.1)$$

donde  $p^{0F}(\mathbf{x})$  es la presión incidente provocada por la fuente puntual en el fluido,  $\mathbf{x}$  es la coordenada  $\{x_1, x_3\}$  donde se desea conocer la presión incidente, es el coeficiente de escala de la presión incidente,  $H_0^{(2)}$  es la función de Hankel de segunda especie y orden cero,  $\omega$  la frecuencia angular,  $c^F$  la velocidad de propagación de ondas en el fluido y  $r$  es la distancia de la fuente al punto donde se calcula la presión incidente.

Si consideramos que la ecuación que gobierna la propagación de ondas en el fluido está dada por la ecuación II.3.9, se tiene que:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \rho_F \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial t^2} \quad (II.5.2)$$

donde  $\rho_F$  =densidad del fluido y decimos que los esfuerzos en el fluido pueden expresarse como:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = -p^0(\mathbf{x})\delta_{ij} \quad i, j = 1, 3 \quad (II.5.3)$$

el desplazamiento incidente en el fluido, en la dirección  $x_1$ , provocados por la fuente puntual se obtiene derivando el campo de presiones (Achenbach 1976):

$$u_1^{0F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^{0F}(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (II.5.4)$$

el campo reflejado de presiones y los desplazamientos en el fluido, provocados por la presencia del sólido como se ve en la figura II.8, pueden escribirse como:

$$p^{d^F}(\mathbf{x}) = \int_{\partial F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi \quad (II.5.5)$$

$$u_1^{d^F}(\mathbf{x}) = c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi}{\partial x_1} \quad (II.5.6)$$

donde,

$$G^F(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\rho}{4i} H_0^{(2)}(\omega r / c^F) \quad (II.5.7)$$

y  $\Psi(\xi)$  es la densidad de fuerzas para el fluido,  $G^F(x, \xi)$  es la función de Green para el fluido, y  $c_1 = -0.5$  constante que define la orientación de la región dado que  $\mathbf{x}$  tiende a S desde fuera.

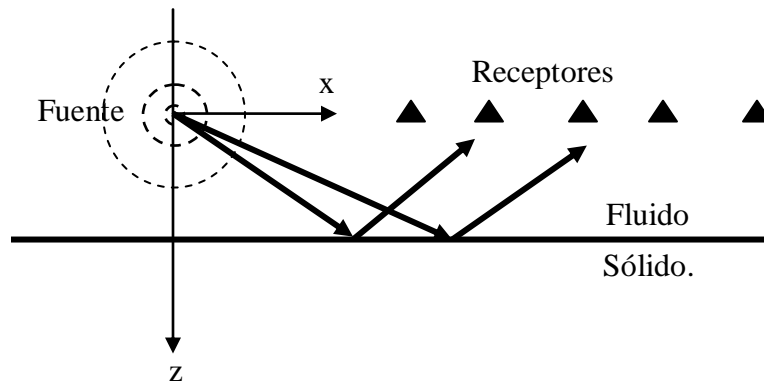


Figura II.8 Campo de ondas reflejado en el líquido provocado por el estrato sólido.

El campo total de presiones y desplazamientos en el fluido, campo libre más campo difractado, puede expresarse como:

$$p^F(\mathbf{x}) = p^{0^F}(\mathbf{x}) + p^{d^F}(\mathbf{x}) \quad (II.5.8)$$

$$u_3^F(\mathbf{x}) = u_3^{0^F}(\mathbf{x}) + u_3^{d^F}(\mathbf{x}) \quad (II.5.9)$$

### II.5.2 Campo de presiones y desplazamientos en el sólido

Considerando un dominio  $V$ , delimitado por su frontera  $S$  como se muestra en la figura II.9. Si este dominio está formado por un material elástico, el campo de desplazamientos difractado puede ser escrito de acuerdo a la ecuación II.4.6 como:

$$u_i^d(\mathbf{x}) = \int_{\partial S} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi \quad (II.5.10)$$

donde  $u_i(\mathbf{x})$  es la  $i$ -ésima componente de desplazamiento en  $\mathbf{x}$ ,  $G_{ij}(\mathbf{x}; \xi)$  es el tensor de Green, el cual representa el desplazamiento en la dirección  $i$  en el punto  $\mathbf{x}$  debido a la aplicación de una fuerza unitaria en dirección  $j$  en el punto  $\xi$  y  $\phi_j(\xi)$  es la densidad de fuerza en la dirección  $j$ . El producto  $\phi_j(\xi) dS_\xi$  en la integral II.5.10 representa una distribución de fuerzas sobre la superficie  $S$ . El subíndice en la diferencial de la ecuación II.5.10 muestra la variable sobre la cual es realizada la integración. Esta representación integral se puede obtener a partir de la identidad de Somigliana (Sesma y Campillo, 1991; Kupradze, 1963) que demuestra que si  $\phi_j(\xi)$  es continua a lo largo de  $S$ , entonces el campo de desplazamientos es continuo a través de  $S$ . De esta manera, el cálculo de esfuerzos y tracciones se realiza mediante la aplicación directa de la Ley de Hooke y la ecuación de Cauchy (excepto en singularidades de frontera, esto es cuando  $\mathbf{x}$  es igual a  $\xi$  sobre la superficie  $S$ ). Mediante un proceso límite basado en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad de la frontera, es posible escribir las tracciones para  $\mathbf{x}$  sobre  $S$  como:

$$t_i^d(\mathbf{x}) = c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial S} T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi \quad (II.5.11)$$

donde  $t_i$  es la  $i$ -ésima componente de tracción asociada a la dirección normal  $n(\mathbf{x})$  con frontera suave,  $c_2$  es igual a 0.5 si  $\mathbf{x}$  tiende a  $S$  desde dentro de la región.  $T_{ij}(\mathbf{x}; \xi)$  es el tensor de Green de tracciones, es decir, la tracción en la dirección  $i$  en el punto  $\mathbf{x}$ , sobre la frontera con normal asociada  $n(\mathbf{x})$ , debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección  $j$  en el punto  $\xi$  sobre  $S$ .

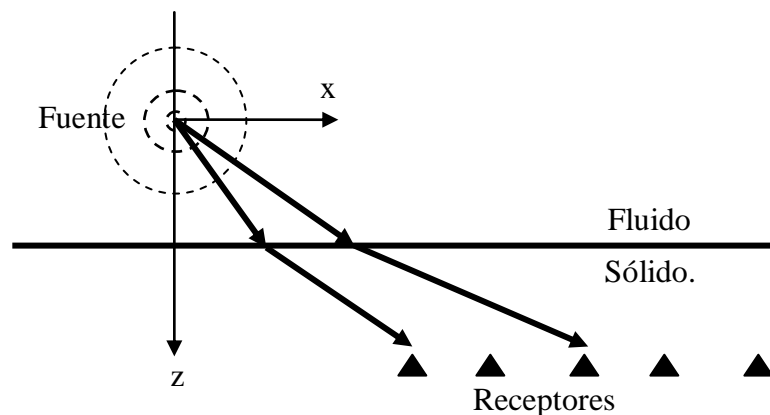


Figura II.9 Campo difractado en el sólido.



En un medio infinito, elástico, homogéneo e isótropo, las funciones de Green para dependencia tiempo-armónico  $e^{i\omega t}$ , donde  $i^2$  es igual a -1,  $\omega$  la frecuencia angular, y  $t$  el tiempo, pueden expresarse como:

$$G_{ij} = A\delta_{ij} - B(2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \quad (II.5.12)$$

$$T_{ij} = \frac{\mu}{r} \left\{ \left[ -4B + \lambda \frac{D(\omega r / \alpha)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_j n_i + \left[ -4B + \frac{D(\omega r / \beta)}{2\beta^2} \right] \times \left[ \gamma_i n_j + \gamma_k n_k \delta_{ij} \right] \right\} + \frac{\mu}{r} \left\{ (C + 16B) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k \right\} \quad (II.5.13)$$

donde,

$$A = \frac{1}{i8\rho} \left[ \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right] \quad (II.5.14)$$

$$B = \frac{1}{i8\rho} \left[ \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right] \quad (II.5.15)$$

$$C = \frac{D(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{D(\omega r / \beta)}{\beta^2} \quad (II.5.16)$$

$$D(p) = \frac{i}{2\rho} p H_1^{(2)}(p) \quad (II.5.17)$$

$\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé,  $\rho$  es la densidad de masa,  $\alpha$  y  $\beta$  corresponden a las velocidades de propagación de ondas P y S respectivamente;  $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ ,  $\gamma_j = (x_j - \xi_j)/r$ ,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y  $H_m^{(2)}$  es la función de Hankel de segunda especie y orden m.

### II.5.3 Condiciones de frontera

Los problemas en mecánica usualmente ocurren de la siguiente forma: conocemos algunas acciones como fuerzas y desplazamientos en la superficie de un cuerpo sólido o fluido y a través de ellos podemos predecir que es lo que ocurre dentro del cuerpo, para resolver estas cuestiones consideramos a todo lo que ocurre en el mundo externo en forma de condiciones de frontera y entonces usamos las ecuaciones diferenciales, para extender la información al interior del cuerpo. Si se encuentra una solución que satisfaga todo el campo de ecuaciones y las condiciones

de frontera, entonces es posible obtener la información completa en el interior del cuerpo.

Sobre la superficie de un cuerpo o en una interface entre dos cuerpos la tracción (fuerza por unidad de área) actuando sobre la superficie deben ser la misma en ambos lados de la superficie. Esto en realidad es el concepto básico de esfuerzo que define la interacción de una parte de un cuerpo sobre otro.

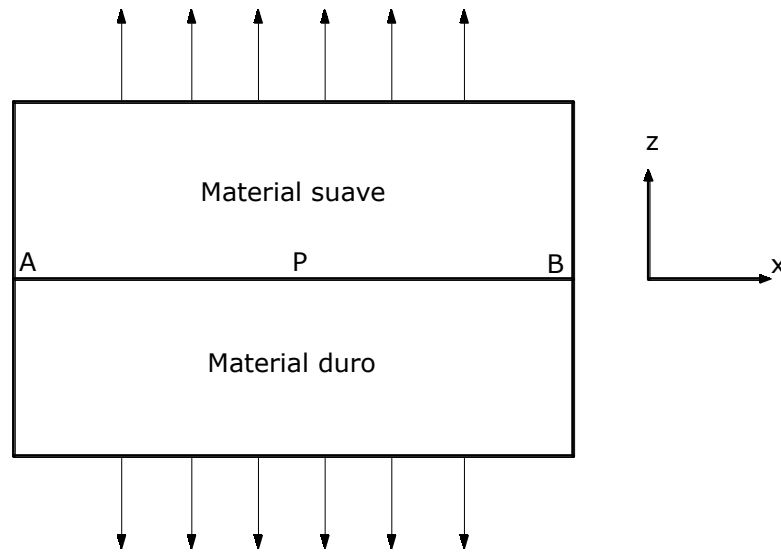


figura II.10 Interface entre dos materiales.

Consideremos dos estratos compuestos de un material duro unido a un material suave como se muestra en la figura II.10. En ambos estratos existen esfuerzos que los mantienen unidos. En un punto P sobre la interface AB la situación puede ser ilustrada por una secuencia de diagrama de cuerpo libre como se muestra en la figura II.11.

Para el material duro, sobre el lado positivo de la interface en P actúa una tracción  $T^{(1)}$  (el superíndice indica el medio donde se encuentra) cuyas componentes están dados por  $\sigma_{ij}^{(1)}v_j^{(1)}$ , donde  $\sigma_{ij}^{(1)}$  es el tensor de esfuerzos en el material 1.

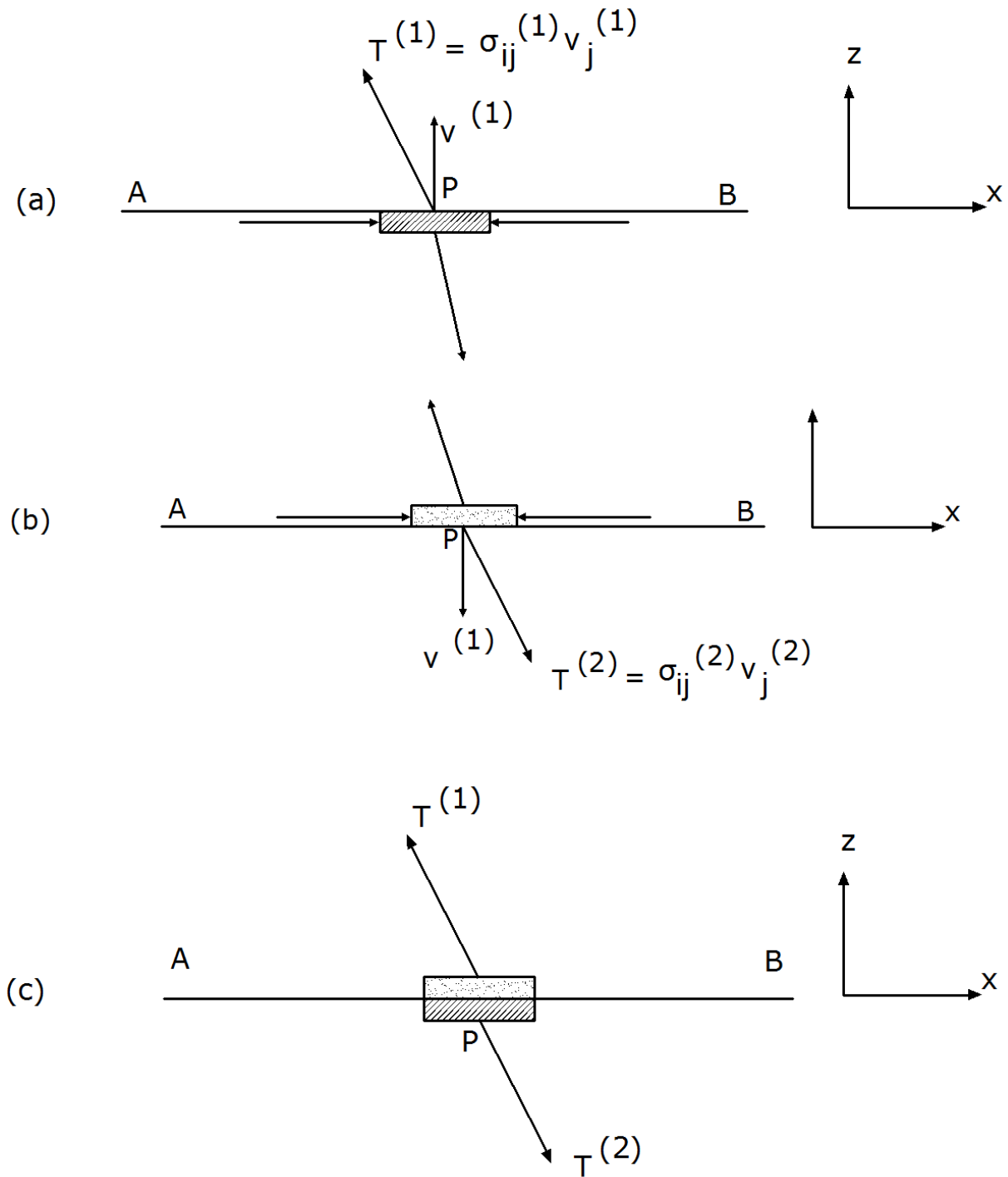


Figura II.11 Diagrama de cuerpo libre sobre la interface entre dos medios.

Para el material suave debe existir una tracción similar  $T^{(2)}$ , con componentes  $\sigma_{ij}^{(2)} v_j^{(2)}$  de tal forma que se cumpla el equilibrio de un elemento infinitesimal sobre la interface como se muestra en la figura II.11 (c) y dada por la siguiente ecuación:

$$T^{(1)} = T^{(2)} \quad (II.5.18)$$

esta ecuación es la condición de igualdad de tracción sobre ambos lados de una interface. Mas explícitamente, sea la interface el plano  $x$  y  $(x=x_1, y=x_2)$  y sea el eje  $z$ ,  $(x_3)$  normal al plano  $x$ - $y$  entonces la ecuación vectorial II.5.18 implica las siguientes tres ecuaciones:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} \quad (\text{II.5.19})$$

los cuales son las condiciones de frontera sobre los esfuerzos que actúan en la interface del medio 1 y 2. Podemos notar que las condiciones en la interface no se menciona a  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ , ya que estos componentes no son continuos a través de la frontera. Si el módulo elástico de los materiales 1 y 2 es diferente y la deformación es uniforme, entonces en general se cumple que:

$$\sigma_{xx}^{(1)} \neq \sigma_{xx}^{(2)}, \quad \sigma_{yy}^{(1)} \neq \sigma_{yy}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} \neq \sigma_{xy}^{(2)} \quad (\text{II.5.20})$$

estas discontinuidades no causan conflicto con algunas de las ecuaciones de equilibrio como se puede ver en la figura II.12.

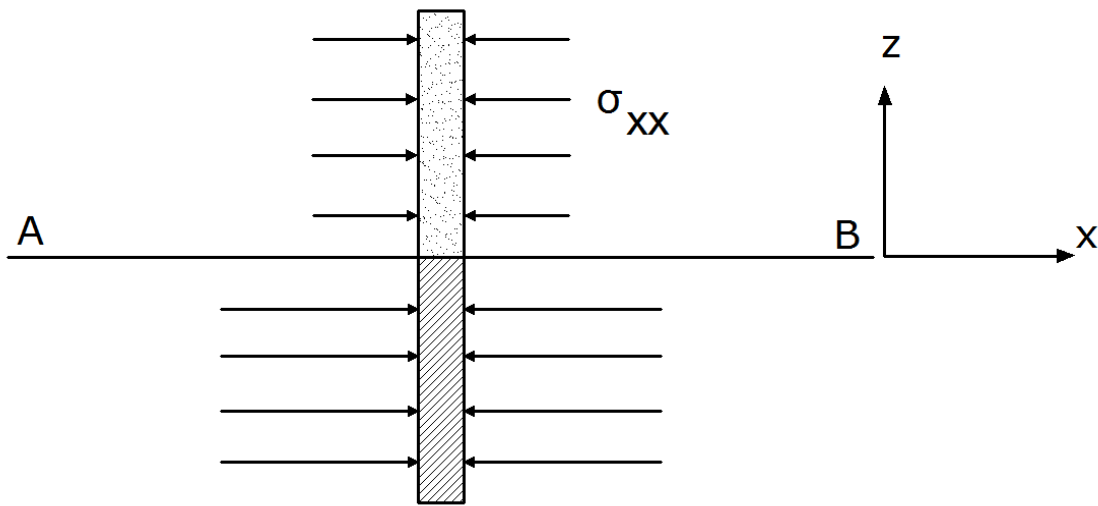


Figura II.12 Discontinuidad de esfuerzos entre dos medios.

Un caso especial para las ecuaciones anteriores en el cual el medio 2 es tan suave que sus esfuerzos son completamente despreciables comparados con el medio 1 (como por ejemplo aire contra acero), en tal caso se dice que la superficie es libre y en tal caso se cumple las siguientes condiciones de frontera.

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (\text{II.5.21})$$

**II.5.3.1 Condiciones de frontera para el semi-espacio fluido-sólido**

Un caso específico es la interface fluido-sólido y de acuerdo a la figura II.13 podemos establecer las siguientes condiciones de frontera:

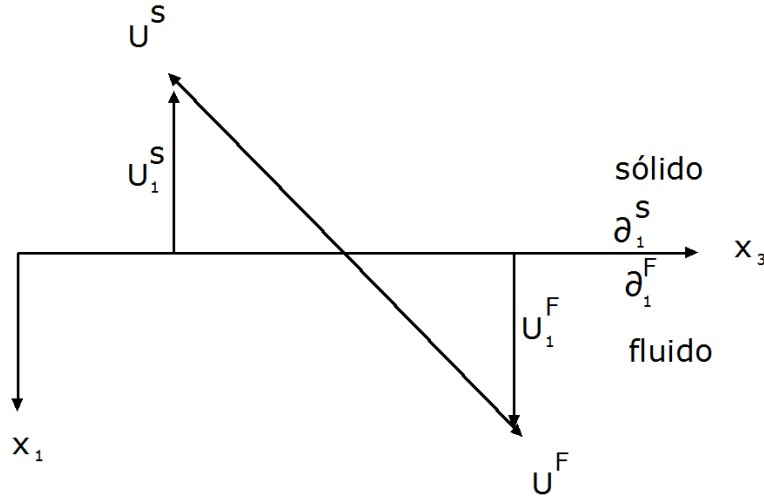


Figura II.13 Continuidad de desplazamientos semi-espacio fluido-sólido.

continuidad de desplazamientos (figura II.13),

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F \quad (II.5.22)$$

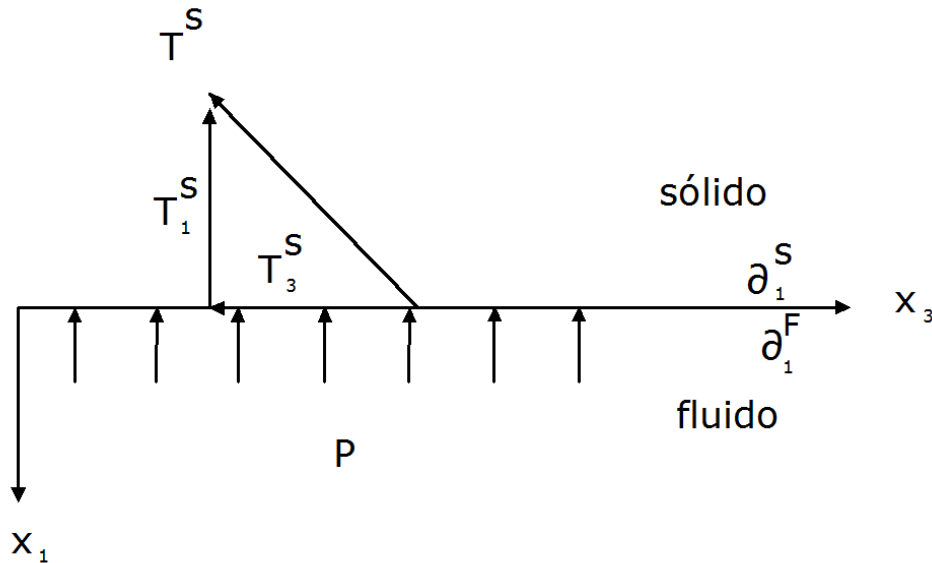


Figura II.14 Continuidad de tracciones semi-espacio fluido-sólido.

continuidad de tracciones (figura II.14) para el fluido en reposo,

$$t_3^S(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^s \quad (II.5.23)$$

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^s \quad (II.5.24)$$

### II.5.3.2 Condiciones de frontera para el estrato sólido-fluido-sólido

En el caso del estrato compuesto de fluido-sólido-fluido como se muestra en la figura II.15 las condiciones para cada frontera se plantean de la siguiente manera:

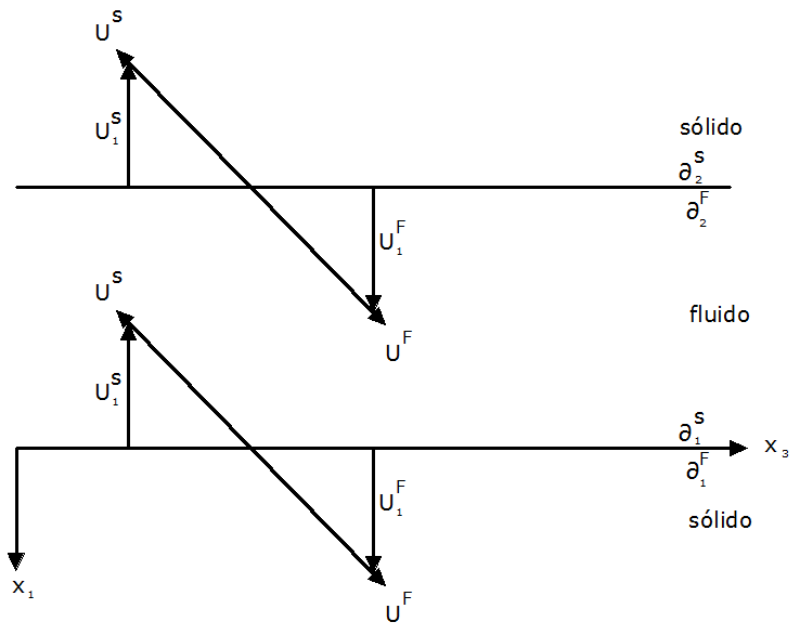


Figura II.15 Continuidad de desplazamientos estrato sólido-fluido-sólido.

Continuidad de desplazamientos (figura II.5):

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^s = \partial_s^F \quad (II.5.25)$$

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2^s = \partial_s^F \quad (II.5.26)$$

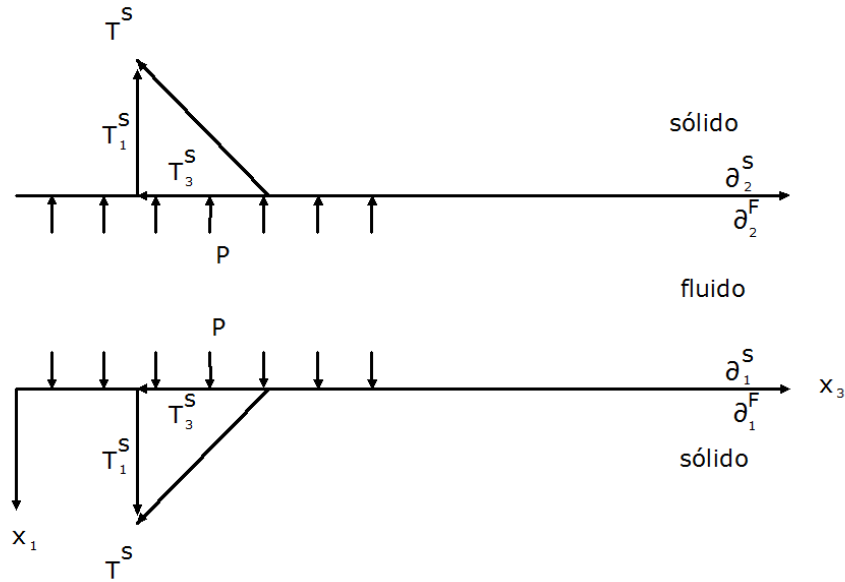


Figura II.16 Continuidad de tracciones estrato sólido-fluido-sólido.

continuidad de tracciones (figura II.16):

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (II.5.27)$$

$$t_3^S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (II.5.28)$$

$$t_3^S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2^S \quad (II.5.29)$$

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2^S \quad (II.5.30)$$

### II.5.3.3 Ecuaciones integrales para las regiones del semi-espacio fluido-sólido

Partiendo de la condición de frontera dada en la ecuación II.5.22 tenemos:

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F \quad (II.5.31)$$

y dado que el desplazamiento en el fluido está conformado por la suma del campo incidente y el campo difractado, podemos expresar la ecuación anterior como:

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^{0F}(\mathbf{x}) + u_1^{dF}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F \quad (II.5.32)$$

Sustituyendo las ecuaciones II.5.10, II.5.4, II.5.6 en la ecuación anterior tenemos

$$\int_{\partial R} G_{1j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^o(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_1} \Psi(\xi) dS_\xi \quad (\text{II.5.33})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F$$

esta ecuación representa la primera ecuación integral buscada.

Para la siguiente ecuación integral tomaremos la condición de frontera dada en la ecuación II.5.23.

$$t_3^S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.34})$$

Sustituyendo el valor de la tracción dada en la ecuación II.5.11 obtenemos:

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.35})$$

esta ecuación constituye la segunda ecuación integral buscada.

Para la siguiente ecuación integral tomaremos la condición de frontera formulada en la ecuación II.5.24

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.36})$$

la presión en el fluido esta constituido por la presión incidente y la presión difractada por lo que la ecuación anterior resulta:

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^{0F}(\mathbf{x}) - p^{dF}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.37})$$

sustituyendo la ecuación II.5.11, II.5.1 y II.5.5 resulta:

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial_1^F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi \quad (\text{II.5.38})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F$$

la cual constituye nuestra tercera ecuación integral.



### II.5.3.4 Discretización de las ecuaciones integrales para el semi-espacio fluido-sólido

Si se realiza la discretización del problema según el detalle mostrado en la figura II.17 y se suponen las densidades de fuerza en el sólido y en el fluido,  $\phi(\mathbf{x})$  y  $\Psi(\mathbf{x})$  respectivamente, constantes en cada elemento de la interface, entonces podemos discretizar cada una de las ecuaciones integrales para el semi-espacio sólido-liquido de la siguiente manera:

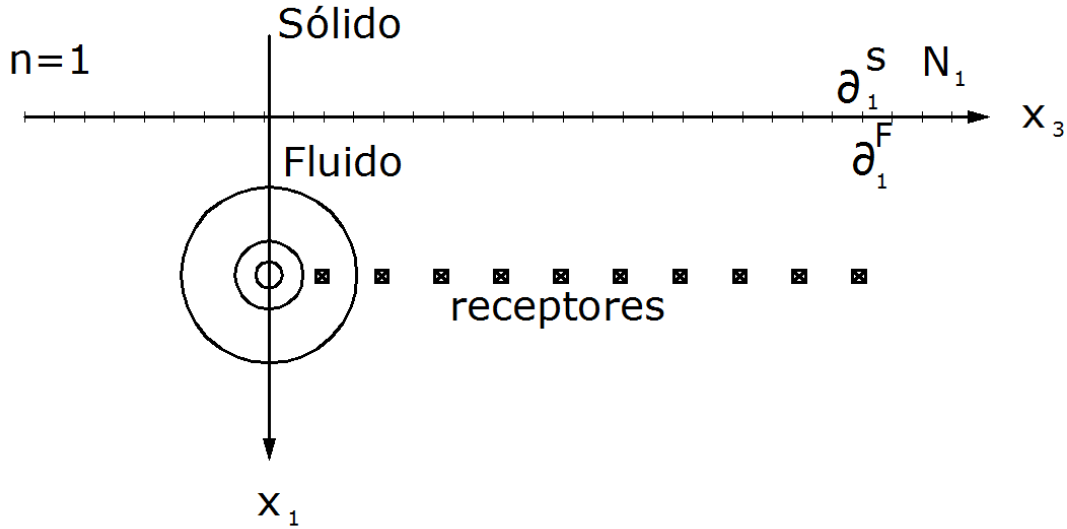


Figura II.17 Interface fluido-sólido para la formulación del IBEM.

la discretización de la ecuación (II.5.33) queda:

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) k = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^{o^F}(\mathbf{x}_l)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad l=1, N \quad (II.5.39)$$

$$g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (II.5.40)$$

$$k = \pm c_1 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n)}{\partial x_1} dS_\xi \quad (II.5.41)$$

y la discretización de la ecuación (II.5.35) resulta:

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_i(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = 0 \quad l=1, N \quad (II.5.42)$$

$$t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c_2 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} T_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (II.5.43)$$

de igual forma la discretización de la ecuación (II.5.38) queda:

$$-\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c(\omega) H_o^{(2)}(\omega r/c^F) \quad l = 1, N \quad (II.5.44)$$

$$G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (II.5.45)$$

Las ecuaciones II.5.39, II.5.42 y II.5.44 constituyen el sistema de ecuaciones donde las densidades de fuerza,  $\phi(\mathbf{x})$  y  $\Psi(\mathbf{x})$ , son las soluciones buscadas. Mediante estas densidades, pueden encontrarse el estado de presiones y desplazamientos en el fluido, empleando las ecuaciones II.5.8 y II.5.9, y el estado de tracciones y desplazamientos en el sólido, empleando las ecuaciones II.5.10 y II.5.11.

$$\begin{bmatrix} G_{ZX}^{S_1} & G_{ZZ}^{S_1} & -\partial_z G^F \\ T_{XX}^{S_1} & T_{XZ}^{S_1} & \bar{0} \\ -T_{ZX}^{S_1} & -T_{ZZ}^{S_1} & -G^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_X^{S_1} \\ \phi_Z^{S_1} \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho^{F-1} \omega^{-2} \partial_z p^{o^F} \\ \bar{0} \\ p^{o^F} \end{Bmatrix} \quad (II.5.46)$$

### II.5.3.5 Ecuaciones integrales para las regiones sólido-fluido-sólido

Para este caso las ecuaciones integrales a desarrollar corresponden al modelo mostrado en la figura II.18 que corresponde a tres estratos con dos superficies de frontera.

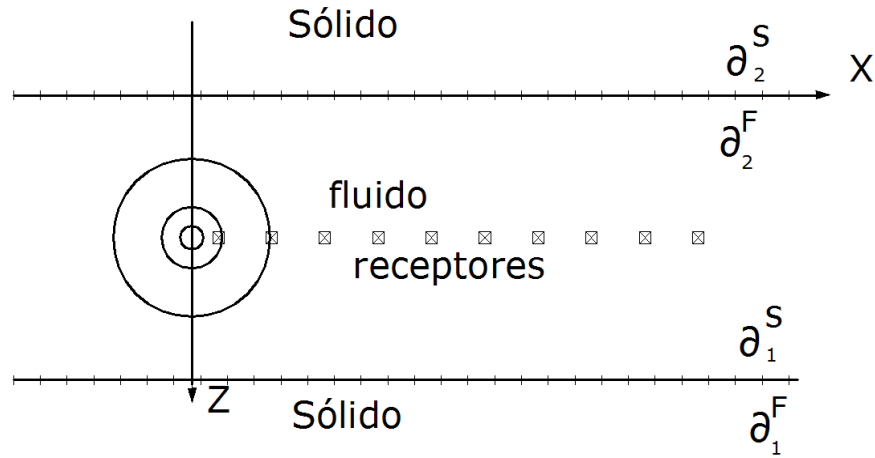


Figura II.18 Interface sólido-fluido-sólido para la formulación del IBEM.

Como podemos observar las condiciones de frontera en las regiones 1 y 2 son similares lo único que cambia es la ubicación y la dirección de los campos de presiones y desplazamientos, por lo tanto la formulación sigue el mismo camino que el mostrado en el modelo del semi-espacio.

partiendo de la condición de frontera dada en la ecuación II.5.25 tenemos:

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F \quad (\text{II.5.47})$$

el desplazamiento en el fluido esta conformado por la suma del campo incidente y el campo difractado a lo largo de la frontera 1, por lo tanto podemos expresar la ecuación anterior como:

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^{0F}(\mathbf{x}) + u_1^{dF}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F \quad (\text{II.5.48})$$

Sustituyendo las ecuaciones II.5.10, II.5.4 y II.5.6 en la ecuación anterior tenemos la primera ecuación integral sobre la frontera 1.

$$\int_{\partial R} G_{1j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^o(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_1} \Psi(\xi) dS_\xi \quad (\text{II.5.49})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F$$

Para la siguiente ecuación partiremos de la condición de frontera formulada en la ecuación II.5.28

$$t_3^S(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.50})$$

sustituyendo el valor de la tracción dada en la ecuación II.5.11 obtenemos:

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.51})$$

esta ecuación constituye la segunda ecuación integral buscada.

para la siguiente ecuación integral tomaremos la condición de frontera formulada en la ecuación II.5.27

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.52})$$

la presión en el fluido esta constituido por la presión incidente y la presión difractada por lo que la ecuación anterior resulta:

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^{0F}(\mathbf{x}) - p^{dF}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.53})$$

sustituyendo las ecuaciones II.5.11, II.5.1 y II.5.5 resulta:

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial_1^F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi \quad (\text{II.5.54})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F$$

la cual constituye nuestra tercera ecuación integral.

para la cuarta, quinta y sexta ecuación integral se procede de forma similar que las ecuaciones anteriores únicamente cambiando los datos a la frontera dos de la siguiente manera:

condición de frontera

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2^S = \partial_2^F \quad (\text{II.5.55})$$

cuarta ecuación integral

$$\int_{\partial R} G_{1j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^o(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_1} \Psi(\xi) dS_\xi \quad (\text{II.5.56})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_2^S = \partial_2^F$$

condición de frontera

$$t_3^S(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2^S \quad (II.5.57)$$

quinta ecuación integral

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2^S \quad (II.5.58)$$

condición de frontera

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2^S \quad (II.5.59)$$

sexta ecuación integral

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial_1^F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi \quad (II.5.60)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_2^S = \partial_2^F$$

### II.5.3.6 Discretización de las ecuaciones integrales para las regiones sólido-fluido-sólido

la discretización del problema se realiza según la figura II.18 y se suponen las densidades de fuerza en el sólido y en fluido,  $\phi(\mathbf{x})$  y  $\Psi(\mathbf{x})$  respectivamente, constantes en cada elemento de la interface, entonces podemos discretizar cada una de las ecuaciones integrales para el estrato sólido-fluido-sólido de la siguiente manera:

ecuación integral 1

$$\int_{\partial R} G_{1j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^o(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_1} \Psi(\xi) dS_\xi \quad (II.5.61)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F$$

discretizando la ecuación integral II.5.61 resulta:

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) k = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^{o^F}(\mathbf{x}_l)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad l=1, N \quad (II.5.62)$$

$$g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (II.5.63)$$

$$k = \pm c_1 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n)}{\partial x_1} dS_\xi \quad (II.5.64)$$

ecuación integral 2

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1^S \quad (\text{II.5.65})$$

discretización de la ecuación integral 2

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_i(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = 0 \quad l = 1, N \quad (\text{II.5.66})$$

$$t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c_2 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} T_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (\text{II.5.67})$$

ecuación integral 3

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial_1^F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi \quad (\text{II.5.68})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_1^S = \partial_1^F$$

La discretización de la ecuación integral 3:

$$-\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) \quad l = 1, N \quad (\text{II.5.69})$$

$$G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (\text{II.5.70})$$

ecuación integral 4

$$\int_{\partial_R} G_{1j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^o(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial_F} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_1} \Psi(\xi) dS_\xi \quad (\text{II.5.71})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_2^S = \partial_2^F$$

discretización de la ecuación integral 4

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) k = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^o(\mathbf{x}_l)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1}, l = 1, N \quad (\text{II.5.72})$$

$$g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (\text{II.5.73})$$

$$k = \pm c_1 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n)}{\partial x_1} dS_\xi \quad (\text{II.5.74})$$

ecuación integral 5

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2^S \quad (II.5.75)$$

discretización de la ecuación integral 5

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_i(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = 0 \quad l = 1, N \quad (II.5.76)$$

$$t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c_2 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} T_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi) dS_\xi \quad (II.5.77)$$

ecuación integral 6

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1^S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial_1^F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi \quad (II.5.78)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_2^S = \partial_2^F$$

La discretización de la ecuación integral 6:

$$-\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) \quad l = 1, N \quad (II.5.79)$$

$$G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G^F(\mathbf{x}_l, \xi) dS_\xi \quad (II.5.80)$$

estas seis ecuaciones integrales constituyen el sistema de ecuaciones donde las densidades de fuerza,  $\phi(\mathbf{x})$  y  $\Psi(\mathbf{x})$ , son las soluciones buscadas. Mediante estas densidades, pueden encontrarse el estado de presiones y desplazamientos en el fluido, empleando las ecuaciones (II.47) y (II.48), y el estado de tracciones y desplazamientos en el sólido, empleando las ecuaciones (II.49) y (II.50). el sistema de ecuaciones formuladas se expresa matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} G_{ZX}^{S_1} & G_{ZZ}^{S_1} & \bar{0} & \bar{0} & -\partial_z G^F - \partial_z G^F & -\partial_z G^F \\ \bar{0} & \bar{0} & G_{ZX}^{S_2} & G_{ZX}^{S_2} & -\partial_z G^F - \partial_z G^F & -\partial_z G^F \\ T_{XX}^{S_1} & T_{XZ}^{S_1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & T_{XX}^{S_2} & T_{XZ}^{S_2} & \bar{0} & \bar{0} \\ -T_{ZX}^{S_1} & -T_{ZZ}^{S_1} & \bar{0} & \bar{0} & -G^F & -G^F \\ \bar{0} & \bar{0} & -T_{ZX}^{S_2} & -T_{ZZ}^{S_2} & -G^F & -G^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_X^{S_1} \\ \phi_Z^{S_1} \\ \phi_X^{S_2} \\ \phi_Z^{S_2} \\ \psi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^{F-1} \omega^{-2} \partial_z p^{oF} \\ \rho^{F-1} \omega^{-2} \partial_z p^{oF} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ p^{oF} \\ p^{oF} \end{bmatrix} \quad (II.5.81)$$

## II.6 Formulación integral del DWN para el semi-espacio fluido-sólido

El método del número de onda discreto (DWN por sus siglas en inglés), es una de las técnicas para simular la propagación de ondas en un semi-espacio. En el DWN una onda irradiada de una fuente se expresa como la superposición de las ondas planas propagándose en ángulos discretos. La formulación se realizara considerando un semi-espacio que se muestra en la fig. II.19.

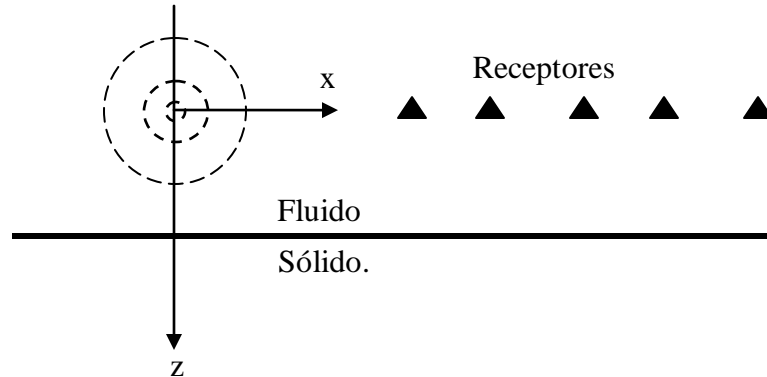


Figura II.19 Modelo para la formulación del DWN en un estrato sólido-fluido.

El problema que se plantea consiste en determinar el campo de desplazamientos y esfuerzos en un estrato sólido-líquido, debido a una fuente puntual en el estrato líquido.

Para expresar la presión incidente utilizamos la función de Hankel de segunda especie y de orden 0 :

$$H_0^2\left(\frac{\omega r}{\alpha f}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx - i|\eta|z}}{\eta} dk \approx \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k \quad (\text{II.6.1})$$

donde:

$$k = \frac{w \text{sen} \gamma}{\alpha f} \quad (\text{II.6.2})$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha f^2} - k^2} \quad (\text{II.6.3})$$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad (\text{II.6.4})$$

$$k_n = n\Delta k \quad (\text{II.6.5})$$



$$\eta_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha f^2} - k_n^2} \quad (\text{II.6.6})$$

la presión incidente queda expresada de la siguiente forma

$$p^0 = \frac{1}{4i} H_0^2 \left( \frac{\omega r}{\alpha f} \right) \quad (\text{II.6.7})$$

y el campo de presiones reflejado se puede expresar como:

$$p^r = \sum_{n=-N}^N A_n e^{-ik_n x + i\eta_n z} \quad (\text{II.6.8})$$

donde el termino  $e^{-ik_n x + i\eta_n z}$  indica que la onda se mueve en la dirección de  $z < 0$ .

El campo de presiones totales se compone de la suma de la presión incidente con la presión reflejada

$$p = p^0 + p^r \quad (\text{II.6.9})$$

sustituyendo II.6.1, II.6.7 y II.6.8 en II.6.9 obtenemos la ecuación del campo de presiones totales

$$p = \frac{1}{4\pi i} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k + \sum_{n=-N}^N A_n e^{-ik_n x + i\eta_n (z - z_{FR})} \quad (\text{II.6.10})$$

El campo de desplazamiento se determina derivando la presión con respecto a  $z$  y considerando la propagación de la onda difractada hacia  $z < 0$ .

$$u_z = \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$u_z = \frac{1}{\rho \omega^2 4\pi i} \sum_{n=-N}^N \frac{-i\eta_n \text{sig}(z) e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k + \sum_{n=-N}^N \frac{A_n}{\rho \omega^2} e^{-ik_n x + i\eta_n (z - z_{FR})} i\eta_n$$

$$u_z = \frac{1}{\rho \omega^2} \sum_{n=-N}^N \frac{-\text{sig}(z)}{4\pi} e^{-ik_n x - i\eta_n |z|} \Delta k + \frac{1}{\rho \omega^2} \sum_{n=-N}^N i A_n \eta_n e^{-ik_n x + i\eta_n (z - z_{FR})} \quad (\text{II.6.11})$$

Se proponen los siguientes potenciales que son solución de ecuación diferencial que gobierna la propagación de ondas

$$\phi = \sum B_n e^{-ik_n x - i\eta_n (z - z_{FR})} \quad (\text{II.6.12})$$

$$\psi = \sum C_n e^{p-ik_n x - i\nu_n(z-z_{FR})} \quad (II.6.13)$$

donde  $e^{-ik_n x - i\gamma_n(z-z_{FR})}$  indica que la onda se mueve en dirección positiva del punto de referencia en este caso es el eje z y,

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k_n^2} \quad \text{Im } \gamma_n < 0 \quad (II.6.14)$$

$$\nu_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k_n^2} \quad \text{Im } \nu_n < 0 \quad (II.6.15)$$

El campo de desplazamientos en la dirección x satisface (Achenbach 1976):.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (II.6.16)$$

sustituyendo y derivando los potenciales planteados en la ecuación diferencial anterior resulta:

$$u = \sum -ik_n B_n e^{-ik_n x - i\gamma_n(z-z_{FR})} - \sum -i\nu_n C_n e^{-ik_n x - i\nu_n(z-z_{FR})} \quad (II.6.17)$$

Y el campo de desplazamientos en la dirección z satisface (Achembach 1976).

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (II.6.18)$$

sustituyendo y derivando los potenciales en la ecuación anterior.

$$w = \sum -i\gamma_n B_n e^{-ik_n x - i\gamma_n(z-z_{FR})} + \sum -ik_n C_n e^{-ik_n x - i\nu_n(z-z_{FR})} \quad (II.6.19)$$

simplificando los desplazamientos tenemos:

$$u = \sum \left\{ -ik_n B_n e^{-i\gamma_n(z-z_{FR})} + -i\nu_n C_n e^{-i\nu_n(z-z_{FR})} \right\} e^{-ik_n x} \quad (II.6.20)$$

$$w = \sum \left\{ -i\gamma_n B_n e^{-i\gamma_n(z-z_{FR})} + -ik_n C_n e^{-i\nu_n(z-z_{FR})} \right\} e^{-ik_n x} \quad (II.6.21)$$

El tensor de esfuerzo para un medio homogéneo, elástico e isótropo satisface

$$\sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (II.6.22)$$

se sustituyen los valores de  $u$  y  $w$  en la ecuación anterior y se calculan las derivadas:

$$\sigma_{xz} = \mu \sum -2k_n \gamma_n B_n e^{-i\gamma_n(z-z_{FR})} e^{-ik_n x} + \mu \sum (v_n^2 - k_n^2) C_n e^{-iv_n(z-z_{FR})} \quad (II.6.23)$$

Se procede de igual manera para los esfuerzos en la dirección  $zz$ .

$$\sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (II.6.24)$$

sustituyendo las ecuaciones II.6.19 y II.6.20 en la ecuación anterior se tiene

$$\sigma_{zz} = \lambda \left\{ \sum - (k^2 - \gamma_n^2) B_n e^{-i\gamma_n(z-z_{FR})} e^{-ik_n x} \right\} + 2\mu \left\{ \sum \left[ -\gamma_n^2 B_n e^{-i\gamma_n(z-z_{FR})} - k_n v_n C_n e^{-iv_n(z-z_{FR})} \right] e^{-ik_n x} \right\} \quad (II.6.25)$$

Se plantean las condiciones de frontera en  $z = z_{FR}$ .

Continuidad de desplazamiento

$$U_z^s = U_z^f \quad (II.6.26)$$

transferencia de esfuerzos del sólido al líquido

$$\sigma_{zz}^s = -p \quad (II.6.27)$$

$$\sigma_{xz}^s = 0 \quad (II.6.28)$$

Se evalúan el campo de desplazamientos y esfuerzos en la frontera

$$U_z^s = w \Big|_{z=z_{FR}} = \sum \{ -i\gamma_n B_n - ik_n C_n \} e^{-ik_n x} \quad (II.6.29)$$

$$U_z^f = w \Big|_{z=z_{FR}} = \frac{1}{\rho\omega^2} \sum -\frac{1}{4\pi} e^{-ik_n x - i\eta_n |z_{FR} - z_{fuente}|} \Delta k + \sum \frac{iA_n \eta_n}{\rho\omega^2} e^{-ik_n x} \quad (II.6.30)$$

$$\sigma_{zz}^f \Big|_{FR} = \sum \left\{ -\lambda (k_n^2 + \gamma_n^2) - 2\mu\gamma_n^2 \right\} B_n - 2\mu k_n v_n C_n \quad (II.6.31)$$

$$-p = -\frac{1}{4\pi i} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k - \sum_{n=-N}^N A_n e^{-ik_n x + i\eta_n (z-z_{FR})} \quad (II.6.32)$$

$$\sigma_{xz}^s = -\mu \sum (2k_n \gamma_n) B_n e^{-ik_n x} + \mu \sum (v_n^2 - k_n^2) C_n e^{-ik_n x} \quad (II.6.33)$$

Finalmente se aplican las condiciones de frontera y se obtiene un sistema lineal de ecuaciones que expresadas en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{-i\eta_n}{\rho\omega^2} & -i\gamma_n & -ik_n \\ 1 & -\lambda(k_n^2 + \gamma_n^2) - 2\mu\gamma_n^2 & -2k_n\gamma_n \\ 0 & -2k_n\gamma_n & v_n^2 - k_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\Delta k}{4\pi\rho\omega^2} e^{-i\eta_n|z_{FR}-z_{fu}|} \\ -\frac{\Delta k}{4\pi\eta_n i} e^{-i\eta_n|z_{FR}-z_{fu}|} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II.6.34)$$

Este sistema se resuelve por medio de un programa de computadora y se obtiene la propagación de onda en el medió planteado.

### II.7 Formulación integral del DWN para el estrato sólido-fluido-sólido

En este caso la formulación se realizará considerando un estrato solido-fluido-sólido (sandwich) que se muestra en la fig. II.20.

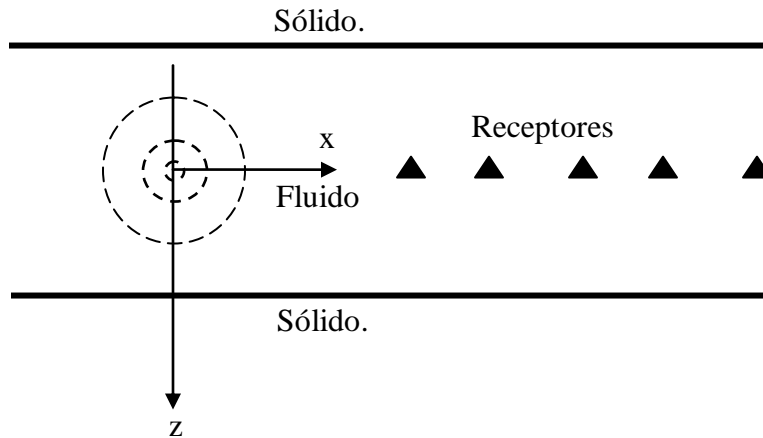


Figura II.20 Modelo para la formulación del DWN en estrato sólido-fluido-sólido.

Para el caso del estrato solido-fluido-solido (sandwich) la presión incidente en el fluido se expresa

$$p^0 = \frac{1}{4\pi i} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k \quad (II.7.1)$$

y la presión reflejada en el fluido

$$p^r = \sum_{n=-N}^N A_n e^{-ik_n x} \cos \eta_n x \quad (II.7.2)$$

así el campo de presiones totales en el fluido se obtiene sumando el campo incidente con el campo reflejado

$$p = \sum \left[ \frac{\Delta k}{4\pi i \eta_n} e^{-i\eta_n |z|} + A_n \cos \eta_n z \right] e^{-ik_n x} \quad (\text{II.7.3})$$

y derivando el campo de presiones obtenemos el campo de desplazamiento en el fluido

$$u_z = \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho \omega^2} \sum \left[ -\frac{\Delta k}{4\pi} e^{-i\eta_n |z|} \text{sig}(z) - A_n \eta_n \text{sen} \eta_n z \right] e^{-ik_n x} \quad (\text{II.7.4})$$

Para definir el campo de presiones y desplazamientos en el estrato sólido se proponen los siguientes potenciales

$$\phi = \sum B_n e^{-ik_n x} e^{-i\lambda_n z} \quad (\text{II.7.5})$$

$$\psi = \sum C_n e^{-ik_n x} e^{-i\nu_n z} \quad (\text{II.7.6})$$

donde  $\gamma_n$  y  $\nu_n$  están dadas por las ecuaciones II.6.13 y II.6.14.

El campo de desplazamientos en la dirección x satisface (Achenbach 1976) :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{II.7.7})$$

sustituyendo y derivando los potenciales planteados en la ecuación diferencial anterior resulta:

$$u = \sum \left\{ -i\gamma_n B_n e^{-i\gamma_n z} - i\nu_n C_n e^{-i\nu_n z} \right\} e^{-ik_n x} \quad (\text{II.7.8})$$

Y el campo de desplazamientos en la dirección z satisface (Achembach 1976).

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.7.9})$$

sustituyendo y derivando los potenciales en la ecuación anterior se tiene:

$$w = \sum \left( -i\gamma_n B_n e^{-ik_n x} e^{-i\gamma_n z} + ik_n C_n e^{-ik_n x} e^{-i\nu_n z} \right) \quad (\text{II.7.10})$$

derivando a  $u$  y  $w$  con respecto a  $z$  y  $x$  respectivamente se obtiene

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \sum \left( -i\gamma_n^2 B_n e^{-i\gamma_n z} + k_n v_n C_n e^{-i v_n z} \right) e^{-i k_n x} \quad (\text{II.7.11})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum \left( -k_n^2 B_n e^{-i\gamma_n z} - k_n v_n C_n e^{-i v_n z} \right) e^{-i k_n x} \quad (\text{II.7.12})$$

El tensor de esfuerzo para un medio homogéneo, elástico e isótropo satisface

$$\sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{II.7.13})$$

se sustituyen los valores de  $u$  y  $w$  en la ecuación anterior y se calculan las derivadas:

$$\sigma_{xz} = \sum \mu \left( -2k_n \gamma_n B_n e^{-i\gamma_n z} + (v_n^2 - k_n^2) C_n e^{-i v_n z} \right) e^{-i k_n x} \quad (\text{II.7.14})$$

Para los esfuerzos en la dirección  $zz$

$$\sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.7.15})$$

sustituyendo las ecuaciones II.7.11 y II.7.12 en la ecuación anterior se tiene

$$\sigma_{zz} = \sum \left\{ \lambda \left( -\gamma_n^2 - k_n^2 \right) B_n e^{-i\gamma_n z} + 2\mu \left( -\gamma_n^2 B_n e^{-i\gamma_n z} + k_n v_n C_n e^{-i v_n z} \right) e^{-i k_n x} \right\}. \quad (\text{II.7.16})$$

Se plantean las condiciones de frontera en  $z = z_{FR}$ .

Continuidad de desplazamiento.

$$U_z^s = U_z^f \quad (\text{II.7.17})$$

transferencia de esfuerzos del sólido al líquido.

$$\sigma_{zz}^s = -p \quad (\text{II.7.18})$$

$$\sigma_{xz}^s = 0. \quad (\text{II.7.19})$$

Se aplican las condiciones de frontera al sistema de ecuaciones calculadas anteriormente en  $z = a$

$$U_z^s = U_z^f$$

$$-i\gamma_n B_n e^{-i\gamma_n a} + ik_n C_n e^{-iv_n a} = -\frac{\Delta k}{\rho\omega^2 4\pi} e^{-i\eta_n a} - \frac{A_n}{\rho\omega^2} \eta_n \text{sen} \eta_n a \quad (\text{II.7.20})$$

$$\sigma_{zz}^s = -p$$

$$-\lambda(\gamma_n^2 + k_n^2) B_n e^{-i\gamma_n a} - 2\mu\gamma_n^2 B_n e^{-i\gamma_n a} + 2\mu k_n v_n C_n e^{-iv_n a} = -\frac{\Delta k}{4\pi i \eta_n} e^{-i\eta_n a} - A_n \cos \eta_n a \quad (\text{II.7.21})$$

$$\sigma_{xz}^s = 0$$

$$-2\mu k_n \gamma_n B_n e^{-i\gamma_n a} + \mu(k_n^2 - v_n^2) e^{-iv_n a} C_n = 0 \quad (\text{II.7.22})$$

donde

$$k_n^2 - v_n^2 = 2k_n^2 - \omega^2 / \beta^2$$

Finalmente expresando en forma matricial el sistema de ecuaciones lineales algebraicas tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\eta_n}{\rho\omega^2} \text{sen} \eta_n a & -i\gamma_n e^{-i\gamma_n a} & ik_n e^{-iv_n a} \\ \cos \eta_n a & \left( -\frac{\lambda\omega^2}{\alpha^2} - 2\mu\gamma_n^2 \right) e^{-i\gamma_n a} & 2\mu k_n v_n e^{-iv_n a} \\ 0 & -2\mu k_n \gamma_n e^{-i\gamma_n a} & \mu \left( 2k_n^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) e^{-i\gamma_n a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\Delta k}{4\pi\rho\omega^2} e^{-i\eta_n a} \\ -\frac{\Delta k}{4\pi i \eta_n} e^{-i\eta_n a} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.7.23})$$

este sistema se resuelve por medio de un programa de computadora y se obtiene la propagación de onda en el estrato sólido-fluido-sólido.

## II.8 Pulso de Ricker

Cuando se calcula la respuesta dinámica de sistemas, se utilizan como excitación, funciones analíticas que dependen del tiempo, generalmente dichas funciones son de forma sencilla y requieren de pocos parámetros para graficarse. En particular, en este trabajo el pulso de Ricker es de utilidad pues permite un control directo sobre la eficiencia del muestreo y además, se puede identificar de manera sencilla el pulso apropiado para excitar un modelo con énfasis en una determinada frecuencia.

Analíticamente el pulso de Ricker se define de la forma

$$r(t) = (a^2 - 1/2) e^{-a^2} \quad (\text{II.8.1})$$

donde  $a = \pi(t-t_s)/t_p$  ,  $t_p$  = periodo característico del pulso y  $t_s$  define el centro del pulso. La duración de la parte central del pulso es igual a  $\sqrt{6} t_p / \pi$  , como se muestra en la fig. II.21.

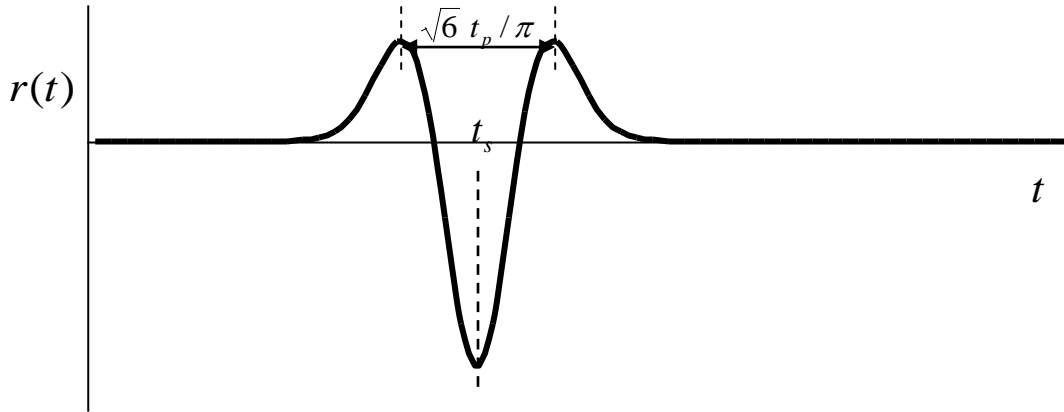


Figura II.21 Pulso de Ricker en el dominio del tiempo.

En el dominio de la frecuencia el pulso de Ricker se expresa mediante

$$R(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-b^2} e^{-i\omega t_s} \tag{II.8.2}$$

donde  $b = \omega / \omega_p$  ,  $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi / t_p$  ; la frecuencia  $f_p$  determina el ancho de banda del pulso de Ricker, ya que como se aprecia en la fig. II.22 el contenido de frecuencias en la señal por arriba de  $2f_p$  es muy bajo.

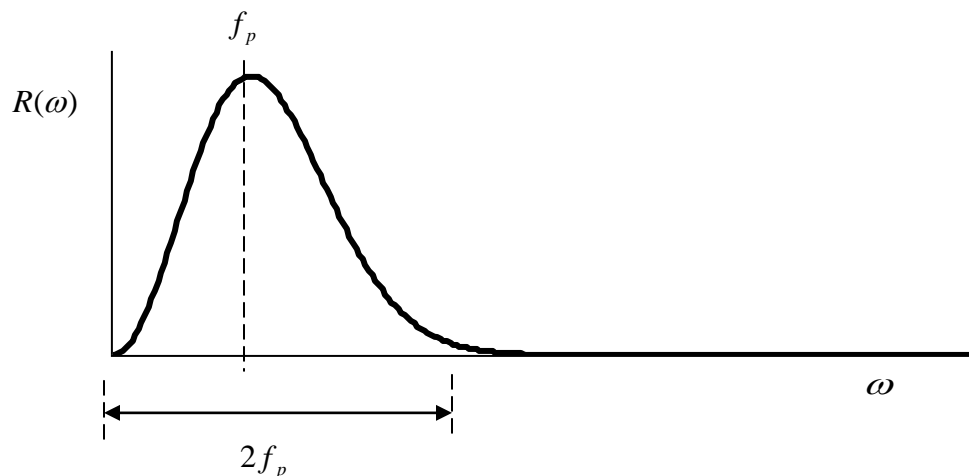


Figura II.21 Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia.



# Capítulo III

## Desarrollo de Software

En este capítulo se explicará los programas desarrollados para resolver el problema planteado en el capítulo anterior. Se resume brevemente cada una de las subrutinas empleadas. Todos los programas aquí planteados se desarrollaron en lenguaje Fortran y en Matlab.

### III.1 Implementación del IBEM

Se desarrollaron programas en Compaq Visual Fortran versión 6.1, para resolver el problema de elementos de frontera planteado en el capítulo anterior. Se implementaron dos programas llamados IBEM e IBEMT.

El programa IBEM es el programa principal y se encarga de ensamblar las matrices generadas y de resolver para cada frecuencia el sistema de ecuaciones lineales, encontrando las funciones de densidad de fuerza en la frontera también conocido como función de transferencia, los cuales son las incógnitas a resolver. El resultado que se obtiene con el IBEM es la respuesta en el dominio de la frecuencia y los datos son almacenados en un archivo de texto con un formato específico, para que posteriormente sean utilizados por el programa IBEMT, el cual se encargará de realizar el producto de convolución de la función de transferencia con el pulso de Ricker. En el anexo 2 se muestra el código de este programa.

El programa IBEMT toma los datos del archivo de texto generado por el programa IBEM y calcula la respuesta en el tiempo del sistema. Este programa primero calcula la respuesta en el tiempo del pulso de Ricker, posteriormente utiliza la transformada discreta de Fourier para obtener la respuesta en la frecuencia, después realiza el producto del pulso de Ricker y la función de transferencia (generado por IBEM), la respuesta obtenida es regresada al dominio del tiempo por medio de la transformada inversa de Fourier.

Cabe mencionar que el programa está limitado a fronteras lineales y a elementos constantes en la discretización.

El programa principal se resume en el siguiente diagrama de flujo:

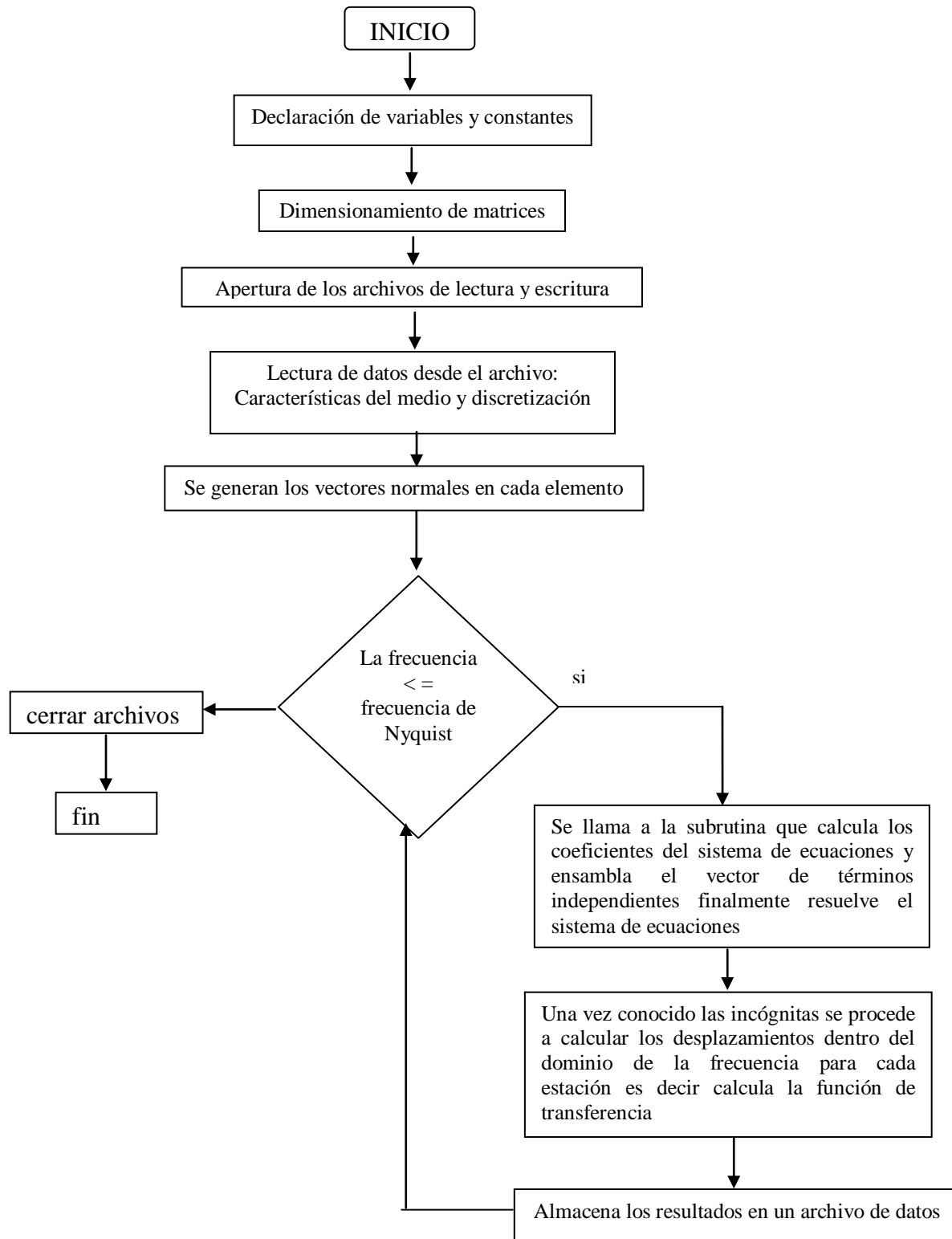


Figura III.1 Diagrama de flujo del programa IBEM.

### III.2 Subrutina SISTEQ

Dentro del programa del IBEM, existe la subrutina SISTEQ la cual ensambla el sistema lineal de ecuaciones algebraicas generadas por las condiciones de frontera.

Una vez ensamblada la matriz se procede a llamar a la Subrutina SOLUCO, la cual será encargada de resolver el sistema de ecuaciones generadas. La subrutina SISTEQ devuelve las soluciones en la frontera, es decir la función de transferencia para cada frecuencia que será usada posteriormente para calcular la señal en cada receptor.

### III.3 Subrutina HANKELS

Esta subrutina calcula la función de Hankel de segunda especie y de orden cero, para funciones de orden superior se puede emplear funciones de recurrencia.

Esta subrutina se emplea en el cálculo de desplazamientos y tracciones de la onda incidente, dicha onda proviene directamente de la fuente.

### III.4 Subrutinas TRACT, GREENGA, GRESEX, GRENA, GRENAEX Y DERGRA

Estas subrutinas se emplean para calcular tracciones, desplazamientos y derivadas de la función de Green. En ellas se generan los coeficientes de la matriz global. Para cumplir con su objetivo estas matrices se apoyan en la subrutina HANKELS explicada anteriormente.

### III.5 Subrutina DESFX

Esta subrutina calcula los términos independientes para resolver el sistema de ecuaciones.

### III.6 Subrutina SOLUCO

La subrutina SOLUCO se considera la más importante dentro del programa del IBEM ya que a través de ella se resuelve el sistema lineal de ecuaciones que se ensambla en SISTEQ. De la eficiencia de la subrutina SOLUCO depende el ahorro de memoria en recursos computacionales y el tiempo de análisis.

En las siguientes líneas se enlista el código en Fortran de ésta subrutina.

```

SUBROUTINE SOLUCO(N,M)
  PARAMETER (NPT=800)
  PARAMETER (NDIMAT=2350)
C
C  SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES AX=B

```

```

C  A=MATRIZ COMPLEJA DE (N,N)
C  B=MATRIZ COMPLEJA DE (N,M)
C
COMMON/ONE/B
COMMON/MAT/A
COMPLEX A(NDIMAT,NDIMAT),B(NDIMAT,1)
COMPLEX SUM

EPS=1.0E-25
DO 10 I=1,N
DO 9 J=I,N
SUM=(0.0,0.0)
IF(I.EQ.1)GO TO 5
DO 4 K=1,I-1
4 SUM=SUM+A(I,K)*A(K,J)
5 A(I,J)=A(I,J)-SUM
IF(J.EQ.N)GO TO 9
SUM=(0.0,0.0)
IF(I.EQ.1)GO TO 7
DO 6 K=1,I-1
6 SUM=SUM+A(J+1,K)*A(K,I)
7 IF(CABS(A(I,I)).LE.EPS)GO TO 3
  A(J+1,I)=(A(J+1,I)-SUM)/A(I,I)
9 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 100 ICAS=1,M
DO 17 I=1,N
SUM=(0.0,0.0)
IF(I.EQ.1)GO TO 16
DO 15 K=1,I-1
15 SUM=SUM+A(I,K)*B(K,ICAS)
16 B(I,ICAS)=B(I,ICAS)-SUM
17 CONTINUE
DO 22 I=1,N
II=N-I+1
SUM=(0.0,0.0)
IF(I.EQ.1)GO TO 19
DO 20 K=1,I-1
KK=N-K+1
20 SUM=SUM+A(II,KK)*B(KK,ICAS)
19 IF(CABS(A(II,II)).LE.EPS)GO TO 3
  B(II,ICAS)=(B(II,ICAS)-SUM)/A(II,II)
22 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
3 WRITE(6,*)"***SISTEMA DE ECUACIONES SINGULAR***"
RETURN
END

```

### III.7 Programas en matlab para el tratamiento de datos

Para poder realizar con facilidad la visualización gráfica de los resultados se desarrollo un programa en matlab que tiene como función leer los datos de entrada del problema y los datos generados por el programa IBEMT y posteriormente graficar el campo de desplazamientos y tracciones.

# Capítulo IV

## Aplicación de la teoría

En este capítulo se presenta la aplicación del IBEM para semi-espacios fluido-sólido y para estratos sólido-fluido-sólido. Los resultados se comparan con el DWN obteniéndose buenas aproximaciones.

**IV.1 Caso de estudio 1: semi-espacio fluido-sólido**

**IV.1.1 Estudio del campo de ondas para receptores cercanos a la fuente en un semi-espacio fluido-sólido**

En el siguiente ejemplo se estudia la propagación de ondas con receptores cercanos a la fuente. El semi-espacio que se modela se muestra en la figura IV.1. Se consideró una velocidad de propagación de las ondas P en el sólido de 3000 m/s, de las ondas S de 2000 m/s y su densidad de 2000 kg/m<sup>3</sup>, para el fluido se tomó una velocidad de propagación de las P de 1500 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>. La distancia H de la fuente a la frontera es de 0.5 m y de la fuente al primer receptor es de 0.1 m, los receptores se encuentra separados uniformemente a una distancia de 0.1 m.

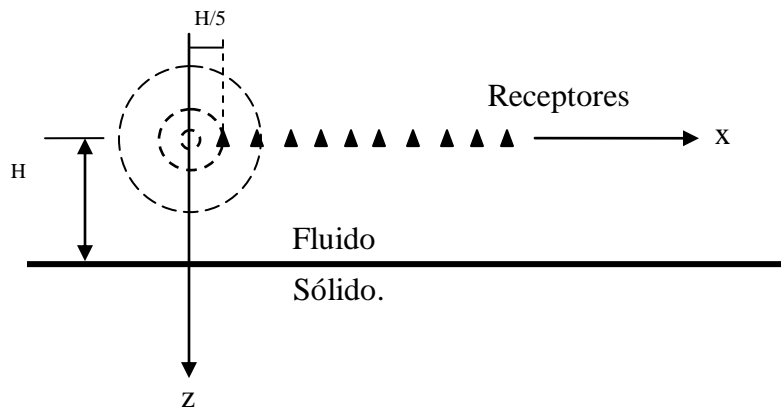


Figura IV.1 Semi-espacio fluido sólido con receptores cercanos a la fuente.

En la figura IV.2 se muestra la señal obtenida para el primer receptor, podemos notar que ambos métodos el IBEM y el DWN tienden a seguir el mismo patrón de comportamiento y también se observa que en los dos métodos el tiempo de arribo de las diferentes ondas son similares.

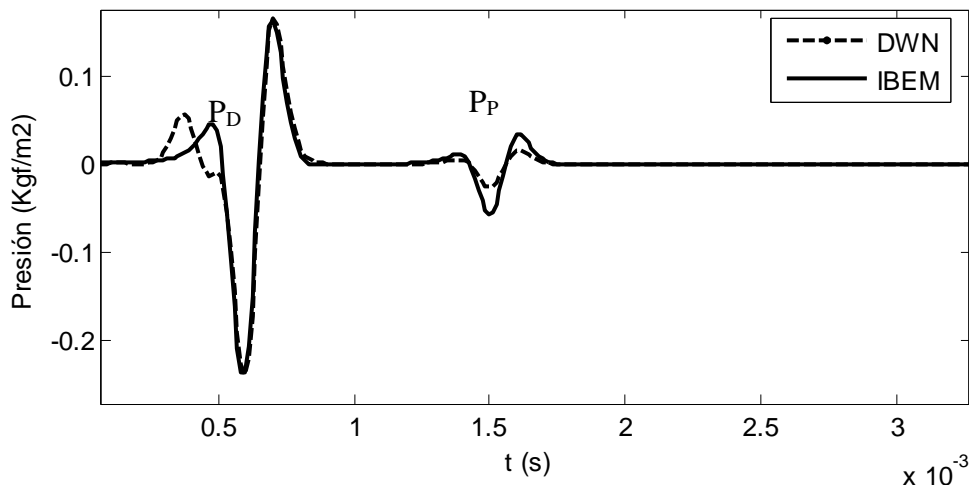


Figura IV.2 Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio fluido-sólido con receptores cercanos a la fuente.



En la figura IV.3 se presenta el campo de presiones registrado por 30 receptores. En esta figura podemos observar dos tipos de campos de presiones principalmente, el campo de presiones incidente  $P_D$ , que recibe la señal directamente de la fuente y el campo de ondas reflejadas  $P_P$ , que se origina por las ondas  $P$  que se transmiten al sólido. Así mismo se observa que el campo incidente tiene un comportamiento lineal y el campo reflejado presenta una pequeña curva hiperbólica cercana a la fuente y conforme se aleja tiende a un comportamiento lineal.

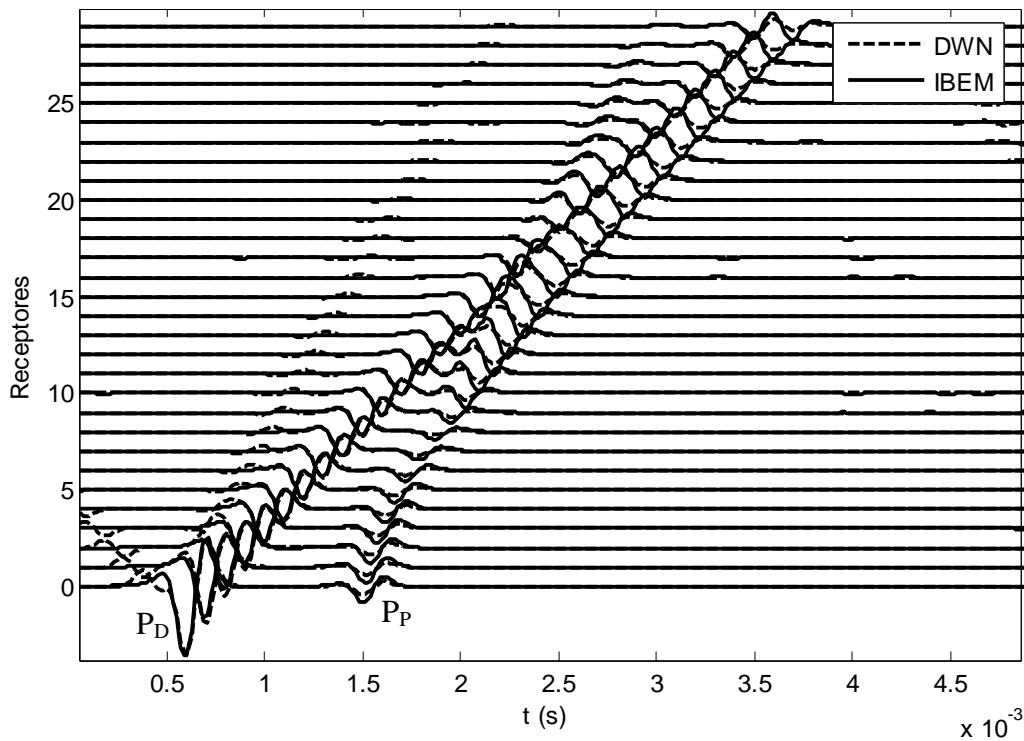


Figura IV.3 Campo de presiones registrado por 30 receptores para el semi-espacio fluido-sólido con receptores cercanos a la fuente.

#### IV.1.2 Estudio del campo de ondas en un semi-espacio fluido-sólido con velocidades de propagación de ondas lentas en el sólido

En este caso se estudia el campo de presiones para un semi-espacio fluido-sólido, considerando que el estrato sólido tiene una velocidad de propagación de ondas  $P$  de 2443 m/s y de ondas  $S$  de 1000 m/s, por lo cual, se considera que es un caso de propagación de ondas lentas, así mismo se asigna una densidad al sólido de 1270 kg/m<sup>3</sup>. Con lo que respecta al fluido se tiene una velocidad de propagación de ondas  $P$  de 1500 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>. Como se puede ver en la figura IV.4, la frontera se localiza a una distancia de  $H=0.05$  m. en la dirección  $z$  y el primer receptor se encuentran a una distancia de  $20H=1.0$  m., el resto de los receptores se sitúan en una línea recta separadas a una distancia de 0.1 m sobre el eje  $x$  en el fluido.

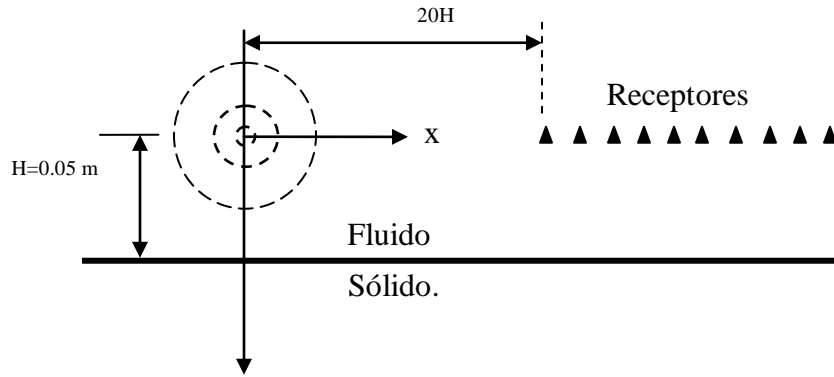


Figura IV.4 Semi-espacio fluido-sólido para el estudio de propagación de ondas lentas en el sólido.

En la figura IV.5 se muestra el registro del primer receptor colocado a 1 m. de distancia de la fuente, se observa que el IBEM y el DWN tienen un comportamiento similar. También se muestra el residuo que se genera entre ambos métodos, el cual nos da una idea de la aproximación entre ellos.

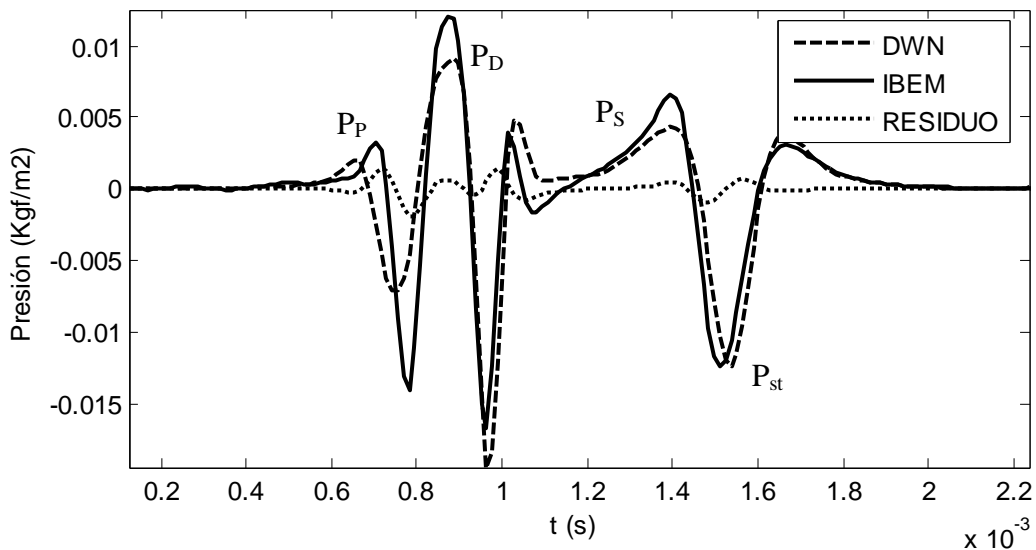


Figura IV.5 Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio fluido-sólido considerando propagación de ondas lentas en el sólido.

En la figura IV.6 se muestra el campo de presiones para 15 receptores, considerando propagación de ondas lentas en el sólido. Se observa que ambos métodos siguen el mismo patrón de comportamiento, para este caso se detectan 4 tipos de ondas: ondas incidentes  $P_D$ , ondas reflejadas  $P_P$ , ondas reflejadas debidas a las ondas S en el sólido  $P_S$ , y las ondas de Stoneley  $P_{st}$ , que se generan por la interacción de los medios en la frontera. Las líneas inclinadas indican la velocidad de propagación de los diferentes tipos de ondas que se pueden apreciar. Se observa que la onda  $P_P$  arriba en primer lugar que el resto de las ondas, esto se debe a que la velocidad de las ondas P en el sólido es mayor a la de las ondas S en el mismo y a las ondas P en

el fluido. También se observa que las ondas incidentes  $P_D$  arriban primero comparadas con las ondas  $P_S$ , esto se debe a que las ondas P en el fluido viajan a 1500 m/s y las ondas S en el sólido viajan a 1000 m/s.

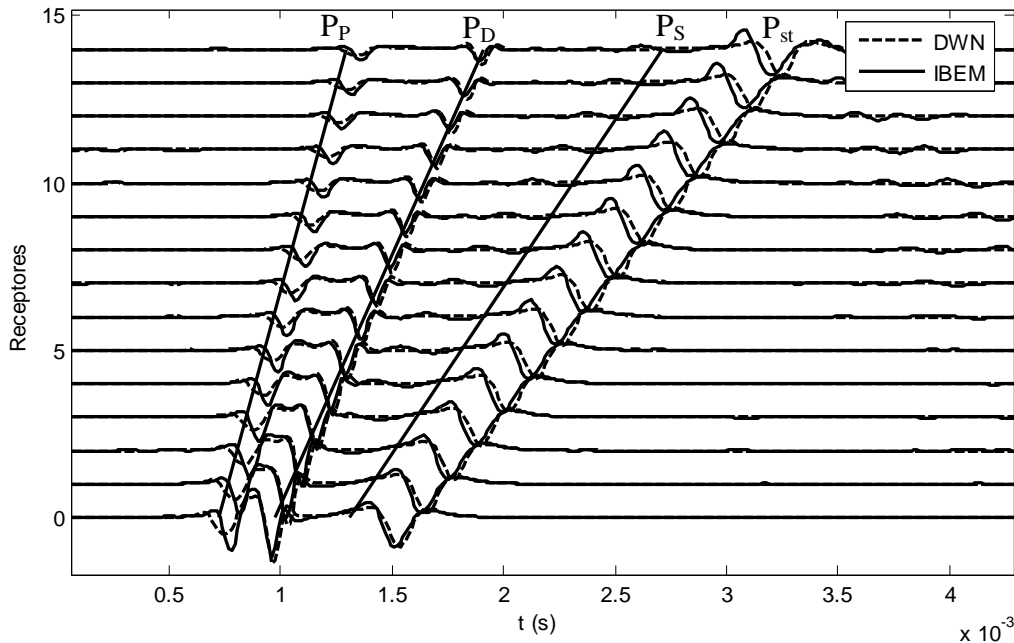


Figura IV.6 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio fluido-sólido considerando propagación de ondas lentas en el sólido.

### IV.1.3 Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-hierro

En este modelo se estudia la propagación de ondas en un semi-espacio agua-hierro considerando la geometría mostrada en la figura IV.4, pero modificando las propiedades del semi-espacio. Para el hierro se considera una velocidad de propagación de las ondas P de 5837 m/s, de las ondas S de 3247 m/s y una densidad de 7874 kg/m<sup>3</sup>. Con lo que respecta al agua se tomo una velocidad de propagación de las ondas P de 1500 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>.

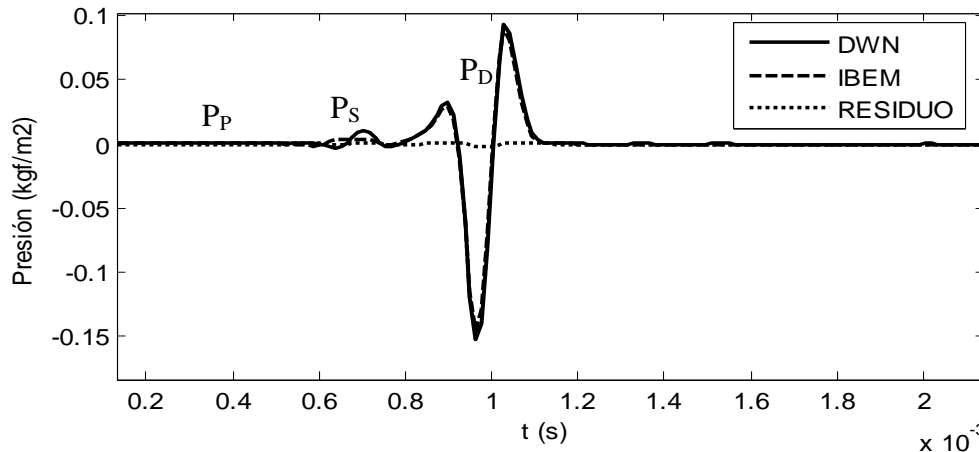


Figura IV.7 Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-hierro.

Los resultados para un receptor se muestran en la figura IV.7, para este caso se observa una mejor aproximación entre el IBEM y el DWN.

En la figura IV.8 se muestra el campo de presiones para 15 receptores, para el semi-espacio agua-hierro, se puede notar la influencia del acero ya que este material tiene velocidades de propagación de ondas P y S mucho mayores que el del agua, por tal motivo se observa que primero arriba la onda P, seguido de la onda S y por último se aprecia la onda incidente  $P_D$ , también se puede ver que, para este material la magnitud de la onda P difractada es pequeña en comparación con la onda S difractada y la onda incidente.

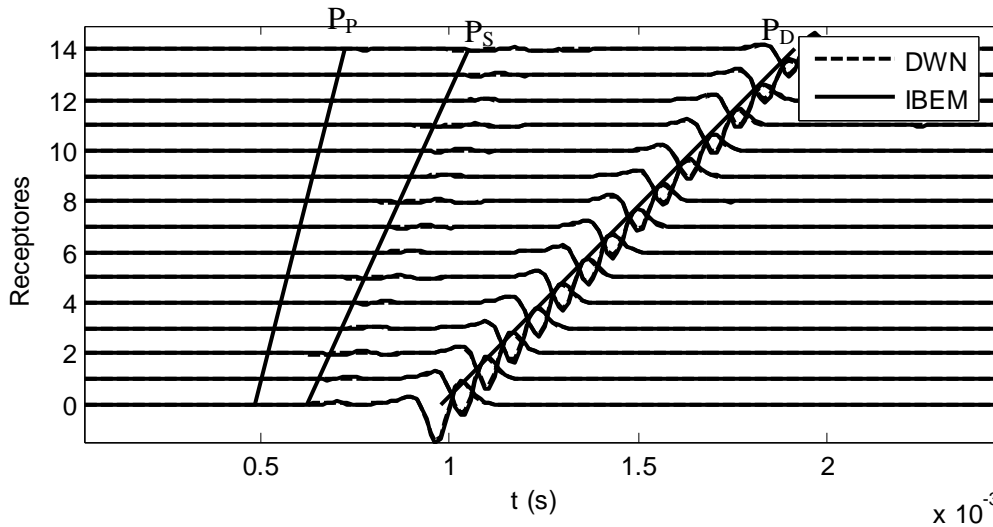


Figura IV.8 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-hierro.

#### IV.1.4 Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-yeso

En este modelo se estudia la propagación de ondas en un semi-espacio agua- yeso considerando la geometría mostrada en la figura IV.4, pero modificando las propiedades del semi-espacio. Para el yeso se considera una velocidad de propagación de las ondas P de 3372 m/s, de las ondas S de 1843 m/s y una densidad de 1908 kg/m<sup>3</sup>. Con lo que respecta al agua se tomo una velocidad de propagación de las ondas P de 1484 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>.

En la figura IV.9 se muestra la señal registrada por el receptor no. 1, situada a 1 m. de distancia de la fuente, en esta figura se puede observar cada una de las ondas que el receptor está registrando, se nota que la onda P difractada es muy pequeña comparado con el resto de la señal, motivo por el cual no se logra apreciar en la gráfica.

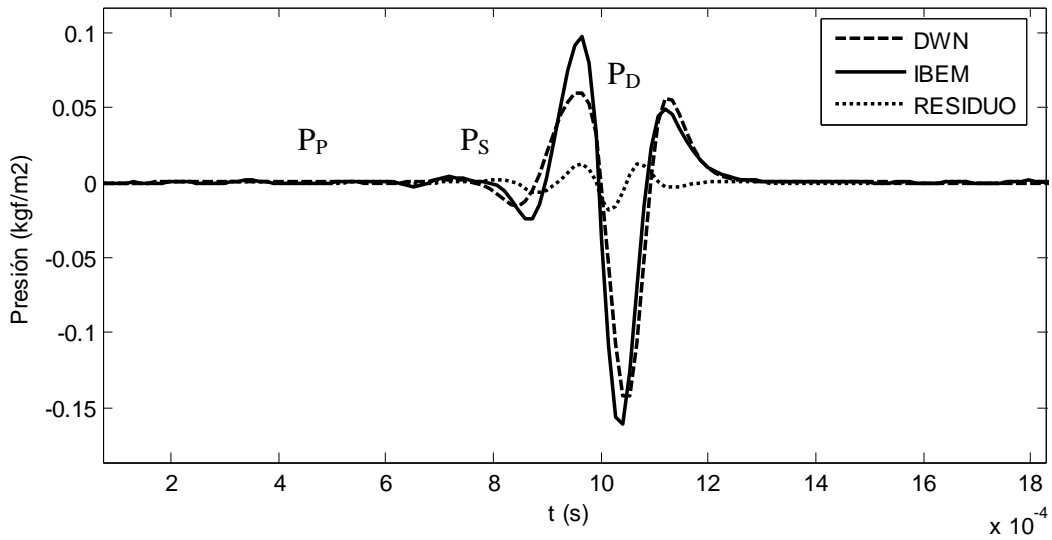


Figura IV.9 Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-yeso.

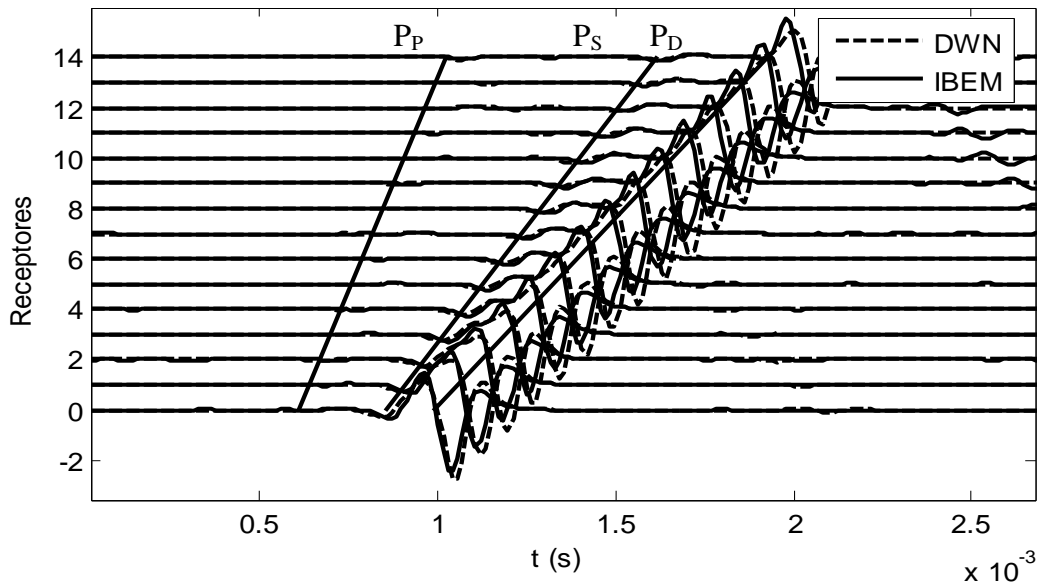


Figura IV.10 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-yeso.

En la figura IV.10 se ilustra la propagación de cada una de las ondas por medio de 15 receptores espaciados a distancias constantes. Las líneas inclinadas representan la velocidad de propagación de cada una de las ondas.

### IV.1.5 Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-granito

El siguiente modelo estudiado consiste en un semi-espacio agua-granito. La geometría, localización de la fuente y ubicación de la frontera corresponden a la figura IV.4. En el granito se consideró una velocidad de propagación de las ondas P de 6100 m/s, de las ondas S de 2977 m/s y una densidad de 2700 kg/m<sup>3</sup>. Con lo que respecta al agua se tomo una velocidad de propagación de las ondas P de 1500 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>.

Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes figuras. En la figura IV.11 se muestra la señal registrada por el primer receptor situada a 1 m. de distancia de la fuente, podemos observar el arribo de cada una de las ondas.

En la figura IV.12 se muestra el campo de onda registrado por 15 receptores, se observa en la grafica que la velocidad de las ondas en el granito son mayores a las del agua, por lo que las ondas P y S que se deben al sólido arriban antes que las ondas incidentes en el agua.

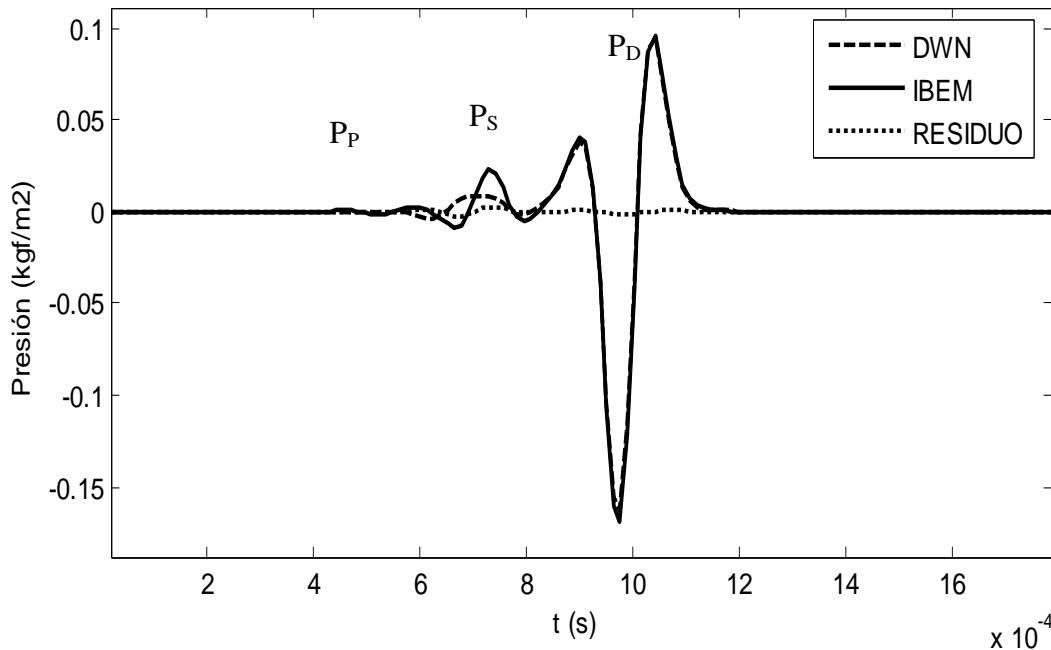


Figura IV.11 Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-granito.

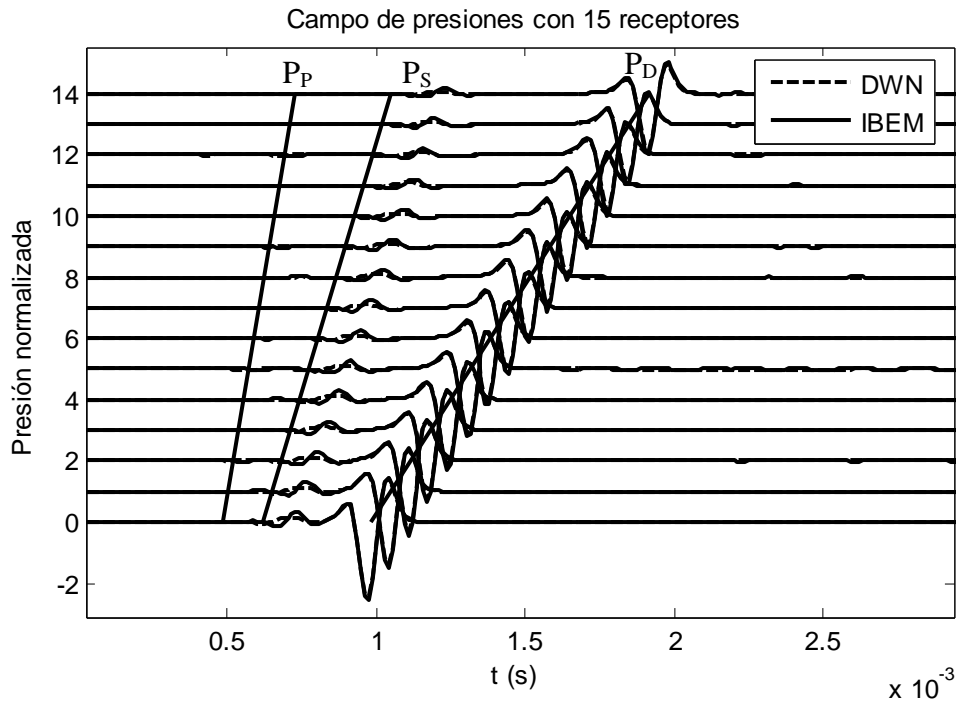


Figura IV.12 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-granito.

#### IV.1.6 Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-piedra caliza

El siguiente modelo consiste en un semi-espacio agua-piedra caliza. La geometría, localización de la fuente y ubicación de la frontera corresponden a la figura IV.4. En la piedra caliza se consideró una velocidad de propagación de las ondas P de 4810 m/s, de las ondas S de 2195 m/s y una densidad de 2500 kg/m<sup>3</sup>. Con lo que respecta al agua se tomó una velocidad de propagación de las ondas P de 1500 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>.

En la figura IV.13 se muestra la señal registrada por el primer receptor situada a 1 m. de distancia de la fuente, se indica el arribo de cada una de las ondas incidentes.

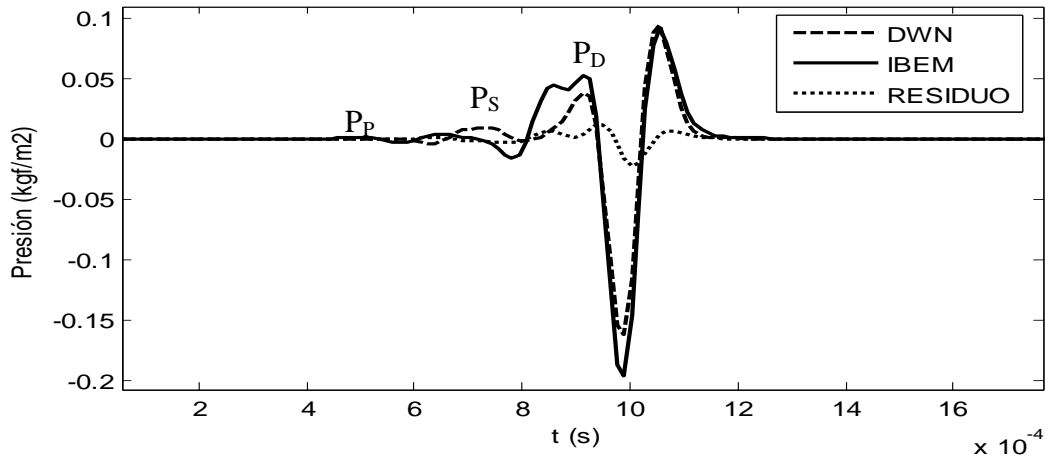


Figura IV.13 Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-piedra caliza.

En la figura IV.14 se muestra el campo de presiones por medio de 15 receptores, se observa la influencia del sólido debido al arribo de las ondas P y S difractadas.

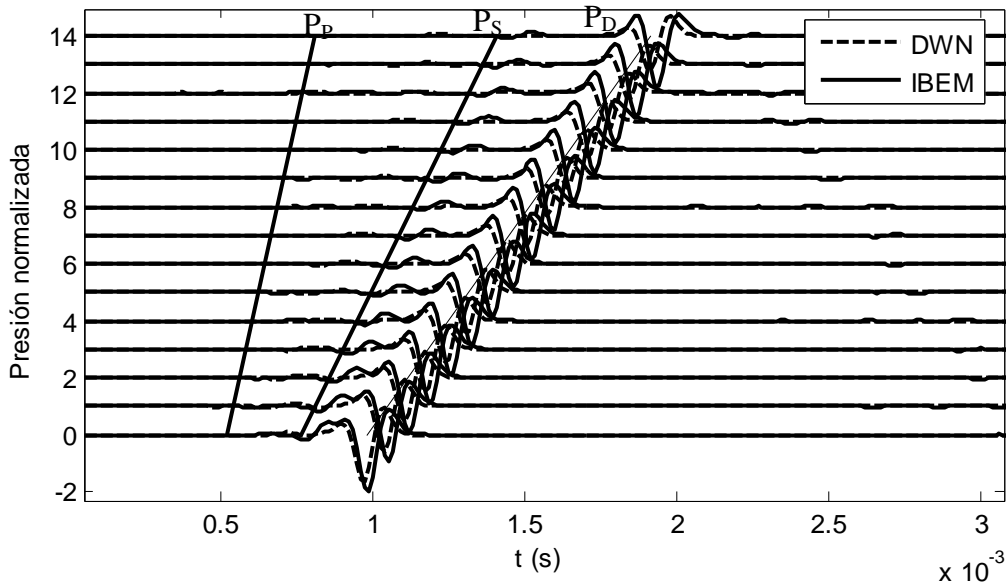


Figura IV.14 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-piedra caliza.

#### IV.1.7 Estudio del campo de ondas en un semi-espacio agua-arena

El siguiente modelo consiste en un semi-espacio agua-arena. La geometría, localización de la fuente y ubicación de la frontera corresponden a la figura IV.4. En la arena se consideró una velocidad de propagación de las ondas P de 3740 m/s, de las ondas S de 1645 m/s y una densidad de 2400 kg/m<sup>3</sup>. Con lo que respecta al agua



se tomo una velocidad de propagación de las ondas P de 1500 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>.

En la figura IV.15 se muestra la señal registrada por el primer receptor situado a 1 m. de distancia de la fuente. En esta figura se logra apreciar con claridad el arribo de la onda P debida a la arena. Se observa que el arribo de la onda P incidente y la onda S provocada por la arena, prácticamente llegan al mismo tiempo, esto se debe a que sus velocidades son muy similares.

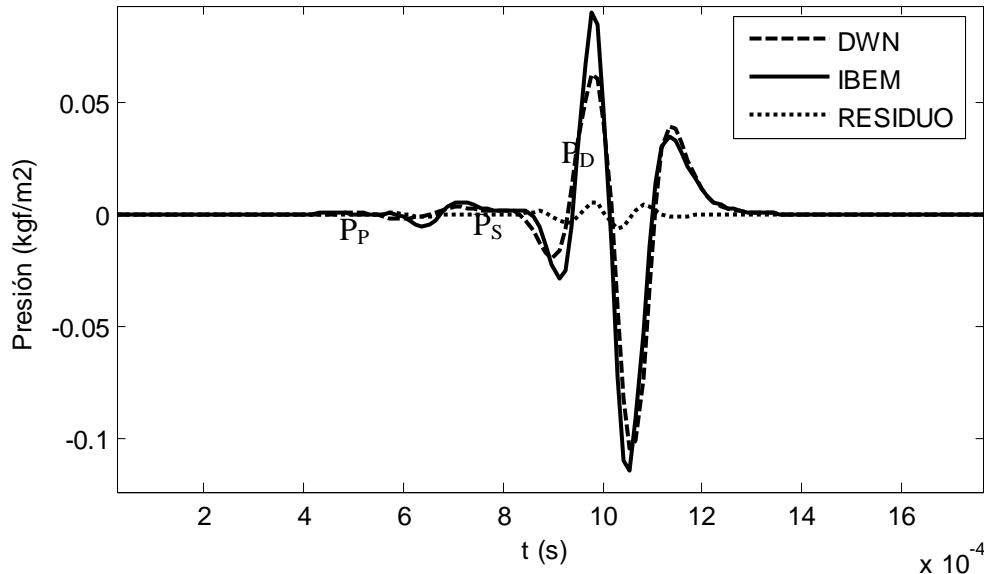


Figura IV.15 Señal registrada por el receptor no. 1, para el semi-espacio agua-arena.

En la figura IV.16 se observa el campo de onda registrado por 15 receptores se observa que la velocidad de propagación de las ondas P en el sólido es mayor a a la de las ondas S en el mismo.

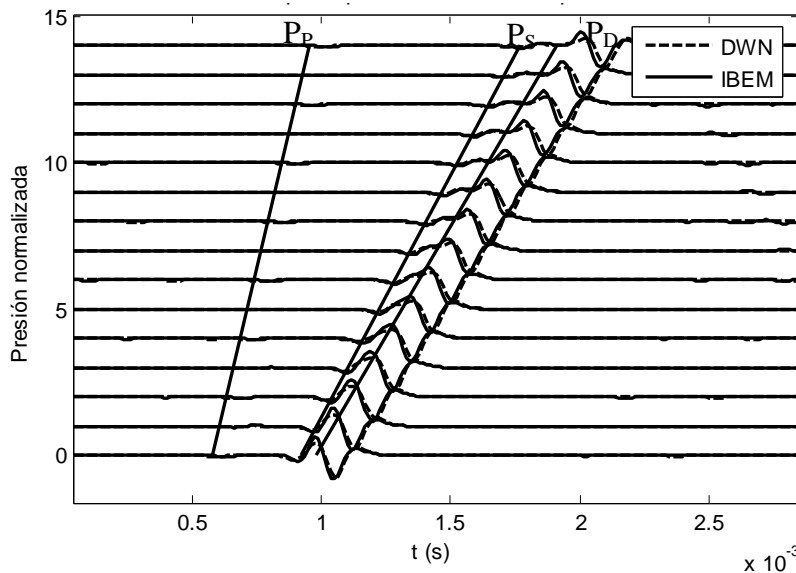


Figura IV.16 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-arena.

**IV.1.8 Simulación de la propagación de ondas en el semi-espacio fluido-sólido**

El siguiente ejemplo muestran una simulación del fenómeno de propagación de ondas en un semi-espacio fluido-sólido utilizando el DWN. En el sólido se consideró una velocidad de propagación de las ondas P de 3000 m/s, de las ondas S de 2000 m/s y una densidad de 2000 kg/m<sup>3</sup>, en el fluido se consideró una velocidad de propagación de las ondas P de 1000 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>. La fuente se localiza a 0.5 m. de la frontera con el sólido.

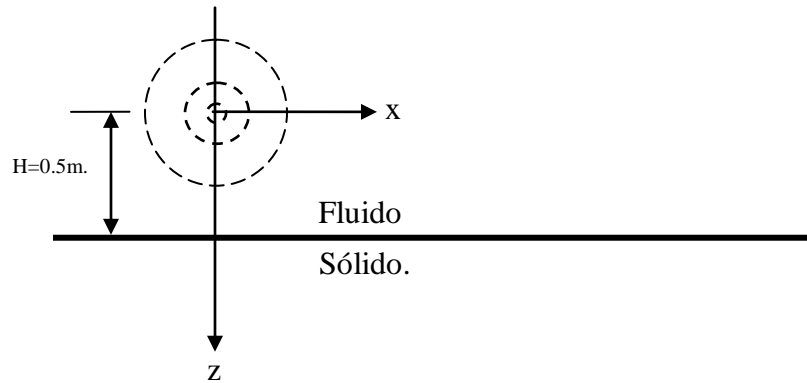


Figura IV.17 Modelo empleado para la simulación de la propagación de ondas en un semi-espacio fluido-sólido.

Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes figuras. En la figura IV.18 se observa la propagación de la onda incidente en el fluido.

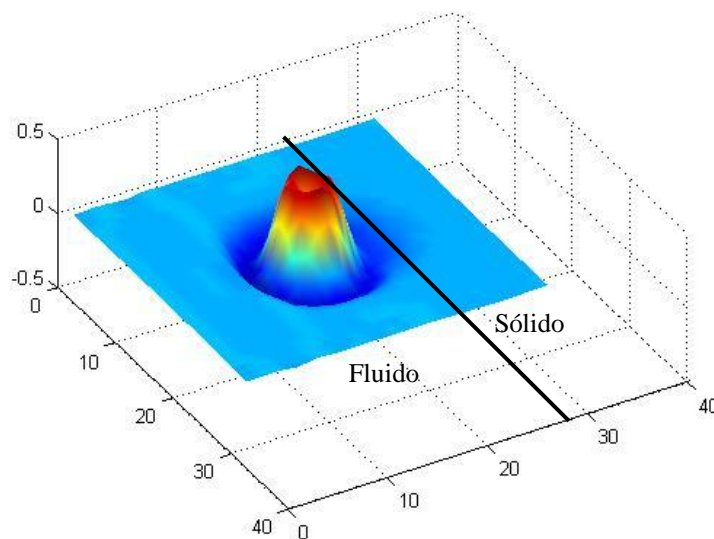


Figura IV.18 Propagación de las ondas P en el fluido.

En la figura IV.19 podemos ver el inicio de la transmisión de la onda incidente al estrato sólido, se nota que hay una disminución de la magnitud de la onda al pasar al estrato sólido.

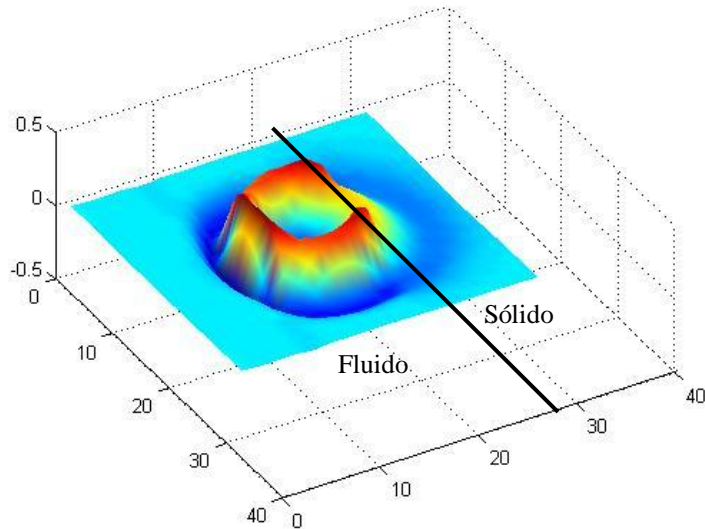


Figura IV.19 Inicio de la transmisión de ondas al estrato sólido.

En la figura IV.20 se observa la propagación de las ondas P en el sólido, también se puede observar que parte de la onda se refleja hacia el fluido llegando inclusive a alcanzar a la onda incidente.

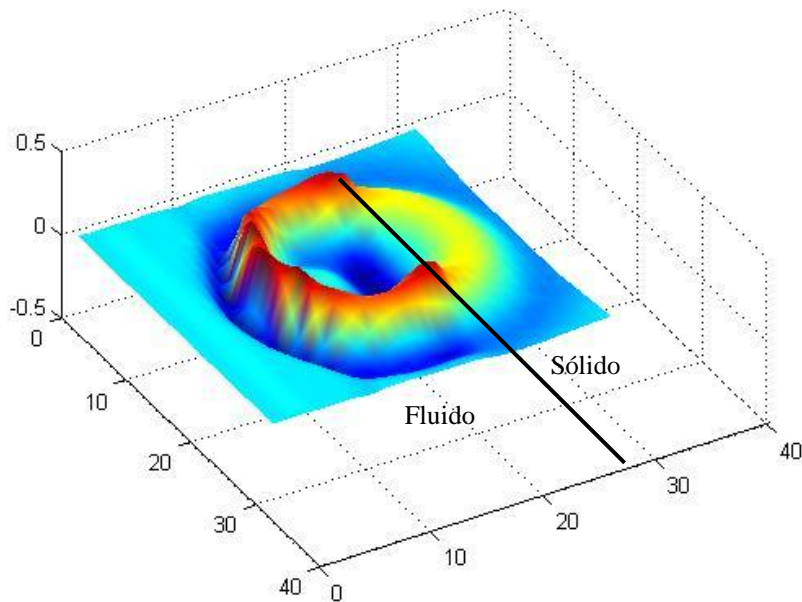


Figura IV.20 Propagación de las ondas P en el sólido.

En la figura IV.21 se observa la irradiación al infinito de las ondas P, así mismo se aprecia que la velocidad de propagación de las ondas P en el sólido es mayor que en el fluido.

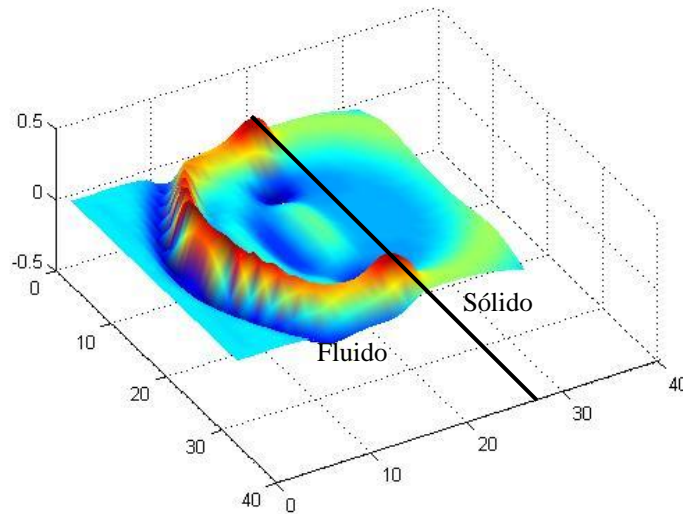


Figura IV.21 La onda P en el sólido satisface la condición de irradiación al infinito.

**IV.2 Caso de estudio 2: estrato sólido-fluido-sólido**

**IV.2.1 Estudio del campo de ondas en un estrato sólido-fluido-sólido con velocidades de propagación de ondas lentas en el sólido**

En este caso se estudia el campo de presiones para un estrato solido-fluido-solido, se considera que el estrato sólido tiene una velocidad de propagación de ondas P de 2443 m/s y de ondas S de 1000 m/s, por lo cual, se considera que es un caso de propagación de ondas lentas, así mismo se asigna una densidad al sólido de 1270 kg/m<sup>3</sup>. Con lo que respecta al fluido se tiene una velocidad de propagación de ondas P de 1500 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>. Como se puede ver en la figura IV.22, el ancho del fluido es de 0.1 m. la fuente se sitúa al centro del espesor del fluido, quedando a 0.05 m. de distancia de la frontera superior e inferior. El primer receptor se encuentran a una distancia de 20H=1.0m. de la fuente y el resto de los receptores se sitúan en una línea recta separadas a una distancia de 0.1 m. sobre el eje x en el fluido.

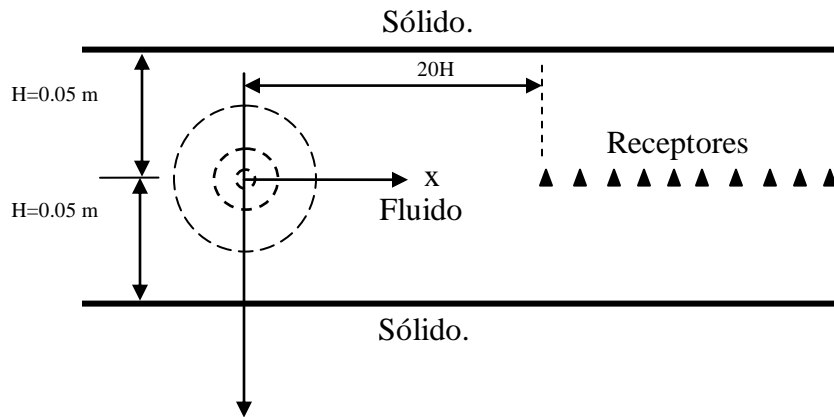


Figura IV.22 Estrato fluido-sólido-fluido para el estudio de propagación de ondas lentas en el sólido.

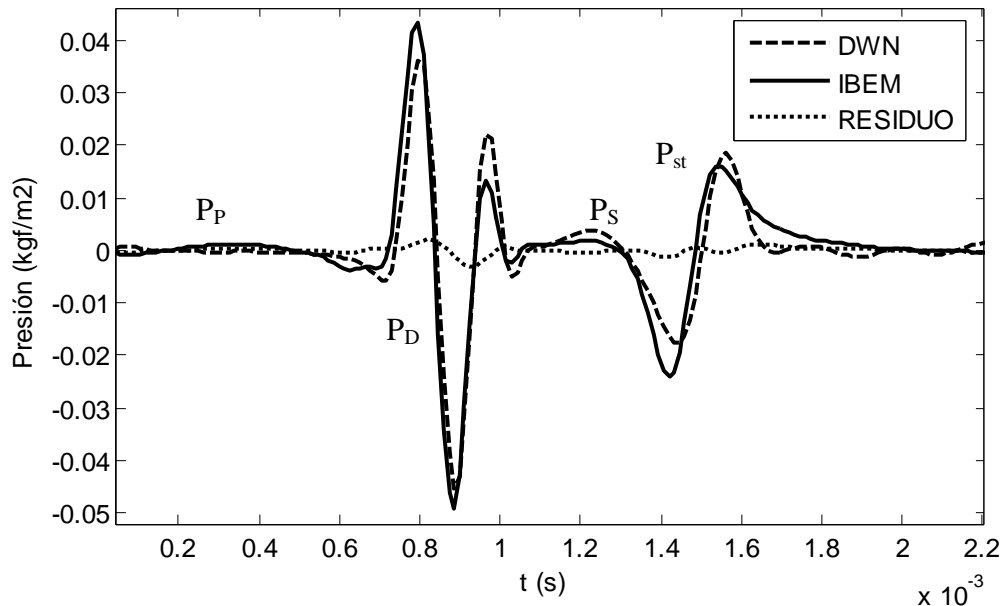


Figura IV.23 Señal registrada por el receptor no. 1, para el estrato fluido-sólido-fluido para el estudio de propagación de ondas lentas en el sólido.

En la figura IV.23 se muestra el registro del primer receptor colocado a 1 m de distancia de la fuente, se observa que el IBEM y el DWN tienen un comportamiento similar. También se muestra el residuo que se genera entre ambos métodos, el cual nos da una idea de la aproximación obtenida.

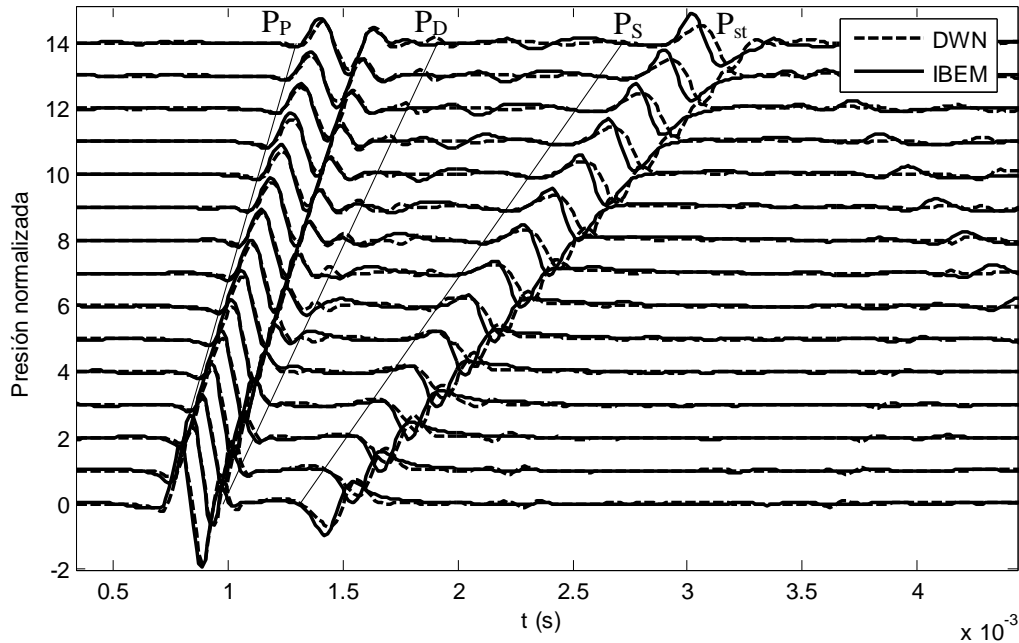


Figura IV.24 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio fluido-sólido con propagación de ondas lentas en el sólido.

En la figura IV.24 se muestra el campo de presiones para 15 receptores, considerando propagación de ondas lentas en el sólido. Se observa que ambos métodos siguen el mismo patrón de comportamiento, en este caso se detectan 4 tipos de ondas: ondas incidentes  $P_D$ , ondas reflejadas  $P_P$ , ondas reflejadas debidas a las ondas S en el sólido  $P_S$ , y las ondas de Stoneley  $P_{st}$ , que se generan por la interacción de los medios en la frontera. Las líneas inclinadas indican la velocidad de propagación de los diferentes tipos de ondas que se pueden apreciar. Se observa que la onda  $P_P$  arriba en primer lugar que el resto de las ondas, esto se debe a que la velocidad de las ondas P en el sólido es mayor a la de las ondas S en el sólido y a las ondas P en el fluido. También se observa que las ondas incidentes  $P_D$  arriban primero comparadas con las ondas  $P_S$ , esto se debe a que las ondas P en el fluido viajan a 1500 m/s y las ondas S en el sólido viajan a 1000 m/s.

### IV.2.2 Estudio del campo de ondas en un estrato hierro-agua-hierro

En este modelo se estudia la propagación de ondas en un estrato hierro-agua-hierro considerando la geometría mostrada en la figura IV.22, pero modificando las propiedades del sólido. Para el hierro se considera una velocidad de propagación de las ondas P de 5837 m/s, de las ondas S de 3247 m/s y una densidad de  $7874 \text{ kg/m}^3$ . Con lo que respecta al agua se tomo una velocidad de propagación de las ondas P de 1500 m/s y una densidad de  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

Los resultados para un receptor se muestran en la figura IV.6, para este caso se observa una mejor aproximación entre el IBEM y el DWN.

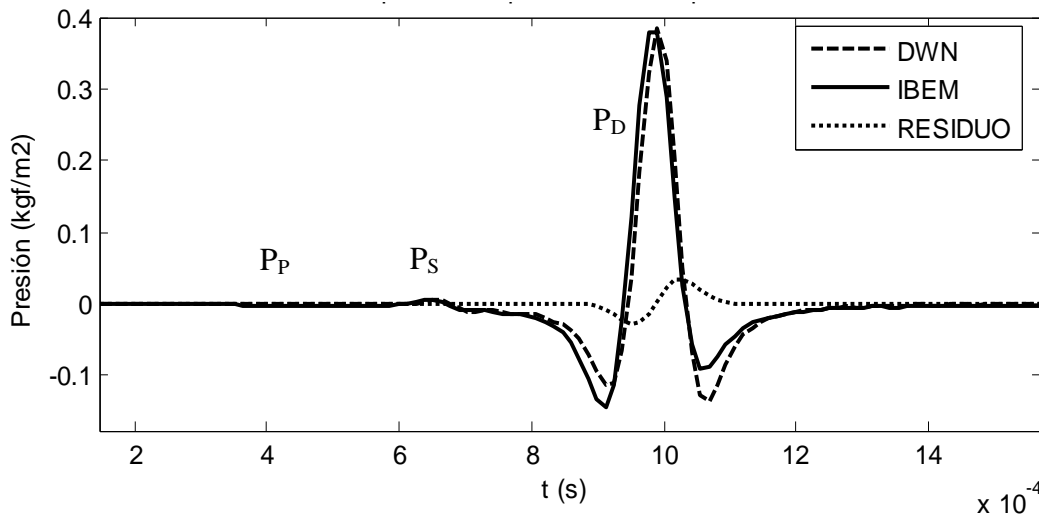


Figura IV.25 Señal registrada por el receptor no. 1, para el estrato hierro-agua-hierro.

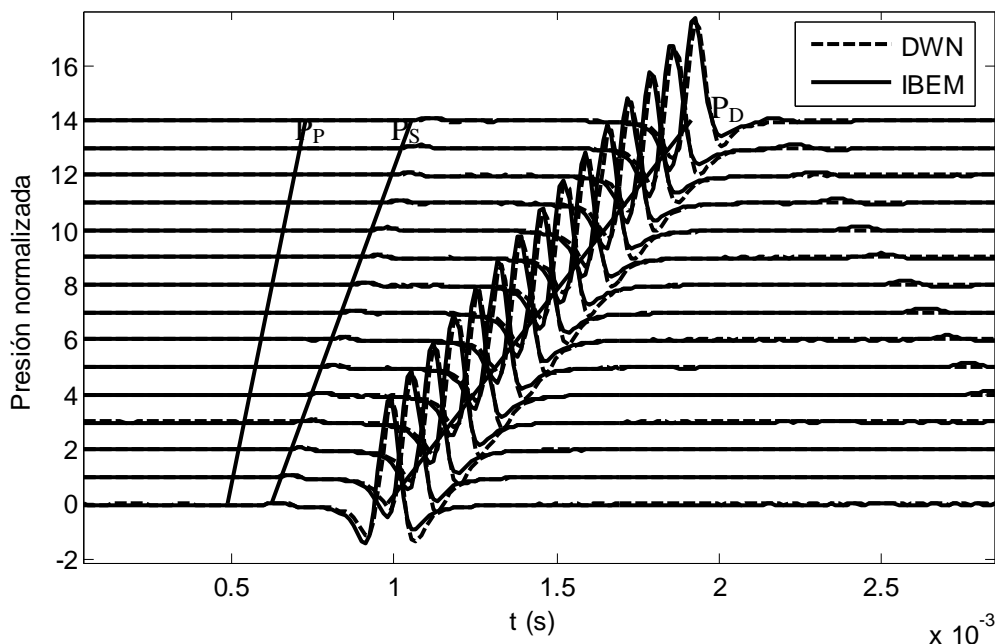


Figura IV.26 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el estrato hierro-agua-hierro.

En la figura IV.8 se muestra el campo de presiones para 15 receptores, para un semi-espacio agua-hierro, se puede notar la influencia del acero ya que este material tiene velocidades de propagación de ondas P y S mucho mayores que el del agua, por tal motivo se observa que primero arriba la onda P, seguido de la onda S y por último se aprecia la onda S, también se puede ver que para este material la magnitud de las ondas P difractada es muy pequeña comparado con la onda S difractada y la onda incidente.

### IV.2.3 Estudio del campo de ondas en un estrato piedra caliza-agua-piedra caliza

El siguiente modelo consiste en un estrato piedra caliza-agua-piedra caliza. La geometría, localización de la fuente y ubicación de la frontera corresponden a la figura IV.22. En la piedra caliza se consideró una velocidad de propagación de las ondas P de 4810 m/s, de las ondas S de 2195 m/s y una densidad de 2500 kg/m<sup>3</sup>. Con lo que respecta al agua se tomó una velocidad de propagación de las ondas P de 1500 m/s y una densidad de 1000 kg/m<sup>3</sup>.

En la figura IV.27 se muestra la señal registrada por el primer receptor situada a 1 m. de distancia de la fuente, se indica el arribo de cada una de las ondas incidentes.

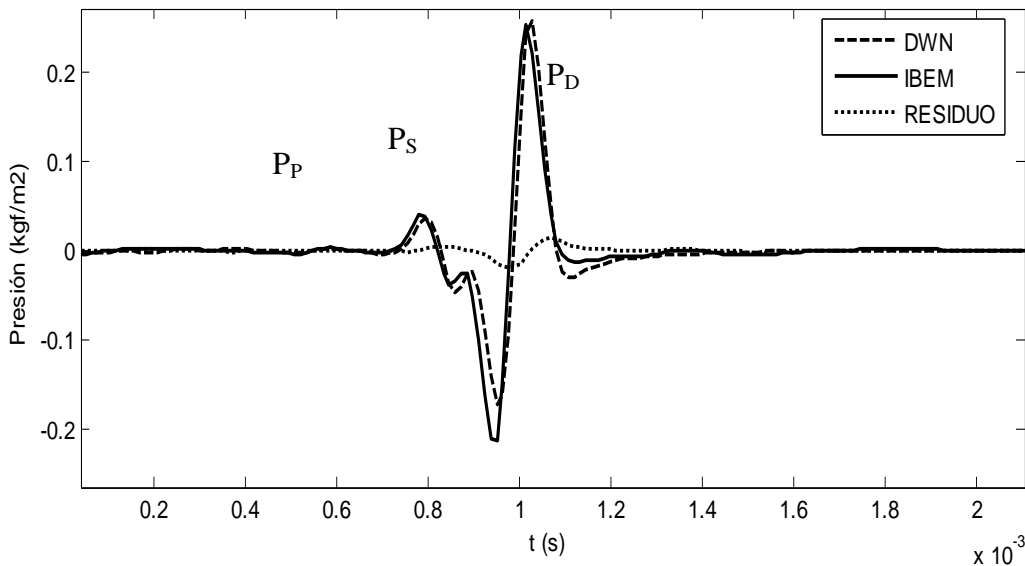


Figura IV.27 Señal registrada por el receptor no. 1, para el estrato piedra caliza-agua-piedra caliza.



En la figura IV.28 se muestra el campo de presiones por medio de 15 receptores, se observa la influencia del sólido debido al arribo de las ondas P y S difractadas.

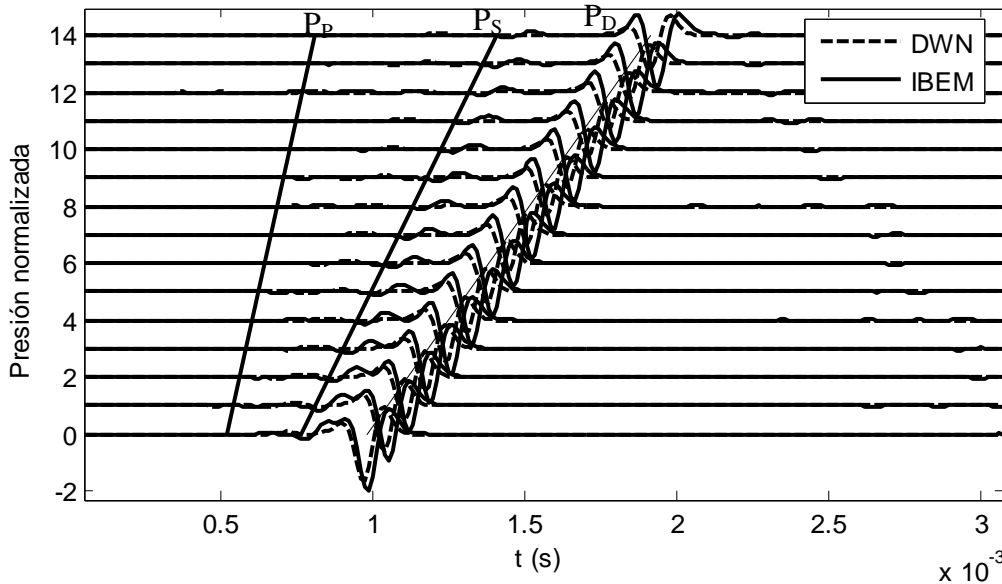


Figura IV.28 Campo de presiones registrado por 15 receptores para el semi-espacio agua-piedra caliza.



# Conclusiones

## Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado una formulación basada en el método indirecto de elementos de frontera, IBEM, para su aplicación al estudio de la propagación de ondas en medios continuos estratificados, particularmente al caso de propagación en estratos que pueden ser sólidos o fluidos. Esta formulación fue implementada en un programa en fortran y los resultados son señales que se registran en cualquier punto que se desea en el espacio.

El método que se utiliza, se basa en la representación integral de ondas difractadas en términos de fuentes de frontera, las cuales como su nombre lo dice se colocan directamente en la frontera de los estratos. Así el campo de ondas difractadas se obtiene a partir de la superposición de las contribuciones de todas las fuentes en la frontera desde donde estas ondas son irradiadas. Este tratamiento puede interpretarse como una implantación numérica del principio de Huygens.

El método consiste esencialmente en la formulación de un sistema lineal de ecuaciones integrales de frontera en términos de fuerzas ficticias aplicadas en las fuentes. Este sistema de ecuaciones se obtiene imponiendo las condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones entre las regiones.

Los campos de desplazamientos y tracciones en cualquier parte del medio se calculan empleando un esquema basado en la integración numérica y analítica de las funciones de Green para desplazamientos y tracciones.

A fin de facilitar la entrada de datos al programa, se utilizó una discretización constante de los elementos en la frontera en todos los casos estudiados.

Con el objeto de validar el método, los resultados obtenidos se compararon con el método del número de onda discreto, presentando resultados aproximados, que dentro de la ingeniería son aceptables, lo cual hace del IBEM una herramienta poderosa para el análisis de propagación de ondas en medios homogéneos estratificados.

Como resultado de la aplicación del método se obtiene el campo de presiones para estratos fluido-sólido y sólido-fluido-sólido, con lo cual se puede caracterizar al medio interpretando las velocidades de propagación de las diferentes ondas registradas por los receptores.

En el modelo estudiado para el semi-espacio fluido-sólido con receptores cercanos a la fuente, se observó que las ondas difractadas se propagan siguiendo una trayectoria hiperbólica y que conforme se alejan de dicha fuente tiende a un comportamiento lineal.

Las gráficas mostradas en los diferentes ejemplos planteados se pueden utilizar como base para la interpretación de resultados experimentales, por medio del método de inversión.

El IBEM ofrece una buena alternativa para la simulación de propagación de ondas y constituye una herramienta que puede emplearse para obtener una aproximación práctica y cuantitativa de la propagación de ondas. El método se encuentra aun en desarrollo y restan algunos puntos importantes que deben resolverse antes de poder aplicarlo para la simulación de casos realistas.

### **Ventajas en la aplicación del método del IBEM**

Entre las ventajas que presenta el IBEM con respecto a otros métodos numéricos podemos mencionar:

- La reducción de una dimensión en la modelación del problema.
- El adecuado tratamiento de problemas externos en los que intervienen regiones con dimensiones infinitas.

Desde el punto de vista de ejecución del método cabe resaltar su simplicidad, ya que la aplicación del mismo requiere conocer un número pequeño de parámetros, como son:

- Amplitud, frecuencia de la onda incidente.
- Las características de los estratos que constituyen el medio, tales como la densidad y las velocidades de propagación de las ondas.

Además desde el punto de vista de la geometría, se pueden modelar desde terrenos compuestos por contornos muy suaves, hasta aquellos más realistas que presentan un alto grado de irregularidad.

### **Aportaciones**

Contar con la formulación basada en el IBEM para el modelado de interfaces fluido-sólido y estratos sólido-fluido-sólido.

Con la implementación del IBEM a estrato sólido-fluido-sólido se puede caracterizar a los sólidos que circundan pozos, infiriendo sus velocidades de propagación para determinar la rigidez circundante asociarlo al tipo de suelo.

En lagos, ríos y océanos se puede utilizar el modelo de fluido-sólido para caracterizar los materiales que se encuentran debajo de las aguas en estudio.

Las gráficas presentadas nos permitirán interpretar resultados experimentales por medio de la técnica de inversión.

## Trabajos a futuro

A medida que se han ido alcanzando los objetivos planteados en este trabajo, han surgido nuevas ideas, que en algunos casos aportan una mejora a los resultados obtenidos y en otros, sirve para añadir una nueva perspectiva al trabajo y poder profundizar en el conocimiento del efecto local. Algunas de estas líneas de trabajo que se plantean para el futuro se concretan en los siguientes puntos:

Optimización del algoritmo de resolución del sistema final de ecuaciones para agilizar la ejecución del método.

Desarrollar la formulación 3D del IBEM para estimar la respuesta donde las simplificaciones a 2D no se pueden realizar.

Desarrollar la formulación del IBEM para simular fronteras curvas que simulen realísticamente la configuración del terreno.

## Recomendaciones

Este trabajo sirve para la evaluación de medios continuos estratificados, consiste en la determinación de las propiedades mecánicas y geometría de los mismos.

La implementación numérica de las ecuaciones es compleja para los dos métodos (IBEM y DWN), ya que cada uno de ellos aproxima ciertas funciones y operaciones sobre las mismas. El programa requiere que los parámetros utilizados se encuentren acotados en ciertos intervalos, si esto no se lleva a cabo los resultados pierden el sentido. Dentro de los parámetros que se consideran importantes se tiene la relación entre la longitud de onda de la señal y las dimensiones de los elementos discretizados, algunos investigadores recomiendan que la longitud de los elementos sea un quinto de longitud de onda de la señal.

**BIBLIOGRAFÍA**

**Abramowitz, M. y Según, I. A. (1964).** *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables.* National Bureau of Standards, Applied mathematics series 55.

**Achenbach, J.D. (1976).** *Wave propagation in elastic solids.* North-Holland Publishing Company, New York, N. Y. 10017.

**Aki, K., Larner, K. (1970).** *Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves.* *J. Geophys. Res.* 75, 933-954.

**Aki, K., Richards, P.G. (1980).** *Quantitative Seismology*, vol 1. Freeman and Co. San Francisco.

**Alexander, H. D. y Daisy, T. (2004).** *Heritage and early history of the Boundary Element Method.* Publicaciones Elsevier. B.C.

**Aliabadi, M. H. (2002).** *The Boundary Element Method.* Volumen 2. John Wiley & Sons, Ltd., Baffins Lane, Chichester, West Sussex. England.

**Bard, P.Y., Bouchon, M. (1980a).** *The seismic response of sediment-filled valleys, Part 1: The case of incident SH waves.* *Bull. Seismol. Soc. Am.* 70, 1263-1286.

**Bard, P.Y., Bouchon, M. (1980b).** *The seismic response of sediment-filled valleys, Part 2: The case of incident P and SV waves.* *Bull. Seismol. Soc. Am.* 70, 1921-1941.

**Bard, P.Y., Bouchon, M. (1985).** *The two-dimensional resonance of sediment-filled valleys.* *Bull. Seismol. Soc. Am.* 75, 519-541.

**Bouchon, M. (1973).** *Effect of topography on surface motion.* *Bull. Seismol. Soc. Am.* 63, 715-732.

**Bouchon, M. (1985).** *A simple complete numerical solution to the problem of diffraction of SH waves by an irregular surface.* *J. Acoust. Soc. Am.* 77, 1-5.

**Bouchon, M. (1993).** *A numerical simulation of the acoustic and elastic wavefields radiated by a source in a fluid-filled borehole embedded in a layered medium.* *Geophysics* 58, 475-481.

**Bouchon, M., Campillo, M., Gaffet, S. (1989).** *A boundary integral equation-discrete wavenumber representation method to study wave propagation in multilayered media having irregular interfaces.* *Geophysics* 54, 1134-1140.

- Bouchon, M., Coutant, O. (1994).** *Calculation of synthetic seismograms in a laterally-varying medium by the boundary element-discrete wavenumber method.* Bull. Seismol. Soc. Am. 84, 1869-1881.
- Bouchon, M., Schmitt, D.P. (1989).** *Full-wave acoustic logging in an irregular borehole.* Geophysics 54, 758-765.
- Campillo, M. (1987a).** *Modeling of SH-wave propagation in an irregularly layered medium Application to seismic profiles near a dome.* Geophys. Prosp. 35, 236-249.
- Campillo, M. (1987b).** *Lg wave propagation in a laterally varying crust and the distribution of the apparent quality factor in central France.* J. Geophys. Res. 92, 12604-12614
- Campillo, M., Feignier, B., Bouchon, M., Béthoux, N. (1993).** *Attenuation of crustal waves across the Alpine range.* J. Geophys. Res. 98, 1987-1996.
- Castellanos, A.R., Avila C. R. y Sánchez-Sesma, F.G. (2004)** *Respuesta sísmica y difracción por grietas con el Método indirecto de Elementos de Frontera.* Ingeniería Sísmica Rev. julio-diciembre, 2004, numero 071. Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, A.C. Distrito federal, México. pp. 91-109
- Dong, W., Bouchon, M., Toksoz, M.N. (1995).** *Borehole seismic-source radiation in layered isotropic and anisotropic media: boundary element modeling.* Geophysics 60, 735-747.
- Dravinski, M. (1982).** *Influence of interface depth upon strong ground motion.* Bull. Seismol. Soc. Am. 72, 597-614.
- Estorff, O., H. Antes (1991).** *On FEM-BEM Coupling for Fluid-Structure Interaction Analysis in the Time Domain,* International Journal for Numerical. Methods in Engineering. 31:66, 1151-1168
- Fu, L.Y., Wu, R.S., Campillo, M. (2002).** *Energy partition and attenuation of regional phases by random free surface.* Bull. Seismol. Soc. Am. 92, 1992-2007.
- Fung, Y. C. (1977).** *A first course in continuum mechanics.* Second Edition, Prentice Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- Gaffet, S., Bouchon, M. (1989).** *Effects of two-dimensional topographies using the discrete wavenumber-boundary integral equation method in P-SV cases.* J. Acoust. Soc. Am. 85, 2277-2283.
- Janod, F., Countant, O. (2000).** *Seismic response of three-dimensional topographies using a time-domain boundary element method.* Geophys. J. Int. 142, 603-614.



**Kawase, H. (1988).** *Time-domain response of a semicircular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method.* Bull. Seismol. Soc. Am. 78, 1415-1437.

**Luzón, F., Sánchez-Sesma, F.J., Rodríguez-Zúñiga, J.L., Posadas, A.M., García, J.M., Martín, J., Romacho, M.D., Navarro, M. (1997).** *Diffraction of P, S and Rayleigh waves by three-dimensional topographics.* Geophys. J. Int. 129, 571-578.

**Ortiz-Alemán, C., F.J. Sánchez-Sesma, J.L. Rodríguez-Zúñiga y F. Luzón (1998).** *Computing topographical 3D site effects using a Fast IBEM/conjúgate gradient approach,* Bull. Seism. Soc. Am. 88, 393-399.

**Paul, A., Campillo, M. (1988).** *Diffraction and conversion of elastic waves at a corrugated interface.* Geophys. 53, 1415-1424.

**Sánchez-Sesma, F.J. (1978).** *Ground motion amplification due to canyons of arbitrary shape. in: Proceedings of the 2<sup>nd</sup>. International Conference on Microzonation.* San Francisco. pp. 729-738.

**Sánchez-Sesma, F.J. (1983).** *Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities.* Bull. Seismol. Soc. Am. 73, 1621-1636.

**Sánchez-Sesma, F.J., Esquivel, J. (1979).** *Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves.* Bull. Seismol. Soc. Am. 69, 1107-1120.

**Sánchez-Sesma, F.J., Luzón. (1995).** *Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P,SV and Rayleigh waves.* Seismological Society of America, Boletín, Vol 85, No 1, pp. 269-284.

**Sánchez-Sesma, F.J., Herrera, I., Avilés, J. (1982).** *A boundary method for elastic wave diffraction: Application to scattering of SH waves by surface irregularities.* Bull, Seismol. Soc. Am. 72, 473-490.

**Sánchez-Sesma, F.J., Campillo, M. (1991).** *Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation,* Bull. Seism. Soc. Am. 81, 2234-2253.

**Sánchez-Sesma, F.J., Rosenblueth, E. (1979).** *Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves.* Earthquake Engrg. Struct. Dyn, 7,441-450.

**Sills, L.B. (1978).** *Scattering of horizontally-polarized waves by surface irregularities.* Geophys, J. R. Astron. Soc. 54, 319-348.

**Tail. Chow (2003).** *Mathematical methods for physicists: a concise introduction*. first edition, Cambridge university press, New York, NY 10011-4211, USA.

**Timosshenko, S. (1963).** *Strength of materials, Part I Elementary theory and problems*. 3th edition. D. Van Nostrand Company Inc, New York.

**Wong, H.L., Jennings, P.C. (1975).** *Effects of canyon topography on strong ground motion*. Bull. Seismol. Soc. Am. 65, 1239-1257.

**Yokoi, T., Sánchez-Sesma, F.J. (1998).** *A hybrid calculation technique of the Indirect Boundary Element Method and the analytical solutions for three-dimensional problems of topography*. Geophys, J. Int. 133, 121-139.

# Apéndice A

## Propiedades de las ondas mecánicas

En este apéndice se describen las propiedades más importantes de las ondas mecánicas como son la reflexión y la refracción.

# APÉNDICE A

## Propiedades de las ondas mecánicas

### A.1 Reflexión

La reflexión de una onda es el rebote que experimenta cuando llega a un obstáculo grande, como una pared. Aunque el obstáculo absorba parte de la energía recibida (incluso vibrando si entra en resonancia) se produce también reflexión en la que se transmite de vuelta parte de la energía a las partículas del medio incidente.

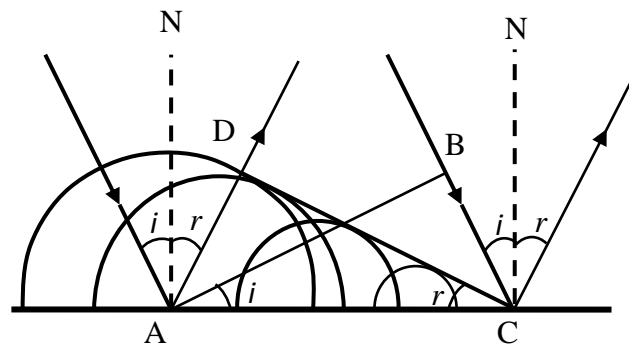


Figura A.1 Reflexión de ondas mecánicas.

En la figura A.1 se observa un frente de ondas plano llegando a una superficie horizontal con un cierto ángulo  $i$  de incidencia (se mide con respecto a la dirección normal,  $N$ ) De acuerdo con el principio de Huygens, cuando el frente de ondas empieza a "tocar" la superficie, el punto  $A$  se convierte en un nuevo foco que emite ondas secundarias y según transcurre el tiempo y el frente  $AB$  va incidiendo, repiten este comportamiento todos los puntos de la superficie comprendidos entre  $A$  y  $C$ . El frente de ondas reflejado,  $DC$ , es el envolvente de las ondas secundarias que se han ido emitiendo durante un tiempo igual al periodo desde el tramo  $AC$  de la pared. Como la onda no cambia de medio, la velocidad de propagación de la onda incidente es igual a la de la onda reflejada. Además, el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , que la onda secundaria emitida por  $B$  emplea en llegar a  $C$  es igual al empleado por la primera onda secundaria reflejada emitida por  $A$  en llegar a  $D$ . por tanto  $AD=BC$ .

En los triángulos  $ABC$  y  $ADC$ , tenemos:

$$\hat{\text{sen}} i = \frac{BC}{AC}$$

$$\hat{\text{sen}} r = \frac{AD}{AC}$$

$$\text{como } BC = AD \rightarrow \hat{\text{sen}} i = \hat{\text{sen}} r \rightarrow \hat{i} = \hat{r}$$

Esta expresión es la primera ley de la reflexión. La segunda expresa que el rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en un mismo plano.

## A.2 Refracción

La refracción de una onda consiste en el cambio de dirección que experimenta cuando pasa de un medio a otro distinto. Este cambio de dirección se produce como consecuencia de la diferente velocidad de propagación que tiene la onda en ambos medios.

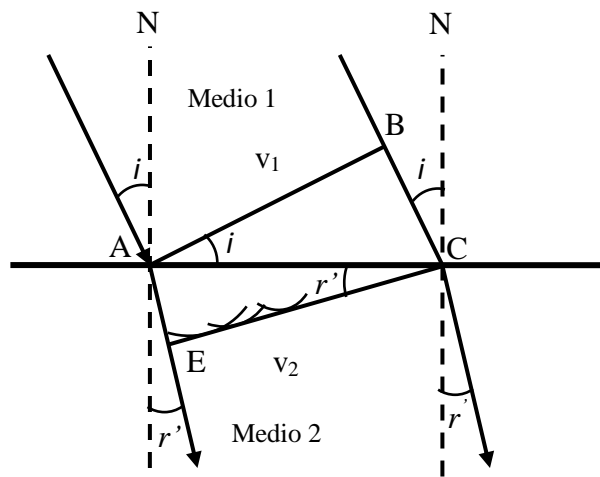


Figura A.2 Refracción de ondas mecánicas.

En la figura A.2 se representa la refracción de una onda plana desde un medio 1 a otro medio 2, suponiendo que la velocidad de propagación es menor en el segundo medio que en el primero. A medida que el frente de ondas AB va incidiendo en la superficie de separación, los puntos AC de esa superficie se convierten en focos secundarios y transmiten la vibración hacia el segundo medio. Debido a que la velocidad en el segundo medio es menor, la envolvente de las ondas secundarias transmitidas conforma un frente de ondas EC, en el que el punto E está más próximo a la superficie de separación que el B. En consecuencia, al pasar al segundo medio los rayos se desvían acercándose a la dirección normal N.

Para obtener una ley cuantitativa sobre este proceso, tenemos en cuenta que en la figura A.2, el intervalo de tiempo entre B y C es el mismo que entre A y E. Por lo tanto:

$$BC = v_1 \Delta t$$

$$AE = v_2 \Delta t$$

observando los triángulos ABC y AEC, podemos escribir:

$$\widehat{\text{sen } i} = \frac{BC}{AC} \quad \widehat{\text{sen } r'} = \frac{AE}{AC} \quad \rightarrow \quad \frac{\widehat{\text{sen } i}}{\widehat{\text{sen } r'}} = \frac{BC}{AE} = \frac{v_1 \Delta t}{v_2 \Delta t} \quad \rightarrow \quad \frac{\widehat{\text{sen } i}}{\widehat{\text{sen } r'}} = \frac{v_1}{v_2}$$

La expresión obtenida se comprueba experimentalmente en los fenómenos de refracción. Cuando la velocidad de propagación de la onda sea mayor en el segundo medio que en el primero, el ángulo de refracción también será mayor que el de incidencia, con lo que en ese caso los rayos refractados se alejan de la normal en lugar de acercarse, En este caso, el ángulo máximo de refracción posible es  $90^\circ$ ,

para el cual tenemos una incidencia

$$\widehat{i}_{\text{limite}} = \arcsen \frac{v_1}{v_2}$$

Para un ángulo de incidencia igual o superior a este ángulo límite, no se puede producir la refracción y toda la energía de la onda incidente se invierte en el proceso de reflexión. Se dice que se produce una reflexión total.

En el caso de las ondas luminosas es habitual expresar esta relación en función del índice de refracción,  $n$ , que indica el número de veces que la velocidad de la luz es mayor en el vacío que en ese, es decir, por lo que se obtiene como

$$n = \frac{c}{v}$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $v$  la velocidad de la luz en el medio.

$$v_1 = \frac{c}{n_1}; \quad v_2 = \frac{c}{n_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\widehat{\text{sen } i}}{\widehat{\text{sen } r'}} = \frac{v_1}{v_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\widehat{\text{sen } i}}{\widehat{\text{sen } r'}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Esta última forma de expresar la ley de la refracción se conoce como ley de Snell

# Apéndice B

## Fenómeno de atenuación

En este apéndice se explica brevemente el fenómeno de atenuación que caracteriza a los materiales el cual consiste en que las ondas se disipen conforme transcurra el tiempo.

# APÉNDICE B

## Fenómeno de atenuación

En los materiales reales existen procesos de fricción interna que disipan parte de la energía ligada al movimiento (Achenbach, 1976). Para tomar en cuenta este fenómeno, se modela el comportamiento visco-elástico del medio introduciendo un término correctivo en los parámetros elásticos. El modelo más sencillo para modelar un sistema dinámico es el cuerpo de Hooke que consiste en una masa sujeta a un resorte. Si a este sistema le agregamos un elemento amortiguante, tenemos lo que se conoce como cuerpo de Kelvin. Este modelo es el más común en el análisis de la respuesta sísmica en medios; comúnmente se usan valores complejos de las velocidades de propagación

$$\alpha^* = \alpha \left( 1 + \frac{i}{2Q_p} \right)$$

$$\beta^* = \beta \left( 1 + \frac{i}{2Q_s} \right)$$
(B.1)

donde  $Q_p$  y  $Q_s$  son los factores de calidad para las ondas P y S respectivamente. Este parámetro de  $Q$ , se ha determinado mediante trabajos experimentales como constante en un amplio rango de frecuencias.

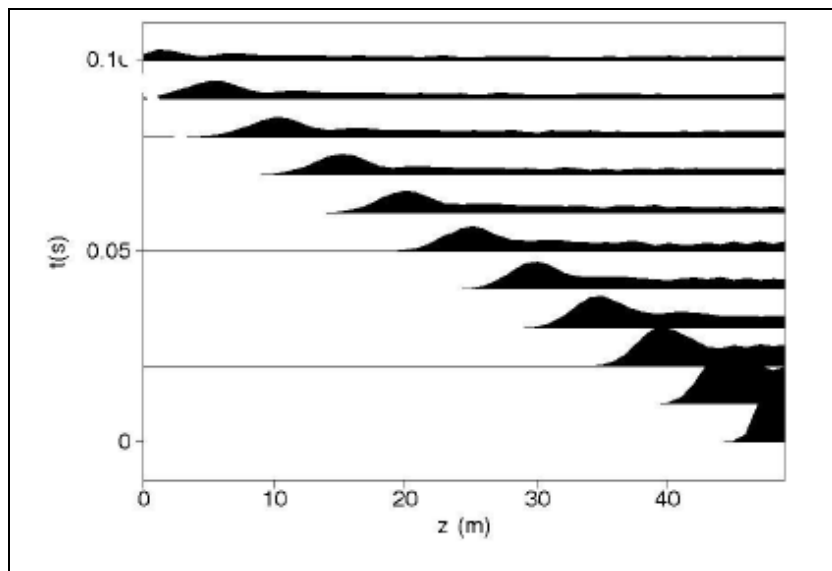


Figura B.1 Fenómeno de atenuación



# Apéndice C

## Análisis de Fourier

En este apéndice se explica brevemente la teoría respecto a la transformada de Fourier, la transformada discreta de Fourier, así como la transformada rápida de Fourier.

# APÉNDICE C

## Análisis de Fourier

En sismología se utilizan varias técnicas para estudiar el campo de desplazamientos como una función de la posición y del tiempo, asociadas a las ondas sísmicas en la tierra así como para darnos una idea de la naturaleza de las fuentes sísmicas en ella.

Aunque algunas técnicas dependen de aspectos específicos de las ondas sísmicas, otras se basan en las propiedades generales de las funciones del espacio y el tiempo.

El análisis de Fourier permite descomponer la señal, originalmente en el dominio del tiempo, en una serie de ondas armónicas, considerando cada onda armónica por separado y luego recombinarlas. Esta metodología se usa para analizar los casos donde los efectos de la tierra o de un sismograma pueden ser explicados al filtrar los datos. Este análisis se utiliza también para filtrar una señal cuando la parte que nos interesa, en el dominio del tiempo o el espacio, se traslapa con otra parte que no interesa.

### Transformada de Fourier

La transformada de Fourier (Abramowitz y Stegun, 1964) de una señal temporal permite expresar a la señal como una superposición continua de señales armónicas de frecuencias variables con amplitud dependiente de cada frecuencia. Matemáticamente se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{C.1})$$

donde  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de la función  $f(t)$  y la transformada inversa se define como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{C.2})$$

Para comprender mejor la importancia de la transformada de Fourier al analizar las ondas conviene examinar los argumentos de ambas funciones,  $F(\omega)$  y  $f(t)$ .

La ecuación de onda plana admite soluciones de la forma  $f(t - x/c)$ , si aplicamos este corrimiento en el tiempo a la definición de la transformada inversa de Fourier se tiene

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} d\omega \quad (\text{C.3})$$

Como  $\exp(i\omega[t-x/c])$  es igual a  $\exp(-i\omega x/c)\exp(i\omega t)$  se suele llamar al primer término propagador o función de transferencia. Si además se considera la velocidad compleja este término puede tener un factor de atenuación. La función de transferencia es un ente matemático que propaga la solución a través del medio. La función  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de la señal que perturba el medio.

Generalmente, la función de transferencia se ve afectada por factores que contienen información sobre las amplitudes que sufre la onda cuando viaja en el medio. La función de transferencia es un operador que permite conocer la solución en la posición de interés. Suele representarse comparando su módulo contra la frecuencia.

Si bien no existe un método de solución universal para resolver el problema de propagación de ondas planas en medios elásticos, si existe una metodología que seguir para encontrar el campo de desplazamientos o esfuerzos en el medio a partir de soluciones en el dominio de la frecuencia. Una vez que se tiene la función de transferencia, ésta debe convolucionarse con la excitación (representada en el dominio de la frecuencia). La convolución de funciones es un concepto matemático que se define como:

$$h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (C.4)$$

Al aplicarse este teorema a la definición de la transformada de Fourier, se encuentra que si  $F(\omega)$  y  $H(\omega)$  son las transformadas de Fourier de  $f(t)$  y  $h(t)$  respectivamente, entonces la convolución de ambas funciones tiene como transformada de Fourier al producto  $F(\omega)H(\omega)$ , es decir, la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo se transforma en una multiplicación (en números complejos) punto a punto en el dominio de la frecuencia.

Una vez hecha la convolución entre la función de transferencia y la señal de excitación, basta con aplicar a dicho producto la transformada inversa de Fourier, la función que se obtenga será la respuesta del medio en el punto de estudio, a este resultado se le conoce como *sismograma sintético* y representa la respuesta del medio en el dominio del tiempo.

### Transformada discreta de Fourier

Debido a que en la práctica los cálculos numéricos se hacen a través de programas que se escriben, es necesario discretizar las expresiones de la transformada de Fourier y de la transformada inversa. Así, definimos respectivamente a la transformada discreta de Fourier como

$$F(\omega_j) = F_j = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \exp(-i\omega_j n\Delta t) \quad (C.5)$$

donde  $\Delta t$  es la tasa de muestreo y  $N$  es el número de puntos que tiene la señal de interés. La transformada inversa discreta de Fourier se define como

$$f(t_n) = f(n\Delta t) = f_n = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \exp(i\omega_j n\Delta t) \quad (\text{C.6})$$

La representación gráfica de la transformada de Fourier suele hacerse como el módulo de cada uno de los valores de la función  $F(\omega)$  en función de la frecuencia, es decir,  $|F(\omega)|$  vs  $\omega$ , a dicha gráfica se le llama espectro de Fourier e indica la manera en que la energía varía respecto a la frecuencia.

#### Transformada Rápida de Fourier

La Transformada Rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) es un algoritmo desarrollado en 1965 por Cooley y Tukey. Para su uso, es necesario que el número de puntos de nuestra señal sea potencia de 2, es decir  $N = 2^m$ , donde  $m$  es entero.

La ventaja de la FFT es el de reducir el tiempo de cómputo de manera radical en comparación a usar la transformada discreta.

# Apéndice D

## Principio de Huygens

En este apéndice se explica brevemente el principio de Huygens que nos facilita la formulación integral al considerar que la frontera se puede simular con un número discreto de fuentes que irradian la energía cuando las ondas inciden sobre ésta.

# APÉNDICE D

## Principio de Huygens

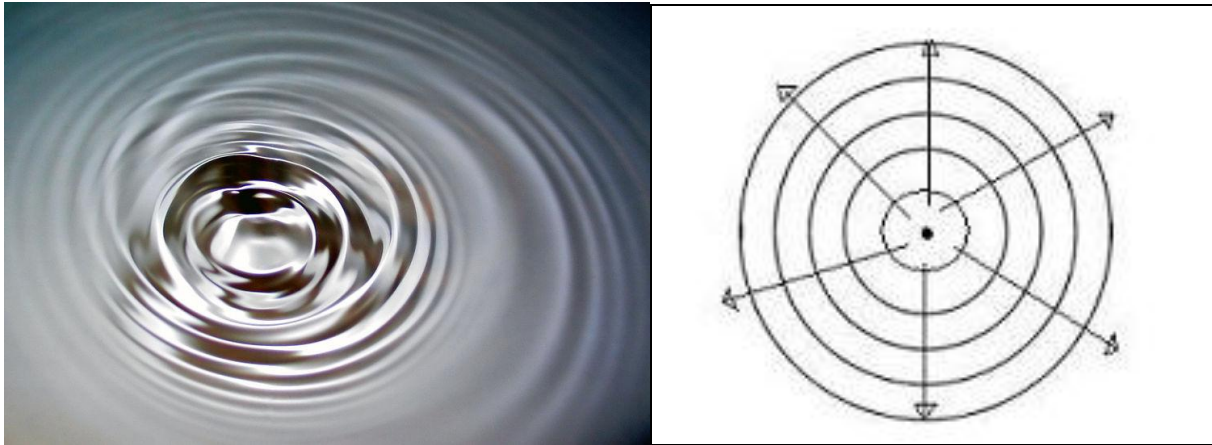


Figura D.1 Ondas producidas en un lago

En la figura D.1 a la izquierda se observan ondas producidas en un lago. La vibración originada en un punto se transmite por la superficie en todas las direcciones, haciendo que las partículas situadas en circunferencias concéntricas alrededor del foco vibren acompasadamente. El segundo dibujo es una representación abstracta del proceso en la que se señalan direcciones de propagación (rayos) y se dibujan circunferencias separadas entre sí por una distancia igual a la longitud de onda,  $\lambda$  (frentes de onda).

En la segunda mitad del siglo XVII el científico holandés Cristian Huygens elaboró un método geométrico para explicar la propagación de las ondas utilizando el concepto de que cada punto del medio alcanzado por la onda se comporta como un nuevo foco emisor o foco secundario.

Huygens planteó que cuando la energía del movimiento ondulatorio alcanza (al mismo tiempo) los puntos de un frente de ondas, cada uno de estos puntos se pone a vibrar generando ondas secundarias. La infinidad de estas ondas secundarias no se percibe y sí se observa en cambio su envolvente.

Cuando ha transcurrido un tiempo igual al periodo los movimientos ondulatorios generados en los focos secundarios se han transmitido en el sentido de propagación de la onda hasta una distancia igual a una longitud de onda. En ese instante, la línea tangente a los frentes de onda secundarios representa al siguiente frente de ondas y así sucesivamente.

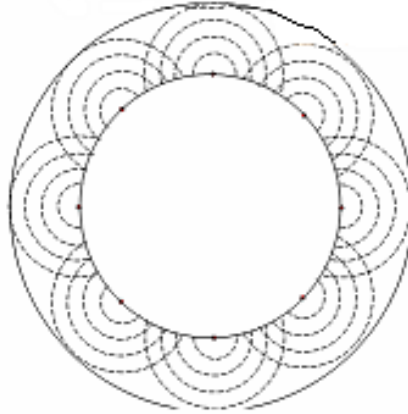


Figura D.2 Método geométrico para explicar la propagación de las ondas propuesto por Cristian Huygens.

El principio de Huygens es muy útil interpretar bastantes propiedades del movimiento ondulatorio. En los razonamientos que lo utilizan es bastante habitual considerar que los rayos son paralelos y los frentes de onda planos.

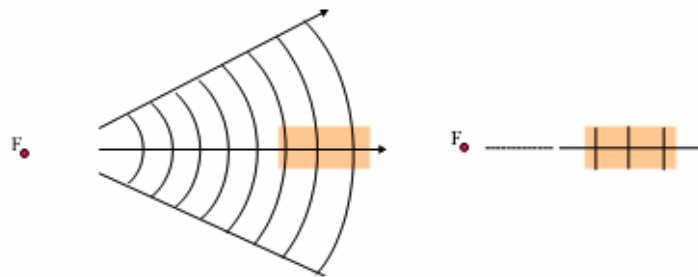


Figura D.3 Rayos paralelos y frentes de onda planos a gran distancia de la fuente.

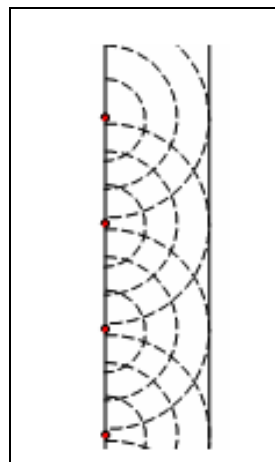


Figura D.4 Frentes de onda planos según el principio de Huygens

Aunque la onda se origine como una onda circular o esférica, esta simplificación es adecuada si se analiza su comportamiento a mucha distancia del foco. Tal como indica en la figura D.3, lejos del foco la curvatura de los frentes de onda se puede suponer despreciable cuando se consideran porciones pequeñas de ellos. Entonces procede aplicar el principio de Huygens a frentes de onda planos del modo de modo como se indica en la figura D.4.



# Apéndice E

Funciones de Bessel

# APÉNDICE D

## II.4.4 Función de Bessel

En matemáticas, las funciones de Bessel, primero definidas por el matemático Daniel Bernoulli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas  $y(x)$  de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 + \alpha^2)y = 0 \quad (\text{E.1})$$

donde  $\alpha$  es un número real o complejo. El caso más común es cuando  $\alpha$  es un entero  $n$ , aunque la solución para  $\alpha$  no entero es similar. El número  $\alpha$  se denomina orden de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación.

La Ecuación de Bessel se utiliza cuando se buscan soluciones a la ecuación de Laplace o a la ecuación de Helmholtz por el método de separación de variables en coordenadas cilíndricas o esféricas. Por ello, las funciones de Bessel son especialmente importantes en muchos problemas de propagación de ondas, potenciales estáticos y cualquier otro problema descrito por las ecuaciones de Helmholtz o Laplace en simetrías cilíndricas o esféricas. Cuando se resuelven sistemas en coordenadas cilíndricas, se obtienen funciones de Bessel de orden entero ( $\alpha = n$ ) y en problemas resueltos en coordenadas esféricas, se obtienen funciones de Bessel de orden semi-entero ( $\alpha = n + 1/2$ ).

### Funciones de Bessel ordinarias

Las funciones de Bessel ordinarias de orden  $\alpha$ , son soluciones de la ecuación de Bessel. Existen dos formas simples de expresar la solución general de la ecuación diferencial de Bessel con parámetro  $\alpha$ , que están asociadas a las funciones de Bessel ordinarias de primera y de segunda especie.

### Funciones de Bessel de primera especie: $J_\alpha$

Las funciones de Bessel de primera especie y orden  $\alpha$  son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ( $x=0$ ) para enteros no negativos  $\alpha$  y divergen en el límite para  $\alpha$  negativo no entero. Para las soluciones de orden entero es posible definir la función  $J_\alpha(x)$  por su expansión en serie de Taylor en torno a  $x=0$ :

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha} \quad (\text{E.2})$$

$$J_{\alpha}(x) = \frac{x^{\alpha}}{2^{\alpha} \Gamma(\alpha+1)} \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2\alpha+2)} + \frac{x^4}{2(4)(2\alpha+2)(2\alpha+4)} \right] \quad (\text{E.3})$$

donde  $\Gamma(z)$  es la función Gamma de Euler.

Estas funciones cumplen que:

- Si  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , entonces  $J_{\alpha}(x)$  y  $J_{-\alpha}(x)$  son linealmente independientes, y por tanto proporcionan una solución general de la ecuación de Bessel.
- Si  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , entonces  $J_{-\alpha}(x)$  no está definida en  $x=0$ .
- Si  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , entonces se cumple:  $J_{-\alpha}(x) = (-1)^{\alpha} J_{\alpha}(x)$ , por lo que las dos soluciones dejan de ser linealmente independientes. En este caso, la segunda solución linealmente independiente será una función de Bessel de segunda especie.

#### Funciones de Bessel de segunda especie: $Y_{\alpha}$

Las funciones de Bessel de segunda especie, denotadas por  $Y_{\alpha}(x)$ , son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel. Estas funciones divergen en el origen ( $x=0$ ). A estas funciones  $Y_{\alpha}(x)$  también se les llama funciones de Neumann o de Weber, y se denotan por  $N_{\alpha}(x)$ . Para  $\alpha$  no enteros, se definen a partir de las funciones de primera especie  $J_{\alpha}(x)$  mediante la siguiente fórmula:

$$Y_{\alpha}(x) = \frac{J_{\alpha}(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z} \quad (\text{E.4})$$

#### Funciones de Hankel: $H_{\alpha}$

Otra formulación importante de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel son las funciones de Hankel  $H_{\alpha}^{(1)}(x)$  y  $H_{\alpha}^{(2)}(x)$  definidas:

$$\begin{aligned} H_{\alpha}^{(1)}(x) &= J_{\alpha}(x) + iY_{\alpha}(x) \\ H_{\alpha}^{(2)}(x) &= J_{\alpha}(x) - iY_{\alpha}(x) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria. Estas combinaciones lineales son también conocidas como las funciones de Bessel de tercera especie. Las funciones de Hankel

de primera y segunda especie son usadas para representar las soluciones de ondas entrantes y salientes de una ecuación de onda en simetría cilíndrica respectivamente (o viceversa dependiendo de la convención de signo de la frecuencia). Estas funciones son así nombradas en honor de Hermann Hankel.

Usando la definición mencionada anteriormente, estas funciones se pueden escribir en función de las funciones de Bessel de primer orden  $J_\alpha(x)$  como:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi} J_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)}$$

$$H_\alpha^{(2)}(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi} J_\alpha(x)}{-i \sin(\alpha\pi)} \quad (\text{E.6})$$

si  $\alpha$  es un entero, las expresiones anteriores se pueden reescribir como:

$$H_n^{(1)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} H_\alpha^{(1)}(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$H_n^{(2)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} H_\alpha^{(2)}(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (\text{E.7})$$

La siguiente relación es válida para todo valor de  $\alpha$ , sea entero o no:

$$H_{-\alpha}^{(1)}(x) = e^{\alpha\pi} H_\alpha^{(1)}(x)$$

$$H_{-\alpha}^{(2)}(x) = e^{-\alpha\pi} H_\alpha^{(2)}(x) \quad (\text{E.8})$$

### Solución general de la ecuación de Bessel

La solución general de la ecuación diferencial de Bessel con parámetro  $\alpha$  viene dada en términos de las funciones de Bessel ordinarias o de las funciones de Hankel. Dicha solución general puede expresarse como:

$$y(x) = AJ_\alpha(x) + BJ_{-\alpha}(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$y(x) = AJ_\alpha(x) + BY_\alpha(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = AJ_\alpha(x) + BJ_\alpha(x) \int \frac{dx}{xJ_\alpha^2(x)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = AH_\alpha^{(1)}(x) + BH_\alpha^{(2)}(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{E.9})$$

donde A y B son dos constantes arbitrarias.