



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

POSGRADO



**“MATERIA OSCURA Y COSMOLOGÍA
DE MUNDOS BRANA”**

TESIS PRESENTADA POR

JUAN LUIS PÉREZ PÉREZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN FÍSICA

Y QUE DIRIGE

DR. RUBÉN CORDERO ELIZALDE

UNIDAD PROFESIONAL ADOLFO LÓPEZ MATEOS GAM, MÉXICO D.F.

JUNIO, 2010

Resumen

En la presente tesis se pretende abordar el complicado problema de la materia oscura, para lo cual ésta tesis se divide en dos partes principales: la primera consiste de una revisión general de la materia oscura, su origen e importancia en el estudio de la cosmología moderna; la segunda parte se centra en el análisis de la cosmología de branas además del planteamiento de un modelo particular de cinco dimensiones. El propósito de esta tesis es dar un panorama general de la cosmología así como sus resultados más trascendentes y algunos de los problemas que aún están sin resolver incluyendo el paradigma de la materia y energía oscura. Se analiza un modelo de cosmología de branas, basado en el modelo de Horava y Witten, el cual consiste de dos branas (donde la materia está confinada) inmersas en un espacio 5-dimensional compacto. Uno de los resultados principales es que la presión y densidad de energía en una brana están restringidas por la energía y presión en la otra, esto es debido a la naturaleza compacta de la quinta dimensión. Concretamente, se estudian dos tipos de métrica 5-dimensionales conocidas y una propuesta en este trabajo, las cuales satisfacen las ecuaciones de restricción. Además se estudia la evolución del factor de escala de nuestro Universo con respecto a la otra brana adjunta. Para estos modelos se estudian además las condiciones sobre los componentes de energía para las dos branas. La influencia gravitacional de la brana adjunta sobre nuestro Universo se plantea como una alternativa al problema de la materia oscura y la presente tesis es un paso previo para el estudio de tal fenómeno.

In present thesis is pretended to approach the complicated problem of dark matter, and in order to address this topic, the thesis is divided in two main parts: the first one consists of a general revision of dark matter, their origin and importance on the study of modern cosmology; the second part focuses on the analysis of brane cosmology, and besides to establish a particular five dimensional brane world model. The purpose of this thesis is to show a general glimpse of cosmology, as well as its more transcendent results, and some of the still unresolved problems including the paradigm of dark matter and dark energy. A specific model of brane cosmology based on the model of Horava and Witten, which consists of two membranes (where the matter is confined) embedded in a compactified 5-dimensional background spacetime, is analyzed. One of the main results is that the pressure and energy density in a brane is constrained by the pressure and energy in the other one, this is due to the compact nature of the fifth dimension. Concretely, two well-know kind of 5-dimensional metric and a novel proposal are studied in this work, which satisfy the restriction equations. The evolution of the scalar factor of our Universe depends on the energy structure of the other brane. For these models it was also studied the conditions on the energy components for the two branes. The gravitational influence of the adjacent brane on our Universe can be seen like an alternative to dark matter problem and the present thesis is a previous step for the study of such a phenomenon.

Dedicado a mis padres, Sr. Juan Pérez Escobar
y Sra. Verónica Pérez Pío, quienes en todo
momento me apoyaron

Índice general

Índice general	I
Introducción	IV
1. Cosmología estándar.....	1
1.1 Observaciones fundamentales.....	2
1.1.1. Noche oscura.....	2
1.1.2. Homogeneidad e isotropía	2
1.1.3. Homogeneidad y expansión.....	3
1.1.4. Teoría de la gran explosión (Big Bang).....	5
1.2. Ecuaciones de Einstein	7
1.3. Dinámica del Universo	9
1.4. Edad temprana y componentes del Universo.....	14
1.5. Radiación cósmica de fondo	17
1.6. Fluctuaciones y el Universo temprano.....	20
2. Materia oscura	24
2.1. ¿Qué es la materia oscura?.....	25
2.2. Evidencias de materia oscura.....	26

2.3. Clasificación de la materia oscura	30
2.4. Candidatos a materia oscura	31
2.4.1. Remanentes térmicos y no-térmicos	33
2.4.2. Modelo estándar de neutrinos	34
2.4.3. Neutrinos estériles.....	35
2.4.4. Axiones y gravitones.....	35
2.4.5. Partículas supersimétricas	36
2.4.6. Modelos Higgs-pequeño	38
2.4.7. Estados Kaluza-Klein.....	38
2.4.8. Campo escalar.....	39
2.4.9. MOND	40
2.5. Técnicas de detección	42
2.5.1. Detección directa	43
2.5.2. Detección indirecta	47
2.6. La materia y la cosmología moderna.....	48
3. Dimensiones extra, cuerdas y branas	51
3.1. Origen de la idea de dimensiones extra	51
3.2. Problema de la jerarquía	54
3.3. Supersimetría	55
3.4. Cuerdas, branas y universos brana.....	57
4. El modelo	62
4.1. Ecuaciones G-C y condiciones de juntura	63
4.2. Métrica 5-dimensional	66
4.3. Ecuaciones de Einstein 5-dimensional.....	67
4.4. Análisis $\omega_* = \omega_*(\lambda, \omega)$	72
4.5. Análisis ω_* para diferentes ω y $ \lambda \ll 1$	75

4.6. Análisis gráfico para los tres modelos de estudio propuestos.....	77
4.6.1. Modelo lineal	78
4.6.2. Modelo de Horava-Witten	81
4.6.3. Modelo exponencial.....	82
4.7. Discusión final del capítulo	83
Resultados y conclusiones.....	85
Apéndices	87
A. Cosmología 5-dimensional.....	87
B. Cálculo de $[a']$ para una brana	89
C. Cálculo de restricciones topológicas para las dos branas.....	91
D. Condición para las funciones $a(\tau, y)$ y $n(\tau, y)$	93
Bibliografía	95

Introducción

La cosmología es el estudio a gran escala de las leyes físicas del Universo (su origen, composición, límites, estructura y evolución) mediante el establecimiento de las leyes matemáticas que rigen el comportamiento dinámico de este sistema. En principio, tal estudio puede parecer bastante ambicioso, y la pregunta obligada antes de abordar el tema es: ¿son las observaciones actuales capaces de proporcionar suficiente información científica acerca de la estructura del Universo a gran escala?, o ¿son los conocimientos de las leyes de la naturaleza suficientes para interpretar esta información? A escalas cosmológicas, la fuerza dominante que determina la evolución del Universo es la gravedad (siendo que las fuerzas débil y fuerte, son fuerzas de corto alcance, además de que el Universo es eléctricamente neutro), por lo tanto es útil tomar como punto de partida la teoría de la relatividad general.

En el contexto de la relatividad de Einstein, el espacio se curva en presencia de un objeto masivo, lo que conlleva automáticamente a que la aceleración gravitacional de un objeto debe ser independiente de la cantidad de masa y de su composición, siguiendo tal objeto una trayectoria geodésica [1]. A partir del principio de equivalencia, se pueden construir las ecuaciones de Einstein,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi GT_{ij},$$

las cuales son el punto de partida para la construcción de la cosmología. En la anterior ecuación g_{ij} es el tensor métrico y R_{ij} y R son el tensor de Ricci y escalar de curvatura los cuales determinan las propiedades geométricas del espacio y el tiempo. T_{ij} es el tensor de momento energía que determina la distribución de materia-energía de un sistema en particular [2]. A partir del principio cosmológico, el cual sostiene que el Universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas, se deduce que las posibles curvaturas del Universo

son plana ($k = 0$), positiva ($k = 1$) o negativa ($k = -1$); si además se considera que el Universo se expande como función del tiempo, la métrica se escribe como [3]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2],$$

$$S_k(r) = \begin{cases} R \operatorname{sen}(r/R) & (k = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R \operatorname{senh}(r/R) & (\kappa = -1). \end{cases}$$

Uno de los problemas más difíciles de resolver por la cosmología actual es la determinación de la curvatura del espacio, ya que depende de la contribución de los diferentes componentes de la densidad de energía del Universo con respecto a la densidad de energía en la época actual.

Durante años, los cosmólogos han dedicado gran cantidad de tiempo y esfuerzo a la determinación de la densidad de materia del Universo, y es que la evidencia teórica y experimental sugiere la existencia de materia no compuesta de bariones o leptones (materia oscura) en el Universo, la cual aún no ha sido detectada. Esta falta de evidencia experimental acerca de la composición de la materia oscura ha sido el punto de partida para la introducción de teorías alternas al modelo estándar de partículas que postulan desde una nueva familia de partículas supersimétricas, aun no detectadas, hasta teorías de más de cuatro dimensiones. Una posible explicación a este fenómeno es que el componente dominante de la materia oscura consiste de alguna partícula no relativista, estable y débilmente interactuante (WIMP) para la cual el neutralino es un candidato viable [4]. Recientemente, la posible existencia de dimensiones extra ha redirigido el estudio de la materia oscura al contexto de los mundos brana [5]. En este escenario, los campos del modelo estándar se encuentran confinados a una hipersuperficie en un espacio de más de cuatro dimensiones. Por consiguiente este trabajo de tesis ha sido motivado por la idea de aportar una alternativa de solución al problema de la materia oscura en el contexto de mundos brana, donde el fenómeno de la materia oscura puede ser entendido como un efecto gravitacional de una brana adyacente sobre nuestro Universo. Para lo anterior, se realizó un análisis matemático para cualquier métrica de la cosmología de dos branas (una de ellas corresponde al universo observable y la otra adjunta a éste) inmersas en un espacio-tiempo de cinco dimensiones, donde la quinta dimensión está compactificada. En particular, se

analizaron dos modelos conocidos 5-dimensionales de universos posibles para obtener datos sobre el comportamiento físico de la materia-energía contenida en tales universos. También se realizó un análisis gráfico, utilizando *Mathematica 5*, de tales modelos teniendo en cuenta el dominio individual de cada una de sus componentes tales como radiación, materia bariónica, materia oscura y constante cosmológica. Se plantea un nuevo modelo (como contribución novedosa de esta tesis) denominado exponencial, cuya ventaja sobre los otros dos modelos es que evita singularidades. La demostración de los resultados obtenidos está dada por el supuesto de un Universo en expansión o en contracción, dependiendo del tipo de componente que domine en la brana adjunta. El estudio de las propiedades de tal brana y sus consecuencias cosmológicas es el propósito y contribución de esta tesis.

El contenido de la tesis está estructurado en cuatro capítulos, un apartado de conclusiones, resultados y otro de apéndices. En el primer capítulo se abarcan someramente los principios básicos de la cosmología moderna, así como las observaciones y resultados más trascendentes. En el segundo capítulo se menciona el desarrollo histórico del problema de la materia oscura, la evidencia experimental, los candidatos más populares y las técnicas de detección. El tercer capítulo se centra en la descripción de teorías de cuerdas, mundos brana y los modelos que de éste surgen. En el capítulo cuatro se estudia con detalle el modelo de Horava-Witten [6] para el caso de una dimensión adicional, donde se introduce una brana adjunta a nuestro Universo brana, se analizan las constricciones sobre las densidades de energía de las branas y se hace un análisis de la evolución del factor de escala. En la sección de conclusiones se muestran los resultados de esta tesis así como el trabajo a futuro que de ésta se desprende. La sección de apéndices corresponde a la demostración ampliada de algunos resultados mencionados en el capítulo cuatro. La bibliografía se encuentra enlistada al final del trabajo e incluye la dirección electrónica de los artículos consultados.

[1] [2] [3] [4] [5] [6]

Capítulo 1

Cosmología estándar

El estudio de la cosmología, aunque amplio y diverso, se basa en una formulación estándar bajo la cual se entienden y explican todos los fenómenos observados hasta hoy. La formulación de Einstein de la relatividad general y las ecuaciones fundamentales que de ésta resultan y que describen el campo gravitatorio son, junto con el principio cosmológico, la base de la teoría cosmológica actual. En primer lugar, hay que destacar que las ecuaciones de Einstein tienen, hasta hoy, validez universal y por lo tanto son aplicables en la misma forma a sistemas locales, galácticos y cosmológicos. En segundo lugar, es sabido que el principio cosmológico afirma que el Universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas, es decir, que en cualquier lugar y en cualquier dirección las leyes de la física tienen la misma forma: *no hay un lugar ni dirección preferido en el Universo* [7]. Otro concepto importante a tener en cuenta es la geometría del Universo, y es que un Universo compatible con el principio cosmológico puede tener tres geometrías distintas: plana, esférica e hiperbólica. Como más adelante se menciona, las mediciones de contenido de materia y energía del Universo son factores clave en la determinación de tal geometría.

El desarrollo de la cosmología se ha dado conforme se han obtenido nuevos resultados observacionales; ejemplo de ello son las observaciones llevadas a cabo por Edwin Hubble

(1929), quien encuentra que el Universo se expande, o de Arno Penzias y Robert Wilson (1965), quienes descubren que el Universo está lleno de una radiación de fondo en todas direcciones; estos descubrimientos favorecen los modelos de la gran explosión [8].

El modelo estándar actual para el Universo es el modelo de la *gran explosión caliente*, el cual establece que el Universo se expande desde un estado inicial denso y caliente hasta su estado actual relativamente frío y tenue, y que la expansión se está llevando a cabo hasta hoy. Tal modelo está basado en observaciones fundamentales a partir de las cuales se ha construido y es el más aceptado.

1.1. Observaciones fundamentales

1.1.1. Noche oscura

Una de las preguntas fundamentales en la cosmología tiene que ver con la diferencia entre el día y la noche: ¿por qué el cielo nocturno es oscuro y no brillante?, y es que un cálculo sencillo de la luminosidad total de las estrellas de todo el Universo [7] sugiere que el cielo nocturno debería ser infinitamente brillante¹. Lo anterior es conocido como la *Paradoja de Olber*. Una solución a este problema viene del hecho que en realidad no es posible observar todas las estrellas que existen en el Universo pues la luz de estrellas distantes, más allá de una distancia *horizonte*, no ha llegado aún a la tierra.

1.1.2. Homogeneidad e isotropía

Si bien, a escalas locales (planeta tierra, sistema solar, grupo local de galaxias) el Universo es altamente inhomogéneo y anisótropo, es bien sabido que a escalas de los

¹ Adviértase que se supone, para éste cálculo, un Universo infinito y con un número infinito de estrellas uniformemente distribuidas en el espacio y en el tiempo, esto último conlleva a un Universo eterno.

supercúmulos de galaxias ($\approx 100 \text{ Mpc}$)² el Universo es homogéneo e isótropo. Con homogeneidad se entiende que en todo el Universo no hay lugares privilegiados; en el caso particular de la materia, significa que la densidad de materia es la misma en cualquier región que se sitúe un observador. Con isotropía se entiende que no importa en qué dirección se realice una medición, siempre se observa lo mismo. Es importante recalcar que estos dos conceptos son verdad en el Universo sólo a grandes escalas; en cosmología observacional esto es un hecho, tal y como menciona Einstein: *El trabajo de Hubble revela que esos objetos (las nebulosas espirales) están distribuidas en el espacio de una forma estadísticamente uniforme, por lo que el aserto esquemático de la teoría de una densidad media uniforme recibe una confirmación experimental.* A partir de aquí se postula el principio cosmológico: *No hay un lugar ni dirección privilegiados en el Universo* [9].

1.1.3. Homogeneidad y expansión

A grandes escalas, donde el Universo es homogéneo, éste se está expandiendo isotrópamente. Esto es, la distancia entre cualquier par de galaxias separadas por más de 100 Mpc es proporcional a un factor de escala universal $a(t)$, el mismo para cada par. El parámetro de Hubble está definido por $H = \dot{a}/a$, donde el punto indica derivada en el tiempo. Un subíndice 0 es generalmente usado para denotar cantidades que se evalúan en la época actual ($t = t_0$), aunque en el modelo de branas puede indicar cantidades evaluadas en $y = 0$. Es conveniente utilizar la igualdad $a_0 = 1$, tal que $a(t)$ es simplemente el tamaño de cualquier región comóvil (una moviéndose con las galaxias) relativa al tiempo presente. El valor presente de H , denotado por H_0 es llamado *la constante de*

² Un Mpc (ó un millón de parsecs) es una medida astronómica para “grandes” distancias. Un parsec es igual a la distancia a la cual 1 AU subtende un ángulo de un arcosegundo. 1AU (unidad astronómica) es la distancia media entre la tierra y el sol.

Hubble. Este es usualmente medido observando el corrimiento al rojo $z \equiv \Delta\lambda/\lambda_{em}$ de galaxias que se están separando de la nuestra³. La velocidad de tal galaxia está dada por $v = H_0 r$, y su corrimiento al rojo es simplemente el efecto Doppler para el caso no-relativista⁴, donde para $v \ll c$ entonces $z = v/c$, llevando a la ley de Hubble [10]

$$z = H_0 r / c. \quad (1.1)$$

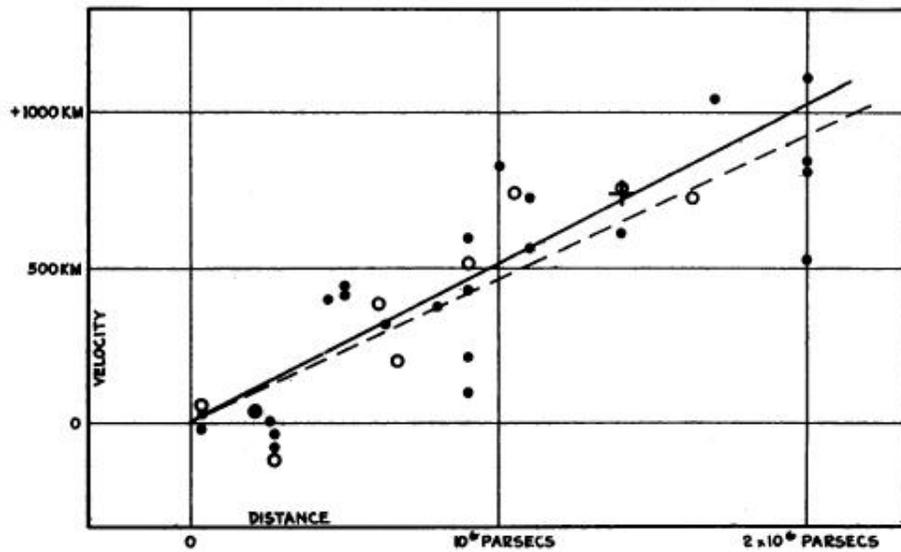


Figura 1.1: Relación distancia-velocidad en la ley de Hubble. Gráfico original (1929) [11]

La ley de Hubble está bien establecida debido a que las distancias relativas son “fáciles” de establecer. Lo único que se tiene que hacer es encontrar una *candela estándar* (vela estándar), que es un tipo de objeto del cual todos los ejemplares tienen prácticamente la misma luminosidad. La intensidad luminosa de una candela estándar varía con el inverso del cuadrado de la distancia, y así se mide la distancia relativa.

³ El término $\Delta\lambda = \lambda_{ob} - \lambda_{em}$ indica la diferencia entre la longitud de onda observada en la Tierra proveniente de una estrella distante, y la longitud de onda con que fue emitida.

⁴ En realidad este corrimiento es una consecuencia del cambio en la longitud de onda de los fotones debido a la expansión del Universo.

Por otro lado, para fijar H_0 es necesario conocer la luminosidad del objeto, lo cual es muy difícil de saber. Diferentes estimaciones [12] dan el valor de H_0 en el rango 40 a 100 $km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$. Usualmente la constante de Hubble se define en términos de la variable h como

$$H_0 = h \times 100\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}. \quad (1.2)$$

Así, el valor de la constante de Hubble está determinada por h en un rango $0,4 < h < 1$. En 2009, el equipo de Adam G. Reiss [13] estimó, utilizando el telescopio espacial Hubble, un valor para h de $0,742 \pm 0,036$ con una incertidumbre del 5 %.

Siendo que $H = \dot{a}/a$, el tiempo que se esperaría que tardó el Universo en expandirse desde un punto inicial (gran explosión), es del orden del *tiempo de Hubble*,

$$t_0 \equiv H_0^{-1} = 9,76\ h^{-1}\ Gyr. \quad (1.3)$$

Durante el tiempo de Hubble, la luz recorrió una distancia del orden de la *distancia de Hubble*,

$$cH_0^{-1} = 2998\ h^{-1}\ Mpc. \quad (1.4)$$

Originalmente Hubble aplicó el efecto Doppler no-relativista considerando que las velocidades de recesión eran muy pequeñas comparadas con c , lo cual restringe su cálculo a distancias mucho menores que la distancia de Hubble. No obstante, en general la ley de Hubble se aplica a cualquier distancia.

1.1.4. Teoría de la gran explosión (Big Bang)

El término Big Bang (gran explosión) fue primeramente usado por Fred Hoyle en un programa de radio (1949) como una forma de referirse a una teoría alterna a la del *estado estacionario*. El modelo de la gran explosión sustenta el hecho de que actualmente el Universo se está expandiendo, mientras que en el pasado estuvo en un estado denso

y caliente. No obstante que en 1922 Alexander Friedmann [14] mostró que el universo debía estar expandiéndose, no fue sino hasta 1929 (con el trabajo de Edwin Hubble) que surge la primera evidencia observacional que apoya esta idea. De manera adicional a este descubrimiento, en 1965, Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron que el Universo está lleno de una radiación homogénea e isotrópica, la cual se entiende es un remanente de la época cuando el Universo era muy caliente. El modelo de la gran explosión tiene actualmente distintos problemas a resolver [7], entre los cuales se encuentran el problema de inflación y el de la materia y energía oscura.

Inflación. El modelo inflacionario surge como una explicación de los tres principales problemas de la teoría de la gran explosión: *el problema de la planicidad, del horizonte y del monopolio* [15], [16].

Materia oscura y energía oscura. En el Universo primigenio, la cantidad de materia y energía oscura determina la evolución y formación de estructura a gran escala.

Ahora bien, si las galaxias se mueven alejándose unas de otras, esto implica que ellas estuvieron muy juntas en el pasado. Si la velocidad relativa de las galaxias fue constante en el pasado, una sencilla estimación para la edad del Universo es el tiempo de Hubble, (1.3). Así, la observación del corrimiento al rojo galáctico lleva naturalmente a un modelo de la gran explosión del Universo.

En la época presente el tiempo de Hubble es del orden 10^{10} años. La época temprana, donde el Universo era muy denso y caliente y en el cual el tiempo de Hubble era sólo una fracción de segundo, es popularmente llamada época de la gran explosión caliente. Siendo que el Universo temprano era aún más homogéneo e isotrópico que en la época presente, una expansión no puede ser originada desde un punto central. Debe mencionarse que ciertamente no es una explosión, la cual por definición es conducida por un gradiente de presión. Así, el indudable hecho de la gran explosión no explica por sí mismo la expansión del Universo; este suceso tiene lugar en el “inicio”, remontándose

a la *época de Planck*, cuando el tiempo de Hubble es del orden del tiempo de Planck,

$$t_{Pl} = G^{1/2} = 5,39 \times 10^{-44} \text{ s.} \quad (1.5)$$

1.2. Ecuaciones de Einstein

Sin duda alguna, no se puede hablar de cosmología moderna sin tener en cuenta que el fundamento de tal disciplina, como punto de partida, son las ecuaciones de Einstein. En la teoría de la relatividad general de Einstein, el espacio-tiempo se curva debido a la presencia de una distribución de masa-energía, dicha curvatura es una propiedad del espacio-tiempo en sí mismo. De esta forma, la aceleración de un objeto en un campo gravitacional es independiente de la masa y el estado físico del cuerpo, siguiendo éste una trayectoria geodésica. No hay, por tanto, una diferencia entre masa inercial y gravitacional porque la deformación del espacio-tiempo es la misma independientemente de la partícula de prueba que se use para medirla ⁵.

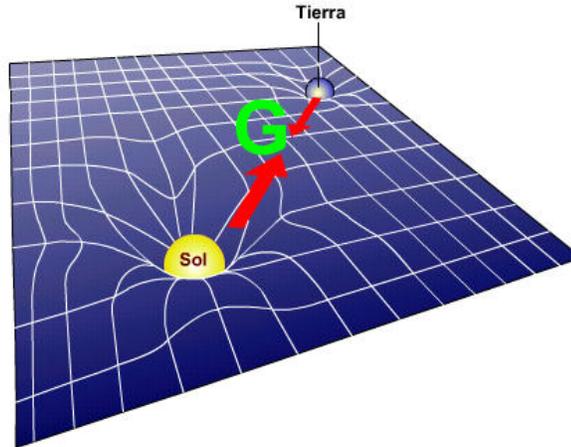


Figura 1.2: En presencia de un objeto masivo, el espacio-tiempo está curvado.

⁵ Si bien es muy sabido de la mecánica newtoniana, que la masa inercial y gravitacional tienen la misma magnitud, no fue sino hasta la formulación de la relatividad general, que Einstein ofreció una explicación satisfactoria, como él mismo refiere, *una y la misma propiedad del cuerpo se manifiesta, ya sea como masa inercial, o bien, como masa gravitacional* [17].

La teoría de la relatividad general establece la equivalencia entre materia y curvatura mediante las ecuaciones del campo,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = KT_{ij}, \quad (1.6)$$

donde g_{ij} es el tensor métrico, el cual describe la geometría del espacio-tiempo (variedad semiriemanniana cuatridimensional⁶); R_{ij} es el tensor de Ricci⁷, el cual describe la curvatura de la variedad métrica y R su contracción; K es un factor numérico que depende de la constante gravitatoria de Newton, G , que se obtiene al extrapolar las ecuaciones al límite newtoniano; T_{ij} es el tensor momento-energía, que describe el flujo de energía y momento y satisface la ecuación de continuidad,

$$\nabla_j T^{ij} = 0. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser deducidas usando la acción Einstein-Hilbert a través del principio de mínima acción,

$$S = \int \left(\frac{1}{2K}R + L_M \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.8)$$

donde L_M es un lagrangiano que describe cualquier campo que esté presente en la teoría. En [2], [18], [19] y [20], se muestran diferentes soluciones a las ecuaciones de Einstein.

En el caso de un fluido perfecto (como es el caso considerado para el Universo a escalas cosmológicas) se tiene como tensor momento energía

$$T_{ij} = (\epsilon + p)U_i U_j + pg_{ij}, \quad (1.9)$$

donde ϵ , p y U_i son la densidad de energía, la presión y el cuadvivector velocidad respectivamente.

⁶ Estrictamente hablando $g_{ij} = \partial_i \partial_j$ $i = 0, 1, 2, 3$, donde los ∂_i son los vectores base del espacio tangente a la variedad.

⁷ El tensor de Ricci se define a partir del tensor de Riemann, R^i_{jkl} mediante la siguiente expresión: $R_{ij} = R^k_{ikj}$. A su vez, el tensor de Riemann se define del símbolo de Christoffel como $R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk} \Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{jk}$, donde $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{mk}(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})$.

Para finalizar, es necesario considerar que Einstein, motivado por la idea de un Universo estático, introdujo en sus ecuaciones un término adicional llamado *constante cosmológica* (Λ), el cual modifica las ecuaciones de campo a la forma

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = KT_{ij}. \quad (1.10)$$

Inicialmente, el término conllevó a un Universo inestable, por lo que Einstein se refiere a él como *un grave detrimento de la belleza formal de la teoría*, sin embargo, actualmente, a raíz de las observaciones, éste término es necesario para describir un Universo expandiéndose. La naturaleza física de la constante cosmológica aún es un misterio, y sólo se le asocia a la densidad de energía del vacío.

1.3. Dinámica del Universo

La forma en que evoluciona el Universo depende de qué tipo de geometría tiene, además de los componentes que lo conforman. Por geometría se entiende su curvatura y radio de curvatura, además de la forma en que evoluciona con el tiempo el factor de escala.

La métrica compatible con un Universo curvado y expandiéndose es llamada *métrica de Friedmann-Robertson-Walker* (FWR)[21],

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa(r)^2 d\Omega^2], \quad (1.11)$$

donde κ es la curvatura (la cual para un Universo homogéneo e isótropo, puede tomar los valores $+1, -1$ ó 0), $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$, el factor $a(t)$ es el mismo introducido en la sección (1.1.3) y la función $S_\kappa(r)$,

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R \text{ sen}(r/R) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R \text{ senh}(r/R) & (\kappa = -1). \end{cases} \quad (1.12)$$

La solución de las ecuaciones de campo de Einstein llevan a las ecuaciones de Friedmann, las cuales se expresan en términos de la densidad de energía del Universo, su curvatura y la constante cosmológica.

Ecuación de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.13)$$

Ecuación del fluido,

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0. \quad (1.14)$$

Ecuación de la aceleración,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.15)$$

La ecuación (1.15), se obtiene directamente de la componente (0,0) de las ecuaciones de Einstein (1.10); la ecuación (1.14), es consecuencia de la conservación del tensor momento-energía (1.7); finalmente, la ecuación de Friedmann (1.13), se obtiene de combinar la ecuación de la aceleración y la ecuación del fluido. Para deducir estas ecuaciones, es necesario considerar en las ecuaciones de Einstein, junto con un término de constante cosmológica, el tensor de momento energía dado por la ecuación (1.9)

De forma adicional a estas ecuaciones, se requiere una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad de energía. Para efecto de estudios cosmológicos, es una muy buena aproximación considerar la forma lineal de gases diluidos,

$$P = \omega\epsilon, \quad (1.16)$$

donde ω es un número sin dimensiones ⁸. Para un gas de fotones u otras partículas relativistas, $\omega = \frac{1}{3}$, mientras que para partículas masivas no relativistas, $\omega = 0$. En

⁸ Si bien, la densidad de energía y la presión son manifestaciones distintas de energía, ambas tienen las mismas unidades, [densidad de energía] = [energía/volumen] = $[N \cdot m/m^3] = [N/m^2] = [\text{presión}]$.

general, para materia medianamente relativista ($0 < \langle v^2 \rangle < c^2$) se tiene $0 < \omega < \frac{1}{3}$. Componentes con $\omega \approx 0$ se denominan *materia no relativista*, mientras que componentes con $\omega \approx \frac{1}{3}$ se denominan *radiación*. Una componente con $\omega < -\frac{1}{3}$ es de gran interés debido a que provee de una aceleración positiva.⁹

Por lo tanto, la evolución cosmológica dependerá del tipo y número de componentes que dominen el Universo. Para un Universo dominado por componentes múltiples¹⁰ se tienen las expresiones

$$\epsilon = \sum_i \epsilon_i, \quad (1.17)$$

y

$$P = \sum_i P_i = \sum_i \omega_i \epsilon_i. \quad (1.18)$$

De la ecuación del fluido (1.14), para cada componente por separado, se tiene

$$\epsilon_i = \epsilon_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)}, \quad (1.19)$$

con $\epsilon_{i,0}$ el valor de la densidad de energía del i -ésimo componente en la época actual ($t = t_0$).

Un caso de particular interés es el de un Universo plano y dominado por una sola componente (radiación, materia no relativista, quintaesencia ó constante cosmológica). Usando las ecuaciones (1.13) y (1.19) se obtiene una expresión para el factor de escala en función del tiempo,

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^q, \quad (1.20)$$

con

$$t_0 = q \frac{1}{H_0}. \quad (1.21)$$

⁹ Esto puede verse en la ecuación de la aceleración (1.15), que si $\omega < -\frac{1}{3}$, entonces $\ddot{a} > 0$. Algunas veces a este tipo de sustancia se le denomina *Quintaesencia*.

¹⁰ Cada componente se denota ϵ_i con $i = 1, 2, 3, \dots$ y ecuación de estado $P_i = \omega_i \epsilon_i$.

En las anteriores expresiones, $q = 2/(3 + 3\omega)$ y t_0 es la edad del Universo, nótese además que para $\omega \neq -1$ se tiene una solución exponencial.

Como un caso todavía más particular, considérese un Universo dominado solamente por materia no relativista, es decir, $\omega = 0$; de las ecuaciones anteriores se tiene $a \propto t^{2/3}$ y $t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}$. Para $\omega = -1$, el cual corresponde a un Universo dominado sólo por una constante cosmológica, de la ecuación (1.13) se tiene

$$a(t) = e^{\sqrt{\Lambda/3}(t-t_0)}. \quad (1.22)$$

Como ya se mencionó anteriormente, el parámetro de Hubble se define como $H = \dot{a}/a$, por lo que la ecuación de Friedmann se escribe como

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}. \quad (1.23)$$

Para un Universo espacialmente plano ($\kappa = 0$), la ecuación de Friedmann toma la forma ¹¹

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t), \quad (1.24)$$

por lo que existe un *valor crítico* para la densidad de energía del Universo,

$$\epsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2, \quad (1.25)$$

tal que al sustituir en la ecuación de Friedmann (con $\kappa \neq 0$) se tiene

$$\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_c(t)} - 1. \quad (1.26)$$

Por lo tanto, de la ecuación anterior se deduce que el valor de la curvatura depende de la razón $\epsilon(t)/\epsilon_c(t)$: Si $\epsilon(t) > \epsilon_c(t)$, se tiene un Universo curvado positivamente; si $\epsilon(t) < \epsilon_c(t)$, se tiene un Universo curvado negativamente; si $\epsilon(t) = \epsilon_c(t)$, se tiene un Universo plano.

¹¹ En esta ecuación $\epsilon(t)$ es la suma de todas las posibles componentes, incluyendo constante cosmológica, $\epsilon(t) = \epsilon_m(t) + \epsilon_{dm}(t) + \epsilon_r(t) + \epsilon_\Lambda$.

Es más conveniente expresar la última ecuación en términos del *parámetro de densidad*, el cual se define como

$$\Omega(t) = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_c(t)}, \quad (1.27)$$

quedando la ecuación (1.26) de la forma

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}. \quad (1.28)$$

En términos de los valores actuales: $a(t = t_0) = 1$, $H(t = t_0) = H_0$, $\Omega(t = t_0) = \Omega_0$, donde t_0 es el tiempo actual, entonces se tiene

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1). \quad (1.29)$$

Y es aquí donde se centran gran parte de los esfuerzos observacionales, en determinar el valor del parámetro de densidad. Los límites más conservadores para este parámetro, establecen que el valor actual se encuentra en el rango $0,1 < \Omega_0 < 2$; no obstante, las observaciones más recientes arrojan un parámetro de densidad $\Omega_0 \approx 1$, es decir, un Universo espacialmente plano.

En general, para determinar completamente la dinámica del Universo, se requiere determinar con precisión diferentes parámetros, llamados *parámetros cosmológicos*. El paradigma de la gran explosión, desde el punto de vista teórico, conlleva en sí mismo distintos parámetros para su formulación [12] los cuales son esenciales para describir el comportamiento en el tiempo del Universo. Como es mencionado por Liddle [22], comparaciones típicas de modelos cosmológicos con los datos observacionales ofrecen ahora entre cinco y diez parámetros, entre los que se destacan: el parámetro de Hubble, la densidad total de materia, la densidad de bariones, la constante cosmológica, la densidad de radiación y la densidad de neutrinos.

1.4. Edad temprana y componentes del Universo

El Universo, que en sus primeros momentos estaba lleno, homogénea e isotrópamente, de una energía muy densa y que tenía una temperatura y presión muy altas, se expandió y se enfrió experimentando cambios de fase análogos a la condensación del vapor o a la congelación del agua, pero relacionados con las partículas elementales. Aproximadamente en 10^{-35} segundos después de la época de Planck, un cambio de fase causó que el Universo se expandiese de forma exponencial durante un período llamado *de inflación cósmica*[23]. Al terminar la inflación, los componentes materiales del Universo quedaron en la forma de un plasma de quarks-gluones, en donde todas las partes que lo formaban estaban en movimiento relativista.

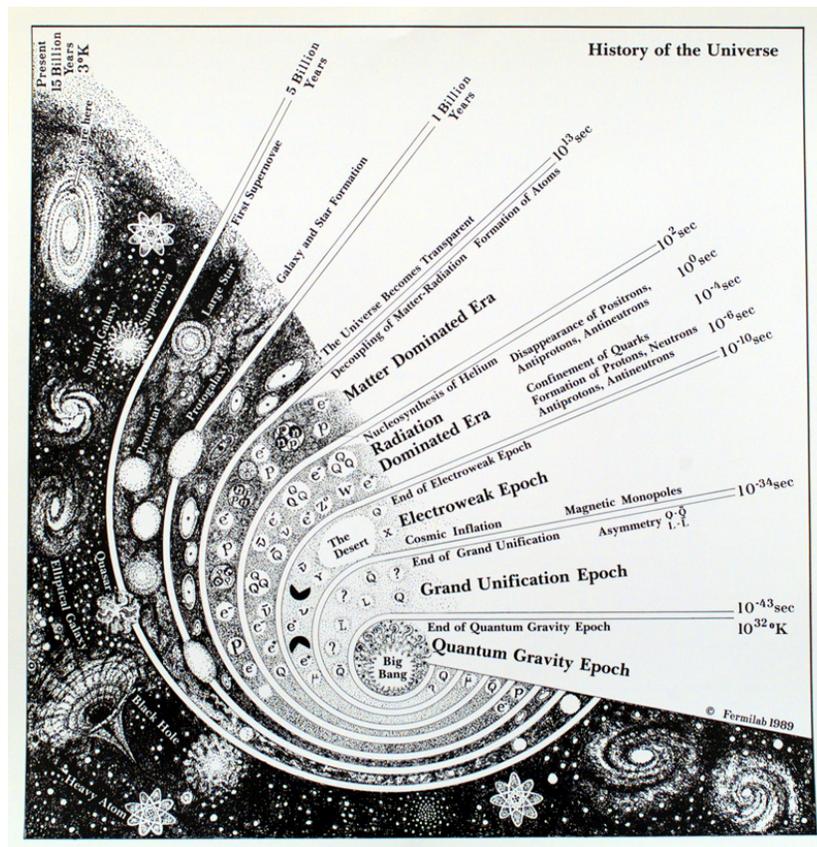


Figura 1.3: Etapas de la historia térmica del Universo. Tomado de FERMILAB

Con el crecimiento en tamaño del Universo, la temperatura descendió. A cierta temperatura, y debido a un cambio aún desconocido denominado *bariogénesis* [24], los quarks y los gluones se combinaron en bariones tales como el protón y el neutrón, produciendo de alguna manera la asimetría observada actualmente entre la materia y la antimateria¹². Las temperaturas aún más bajas condujeron a nuevos cambios de fase, que rompieron la simetría, así que les dieron su forma actual a las fuerzas fundamentales de la física y a las partículas elementales. Más tarde, protones y neutrones se combinaron para formar los núcleos de deuterio y de helio, en un proceso llamado *nucleosíntesis primordial* [25]. Al enfriarse el Universo, la materia gradualmente dejó de moverse de forma relativista y su densidad de energía comenzó a dominar gravitacionalmente sobre la radiación. Pasados 300,000 años, los electrones y los núcleos se combinaron para formar los átomos (mayoritariamente de hidrógeno), la radiación se desacopló de los átomos en un proceso conocido como *desacoplamiento del fotón* y continuó por el espacio prácticamente sin obstáculos. Esta es la radiación de fondo de microondas. Al pasar el tiempo, algunas regiones ligeramente más densas de la materia casi uniformemente distribuida, crecieron gravitacionalmente, haciéndose más densas, formando nubes, estrellas, galaxias y el resto de las estructuras astronómicas que actualmente se observan¹³. La formación de estructura a pequeña escala es debido a que en el Universo primigenio dominó una componente de materia oscura fría¹⁴. Una vez que la materia oscura fría domina el colapso del Universo gravitacional puede empezar a amplificar las heterogeneidades minúsculas dejadas por la inflación cósmica, causando que la materia caiga hacia las regiones densas y haciendo que las regiones rarificadas lo estén aún más. En la medida que se vuelven más densas las regiones, es cuando las estructuras, como las

¹² Un mecanismo similar llamado leptogénesis es usado para explicar la asimetría entre leptones y antileptones en el Universo temprano.

¹³ Para una introducción detallada del tema del Universo temprano, ver [26] y [10].

¹⁴ Esto es debido a que la materia oscura caliente tiene problemas al explicar la estructura a escalas menores que supercúmulos [27].

agrupaciones galácticas y los halos galácticos se empiezan a formar. A estas escalas, la fuerza dominante es la gravedad dado que la materia oscura domina sobre la expansión, y es cuando la materia barionica se agrupa densamente, como en las galaxias y las estrellas [28].

En 2004 Masataka y Peebles [29] publicaron una recopilación de todos los componentes del Universo hasta hoy conocidos. Es una recopilación de los valores más recientes arrojados por las observaciones del WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). En la tabla (1.1) se muestran tres clasificaciones importantes de componentes del Universo: El sector oscuro, el cual es debido a la existencia de materia y energía oscura en el Universo; el sector de remanentes térmicos, el cual consiste de fotones y neutrinos, remanentes de la gran explosión; y el sector de materia bariónica, que conforma todo tipo de materia compuesta de bariones y (por convención) leptones y que en su mayoría se manifiesta en forma de plasma intergaláctico.

Clasificación	Componente	Contribución al parámetro Ω
Sector oscuro	Energía oscura	$0,72 \pm 0,03$
	Materia oscura	$0,23 \pm 0,03$
Remanentes térmicos	Radiación electromagnética	$10^{-4,3 \pm 0,0}$
	Neutrinos	$10^{-2,9 \pm 0,1}$
Masa bariónica en reposo	Plasma intergaláctico	$0,040 \pm 0,03$
	Plasma intracúmulos	$0,0018 \pm 0,0007$
	Galaxias esferoidales y elípticas	$0,0015 \pm 0,0004$
	Galaxias disco e irregulares	$0,00055 \pm 0,00014$
	Enanas blancas	$0,00036 \pm 0,00008$
	Estrellas de neutrones	$0,00005 \pm 0,00002$
	Hoyos negros	$0,00007 \pm 0,00002$
	Objetos subestelares	$0,00014 \pm 0,00007$
	Gas Neutral $H_I + He_I$	$0,00062 \pm 0,0001$
	Gas molecular	$0,00016 \pm 0,00006$
	Planetas	10^{-6}
Materia condensada	$10^{-5,6}$	

Tabla 1.1: Componentes del Universo. Adaptado de Masataka, 2004 [29].

El modelo Λ CDM (Lambda-CDM es una abreviatura empleada en cosmología para Lambda-Cold Dark Matter) representa al *Modelo de concordancia* de la gran explosión, el cual explica las observaciones cósmicas realizadas sobre la radiación de fondo de microondas, así como la estructura a gran escala del Universo y las observaciones realizadas sobre las supernovas. Es notable el hecho de que éstas tres observaciones (las cuales son independientes) sean consistentes, por lo que se consideran una fuerte evidencia del modelo de concordancia que describe la naturaleza detallada del Universo.

1.5. Radiación cósmica de fondo

La radiación cósmica de fondo (en inglés, Cosmic Microwave Background, CMB) es una forma de radiación electromagnética que llena el Universo. Descubierta en 1965 por los radioastrónomos Arno Penzias y Robert Wilson [30], ésta radiación presenta un espectro de cuerpo negro a una temperatura de $2,725 \pm 0,001 K$ y una densidad de energía de $4,17 \times 10^{-14} J m^{-3}$. La energía media de la radiación cósmica corresponde a una longitud de onda de dos milímetros, razón por la cual se le llama en inglés fondo cósmico de microondas. La existencia del CMB es clave importante en la cosmología moderna, en particular en la formulación del modelo de la gran explosión. La radiación de fondo es difícilmente explicable en el modelo del estado estacionario del Universo [31], mientras que en el modelo de la gran explosión, donde el Universo estaba inicialmente muy caliente y denso, la CMB surge naturalmente, pues ésta última es el remanente de la época en que la materia bariónica estuvo completamente ionizada, los electrones viajaban libres y los fotones llenaban el Universo con un espectro típico de cuerpo negro. En esta época, el Universo estaba suficientemente denso y opaco, pero en la medida que se fue enfriando ($\approx 3000K$), los iones y los electrones se combinaron para formar átomos neutros y el Universo se tornó transparente.

La radiación cósmica de fondo es una evidencia de la época en la cual la materia bariónica pasó de su estado de plasma ionizado a su estado de gas de átomos neutros, además como resultado de este proceso el Universo pasó de ser opaco a transparente. Existen tres etapas primordiales en la historia del Universo, para las cuales el CMB aporta información importante: la época de la recombinación, la época del desacoplamiento del fotón y la época de la última dispersión.

Época de la recombinación. Antes del desacoplamiento del fotón, existió un sólo fluido fotón-barión, consistente de fotones, electrones y protones acoplados. Los fotones permanecieron acoplados a los electrones mientras su razón de dispersión era mayor que el parámetro de Hubble, o en otras palabras, que su desplazamiento medio libre era menor que la distancia de Hubble.

Época del desacoplamiento del fotón. Cuando la razón a la cual se dispersan los fotones de los electrones es menor que el parámetro de Hubble, entonces los electrones son diluidos por la expansión más rápidamente de lo que los fotones pueden interactuar con ellos. Los fotones entonces se desacoplan de los electrones y el Universo se vuelve transparente.

Época de la última dispersión. Es cuando los fotones sufren su última dispersión por los electrones. Actualmente, cada observador está rodeado por una superficie de la última dispersión, donde cada fotón tiene aproximadamente la misma temperatura.

El satélite COBE [32], en 1989, fue el primero en medir el espectro de radiación del CMB en un rango ancho de longitudes de onda. El proyecto utilizó tres dispositivos: DIRBE, FIRAS y DMR diseñados para medir radiación en los rangos $0,001mm < \lambda < 0,24mm$, $0,1mm < \lambda < 10mm$ y $3,3mm < \lambda < 9,6mm$ respectivamente. Los resultados arrojados son los siguientes:

Resultado 1. En cualquier posición angular (θ, ϕ) sobre el cielo, el espectro del CMB es cercano al de un cuerpo negro ideal, con fluctuaciones en el espectro de $\Delta\epsilon/\epsilon \approx 10^{-3}$.

Resultado 2. Existe una distorsión dipolar debido al movimiento del COBE relativo al sistema de referencia en el cual la radiación cósmica es isótropa. El grupo local de galaxias está siendo acelerado hacia la constelación de Hidra a una velocidad de $\approx 0,0021c$.

Resultado 3. La radiación cósmica presenta anisotropías en la temperatura, lo cual es debido a fluctuaciones en la temperatura promedio, cuya raíz cuadrática media es aproximadamente 1×10^{-5} , es decir, alrededor de 30 microKelvin.

En junio de 2001, la NASA lanzó una segunda misión espacial para el CMB, el WMAP, para realizar medidas mucho más precisas de las anisotropías a gran escala en todo el cielo. Los primeros resultados de esta misión, revelados en 2003 [33], fueron medidas detalladas del espectro de potencia angular en las escalas más bajas, acotando varios parámetros cosmológicos. Los resultados son ampliamente consistentes con los esperados de la inflación cósmica así como otras teorías competidoras y están disponibles detalladamente en el centro de datos de la NASA para el fondo cósmico de microondas. Aunque el WMAP proporcionó medidas muy exactas de las fluctuaciones a grandes escalas angulares en el CMB, no tendrían resolución angular suficiente para medir las fluctuaciones a pequeña escala que habían sido observadas utilizando interferómetros terrestres, como el Cosmic Background Imager [34].

Una tercera misión espacial, el Planck Surveyor, fue lanzada en mayo del 2009¹⁵. El Planck utiliza dos radiómetros HEMT así como un bolómetro y medirá el CMB a escalas menores que el WMAP. A diferencia de las dos misiones espaciales previas, el Planck es una colaboración entre la NASA y la Agencia Espacial Europea (ESA).

¹⁵ http://www.esa.int/esaSC/120398_index_0_m.html

1.6. Fluctuaciones y el Universo temprano

Las anisotropías observadas en el CMB sugieren que el Universo no fue perfectamente homogéneo en la época de la última dispersión. Considerando las fluctuaciones de temperatura como una función de la posición angular,

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}, \quad (1.30)$$

y expresando ésta en términos de armónicos esféricos, se tiene

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.31)$$

La función de correlación,

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(n), \frac{\delta T}{T}(m) \right\rangle_{n \cdot m = \cos \theta}, \quad (1.32)$$

nos da una descripción estadística de las fluctuaciones de temperatura a diferentes escalas.

Introduciendo la expansión (1.31) en la expresión para la función de correlación, se tiene

$$C(\theta) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \theta), \quad (1.33)$$

donde los C_l son los momentos multipolares de la función de correlación. Éste último término es una medida de las fluctuaciones de la temperatura a escalas $\theta = 180/l$. La fluctuación de temperatura, por tanto, se escribe en términos de los momentos multipolares como

$$\Delta_T = \left(\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \right)^{1/2} \langle T \rangle. \quad (1.34)$$

En la gráfica (1.4) se observa que se tiene un pico en $l \approx 200$ o una resolución angular de $\theta \approx 1$, lo cual coincide con el tamaño de la distancia de Hubble en la época de la última dispersión. Un resultado interesante que surge de este estudio, es que la

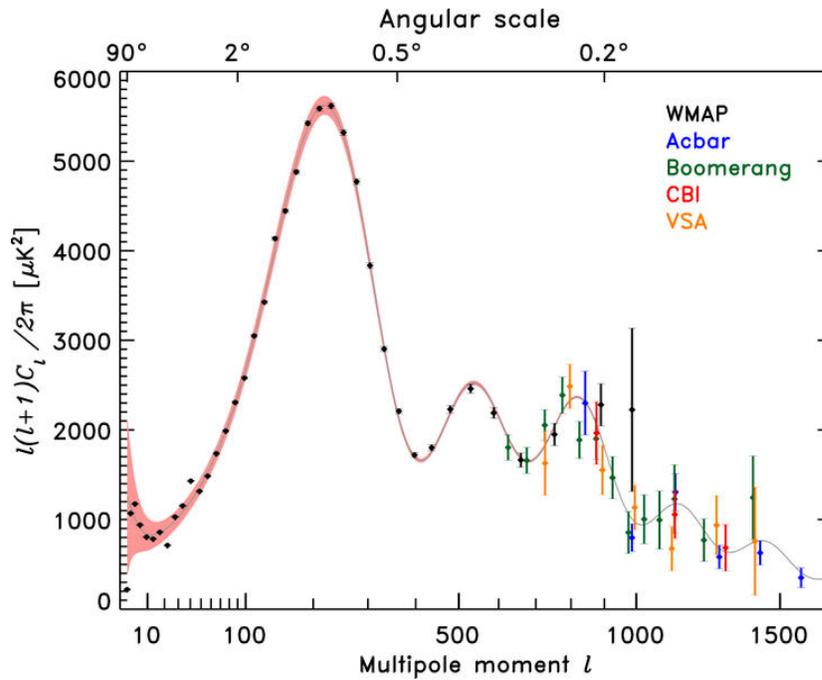


Figura 1.4: Espectro de potencias de las anisotropías del CMB en términos de la escala angular (multipolos). Tomado de los resultados del WMAP [35].

posición del pico a esa resolución angular, es consistente con un Universo espacialmente plano ($\Omega_0 \approx 1$) y dominado por materia y energía oscura.

¿Qué causa las fluctuaciones? Aquí es donde juega un papel importante la distribución de materia oscura en el Universo temprano. Considérese dos escenarios, correspondientes a dos resoluciones angulares distintas: $\theta > 1$ ($l < 180$) y $\theta < 1$ ($l > 180$). En el primer caso, las fluctuaciones de temperatura (a grandes escalas) surgen del efecto gravitacional de la fluctuación en la densidad de materia oscura en la época de la última dispersión. En esta época, la densidad de energía de la materia oscura ($\approx 1,8 \times 10^{12} \text{MeV m}^{-3}$), es aproximadamente 4,5 veces la densidad de energía de la radiación y 6,5 veces la densidad de la materia bariónica. Supóngase que la densidad de materia oscura se escribe como

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon(\mathbf{r}), \quad (1.35)$$

es decir, la suma del valor promedio más un término de fluctuación en la densidad que depende de la posición. Éste último término está relacionado con un potencial espacialmente variable, $\delta\Phi$, por medio de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2(\delta\Phi) = \frac{4\pi G}{c^2}\delta\epsilon. \quad (1.36)$$

Así, un fotón característico del CMB que se encuentre en un mínimo local del potencial (pozo de potencial), al salir de éste, pierde energía y por consecuencia su longitud de onda está corrida hacia el rojo (redshifted), mientras que un fotón que se encuentra en un máximo del potencial, gana energía al “caer” de éste y por eso su longitud de onda está corrida al ultravioleta (blueshifted). Un cálculo, realizado primeramente por Sachs y Wolfe [36], muestra que

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta\Phi}{c^2}. \quad (1.37)$$

Así, las fluctuaciones de temperatura nos muestran un mapa de las fluctuaciones del potencial debido a la distribución de la materia oscura.

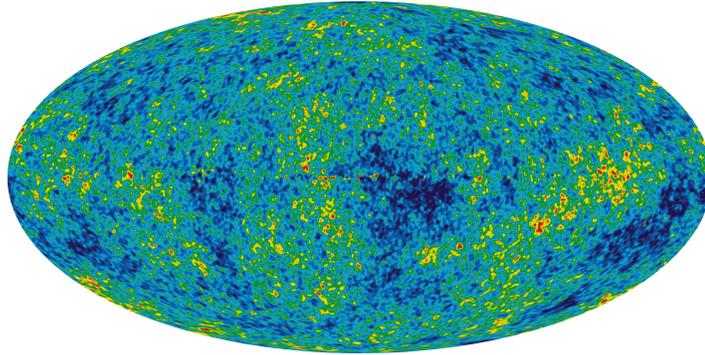


Figura 1.5: Imagen de la anisotropía del CMB registrada por el WMAP. Tomada de [35].

A escalas menores, $\theta < 1$ ($l > 180$), el origen de las fluctuaciones se debe al efecto de oscilaciones acústicas en el fluido fotón-barión. Inmediatamente antes del desacoplamiento del fotón, los electrones, protones y fotones formaban un sólo fluido, cuyo

parámetro de la ecuación de estado, ω_{fb} , se encontraba entre 0 y $1/3$. Primeramente, éste fluido se mueve bajo la influencia de la gravedad de la materia oscura, pero debido a la presencia de fluctuaciones de la materia oscura, el fluido “cae” en el centro de un pozo; debido a la presión ejercida por la gravedad sobre el fluido, éste se expande. Sin embargo, debido a la expansión, la presión disminuye y el fluido nuevamente cae en el pozo de potencial. Los fotones liberados del fluido en el momento del desacoplamiento tendrán más energía (blueshifted) que el promedio si éstos se encuentran en un punto de máxima presión; por otro lado, si los fotones liberados se encuentran en un mínimo de presión, entonces su energía será menor que el promedio (redshifted).

Capítulo 2

Materia oscura

El problema moderno de la materia oscura es conceptualmente muy similar al viejo problema de los planetas no vistos, debido a que se observan en grandes sistemas astrofísicos, desde escalas galácticas hasta astronómicas, algunas anomalías que pueden sólo ser explicadas, o asumiendo la existencia de grandes cantidades de materia que no se ve (materia oscura), o asumiendo una desviación de las leyes conocidas de la gravitación y de la teoría general de la relatividad. Por años, se ha dedicado una gran cantidad de tiempo y esfuerzo para determinar la densidad de materia en el Universo. La razón principal de esta búsqueda es conocer de qué está hecho el Universo, es decir, qué fracción está constituida de estrellas y partículas familiares a la materia bariónica, y qué fracción está constituida de otro tipo de materia desconocida y de qué está formada.

A continuación se presenta un estudio general del tema de materia oscura y su importancia de estudio en la física. Para una revisión detallada del tema, ver las ediciones de Srednicki (1990) [37] y la de Bertone (2010) [38], las cuales son una recopilación extensa del problema de la materia oscura, además de los artículos [39], [40], [41], [42] y [43]

2.1. ¿Qué es la materia oscura?

Por materia oscura se entiende todo aquel tipo de materia en el Universo que no es en general bariónica (en cosmología, por convención, la materia bariónica está constituida por bariones y leptones que es lo que más abunda ¹) y que no absorbe, emite ni dispersa radiación. Este tipo de materia hipotética no puede, en su totalidad, observarse directamente con los medios técnicos actuales, y su existencia se infiere de los efectos gravitacionales que causa en la materia visible. La abundancia de materia en el Universo, de acuerdo al modelo más aceptado, se muestra en la tabla (2.1). En el capítulo 1 se mostró una tabla detallada con todos los componentes de materia y sus contribuciones a la energía del Universo.

Componente	Parámetro de densidad	Porcentaje aproximado
Fotones	Ω_γ	5×10^{-3}
Neutrinos	Ω_ν	$3,4 \times 10^{-3}$
Materia bariónica	Ω_{bary}	4
Materia oscura	Ω_{dm}	26
Energía oscura	Ω_Λ	70

Tabla 2.1: Contribución de los principales componentes a la energía del Universo.

No obstante la gran aceptación que ha tenido la idea de materia no visible en el Universo, ésta no es la única explicación a los fenómenos anómalos que la sugieren. Explicaciones alternativas sugieren desviaciones y modificaciones de las leyes conocidas de la gravitación y de la relatividad general, de tal forma que podríamos estar frente a un paradigma similar al del *éter* y, siendo éste el caso, podría vislumbrarse el límite de validez de las ecuaciones de Einstein.

No hay razón alguna para pensar que lo que se ve es lo único que existe, así como tampoco hay razón para pensar lo contrario. Ejemplo de ello es el descubrimiento del

¹ Bariones y leptones son distintos. La materia bariónica por convención incluye también a los leptones, pero en realidad no es adecuado.

planeta Neptuno, del cual se conjeturó su existencia debido al movimiento anómalo de Urano, lo que derivó en el descubrimiento de un nuevo planeta, y en un triunfo más de las leyes de la gravitación de Newton. Por otro lado, siguiendo el método anterior, fue evidente el fracaso de éste al intentar explicar el comportamiento anómalo de Mercurio sugiriendo la existencia del planeta Vulcano. Este fenómeno pudo sólo ser explicado con la relatividad general.

Independiente de las explicaciones al fenómeno, es un hecho observacional que la materia conocida de la que están formadas las galaxias y demás objetos en el Universo, sólo contribuye en un cuatro por ciento a la energía total del Universo. Los esfuerzos actuales se centran en la búsqueda de una partícula que, en determinada abundancia, resuelva tal paradigma, y en nuevos modelos teóricos fundamentales.

2.2. Evidencias de materia oscura

Como ya se ha mencionado anteriormente, uno de los fenómenos que sugiere la existencia de materia oscura en el Universo es la influencia gravitacional que ésta tiene sobre los objetos visibles. Históricamente, el primer astrónomo en sugerir la existencia de una gran cantidad de materia no visible en el Universo fue Fritz Zwicky, en 1933 [44], al aplicar el teorema del virial al cúmulo de Coma. El teorema del virial es una herramienta útil para estudiar sistemas galácticos gravitacionalmente estacionarios. Uno de esos sistemas es el cúmulo de galaxias Coma, cuyo radio es de aproximadamente 3 Mpc y sus galaxias se mueven a velocidades no relativistas. Debido a esas consideraciones, es posible tratar el cúmulo de Coma en una manera Newtoniana ².

² Esto puede tener sus inconvenientes, pues aquí se supone que las leyes de Newton son válidas y tienen la misma forma a cualquier escala, lo cuál no es necesariamente cierto. En [45] se muestra un análisis del teorema utilizando MOND (MODified Newtonian Dynamics).



Figura 2.1: Cluster COMA de galaxias

El teorema del virial se escribe como [46]

$$\ddot{I} = 2W + 4K, \quad (2.1)$$

donde I , W y K son el momento total de inercia, la energía potencial y la energía cinética del cúmulo respectivamente. Si el sistema es estacionario, entonces $\dot{I} = 0$, esto implica, entre otras cosas, que el sistema no se expande o contrae y que el centro de masas del cúmulo está en reposo. A partir de estas consideraciones se tiene

$$K = -\frac{W}{2}. \quad (2.2)$$

Utilizando este resultado es posible tener una estimación de la masa total del cúmulo,

$$M = \frac{\langle v^2 \rangle r_h}{\alpha G}. \quad (2.3)$$

La última ecuación indica que es posible estimar la masa en términos del radio y velocidad promedio y un factor numérico característico del tipo de cúmulo. Una vez que estos parámetros se conocen, es posible estimar la masa total del cúmulo de Coma, siendo ésta aproximadamente $2 \times 10^{15} M_{\odot}$. Por otro lado, la masa del mismo cúmulo, calculada a partir de la luminosidad de las estrellas, es $3 \times 10^{13} M_{\odot}$ de materia estelar y $2 \times 10^{14} M_{\odot}$ de gas interestelar, dando un total de $2,3 \times 10^{14} M_{\odot}$. De esto se puede ver

que menos del quince por ciento de la masa estimada mediante el teorema del virial, es materia visible. Este mismo método de estimación se ha aplicado a otros cúmulos. Si la masa de todos los cúmulos se contabilizara, ésta contribuiría en un veinte por ciento a la densidad de energía del Universo.

Otra evidencia observacional en favor de la idea de materia oscura, la constituye el estudio de las curvas de rotación de gas ionizado en galaxias espirales. En 1970 los astrónomos Vera Rubín y Kent Ford [47] estudiaron las líneas de emisión de regiones de gas hasta un radio de 24 kpc (más allá de la región óptica visible de la galaxia) encontrando que la velocidad orbital no decae como el comportamiento Kepleriano predice. La velocidad de rotación se obtiene midiendo el corrimiento al rojo de cierto sector de la galaxia, restado de la velocidad con que la galaxia completa se aleja de la nuestra y multiplicado por un factor que depende de la inclinación con la que se observa,

$$v(R) = \frac{v_r(R) - v_{gal}}{\sqrt{1 - b^2/a^2}}. \quad (2.4)$$

Considerando que la distribución de masa de la galaxia es esféricamente simétrica y que la materia mantiene una órbita circular en cualquier parte de tal galaxia, es fácil demostrar que

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad (2.5)$$

de donde podemos inferir que mientras más alejado se esté del centro de la galaxia, la velocidad radial decaerá como $1/\sqrt{R}$, lo cuál no sucede.

A partir de este hecho observacional, se ha sugerido que existe una distribución de materia no visible alrededor de la galaxia, la cual afecta gravitacionalmente a la materia lejana del centro. Como la misma autora sugiere [48]: *la diferencia entre la distribución de materia deducida a partir de la luminosidad, y la distribución de masa*

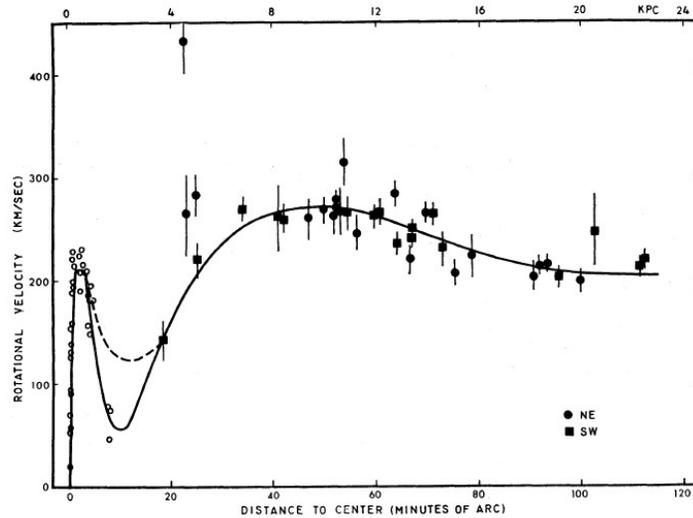


Figura 2.2: Curvas de rotación. Análisis de la galaxia M31. Tomado del original [47].

deducida a partir de las curvas de rotación, ofrece fuerte evidencia a favor de que las galaxias espirales están inmersas en halos extendidos de materia oscura.

Otra evidencia observacional viene del fenómeno de lentes gravitacionales que se produce debido al doblamiento de la luz proveniente de galaxias lejanas en presencia de un objeto masivo. Tal como lo predice la relatividad de Einstein, la materia afecta gravitacionalmente a la luz, desviándola de su trayectoria recta. Así pues, si la materia oscura interactúa con la materia ordinaria por medio de la gravedad, también la luz se verá afectada por la presencia de materia aunque ésta no se vea. De la misma forma que la luz se dobla en presencia de una lente física por medio del fenómeno de refracción, así también en presencia de un objeto “muy masivo” existente entre una fuente de luz y un observador, los haces de luz emitidos por la fuente y posteriormente deflectados por el objeto masivo, convergen en el punto donde el observador se encuentra. Los objetos masivos que producen tales efectos se conocen como MACHOs (MASSive Compact Halo Objects) y serán estudiados en la siguiente sección.

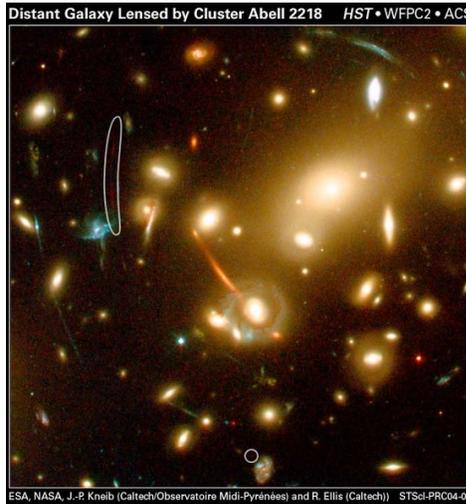


Figura 2.3: Fenómeno de lentes gravitacionales observados en el cúmulo de galaxias Abell 2218

Observaciones recientes (principalmente las llevadas a cabo por los satelites COBE y WMAP) del análisis de la radiación cósmica de fondo, sugieren que el Universo contiene sólo una pequeña parte de materia ordinaria como constituyente de energía.

2.3. Clasificación de la materia oscura

Con base en la naturaleza de sus constituyentes, la materia oscura puede dividirse en dos tipos llamados: bariónica y no bariónica. Diferentes mediciones de la anisotropía de la radiación cósmica de fondo predicen un valor de la densidad de bariones de $\Omega_b \approx 0,04$ lo cual es mucho menor que la densidad total de materia predicha por las mismas observaciones $\Omega_M \approx 0,30$. Lo anterior indica que la mayor parte de la materia en el Universo es de naturaleza no bariónica. Las discusiones de la materia oscura típicamente consideran dos extremos: materia oscura fría (CDM) y materia oscura caliente (HDM).

La materia oscura caliente está compuesta de partículas que se mueven con velocidades ultra-relativistas (como ejemplo, los neutrinos) de tal forma que de acuerdo a la

teoría cinética de los gases forman gases muy calientes. Por otro lado, la materia oscura fría está compuesta de objetos suficientemente masivos de tal forma que se mueven a velocidades sub-relativistas para formar gases muy fríos. La diferencia entre materia oscura fría y caliente es significativa en la formación de estructura debido a que las altas velocidades de la materia oscura caliente causa la formación de estructura a pequeñas escalas. La evolución de las perturbaciones en el Universo depende de las propiedades microscópicas de las partículas de materia oscura. Después de la época en que el Universo está dominado por materia, las perturbaciones de densidad de materia oscura empiezan a crecer y conducen a las oscilaciones del fluido fotón-barión alrededor de los pozos de potencial gravitatorios de la materia oscura. Poco después de la recombinación, los bariones se desacoplan cinemáticamente de los fotones y permanecen atrapados en los pozos de potencial. Sus perturbaciones de densidad entonces crecen para formar las estructuras que actualmente se observan. Como ya se ha visto en el capítulo anterior, la evolución de la estructura a pequeña escala sólo puede ser explicada si se considera materia oscura fría³.

2.4. Candidatos a materia oscura

La naturaleza, composición y abundancia de la materia oscura aún es un misterio, pero el hecho de que contribuye en una gran parte a la energía total del Universo, ha llevado a la constante proposición de candidatos viables que expliquen el fenómeno. Identificar la naturaleza de la materia oscura es uno de los problemas abiertos más importantes en la cosmología moderna. Si bien explicaciones alternativas han sido propuestas en términos de gravedad modificada [50], las discrepancias observadas en

³ La diferencia sustancial es que para materia oscura caliente, el derramamiento libre (free-streaming) afecta su espectro de potencias (power spectrum) en la época de dominación materia-radiación, lo cual no sucede con materia oscura fría. Para un análisis detallado, ver [49].

sistemas astrofísicos a escala cosmológica parecen ser mejor entendidos en términos de una componente de materia oscura aún no descubierta. En 2008, Taoso y Bertone [51] propusieron una prueba de diez requisitos que debe cumplir todo candidato a ser materia oscura.

El componente de materia visible que se conoce es la materia bariónica, es decir, materia compuesta por protones, neutrones y (por convención) electrones. De este tipo de materia están compuestas las estrellas y en general, todo lo que se ve. No obstante, existe un tipo de materia que no se ve y que abunda en el Universo y que no está compuesta de bariones. La materia, como ya se ha mencionado, se clasifica en dos tipos: bariónica y no bariónica

Materia bariónica

Por materia bariónica se entiende toda aquella materia que está constituida de bariones, es decir, de partículas subatómicas formadas por tres quarks. Los bariones, junto con los mesones (compuestos de un quark y un antiquark), conforman la familia de los hadrones. Existen distintos tipos de bariones, pero los más comunes son los protones y neutrones, de los cuales está constituida casi toda la materia que se conoce. Como se ha mencionado en el capítulo anterior, gran parte de la materia bariónica que se puede detectar, se encuentra en estado de plasma y el restante en estrellas y otros objetos. Los bariones se han descartado como candidatos a materia oscura debido a que no se ha detectado observacionalmente en las cantidades que requiere ésta última. No sólo eso, sino que las predicciones de nucleosíntesis primordial indican que la materia bariónica contribuye aproximadamente en un 4.5 % a la energía total del Universo. No obstante lo anterior, existen objetos constituidos de materia ordinaria (enanas café, enanas blancas, estrellas de neutrones y hoyos negros) los cuales son masivos y compactos (MACHOS) y son detectados mediante el fenómeno de lente gravitacional. Aunque se estima que el 20 % de la masa total del halo de una galaxia está formada por MACHOS [52] [53], no

contribuyen en mucho a la densidad total de materia y energía del Universo.

Materia no bariónica

Por materia no bariónica se entiende cualquier tipo de partícula no constituida de bariones y leptones. Esta puede estar formada por especies extrañas de materia no visible, tales como partículas supersimétricas u otras no pertenecientes al modelo estándar.

La distinción entre materia bariónica y no bariónica resulta de especial importancia en cosmología, ya que la cantidad de materia bariónica presente en el Universo primitivo determina en gran medida los modelos de nucleosíntesis producidos en el momento de la gran explosión. La mera existencia de bariones resulta ya un hecho cosmológico significativo, puesto que se presupone que en la gran explosión se produjo una cantidad igual de bariones y de antibariones. No obstante, es un hecho observacional que actualmente hay una desigualdad entre la cantidad de bariones y antibariones en el Universo. El proceso mediante el cual el número de bariones supera al de sus antipartículas es llamado bariogénesis, y se explica suponiendo que el Universo muy temprano fue perfectamente simétrico, pero algún tipo de fenómeno produjo la asimetría observada. Un proceso similar puede ser el causante de la formación de materia no-bariónica en el Universo temprano.

2.4.1. Remanentes térmicos y no-térmicos

Los remanentes térmicos son evidenciados experimentalmente y se dicen térmicos debido a que en algún punto en el pasado, tales partículas estuvieron en equilibrio térmico con el plasma primordial. En algún momento se enfriaron, para permanecer constante el número de partículas y posteriormente cesaron de interactuar con el plasma para evolucionar solamente mediante gravedad (ejemplos de ello son el fotón y el neutri-

no). Los remanentes no-térmicos en cambio, nunca estuvieron en equilibrio térmico con el plasma primordial. Producidos durante transiciones de fase en el Universo temprano, los remanentes no-térmicos evolucionan gravitacionalmente desde el momento de su creación, interactuando gravitacionalmente con el plasma primordial. Para el caso de remanentes no-térmicos, los modelos más allá del modelo estándar de partículas proveen varios candidatos, entre los cuales están LSP (Lightest Supersymmetric Particle) y LKKP (Lightest Kaluza Klein Particle); esas partículas no interactúan ni por interacción fuerte ni electromagnética, y por lo tanto se clasifican como WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles).

2.4.2. Modelo estándar de neutrinos

Los neutrinos son partículas de tipo fermiónico, se considera que actualmente tienen masa distinta de cero pero hasta el momento sólo se ha establecido un límite superior. La contribución a la energía total del Universo predicha en los modelos cosmológicos es

$$\Omega_\nu = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^3 \frac{m_{\nu i}}{93eV}, \quad (2.6)$$

donde $m_{\nu i}$ es la masa de cada uno de los tres tipos de neutrino (electrónico, muónico y tauónico).

Las mejores pruebas de laboratorio en el análisis de decaimiento β establecen un límite superior para la masa de los tres tipos (sabores) de neutrino de

$$m_{\nu 1} \leq 0,05 \text{ eV}, \quad m_{\nu 2} \leq 0,007 \text{ eV}, \quad m_{\nu 3} \leq 0,007 \text{ eV}. \quad (2.7)$$

Usando la ecuación (2.6), se tiene $\Omega_\nu \approx 10^{-3}$, indicando que solamente el 0,1% de la energía del Universo está constituida de neutrinos. Este resultado descarta a los neutrinos como constituyentes de la materia oscura.

2.4.3. Neutrinos estériles

En 1993, Dodelson y Widrow [54] propusieron como candidatos a materia oscura a los neutrinos estériles, los cuales son neutrinos ordinarios masivos pero con *helicidad* derecha. Los resultados experimentales muestran que todos los neutrinos observados tienen helicidad izquierda (el espín es antiparalelo al momento), y todos los antineutrinos tienen helicidad derecha (el espín es paralelo al momento) siendo que para cada partícula sólo es observada una helicidad. Es posible que sus contrapartes (neutrinos con helicidad derecha y antineutrinos con helicidad izquierda) en realidad no existan, sin embargo, en el caso de existir, su masa sería muy grande (del orden de energías de gran unificación $\approx 10^{15} GeV$) y no participarían en la interacción débil, de ahí el calificativo de estériles. Dodelson y Widrow demostraron que el único mecanismo para producir neutrinos estériles era vía oscilaciones de neutrinos en el Universo temprano, siendo éstos un fuerte candidato para materia oscura caliente. Investigaciones en el experimento *MiniBooNE* [55] anunciaron que aún no se ha encontrado alguna evidencia soportando la existencia de tal neutrino estéril.

2.4.4. Axiones y gravitones

En física de partículas, el axi3n es una partícula hipotética, aún no descubierta, postulada en la teoría Peccei-Quinn [56] para explicar la conservación de la simetría CP. La simetría CP es el producto de dos simetrías: C, la cual transforma una partícula en su antipartícula, y P, la cual crea la imagen espejo de un sistema físico (paridad). Las interacciones fuerte y electromagnética parecen ser invariantes bajo transformaciones CP, pero su simetría es ligeramente violada durante algunos tipos de decaimiento débil. En el contexto de la Cromodinámica Cuántica (QCD), se agrega al lagrangiano un término que corresponde a una partícula bosónica (bosón de Goldstone), la cual resulta

del rompimiento espontáneo de la simetría Peccei-Quinn. En cosmología, el axión es un fuerte candidato a materia oscura fría, y su abundancia depende del momento en que se rompe la simetría de Peccei-Quinn (antes o después de la inflación). La masa del axión, se predice que es del orden de los μeV [57] [58], sin embargo no hay resultados que avalen su existencia debido a que ésta partícula interactuaría débilmente con la materia ordinaria.

Los gravitones, los cuales son las partículas mediadoras de la fuerza de gravedad, aunque difíciles de detectar, son un fuerte candidato a materia oscura. Las implicaciones cosmológicas, resultado de su posible existencia, revelan que es posible tener un Universo expandiéndose sin necesidad de una energía oscura [59]. Observaciones a distintas escalas, predicen una energía para el gravitón de aproximadamente $10^{-57\pm 5}g$. Estimaciones y algunos criterios de detección de gravitones se mencionan en las referencias [60] y [61]

2.4.5. Partículas supersimétricas

En la física de partículas, la supersimetría (SUSY) es una simetría que relaciona partículas elementales de un espín con otras partículas que difieren por media unidad de espín y son conocidas como superparejas ⁴. Como se verá más adelante, ésta teoría es una posible solución al *problema de la jerarquía* debido a que reduce el tamaño de las correcciones cuánticas por medio de cancelaciones automáticas entre las interacciones de Higgs bosónicas y fermiónicas. Las partículas supersimétricas son los candidatos más populares, de los cuales, las LSP (Partícula supersimétrica más ligera) son candidatos viables para ser materia oscura⁵ [62] [63].

⁴ Cada fermión tiene un bosón asociado y viceversa.

⁵ Esto es una consecuencia de la conservación de la R-paridad en el modelo MSSM (Minimal Supersymmetric Standard Model), lo cual garantiza que la partícula LSP es estable, y si es neutra es un candidato viable para materia oscura.

Neutralinos

En la teoría supersimétrica, el neutralino es la combinación de estados higgsinos con gauginos (Superparejas de los bosones de higgs y de norma respectivamente). Las propiedades exactas de cada neutralino dependen de la combinación, pero en general tienen masas en la escala débil (100 GeV - 1TeV). En este sentido, son fenomenológicamente similares a los neutrinos, y no son directamente observables en detectores de partículas. El neutralino es el candidato más popular y fuerte para la materia oscura fría debido a que sus predicciones a bajas velocidades sugieren que son muy masivos.

Sneutrinos

Los sneutrinos son las superparejas de los neutrinos del Modelo Estándar en modelos supersimétricos. Modelos teóricos sugieren que los sneutrinos pueden tener importantes consecuencias cosmológicas si sus masas están en el rango de 550 a 2300 GeV [64]. Sin embargo, su sección transversal de dispersión con nucleones es mucho más grande que los límites encontrados por experimentos de detección directa de materia oscura.

Gravitinos y axinos

Estas partículas hipotéticas, superparejas del gravitón y axión, son partículas fermiónicas, ligeras y estables que comparten propiedades fenomenológicas. Ambas partículas son candidatos para ser materia oscura caliente, sin embargo son descartadas para ser detectadas experimentalmente debido a su poca o nula interacción con la materia ordinaria [65] [66].

2.4.6. Modelos Higgs-pequeño

Como un mecanismo alternativo (a supersimetría) para estabilizar la escala débil, los modelos *Higgs pequeño* se han propuesto y desarrollado con gran interés en la actualidad [67] [68]. Los modelos Higgs pequeño están basados en la idea de que el *bosón de Higgs* es un pseudo-bosón de Goldstone que surge de alguna simetría global que se rompe a la escala de TeV.

Al menos dos variedades de modelos Higgs pequeño han mostrado contener posibles candidatos a materia oscura. Uno de ellos, llamado TSLHM (Theory Space Little Higgs Model) [69], provee una posible partícula escalar la cual puede explicar la densidad observada de materia oscura. Cheng y Low [70] han desarrollado otra variedad de modelo Higgs pequeño motivados por el *problema de la jerarquía* entre la escala electrodébil y las masas de las nuevas partículas que son restringidas por la precisión de las mediciones. Ellos resuelven este problema introduciendo una nueva simetría en la escala TeV la cual resulta en la existencia de un candidato WIMP estable con una masa $\approx TeV$.

2.4.7. Estados de Kaluza-Klein

Los estados excitados de Kaluza-Klein [KK] de los campos del Modelo Estándar, los cuales aparecen en modelos de dimensiones extra universales, han sido considerados también como un candidato viable para materia oscura [71] [72]. Como se verá en el siguiente capítulo, una característica de teorías extra-dimensionales, es que bajo compactificación de las dimensiones extra, todos los campos propagándose en el Universo de dimensión mayor tienen su momento cuantizado en unidades de

$$p^2 \approx 1/R^2, \quad (2.8)$$

donde R es el radio de compactificación. El resultado es que para cada campo aparece un conjunto de modos llamados estados Kaluza-Klein. Desde el punto de vista de nues-

tro mundo cuatro dimensional, estos estados aparecen como una serie de estados (torre de Kaluza-Klein) con masas $m_n = n/R$. Debido a que se estima que el radio de compactificación es del orden de $10^{-33}cm$, los estados son muy masivos. Un candidato para materia oscura es la llamada partícula LKP (Lightest Kaluza-Klein Particle) [73], asociada a la primera excitación [KK] del fotón.

2.4.8. Campo escalar

Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, una componente con ecuación de estado $-1 < \omega < -1/3$ es llamada *quintaesencia*, la cual originalmente está asociada con la energía del vacío [74] y se diferencia de la constante cosmológica en que depende del tiempo. En los modelos QCDM, esta componente es introducida en la acción Einstein-Hilbert (1.8) como un campo escalar Φ asociado a un potencial escalar $V(\Phi)$,

$$S = \int \left(\frac{1}{2\kappa} R + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - V(\Phi) + L_M \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.9)$$

de tal forma que las nuevas ecuaciones cosmológicas son [54]

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\epsilon + \epsilon_\Phi) \quad (2.10)$$

y

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} = -\frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi}, \quad (2.11)$$

donde ϵ y $\epsilon_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)$ son las densidades de materia y quintaesencia respectivamente. La presión correspondiente a ϵ_Φ es $P_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)$.

Para determinar completamente la solución de este esquema, es indispensable conocer la forma del potencial $V(\Phi)$. Una forma del potencial, consistente con la era de dominación materia-radiación tiene la forma [75]

$$V(\Phi) = V_0 [\cosh(\alpha\sqrt{\kappa_0}\Delta\Phi) - 1]^\beta, \quad (2.12)$$

donde

$$\alpha = \frac{-3\omega_{\Phi}}{2\sqrt{3(1+\omega_{\Phi})}}, \quad (2.13)$$

$$\beta = \frac{2(1+\omega_{\Phi})}{\omega_{\Phi}}, \quad (2.14)$$

$$\kappa_0 = 8\pi G, \quad (2.15)$$

y ω_{Φ} es la ecuación de estado de la materia oscura.

Para valores $\alpha\sqrt{\kappa_0}\Delta\Phi \ll 1$, se tiene un comportamiento potencial, mientras que para $\alpha\sqrt{\kappa_0}\Delta\Phi \gg 1$, se tiene un comportamiento exponencial.

Recientemente, Matos⁶ y Ureña [76] han propuesto dos potenciales escalares que están de acuerdo con las observaciones cosmológicas para una componente de materia oscura (campo escalar Φ)

$$V(\Psi) = V_0 [\sinh(\alpha\sqrt{\kappa_0}\Delta\Psi)]^{\beta}, \quad (2.16)$$

y una componente de energía oscura (campo escalar Ψ)

$$V(\Phi) = V_0 [\cosh(\alpha\sqrt{\kappa_0}\Delta\Phi) - 1]^{\beta}. \quad (2.17)$$

Este nuevo componente es sugerido para explicar las observaciones cosmológicas a niveles galácticos [77].

2.4.9. MOND

Una explicación alternativa a la materia oscura es la modificación a la dinámica de Newton (MOND), la cual es una versión modificada de las leyes de Newton y que se sustenta en las observaciones astronómicas para su formulación [50]. MOND inicia con la introducción de una nueva constante fundamental, a_0 ($\approx 10^{-10}m/s^2$), con las

⁶ Tonatiuh Matos y su grupo [75] [76] [77] han trabajado en el problema de materia oscura por varios años, siendo el campo escalar una de sus principales líneas de investigación.

dimensiones de aceleración. Esta constante, en caso de existir, marcaría la línea entre la física a grandes aceleraciones (régimen newtoniano) y la física a bajas aceleraciones (régimen MOND), de la misma forma que lo hace \hbar en el contexto de la mecánica cuántica, y c en la relatividad especial. Aunado a esta hipótesis, se requiere que la fuerza gravitacional no dependa solamente de la masa m de un cuerpo, sino de la forma $m\mu(a/a_0)$, donde μ es alguna función que cumple la condición $\mu(x) = 1$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $\mu(x) = x$ cuando $x \rightarrow 0$ [78]. De esta forma, la aceleración es sustituida por la expresión

$$a \rightarrow \mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a, \quad (2.18)$$

de tal forma que para $a \gg a_0$, la aceleración queda inalterada, mientras que para $a \ll a_0$, la “nueva” aceleración es a^2/a_0 .

Para explicar el comportamiento anómalo de las curvas de rotación en las galaxias espirales, uno debe sustituir la expresión anterior en la ley de gravitación universal,

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \quad (2.19)$$

Así, lejos del centro de una galaxia de masa M , un objeto de masa m experimentará una fuerza,

$$F = \frac{GMm}{r^2} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a. \quad (2.20)$$

A escalas galácticas se asume $a \ll a_0$, por lo tanto,

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{a^2}{a_0} \quad (2.21)$$

ó

$$a = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r}. \quad (2.22)$$

Finalmente, es bien sabido que para una órbita circular,

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad (2.23)$$

y comparando éstas dos últimas ecuaciones,

$$v = \sqrt[4]{GMa_0}. \quad (2.24)$$

Consecuentemente la velocidad de las estrellas en órbita circular alrededor del centro galáctico no depende de la distancia r , explicando el por qué las curvas de rotación son planas; de esa forma, no es necesario considerar materia oscura en los halos galácticos. Debido a la falta de sustento teórico, esta propuesta (MOND) es poco popular y en algunos casos ni siquiera es tomada en serio.

2.5. Técnicas de detección

Las observaciones cosmológicas conllevan sin duda alguna al planteamiento de diversas propuestas con respecto a la composición del Universo, esto debido a que el modelo estándar de partículas es insuficiente para explicar los fenómenos a gran escala del Universo. Bajo el estudio incipiente de la extensa gama de partículas masivas (WIMP'S), existen diferentes experimentos enfocados a detectarlas. Para tal efecto es necesario conocer la forma en que las partículas de materia oscura interactúan con la materia ordinaria. Y es aquí donde radica el problema, ya que por definición, la materia oscura no interactúa (o interactúa muy débilmente) con la materia ordinaria, por lo que es muy difícil de detectarla directamente. Existen dos tipos de detección de la materia oscura: directa e indirecta. En la primera, se estudia la dispersión de la materia oscura fuera del núcleo del material detectante, pero como esta sección transversal es muy pequeña, la energía depositada por una partícula de materia oscura sobre el núcleo

detector es también muy pequeña. En la detección indirecta, se observa el producto de la aniquilación de la materia oscura. Si una partícula de materia oscura es atrapada por el campo gravitacional solar [79], entonces puede aniquilarse con otra para producir una partícula del modelo estándar.

2.5.1. Detección directa

Los experimentos de detección de materia oscura se llevan a cabo en laboratorios subterráneos profundos con la finalidad de reducir la interferencia de rayos cósmicos. Algunos de ellos son: *Soudan Mine* en Minnesota⁷, *SNOLAB* en Canadá⁸, el *Gran Sasso National Laboratory* en Italia⁹, el *Boulby Underground Laboratory* en el Reino Unido¹⁰ y el *DUSEL* en Dakota del sur¹¹.

Tipos de detectores y proyectos

Existen dos tipos de detectores: criogénico y de destello. En el primero, se trabajan temperaturas por debajo de los 100 mK y se detecta el calor producido cuando una partícula golpea un átomo del material cristalino detector. Este es quizá el más simple de todos los métodos de detección y consiste en medir fotones individuales o cuantos de calor que surgen de la interacción. El segundo tipo de detector observa el efecto de ionización: La partícula WIMP golpea algunos electrones de los átomos de un gas, resultando en iones excitados, los cuales eventualmente recapturan un electrón y regresan a la normalidad. En algunos materiales éste proceso va acompañado de un pequeño destello debido a la emisión de fotones; ésta emisión es corta (alrededor de 10 ns).

⁷ <http://www.soudan.umn.edu/index.html>

⁸ <http://www.snolab.ca/>

⁹ <http://www.lngs.infn.it/>

¹⁰ <http://www.hep.shef.ac.uk/research/dm/boulby/boulby.php>

¹¹ <http://www.dusel.org/>

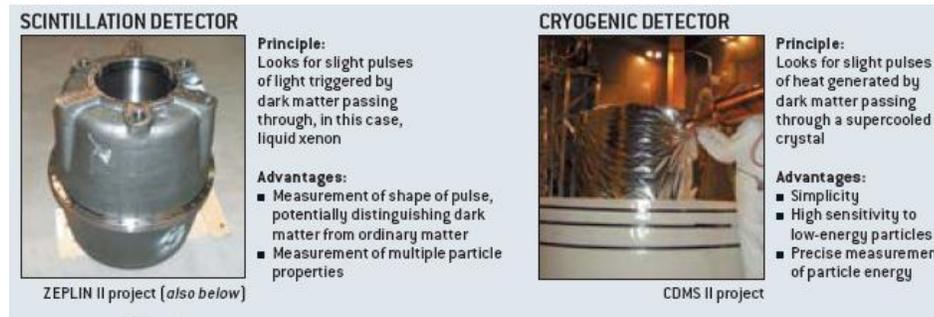


Figura 2.4: Tipos de detectores de materia oscura

Entre los experimentos más populares con detectores criogénicos existen: *Cryogenic Dark Matter Search* [80], *CRESST* [81], *EDELWEISS* [82] y *EUREKA*¹². Entre los proyectos con detectores de destello más conocidos están: *ZEPLIN* [83], *XENON* [84], *ArDM* [85], *LUX* [86] y *DAMA* [87].

El proyecto *DAMA/NAI* (y posteriormente *DAMA/LIBRA*) [88] detectó una modulación anual en la razón de eventos, lo cual es atribuido a la materia oscura. Sin embargo, el problema de *DAMA* (y que causa gran escepticismo) es que no usa múltiples detectores para discriminar entre las señales y el ruido. Recientemente (2009), el proyecto *CDMS II* [89] ha reportado dos eventos, basados en sus estimaciones, probables de partículas WIMPs.

Teoría de la detección directa

La razón de detección de la materia oscura por unidad de masa detectora, R , se escribe como¹³

$$\frac{dR}{d|q|^2} = N_T \Phi \frac{d\sigma}{d|q|^2} \int f(v) dv, \quad (2.25)$$

donde N_T es el número de blancos nucleares por unidad de masa detectora, Φ es el flujo de materia oscura, v la velocidad en el sistema de referencia de la tierra, con $f(v)$ su

¹² <http://www.ai-lab.it/eureka/>

¹³ Para una discusión detallada del tema de la detección directa, ver las notas de Armengaud [90] y [91]

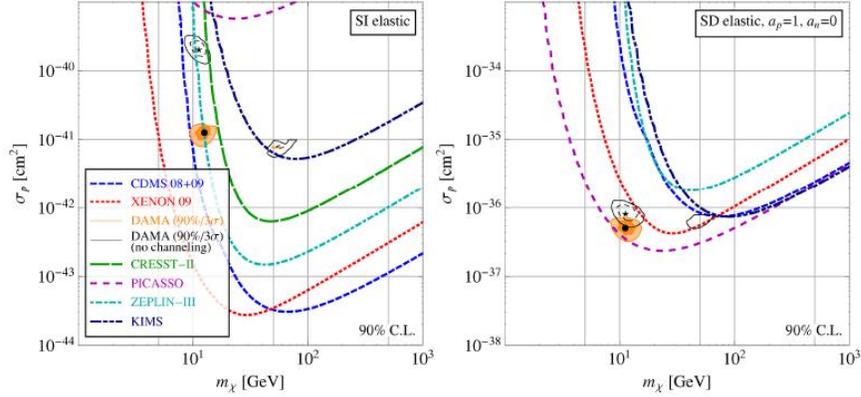


Figura 2.5: Últimos resultados de diferentes proyectos comparados con el proyecto CDMS II, publicado en 2010 [89].

distribución, y la integración es sobre todas las posibles configuraciones en el proceso de dispersión. Además $|q|^2$ es el momento transferido al núcleo del material detector,

$$|q|^2 = 2m_{red}^2 v^2 (1 - \cos\theta), \quad (2.26)$$

con

$$m_{red}^2 = \frac{m_\xi m_{nuc}}{m_\xi + m_{nuc}}, \quad (2.27)$$

donde θ es el ángulo de dispersión, m_ξ y m_{nuc} son las masas de materia oscura y nuclear respectivamente. La energía de retroceso es

$$E_R = |q|^2 / 2m_{nuc}. \quad (2.28)$$

Ahora expresando Φ en términos de la densidad local ρ_ξ , la velocidad v y la masa m_ξ de la materia oscura, y notando que $N_T m_{nuc} = 1$, se tiene

$$\frac{dR}{dE_R} = 2 \frac{\rho_\xi}{m_\xi} \frac{d\sigma}{d|q|^2} \int_{V_{min}}^{\infty} f(v) dv, \quad (2.29)$$

$$V_{min} = \left(\frac{m_{nuc} E_R}{2m_{red}^2} \right)^{1/2}. \quad (2.30)$$

En la ecuación (2.29) la *sección transversal diferencial* para la interacción escalar se puede escribir como

$$\frac{d\sigma}{d|q|^2} = \frac{\sigma_{scalar}}{4m_{red}^2 v^2} F^2(E_R). \quad (2.31)$$

En ésta última expresión, σ_{scalar} es la sección transversal de la interacción materia oscura-núcleo y $F(E_R)$ es un factor nuclear dado por

$$F(E_R) = \frac{3j_1(qR_1)}{qR_1} \exp(q^2 s^2 / 2), \quad (2.32)$$

$$R_1 = (r^2 - 5s^2)^{1/2}, \quad (2.33)$$

$$r = 1,2A^{1/3}, \quad (2.34)$$

donde el parámetro de espesor de la superficie nuclear está dado por $s \approx 1 \text{ fm}$, A es el número de masa del núcleo y $j_1(qR_1)$ es la función esférica de Bessel de orden 1.

El término dR/dE_R puede ser calculado para el caso particular de un material detector. La densidad local total ρ_ξ es generalmente tomada como $0,3 \text{ GeV/cm}^3$.

La función de distribución $f(v)$ y v pueden ser obtenidas haciendo la transformación

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{gal} - \mathbf{v}_{tierra}, \quad (2.35)$$

donde v_{tierra} es la velocidad de la tierra con respecto al sistema galáctico en reposo y está dado por

$$v_{tierra} = v_\odot + v_{orb} \cos\gamma \cos\left(\frac{2\pi(t - t_0)}{T}\right). \quad (2.36)$$

En la última expresión $T = 1$ año, el periodo del movimiento de la tierra alrededor del sol, t_0 es un valor fijo el 2 de Junio ¹⁴, v_{orb} es la velocidad orbital, $\gamma = 60$ es el ángulo subtendido por el plano orbital de la tierra en el plano galáctico. La velocidad v_\odot del sistema solar se encuentra en el rango ($170 \text{ km/s}, 270 \text{ km/s}$). La ecuación de arriba indica que anualmente debe existir una modulación, la cual ha sido reportada

¹⁴ Corresponde a la fecha en la cual la velocidad de la Tierra relativa al halo de materia oscura es máxima. Para una revisión detallada, ver [92]

solamente por el proyecto *DAMA* y ésta modulación se debe al movimiento de la tierra alrededor del sol, el cual cambia de direccionalidad cada año. Esto induce una variación anual de la velocidad de la materia oscura con respecto a la tierra (máxima cuando la velocidad de la tierra se agrega a la velocidad del sistema solar, y mínima cuando éstas son opuestas).

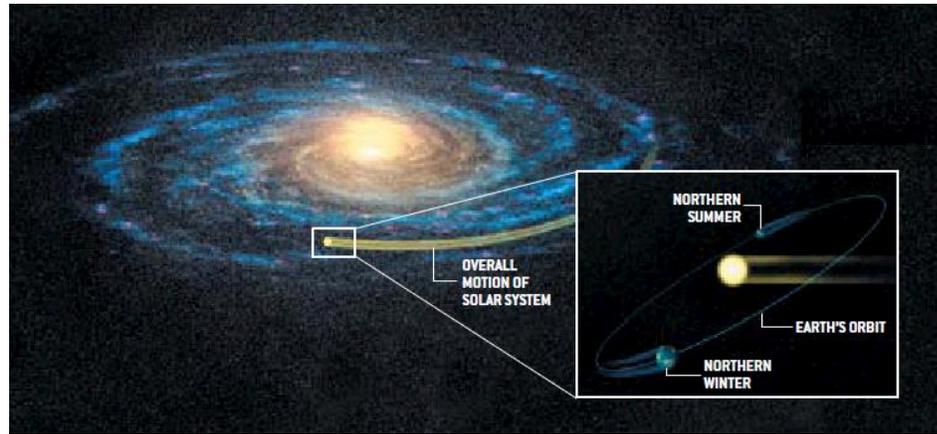


Figura 2.6: Modulación debido a la rotación de la tierra alrededor del sol.

2.5.2. Detección indirecta

La técnica de detección indirecta es la menos estudiada, debido a que la detección de partículas tales como rayos gamma, antiprotones, positrones o neutrinos no necesariamente es debido a la aniquilación de materia oscura. El proyecto PAMELA (lanzado en el 2006) [93] ha detectado un exceso de positrones, los cuales podrían ser producidos por la aniquilación de WIMPs, pero también pueden provenir de púlsares.

Una partícula de materia oscura (WIMP) pasando a través del sol es candidato a perder energía y, debido a la acumulación de tales partículas dentro del sol, podría colisionar. Esto puede producir una señal en forma de neutrinos originados dentro del sol. Existen detectores de neutrinos de alta energía tales como *AMANDA*, *IceCube* [94], y *ANTARES* [95] en busca de evidencia indirecta de la materia oscura.

2.6. La materia y la cosmología moderna

Recordando la concepción atomista de la materia (según Leucipo y Demócrito alrededor del siglo V y VI a.C.), los cuerpos están constituidos de átomos: unas partículas materiales, indestructibles, desprovistas de cualidades y que no se distinguen entre sí más que por su forma y dimensión. De acuerdo a esta concepción, gracias a la forma que tiene cada átomo, es que pueden ensamblarse (aunque nunca fusionarse) y formar los cuerpos. Los átomos de un cuerpo se separan cuando colisionan con otro conjunto de átomos; los átomos que quedan libres chocan con otros y se ensamblan o quedan libres hasta encontrar otro cuerpo. No fue sino hasta el siglo XIX (con el estudio de los modelos atómicos, desde John Dalton hasta Schrödinger) que se demostró la existencia de tal átomo, pero con el avance de la física nuclear en el mismo siglo se descubrió que el átomo puede subdividirse en partículas más elementales.

Las tres generaciones de la Materia (Fermiones)

	I	II	III	
masa →	3 MeV	1.24 GeV	172.5 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	u up	c charm	t top	γ photon
	6 MeV	95 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Quarks	d down	s strange	b bottom	g gluon
	<2 eV	<0.19 MeV	<18.2 MeV	90.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z⁰ fuerza débil
	0.511 MeV	106 MeV	1.78 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	±1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Leptones	e electron	μ muon	τ tau	W[±] fuerza débil
				Bosons (Fuerzas)

Figura 2.7: Modelo estándar de partículas

Hoy en día es por demás sabido que toda la materia conocida está formada de

protones, neutrones y electrones. Los protones y neutrones a su vez están constituidos de quarks, de los cuales existen seis tipos (sabores). Los quarks no son las únicas partículas fundamentales, ya que, a parte del electrón, el cual es un leptón, existen otras cinco clases de leptones. A cada partícula corresponde una antipartícula. Existen tres tipos de partículas que median las fuerzas: fotón (fuerza electromagnética); gluón (fuerza fuerte); bosones $W, \pm Z$ (fuerza débil) y bosón de Higgs (aún no descubierto). El modelo estándar de partículas es, por tanto, la teoría que describe las partículas fundamentales de la materia y sus interacciones.

Aparentemente todas las interacciones están descritas por éste modelo. Desafortunadamente, la teoría no considera la fuerza de gravedad, y es que hasta hoy no ha sido posible detectar la partícula mediadora de la interacción gravitacional: el gravitón¹⁵. Esto da pie a uno de los problemas fundamentales de la teoría cuántica de los campos, la unificación de las fuerzas, pues hasta el momento no se ha desarrollado una teoría cuántica de la gravedad completa. La teoría de cuerdas es un intento por describir las partículas e interacciones considerando éstas como expresiones de un objeto básico fundamental (cuerda) y que se manifiesta en forma de un determinado tipo de partícula dependiendo de su modo de vibración.

En la cosmología moderna, uno de los problemas a resolver es el de la composición del Universo; de la descripción del contenido de materia y energía, su origen y sus propiedades. Las teorías más allá del modelo estándar de partículas (supersimetría), dan cuenta de una nueva familia de partículas, hasta hoy no descubiertas, que podrían conformar la mayor parte de materia en el Universo. Por otro lado, teorías modificadas de la gravedad de Newton y la relatividad general, así como teorías de Universos múlti-

¹⁵ Estrictamente hablando, una teoría cuántica de la gravitación requiere que el gravitón opere de forma similar al fotón, lo cual no sucedería, debido a que los gravitones experimentarían interacciones mutuas, creando complejas redes de gravitones virtuales (lazos cerrados) que no admiten renormalización. En este caso, se dice que una teoría cuántica de la gravedad es no-renormalizable.

ples se están proponiendo como una posible explicación a los fenómenos cosmológicos observados. Con el tiempo, a medida que los datos observacionales arrojen suficiente información acerca del Universo, a la vez que se avance en el conocimiento de la física de partículas y se desarrolle una teoría completa de los campos, entonces se estará en posibilidades de establecer con precisión de qué está hecho el Universo.

Capítulo 3

Dimensiones extra, cuerdas y branas

La posibilidad de que nuestro Universo tenga más de tres dimensiones espaciales ha sido un tema atractivo y de reciente interés en los últimos años. Una fuerte motivación para considerar espacios multidimensionales viene de las teorías que consideran a la gravedad (por ejemplo, teoría de cuerdas y teoría M), pues la mayoría de estas versiones son naturalmente formuladas en un espacio-tiempo de más de cuatro dimensiones. En forma paralela al estudio fundamentalmente teórico de estos modelos, existen estudios fenomenológicos con la finalidad de determinar si los modelos de dimensiones extra ayudan a resolver los problemas de la teoría de partículas y la cosmología (problema de la jerarquía, constante cosmológica, materia oscura, etc.)

3.1. Origen de la idea de dimensiones extra

La idea de dimensiones extra fue propuesta en 1914 por Gunnar Nordstrom¹ [97], quien introdujo una dimensión adicional en el desarrollo de su teoría de gravitación, la cual fue precedente de la teoría general de la relatividad y la primera teoría de

¹ En [96] se ofrece una breve reseña histórica con respecto a las contribuciones de Nordstrom.

dimensiones extra. En 1921, Theodor Kaluza [98] publica la primera formulación de la relatividad general extendida a 5 dimensiones. En 1926 Oscar Klein [99] propone que la cuarta dimensión espacial está enrollada y confinada en un pequeño círculo de radio R , tal que una partícula moviéndose una pequeña distancia a lo largo de este radio, regresa a donde estaba en un principio.

El mecanismo de Kaluza-Klein asume que nuestro mundo, más que 4-dimensional, es $(4 + n)$ -dimensional, $n \geq 1$, con las dimensiones extra compactificadas².

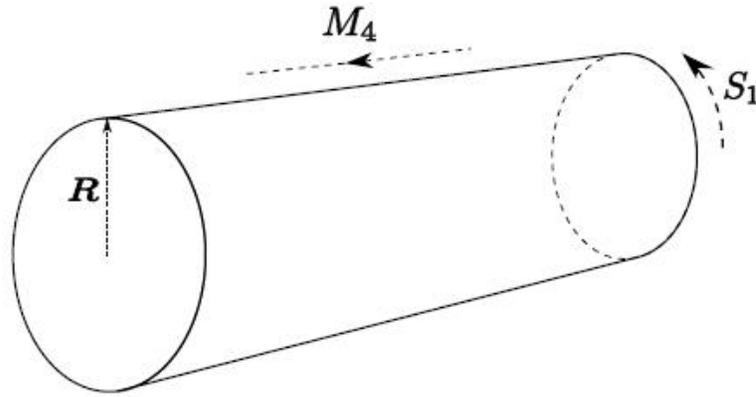


Figura 3.1: Ilustración del Universo conocido (variedad M_4) con una dimensión adicional compactificada en un círculo (S_1).

Como se muestra en la figura (3.1), donde $n = 1$, el Universo se representa como el producto directo del espacio 4-dimensional de Minkowski M_4 y un círculo S_1 de radio R . Todos los campos del modelo estándar están definidos sobre este *cilindro*. Un campo escalar puede escribirse como $\Phi(x_\mu, y) = \Phi(x_\mu, y + 2\pi R)$, y debido a esa periodicidad en la coordenada extra, el campo puede ser escrito en series de Fourier,

$$\Phi(x_\mu, y) = \sum_{k=0, \pm 1, \dots} \phi_k(x_\mu) e^{iky/R}. \quad (3.1)$$

² Para una revisión detallada de la teoría de Kaluza-Klein, ver [100].

Los coeficientes de expansión dependen solamente de las coordenadas x_μ , y son a menudo llamados *modos*. El modo cero corresponde a $k = 0$. Cada modo cero está acompañado por modos no cero, $k \neq 0$, los cuales son llamados excitaciones de Kaluza-Klein.

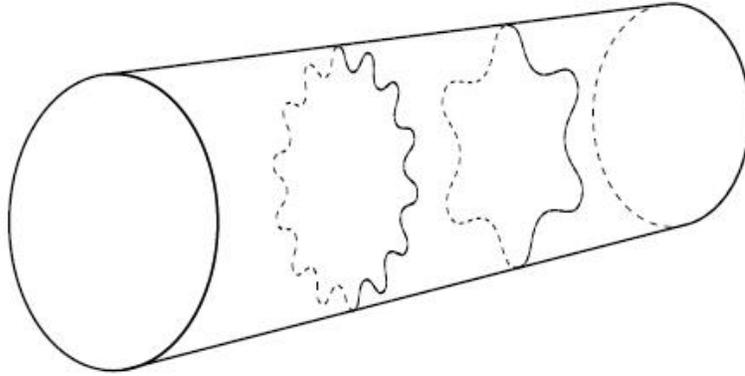


Figura 3.2: Ilustración de los diferentes modos de excitación K-K. Las partículas fundamentales no son puntuales, sino modos de vibración de un objeto extendido fundamental (cuerda).

Desde el punto de vista 4-dimensional, los modos $\phi_k(x_\mu)$ representan una torre regular de campos cuatro-dimensionales (torre de Kaluza-Klein).

Partiendo de la ecuación de Klein-Gordon cinco-dimensional y asumiendo que el campo $\Phi(x_\mu, y)$ no tiene masa, entonces

$$\left(\partial_\mu^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x_\mu, y) = 0. \quad (3.2)$$

Sustituyendo la descomposición de Fourier (3.1) en ésta última se encuentra,

$$\left(\partial_\mu^2 + \frac{k^2}{R^2} \right) \phi_k(x_\mu) = 0. \quad (3.3)$$

El modo cero permanece aún sin masa, mientras que los otros modos son masivos, con $|k|/R$ jugando el papel de masa,

$$m_k = |k|/R \quad (3.4)$$

Cada modo Kaluza-Klein (KK) puede interpretarse como un tipo separado de partícula con masa $m_k = |k|/R$. Cada campo multi-dimensional corresponde a una torre de Kaluza-Klein de partículas cuatro-dimensionales con masas crecientes. A bajas energías, sólo las partículas menos masivas (en la escala $1/R$) pueden ser producidas (a energías $E \approx 1/R$, las dimensiones extras se manifiestan). Siendo que los equivalentes K-K de las partículas ordinarias (electrones, fotones, etc.) no se han observado, la escala de energía $1/R$ debe estar por lo menos en el rango de cientos de GeV, tal que en el escenario Kaluza-Klein, el tamaño de las dimensiones extras debe ser microscópico ($R \ll 10^{-17} \text{ cm}$). Estas propiedades son inherentes en todos los modelos del tipo K-K.

3.2. Problema de la jerarquía

En la física de partículas el problema de la jerarquía se refiere a la pregunta del por qué la fuerza débil es 10^{32} veces más grande que la gravedad. Ambas fuerzas involucran constantes de la naturaleza, la constante de Fermi para la fuerza débil y la constante de Newton para la gravedad. Un problema de jerarquías ocurre cuando los parámetros fundamentales de algún lagrangiano son muy diferentes de los parámetros medidos por el experimento. Esto pasa porque los parámetros medidos se relacionan con los parámetros fundamentales mediante *renormalización*. La renormalización determina la relación entre los parámetros en la teoría cuando los parámetros que describen escalas grandes difieren de los parámetros que describen escalas pequeñas. Más técnicamente, el problema es que el bosón de Higgs es mucho más ligero que la masa de Planck (aproximadamente 17 ordenes de magnitud). Estudiar la renormalización en problemas de jerarquía es complicado, debido a que tales correcciones cuánticas son usualmente

divergentes en potencias, lo cual significa que la física cuántica a pequeñas distancias (teoría cuántica de la gravedad) es necesaria. Este problema tiene dos posibles soluciones: supersimetría y teorías de dimensiones extra.

3.3. Supersimetría

Como es bien sabido, en el modelo estándar de partículas existe una distinción fundamental entre bosones y fermiones: mientras los bosones son mediadores de las interacciones, los fermiones son los constituyentes de la materia. Naturalmente surge la siguiente pregunta: ¿existe una simetría que relacione ambos tipos de partículas, proveyendo de una especie de unificación entre materia e interacciones? Otra forma de establecer el problema es preguntarse si existe un grupo de Lie que combine las simetrías internas (isoespines) y las simetrías espaciotemporales (Lorentz). De acuerdo al teorema Haag Lopuszanski Sohnius (1975) [101], las posibles simetrías de una teoría cuántica del campo 4-dimensional, deberían no solo consistir de simetrías internas y simetrías de Poincaré, sino de supersimetrías cuyos generadores Q transformen partículas bosónicas en fermiónicas.

$$Q |\text{fermión}\rangle = |\text{bosón}\rangle, \quad (3.5)$$

$$Q |\text{bosón}\rangle = |\text{fermión}\rangle. \quad (3.6)$$

Todas las partículas del modelo estándar dan correcciones radiativas a sus masas, pero mientras las masas fermiónicas crecen logarítmicamente, las masas escalares crecen cuadráticamente con la energía, dando correcciones de [102]

$$\delta m_s^2 \approx \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \Lambda^2, \quad (3.7)$$

donde Λ es una energía de corte a la cual se espera que la nueva física juegue un papel importante. Las correcciones radiativas a la masa del Higgs (la cual se estima que sea

de la escala electrodébil $M \approx 100 \text{ GeV}$) destruye la estabilidad de la escala electrodébil si Λ es del orden de la masa de Planck ($\approx \text{TeV}$) [103]. Una corrección a la ecuación (3.7) incluye contribuciones fermiónicas y bosónicas de la forma,

$$\delta m_s^2 \approx \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) (\Lambda^2 + m_B^2) - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) (\Lambda^2 + m_F^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) (m_B^2 - m_F^2). \quad (3.8)$$

En supersimetría, se garantiza que $|m_B^2 - m_F^2| < 1\text{TeV}$, y por lo tanto, la divergencia cuadrática es cancelada a todos los órdenes de teoría de perturbaciones, resolviendo el problema jerárquico.

El álgebra de supersimetría garantiza la existencia de nuevas partículas asociadas a las del modelo estándar con la misma masa y opuesto tipo de espín. En el modelo MSSM (Minimal Supersymmetric Standar Model), se considera el mínimo de campos necesarios de tal forma que se obtengan todos los campos del modelo estándar a través de un *superpotencial*.

Para todos los campos de norma: Gluones g , bosones W^\pm y bosones B , se tienen sus parejas fermiónicas, *gluinos* (\tilde{g}), *winos* (\tilde{W}^i) y *binos* (\tilde{B}) respectivamente. Las parejas escalares de los fermiones, es decir, quarks y leptones, son llamadas *squarks* y *sleptones*. Se introduce además, un campo adicional de Higgs y se asocia un *higgsino* a cada bosón de Higgs.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, el *neutralino*, el cual es una superposición de los estados binos, winos y higgsinos, es un fuerte candidato a materia oscura. Los axinos, gravitinos y sneutrinos son considerados como candidatos viables en algunos modelos [104] y [105].

Partículas y campos del modelo estándar		Parejas supersimétricas			
Símbolo	Nombre	Eigenestados de interacción		Eigenestados de masa	
		Símbolo	Nombre	Símbolo	Nombre
$q = d, c, b, u, s, t$	quark	\tilde{Q}_L, \tilde{Q}_R	squark	\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2	squark
$l = e, \mu, \tau$	leptón	\tilde{L}_L, \tilde{L}_R	sleptón	\tilde{L}_1, \tilde{L}_2	sleptón
$\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	neutrino	$\tilde{\nu}$	sneutrino	$\tilde{\nu}$	sneutrino
g	gluón	\tilde{g}	gluino	\tilde{g}	gluino
W^\pm	bosón-W	\tilde{W}^\pm	wino	} $\tilde{\chi}_{1,2}^\pm$	chargino
H^-	bosón de Higgs	\tilde{H}_1^-	higgsino		
H^+	bosón de Higgs	\tilde{H}_2^+	higgsino		
B	campo-B	\tilde{B}	bino	} $\tilde{\chi}_{1,2,3,4}^0$	neutralino
W^3	campo- W^3	\tilde{W}^3	wino		
H_1^0	bosón de Higgs	\tilde{H}_1^0	higgsino		
H_2^0	bosón de Higgs	\tilde{H}_2^0	higgsino		
H_3^0	bosón de Higgs				

Figura 3.3: Partículas del modelo estándar y sus parejas supersimétricas.

3.4. Cuerdas, branas y universos brana

Existe una teoría que logra dar una descripción cuántica de la gravedad: la teoría de cuerdas. La idea básica de esta teoría consiste en que, lo que se denominan partículas puntuales son en realidad objetos extendidos unidimensionales (cuerdas) que se propagan en el espacio-tiempo describiendo superficies de mundo bidimensionales. Los modos de vibración de estas cuerdas representan, o son observados como, las diferentes partículas fundamentales. Esta teoría es consistente y describe la gravedad cuánticamente si el número de dimensiones del espacio-tiempo es 10.

Originalmente la primera teoría de cuerdas fue formulada sin supersimetría y requería de un espacio-tiempo de 26 dimensiones para su consistencia. Aquí las dimensiones espaciales adicionales eran compactificadas implementando la idea de Kaluza-Klein. En 1984 Michael Green y John Schwartz [106] y otros autores se percataron de que cuando se incorporaba la supersimetría a la teoría de cuerdas, la mecánica cuántica no tenía problemas con los infinitos. A esta teoría se le denominó de supercuerdas y requirió de un espacio-tiempo de 10 dimensiones para su formulación, donde nuevamente

las seis dimensiones extras eran compactificadas de acuerdo con la idea de Kaluza-Klein. A esta serie de eventos suele llamársele la primera revolución de las teorías de cuerdas. Uno de los obstáculos principales para poner a prueba la teoría de cuerdas consiste en que la escala de energía, masa de Planck $M_{Planck} = 1,2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ (aquí $c = 1$), en la que sus efectos se manifiesten, está abrumadoramente fuera del alcance de los aceleradores de partículas actuales.

De tomarse en serio esta teoría, debe ser posible explicar el hecho de que sólo se han observado cuatro dimensiones. Una manera de explicar la manifestación de las otras seis dimensiones consiste en suponer que se encuentran compactificadas (enrolladas) en círculos de radios muy pequeños ($O(1/M_{Planck})$). Esta visión permite seguir el desarrollo de la teoría, sin embargo, la consecuencia inmediata es una aparente imposibilidad de verificación experimental. Recientemente, y con el propósito de replantear algunos de los problemas fenomenológicos, varios autores han sugerido que la compactificación no tiene que ser tan pequeña. Concretamente, si uno se imagina que todos los campos del modelo estándar “viven” sólo en cuatro dimensiones y por ende sólo la gravedad experimenta todo el espacio de fondo³, entonces es posible replantear la aparente debilidad de esta última interacción en términos de un factor de volumen. Así, lo que se tiene por la escala fundamental, M_{Planck} , ahora es reemplazada por una “verdadera” escala fundamental M_* , las cuales están relacionadas por

$$M_{Planck} = M_*^{n+2} V_n, \quad (3.9)$$

donde n es el número de dimensiones extras y V_n es el volumen del espacio extra.

De esta manera es posible ahora tener valores para la escala fundamental muy por debajo de la escala M_{Planck} y posiblemente accesibles a experimentación. Más aún, al

³ Por espacio de fondo o *bulk*, se entiende el espacio $(n + 4)$ – dimensional, $n \geq 1$, en el cual se encuentra inmerso nuestro Universo.

tener una escala fundamental pequeña se resuelve el problema de la jerarquía del modelo estándar. El valor preciso del tamaño máximo posible es una cuestión experimental al irse buscando desviaciones a la ley de la gravedad a distancias cada vez más pequeñas.

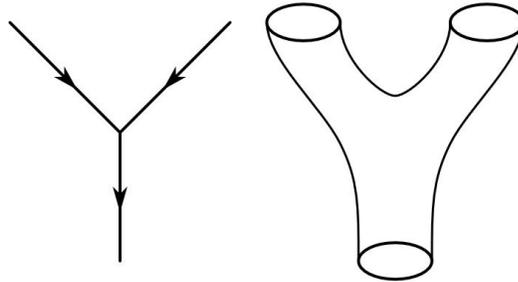


Figura 3.4: En la teoría de cuerdas, la trayectoria lineal de una partícula puntual, es en realidad una superficie bidimensional que se propaga en el Universo $(4 + n)$ – *dimensional*.

A finales de 1990 Joseph Polchinski y otros autores [107] mostraron que las teorías de cuerdas contienen además objetos extendidos. Estos son llamados Dp-branas, D por Dirichlet, y p es el número de sus dimensiones espaciales. Por ejemplo, una 0-brana es una partícula puntual, una 1-brana es una cuerda y una 2-brana es una membrana. El interés en las p-branas radica en el hecho de que poseen simetría de norma. Dicha simetría se origina debido a que uno de los extremos de la cuerda abierta finaliza en la brana. Consistente con esta idea, Petr Hovara y Edward Witten [108] consideraron teorías de cuerdas con dos 10-branas encajadas en un espacio tiempo de 11 dimensiones. A bajas energías la gravedad se propaga en el espacio-tiempo multidimensional mientras el resto de los campos se localizan en las branas. Es importante enfatizar que estas ideas habían aparecido en años anteriores independientemente de las teorías de cuerdas en los trabajos de Rubakov y Shaposhnikov [109] y de Akama [110]. En estos casos, el confinamiento es implementado a través del acoplamiento de la materia a campos escalares. Motivado por estos trabajos Visser [111] mostró que la materia puede también

ser confinada debido a la gravedad de la brana.

Inspirados por la teoría de cuerdas, se han propuesto modelos denominados mundos brana que adoptan la idea de dimensiones espaciales extras. En estos modelos se estudia la contribución de las dimensiones extras a procesos físicos. Aunque ha sido estudiado el problema de conectar esos modelos con la teoría de cuerdas, esto aún sigue siendo un proceso muy complejo. Sin embargo, debido a que aún no es posible obtener predicciones fenomenológicas contundentes de la teoría de cuerdas, es viable explorar estos modelos como una primera aproximación a la fenomenología de cuerdas. Los modelos de mundos brana resurgieron con gran impacto después de los trabajos de Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD) [112] y de Randall y Sundrum (RS) [113] en 1998 y 1999, respectivamente. En estos modelos nuestro Universo es considerado como una hipersuperficie llamada brana cuya dimensión es $3+1$, es decir, tres dimensiones espaciales y una temporal, la cual reside en un espacio-tiempo hiperdimensional de dimensión $D = 4 + n$. Aquí 4 representa la dimensión de nuestro mundo cuatro dimensional y n el número de dimensiones espaciales adicionales. Una característica de los mundos brana radica en que la gravedad se propaga en todo el espacio tiempo hiperdimensional, mientras que los campos del modelo estándar están localizados en ella. Por localización se entiende que las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes, así como la materia de nuestro Universo deben estar atrapadas en la brana. Únicamente la gravedad puede escapar de esta superficie y propagarse a través del volumen del espacio tiempo de dimensión D .

La localización de la materia a lo largo de la brana explica por qué la física a bajas energías es efectivamente cuatro dimensional para todas las interacciones excepto para la gravedad y por lo tanto estas dimensiones extras no pueden “verse”. Existen diferentes mecanismos que permiten localizar los campos del modelo estándar en la brana; también se consideran simetrías especiales en las dimensiones extra llamadas

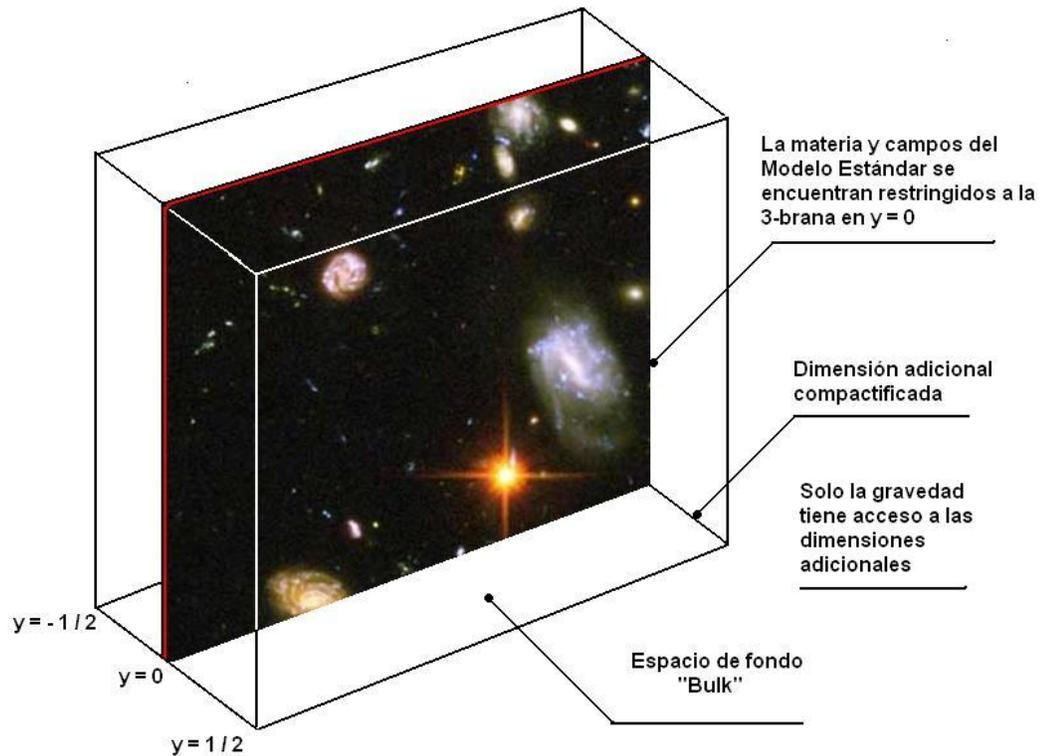


Figura 3.5: Nuestro Universo puede verse como una brana o hipersuperficie de cuatro dimensiones (3-brana) inmersa en un espacio de más dimensiones (bulk).

orbifold ó se consideran defectos topológicos como tipo *cuerdas cósmicas* y *paredes*.

Capítulo 4

El modelo

El modelo a trabajar en esta tesis es el de un Universo de cuatro dimensiones inmerso en un espacio de cinco dimensiones¹. En el lenguaje de mundos branas, la materia del Universo está contenida en una 3-brana (tres dimensiones espaciales y una temporal), es decir, una hipersuperficie inmersa en un espacio de cinco dimensiones donde la quinta dimensión está compactificada²; de tal forma que se estudian las consecuencias cosmológicas a partir de este modelo. Dependiendo del número de dimensiones adicionales (como es el caso de los modelos de Horava-Witten o el de Randall-Sundrum) se tendrán consecuencias cosmológicas. No obstante, en este trabajo sólo se considera el caso de una dimensión adicional. El hecho de considerar a la quinta dimensión compactificada dará pie a la introducción de una *brana adjunta* a nuestro Universo de tal forma que sea posible estudiar el fenómeno de materia oscura como la influencia gravitacional de una brana sobre la otra. El propósito de ésta sección es estudiar el tipo de distribución de materia que debe existir en la brana adjunta, tal que conlleve a un Universo expandiéndose y dominado por materia oscura y constante cosmológica.

¹ Concretamente las tres primeras secciones de este capítulo están basadas en los resultados y notación de Langlois [114].

² Para una revisión detallada de la teoría de cuerdas y branas, ver [115].

4.1. Ecuaciones G-C y condiciones de juntura

En la presente sección se muestra un análisis formal de la cosmología de un Universo brana de cuatro dimensiones, el cual se describe mediante las ecuaciones de Einstein para cualquier número de dimensiones. Posteriormente se restringe éste estudio a un Universo de sólo cuatro dimensiones espaciales.

El propósito de esta sección es dar un análisis de una 3-brana viviendo en un espacio-tiempo 5-dimensional. Para esto, es útil acudir a una bien conocida técnica en relatividad general, la cual consiste en descomponer las ecuaciones de Einstein en una parte tangencial a la superficie bajo consideración, una parte normal a esta y finalmente una parte mixta (siendo que las ecuaciones de Einstein son tensoriales de orden dos). Esto lleva en particular a las llamadas ecuaciones G-C (Gauss-Codacci). Esta técnica fué utilizada para estudiar cascarones delgados en relatividad general y es la clave para estudiar los problemas análogos de branas [116].

Primeramente se define el vector unitario n^A normal a la hoja de mundo de la 3-brana ($A = 1, \dots, 5$). Nótese que éste campo vectorial es espacial, es decir,

$$g_{AB}n^An^B = 1. \quad (4.1)$$

La métrica inducida sobre la hoja de mundo de la brana es definida por

$$h_{AB} = g_{AB} - n_An_B. \quad (4.2)$$

Una cantidad útil es la curvatura extrínseca, K_{AB} (también llamada segunda forma fundamental), la cual es definida por la expresión

$$K_{AB} = h_A^C \nabla_C n_B, \quad (4.3)$$

con ∇_C la derivada covariante compatible con g_{AB} . Este tensor puede ser interpretado como representando el doblamiento de la hoja de mundo de la 3-brana en el

espacio-tiempo 5-dimensional. Como se va a demostrar más adelante, las ecuaciones cosmológicas no convencionales, son una consecuencia directa del hecho que K_{AB} no es cero en la presencia de materia confinada a la brana, lo cual significa que la métrica 5-dimensional depende necesariamente de la quinta dimensión.

El tensor de Einstein 5-dimensional \tilde{G}_{AB} puede ser descompuesto en las siguientes proyecciones³ :

$$\tilde{G}_{AB}n^An^B = -1/2R_{(4)} + 1/2(K^2 - K_{AB}K^{AB}), \quad (4.4)$$

$$n^A\tilde{G}_{AB}h_C^B = D_AK_C^A - D_CK, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{AB}h_C^Ah_D^B = &^{(4)}G_{CD} - KK_{CD} - n^E\nabla_EK_{CD} + D_Ca_D - 2n_{(C}K_{D)E}a^E - a_Ca_D \\ &+(1/2K^2 + 1/2K_{AB}K^{AB} + n^A\nabla_AK - \nabla_Ba^B)h_{CD}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $R_{(4)}$ es el escalar de curvatura 4-dimensional, $a^B = n^C\nabla_Cn^B$ es el campo vectorial de aceleración, D_A es la derivada covariante asociada con la métrica inducida h_{AB} , $K = g^{AB}K_{AB}$ es la traza del tensor de curvatura extrínseco, y el paréntesis alrededor de los índices denota simetrización con peso 1/2. Las ecuaciones de arriba se obtienen directamente de las relaciones de Gauss-Codacci, de hecho, estas ecuaciones son simplemente una forma de escribir las ecuaciones de Einstein en términos de la curvatura extrínseca⁴.

El tensor de momento energía asociado con la brana puede ser escrito en la forma,

$$T_B^A(brana) = S_B^A \frac{\delta(y)}{b}, \quad (4.7)$$

donde b es la componente \tilde{g}_{55} en la ecuación (4.14)

Este tensor es regular en la vecindad de $y = 0$ y es dependiente de y . La métrica se asume que es continua. Así, sólo la segunda derivada de la métrica con respecto a

³ Para una demostración detallada, ver [117].

⁴ Para una revisión detallada de las herramientas matemáticas de la dinámica de branas, ver [118].

la coordenada normal y puede contener una distribución de Dirac, considerando que la curvatura extrínseca puede a lo más contener una distribución Heavyside. Es claro de la descomposición del tensor de Einstein (4.4)-(4.6) dada arriba, que sólo el término $n^E \nabla_E K_\nu^\mu - \delta_\nu^\mu n^C \nabla_C K = \partial_y (K_\nu^\mu - K \delta_\nu^\mu) / b$ contiene segundas derivadas con respecto a la variable y . Esto implica la siguiente ecuación:

$$[K_\nu^\mu - K \delta_\nu^\mu] = -\kappa_{(5)}^2 S_\nu^\mu, \quad (4.8)$$

donde los paréntesis cuadrados aquí denotan la discontinuidad entre los dos lados de la brana. La relación anterior es conocida en relatividad general como las *condiciones de unión* o *condiciones de juntura* de Israel [116]. Esto puede ser reescrito en la forma

$$[K_{\mu\nu}] = -\kappa_{(5)}^2 (S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} S g_{\mu\nu}), \quad (4.9)$$

donde $S \equiv S_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ es la traza de $S_{\mu\nu}$.

Si uno asume adicionalmente una simetría $y \rightarrow -y$ para la métrica, entonces los límites izquierdo y derecho de la curvatura extrínseca son necesariamente opuestos, es decir,

$$[K_{\mu\nu}] = 2K_{\mu\nu}^+ \equiv 2\bar{K}_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Entonces, la ecuación (4.9) indica que la curvatura extrínseca de la brana está *completamente determinada por su contenido de materia*. Nótese también, excepto para el término con segundas derivadas, que todos los otros términos en \tilde{G}_5^5 y \tilde{G}_ν^μ involucrados en la curvatura extrínseca son *cuadráticos* en $K_{\mu\nu}$: esto es compatible con tener la misma materia de fondo sobre ambos lados de la brana si uno tiene simetría $K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^-$, lo cual es el caso aquí.

Insertando la expresión explícita de $\tilde{K}_{\mu\nu}$ dentro de (4.4), lleva a la siguiente expresión para el escalar de curvatura 4-dimensional:

$$R_{(4)} = \frac{\kappa_{(5)}^4}{4} \left(\frac{1}{3} S^2 - S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) - 2\kappa_{(5)}^2 \tilde{T}_5^5. \quad (4.11)$$

Considérese la parte mixta de las ecuaciones de Einstein, es decir, \tilde{G}_μ^5 , correspondiente a la ecuación (4.5). Alrededor de la brana, esta ecuación implica

$$D_\lambda \bar{K}_\mu^\lambda - D_\mu \bar{K} = 0, \quad (4.12)$$

de donde, reescribiendo $\bar{K}_{\mu\nu}$ en términos del tensor momento energía $S_{\mu\nu}$, de acuerdo con (4.9), lleva simplemente a la forma usual de la ley de conservación del momento energía 4-dimensional, es decir,

$$D_\lambda S_\mu^\lambda = 0. \quad (4.13)$$

Es importante notar aquí que no es necesario asumir homogeneidad e isotropía en la brana. Nótese también que esta aproximación es local y nada fue dicho acerca de la naturaleza global del espacio-tiempo 5-dimensional.

4.2. Métrica 5-dimensional

La métrica considerada tiene la siguiente forma

$$ds^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b^2 dy^2, \quad (4.14)$$

donde y es la coordenada de la quinta dimensión la cual se va a asumir compacta, esto es, que el intervalo en que está definida se elige tal que $-1/2 \leq y \leq +1/2$, con los dos puntos del intervalo identificados.

De acuerdo a la cosmología 5-dimensional de Horava-Witten [119], se impone una simetría $y \rightarrow -y$ de lo cual se sugiere, a partir de las condiciones de frontera, la existencia de una segunda brana en $y = 1/2$ mientras que nuestro Universo brana se sitúa en $y = 0$. En particular, es de interés el estudio de una métrica de la siguiente forma

$$ds^2 = -n^2(\tau, y) d\tau^2 + a^2(\tau, y) \delta_{ij} dx^i dx^j + b^2(\tau, y) dy^2, \quad (4.15)$$

donde se ha considerado por simplicidad una métrica espacialmente plana en las coordenadas x^i .

El tensor momento energía acorde a la acción 5-dimensional se divide en dos partes principales: una correspondiente a la materia confinada en la brana y otro correspondiente al espacio de fondo,

$$T^A_B = T^A_B(\text{Fondo}) + T^A_B(\text{Brana}). \quad (4.16)$$

El término $T^A_B(\text{Fondo})$ es el tensor momento energía debido a la geometría del espacio de fondo y/o materia en ese espacio (y probablemente en otras branas), mientras que el segundo término, $T^A_B(\text{Brana})$, corresponde al contenido de materia en la brana ($y = 0$). Este último término puede ser expresado en forma general como

$$T^A_B(\text{Brana}) = \frac{\delta(y)}{b} \text{diag}(-\rho, p, p, p, 0), \quad (4.17)$$

donde la densidad de energía y presión son independientes de la posición en la brana, pues se ha supuesto homogeneidad e isotropía en la brana. Aquí se ha considerado que la materia está contenida en una hipersuperficie infinitamente delgada.

4.3. Ecuaciones de Einstein 5-dimensional

La dinámica de la geometría cinco dimensional está gobernada por las ecuaciones de Einstein.

A partir de la acción,

$$S_{(5)} = -\frac{1}{2k_{(5)}^2} \int d^5x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + \int d^5x \sqrt{-\tilde{g}} L_m, \quad (4.18)$$

se obtienen las ecuaciones

$$\tilde{G}_{AB} = k_{(5)}^2 \tilde{T}_{AB}. \quad (4.19)$$

Las componentes diferentes de cero de estas ecuaciones, para la métrica (4.15), se muestran a continuación

$$\tilde{G}_{00} = 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left[\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right] \right\}, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij} = & \frac{a^2}{b^2} \delta_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2\frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2\frac{a'}{a} \right) + 2\frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \\ & + \frac{a^2}{b^2} \delta_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{n}}{n} \right) - 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) - \frac{\ddot{b}}{b} \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\tilde{G}_{05} = 3 \left(\frac{\dot{a} n'}{a n} + \frac{\dot{b} a'}{b a} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \quad (4.22)$$

$$\tilde{G}_{55} = 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) \right] \right\}. \quad (4.23)$$

De la identidad de Bianchi, $\nabla_A \tilde{G}_B^A$, se deduce la conservación local del momento-energía,

$$\dot{\rho} + 3(p + \rho) \frac{\dot{a}_0}{a_0} = 0, \quad (4.24)$$

donde el subíndice cero indica el valor de a sobre la brana.

Para resolver las ecuaciones de Einstein en la vecindad de $y = 0$ teniendo en cuenta una geometría bien definida, es necesario que la métrica sea continua a través de la brana en $y = 0$ no obstante que su primera derivada puede ser en general discontinua. Las componentes $a(y)$ y $n(y)$ pueden escribirse en general de la siguiente forma:

$$a(y) = f_1(|y|) + g_1(y), \quad (4.25)$$

$$n(y) = f_2(|y|) + g_2(y). \quad (4.26)$$

Al derivar estas últimas dos veces con respecto a la variable y se tiene

$$a'' = \hat{a}'' + [a'] \delta(y), \quad (4.27)$$

$$n'' = \hat{n}'' + [n'] \delta(y), \quad (4.28)$$

donde \hat{a}'' y \hat{n}'' , son las partes no distribucionales (contínuas) de la doble derivada de a , mientras que $[a']$ y $[n']$ es el “salto” en la primera derivada através de y , definida por

$$[a'] = a'(0+) - a'(0-). \quad (4.29)$$

Sustituyendo las expresiones (4.27) y (4.28) en las componentes (4.20) y (4.21) de las ecuaciones de Einstein y evaluando en $y = 0$ con el tensor momento energía (4.17), se tienen las siguientes relaciones (ver apéndice B)

$$\frac{[a']}{a_0 b_0} = -\frac{\kappa_{(5)}^2}{3}\rho, \quad (4.30)$$

$$\frac{[n']}{n_0 b_0} = \frac{\kappa_{(5)}^2}{3}(3p + 2\rho). \quad (4.31)$$

De estas últimas igualdades, se observa que el “salto” o discontinuidad en la primera derivada del factor de escala, a , es debido a la presencia de una distribución de masa en las vecindades de $y = 0$. Este resultado es análogo a la discontinuidad del campo eléctrico en presencia de una distribución superficial de carga

Otra consecuencia importante es que, usando las ecuaciones anteriores en la componente (5, 5) de las ecuaciones de Einstein, se obtiene una ecuación tipo Friedmann,

$$\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + \frac{\ddot{a}}{a_0} = -\frac{\kappa_{(5)}^4}{36}\rho(\rho + 3p) - \frac{\kappa_{(5)}^2 \hat{T}_{55}}{3b_0^2}, \quad (4.32)$$

lo cual indica que el cuadrado del parámetro de Hubble depende del cuadrado de la densidad de energía, en contraste con el resultado usual de la cosmología estándar (1.13). Esto conlleva a una cosmología no-convencional (ver apéndice A).

De manera análoga al análisis visto en el capítulo uno para un Universo plano y dominado por una sólo componente (ecuaciones 1.20 y 1.21), se tiene (ver apéndice A)

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^q, \quad (4.33)$$

con $q = 1/(3 + 3\omega)$ y

$$t_0 = \left(\frac{q - 2q^2}{1 + 3\omega} \right)^{1/2} \frac{1}{H_0}. \quad (4.34)$$

Ahora bien, del electromagnetismo es sabido que no es posible colocar una carga sola en una variedad compacta, de tal forma que se tenga una función de Green solución de $G'' = \delta(y)$. Esto implicaría que las líneas de campo saldrían de la carga y regresarían nuevamente a la misma carga, lo cual es inconsistente con las leyes del electromagnetismo⁵. Para tener una solución viable, es necesario colocar otra carga (de signo contrario) a lo largo de la coordenada compactificada, de tal forma que la nueva función de Green es $G'' = \delta(y) - \delta(y - y_0)$. Análogamente para el caso de una brana con una distribución de momento-energía en una variedad compacta (en $y = 0$), es necesario introducir otra brana (en $y = 1/2$). De esta forma, tenemos una solución métrica de las ecuaciones de Einstein *globalmente definidas*.

Así, es necesario considerar un término adicional en el tensor de momento-energía de la forma

$$T_{*B}^A(Brane) = \frac{\delta(y - 1/2)}{b} \text{diag}(-\rho_*, p_*, p_*, p_*, 0). \quad (4.35)$$

De esta manera, el “salto” en la primera derivada de a en $y = 0$ y $y = 1/2$ es (ver Apéndice C)

$$\frac{[a']_0}{a_0 b_0} = -\frac{\kappa_{(5)}^2}{3} \rho, \quad (4.36)$$

$$\frac{[a']_{1/2}}{a_{1/2} b_{1/2}} = -\frac{\kappa_{(5)}^2}{3} \rho_*. \quad (4.37)$$

La segunda derivada del factor a , considerando la segunda brana, es

$$a'' = [a']_0 (\delta(y) - \delta(y - 1/2)) + ([a']_0 + [a']_{1/2}) (\delta(y - 1/2) - 1), \quad (4.38)$$

⁵ Esto es sencillo de demostrar, si aplicamos la ley de Gauss, $\oint E \cdot nda = q/\epsilon_0$, e integramos sobre la variedad compacta. El resultado es que q necesariamente es cero, lo cual es erróneo.

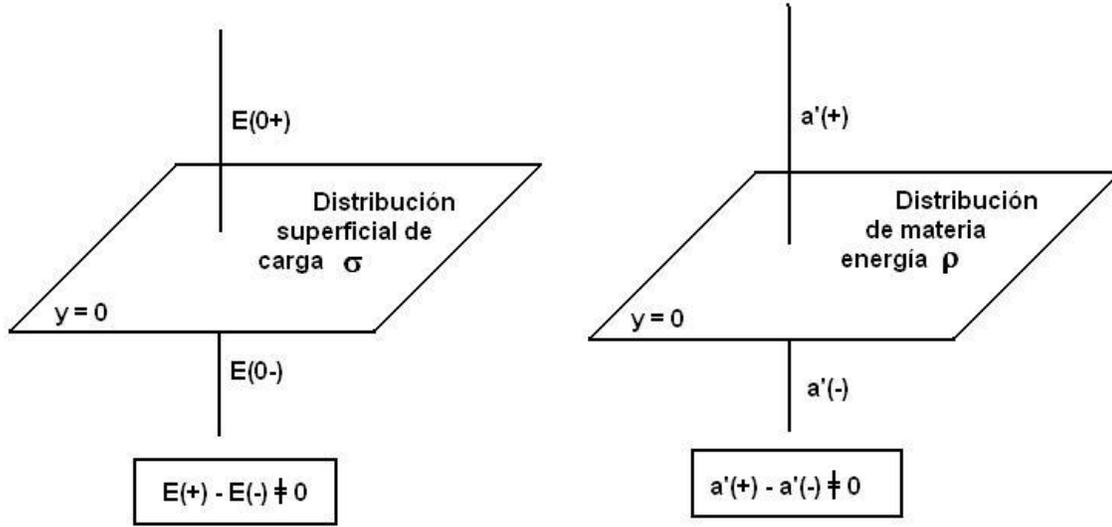


Figura 4.1: Análogamente al caso de una distribución superficial de carga en $y=0$, en presencia de una distribución de materia-energía, el salto en la primera derivada de la métrica en $y=0$ es distinto de cero.

y evaluando ésta última expresión en la componente $(0, 0)$ de las ecuaciones de Einstein, se tiene

$$\frac{[a']_0}{b_0} = -\frac{[a']_{1/2}}{b_{1/2}}, \quad (4.39)$$

ó en términos de la densidad de energía,

$$\rho a_0 = -\rho_* a_{1/2}. \quad (4.40)$$

Esta ecuación indica que la materia existente en una brana está restringida por la materia en la otra brana. Similarmente para n se tiene

$$(2\rho + 3p)n_0 = -(2\rho_* + 3p_*)n_{1/2}. \quad (4.41)$$

Las restricciones entre las dos branas obtenidas arriba, pueden ser vistas como un ejemplo particular de *restricciones topológicas*, las cuales imponen restricciones sobre la distribución de materia localizada en un espacio que contiene dimensiones compactas.

4.4. Análisis $\omega_* = \omega_*(\lambda, \omega)$

De acuerdo a las ecuaciones de restricción para dos branas adjuntas,

$$\rho a_0 = -\rho_* a_{1/2}, \quad (4.42)$$

$$(2\rho + 3p)n_0 = -(2\rho_* + 3p_*)n_{1/2}, \quad (4.43)$$

donde se toma el caso más simple de ecuación de estado, $p = \omega\rho$ y $p_* = \omega_*\rho_*$ para una componente en cada brana, se tiene la siguiente igualdad

$$\omega_* = \frac{1}{3} \left[(2 + 3\omega) \frac{n_0 a_{1/2}}{n_{1/2} a_0} - 2 \right]. \quad (4.44)$$

La ecuación anterior indica que para diferentes componentes de nuestro Universo, se tienen distintas componentes compatibles en la brana adjunta, es decir, la componente de energía en la brana adjunta está restringida por la componente de energía en nuestra brana y por la geometría del Universo 5-dimensional. Cuatro de las componentes más comunes son: radiación ($\omega = 1/3$), materia no relativista ($\omega = 0$), quintaescencia ($\omega = -1/3$) y constante cosmológica ($\omega = -1$).

Ahora, supóngase que las funciones $a(\tau, y)$ y $n(\tau, y)$ se escriben de la forma sugerida en la sección anterior⁶,

$$a(\tau, y) = a_0(\tau) f(\lambda |y|), \quad (4.45)$$

$$n(\tau, y) = n_0(\tau) f(\mu |y|), \quad (4.46)$$

donde se ha supuesto que f tiene la misma forma para a y n (ver Apéndice D).

Es fácil demostrar, por lo tanto, que la ecuación (4.44) se puede escribir de la siguiente forma

$$\omega_* = \frac{1}{3} \left[(2 + 3\omega) \frac{f(\lambda/2)}{f(\mu/2)} - 2 \right]. \quad (4.47)$$

⁶ En estas ecuaciones los parámetros λ y μ son adimensionales y, como se verá más adelante, funciones del tiempo.

Antes de hacer un análisis profundo de ésta última ecuación para distintos modelos de f , se verá cómo se relacionan los parámetros μ con λ .

La función f se elige tal que sea una función continua⁷ y definida en las vecindades de $y = 0$, además de que $f(0) = 1$. De esta forma, al derivar la función con respecto a la variable y , y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{da(\tau, y)}{dy} = a_0(\tau) \frac{df(\lambda|y|)}{dy} = a_0(\tau) \frac{df(\lambda|y|)}{d(\lambda|y|)} \frac{d(\lambda|y|)}{dy}. \quad (4.48)$$

Recordemos que la derivada de la función valor absoluto es la función escalón,

$$\frac{d(\lambda|y|)}{dy} = \lambda\theta(y), \quad (4.49)$$

donde $\theta(y) = 1$ si $y \geq 0$ y $\theta(y) = -1$ si $y \leq 0$. Así,

$$a' = a_0(\tau) \frac{df(\lambda|y|)}{d(\lambda|y|)} \lambda\theta(y). \quad (4.50)$$

La expresión $df(\lambda|y|)/d(\lambda|y|)$ es igual a un parámetro, $A(|y|)$, y su valor dependerá de la forma que tenga la función f , así, se tiene

$$a'(\tau, y) = a_0(\tau)A(|y|)\lambda(\tau)\theta(y). \quad (4.51)$$

El salto en la primera derivada de la ecuación anterior, considerando $A(0+) = A(0-) = A$, es

$$[a']_0 = a'(0+) - a'(0-) = 2a_0(\tau)A\lambda(\tau). \quad (4.52)$$

Debido a la presencia de una distribución de materia-energía en $y = 0$, el salto en la primera derivada de $a(\tau, y)$ alrededor del origen, es distinto de cero,

$$[a']_0 = -a_0(\tau)b_0(\tau)\frac{\kappa_{(5)}^2}{3}\rho. \quad (4.53)$$

⁷ Si bien la función $f(|y|)$ es continua y con simetría $y \rightarrow -y$, su derivada es, en general, discontinua alrededor del origen.

Comparando (4.52) en la última ecuación se tiene,

$$2\lambda(\tau)A = -b_0(\tau)\frac{\kappa_{(5)}^2}{3}\rho(\tau), \quad (4.54)$$

ó

$$\lambda(\tau) = -\frac{b_0(\tau)\kappa_{(5)}^2\rho(\tau)}{6A}. \quad (4.55)$$

De la misma forma, es posible mostrar que para $n(\tau, y) = n_0(\tau)f(\mu|y|)$,

$$\mu(\tau) = \frac{b_0(\tau)\kappa_{(5)}^2\rho(\tau)}{6A}(2 + 3\omega). \quad (4.56)$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se tiene la relación entre las constantes,

$$\mu(\tau) = -\lambda(\tau)(2 + 3\omega). \quad (4.57)$$

Finalmente, la ecuación (4.47) se escribe como

$$\omega_*(\omega, \lambda) = \frac{1}{3} \left[(2 + 3\omega) \frac{f(\lambda/2)}{f(-\lambda(2 + 3\omega)/2)} - 2 \right]. \quad (4.58)$$

De esta última ecuación, es fácil ver que cuando $\omega = -1$ entonces $\omega_* = -1$. Lo mismo sucede con $\omega = -2/3$, para la cual $\omega_* = -2/3$.

El parámetro $\lambda(\tau)$ está relacionado, de acuerdo a la componente $(0, 0)$ de las ecuaciones de Einstein, con el parámetro de expansión de Hubble, y éste a su vez con la velocidad de expansión del Universo (ver apéndice C)

$$\lambda(\tau) = -\frac{b_0(\tau)}{A} \frac{\dot{a}_0(\tau)}{a_0(\tau)} = -\frac{b_0(\tau)H(\tau)}{A} \quad (4.59)$$

De esta forma (considerando $b_0(\tau)/A > 0$), mientras λ sea negativo se tendrá un Universo que se expande, si λ es cero se tiene un Universo estático y si λ es positivo, se tiene un Universo que se contrae.

Considerando ahora una dependencia lineal en $|y|$ del elemento b , se tiene,

$$b = b_0 + 2|y|(b_{1/2} - b_0). \quad (4.60)$$

Ahora, el radio de compactificación se obtiene mediante la expresión $2\pi R = \oint b dy$, integrado en toda la dimensión compactificada. Finalmente, se tiene,

$$b_0 + b_{1/2} = 4\pi R. \quad (4.61)$$

4.5. Análisis ω_* para diferentes ω y $|\lambda| \ll 1$

Ahora se analizará el comportamiento de ω_* en virtud de la componente dominante en nuestra brana para bajas energías⁸, es decir, $|\lambda| = b_0 \kappa_{(5)}^2 \rho / 6A \ll 1$. De acuerdo a lo anterior, es fácil demostrar que la ecuación (4.58) se escribe como⁹

$$\omega_* = \omega + \lambda(\tau)A(\tau)\left(1 + \frac{3}{2}\omega\right)(1 + \omega), \quad (4.62)$$

ó en términos de $H(\tau)$,

$$\omega_* = \omega - b_0(\tau)H_0(\tau)\left(1 + \frac{3}{2}\omega\right)(1 + \omega). \quad (4.63)$$

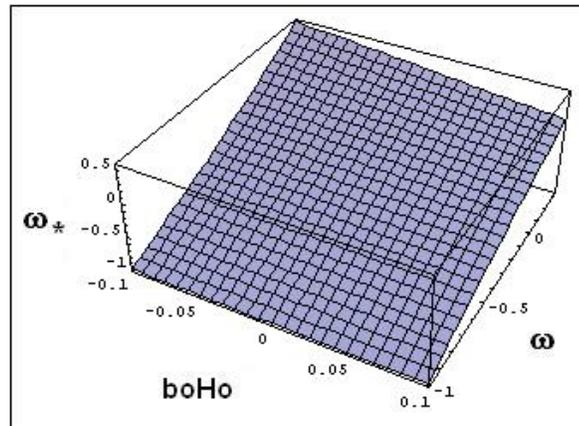


Figura 4.2: Gráfica de ω_* en función de $b_0 H_0$ para ω entre -1 y 1/3

⁸ En este límite, prácticamente no hay discontinuidad ni brana.

⁹ Esta ecuación resulta de expandir la función f en series de Taylor usando la definición del parámetro $A(\tau)$.

Nótese que ésta última ecuación no depende de la forma que tenga f , sino de la componente $b(\tau)$ de la métrica y $H(\tau) = \dot{a}(\tau)/a(\tau)$ evaluados en $y = 0$. Ahora se consideran diferentes componentes dominantes del Universo.

A. Componente de radiación ($\omega = 1/3$). Para esta componente, la ecuación (4.63) se escribe como

$$\omega_* = \frac{1}{3} - 2b_0H_0. \quad (4.64)$$

De esta ecuación se deduce que un Universo en expansión sólo es viable para $\omega_* < 1/3$.

B. Componente de materia no relativista ($\omega = 0$). Para una componente dominante de materia ordinaria, donde $\omega = 0$, es decir, presión nula, se tiene de la ecuación (4.63)

$$\omega_* = -b_0H_0. \quad (4.65)$$

En esta configuración, un Universo en expansión se tiene para $\omega_* < 0$. Una componente ω_* positiva no es una solución viable.

C. Componente de energía oscura ($\omega = -1/3$). Para esta componente, cuya presión es negativa y corresponde a la quintaescencia, se tiene la siguiente ecuación

$$\omega_* = -\frac{1}{3}(1 + b_0H_0). \quad (4.66)$$

Solo para $\omega < -1/3$ se tiene un Universo en expansión.

D. Componentes $\omega = -2/3$ y $\omega = -1$. Si nuestro Universo es dominado por una componente de constante cosmológica, $\omega = -1$ o una componente con ecuación de estado $\omega = -2/3$, la misma componente se tiene en la brana adjunta.

En la figura 4.2, se muestra la gráfica de la ecuación (4.63) para valores de ω en el intervalo $(-1, +1/3)$, y b_0H_0 en el intervalo $(-1/3, +1/3)$. Nótese que en la medida que ω toma el valor -1, la componente ω_* es también -1 para cualquier valor de b_0H_0 . Por otro lado, mientras $\omega = 1/3$, ω_* disminuye en la medida que b_0H_0 aumenta.

4.6. Análisis gráfico para los tres modelos de estudio propuestos

Ahora analicemos el comportamiento de la componente ω_* , de la brana adjunta a la nuestra, para los tres modelos que ya se han mencionado con anterioridad: Lineal, Horava-Witten y Exponencial; para cada uno de ellos, se define la función $f(|y|)$ tal que cumple con los requerimientos especificados en las secciones previas.

El análisis para cada modelo se hará teniendo en cuenta el dominio individual de cada uno de los componentes antes mencionados, de los cuales se obtienen, de acuerdo a la ecuación (4.58), las siguientes expresiones

A. *Componente de radiación* $\omega = 1/3$,

$$\omega_* = \left[\frac{f(\lambda/2)}{f(-3\lambda/2)} - \frac{2}{3} \right]. \quad (4.67)$$

B. *Componente de materia no relativista* $\omega = 0$,

$$\omega_* = \frac{2}{3} \left[\frac{f(\lambda/2)}{f(-\lambda)} - 1 \right]. \quad (4.68)$$

C. *Componente de energía oscura* $\omega = -1/3$,

$$\omega_* = \frac{1}{3} \left[\frac{f(\lambda/2)}{f(-\lambda/2)} - 2 \right]. \quad (4.69)$$

D. *Componente de energía oscura* $\omega = -2/3$,

$$\omega_* = -2/3. \quad (4.70)$$

E. *Constante cosmológica* $\omega = -1$,

$$\omega_* = -1. \quad (4.71)$$

Recordemos también que la variable λ depende directamente del negativo del parámetro de Hubble, por lo que para valores positivos de λ , se tienen Universos en contracción,

mientras que para valores negativos, se tienen Universos en expansión; para el valor cero se tiene un Universo estático. El análisis se restringirá a valores negativos, debido a que nuestro Universo visible actual está en expansión.

4.6.1. Modelo lineal

La solución más simple para la métrica propuesta con anterioridad, es aquella en la cual $a(\tau, y)$ y $n(\mu, y)$ se escriben como una forma lineal en $|y|$ [114]

$$a(\tau, y) = a_0(\tau)(1 + \lambda |y|), \quad (4.72)$$

$$n(\tau, y) = n_0(\tau)(1 + \mu |y|), \quad (4.73)$$

$$b = b(\tau, y). \quad (4.74)$$

Para estas ecuaciones se tiene $f(\lambda |y|) = 1 + \lambda |y|$ y por consiguiente $A = 1$. En la figura (4.3) se muestra la gráfica de la ecuación (4.58) para este modelo

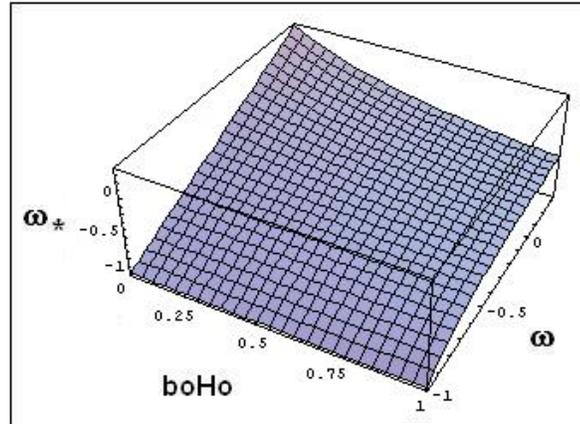


Figura 4.3: Gráfica de ω_* en función de $b_0 H_0$ para ω entre -1 y $1/3$

A. *Componente de radiación* $\omega = 1/3$,

$$\omega_* = \frac{1}{3} \left[\frac{9\lambda + 2}{2 - 3\lambda} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{2 - 9H_0 b_0}{2 + 3H_0 b_0} \right]$$

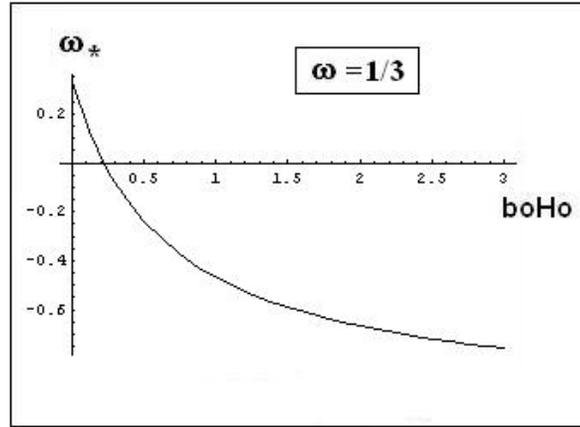


Figura 4.4: Gráfica de ω_* en función de b_0H_0 para $\omega = 1/3$

Para esta configuración, nótese que cualquier componente en la brana adjunta conlleva a un Universo en expansión, sin embargo, una componente de materia o radiación ($\omega_* \in (0, 1/3)$) se tiene en el intervalo $0 \leq b_0H_0 \leq \frac{2}{9}$.

B. Componente de materia no-relativista $\omega = 0$,

$$\omega_* = \left[\frac{\lambda}{1 - \lambda} \right] = \left[\frac{-b_0H_0}{1 + b_0H_0} \right]$$

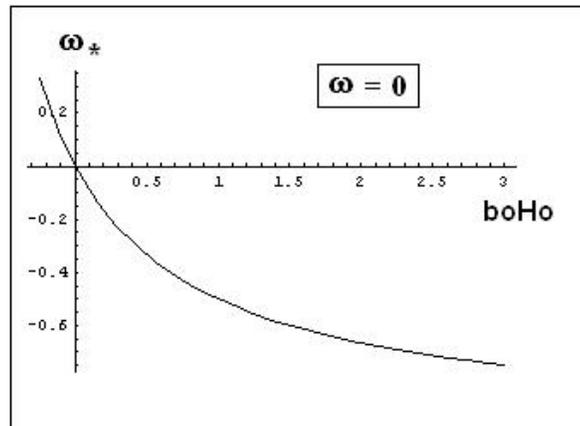


Figura 4.5: Gráfica de ω_* en función de b_0H_0 para $\omega = 0$

Nótese ahora, que en este caso, una componente de materia y radiación en la brana adjunta sólo es posible para un Universo contrayéndose, es decir, $-1/4 \leq b_0H \leq 0$.

Lo anterior indica que si nuestro Universo es dominado por materia no relativista, y la brana adjunta es dominada por una componente con presión positiva, entonces el Universo se contrae; por otro lado, si la brana adjunta es dominada por una componente con presión negativa, entonces el Universo se expande.

C. *Componente de energía oscura* $\omega = -1/3$,

$$\omega_* = \left[\frac{\lambda/2 - 1/3}{1 - \lambda/2} \right] = \left[\frac{-b_0 H_0/2 - 1/3}{1 + b_0 H_0/2} \right]$$

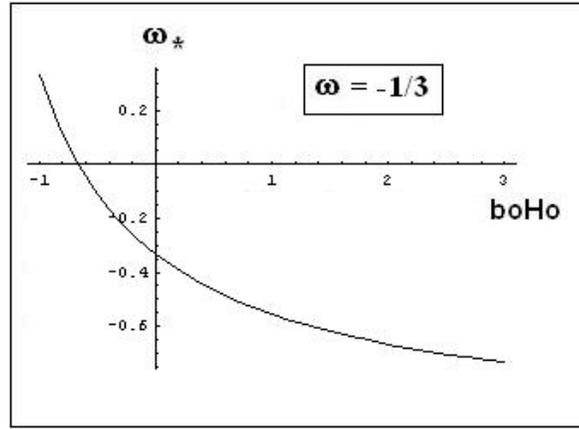


Figura 4.6: Gráfica de ω_* en función de $b_0 H_0$ para $\omega = -1/3$

Notemos ahora, que una componente con $\omega_* \in (-1/3, 1/3)$ está descartado, debido a que conlleva a un Universo que se contrae. Éste es uno de los principales resultados de la tesis, debido a que nuestro Universo es, en parte, dominado por materia oscura y constante cosmológica, lo cual indica que una brana adjunta, en el caso de existir, estaría dominada por una componente con $\omega_* \in [-1/3, -1]$.

D. *Componente de energía oscura* $\omega = -2/3$,

$$\omega_* = -2/3$$

E. *Constante cosmológica* $\omega = -1$,

$$\omega_* = -1$$

4.6.2. Modelo de Horava-Witten

Una solución propuesta en el modelo de varias dimensiones de Horava-Witten es aquella solución en el vacío que resuelve completamente las ecuaciones de frontera del espacio de fondo y preserva la invariancia de Poincaré,

$$a(\tau, y) = a_0(\tau)\sqrt{1 + \lambda|y|}, \quad (4.75)$$

$$n(\tau, y) = n_0(\tau)\sqrt{1 + \mu|y|}, \quad (4.76)$$

$$b = b(\tau, y). \quad (4.77)$$

Para estas ecuaciones se tiene $f(\lambda|y|) = \sqrt{1 + \lambda|y|}$ y por lo tanto $A = 1/2$. En la figura 4.7 se muestra la gráfica de la ecuación (4.58) para este modelo

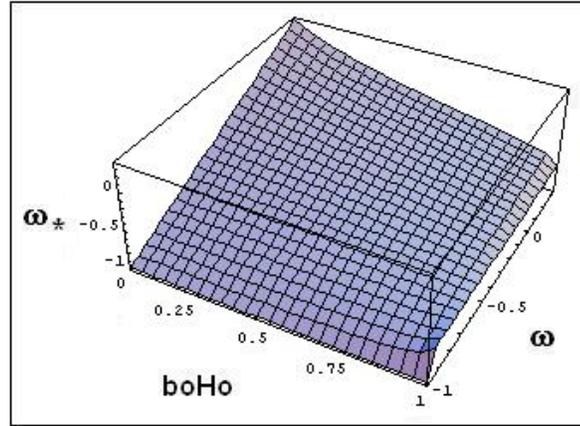


Figura 4.7: Gráfica de ω_* en función de b_0H_0 para ω entre -1 y $1/3$.

A. *Componente de radiación* $\omega = 1/3$,

$$\omega_* = \left[\sqrt{\frac{1 + \lambda/2}{1 - 3\lambda/2}} - \frac{2}{3} \right]$$

B. *Componente de materia no-relativista* $\omega = 0$,

$$\omega_* = \frac{2}{3} \left[\sqrt{\frac{1 + \lambda/2}{1 - \lambda}} - 1 \right]$$

C. *Componente de energía oscura* $\omega = -1/3$,

$$\omega_* = \frac{1}{3} \left[\sqrt{\frac{1 + \lambda/2}{1 - \lambda/2}} - 2 \right]$$

D. *Componente de energía oscura* $\omega = -2/3$,

$$\omega_* = -2/3$$

E. *Constante cosmológica* $\omega = -1$,

$$\omega_* = -1$$

4.6.3. Modelo exponencial

Esta solución, la cual es propuesta en esta tesis, corresponde a una forma exponencial, la cual evita puntos de singularidad para cualquier valor de λ .

$$a(\tau, y) = a_0(\tau)e^{\lambda|y|}, \quad (4.78)$$

$$n(\mu, y) = n_0(\mu)e^{\mu|y|}, \quad (4.79)$$

$$b = b(\tau, y). \quad (4.80)$$

Para estas ecuaciones se tiene $f(\lambda|y|) = e^{\lambda|y|}$ y por lo tanto $A = 1$. En la figura 4.8 se muestra la gráfica de la ecuación (4.58) para este modelo

A. *Componente de radiación* $\omega = 1/3$,

$$\omega_* = e^{2\lambda} - \frac{2}{3}$$

B. *Componente de materia no relativista* $\omega = 0$,

$$\omega_* = \frac{2}{3} [e^{3\lambda/2} - 1]$$

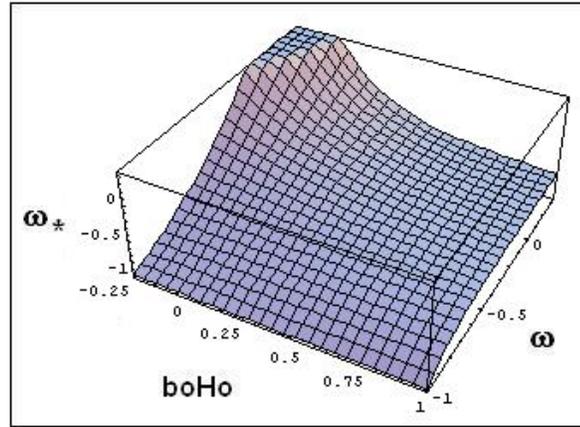


Figura 4.8: Gráfica de ω_* en función de b_0H_0 para ω entre -1 y $1/3$

C. *Componente de energía oscura* $\omega = -1/3$,

$$\omega_* = \frac{1}{3} [e^\lambda - 2]$$

D. *Componente de energía oscura* $\omega = -2/3$,

$$\omega_* = -2/3$$

E. *Constante cosmológica* $\omega = -1$,

$$\omega_* = -1$$

4.7. Discusión final del capítulo

Como se ha visto a lo largo del capítulo, la introducción de una nueva brana adjunta a nuestro Universo, conlleva a una restricción topológica, la cual indica que la materia en una brana está determinada por la materia en la otra brana. El estudio hecho muestra que la forma que debe tener $a(\tau, y)$ debe ser igual a $n(\tau, y)$ salvo una constante, y dependiendo de esa forma, será el tipo de materia que se tiene en la brana adjunta. Un resultado nuevo es que para $\omega = -1$ y $\omega = -2/3$, el tipo de materia en las dos branas es

igual independientemente de la forma de la función $f(\lambda |y|)$. Para Universos estáticos se tiene que el contenido de materia es el mismo. Dependiendo del tipo de materia que se tenga en ambas branas, se puede tener un Universo en expansión o en contracción, de tal forma que desde el punto de vista matemático, la restricción topológica indica cómo es el comportamiento de ambas branas. El estudio se hizo para tres modelos teóricos de geometrías del Universo 5-dimensional, donde en todos los casos los resultados son muy similares.

Uno de los propósitos de este capítulo fue proporcionar una explicación alternativa al problema de la materia oscura como la influencia gravitacional de la brana adjunta sobre nuestro Universo brana¹⁰. Esto se explica teniendo en cuenta un Universo dominado solo por materia no relativista y la brana adjunta con una componente con presión negativa. Esta idea se sugiere como una alternativa a la introducción de nuevas partículas adicionales a las del modelo estándar, es decir, que la discrepancia en la medición de masa en sistemas galácticos (como en las curvas de rotación o en cúmulos de galaxias) no es debido a materia no visible, sino que es materia y/o energía existente en la brana adjunta, la cual interacciona gravitacionalmente con la materia en nuestro Universo. Esta explicación es bastante razonable en el sentido que dos branas adjuntas, con algún contenido de materia-energía deben interactuar debido a que en el contexto de mundos branas la interacción gravitacional sí puede escapar a la quinta dimensión. La fenomenología del proceso físico mediante el cual una brana interactúa con la otra, no es tratada en esta tesis y se deja como un proyecto futuro para un trabajo de doctorado.

¹⁰ Esta idea general ha sido propuesta por el Dr. Tonatiuh Matos en el contexto de campos escalares.

Resultados y conclusiones

A lo largo de este trabajo de tesis se realizó una revisión general del tema de cosmología además de las observaciones fundamentales y los problemas que aún están sin resolver. En particular se estudió el problema de la materia oscura, la evidencia observacional y los candidatos más viables. Una posible solución a este problema es suponer que el Universo tiene más de tres dimensiones espaciales, donde las dimensiones extra son espaciales y compactificadas, siendo nuestro Universo una hipersuperficie donde sólo la gravedad tiene acceso a las dimensiones extra. En el contexto de mundos brana se estudiaron las consecuencias cosmológicas de introducir una brana adicional a nuestro Universo, en particular el tipo de componente que debe dominar en tal brana. Desde el punto de vista matemático existe una restricción topológica para las componentes de energía y presión en cada una de las branas, de tal forma que una afectará a la otra en su evolución en el tiempo. Puede suponerse que las observaciones anómalas asociadas a la materia oscura son un efecto gravitacional debido a la presencia de materia-energía en la brana adjunta. Al respecto de esta última hipótesis, el presente trabajo se centró en el análisis de la métrica 5-dimensional donde a y n (componentes del tensor métrico 5-dimensional) son funciones arbitrarias y a partir de ello se determinó cómo es la dependencia entre las componentes de las dos branas (una situada en $y = 0$ y otra en $y = 1/2$). Se analizaron tres diferentes formas para a y n como funciones de la coordenada y y del tiempo τ , donde una de estas tiene una dependencia exponencial.

La ventaja de esta forma es que en la expresión para ω_* , no existen singularidades para ningún valor de λ . Otros aspectos importantes a tener en cuenta, y que se espera serán temas para un trabajo posterior de doctorado, son la fenomenología del modelo, las consecuencias físicas a diferentes escalas y la explicación de las observaciones.

Apéndice A

Cosmología 5-dimensional

Como ya se mencionó anteriormente, la ecuación (4.32)

$$\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + \frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{\kappa_{(5)}^4}{36}\rho(\rho + 3p), \quad (\text{A.1})$$

donde se ha suprimido el término \hat{T}_{55} , es una ecuación tipo Friedmann con la diferencia que depende del cuadrado de la densidad de energía (recuérdese que el subíndice cero significa evaluado en $y = 0$). A partir de la ecuación de la conservación de la energía (4.24), se tiene

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (\text{A.2})$$

donde ρ_0 es constante en el tiempo.

Nótese que cuando $p = -\rho$, es decir $\omega = -1$, (A.1) puede ser fácilmente integrada para dar

$$a_0(\tau) = e^{H_0(\tau-\tau_0)}, \quad (\text{A.3})$$

donde $H_0 = \kappa_{(5)}^2 \rho_0 / 6$ se asocia con la constante de Hubble en el tiempo presente τ_0 .

Sustituyendo ahora (A.2) en (A.1) para una sola componente y $\omega \neq -1$, se encuentra

$$\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + \frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{\kappa_{(5)}^4}{36}\rho_0^2 a^{-6(1+\omega)}(1 + 3\omega). \quad (\text{A.4})$$

La solución de ésta ecuación es de la forma

$$a_0 = \alpha \tau^q. \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo ésta última en (A.4),

$$\tau^{-2}(2q^2 - q) = -\frac{\kappa_{(5)}^4}{36}\rho_0^2\alpha^{-6(1+\omega)}(1 + 3\omega)\tau^{-6q(1+\omega)}, \quad (\text{A.6})$$

de donde se observa, igualando τ^{-2} con $\tau^{-6q(1+\omega)}$,

$$q = \frac{1}{3 + 3\omega}, \quad (\text{A.7})$$

y el factor α es

$$\alpha = \left[\sqrt{\frac{H_0^2(1 + 3\omega)}{q - 2q^2}} \right]^q = \tau_0^{-q}, \quad (\text{A.8})$$

donde τ_0 es la edad del Universo. Reescribiendo, la ecuación (A.5) queda como

$$a_0(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^q. \quad (\text{A.9})$$

Para un Universo plano dominado sólo por materia no relativista, se tiene

$$a_0(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{1/3}, \quad (\text{A.10})$$

y la edad del universo es

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \frac{1}{H_0}. \quad (\text{A.11})$$

En los resultados anteriores se ha identificado $\kappa_{(5)}^2\rho_0/6$ con $H_0 = \dot{a}_0/a_0(\tau = 0)$. Otra consecuencia cosmológica importante de la ecuación (A.1) es que, si suponemos de forma generalizada que¹

$$H(\tau) = \frac{\dot{a}_0}{a_0}(\tau) = \frac{\kappa_{(5)}^2}{6}\rho(\tau), \quad (\text{A.12})$$

entonces la ecuación (A.1) se escribe como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\dot{a}^2}{a^2}(2 + 3\omega). \quad (\text{A.13})$$

De aquí es fácil concluir que para $2 + 3\omega < 0$, se tiene un universo acelerado positivamente, mientras que para $2 + 3\omega > 0$, se tiene un Universo en desaceleración.

¹ Esta ecuación se cumple para el caso de dos branas adjuntas (ver apéndice C)

Apéndice B

Cálculo de $[a']$ para una brana

Si escribimos $a(y)$ como la suma de una función de $|y|$ más una función de y

$$a(y) = f(|y|) + g(y). \quad (\text{B.1})$$

Derivando ésta última con respecto a y y usando la regla de la cadena

$$\frac{da}{dy} = \frac{df}{d|y|} \frac{d|y|}{dy} + g'(y) = \frac{df}{d|y|} \theta(y) + g'(y), \quad (\text{B.2})$$

donde $\theta(y)$ es la función escalón. Derivando nuevamente,

$$\frac{d^2a}{dy^2} = \frac{d^2f}{d|y|^2} \theta(y)^2 + \frac{df}{d|y|} \frac{d\theta(y)}{dy} + g''(y) = \frac{d^2f}{d|y|^2} + g''(y) + 2 \frac{df}{d|y|} \delta(y). \quad (\text{B.3})$$

Pero $df/d|y| = [a']/2$. Notemos que en la ecuación anterior, el término $d^2f/d|y|^2 + g''(y)$ es continuo y se escribe como \hat{a}'' .

Así, se tiene

$$\frac{d^2a}{dy^2} = a'' = \hat{a}'' + [a'] \delta(y). \quad (\text{B.4})$$

Evaluando ésta última ecuación en la componente $(0, 0)$ de las ecuaciones de Einstein 5-D (4.20), teniendo en cuenta el tensor momento-energía (4.17)

$$\tilde{G}_{00} = k_{(5)}^2 \tilde{T}_{00} = k_{(5)}^2 g_{00} \tilde{T}_0^0 = k_{(5)}^2 (-n^2) (-\rho) \delta(y) / b, \quad (\text{B.5})$$

entonces,

$$-\frac{3n^2}{b^2} \frac{[a']}{a} \Big|_{y=0} = k_{(5)}^2 \frac{n^2 \rho}{b} \Big|_{y=0}. \quad (\text{B.6})$$

Así,

$$\frac{[a']}{a_0 b_0} = -\frac{k_{(5)}^2 \rho}{3}. \quad (\text{B.7})$$

Similarmente para $n(y)$ se tiene,

$$\frac{[n']}{n_0 b_0} = \frac{\kappa_{(5)}^2}{3} (3p + 2\rho). \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Cálculo de restricciones topológicas para las dos branas

Tomando como referencia la ecuación (4.38), una posible solución para $a(|y|)$ es

$$a = a_0 + \frac{1}{2}(|y| - y^2) [a']_0 - \frac{1}{2}y^2 [a']_{1/2}. \quad (\text{C.1})$$

Considerando también un comportamiento lineal para $b(|y|)$ como

$$b = b_0 + 2|y|(b_{1/2} - b_0), \quad (\text{C.2})$$

es fácil demostrar que sustituyendo estas ecuaciones en la componente $(0, 0)$ de las ecuaciones de Einstein, (4.20), en $y = 0$, se tiene

$$\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} = \frac{n_0^2}{b_0^2} \left\{ -\frac{[a']_{1/2}}{a_0} - \frac{b_{1/2} [a']_0}{b_0 a_0} + \frac{[a']_0^2}{4a_0^2} \right\}. \quad (\text{C.3})$$

Ahora, recordando (4.32), donde \dot{a}_0^2/a_0^2 es del orden del cuadrado de la densidad de energía y usando (4.30), se mantienen solo los términos lineales para dar

$$\frac{[a']_0}{b_0} = -\frac{[a']_{1/2}}{b_{1/2}}. \quad (\text{C.4})$$

De acuerdo a la igualdad anterior, la ecuación (C.3) queda como

$$\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} = \frac{n_0^2 [a']_0^2}{b_0^2 4a_0^2}. \quad (\text{C.5})$$

Usando la ecuación (4.53) y $n_0 = 1$ se obtiene el comportamiento cuadrático en ρ de \dot{a}/a sugerido por Langlois para un sistema de dos branas [114],

$$\frac{\dot{a}_0}{a_0} = \frac{\kappa_{(5)}^2 \rho(\tau)}{6}, \quad (\text{C.6})$$

o en términos de $\lambda(\tau)$ usando la ecuación (4.55),

$$\frac{\dot{a}_0}{a_0} = -\frac{A\lambda(\tau)}{b_0(\tau)}. \quad (\text{C.7})$$

Apéndice D

Condición para las funciones $a(\tau, y)$ y $n(\tau, y)$

Consideremos la forma de a y n como

$$a(\tau, y) = a_0(\tau)f(y) \tag{D.1}$$

$$n(\tau, y) = n_0(\tau)g(y) \tag{D.2}$$

$$b = b_0(y). \tag{D.3}$$

Se desea evaluar estas últimas expresiones en la componente $(0, 5)$ de las ecuaciones de Einstein 5-dimensional,

$$\tilde{G}_{05} = 3 \left(\frac{\dot{a} n'}{a n} + \frac{\dot{b} a'}{b a} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) = 0. \tag{D.4}$$

Derivando (D.1) y (D.2), se tiene

$$a' = a_0 f'(y) \tag{D.5}$$

$$n' = n_0 g'(y) \tag{D.6}$$

$$\dot{a} = \dot{a}_0 f(y) \tag{D.7}$$

$$\dot{a}' = \dot{a}_0 g'(y). \tag{D.8}$$

Evaluando en la ecuación (D.4), se tiene la igualdad

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{f'(y)}{f(y)} \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{df}{f}, \quad (\text{D.10})$$

cuya solución es

$$g(y) = \alpha_1 f(y) + \alpha_2. \quad (\text{D.11})$$

Bajo las condiciones iniciales, $f(0) = g(0) = 1$, se tiene la siguiente solución final

$$g(y) = \alpha_1(f(y) - 1) + 1. \quad (\text{D.12})$$

En este trabajo de tesis, se considera $\alpha_1 = 1$.

Bibliografía

- [1] Fernando Chamizo Lorente. *Seminario 2001 (una odisea en el espacio-tiempo)*. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/APseminario02.pdf, (2002).
- [2] Bicak Jiri. Selected solutions of Einstein's field equations: their role in general relativity and astrophysics. *Lect. Notes Phys.*, 540:1–126, (2000). *arXiv:gr-qc/0004016v1*.
- [3] Weinberg Steven. *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*. J. Wiley, New York, 1972.
- [4] Jungman G. et al. Supersymmetric dark matter. *Phys. Rept.*, 267:195–373, (1995). *arXiv:hep-ph/9506380v1*.
- [5] J. Cembranos, A. Dobado, and A.L. Maroto. Brane-world dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 90:241301, (2003). *arXiv:hep-ph/0302041v2*.
- [6] Arnowitt R., J. Dent, and B. Dutta. Five dimensional cosmology in Horava-Witten M-Theory. *Phys. Rev.*, **D70**, (2004). *arXiv:hep-th/0405050v3*.
- [7] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Addison Wesley, 2003.
- [8] J. Martinez Vicent. Introductory review to the historical development of modern cosmology. *Conf. Ser. eds. V.J. Martinez, V. Trimble, and M.J. Pons-Borderia*, 252:1–9, (2001). *arXiv:astro-ph/0203377v1*.

- [9] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley & Sons, 2003.
- [10] H. Lyth David. Introduction to cosmology. (*Lectures given at the Summer School in High Energy Physics and Cosmology, ICTP (Trieste)*, (1993). *arXiv:astro-ph/9312022v1*).
- [11] Hubble Edwin. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *N. A. S.*, 15:168–173, (1929).
- [12] Tegmark Max et. al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys. Rev.*, **D69**:103–501, (2004). *arXiv:astro-ph/0310723v2*.
- [13] Reiss Adam G. et. al. A redetermination of the Hubble constant with the Hubble space telescope from a differential distance ladder. (2007). *arXiv:0905.0695v1*.
- [14] Friedmann A. Über die krummung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10:377–386, (1922).
- [15] Guth A. H. The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev.*, **D23**:374, (1981).
- [16] Linde A. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys. Lett.*, **B108**:389, (1982).
- [17] Albert Einstein. *La relatividad*. Enlace Grijalbo, (1971).
- [18] Schwarzschild K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, pages 189–196, (1916). *arXiv:physics/9905030v1*.

- [19] Gianluca Gemelli. Generalized regularly discontinuous solutions of the Einstein equations. *Int. J. Theor. Phys.*, 46:3312–3330, (2007) *arXiv:0704.0103v1*.
- [20] Bicak Jiri. Einstein equations: Exact solutions. (*Published in Encyclopedia of Mathematical Physics, Oxford: Elsevier*,, 2:165–173, (2006) *arXiv:gr-qc/0604102v1*).
- [21] John A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, (1999).
- [22] Lahav Ofer and Liddle Andrew R. The cosmological parameters 2010. (2010). *arXiv:1002.3488v1*.
- [23] Guth Alan. *The inflationary Universe*. Perseus, (1997).
- [24] Dine Michael and Kusenko Alexander. The origin of the matter-antimatter asymmetry. *Rev. Mod. Phys.*, 76:1–38, (2004). *arXiv:hep-ph/0303065v3*.
- [25] Keith A. Olive. Primordial big bang nucleosynthesis. (*Summary of lectures given at the Advanced School on Cosmology and Particle Physics, Peniscola, Spain*), pages 1–44, (1998). *arXiv:astro-ph/9901231v1*.
- [26] Edward W. Kolb and Michael Turner. *The early universe*. Addison Wesley, (1990).
- [27] Liddle Andrew and Lyth David. *Inflación Cosmológica y Estructuras a Gran Escala*. Cambridge Ed., (2000).
- [28] Padmanabhan T. *Formación de estructuras en el Universo*. Cambridge University Press, (1993).
- [29] Fukugita Masataka and P.J.E. Peebles. The cosmic energy inventory. *The Astrophysical Journal*, 616:643–668, (2004).

- [30] Penzias A. and Wilson R. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophys. J.*, 142:419–421, (1965).
- [31] Wright Edward L. Comments on the quasi-steady-state cosmology. (1994). *arXiv:astro-ph/9410070v1*.
- [32] Bennett C. L. et. al. 4-year COBE DMR cosmic microwave background observations: Maps and basic results. *Astrophys. J.*, 464:L1–L4, (1996). *arXiv:astro-ph/9601067v1*.
- [33] Spergel D. N. et. al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:175–194, (2003).
- [34] Rajguru N. et. al. CMB observations from the CBI and VSA: A comparison of coincident maps and parameter estimation methods. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 363:1125–1135, (2005).
- [35] Bennett C. L. et. al. Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Temperature analysis. *Astrophys. J. Suppl.*, 170:288, (2007). *arXiv:astro-ph/0603451v2*.
- [36] Sachs R. and Wolfe A. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. *Astrophys. J.*, 147:73, (1967).
- [37] Mark Srednicki. *Particle physics in cosmology: dark matter*. North-Holland, 1990.
- [38] Bertone Gianfranco. *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*. Cambridge University Press, (2010).
- [39] Auteri Azzurra. Dark matter of the universe. (*Proceeding of the first workshop of astronomy and astrophysics for students*), (2007). *arXiv:astro-ph/0703348v1*.

- [40] Roncadelli Marco. Dark baryons in galactic halos. *Astrophysics (astro-ph)*, pages 1–38, (2003). *arXiv:astro-ph/0301537v1*.
- [41] Siegel E. R. et al. Dark matter on the smallest scales. (*Proceedings from the dark matter working group at the 86th les houches summer school: Particle physics and cosmology*), pages 1–10, (2006). *arXiv:astro-ph/0611864v1*.
- [42] Majumdar Debasish. Dark matter: Possible candidates and direct detection. (*Talk given in workshop on physics and astrophysics of hadrons and hadronic matter, Visva Bharati University, Santiniketan, India*, pages 1–18, (2006). *arXiv:hep-ph/0703310v1*.
- [43] Bertone Gianfranco et. al. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Phys. Rept.*, 405:279–390, (2005). *arXiv:hep-ph/0404175v2*.
- [44] F. Zwicky. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, (1933).
- [45] J.C. Fabris and H.E. Velten. MOND virial theorem applied to a galaxy cluster. *Braz. J. Phys.*, 39:592–595, (1933). www.sbfisica.org.br/bjp/files/v39_592.pdf.
- [46] Collins G. W. *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*. Pachart Press, (1978).
- [47] Vera C. Rubin and Kent Ford. Rotation of Andromeda from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophys. J.*, 159:379–403, (1970).
- [48] Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation curves of spiral galaxies. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 39:137–174, (2001). *arXiv:astro-ph/0010594v2*.
- [49] Boyanovsky Daniel. Free streaming in mixed dark matter. *Phys. Rev.*, **D77**:023528, (2008). *arXiv:0711.0470v2*.

- [50] Milgrom Mordehai. New physics at low accelerations (MOND): An alternative to dark matter. (*The invisible Universe international conference, Paris*), (2009). *arXiv:0912.2678v1*.
- [51] Taoso Marco, Bertone Gianfranco, and Masiero Antonio. Dark matter candidates: A ten-point test. *J.C.A.P.*, 0803:022, (2008). *arXiv:0711.4996v2*.
- [52] Alcock C. et. al. EROS and MACHO combined limits on planetary mass dark matter in the galactic halo. *A.P.J.*, 499:L9, (1998). *arXiv:astro-ph/9803082v1*.
- [53] Tisserand P. et. al. Limits on the MACHO content of the galactic halo from the EROS-2 survey of the magellanic clouds. *Astron. Astrophys.*, 469:387–404, (2007). *arXiv:astro-ph/0607207v2*.
- [54] Dodelson Scott and Widrow Lawrence M. Sterile neutrinos as dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 72:17–20, (1994). *arXiv:hep-ph/9303287v1*.
- [55] Aguilar Arevalo A. A search for electron neutrino appearance at the Δm^2 to 1 eV² scale. *Phys. Rev. Lett.*, 98:231801, (2007). *arXiv:0704.1500v3*.
- [56] R. D. Peccei and H. R. Quinn. CP conservation in the presence of instantons. *Phys. Rev. Lett.*, 38:1440–1443, (1997).
- [57] Duffy Leanne D. and Van Bibber Karl. Axions as dark matter particles. *New Journal of Physics*, 11:105008, (2009). *arXiv:0904.3346v1*.
- [58] Visinelli Luca and Gondolo Paolo. Axion cold dark matter revisited. *Cosmology and Extragalactic Astrophysics (astro-ph.CO)*, page 22, (2009). *arXiv:0910.3941v1*.

- [59] Marcio E. S. et. al. Can massive gravitons be an alternative to dark energy? *General relativity and quantum cosmology (gr-qc)*, pages 1–16, (2009). *arXiv:0907.5190v1*.
- [60] S.S. Gershtein et. al. Graviton mass, quintessence and oscillatory character of the universe evolution. *Phys. Atom. Nucl.*, 67:1596–1604, (2004). *arXiv:astro-ph/0305125v1*.
- [61] Rothman Tony and Boughn Stephen. Can gravitons be detected? *Found. Phys.*, 36:1801–1825, (2006). *arXiv:gr-qc/0601043v3*.
- [62] Ellis John et. al. Direct detection of dark matter in the MSSM with non-universal Higgs masses. *Nucl. Phys.*, B238:453, (1984). <http://cdsweb.cern.ch/record/603983/files/0302032.pdf>.
- [63] Goldberg H. Constraint on the photino mass from cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1419–1422, (1983).
- [64] Falk Toby, Keith A., and Srednicki Mark. Heavy sneutrinos as dark matter. *Phys. Lett.*, B399:248–251, (1994). *arXiv:hep-ph/9409270v1*.
- [65] L. Feng Jonathan, Rajaraman Arvind, and Takayama Fumihiro. Superweakly interacting massive particles. *Phys. Rev. Lett.*, 91:011302, (2003). *arXiv:hep-ph/0302215v2*.
- [66] Hooper Dan and Lian-Tao Wang. Possible evidence for axino dark matter in the galactic bulge. *Phys. Rev.*, D70:063506, (2004). *arXiv:hep-ph/0402220v3*.
- [67] Nima Arkani-Hamed, Andrew G. Cohen, and Howard Georgi. Electroweak symmetry breaking from dimensional deconstruction. *Phys. Lett.*, B513:232–240, (2001). *arXiv:hep-ph/0105239v4*.

- [68] Nima Arkani-Hamed, Andrew G. Cohen, Thomas Gregoire, and Jay G. Wacker. Phenomenology of electroweak symmetry breaking from theory space. *J.H.E.P.*, 0208:020, (2002). *arXiv:hep-ph/0202089v2*.
- [69] Birkedal-Hansen Andreas and G. Wacker Jay. Scalar dark matter from theory space. *Phys. Rev.*, **D69**:065022, (2004). *arXiv:hep-ph/0306161v2*.
- [70] Hsin-Chia Cheng and Ian Low. Little hierarchy, little higgses, and a little symmetry. *J.H.E.P.*, 0408:061, (2004). *arXiv:hep-ph/0405243v3*.
- [71] Hsin-Chia Cheng, Jonathan L. Feng, and Konstantin T. Matchev. Kaluza-Klein dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 89:211301, (2002). *arXiv:hep-ph/0207125v2*.
- [72] I. Antoniadis, K. Benakli, and M. Quirs. Production of Kaluza-Klein states at future colliders. *Phys. Lett.*, **B331**:313–320, (1994). *arXiv:hep-ph/9403290v1*.
- [73] Servant Geraldine and M. P. Tait Tim. Is the lightest Kaluza-Klein particle a viable dark matter candidate? *Nucl. Phys.*, **B650**:391–419, (2003). *arXiv:hep-ph/0206071v2*.
- [74] Martin Jerome. Quintessence: a mini-review. *Mod. Phys. Lett.*, **A23**:1252–1265, (2008). *arXiv:0803.4076v1*.
- [75] Varun Sahni and Limin Wang. A new cosmological model of quintessence and dark matter. *Phys. Rev.*, **D62**:103517, (2000). *arXiv:astro-ph/9910097v3*.
- [76] Matos T. and Urea L. Quintessence and scalar dark matter in the universe. *Class. Quant. Grav.*, 17:L75–L81, (2000). *arXiv:astro-ph/0004332v2*.
- [77] Matos T. and Guzman F.S. Quintessence at galactic level? *Ann. Phys.*, 9, (2000). *arXiv:astro-ph/0002126v1*.

- [78] Milgrom Mordehai. The MOND paradigm. (*Talk presented at the XIX rencontres de blois matter and energy in the Universe: From nucleosynthesis to cosmology*), (2007). *arXiv:0801.3133v2*.
- [79] Wikstrom G. Methods of indirect detection of dark matter in Ice cube. (*Tesis de licenciatura, Stockholm university*), (2007). <http://www.physto.se/wikstrom/Lic.pdf>.
- [80] Z. Ahmed et. al. A search for WIMPs with the first five-tower data from CDMS. *Phys. Rev. Lett.*, 102:011301, (2009). *arXiv:0802.3530v2*.
- [81] Schmalzer J. et. al. Status of the CRESST dark matter search. (*AIP conf. proc.*), 631:1185, (2009). *arXiv:0912.3689v1*.
- [82] Sanglard Veronique. EDELWEISS-II dark matter search : Status and first results. (*To appear in the proceedings of the TAUP09 conference*), pages 1–4, (2009). *arXiv:0912.1196v1*.
- [83] D. Yu. Akimov et. al. The ZEPLIN-III dark matter detector: Instrument design, manufacture and commissioning. *astropart. Phys.*, 27:46–60, (2007). *arXiv:astro-ph/0605500v1*.
- [84] E. Aprile et. al. Design and performance of the XENON10 dark matter experiment. (2010). *arXiv:1001.2834v1*.
- [85] Regenfus C. The argon dark matter experiment. (2008). *arXiv:0812.1497v1*.
- [86] Fiorucci S. et. al. Status of the LUX dark matter search. *In proceedings of the SUSY09 conference*, (2009). *arXiv:0912.0482v1*.
- [87] R. Bernabei et. al. Dark matter search (primeros resultados del proyecto DAMA/NAI). *Riv. Nuovo Cim.*, 26N1:1–73, (2003). *arXiv:astro-ph/0307403v1*.

- [88] R. Bernabei et. al. First results from DAMA/LIBRA and the combined results with DAMA/NaI. *Eur. Phys. J.*, **C56**:333–355, (2008). *arXiv:0804.2741v1*.
- [89] Ahmed Z. et. al. Results from the final exposure of the CDMS II experiment. (2009). *arXiv:0912.3592v1*.
- [90] Armengaud Eric. Gif lectures on direct detection of dark matter. (2010). *arXiv:1003.2380v1*.
- [91] Oikonomou V.K. et. al. Direct detection of dark matter rates for various wimps. *Nucl. Phys.*, **B773**:19–42, (2007). *arXiv:hep-ph/0612293v2*.
- [92] Chung-Lin Shan. Theoretical interpretation of experimental data from direct dark matter detection. (2007). *arXiv:0707.0488v3*.
- [93] O. Adriani et. al. A statistical procedure for the identification of positrons in the PAMELA experiment. (2010). *arXiv:1001.3522v1*.
- [94] DeYoung T. Recent results from IceCube and AMANDA. (2009). *arXiv:0910.3644v1*.
- [95] M. Brown anthony. The ANTARES neutrino telescope: Status and first results. (2009). *arXiv:0908.1035v1*.
- [96] Ravndal Finn. Scalar gravitation and extra dimension. (*Talk at The Gunnar Nordstrom Symposium on Theoretical Physics, Helsinki*), (2004). *arXiv:gr-qc/0405030v1*.
- [97] Gunnar Nordstrom. Uber die moglichkeit, das elektromagnetische feld und das gravitationsfeld zu vereinigen. *Physikalische Zeitschrift*, 15:504–506, (1914).

- [98] Kaluza Theodor. Zum unitatsproblem in der physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1921:966–972, (1921).
- [99] Klein Oskar. Quantentheorie und funfdimensionale relativitatstheorie. *Zeitschrift fur Physik a Hadrons and Nuclei*, **37**12:895–906, (1926).
- [100] Overduin J. M. and Wesson P. S. Kaluza-klein gravity. *Phys. Rep.*, 283:303–380, (1997). *arXiv:gr-qc/9805018v1*.
- [101] Hagg Rudolf, Lopuzanski Jan, and Sohnius Martin. All possible generators of supersymmetries of the S-matrix. *Nucl. Phys.*, **B88**:257–274, (1975).
- [102] Keith A. Olive. TASI lectures on dark matter. (*Lectures given at the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics at the University of Colorado at Boulder*), (2003). *arXiv:astro-ph/0301505v2*.
- [103] Stephen P. Martin. A supersymmetry primer. (2008). *arXiv:hep-ph/9709356v5*.
- [104] Jihn E. Kim. The axino-gravitino cosmology. *Talk Presented at cosmo97*, pages 1–8, (1997). *arXiv:astro-ph/9711310v1*.
- [105] Leszek Roszkowski. Axino or gravitino cold dark matter. <http://vipac.desy.de/Common/miniworkshopDM/roszkowski-ewimps-desy06.pdf>.
- [106] Green Michael B. and Schwarz John H. Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 gauge theory and superstring theory. *Phys. Lett.*, **B149**:117–122, (1984).
- [107] Polchinsky J. Dirichlet-branes and Ramond-Ramond charges. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4724, (1995). *hep-th/9510017*.
- [108] Horava Petr and Witten Edward. Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary. *Nucl. Phys.*, **B475**:94–114, (1996). *arXiv:hep-th/9603142v1*.

- [109] Rubakov V. A. and Shaposhnikov M. E. Do we live inside a domain wall? *Phys. Lett.*, **B125**:136–138, (1983).
- [110] Akama K. An early proposal of brane world. *Lect. Notes Phys.*, 176:267–271, (1982). *hep-th/0001113*.
- [111] Visser M. An exotic class of Kaluza-Klein models. *Phys. Lett.*, **B159**:22, (1985). *hep-th/9910093*.
- [112] Arkani-Hamed Nima, Dimopoulos Savas, and Dvali Gia. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, **B429**:263–272, (1998). *arXiv:hep-ph/9803315v1*.
- [113] Randall Lisa and Sundrum Raman. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, **83**:4690–4693, (1999) .
- [114] Langlois David, Binetruy Pierre, and Deffayet Cedric. Non-conventional cosmology from a brane-universe. *Nucl. Phys.*, **B565**:269–287, (2000). *arXiv:hep-th/9905012v2*.
- [115] Barton Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [116] W. Israel. *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*. Nuovo Ciminto B 44, (1966).
- [117] Charles W. Misner et. al. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1970.
- [118] Carter Brandon. Brane dynamics for treatment of cosmic strings and vortons. *Tlaxcala lecture notes, 2nd Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics*, (1997). *arXiv:hep-th/9705172v1*.

- [119] R. Arnowitt and B. Dutta J. Dent. Horava-Witten cosmology. (*contribution to the proceedings of “String Phenomenology 2003” conference, Durham, UK*), pages 1–8, (2003). *arXiv:hep-th/0309273v1*.