



ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL “ADOLFO LOPEZ MATEOS”

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**Modelo de líneas de espera para la atención del trámite de
apostille de documentos de la Secretaría de Gobernación**

Tesina que presenta

Ing. Antonio Sampayo Vargas

para obtener el Grado de

Especialidad en Ingeniería de Sistemas

Director de la Tesina

Dr. Juan de la Cruz Mejia Tellez

México,D.F

Octubre 2010

Resumen

Cualquier sistema dinámico en el que las llegadas demandan un recurso de capacidad finita puede denominarse un sistema de colas.

En este trabajo se presenta el análisis estadístico de los tiempos de atención otorgada a la ciudadanía en un trámite gubernamental, con la finalidad de identificar los elementos que forman el sistema de líneas de espera asociado, clasificarlo siguiendo una notación estándar y generar un modelo matemático que lo represente. Se presenta el sistema $M/E_4^{[6]}/1$ en el estado de equilibrio y utilizando la técnica de la cadena embebida de Markov se obtienen ecuaciones que describen el modelo y con ellas la longitud promedio de la fila y el tiempo promedio de espera.

Abstract

Any dynamic system in which arrivals place demands upon a finite-capacity resource may be termed a queueing system.

This paper presents a statistical analysis of a governmental attendance process identifying the elements that make up the queueing system, and graded according to a standard notation. We model the system as a $M/E_4^{[6]}/1$ queueing system. Applying the embedded Markov chain technique, steady state equations are obtained to calculate behaviour measures: the mean queue length and the mean waiting time.

Índice general

I. Introducción	9
I. El sistema físico	9
II. Objetivo	9
III. Búsqueda del modelo	10
IV. Información disponible	10
II. Marco Teórico	11
I. Teoría de colas	11
II. Características de los sistemas de colas	12
III. Desarrollo	13
I. Proceso de arribo	13
I. Hipótesis sobre la distribución de arribos	14
II. La distribución del tiempo de servicio	16
I. Hipótesis sobre la distribución del tiempo de servicio	17
II. Atención en bloques	18
III. El modelo de servicio	18
I. Establecer el modelo del sistema	18
II. Encontrar los ceros del polinomio	22
III. Resultados del modelo	24
IV. Resultados	25
I. Aplicación del modelo	25
V. Recomendaciones	26
I. La solución analítica	26
A. Congresos	27

Índice de cuadros

III.1. Tiempos de llegada de clientes en un día típico de operación	13
III.2. Matriz de transiciones	20

Índice de figuras

I.1. Sistema de atención	9
I.2. Modelo del sistema de atención	10
III.1. Función de masa de probabilidad	14
III.2. Frecuencia real vs Frecuencia teórica	15
III.3. Frecuencia relativa de los tiempos de servicio	16
III.4. Frecuencia relativa, frecuencia teórica	17
III.5. Función de densidad acumulada	18
III.6. Raíces del polinomio	23

I. Introducción

En este trabajo se presenta el análisis estadístico realizado a un trámite gubernamental para identificar los elementos que forman el sistema de líneas de espera, y clasificarlo siguiendo una notación estándar. Utilizando inferencia estadística se obtiene un modelo que describe el sistema analizado, se presenta el sistema $M/E_4^{[6]}/1$ en el estado de equilibrio y utilizando la técnica de la cadena embebida de Markov se obtienen ecuaciones que describen el modelo y con ellas la longitud promedio de la fila y el tiempo promedio de espera.

Este documento está organizado en 5 capítulos que dividen los contenidos en:

Introducción Presentación del objeto de estudio y los objetivos que se buscan.

Marco Teórico Conjunto de conceptos y relaciones que se utilizan en el desarrollo del trabajo.

Desarrollo Aplicación del marco teórico sobre el problema objeto del estudio.

Resultados Interpretación de la información, obtenida en el modelo matemático, en el sistema físico.

Recomendaciones Conclusiones del trabajo y recomendaciones para trabajos futuros.

Así pues como primer punto se presenta el objeto de estudio.

I. El sistema físico

Un sector de la Secretaría de Gobernación a través de la Dirección de Coordinación Política con los Poderes de la Unión (DICOPPU), tiene bajo su responsabilidad el trámite correspondiente a la Legalización de Firmas y Apostille de documentos a efecto de autenticar la firma autógrafa de los servidores públicos, a quienes las leyes o reglamentos otorgan la facultad para hacer constar la legitimidad de documentos y que estos sean válidos en el extranjero, de igual manera la Certificación del Diario Oficial de la Federación como documentos que obran en sus archivos.

Existe una población demandante del servicio, la cual ingresa al sistema de atención para obtener el trámite solicitado. Una vez que el ciudadano recibe el documento solicitado sale del sistema y forma parte de un conjunto de clientes atendidos, tal como se muestra en la figura I.1

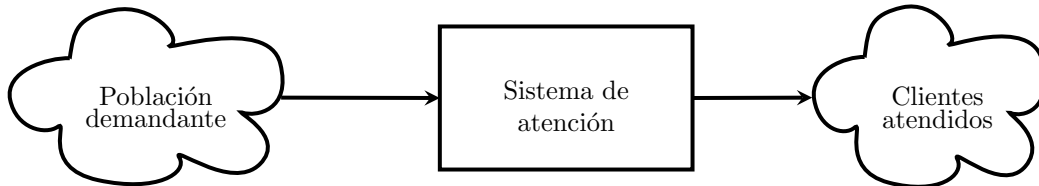


Figura I.1.: Sistema de atención

II. Objetivo

El objetivo del presente trabajo es especificar por completo el sistema de atención y presentar información que ayude a la toma de decisiones para mejorar el servicio a los ciudadanos. Para ello es

necesario identificar los procesos estocásticos que describen el flujo de llegada, así como la estructura y disciplina del centro de servicio. Básicamente estamos interesados en el tiempo de espera promedio y el número de clientes en el sistema.

III. Búsqueda del modelo

El sistema de atención se concibe como un flujo de personas, en el cuál se identifican dos procesos estocásticos: la entrada y la salida del sistema. Tal como lo muestra la figura I.2.

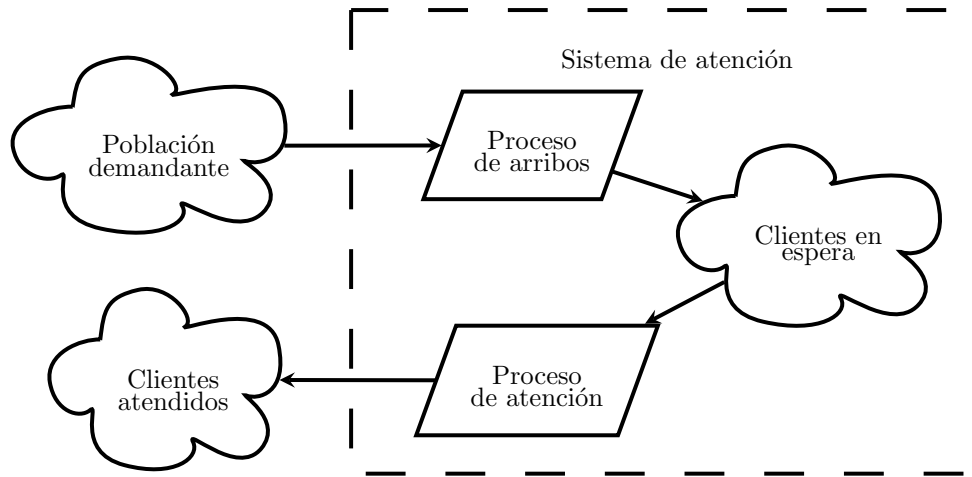


Figura I.2.: Modelo del sistema de atención

Para modelar el sistema físico, se identifica un primer elemento que es el *proceso de arribos* de los ciudadanos en busca de realizar un trámite. Dicho proceso estocástico describe la entrada de usuarios al sistema, los cuales deberán esperar su turno de atención. Otra parte estructural del sistema es el *proceso de atención*, el cual se concibe como una sola operación desde que inicia el registro del trámite hasta la entrega del mismo.

El modelo que se adoptará para el sistema de atención a usuarios se toma de la teoría de líneas de espera. Utilizando la notación de Kendall, el modelo a desarrollar es de la forma $A/B/1$, es decir; buscamos distribuciones de probabilidad A y B para los tiempos entre cada arribo y el tiempo de servicio respectivamente, para un solo servidor.

IV. Información disponible

La DICOPPU cuenta con un sistema de información en el que se registran los trámites que se atienden. Dentro de los datos disponibles tenemos:

- Los tiempos de asignación de turno
- El tiempo de inicio de atención.
- El tiempo de inicio en cada etapa del trámite: Registro de trámite, Captura de documentos, Validación de datos, Armado de paquetes, Firma de documentos, Entrega a ciudadanos.

A partir de dicha información se describirá cada uno de los componentes del modelo.

II. Marco Teórico

I. Teoría de colas

Para especificar los sistemas de colas se ha desarrollado la notación de Kendall[2] que consiste en un descriptor de tres partes $A/B/m$ que representa un sistema de colas de m servidores, donde A y B describen la distribución del tiempo entre llegadas y la distribución del tiempo de servicio respectivamente.

A(t) Representa la distribución del tiempo entre arribos al sistema, por ejemplo M para una distribución Markoviana, o completamente aleatoria, E_k una distribución Erlangiana de k fases, etc.

B(x) Representa la distribución del tiempo de servicio, por ejemplo M para una distribución Markoviana, o completamente aleatoria, E_k una distribución Erlangiana de k fases, etc.

m Indica el número de servidores en paralelo del sistema.

Ahora observando el flujo de clientes a medida que llegan, pasan, y, finalmente, salen del sistema, se pueden identificar las siguientes cantidades.

Enumerando los clientes con el subíndice n , se define C_n como:

$$C_n \text{ representa el } n\text{-ésimo cliente en entrar al sistema} \quad (\text{II.1})$$

De la misma forma se puede definir $N(t)$ como:

$$N(t) \text{ el número de clientes en el sistema en el tiempo } t \quad (\text{II.2})$$

Otro proceso importante es $U(t)$

$$U(t) \text{ el tiempo requerido para atender a todos los clientes presentes} \quad (\text{II.3})$$

Observando el tiempo, se puede definir:

$$\tau_n \text{ el tiempo de llegada del cliente } n \quad (\text{II.4})$$

$$t_n \text{ el intervalo de tiempo entre } C_{n-1} \text{ y } C_n \quad (\text{II.5})$$

Dado que todos los tiempos de arribo siguen la distribución $A(t)$, se tiene

$$P[t_n \leq t] = A(t) \quad (\text{II.6})$$

Y para el tiempo de servicio

$$x_n \text{ el tiempo de servicio para } C_n \quad (\text{II.7})$$

$$P[x_n \leq x] = B(x) \quad (\text{II.8})$$

El tiempo de espera en la cola w_n

$$w_n \text{ el tiempo de espera en la cola para } C_n \quad (\text{II.9})$$

El tiempo total invertido en el sistema s_n

$$s_n = w_n + x_n \quad (\text{II.10})$$

El primer momento de t_n

$$E[t_n] = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{II.11})$$

Por lo que λ representa la tasa de arribo promedio de clientes al sistema.

Combinando los conceptos anteriores se puede definir el factor de uso del sistema ρ también conocido como la intensidad de tráfico como

$$\rho = (\text{tasa promedio de arribo}) \times (\text{el tiempo promedio por servicio}) \quad (\text{II.12})$$

Para que un sistema pueda mantenerse operable ρ debe ser menor a 1. De lo contrario la fila crecerá sin detenerse.

II. Características de los sistemas de colas

II.1 *En las cadenas de Markov, el resultado de cualquier ensayo (medición o valor del sistema) depende solo del resultado del ensayo inmediatamente anterior. Así bien la pareja (E_j, E_k) le corresponde una probabilidad condicional p_{jk} . Así que conociendo las probabilidades α_k de tener E_k como el estado inicial, se puede calcular la probabilidad de llegar al estado E_j con las probabilidades de transición.*

II.2 *La longitud promedio de la fila se puede obtener con la función $P(z)$. Donde $P(z)$ es la función generatriz de las probabilidades de transición entre el número de personas en el sistema. Para ello utilizamos la función generatriz de momentos, haciendo $z = e^\theta$, y calculando la primer derivada del logaritmo natural de dicha función evaluada en cero*

II.3 *Otra característica de los sistemas la brinda el resultado de Little, el cual plantea que el número promedio de clientes en el sistema es igual a la tasa promedio de arribo por el tiempo promedio invertido en el sistema.*

III. Desarrollo

Así entonces, en primer lugar nos avocaremos a analizar el proceso de arribos de usuarios al sistema, con objeto de detectar el tipo de función de probabilidad al que obedece este proceso. De igual manera se buscará detectar el tipo de función de probabilidad al que obedece el proceso de atención utilizando la información disponible del sistema.

En este apartado se describe el modelo del sistema. Así entonces, primero se debe analizar el proceso de arribo de usuarios al sistema, con objeto de detectar el tipo de función de probabilidad al que obedece este proceso. De igual manera, se busca detectar el tipo de función de probabilidad al que obedece el proceso de atención utilizando la información disponible del sistema.

I. Proceso de arribo

En la tabla III.1 se muestran los tiempos de arribo de los usuarios en un día típico de operación.

#	T	#	T	#	T	#	T
1	09:17	11	10:05	21	10:47	31	11:14
2	09:22	12	10:14	22	10:48	32	11:18
3	09:33	13	10:15	23	10:49	33	11:20
4	09:35	14	10:18	24	10:50	34	11:28
5	09:43	15	10:21	25	10:55	35	11:29
6	09:44	16	10:22	26	11:00	36	11:30
7	09:47	17	10:26	27	11:04	37	11:33
8	09:54	18	10:41	28	11:10	38	11:34
9	10:01	19	10:44	29	11:11	39	11:37
10	10:02	20	10:45	30	11:12	40	11:42

#	T	#	T	#	T
41	11:43	51	12:09	61	12:35
42	11:44	52	12:11	62	12:37
43	11:45	53	12:13	63	12:39
44	11:53	54	12:17	64	12:45
45	11:55	55	12:18	65	12:51
46	11:59	56	12:22	66	12:54
47	12:00	57	12:24	67	12:57
48	12:01	58	12:27	68	13:03
49	12:06	59	12:29	69	13:05
50	12:08	60	12:34	70	13:06

Cuadro III.1.: Tiempos de llegada de clientes en un día típico de operación

Como primer paso de análisis, se busca obtener una función de masa de probabilidad del arribo de usuarios al sistema. Para ello se definen 20 intervalos uniformes de medición. Cada intervalo es de 11,5 minutos, con el fin de abarcar el horario de atención. Ahora bien, sea X una variable aleatoria que describe el número de usuarios que arriban al sistema en cada intervalo, se puede obtener su distribución de masa. En la figura III.1 se muestra la distribución de probabilidad del número de arribos por

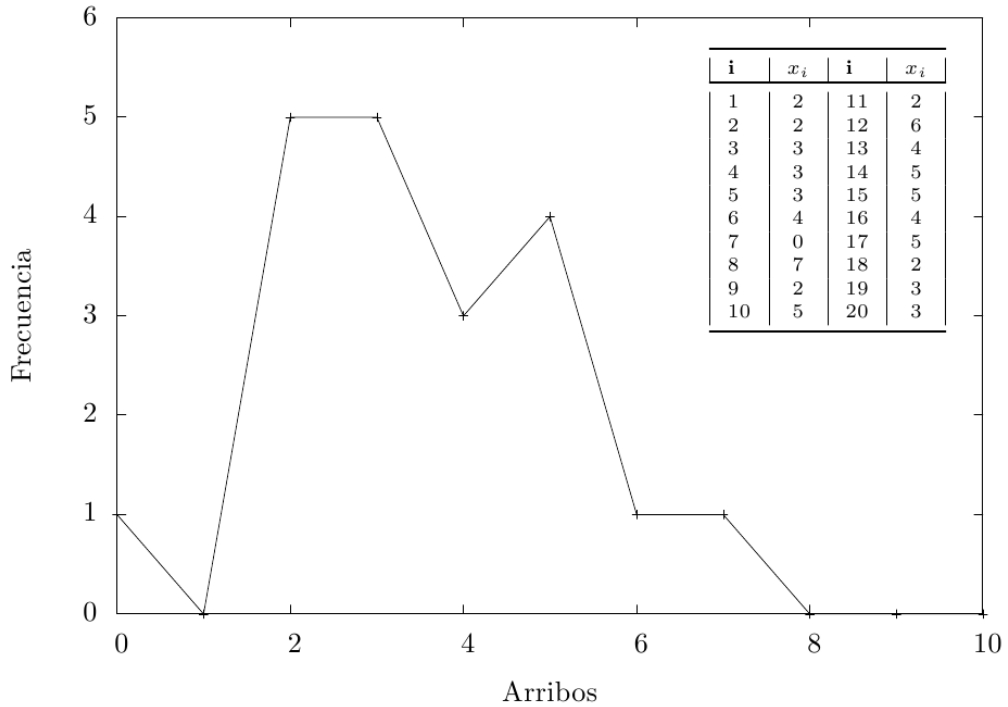


Figura III.1.: Función de masa de probabilidad

intervalo.

De la figura III.1 se observa que la distribución de probabilidad del número de arribos por intervalo:

- No simétrica
- Tiene oblicuidad positiva (es decir, las observaciones están concentradas más a la izquierda de la media con la mayoría de los valores extremos a la derecha de la media).

Adicionalmente, cada uno de los usuarios de la población demandante acude al servicio en forma independiente. Todo esto sugiere que muy probablemente se presente una distribución de Poisson. En consecuencia, se llevó a cabo una prueba de hipótesis sobre la distribución de arribos.

I. Hipótesis sobre la distribución de arribos

Asumiendo que:

- Los arribos al sistema son completamente aleatorios
- Los arribos son independientes

Se plantea la siguiente **hipótesis**: *la distribución de arribos obedece a la distribución de Poisson.*

Para verificar la hipótesis, se realizó una prueba chi-cuadrada. Como primer paso, se calcula la tasa de arribos promedio y se genera un estimador del parámetro λ de Poisson.

$$\frac{\sum x_i}{n} = 3,5 \rightarrow \lambda \tag{III.1}$$

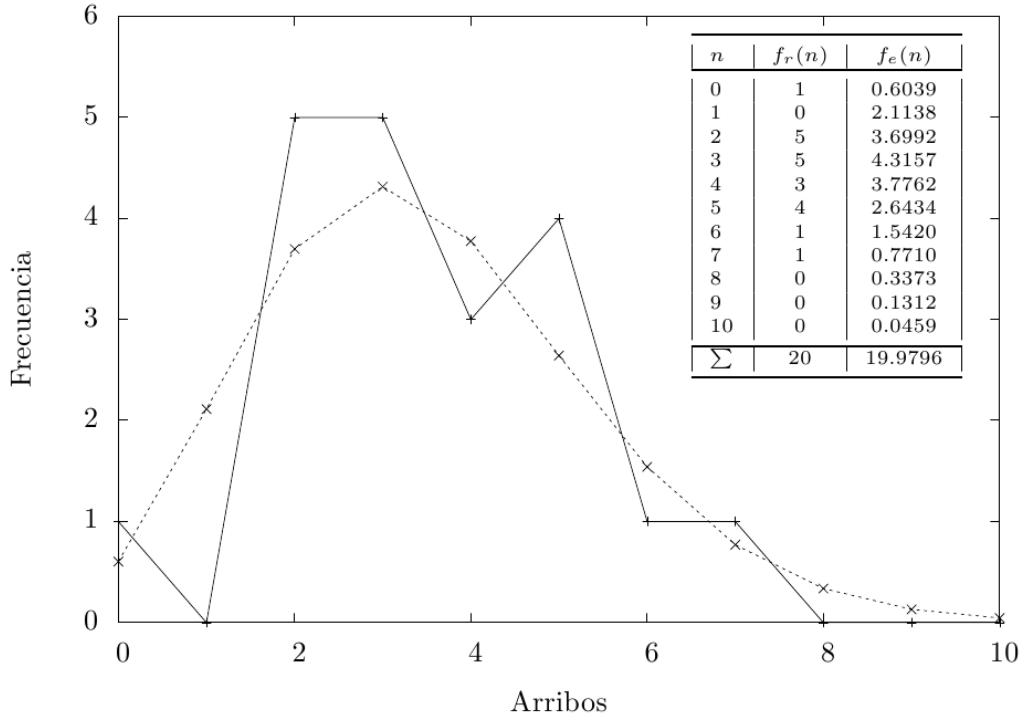


Figura III.2.: Frecuencia real vs Frecuencia teórica

Utilizando la distribución de Poisson, es posible obtener la probabilidad de tener n arribos y calcular una frecuencia esperada.

$$P(n) = \frac{\sum \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (\text{III.2})$$

$$f_{e_i} = P(x_i)N \quad (\text{III.3})$$

En la figura III.2 se muestran las frecuencias esperadas y las obtenidas.

Se procede a calcular el valor de χ^2 para contrastar lo permisible en un nivel de significancia del 5%.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(f_{e_i} - f_{r_i})^2}{f_{e_i}} = 4,56 \quad (\text{III.4})$$

De las tablas de la distribución χ^2 para 10 grados de libertad y con un nivel de significancia del 5% ($\alpha = 5\%$) tenemos un valor de 15,987, lo cual es un valor mayor al obtenido en la medición del error; por ende, se acepta la hipótesis.

En consecuencia la distribución que describe el proceso de arribo al sistema se denota como M , que representa un proceso Markoviano. (Una característica del proceso Markoviano es que no tiene memoria, es decir, la probabilidad de ocurrencia de un nuevo evento no depende de los eventos anteriores). El siguiente paso consistió en determinar la distribución del tiempo de servicio. ■

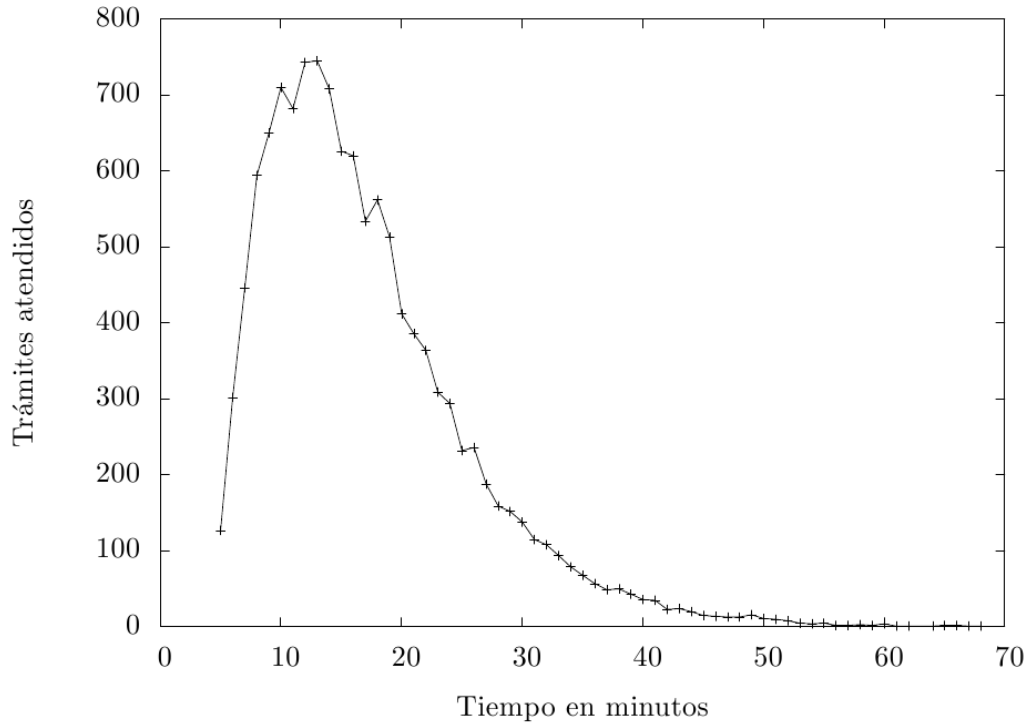


Figura III.3.: Frecuencia relativa de los tiempos de servicio

II. La distribución del tiempo de servicio

Con los tiempos de atención del servicio, de una muestra de un año de operación, se busca modelar el proceso mediante alguna función conocida. Para tener una pauta a seguir, se presenta la distribución de frecuencias relativas de esta variable en la figura III.3.

De la figura 3, se observa que la frecuencia relativa de los tiempos de servicio presenta:

- Falta de simetría
- Oblicuidad positiva

Una primera tentativa es proponer que se trata de una variable aleatoria con función de densidad gamma. Así que con los dos primeros momentos de la distribución empírica se ajustan los parámetros α y β de la distribución Gamma.

$$\begin{aligned} E[T] &= 17,08 \rightarrow \alpha\beta \\ Var[T] &= 72,39 \rightarrow \alpha\beta^2 \end{aligned} \tag{III.5}$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} \alpha &= 4,029 \\ \beta &= 4,2383 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Este valor de α y considerando que en la atención se llevan a cabo una secuencia de operaciones finitas para completar el trámite, nos lleva a especificar que se trata de una distribución Erlangiana de 4 fases.

$$\begin{aligned} k &= 4 \\ \mu &= 0,058986 \end{aligned} \tag{III.7}$$

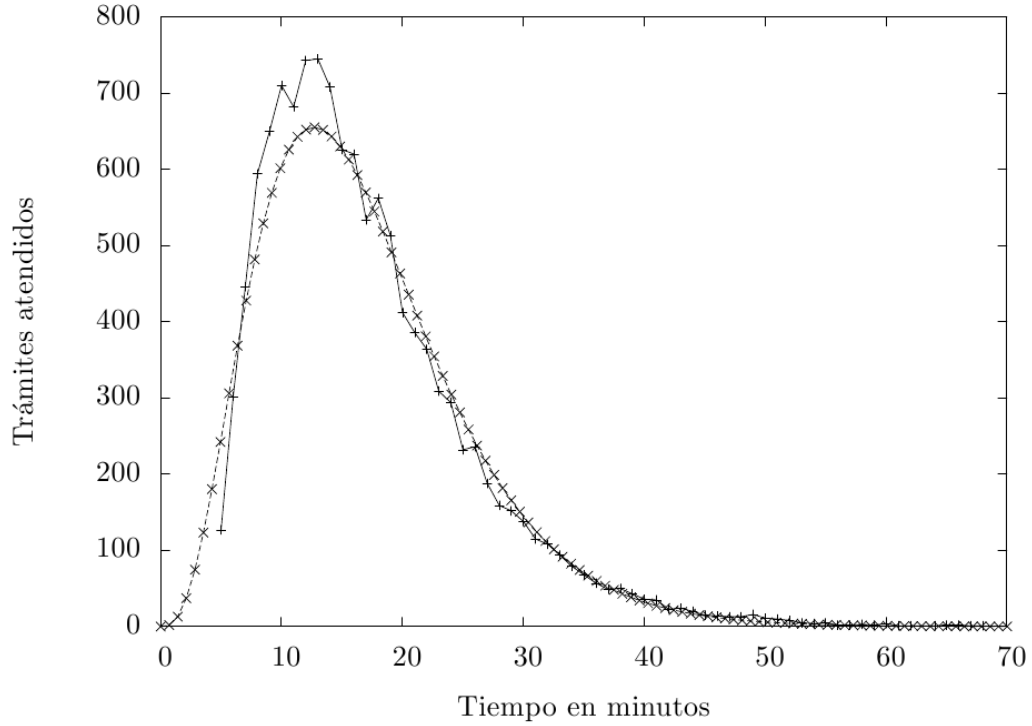


Figura III.4.: Frecuencia relativa, frecuencia teórica

En la figura III.4 se presenta la frecuencia de la variable del tiempo del proceso, comparada con el modelo de Erlang de cuatro fases. En consecuencia, se realizó una prueba de hipótesis para verificar la distribución del tiempo de servicio.

Por consiguiente, el siguiente paso consistió realizar una prueba de hipótesis sobre la distribución del tiempo de servicio.

I. Hipótesis sobre la distribución del tiempo de servicio

La **hipótesis** que se plantea para este caso es la siguiente: *la distribución del tiempo de servicio obedece una distribución Erlangiana de cuatro fases.*

Con el propósito de efectuar la prueba de hipótesis utilizando la distribución de chi-cuadrada, se calcularon χ^2 de los valores reales con los ajustados. Al tratar con una función de densidad de probabilidad, no es posible realizar comparaciones puntuales entre el valor real y el esperado. Lo que se debe comparar es la integral de la densidad en un intervalo dado, es decir la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor en dicho intervalo.

Sin embargo realizar este cálculo puede ser complicado, ya que la función de distribución esta dada por:

$$F(x) = \frac{\gamma(k, \lambda x)}{(k-1)!} \quad (\text{III.8})$$

donde $\gamma(a, t) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$

Afortunadamente, gracias a la relación entre la distribución de Erlang y la función de probabilidad Poisson [1], se puede realizar el cálculo de $F(x)$ con la suma de k funciones de probabilidad Poisson idénticas de parámetro μ . Esto es, la función de distribución (CDF) esta dada por:

$$F(x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x} \quad (\text{III.9})$$

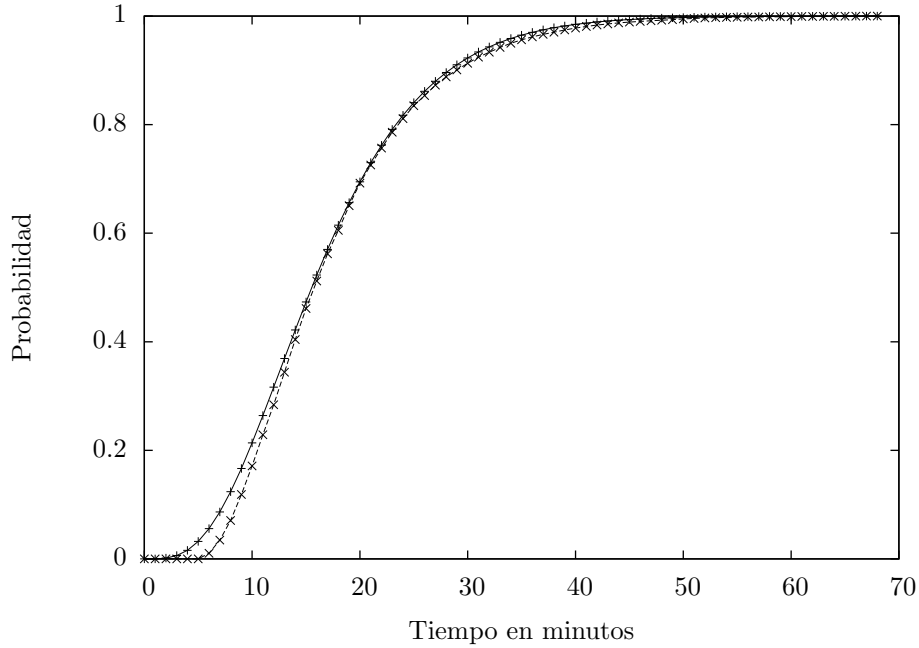


Figura III.5.: Función de densidad acumulada

La figura III.5 muestra el contraste de $F(x)$ empírica y la del modelo de ajuste.

Calculando χ^2 de $F(x)$ se determinó un valor de 0,181 con 69 grados de libertad. Contrastándose para un nivel de significancia del 5 % se obtienen de las tablas un valor de 84,41, por lo cual se acepta la hipótesis.

II. Atención en bloques

En cuanto a la atención en bloques, el servidor acumula solicitudes de servicio de seis elementos en promedio, con lo cual se inicia el proceso del trámite, por lo que la distribución del tiempo de servicio se denota como $E_4^{[6]}$, lo cual se lee como Erlang de 4 fases en bloques de 6 trámites. ■

III. El modelo de servicio

Para determinar las características del sistema $M/E_4^{[6]}/1$, se modela mediante una cadena de Markov siguiendo los pasos descritos por Saaty[3] para una distribución de probabilidad general B

I. Establecer el modelo del sistema

Sean las probabilidades de transición r_{ij} las cuales indican la probabilidad condicional que el siguiente estado sea E_j (que existan j clientes en el sistema es decir la suma de las personas que están siendo atendidas y las que están esperando), dado que el estado actual sea E_i . Sea π_j ($j = 0, 1, \dots$) la probabilidad de estar en el estado E_j antes de que el servicio inicie. Por lo tanto π_j es obtenido multiplicando π_i por r_{ij} y sumando sobre i , esto es:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i r_{ij} \quad (\text{III.10})$$

Para encontrar las características del modelo sea:

$$a(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.11})$$

$$b(t) = \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (\text{III.12})$$

donde $a(t)$ describe la función de masa de probabilidad de llegada de n clientes durante cualquier intervalo de servicio t , y $b(t)$ describe la función de densidad de probabilidad del tiempo de servicio.

Asumiendo que los tiempos de servicio están independientemente distribuidos. Entonces la probabilidad de tener n llegadas durante un tiempo de servicio es:

$$k_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} dt \quad (\text{III.13})$$

Para generar una función analítica a partir de la sucesión de estados E_j del sistema, utilizamos un procedimiento matemático llamado transformada z [4].

Multiplicando la ecuación III.10 por z^j y sumando sobre j , obtenemos la función generatriz de probabilidad:

$$P(z) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i r_{ij} \quad (\text{III.14})$$

Como las unidades son atendidas en bloques de s o menos, en este caso $s = 6$, un cambio de i a j unidades en el sistema es obtenido ya sea por:

$i \leq s - 1$ Atender i unidades en el bloque y recibir j unidades de arribo.

$i \geq s$ Teniendo s unidades en servicio y las restantes $i - s$ esperando con las $j - (i - s)$ nuevas unidades que arribaron para dar el total de j

$i > j + s$ Entonces $r_{ij} = 0$, debido a que si incluso s unidades son atendidas es imposible reducir el número a j

Resumiendo

$$\begin{aligned} r_{ij} &= k_j & 0 \leq i \leq s - 1 \\ r_{ij} &= k_{j-(i-s)} & j + s \geq i \geq s \\ r_{ij} &= 0 & i > j + s \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Tal como se muestra en la tabla III.2

Combinado este resultado con la ecuación III.14, tenemos:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \left(\sum_{i=0}^{s-1} \pi_i k_i + \sum_{i=s}^{j+s} \pi_i k_{j-i+s} + \sum_{i=j+s+1}^{\infty} (0) \pi_i \right) \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \left(\sum_{i=0}^{s-1} \pi_i k_j + \sum_{i=s}^{j+s} \pi_i k_{j-i+s} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i k_j + \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{i=s}^{j+s} \pi_i k_{j-i+s} \\ &= K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i + \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\pi_s k_j + \pi_{s+1} k_{j-1} + \dots + \pi_{s+j} k_0) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

i, j	0	1	...	$s-1$	s	$s+1$...	$s+k$	$s+k+1$...
0	k_0	k_1	...	k_{s-1}	k_s	k_{s+1}	...	k_{s+k}	k_{s+k+1}	...
1	k_0	k_1	...	k_{s-1}	k_s	k_{s+1}	...	k_{s+k}	k_{s+k+1}	...
...	k_0	k_1	...	k_{s-1}	k_s	k_{s+1}	...	k_{s+k}	k_{s+k+1}	...
$s-1$	k_0	k_1	...	k_{s-1}	k_s	k_{s+1}	...	k_{s+k}	k_{s+k+1}	...
s	k_0	k_1	...	k_{s-1}	k_s	k_{s+1}	...	k_{s+k}	k_{s+k+1}	...
$s+1$	0	k_0	...	k_{s-2}	k_{s-1}	k_s	...	k_{s+k-1}	k_{s+k}	...
$s+2$	0	0	...	k_{s-3}	k_{s-2}	k_{s-1}	...	k_{s+k-2}	k_{s+k-1}	...
...	0	0
$s+k$	0	0	...	k_{s-k-1}	k_{s-k}	k_{s-k+1}	...	k_s	k_{s+1}	...
$s+k+1$	0	0	...	k_{s-k-2}	k_{s-k-1}	k_{s-k}	...	k_{s-1}	k_s	...
...	0	0

Cuadro III.2.: Matriz de transiciones

Los términos $\pi_s k_j + \pi_{s+1} k_{j-1} + \dots + \pi_{s+j} k_0$ es la convolución de dos secuencias, por lo tanto podemos utilizar el producto de las funciones que las generan. La función que genera la secuencia k_j es $K(z)$ y la función que genera π_{s+j} la podemos escribir cambiando los índices de la sumatoria:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{j+s} z^j = \sum_{i=s}^{\infty} \pi_i z^{i-s} \quad (\text{III.18})$$

$$\begin{aligned}
P(z) &= K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i + \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\pi_s k_j + \pi_{s+1} k_{j-1} + \dots + \pi_{s+j} k_0) \\
&= K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i + z^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\pi_0 k_j + \pi_1 k_{j-1} + \dots + \pi_j k_0) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{i=0}^{s-1} z^{i-s} k_j \pi_i
\end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

En el último paso se resta el termino que falta en la sumatoria $\sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{i=0}^j z^{i-s} k_j \pi_i$, que es precisa-

mente los índices de $\sum_{i=0}^{s-1}$

$$\begin{aligned}
P(z) &= K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i + z^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j z^j \pi_i k_{j-i} - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{s-1} z^{j-s+i} k_j \pi_i \\
&= K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i + z^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j z^{j-i} z^i \pi_i k_{j-i} - z^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} z^j k_j \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i(z^i) \\
&= K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i + z^{-s} K(z) P(z) - z^{-s} K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i(z^i) \\
&= z^{-s} K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i(z^s) + z^{-s} K(z) P(z) - z^{-s} K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i(z^i) \\
&= z^{-s} K(z) P(z) + z^{-s} K(z) \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i(z^s - z^i) \\
&= K(z) z^{-s} [P(z) + \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i(z^s - z^i)]
\end{aligned} \tag{III.20}$$

Resolviendo para $P(z)$

$$P(z) = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} \pi_i(z^s - z^i)}{z^s/K(z) - 1} \tag{III.21}$$

En esta última expresión se reconoce a $K(z)$ como la función generatriz de k_n , que representa la probabilidad de tener n llegadas durante un tiempo de servicio.

William Feller [1] describe la aleatorización como el cambio en un parámetro de una distribución de probabilidad para generar una nueva distribución de probabilidad con otro espacio muestral, y este concepto lo aplicamos en el calculo de $K(z)$.

$$\begin{aligned}
K(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{z\lambda t} e^{-\lambda t} \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-z\lambda)t} \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-[\lambda(1-z)]t} \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} dt \\
&\equiv \beta[\lambda(1-z)]
\end{aligned} \tag{III.22}$$

Donde $\beta(z)$ es la transformada de Laplace-Stieltjes [4] de la distribución de tiempo del servicio. Calculando la transformada de Laplace-Stieltjes para el tiempo de servicio con función de densidad

Erlangiana de k fases tenemos:

$$\begin{aligned}\beta(z) \triangleq E[e^{-zX}] &= \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{\mu^k}{(\mu + z)^k}\end{aligned}\quad (\text{III.23})$$

Entonces evaluando la transformada de Laplace-Stieltjes en $\lambda(1 - z)$

$$\beta(\lambda(1 - z)) = \frac{\mu^k}{(\mu + (\lambda(1 - z)))^k} \quad (\text{III.24})$$

Introduciendo el concepto de intensidad de trafico denotado por ρ , que para el sistema que se analiza es:

$$\rho \equiv \frac{\lambda k}{\mu s} \quad (\text{III.25})$$

Finalmente $K(z)$ esta dada por:

$$\begin{aligned}K(z) &= \frac{\mu^k}{(\mu + \lambda(1 - z))^k} \\ &= \left[\frac{\mu}{\mu + \lambda(1 - z)} \right]^k \\ &= \left[1 + \frac{\lambda(1 - z)}{\mu} \right]^{-k} \\ &= \left[1 + \frac{\rho s(1 - z)}{k} \right]^{-k}\end{aligned}\quad (\text{III.26})$$

II. Encontrar los ceros del polinomio

La tarea ahora es encontrar los ceros del polinomio para obtener la longitud promedio de la línea de espera en el sistema. Para ello debemos tomar en cuenta que las probabilidades π_0, \dots, π_{s-1} deben ser tales que $P(z)$ converga dentro del círculo unitario ($|z| \leq 1$)

$$P(z) = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} \pi_i (z^s - z^i)}{z^s / K(z) - 1} \quad (\text{III.27})$$

Primero encontraremos los ceros del denominador:

$$z^s / K(z) - 1 \quad (\text{III.28})$$

$$z^s \left[1 + \frac{\rho s(1 - z)}{k} \right]^k - 1 \quad (\text{III.29})$$

Recordando los parámetros del sistema $k = 4$ y $s = 6$, y escribiendo $a = \frac{s\rho}{k}$ y $b = 1 + a$

$$\begin{aligned}& z^6 [1 + a - az]^4 - 1 \\ & z^6 [b - az]^4 - 1 \\ & z^6 [b^4 + 4b^3(-az) + 6b^2(-az)^2 + 4b(-az)^3 + (-az)^4] - 1 \\ & z^6 [z^4(a^4) + z^3(-4ba^3) + z^2(6a^2b^2) + z[-4ab^3] + b^4] - 1 \\ & z^{10}(a^4) + z^9(-4ba^3) + z^8(6a^2b^2) + z^7[-4ab^3] + z^6b^4 - 1\end{aligned}$$

Con $\rho = 0,86$ tenemos las siguientes raíces:

$$z = \begin{pmatrix} -0,48866 + 0,00000i \\ -0,30937 - 0,40541i \\ -0,30937 + 0,40541i \\ 0,17311 - 0,56594i \\ 0,17311 + 0,56594i \\ 1,00000 + 0,00000i \\ 1,12560 + 0,00000i \\ 1,84358 - 0,29429i \\ 1,84358 + 0,29429i \\ 2,03786 + 0,00000i \end{pmatrix}$$

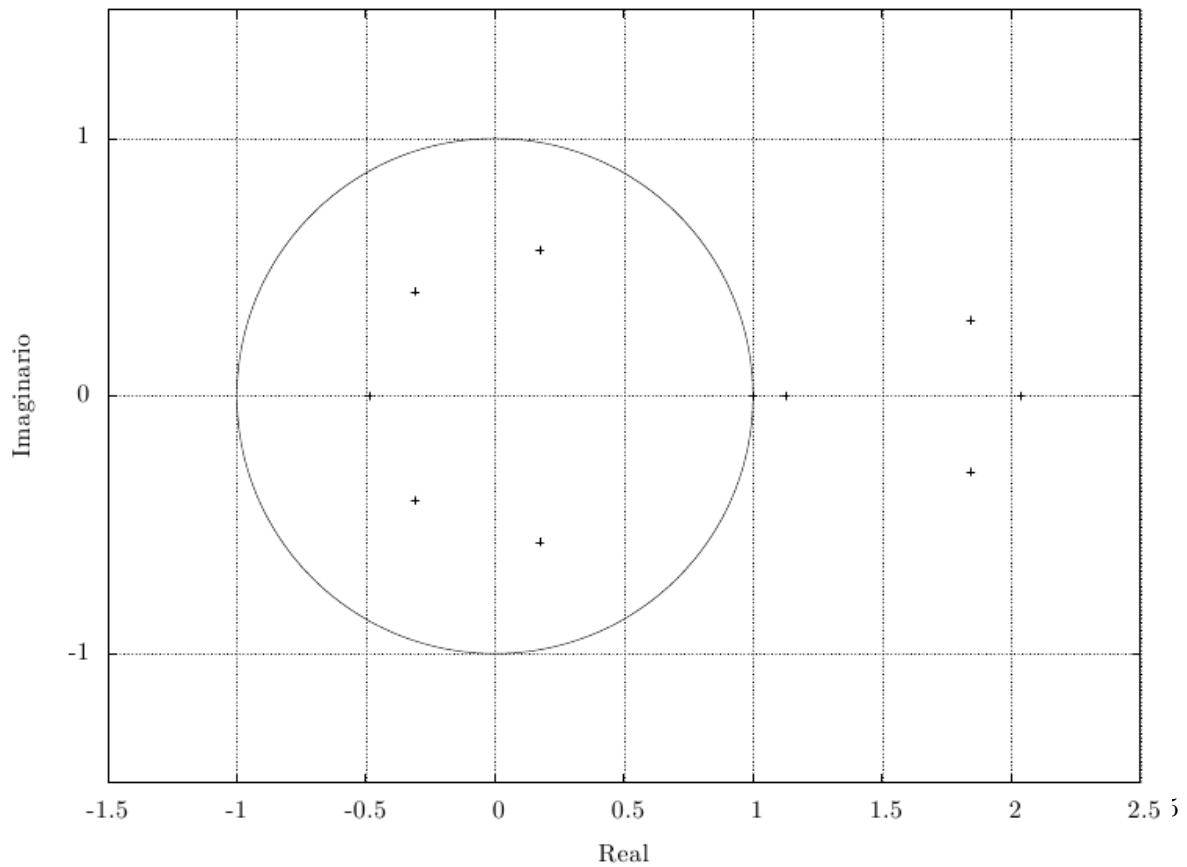


Figura III.6.: Raíces del polinomio

Se puede observar que existen $s - 1$ ceros en $|z| < 1$ que son los que interesan para mantener $\rho < 1$ tal como se muestra en III.6. Cancelando estos ceros con los ceros del numerador, para mantener a $P(z)$ analítica dentro del círculo unitario, podemos escribir $P(z)$ como:

$$P(z) = \frac{A}{\prod_{j=s}^{s+k-1} (z_j - z)} \quad (\text{III.30})$$

Donde A es una constante de proporcionalidad. Utilizando $P(1) = 1$ tenemos:

$$P(z) = \prod_{j=s}^{s+k-1} \frac{z_j - 1}{z_j - z} \quad (\text{III.31})$$

Desarrollando en fracciones parciales:

$$P(z) = \prod_{j=s}^{s+k-1} \frac{z_j - 1}{z_j - z} = \sum_{j=s}^{s+k-1} \frac{A_j}{z_j - z} \quad (\text{III.32})$$

Donde:

$$A_j = \prod_{n=1; n \neq j}^k \frac{z_n - 1}{z_n - z_j} \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{aligned} A_6 &= -0,91727 \\ A_7 &= 0,36392 - 0,53387i \\ A_8 &= 0,36392 + 0,53387i \\ A_9 &= 1,8944e^{-01} - 9,5726e^{-18}i \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

III. Resultados del modelo

Con esta información podemos calcular algunas de las características del sistema, entre ellas la longitud promedio de la fila. Para ello partiendo de la función generatriz:

$$P(z) = \prod_{j=s}^{s+k-1} \frac{z_j - 1}{z_j - z} \quad (\text{III.35})$$

Calculamos la función generadora de momentos;

$$M(\theta) = \prod_{j=s}^{s+k-1} \frac{z_j - 1}{z_j - e^\theta} \quad (\text{III.36})$$

$$\gamma(\theta) = \ln M(\theta) = \sum_{j=s}^{s+k-1} \ln \frac{z_j - 1}{z_j - e^\theta} \quad (\text{III.37})$$

$$\frac{d\gamma(\theta)}{d\theta} = \sum_{j=s}^{s+k-1} \frac{z_j - e^\theta}{z_j - 1} (z_j - 1)(z_j - e^\theta)^{-2} (e^\theta) \quad (\text{III.38})$$

Y evaluamos en $\theta = 0$

$$\left. \frac{d\gamma(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \sum_{j=s}^{s+k-1} \frac{1}{z_j - 1} \quad (\text{III.39})$$

IV. Resultados

I. Aplicación del modelo

Hasta este punto se ha realizado lo siguiente:

1. El análisis estadístico a los procesos estocásticos que ocurren en el sistema de atención gubernamental.
2. Un modelo de líneas de espera que representa el fenómeno físico estudiado.
3. La obtención de ecuaciones que describen características del sistema en el estado estable.

Ahora se aplicarán dichos resultados al sistema físico, con ello se calcula la longitud promedio de la fila como:

$$L = 11,039 \tag{IV.1}$$

Otro resultado se puede calcular utilizando el teorema de Little [2], el cual indica que el número promedio de clientes en el sistema es igual a la tasa promedio de arribo por el tiempo promedio invertido en el sistema.

De esta forma con un $\lambda = 0,30435$ clientes por minuto, se tiene un tiempo de espera promedio de 36,27 minutos. ■

V. Recomendaciones

I. La solución analítica

Los sistemas de computo actuales permiten generar soluciones numéricas o simulaciones de sistemas de colas que pueden describir con gran precisión un sistema físico. Sin embargo el invertir algo de tiempo en plantear un modelo y resolverlo analíticamente le da un valor adicional al resultado. Se identifican y describen las relaciones y los componentes estructurales del sistema.

Al tener un modelo matemático que describe el fenómeno físico, se permite aplicar técnicas de análisis en el modelo y hacer inferencias sobre el sistema. Por ejemplo la longitud promedio de la fila, o bien el tiempo promedio de espera de los usuarios. Mas aún, se puede modificar los parámetros del modelo matemático para buscar condiciones óptimas de servicio, o diseños que permitan controlar el cambio del modelo que pueden ser trasladados al sistema físico mejorando la experiencia del usuario.

Un campo de oportunidad se encuentra en describir el sistema en el estado transitorio, es decir generar modelos que describan el número de clientes en el sistema al iniciar el ciclo de operación. En este trabajo solo se considero el sistema en el estado estable.

Finalmente siempre se pueden tomar decisiones sobre los sistemas de servicio del gobierno en base a la experiencia, pero el contar con un análisis formal de los niveles de servicio que se brinda a los usuarios, mejorará la perspectiva que la población tiene sobre sus funcionarios públicos. ■

Bibliografía

- [1] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications: v. 2 (Wiley Series in Probability and Statistics)*. John Wiley, 1971-01-01.
- [2] L Kleinrock. *Queueing Systems: Theory v.1: Theory Vol 1*. WileyBlackwell, 1975-01-01.
- [3] Thomas Lorie Saaty. *Elements of Queueing Theory, with Applications*. Dover Publications Inc., 1984-03-12.
- [4] A. David Wunsch. *Variable compleja con aplicaciones*. Pearson Educación, 1994.