

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**

---

---

**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

***COMPORTAMIENTO DEL  
ESCALAMIENTO DE SUPERFICIES DE  
FRACTURA EN MATERIALES  
COMPUESTOS***

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA MECÁNICA

P R E S E N T A

M en C. **CARLOS ALBERTO MORA SANTOS**

DIRECTOR: **DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA**



**MÉXICO, D. F.**

**DICIEMBRE 2010**

## **RESUMEN**

*En este trabajo se estudia el comportamiento del escalamiento de las superficies de fractura en papel Filtro a través de la mecánica de grietas auto-afines. Este tipo de papel tiene una anisotropía bien definida en sus propiedades mecánicas asociadas con una orientación preferencial de las fibras en la dirección de maquinado. Su comportamiento es en esencia frágil y los perfiles de grietas resultantes presentan un comportamiento de invarianza auto-afín y los esfuerzos frente la punta de la grieta obedecen a una ley de potencias. El exponente de rugosidad encontrado es de  $H = 0.50 \pm 0.01$ , diferente del valor universal sugerido  $H = 0.8$ . La teoría clásica con base en la mecánica del medio continuo ha demostrado que en materiales tales como los metálicos hay una relación estrecha entre el tamaño de la grieta y su esfuerzo de inicio de crecimiento, sin embargo en este material no sucede lo mismo ya que las pruebas muestran un comportamiento de inicio de grietas constante para diferentes anchos y formas de muescas.*

## **ABSTRACT**

*In this work, through the Self-affine crack mechanics, the scaling behavior of fracture surfaces in filter paper self-affine crack pattern in Filter Paper sheet is studied. This paper has a well-defined anisotropy of mechanical properties associated with visible preferable orientation of fibers in the machine direction. The fracture behavior is in essence brittle and the rupture lines have self-affine invariance and the stresses ahead of the straight notch obey a power law behavior. The roughness exponent value is of  $H = 0.50 \pm 0.01$ , different of the suggested universal value  $H = 0.8$ . The classical theory has demonstrated that in materials such as metallic there is a relationships between the size and the beginning crack stress, but in this material do not happen, the tests show the beginning crack stress from stress-strain behavior curves remain stable under the different specimen sizes  $\lambda w$  and crack length size. Moreover, different types of geometric groove, circular and linear, and without a crack were tested and show almost the same behavior.*

## **JUSTIFICACIÓN**

*La fractura de los materiales ha sido un fenómeno que sin duda alguna ha recibido una de las mayores atenciones dentro del campo de la investigación de materiales. A través del tiempo se han desarrollado diversas teorías para su estudio, sin embargo, a partir de los descubrimientos de la geometría fractal desarrollada por B. Mandelbrot, la fractura ha tenido una forma alterna de entender este fenómeno. Estudios experimentales muestran que las superficies de fractura son estadísticamente invariantes bajo una transformación auto-afín, es decir, es estadísticamente invariante bajo la transformación de escala  $Y(\lambda_x x) = \lambda_y Y(x) = \lambda_x^H Y(x)$ , donde  $H$  es el exponente de Hurst y caracteriza la rugosidad fractal de la superficie. La mayoría de los estudios se han realizado en materiales metálicos, donde se ha sugerido que este exponente es un valor universal ( $H = 0.8$ ) independiente del material así como del proceso de fractura. Sin embargo, este tema no se ha tratado lo suficiente en materiales compuestos, y mucho menos con perfiles de grietas resultantes totalmente aleatorios ( $H = 0.5$ ), por lo tanto el entendimiento correcto del comportamiento de fractura de los materiales requiere abordar desde todos los frentes su comportamiento, por lo que este trabajo aborda un estudio de los perfiles de fractura en el papel filtro, que se encontró poseer dicha característica.*

## **OBJETIVO**

*Estudiar el comportamiento de escalamiento de las superficies de fractura de un material compuesto cuyos perfiles resultantes muestren una trayectoria totalmente aleatoria ( $H = 0.5$ ) a través de la mecánica de grietas auto-afines.*

### **Objetivos Específicos**

- *Entender el comportamiento de fractura en un material compuesto de refuerzos aleatorios*
- *Analizar el comportamiento auto-afín de los perfiles de grietas*
- *Estudiar el efecto microestructural en el comportamiento de fractura resultante a través del esfuerzo de inicio de crecimiento de grietas*

## **INTRODUCCIÓN**

*A través de todos los tiempos el hombre ha hecho el uso de los materiales como parte de su vida, a tal grado que a sus etapas de vida las ha llamado en función de los materiales característicos de la época, tal como la era de piedra, de bronce, etc. El conocimiento y entendimiento del comportamiento de estos ha sido parte fundamental en el desarrollo científico – tecnológico, y por ende, crecimiento y mejor forma de vida de las naciones. Los materiales se pueden encontrar de dos formas: natural y artificialmente, pero en la mayoría de los casos son modificados para realizar una función deseada. Su selección depende básicamente del conocimiento de su comportamiento y capacidades bajo condiciones de trabajo específicos; es decir, sus propiedades. Para tal objetivo se han desarrollado técnicas que permiten descubrir las relaciones entre su microestructura y propiedades macroscópicas.*

*En un principio el uso de los materiales fue individual; sin embargo, el avance tecnológico requirió de otros más eficientes, económicos y resistentes. Una de las características principales que se analiza al desarrollar y seleccionar un material es el comportamiento a la fractura. Este fenómeno es uno de los que más atención ha recibido durante el último siglo, y es que muchas veces bajo esta condición se debe analizar un material para su posible uso.*

*La fractura de los materiales, que se puede entender microscópicamente como la separación interatómica y macroscópicamente como la separación por ruptura de un componente en dos o más piezas, se ha estudiado por la Mecánica de la Fractura desde dos enfoques principales: el criterio de esfuerzos y el de energía. A partir de finales de los años setenta, con el desarrollo de la Geometría Fractal para caracterizar objetos irregulares topológicamente (geometrías no euclidianas), se introdujo una nueva rama para entender el comportamiento de fractura de los materiales llamada Mecánica de la Fractura Fractal.*

*Mandelbrot et al. (Mandelbrot, 1984) fueron los primeros en descubrir que las superficies reales de fractura, cuyos aspectos más bien son rugosos que lisos como se idealizan en la Mecánica de la Fractura Clásica, podrían ser estudiadas con base en los fundamentos de la Geometría Fractal. A partir de esto, un amplio rango de microestructuras han sido caracterizadas cuantitativamente utilizando la idea de una dimensión fractal, determinada por el exponente de Hurst: es decir, una dimensión fraccional que corresponde de forma única a la geometría bajo estudio y a menudo es no integrable. Experimentalmente se ha comprobado que existe una fuerte correlación entre el parámetro fractal y las propiedades de fractura del material (Mecholsky, 1989); sin embargo, también se ha encontrado que no existe relación cuantitativa alguna (Baran, 1992; Davidson, 1989) debido a que las superficies de fractura son fractales solo en "sentido estadístico" y sus perfiles no son matemáticamente figuras fractales rigurosas tal como la curva de Koch (Balankin, 1997; Wnuk, 2005).*

*En los últimos años, a partir de los trabajos desarrollados en el campo de la Mecánica de la Fractura Fractal por el grupo de Investigación "Mecánica Fractal", se ha visto un creciente interés en la aplicación de esta teoría al estudio de los materiales y fenómenos físicos. Como parte del mismo en este trabajo se amplía el conocimiento del comportamiento de fractura de papel a través de la mecánica de grietas autoafines.*

*En el capítulo 1 se introducen los conceptos generales que permitirán sentar las bases para el desarrollo del resto del trabajo. Primero se describe el comportamiento mecánico de los materiales comunes y de los compuestos; aquí, dada la diferencia de mecanismos de falla entre los compuestos y los materiales comunes, desde un punto de vista fenomenológico se hace un análisis al estudio de la fractura en los materiales compuestos. Posteriormente se analizan los métodos comunes de estudio de la fractura empezando por las bases de la mecánica de la fractura clásica y finalizando con los modelos estadísticos principales.*

*La mecánica de la fractura fractal se ha desarrollado como una técnica que permite estudiar la fractura de los materiales a través de la topografía geométrica de las superficies resultantes del fenómeno de un agrietamiento. Aprovechando una de las*

*propiedades más importantes de los fractales, el escalamiento de las estructuras, esta técnica intenta relacionar el comportamiento microestructural de los materiales con el macroestructural. Esta teoría, que es la técnica empleada en este trabajo, se desarrolla en el capítulo 2.*

*Existen dos formas básicas de analizar la fractura en los materiales; a través de la experimentación o por medio de modelación, que es la representación matemática del fenómeno. En este trabajo se empleó la primera. En el capítulo 3 se describe la metodología desarrollada. En el capítulo 4 se analizan los resultados obtenidos para finalmente poder establecer las conclusiones respectivas a la presente investigación*

*Balankin, A. S. (1997): Physics of Fracture and Mechanics of Self-affine Cracks. Engineering Fracture Mechanics 57, 135-203.*

*Baran, G. R., Roques-Carmes, C., Wehbi, D., Degrange, M. (1992): Fractal Characteristics of Fracture Surfaces. Journal of American Ceramics Society 75, 2687-2691.*

*Davidson, D. L. (1989): Fracture Surface Roughness as a Gauge of Fracture Toughness: Aluminum-Particulate SiC Composites. Journal of Materials Science 24, 681-687.*

*Mandelbrot, B. B., Passoja, D. E., Paullay A. J. (1984): Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals. Nature 308, 721-722.*

*Mecholsky, J. J., Passoja, D. E., Feinberg-Ringel, K. S. (1989): Quantitative Analysis of Brittle Fracture Surfaces using Fractal Geometry. Journal of American Ceramics Society 72, 60-65.*

*Wnuk, M. P., Yavari, A. (2005): A Correspondence Principle for Fractal and Classical Cracks. Engineering Fracture Mechanics 72, 2744-2757.*



# CONTENIDO

**RESUMEN**

**ABSTRACT**

**JUSTIFICACIÓN**

**OBJETIVOS**

**INTRODUCCIÓN**

**ÍNDICE DE FIGURAS**

**ÍNDICE DE TABLAS**

**SIMBOLOGÍA**

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>CONCEPTOS FUNDAMENTALES</b>	<b>1</b>
1.1	<i>Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos</i>	2
1.1.1	<i>Mecanismos de Falla en Materiales Compuestos Fibrosos</i>	4
1.2	<i>Mecánica de la Fractura</i>	5
1.2.1	<i>Criterio de Energía</i>	6
1.2.2	<i>Criterio de Intensidad de Esfuerzos</i>	8
1.2.3	<i>Mecánica de la Fractura en Materiales Compuestos</i>	10
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>MECÁNICA DE LA FRACTURA FRACTAL</b>	<b>12</b>
2.1	<i>Geometría Fractal</i>	13
2.1.1	<i>Fractales Auto-Similares</i>	16
2.1.2	<i>Fractales Auto-Afines</i>	16
2.2	<i>Descripción Fractal de las Superficies de Fractura</i>	17
2.3	<i>Mecánica Fractal de Grietas Auto-Afines</i>	18
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>METODOLOGÍA</b>	<b>21</b>
3.1	<i>El Papel</i>	22
3.2	<i>Procedimiento Experimental</i>	24
3.2.1	<i>Selección y Preparación del Material</i>	24
3.2.2	<i>Obtención de los Parámetros de Fractura</i>	26
3.3	<i>Comportamiento de Fractura del Papel Filtro</i>	27
3.4	<i>Caracterización Fractal de los Perfiles de Fractura</i>	30

<b>CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>31</b>
4.1 Comportamiento Auto-Afín de las Superficies de Grietas en el Papel Filtro	32
4.2 Esfuerzos de Inicio de Crecimiento de Grietas	33
4.2.1 Efecto de la Geometría de la Muesca	35
4.2.2 Efecto de la Velocidad del crecimiento de la Grieta	35
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>37</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>38</b>
<b>ANEXOS</b>	

---

# 1

## CONCEPTOS FUNDAMENTALES



*El conocimiento y entendimiento del comportamiento de los materiales ha sido parte fundamental en el desarrollo tecnológico de los países. La fractura es uno de los fenómenos que ha recibido mayor atención en la búsqueda de tal conocimiento. En este capítulo se generalizan los conceptos fundamentales de las propiedades mecánicas de los materiales que permitirán el entender el resto del presente trabajo.*

---

## 1.1 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LOS MATERIALES COMPUESTOS

La respuesta a la sollicitación de una carga en un material es determinada las propiedades mecánicas de un sólido. Las ecuaciones que caracterizan el comportamiento individual de los materiales y su reacción a estas son llamadas relaciones constitutivas. En el caso de los materiales sólidos lineales elásticos, queda determinada por la ley de Hooke, que representa una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación.

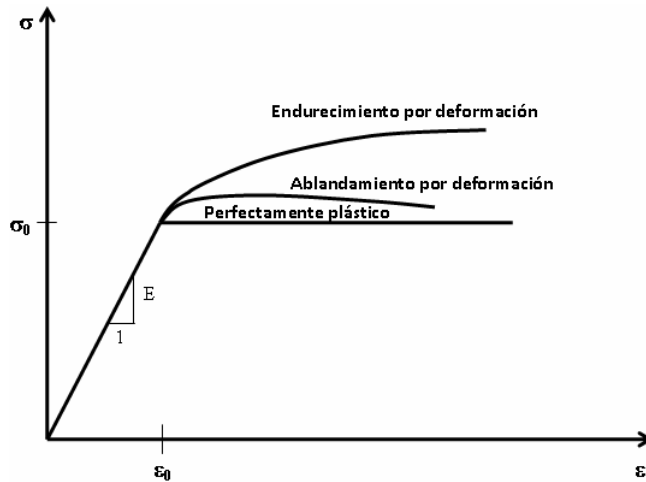
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1-1)$$

Las propiedades mecánicas básicas con base en la resistencia del material se determinan a partir del diagrama de esfuerzo – deformación unitaria (Fig. 1.1). Si un material es cargado a una fuerza determinada, los átomos en el material se desplazarán resultando en una deformación. Dependiendo de la cantidad de esta deformación inducida, se pueden identificar dos formas básicas del comportamiento de un material: la primera es una condición reversible (elástica) que se refleja en un reordenamiento de la microestructura a condiciones iniciales del material (idealmente) al ser sometido y liberado de la carga y se manifiesta hasta el esfuerzo de cedencia; la segunda zona es de comportamiento irreversible (plástica), esto significa que el material experimentará un efecto de deformación permanente, inicia generalmente en la zona de cedencia seguida de un fenómeno de “endurecimiento por deformación – strain hardening” para los materiales dúctiles, en el caso de los materiales casi-frágiles tal como el concreto este es conocido como “ablandamiento por deformación - strain-softening”, donde en lugar de tener una curva ascendente, se tiene una curva alargada hacia abajo debido a la heterogeneidad del material. Finalmente el punto de ruptura. En función de la microestructura, permite clasificar a los materiales en dúctiles y frágiles, en el caso de los segundos la zona plástica es casi imperceptible, por lo que el esfuerzo de fractura generalmente se considera el punto del límite elástico.

Cuando un material es empleado bajo una aplicación dada, debe soportar dichas cargas; sin embargo, este puede fallar por una de las siguientes tres formas básicas: Deformación

---

elástica excesiva, Cedencia o deformación plástica excesiva, Fractura. Este trabajo se limitará al tercer punto.



**Figura 1.1** Diagrama de esfuerzo – deformación unitaria ideal de los materiales.

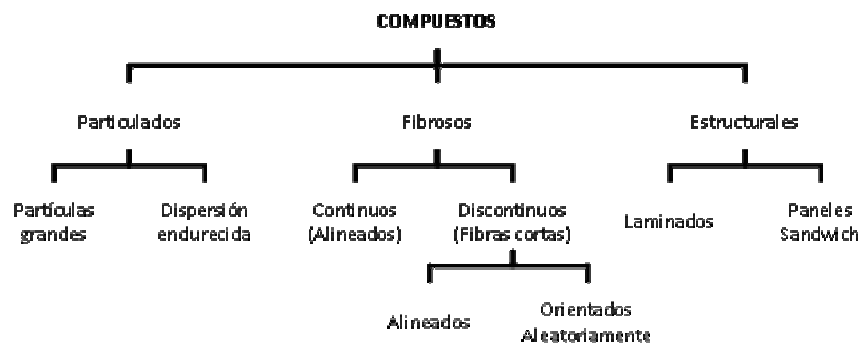
La fractura básicamente es acerca de un escalamiento. En el nivel más básico, la característica esencial del proceso de fractura es la rotura de los enlaces interatómicos, mientras que desde el punto de vista macroscópico, puede ser vista como la separación por ruptura de un componente en dos o más piezas debido a la propagación de grietas. La tendencia de las teorías desarrolladas para el estudio de la fractura en componentes es observada generalmente desde tres puntos de vista, atómica, microestructural y microscópica o mecánica del medio continuo. Durante este proceso observan la nucleación, crecimiento y coalescencia de microhuecos y grietas del material.

Un compuesto es un material estructural que consiste de la combinación de dos o más constituyentes (fases) con propiedades específicas diferentes, por lo que es un material heterogéneo. Los constituyentes son combinados macroscópicamente y no son solubles uno con el otro. Uno de estos es llamado fase de refuerzo debido a que en la mayoría de los casos sus propiedades mecánicas tal como la rigidez, la resistencia de cedencia, parámetros de endurecimiento, etc., tienen valores mayores que de la fase en que es insertado, llamada matriz. Los refuerzos pueden ser en forma de fibras, partículas o laminados, mientras que la matriz generalmente es continua. En la Figura 1.2 se muestra esquemáticamente la

---

clasificación de los materiales compuestos. La selección de dichos componentes queda determinada por la función deseada de la estructura.

El comportamiento mecánico de los compuestos depende principalmente del arreglo de los constituyentes y se estudian desde dos puntos de vista (Jones, 1975): micromecánicamente donde se examina la interacción entre los materiales que lo forman tal como la resistencia interfacial, la tenacidad a la fractura, fatiga, etc., y macroscópicamente cuya importancia recae en el comportamiento del compuesto como tal ya que se considera una buena unión entre sus interfases.



**Figura 1.2** Clasificación de los materiales compuestos

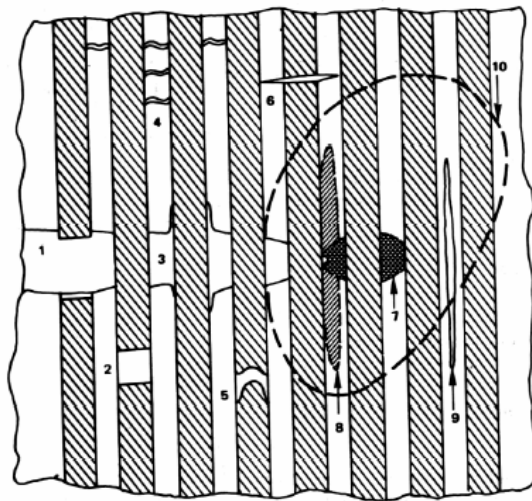
Debido a que su caracterización se realiza a partir de pruebas mecánicas estandarizadas con base en la medición de cargas y desplazamientos, las propiedades se calculan utilizando la teoría de la elasticidad a través de la Ley de Hooke (ec. 1.1), donde, a diferencia de los materiales comunes donde generalmente se calculan dos constantes, las características básicas de los compuestos dependen de la dirección de los refuerzos y la carga aplicada.

### **1.1.1 Mecanismos de fractura en materiales compuestos**

A diferencia de los materiales homogéneos e isotrópicos, la falla en los compuestos generalmente es más bien por una acumulación de daño que por una grieta localizada por lo que la fractura no ocurre por la propagación de una sola grieta macroscópicamente. Dada la heterogeneidad, los compuestos poseen varios tipos de fisuras internas (Fig. 1.3) tal como

---

rotura de fibras(Bouten, 1988), vacíos en la matriz, desalineamiento de las fibras(Morton, 1974), zonas de matriz aglomeradas, interfases desprendidas(Budiansky, 1995; Mayer, 1991), etc., mecanismos que ocurren algunas veces independientemente e interactivamente y la predominancia de una u otra puede ser afectada fuertemente por el material o las condiciones de carga. A su vez, estos causan los modos de falla siguientes: fallas de fibras(Elices, 2002), microagrietamiento de la matriz(Agrawal, 2004), delaminación(de Moura, 2010; Rikards, 2000), crecimiento de huecos, etc.



**Figura 1.3** Posibles mecanismos de falla en un material compuesto: 1) fractura de matriz frágil; 2) rotura de fibras; 3) agrietamiento de puenteo; 4) microagrietamiento de la matriz; 5) falla dúctil en la fibra; 6) fractura de la fibra en una fisura con agrietamiento de la matriz; 7) región plástica en la punta de una grieta principal; 8) falla interfacial; 9) falla de matriz longitudinal; 10) zona de falla interlaminar en un eje adyacente de una placa(Dharan, 1978).

En años recientes se ha hecho mucho esfuerzo para describir físicamente en forma correcta el daño y fenómeno complejo de la fractura en los compuestos, en muchos casos por medio de la mecánica de la fractura y la mecánica del daño local.

## 1.2 MECÁNICA DE LA FRACTURA

En general, la Mecánica de la Fractura es la herramienta matemática empleada para el estudio de la respuesta y falla de estructuras como una consecuencia de iniciación y

---

*propagación de grietas, relaciona el tamaño y forma de una grieta y las fuerzas o cargas que conducen a la fractura de un componente de forma y dimensiones definidas; su exactitud dependen principalmente de la exactitud de los datos del material y predicción de las cargas y esfuerzos. Aun cuando fueron propuestas correcciones para pequeñas escalas de plasticidad en 1948, los conceptos derivados antes de 1960, son aplicables solo a materiales que obedecen a la Ley de Hooke. Investigaciones subsecuentes llevaron a lo que en la actualidad se conoce como “Mecánica de la Fractura” y sus diferentes ramas de estudio. Para esto, se apoya en dos criterios básicos: de energía y el de esfuerzos. Para esto, se apoya en dos criterios básicos que gobiernan la fractura de los materiales sujetos a cargas a tensión o compresión, el criterio de esfuerzos y el de energía. El primero se basa en el hecho de que el esfuerzo local a tensión desarrollado alrededor de una fisura debe ser suficientemente grande para sobrepasar la resistencia cohesiva del material. El de energía, manifiesta que la extensión de una grieta ocurre cuando la energía disponible para su crecimiento sobrepasa la resistencia del material.*

### **1.2.1 Criterio de Energía**

*La primera evidencia cuantitativa para el efecto de concentración de esfuerzos de grietas fue proporcionada por Inglis (Inglis, 1913). Sin embargo, Griffith (Griffith, 1921) propuso un criterio de energía en el cual consideró que la debilitación de un material debido a una grieta pudiera ser tratada como un problema de equilibrio. El partió del hecho de que un cuerpo deformado elásticamente almacena una energía potencial y propuso que dicha energía es la fuerza impulsora del crecimiento de grietas, siempre y cuando la demanda de energía para la extensión de la grieta sea satisfecha por la conversión de la energía almacenada.*

*Para el análisis consideró una placa sujeta a un esfuerzo constante  $\sigma$  que contiene una longitud de grieta  $2a$  (Fig. 1.4). Prevalciendo condiciones de esfuerzo plano supuso que el ancho de la placa es mucho mayor que  $2a$ . Para que esta grieta incremente en tamaño, debe haber suficiente energía potencial disponible en la placa para superar la energía de superficie*

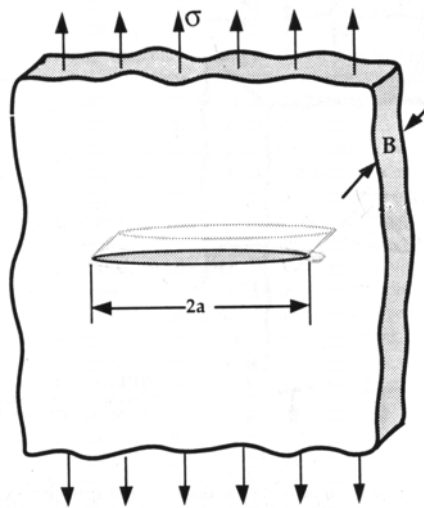


del material. El criterio de energía de Griffith para un incremento en el área de la grieta  $dA$ , bajo condiciones de equilibrio puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{dII}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (1-2)$$

donde  $E$  es la energía total,  $II$  es la energía potencial suministrada por la energía de deformación interna y fuerzas externas, y  $W_s$  es el trabajo requerido para crear nuevas superficies. Resolviendo para esfuerzos de fractura, se tiene

$$\sigma_f \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi}} \quad (1-3)$$



**Figura No. 1.4** Grieta a través del espesor de una placa infinitamente ancha sujeta a esfuerzos a tensión.

La ecuación (1-3) indica que la extensión de una grieta idealmente frágil es gobernada por los esfuerzos aplicados, la raíz cuadrada de la grieta y las propiedades del material. Debido a que  $E$  y  $\gamma_s$  son propiedades del material, el lado derecho es igual a un valor constante característico de un material dado. Consecuentemente, esta ecuación indica que la extensión de una grieta en tales materiales ocurre cuando el producto  $\sigma_f \sqrt{a}$  alcanza un valor constante crítico. Sin embargo, debido a que la ecuación es válida solo para materiales

---

idealmente frágiles, Irwin y Orowan independientemente modificaron la expresión de Griffith para considerar materiales que exhiben deformaciones plásticas. Su trabajo reconoce que la resistencia de un material para el crecimiento de la grieta es igual a la suma de la energía de superficie elástica y el trabajo de deformación plástico, acompañando la extensión de la grieta. Por lo tanto, la ecuación (1-3) fue modificada a:

$$\sigma_f = \left( \frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (1-4)$$

donde  $\gamma_p$  es el trabajo plástico por unidad de área de la superficie creada, y para materiales relativamente dúctiles es típicamente mucho mayor que  $\gamma_s$ . Aunque originalmente derivaron la ecuación (1-4) para metales, es posible generalizar el modelo de Griffith para considerar cualquier tipo de disipación de energía:

$$\sigma_f = \left( \frac{2Ew_f}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (1-5)$$

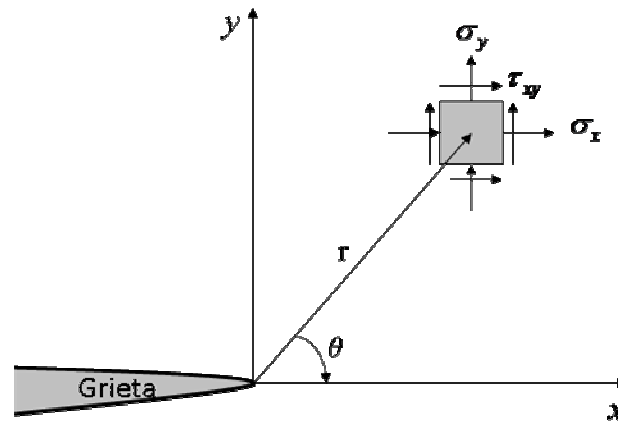
donde  $w_f$  es la energía de fractura, que podría incluir comportamiento plástico, viscoelástico o viscoplástico, dependiendo del material.

### **1.2.2 Criterio de la Intensidad de esfuerzos.**

Debido a las dificultades prácticas del método energético, Irwin desarrolló el método de intensidad de esfuerzos basado en la teoría de la elasticidad, donde el campo de esfuerzos en cualquier cuerpo lineal elástico agrietado queda determinado por:

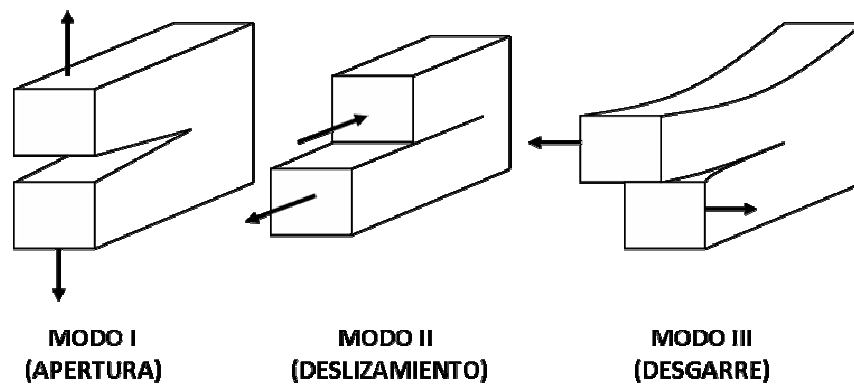
$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \dots, \quad (1-5)$$

La ecuación (1-5) describe una singularidad de esfuerzo, ya que es asintótico en  $r = 0$  (Fig. 1.6). Los esfuerzos cerca de la punta de la grieta varían con  $1/\sqrt{r}$  y el desplazamiento varía con  $\sqrt{r}$ , sin importar la configuración del cuerpo agrietado.



**Figura 1.6** Esfuerzos en un punto arbitrario frente a la punta de la grieta

Generalmente, los problemas se simplifican a tres “modos” de carga (Fig. 1.7), de apertura (modo I), deslizamiento (modo II) y desgarre (modo III), donde cada uno de estos produce una singularidad de esfuerzo en la punta de la grieta diferenciándose el factor de intensidad de esfuerzos por un subíndice correspondiente.



**Figura 1.7** Modos de carga principales para una grieta

En esencia,  $K$  sirve como un factor de escala para definir la magnitud del campo de esfuerzos en la punta de la grieta. Se puede observar que  $K = f(\sigma, a)$ , donde la funcionalidad depende de la configuración del componente agrietado y la forma en que son aplicadas las cargas.

---

### 1.2.3 Mecánica de la Fractura en Materiales Compuestos

La aplicabilidad de la mecánica de la fractura a materiales compuestos se ha visto limitada debido a la anisotropía y heterogeneidad de las fibras y sus inherentes fisuras. La fractura, a diferencia de los materiales isotrópicos es dependiente de la orientación del material, de las propiedades mecánicas de los materiales constitutivos y la interfase. Sin embargo, para su aplicación se han hecho ciertas idealizaciones tal como el tratado de anisotropía homogénea. Es decir, la heterogeneidad local es despreciada, el argumento es que uno asume que fuera de una zona local en la punta de la grieta, el material, aunque anisotrópico, es homogéneo y se comporta como un material lineal elástico. Hay dos criterios implícitos en el uso de la MFLE a compuestos:

1. La tenacidad a la fractura o razón de energía liberada es una propiedad significativa si es medida o calculada analíticamente para la condición en que la grieta inicia justo para propagar en una forma colineal.
2. la zona de daño local es relativamente pequeña respecto al tamaño del espécimen, para evitar interacciones entre lados libres, o alternativamente, se debe utilizar un factor de calibración empírico para un laminado, geometría de espécimen y condición de carga particular.

Como resultado, el cálculo del factor de intensidad de esfuerzos se ha hecho por medio de técnicas de mapeo variable. La solución general del campo de esfuerzos y desplazamientos en la vecindad de la punta de una grieta en cuerpos rectilíneamente anisotrópicos fue derivado por Sih et al. (Sih, 1965). Considérese una grieta en una placa y asúmase que las raíces de las ecuaciones características son calculadas con respecto al sistema de coordenadas  $x$ - $y$ . Los factores de intensidad de esfuerzos  $K_I$  y  $K_{II}$  en la punta de la grieta se define como:

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{\zeta^+ \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi\sigma_{\eta\eta}} \right] \\ K_{II} &= \lim_{\zeta^+ \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi\sigma_{\zeta\eta}} \right] \end{aligned} \quad (1-6)$$

Donde el sistema de coordenadas  $\zeta$ - $\eta$  esta fijado a la punta de la grieta y el eje  $\zeta$  es tangente a la punta de la grieta, haciendo un ángulo  $\omega_t$  ( $t$  representa la punta de la grieta) con el eje  $x$ . Ahora, considerando un punto respecto a la punta de la grieta ( $r$  y  $\theta$  son las coordenadas con respecto al sistema de coordenadas del  $\zeta$ - $\eta$  sistema), los esfuerzos y desplazamientos con respecto a este punto en términos de  $K_I$  y  $K_{II}$  son:

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta\zeta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{-s_1(s_2 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \operatorname{sen} \theta}} + \frac{s_2(s_1 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right], \\ \sigma_{\eta\eta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{-s_2 K_I - K_{II}}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \operatorname{sen} \theta}} + \frac{s_1 K_I + K_{II}}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right], \\ \sigma_{\zeta\eta} &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_1(s_2 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \operatorname{sen} \theta}} + \frac{-s_2(s_1 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right]\end{aligned}\quad (1-7)$$

$$\begin{aligned}u_{\zeta} &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ -p_1(s_2 K_I + K_{II}) \sqrt{\cos \theta - s_1 \operatorname{sen} \theta} + p_2(s_1 K_I + K_{II}) \sqrt{\cos \theta - s_2 \operatorname{sen} \theta} \right\} \right] \\ u_{\eta} &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ -q_1(s_2 K_I + K_{II}) \sqrt{\cos \theta - s_1 \operatorname{sen} \theta} + q_2(s_1 K_I + K_{II}) \sqrt{\cos \theta - s_2 \operatorname{sen} \theta} \right\} \right]\end{aligned}\quad (1-8)$$

Donde

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{\zeta^2 + \eta^2} \\ \theta &\equiv \arctan\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)\end{aligned}$$

Los parámetros  $s_j$ ,  $p_j$  y  $q_j$  ( $j=1,2$ ) se obtienen a través de la rotación del ángulo  $\omega_t$  (Sih, 1968). Estas expresiones son válidas para puntos localizados en una vecindad pequeña de la punta de la grieta.



# MECÁNICA DE LA FRACTURA FRACTAL

*Siguiendo las ideas de Mandelbrot(Mandelbrot, 1983), un amplio rango de microestructuras de interés científico han sido caracterizadas cuantitativamente utilizando la idea de una dimensión fractal: es decir, una dimensión fraccional que corresponde de forma única a la geometría bajo estudio y a menudo es no integrable. La clave en este progreso es el reconocimiento que muchas estructuras obedecen una simetría tal que los objetos parecen los mismos a muchas escalas de observación diferentes (autosimilitud). Sin embargo existen geometrías naturales que obedecen más bien a un escalamiento anisotrópico; es decir auto-afín. La fractura, como propiedad mecánica de los materiales, es un ejemplo de ello. Una grieta se propaga, debido a las fallas locales frente a la punta de la grieta, en forma aleatoria, por lo que las superficies resultantes presentan normalmente una vista rugosa en lugar de plana, como se idealiza en la Mecánica de la Fractura Clásica.*

---

## 2.1 GEOMETRÍA FRACTAL

*Durante todo el tiempo el hombre se ha valido de diversas herramientas para entender el mundo, ha adoptado la geometría para explorar el mundo físico casi siempre simplificando la realidad compleja que la misma encierra en sus leyes y en sus formas. Las dos simplificaciones más habituales se refieren por una parte a la linealización de las leyes, y por otra, a la regularización de las formas geométricas. En un principio empleó la geometría euclidiana como el medio para entender la naturaleza en cuyo contexto se pueden observar objetos de dimensión entera que se pueden definir como el número de coordenadas que se requieren para especificar un objeto en un espacio determinado; por ejemplo: objetos de dimensión cero (puntos), de dimensión dos (planos) y de dimensión tres (volúmenes). Sin embargo, a mediados del siglo XIX se descubrieron como procesos regidos por leyes estrictamente deterministas dan lugar a futuros inciertos e impredecibles, procesos puramente aleatorios, resultado de una naturaleza con formas irregulares y caprichosas. Pero la matemática ahora pretende explorar y encontrar orden y regularidades en estas formas geométricas aparentemente caóticas a través de la Geometría Fractal.*

*El nombre “Fractal” (del latín “fractus” que significa fragmentar) fue dado a objetos altamente irregulares que existen entre el mundo del caos y el orden por Benoit Mandelbrot (Mandelbrot, 1983), Esta teoría se ha desarrollado en dos vertientes principales: la de los fractales reales de la ciencia y la naturaleza y, por otra parte, los fractales matemáticos, que estudian las series fractales cuyas raíces recaen en la teoría de la topología geométrica.*

*En un contexto en general, un fractal puede ser un espacio euclidiano  $E$  si tiene todas o la mayoría de las características siguientes (Falconer, 1997):*

- a)  $E$  tiene una estructura fina, que es de detalle irregular en escalas arbitrariamente pequeñas.*
- b)  $E$  es bastante irregular como para ser descrita por el lenguaje geométrico tradicional, ya sea local o globalmente.*

- 
- c) A menudo  $E$  tiene algún tipo de auto-similitud o auto-afinidad, tal vez en un sentido estadístico o aproximado.
  - d) Usualmente, la “dimensión fractal” de  $E$  (definida de algún modo) es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
  - e) En muchos casos de interés,  $E$  tiene una definición muy simple y tal vez recursiva.
  - f) A menudo  $E$  tiene una apariencia natural.

La **Geometría Fractal** es el estudio de objetos con propiedades tales como las mencionadas (a-f). Además, se ve afectada por el concepto de dimensión, que reside en el desarrollo de la topología, que es la rama de las matemáticas que esencialmente trata acerca de las formas (y su modificación o distorsión) y tamaños desde un punto de vista cualitativo. Dos de sus notaciones básicas es la dimensión y el homeomorfismo. El concepto de dimensión implica los trabajos de grandes matemáticos tal como H. Poincaré, H. Lebesgue, G. Cantor, G. Peano, D. Hilbert, entre otros. Uno de los aspectos más relevantes surgidos de estas teorías es la redefinición del concepto de dimensión a carga de Felix Hausdorff, llamada también de autosemejanza. Si al obtener desde un objeto,  $N$  entes iguales, semejantes al original y con razón de semejanza  $r$ , entonces la dimensión topológica del objeto es el número real  $D$  que verifica:

$$N \cdot r^D = 1 \quad (2.1)$$

donde:

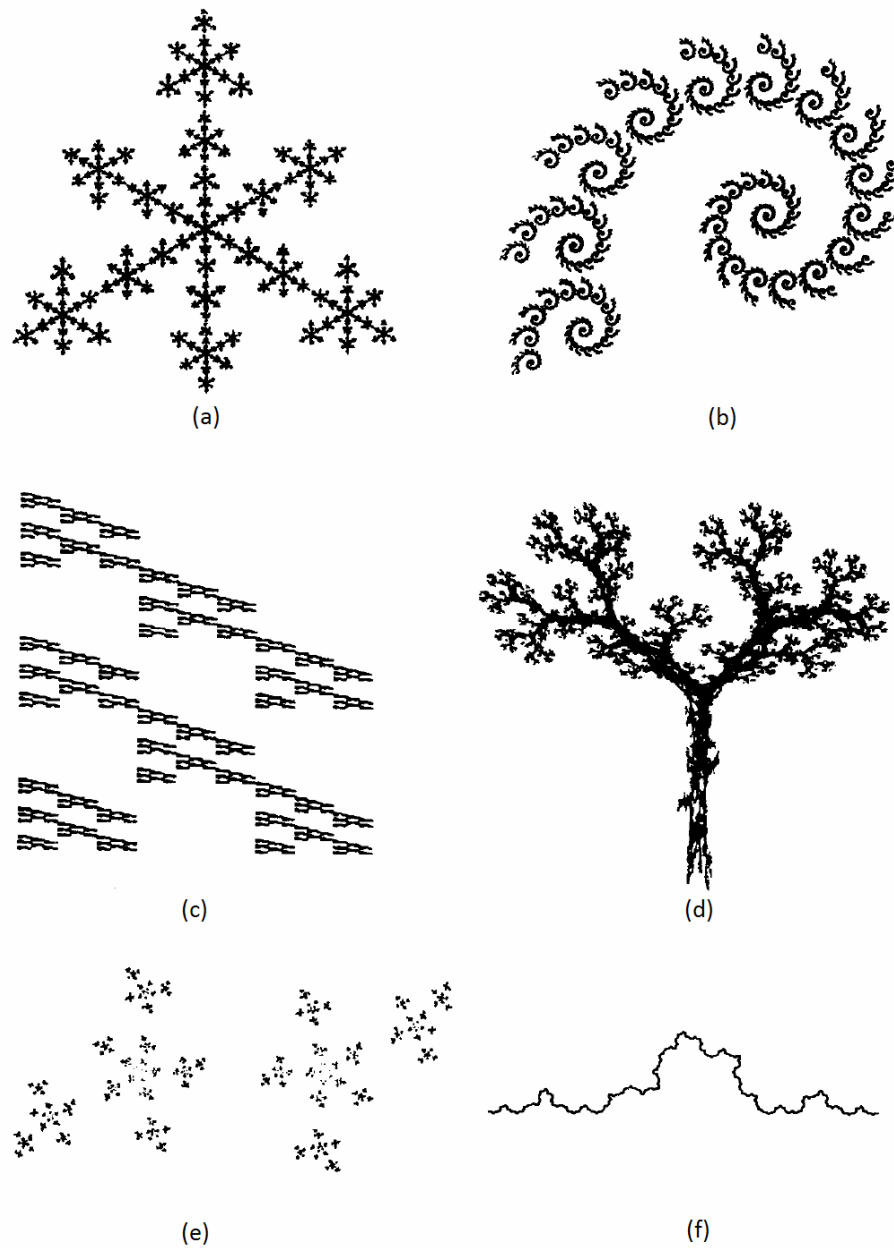
$$D = \frac{\text{Ln}N}{\text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (2.2)$$

$D$  es lo que se llama dimensión de autosemejanza o de Hausdorff-Besicovitch. Es decir, un fractal es un objeto en el que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch estrictamente excede la dimensión topológica  $D_T$ . Los fractales invariantes bajo familias de transformación simples incluyen los fractales auto-similares, auto-afines, aproximadamente y estadísticamente auto-similares, figura 2.1.



---

Ziman introdujo el término “topografía estadística” para la teoría de las formas en campos aleatorios con énfasis especial en el contorno de líneas y superficies de un potencial aleatorio. Una de las representaciones más representativas son los patrones naturales de las costas e islas, aparentemente estas ideas inspiraron a Benoit Mandelbrot para introducir el concepto de Fractales.



**Figura 2.1** Objetos fractales: a) y b) auto-similares; c) y d) auto-afines; e) auto-conformal; f) estadísticamente auto-similar.

---

### **2.1.1 Fractales auto-similares**

*La similaridad es un concepto que se ha manejado desde tiempos atrás, dos objetos son similares si tienen la misma forma a diferencia de su tamaño; es decir, ángulos iguales, cualquiera de sus segmentos de línea ya sean horizontal, vertical u oblicua deben tener el mismo factor de proporcionalidad. Este factor se llama factor de escalamiento  $\lambda$ . Las transformaciones similares son composiciones que involucran un escalamiento, una rotación y una traslación. Entonces, intuitivamente, un objeto auto-similar es en el que el mismo patrón de crecimiento se manifiesta a diferentes escalas, son objetos que en sus detalles se repiten a sí mismos. Cabe mencionar que estrictamente estas características son propias de los fractales matemáticos, ya que en los reales, puede manifestarse sólo en pocas órdenes de magnitud, pues debajo de cierta escala, el material está compuesto de moléculas, átomos y partículas elementales.*

*Un ejemplo clásico de los primeros es la curva de Koch (Fig 2.1f). Un segmento de línea simple es dividido en tres segmentos iguales donde uno forma un triángulo equilátero; en una segunda iteración en la construcción cada uno de estos 4 segmentos es cambiado por 4 nuevos con una longitud  $1/3$  de acuerdo al patrón anterior y así se repite uno sobre otro, tal que cada vez que sea magnificada reproducirá el mismo patrón.*

### **2.1.2 Fractales Auto-afines**

*En términos generales, los fractales autoafines tienen propiedades de escalamiento diferentes en distintas direcciones. Un fractal auto-afín no puede ser reescalado por una dilatación o contracción isotrópicamente tal como los auto-similares. Una amplia variedad de superficies e interfaces que se originan en la naturaleza se han asociado con un escalamiento fractal auto-afín definido por Mandelbrot en términos del movimiento Browniano. Ejemplos incluyen la topografía a escala nanométrica de las láminas depositadas en vapor, las fluctuaciones*

---

espaciales de de las interfases líquido gas, etc., y los procesos físicos tal como la fractura, la erosión, así como la invasión de medios porosos.

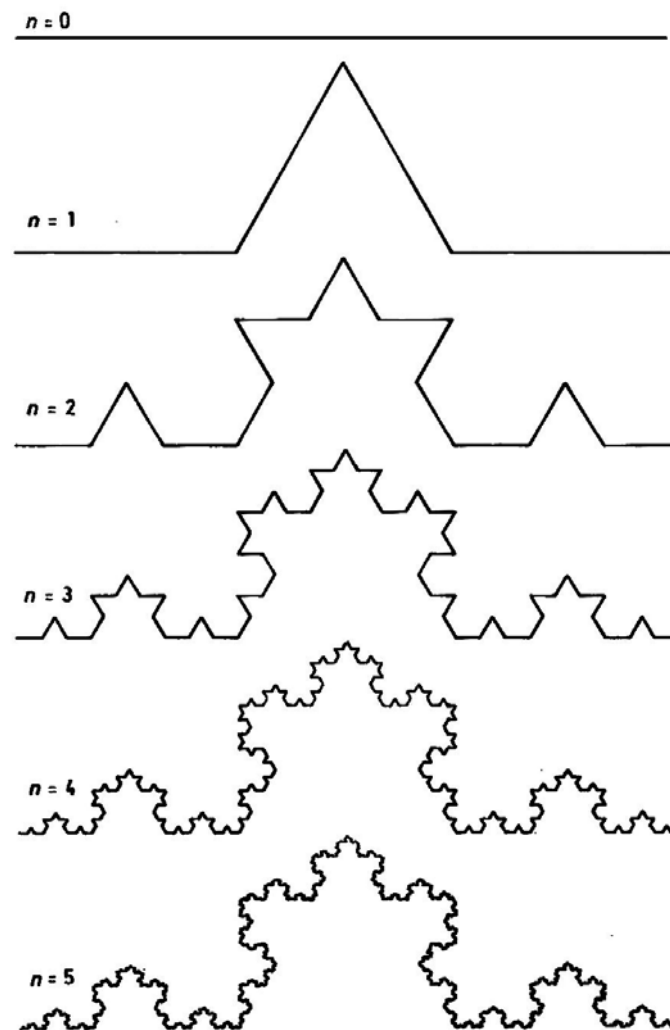


Fig. 2.1 Curva de Koch

## 2.2 DESCRIPCIÓN FRACTAL DE LAS SUPERFICIES DE FRACTURA

Mandelbrot et al (Mandelbrot, 1984) fueron los primeros en mostrar que las superficies de fractura en acero pueden ser analizadas empleando la dimensión fractal. A partir de este estudio ha habido un creciente interés en este campo. Experimentalmente se ha comprobado

---

que existe una fuerte correlación entre el parámetro fractal y las propiedades de fractura del material; sin embargo, también se ha encontrado que no existe relación cuantitativa alguna (Baran, 1992; Davidson, 1989). La dimensión fractal se obtiene a través del exponente de Hurst o de rugosidad fractal dentro de un rango de longitud finita. Esta dimensión representa la complejidad geométrica independiente de la escala de tal superficie y está conformada por dos partes: la parte entera que solo indica si los datos analizados representan un trazo (bidimensional) o una superficie (tridimensional) y la parte fraccional que representa la rugosidad de la superficie, la cual está asociada con los mecanismos de fractura y es afectada por la microestructura de los materiales. También se ha reconocido que no se puede correlacionar un valor dado de la dimensión fractal con una microestructura específica debido a que las superficies de fractura son fractales solo en “sentido estadístico” y sus perfiles no son matemáticamente figuras fractales rigurosas tal como la curva de Koch (Balankin, 1997; Wnuk, 2005). Además, el valor de la dimensión fractal puede depender del rango de longitud de escala en estudio, debido a que es asociado con el rango del tamaño de la microestructura característica (Krim, 1993).

### **2.3 MECÁNICA DE GRIETAS AUTO-AFINES**

Desde el trabajo inicial de Mandelbrot et al. (Mandelbrot, 1984) se ha establecido firmemente que la topografía de las superficies generadas por la fractura exhibe propiedades de escalamiento remarcables; es decir, se ha demostrado que son fractales en un tamaño de longitud finita:

$$l_0 \leq r \leq l_1 \quad (2-1)$$

donde  $r$  es la distancia desde la punta de la grieta, el límite inferior  $l_0$  queda determinado por las características micromecánicas del material y el superior  $l_1$  por el tamaño del espécimen agrietado. Estudios experimentales muestran que las superficies de fractura son estadísticamente invariantes bajo una transformación auto-afín, es decir, es estadísticamente

invariante bajo la transformación de escala  $Y(\lambda_x x) = \lambda_y Y(x) = \lambda_x^H Y(x)$ , donde  $H$  es el exponente de Hurst y caracteriza la rugosidad fractal de la superficie. Las correlaciones espaciales de la interfase rugosa son caracterizadas por la función de correlación altura-altura como:

$$G(\Delta, t) = \sqrt{\langle [h(x + \Delta, t) - h(x, t)]^2 \rangle_\Delta} \quad (2-2)$$

donde  $\langle \dots \rangle_\Delta$  denota un promedio sobre  $x$  en una ventana de tamaño  $\Delta < w$  bajo (1). Con base en una formulación matemática rigurosa que satisface los requerimientos adoptados en la mecánica de sólidos clásica, se ha desarrollado la mecánica de grietas autoafines en materiales lineal elásticos en trabajos pasados (Balankin, 1996; Balankin, 1997; Balankin, 1999; Cherepanov, 1995; Mandelbrot, 1984). Además, se demostró que la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica es un caso particular de las grietas autoafines (Balankin, 1997).

Los problemas de grietas autoafines muestran un comportamiento de leyes de potencias en la región de la punta de la grieta dentro del intervalo (1) como:

$$\sigma_{ij} = K_f \left( \frac{r}{l_0} \right)^{-\alpha} \quad (2-3)$$

donde:

$$\alpha = \frac{dH - (d - 1)}{2H} \quad \text{si } H > H^* = \frac{d - 1}{d} \quad (2-5)$$

$$\text{ó } \alpha = 0 \quad \text{si } H \leq H^* \quad (2-5)$$

donde  $d$  es la dimensión euclidiana del problema considerado,  $\alpha$  exponente del esfuerzo en la vecindad de la grieta calculada considerando el exponente de rugosidad de las grietas producidas,  $H$  es el exponente de Hurst del perfil de fractura y  $K_f$  es el factor de intensidad de esfuerzos fractal. Estudios experimentales revelan que el exponente de rugosidad de las

---

*superficies de fractura es un valor universal ( $H = 0.8$ ) independiente del material así como del proceso de fractura. Sin embargo, se han encontrado materiales con un exponente de Hurst cerca o menor que 0.5, el valor crítico para los perfiles autoafines (Ponson, 2006). En este trabajo se analiza el comportamiento del esfuerzo al inicio de crecimiento de una grieta autoafín en papel filtro.*



# 3

## METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

*Desde el trabajo de Mandelbrot et al. (Mandelbrot, 1984) muchos estudios numéricos y experimentales en las propiedades geométricas de las superficies de grieta en materiales heterogéneos han demostrado sus propiedades de escalamiento auto-afín. Debido a la heterogeneidad y microestructura de las redes de fibras el papel tiene una microestructural multifractal bien definida con espectros de la dimensión fractal diferentes para varios tipos de papel, por lo que las líneas de ruptura en papel poseen geometría auto-afín en un amplio rango de escalas.*

---

### 3.1 EL PAPEL

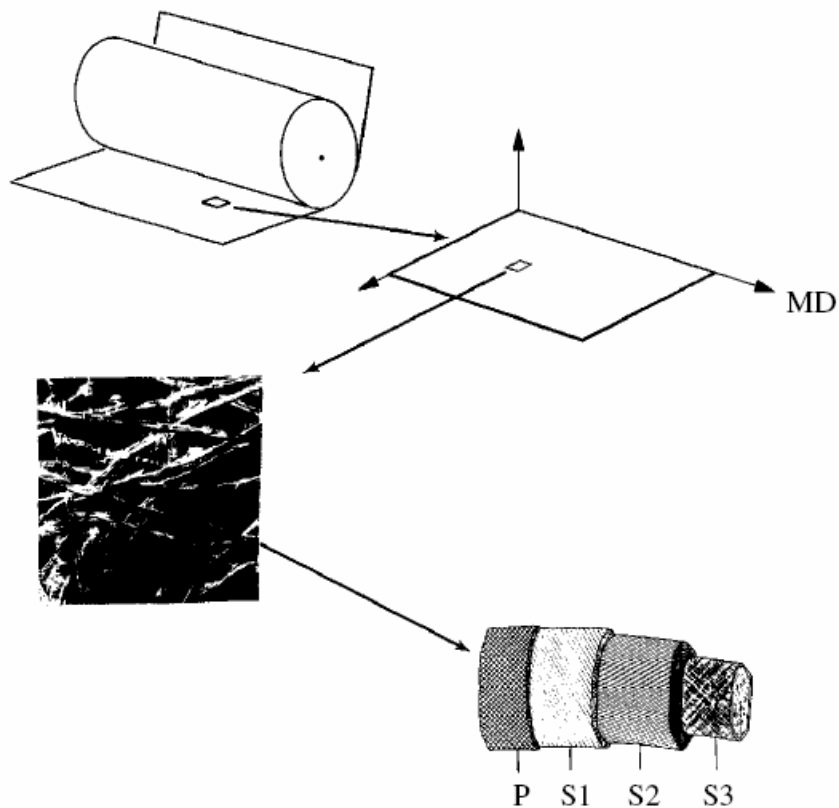
*El papel generalmente está hecho de fibras de madera insertadas en soluciones poliméricas en estructura de redes de fibras aleatorias. Las fibras varían considerablemente entre especie y especie dependiendo de donde se extrajeron. Generalmente se obtienen de plantas, ya sea de árboles grandes o maleza. Su ancho puede ser entre 0.10 mm y 0.05 mm y usualmente su longitud es hasta 60 veces su ancho. Algunas de las propiedades mecánicas principales del papel tal como el módulo elástico, la elongación y termofluencia dependen principalmente de las propiedades de las fibras. Sin embargo, las uniones entre fibras constituyen tecnológicamente otra fase, transfieren los esfuerzos a través de la red del papel, usualmente se puede modificar mucho más fácil que las mismas de las fibras. Los componentes químicos comunes son la celulosa, la hemicelulosa y el lignin(Turrado, 1996) y una modificación en estos constituyentes o el incremento de las uniones pueden mejorar las propiedades mecánicas del papel(Kamel, 2004).*

*El origen de la inhomogeneidad del papel recae en el proceso de formación. Este involucra, durante el pulpado, la separación de las fibras de la madera que puede ser por medios mecánico o químicos (donde frecuentemente las fibras se dañan) y se dispersan en agua a flujo turbulento. El papel se forma filtrando la suspensión resultante seguida por un compactado y secado. Durante este último se forma un arreglo bidimensional aleatorio de fibras unidas. Las uniones interfibras son el factor principal que controla de una forma u otra la resistencia y por tanto la fractura del papel. Como resultado, el comportamiento de fractura es en esencia frágil donde la falla representa una zona de daño progresivo a partir de múltiples huecos y microgrietas, finalizando en líneas de ruptura rugosas.*

*Las propiedades del papel comercial son generalmente anisotrópicas debido a una orientación preferencial de las fibras en la dirección de fabricación conocida como Machine Direction (MD y la resultante transversal CD), Figura 3.1. Por lo que cualquier intento para predecir el comportamiento mecánico del papel necesariamente debe ser basado en un arreglo medido o asumido de las fibras en la hoja.*



El uso del papel en el estudio de fenómenos de medios desordenados ha encontrado muchas aplicaciones (Alava, 2006). Una de las primeras fue como un material modelo para la obtención del módulo elástico y resistencia de redes aleatorias bidimensionales (2D-RFN de las siglas en inglés "Random Fiber Network)(Ostoja-Starzewski, 2000). Otro caso es el estudio del perfil de combustión en papel (Maunuksela, 1997; Myllys, 2001); aquí se hace énfasis en las leyes de escalamiento genérico para una interfase de propagación separando el material intacto del quemado pero no en las propiedades del papel. La cara resultante es descrita por un perfil unidimensional  $h(x)$ , donde la estructura del papel juega un rol dando lugar a un medio desordenado y  $h$  se considera como un fractal auto-afín. Así mismo, hay muchos experimentos en fluidos de medios porosos donde de igual forma la estructura desordenada es útil (Balankin, 2000; Balankin, 2006; Buldyrev, 1992; Rost, 2007).



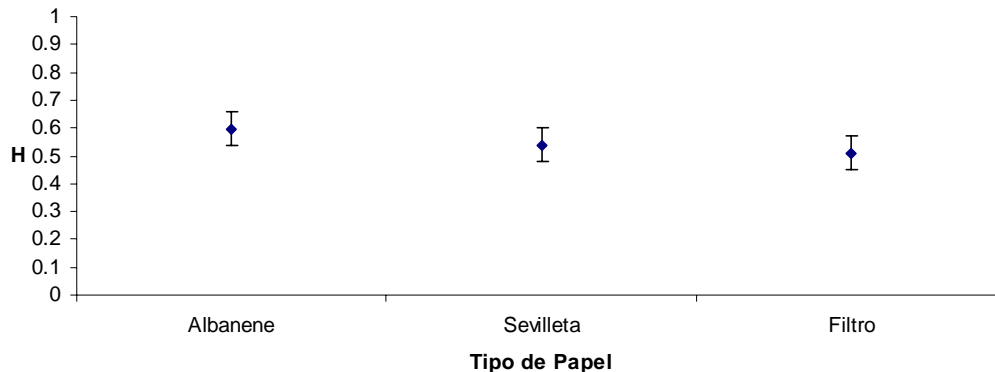
**Fig. 3.1** Escalas jerárquicas en el papel: a) rollo de papel; b) hoja de papel; c) microestructura, red de fibras aleatorias; fibra celulosa con sus capas principales(Ostoja-Starzewski, 2000).

---

## 3.2 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.

### 3.2.1 Selección y Preparación del Material

La mayoría de la caracterización de superficies de grietas se ha realizado en materiales cuyo comportamiento auto-afín cae dentro de los rangos  $H^* > 0.5$  y  $H^* = 0.5$  ( $H^* = 0.5$ ), donde para el primer, caso se atribuye a un comportamiento del material frágil; mientras que en el último, a un material de comportamiento dúctil (Balankin, 1996). Sin embargo, poco se ha hecho respecto al punto característico y especial totalmente aleatorio de  $H^* = 0.5$ . Se ha encontrado algunos materiales con esta característica, pero su estudio no ha sido profundizado, tal es el caso del papel. En el presente trabajo se hicieron pruebas de fractura a tensión a probetas en tres tipos de papel que pudieran presentar dicho resultado. Con base en el criterio de Balankin, se escogieron tipos de papel que cayeran dentro del rango de comportamiento de transición dúctil a frágil, ya que este muestra que la rugosidad de la superficie de fractura es totalmente aleatoria. Los materiales preseleccionados fueron el papel albanene, servilleta y filtro. En la figura 3.2 se muestra que el valor obtenido en las pruebas preliminares del papel filtro es de  $H = 0.511 \pm 0.05$ , por lo que es el seleccionado.



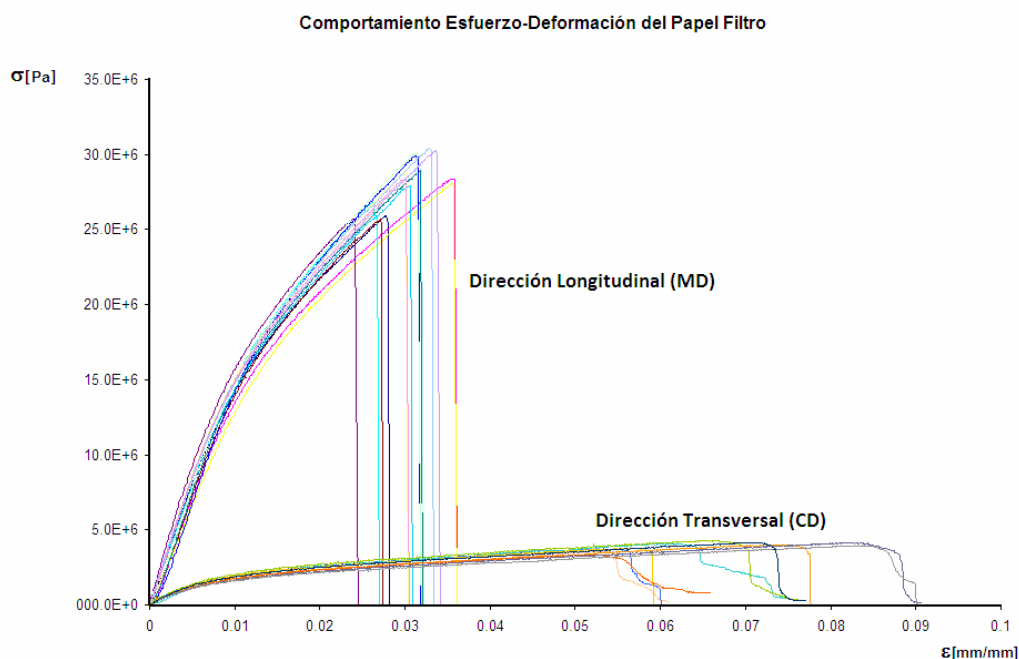
**Figura 3.2** Exponente de Hurst para tres tipos de papel

El papel filtro, cuyas propiedades físicas y mecánicas principales se muestran en la tabla 3-1, es un material poroso que posee una anisotropía bien definida en sus propiedades mecánicas asociadas con un comportamiento a tensión elasto-plástico en una orientación preferencial de las fibras en la dirección de maquinado (Fig. 3.3). Además posee correlaciones de amplio

rango caracterizadas por un comportamiento de leyes de potencias en la función de autocorrelación espacio-densidad (Provatas, 1996).

**TABLA 3-I** PROPIEDADES FÍSICAS Y MECÁNICAS PRINCIPALES DEL PAPEL FILTRO

Característica	Poro Abierto	Poro Medio	Poro Cerrado
Espesor, mm	0.321	0.25 ± 4	0.211
Densidad, kg/m <sup>3</sup>	400.09	411.95	485.76
E, GPa	1.12 ± 0.15	1.57 ± 0.20	2.02 ± 0.25
Densidad de Fibra Kg/m <sup>3</sup>	1494	1494	1494
Ancho de la Fibra, mm	0.04 ± 0.03	0.04 ± 0.03	0.04 ± 0.03
Porosidad, %	73.2	72.4	67.5



**Fig. 3.3** Comportamiento esfuerzo-deformación del papel filtro en direcciones transversal y longitudinal, respectivamente

El procedimiento de selección, obtención y preparación de muestras de papel está estandarizado por las normas ASTM y TAPPI, este trabajo se siguió bajo las primeras:

1. Las muestras se obtuvieron aleatoriamente de un lote de 100 pliegos del papel, se tuvo cuidado en que no estuvieran dañadas (aplastamiento, dobladas, rotas, etc.) o marcadas por algún agente que modifique sus propiedades mecánicas.

- 
2. *La preparación de probetas consistió en generar el tipo de geometría de muesca, la cual fueron marcadas con lápiz No. 2, para evitar se modifiquen las propiedades mecánicas del papel.*
  3. *Las muescas se cortaron empleando varias navajas de afeitar para obtener una mejor uniformidad en el acabado de las superficies cuyo radio resultante en la punta de la grieta fue de  $15\mu\text{m}$ .*

### **3.2.2 Obtención de los Parámetros de Fractura**

*La medición de los parámetros de fractura se realizó en pruebas a tensión en una máquina universal de pruebas MTS 858 – 5 Ton a una velocidad constante de 1mm/min. Debido a los diferentes tamaños considerados (10mm - 400 mm) se tuvo la necesidad de maquinar las mordazas apropiadas para los experimentos cuidando que la carga aplicada siempre fuera uniforme en toda la sección transversal de las muestras, Figura 3.4. Además, considerando que el papel tiene propiedades mecánicas variables con respecto a la temperatura y humedad, para evitar el efecto de estos, todos los experimentos se hicieron bajo condiciones similares a temperatura de  $25.5 \pm 1.5$  y humedad relativa de  $31 \pm 2$  %.*

*Existen varias formas de obtener los parámetros de fractura en el papel tal como el esfuerzo a la falla o al inicio de crecimiento de grietas, el cual se relaciona a la tenacidad a la fractura bajo condiciones de deformación plana, conforme al método de prueba estandarizado ASTM E-399. Bajo el criterio de la MFLE se observa una diferencia entre el campo de esfuerzos frente la punta en condiciones de esfuerzo plano y deformación plana; sin embargo, el cambio del estado de esfuerzo plano (que es el caso de la fractura en papel) a deformación plana o viceversa no ejerce alguna influencia en la dimensión fractal de la superficie de fractura (Kotowski, 2006). Un método sencillo de obtener el inicio de crecimiento de grietas es ubicando este punto en el diagrama esfuerzo-deformación del ensayo a tracción en donde se presenta un cambio significativo (en el papel fragilizado este punto es el de carga máxima) (Susarrey H., 1997). Este método se empleó en este trabajo en combinación con observación*

---

directa durante la prueba. Como se explica adelante, el inicio del crecimiento de grieta en el papel filtro es más bien una acumulación de daño progresivo, debido a la gran cantidad de huecos, que un crecimiento localizado resultando que en su comportamiento de esfuerzo deformación este sea casi imperceptible, por lo que con el uso de una lupa se observó el instante del inicio de crecimiento de la grieta y en la máquina se registró la carga y desplazamiento del punto, para después localizarlo en el diagrama resultante. Cabe mencionar que en todos los experimentos en los que se consideró algún tipo de muesca, el inicio de crecimiento de grietas fue siempre en dichas muescas, en el caso de las probetas en que no se consideró ninguno de estos, la fractura inició aleatoriamente tanto en la frontera como dentro del material.



**Fig. 3.4** Prueba de Fractura en papel Filtro

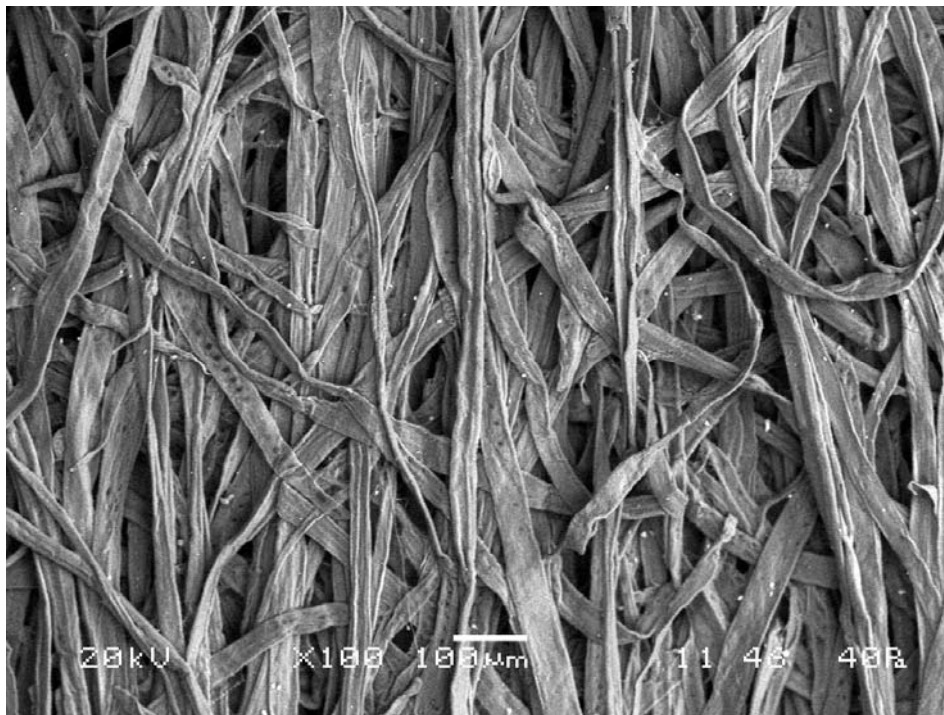
### **3.3 COMPORTAMIENTO DE FRACTURA DEL PAPEL FILTRO**

A diferencia de los materiales metálicos, en los materiales heterogéneos tal como el papel la fractura puede ser iniciada o incrementar sin alguna muesca debido a los lugares de concentración de energía natural tal como defectos causados generalmente a la heterogeneidad. Cuando se hace una muesca mecánica, se introduce una concentración de esfuerzos adicional, el tamaño del área que concentra la energía alrededor de la muesca

---

depende de su geometría y, para este caso, el tamaño de área de concentración de energía puede ser calculado, por ejemplo con métodos numéricos tal como el método de elementos finitos o experimentalmente.

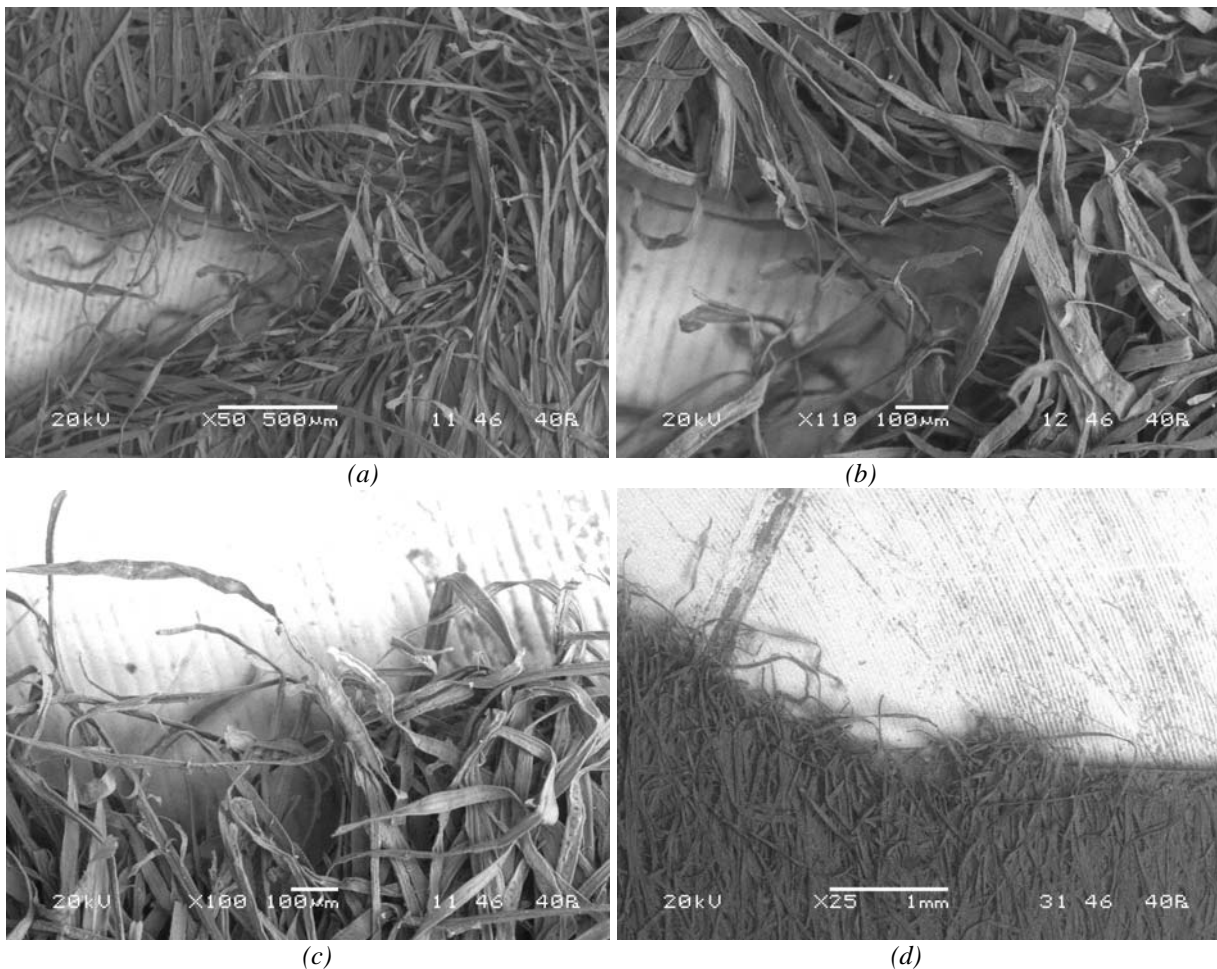
El papel filtro se considera como un material multifásico. Microestructuralmente está compuesto por la porosidad, la unión interfibras, y fibras. La porosidad, causada por una poca existencia de matriz originada durante el proceso de formación, y que usualmente en un material compuesto se transfiere la carga a través de esta fase, permite un deslizamiento entre fibras y uniones interfibras al estar sujeta a una carga, Figura 3.5. Estas últimas constituyen otra fase a través de enlaces de hidrógeno. Finalmente, la fase de las fibras. Generalmente la fuerza que mantiene unidas las fibras es menor que la de resistencia de una sola fibra ya que es producida por la solución en que es disperso el papel en el proceso de formación.



**Fig. 3.5** Microestructura del Papel Filtro de poro medio

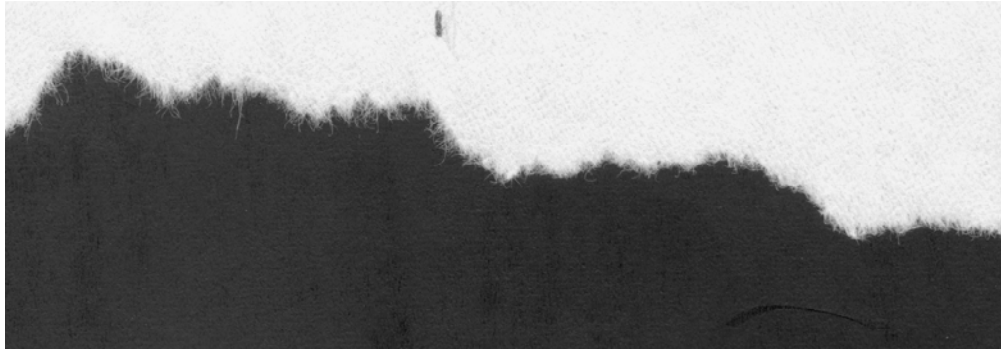
Durante la aplicación de la carga primero se origina un deslizamiento interfibras a través de los huecos en la punta de la muesca; posteriormente, como se observa en la Figura 3.6a, en

un incremento de la carga, cuando las fibras han alcanzado su deslizamiento máximo permitido por los huecos y la resistencia de las mismas, la carga empieza a ser compartida entre las fibras y la fase de enlace interfibras, entonces, tal como se mencionó, el proceso de fractura del papel inicia con el rompimiento de los últimos, debido a que la fuerza necesaria para romperlas es menor que la necesaria para romper las fibras, Figura 3.6b. Finalmente, la carga sobrepasa la resistencia de cada fibra logrando su rompimiento, figura 3.6c.



**Figura 3.5** Comportamiento del material bajo un crecimiento de grietas

Como observa en la figura 3.6d, la aleatoriedad del arreglo de la red de fibras ocasiona el rompimiento de enlaces interfibras y fibras no sea uniforme, lo que origina que la falla represente una zona de daño progresivo a partir de múltiples huecos y microgrietas resultando en una sola línea de ruptura aleatoria (Fig. 3.7).



**Figura 3.7** Perfil de grieta real del papel filtro

### **3.4 CARACTERIZACIÓN FRACTAL DE LOS PERFILES DE FRACTURA**

*La fractura es un proceso físico que produce superficies rugosas, por lo que este tipo de superficie está representado por un tipo de rugosidad asociada con el escalamiento fractal auto-afín. Para describir la topografía estadística de las grietas auto-afines en un sólido heterogéneo debe ser definido el intervalo auto-afín ( $l_0 = 1$  mm y  $l_1 > 100$  mm para papel), el exponente de rugosidad y la función de distribución estadística de los parámetros la tortuosidad de las grietas(Balankin, 1996).*

*Para el estudio del comportamiento auto-afín de las superficies de grietas en el papel filtro se probaron 30 probetas de papel filtro con muesca en el centro para 10 tamaños distintos de  $w = 10$ mm con un factor de escalamiento  $\lambda = 2.5, 5, 10, 15, 25, 30, 40$ , respectivamente, y una relación  $2a/w = 0.25$  bajo las mismas condiciones de carga. Las superficies de grietas resultantes se digitalizaron en un escáner HP-Scanjet G4050 a 1200 dpi; posteriormente, se binarizaron a través de programa Scion Image©(2000-2001) para obtener el perfil y finalmente se analizaron encontrándose que poseen un comportamiento auto-afín cuyo H se obtuvo con el programa BENOIT 1.2 ©(1999).*



---

# 4

## ANÁLISIS DE RESULTADOS



*La mecánica de la fractura ha sido ampliamente empleada para la caracterización de los materiales, sin embargo, también se ha observado que existen algunas diferencias marcadas entre la experimentación y la parte analítica. La Mecánica de la Fractura Fractal se ha desarrollado como una alternativa dentro del campo de los materiales y ha obtenido una madurez tal que, dicha variación se ve más reducida entre ambas de obtener los parámetros de fractura. El presente capítulo se analiza los resultados experimentales obtenidos en las superficies de grieta de papel filtro a través de esta última.*

---

#### 4.1 COMPORTAMIENTO AUTO-AFINES DE LAS SUPERFICIES DE GRIETAS EN EL PAPEL FILTRO

Los estudios experimentales muestran que las superficies de las grietas en el papel filtro presentan una invarianza estadística bajo una transformación auto-afín por lo que son caracterizadas por su rugosidad de superficies a través de  $H$ , donde el valor obtenido de  $H = 0.49 \pm 0.01$ . De acuerdo a las ecuaciones (2.3 – 2-5) cuando  $H = 0.5$  es un valor crítico ( $H \leq 0.5$ , grietas muy rugosas) el campo de esfuerzos no es una función asintótica desde la distancia desde la punta de la grieta en el intervalo (1) y la propagación de la grieta es similar a una trayectoria aleatoria en dirección perpendicular a la carga y es asociado con una transición dúctil-frágil, y se tiene:

$$\sigma_{ij}(l_0) = \sigma_{ij}(r) = \sigma_{ij}(l_1)$$

La Mecánica de la Fractura Clásica muestra que entre mayor sea el volumen de material, mayor es la posibilidad de existir una grieta y  $K_c$  es una constante independiente del tamaño del espécimen cuando se mide con pruebas estandarizadas. En contraste a esto, dentro del marco de las grietas la tenacidad a la fractura efectiva incrementa cuando la rugosidad de la grieta aumenta:

$$K_c(\lambda L_s) = \lambda^n K_c(L_s) \quad (4-1)$$

donde  $n = \frac{(d-1)(1-H)}{2H}$ , si  $H \leq \frac{d-1}{d}$

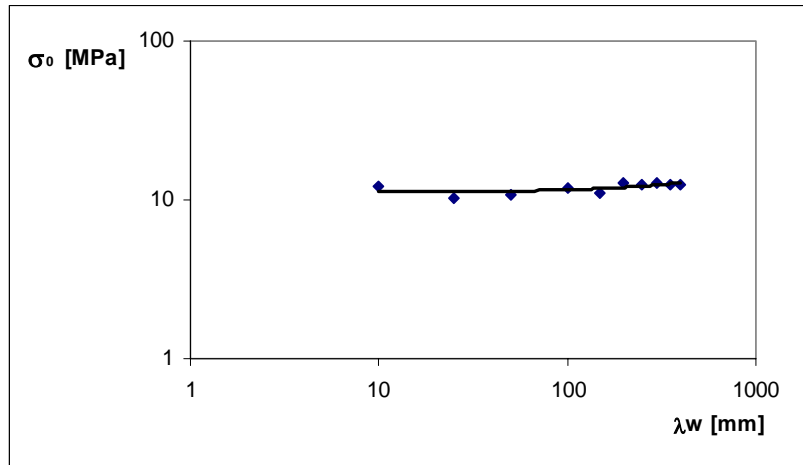
$n = \frac{1}{2}$  si  $H > \frac{d-1}{d}$

Donde  $L_s$  es la longitud característica de la probeta y  $\lambda$  el factor de escala. La dependencia del tamaño de especímenes  $\lambda w$  se hizo con la obtención del esfuerzo de inicio de crecimiento de grietas para los diez tamaños antes mencionados en el que todas las probetas mantuvieron la relación  $w = 0.25 \lambda l$ .

---

## 4.2 ESFUERZO DE INICIO DE CRECIMIENTO DE GRIETAS

El inicio del crecimiento de grietas es un parámetro principal de inestabilidad de un componente. En la figura 3.5 se muestran los resultados para diferentes tamaños de probetas  $w = 10$  mm bajo un escalamiento de  $\lambda = 2.5, 5, 10, 15, 25, 30, 40$ , respectivamente, y una relación  $2a/w = 0.25$ .



**Figura 3.5** Dependencia del esfuerzo de inicio de crecimiento de grietas en el tamaño de probetas en papel filtro.

Otro aspecto fundamental dentro de la MF clásica es que la resistencia de falla de un material está en función de la longitud de la grieta  $f(a/w)$  (Janssen, 2002); por lo que de la misma forma que la dependencia del tamaño de especímenes, se hicieron pruebas para siete diferentes tamaños de longitud diferentes ( $l = 10, 25, 75, 100, 125, 150$  mm) pero con el mismo ancho ( $w = 300$  mm), los resultados obtenidos se observan en la Fig. 3.6.

En las figuras 3.5 y 3.6 se observa una invarianza del esfuerzo de inicio de crecimiento de grietas respecto del tamaño de especímenes y longitudes de grietas bajo una transformación auto-afin, respectivamente, por lo que empleando la dimensión fractal de correlación, que es una de las dimensiones fractales más empleadas experimentalmente (Schroeder, 1991), se observa que  $\alpha = 0$ , la cual sustituyéndola en las ecuaciones (2.3 – 2.5),  $H = 0.5$ , lo que confirma el resultado obtenido a través de la rugosidad de los perfiles de grietas obtenidos. Además, de la ec. (2.3), se obtiene:

$$\sigma_0 = K_f$$

El criterio de fractura en el intervalo (2.1) resulta como:

$$K_f \equiv \sigma_\infty l^\alpha = K_{fC} \quad (3.2)$$

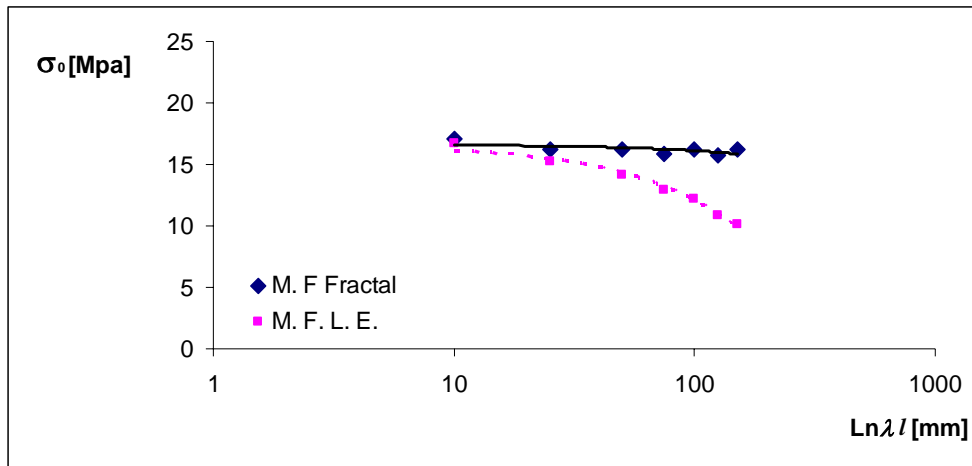


Figura 3.6 Dependencia del inicio de crecimiento de grietas en la longitud de grietas.

Donde  $\sigma_\infty$  es el esfuerzo aplicado a una distancia finita,  $l$  es la longitud de grieta real, queda determinada por las ecs (2.3 – 2.5) y  $K_{fC}$  es la Tenacidad al a Fractura Fractal. Por lo tanto de las ecs. (2.4 y 3.2),  $K_f = \sigma_\infty = K_{fC}$  y como consecuencia, la grieta empieza a crecer a un esfuerzo constante (Fig. 3.7), como se predice en el criterio de Balankin (Balankin, 1996).

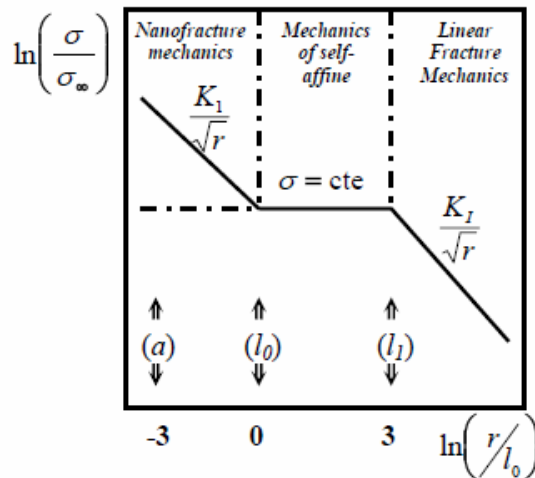


Figura 3.7 Distribución de esfuerzos frente a la punta de una grieta auto-afín  $H \leq H^* = 0.5$ .

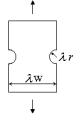

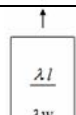

#### 4.2.1 Efecto de la geometría de la muesca

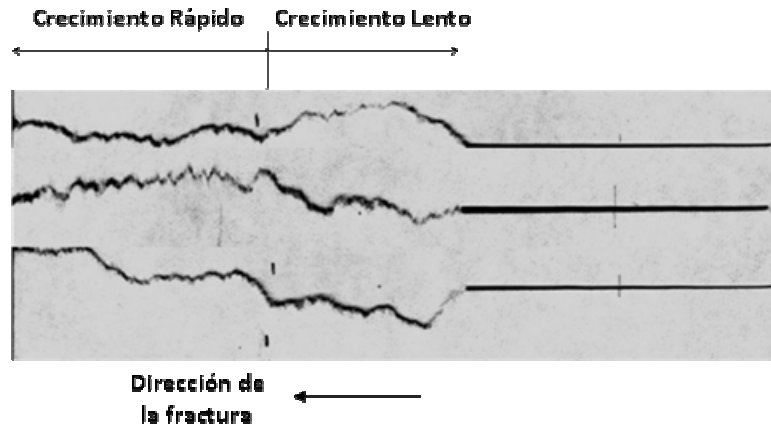
El criterio de la MF clásica establece, en esencia que  $K = f(\sigma, a)$ , que significa que funcionalmente depende de la configuración del componente agrietado y la forma en que le es aplicada la carga, por lo que se han hecho varias correcciones para varios tipos de geometrías y configuraciones de grietas y especímenes. En este caso, se hicieron 30 pruebas a diferentes configuraciones geométricas, como se observa en la tabla 3-II.

#### 4.2.2 Efecto de la Velocidad de Crecimiento de Grietas

Durante el proceso de crecimiento de grietas se observaron dos velocidades de crecimiento de grietas diferentes: al inicio, el crecimiento de la grieta se desarrolló estable asociada con un proceso de fractura casi-estático hasta un punto en el que el crecimiento se tornó rápido e incontrolable (inestable) mostrando un comportamiento de fractura frágil en el diagrama de esfuerzo – deformación. Este comportamiento, sin embargo, no mostró un cambio en el exponente de rugosidad del perfil de la grieta, como podría esperarse en materiales metálicos ya que en la zona de proceso casi-estático  $H = 0.483 \pm 0.021$ , mientras que en la de fractura rápida  $H = 0.484 \pm 0.022$ .

**TABLA 3-II. PROPIEDADES FÍSICAS Y MECÁNICAS PRINCIPALES DEL PAPEL FILTRO**

Configuración	w	Notch Type	$\sigma_0$ (Welzel)
	w = 8	circle - side	19.958 ± 1.136
	w = 300	circle - side	21.032 ± 0.680
	w = 300	circle - centered	20.564 ± 0.549
	w = 300	linear	17.674 ± 0.321
	w = 225	---	30.459 ± 1.278
	w = 7.5	---	24.896 ± 1.862
	w = 300	---	28.455 ± 1.495



**Figura 3.4** Zonas de velocidad de crecimiento en una perfil de grietas

*De la misma forma se hicieron pruebas en diferentes direcciones, donde resultados preliminares muestran que no existen fibras tan largas individuales que soporten la carga.*

---

## CONCLUSIONES

*Los resultados en este trabajo muestran que las superficies de fractura en papel filtro poseen invarianza estadística auto-afín donde el exponente de Hurst obtenido fue de  $H = 0.49 \pm 0.01$ , diferente del valor universal reportado por algunos autores ( $H = 0.8$ ). Además, opuesto a la teoría de la Mecánica de la fractura Lineal Elástica, se demuestra que para un valor crítico de  $H$  el esfuerzo de inicio de crecimiento de grietas permanece constante dentro del intervalo auto-afín ( $\alpha = 0$ ) para un escalamiento de tamaños en los especímenes  $\lambda w$  y longitudes de grieta  $\lambda l$ . Esto se debe principalmente a la microestructura del material tal como la porosidad y ruptura de las fibras.*

*Los resultados muestran que el para este material el comportamiento auto-afín es dependiente del material*

---

## REFERENCIAS

- (1999): Benoit 1.2, TruSoft Int'l, Inc. <http://www.trusoft-international.com>, St. Petersburg.
- (2000-2001): Scion Image, Scion Corporation. [www.Scioncorp.com](http://www.Scioncorp.com).
- Agrawal, P., Sun, C. T. (2004): *Fracture in Metal-Ceramic Composites*. *Composites Science and Technology* **64**, 1167-1178.
- Alava, M. J., Niskanen, K. (2006): *The Physics of Paper*. *Reports on Progress in Physics* **69**, 669-723.
- Balankin, A. S. (1996): *Models of Self-affine Cracks in Brittle and Ductile Materials*. *Philosophical Magazine Letters* **74**, 415-422.
- Balankin, A. S. (1997): *Physics of Fracture and Mechanics of Self-affine Cracks*. *Engineering Fracture Mechanics* **57**, 135-203.
- Balankin, A. S., Bravo - Ortega, A., Morales - Matamoros D. (2000): *Some New Features of Interface Roughening Dynamics in Paper-Wetting Experiments*. *Philosophical Magazine Letters* **80**, 503-509.
- Balankin, A. S., García P., R., Susarrey H., O., Morales M., D., Castrejon V., F. (2006): *Kinetic Roughening and Pinning of Two Coupled Interfaces in Disordered Media*. *Physical Review Letters* **96**.
- Balankin, A. S., Susarrey H., O., Bravo O., A., Galicia, M. A. (1999): *Mecánica de la Grietas Auto-afines en Hojas de Papel Fragilizado*. *Revista Mexicana de Física* **45**, 388-392.
- Baran, G. R., Roques-Carmes, C., Wehbi, D., Degrange, M. (1992): *Fractal Characteristics of Fracture Surfaces*. *Journal of American Ceramics Society* **75**, 2687-2691.
- Bouten, P. C. P., de With, G. (1988): *Crack Nucleation at the surface of Stresses Fibers*. *Journal of Applied Physics* **64**, 3890-3900.
- Budiansky, B., Evans, A. G., Hutchinson, J. W. (1995): *Fiber-Matrix Debonding Effects on Cracking in Aligned Fiber Ceramic Composites*. *International Journal of Solids and Structures* **32**, 315-328.
- Buldyrev, S. V., Barabási, A. L., Caserta, Havlin, S., Stanley, H. E., Vicsek, T. (1992): *Anomalous Interface Roughening in Porous Media: Experimental and Model*. *Physical Review A* **45**, R8313-R8316.
- Cherepanov, G. P., Balankin, A. S., Ivanova, V. S. (1995): *Fractal Fracture Mechanics - A Review*. *Engineering Fracture Mechanics* **51**, 997-1033.
- Davidson, D. L. (1989): *Fracture Surface Roughness as a Gauge of Fracture Toughness: Aluminum-Particulate SiC Composites*. *Journal of Materials Science* **24**, 681-687.
- de Moura, M. F. S. F., Campilho, R. D. S. G., Amaro, A. M., Reis, P. N. B. (2010): *Inteerlaminar and Intralaminar Fracture Characterization of Composites*. *Composite Structures* **92**, 144-149.
- Dharan, C. K. H. (1978): *Fracture Mechanics of Composite Materials*. *Journal of Engineering Materials and Technology* **100**, 233-247.
- Elices, M., Llorca, J. (2002): *Fiber Fracture*, Elsevier Science Ltd., Kidlington, Oxford, UK.
- Falconer, K. (1997): *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley and Sons. Chichester, West Sussex, England.



- 
- Griffith, A. A. (1921): *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. *Philosophical Transactions of The Royal Society of London A* **221**, 163-198.
- Inglis, C. E. (1913): *Stress in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners*. *Transactions of the Institute of Naval Architects (London)* **55**, 219-241.
- Janssen, M., Zuidema, J., Wanhill, R. J. H. (2002): *Fracture Mechanics*, 2nd Ed. Spon Press, Taylor and Francis Group. Abigdon, Oxfordshire, OX144RN.
- Jones, R. M. (1975): *Mechanics of Composite Materials*. McGraw-Hill, Kogakusha, Ltd. Washington, D. C.
- Kamel, S., El-Sakhawy., Nada, A. M. A. (2004): *Mechanical Properties of the Paper Sheets Treated with Different Polymers*. *Thermochemica Acta* **421**, 81-84.
- Kotowski, P. (2006): *Fractal Dimension of Metallic Fracture Surfaces*. *International Journal of Fracture* **141**, 269-286.
- Krim, J., Indeku, O. (1993): *Roughness Exponent: a Paradox Resolved*. *Physical Review E* **48**, 1576-1578.
- Mandelbrot, B. B. (1983): *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company. New York.
- Mandelbrot, B. B., Passoja, D. E., Paullay A. J. (1984): *Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals*. *Nature* **308**, 721-722.
- Maunuksela, J., Myllys, M., Kählkönen, O. P., Timonen, J., Provatas, N., Alava, M. J., Ala-Nissila T. (1997): *Kinetic Roughening in Slow Combustion of Paper*. *Physical Review Letters* **79**, 1515-1518.
- Mayer, J., Ruhle, M. (1991): *Interfaces in Composites: Relations Between Structure and Properties*. *JThe Journal of Vacuum Science and Technology A* **9**, 1511-1517.
- Morton, J., Groves. (1974): *The Cracking of Composites Consisting of Discontinuous Ductile Fibres in a Brittle Matrix - Effect of Fibre Orientation*. *Journal of Materials Science* **9**, 1436-1445.
- Myllys, M., Maunuksela, J., Alava, M., Ala-Nissila, T., Merikoski, J., Timonen, J. (2001): *Kinetic Roughening in Slow Combustion of Paper*. *Physical Review E* **64**.
- Ostoja-Starzewski, M., Stahl, D. C. (2000): *Random Fiber Networks and Special Elastic Orthotropy of Paper*. *Journal of Elasticity* **60**, 131-149.
- Ponson, L., Aurodau, H., Vié, P., Hulin, J. P. (2006): *Low Self-Affine Exponents of Fractured Glass Ceramics Surfaces*. *Physical Review Letters* **97**.
- Provatas, N., Alava, M. J., Ala-Nissila, T. (1996): *Density Correlations in Paper*. *Physical Review E* **54**, R36-R38.
- Rikards, R. (2000): *Interlaminar Fracture Behaviour of Laminated Composites*. *Computers and Structures* **76**, 11-18.
- Rost, M., Laurson, L., Dubé, M., Alava., M. J. (2007): *Fluctuations in Fluid Invasion into Disordered Media*. *Physical Review Letters* **98**.
- Schroeder, M. (1991): *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinte Paradise*. W. H. Freeman and Company. New York, U. S. A.
- Sih, G. C., Liebowitz, H. (1968): *Mathematical theories of Brittle Fracture*, pp. 67-190. In H. Liebowitz (Ed.): *Fracture, An Advanced Treatise*, Vol. 2, Academic Press, Inc, London, U. K.
-

- 
- Sih, G. C., Paris, P. C., Irwin, G. R. (1965): *On Cracks on Rectilinearly Anisotropic Bodies. International Journal of Fracture* **1**, 189-203.
- Susarrey H., O. (1997): *Análisis de la Morfología de un Material Frágil*, pp. 162, ITESM, México, D. F.
- Turrado, S. J., Ramirez P., R., Perez, R. S. (1996): *Fiber Properties and their Influence on Paper Structure*, pp. 45-55. In R. Allan G. G, J. J. (Ed.): *Interactive Paper, Proceedings of SPIE, Guadalajara, Mex.*
- Welzel, U., Ligot, J., Lamparter, P., Vermeule, A. C., Mittemeijer, E. J. (2005): *Stress Analysis of Polycrystalline Thin Films and Surface Regions by X-ray Diffraction. Journal of Applied Crystallography* **38**, 1-29.
- Wnuk, M. P., Yavari, A. (2005): *A Correspondence Principle for Fractal and Classical Cracks. Engineering Fracture Mechanics* **72**, 2744-2757.