INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

La Ecuación de Difusión y La Cadena de Nacimiento y Muerte

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA

Hectór López Terrazaz

Director de Tesis
Manuel Robles Bernal

México, D. F. Febrero 2006

Dedicatoria

Dedico este humilde trabajo a la memoria de mis Srs. Padres Javier y Petra, por haberme brindado la enorme oportunidad de permitirme realizar mis estudios,por lo que les estoy porfundamente agradecido.

A mis Hermanos:
Ma.Olivia,por estar siempre de mi lado y su gran ayuda en toda mi formación.
Javier Horacio,por sus consejos y guía en todo momento.
Octavio,por los grandes momentos compartidos.

A mi amada esposa:
María Esther,por su amor incondicional.

Especialmente a mi hija:
Erika Milenka, por ser la inspiración y el motor para continuar superandome.

Agradecimientos

Agradezco a la Escuela Superior de Fisíca y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional y a todos mis profesores de la carrera por haber compartido sus valiosos conocimientos y contribuir de manera definitiva en mi formación.

Al profesor Lic.Manuel Robles Bernal de la Escuela Superior de Fisíca y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional por la proposición del tema de tesis y su colaboración y dirección de la misma.

Introducción

En este trabajo de tesis se presentan modelos de probabilidad para procesos que evolucionan en el tiempo de una manera aleatoria. Estos modelos de probabilidad se les conoce como Procesos Estocasticos*, donde los elementos principales que los distinguen son el* Espacio de Estados $\mathcal{S}$ *, el espacio de parametros I y la relacion de dependencia entre las variables aleatorias X_t. Una vez mencionada la definicion de proceso estocastico, nos enfocaremos a un tipo especial de estos procesos llamado Cadenas de Markov. Las cadenas de Markov tiene la propiedad particular de que las probabilidades que describen la forma en que el proceso evoluciona en el futuro, depende solo del estado actual en que se encuentre el proceso y por lo tanto, son condicionalmente independientes de los eventos ocurridos en el pasado. Muchos procesos en diferentes ramas como la Física, Ingenieria,Biologia,Ciencias Sociales, Matemáticas etc. se ajustan a esta descripcion por lo que las cadenas de Markov constituyen una clase de modelos probabilisticos de gran importancia. Por lo cual se estudia las propiedades de estos procesos en base a su estructura probabilistica que los caracteriza y analizando su espacio de estádos $\mathcal{S}$*
En éste trabajo se establecen condiciones para la existencia y unicidad de la Distribución estacionaria asimismo como obtener

la distribución de Equilibrio y bajo que condiciones determina a la existencia de esta distribución, en el capítulo 2 determinamos la relación entre el valor esperado de retorno y la distribución de equilibrio, también caracterizamos ésta distribuciones por medio de los estados de la cadena.En el cápitulo 1 se dán los resultados de la estructura probabílistica de una cadena de Markov y a su vez se dan las notaciones que se utilizán durante el trabajo.En el capítulo 3 se aplican estos resultados a las cadenas de nacimiento y muerte y se presenta como las caminatas aleatorias y el modelo de Ehrenfest sirven para realizar aproximaciones a soluciones de la ecuación de difusión.

Índice general

Capítulo 1

Cadena de Markov

1.1. Procesos Estocásticos

Definición 1.1.1 *Un* **Proceso Estocástico** *denotado por* $(X_t)_{t \in I}$ *es una colección de variables de aleatorias definidas en un espacio de probabiliad comun* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$*; donde* Ω *es el espacio muestral,* $\mathcal{F}$ *la* $\sigma - Algebra$*,* $\mathcal{P}$ *la Medida de probabilidad.*

Al conjunto I le llamamos el conjunto de parámetros. Si I es un subconjunto finito o infinito numerable entonces diremos que $(X_t)_{t \in I}$ *es un proceso estocástico de Tiempo Discreto. Si I es un conjunto no numerable, entonces el proceso es llamado un proceso estocástico de Tiempo Continuo.*
Sea $(X_t)_{t \in I}$ *un proceso estocástico (Discreto o Continuo), el Espacio de Estados, el cual es denotado por* $\mathcal{S}$*, es el conjunto de todos los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias, análogamente el espacio de estados del proceso puede ser discreto o continuo, dependiendo de que* $\mathcal{S}$ *sea un conjunto finito o infinito numerable, o de que* $\mathcal{S}$ *sea un conjunto continuo. Por lo tanto, los procesos estocásticos se clasifican de acuerdo al es-*

pacio de estados y al parámetro del tiempo, es decir un proceso estocástico puede ser:

i) *De tiempo discreto con espacio de estado discreto.*

ii) *De tiempo discreto con espacio de estado continuo.*

iii) *De tiempo continuo con espacio de estado discreto.*

iv) *De tiempo continuo con espacio de estado continuo.*

Proceso de Markov

Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ *es un Proceso de Markov si tiene la propiedad de que dado el valor de* X_t*, los valores de* X_s , $s > t$*, no depende de los valores de* X_u , $u < t$ *, esto significa que la probabilidad de cualquier conducta particular futura del proceso, depende únicamente del estado presente, por lo tanto no afecta lo que sucedio en el pasado. En términos formales un proceso estocástico se dice que es Markoviano o que posee la propiedad de Markov si:*

$$\mathcal{P}(a < X_t \leq b \mid X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) = \mathcal{P}(a < X_t \leq b \mid X_{t_n}) \qquad (1.1)$$

Sea A *un intervalo en la recta real. La función:*

$$\mathcal{P}(X_t \in A \mid X_s = x) = \mathcal{P}(x, s, t, A) \quad t > s \qquad (1.2)$$

es llamada **La Función de Transición***,la cual es básica en el estudio de la estructura de los procesos Markovianos, debido a que podemos expresar la función de distribución conjunta de las variables* $X_{t_0}, X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}$ *en términos de la función de transición y de la distribución inicial de* X_{t_0}.

Un proceso Markoviano discreto con espacio de estados finito o infinito numerable es llamdo una Cadena de Markov cuya estructura probabilística es estudiada en la siguiente sección.

1.2. Cadena de Markov

Definición 1.2.1 *Una* **Cadena de Markov** *es un* Proceso de Markov discreto *cuyo* Espacio de Estados $\mathcal{S}$ *es también discreto y el cual lo podemos representar por una sucesión de variables aleatorias* $(X_n)_{n\geq 0}$

Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ *una cadena de Markov, entonces tenemos que:*

$\mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n = i) = \mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad \forall n \ , \ \forall i, j \in \mathcal{S}$

Definición 1.2.2 *Sea* $(X_n)_{n\geq 0}$ *una Cadena de Markov. La función*

$$p_{n,n+1}(i,j) : S \times S \longrightarrow [0,1]$$

definida por:

$$p_{n,n+1}(i,j) \doteq \mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \tag{1.3}$$

es llamada la **Probabilidad de Transición de un Paso**

Si las probabilidades de transición de un paso son independientes de n la Cadena de Markov se dice Estacionaria u Homogénea *y la función de transición la denotaremos por*

$$p(i,j) \doteq \mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathcal{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) \tag{1.4}$$

1.3. Estructura Probabilística de una Cadena de Markov Estacionaria

En esta sección mostramos los elementos que caracterizán las Cadenas de Markov y veremos que el ADN de la estructura está determinada por la Distribución Inicial y las Probabilidades de Transición.

Consideremos la **C.M.** $(X_n)_{n\geq 0}$ *con valores en el Espacio de Estados* $\mathcal{S}$

Definición 1.3.1 *La* **función de Transición**

$$\begin{array}{llcll} p: & \mathcal{S}\times\mathcal{S} & \longrightarrow & [0,1] & \\ & (i,j) & \longmapsto & p(i,j) & \doteq \mathcal{P}(X_{n+1}=j \mid X_n = i) \end{array}$$

que satisface:

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} p(i,j) = 1 \qquad \forall i\in\mathcal{S}$$

determina la matríz

$$\mathbf{P} = [(p(i,j)]$$

llamada matriz de transición asociada a la C.M.

Definición 1.3.2 *Denotamos por* π_n *la Disribución de la v.a.* X_n*, la cual se representara por un vector fila*

$$\pi_n = (\pi_n(i))_{i\in\mathcal{S}}$$

donde

$$\pi_n(i) = \mathcal{P}(X_n = i)$$

π_0 *es llamada la* **Distribución inicial** *del Proceso*

La Distribución Conjunta

La Distribución Conjunta de las variables $X_1, X_2, \cdots X_n$ *esta determinada en términos de las probabilidades de transición y la Distribución inicial a saber:*

$$\mathcal{P}(X_0 = i_0 \cdots X_n = i_n) =$$

$$\mathcal{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})\mathcal{P}(X_0 = i_0 \cdots X_{n-1} = i_{n-1})$$

que es una relación recursiva que al resolverla nos da la siguiente identidad

$$\mathcal{P}(X_0 = i_0, \cdots X_n = i_n) = \pi_0(i_0)p(i_0, i_1)p(i_1, i_2) \cdots p(i_{n-1}, i_n) \tag{1.5}$$

La Distribución Condicional del sistema en varias situaciones futuras al conocer el pasado y el presente esta dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, \cdots, X_{n+m} = i_{n+m} \mid X_0, \cdots, X_n = i_n) &= \\ p(i_n, i_{n+1})p(i_{n+1}, i_{n+2}) \cdots p(i_{n+m-1}, i_{n+m}) \end{aligned}$$

La Distribución de la v.a. X_n

Observemos que

$$\pi_n(j) = \sum_{i\in\mathcal{S}} p(i,j)\pi_{n-1}(i)$$

en forma matricial

$$\pi_n = \pi_{n-1}\mathbf{P}$$

que es una relación recursiva que al resolver no da la siguiente identidad

$$\pi_n(j) = \sum_{i_0\in\mathcal{S}}\sum_{i_1\in\mathcal{S}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in\mathcal{S}} \pi_0(i)p(i_0,i_1)p(i_1,i_2)\cdots p(i_{n-1},j) \tag{1.6}$$

en forma maticial es:

$$\pi_n = \pi_0\mathbf{P}^n$$

Probabilidades de transición en n-pasos

Se define la probabilidad de transición del sistema después de n evoluciones como:

$$p^{(n)}(i,j) \doteq \mathcal{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

se obtiene la siguiente identidad

$$p^{(n)}(i,j) = \sum_{i_1\in\mathcal{S}}\sum_{i_2\in\mathcal{S}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in\mathcal{S}} p(i,i_1)p(i_1,i_2)\cdots p(i_{n-1},j)$$

esta identidad nos dice que

$$\mathbf{P}^n = \left[p^{(n)}(i,j)\right]$$

La Ecuación de Chapmann-Kolmogorov
La siguiente identidad es conocida como la ecuación de Chapmann-Kolmogorov que es de gran importancia en los procesos markovianos

$$p^{(m+n)}(i,j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p^{(m)}(i,k)p^{(n)}(k,j)$$

en forma matricial

$$\mathbf{P}^{m+n} = \mathbf{P}^m \mathbf{P}^n$$

Definición 1.3.3 **Distribución Estacionaria**
Una Distribución π *sobre el Espacio de Estados* $\mathcal{S}$ *de una C.M. con matríz asociada* $\mathbf{P}$ *es llamada una* **Distribución Estacionaria** *si satisface:*

$$\pi \mathbf{P} = \pi$$

Observación 1.3.1 *Si la Distribución inicial* π_0 *de una C.M. es Estacionaria entonces se tiene que*

$$\pi_n = \pi_0 \qquad \forall\ n$$

1.4. Tiempo de Éxito

$(X_n)_{n \geq 0}$ *una* Cadena de Markov *con Espacio de Estados* $\mathcal{S}$

Definición 1.4.1 *Se define el* **Primer Tiempo de Éxito** *del estado* $i \in \mathcal{S}$ *como la variable*

$$T_i \doteq inf\{n > 0 \mid X_n = i\}$$

para cada $n > 1,\ i, j \in \mathcal{S}$ *se definen las siguientes probabilidades*

$$f_{ij}^{(n)} \doteq \mathcal{P}_i(X_1 \neq j, \cdots, X_{n-1} \neq j, X_n = j) = \mathcal{P}_i(T_j = n)$$

$$f_{ij} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathcal{P}_i(T_j < \infty)$$

$f_{ij}^{(n)}$ *representa la probabilidad del primer éxito del estado* j *en el tiempo* n *cuando la C.M. inicia en el estado* i
f_{ij} *es la probabilidad de tener éxito en el estado* j *cuando la C.M. inicia el el estado* i
Las probabilidades $p^{(n)}(i, j)$ *se pueden dar en términos de los tiempos de éxito*

Proposición 1.4.1 *Dados los estados* $i, j \in \mathcal{S} \quad n \geq 1$ *se tiene la siguiente identidad*

$$p^{(n)}(i, j) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p^{(n-k)}(j, j)$$

Visitas a un Estado

Definición 1.4.2 *Dado el estado* $j \in \mathcal{S}$ *se define:*

$$I_j(X_n) \doteq \begin{cases} 1 & si \quad X_n = j \\ 0 & si \quad X_n \neq j \end{cases}$$

por lo tanto

$$N_n(j) \doteq \sum_{k=1}^{n} I_j(X_k)$$

da el número de visitas al estado j hasta el tiempo n, cuando hacemos $n \to \infty$ tenemos que

$$N(j) \doteq \lim_{n\to\infty} N_n(j) = \sum_{k=1}^{\infty} I_j(X_k)$$

es el número de visitas de la C.M. al estado j, dado que:

$$\mathcal{E}_i(I_j(X_k)) = p^{(k)}(i,j)$$

entonces se tiene :

$$\mathcal{V}_n(i,j) \doteq \mathcal{E}_i(N_n(j)) = \sum_{k=1}^{n} I_j(p^{(k)}(i,j)$$

y además

$$\mathcal{V}(i,j) \doteq \mathcal{E}_i(N(j)) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(i,j)$$

Observación 1.4.1 *a) Dado que los eventos $\{N(j) \geq 1\}$ y $\{T_j < \infty\}$ son equivalentes se tiene:*

$$\mathcal{P}_i(N(j) \geq 1) = \mathcal{P}_i(T_j < \infty) = f_{ij}$$

b) $\mathcal{P}_i(N(j) \geq m) = f_{ij} f_{jj}^{(m-1)}$

c) $(1-f_{jj})$ *representa la probabilidad de que la C.M. no regrese al estado j cunado inicia en el, por lo tanto:*

$$\mathcal{P}_i(N(j) = m) = f_{ij} f_{jj}^{(m-1)} (1 - f_{jj})$$

1.5. Espacio de Estados

En éste capítulo analizaremos el Espacio de Estados $\mathcal{S}$ *de una Cadena de Markov, clasificaremos los estados y en base a esta clasificación daremos una partición de $\mathcal{S}$ utilizando el concepto de* Tiempo de Exito *En ésta sección daremos una relación de equivalencia en espacio de estados $\mathcal{S}$ la cual permitira dar una partición del mismo, que nos permitira el estudio del comportamiento del sistema y poder determinar la existencia y unicidad de la distribución estacionaria y la existencia de la matríz de equilibrio. Esta clasificación la daremos utilizando el concepto de* Tiempo de Éxito

Definición 1.5.1 *Dado el estado $j \in \mathcal{S}$ se clasifica como:*

- **Estado Transitivo** *si:*

$$f_{jj} < 1$$

- **Estado Recurrente** *si:*

$$f_{jj} = 1$$

Observación 1.5.1 *Sea* $j \in \mathcal{S}$ *es transitivo* $(f_{jj} < 1$
Dado que $\mathcal{P}_i(N(j) \geq m) = f_{ij} f_{jj}^{m-1}$ & $f_{ij} < 1$
se tiene que

$$\lim_{m \to \infty} \mathcal{P}_i(N(j) \geq m) = 0$$

es decir

$$\mathcal{P}_i(N(j) = \infty) = 0$$

además
$\mathcal{E}_i(N(j)) = \sum_{m=1}^{\infty} m\mathcal{P}_i(N(j) = m) = \sum_{m=1}^{\infty} m f_{ij} f_{jj}^{m-1}(1 - f_{jj}) =$
$= f_{ij}(1 - f_{jj}) \sum_{m=1}^{\infty} m f_{jj}^{m-1} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}}$ *por lo tanto tenemos el siguiente resultado*

Proposición 1.5.1 *Sea* $j \in \mathcal{S}$ *un estado transitorio entonces* $\forall i \in \mathcal{S}$ *se tiene:*

$$\mathcal{V}(i, j) = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i, j)$$

por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} p^{(n)}(i, j) = 0$$

2,2,2) *Sea* $j \in \mathcal{S}$ *es un estado recurrente* $(f_{jj} = 1)$ *entonces*

$$\mathcal{P}_i(N(j) \geq m) = f_{ij} f_{jj}^{m-1} = f_{ij} \quad \forall m \geq 1$$

entonces

$$\mathcal{P}_i(N(j) = \infty) = f_{ij}$$

luego

Si $f_{ij} = 0$ *entonces* $\mathcal{V}(i,j) = 0$ *y si* $f_{ij} > 0$ *entonces* $\mathcal{V}(i,j) = \infty$

además

$$\mathcal{V}(j,j) = \infty \text{ entonces } \sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}(j,j) = \infty$$

Partición del Espacio de Estados

Denotemos por $\mathcal{S}_t$ *al conjunto de estados transitivos y por* $\mathcal{S}_r$ *al conjunto de estados recurrentes por lo tanto*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_r \cup \mathcal{S}_t$$

esta partición inicial no es la más conveniente ya que nos interesa cuando dos estados están comunicados en el siguiente contexto.

Definición 1.5.2 *Dados los estados* $i, j \in \mathcal{S}$ *decimos que están* **comunicados** *si*

$$p^{(m)}(i,j) > 0 \quad \text{con } m \geq 0$$

y lo simblizamos por $i \hookrightarrow j$

La relación de comunicación entre los estados es una relación reflexiva ya que

$$p^{(0)}(i,i) = 1$$

es transitiva ya que si $(i \hookrightarrow j) \wedge (j \hookrightarrow k)$ *entonces existen* $m \geq 0$, $n \geq 0$ *tal que*

$$p^{(m)}(i,j) > 0 \ \& \ p_{(n)}(j,k) > 0$$

entonces

$$p^{(n+m)}(i,k) = \sum_{l \in \mathcal{S}} p^{(m)}(i,l) p^{(n)}(l,k) \geq p^{(m)}(i,j) p^{(n)}(j,k) > 0$$

La relación no cumple la Simetría, pero si definimos la relación de intercomunicación por:

Definición 1.5.3 *Dados los estados* $i, j \in \mathcal{S}$ *decimos que están* **intercomunicados** *si están comunicados entre ellos y lo simblizamos por* $i \leftrightarrow j$

La relación de intercomunicación es una relación de equivalencia la cual nos da una partición más fina del Espacio de Estados $\mathcal{S}$

Definición 1.5.4 *Un conjunto* $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ *es llamado un* **Conjunto Cerrado** *si*

$$\forall i \in \mathcal{C} \ \forall j \notin \mathcal{C} \ \textit{se tiene que} \ p^{(n)}(i,j) = 0 \ \forall n \geq 1$$

Definición 1.5.5 *Un conjunto de* $\mathcal{S}$ *es llamado un* **Conjunto Irreducible** *si todos los estados del conjunto están intercomunicados*

Definición 1.5.6 *Una C.M. se dice irreducible si su Espacio de Estados es un conjunto irreducible esto es tenemos solamente una clase de equivalencia*

Proposición 1.5.2 *Toda C.M. con un número finito de estados tiene al menos un estádo recurrente.*

Proposición 1.5.3 *Si el estado i es recurrente y se comunica al estado j entonces j es recurrente y además se cumple $f_{ij} = f_{ji} = 1$*

Como consecuencia tenemos que la clases de equivalencia están formadas exclusivamente por estados recurrentes o transitivos.

Lema 1.5.1 *El Espacio de Estados $\mathcal{S}$ es la unión de conjuntos cerrados*
e irreducibles que son las clases de equivalencia con respecto a la relación de intercomunicación.

Este resultado permite dar una forma canónica a la matríz de transición de la cadena en términos de las clases recurrentes que representaria una díagonal de bloques y posteriormente las clases de transitividad

1.6. Distribución Estacionaria

Bajo condiciones generales existe una única distribución estacionaria para una cadena de Markov la cual está dada en términos del Tiempo Esperado de Recurrencia $\mu(i)$, que determina el promedio de tiempo esperado del proceso que inicia en el estado i, para retornar nuevamente al mismo estado. En éste cápitulo se presentan resultados para determinar condiciones para la existencia y unicidad de la distribución estacionaria.

1.6.1. Tiempo Esperado de Recurrencia

Definición 1.6.1 *Se define el* **Tiempo Esperado de Recurrencia** $\mu(i)$ *del estado* $i \in \mathcal{S}$ *como*

$$\mu(i) = \begin{cases} \infty & si\ i\ es\ Transitivo \\ \displaystyle\sum_{k=i}^{\infty} k\mathcal{P}(T_i = k \mid X_0 = i) & si\ i\ es\ Recurrente \end{cases}$$

En base a esta definición podemos clasificar a los estados recurrentes por

- *El estado* i *es llamado* **Recurrente Positivo** *si*

$$\mu(i) < \infty$$

- *El estado* i *es llamado* **Recurrente Nulo** *si*

$$\mu(i) = \infty$$

En base a estas clasificación de los estados podemos dar condiciones para la existencia y unicidad de la distribución estacionaria,analizamos primeramente cuando el espacio Ses finito.

Espacios de Estados Finitos

Consideremos una Cadena de Markov irreducible finita con Espacio de Estados $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *entonces los estados son* recurrentes.*Sea* $\mu(i)$ *el tiempo Esperado de Recurrencia entonces tenemos una única Distribución Estacionaria* π *dada a saber por:*

$$\pi(i) = \frac{1}{\mu(i)}$$

Demostremos primero la Existencia de la Distribución
Sea $\pi = (\pi(i_1), \pi(i_2), \cdots, \pi(i_n))$ *una Distribución Estacionaria del Proceso, entonces*

$$\pi\mathbf{P} = \pi$$

esto significa que

$$\sum_{i=1}^{N} \pi(i)P(i,j) = \pi(j) \qquad \forall j \in \mathcal{S}$$

consideremos la Distribución Inicial $\mathcal{P}(X_0 = i) = \pi(i)$
demostremos que el producto

$$\pi(i)\mu(i) = 1$$

en efecto

$$\begin{aligned}
\pi(i)\mu(i) &= \pi(i)\sum_{j=1}^{\infty} j\mathcal{P}_i(T_i = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j\mathcal{P}_i(T_i = j)\pi(i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}_i(T_i \geq= j)\pi(i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}(T_i \geq j, X_0 = i) \\
&= \mathcal{P}(X_0 = i) + \sum_{j=2}^{\infty} \mathcal{P}(X_0 = i, X_1 \neq i, \cdots, X_{j-1} \neq i) \\
&= \mathcal{P}(X_0 = i) + \sum_{j=2}^{\infty} [\mathcal{P}(X_1 \neq i, \cdots, X_{j-1} \neq i) \\
&\quad -\mathcal{P}(X_0 \neq i, X_1 \neq i, \cdots, X_{j-1} \neq i)
\end{aligned}$$

dado que la distribución inicial es Estacionaria

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{P}(X_0 = i) + \sum_{j=2}^{\infty} [\mathcal{P}(X_0 \neq i, \cdots, X_{j-2} \neq i)] \\
&\quad -[\mathcal{P}(X_0 \neq i, X_1 \neq i, \cdots, X_{j-1} \neq i)]
\end{aligned}$$

ésta suma es telescopica, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{P}(X_0 = i) + \mathcal{P}(X_0 \neq i) \\
&\quad - \lim_{j \to \infty} P(X_0 \neq i, X_1 \neq i, \cdots, X_j \neq i)
\end{aligned}
$$

como el estado es recurrente se tiene

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{P}(X_0 = i) + \mathcal{P}(X_0 \neq i) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

de aquí que se tiene la siguiente afirmación

Proposición 1.6.1 *Si existe una distribución estacionaria esta es de la forma*

$$\pi(i) = \frac{1}{\mu(i)} \tag{1.7}$$

Antes de demostrar la existencia de la distribución estacionaria se da la siguiente definición

Definición 1.6.2 *Dados los estados $i, j \in \mathcal{S}$ se define $a_i(j)$ como el número esperado de visitas al estado i entre visitas al estado j esto es:*

$$a_i(j) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_k = i, T_m > k \mid X_0 = m)$$

Teorema 1.6.1 (*Existencia*)
Si la Cadena de Markov es finita e irreducible entonces existe una única distribución estacionaria la cual esta dada por la ecuación 3,1

Demostración 1 *Es de esperarse que*

$$\mu(i)a_i(m) = \mu(m) \tag{1.8}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\mu(i)} = \frac{a_i(m)}{\mu(m)} \tag{1.9}$$

para probar la igualdad (3,2) *demostremos la siguientes dos afirmaciones.*
Afirmación 1

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(m) = \mu(m) \tag{1.10}$$

en efecto

$$\begin{aligned}
\mu(m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(T_m > k \mid X_0 = m) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_k = i, T_m > k \mid X_0 = m) \\
&= \sum_{i=1}^{N} a_i(m)
\end{aligned}$$

Afirmación 2

$$a_j(m) = \sum_{i=1}^{N} a_i(m) p_{ij} \tag{1.11}$$

supongamos primero que $j \neq m$ entonces

$$\begin{aligned} a_j(m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_k = j, T_m > k \mid X_0 = m) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(X_k = j, T_m > k \mid X_0 = m) \end{aligned}$$

dado que $j \neq m$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(X_k = j, T_m > k-1 \mid X_0 = m) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}(X_k = j, X_{k-1} = i, T_m > k-1 \mid X_0 = m) \end{aligned}$$

por la propiedad Markoviana

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} p(i,j) \mathcal{P}(X_{k-1} = i, T_m > k-1 \mid X_0 = m) \\ &= \sum_{i=1}^{N} p(i,j) \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_k = i, T_m > k \mid X_0 = m) \\ &= \sum_{i=1}^{N} p(i,j) a_i(m) \end{aligned}$$

si $i = j$ *entonces*

$$a_m(m) = 1$$

por recurrencia

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(T_m = k \mid X_0 = m) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}(X_{k-1} = i, T_m = k \mid X_0 = m) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} p(i,k)\mathcal{P}(T_m > k-1 \mid X_0 = m) \\
&= \sum_{k=1}^{N} p(i,k)a_i(m)
\end{aligned}$$

en base a estas dos afirmaciones se tiene la existencia de la distribución estacionaria la cual esta dada por la ecuación (3,2)

1.7. Tiempos de Espera

En ésta sección se dan elementos que nos permitan establecer condiciones para la existencia y unicidad de la distribución estacionaria en términos de sus estados y de la propiedad de periodicidad

Definición 1.7.1 *La transitividad o recurrencia de un estado se puede caracterizar en términos de la* **Matrź de Potencial G** *definida por*

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}^k$$

cuyas entradas son los valores esperados de visitas

$$\mathcal{V}(i,j) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(i,j)$$

Ergodicidad

Un proceso es llamado ergodico *si es posible encontrar alguna propiedad estadíistica del proceso se puede ver con tan solo una trayectoria muestral.Entre los teoremas ergodicos básicos más importantes esta la* **Ley Fuerte de los Grandes Números** *la cual afirma:*

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *son variables aleatorias con idéntica distribución, entonces existe* μ *tal que es casi seguro*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \mu$$

si y solo si $\mathcal{E}(\mid X_1 \mid) < \infty$ *y* $\mu = \mathcal{E}(X_1)$
Decimos que la Cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ *satisfface el* **Teorema Ergódico Medio** *si tiene una única distribución estacionaria* π *tal con probabilidad uno se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_j(X_k) = \pi(j)$$

es decir, la frecuencia de visitas de la cadena se aproxima a la distribución estacionaria.

Tiempos del Exito y Tiempos de Espera

Definición 1.7.2 *Se define el* Tiempo del r Exito *al estado* j *como la variable aleatoria*

$$T_j(r) = min\{n \mid N_n(j) = r\}$$

se tiene $T_j(1) = T_j$

Definición 1.7.3 *Se define la variable aleatoria* $W_j(r)$ *como el tiempo de espera entre el r-1 éxito y el r éxito cuando* $r \geq 2$ *y* W_1 *como el tiempo de espera para el primer éxito esto es:*

$$W_j(1) = T_j \qquad W_j(r) \doteq T_j(r) - T_j(r-1)$$

las variables $W_j(1), W_j(2), \cdots$ *son independientes y con idéntica distribución y con* $\mathcal{E}_j(T_j) = \mu(j)$ *entoces por la Ley Fuerte de los Grandes Números se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_j(1) + \cdots + W_j(n)}{n} = \mu(j)$$

además

$$W_j(1) + \cdots + W_j(n) = T_j(n)$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_j(n)}{n} = \mu(j)$$

Dado $N_j(n)$ *es el número de visitas en el tiempo* n *entonces se tiene*

$$T_j(N_j(n)) \leq n < T_j(N_j(n) + 1)$$

asi que

$$\frac{T_j(N_j(n))}{N_j(n)} < \frac{n}{N_j(n)} < \frac{T_j(N_j(n) + 1)}{N_j(n)}$$

por recurrencia cuando $n \to \infty$ *sabemos que es casi seguro que* $N_j(n) \to \infty$ *y por lo tanto*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \frac{1}{\mu(j)} \tag{1.12}$$

Esto dice que una cadena irreducible recurrente positiva satisface el Teorema Medio Ergódico. Tomando el valor esperado se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{V}_n(i,j)}{n} = \frac{1}{\mu(j)} \tag{1.13}$$

1.8. Convergencia a la Distribución de Equilibrio

En esta sección analizaremos bajo que condiciones la matríz $\mathbf{P}^k$ converge y si es así cuando la filas de la matríz límite $\mathbf{H}$*son distribuciones estacionarias*

Periodicidad

Un estado $j \in \mathcal{S}$ se dice que tiene **período** *N si*

$$N \doteq mcd\{n \mid p^{(n)}(j,j) > 0\}$$

En una cadena irreducible todos los estados tienen el mismo período. La cadena no puede retornar al estado j excepto cuando $n = kN$, si N=1 decimos que el estado es aperíodico. La periodicidad hace imposible la convergencia de $\mathbf{P}^k$, aunque $\mathbf{P}^{kN}$ pueda converger.
Las cadenas aperíodicas se caracterizán por la propiedad de que para cada estado $j \in \mathcal{S}$ existe m tal que

$$p^{(n)}(j,j) > 0 \quad n > m$$

Convergencia

Consideremos una cadena irreducible de estados recurrente positivos y aperíodica, probaremos que la matríz $\mathbf{P}^n$ *converge, más aún*

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(i,j) = \pi(j)$$

para verificar ésta afirmación definamos la cadena de markov

$$\mathbf{X}_n = (X_n, Y_n)$$

donde X_n,Y_n *son dos copias diferentes de la cadena original, y su espacio de estados es* $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ *y las probabilidades de transición por*

$$\mathcal{P}[\mathbf{X}_{n+m} = (i,r) \mid \mathbf{X}_n = (j,q)] = p^{(n)}(i,j)p^{(m)}(r,q)$$

Supongamos que (X_n) *tiene una distribución arbitraria y* (Y_n) *la distribución inicial estacionaria* π

Ya que la cadena original es aperiodica, $(\mathbf{X}_n)$ *es irreducible, también recurrente positiva y dado que la distribución estacionaria está dada por*

$$\mathcal{P}[\mathbf{X}_n = (i,j)] = \pi(i)\pi(j)$$

esto implica

$$\mathcal{P}[\mathbf{X}_n = (i,i) \ \textit{para algún } n] = 1 \quad \textit{casí seguro}$$

lo cual dice

$$\mathcal{P}[X_n = Y_n \text{ } para \text{ } algún \text{ } n] = 1 \quad casí \text{ } seguro$$

Esto implica que la distribución de (X_n) *converge a la distribución de* (Y_n)*, la cual es la distribución estacionaria para toda* n

La Distribución Estacionaria está dada en términos del tiempo promedio de recurrencia.

1.9. Distribución Límite

Dado que los coeficientes de la matríz $\mathbf{P}^m$ *representán las probabilidades de transición en* m-pasos *y las lineas las distribuciones condicionales, nuestro intéres es analizar el comportamiento de estas cuando* $m \to \infty$
Si existe el límite

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}^m = \mathbf{H}$$

La matríz $\mathbf{H} = [h_{ij}]$ *es llamada la* **Distribución Límite** *, dado que*

$$h_{ij} = \lim_{m\to\infty} p^{(m)}(i,j)$$

se tiene

- $0 \leq h_{ij} \leq 1$

- $\sum_j h_{ij} = 1$

Cuando todas las filas de $\mathbf{H}$ *son idénticas, cualquier fila es llamada la* **Distribución de Equilibrio** *de la C.M.*

Observación 1.9.1

$$h_{ij} = \lim_{m\to\infty} p^{(m)}(i,j)$$

como las filas son idénticas se tiene

$$h_{ij} = h_{kj} \qquad \forall i \forall k$$

ya que

$$p^m(i,j) = \mathcal{P}(X_m = j | X_0 = i)$$

se concluye que la distribución de equilibrio es independiente de la disribución inicial

Supóngase que la distribución límite $\mathbf{H}$ *satisface:*

$$\mathbf{HP} = \mathbf{H}$$

consideremos la fila i se define:

$$\pi(j) \doteq h_{ij}$$

entonces se tiene la igualdad

$$\sum_j \pi_i(j)p(j,k) = h_{ij} = \pi_i(k)$$

esto implica que la distribución π_i dada por la fila i es una distribución estacionaria.

Observación 1.9.2 *De hecho si en la matriz producto* **HP** *la fila i coincide con la fila i de* **H** *entonces la distribución*

$$\pi_i(j) \doteq h_{ij} \qquad \forall j$$

es una distribución estacionaria.

Se tiene el siguiente resultado en base a la caractéristica que tienen los eigenvalores de una matríz estócastica

Proposición 1.9.1 *Si la matriz* **P** *es diagonalizable entonces la distribución limite existe si el único eigenvalor propio con magnitud* 1 *es* $\lambda = 1$

por lo tanto

$$\mathbf{H} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}^m\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{C}$$

donde $\mathbf{E} = diag\{e_{11}, e_{22}, \cdots, e_{nn}\}$ *con*

$$e_{ii} = \begin{cases} 0 & si\ d_{ii} < 1 \\ 1 & si\ d_{ii} = 1 \end{cases}$$

Dado que $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}$ *entonces*

$$\mathbf{P}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}$$

de aqui que las columnas de $\mathbf{C}^{-1}$ *son los vectores propios por la derecha de* $\mathbf{P}$ *y como*

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{D}\mathbf{C}$$

las filas de $\mathbf{C}$ *son los vectores propios por la izquierda de* $\mathbf{P}$
Supóngase que $\mathbf{P}$ *tiene como único valor propio de magnitud* 1 *a* $\lambda = 1$ *y que los vectores propios por la izquierda asociado a* $\lambda = 1$ *está generado por el vector*

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \quad 0 \leq \nu_i \leq 1 \forall i$$

y además

$$\sum_i \nu_i = 1$$

entonces $\mathbf{P}$ *tiene una distribución de equilibrio dada por* ν *en efecto*

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ 1 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \cdots & \nu_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Cadenas de Nacimiento y Muerte

En éste capítulo analizamos las Cadenas de Nacimiento y Muerte *que son importantes por sus diferentes aplicaciones al modelar sistemas aleatorios discretos, se dán las condiciones necesarias y suficientes para obtener la distribución estacionaria y la matríz de Equilibrio.Analizamos las dos cadenas de nuestro interés a saber* La Caminata Aleatoria simétrica y la Cadena de Ehrenfest.

2.1. Cadena de Nacimiento y Muerte

Una Cadena de Markov es llamada una Cadena de Nacimiento y Muerte sobre los enteros no negativos, o sobre el conjunto finito $\{0, 1, ...d\}$ *si la función de transición* $p(i, j)$ *está dada por:*

$$p(i,j) = \begin{cases} q_i & si \quad j = j - 1 \\ r_i & si \quad i = j \\ p_i & si \quad j = i + 1 \\ 0 & \quad en\ otra\ parte \end{cases}$$

donde $q_i + r_i + p_i = 1$ *para* $i \in \mathcal{S}$

$$\begin{array}{ccccc} & q_i & & p_i & \\ i-1 & \curvearrowleft & i & \curvearrowright & i+1 \\ & & \circlearrowleft & & \\ & & r_i & & \end{array}$$

En las siguientes secciones analizo la estructura probabilistica de estas cadenas.

2.2. Tiempos de éxito y clasificación de Estados

2.2.1. Tiempos de Exito

Consideremos $a, b \in \mathcal{S}$ *con* $a < b$ *definamos*

$$t(x) \doteq P_x(T_a < T_b) \quad a < x < b$$

con $t(a) = 1$ *y* $t(b) = 0$
tenemos la siguiente identidad

$$t(y) = q_y t(y-1) + r_y t(y) + p_y t(y+1) \tag{2.1}$$

dado que $r_y = 1 - p_y - q_y$, *podemos reescribir la ecuación como:*

$$t(y+1) - t(y) = \frac{q_y}{p_y}(t(y) - t(y-1)) \tag{2.2}$$

que es una ecuación recurrente en diferencias cuya solución es

$$t(y) - t(y+1) = \frac{\gamma_y}{\gamma_a}[t(a+1) - t(a)]$$

siendo $\sum \gamma_y = \dfrac{q_1 q_2 \cdots q_y}{p_1 p_2 \cdots p_y} \quad \gamma_0 \doteq 1$
sumando

$$\sum_{y=a}^{b-1} [t(y) - t(y+1)] = \frac{[t(a+1) - t(a)]}{\gamma_a} \sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y$$

así tenemos

$$t(y) - t(y+1) = \frac{\gamma_y}{\displaystyle\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}$$

realizando la suma
$\displaystyle\sum_{y=x}^{b-1} [t(y) - t(y+1]$
obtenemos

$$t(x) = \frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\displaystyle\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}$$

por lo tanto tenemos las siguientes identidades

$$\mathcal{P}_x(T_a < T_b) = \frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\displaystyle\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}$$

$$\mathcal{P}_x(T_b < T_a) = \frac{\displaystyle\sum_{y=a}^{x-1} \gamma_y}{\displaystyle\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}$$

que nos permite obtener obtener tiempos de éxito entre dos estados.

2.2.2. Clasificación de Estados

Tenemos las siguientes igualdades

$$\mathcal{P}_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{y=0}^{\infty} \gamma_y}$$

dado que

$$\mathcal{P}_0(T_0 < \infty) = P(0,0) + P(0,1)\mathcal{P}_1(T_0 < \infty)$$

entonces si $\displaystyle\sum_{y=0}^{\infty} \gamma_y = \infty$ *tenemos*

$$\mathcal{P}_0(T_0 < \infty) = P(0,0) + P(0,1) = 1$$

por lo tanto el estado 0 *es recurrente, de aquí la siguiente afirmación*

Proposición 2.2.1 *Una Cadena de Nacimiento y Muerte irreducible es recurrente si y solo si*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{q_1 q_2 \cdots q_x}{p_1 p_2 \cdots p_x} = \infty$$

2.3. La Distribución Estacionaria

Consideremos una Cadena de Nacimiento y Muerte con $(X_n)_{n\geq 0}$ *con distribución estacionaria* π *esto es:*

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi(i)p(i,j) = \pi(j) \quad \forall j \in \mathcal{S}$$

Consideremos $\mathcal{S} = \{0, 1, \cdots\}$
de las identidades

$$\begin{aligned} \pi(0)r_0 + \pi(1)q_1 &= \pi(0) \\ \pi(i-1)p_{i-1} + r_i\pi(i) + \pi(i+1)q_{i+1} &= \pi(i) \quad\quad i \geq 1 \\ q_i + r_i + p_i &= 1 \end{aligned}$$

se tiene la siguiente igualdad recursiva

$$\pi(j+1) = \frac{p_j}{q_{j+1}}\pi(j) \quad j \geq 0$$

resolviendo ésta relación recursiva se tiene

$$\pi(i) = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}\pi(0) \quad i \geq 1$$

se define

$$\pi_i = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ \dfrac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} & si\ i \geq 1 \end{cases}$$

así se tiene la relación

$$\pi(i) = \pi(0)\pi_i \quad i \geq 0$$

por lo tanto si la suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) < \infty$$

se tiene que la única distribución estacionaria esta dada por

$$\pi(i) = \frac{\pi_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \pi(i)}$$

si la suma es divergente entonces no exite la distribución estacionaria.
Las siguientes secciones presento las Cadenas de Ehrenfest y la Caminata Aleatoria Simétrica.

2.4. Cadena de Ehrenfest(Perros y Pulgas)

Este modelo fue propuesto por P. y T. Ehrenfest para dar una aproximación probabilística a la noción física de Equilibrio. Considere dos cajas(perros) I , II y 2R esferas(pulgas) indistinguibles enumeradas. Se distribuyen en forma aleatoria estas esferas inicialmente en las cajas. Se selecciona al azar un número entero del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2R\}$ y la esfera con ése número se se coloca en la caja opuesta. Este procedimiento se repite de manera indefinida. Denotemos por X_n el número de esferas en la caja I, despúes del n-ésimo ensayo.

$(X_n)_{n\geq 0}$ *es una cadena de Markov con Espacio de Estados* $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots 2R\}$

La función de transición esta dada por

$$P(i,j) = \begin{cases} \frac{2R-i}{2R} & si\ j = i+1 \\ \frac{i}{2R} & si\ j = i-1 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

La Distribución inicial π_0 *inicial del proceso es una distribución binomial a saber:*

$$\pi_0(i) = \binom{2R}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2R} = \binom{2R}{i}\frac{1}{4^R}$$

más aún ésta distribución es estacionaria y es la única ya que es una cadena recurrente positiva irreducible, por lo tanto tiene una única distribución estacionaria que es la distribución inicial.

$$\pi_1 = \pi_0 \mathbf{P} = \pi_0 \longrightarrow \pi_n = \pi_0 \quad \forall n$$

denotamos $\pi_0 = \pi$ *entonces se tiene que*

$$\pi \mathbf{P} = \pi$$

es el único eigenvector propio de $\mathbf{P}$ *con valor propio* 1
Otra importante propiedad de ésta cadena es que es una cadena de tiempo reversible en el sentido

$$\mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathcal{P}(X_{n-1} = j \mid X_n = i)$$

Observación 2.4.1 *Dado que conocemos la distribución estacionaria estamos en condiciones de calcular el tiempo promedio de recurrencia, consideremos el siguiente ejemplo.*
El modelo de Ehrenfest que fue propuesto como un moddelo de transferencia de calor nos permite dar el siguiente ejemplo.

Inicialmente tenemos 100 esferas en la caja I y ninguna en la caja II y realizamos el proceso de Ehrenfest un millón de veces cada segundo.Que tiempo tenemos que esperar para tener el estado inicial? tenemos que

$$\pi(100) = \frac{1}{\mu(100)}$$

dado que $\pi(100) = (\frac{1}{2})^{100}$ *el tiempo promedio de regreso es de* 2^{100} *millones de segundo que equivale a* 4×10^{22} *aos*

2.5. Caminata Aleatoria

Consideremos la caminata aleatoria $(X_n)_{n\geq 0}$ *con espacio de estados en llos enteros* $\mathcal{S} = Z$ *función de transición*

$$p(i,j) = \begin{cases} q_i & si \quad j = j-1 \\ p_i & si \quad j = i+1 \\ 0 & \quad en\ otra\ parte \end{cases}$$

donde $q_i + p_i = 1$ *para* $i \in \mathcal{S}$

$$i-1 \overset{q_i}{\curvearrowleft} i \overset{p_i}{\curvearrowright} i+1$$

Si $p_i = q_i = \dfrac{1}{2}$ *decimos que la Caminata es Simétrica que es el caso que nos interesa.*

Consideremos el estado $i = 0$ *y asumamos que* $\mathbf{X} = 0$ *esto es iniciamos en el origen. Dado que la cadena es de periodo 2 se tiene que*

$$p^{(m)}(0,0) = 0 \quad si\ m\ es\ impar$$

Deduzcamos un expresión para

$$p^{(2n)}(0,0)$$

Una trayectoria cualquiera tiene la propiedad que toma n pasos a la derecha y n pasos a la izquierda con igual probabilidad por lo tanto la probabilidad de esta trayectoria es $(\frac{1}{2})^{2n}$ *tenemos* $\binom{2n}{n}$ *maneras diferentes de seleccionar esta trayectoria por lo tanto*

$$p^{(2n)}(0,0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

para hacer un estimación de esta probabilidad usamos la formulade Stirling's que establece

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n \exp(-n)$$

cuando n es crece se tiene la aproximación

$$p^{(2n)}(0,0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

en particular ya que la serie $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$
diverge se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(2n)}(0,0) \quad \textit{diverge}$$

por lo tanto la caminata aleatoria simétrica es una cadena recurrente.

Capítulo 3

La Ecuación de Difusión y su aproximación Discreta

En éste capítulo presento aproximaciones de Ecuaciones de Difusión por Cadenas de Nacimiento y Muerte donde las soluciones son funciones de densidad de transición de un Proceso Markoviano.En estas aproximaciones se tomaran consideraciones en base a los Procesos de Wiener de gran importancia en la física Matematica(Movimiento Browniano).

Iniciamos este capítulo objetivo de la tesis en presentar lo que un proceso de Wiener.

Definición 3.0.1 *Un Proceso estocástico* (W_t) , $-\infty < t < \infty$ *es llamado de* **Wiener** *si satisface las siguientes condiciones.*

- $W_0 = 0$
- $W_t - W_s$ *tiene una distribución normal con media cero varianza* $2D(t-s) \quad s \leq t \ , \ D > 0$

- $W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *son independientes donde* $t_1 \leq t_2 \leq \ldots$

3.0.1. La Caminata Aleatoria como una aproximación a una Ecuación de Difusión

Consideremos la caminata aleatoria $(X_n)_{n \geq 0}$ *con función de transición*

$$\sum p(i,j) = \begin{cases} q_i & si \quad j = i-1 \\ p_i & si \quad j = i+1 \\ 0 & \quad en\ otra\ parte \end{cases}$$

con $p_i + q_i = 1$
Si

$$p_i = q_i = \frac{1}{2} \quad \forall i \in \mathcal{S}$$

Decimos que la caminata es Simétrica,*considerando ésta cadena interpretamos la variable* X_n *como el número neto de pasos de tamao* ϵ *que realiza una particula después de* n *intervalos de tiempo de longitud* τ, *la pregunta es*
Como seleccionar ϵ *y* τ *para obtener un límite cuando*

$$\epsilon \longrightarrow 0 \ y \ n \rightarrow \infty$$

en base a que en un proceso de Wiener se tiene

$$\mathcal{E}[(X_t - X_0)^2] = 2Dt \quad D \text{ una const. positiva}$$

una selección aceptable es

$$\epsilon^2 = 2D\tau \textit{ donde } \tau = \frac{t}{n}$$

definiendo $X_t = \epsilon X_n$
veremos que éste proceso en el límite da densidades de transición $p(x, t \mid y)$ *que satisfacen una ecuación de difusión para esto tenemos la siguiente identidad importante que satisface una cadena de Markov*

$$p^{(n+1)}(i, j) = p^{(n)}(i, j-1)p(j-1, j) + p^{(n)}(i, j+1)p(j+1, j)$$

en el caso de la caminata simétrica tenemos

$$p^{(n+1)}(i, j) = \frac{1}{2}[p^{(n)}(i, j-1) + p^{(n)}(i, j+1)]$$

la cual se reescribe como

$$p^{(n+1)}(i, j) - p^{(n)}(i, j) = \frac{1}{2}[p^{(n)}(i, j-1) - 2p^{(n)}(i, j) + p^{(n)}(i, j+1)]$$

ésta ecuación se transforma al definir

$$p(x, t \mid y) = \frac{1}{\epsilon}p^{(n)}(i, j) \qquad x = j\epsilon \ , \ y = i\epsilon$$

y dividir entre τ *en la relación*

$$\frac{p(x, t+\tau \mid y) - p(x, t \mid y)}{\tau} = \frac{\epsilon^2}{2\tau}\frac{[p(x-\epsilon, t \mid y) - 2p(x.t \mid y) + p(x+\epsilon, t \mid y)]}{\epsilon^2}$$

cuando

$n \to \infty$ *se tiene* $\epsilon, \tau \to 0$

y por lo tanto otenemos que las funciones de densidad $p(x, t \mid y)$ *satisfacen la ecuación de difusión*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

3.0.2. Modelo de Ehrenfest y La Caminata Aleatoria Elástica

Consideremos la caminata $(X_n)_{n\geq 0}$ *con Espacio de Estados*

$\mathcal{S} = \{-R \cdots R\}$

y función de transición

$\forall (i,j) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \frac{i}{R}) & si \quad j = i+1 \\ \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{i}{R}) & si \quad j = i-1 \\ \\ 0 & en\ otra\ parte \end{cases}$$

La Cadena $(\mathbf{X}_n + R)_{n\geq 0}$ *es un modelo de Ehrenfest.Se tiene la siguiente relación*

$$p_{ij}^{(s+1)} = \frac{R+j+1}{2R} p_{ij+1}^{(s)} + \frac{R-j+1}{2R} p_{ij-1}^{(s)}$$

restando $p_{ij}^{(s)}$ *a la relación y agrupando se tiene*

$$p_{ij}^{(s+1)} - p_{ij} = \frac{1}{2}[p_{ij+1}^{(s)} - 2p_{ij}^{(s)} + p_{ij-1}^{(s)}] + \frac{j+1}{2R}p_{ij+1}^{(s)} - \frac{j-1}{2R}p_{ij-1}^{(s)}$$

usando los mismos argumentos del ejemplo anterior consideramos

$$\epsilon^2 = 2D\tau \ donde\ \tau = \frac{t}{s} \quad \epsilon = \sqrt{\frac{2Dt}{s}}$$

y denotando

$$p(x,t \mid y) = \frac{1}{\epsilon}p^{(s)}(i,j) \quad t = s\tau \qquad x = j\epsilon\ ,\ y = i\epsilon$$

la ecuacion se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{p(x,t+\tau \mid y) - p(x,t \mid y)}{\tau} &= \frac{\epsilon^2}{2\tau}\frac{p(x+\epsilon,t \mid y) - 2p(x,t \mid y) + p(x-\epsilon,t \mid y)}{\epsilon^2} \\ &+ \frac{1}{R\tau}\frac{(x+\epsilon)p(x+\epsilon,t \mid y) - (x-\epsilon)p(x-\epsilon,t \mid y)}{2\epsilon}\end{aligned}$$

asumiendo $\frac{1}{R\tau}$ *se aproxima a un número fijo* γ *cuando* $s \to \infty$ *se obtiene la ecuación parcial de difusión*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma\frac{\partial(xp)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Apéndice A

Representación Espectral

En este apéndice se contemplan una serie de resultados de Algebra Lineal para obtener el resultado de la Representación Espectral de una Matriz Diagonalizable la cual se utilza para obtener la Matrí z de Equilibrio de una Cadena de Markov.

A.1. Eigenvectores y Eigenvalores

Estas primeras definiciones están dadas con la intención de introducir la notación utilizada en la demostración del teorema de Representación Espectral.

Definición A.1.1 *Un vector* $v = (v_1, \cdots, v_n)^t$ *no nulo es llamado un eigenvector columna de la matríz* $\mathbf{P}$*si existe un escalar* λ *que satisface:*

$$\mathbf{P}v = \lambda v$$

el escalar λ es llamado el eigenvalor asociado al eigenvector v
Un vector $w = (w_1, \cdots, w_n)$ no nulo es llamado un eigenvector fila de la matríz $\mathbf{P}$si existe un escalar λ que satisface:

$$w\mathbf{P} = \lambda w$$

el escalar λ es llamado el eigenvalor asociado al eigenvector w

Proposición A.1.1 *El conjunto de eigenvectores con eigenvalores diferentes de una matríz es un conjunto linealmente independiente*

Definición A.1.2 *(Polinomio Caractrístico) Para determinar los eigenvalores propios se define el polinomio característico asociado a la matríz $\mathbf{P}$como:*

$$f(\lambda) = Det(\mathbf{P} - \lambda I)$$

que tiene como raices a los eigenvalores de $\mathbf{P}$

Observación A.1.1 *Dado que $\mathbf{P}v = \lambda v \iff v^t\mathbf{P}^t = \lambda v^t$ tenemos que $\mathbf{P}$ & $\mathbf{P}^t$ tienen los mismos eigenvalores y por lo tanto el mismo polinomio característico*

Definición A.1.3 *La Matríz* $\mathbf{P}$*se dice* **Díagonalizable** *si existe una matríz no singular* $\mathbf{C}$ *y una matríz díagonal* $\mathbf{D}$ *que satisface:*

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}$$

Denotemos por $\alpha(j)$ *la j-ésima columna de* $\mathbf{C}^{-1}$ *y por* $\beta(i)$ *la i-ésima fila de* $\mathbf{C}$*,dado que*

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{D}\mathbf{C}$$

entonces

$$\beta(i)\mathbf{P} = \lambda_i\beta(i)$$

donde $\mathbf{D} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ *por lo tanto la matríz* $\mathbf{C}$*está formada por los eigenvectores fila de* $\mathbf{P}$*y como*

$$\mathbf{P}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}$$

entonces

$$\mathbf{P}\alpha(j) = \lambda_j\alpha(j)$$

esto nos dice que $\mathbf{C}^{-1}$ *está formada por los eigenvectores columna de* $\mathbf{P}$

Observación A.1.2 *Dado que* $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}$ *entonces*

$$\mathbf{P}^k = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}^k\mathbf{C}$$

tenemos los siguientes dos lemas

Lema A.1.1

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Lema A.1.2

$$tr(\mathbf{P}^k) = \sum_i \lambda_i^k$$

Si v *es un eigenvector columna de* $\mathbf{P}$ *con* λ_1 *como eigenvalor y* w *es un eigenvector fila con eigenvalor* λ_2 *con* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *entonces los eigenvectores son ortogonales, en efecto*
$\mathbf{P}v = \lambda_1 v \;\Rightarrow\; w\mathbf{P}v = \lambda_2 wv = \lambda_1 wv \;\Rightarrow\; (\lambda_1 - \lambda_2)wv = 0 \;\Rightarrow\; wv = 0 \;\Rightarrow\; w$ & v *son ortogonales*

A.2. Representación Espectral

La representación espectral que estableceremos esta considerada a matrices diagonalizables.

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}$$

dado que

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = I \;\Rightarrow\; \beta(i)\alpha(j) = \delta_{ij}$$

Definición A.2.1 *definamos las matrices* $\mathbf{B}_k$ $k = 1, 2, \cdots, n$ *como*

$$\mathbf{B}_k \doteq \alpha(k)\beta(k)$$

ahora bien:

$$\mathbf{B}_k\mathbf{B}_l = \alpha(k)\beta(l)\alpha(l)\beta(l) = \alpha(k)\delta_{kl}\beta(l)$$

por lo tanto

$$\mathbf{B}_k\mathbf{B}_l = \begin{cases} 0 & si\ k \neq l \\ \mathbf{B}_k & si\ k = l \end{cases}$$

notemos que
$p_{ij} = \sum_l \sum_k c_{ik}^{(-1)} d_{kl} c_{lj} = \sum_k \lambda_k c_{ik}^{(-1)} c_{kj}$
se tiene que $c_{ik}^{(-1)} c_{kj}$ *es el coeficiente en la fila* i *columna* j *de* $\alpha(k)\beta(k)$ *y por consiguiente se tiene la representación de* $\mathbf{P}$*como:*

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{B}_k$$

que es llamada la representación espectral *de la matríz* $\mathbf{P}$

> *En este apéndice se contemplan una serie de resultados de Algebra Lineal para obtener el resultado de la Representación Espectral de una Matriz Diagonalizable la cual se utilza para obtener la Matrí z de Equilibrio de una Cadena de Markov.*

Teorema A.2.1 *Sea* $\mathbf{P}$*una matríz diagonalizable con eigenvalores asociados* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *y tal que*

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}$$

donde $\mathbf{D} = diag\lambda_1, \cdots, \lambda_n$
Sea $\mathbf{B}_k$ *la matríz que se obtiene al múltiplicar la k-ésima columna de* $\mathbf{C}^{-1}$ *con la k-ésima fila de la matríz* $\mathbf{C}$ *entonces se tiene que:*

$$\mathbf{P} = \lambda_1\mathbf{B}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{B}_n$$

y además

$$\mathbf{P}^k = \lambda_1^k\mathbf{B}_1 + \cdots + \lambda_n^k\mathbf{B}_n$$

Observación A.2.1 Este resultado nos permite saber de la existencia y obtener la Matríz de equilibrio $\mathbf{H}$ en forma rápida utilizando métodos computacionales siempre y cuando la matríz es diagonalizable

Ejemplo 1

Consideremos una C.M. $(X_n)_{n\geq 0}$ *cuya matríde transición es*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matríz son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ *por lo tanto la matríz* $\mathbf{P}$ *se representa por*

$$\mathbf{P} = B_1 \ + \ B_2$$

donde

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de aquí que la matríz de equilibrio es

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Conclusiones

En éste trabajo presentamos algunos ejemplos en los cuales vemos la importancia de los procesos markovianos discretos.Las cadenas de markov tienen grandes aplicaciones en modelar fenómenos aleatorios donde el presente domina para establecer posibilidades de situaciones futuras.Estos modelos probabilisticos tienen grandes aplicaciones en áreas como las finanzas, la toma de desiciones,la fisica-matemática,ecónomia,etc. otra de las observaciones que se pueden ver es la relación de diferentes campos de la matemática, de ahi su gran importancia.

Bibliografía

[1] *Hoel,Port,Stone* Introduction to Stochastic Processes *, Houghton Mifflin Company. 1972*

[2] *S. Ross,* Stochastic Processes*, John Wiley,1983*

[3] *S. Ross,*Introduction to Probability Models*,fithh edition,academic Press 1993*

[4] *J.G.Kemeny and J.L. Snell* Finite Markov Chains *Van Nostrand 1960*

[5] *C.W. Gardiner* Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and Natural Sciences *Springer-Verlag 1990*

[6] *Gregory F. Lawler*Introduction to Stochastic Processes *, Chapman & Hall, 1995*