

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**Escuela Superior de Física y Matemáticas**

*El Problema de Dirichlet y sus Aplicaciones a la Física*

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

**PRESENTA**

Edith Cortez Martínez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Lino Feliciano Reséndis Ocampo

Dr. Luis Manuel Tovar Sánchez

México, D. F.

MARZO, 2008

## Agradecimientos

A mis directores de Tesis:

Dr. Luis Manuel Tovar Sánchez

Dr. Lino Feliciano Reséndis Ocampo.

A mi Mamá: Adela Martínez Martínez.

A mi Papá: Saturnino Cortés Islas.

El Problema de Dirichlet  
y sus Aplicaciones a la Física



# Índice general

<b>0. Introducción</b>	<b>1</b>
0.1. El problema de Dirichlet . . . . .	1
0.2. Panorama Histórico . . . . .	2
0.3. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet . . . . .	9
<b>1. Funciones Armónicas</b>	<b>13</b>
1.1. Propiedades básicas de Funciones Armónicas . . . . .	13
1.2. Núcleo de Poisson . . . . .	19
1.3. Funciones Armónicas en el Disco Unitario . . . . .	28
1.4. El Principio del Argumento para Funciones Armónicas . . . . .	40
<b>2. Funciones Superarmónicas y Subarmónicas</b>	<b>47</b>
2.1. Propiedades de las Funciones Superarmónicas y Subarmónicas . . . . .	47
2.2. Método de Perron-Wiener . . . . .	49
2.3. Aplicación del Método de Perron a Mayorantes Armónicos . . . . .	55
<b>3. Regiones de Dirichlet y Aplicaciones</b>	<b>61</b>
3.1. Región de Dirichlet . . . . .	61
3.2. Transplantes Conformes . . . . .	67
3.3. Conducción de Calor y Separación de Variables . . . . .	77
3.4. Series de Fourier . . . . .	84
3.5. Ejemplos Numéricos . . . . .	89
<b>A. Apéndice de Análisis Real</b>	<b>101</b>
<b>B. Apéndice de Análisis Complejo</b>	<b>103</b>
<b>C. Apéndice de Mathematica</b>	<b>109</b>



# Capítulo 0

## Introducción

En este trabajo se estudia un tema de gran interés tanto para la matemática como para la física, en especial por su gran variedad de aplicaciones: la teoría elemental de las funciones armónicas, subarmónicas, y superarmónicas. En particular veremos que algunos teoremas de esta teoría reproducen teoremas bien conocidos del análisis complejo. Además también se presentan algunas aplicaciones del trasplante conforme.

A continuación esbozamos un panorama histórico de la teoría de las funciones armónicas, dentro del contexto de los problemas que le dieron origen y con un bosquejo biográfico de los matemáticos que la fueron sistematizando.

### 0.1. El problema de Dirichlet

En esta sección se presenta el problema clásico de la teoría de las funciones armónicas.

Éste consiste en determinar todas las regiones  $G \subset \mathbb{C}$  tales que, para cualquier función continua

$$f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$$

exista una función continua  $u : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $u(z) = f(z)$  para todo  $z \in \partial G$  y  $u$  sea armónica en  $G$ . Alternativamente, deseamos determinar todas las regiones  $G \subset \mathbb{C}$  tales que la ecuación de Laplace es resuelta con valores arbitrarios en la frontera. Denotamos este problema como  $P(f, G)$ .

Desde el punto de vista clásico, debemos suponer que  $f \in \mathcal{C}^0(\partial G)$ , donde  $\mathcal{C}^0(A)$  es la clase de las funciones continuas en  $A$ .

**Definición 0.1** *Dado un conjunto abierto  $G$  de  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\partial G$  y dada  $f \in \mathcal{C}^0(\partial G)$ , llamamos*

a la función  $u$  una solución clásica de  $P(G, f)$ , si  $u$  es armónica en  $G$  y tal que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow z} u(x) &= f(z), & \text{para toda } z \in \partial G. \\ x &\in G \end{aligned}$$

Veremos como se aplica el problema de Dirichlet para encontrar la distribución estacionaria de temperatura en un sólido cuando se especifica la temperatura en la superficie, en ausencia de fuentes de generación de calor dentro del sólido. Este problema también aparece al calcular potenciales en el interior de conductores, cuando se especifica el potencial en la superficie del conductor. Otro ejemplo se tiene cuando en un problema de vibración estacionaria, especificamos la deflexión en la superficie del sólido o la membrana o la cuerda vibrante.

El problema de Dirichlet es y ha sido especialmente fructífero para la Matemática, pues intentando resolverlo se han desarrollado ramas del Análisis como son las Ecuaciones Diferenciales Parciales, las Ecuaciones Integrales, el Cálculo de Variaciones y últimamente la Probabilidad. Asociado a este problema están los nombres de los más ilustres matemáticos de los últimos dos siglos, como Gauss, Hilbert, Wiener y Poincaré, por sólo mencionar a algunos de ellos. En la siguiente sección daremos un panorama histórico de algunos de los métodos desarrollados para la solución de este problema.

El problema de Dirichlet también es llamado el primer problema de valores a la frontera de la Teoría del Potencial.

## 0.2. Panorama Histórico

En el siglo XIX y a principios del XX, muchos matemáticos atacaron el problema de Dirichlet, obteniendo resultados que se aplican para ciertas regiones, con fuertes restricciones en la forma que éstas deben tener y cómo debe ser su frontera. En casos muy simples (por ejemplo la bola), se dieron soluciones explícitas, en otros casos se mostró que la solución explícita podría ser encontrada, pero por lo complicado de los cálculos no se llegó a calcularla y en otros casos se demostraba únicamente la existencia de la solución sin dar ninguna información acerca de su forma explícita.

En todo caso siempre aparecían restricciones sobre la forma de la región, aún cuando durante mucho tiempo se pensaba que la solución debía existir para cualquier región. Un avance importante en el estudio del tema fue el haber encontrado regiones que no admiten solución. Apartir de este ejemplo, el enfoque del problema se modificó considerablemente y se avanzó mucho en la dirección de dar condiciones bajo las cuales el problema tiene solución.

A continuación se presentan las ideas básicas de los métodos más importantes. En toda esta sección  $G$  designará un conjunto abierto, conexo y acotado de  $\mathbb{R}^3$ .



I. Una de las direcciones en las que se ha desarrollado la búsqueda de la solución al problema de Dirichlet, ha sido en términos de la función de Green, la cual se inició precisamente con los trabajos de Green sobre electricidad y magnetismo.

Sea  $G \subset \mathbb{R}^3$  una región con frontera  $\partial G$  "lisa". Si  $u$  es una función armónica en una vecindad de  $\overline{G}$ , se demuestra a partir de la identidad de Green, que

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \left[ u(y) D_n \left( \frac{1}{|x-y|} \right) - \frac{1}{|x-y|} D_n u(y) \right] d_G(y) \quad (1)$$

donde  $dg$  representa el elemento de área en  $\partial G$  y  $D_n$  denota la derivación en la dirección normal a  $\partial G$ .

Así tenemos que el valor de  $u$  en un punto interior  $x \in G$  queda expresado en términos de los valores de  $u$  en  $\partial G$  y de sus derivadas normales.

Para eliminar las derivadas normales de  $u$  necesitamos una función auxiliar llamada función de Green de  $G$ :

$$G(x, y) : G \times G \rightarrow \mathbb{R}^*,$$

donde  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$  y está definida como

$$G(x, y) = \frac{1}{|x-y|} + v_x(y)$$

donde

- i.  $v_x$  es armónica en  $G$  (como función de  $y$ ) y admite derivada normal en  $\partial G$ .
- ii.  $G(x, \cdot)$  se anula en  $\partial G$ .
- iii.  $G(x, \cdot)$  es armónica en  $G - \{x\}$ .

$G(x, y)$  se llama función de Green con singularidad  $x$  en  $G$ . Si tal función existe, podemos mostrar que satisface la siguiente ecuación:

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} [u(y) D_n v_x(y) - v_x(y) D_n u(y)] d_G(y) \quad (2)$$

De (1) y de (2) obtenemos:

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} u(y) D_n G(x, y) d_G(y) \quad (3)$$

Y así para  $u$  armónica en una vecindad de  $\overline{G}$  tenemos una representación de  $u$  como promedio de sus valores en  $\partial G$ .

Trabajemos por el momento bajo la hipótesis de que la función de Green para  $G$  existe.

Sea  $u : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Definimos  $\tilde{u} : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} u(y) D_n G(x, y) d_G(y), & \text{si } x \in G \\ u(x), & \text{si } x \in \partial G \end{cases}$$

Nos preguntamos:

1. ¿ Es  $\tilde{u}$  armónica en  $G$  ?
2. ¿ Es cierto que  $\lim_{x \rightarrow y, x \in G} \tilde{u}(x) = u(y)$ , para todo  $y \in \partial G$  ?

Se muestra que bajo las hipótesis (i) a (iii) las respuestas son afirmativas, con lo cual el Problema de Dirichlet quedaría resuelto. Pero ¿ es cierto que cualquier región  $G$  tiene función de Green ?

Partiendo de consideraciones físicas, Green quedó convencido de que la respuesta era afirmativa. Esto se debe a que la función de Green como potencial electrostático es el resultado de lo siguiente: supongamos que  $\partial G$  es un conductor perfecto de electricidad y que se mantiene con potencial constante (y nulo). Si colocamos una partícula con carga unitaria en el punto  $x \in G$ , ésta induce una cierta carga sobre  $\partial G$ . Las cargas en  $x$  y en  $\partial G$  inducen un potencial en  $G - \{x\}$  dado por

$$\frac{1}{|x-y|} + v_x(y) = G_x(y)$$

potencial inducido                      potencial inducido por  
por  $x$                                       la carga que adquiere  $G$ .

y es claro que  $G_x(y)$  se anula en  $\partial G$ .

Refiriéndose a esto Kellogg dice: “Vemos aquí un excelente ejemplo de gran valor y del peligro del razonamiento intuitivo”. Posteriormente se mostró que una clase amplia de regiones tienen efectivamente función de Green, pero no toda región la tiene. Un caso en que  $G$  tiene función de Green es cuando  $G$  es una bola:

$$G = B_\rho(z) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - z| < \rho\}$$

y la solución explícita se dió en 1820. En efecto, dada  $u : \partial B_\rho(z) \rightarrow \mathbb{R}$  función continua y  $x \in B_\rho(z)$ , la fórmula de Poisson para la solución del problema de Dirichlet es:

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_{\partial B} \frac{\rho^2 - |x - z|^2}{|y - z|^2} u(y) dg(y).$$

Comparando con (3) vemos que

$$D_n G_B(x, y) = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\rho^2 - |x - z|^2}{|y - z|^2} \right].$$

Es importante hacer notar que la existencia de la función de Green no es más que un caso particular del problema de Dirichlet, o sea aquel en el cual

$$f(y) = \frac{1}{|x - y|} \quad (y \in \partial G, x \in G).$$

Encontrar una función armónica  $\tilde{f}$  en  $G$ , continua en  $\overline{G}$  y cuya restricción a  $\partial G$  sea  $f$ , equivalente a dar la función  $v_x$  que aparece como segundo sumando de la función de Green dada por el potencial total.

**II.** Gauss trató de encontrar una solución minimizando cierta integral. Es una idea parecida a la que Riemann desarrolló algunos años más tarde. Se puede mostrar que si una distribución de carga  $\mu$  está dada en términos de una densidad  $\rho \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^3)$  con soporte en  $E$ , y si  $u$  es el correspondiente potencial electrostático ( $u = G^\mu$ ), entonces la energía correspondiente es:

$$E(u) = \frac{1}{4\pi} \int \int \int_G \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3.$$

Como también se demuestra que  $u$  debe satisfacer la ecuación de Poisson  $\Delta u + 4\pi\rho = 0$ , resulta que de  $u$  podemos reconstruir  $\mu$  vía su densidad  $\rho$ . Luego entonces la configuración del equilibrio queda determinada si se logra minimizar la siguiente integral:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int \int \int_G |\text{grad } u|^2 dx_1 dx_2 dx_3,$$

y puede verificarse sin dificultad que la función minimizadora es armónica. Esta es la idea de Riemann que a grandes rasgos consiste en :

Sea  $\mathcal{F}$  la siguiente clase de funciones:

$$\mathcal{F} = \{ u : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in \mathcal{C}^2(G), u \text{ es continua en } \overline{G} \text{ y } u|_{\partial G} = f \},$$

donde  $f$  es una función continua definida en  $\partial G$ . Buscamos una función  $u_0 \in \mathcal{F}$  tal que

$$E(u_0) = \inf \{ E(u) \mid u \in \mathcal{F} \}.$$

Riemann pensó que esta función siempre existía, ya que  $E(u)$  toma valores positivos y por lo tanto el conjunto de reales  $\{E(u) \mid u \in \mathcal{F}\}$  tiene un ínfimo. Lo que no tomó en cuenta es el hecho de que el ínfimo no necesariamente corresponde a una función  $u \in \mathcal{F}$ . Fue Weierstrass quien hizo ver este error en el razonamiento de Riemann. Para ver esto más claramente consideremos el siguiente ejemplo en  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{F} = \{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ es continua en } [0, 1], u(0) = 0, u(1) = 1 \},$$

$$P(u) = \int_0^1 u^2(x) dx.$$

Claramente  $\inf \{ P(u) \mid u \in \mathcal{F} \} = 0$ . Basta tomar  $u_n = x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  y ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = 0$ ; sin embargo no existe ninguna función continua  $u$  en  $[0, 1]$ , tal que

$$\int_0^1 u^2(x) dx = 0, u(1) = 1.$$

A pesar del error que había en este razonamiento, este tipo de ideas han resultado muy fructíferas (cálculo de variaciones) y además Hilbert pudo mostrar en 1899 que bajo ciertas condiciones sobre  $\partial G$  el mínimo es alcanzado y en ese caso el problema de Dirichlet queda resuelto.

Neumann en 1870 fue el primero que logró dar un teorema de existencia riguroso pero con la hipótesis de que  $G$  sea convexo, lo cual es una condición muy restrictiva.

También se desarrolló un método alternativo debido a Schwarz, que consiste en resolver el problema para  $G$  sabiendo que  $G = G_1 \cup G_2$  y conociendo la solución del problema para  $G_1$  y  $G_2$  (la frontera de  $G$  estará formada en parte por la de  $G_1$  y en parte por la de  $G_2$ ).

**III.** Un método muy ingenioso para solucionar el Problema de Dirichlet y cuya motivación es a partir de consideraciones físicas es el Método de Barrido de Poincaré.

La idea es encontrar primero una función  $g$  continua en  $\overline{G}$  y cuya restricción a  $\partial G$  sea la función dada  $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ , e ir modificando esta función de manera que se vaya haciendo armónica en un subconjunto de  $G$  cada vez más grande hasta hacerla armónica en todo  $G$  sin modificar su valor en la frontera, o sea, ir “barriendo” la masa de la región hacia la frontera.

Veamos en qué consiste esta idea:

i. Sea  $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$  continua, tal que existe  $g : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $g$  es una función polinomial en  $(x_1, x_2, x_3)$  y tal que  $\Delta g \leq 0$  en  $G$ ,  $g|_{\partial G} = f$ .

ii. Se construye una sucesión de bolas  $\{B_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\cup_n B_n = G$  y se reacomoda la sucesión de bolas en la forma de  $B_1, B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, \dots$ , de tal modo que cada una aparezca una infinidad de veces.

Utilizando el hecho de que en una bola la solución ya se conoce, se construye la siguiente sucesión de funciones

$$F_n = \begin{cases} \text{la solución en } B_n \text{ de } F_{n-1}|_{\partial B_n} & \text{en } B_n \\ F_{n-1} & \text{en } G - B_n. \end{cases}$$

Se muestra que  $F_n$  satisface  $\Delta F_n \leq 0$  en  $(G - A)$  y  $F_n = 0$  en  $A = \cup_{i=1}^n B_i$  y  $F_n|_{\partial G} = f$ .

iii. Se muestra que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$  existe y es la solución del problema.

iv. Se quita la restricción de que  $\Delta g \leq 0$  y se prueba (i), (ii) y (iii) para cualquier polinomio  $g$  y después usando el Teorema de Aproximación de Weierstrass se demuestra para cualquier  $F$  continua en  $\overline{G}$

Con este método Poincaré llega a la conclusión de que el problema tiene solución siempre que, para cada punto  $x \in \partial G$ , exista una bola  $B$  contenida en el complemento de  $G$  tal que  $x \in \partial B$ . Una vez más aparecen restricciones acerca de  $G$  y vemos cómo sus propiedades geométricas son determinadas para poder encontrar una solución.

Todo esto lleva a los matemáticos a buscar dominios para los cuales no exista solución al problema.

Zaremba en 1911 encuentra un ejemplo muy sencillo, y que tuvo una gran repercusión en el desarrollo posterior del estudio del problema:

Sea

$$G = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < |x| < \rho\} = B_\rho(0) - \{0\},$$

$$\partial G = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = \rho\}$$

y

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| = \rho \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$f$  así definida es continua en  $\partial G$ . Se prueba en este caso que no existe una solución.

**IV.** El anterior ejemplo conduce a replantear el problema y a considerar una solución generalizada. Por la misma época (1923) en que realizaba sus estudios sobre el Problema de Dirichlet, Norbert Wiener (matemático norteamericano, 1894-1964), exitosamente coronaba una serie de esfuerzos tendientes a formular una teoría matemática del fenómeno conocido como movimiento browniano, que se refiere al movimiento perpetuo que tienen las partículas disueltas en un líquido, por ejemplo, raspadura de roca en agua, movimiento irregular que no parece responder a ninguna ley física (se recomienda al lector consultar [Ne], en donde encontrará una breve reseña histórica acerca de este fenómeno muy ilustrativa, pues presenta la evolución de las teorías acerca de él). Años más tarde (1944), Kakutani descubriría que este modelo matemático construido por Wiener, nos provee de un método, para promediar adecuadamente los valores de la función en la frontera en el Problema de Dirichlet. Así se obtiene la solución de dicho problema en cada punto del dominio donde se trabaje. Es decir, el modelo de Wiener para el movimiento browniano nos proporciona la familia  $\{\mu_x, x \in G\}$  de medidas armónicas necesaria para dar solución al problema en la forma

$$u(x) = \int_{\partial G} f d\mu_x,$$

familia cuya existencia se puede establecer independientemente, según lo había hecho ya el mismo Wiener.

De esta manera se inició un campo muy rico del Análisis Matemático que relaciona la Probabilidad

con la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales llamado Teoría Probabilística del Potencial. El trabajo de Wiener sobre el movimiento browniano estableció un importante precedente para hallar aplicaciones en Física, Ingeniería y Biología, y permitió formular un problema de cálculo de probabilidades en términos de la medida de Lebesgue, que utilizaría diez años más tarde Kolmogorov para la formalización del cálculo de probabilidades.

### 0.3. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet



Figura 1: Johan Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Nació: 13 de Febrero de 1805 en Düren, Francia (ahora Alemania)

Murió: 5 de Mayo de 1859 en Göttingen, Hanover (ahora Alemania)

La familia de Dirichlet era originaria de Richelet, cerca de Lieja (Bélgica). Esta es la razón de su nombre “Le jeune de Richelet” (el joven de Richelet).

Su padre era el cartero de Düren, un pueblo a medio camino entre Colonia y Aachen.

La pasión por las matemáticas de Dirichlet fue muy temprana. Cuentan que antes de empezar los estudios en el Gymnasium (con doce años) se gastaba su dinero en libros de matemáticas. En el Gymnasium fue un alumno excelente. Después de dos años en el Gymnasium, en Bonn, sus padres decidieron enviarlo al colegio de los jesuitas en Colonia, donde tuvo la suerte de tener como profesor a Ohm. A los 16 terminó sus estudios e inició los estudios universitarios en París, porque el nivel de las universidades alemanas no era bueno en aquellas épocas. Curiosamente, años más tarde, y en parte debido a Dirichlet, las universidades alemanas eran las mejores.

Dirichlet llegó a París llevando consigo el libro *Disquisitiones arithmeticae*, de Gauss. Dirichlet siempre

llevaba este libro consigo. Tuvo la suerte de tener como profesores a los principales matemáticos de la época Fourier, Laplace y Legendre.

En el verano de 1823 Dirichlet fue contratado por el general Maximiliano Sebastian Foy, para la educación de sus hijos. Vivía en su casa y era tratado como un miembro de la familia. Foy había sido un personaje importante en el ejército durante las guerras Napoleónicas. Se retiró después de la derrota de Waterloo y en 1819 fue elegido diputado, por el partido liberal.

El primer trabajo de Dirichlet que le dio gran fama, el cual estaba concentrado en el último Teorema de Fermat para  $n = 5$ . Para este momento, los casos  $n = 3$  y  $n = 4$  ya se habían resuelto. En 1825 obtuvo éxito en probar que es cierto para el caso donde los números  $x, y, z$  eran divisible por 10. Este documento atrajo mucho la atención y uno de sus críticos fue Andrien-Marie Legendre. En seguida de la presentación Legendre logró completar la prueba para  $n = 5$ . Dirichlet también llegó a completar la prueba pero sólo después de que Legendre publicará su solución completa para  $n = 5$ , posteriormente realizó la prueba completa para el caso  $n = 14$ , también escribió un documento importante sobre reciprocidad bicuadrática cuyo principal resultado fue extendido por Gauss.

En 1825 murió el general Foy y Dirichlet decidió regresar a Alemania. Dirichlet tenía un problema para dedicarse a la enseñanza en Alemania, porque no tenía el título de doctorado lo que era imprescindible para obtener la habilidad para enseñar y además no sabía latín. El problema lo resolvió la universidad de Colonia, concediéndole un título honorífico de doctor, lo que le permitió obtener la habilitación para enseñar. Hubo mucha controversia en la universidad por el nombramiento de Dirichlet.

Desde 1827, Dirichlet enseñó en la universidad de Breslau, pero el nivel de esta universidad era muy bajo y con la ayuda de Alexander von Humboldt (que era su amigo, y ya le había ayudado en su traslado desde París) consiguió que lo nombrasen profesor del Colegio Militar y poco después lo propusieron como profesor de la Universidad de Berlín, donde ejerció desde 1828 a 1855. En 1831, Dirichlet fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias de Berlín y le mejoraron el sueldo en la universidad, lo que le permitió casarse. Se casó con Rebeca Mendelshon (una de las dos hermanas de Félix Mendelsohn, el famoso compositor).

Dirichlet fue amigo toda su vida de Jacobi que enseñaba en Königsberg, ambos se influyeron mutuamente en sus investigaciones sobre teoría de números, donde hizo grandes contribuciones a la matemática. También trabajó en el uso de series para aproximar funciones.

La definición de función usada comúnmente en la actualidad en el cálculo elemental, es esencialmente la dada por Dirichlet en 1837. En ese año prueba la conjetura de Gauss sobre la proyección aritmética de primos, que aclaró un resultado hecho antes por Legendre. Su trabajo más tarde ayudaría a la fundamentación de la teoría del análisis numérico y a la teoría algebraica de números.

Otro trabajo incluye teoría del potencial, integración de ecuaciones hidrodinámicas, convergencia de



series trigonométricas, y series de Fourier.

A la muerte de Gauss en 1855 ofrecieron a Dirichlet su puesto en la universidad de Göttingen. Dirichlet no aceptó inmediatamente la propuesta, sino que la usó para obtener mejores condiciones en la universidad de Berlín. Pidió al ministro de Cultura de Prusia que le permitiese finalizar sus clases en el Colegio Militar, pero la tardanza en la respuesta, animó a Dirichlet a aceptar el puesto en la universidad de Göttingen. Fernand Eisentein, Leopold Kronecker y Rudolf Lipschitz fueron sus estudiantes. La tranquilidad de Göttingen agradaba a Dirichlet. Tenía tiempo para investigar y alumnos para investigaciones avanzadas. Sin embargo, esa felicidad no le duro mucho tiempo. En 1858, durante una conferencia en Suiza sufrió un ataque al corazón. Dirichlet regresó a Göttingen y durante la convalescencia su mujer murió de un accidente. Él murió un tiempo después en mayo de 1859.



# Capítulo 1

## Funciones Armónicas

### 1.1. Propiedades básicas de Funciones Armónicas

La palabra armónica se usa para describir una cualidad del sonido. Funciones armónicas son llamadas así por la conexión (indirecta) que ellas tienen con la fuente de sonido producida por una cuerda vibrante. Los físicos llaman al movimiento de un punto en una cuerda vibrante movimiento armónico. Tal movimiento puede ser descrito por medio de las funciones seno y coseno; en este contexto las funciones seno y coseno son llamadas armónicas. En el análisis de Fourier clásico, las funciones en el círculo unitario son expresadas en términos de senos y cosenos. A principios de 1900 la palabra armónica fue aplicada no sólo para polinomios homogéneos con Laplaciano cero, sino también a las soluciones de la ecuación de Laplace. Ya vimos en la introducción la gran importancia que tienen las funciones armónicas.

En este capítulo veremos varias caracterizaciones de ellas, empezaremos con una definición de función armónica y sus propiedades elementales, después en la Sección 1.2 veremos como una función armónica en  $\mathbb{C}$  queda determinada en cualquier punto  $z \in \mathbb{C}$  por los valores que toma en la frontera de una bola  $D$  de centro 0, y de hecho esta condición caracteriza a las funciones armónicas en  $\mathbb{C}$ . Es más, la integral de Poisson nos dice que podemos conocer el valor de una función armónica en  $\mathbb{C}$  en un punto cualquiera de la bola, con sólo conocer sus valores en la frontera de dicha bola.

Es por ésto que las funciones armónicas y la ecuación de Laplace  $\Delta u = 0$  son tan importantes en la Física-Matemática, ya que describen adecuadamente situaciones en equilibrio de fenómenos físicos, tales como la distribución de temperatura de un sólido, la distribución de carga eléctrica, etc. (en el Capítulo 2, nos ocupamos de las propiedades de familias de tales funciones).

La integral de Poisson (Sección 1.2) nos dice además que el problema de Dirichlet, que consiste en encontrar una extensión armónica de una función continua, definida en la frontera de un conjunto

abierto, tiene solución para el caso de la bola, y nos da la solución explícitamente.

Por otra parte, otra ecuación que tiene también interés en la Física-Matemática, es la ecuación de Poisson

$$\Delta u + f = 0, \text{ con } f \geq 0.$$

Las soluciones de clase  $\mathcal{C}^2$  que satisfacen

$$\Delta u \geq 0,$$

son un ejemplo de funciones subarmónicas. En el Capítulo 2 se dará una definición precisa de ellas y además se estudiarán sus propiedades, así como las de las familias de funciones superarmónicas.

**Definición 1.1** Sea  $B(a, r) = \{z \mid |z - a| < r\}$  la bola abierta con centro en  $a$  y radio  $r$ ,  $\bar{B}(a, r) = \{z \mid |z - a| \leq r\}$  la bola cerrada y su frontera es denotada por  $\partial B$ .

**Definición 1.2** Si  $G$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$  entonces una función

$u : G \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica si  $u$  tiene derivadas parciales continuas hasta de orden 2, y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Esta ecuación se llama la ecuación de Laplace.

**Definición 1.3** Si  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica, entonces  $u = \operatorname{Re} f$  y  $v = \operatorname{Im} f$  se llaman conjugadas armónicas.

Otra forma de definir las es la siguiente: Sean  $u, v$  armónicas en  $G$ . Si  $u, v$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $G$ , decimos que  $v$  es conjugada armónica de  $u$ . Se aplica el recíproco. Las armónicas conjugadas son únicas salvo alguna constante.

**Teorema 1.1** Una condición necesaria y suficiente para que una función  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  sea analítica en un dominio  $G$  es que  $u, v$  sean funciones armónicas conjugadas en  $G$ .

**Ejemplo 1.1** Juega un papel importante la parte real e imaginaria de la función

$$f(z) = \frac{\rho e^{i\varphi} + (z - z_0)}{\rho e^{i\varphi} - (z - z_0)},$$

la cual es analítica en el disco  $B(z_0, \rho)$ . Escribiendo  $z - z_0 = re^{i\theta}$ , denotando la parte real e imaginaria de  $f(z)$  en coordenadas polares por  $u(r, \theta)$  y  $v(r, \theta)$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta) &= \frac{\rho e^{i\varphi} + r e^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi} - r e^{i\theta}} = \frac{(\rho e^{i\varphi} + r e^{i\theta})(\rho e^{-i\varphi} - r e^{-i\theta})}{(\rho e^{i\varphi} - r e^{i\theta})(\rho e^{-i\varphi} - r e^{-i\theta})} \\
&= \frac{\rho^2 - r^2 + 2i\rho r \operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \operatorname{cos}(\theta - \varphi)} \\
&= \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \operatorname{cos}(\theta - \varphi)} + i \frac{2\rho r \operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \operatorname{cos}(\theta - \varphi)}
\end{aligned}$$

*Ambas expresiones tienen el mismo denominador*

$$(\rho e^{i\theta} - r e^{i\varphi})(\rho e^{-i\varphi} - r e^{-i\theta}) = |\rho e^{i\varphi} - r e^{i\theta}|^2 = |\rho e^{i\varphi} - (z - z_0)|^2,$$

*igual a cuadrado de la distancia entre el punto  $z$  y el punto  $z_0 + \rho e^{i\varphi}$  en el círculo  $|z - z_0| = \rho$ .*

Lo siguiente en preguntarnos es: ¿cada función  $u(x, y)$  armónica en  $G$  puede considerarse como la parte real (o imaginaria) de una función analítica  $f(z)$  en  $G$ ? En otras palabras, ¿podemos encontrar siempre una función armónica  $v(x, y)$  en  $G$  la cual es una armónica conjugada de  $u(x, y)$ ; es decir la cual junto con  $u(x, y)$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, como se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 1.2** *Dada una función  $u(x, y)$  armónica en un dominio simplemente conexo  $G$ , entonces salvo por una constante real, la función*

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right),$$

*es la única conjugada armónica de  $u$  en  $G$ , salvo una constante real. La integral de línea es evaluada a lo largo de cualquier curva rectificable  $L \subset G$  que une  $(x_0, y_0)$  con  $(x, y)$ . Similarmente salvo una constante imaginaria, la función*

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = u(x, y) + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

*es la única función analítica en  $G$ , que tiene a  $u(x, y)$  como su parte real.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

Así

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (1.1)$$

Donde  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  es la condición de independencia de trayectoria en el Teorema de Green.

La solución general puede diferir de la ecuación (1.1) tan sólo por una constante aditiva. ■

**Teorema 1.3** Sea  $u(x, y)$  una función armónica en  $G$ , y  $v(x, y)$  una conjugada armónica de  $u(x, y)$ . Sea  $z_0 \in G$ , y  $\rho(z_0) = d(z_0, \partial G)$ . Entonces  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  tienen un desarrollo trigonométrico de la forma:

$$u(x, y) = u(r, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \operatorname{sen} n\theta) r^n, \quad (1.2)$$

$$v(x, y) = v(r, \theta) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \operatorname{sen} n\theta) r^n, \quad (1.3)$$

en el disco  $B(z_0, \delta) \subset \rho(z_0)$ , donde  $z - z_0 = re^{i\theta}$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ,  $z$  en  $G$ . Como  $z_0 \in G$  y  $f$  es analítica, representable en serie de potencias alrededor de  $z_0$  con radio de convergencia  $\rho(z_0)$ . Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

y  $a_n = \alpha_n + i\beta_n$  con  $\operatorname{Re} a_n = \alpha_n$ ,  $\operatorname{Im} a_n = \beta_n$ . Sustituyendo en la expansión de  $f(z)$  se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n + i\beta_n) (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [(\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \operatorname{sen} n\theta) + i(\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \operatorname{sen} n\theta)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \operatorname{sen} n\theta] r^n + i \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \operatorname{sen} n\theta]. \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 1.4** Dadas dos series trigonométricas, como en el teorema anterior, sea

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n + i\beta_n|}}, \quad (1.4)$$

entonces ambas series convergen absoluta y uniformemente en compactos del disco  $B(z_0, R)$  a un par de funciones armónicas conjugadas entre sí.

DEMOSTRACIÓN: Usando el Teorema (B.9), el Teorema (B.10) y el Teorema (B.11) se tiene el resultado. ■

**Lema 1.1** Las partes real e imaginaria de  $\frac{\rho e^{i\varphi} + (z - z_0)}{\rho e^{i\varphi} - (z - z_0)}$  se expresan en forma de series como:

$$\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) \quad (1.5)$$

$$\frac{2\rho r \operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \operatorname{sen} n(\theta - \varphi). \quad (1.6)$$

DEMOSTRACIÓN: Con  $z - z_0 = re^{i\theta}$  y  $r < \rho$  se tiene  $\left| \frac{z - z_0}{\rho e^{i\varphi}} \right| < 1$  y

$$\begin{aligned} \frac{\rho e^{i\varphi} + (z - z_0)}{\rho e^{i\varphi} - (z - z_0)} &= \frac{-[\rho e^{i\varphi} - (z - z_0)] + 2\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi} - (z - z_0)} = -1 + \frac{2\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi} - (z - z_0)} \\ &= -1 + 2 \left[ \frac{1}{1 - \frac{(z - z_0)}{\rho e^{i\varphi}}} \right] \\ &= -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{\rho^n} e^{-in\varphi} = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^n} e^{in\theta} e^{-in\varphi} \\ &= -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n e^{in(\theta - \varphi)} = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n e^{in(\theta - \varphi)} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n (\cos n(\theta - \varphi) + i \operatorname{sen} n(\theta - \varphi)), \end{aligned}$$

tomando la parte real y la parte imaginaria se obtiene el resultado. ■

**Proposición 1.1** Si  $u : G \rightarrow \mathbb{C}$  es armónica, entonces  $u$  es infinitamente diferenciable.

DEMOSTRACIÓN: Fijamos  $z_0 = x_0 + iy_0$  en  $G$  y sea  $\delta$  tal que  $B(z_0; \delta) \subset G$ . Entonces  $u$  tiene una armónica conjugada  $v$  en  $B(z_0; \delta)$ . Esto es,  $f = u + iv$  es analítica y por lo tanto infinitamente diferenciable en  $B(z_0; \delta)$ , de lo que se sigue que  $u$  es infinitamente diferenciable. ■

La proposición anterior da una propiedad de las funciones armónicas con las funciones analíticas. El siguiente resultado es análogo con la Fórmula Integral de Cauchy.

**Teorema 1.5** (Teorema del Valor Medio). Sea  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica y sea  $\bar{B}(a; r) \subset G$ . Entonces

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean  $r < r'$  en  $\bar{B}(a; r) \subset B(a, r') \subset G$  y sea  $f$  una función analítica en  $B(a, r)$  tal que  $u = \operatorname{Re} f$ , usando la “Fórmula Integral de Cauchy” se tiene que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

tomando la parte real de la igualdad anterior, se termina la demostración. ■

**Definición 1.4** Una función continua  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  tiene la propiedad del valor medio (PVM) si siempre que  $\bar{B}(a; r) \subset G$ , entonces

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

En la siguiente sección mostraremos que cualquier función continua definida en una región y la cual tiene la PVM debe ser una función armónica. Una de las principales herramientas que usamos en este resultado es el “Principio del Módulo Máximo” para funciones armónicas.

**Teorema 1.6** *Principio del Módulo Máximo (Primera versión)*

Sea  $G$  una región y supongamos que  $u$  es una función real valuada continua en  $G$  con la PVM. Si hay un punto  $a$  en  $G$  tal que  $u(a) \geq u(z)$ , para todo  $z$  en  $G$  entonces  $u$  es una función constante.

DEMOSTRACIÓN: Sea el conjunto  $A$  definido por

$$A = \{z \in G \mid u(z) = u(a)\}$$

Ya que  $u$  es continua el conjunto  $A$  es cerrado en  $G$ . Si  $z_0 \in A$ , sea  $r$  tal que  $\bar{B}(z_0; r) \subset G$ . Supongamos que hay un punto  $b$  en la bola  $B(z_0, r)$ , tal que  $u(b) \neq u(a)$ , entonces  $u(b) < u(a)$ . Por continuidad,  $u(z) < u(a) = u(z_0)$  para todo  $z$  en una vecindad de  $b$ . En particular, si  $\rho = |z_0 - b|$ , y  $b = z_0 + \rho e^{i\beta}$ ,  $0 \leq \beta < 2\pi$  hay un intervalo apropiado  $I$  de  $[0, 2\pi]$  tal que  $\theta \in I$  y  $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) < u(z_0)$ , para toda  $\theta \in I$ . Por lo tanto, por la PVM

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta < u(z_0),$$

lo cual es una contradicción. Así  $B(z_0, r) \subset A$  y  $A$  es abierto. Por la conexidad de  $G$ ,  $A = G$ . ■

Denotaremos por  $\partial_\infty G$  a la frontera extendida de  $G$ .

**Teorema 1.7** *Principio del Módulo Máximo (Segunda versión)*

Sea  $G$  una región y sean  $u$  y  $v$  funciones continuas real valuadas en  $G$  las cuales tienen la PVM. Si en cada punto  $a$  en  $\partial_\infty G$ , se cumple

$$\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq \liminf_{z \rightarrow a} v(z),$$

entonces  $u(z) < v(z)$  para toda  $z$  en  $G$  ó  $u = v$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $a \in \partial_\infty D$  fijo. Para cada  $\delta > 0$  sea  $G_\delta = G \cap B(a; \delta)$ . Entonces por la hipótesis,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} [\sup \{u(z) \mid z \in G_\delta\} - \inf \{v(z) \mid z \in G_\delta\}] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} [\sup \{u(z) \mid z \in G_\delta\} + \sup \{-v(z) \mid z \in G_\delta\}] \\ &\geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \{u(z) - v(z) \mid z \in G_\delta\}. \end{aligned}$$

Así, el  $\limsup_{z \rightarrow a} [u(z) - v(z)] \leq 0$ , para cada  $a$  en  $\partial_\infty G$ . Luego es suficiente demostrar el teorema bajo la suposición de que  $v(z) = 0$ , para toda  $z$  en  $G$ . Esto es, suponer

$$\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq 0, \tag{1.7}$$

para toda  $a$  en  $\partial_\infty G$  y mostrar que  $u(z) < 0$  para toda  $z$  en  $G$  ó  $u \equiv 0$ . Por la primera versión del Principio del Módulo Máximo es suficiente mostrar que  $u(z) \leq 0$  para toda  $z$  en  $G$ .



Supongamos que  $u$  satisface la ecuación (1.7) y tiene un punto  $b$  en  $G$  con  $u(b) > 0$ . Sea  $\epsilon > 0$  elegido tal que  $u(b) > \epsilon$ , y sea  $B = \{z \in G \mid u(z) \geq \epsilon\}$ . Como  $a \in \partial_\infty G$ , entonces la ecuación (1.7) implica que hay un  $\delta = \delta(a)$  tal que  $u(z) < \epsilon$  para toda  $z$  en  $G \cap B(a; \delta)$ . Usando el Lema de la Cubierta de Lebesgue ([Co] Pág. 21), puede encontrarse un  $\delta > 0$  el cual es independiente de  $a$ , tal que si  $z \in G$  y  $d(z, \partial_\infty G) < \delta$ , entonces  $u(z) < \epsilon$ . Así,

$$B \subset \{z \in G \mid d(z; \partial_\infty G) > \delta\}.$$

Luego  $B$  es un conjunto acotado; ya que  $B$  es cerrado, este es compacto. Así si  $B \neq \emptyset$ , hay un punto  $z_0$  en  $B$  tal que  $u(z_0) \geq u(z)$  para toda  $z$  en  $B$ . Como  $u(z) < \epsilon$  para toda  $z$  en  $G - B$ , esto dice que  $u$  alcanza su máximo valor en un punto en  $G$ , entonces  $u$  es constante. Pero esta constante debe ser  $u(z_0)$  la cual es positiva y contradice a la ecuación (1.7). ■

**Corolario 1.1** *Sea  $G$  una región acotada y supongamos que  $w : G^- \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $G$  que satisface la PVM en  $G$ . Si  $w(z) = 0$  para toda  $z$  en  $\partial G$ , entonces  $w(z) = 0$  para toda  $z$  en  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN: Primero considere  $w = u$  y  $v = 0$  como en el Teorema 1.7. Así  $w(z) \leq 0$  para toda  $z$  ó  $w(z) \equiv 0$ . Ahora tomamos  $w = v$  y  $u = 0$  en el Teorema 1.7; así ocurre que  $w(z) > 0$  para toda  $z$  o  $w(z) \equiv 0$ . Ya que ambas se cumplen,  $w \equiv 0$ . ■

## 1.2. Núcleo de Poisson

El material de esta sección está fundamentado en los trabajos del francés, Siméon-Denis Poisson, quien vivió de 1781 a 1840. Se le reconoce por haber contribuido a aplicar el análisis matemático a las disciplinas de la electricidad, el magnetismo y la elasticidad. Se puede encontrar su nombre en teoría de probabilidades (la distribución de Poisson) o en electrostática (la ecuación de Poisson).

Sea  $B(0, 1)$  el disco unitario en el plano complejo centrado en el origen, y sea  $\Gamma = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$  su frontera (Figura 1.1)

**Definición 1.5** *La función*

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (1.8)$$

para  $0 \leq r < 1$ , y  $-\infty < \theta < \infty$ , se llama el núcleo de Poisson.

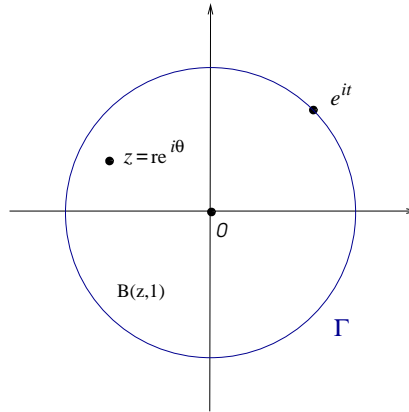


Figura 1.1: Círculo unitario

Sea  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq r < 1$ ; entonces

$$\begin{aligned} \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} &= (1 + z)(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\ &= P_r(\theta). \end{aligned}$$

También

$$\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1 + re^{i\theta} - re^{-i\theta} - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2}.$$

Así

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right). \quad (1.9)$$

**Proposición 1.2** El núcleo de Poisson satisface lo siguiente:

- (a)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$ ;
- (b)  $P_r(\theta) > 0$  para todo  $\theta$ ,  $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$  y  $P_r$  es periódica en  $\theta$  con periodo  $2\pi$ ;
- (c)  $P_r(\theta) < P_r(\delta)$  si  $0 < \delta < |\theta| \leq \pi$ ;

(d) Para cada  $\delta > 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\theta) = 0$  uniformemente en  $\theta$  para  $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ .

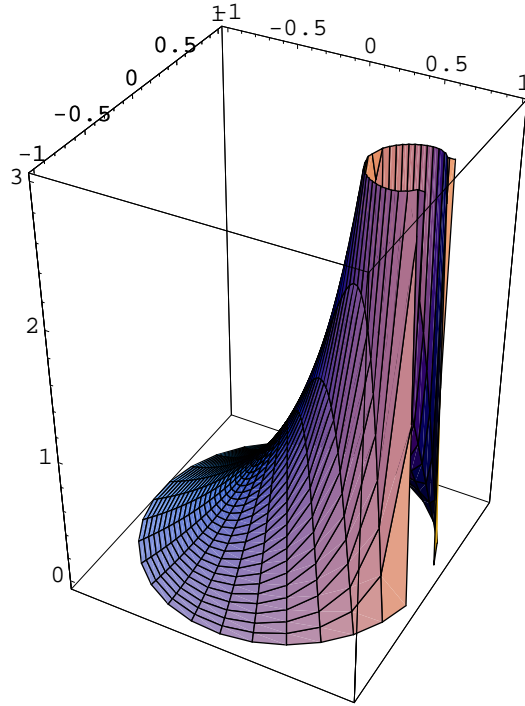


Figura 1.2: Núcleo de Poisson  $(\theta, r) \rightarrow P_r(\theta)$

DEMOSTRACIÓN: (a) Para un valor fijo de  $r$ ,  $0 \leq r < 1$ , la serie (1.8) converge uniformemente en  $\theta$ . Así

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta = 1,$$

(b) De la ecuación (1.9)  $P_r(\theta) = (1 - r^2)|1 - e^{in\theta}|^{-2} > 0$ , pues  $r < 1$ . El resto de (b) también es una consecuencia directa de la ecuación (1.9).

(c) Sea  $0 < \delta < \theta \leq \pi$  y definimos  $f : [\delta, \theta] \rightarrow \mathbb{R}$ , por  $f(t) = P_r(t)$ . Usando la ecuación (1.9), un cálculo rutinario muestra que  $f'(t) < 0$  así que  $f(\delta) > f(\theta)$ .

(d) Mostremos que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} [\sup \{P_r(\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\}] = 0.$$

Por la parte (c),  $P_r(\theta) \leq P_r(\delta)$  si  $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ , así es suficiente mostrar que  $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\theta) = 0$ . Pero, de nuevo esto es una consecuencia inmediata de la ecuación (1.9). Esto no es el caso para  $\theta = 0$ , donde el correspondiente límite es  $\infty$ , ver Figura 1.2. ■

Antes de dar una aplicación del núcleo de Poisson, observemos que en la proposición anterior  $P_r(\theta)$  se considera como una familia de funciones de  $\theta$ , indexadas por  $r$ . Cuando  $r$  se aproxima a 1, estas

funciones convergen a cero uniformemente en cualquier subintervalo de  $[-\pi, \pi]$  el cuál no contiene  $\theta = 0$  parte (d). No obstante en la parte (a) esto es válido.

**Definición 1.6** Una integral de la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\rho, \varphi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi,$$

con “núcleo de Poisson”

$$\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} = \operatorname{Re} \frac{\rho e^{i\varphi + (z - z_0)}}{\rho e^{i\varphi} - (z - z_0)}, \quad (1.10)$$

es llamada la fórmula integral de Poisson.

Observe que cuando  $\rho = 1$  se obtiene  $P_r(\theta)$ . Una caracterización importante de las funciones armónicas es que ellas se pueden representar como integrales de Poisson:

**Teorema 1.8** Sea  $u(x, y)$  una función armónica en un dominio  $G$ , y  $v(x, y)$  una conjugada armónica de  $u(x, y)$ . Sea  $z_0 \in G$  y sea  $\Delta = \Delta(z_0)$  la distancia entre  $z_0$  y la frontera de  $G$ . Entonces  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  se pueden representar de la siguiente manera

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi \quad (1.11)$$

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \varphi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi, \quad (1.12)$$

para  $r < \rho < \Delta$  y  $\theta$  arbitrario. Además

$$v(r, \theta) = \beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) \frac{2\rho r \operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi, \quad (1.13)$$

en término de  $u(r, \theta)$ .

DEMOSTRACIÓN: Cambiando  $r$  por  $\rho$  ( $\rho < \Delta$ ),  $\theta$  por  $\varphi$  y  $n$  por  $m$  en la ecuación (1.2) se tiene

$$u(\rho, \varphi) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\varphi - \beta_m \operatorname{sen} m\varphi) \rho^m \quad (1.14)$$

Usando la convergencia uniforme de (1.14) en  $\varphi$  para cada  $\rho < \Delta$ , multiplicando la ecuación (1.2) por  $\cos n\varphi$  e integrando término a término con respecto a  $\varphi$  entre 0 y  $2\pi$ . El resultado es

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) d\varphi \quad (1.15)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (n \geq 1). \quad (1.16)$$

Similarmente, multiplicando la ecuación (1.14) por  $\operatorname{sen} n\varphi$  e integrando término a término con respecto a  $\varphi$  entre los mismos límites, se obtiene

$$-\beta_n = \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) \operatorname{sen} n\varphi \, d\varphi \quad (n \geq 1). \quad (1.17)$$

Sustituyendo 1.15, 1.16 y 1.17 en 1.2 y 1.3 se tiene que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) \, d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) \, d\varphi, \quad (1.18)$$

$$v(r, \theta) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \operatorname{sen} n(\theta - \varphi) \, d\varphi. \quad (1.19)$$

Las fórmulas (1.11) y (1.13) se obtienen del Lema 1.1 después de multiplicar las series (1.5) y (1.6) por

$$\frac{1}{2\pi} u(\rho, \varphi)$$

integrando término a término con respecto a  $\varphi$  de 0 a  $2\pi$  para  $r$  fija y  $\rho$  ( $r < \rho$ ), y comparando los resultados con (1.18) y (1.19). Por el Teorema 1.2,  $v(r, \theta)$  es definida salvo por una constante real  $\beta_0$ . Además, como la ecuación (1.11) es cierta para una función armónica arbitraria en  $G$ , se puede reemplazar  $u(r, \theta)$  por  $v(r, \theta)$  y se tiene la ecuación (1.12). ■

El siguiente teorema indica que el Problema de Dirichlet puede ser resuelto en el disco unitario.

**Teorema 1.9** *Sea  $G = B(0, 1)$  con frontera  $\Gamma$  y supongamos que  $\mu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , entonces la función definida por*

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} \, d\varphi. \quad (1.20)$$

*cumple:*

(a)  $u(\rho, \varphi) = \mu(\varphi)$  para  $\varphi$  en  $\Gamma$ ;

(b)  $u(\rho, \varphi)$  es armónica en  $G$ .

DEMOSTRACIÓN: Primero se probará que la integral (1.20) define una función armónica en  $G$ . El razonamiento aquí es esencialmente el inverso del que se utiliza para probar el Teorema 1.8. Según el Lema 1.1, si  $r < \rho$ , al multiplicar las series (1.5) y (1.6) por  $\frac{\mu(\varphi)}{2\pi}$  e integrando término a término con

respecto a  $\varphi$  de 0 a  $2\pi$  se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \right] r^n \cos n\theta \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \right] r^n \sin n\theta \right\} \\
&= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) r^n,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

donde por el Teorema 1.8 y las ecuaciones (1.15) y (1.17), obtenemos

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad -\beta_n = \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n \geq 1) \tag{1.22}$$

En particular,

$$|\alpha_n + i\beta_n| = \left| \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \right| \leq \frac{1}{\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} |\mu(\varphi)| d\varphi,$$

por lo tanto

$$\rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\mu(\varphi)| d\varphi}}{\sqrt[n]{|\alpha_n + i\beta_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n + i\beta_n|}} = R$$

con  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n + i\beta_n|}}$ . Así por la ecuación (1.21) y el Teorema 1.4 se tiene que  $u(r, \theta)$  es armónica en  $G$ .

Ahora se probará que la función  $u(r, \theta)$  definida por (1.20) se aproxima a  $\mu(\varphi_0)$ , cuando el punto  $(r, \theta)$  en  $G$  se aproxima a un punto fijo  $(\rho, \varphi_0)$  en  $\Gamma$ .

Si  $u(r, \theta) \equiv 1$  en la ecuación (1.11), se obtiene la fórmula

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = 1. \tag{1.23}$$

Usando la ecuación (1.23) y estimando la siguiente diferencia se tiene que

$$u(r_n, \theta_n) - \mu(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mu(\varphi) - \mu(\varphi_0)] \frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2 + r_n^2 - 2\rho r_n \cos(\theta_n - \varphi)} d\varphi \tag{1.24}$$

donde  $\{(r_n, \theta_n)\}$  es una sucesión arbitraria de puntos en  $G$  que converge al punto en la frontera  $(\rho, \varphi_0)$ .

Como  $\mu(\varphi)$  es uniformemente continua en  $\Gamma$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe un número  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$|\mu(\varphi) - \mu(\varphi_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.25}$$

siempre que

$$|\varphi - \varphi_0| < 2\delta. \tag{1.26}$$

Tomando  $\delta$  tal que (1.26) implique (1.25) y tan pequeño que  $\varphi_0 - 2\delta > 0$ ,  $\varphi_0 + 2\delta < 2\pi$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |u(r_n, \theta_n) - \mu(\varphi_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varphi_0 - 2\delta} \dots \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0 - 2\delta}^{\varphi_0 + 2\delta} \dots \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0 + 2\delta}^{2\pi} \dots \right|, \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde en cada caso los puntos denotan el resto de la integral (1.24). Usando (1.25) y (1.23) en el término de en medio de la ecuación (1.27), se tiene lo siguiente

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0 - 2\delta}^{\varphi_0 + 2\delta} \dots \right| < \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2 + r_n^2 - 2\rho r_n \cos(\theta_n - \varphi)} d\varphi = \frac{\epsilon}{2} \quad (1.28)$$

Para los otros dos términos, se elige  $n$  suficientemente grande tal que  $|\theta_n - \varphi_0| < \delta$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varphi_0 - 2\delta} \dots \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0 + 2\delta}^{2\pi} \dots \right| &\leq 2M \frac{1}{2\pi} \frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2 + r_n^2 - 2\rho r_n \cos \delta} \left( \int_0^{\varphi_0 - 2\delta} d\varphi + \int_{\varphi_0 + 2\delta}^{2\pi} d\varphi \right) \\ &< 2M \frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2 + r_n^2 - 2\rho r_n \cos \delta}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

donde

$$M = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |\mu(\varphi)|,$$

ahora usando que

$$\begin{aligned} \cos(\theta_n - \varphi) &< \cos \delta \\ \frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2 + r_n^2 - 2\rho r_n \cos(\theta_n - \varphi)} &< \frac{\rho^2 - r_n^2}{\rho^2 + r_n^2 - 2\rho r_n \cos \delta} \end{aligned} \quad (1.30)$$

si  $|\theta_n - \varphi_0| < \delta$  y  $\varphi \in [0, \varphi_0 - 2\delta]$  ó  $\varphi \in [\varphi_0 + 2\delta, 2\pi]$ . El lado derecho de (1.29) se aproxima a cero cuando  $r_n \rightarrow \rho$ . Por lo tanto, para  $n$  suficientemente grande,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varphi_0 - 2\delta} \dots \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0 + 2\delta}^{2\pi} \dots \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (1.31)$$

(naturalmente, se asume que  $n$  es suficientemente grande tal que  $|\theta_n - \varphi_0| < \delta$ ). Comparando (1.27), (1.29) y (1.31) se encuentra que

$$|u(r_n, \theta_n) - \mu(\varphi_0)| < \epsilon$$

para  $n$  suficientemente grande, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [u(r_n, \theta_n) - \mu(\varphi_0)] = 0, \quad (1.32)$$

donde  $\{(r_n, \theta_n)\}$  es una sucesión de puntos en  $G$  aproximándose a  $(\rho, \varphi_0)$ . La ecuación (1.32) es cierta si todos o algunos de los puntos  $(r_n, \theta_n)$  que se encuentran en  $\Gamma$ , entonces podemos usar la continuidad de  $\mu(\varphi)$ , (recordando que  $u(\rho, \varphi) = \mu(\varphi)$ , por definición). Es decir,  $u(r, \theta)$  es continua en  $\overline{G}$ . ■

La fórmula integral de Poisson, dada por la ecuación (1.20) proporciona el valor de la función armónica  $u(re^{i\theta})$  en todo punto del interior de un círculo de radio  $\rho$  siempre y cuando conozcamos los valores  $u(z)$  en la frontera de dicho círculo.

**Corolario 1.2** Si  $u : D^- \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua la cual es armónica en  $D$ , entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it}) dt,$$

para  $0 \leq r < 1$  y para toda  $\theta$ . Además,  $u$  es la parte real de la función analítica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) dt.$$

DEMOSTRACIÓN: La primera parte del corolario es una consecuencia directa del Teorema 1.9. La segunda parte se sigue del hecho de que  $f$  es analítica y la fórmula (1.9). ■

**Corolario 1.3** Sean  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\rho > 0$  y  $h$  una función continua real valuada en  $\bar{B}(a, \rho)$ ; entonces existe una única función armónica continua en  $B(a; \rho)$  y con  $w(z) = h(z)$  para  $|z - a| = \rho$ . ■

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $f(e^{i\theta}) = h(a + \rho e^{i\theta})$ ; entonces  $f$  es continua en  $\partial D$ . Si  $u : D^- \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que  $u$  es armónica en  $D$  y  $u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ , entonces es fácil mostrar que  $w(z) = u\left(\frac{z-a}{\rho}\right)$  es la función deseada en  $\bar{B}(a; \rho)$ .

**Teorema 1.10** Si  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua la cual tiene la propiedad del valor medio (PVM), entonces  $u$  es armónica.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $a \in G$  y sea  $\rho > 0$  tal que  $\bar{B}(a; \rho) \subset G$ ; es suficiente probar que  $u$  es armónica en  $B(a; \rho)$ . Por el Corolario 1.3 existe una función continua  $w : \bar{B}(a; \rho) \rightarrow \mathbb{R}$  la cual es armónica en  $B(a; \rho)$  y  $w(a + \rho e^{i\theta}) = u(a + \rho e^{i\theta})$  para toda  $\theta$ . Ya que  $u - w$  satisface la PVM y  $(u - w)(z) = 0$  para  $|z - a| = \rho$ , por el Corolario 1.1 tenemos que  $u \equiv w$  en  $B(a; \rho)$ ; en particular,  $u$  debe ser armónica. ■ En la prueba de este teorema se utiliza el Corolario 1.3, el cual se refiere a funciones armónicas en un disco arbitrario, así es deseable derivar la fórmula del núcleo de Poisson en un disco arbitrario. Para esto solamente es necesario hacer un cambio de variable en la fórmula (1.9).

Si  $R > 0$  se substituye  $\frac{r}{R}$  por  $r$  en la ecuación (1.9). Así se obtiene

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos \theta + r^2} \tag{1.33}$$

para  $0 \leq r < R$  para todo  $\theta$ . Si  $u$  es continua en  $\bar{B}(a; R)$  y armónica en  $B(a; R)$ , entonces

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos \theta + r^2} \right] u(a + Re^{i\theta}) dt. \tag{1.34}$$

Ahora la ecuación (1.33) también se puede escribir como

$$\frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - re^{i\theta}|^2}$$



y  $R - r \leq |Re^{it} - re^{i\theta}| \leq R + r$ . Por lo tanto

$$\frac{R - r}{R + r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos \theta + r^2} \leq \frac{R + r}{R - r}.$$

Si  $u \geq 0$  entonces la ecuación (1.34) proporciona la siguiente.

**Desigualdad de Harnack** Si  $u : \bar{B}(a; R) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y armónica en  $B(a; R)$ , con  $u \geq 0$ , entonces para  $0 \leq r < R$  y para toda  $\theta$ ,

$$\frac{R - r}{R + r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R + r}{R - r} u(a).$$

**Definición 1.7** Sea  $G$  un conjunto abierto en  $\mathbb{C}$  y  $(\Omega, d)$  un espacio métrico, entonces designamos por  $\mathcal{C}(G, \Omega)$  el conjunto de todas las funciones continuas de  $G$  en  $\Omega$ .

**Definición 1.8** Si  $G$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$  entonces  $\text{Har}(G)$  es el espacio de las funciones armónicas en  $G$ . Ya que  $\text{Har}(G) \subset \mathcal{C}(G, \mathbb{R})$  este tiene una métrica heredada de  $\mathcal{C}(G, \mathbb{R})$ .

**Teorema 1.11 (Teorema de Harnack)**

Sea  $G$  una región de  $\mathbb{C}$

- (a) El espacio métrico  $\text{Har}(G)$  es completo.
- (b) Si  $\{u_n\}$  es una sucesión en  $\text{Har}(G)$  tal que  $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ , entonces  $u_n(z) \rightarrow \infty$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $G$  ó  $\{u_n\}$  converge en  $\text{Har}(G)$  a una función armónica.

DEMOSTRACIÓN:

- (a) Para mostrar que  $\text{Har}(G)$  es completo, es suficiente mostrar que es un subespacio cerrado de  $\mathcal{C}(G, \mathbb{R})$ . Así, sea  $\{u_n\}$  una sucesión en  $\text{Har}(G)$ , tal que  $u_n \rightarrow u$  en  $\mathcal{C}(G, \mathbb{R})$ . Entonces por el siguiente lema: Sea  $\gamma$  una curva rectificable en  $\mathbb{C}$  y sean  $F_n$  y  $F$  funciones continuas en  $\{\gamma\}$ . Si  $F = u - \lim F_n$  en  $\{\gamma\}$ , entonces

$$\int_{\gamma} F = \lim \int_{\gamma} F_n.$$

sigue que  $u$  tiene la PVM y así por el Teorema 1.10,  $u$  debe ser armónica.

- (b) Se puede considerar que  $u_1 \geq 0$  (si no es así, considerar  $\{u_n - u_1\}$ ). Sea  $u(z) = \sup\{u_n(z) : n \geq 1\}$  para cada  $z$  en  $G$ . Así para cada  $z$  en  $G$  una de las dos siguientes posibilidades ocurre:  $u(z) = \infty$  o  $u(z) \in \mathbb{R}$  y  $u_n(z) \rightarrow u(z)$ .

Se define

$$A = \{z \in G \mid u(z) = \infty\}$$

$$B = \{z \in G \mid u(z) < \infty\},$$

entonces  $G = A \cup B$  y  $A \cap B = \emptyset$ . Se va a demostrar que  $A$  y  $B$  son abiertos. Si  $a \in G$ , sea  $R > 0$  tal que  $\overline{B}(a, R) \subset G$ . Por la desigualdad de Harnack se tiene

$$\frac{R - |z - a|}{R + |z - a|} u_n(a) \leq u_n(z) \leq \frac{R + |z - a|}{R - |z - a|} u_n(a), \quad (1.35)$$

para toda  $z$  en  $B(a, R)$  y para toda  $n \geq 1$ . Si  $a \in A$  tenemos  $u_n(a) \rightarrow \infty$ , entonces por la ecuación (1.35) (parte izq.) se tiene que  $u_n(z) \rightarrow \infty$ , para toda  $z$  en  $B(a, R)$ . Esto es,  $B(a, R) \subset A$ , así  $A$  es abierto. Similarmente si  $a \in B$  entonces por la parte derecha de la ecuación (1.35) se tiene que  $u(z) < \infty$ , para  $|z - a| < R$ . Por lo tanto  $B$  es abierto.

Como  $G$  es conexo,  $A = G$  o  $B = G$ . Supongamos que  $A = G$ ; es decir  $u \equiv \infty$ . De nuevo si  $\overline{B}(a, R) \subset G$  y  $0 < \rho < R$ , entonces  $M = (R - \rho)(R + \rho)^{-1} > 0$  y de la ecuación (1.35) se tiene que  $M u_n(a) \leq u_n(z)$  para  $|z - a| \leq \rho$ . Por lo tanto  $u_n(z) \rightarrow \infty$  uniformemente para  $z$  en  $\overline{B}(z, \rho)$ . En otras palabras, se ha mostrado que para cada  $a$  en  $G$  hay un  $\rho > 0$ , tal que  $u_n(z) \rightarrow \infty$  uniformemente para  $z$  en cualquier subconjunto compacto.

Ahora sea  $B = G$ . Si  $\rho < R$ , entonces como antes, hay una constante  $N$  tal que sólo depende de  $a$  y  $\rho$  con  $M u_n(a) \leq u_n(z) \leq u_n(a)$  para  $|z - a| \leq \rho$  y para toda  $n$ . Así si  $m \leq n$

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n(z) - u_m(z) &\leq N u_n(a) - M u_m(a) \\ &\leq C [u_n(a) - u_m(a)] \end{aligned} \quad (1.36)$$

para alguna constante  $C$ . Luego,  $\{u_n(z)\}$  es una sucesión de Cauchy uniformemente en  $\overline{B}(a, \rho)$ . Esto sigue que  $\{u_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $Har(G)$  y así por la parte (a), debe de converger a una función armónica. Como  $u_n(z) \rightarrow u(z)$ , ésta  $u$  es una función armónica. ■

### 1.3. Funciones Armónicas en el Disco Unitario

El problema que discutiremos en esta sección, parte del trabajo del Francés Simeon Poisson (1781-1840) y de la función  $P_r(\theta) := 2P(z)$  (ó en coordenadas polares  $P(r, \theta)$ ) que lleva el nombre de Núcleo Poisson.

Como ya vimos en la Sección 1.2. Si  $z = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_r(\theta) &= \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) = \operatorname{Re} \frac{1 + z}{2(1 - z)}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Como

$$\frac{(1 + z)(1 - \bar{z})}{|1 - z|^2} = \frac{1 - r^2 + 2ir \operatorname{sen} \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2},$$

entonces  $P(r, \theta)$  es la parte real de una función analítica, luego representa una función armónica en el disco unitario. Es más, usando la identidad  $\sin^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$ , se tiene que  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$  y se observa que es posible reescribir el núcleo de Poisson como

$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \frac{1 - r^2}{2[(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\theta/2)]}.$$

Ahora usando que  $\text{Div}(\nabla)P \equiv \text{tr}(\nabla \circ \nabla)P = \Delta P$ , es decir de la traza de la matriz es el Laplaciano

$$\begin{aligned} (r, \theta) &\xrightarrow{g} (r \cos \theta, r \sin \theta) \rightarrow (x, y) \xrightarrow{P} P(x, y) \\ P(r, \theta) &= P \circ g(r, \theta) \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} & \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ ,  $P = P(x, y)$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y} \sin \theta \quad (1.38)$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial P}{\partial y} r \cos \theta. \quad (1.39)$$

Ahora  $\nabla P$  en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \nabla P &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial P}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial P}{\partial y} r \cos \theta \end{pmatrix} \\ \nabla \circ \nabla P &= \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} & \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} & \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} P = \\ &\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial P}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial P}{\partial y} r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y} \sin \theta & \frac{\partial P}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial P}{\partial y} r \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \sin^2 \theta \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial P}{\partial x \partial y} r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - r \left( \frac{\partial P}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y} \sin \theta \right) \\ &= r^2 \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial P}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \cos^2 \theta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y} \sin \theta \right) \right], \end{aligned} \quad (1.40)$$

entonces

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial P}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \cos^2 \theta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y} \sin \theta \right). \quad (1.41)$$

Sumando las ecuaciones (1.40) y (1.41) se tiene

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y} \sin \theta \right),$$

luego por la ecuación (1.38) es claro que:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}.$$

Por lo tanto, la ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} P + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial r} \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta P) = 0 \end{aligned}$$

así se tiene que la función  $\frac{\partial P}{\partial \theta} := P_\theta$  es también armónica en el disco unitario.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \operatorname{sen}^2(\theta/2)} \right) \\ &= - \frac{(1-r^2)}{4} \frac{8r \operatorname{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2)}{[(1-r)^2 + 4r \operatorname{sen}^2(\theta/2)]^2} \\ &= - \frac{r(1-r^2) 2 \operatorname{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2)}{[(1-r)^2 + 4r \operatorname{sen}^2(\theta/2)]^2} \\ &= - \frac{r(1-r^2) \operatorname{sen} \theta}{[(1-r)^2 + 4r \operatorname{sen}^2(\theta/2)]^2} \end{aligned}$$

de lo cual se concluye que

$$\lim_{r \rightarrow 1} P_\theta(r, \theta) = 0 \quad \text{para cada } \theta.$$

Usando la ecuación (1.37)

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta, \quad P_\theta(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \operatorname{sen} n\theta. \quad (1.42)$$

Sea  $\|w(r, \cdot)\|_\infty$  la norma uniforme sobre círculos concéntricos de radio  $r$ , i.e.,

$$\|w(r, \cdot)\|_\infty = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |w(r, \theta)|$$

Lo anteriormente desarrollada junto con los siguientes resultados nos permitirán enunciar un teorema de unicidad para funciones armónicas.

**Definición 1.9** Sea  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{C}$  y sean  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\psi : E \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones. Dado  $a \in E$ , si existe  $U_a$  vecindad de  $a$  y  $A > 0$  tal que  $|\varphi(x)| \leq A|\psi(x)|$  para todo  $x \in U_a$ , escribiremos  $\varphi(x) = O(\psi(x))$ , cuando  $x \rightarrow a$ , y si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0 \quad \text{escribiremos} \quad \varphi(x) = O^*(\psi(x)).$$

**Definición 1.10** Sea  $L$  un subconjunto de  $\mathbb{C}$  y sean  $\varphi : L \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\psi : L \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones. Dado  $a \in L$ , si existe  $U_a$  vecindad de  $a$  y  $\alpha(x)$ , tal que  $\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x)$ , en una vecindad  $U_a$ ,  $x \neq a$ , de  $a$  con  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , entonces escribiremos  $\varphi(x) = o(\psi(x))$ , cuando  $x \rightarrow a$ ,

$$\text{Si } \psi(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in U_a \text{ implica } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$$

A partir de la ecuación (1.42), veremos que cuando  $r \rightarrow 1$ ,

$$\|P(r, \cdot)\|_{\infty} = O((1-r)^{-1}), \quad \|P_{\theta}(r, \cdot)\|_{\infty} = O((1-r)^{-2}). \quad (1.43)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{P(r, \cdot)}{\frac{1}{1-r}} &= (1-r)P(r, \cdot) = (1-r) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \right) \\ &= \frac{1}{2}(1-r) + (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta. \end{aligned}$$

Como se estima el límite cuando  $r \rightarrow 1$  y el límite del primer sumando es cero, sólo se necesita estimar el límite del segundo sumando.

$$\begin{aligned} \left| (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \right| &\leq (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} r^n |\cos n\theta| \leq (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \\ &= (1-r) \left[ \frac{1}{1-r} - 1 \right] = r; \end{aligned}$$

luego la constante de la Definición 1.9 es en este caso  $A = 1$  y se tiene la primera igualdad de (1.43).

Ahora se estima para  $P_{\theta}(r, \cdot)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_{\theta}(r, \cdot)}{\frac{1}{(1-r)^2}} \right| &= |(1-r)^2 P_{\theta}(r, \cdot)| \leq (1-r)^2 \left| \left( - \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \sin n\theta \right) \right| \\ &\leq (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n r^n |\sin n\theta| \\ &\leq (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n r^n. \end{aligned}$$

$$\text{Como } \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Así se tiene que

$$(1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n r^n = (1-r)^2 r \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} = (1-r)^2 \frac{r}{(1-r)^2} = r,$$

luego la constante que de la Definición 1.9 es para este caso  $A = 1$  y se tiene la segunda igualdad de (1.43).

Usando la desigualdad  $\text{sen } \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ , para  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  y también observando que para  $2\theta = 1-r$ , se tienen las desigualdades equivalentes

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{(1-r)}{2} &\geq \frac{(1-r)}{\pi} \\ \text{sen}^2 \left( \frac{1-r}{2} \right) &\geq \frac{(1-r)^2}{\pi^2} \\ \left[ (1-r)^2 + 4r \text{sen}^2 \left( \frac{1-r}{2} \right) \right]^2 &\geq \left[ (1-r)^2 + 4r \frac{(1-r)^2}{\pi^2} \right]^2 \\ \frac{1}{\left[ (1-r)^2 + 4r \frac{(1-r)^2}{\pi^2} \right]^2} &\geq \frac{1}{\left[ (1-r)^2 + 4r \text{sen}^2 \left( \frac{1-r}{2} \right) \right]^2} \\ \frac{1}{(1-r)^4 \left( 1 + \frac{8r}{\pi^2} + \frac{16r^2}{\pi^4} \right)} &\geq \frac{1}{\left[ (1-r)^2 + 4r \text{sen}^2 \left( \frac{1-r}{2} \right) \right]^2} \\ \frac{\pi^4}{(1-r)^4 (\pi^4 + 8r\pi^2 + 16r^2)} &\geq \frac{1}{\left[ (1-r)^2 + 4r \text{sen}^2 \left( \frac{1-r}{2} \right) \right]^2}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$P_{\theta}(r, \theta) = - \frac{r(1-r^2) \text{sen} \left( \frac{1-r}{2} \right)}{\left[ (1-r)^2 + 4r \text{sen}^2 \left( \frac{1-r}{2} \right) \right]^2} \geq - \frac{r(1-r^2) \text{sen} \left( \frac{1-r}{2} \right) \pi^4}{(1-r)^4 (\pi^4 + 8r\pi^2 + 16r^2)}.$$

Así

$$\liminf_{r \rightarrow 1} (1-r)^2 |P_{\theta}(r, \theta)| \geq \liminf_{r \rightarrow 1} \left| - \frac{r(1+r)\pi^3}{r + \frac{8r}{\pi^2} + \frac{16r^2}{\pi^4}} \right| \geq \frac{4}{\pi}.$$

Por lo tanto

$$\liminf_{r \rightarrow 1} (1-r)^2 |P_{\theta}(r, \theta)| \geq \frac{4}{\pi}.$$

$\| P_{\theta}(r, \cdot) \|_{\infty} \neq o((1-r)^{-2})$  cuando  $r \rightarrow 1$ . Lo anteriormente visto nos sugiere una condición para deducir el siguiente teorema sobre funciones armónicas en el disco unitario.

**Teorema 1.12** *Sea  $w(r, \theta)$  una función armónica en  $D$ , supongamos que*

$$(i) \lim_{r \rightarrow 1} w(r, \theta) = 0 \text{ para toda } \theta$$

$$(ii) \| w(r, \cdot) \|_{\infty} = o((1-r)^{-2}), \text{ cuando } r \rightarrow 1,$$

entonces  $w(r, \theta)$  es idénticamente cero en  $D$ .

Este teorema fue probado en 1963 por Victor Shapiro [Sh]. Si se cambia en el teorema el inciso (i) la frase, “para toda  $\theta$ ”, por “para toda  $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ ”, la conclusión del teorema resulta falsa, como  $P_\theta(r, \theta)$  lo muestra. También, si “o” en la condición (ii) es reemplazada por “O” la conclusión del teorema de nuevo resulta falsa, como  $P_\theta(r, \theta)$  lo demuestra.

La prueba requiere nociones de topología y el Teorema de Segunda Categoría de Baire. Especialmente, se usa el hecho de que un subconjunto cerrado  $E$  de la línea real  $\mathbb{R}$ , no puede escribirse como una unión numerable de conjuntos cerrados que son densos en ninguna parte en  $E$ . A continuación nos referimos a este resultado como el Teorema de Baire.

DEMOSTRACIÓN: Como  $w$  es la parte real de una función analítica en  $D$ .

$$w(r, \theta) = \operatorname{Re}(f(re^{i\theta})) = \operatorname{Re} \left[ c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \right],$$

donde  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  es la expansión en serie de Taylor de  $f$  en  $D$ . Escribiendo  $c_n = a_n - i b_n$ , se obtiene:

$$w(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n. \quad (1.44)$$

la cual es una serie uniformemente convergente en  $(r, \theta)$ , para  $0 \leq r \leq r_0 < 1$ , donde  $r_0$  es fijo en  $[0, 1)$ . Como

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n \right\} = 0 \quad \text{para todo } \theta \in [0, 2\pi]. \quad (1.45)$$

Cantor mostró que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) \right\} = 0 \quad (1.46)$$

( [Kl] Pág. 970) excepto para un número finito de  $\theta$  con  $0 \leq \theta < 2\pi$ , lo cual implica que los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  son cero para toda  $n$ . Si se demuestra que la condición en la ecuación (1.44) implica una conclusión similar para los coeficientes de  $w(r, \theta)$  en la ecuación (1.44), se habrá probado el teorema. En otras palabras, lo que debemos hacer es mejorar las técnicas de Cantor (las cuales fueron inspiradas por un trabajo de Riemann sobre series trigonométricas). Por simplicidad, se asume que  $w$  toma el valor de cero en el origen, i.e.,

$$w(0, \theta) = 0 \quad \text{para todo } \theta \in [0, 2\pi]$$

La cual es una propiedad que también tiene  $P_\theta(r, \theta)$ . Usando la ecuación (1.44) se tiene que

$$w(0, \theta) = a_0 = 0$$

y por lo tanto

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) r^k. \quad (1.47)$$

Observando que para  $0 < r < 1$ ,

$$w(r, \theta) \cos n\theta = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta \cos n\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta \cos n\theta).$$

Por la convergencia uniforme y la ortogonalidad se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} w(r, \theta) \cos n\theta \, d\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} [a_k \cos k\theta \cos n\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta \cos n\theta] r^k \, d\theta \\ &= r^n a_n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = r^n a_n \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2n\theta \right) \, d\theta \\ &= r^n a_n \frac{2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Así

$$r^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(r, \theta) \cos n\theta \, d\theta.$$

Tomando  $r = (1 - \frac{1}{n})$  y por la hipótesis (ii) del teorema afirmamos que  $(1 - \frac{1}{n})^n a_n = o(n^2)$ .

En efecto:

$$\|w(r, \theta)\|_{\infty} = o((1-r)^{-2}), \quad \text{cuando } r \rightarrow 1.$$

Dado  $\epsilon = \frac{\epsilon'}{2e} > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que si  $0 < 1 - r < \delta$ , entonces se cumple

$$\frac{\|w(r, \theta)\|_{\infty}}{(1-r)^2} < \epsilon.$$

Es decir

$$(1-r)^2 \|w(r, \theta)\|_{\infty} < \epsilon \quad \text{si } 0 < 1 - r < \delta.$$

Ahora

$$\begin{aligned} |r^n a_n| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(r, \theta) \cos n\theta \, d\theta \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |w(r, \theta) \cos n\theta| \, d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|w(r, \theta)\|_{\infty} \int_0^{2\pi} |\cos n\theta| \, d\theta \leq \|w(r, \theta)\|_{\infty} \frac{2\pi}{\pi} = 2 \|w(r, \theta)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Luego para  $0 < 1 - r < \delta$

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{r^n} 2 \|w(r, \theta)\|_{\infty} \\ |a_n| &< \frac{1}{r^n} \frac{2\epsilon}{(1-r)^2}. \end{aligned}$$



Para  $n \in \mathbb{N}$  con  $\frac{1}{n} < \delta$

$$|a_n| < \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \frac{\epsilon}{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2} = \frac{2\epsilon}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}}.$$

O sea

$$\frac{|a_n|}{n^2} < \frac{2\epsilon}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \quad \text{y como } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e},$$

entonces

$$\frac{|a_n|}{n^2} < 2e\epsilon = \epsilon',$$

es decir  $a_n = o(n^2)$ .

Con un argumento similar es posible obtener que  $b_n = o(n^2)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se define las funciones  $w_1$  y a  $W$  como sigue

$$w_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)}{n} r^n$$

y

$$W(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)}{n^2} r^n.$$

Nótese que  $w_1$  y  $W$  son funciones armónicas y por lo tanto continuas. (Ver Sección 1.1 Teorema 1.3).

Además

$$\frac{\partial w_1(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{r} w_1(r, \theta), \quad \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{r} w_1(r, \theta). \quad (1.48)$$

De (1.48) y la hipótesis (i) del teorema, se deduce que ambas  $w_1(r, \theta)$  y  $W(r, \theta)$  satisfacen el Criterio de Abel, cuando  $r \rightarrow 1$  y para  $\theta$  fijo. En particular, el límite finito

$$\lim_{r \rightarrow 1} W(r, \theta) = W(\theta) \quad \text{existe para toda } \theta,$$

y  $W(\theta)$  es una función periódica, de período  $2\pi$ . (La función  $-W(r, \theta)$  es llamada función de Riemann asociada con  $w(r, \theta)$ ). Se establece la prueba del teorema considerando los siguientes tres hechos de la teoría de series trigonométricas de Riemann [Zy].

**Hecho 1.1** Si  $W(\theta)$  es continua en el intervalo abierto  $(\alpha, \beta)$ , entonces  $W(\theta)$  es una función lineal en  $(\alpha, \beta)$ .

**Hecho 1.2** Si  $W(\theta)$  es continua en el intervalo abierto  $(\alpha, \beta)$ , entonces  $W(\theta)$  es continua por la derecha de  $\alpha$  y por la izquierda de  $\beta$ .

**Hecho 1.3** Si  $W(\theta)$  es una constante, entonces  $\lim_{r \rightarrow 1} W(r, \theta) = W(\theta)$  uniformemente en  $\theta$ .

Juntos los Hechos 1.1 y 1.2, implican que  $W(\theta)$  es una función lineal en un intervalo cerrado  $[\alpha, \beta]$ . Siguiendo con la prueba del teorema, se observa de (1.48) que prevalece la siguiente situación:

**Hecho 1.4** Si  $w(r, \theta)$  es uniformemente acotada para  $\theta$  en un conjunto  $E$  y para  $\frac{1}{2} \leq r < 1$ , entonces  $\lim_{r \rightarrow 1} W(r, \theta) = W(\theta)$  uniformemente en  $E$ .

DEMOSTRACIÓN: Usando que  $\frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{1}{r} w(r, \theta)$  de (1.48); y tomando  $r < c_r < r' < 1$ . Por el Teorema del Valor Medio existe  $r < c_r < r'$  tal que

$$w_1(r, \theta) - w_1(r', \theta) = \frac{\partial w_1(c_r, \theta)}{\partial r} (r - r') = \frac{1}{c_r} w(c_r, \theta) (r - r')$$

y como se tiene por hipótesis que  $|w(r, \theta)| \leq M$ , para todo  $\theta \in E$  y  $\frac{1}{2} \leq r < 1$ , entonces

$$|w_1(r, \theta) - w_1(r', \theta)| = \frac{1}{c_r} |w(c_r, \theta) (r - r')| \leq 2M |r - r'|, \text{ para todo } \theta \in E,$$

es decir satisface la condición de Lipschitz uniformemente y también se cumple la condición de Cauchy de existencia de límite uniforme para  $w_1(r, \theta)$ , uniformemente para  $\theta \in E$  en el punto  $r = 1$ , pues dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \frac{\epsilon}{4M}$  tal que si  $0 < 1 - r' < \delta$ ,  $0 < 1 - r < \delta$ , entonces

$$|w_1(r, \theta) - w_1(r', \theta)| \leq 2M |r - r'| \leq 2M \delta = \frac{2M\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \text{ para todo } \theta \in E. \quad (1.49)$$

Por lo tanto  $\lim_{r \rightarrow 1} w_1(r, \theta) = w_1(\theta)$  es uniforme con respecto de  $\theta$ .

En la estimación (1.49) si  $r' \rightarrow 1$ , se tiene:

$$|w_1(r, \theta) - w_1(\theta)| < \epsilon, \text{ para todo } \theta \in E \text{ y } 0 < 1 - r < \delta. \quad (1.50)$$

Para  $\epsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < 1 - r < \delta$ , entonces

$$|w_1(\theta)| - |w_1(r, \theta)| \leq |w_1(r, \theta) - w_1(\theta)| < 1, \text{ para } \theta \in E.$$

Así  $|w_1(\theta)| < 1 + |w_1(r, \theta)|$ . Si  $R = 1 - \frac{\delta}{2}$  se tiene que

$$|w_1(\theta)| < 1 + |w_1(R, \theta)|, \text{ para todo } \theta \in E.$$

Sea  $\tilde{M} = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} w_1(R, \theta)$ , entonces  $|w_1(\theta)| < 1 + \tilde{M}$ , para todo  $\theta \in E$ .

Por lo tanto  $w_1$  está uniformemente acotada en  $E$ .

Finalmente usando que  $\frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{r} w_1(r, \theta)$  de (1.48) y realizando de nuevo el procedimiento anterior puede concluirse que  $W(r, \theta)$  es uniformemente acotada en  $E$ . ■

De la ecuación (1.50) se tiene:

**Proposición 1.3** Si  $w(r, \theta)$  es uniformemente acotada para  $\theta$  en un conjunto  $E$  y para  $\frac{1}{2} \leq r < 1$ , entonces  $\lim_{r \rightarrow 1} w_1(r, \theta) = w_1(\theta)$  uniformemente en  $E$ .

Nótese que la demostración del teorema se completa si se verifica que

$$W(\theta) \text{ es continua en un intervalo abierto } (0, 2\pi). \quad (1.51)$$

Pues, por el Hecho 1.2,  $W(\theta)$  es entonces continua por la derecha de 0 y por la izquierda de  $2\pi$  y por ser periódica, ésta es continua sobre toda la línea. El Hecho 1.1 garantiza que  $W(\theta) \equiv c$ , una constante, para toda  $\theta$  en  $\mathbb{R}$  y por la definición de  $W(r, \theta)$  y el Hecho 1.3, cuando  $r \rightarrow 1^-$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(r, \theta) d\theta \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(\theta) d\theta = c.$$

Por lo tanto  $W(\theta) \equiv 0$ . Consecuentemente,

$$\frac{a_n r^n}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} W(r, \theta) \cos n\theta d\theta \rightarrow 0,$$

cuando  $r \rightarrow 1$ , así los coeficientes cumplen  $a_n = 0$  para toda  $n$ . Similarmente,  $b_n = 0$  para toda  $n$  y el teorema es demostrado, a partir de la verificación (1.51). Para mostrar que (1.51) es cierta, se necesita topología de conjuntos y teoría de segunda categoría que ya se había mencionado al inicio de esta sección. Para  $m = 1, 2, \dots$ , se define el conjunto

$$F_m = \{\theta \in [0, 2\pi] \mid g(\theta) \leq m\}, \quad (1.52)$$

donde

$$g(\theta) = \sup_{0 \leq r < 1} |w(r, \theta)|.$$

Porque  $w(r, \theta)$  es una función (conjuntamente) continua de  $r$  y  $\theta$ , se ve que  $g(\theta)$  es una función semicontinua inferiormente.

En efecto: se tiene por hipótesis que  $\lim_{r \rightarrow 1} w(r, \theta) = 0$  para toda  $\theta$ , es decir, dado  $\frac{\epsilon}{2} > 0$  existe  $\delta'(\epsilon, \theta) > 0$ , tal que si  $|r - 1| < \delta'$ , entonces  $|w(r, \theta)| < \frac{\epsilon}{2}$  para toda  $\theta$ . Sean  $\theta$  y  $\tilde{\theta} \in [0, 2\pi]$  con  $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta = 1 - \delta'$ , donde  $\theta$  está fijo.

$$\begin{aligned} |g(\theta) - g(\tilde{\theta})| &= \left| \sup_{0 \leq r < 1} |w(r, \theta)| - \sup_{0 \leq r < 1} |w(r, \tilde{\theta})| \right| \\ &\leq \left| \sup_{0 \leq r < 1} |w(r, \theta)| \right| + \left| \sup_{0 \leq r < 1} |w(r, \tilde{\theta})| \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $g(\theta)$  es semicontinua inferiormente y por consiguiente  $F_m$  es un conjunto cerrado para cada  $m$  (es decir si  $\{\theta_n\} \subset F_m$  y el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\theta_n\} = \theta$ , entonces  $\theta \in F_m$ ). Usando la hipótesis (i) del teorema se tiene que

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \cap F_m) \text{ para cada subconjunto cerrado } E \text{ de } [0, 2\pi]. \quad (1.53)$$

Nótese que  $E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \cap F_m)$  y la otra contención  $E \supset \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \cap F_m)$  se debe a que  $E \subset [0, 2\pi] = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ . El siguiente resultado llamado Teorema de Baire ayudará a demostrar el Hecho 5.

**Teorema 1.13** Sea  $M$  un espacio métrico completo. Si  $M = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ , con  $F_m$  cerrado para toda  $m \in \mathbb{N}$ , entonces existe al menos un índice  $m$  con  $\text{int } F_m \neq \emptyset$ .

Aplicando el teorema anterior a la descomposición (1.53) se tiene:

**Hecho 1.5** Si  $E$  es un subconjunto cerrado no vacío de  $[0, 2\pi]$ , entonces hay un intervalo abierto  $J$  y un índice  $m_0$ , tal que  $E \cap J$  es no vacío y  $E \cap J$  está contenido en  $E \cap F_{m_0}$ .

Por el Teorema de Baire existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{int}(E \cap F_{m_0}) \neq \emptyset$ . Sea  $J = (\alpha, \beta)$  y  $A := \text{int}(E \cap F_{m_0})$

$$J \cap A = \bigcup_{m_0=1}^{\infty} [\text{int}(E \cap F_{m_0}) \cap J] \neq \emptyset$$

$$E \cap J = \bigcup_{m_0=1}^{\infty} (E \cap F_n) \cap J$$

$$J \cap A \neq \emptyset \text{ implica } J \cap E \neq \emptyset.$$

Se afirma que  $E \cap J \subset E \cap F_{m_0}$

$$J \subset \text{int}(E \cap F_{m_0}) \subset J \cap (E \cap F_{m_0})$$

$$J \subset \text{int}(E \cap F_{m_0}) \subset \text{int } F_{m_0} \subset F_{m_0}.$$

Por lo tanto  $J \subset F_{m_0}$ .

Aplicando (1.52), se observa que  $w(r, \theta)$  es uniformemente acotada para  $\theta$  en  $E \cap F_{m_0}$  y  $0 \leq r < 1$ .

Por el Hecho 1.4 se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 1} W(r, \theta) = W(\theta) \text{ uniformemente en } E \cap J. \quad (1.54)$$

Se define a

$$Z = \{\theta \in (0, 2\pi) : W \text{ no es continua en } \theta\}. \quad (1.55)$$

Notando que si se muestra que  $Z$  es vacío, por (1.51) se completará la prueba del teorema.

Supongamos lo contrario, es decir  $Z$  no es un conjunto vacío. Primero veamos que el Hecho 1.2 afirma que  $Z$  no tiene puntos aislados. Por el Hecho 1.5 aplicamos (1.54) a  $E = [\alpha, \beta]$ , para  $\alpha$  y  $\beta$  arbitrarios con  $0 < \alpha < \beta < 2\pi$  y demostraremos la siguiente afirmación.

**Afirmación 1.1**  $\bar{Z}$  es denso en ninguna parte en  $[0, 2\pi]$ , es decir que  $\text{int } \bar{Z} = \emptyset$ .

DEMOSTRACIÓN: Supongase que  $\bar{Z}$  no es denso en ninguna parte, entonces  $\text{int } \bar{Z} \neq \emptyset$ , es decir existe  $\theta_0 \in \bar{Z}$  y  $\delta > 0$  tal que  $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta) \subset \bar{Z}$ , entonces  $\bar{I} = [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \subset \bar{Z}$ . Por el Hecho 1.5, existe  $J$  intervalo abierto tal que  $\bar{I} \cap J \neq \emptyset$ ,  $\bar{I} \cap J \subset \bar{I} \cap F_{m_0}$ , pero como

$$I \subset \bar{I} \subset \bar{Z} \text{ entonces } I \cap J \subset I \subset \bar{I} \subset \bar{Z}$$

Como  $\emptyset \neq I \cap J$  es abierto entonces  $I \cap J \cap Z \neq \emptyset$  y esto contradice la definición de  $Z$ , por lo tanto  $\overline{Z}$  es denso en ninguna parte. Por consiguiente,  $\overline{Z}$  es un conjunto perfecto, no vacío, que no contiene intervalos. Ahora aplicando el Hecho 1.5 y (1.54) de nuevo, esta vez con  $E = \overline{Z}$ , vemos que hay un intervalo cerrado  $[\alpha, \beta]$  y  $\theta_0 \in Z$  con  $0 < \alpha < \theta_0 < \beta < 2\pi$  tal que

$$W|_{[\alpha, \beta] \cap Z} \text{ es continua en } \theta_0 \quad (1.56)$$

En efecto, sea  $\theta \in (\overline{Z} \cap [\alpha, \beta]) \subset F_{m_0}$ , entonces  $\lim_{r \rightarrow 1} W(r, \theta) = W(\theta)$ , para todo  $\theta \in [\alpha, \beta] \cap \overline{Z}$ .

Es decir, dado  $\frac{\epsilon}{3} > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < 1 - r < \delta$ , entonces

$$|W(r, \theta) - W(\theta)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } \theta \in [\alpha, \beta] \cap \overline{Z} \quad (1.57)$$

Ahora usando que  $W(r, \theta)$  es continua cuando  $0 \leq r < 1$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Dado  $\frac{\epsilon}{3} > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que si  $0 \leq |r - \tilde{r}| < \delta$ ,  $0 \leq |\theta - \tilde{\theta}| < \delta$  implica que

$$|W(r, \theta) - W(\tilde{r}, \tilde{\theta})| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.58)$$

Particularmente si se toman  $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ , si  $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$  (obs.  $|\tilde{r} - \tilde{r}| = 0$ ), entonces

$$|W(\tilde{r}, \theta) - W(\tilde{r}, \tilde{\theta})| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.59)$$

Sea  $\tilde{r} = 1 - \frac{\delta}{2}$  y  $\delta > 0$  como en (1.58). Así si  $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$ , entonces

$$|W(\theta) - W(\tilde{\theta})| = |W(\theta) - W(r, \theta)| + |W(r, \theta) - W(r, \tilde{\theta})| + |W(r, \tilde{\theta}) - W(\tilde{\theta})| < \epsilon,$$

probando que  $W|_{[\alpha, \beta] \cap Z}$  es continua en  $\theta_0$ .

Se demuestra que

$$W(\theta) \text{ es continua en } \theta_0 \text{ como una función en } (\alpha, \beta). \quad (1.60)$$

Por (1.55), esto da una contradicción al hecho de que  $\theta_0$  pertenece a  $Z$ . Por lo tanto  $Z$  es un conjunto vacío y el teorema será probado.

Probemos que de (1.56) se sigue (1.60). Veamos que

$$W(\theta) \text{ es continua por la derecha de } \theta_0 \quad (1.61)$$

(Un razonamiento similar nos da la continuidad por la izquierda de  $\theta_0$ ). Si  $\theta_0$  está es el extremo izquierdo de un intervalo abierto en  $(\alpha, \beta) \setminus \overline{Z}$ , entonces el Hecho 1.2 implica que  $W(\theta)$  es continua por la derecha de  $\theta_0$ . Lo que resta es justificar que  $W(\theta)$  es continua cuando  $\theta_0$  es simplemente un punto de acumulación por la derecha de  $\overline{Z}$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Por (1.56) podemos elegir  $\delta > 0$  tal que

$$|W(\theta) - W(\theta_0)| < \epsilon \quad (1.62)$$

siempre que  $\theta$  esté en  $\overline{Z}$  y  $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \delta$ . Después elegimos  $\theta_1$  en  $\overline{Z}$  con  $\theta_0 < \theta_1 < \theta_0 + \delta$ . Sea  $\theta_1 - \theta_0 = \hat{\delta}$ . Ahora suponemos que  $\theta^*$  es un punto dado en  $(\alpha, \beta) \setminus \overline{Z}$ , tal que  $\theta_0 < \theta^* < \theta_0 + \delta$ . Entonces  $\theta^*$  está en algún intervalo componente de  $(\alpha, \beta) \cap \overline{Z}$ , digamos  $(\theta_2, \theta_3)$ , donde  $\theta_0 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_1$  y ambos  $\theta_2$  y  $\theta_3$  están en  $\overline{Z}$ . Además por el Hecho 1.1 y 1.2,  $W$  es una función lineal en el intervalo cerrado  $[\theta_2, \theta_3]$ . Ya que la desigualdad (1.62) es cierta para  $\theta = \theta_2$  y  $\theta = \theta_3$  entonces por la linealidad es también cierta para  $\theta = \theta^*$ , se ha mostrado que

$$|W(\theta) - W(\theta_0)| < \epsilon,$$

siempre que  $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \hat{\delta}$ . Por lo tanto,  $W(\theta)$  es continua por la derecha de  $\theta_0$ . Así (1.60) está probada y la prueba del teorema es completa. ■

## 1.4. El Principio del Argumento para Funciones Armónicas

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes de la teoría del análisis complejo por las importantes aplicaciones que tiene. Se conoce como el Principio del Argumento para funciones analíticas. Su demostración es sencilla y lo citamos a continuación. Sea  $D$  un dominio acotado por una curva  $C$  rectificable de Jordan, orientada positivamente, es decir en sentido contrario a las manecillas del reloj. Sea  $f$  una función analítica en  $D$  y continua en  $\overline{D}$ , con  $f(z) \neq 0$  en  $C$ . El *índice* ó *el número de vueltas* de la imagen de la curva  $f(C)$  alrededor del origen está definido como  $I = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \Delta_C \arg f(z)$  y es el cambio neto en el argumento de  $f(z)$  cuando  $z$  recorre una vez alrededor de  $C$ , dividido por  $2\pi$ . Si  $N$  el número total de ceros de  $f$  en  $D$ , contados según multiplicidad, entonces  $N = I$ .

La prueba de costumbre comienza observando que  $\frac{f'}{f}$  tiene un polo simple con residuo  $n$  si  $f$  tiene un cero de orden  $n$ , por el Teorema del Residuo tenemos que

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \Delta_C \log f(z) = I$$

(Ya que la derivada  $f'(z)$  no necesita estar definida en  $C$ , la curva de integración debe ser ligeramente contraída.)

El Principio del Argumento es una herramienta para deducir información analítica del comportamiento geométrico. Como una típica aplicación, puede verse que si  $f$  es analítica en  $D$  y continua en  $\overline{D}$  y si  $C$  preserva el sentido en la curva de Jordan  $\Gamma$  acotando el dominio  $\Omega$ , entonces  $f$  mapea  $D$  univalentemente sobre  $\Omega$ . En otras palabras univalencia en la frontera implica univalencia en el interior.

El interés por estudiar el comportamiento del mapeo de funciones armónicas complejo valuadas (univalentes o no) que no son necesariamente analíticas, nos da una buena razón para estudiar una generalización armónica del Principio del Argumento. Ésta versión generalizada tendrá aplicaciones en mapeos casi conformes armónicos.

El propósito de esta sección es desarrollar precisamente la generalización del Principio del Argumento para funciones armónicas.

Para poder formular el Principio del Argumento para funciones armónicas, primero tenemos que dar sentido a la idea del orden de un cero para una función armónica. Una función armónica  $f$  es solución de la ecuación de Laplace si  $f_{xx} + f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . Cada función armónica  $f = u + iv$  tiene una descomposición local  $f = h + \bar{g}$  con  $h$  y  $g$  analíticas, la cual es única salvo una constante aditiva.

Esto se ve, observando primero que  $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y por lo tanto es analítica.

**Corolario 1.4** *Si  $G$  es simplemente conexo y  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en  $G$  entonces  $f$  tiene una primitiva en  $G$ .*

Si ahora se define  $h' = f_z$ , por el corolario anterior e integrando se obtiene  $h$  y veremos que  $g = \bar{f} - \bar{h}$  también satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann.

Calculando el Jacobiano de  $f = u + iv$  se tiene que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = J_f$$

como también  $f = h + \bar{g}$ , donde  $h = h_1 + ih_2$ ,  $g = g_1 + ig_2$ , se tiene que

$$h + \bar{g} = [h_1 + g_1] + i[h_2 - g_2] = f$$

$$u = h_1 + g_1 \quad v = h_2 - g_2$$

luego tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial x} & \text{y} & \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial y} & \text{y} & \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{aligned}$$

además

$$h'(z) = \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x}, \quad g'(z) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + i \frac{\partial g_2}{\partial x} \quad (1.63)$$

o sea

$$h'(z) = -i \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial y}, \quad g'(z) = -i \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \quad (1.64)$$

Pues  $h$  y  $g$  son analíticas. Por (1.63) y (1.64) se tiene que

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{\partial h_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = -\frac{\partial g_1}{\partial y} \quad (1.65)$$

Así

$$J_f = \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial x} \right)$$

$$J_f = \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial x} -$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial x}$$

y por (1.65) se tiene:

$$J_f = \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 = |h'|^2 - |g'|^2$$

**Definición 1.11** Una función armónica  $f$  preserva orientación en el punto  $z_0$  si  $h'(z) \neq 0$  y  $\omega = \frac{g'}{h'}$  es analítica en  $z_0$  (posiblemente con una singularidad removible), con  $|w(z_0)| < 1$ .

De acuerdo a esta definición, se nota que si  $f$  preserva orientación entonces  $J_f > 0$ , a menos que  $h'(z_0) = 0$ . Similarmente,  $f$  invierte orientación (es decir  $J_f < 0$ ) en  $z_0$  si  $\bar{f} = g + \bar{h}$  preserva orientación.

**Definición 1.12** Se llama  $z_0$  punto singular de  $f$ , si  $f$  no preserva ni invierte el sentido en  $z_0$ . Es claro que  $J_f(z_0) = 0$  en todo punto singular pero no recíprocamente.

Ejemplos de funciones armónicas que preservan orientación son todas las funciones analíticas no constantes, las funciones  $\alpha z^n + \beta \bar{z}^m$  para  $|z| < 1$ , con  $n \leq m$  y  $m|\beta| < n|\alpha|$ . Cada punto  $z_0$  es singular para la función  $f(z) = z + \bar{z}$ , pues si se toma  $h(z) = z$  y  $g(z) = z$ , entonces se puede escribir  $f(z) = h(z) + \bar{g}(z) = x + iy + (x - iy) = 2x$  así  $h'(z) = 1 \neq 0$  y  $\omega = \frac{g'}{h'} = 1$ .

Para funciones armónicas que preservan orientación, el orden del cero puede definirse en términos de la descomposición local de  $f = h + \bar{g}$ . Si se tiene que  $f(z_0) = 0$  en algún punto  $z_0$  donde  $f$  preserva orientación se puede escribir la expansión de serie de potencias de  $h$  y  $g$  como sigue

$$h(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad g(z) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

$f(z_0) = h(z_0) + \bar{g}(z_0) = a_0 + \bar{b}_0 = 0$  implica  $b_0 = -\bar{a}_0$ . Algún  $a_k$  ( $k > 1$ ) debe ser no cero porque  $h'(z) \neq 0$ . Sea  $a_n$  el primer coeficiente no cero, así

$$h(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots$$



Se tiene el desarrollo

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \frac{g'(z)}{h'(z)} \\ &= \frac{k b_k (z - z_0)^{k-1} + (k+1) b_{k+1} (z - z_0)^k + (k+2) b_{k+2} (z - z_0)^{k+1} + \dots}{n a_n (z - z_0)^{n-1} + (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n + (n+2) a_{n+2} (z - z_0)^{n+1} + \dots} \\ &= \frac{(z - z_0)^{k-1} [k b_k + (k+1) b_{k+1} (z - z_0) + (k+2) b_{k+2} (z - z_0)^2 + \dots]}{(z - z_0)^{n-1} [n a_n + (n+1) a_{n+1} (z - z_0) + (n+2) a_{n+2} (z - z_0)^2 + \dots]}\end{aligned}$$

es analítica en  $z_0$ ; en tanto  $k-1 \geq n-1$  entonces  $k \geq n$ , luego  $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$ . Si  $b_n = 0$ , es claro que  $|b_n| < |a_n|$

$$\left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| = \left| \frac{n b_n + (n+1) b_{n+1} (z - z_0) + \dots}{n a_n + (n+1) a_{n+1} (z - z_0) + \dots} \right| < 1$$

Como  $b_n \neq 0$ ,  $z \rightarrow z_0$  implica que  $|b_n| < |a_n|$  porque  $|w(z_0)| < 1$  luego siempre se tiene  $|b_n| < |a_n|$ . En esta situación se dice que  $f$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z_0$ . Similarmente, si  $f$  invierte orientación en  $z_0$ , entonces  $\bar{f}$  preserva orientación en  $z_0$  con algún cero de orden  $n$  y se dice que  $f$  tiene un cero de orden  $-n$  en  $z_0$ . El orden de un punto singular no está definido.

Una consecuencia inmediata de la estructura de las fórmulas que se derivaron, es que los ceros no singulares de una función armónica son aislados. En efecto, si  $f(z_0) = 0$  y  $|w(z_0)| < 1$ , entonces para  $0 < |z - z_0| < \delta$  es posible escribir la función

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

como:

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=n}^{\infty} \overline{b_k} \overline{(z - z_0)^k} \\ &= a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots + \overline{b_n} \overline{(z - z_0)^n} + \overline{b_{n+1}} \overline{(z - z_0)^{n+1}} + \dots \\ &= a_n (z - z_0)^n \left[ 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} (z - z_0) + \dots + \frac{\overline{b_n} \overline{(z - z_0)^n}}{a_n (z - z_0)^n} + \frac{\overline{b_{n+1}} \overline{(z - z_0)^{n+1}}}{a_n (z - z_0)^n} + \dots \right]\end{aligned}$$

Se define a  $\psi(z)$  como

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \frac{a_{n+1}}{a_n} (z - z_0) + \dots + \frac{\overline{b_n} \overline{(z - z_0)^n}}{a_n (z - z_0)^n} + \frac{\overline{b_{n+1}} \overline{(z - z_0)^{n+1}}}{a_n (z - z_0)^n} + \dots \\ &= \frac{\overline{b_n} \overline{(z - z_0)^n}}{a_n (z - z_0)^n} + \frac{a_{n+1}}{a_n} (z - z_0) + \dots + \frac{\overline{b_{n+1}} \overline{(z - z_0)^{n+1}}}{a_n (z - z_0)^n} + \dots \\ &= \frac{\overline{b_n} \overline{(z - z_0)^n}}{a_n (z - z_0)^n} + O(z - z_0). \\ &= \frac{\overline{b_n}}{a_n} (\bar{z} - \bar{z}_0)^n (z - z_0)^{-n} + O(z - z_0)\end{aligned}$$

Finalmente se tiene que

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = a_n (z - z_0)^n \{1 + \psi(z)\}. \quad (1.66)$$

Además  $|\psi(z)| < 1$ , cuando  $z \rightarrow z_0$  pues  $\left|\frac{b_n}{a_n}\right| < 1$ . Por lo tanto  $f(z) \neq 0$  en una vecindad de  $z_0$ . Un argumento similar se aplica cuando se invierte orientación en los ceros de  $f$ . Los ceros singulares de una función armónica no son siempre aislados. Por ejemplo  $f(z) = z + \bar{z} = 2x$  se anula en el eje imaginario. El Principio del Argumento para funciones armónicas puede formularse como una generalización directa del resultado clásico de funciones analíticas.

**Teorema 1.14** *Sea  $f$  una función armónica en un dominio de Jordan  $D$  con frontera  $C$ . Sea  $f$  continua en  $\bar{D}$  y  $f(z) \neq 0$  en  $C$ . Supóngase que  $f$  no tiene ceros singulares en  $D$  y sea  $N$  la suma de los órdenes de los ceros de  $f$  en  $D$ . Entonces  $\Delta_C \arg f(z) = 2\pi N$ .*

DEMOSTRACIÓN: Considere primero que  $f$  no tiene ceros en  $D$ , así  $N = 0$  y el origen está situado en el exterior de  $f(D \cup C)$ . Un resultado en topología dice que en este caso  $\Delta_C \arg f(z) = 0$ , lo cual prueba el teorema. Para probar el hecho topológico, sea  $\phi$  un homeomorfismo del cuadrado unitario cerrado  $S$  sobre  $D \cup C$  con  $\phi : \partial S \rightarrow C$  un homeomorfismo. Entonces  $F = f \circ \phi$  es un mapeo continuo de  $S$  sobre el plano sin ceros y se quiere probar que  $\Delta_{\partial S} \arg F(z) = 0$ . Primeramente se subdivide a  $S$  en una cantidad finita de pequeños cuadros  $S_j$  y en donde es cada uno el argumento de  $F(z)$  varía a lo más por  $\frac{\pi}{2}$ . Entonces  $\Delta_{\partial S_j} \arg F(z) = 0$  y así

$$\Delta_{\partial S} \arg F(z) = \sum_j \Delta_{\partial S_j} \arg F(z) = 0,$$

la primera igualdad está relacionada con la cancelación de la contribución de  $\partial S_j$  excepto, en  $\partial S$ . Sea  $f$  con ceros en  $D$ . Porque los ceros son aislados y  $f$  no se anula en  $C$ , hay sólo un número finito de ceros distintos en  $D$ . Se denotan por  $z_j$  para  $j = 1, 2, \dots, \nu$ . Sea  $\gamma_j$  un círculo de radio  $\delta > 0$  centrado en  $z_j$ , donde  $\delta$  es elegido como el más pequeño de todos los círculos  $\gamma_j$  que están en  $D$ . Cada círculo  $\gamma_j$  se une con un arco de Jordan  $\lambda_j$  en  $D$ . Considerando la parte cerrada de  $\Gamma$  formada por el movimiento alrededor de  $C$  en dirección positiva, se hace un desvío a lo largo de cada  $\lambda_j$  hacia  $C$ . La curva  $\Gamma$  no contiene ceros de  $f$ , así  $\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0$ , por el caso antes considerado. Pero las contribuciones de los arcos  $\lambda_j$  a lo largo de  $\Gamma$  cancelan, así que

$$\Delta_C \arg f(z) = \sum_{j=1}^{\nu} \Delta_{\gamma_j} \arg f(z),$$

donde ahora cada círculo  $\gamma_j$  es recorrido en dirección positiva. Este análisis reduce el problema global en uno local.

Suponga ahora que  $f$  tiene un cero de orden  $n > 0$  en el punto  $z_0$ . Entonces como se observó antes en

la ecuación (1.66),  $f$  tiene la forma local  $f(z) = a_n (z - z_0)^n \{1 + \psi(z)\}$ ,  $a_n \neq 0$ , con  $|\psi(z)| < 1$  en un círculo suficientemente pequeño  $\gamma$  definido por  $|z - z_0| = \delta$ . Esto muestra que

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = n \Delta_\gamma \arg \{z - z_0\} + \Delta_\gamma \arg \{1 + \psi(z)\} = 2\pi n.$$

Similarmente, la misma conclusión  $\Delta_\gamma \arg f(z) = 2\pi n$  se tiene si  $f$  tiene un cero de orden  $n < 0$  en  $z_0$ . Por lo tanto, si  $f$  tiene ceros de orden  $n_j$  en los puntos  $z_j$ , la conclusión es que

$$\Delta_C \arg f(z) = \sum_{j=1}^{\nu} \Delta_{\gamma_j} \arg f(z) = 2\pi N,$$

lo cual prueba el teorema. ■

Varios corolarios se derivan del teorema anterior, el primero es una extensión del Teorema de Rouché para funciones armónicas.

**Corolario 1.5** (*Teorema de Rouché para Funciones Armónicas*)

Sean  $p$  y  $p + q$  las funciones armónicas que preservan el sentido en  $D$  y son continuas en  $\bar{D}$ . Si  $|q(z)| < |p(z)|$  en  $C$ , entonces  $p$  y  $p + q$  tienen la misma cantidad de ceros en  $D$ .

DEMOSTRACIÓN: Como  $0 \leq |q(z)| < |p(z)|$ ,  $p(z) \neq 0$  en  $C$ , luego  $p$  no se anula en  $C$  y se tiene que

$$p(z) + q(z) = p(z) \left[ 1 + \frac{q(z)}{p(z)} \right].$$

Además como  $\frac{|q(z)|}{|p(z)|} < 1$  y preserva la orientación.

$$\begin{aligned} 2\pi N' &= \arg [p(z) + q(z)] = \arg p(z) + \arg \left[ 1 + \frac{q(z)}{p(z)} \right] \\ &= \arg p(z) = 2\pi N, \end{aligned}$$

luego  $N' = N$ . Si  $z \in C$ , como  $p(z) \neq 0$ , si  $p(z) + q(z) = 0$  se tendría que  $\left| \frac{-q(z)}{p(z)} \right| = 1$  lo cual es una contradicción, por lo tanto  $p(z) + q(z) \neq 0$  para  $z \in C$ , entonces por el Teorema 1.14

$$\Delta_C \arg [p(z) + q(z)] = 2\pi N'$$

Por lo tanto  $p$  y  $p + q$  tienen la misma cantidad de ceros en  $D$ . ■

El siguiente resultado es una generalización del Teorema de Hurwitz.

**Corolario 1.6** Si  $\{f_k\}$  es una sucesión de funciones armónicas en una región  $D$  que converge local y uniformemente, entonces su límite, es una función armónica.

**Corolario 1.7** Teorema de Hurwitz para funciones armónicas.

Si  $f$  y  $f_k$  preservan el sentido, entonces en un punto  $z_0$  en  $D$  es un cero de  $f$  si y sólo si éste es cero de cada función  $f_k$  para  $k$  suficientemente grande.

Dicho de otra forma,  $f$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z_0$  si y sólo si cada disco de radio suficientemente pequeño alrededor de  $z_0$  (de manera tal que no contenga otro cero de  $f$ ) contiene precisamente  $n$  ceros, contando de acuerdo su multiplicidad, de  $f_k$  para  $k$  suficientemente grande.

DEMOSTRACIÓN: Por ser  $f_k$  y  $f$  funciones armónicas por el Teorema 1.5 se pueden escribir como

$$f_k(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

y

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Luego como preservan el sentido se tiene que  $f_k \neq 0$  en  $|z - a| = r$ .

Sea  $\mu = \min_{z \in r} |f(z)| > 0$ , entonces por convergencia uniforme se tiene que

$$|f_k(z) - f(z)| < \mu < |f(z)|.$$

Por el Corolario 1.5 (con  $p = f$  y  $q = f_k - f$ ), se obtiene que  $f_k(z) - f(z) + f(z) = f_k(z)$  tiene la misma cantidad de ceros que  $f(z)$ . ■

Finalmente las funciones armónicas que preservan el sentido tienen la *propiedad del mapeo abierto*: es decir mandan conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. En efecto, como en el caso de funciones analíticas, una afirmación más fuerte puede hacerse.

**Corolario 1.8** Si  $f$  es una función armónica que preserva el sentido cerca de un punto donde  $f(z_0) = w_0$  y si  $f(z) - w_0$  tienen un cero de orden  $n$  ( $n \geq 1$ ) en  $z_0$ , entonces para cada  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño hay un correspondiente  $\delta > 0$  con la siguiente propiedad:

Para cada  $\alpha \in N_\delta(w_0) = \{w \mid |w - w_0| < \delta\}$ , la función  $f(z) - \alpha$  tiene exactamente  $n$  ceros, contando de acuerdo a su multiplicidad, en  $N_\epsilon(z_0)$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $p = f - w_0$  y  $q = w_0 - \alpha$ , luego

$$|w_0 - \alpha| < |f(z) - w_0| \quad \text{en } N_\delta(w_0)$$

usando el Corolario 1.5 se llega a que:

$p = f - w_0$  y  $p + q = f - w_0 + w_0 - \alpha = f - \alpha$  tienen el mismo número de ceros en  $N_\epsilon(z_0)$ . ■

## Capítulo 2

# Funciones Superarmónicas y Subarmónicas

El uso de funciones subarmónicas y el Método de Perron permitirán determinar una solución generalizada de  $P(G, f)$  para cada conjunto abierto  $G$  con frontera  $\partial G$  y cada  $f \in \mathcal{C}^0(\partial G)$ . Se introducen estas nociones aquí, el desarrollo de este método se tratará en la siguiente sección.

### 2.1. Propiedades de las Funciones Superarmónicas y Subarmónicas

**Definición 2.1** Sea  $G$  una región y sea  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Se dice que  $\varphi$  es una función subarmónica si para cada  $\bar{B}(a; r) \subset G$ , se tiene

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Se dice que  $\varphi$  es una función superarmónica si cada vez que  $\bar{B}(a; r) \subset G$ ,

$$\varphi(a) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

De lo anterior tenemos que,  $\varphi$  es superarmónica si y sólo si  $-\varphi$  es subarmónica. Luego bastará con que demos los resultados requeridos para funciones subarmónicas. En la definición de función subarmónica  $\varphi$ , es posible considerar solamente que  $\varphi$  es semi-continua superiormente. Por lo tanto esto hace necesario el uso de la Integral de Lebesgue, en la definición en lugar de la Integral de Riemann. Así supondremos que  $\varphi$  es semicontinua superiormente cuando  $\varphi$  es subarmónica.

Claramente cada función armónica es simultáneamente subarmónica y superarmónica.

Si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son subarmónicas entonces también lo es  $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$  para  $a_1, a_2 \geq 0$

Algunos de los resultados en funciones armónicas también se mantienen para funciones subarmónicas.

Es el caso del Principio del Módulo Máximo.

**Teorema 2.1 Principio del Módulo Máximo (Tercera versión)**

Sea  $G$  una región y sea  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función subarmónica. Si hay un punto  $a$  en  $G$  con  $\varphi(a) \geq \varphi(z)$ , para todo  $z$  en  $G$ , entonces  $\varphi$  es una función constante.

DEMOSTRACIÓN: La prueba es similar a la primera versión del Principio del Módulo Máximo. La segunda versión del Principio del Máximo se puede también extender, pero aquí, ambas funciones subarmónicas y superarmónicas deben usarse.

**Teorema 2.2 Principio del Módulo Máximo (Cuarta versión)**

Sea  $G$  una región y sean  $\varphi, \psi$  funciones de valores reales definidas en  $G$ , tales que  $\varphi$  es subarmónica y  $\psi$  es superarmónica. Si para cada punto  $a$  en  $\partial_\infty G$ , se cumple

$$\limsup_{z \rightarrow a} \varphi(z) \leq \liminf_{z \rightarrow a} \psi(z),$$

entonces,  $\varphi(z) < \psi(z)$  para todo  $z$  en  $G$  ó  $\varphi = \psi$  y  $\varphi$  es armónica.

De nuevo la prueba es idéntica a la del Teorema 1.7, por lo que no se repetirá aquí.

Cuando se dice que una función satisface el Principio del Módulo Máximo, nos referimos a la tercera versión. Es decir que, no tiene un valor máximo en  $G$  a menos que sea constante.

**Teorema 2.3** Sea  $G$  una región y  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces  $\varphi$  es subarmónica si y sólo si toda región  $G_1$  contenida en  $G$  y cada función armónica  $u_1$  en  $G_1$ ,  $\varphi - u_1$  satisfacen el Principio del Módulo Máximo en  $G_1$ .

DEMOSTRACIÓN: Se supone que  $\varphi$  es subarmónica y  $G_1, u_1$  son como en el teorema. Entonces  $\varphi - u_1$  es claramente subarmónica y así satisface el Principio del Módulo Máximo.

Ahora sea  $\varphi$  continua que satisface la propiedad y sea  $\bar{B}(a, r) \subset G$ . Según el Teorema 1.9 existe una función continua  $u : \bar{B}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual es armónica en  $B(a, r)$  y  $u(z) = \varphi(z)$  para  $|z - a| = r$ , por hipótesis  $\varphi - u$  satisface el Principio del Módulo Máximo. Pero  $(\varphi - u)(z) \equiv 0$  para  $|z - a| = r$ . Así  $\varphi \leq u$  y

$$\begin{aligned} \varphi(a) \leq u(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\varphi$  es subarmónica. ■

**Corolario 2.1** Sea  $G$  una región y  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces  $\varphi$  es subarmónica si y sólo si para cada región acotada  $G_1$  tal que  $G_1^- \subset G$  y para cada función continua  $u_1 : G_1^- \rightarrow \mathbb{R}$  y armónica en  $G_1$  que satisface  $\varphi(z) \leq u_1(z)$  para  $z$  en  $\partial G_1$ , se cumple  $\varphi(z) \leq u_1(z)$  para  $z$  en  $G_1$ .

**Corolario 2.2** Sea  $G$  una región,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  funciones subarmónicas en  $G$ ; si  $\varphi(z) = \max \{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$  para cada  $z$  en  $G$ , entonces  $\varphi$  es una función subarmónica.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $G_1$  una región tal que  $G_1 \subset G$  y sea  $u_1$  una función continua en  $G_1^-$  la cual es armónica en  $G_1$ , con  $\varphi(z) \leq u_1(z)$  para toda  $z$  en  $\partial G_1$ . Entonces ambas  $\varphi_1(z)$  y  $\varphi_2(z) \leq u_1(z)$  en  $\partial G_1$ . Por el Corolario 2.1 se obtiene que  $\varphi_1(z)$  y  $\varphi_2(z) \leq u_1(z)$ , para toda  $z$  en  $G_1$ . Así  $\varphi(z) \leq u_1(z)$  para toda  $z$  en  $G_1$ , y nuevamente por el Corolario 2.1  $\varphi$  es subarmónica. ■

**Corolario 2.3** Sea  $\varphi$  una función subarmónica en una región  $G$  y sea  $\bar{B}(a; r) \subset G$ . Sea  $\tilde{\varphi}$  una función definida en  $G$  por:

$$i) \tilde{\varphi}(z) = \varphi(z), \text{ si } z \in G - \bar{B}(a; r);$$

$$ii) \tilde{\varphi} \text{ es función continua en } \bar{B}(a; r) \text{ la cual es armónica y coincide con } \varphi(z) \text{ en } |z - a| = r.$$

Entonces  $\tilde{\varphi}$  es subarmónica.

## 2.2. Método de Perron-Wiener

El método de Perron-Weiner, fue introducido en 1924 para resolver y generalizar el problema clásico de Dirichlet, como mencionamos al inicio de este capítulo, uno de los propósitos al estudiar funciones subarmónicas es que en ellas reposa la solución al Problema de Dirichlet mediante el método de Perron-Wiener. Ciertamente, el Principio del Máximo muestra como esto ocurre. Si  $G$  es una región y  $u : G^- \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua ( $G^- =$  la cerradura en  $\mathbb{C}_\infty$ ), la cual es armónica en  $G$ , entonces  $\varphi(z) \leq u(z)$  para toda  $z$  en  $G$  y para toda función subarmónica  $\varphi$  la cual satisface  $\limsup_{z \rightarrow a} \varphi(z) \leq u(a)$  para toda  $a$  en  $\partial_\infty G$ . Ya que  $u$  es en sí misma una función subarmónica entonces:

Para todo  $a$  en  $\partial_\infty G$ .

$$u(z) = \sup \{ \varphi(z) \mid \varphi \text{ es subarmónica y } \limsup_{z \rightarrow a} \varphi(z) \leq u(a) \}. \quad (2.1)$$

Aunque este resultado es inmediato, este es un punto en el camino que nos guía a la solución del Problema de Dirichlet. La ecuación (2.1) dice que si  $f : \partial_\infty G \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y si  $f$  puede extenderse a una función  $u$  la cual es armónica en  $G$ , entonces  $u$  puede obtenerse de un conjunto de funciones subarmónicas las cuales están definidas sólo en términos de los valores en la frontera de  $f$ . Esto da la siguiente definición.

**Definición 2.2** Si  $G$  es una región y  $f : \partial_\infty G \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua entonces la familia de Perron,  $\mathcal{P}(f, G)$  consiste de todas las funciones subarmónicas  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que

$$\limsup_{z \rightarrow a} \varphi(z) \leq f(a),$$

para toda  $a$  en  $\partial_\infty G$ .

Como  $f$  es continua, hay una constante  $M$  tal que  $|f(a)| \leq M$  para toda  $a$  en  $\partial_\infty G$ . Así la función constante  $-M$  está en  $\mathcal{P}(f, G)$  y la familia de Perron nunca es vacía.

Si  $f = u|_{\partial_\infty G}$ , entonces la ecuación (2.1) es simplemente

$$u(z) = \sup \{\varphi(z) \mid \varphi \in \mathcal{P}(f, G)\}, \quad (2.2)$$

para cada  $z$  en  $G$ . Recíprocamente, si  $f$  es dada y  $u$  está definida como en la ecuación (2.2), entonces  $u$  debe ser la solución al problema de Dirichlet con valores en la frontera  $f$ ; esto es, siempre que el Problema de Dirichlet se puede resolver. Para mostrar que la ecuación (2.2) es una solución, las siguientes preguntas deben ser resueltas afirmativamente.

- (a) ¿Es  $u$  armónica en  $G$ ?
- (b) ¿Es el  $\lim_{z \rightarrow a} u(z) = f(a)$  para cada  $a$  en  $\partial_\infty$ ?

La primera pregunta siempre se puede responderse afirmativamente. La segunda pregunta algunas veces tiene una respuesta negativa y se dará un ejemplo el cual demuestra esto. Sin embargo, esto impone una restricción geométrica en  $G$  la cual garantiza que la respuesta en (b) sea siempre afirmativa para cualquier función continua  $f$ . Esto se dará en la siguiente sección.

**Teorema 2.4** Sea  $G$  una región y  $f : \partial_\infty G \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces

$$u(z) = \sup \{\varphi(z) \mid \varphi \in \mathcal{P}(f, G)\},$$

define una función armónica  $u$  en  $G$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $|f(a)| \leq M$  para todo  $a \in \partial_\infty G$ . La prueba comienza notando que:

$$\varphi(z) \leq M \text{ para toda } z \text{ en } G, \varphi \in \mathcal{P}(f, G). \quad (2.3)$$

Por definición  $\limsup_{z \rightarrow a} \varphi(z) \leq M$ , siempre que  $\varphi \in \mathcal{P}(f, G)$ , así por el Principio del Módulo Máximo se tiene (2.3).

Se fija  $a$  en  $G$  y  $\bar{B}(a; r) \subset G$ . Entonces  $u(a) = \sup \{\varphi(a) \mid \varphi \in \mathcal{P}(f, G)\}$ ; así existe una sucesión  $\{\varphi_n\}$  en  $\mathcal{P}(f, G)$  tal que  $u(a) = \lim \varphi_n(a)$ .

Sea  $\Phi_n = \max \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ; por el Corolario 2.2,  $\Phi_n$  es subarmónica. Sea  $\Phi'_n$  la función subarmónica



en  $G$  tal que  $\Phi'_n(z) = \Phi_n(z)$  para  $z$  en  $G - B(a; r)$  y  $\Phi'_n$  es armónica en  $B(a; r)$  (Corolario 2.3). Se tiene que  $\Phi'_n \leq \Phi'_{n+1}$  pues

$$\Phi'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \Phi'_n(e^{it}) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \Phi'_{n+1}(e^{it}) dt = \Phi'_{n+1}, \quad (2.4)$$

$$\varphi_n \leq \Phi'_n \leq \Phi'_{n+1}, \quad (2.5)$$

$$\Phi'_n \in \mathcal{P}(f; G). \quad (2.6)$$

De la ecuación (2.6),  $\Phi'_n(a) \leq u(a)$ . Ahora, de (2.5) y por la elección de los  $\{\varphi_n\}$  obtenemos que:

$$u(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi'_n(a). \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.3)  $\Phi'_n(a) \leq M$  para toda  $n$ ; así usando la ecuación (2.4), el Teorema de Harnack implica que hay una función armónica  $U$  en  $B(a; r)$  tal que  $U(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi'_n(z)$  uniformemente para  $z$  en cualquier subdisco de  $B(a; r)$ . De las ecuaciones (2.5) y (2.6) se deduce que  $U \leq u$  y  $U(a) = u(a)$  respectivamente.

Ahora sea  $z_0 \in B(a; r)$  y sea  $\{\psi_n\}$  una sucesión en  $\mathcal{P}(f; G)$  tal que  $u(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(z_0)$ .

Sea  $\chi_n = \max\{\phi_n, \psi_n\}$ ,  $X_n = \max\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ , y sea  $X'_n$  la función subarmónica en  $G$ , tal que  $X'_n(z) = X_n$  para  $z \in G - B(a; r)$  y  $X'_n$  es armónica en  $B(a; r)$ . Como antes, esto permite determinar una función armónica  $U_0$  en  $B(a; r)$  tal que  $U_0 \leq u$  y  $U_0(z_0) = u(z_0)$ . Pero  $\Phi_n \leq X_n$ , así que  $\Phi'_n \leq X'_n$ . De ahí  $U \leq U_0 \leq u$  y  $U(a) = U_0(a) = u(a)$ . Por lo tanto  $U - U_0$  es una función armónica negativa en  $B(a; r)$  y  $(U - U_0)(a) = 0$ . Por el Principio del Máximo,  $U = U_0$ ; así  $U(z_0) = u(z_0)$ . Como  $z_0$  fue arbitrario,  $u = U$  en  $B(a; r)$ . Se tiene que  $u$  es armónica en cada disco contenido en  $G$ . ■

**Definición 2.3** Sea  $G$  una región y sea  $f : \partial_\infty G \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. La función armónica  $u$  obtenida en el teorema anterior es llamada la función de Perron asociada con  $f$ .

El siguiente paso en la solución del Problema de Dirichlet es probar que cada punto  $a$  en  $\partial_\infty G$  el  $\lim_{z \rightarrow a} u(z)$  es igual a  $f(a)$ . Como mencionamos antes esto no siempre ocurre. El siguiente ejemplo ilustra este fenómeno.

**Ejemplo 2.1** Sea  $G = \{z \mid 0 < z < 1\}$ ,  $T = \{z \mid |z| = 1\}$ ; así  $\partial G = T \cup \{0\}$ .

Se define  $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in T \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Para  $0 < \epsilon < 1$  sea  $u_\epsilon(z) = \frac{\log |z|}{\log \epsilon}$ , entonces  $u_\epsilon$  es armónica en  $G$ ,  $u_\epsilon(z) > 0$  para toda  $z$  en  $G$ ,

$$u_\epsilon(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in T \\ 1 & \text{si } |z - \epsilon| = 1 \end{cases}$$

Se supone que  $v \in \mathcal{P}(f; G)$ ; dado que  $|f| \leq 1$ ,  $|v(z)| \leq 1$  para toda  $z$  en  $G$ . Si  $R_\epsilon = \{z \mid \epsilon < |z| < 1\}$ , entonces

$$\limsup_{z \rightarrow a} v(z) \leq u_\epsilon(a) \text{ para toda } a \text{ en } \partial R_\epsilon;$$

por el Principio del Módulo Máximo,  $v(z) \leq u_\epsilon(z)$  para todo  $z$  en  $R_\epsilon$ . Como  $\epsilon$  fue arbitrario esto da que para cada  $z$  en  $G$ ,

$$v(z) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(z) = 0.$$

De ahí la función de Perron asociada con  $f$  es la función idénticamente cero y el Problema de Dirichlet no se puede resolver en el disco perforado.

Ahora se aplica el Método de Perron para la solución al Problema de Dirichlet. Se considera un conjunto  $G$  acotado y abierto en  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\Gamma$  y  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ , se define

Para todo  $z$  en  $\Gamma$

$$\mathcal{F}_-(\varphi) = \{v \in \mathcal{C}^0(G) \mid v \text{ subarmónica en } G \text{ y } \limsup_{x \rightarrow z} v(x) \leq \varphi(z)\},$$

$$\mathcal{F}_+(\varphi) = \{w \in \mathcal{C}^0(G) \mid w \text{ superarmónica en } G \text{ y } \liminf_{x \rightarrow z} w(x) \geq \varphi(z)\}.$$

Por el Teorema 2.2 (Principio del Módulo Máximo):

$$v \leq w \text{ en } G \text{ para toda } v \in \mathcal{F}_-(\varphi) \text{ y } w \in \mathcal{F}_+(\varphi). \quad (2.8)$$

Además,  $u$  es solución clásica de  $P(G, \varphi)$  si y sólo si  $u \in \mathcal{F}_-(\varphi) \cap \mathcal{F}_+(\varphi)$ . Se nota que, como  $\mathcal{F}_-(\varphi)$  y  $\mathcal{F}_+(\varphi)$  son no vacíos, por lo tanto ellas contienen

$$v \equiv \min_{\Gamma} \varphi \text{ y } w \equiv \max_{\Gamma} \varphi \text{ respectivamente.}$$

La propiedad (2.8) permite definir para toda  $z$  en  $G$  y para toda  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$  las funciones:

$$u_-(\varphi, z) = \sup_{v \in \mathcal{F}_-(\varphi)} v(z), \quad u_+(\varphi, z) = \inf_{w \in \mathcal{F}_+(\varphi)} w(z).$$

El método de de Perron nos permite obtener la solución generalizada.

**Definición 2.4** Dado  $G$  un conjunto acotado y abierto en  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\Gamma$  y  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ , se llama a la función  $u(\varphi)$  armónica en  $G$ , definida por (2.9) la solución generalizada de  $P(G, \varphi)$ .

Se observa que la solución generalizada de  $P(G, \varphi)$  está definida para toda  $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$ . Es claro que si existe, la solución clásica de  $P(G, \varphi)$ , coincide con la solución generalizada. (ver. Definición (0.1)).

**Teorema 2.5** (*Teorema de Weiner*)

Sea  $G$  un conjunto acotado y abierto en  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\Gamma$  y  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ . Entonces para toda  $z$  en  $G$  se tiene que

$$u_-(\varphi, z) = u_+(\varphi, z) = u(\varphi, z);$$

y

$$u(\varphi)(z) = u(\varphi, z) = u_-(\varphi, z) = u_+(\varphi, z), \quad z \in G \quad (2.9)$$

es armónica en  $G$ . Es decir las funciones  $u_-(\varphi)$  y  $u_+(\varphi)$  son idénticas y armónicas en  $G$ .

DEMOSTRACIÓN: Como las funciones  $u_-$  y  $u_+$  son armónicas por el Teorema 2.4, de la definición de  $u_-$  y  $u_+$  se afirma lo siguiente:

- (i)  $u_-(\varphi) \leq u_+(\varphi) = -u_-(-\varphi)$ ;  $u_-(\lambda\varphi) = \lambda u_-(\varphi)$  para toda  $\lambda \geq 0$ ,
- (ii)  $u_-(\varphi_1) + u_-(\varphi_2) \leq u_-(\varphi_1 + \varphi_2)$ ,
- (iii)  $u_-(\varphi + c) = u_-(\varphi) + c$  para cada constante  $c$
- (iv)  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ , entonces  $u_-(\varphi_1) \leq u_-(\varphi_2)$ .

El inciso (i) se demuestra usando las siguientes propiedades:

$$\sup A = -\inf(-A)$$

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A.$$

Para (ii) se tiene que  $\mathcal{F}_-(\varphi_1) \cup \mathcal{F}_-(\varphi_2) \subset \mathcal{F}_-(\varphi_1 + \varphi_2)$ , entonces

$$\sup_{v \in \mathcal{F}_-(\varphi_1)} v(x) + \sup_{\tilde{v} \in \mathcal{F}_-(\varphi_2)} \tilde{v}(x) \leq \sup_{\hat{v} \in \mathcal{F}_-(\varphi_1 + \varphi_2)} \hat{v}(x)$$

y

$$u_-(\varphi_1) + u_-(\varphi_2) \leq u_-(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Usando también las propiedades del supremo se demuestra (iii) y (iv).

Como  $\psi + \varphi - \psi \leq \psi + \sup[\varphi - \psi]$ , entonces

$$\varphi \leq \psi + \sup[\varphi - \psi].$$

Así

$$-\varphi \geq -\psi - \sup[\varphi - \psi]$$

y de la afirmación (iv) se tiene

$$u_-( -\varphi) \geq u_-( -\psi - \sup[\varphi - \psi]).$$

Luego

$$-u_-(-\varphi) \leq -u_-(-\psi - \sup[\varphi - \psi])$$

además por (i)

$$u_+(\varphi) \leq -u_-(-\psi - \sup[\varphi - \psi]) = u_+(\psi + \sup(\varphi - \psi)).$$

Finalmente por (iii)

$$u_+(\varphi) \leq u_+(\psi) + \sup(\varphi - \psi). \quad (2.10)$$

Ahora  $\varphi + \psi - \varphi \leq \varphi + \sup[\psi - \varphi]$ , es decir

$$\psi \leq \varphi + \sup[\psi - \varphi].$$

Por otro lado (iv)

$$u_-(\psi) \leq u_-(\varphi + \sup[\psi - \varphi]).$$

Así por (iii)

$$u_-(\psi) \leq u_-(\varphi) + \sup[\psi - \varphi] \quad (2.11)$$

Por (2.10) y (2.11) se tiene que

$$u_+(\varphi) + u_-(\psi) \leq u_+(\psi) + u_-(\varphi) + \sup(\varphi - \psi) + \sup(\psi - \varphi)$$

Por lo tanto

$$u_+(\varphi) - u_-(\varphi) \leq u_+(\psi) - u_-(\psi) + 2 \|\varphi - \psi\|$$

Se define el siguiente conjunto:

$$E = \{\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma) \mid u_-(\varphi) = u_+(\varphi)\}.$$

Observemos que de su definición se sigue directamente que  $E$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ .

Para probar el teorema es suficiente mostrar que el conjunto  $E$  contiene una parte densa de  $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ .

Se observa que  $E$  contiene las trazas en  $\Gamma$  de las funciones  $v \in \mathcal{C}^0(\overline{G})$  que son subarmónicas en  $G$ . En efecto, cada función  $v$  con traza  $\varphi$  está en  $\mathcal{F}_1(\varphi)$  con el resultado que

$$v \leq u_-(\varphi)$$

De esto se sigue que para toda  $z \in \Gamma$

$$\liminf_{x \rightarrow z} u_-(\varphi, x) \geq \lim_{x \rightarrow z} v(x) = \varphi(z),$$

por lo tanto, como  $u_-(\varphi)$  es armónica (de lo cual a priori superarmónica) en  $G$ ,  $u_-(\varphi) \in \mathcal{F}_+(\varphi)$  y  $u_-(\varphi) = u_+(\varphi)$ .

Dado  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ , sea  $u = v_1 - v_2$  con

$$v_1(x) = \lambda|x|^2, \quad v_2 = \lambda|x|^2 - u(x);$$

se elige  $\lambda = \frac{1}{2n} \sup_G (\Delta u(x))^+$  y se observa que

$$\Delta v_1 = 2\lambda n \geq 0 \text{ y } \Delta v_2 = 2\lambda n - \Delta u(x) \geq 0$$

las funciones  $v_1, v_2 \in \mathcal{C}^0(\overline{G})$  subarmónicas en  $G$  tienen sus trazas en  $E$ ; por lo tanto  $E$  contiene las trazas de las funciones  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ . Por el Teorema de Stone-Weierstrass, el resultado está probado. ■

## 2.3. Aplicación del Método de Perron a Mayorantes Armónicos

En esta sección se obtendrán los mayorantes armónicos de una función en el espacio de Hardy  $H^1$ , aplicando el Método de Perron.

**Definición 2.5** Sea  $X$  un espacio métrico. Una función  $u : X \rightarrow [-\infty, \infty)$  es semicontinua superiormente o (scs) si para cada  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto

$$\{x \in X \mid u(x) < a\}$$

es abierto en  $X$  o equivalentemente si para cada  $x \in X$ ,

$$\limsup_{y \rightarrow x} u(y) \leq u(x).$$

La definición de función subarmónica, debe ser formulada cuidadosamente para ser congruente con los ejemplos que surgen en sus aplicaciones. Para ello, será importante permitir que las funciones subarmónicas tomen el valor  $-\infty$  es decir, el ser continuas ya no será una condición necesaria para la subarmónicidad como se había definido anteriormente.

**Definición 2.6** Sea  $G$  un conjunto abierto en el plano complejo. Se dice que una función  $u : G \rightarrow [-\infty, \infty)$ , es subarmónica en  $G$  si:

- (i)  $u$  es scs en  $G$ ;
- (ii) para cada conjunto abierto  $A$  con cerradura compacta  $\overline{A} \subset G$  y cada función continua  $h : \overline{A} \rightarrow (-\infty, \infty)$ , la cual restringida a  $A$  es armónica, se tiene que si  $u \leq h$  en  $\partial A$ , entonces  $u \leq h$  en  $A$ .

El siguiente teorema relaciona la vieja y nueva definición.

**Teorema 2.6** Sea  $u$  una función scs en una región  $G$  en el plano complejo. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i)  $u$  es subarmónica en  $G$  ;

(ii) Para cada  $a \in G$  y para  $R > 0$  suficientemente pequeña se tiene

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{i\theta}) d\theta. \quad (2.12)$$

**Proposición 2.1** Si  $G$  es una región en el plano complejo y  $u$  es una función subarmónica en  $G$  entonces  $u \equiv -\infty$  en  $G$  el conjunto  $\{z : u(z) = -\infty\}$  tiene medida de Lebesgue cero en  $\mathbb{R}^2$  en  $G$  (y por lo tanto  $u > -\infty$  en un conjunto denso de  $G$ ).

DEMOSTRACIÓN: Se supone que  $u(a) > -\infty$  y  $\overline{D}(a, R) \subset G$ . Por (2.12),

$$\int_0^R u(a) r dr \leq \int_0^R \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta r dr.$$

Así

$$-\infty < u(a) \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D(a, R)} u(x + iy) dx dy$$

y la demostración es ahora inmediata. ■

**Proposición 2.2** Si  $u$  es una función de valores reales en  $\mathcal{C}^2(G)$ , entonces  $u$  es subarmónica en  $G$  si y sólo si  $\Delta u \geq 0$  en  $G$ .

DEMOSTRACIÓN: Veamos la necesidad. Sea  $u$  subarmónica en  $G$ . Se mostrará que cada disco  $D(0, 1) \subset G$  contiene un punto en el cual  $\Delta u \geq 0$ . Por el Teorema 1.9 existe una función continua  $h$  en  $\partial D$  la cual es armónica en  $D(0, 1)$ , tal que  $h = u$  en  $\partial D(0, 1)$ . Como  $u$  es subarmónica,  $v = h - u$  es no negativa en  $D(0, 1)$ , y por lo tanto  $v$  alcanza su máximo valor en algún punto en  $D(0, 1)$ . En cualquier punto tal que,  $0 \geq \Delta v = -\Delta u$ . Como  $\Delta u$  es continua;  $\Delta u \geq 0$  en  $G$ .

Verifiquemos la suficiencia. Se supone ahora que  $\Delta u \geq 0$  en  $G$ . Sea  $\delta > 0$  y la función  $u + \frac{1}{2}\delta(x^2 + y^2)$ , es fácil reducir la dirección contraria para el caso en el cual  $\Delta u \geq \delta$  para algún  $\delta > 0$ . Se considera  $A$  un conjunto abierto con cerradura compacta tal que  $\overline{A} \subseteq G$ . Sea  $h$  una función continua en  $\overline{A}$ , armónica en  $A$ , y satisface  $h \geq u$  en  $A$ . Pero si no, entonces  $v = u - h$  alcanza su máximo valor en algún punto en  $A$ , y en cualquier punto tal que  $0 \geq \Delta v = \Delta u$  que es una contradicción. ■

**Teorema 2.7** Si  $u$  es scs en  $X$ ,  $K$  es cualquier subconjunto no vacío de  $X$ , y  $u(x) \leq M$  para toda  $x \in K$ , entonces existe una sucesión de funciones continuas  $f_n : X \rightarrow (-\infty, \infty)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tal que  $M \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots$  en  $K$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = u(x)$  para cada  $x \in K$ .

DEMOSTRACIÓN: Si  $u \equiv -\infty$  en  $K$  es trivial. Si  $u \not\equiv -\infty$  en  $K$ . Para cada  $n = 1, 2, 3, \dots$ , se define

$$f_n(x) = \sup_{y \in K} [u(y) - n d(x, y)], \quad x \in X$$

donde  $d$  es la métrica de  $X$ . Es claro que  $M \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots \geq u$  en  $K$ .

Se fija  $n \geq 1$ . Para cualquier  $x_1, x_2 \in X$  y  $y \in K$ ,

$$u(y) - nd(x_1, y) \geq u(y) - nd(x_1, x_2) - nd(x_2, y).$$

Tomando el supremo sobre  $y$  se tiene que

$$\sup[u(y) - nd(x_1, y)] \geq \sup[u(y) - nd(x_2, y)] - nd(x_1, x_2)$$

Al transponer términos se obtiene

$$\pm[f_n(x_2) - f_n(x_1)] \leq nd(x_1, x_2)$$

con el signo  $+$ . Intercambiando los lugares de  $x_1$  y  $x_2$  se tiene la misma desigualdad con signo negativo.

Por lo tanto  $f_n$  es continua en  $X$ . Se fija  $x \in K$ . Se supone que  $u(x) > -\infty$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq u(x)$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $u(x) + 2\delta \leq f_n(x)$  para toda  $n \geq 1$ . Por definición de  $f_n$ , para cada  $n \geq 1$  existe  $y_n$  en  $K$  tal que  $u(x) + \delta \leq u(y_n) - nd(x, y_n)$  y por lo tanto

$$u(x) + \delta \leq u(x) + \delta + nd(x, y_n) \leq u(y_n) \leq M$$

para toda  $n \geq 1$ . En particular,  $d(x, y_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $u$  es scs.

$$u(x) + \delta \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u(y_n) \leq u(x)$$

Lo cual es una contradicción. Así se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = u(x)$ . Si  $u(x) = -\infty$  se modifica el argumento y se tiene la misma conclusión. ■

**Definición 2.7** Sea  $u$  subarmónica en una región  $G$ ,  $u \neq -\infty$ , y sea  $h$  armónica en  $G$ . Se dice que  $h$  es un mayorante armónico para  $u$  si  $h \geq u$  en  $G$ . Diremos que  $h$  es el mayorante armónico más pequeño de  $u$  si:

(i)  $h$  es mayorante armónico para  $u$ , y

(ii) Si  $f$  es cualquier mayorante armónico para  $u$  en  $G$ , entonces  $h \leq f$  en  $G$ .

**Lema 2.1** Sea  $u$  subarmónica en el disco unitario  $D(0, 1)$ ,  $u \neq -\infty$ . Para cada número  $r \in (0, 1)$  se toma

$$h_r(z) = \int_{\Gamma} P_{z/r}(\theta) u(re^{i\theta}) d\theta, \quad |z| < r. \quad (2.13)$$

donde  $P_{z/r}(\theta)$  es el núcleo de Poisson, (ver Sección 1.2).

Entonces  $h_r$  es un mayorante armónico para  $u$  en el disco  $|z| < r$  y para cada función  $f$  continua en  $|z| \leq r$ , armónica en  $|z| < r$ , y con  $f \geq u$  para  $|z| \leq r$  se tiene que  $f \geq h_r$  para  $|z| < r$ .

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 2.7 existen funciones continuas  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  en el círculo  $|z| = r$  tal que  $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \dots$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = u$  en cada punto del círculo  $|z| = r$ . Para cada  $n \geq 1$ , sea  $h_r^{(n)}$  la única función la cual es continua para  $|z| \leq r$ , armónica para  $|z| < r$  y tal que  $h_r^{(n)} = g_n$  en el círculo  $|z| = r$ . La existencia de  $h_r^{(n)}$  está garantizada por el Teorema 1.9 y la fórmula explícita para  $h_r^{(n)}$  puede ser dada usando (1.20):

$$h_r^{(n)}(z) = \int_{\Gamma} P_{z/r}(\theta) g_n(re^{i\theta}) d\theta, \quad |z| < r.$$

Claramente  $h_r^{(1)} \geq h_r^{(2)} \geq \dots$ . Ya que  $u$  es subarmónica y  $h_r^{(n)} \geq u$  en  $|z| = r$ , luego  $h_r^{(n)} \geq u$  para  $|z| \leq r$ . Por la Proposición 2.1,  $u > -\infty$  en un conjunto denso, así por el Teorema de Harnack,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_r^{(n)}$  existe uniformemente en subconjuntos compactos del disco  $|z| < r$  y es armónica en el disco. Por el Teorema de convergencia monótona,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_r^{(n)} = h_r$  para  $|z| < r$ . Como  $h_r^n \geq u$  para  $|z| < r$  y para toda  $n \geq 1$ ,  $h_r \geq u$  para  $|z| < r$ . Por lo tanto  $h_r$  es mayorante armónico de  $u$  en el disco  $|z| < r$ . Sea  $f$  cualquier función continua en  $|z| \leq r$ , armónica en  $|z| < r$  y con  $f \geq u$  para  $|z| \leq r$ . En la construcción de la primera parte de la prueba se tiene que  $g_n \leq f$  en  $|z| = r$  para cada  $n \geq 1$ , pues se puede obtener esto reemplazando  $g_n$  por el  $\min(g_n, f)$  y repitiendo la construcción. Por lo tanto para  $|z| < r$  y  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} h_r(z) &= \int_{\Gamma} P_{z/r}(\theta) g_n(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \int_{\Gamma} P_{z/r}(\theta) f(re^{i\theta}) d\theta \\ &= f(z) \end{aligned}$$

Por Teorema 1.11. Haciendo  $n \rightarrow \infty$ , se llega a que  $h_r \leq f$  para  $|z| < r$ . ■

**Teorema 2.8** *Sea  $u$  subarmónica en el disco unitario  $D$ ,  $u \not\equiv -\infty$ . Existe el mayorante armónico para  $u$  si y sólo si*

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt < \infty. \quad (2.14)$$

*En este caso el mayorante armónico  $h$  para  $u$  más pequeño, está dada por*

$$h(z) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{z/r}(t) u(re^{it}) dt \quad \text{para toda } z \in D \quad (2.15)$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que existe un mayorante armónico  $h$  para  $u$ . Por la propiedad del valor medio, para toda  $r \in (0, 1)$ ,

$$\int_{\Gamma} u(re^{it}) dt \leq \int_{\Gamma} h(re^{it}) dt = h(0) < \infty.$$

Así (2.14) se mantiene. Inversamente sea (2.14) dada y definida  $h_r$  para  $|z| < r$  por la ecuación (2.13) del lema anterior. Si  $0 < r < r' < 1$ , entonces por el Lema 2.1, es claro que  $h_r \leq h_{r'}$  para  $|z| < r$ . Por (2.14),  $\sup_{0 < r < 1} h_r(0) < \infty$ . Por el Teorema de Harnack (Teorema 1.11),  $h = \lim_{r \rightarrow 1} h_r$  existe uniformemente en subconjuntos compactos de  $D$ , y  $h$  es armónica en  $D$ . Ya que  $h_r \geq u$  para  $|z| < r$ , para cada



$r \in (0, 1)$ , entonces  $h \geq u$  en  $D$ . Sea  $f$  cualquier mayorante armónico para  $u$  en  $D$ . Por el Lema 2.1,  $f \geq h_r$  para  $|z| < r$  para cada  $r \in (0, 1)$ , por lo tanto  $f \geq h$  en  $D$ . Así  $h$  resulta el mayorante armónico más pequeño de  $u$ . ■



# Capítulo 3

## Regiones de Dirichlet y Aplicaciones

### 3.1. Región de Dirichlet

**Definición 3.1** Una región  $G$  es una región de Dirichlet si el problema de Dirichlet se puede resolver en  $G$ . Es decir si para cada función continua  $f : \partial_\infty G \rightarrow \mathbb{R}$ , existe una función  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $u$  es armónica en  $G$  y  $u(z) = f(z)$ , para todo  $z$  en  $\partial_\infty G$ .

En este capítulo, veremos condiciones suficientes para que una región sea de Dirichlet. El primer paso en esta dirección es suponer que hay funciones que pueden ser usadas para restringir el comportamiento de las funciones de Perron cerca de la frontera.

Dado un conjunto  $G$  y un punto  $a$  en  $\partial_\infty G$ . Para  $r > 0$ , sea  $G(a; r) := G \cap B(a; r)$ .

**Definición 3.2** Sea  $G$  una región y  $a \in \partial_\infty G$ . Una barrera para  $G$  en  $a$  es una familia  $\{\psi_r \mid r > 0\}$  de funciones tales que:

(a)  $\psi_r$  está definida y es superarmónica en  $G(a; r)$ , con  $\psi_r(z) > 0$ ;

(b)  $\lim_{z \rightarrow a} \psi_r(z) = 0$ ;

(c)  $\lim_{z \rightarrow w} \psi_r(z) = 1$ , para  $w$  en  $G \cap \{w \mid |w - a| = r\}$ .

La siguiente observación nos será útil: Si  $\widehat{\psi}_r$  está definida por  $\widehat{\psi}_r = \psi_r$  en  $G(a; r)$  y  $\widehat{\psi}_r = 1$  para  $z$  en  $G - B(a; r)$ , entonces  $\widehat{\psi}_r$  es superarmónica en  $G$ .

Así las funciones  $\widehat{\psi}_r$  se aproximan a la función la cual es 1 en todas partes pero en  $z = a$  es cero.

La segunda observación es que si  $G$  es una región de Dirichlet entonces, hay una barrera para  $G$  en

cada punto de  $\partial_\infty G$ . En efecto, si  $a \in \partial_\infty G$  ( $a \neq \infty$ ) y  $f(z) = |z - a|(1 + |z - a|)^{-1}$ , para  $z \neq \infty$  con  $f(\infty) = 1$ , entonces  $f$  es continua en  $\partial_\infty G$ , así hay una función continua  $u : G^- \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u$  es armónica en  $G$  y  $u(z) = f(z)$  para  $z \in \partial_\infty G$ . En particular,  $u(a) = 0$  y  $a$  es el único cero de  $u$  en  $G^-$ .

Sea  $c_r = \inf\{u(z) \mid |z - a| = r, z \in G\} = \min\{u(z) \mid |z - a| = r, z \in G^-\} > 0$ . Se define  $\psi_r : G(a; r) \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\psi_r(z) = \frac{1}{c_r} \min\{u(z), c_r\}$

La familia  $\psi_r$  es una barrera pues:

(a)  $\psi_r$  está definida y superarmónica,

(b)  $\lim_{z \rightarrow a} \psi_r(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{c_r} \min\{u(z), c_r\} = 0$ ,

(c)  $\lim_{z \rightarrow w} \psi_r(z) = \lim_{z \rightarrow w} \frac{1}{c_r} \min\{u(z), c_r\} = 1$  para  $w \in G \cap \{w \mid |w - a| = r\}$ .

El siguiente resultado establece cierto el recíproco.

**Teorema 3.1** *Sea  $G$  una región y  $a \in \partial_\infty G$  con barrera para  $G$  en  $a$ . Si  $f : \partial_\infty G \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $u$  es la función de Perron asociada a  $f$ , entonces*

$$\lim_{z \rightarrow a} u(z) = f(a)$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{\psi_r \mid r > 0\}$  una barrera para  $G$  en  $a$  y por conveniencia se considera  $a \neq \infty$ ; y  $f(a) = 0$ .

Sea  $\epsilon > 0$  se elige  $\delta > 0$  tal que  $|f(w)| < \epsilon$  siempre que  $w \in \partial_\infty G$  y  $|w - a| < 2\delta$ ; sea  $\psi := \psi_\delta$ . Sea  $\widehat{\psi} : G \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\widehat{\psi}(z) = \psi(z)$  para  $z \in G(a; \delta)$  y  $\widehat{\psi}(z) = 1$  para  $z \in G - B(a; \delta)$ . Entonces  $\widehat{\psi}$  es superarmónica.

Sea  $M > 0$  tal que  $|f(w)| \leq M$  para todo  $w \in \partial_\infty G$ . La función  $-M\widehat{\psi} - \epsilon$  es subarmónica. Se afirma que

$$-M\widehat{\psi} - \epsilon \text{ está en } \mathcal{P}(f, G) \tag{3.1}$$

Si  $w \in \partial_\infty G - B(a; \delta)$ , entonces

$$\limsup_{z \rightarrow w} [-M\widehat{\psi}(z) - \epsilon] = -M - \epsilon < f(w).$$

Ya que

$$\widehat{\psi}(z) \geq 0$$

$$-M\widehat{\psi}(z) \leq 0$$

$$-M\widehat{\psi}(z) - \epsilon \leq -\epsilon$$

$$\limsup_{z \rightarrow w} [-M\widehat{\psi}(z) - \epsilon] \leq -\epsilon \text{ para todo } w \in \partial_\infty G.$$

En particular. Si  $w \in G \cap B(a; \delta)$ , entonces por la elección de  $\delta$

$$\limsup_{z \rightarrow w} [-M\widehat{\psi}(z) - \epsilon] \leq -\epsilon < f(w).$$

Esto prueba la afirmación (3.1). Por lo tanto

$$-M\widehat{\psi}(z) - \epsilon \leq u(z) \quad \text{para todo } z \in G. \quad (3.2)$$

Un análisis similar proporciona

$$\liminf_{z \rightarrow w} [M\widehat{\psi}(z) + \epsilon] \geq \limsup_{z \rightarrow w} \varphi(z),$$

para toda  $\varphi$  en  $\mathcal{P}(f, G)$  y  $w$  en  $\partial_\infty G$ . Por la cuarta versión del Principio del Máximo, Teorema 2.2 Capítulo 2,  $\varphi(z) \leq M\widehat{\psi}(z) + \epsilon$  para  $\varphi$  en  $\mathcal{P}(f; G)$  y  $z$  en  $G$ . Por lo tanto

$$u(z) \leq M\widehat{\psi}(z) + \epsilon. \quad (3.3)$$

Combinando 3.2 y 3.3,

$$-M\widehat{\psi}(z) - \epsilon \leq u(z) \leq M\widehat{\psi}(z) + \epsilon \quad \text{para toda } z \text{ en } G.$$

Pero  $\lim_{z \rightarrow a} \widehat{\psi}(z) = \lim_{z \rightarrow a} \psi(z) = 0$ ; y como  $\epsilon$  fue arbitrario, tenemos que  $\lim_{z \rightarrow a} u(z) = 0 = f(a)$ . Esto completa la prueba. ■

**Corolario 3.1** *Una región  $G$  es una región de Dirichlet si y sólo si hay una barrera para  $G$  en cada punto de  $\partial_\infty G$ .*

El corolario anterior no es la solución a la caracterización de las regiones de Dirichlet, pues éste da una condición necesaria y suficiente para que una región sea una región de Dirichlet y esta condición es formalmente más débil que la definición. Sin embargo, existen dificultades prácticas con el Corolario 3.1. Una dificultad es que la condición en el Corolario 3.1 no es fácil verificarla. Otra dificultad es que esta es esencialmente el mismo tipo de condición que en la definición; ambas hacen la hipótesis de la existencia de funciones con comportamiento prescrito en la frontera.

¿Qué es lo que se desea?: Una condición topológico-geométrica en  $G$  la cual sea necesaria y suficiente para que  $G$  sea una Región de Dirichlet. Tales condiciones son usualmente fáciles de verificar para una región dada. A continuación veremos algunas condiciones suficientes.

**Lema 3.1** *Sea  $G$  una región en  $\mathbb{C}$  y sea  $S$  un subconjunto cerrado de  $\mathbb{C}_\infty$ , tal que  $\infty \in S$  y  $S \cap \partial_\infty G = \{a\}$ . Si  $G_0$  es la componente de  $\mathbb{C}_\infty - S$  la cual contiene  $G$ , entonces  $G_0$  es una región simplemente conexa en el plano.*

**Teorema 3.2** Sea  $G$  una región en  $\mathbb{C}$  y  $a \in \partial_\infty G$ , tal que la componente de  $\mathbb{C}^\infty - G$  que contiene al punto  $a$  no se reduce a un punto. Entonces  $G$  tiene una barrera en  $a$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $S$  la componente de  $\mathbb{C}^\infty$  que contiene al punto  $a$ . Mediante una transformación de Möbius, podemos asumir que  $a = 0$  y  $\infty \in S$ .

Sea  $G_0$  la componente de  $\mathbb{C}^\infty - S$  que contiene a  $G$ . Por el Lema anterior tenemos que  $G_0$  es simplemente conexo; ya que  $0 \notin G_0$ , hay una rama  $l$  del  $\log z$  definida en  $G_0$ . En particular  $l$  está definida en  $G$ .

Para  $r > 0$ , sea  $l_r(z) = l(\frac{z}{r}) = l(z) - \log r$  para  $z$  en  $G(0; r)$ , así  $-l_r(G(0; r))$  es un subconjunto del semiplano derecho. Ahora sea  $C_r = G \cap \{z \mid |z| = r\}$ ; entonces  $C_r$  es la unión a lo sumo numerable de arcos  $\gamma_r$  abiertos disjuntos a pares en  $\{z \mid |z| = r\}$ . Si  $-l(\gamma_k) = (i\alpha_k, i\beta_k) = \{it \mid \alpha_k < t < \beta_k\}$  para  $k \geq 1$ . Entonces

$$-l_r(C_r) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (i\alpha_k, i\beta_k)$$

y los intervalos son disjuntos a pares.

La longitud de  $\gamma_k$  es  $(\beta_k - \alpha_k)$ , así

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \leq 2\pi. \quad (3.4)$$

Ahora si el  $\log$  es la rama principal del logaritmo, entonces

$$h_k(z) = \operatorname{Im} \log \left( \frac{z - i\alpha_k}{z - i\beta_k} \right)$$

es armónica en el semiplano derecho y  $0 < h_k(z) < \pi$  para  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Más aún

$$h_k(x + iy) = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{x}{x^2 + (y - t)^2} dt. \quad (3.5)$$

Si  $x > 0$ , por la ecuación 3.5 es claro que:

$$\sum_{k=1}^n h_k(x + iy) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (y - t)^2} dt = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (y - t)^2} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan \frac{y + a}{x} - \lim_{b \rightarrow -\infty} \arctan \frac{y - b}{x} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Como cada  $h_k \geq 0$ , por el Teorema de Harnack se tiene que

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k$$

es armónica en el semiplano derecho. Así  $\psi_r(z) = \frac{1}{\pi} h(-l_r(z))$  es armónica en  $G(0; r)$ , ésto mostrará que  $\{\psi_r\}$  es una barrera en  $a$ .

Fijando  $r > 0$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re}[-l_r(z)] = +\infty$ , así es suficiente mostrar que  $h(z) \rightarrow 0$  cuando  $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$ . Usando la ecuación (3.4) y 3.5 se sigue que para  $x > 0$

$$\begin{aligned} h(x + iy) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x + iy) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y-t}{x}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{dt}{1 + \left(\frac{y-t}{x}\right)^2} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \leq \frac{2\pi}{x}. \end{aligned}$$

Pues

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 + \left(\frac{y-t}{x}\right)^2} \leq 1 \\ \text{implica} \quad &\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{dt}{1 + \left(\frac{y-t}{x}\right)^2} \leq \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dt \\ \text{y sumando:} \quad &\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{dt}{1 + \left(\frac{y-t}{x}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dt = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Como cada  $h_k \geq 0$ , entonces  $h \geq 0$ , así  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x + iy) = 0$  uniformemente en  $y$ , esto da que  $\lim_{z \rightarrow 0} \psi_r(z) = 0$ .

Para probar que  $\lim_{z \rightarrow w} \psi(z) = 1$  para  $w$  en  $G$  con  $|w| = r$ , es suficiente probar que

$$\lim_{z \rightarrow ic} h(z) = \pi \text{ si } \alpha_k < c < \beta_k \text{ para algún } k. \quad (3.6)$$

Así fijando  $k \geq 1$  y  $c$  en  $(\alpha_k, \beta_k)$ , se mostrará lo siguiente: Existen números  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\alpha < \alpha_k < \beta_k < \beta$  y si

$$u(z) = \operatorname{Im} \log \left( \frac{z - i\alpha}{z - i\alpha_k} \right) \quad (3.7)$$

y

$$v(z) = \operatorname{Im} \log \left( \frac{z - i\beta_k}{z - i\beta} \right). \quad (3.8)$$

Entonces  $x > 0$  y  $\alpha_k < y < \beta_k$  implica

$$0 \leq h(z + iy) - h_k(x + iy) \leq u(x + iy) + v(x + iy). \quad (3.9)$$

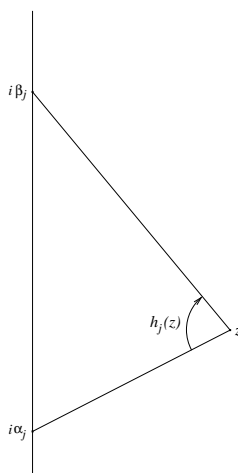
Una vez establecido ésto, la ecuación (3.6) es probada como sigue:

$$v(x + iy) = \arctan \left( \frac{y - \beta_k}{x} \right) - \arctan \left( \frac{y - \beta}{x} \right),$$

así si  $x + iy \rightarrow ic$ ,  $c < \beta_k < \beta$ , entonces  $v(x + iy) \rightarrow 0$ .

Similarmente  $u(x + iy) \rightarrow 0$  cuando  $x + iy \rightarrow ic$  con  $\alpha < \alpha_k < c$ , por lo tanto se tiene que

$$\lim [h(z) - h_k(z)] = 0. \quad (3.10)$$

Figura 3.1: Intervalo  $(i\alpha_j, i\beta_j)$ 

Pero

$$h(x + iy) = \arctan\left(\frac{y - \alpha_k}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y - \beta_k}{x}\right).$$

Así  $\lim_{z \rightarrow ic} h_k(z) = \pi$ , al combinar la ecuación (3.6) y (3.10).

Para probar (3.9), se argumenta geoméricamente. Se tiene que  $h_j(z)$  es el ángulo en la Figura 3.1. Consideremos todos los intervalos  $(i\alpha_j, i\beta_j)$  que están por encima de  $(i\alpha_k, i\beta_k)$  y trasladándolos hacia abajo a lo largo del eje imaginario, manteniéndolos por encima de  $(i\alpha_k, i\beta_k)$  hasta que sus puntos finales coincidan y tal que uno de los puntos finales coincidan con  $i\beta_k$ . Como  $\sum(\beta_j - \alpha_j) \leq 2\pi$ , existe un número  $\beta < (\beta_k + 2\pi)$  tal que cada intervalo trasladado caiga en  $(i\beta_k, i\beta)$ . Ahora si  $z = x + iy$ ,  $x > 0$  y  $\alpha_k < y < \beta_k$ , entonces el ángulo  $h_j(z)$  crece cuando en el intervalo  $(i\alpha_j, i\beta_j)$  es trasladado hacia abajo. Por lo tanto  $\alpha_k < \text{Im } z < \beta_k$  implica que

$$\sum_j h_j(z) \leq v(z), \quad (3.11)$$

donde  $v$  es como en ecuación (3.8) y la suma es sobre todas las  $j$ 's tal que  $\alpha_j \geq \beta_k$ . Realizando una traslación similar pero hacia arriba de los intervalos  $(i\alpha_j, i\beta_j)$  con  $\beta_j \leq \alpha_k$  existe un número  $\alpha < (\alpha_k - 2\pi)$  tal que cada intervalo trasladado cae en  $(i\alpha, i\alpha_k)$ . Así si  $u$  es como en la ecuación (3.7) y  $\alpha_k < \text{Im } z < \beta_k$  implica que

$$\sum_j h_j(z) \leq u(z), \quad (3.12)$$

donde la suma es sobre todas las  $j$ 's con  $\beta_j \leq \alpha_k$ .

Combinando la ecuación (3.11) y (3.12) la afirmación (3.9) está probada. ■

**Corolario 3.2** Sea  $G$  una región tal que la componente de  $\mathbb{C}_\infty - G$  no se reduce a un punto; entonces  $G$  es una región de Dirichlet.



**Corolario 3.3** *Una región simplemente conexa es una región de Dirichlet.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $G \neq \mathbb{C}$  el resultado es claro ya que  $\mathbb{C}_\infty - G$  tiene sólo una componente.

Si  $G = \mathbb{C}$  el resultado es trivial. ■

## 3.2. Transplantes Conformes

Los mapeos conformes en el plano son una área del análisis y de la geometría que se encarga de analizar y entender aquellas transformaciones del plano en el plano que tienen la propiedad de preservar el ángulo que forman cualesquiera dos curvas que se cortan en un punto. Se verá como se modelan algunos fenómenos físicos en conjuntos del plano complejo y se aprovechan las propiedades que poseen las funciones conformes, para transformar la geometría del modelo, en otra donde éste sea planteado y se facilite su solución. Para ello se comenzará con la definición de Mapeo Conforme, Transplante Conforme y algunas de sus propiedades así como algunos ejemplos.

**Definición 3.3** *Sean  $D$  y  $\mathcal{D}$  dos dominios en el plano complejo y  $f : D \rightarrow \mathcal{D}$  una función analítica e inyectiva, entonces diremos que  $w = f(z)$  es un mapeo conforme en  $z_0$  que conserva la magnitud y el sentido del ángulo de intersección de dos curvas cualesquiera que se intersecan en  $z_0$ . Una transformación que es conforme en todo punto de un dominio  $D$  diremos que es conforme en  $D$ , que  $f$  mapea  $D$  de manera conforme sobre  $\mathcal{D}$ , o que  $\mathcal{D}$  es la imagen conforme de  $D$  bajo  $f$ .*

**Lema 3.2** *Si  $f$  mapea a  $D$  de manera conforme en  $\mathcal{D}$ , entonces  $f^{-1}$  mapea a  $\mathcal{D}$  de manera conforme en  $D$ .*

DEMOSTRACIÓN: Debido a que  $f$  es inyectiva, por definición, entonces existe la función inversa  $f^{-1}$  que mapea a  $\mathcal{D}$  en  $D$ . Para probar el lema es suficiente con que  $f^{-1}$  sea analítica en  $\mathcal{D}$ , pero esto se sigue directamente del teorema de la función inversa ya que  $f'(z) \neq 0$  para cualquier punto en  $D$ , es decir se cumple que  $f^{-1}$  es derivable y que

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad f^{-1}(z_0) = w_0. \quad \blacksquare$$

**Definición 3.4** *Supongamos que  $f : D \rightarrow \mathcal{D}$  es analítica y mapea un dominio  $D$ , de manera conforme en un dominio  $\mathcal{D}$ . Supongamos también que se tiene una función de variable compleja a valores reales definida sobre  $D$  la cual denotamos por  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Se define a  $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , por*

$$\psi(w) := \varphi(f^{-1}(w)), \quad (3.13)$$

y se le llama el transplante conforme de  $\varphi$  bajo  $f$ .

**Definición 3.5** Definimos el gradiente complejo de  $\varphi$  como

$$\text{grad } \varphi(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z) + i \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z), \quad z = x + iy.$$

Si  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  y  $\varphi(z) = \psi(f(z))$ , como en la Definición 3.4 entonces por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ahora sustituyendo en la definición de gradiente complejo, se tiene:

$$\text{grad } \varphi(z) = \frac{\partial \psi}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \frac{\partial \psi}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Como  $f$  es analítica,  $u$  y  $v$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, así:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi(z) &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \frac{\partial \psi}{\partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \text{grad } \psi(\omega) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \text{grad } \psi(\omega) \overline{f'(z)}, \quad \omega = f(z), \quad z \in D, \end{aligned}$$

y se ha probado el siguiente resultado.

**Lema 3.3** Sea  $f$  una función analítica e inyectiva que mapea un dominio  $D$  de manera conforme en un dominio  $\mathcal{D}$ ,  $f(z) = \omega$ , supongamos también que se tiene una función de variable compleja a valores reales definida sobre  $D$ , la cual denotamos por  $\varphi$ , entonces el trasplante conforme de  $\varphi$  definido por  $\psi(f(z)) = \varphi(z)$  de  $D$  sobre  $\mathcal{D}$ , satisface que:

$$\text{grad } \varphi(z) = \text{grad } \psi(\omega) \overline{f'(z)}, \quad \omega = f(z), \quad z \in D.$$

**Definición 3.6** Sea  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$  se define el producto interior complejo como  $z \bullet w = xu + yv \approx (x, y) \bullet (u, v)$ .

**Definición 3.7** Dada  $\varphi$  definida en  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^2(D)$ , se define el Laplaciano de  $\varphi$  como:

$$\Delta \varphi(z) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right]\end{aligned}\quad (3.14)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \quad (3.15)$$

Sumando las ecuaciones (3.14) y (3.15) se tiene:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2. \quad (3.16)$$

Análogamente:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2. \quad (3.17)$$

Ahora, sumando las ecuaciones (3.16) y (3.17), implica que

$$\begin{aligned}\Delta \varphi &= \frac{\partial \psi}{\partial u} (\text{grad } u)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial v} (\text{grad } v)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} |\text{grad } u|^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} |\text{grad } v|^2.\end{aligned}$$

Como  $f = u + iv$  es una función analítica entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad (3.18)$$

y

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

entonces

$$|f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2. \quad (3.19)$$

Finalmente por (3.18) y (3.19) se tiene

$$\Delta \varphi(z) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} |f'(z)|^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} |f'(z)|^2 = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) |f'(z)|^2 = \Delta \psi |f'(z)|^2.$$

Así se ha probado el siguiente lema:

**Lema 3.4** Sean  $D$  y  $\mathcal{D}$  dominios en  $\mathbb{C}$  y  $f : D \rightarrow \mathcal{D}$  una función analítica e inyectiva que mapea al dominio  $D$  de manera conforme en el dominio  $\mathcal{D}$ . Supongamos también que se tiene una función de variable compleja a valores reales definida sobre  $D$ , la cual denotamos por  $\varphi$ , entonces el transplante conforme de  $\varphi$  definido por  $\psi(f(z)) = \varphi(z)$  de  $D$  sobre  $\mathcal{D}$ , satisface que:

$$\Delta \varphi(z) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} |f'(z)|^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} |f'(z)|^2 = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) |f'(z)|^2 = \Delta \psi(\omega) |f'(z)|^2. \quad (3.20)$$

A continuación se enuncia y demuestra unos resultados de la teoría de funciones analíticas con el fin de mostrar una consecuencia importante de este lema.

**Lema 3.5** *Sea  $D$  un dominio y  $f$  una función analítica en  $z_0 \in D$ , tal que la primera derivada distinta de cero en  $z_0$  es  $f^{(k)}$ ,  $k \geq 1$ , entonces existe una vecindad  $\mathcal{V}(z_0)$ , y una vecindad  $\mathcal{V}(\omega_0)$ ,  $\omega_0 = f(z_0)$ , tal que cada  $\omega \in \mathcal{V}(\omega_0)$  tiene al menos una y a lo más  $k$  preimágenes distintas en  $\mathcal{V}(z_0)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\gamma$  una circunferencia con centro en  $z_0$  y radio  $\rho$  tal que  $f(z) \neq \omega_0$  para cualquier  $z \in I(\gamma) - \{z_0\}$ . Tal círculo existe pues si suponemos lo contrario sucedería que para cualquier disco de radio  $\epsilon$  y centro  $z_0$ , éste contiene una infinidad de puntos  $z$  tales que  $f(z) = \omega_0$ , luego por el teorema de unicidad para funciones analíticas (Apéndice B, Teorema B.1) se tendría que  $f(z) \equiv \omega_0$  en  $D$ , lo contrario a la hipótesis de que  $f'(z_0) \neq 0$ . Tomamos  $\mathcal{V}(z_0) = I(\gamma)$ . Sea  $\Gamma = f(\gamma)$ . Se define a  $\delta$  como la distancia entre  $\omega_0$  y  $\Gamma$ , se toma como  $\mathcal{V}(\omega_0)$  al círculo  $|\omega - \omega_0| < \delta$ . Al tomar un punto  $\omega \in \mathcal{V}(\omega_0)$  entonces sucede que

$$|f(z) - \omega_0| \geq \delta > |\omega - \omega_0|, \quad \text{para cualquier } z \in \gamma.$$

Entonces por el Teorema de Rouché la función  $f - \omega_0$  y la función  $f - \omega_0 + (\omega_0 - \omega) = f - \omega$  tienen el mismo número de ceros en  $I(\gamma)$ . Aplicando el Teorema de Taylor para funciones analíticas (Apéndice B, Teorema B.2) a  $f$  alrededor de  $z_0$  y considerando que  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$  se tiene que

$$f(z) - \omega_0 = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

es decir que  $z_0$  es un cero de orden  $k$ , por lo tanto  $f - \omega$  tiene a lo más  $k$  ceros. El resultado es inmediato dado que  $\omega$  es arbitrario. ■

**Corolario 3.4** *Si  $f$  es una función analítica e inyectiva en un dominio  $D$ , entonces  $f'(z) \neq 0$  para cada  $z \in D$ .*

DEMOSTRACIÓN: Con las hipótesis establecidas, tómesese  $z_0 \in D$ , como  $f$  no es constante por ser inyectiva, sea  $k$  el orden de la primer derivada que no se anula en ese punto, entonces se tiene, por el Lema 3.5, la existencia de una vecindad en  $z_0$  y otra vecindad en  $\omega_0$  de manera que cada punto en esta última, tiene una y a lo más  $k$  imágenes inversas en la vecindad de  $z_0$ , dado que  $f$  es inyectiva  $k = 1$ . ■

**Corolario 3.5** *El transplante conforme de una función armónica es armónica.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $D$  y  $\mathcal{D}$  dominios en  $\mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathcal{D}$  una función analítica e inyectiva que mapea al dominio  $D$  de manera conforme al dominio  $\mathcal{D}$ , y sea  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  con  $\psi(\omega) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  el transplante conforme de  $\varphi$  bajo  $f$  definida por

$$\psi(\omega) = \varphi(f^{-1}(\omega)),$$

Por el Lema 3.20 se tiene que

$$\Delta\varphi(z) = \Delta\psi(\omega)|f'(z)|^2. \quad (3.21)$$

Por hipótesis se tiene que  $\varphi$  es armónica, es decir  $\Delta\varphi = 0$ , así en el lado derecho de la ecuación (3.21) también es cero. Como  $f$  es analítica e inyectiva por el Corolario 3.4 se tiene que  $f'(z) \neq 0$  para toda  $z$  en  $D$ . Por lo tanto  $\Delta\psi(\omega) = 0$ . ■

Con ejemplos específicos se ilustra la utilidad del transplante conforme.

**Ejemplo 3.1** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y acotado por una curva de Jordan  $\Gamma$ , salvo un número finito de puntos y  $\phi_0$  una función continua (salvo en un número finito de puntos)

$$\begin{aligned} \phi_0 : \Gamma &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\rightarrow \phi_0(z) \quad z \in \Gamma. \end{aligned}$$

El problema es encontrar una función  $\phi$  continua en  $D \cup \Gamma$  y dos veces continuamente diferenciable en  $D$  tal que:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } D \quad (3.22)$$

y

$$\phi = \phi_0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (3.23)$$

Este es el Problema de Dirichlet para la región  $D$  con datos en la frontera  $\phi_0$ .

Una ilustración física es la distribución de temperatura estacionaria; es decir que no depende del tiempo, en una viga de longitud infinita con una sección transversal  $D$ . Si la viga es homogénea y la función  $\phi_0$  indica los valores de la temperatura (supóngase que es independiente de la coordenada perpendicular a  $D$ ) en la superficie de la viga, la temperatura en el interior satisface (3.22) y (3.23). Con éstas condiciones se mostró en el Capítulo 1, Teorema 1.9 que  $\phi$  existe; satisface (3.22) y (3.23) y además es única. Aquí se muestra como esta función se puede construir. Supongamos que tenemos un mapeo conforme  $f : D \rightarrow B(0,1)$  que transforme la viga en un cilindro, y que  $f$  puede ser extendido a un mapeo continuo de  $\partial D$  en  $\overline{B}(0,1)$ . Por el Corolario 3.5, el transplante es solución, y entonces satisface:

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{en } B(0,1),$$

y los valores en la frontera son:  $\psi(w) = \psi_0(w) = \phi_0(f^{-1}(w))$ , para  $|w| = 1$ .

Como se vió en el Capítulo 1, Teorema 1.3,  $\psi_0$  se puede expresar como una serie de Fourier, es decir la función  $\psi$  puede ser representada por una serie infinita de senos y cosenos.

Ahora se obtiene  $\phi$  por el transplante

$$\phi(z) = \psi(f(z)).$$

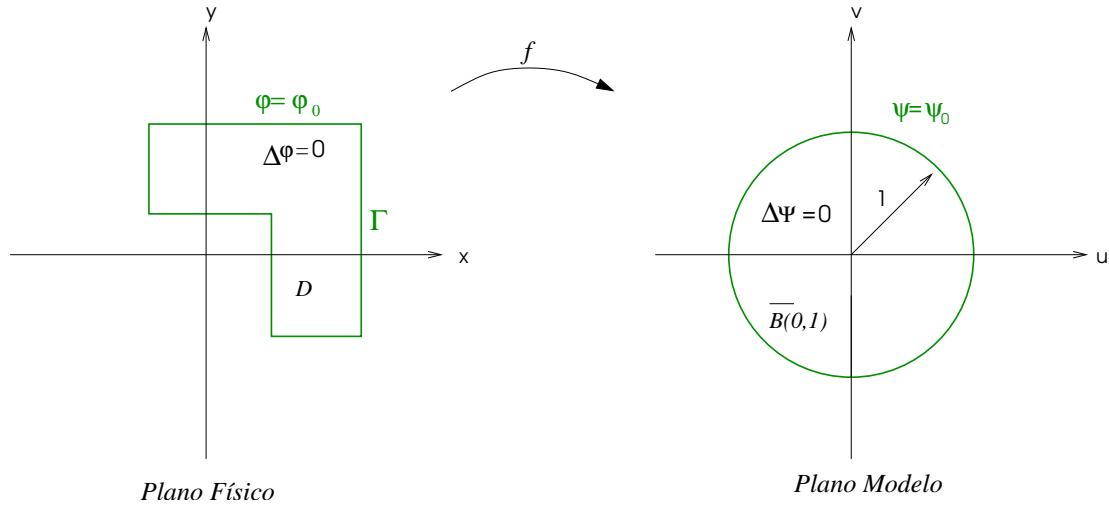


Figura 3.2: Problema de Dirichlet

Sean los valores de la frontera transplantados y representados por la siguiente serie de Fourier:

$$\psi_0(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \quad (a_n = \bar{a}_n) \quad (3.24)$$

donde  $\sum |a_n| < \infty$ . Se mostrará que la solución  $\phi$  del Problema de Dirichlet en el plano físico está dado por:

$$\phi(z) = a_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (f(z))^n.$$

En efecto: Como  $f(z)$  es un punto en el círculo unitario, entonces es de la forma  $f(z) = e^{i\theta}$  y por lo tanto  $z = f^{-1}(e^{i\theta})$ , luego el transplante  $\phi(z) = \psi(f(z))$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$\phi(f^{-1}(e^{i\theta})) = \psi(e^{i\theta}).$$

Por la ecuación (3.24) se tiene

$$\begin{aligned} \phi(z) = \psi(e^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (e^{i\theta})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (f(z))^n. \end{aligned}$$

Como  $a_n = \bar{a}_n$  se llega a que  $\bar{a}_n + a_n = 2 \operatorname{Re} a_n$  y entonces

$$\phi(z) = a_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (f(z))^n.$$

Se da otro ejemplo:

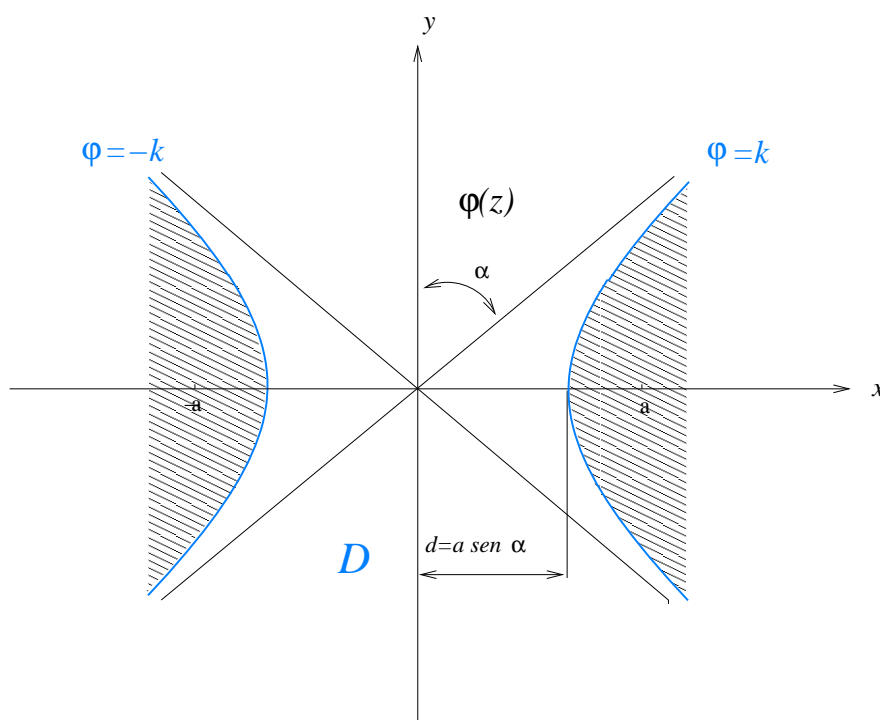
**Ejemplo 3.2** Consideremos la región limitada por las ramas de una hipérbola de focos

$$\pm a = \sqrt{(a \operatorname{sen} \alpha)^2 + (a \operatorname{cos} \alpha)^2}$$

y con ecuación:

$$\left(\frac{x}{a \operatorname{sen} \alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{a \operatorname{cos} \alpha}\right)^2 = 1 \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (3.25)$$

Se considera que las ramas son electrodos cargados eléctricamente, dicha carga genera un campo y a su vez un potencial eléctrico. Supongamos que el valor del potencial eléctrico de cada electrodo tiene magnitud,  $V = +k$  y  $V = -k$  respectivamente.



*Campo eléctrico entre electrodos hiperbólicos.*

Figura 3.3: Problema Físico.

Con estas condiciones es de interés conocer el campo vectorial  $\mathbf{E}$  del campo eléctrico generado entre los electrodos, ver Figura 3.3 Es necesario enunciar la relación que tiene el campo  $\mathbf{E}$  y el potencial eléctrico  $V$ . Por definición se tiene que el potencial entre dos puntos unidos mediante alguna curva  $\gamma$  es

$$V = \varphi = - \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r},$$

y entonces  $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  y como  $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = \operatorname{grad} V \cdot d\mathbf{r}$ , por lo tanto  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$ . Debido a la notación que se ha usado se tiene que  $V = \varphi$ . Así para obtener el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en la

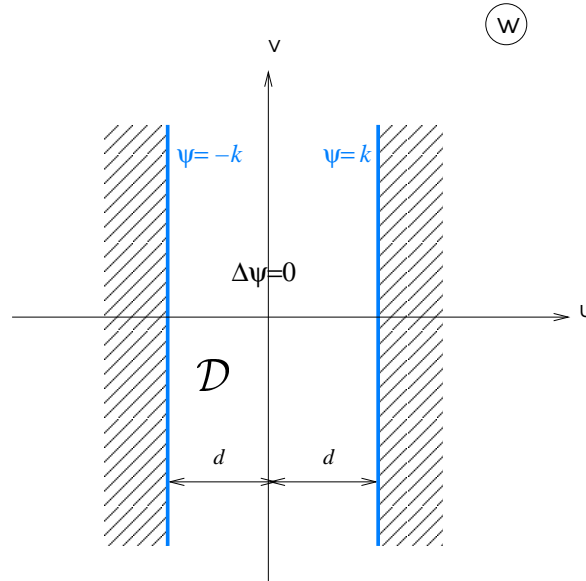


Figura 3.4: Problema Modelo.

región  $D$  es suficiente con encontrar la función del potencial  $\varphi$  en cada punto de  $D$ . Para encontrar  $\varphi$  es necesario cambiar la región  $D$  del problema físico en una región  $\mathcal{D}$  más sencilla y transformarlo en un problema modelo como lo son dos rectas verticales infinitas equidistantes del origen ver figura 3.4, aquí se necesita encontrar una función  $f$  que transforme de manera conforme  $D$  en  $\mathcal{D}$

En el plano  $W$  de modelación, la región  $\mathcal{D} : -d < \text{Re } w < d$  se comporta como un condensador de placas paralelas infinitas, con potencial  $-k$  y  $+k$ , respectivamente, problema para el cual es sencillo encontrar el valor del potencial eléctrico  $\psi$  entre las placas.

Dado que el campo eléctrico para dos placas separadas a distancia  $2d$ , está dado por  $\mathbf{E} = P(u, 0)$ , donde  $P$  es una constante a determinar, entonces

$$\psi(\omega) = - \int_u^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_u^0 E dr = -P \int_u^0 dr = Pu = P \text{Re } \omega$$

donde  $\omega = u + iv$ . Para encontrar el valor de la constante  $P$  es suficiente considerar que  $\psi(-d) = -k = P(-d)$  y por lo tanto  $P = \frac{k}{d}$ , por lo que

$$\psi(w) = \frac{K}{d} \text{Re } w. \quad (3.26)$$

Para mapear la región  $D$  de manera conforme hacia  $\mathcal{D}$  se utilizan cinco aplicaciones conformes. La primer transformación  $f_1$ , normaliza los focos  $\pm a$  de la hipérbola,

$$\left( \frac{x}{a \sin \alpha} \right)^2 - \left( \frac{y}{a \cos \alpha} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2 \sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 1$$



lo que equivale al siguiente conjunto

$$\{z = x + iy \mid y^2 = x^2 \cot^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha\}$$

así que al aplicar  $f_1 = \frac{1}{a}z$  a la hipérbola (3.27) ésta se transforma en:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{x}{a} + i \frac{y}{a} \mid \left( \frac{y}{a} \right)^2 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha \right\} \\ &= \{x^* + iy^* \mid y^{*2} = x^{*2} \cot^2 \alpha + \cos^2 \alpha\} \\ &= \left\{ x^* + iy^* \mid \left( \frac{x^*}{\operatorname{sen} \alpha} \right)^2 + \left( \frac{y^*}{\cos \alpha} \right)^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

que es una hipérbola con focos en  $\pm 1$ .  $f_1$  es una función analítica y conforme.

Se aplica ahora el segundo mapeo  $f_2$  que es el inverso del mapeo de Joukowski que transforma las ramas de la hipérbola en rectas que pasan por el origen.

$$\omega = f_2(\xi) = \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

que en su forma inversa

$$\xi = f_2^{-1}(\omega) = \frac{1}{2} \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right). \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) es la función de Joukowski y transforma las rectas que pasan por el origen en las ramas de una hipérbola y las circunferencias con centro en el origen del plano, en elipses con focos sobre el eje real.

Consideremos puntos  $w$  de la forma  $w = re^{it}$ ,  $t = \text{cte}$ .  $0 < r < \infty$ , al variar  $r$ , se obtiene un segmento de recta con pendiente  $\tan t$ . Al aplicar la función de Joukowski se tiene entonces que

$$\xi = \mu + i\nu = \frac{1}{2} \left( re^{it} + \frac{1}{r}e^{-it} \right) = \frac{1}{2} \left( \left[ r + \frac{1}{r} \right] \cos t + i \left[ r - \frac{1}{r} \right] \operatorname{sen} t \right)$$

luego

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} \left[ r + \frac{1}{r} \right] \cos t, \quad \nu = \frac{1}{2} \left[ r - \frac{1}{r} \right] \operatorname{sen} t \\ \left( \frac{\mu}{\cos t} \right)^2 - \left( \frac{\nu}{\operatorname{sen} t} \right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

que es una hipérbola con focos  $\pm 1$ . Si se elige el rayo  $w = re^{-it}$ , con  $0 < r < \infty$ , se obtiene la misma ecuación, por lo tanto el mapeo  $f_2 \circ f_1$  convierte la hipérbola en dos segmentos de recta que parten del origen con pendientes  $\pm \cot \alpha$ , lo cual implica que los segmentos obtenidos están dados por  $ire^{\pm i\alpha}$ .

Dichos segmentos se encuentran en el semiplano superior al eje real.

El tercer mapeo  $f_3$  se trata de una rotación de  $-\frac{\pi}{2}$  sobre la región limitada por los segmentos de recta.

$$f_3 = i\xi$$

Así, los segmentos de recta  $\xi = ire^{\pm i\alpha}$ ,  $0 < r < \infty$ , son transformados en

$$f_3 = i\xi = u + iv = -i(ire^{\pm i\alpha}) = re^{\pm i\alpha} = r(\cos \alpha \pm i \operatorname{sen} \alpha)$$

que son dos segmentos de recta que parten del origen con pendientes  $\tan \alpha$ .

La cuarta transformación  $f_4$ , cambia las rectas que parten del origen, en dos rectas paralelas al eje real,

$$f_4(\nu) = \operatorname{Ln} \nu$$

donde  $\nu = re^{\pm i\alpha}$  y  $0 < r < \infty$

$$f_4(\nu) = u + iv = f_4(\operatorname{Ln}(re^{\pm i\alpha})) = \ln r \pm i\alpha,$$

entonces  $u = \ln r$ ,  $v = \pm\alpha$ , como  $\alpha$  es constante y  $0 < r < \infty$  se tiene que efectivamente son dos rectas paralelas al eje real con ordenadas  $\pm\alpha$ , así  $f_4$  es una función analítica y uno a uno.

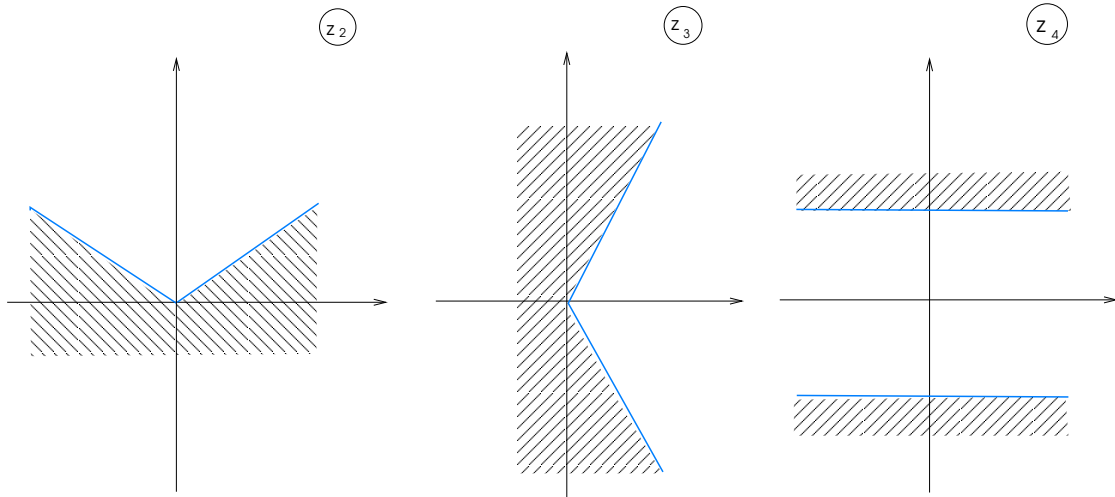


Figura 3.5: Mapeos Auxiliares.

Finalmente  $f_5(\xi) = i\xi$  obtiene las placas verticales deseadas en el plano de modelación mediante una rotación de  $\frac{\pi}{2}$  a las rectas obtenidas en  $f_4$ .

Aplicando  $f_5(\eta) = i\eta$  a las rectas  $\eta = \ln r \pm i\alpha$ ,  $0 < r < \infty$ ,

$$f_5(\eta) = f_5(\ln r \pm i\alpha) = i(\ln r \pm i\alpha) = \pm\alpha + i \ln r$$

las cuales son dos rectas paralelas al eje imaginario con abscisas  $\pm\alpha$ . Realizando la composición de los mapeos  $f, \dots, f_5$  se obtiene la función conforme  $f$  que transforma la región  $D$  limitada por las ramas de la hipérbola (3.25), en la región  $\mathcal{D}$  limitada por las rectas paralelas al eje imaginario en el plano de modelación, es decir

$$f(z) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5)(z)$$

$y$

$$\begin{aligned}\omega = f(z) &= i \operatorname{Ln} \left( -i \left( \frac{a}{z} + \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1} \right) \right) \\ &= i \operatorname{Ln} \left( \frac{a + \sqrt{z^2 - a^2}}{i a} \right).\end{aligned}$$

Ya que se encontró  $f$ , es posible obtener  $\varphi$  con la ecuación (3.26) y el trasplante de ésta, mediante  $f$  dado por la ecuación (3.13). Luego el potencial resultante es:

$$\varphi(z) = \psi(f(z)) = \frac{k}{\alpha} \operatorname{Re} f(z) = -\frac{k}{\alpha} \operatorname{arg} \left( \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{i a} \right)$$

que es el potencial en cada punto  $z$  entre los electrodos hipérbolicos. Como ya se conoce a  $\varphi$  es posible obtener el campo eléctrico  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}(\varphi)$ , aplicando el Lema 3.3, entonces

$$E(z) = -\operatorname{grad}(\varphi(z)) = -\operatorname{grad} \psi(\omega) \cdot \overline{f'(z)} = -\frac{k}{\alpha} \frac{i}{(-\bar{z}^2 - a^2)^{1/2}}.$$

### 3.3. Conducción de Calor y Separación de Variables

Una de las ecuaciones diferenciales parciales clásica de la física matemática, es la ecuación que describe la conducción de calor en un cuerpo sólido. El estudio de esta ecuación se originó por primera vez alrededor del año 1800 por Joseph B. Fourier y sigue llamando la atención de los científicos modernos. Por ejemplo, el análisis de la disipación y transferencia del calor que se aleja de sus fuentes en la maquinaria de alta velocidad, con frecuencia es un problema tecnológico importante.

Consideremos ahora un problema de conducción del calor para una barra recta uniforme y material homogéneo. Supongamos que el eje  $x$  está a lo largo del eje de la barra y que  $x = 0$  y  $x = l$  son extremos de la barra, como se muestra en la Figura 3.6. Supongamos además que los lados de la barra están perfectamente aislados de modo que no pase calor a través de ellos; también, que las dimensiones de la sección transversal son tan pequeñas que la temperatura  $u$  puede considerarse constante sobre cualquier sección transversal dada. Entonces,  $u$  una función de la coordenada axial  $x$  y el tiempo  $t$ . La variación de temperatura en la barra se expresa por una ecuación diferencial parcial, ésta ecuación se llama *ecuación de conducción de calor* y tiene la forma

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.28)$$

Donde  $\alpha^2$  es una constante que se conoce como disipación térmica. El parámetro  $\alpha^2$  depende únicamente del material de la barra y se define por

$$\alpha^2 = \frac{\kappa}{\rho s} \quad (3.29)$$

donde  $\kappa$  es la conductividad térmica,  $\rho$  es la densidad y  $s$  es el calor específico del material de la barra. Las dimensiones de  $\alpha$  son  $(\text{longitud})^2/\text{tiempo}$ . Valores típicos de  $\alpha^2$  se dan en la siguiente tabla

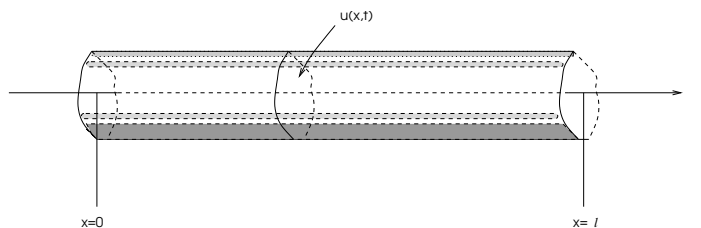


Figura 3.6: Barra

Material	$\alpha^2 (cm^2/seg)$
Plata	1.71
Cobre	1.14
Aluminio	0.86
Hierro fundido	0.12
Granito	0.011
Ladrillo	0.0038
Agua	0.00144

Además, supongamos que se da la distribución inicial de temperatura en la barra; así,

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.30)$$

donde  $f$  es una función dada. Por último, supongamos que los extremos de la barra se mantienen a temperaturas fijas: la temperatura  $T_1$  en  $x = 0$  y la temperatura  $T_2$  en  $x = l$ . Se considera el caso donde  $T_1 = T_2 = 0$ , por tanto, se supondrá que  $u$  siempre es cero cuando  $x = 0$  o  $x = l$ :

$$u(0, t) = 0; \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.31)$$

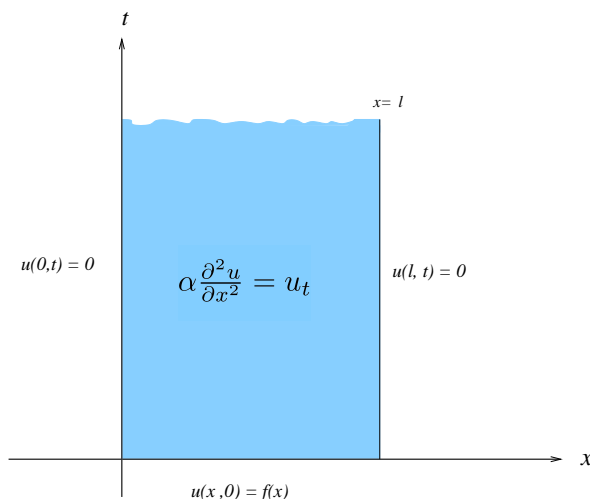
El problema fundamental de la conducción del calor es encontrar  $u(x, t)$ , que satisfaga la ecuación diferencial (3.28), la condición inicial (3.30) y las condiciones en la frontera (3.31) y por lo tanto es un problema de Dirichlet, en el plano  $xt$ . Ver Figura 3.7. Además es lineal, porque, en todo él,  $u$  aparece sólo a la primera potencia. Para encontrar las soluciones que necesitamos, usamos la técnica de separación de variables.

Este método se basa en la idea de encontrar ciertas soluciones de la ecuación diferencial (3.28), de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.32)$$

Sustituyendo la ecuación (3.32) por  $u$  en la ecuación diferencial (3.28) da

$$\alpha^2 X''T = XT' \quad (3.33)$$



*Problema con valores en la frontera  
para la ecuación de conducción del calor.*

Figura 3.7: Plano  $xt$

donde las apóstrofes se refieren a la derivación ordinaria con respecto a las variables independiente,  $x$  o  $t$ . La ecuación (3.33) es equivalente a

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T}, \quad (3.34)$$

en la cual las variables están separadas; es decir, el primer miembro sólo depende de  $x$  y el segundo miembro sólo de  $t$ . Para que la ecuación (3.34) sea válida para  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ , es necesario que ambos miembros de la ecuación (3.34) sean iguales a la misma constante. De otro modo, conservando una variable independiente (digamos  $x$ ) fija y variando la otra, uno de los miembros (el izquierdo en este caso) de la ecuación (3.34) se transforma en

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} = \sigma. \quad (3.35)$$

De ahí, obtenemos las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes, para  $X(x)$  y  $T(t)$ :

$$X'' - \sigma X = 0, \quad (3.36)$$

$$T' - \alpha^2 \sigma T = 0 \quad (3.37)$$

De esta manera se ha sustituido la ecuación diferencial (3.28) por dos ecuaciones diferenciables ordinarias. Cada una de estas se puede resolver para cualquier valor de la constante de separación  $\sigma$ . El producto de las soluciones de las ecuaciones (3.36) y (3.37), por cualquier valor de  $\sigma$ , da una solución de la ecuación diferencial (3.28). Sin embargo, sólo estamos interesados en las soluciones de la ecuación (3.28) que también satisfaga las condiciones de la frontera de la frontera (3.31). Como veremos,

esto restringe mucho los valores posibles de  $\sigma$ .

Sustituyendo  $u(x, t)$  de la ecuación (3.32) en la condición a la frontera en  $x = 0$ , obtenemos

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad (3.38)$$

Si la ecuación (3.38) es satisfecha al elegir  $T(t)$  como cero para toda  $t$ , entonces,  $u(x, t)$  será idénticamente cero. Esto es inaceptable, puesto que no satisface la condición inicial (3.30), a menos que la distribución inicial de temperaturas  $f(x)$  sea cero para toda  $x$ . Por lo tanto, la ecuación (3.38) debe ser satisfecha requiriendo que

$$X(0) = 0 \quad (3.39)$$

Similarmente, la condición en la frontera en  $x = l$  requiere que

$$X(l) = 0. \quad (3.40)$$

Ahora deseamos considerar la ecuación (3.36), sujeta a las condiciones en la frontera (3.39) y (3.40). Deben distinguirse dos casos, dependiendo de si  $\sigma = 0$  ó  $\sigma \neq 0$ .

Si  $\sigma \neq 0$ , entonces la solución general de la ecuación (3.36) es

$$X(x) = k_1x + k_2.$$

Para satisfacer la condición en la frontera (3.39) debemos escoger  $k_2 = 0$  y para satisfacer la segunda condición en la frontera debemos tener  $k_1 = 0$ . De ahí que  $X(x)$  es idénticamente cero y por lo tanto  $u(x, t)$  también es idénticamente cero. Como antes, esto es inaceptable y concluimos que  $\sigma$  no debe ser cero.

Si  $\sigma \neq 0$ , es conveniente reemplazarla por  $-\lambda^2$ , donde  $\lambda$  es un parámetro nuevo, no necesariamente real. Entonces la ecuación (3.36) se convierte en

$$X''(x) + \lambda^2 X = 0,$$

y su solución general es

$$X(x) = k_1 e^{i\lambda x} + k_2 e^{-i\lambda x}. \quad (3.41)$$

Aplicando las condiciones en la frontera (3.39) y (3.40), obtenemos

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 0 \\ k_1 e^{i\lambda l} + k_2 e^{-i\lambda l} &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

El sistema de ecuaciones (3.42) siempre tiene la solución trivial  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ; como antes, esto conduce a la conclusión inaceptable de que  $u(x, t)$  es idénticamente cero. Existen soluciones no triviales de las ecuaciones (3.42) si y sólo si el determinante de coeficientes, es cero; es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\lambda l} & e^{-i\lambda l} \end{vmatrix} = e^{-i\lambda l} - e^{i\lambda l} = 0 \quad (3.43)$$

Si escribimos ahora  $\lambda = \mu + i\nu$ , donde  $\mu$  y  $\nu$  son reales, la ecuación (3.43) se reduce a

$$e^{-i\mu l} e^{\nu l} - e^{i\mu l} e^{-\nu l} = 0. \quad (3.44)$$

Usando la relación de Euler

$$e^{i\mu l} = \cos \mu l + i \operatorname{sen} \mu l, \quad (3.45)$$

y separando la ecuación (3.44) en las partes real e imaginaria, encontramos que

$$(e^{\nu l} - e^{-\nu l}) \cos \mu l - i(e^{\nu l} - e^{-\nu l}) \operatorname{sen} \mu l = 0. \quad (3.46)$$

La ecuación (3.46) se satisface solamente si las partes reales e imaginarias del primer miembro son cero por separado; así

$$(e^{\nu l} - e^{-\nu l}) \cos \mu l = 0, \quad (3.47)$$

$$(e^{\nu l} - e^{-\nu l}) \operatorname{sen} \mu l = 0. \quad (3.48)$$

Puesto que  $e^{\nu l} + e^{-\nu l} > 0$  para todos los valores de  $\nu$  y  $l$ , la ecuación (3.48) requiere que  $\operatorname{sen} \mu l$  sea un múltiplo de  $\pi$  es decir  $\mu = \frac{n\pi}{l}$ , donde  $n$  es un entero. Para esta elección de  $\mu$ ,  $\cos \mu l \neq 0$ , y la ecuación (3.47) se reduce a

$$e^{\nu l} - e^{-\nu l} = 2 \operatorname{senh} \nu l = 0,$$

en consecuencia  $\nu = 0$ . Puesto que  $\nu = 0$ , tampoco podemos tener  $\mu = 0$ ; de otra manera  $\sigma = 0$ , que ya habíamos rechazado. Entonces

$$\lambda = \mu = \frac{n\pi}{l},$$

donde  $n$  es un entero diferente de cero.

Volviendo a las ecuaciones (3.42), vemos que  $k_2 = -k_1$  y por lo tanto, de la ecuación (3.41)

$$X(x) = k_1(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}).$$

Usando la relación de Euler (3.45) encontramos que  $X(x)$  es proporcional a  $\operatorname{sen} \mu x$ . Resumiendo los resultados hasta aquí hemos demostrado que podemos satisfacer las condiciones en la frontera (3.31) sólo si la constante de separación  $\sigma$  tiene ciertos valores reales y negativos dados por

$$\sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad (3.49)$$

donde  $n \neq 0$  es un entero. Las funciones correspondientes  $X$  son proporcionales a  $\operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right)$ . Después de introducir los valores de  $\sigma$  dados por la ecuación (3.49), a la ecuación (3.37), encontramos que  $T(t)$  es proporcional a  $\exp[-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / l^2]$ . Por lo tanto, despreciando las constantes arbitrarias de proporcionalidad, las funciones

$$u_n(x, t) = e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.50)$$

satisfacen las condiciones en la frontera (3.31), así como la ecuación diferencial (3.28). Basta considerar únicamente los valores positivos de  $n$ , porque si  $n$  toma valores negativos, las mismas funciones dadas por la ecuación (3.50) son generadas por segunda vez. Las funciones  $u_n$  a veces se llaman soluciones fundamentales del problema de la conducción del calor (3.28), (3.30) y (3.31).

Solamente falta por satisfacer la condición inicial (3.30).

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Hagamos énfasis en que la ecuación diferencial (3.28) y las condiciones en la frontera (3.31) son lineales y homogéneas y que son satisfechas por  $u_n(x, t)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Con base en el principio de superposición sabemos que cualquier combinación lineal de las  $u_n(x, t)$  también satisface la ecuación diferencial y las condiciones en la frontera. Como consecuencia, supongamos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad (3.51)$$

donde los coeficientes  $c_n$  aún no están determinados y donde  $m$  es algún entero positivo. Puesto que  $u(x, t)$  por (3.51), satisface la ecuación diferencial (3.28) y las condiciones en la frontera, para cualquier elección de  $c_n$ , se desea investigar si pueden elegirse los  $c_n$  de modo que también satisfaga la condición inicial (3.30). Empecemos por considerar dos ejemplos sencillos.

**Ejemplo 3.3** *Encontrar la solución del problema de conducción del calor*

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.52)$$

con las siguientes condiciones en la frontera

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

y

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.53)$$

si,

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{l}.$$

En este caso sólo necesitamos usar una de las soluciones fundamentales (3.50), a saber, la correspondiente a  $n = 4$ . Supongamos que

$$u(x, t) = c_4 e^{-16\pi^2 \alpha^2 t / l^2} \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{l}, \quad (3.54)$$

la cual satisface la ecuación diferencial (3.52) y las condiciones en la frontera (3.53), para cualquier valor de  $c_4$ . Haciendo  $t = 0$ , se obtiene que

$$u(x, 0) = c_4 \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{l};$$



de donde, se debe de elegir  $c_4 = 3$  para satisfacer la condición inicial. Sustituyendo este valor de  $c_4$  en la ecuación (3.54) se obtiene la solución del problema completo con valores en la frontera.

**Ejemplo 3.4** Encontrar la solución del problema de conducción del calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.55)$$

con las siguientes condiciones en la frontera

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad y \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

si,

$$f(x) = b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \dots + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \quad (3.57)$$

donde  $b_1, \dots, b_m$  son constantes dadas.

Si suponemos que  $u(x, t)$  está dada por la ecuación (3.51), entonces se satisfacen la ecuación diferencial (3.55) y las condiciones en la frontera (3.56), para cualquier elección de  $c_1, \dots, c_m$ . En  $t = 0$  se tiene

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= c_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \dots + c_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \\ &= b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \dots + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \end{aligned}$$

Por tanto, se satisface la condición inicial si tomamos  $c_1 = b_1, \dots, c_m = b_m$ . La solución del problema completo es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m b_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Volvamos al problema general de las siguientes ecuaciones

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.58)$$

y

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.59)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.60)$$

con una función arbitraria  $f$ . A menos que  $f(x)$  tome la forma dada en la ecuación (3.57), no es posible satisfacer la condición inicial (3.59) por medio de una suma finita de la forma (3.51). Esto sugiere que formalmente extendamos el principio de superposición para incluir series *infinitas*; es decir, se supone que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.61)$$

Donde los términos individuales en la ecuación (3.61) satisfacen la ecuación diferencial parcial (3.58), así como las condiciones en la frontera (3.60) y que cualquier suma finita de tales términos también lo hará. Supondremos que la serie infinita de la ecuación (3.61) también satisface las ecuaciones (3.58) y (3.60). Para satisfacer la condición inicial (3.59) debemos tener

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = f(x). \quad (3.62)$$

Supongamos ahora que es posible expresar  $f(x)$  por medio de una serie infinita de términos senoidales,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.63)$$

y que sabemos cómo calcular los coeficientes  $b_n$  en esta serie infinita. Entonces, precisamente como en el ejemplo (3.4), podemos satisfacer la ecuación (3.62) eligiendo  $c_n = b_n$  para cada  $n$ . Con los coeficientes  $c_n$  seleccionados de esta manera, la ecuación (3.61) da la solución del problema con valores en la frontera (3.58), (3.59) y (3.60).

Así para resolver el problema de conducción de calor propuesta para una distribución inicial de temperaturas bastante arbitraria, por el método de separación de variables, es necesario expresar la distribución inicial de temperaturas  $f(x)$  como una serie de la forma (3.63).

En la siguiente sección se demostrará que los coeficientes en estas series pueden determinarse de una manera muy sencilla.

### 3.4. Series de Fourier

En la última sección se demostró como resolver el problema fundamental con valores en la frontera de la conducción del calor, siempre que sea posible expresar una función dada, definida sobre  $0 \leq x \leq l$  como una serie de senos,  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{l})$ . A continuación se comienza a considerar una serie un tanto más general, de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \right). \quad (3.64)$$

Sobre el conjunto de puntos donde la serie (3.64) converge, se define una función  $f$ , cuyo valor en cada punto es la suma de la serie para ese valor de  $x$ . En este caso, se dice que la serie (3.64) es la Serie de Fourier para  $f$ . Los coeficientes  $a_0, a_n$  y  $b_n$  se llaman coeficientes de Fourier de  $f$ . Los objetivos inmediatos son determinar qué funciones pueden representarse como una serie de Fourier y encontrar algunos medios para calcular los coeficientes de la serie. De paso, conviene hacer notar que el primer término de la serie (3.64) se escribe como  $\frac{a_0}{2}$  en lugar de  $a_0$  para simplificar una fórmula de los coeficientes que se deducirá más adelante. Además de su asociación con el método de separación de variables, las series de Fourier también son útiles en otras maneras, tales como en el análisis de

sistemas mecánicos o eléctricos sobre los que actúan fuerzas externas periódicas. Para analizar las series de Fourier es necesario desarrollar ciertas propiedades de las funciones trigonométricas  $\sin(\frac{m\pi x}{l})$  y  $\cos(\frac{m\pi x}{l})$ , donde  $m$  es un entero positivo. La primera de ellas, es su carácter periódico.

**Definición 3.8** Se dice que una función es periódica con periodo  $T > 0$  si

$$f(x + t) = f(x) \quad (3.65)$$

para todo valor de  $x$ . El valor más pequeño de  $T$  para el cual se cumple la ecuación (3.65) se llama periodo fundamental de  $f$ .

En este sentido se debe observar que una constante puede concebirse como una función periódica de periodo arbitrario, pero no con periodo fundamental. Para cualquier función periódica no constante, el periodo fundamental se define de manera única y todos los demás son múltiplos de éste.

**Proposición 3.1** Si  $f$  y  $g$  son dos funciones periódicas cualesquiera con periodo común  $T$ , entonces su producto  $fg$  y cualquier combinación lineal  $c_1f + c_2g$  también son periódicas con periodo  $T$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $F(x) = c_1f(x) + c_2g(x)$ ; entonces para cualquier  $x$ ,

$$F(x + T) = c_1f(x + T) + c_2g(x + T) = c_1f(x) + c_2g(x) = F(x)$$

y por lo tanto la combinación lineal  $c_1f + c_2g$  también es periódica con periodo  $T$ .

Ahora sea  $G(x) = f(x)g(x)$ ; entonces para cualquier  $x$ ,

$$G(x) = f(x)g(x) = f(x + T)g(x + T) = G(x + T)$$

así  $fg$  también es periódica con periodo  $T$ . ■

**Corolario 3.6** La suma de cualquier número finito o incluso la suma de una serie infinita convergentes, de funciones de periodo  $T$  también es periódica con periodo  $T$ .

**Teorema 3.3** Las funciones  $\sin(\frac{m\pi x}{l})$  y  $\cos(\frac{m\pi x}{l})$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , son periódicas con periodo fundamental  $T = \frac{2l}{m}$ . Además, como todo múltiplo entero positivo de un periodo también es un periodo, cada una de las funciones  $\sin(\frac{m\pi x}{l})$  y  $\cos(\frac{m\pi x}{l})$  tienen periodo común  $2l$

DEMOSTRACIÓN: Se quiere demostrar que existen valores de  $T$  para los cuales

$$\sin \frac{m\pi(x + T)}{l} = \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.66)$$

para toda  $x$  y que el mínimo de tales valores de  $T$  es  $\frac{2l}{m}$ . Desarrollando el primer miembro de la ecuación (3.66) se tiene que

$$\sin \left( \frac{m\pi x}{l} \right) \cos \left( \frac{m\pi T}{l} \right) + \cos \left( \frac{m\pi x}{l} \right) \sin \left( \frac{m\pi T}{l} \right) = \sin \left( \frac{m\pi x}{l} \right) \quad (3.67)$$

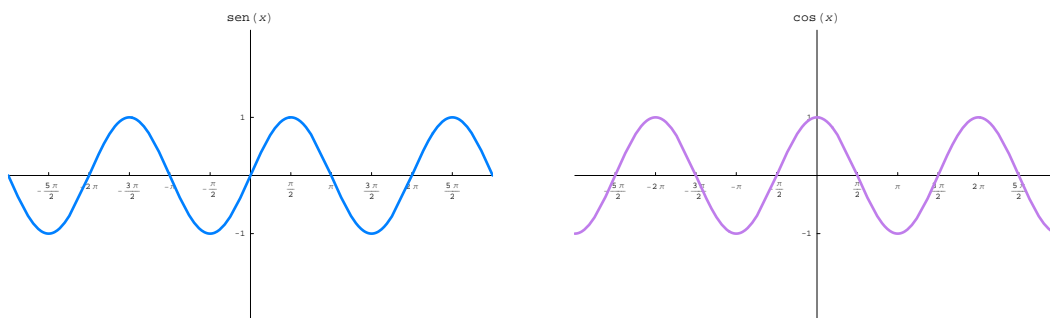


Figura 3.8: Gráfica de  $y = \operatorname{sen} x$  y  $y = \operatorname{cos} x$

La ecuación (3.67) se satisface para toda  $x$  si podemos elegir  $T$  de modo que  $\operatorname{cos}\left(\frac{m\pi T}{l}\right) = 1$  y  $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi T}{l}\right) = 0$ . Se satisfacen estos requerimientos si se toma  $\frac{m\pi T}{l} = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ . Para demostrar que no hay otros valores de  $T$  para los cuales se satisfaga la ecuación (3.66) supongamos que existe tal  $T$  y elijamos a  $x$  de modo que  $\operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) = 0$ . Entonces la ecuación (3.67) se transforma en

$$\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi T}{l}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right),$$

la cual es cierta solamente para los valores de  $\frac{m\pi T}{l}$  dados antes. El periodo fundamental de  $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  es entonces

$$T = \frac{2\pi}{\frac{m\pi}{l}} = \frac{2l}{m}.$$

Puesto que para cualquier múltiplo entero de un periodo también es un periodo, se deduce que  $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  tiene un periodo  $u$  para cualquier  $m$ . Un argumento similar se aplica a  $\operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ . ■

La segunda propiedad es la ortogonalidad de las funciones seno y coseno, y para describir ésta propiedad se necesitan los siguientes conceptos

**Definición 3.9** El producto interno estándar  $(u, v)$  de dos funciones de valores reales  $u$  y  $v$ , sobre el intervalo  $\alpha \leq x \leq \beta$  se define por

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x) dx.$$

**Definición 3.10** Se dice que las funciones  $u$  y  $v$  son ortogonales sobre  $\alpha \leq x \leq \beta$  si se anula su producto interno; es decir, si

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x) dx = 0.$$

**Definición 3.11** Se dice que un conjunto de funciones es mutuamente ortogonal si cada pareja de funciones en el conjunto es ortogonal.

El siguiente teorema relaciona estos conceptos con las funciones  $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  y  $\operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ .

**Teorema 3.4** Las funciones  $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  y  $\text{cos}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , forman un conjunto de funciones mutuamente ortogonal, sobre el intervalo  $-l \leq x \leq l$ . De hecho, satisface las ecuaciones conocidas como relaciones de ortogonalidad:

$$\int_{-l}^l \text{cos}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ l, & \text{si } m = n \end{cases} \quad (3.68)$$

$$\int_{-l}^l \text{cos}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0 \quad \text{para todo } m, n \quad (3.69)$$

$$\int_{-l}^l \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ l, & \text{si } m = n \end{cases} \quad (3.70)$$

DEMOSTRACIÓN: Estos resultados pueden obtenerse por integración directa. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ \text{cos}\left(\frac{(m-n)\pi x}{l}\right) - \text{cos}\left(\frac{(m+n)\pi x}{l}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\text{sen}[(m-n)\pi x/l]}{m-n} - \frac{\text{sen}[(m+n)\pi x/l]}{m+n} \right\} \Big|_{-l}^l \\ &= 0, \end{aligned}$$

mientras  $m+n$  y  $m-n$  no sean cero. Puesto que  $m$  y  $n$  son positivos  $m+n \neq 0$ . Por otra parte, si  $m-n=0$ , entonces  $m=n$  y la integral debe de evaluarse de diferente modo. En este caso,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= \int_{-l}^l \left(\text{sen}\frac{m\pi x}{l}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ 1 - \text{cos}\frac{2m\pi x}{l} \right] dx \quad (3.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{\text{sen}(3m\pi x/l)}{2m\pi/l} \right\} \Big|_{-l}^l \\ &= l. \quad (3.72) \end{aligned}$$

Esto establece la ecuación (3.70); las ecuaciones (3.69) y (3.68) pueden verificarse a través de cálculos similares. ■

Fórmulas de Euler-Fourier. Supóngase ahora que una serie de la forma (3.64) converge y sea su suma  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \text{cos}\frac{m\pi x}{l} + b_m \text{sen}\frac{m\pi x}{l} \right). \quad (3.73)$$

Los coeficientes  $a_m$  y  $b_m$  pueden relacionarse con bastante sencillez con  $f(x)$  como consecuencia de las condiciones de ortogonalidad (3.68), (3.69) y (3.70). Primero multiplíquese la ecuación (3.73) por  $\text{cos}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ , en donde  $n$  es un entero positivo fijo e intégrese con respecto a  $x$  desde  $-l$  hasta  $l$ . En el

supuesto de que la integración puede efectuarse legítimamente término a término,<sup>1</sup> se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Si se tiene presente que  $n$  es fijo mientras  $m$  varía en los enteros positivos, por las relaciones de ortogonalidad (3.68) y (3.69) se concluye que el único término que no se anula en el segundo miembro de la ecuación (3.74) es aquél para el que  $m = n$  en la primera suma. De donde,

$$\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = la_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para determinar  $a_0$  se puede integrar la ecuación (3.73) desde  $-l$  hasta  $l$  y se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= la_0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

dado que todas las integrales en que aparecen funciones trigonométricas se anulan. Por tanto,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.76)$$

Al escribir como  $\frac{a_0}{2}$  el término constante de la ecuación (3.73), es posible calcular todos los  $a_n$  a partir de la ecuación (3.76). En caso contrario, se tendría que usar una fórmula separada para  $a_0$ . Es posible obtener una expresión semejante para los  $b_n$  si se multiplica la ecuación (3.73) por  $\sin(\frac{n\pi x}{l})$ , se integra término a término desde  $-l$  hasta  $l$  y se usan las relaciones de ortogonalidad (3.68) y (3.69); por tanto,

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.77)$$

**Definición 3.12** Las ecuaciones (3.76) y (3.77) se conocen como fórmulas de Euler-Fourier para los coeficientes de una serie de Fourier. En consecuencia, si la serie (3.73) converge hacia  $f(x)$  y si la serie puede integrarse término a término, entonces los coeficientes deben quedar dados por las ecuaciones (3.76) y (3.77)

Nótese que las ecuaciones (3.76) y (3.77) son fórmulas explícitas para los  $a_n$  y los  $b_n$  en términos de  $f$  y que la determinación de cualquier coeficiente específico es independiente de todos los demás coeficientes. Por supuesto, la dificultad para evaluar las integrales de las ecuaciones (3.76) y (3.77) depende bastante de la función particular  $f$  de que se trate.

<sup>1</sup>Ésta no es una suposición trivial, ya que no todas las series convergentes con términos variables pueden integrarse de este modo. Sin embargo, para el caso especial de las series de Fourier, siempre se puede justificar la integración término a término.

Nótese también que las fórmulas (3.76) y (3.77) sólo dependen de los valores de  $f(x)$  en el intervalo  $-l \leq x \leq l$ . En virtud de que cada uno de los términos de la serie de Fourier (3.73) es periódico, con periodo  $2l$ , la serie converge para toda  $x$  siempre que converja en  $-l \leq x \leq l$  y su suma también es una función periódica con periodo  $2l$ . De donde,  $f(x)$  queda determinada para toda  $x$  por sus valores en el intervalo  $-l \leq x \leq l$ .

### 3.5. Ejemplos Numéricos

Como se mencionó antes, el problema de Dirichlet consiste en encontrar una función incógnita que sea armónica en cierto dominio y que además tome ciertos valores predeterminados en la frontera de dicho dominio. En esta sección se resuelven algunos problemas físicos del problema de Dirichlet en donde las fronteras tienen formas geométricas simples, que se resuelven por separación de variables, éste método conduce a las series de Fourier, y por el Teorema 1.3, Capítulo 1 son armónicas así que son la solución al problema de Dirichlet.

**Ejemplo 3.5** *El Problema de Dirichlet para un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$ .*

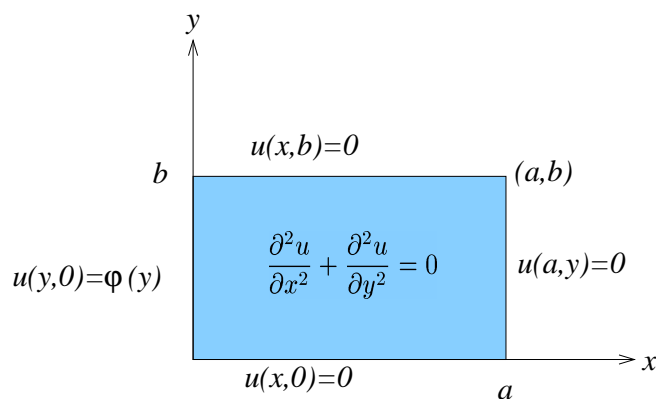


Figura 3.9: Problema de Dirichlet para un rectángulo

Supóngase que la región rectangular (Figura 3.9)  $\Omega = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , donde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= [a_1, a_2] \times \{b_1\}, & \Gamma_2 &= [a_1, a_2] \times \{b_2\}, \\ \Gamma_3 &= \{a_1\} \times [b_1, b_2], & \Gamma_4 &= \{a_2\} \times [b_1, b_2], \end{aligned}$$

es una placa delgada en que la temperatura  $u$  es función de la posición  $(x, y)$  y es un proceso estacionario.

Sea  $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$  cero en los vértices  $(a_i, b_j)$  ( $i, j = 1, 2$ ) de  $\Omega$ , con  $\varphi_i = \varphi \chi_{\Gamma_i}$ . Si, para  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $u_i$  es la solución clásica de  $P(\Omega, \varphi_i)$ , entonces  $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$  es la solución clásica de  $P(\Omega, \varphi)$ . En otras palabras, se puede reducir el problema a uno en el cual  $\varphi = 0$  en  $\Gamma \setminus \{a_1\} \times (b_1, b_2)$ . Por una traslación podemos suponer que  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ .

Tenemos así el siguiente problema:

dada  $\varphi \in \mathcal{C}([0, b])$  con  $\varphi(0) = \varphi(b) = 0$ , es necesario encontrar una función armónica  $u$  en  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  continua en  $\bar{\Omega}$  y satisfaciendo

$$\begin{cases} u(0, y) = \varphi(y) & \text{para } y \in (0, b) \\ u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0 & \text{para } x \in [0, a] \text{ y } y \in [0, b]. \end{cases}$$

Ver Figura 3.9. Resolvemos este problema desarrollando  $u$  en series de Fourier.

Por el método de separación de variables Sección 3.3 es necesario expresar la distribución de temperaturas  $u(x, y)$  en la siguiente forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \operatorname{sen} n\omega y \quad \text{con } \omega = \frac{\pi}{b}. \quad (3.78)$$

Las condiciones en la frontera pueden escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \operatorname{sen} n\omega y \quad \text{es decir que } u_n(0) = \frac{2}{b} \int_0^b \operatorname{sen}(n\omega y) \varphi(y) dy \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \operatorname{sen} n\omega y \quad \text{es decir que } u_n(a) = 0. \end{aligned}$$

La condición de que  $u$  es armónica es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 u_n}{dx^2}(x) - (n\omega)^2 u_n(x) \right) \operatorname{sen} n\omega y = 0,$$

es decir que

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} = (n\omega)^2 u_n(x); \quad (3.79)$$

y usando las condiciones de frontera se obtiene

$$u_n(x) = \frac{2 \operatorname{senh} n\omega(a-x)}{b \operatorname{senh} n\omega a} \int_0^b \operatorname{sen}(n\omega y) \varphi(y) dy. \quad (3.80)$$

En efecto, si la ecuación

$$0 \frac{du_n}{dx} + \frac{d^2 u_n}{dx^2} - (n\omega)^2 u_n(x) = 0$$

se puede escribir de la siguiente manera

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (3.81)$$



Donde  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$  y  $a_2 = -(n\omega)^2$ , sustituyendo en la ecuación (3.81), implica:

$$\lambda^2 - (n\omega)^2 = 0 \text{ implica que } \lambda^2 = (n\omega)^2 \text{ entonces } \lambda = \pm n\omega.$$

La solución de la ecuación homogénea es:  $c_1 e^{n\omega x} + c_2 e^{-n\omega x}$

$$u_n(0) = \frac{2}{b} \int_0^b \text{sen}(n\omega y) \varphi(y) dy = c_1 + c_2$$

$$u_n(a) = 0 = c_1 e^{n\omega a} + c_2 e^{-n\omega a}.$$

Despejando se tiene:

$$c_1 e^{n\omega a} = -c_2 e^{-n\omega a} \text{ entonces } c_1 = -\frac{c_2 e^{-n\omega a}}{e^{n\omega a}} \quad (3.82)$$

$$-\frac{c_2 e^{-n\omega a}}{e^{n\omega a}} + c_2 = \frac{2}{b} \int_0^b \text{sen}(n\omega y) \varphi(y) dy$$

Definimos:

$$k := \frac{2}{b} \int_0^b \text{sen}(n\omega y) \varphi(y) dy$$

luego

$$c_2 \left( -\frac{e^{-n\omega a}}{e^{n\omega a}} + 1 \right) = \frac{2}{b} k$$

$$-c_2 e^{-n\omega a} + c_2 e^{n\omega a} = e^{n\omega a} \frac{2}{b} k$$

$$c_2 (-e^{-n\omega a} + e^{n\omega a}) = e^{n\omega a} \frac{2}{b} k$$

$$c_2 \left( \frac{e^{n\omega a} - e^{-n\omega a}}{2} \right) = \frac{e^{n\omega a}}{b} k$$

$$c_2 \text{senh}(n\omega a) = \frac{e^{n\omega a} k}{b}. \quad (3.83)$$

Así se tiene

$$c_2 = \frac{k e^{n\omega a}}{b \text{senh}(n\omega a)}$$

Sustituyendo en (3.82):

$$c_1 = -\frac{k e^{n\omega a} e^{-n\omega a}}{b \text{senh}(n\omega a) e^{n\omega a}} = \frac{k e^{-n\omega a}}{b \text{senh}(n\omega a)}$$

y regresando a la definición de  $u_n(x)$  se obtiene:

$$u_n(x) = c_1 e^{n\omega x} + c_2 e^{-n\omega x}$$

$$u_n(x) = -\frac{k e^{-n\omega a}}{b \text{senh}(n\omega a)} (e^{n\omega x}) + \frac{k e^{n\omega a}}{b \text{senh}(n\omega a)} (e^{-n\omega x})$$

$$u_n(x) = \frac{2k}{b \text{senh}(n\omega a)} \left( \frac{-e^{n\omega(x-a)} + e^{-n\omega(x-a)}}{2} \right)$$

$$u_n(x) = \frac{2 \text{senh } n\omega(x-a)}{b \text{senh}(n\omega a)} k$$

$$u_n(x) = \frac{2 \text{senh } n\omega(x-a)}{b \text{senh}(n\omega a)} \int_0^b \text{sen}(n\omega y) \varphi(y) dy.$$

Finalmente se escribe la ecuación (3.78) como

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{senh} n\omega(a-x)}{b \operatorname{senh} n\omega a} \left[ \int_0^b \operatorname{sen}(n\omega y) \varphi(y) dy \right] \operatorname{sen}(n\omega y) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{\pi}{b}. \quad (3.84)$$

De acuerdo con la ecuación anterior se calculará la solución de los siguientes casos particulares:

**Ejemplo 3.6** Usando la ecuación (3.84) resolvemos el problema de Dirichlet para el rectángulo formado por  $a = 1$ ,  $b = 2$  y la función  $\varphi(y)$  (Figura 3.10) como sigue:

$$\varphi(y) = \begin{cases} y, & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{si } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

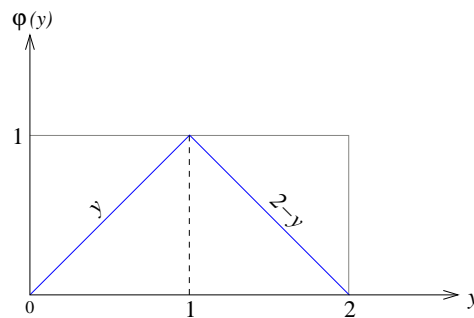


Figura 3.10:  $\varphi(y)$

entonces

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi}{2} \right) (1-x)}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi}{2} \right)} \left[ \int_0^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) \varphi(y) dy \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi}{2} \right) (1-x)}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi}{2} \right)} \left[ \int_0^1 y \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_1^2 (2-y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right). \end{aligned}$$

Integrando por partes  $\int_0^1 y \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy$ , se elige  $u = y$ ,  $dv = \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right)$  entonces  $du = dy$ ,  $v = \int \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy$ , haciendo  $w = \frac{n\pi y}{2}$  implica  $dw = \frac{n\pi}{2} dy$  por lo tanto  $dy = \frac{2}{n\pi} dw$ . Sustituyendo se tiene que

$$v = \int_0^1 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy = \int_0^1 \operatorname{sen}(w) \frac{2}{n\pi} dw = \frac{2}{n\pi} \left[ -\cos \left( \frac{n\pi y}{2} \right) \right] \Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}$$

Así  $v = \frac{2}{n\pi}$  lo que da

$$\begin{aligned} \int_0^1 y \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy &= y \frac{2}{n\pi} + \int_0^1 \frac{2}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy \\ &= \frac{2y}{n\pi} + \frac{4}{(n\pi)^2}. \end{aligned}$$

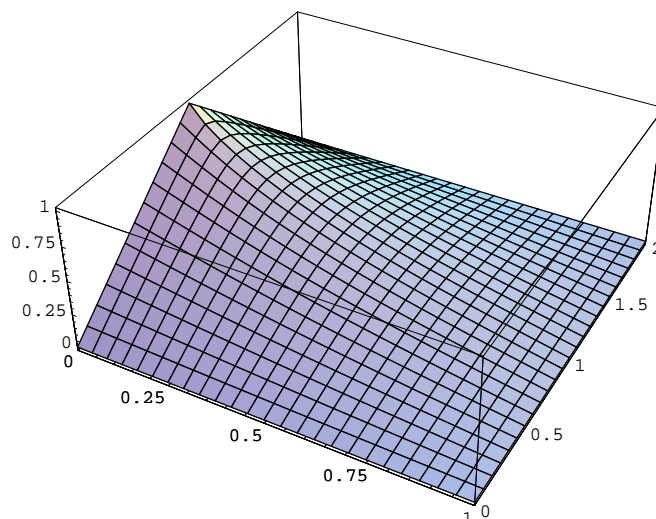


Figura 3.11: Solución al Problema de Dirichlet para un rectángulo

Calculando ahora:  $\int_1^2 (2-y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy$ .

Integrando por partes: Sea  $u = 2 - y$ ,  $dv = \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right)$  entonces  $du = -dy$ ,  $v = \int_1^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy$ , haciendo  $w = \frac{n\pi y}{2}$  implica  $\frac{2dw}{n\pi} = dy$  sustituyendo se tiene que

$$v = \frac{2}{n\pi} \int_1^2 \operatorname{sen} w \, dw = -\frac{2}{n\pi} \left[ \cos \left( \frac{n\pi y}{2} \right) \right]_1^2 = -\frac{2}{n\pi} \left[ \cos(n\pi) - \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right] = \frac{2}{n\pi}.$$

Así  $v = -\frac{2}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi y}{2} \right)$  y se tiene:

$$\int_1^2 (2-y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy = (2-y) \left( \frac{2}{n\pi} \right) - \int_1^2 \frac{2}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy, \quad (3.85)$$

donde la  $\int_1^2 \frac{2}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy$ , se resuelve por sustitución, haciendo  $t = \frac{n\pi y}{2}$  implica que  $\frac{2dt}{n\pi} = dy$  y sustituyendo se llega a

$$\frac{2}{n\pi} \int_1^2 \cos \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy = \frac{4}{(n\pi)^2} \int_1^2 \cos t \, dt = -\frac{4}{(n\pi)^2},$$

entonces al sustituir éste valor en la ecuación (3.85) se tiene que

$$\int_1^2 (2-y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) dy = (2-y) \left( \frac{2}{n\pi} \right) + \frac{4}{(n\pi)^2}.$$

Luego, la solución  $u(x, y)$  está dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi}{2} \right) (1-x)}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi}{2} \right)} \left[ \frac{2y}{n\pi} + \frac{4}{(n\pi)^2} + (2-y) \left( \frac{2}{n\pi} \right) + \frac{4}{(n\pi)^2} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi}{2} \right) (1-x)}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi}{2} \right)} \left[ \frac{4}{n\pi} + \frac{8}{(n\pi)^2} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2} \right). \end{aligned}$$

La Figura 3.11 muestra la solución.

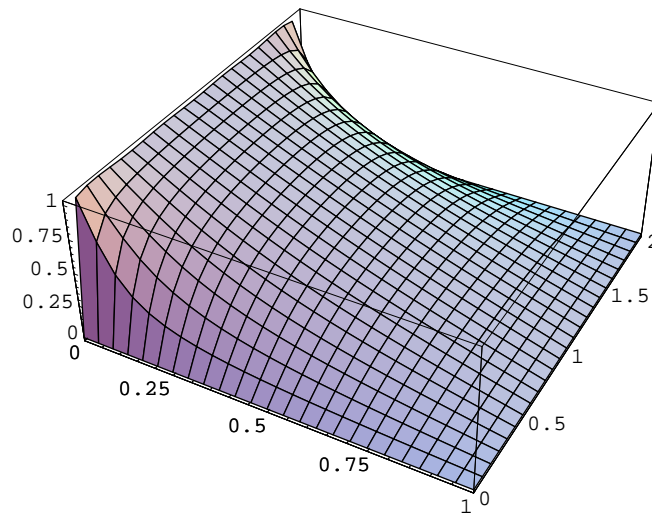


Figura 3.12: Solución al Problema de Dirichlet para un rectángulo, con  $\varphi(y) = 1$

**Ejemplo 3.7** Tomando  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $\varphi(y) = 1$ , se tiene:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)(1-x)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \left[ \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

Calculando únicamente la integral

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy$$

Sea  $u = \frac{n\pi y}{2}$  implica  $du = \frac{n\pi}{2} dy$  por lo tanto  $dy = \frac{2}{n\pi} du$  entonces

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy &= \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin u du = \frac{2}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 1] \\ &= \frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1] = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

así

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)(1-x)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \left[ \frac{2}{n\pi} ((-1)^{n+1} + 1) \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

**Ejemplo 3.8** EL Problema de Dirichlet para un círculo

Considere el problema de resolver la ecuación de Laplace en la región circular  $r < a$ , sujeta a la condición en la frontera

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad (3.86)$$

donde  $f$  es una función dada, para  $0 \leq \theta < 2\pi$  [Ver Figura 3.13]. En coordenadas polares ver Sección 1.3, la ecuación de Laplace toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (3.87)$$

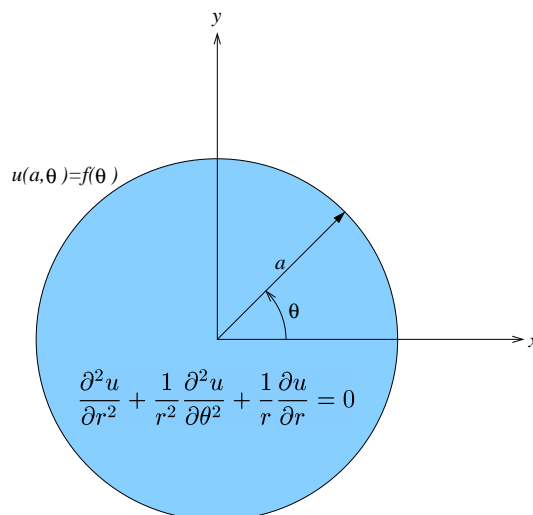


Figura 3.13: Problema de Dirichlet para un círculo

Para completar el enunciado del problema, se nota que, para que  $u(r, \theta)$  sea uniforme es necesario que  $u$  sea periódica en  $\theta$  con periodo  $2\pi$ . Es más enunciamos explícitamente que  $u(r, \theta)$  debe ser finita en cada punto para el cual  $r \leq a$ , ya que esto resultará importante posteriormente. Para aplicar el método de separación de variables a este problema, suponga que

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Al sustituir por  $u$  a la ecuación diferencial (3.87), se tiene

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0$$

o

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{\Theta''}{\Theta} = \sigma,$$

donde  $\sigma$  es la constante de separación. Así, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2 R'' + rR' - \sigma R = 0, \quad (3.88)$$

$$\Theta'' + \sigma\Theta = 0. \quad (3.89)$$

En este problema no hay condiciones homogéneas en la frontera; sin embargo, recordando que las soluciones deben ser acotadas y también periódicas en  $\theta$ , con período  $2\pi$ . Es posible demostrar que la condición de periodicidad requiere que  $\sigma$  sea real, se consideran sucesivamente los casos en los que  $\sigma$  es negativa, cero y positiva. Si  $\sigma < 0$ , sea  $\sigma = -\lambda^2$ , donde  $\lambda > 0$ . Entonces la ecuación (3.89) se puede escribir como  $\Theta'' - \lambda^2\Theta = 0$ , por consiguiente,

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\lambda\theta} + c_2 e^{-\lambda\theta},$$

donde,  $\Theta(\theta)$  puede ser periódica sólo si  $c_1 = c_2 = 0$ , luego se concluye que  $\sigma$  no puede ser negativa. Si  $\sigma = 0$ , entonces la ecuación (3.89) queda  $\Theta'' = 0$ , por tanto,

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta.$$

Para que  $\Theta(\theta)$  sea periódica se debe tener  $c_2 = 0$ , de modo que  $\Theta(\theta)$  sea constante. Además, para  $\sigma = 0$ , la ecuación (3.88) queda

$$r^2 R'' + rR' = 0.$$

Esta ecuación es del tipo Euler y tiene la solución

$$R(r) = k_1 + k_2 \ln r.$$

El término logarítmico no puede ser aceptado, si  $u(r, \theta)$  debe permanecer finita cuando  $r \rightarrow 0$ ; luego,  $k_2 = 0$ . Así correspondiendo a  $\sigma = 0$ , se obtiene la solución

$$u_0(r, \theta) = 1.$$

Por último, si  $\sigma > 0$ , se hace  $\sigma = \lambda^2$ , donde  $\lambda > 0$ , entonces las ecuaciones (3.88) y (3.89) quedan

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0, \quad (3.90)$$

y

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0, \quad (3.91)$$

respectivamente. La ecuación (3.90) es una ecuación de Euler cuya la solución viene dada por

$$R(r) = k_1 r^\lambda + k_2 r^{-\lambda} \quad (3.92)$$

mientras que la ecuación (3.91) tiene la solución

$$\Theta(\theta) = c_1 \sin \lambda\theta + c_2 \cos \lambda\theta.$$

Para que  $\Theta$  sea periódica, con período  $2\pi$ , es necesario que  $\lambda$  sea un entero positivo  $n$ . Con  $\lambda = n$  se deduce que debe descartarse la solución  $r^{-\lambda}$  en la ecuación (3.92), ya que se vuelve no acotada cuando  $r \rightarrow 0$ . Como consecuencia,  $k_2 = 0$  y las soluciones apropiadas de la ecuación (3.87) son

$$u_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta, \quad v_n = r^n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Estas funciones, junto con  $u_0(r, \theta) = 1$ , forman un conjunto de soluciones fundamentales para el presente problema.

En la forma acostumbrada, ahora se supone que  $u$  puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones fundamentales; es decir

$$u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta). \quad (3.93)$$

La condición en la frontera (3.86) entonces requiere que

$$u(a, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta) = f(\theta), \quad (3.94)$$

para  $0 \leq \theta < 2\pi$ . La función  $f$  puede extenderse fuera de este intervalo, de modo que sea periódica de periodo  $2\pi$ , por tanto, tener una serie de Fourier de la forma (3.94). Puesto que la función extendida tiene periodo  $2\pi$ , se puede calcular sus coeficientes de Fourier, integrando sobre cualquier periodo de la función. En particular, es conveniente usar el intervalo original  $(0, 2\pi)$ ; entonces,

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.95)$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.96)$$

Eligiendo estos coeficientes, la ecuación (3.93) representa la solución del problema con valores en la frontera de las ecuaciones (3.86) y (3.87). Se nota que, en este problema, se necesitan tanto términos senoidales como cosenoidales en la solución. Esto es debido a que los datos en la frontera fueron dados sobre  $0 \leq \theta < 2\pi$  y tiene periodo  $2\pi$ . Por consiguiente, se requiere la serie completa de Fourier, en lugar de únicamente términos senoidales o cosenoidales.

**Ejemplo 3.9** Usando las ecuaciones (3.94), (3.95) y (3.96) la solución cuando  $f(\theta)$  esta dada

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \, d\theta \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos(n\theta) \, d\theta \right] \cos(n\theta) + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(n\theta) \, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \operatorname{sen}(n\theta) \, d\theta \right] \operatorname{sen}(n\theta) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \, d\theta \right] + \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(n\theta) \, d\theta \right] \end{aligned}$$

Calculando únicamente las integrales

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \, d\theta &= \frac{1}{n} [\operatorname{sen}(n\theta)]_0^{\pi} = 0 \\ \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(n\theta) \, d\theta &= -\frac{1}{n} [\cos(n\theta)]_0^{\pi} = -\frac{1}{n} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

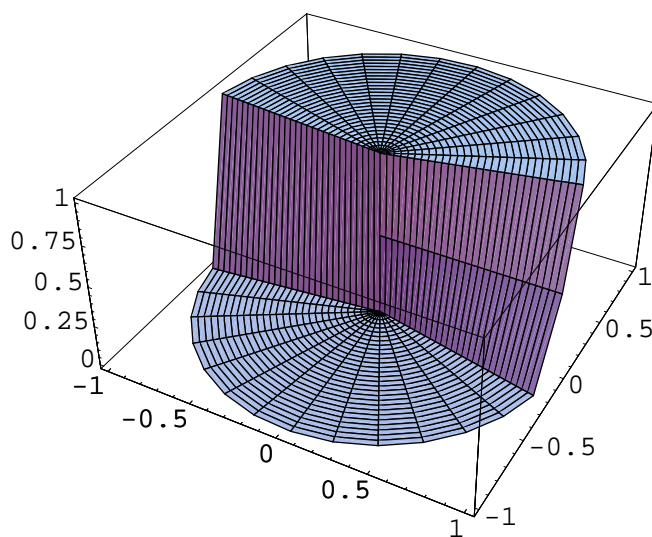


Figura 3.14: Solución al Problema de Dirichlet para el círculo

*Finalmente*

$$u(a, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\theta)}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \text{sen}(n\theta) d\theta \right] = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n+1)\theta}{\pi} \left( \frac{2}{2n+1} \right).$$

La Figura 3.14 muestra la solución a este problema.



**Ejemplo 3.10** Usando las ecuaciones (3.94), (3.95) y (3.96) la solución cuando  $f(\theta)$  es

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta, & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - \theta, & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 0, & \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

La gráfica de  $f(\theta)$  se muestra en la Figura 3.15

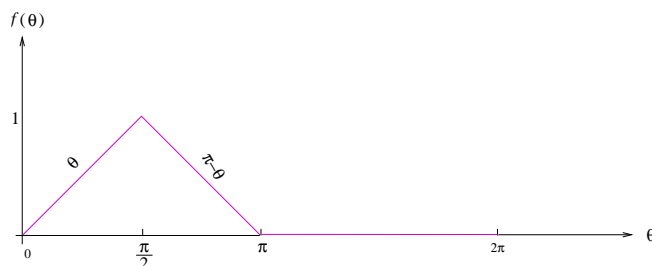


Figura 3.15:  $f(\theta)$

Así

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - \theta) \, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \, d\theta \right] + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos(n\theta) \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - \theta) \cos(n\theta) \, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos(n\theta) \, d\theta \right] + \\ & \frac{\sin(n\theta)}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin(n\theta) \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - \theta) \sin(n\theta) \, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \sin(n\theta) \, d\theta \right]. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Calculando únicamente las integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \, d\theta &= \frac{\pi^2}{8} \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - \theta) \, d\theta &= \frac{\pi^2}{8} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos(n\theta) \, d\theta &= \frac{-2 + 2 \cos(\frac{n\pi}{2}) + n\pi \sin(\frac{n\pi}{2})}{2n^2} \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - \theta) \cos(n\theta) \, d\theta &= \frac{\sin(\frac{n\pi}{4})(-n\pi \cos(\frac{n\pi}{4}) + 2 \sin(\frac{3n\pi}{4}))}{n^2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin(n\theta) \, d\theta &= \frac{-\frac{1}{2}n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) + \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - \theta) \sin(n\theta) \, d\theta &= \frac{n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) + 2 \sin(\frac{n\pi}{2}) - 2 \sin(n\pi)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación (3.97) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 u(a, \theta) = & \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\pi} \left[ \frac{-2 + 2 \cos(\frac{n\pi}{2}) + n\pi \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{2n^2} \right. \\
 & + \frac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{4})(-n\pi \cos(\frac{n\pi}{4}) + 2 \operatorname{sen}(\frac{3n\pi}{4}))}{n^2} \left. \right] + \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\pi} \left[ \frac{-\frac{1}{2}n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2} \right. \\
 & \left. + \frac{n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) + 2 \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}) - 2 \operatorname{sen}(n\pi)}{2n^2} \right].
 \end{aligned}$$

La solución se puede ver en la Figura 3.16.

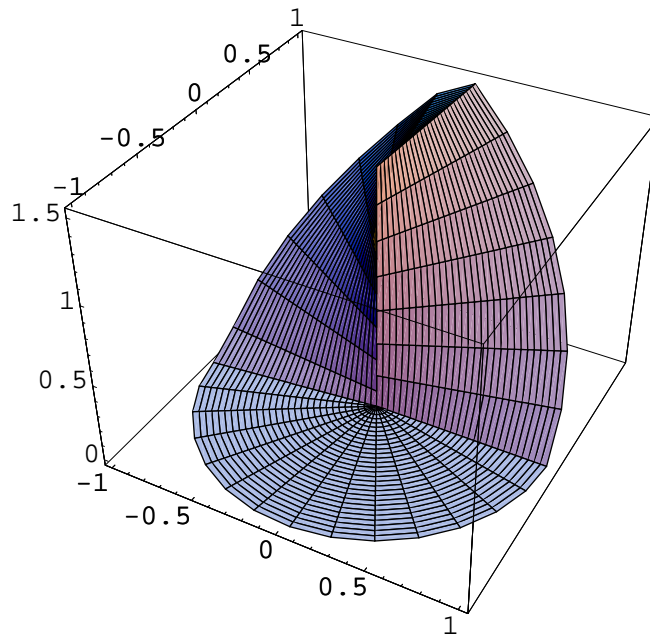


Figura 3.16: Solución al Problema de Dirichlet para el círculo

# Apéndice A

## Apéndice de Análisis Real

En este apéndice se dan los resultados importantes del Análisis Real que fueron utilizados en la tesis. No se demuestran debido a que las demostraciones se encuentran en los libros cuya referencia se indica en cada caso.

**Definición A.1 (Medida Producto).** [Ro](pág. 264-265). *Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  y  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  dos espacios medibles completos y se considera el producto directo  $X \times Y$  de  $X$  y  $Y$ . La medida extendida es llamada la medida producto de  $\mu \times \nu$ . Si  $\mu$  y  $\nu$  son finitas (o  $\sigma$ -finita), también lo es  $\mu \times \nu$ .*

*Si  $X$  y  $Y$  son la línea real y  $\mu$  y  $\nu$  son ambas medida de Lebesgue, entonces  $\mu \times \nu$  es llamada medida de Lebesgue dos-dimensional para el plano.*

**Proposición A.1 (Teorema de la Convergencia Acotada)** [Ro] pág. 81. *Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto  $E$  de medida finita, si existe un número real  $M$  tal que  $|f_n| \leq M$  para toda  $n$  y  $x \in E$  y si además  $f(x) = \lim f_n(x)$  para cada  $x \in E$ , entonces,*

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

**Teorema A.1 (Teorema de Categoría de Baire)** [Ro] pág. 139. *Un espacio métrico completo no es la unión de una colección numerable de conjuntos densos en ninguna parte.*



## Apéndice B

# Apéndice de Análisis Complejo

En este apéndice se dan los resultados de Análisis Complejo más importantes que fueron utilizados en la tesis. La mayoría de los resultados que aquí aparecen se pueden encontrar en el libro Conway [Co].

**Definición B.1** [Co] pág.39. Si  $G$  es un conjunto abierto conexo en  $\mathbb{C}$  y  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua tal que  $z = \exp f(z)$  para toda  $z \in G$  entonces  $f$  es una rama del logaritmo.

**Definición B.2** [Co] pág. 40. Una región es un subconjunto abierto conexo del plano.

**Definición B.3** [Si] pág. 51. Una función definida en un dominio  $G$  es analítica en  $z_0 \in G$  si es complejo diferenciable en una vecindad de  $z_0$ . Diremos que  $f$  es analítica en  $G$  si lo es en todos los puntos de  $G$ .

**Definición B.4** [Co] pág. 76. Si  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica y  $a \in G$  satisface  $f(a) = 0$ , entonces  $a$  es un cero de  $f$  de multiplicidad  $m \geq 1$  si hay una función analítica  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = (z - a)^m g(z)$  donde  $g(a) \neq 0$ .

**Teorema B.1 (Teorema de Unicidad para Funciones Analíticas)** [Si] pág. 208. Si dos funciones analíticas,  $f$  y  $g$ , definidas sobre un dominio  $D$  coinciden sobre un conjunto  $G \subset D$ , el cual tiene un punto límite  $z_0 \in D$ , entonces  $f$  y  $g$  coinciden en  $D$ .

**Teorema B.2 (Teorema de Taylor para Funciones Analíticas)** [Si] pág. 200-206. Si  $f$  es una función analítica en un dominio  $D$  y  $z_0$  es un punto arbitrario de  $D$  entonces existe una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

y un número real  $\rho > 0$  tal que ésta converge a  $f(z)$  en  $B(z_0, \rho) \subset D$ . Los coeficientes  $a_n$  de esta serie están dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

A dicha expansión se le conoce como serie de Taylor para funciones analíticas.

**Definición B.5 Ecuaciones de Cauchy Riemann** [Co] pág. 40-41. Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica y sea  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  para  $x + iy$  en  $G$ . Sea el valor del límite

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

en dos caminos diferentes. Primero sea  $h \rightarrow 0$  para valores reales de  $h$ . Para  $h \neq 0$  y  $h$  real se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h} \\ &= \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \end{aligned}$$

haciendo  $h \rightarrow 0$  se tiene

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad (\text{B.1})$$

Ahora sea  $h \rightarrow 0$  para valores imaginarios; esto es, para  $h \neq 0$  y  $h$  real,

$$\frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = -i \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h}$$

Por lo tanto,

$$f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad (\text{B.2})$$

Las ecuaciones (B.1) y (B.2) de la parte real e imaginaria respectivamente dan las ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**Corolario B.1** [Co] pág. 40. Una rama de la función logaritmo es analítica y su derivada es  $z^{-1}$ .

**Teorema B.3 (Teorema de Weierstrass de Convergencia Analítica).**

[Si] pág. 192. Si la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es uniformemente convergente en todo subconjunto compacto de un dominio  $G$  y si todo término  $f_n$  es analítica en  $G$ , entonces la función límite  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  es analítica en  $G$ , más aún, cuando  $n \rightarrow \infty$  cada sucesión de las derivadas  $\{f_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  converge uniformemente a  $f^{(k)}$  para todo subconjunto compacto de  $G$ .

**Teorema B.4 (Fórmula Integral de Cauchy)** [Si] pág. 172. Si  $f$  es una función analítica en un dominio  $G$  y si  $G$  contiene una curva cerrada rectificable de Jordan  $L$  y su interior  $I(L)$ , entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

si  $z_0 \in I(L)$ . Esta integral es llamada la integral de Cauchy. Por otra parte

$$\int \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

si  $z_0 \in E(L)$ , donde  $E(L)$  es el exterior de  $L$ .

**Teorema B.5** [Si] pág. 174. Si  $f$  es analítica en un dominio  $G$ , entonces  $f$  tiene derivadas de todos los órdenes en  $G$  y dado  $z_0 \in G$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $L$  es una curva cerrada rectificable de Jordan tal que  $z_0 \in \overline{I(L)} \subset G$ .

**Teorema B.6 (Teorema de Liouville)** [Co] pág. 77. Si  $f$  es una función analítica y acotada en  $\mathbb{C}$  es idénticamente una constante.

**Teorema B.7 (Principio del Argumento)** [Si] pág. 262. Dada una curva rectificable de Jordan  $\gamma$ , se supone que  $f$  es una función analítica en  $\overline{I(\gamma)}$  excepto en un número finito de polos contenidos en  $I(\gamma)$  y se supone también que  $f$  no tiene  $A$ -puntos en  $\gamma$ . Entonces el número de  $A$ -puntos de  $f$  en el interior de  $\gamma$ , menos el número de polos de  $f$  en el interior de  $\gamma$ , equivale al número de circuitos alrededor del punto  $\omega = A$ , hechos por el punto  $\omega = f(z)$  cuando el punto  $z$  recorre la curva  $\gamma$  una vez con orientación positiva.

**Teorema B.8 (Teorema de Rouché)** [Si] pág. 262. Dada una curva rectificable de Jordan  $\gamma$ , se supone que  $f$  y  $g$  son analíticas en  $\overline{I(\gamma)}$ , y se supone que

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

para cada punto  $z$  en  $\gamma$ , entonces  $f$  y  $f + g$  tienen el mismo número de ceros en  $I(\gamma)$ .

**Proposición B.1** [Co] pág. 68. Sea  $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua y se define a  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) ds$$

Entonces  $g$  es continua. Además, si  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  existe y es una función continua en  $[a, b] \times [c, d]$  entonces  $g$  es continuamente diferenciable y

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds.$$

**Corolario B.2** Si  $G$  es simplemente conexo y  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en  $G$  entonces  $f$  tiene una primitiva en  $G$ .

**Definición B.6** La función definida por

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad z = x + iy$$

se denomina función de Joukowski.

**Lema B.1** Sea  $f$  la función de Joukowski entonces se satisface que para toda  $\omega \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$  existen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  únicos tales que

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f(z_2) = \omega, \\ z_1 z_2 &= 1 \end{aligned}$$

y  $f$  es analítica en  $\mathbb{C} - \{0\}$

**Lema B.2** Sea  $f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ ,  $z = x + iy$  y  $\gamma$  una curva cerrada de Jordan determinada por el conjunto  $\{z : |z| = 1\}$  entonces se cumple que  $f(I(\gamma) - \{0\}) = f(E(\gamma)) = \mathbb{C} - [-1, 1]$ . Además  $f$  mapea circunferencias con centro en el origen del plano a elipses horizontales con focos en  $\pm 1$  y mapea rectas que pasen por el origen del plano  $z$ , en ramas de hipérbolas con focos en  $\pm 1$ . Ver Figura B.1

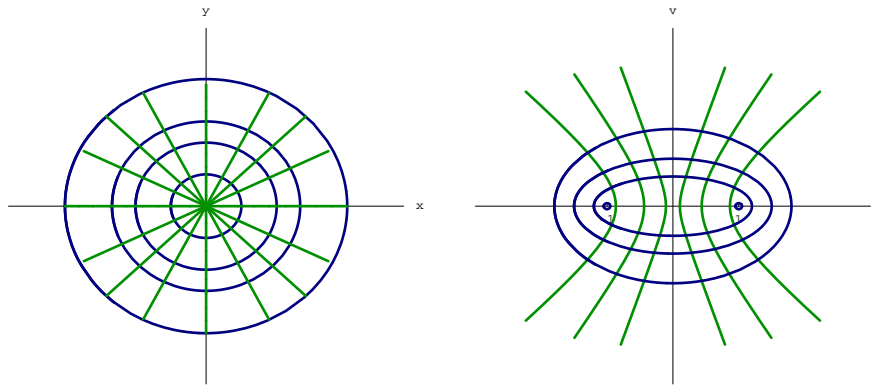


Figura B.1: Función de Joukowski.

**Teorema B.9** (Teorema de Cauchy-Hadamard)

Dada una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , sea  $R = \frac{1}{\Delta}$ , donde  $\Delta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  y sea  $\gamma : |z - z_0| = R$ . Entonces se cumple:

- (a) Si  $R = 0$ , la serie es divergente para toda  $z \neq z_0$ .
- (b) Si  $0 < R < \infty$ , la serie es absolutamente convergente para toda  $z \in I(\gamma)$  y divergente para toda  $z \in E(\gamma)$ .
- (c) Si  $R = \infty$ , la serie es absolutamente convergente para toda  $z \in \mathbb{C}$

**Teorema B.10** Sea  $\gamma : |z - z_0| = R$  el círculo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0) + \cdots .$$

Entonces la serie es uniformemente convergente en cada subconjunto compacto de  $I(\gamma)$



**Teorema B.11** Sea  $f(z)$  una serie de potencias,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots \quad (\text{B.3})$$

con radio de convergencia  $R$ , converge a una función analítica  $f(z)$  en el disco  $K : |z - z_0| < R$  y los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  son dados por la siguiente fórmula

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Además, la serie (B.3) puede ser diferenciable término a término cualquier número de veces y cada serie diferenciada

$$f^{(k)}(z) = k! a_k + \frac{(k+1)! a_{k+1}}{1!} (z - z_0) + \cdots + \frac{n! a_n}{(n-k)!} (z - z_0)^{n-k} + \cdots,$$

es uniformemente convergente en cada subconjunto compacto de  $K$ .



## Apéndice C

# Apéndice de Mathematica

En este apéndice se dan las instrucciones para programar en mathematica y obtener las gráficas que ilustran la tesis.

Con la siguiente instrucción se obtiene la Figura C.1

```
f = Integrate[Sin[(i Pi y)/2], {y,0,2}]
Plot3D[Sum[(Sinh[((i Pi)/2)(1 - x])/( Sinh[ (i Pi)/2 ] )]* (f)*
Sin[(i Pi y)/2], {i,200}], {x,0,1}, {y,0,2}];
```

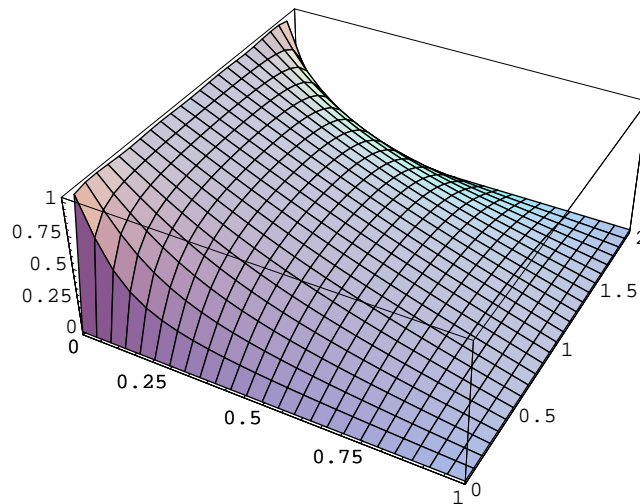


Figura C.1: Solución al Problema de Dirichlet para un rectángulo, con  $\varphi(y) = 1$

Con la siguiente instrucción la Figura C.2

```
f = Integrate[t Sin[(i Pi t)/2], {t,0,1}]
g = Integrate[(2-t)Sin[(i Pi t)/2], {t,1,2}]
Plot3D[Sum[(Sinh[((i Pi)/2)(1-x)]/(Sinh[(i Pi)/2]))*(f+g)*
Sin[(i Pi y)/2], {i,1,1000}], {x,0,1}, {y,0,2}];
```

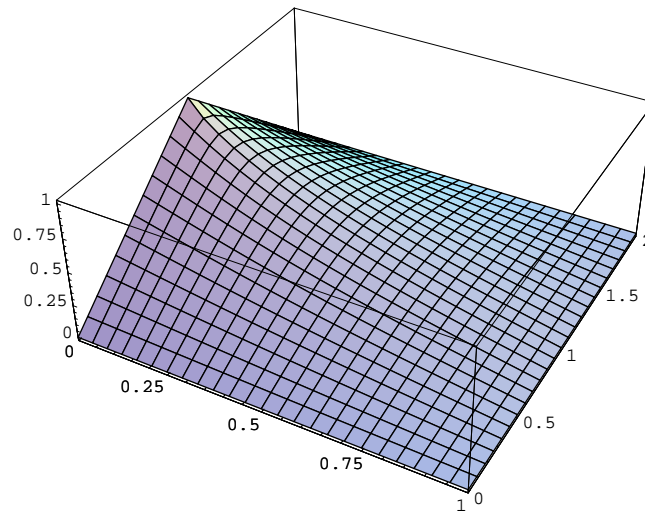


Figura C.2: Solución al Problema de Dirichlet para un rectángulo

La la Figura C.3

```
ParametricPlot3D[{r*Cos[θ],r*Sin[θ],
(1-(r^2))/(1-2rCos[θ-1]+r^2)}, {r,0,1}, {θ,0,2Pi}];
```

La Figura C.4

```
a=Integrate[Cos[i α],{α,0, Pi}]
b=Integrate[Sin[i α],{α,0, Pi}]
ParametricPlot3D[ {r*Cos[θ],r*Sin[θ],(1/2+Sum[(Sin[i θ]/Pi)(b),{i,1,2000}])}, {r,0,1},
{θ,0,2Pi}];
```

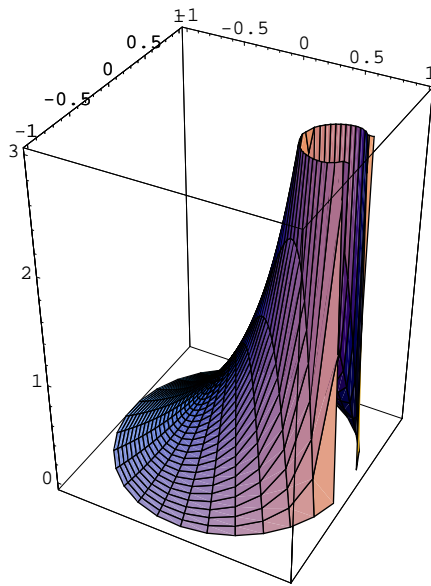


Figura C.3: Núcleo de Poisson

La Figura C.5

```
a=Integrate[ $\theta \cos[i \theta]$ , { $\theta$ , 0, Pi/2}]
```

```
b=Integrate[ $(\pi - \theta) \cos[i \theta]$ , { $\theta$ , Pi/2, Pi}]
```

```
c=Integrate[ $\theta \sin[i \theta]$ , { $\theta$ , 0, Pi/2}]
```

```
d=Integrate[ $(\pi - \theta) \sin[i \theta]$ , { $\theta$ , Pi/2, Pi}]
```

```
ParametricPlot3D[
```

```
{ $r \cos[\theta]$ ,  $r \sin[\theta]$ ,  $((\pi/8) + \text{Sum}[(\cos[i \theta]/\pi) (a+b) + (\sin[i \theta]/\pi) (c+d), \{i, 1, 200\}])$ },
```

```
{ $r$ , 0, 1}, { $\theta$ , 0, 2 Pi}];
```

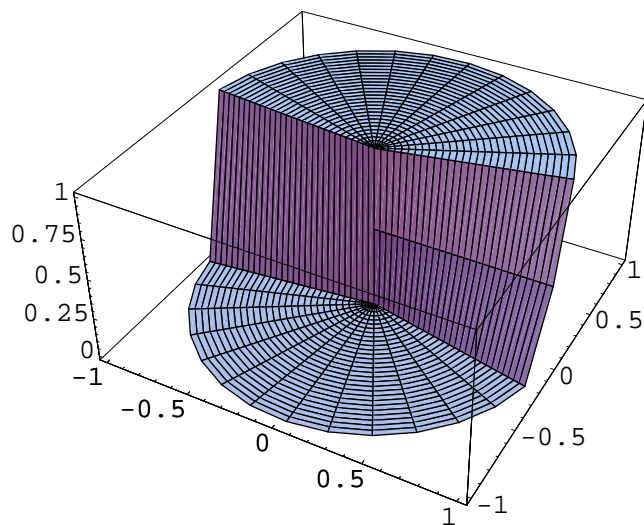


Figura C.4: Solución al Problema de Dirichlet para el círculo

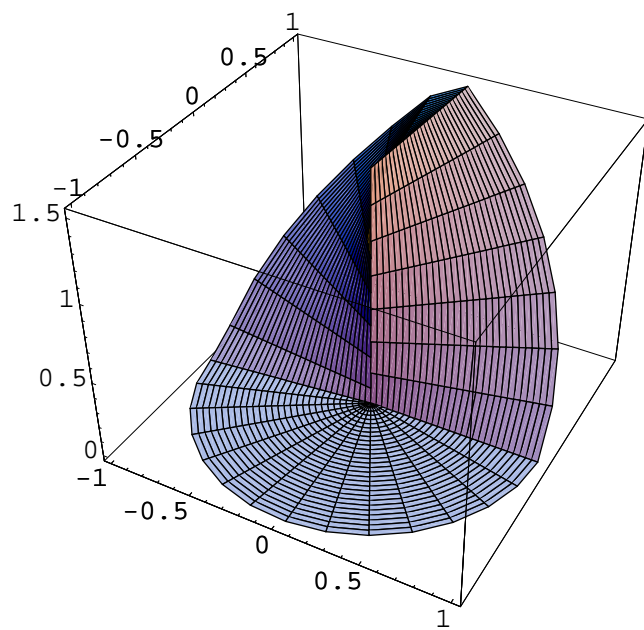


Figura C.5: Solución al Problema de Dirichlet para el círculo

# Bibliografía

- [Lions] Robert. Dautry, Jacques-Louis Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Volume 1. Physical Origins and Classical Methods (1990), 328-402.
- [Bo] William E. Boyce, Richard C. Di Prima *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Instituto Politécnico Rensselaer (1989), 599-604.
- [Zy] A. Zygmund, *Trigonometric Series*. 2nd ed. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1959.
- [Co] John B. Conway *Functions of one Complex Variable*, Indiana University (1975), 254-280.
- [Bricio] Diego Bricio Hernández Castaños, Luis Alberto Briseño Aguirre, María Emilia Caballero Acosta *Obras Completas, Teoría del Potencial*, Volumen IV, Sociedad Matemática Mexicana (1998), 1-46.
- [Sh] V.L. Shapiro *The uniqueness of functions harmonic in the interior of the unit disk*, Proc. London Math. Soc 13 (1963), 639-652. 328-402.
- [Kl] M. Kline *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York (1972). 328-402.
- [Ro] H.L. Royden *Real Analysis, Segunda Edición*, Macmillan Publishing, New York (1968).
- [Si] Richard A. Silverman *Introductory Complex Analysis*, Dover publication, inc. New York. U.S.A. (1972).
- [Hen] Peter Henrici *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. i. J. Wiley, New York. U.S.A., 1974.
- [Ne] Nelson, E. *Dynamical Theories of Bromian Movement*. Princeton. N.J., 1967

- 
- [Mar] Marvin Rosen Glum, James Rovnyak *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser Advanced Texts, 1994, p1-250
- [Du] Peter Duren, Walter Hengartner and Richard S. Laugesen, *The Argument Principle for Harmonic Functions*, 1996 Vol.103 Amer. Math Monthly Pág.410-415.
- [L.S] Victor L. Shapiro, *Harmonic Functions in the Unit Disk*, 2002 Vol.109 Amer. Math Monthly Pág.37-45.



# Índice alfabético

- Barrera , 61
- Bola abierta , 14
- Conforme
  - Mapeo , 67
  - Transplante , 67
- Conjunto
  - $\mathcal{C}(G, \Omega)$  , 27
  - $\mathcal{F}_+(\varphi)$  , 52
  - $\mathcal{F}_-(\varphi)$  , 52
  - $\mathcal{P}(f, G)$  , 50
- Denso en ninguna parte , 38
- Dirichlet
  - biografía , 9
  - Región de , 61
- Disipación térmica , 77
- Ecuación
  - de Conducción de Calor , 77
  - de Laplace , 14
  - de Laplace en coordenadas polares , 30
- Espacio  $Har(G)$  , 27
- Fórmulas de Euler-Fourier , 88
- Familia de Perron,  $\mathcal{P}(f, G)$  , 50
- Frontera
  - $\partial B$  , 14
  - $\partial_\infty G$  , 18
- Función
  - analítica , 14
  - armónica , 13, 14
  - conjugada armónica , 14
  - de Perron asociada con  $f$  , 51
  - Mayorante armónico , 57
  - mutuamente ortogonal , 86
  - O , 31
  - o , 31
  - periódica , 85
  - semicontinua superiormente o (scs) , 55
  - subarmónica , 47
  - superarmónica , 47
- Funciones Armónicas
  - $I$ , índice de , 40
  - $f$  preserva orientación , 42
  - descomposición local de , 41
  - en el Disco Unitario , 32
  - Principio del Argumento , 40
- Harnack
  - Desigualdad de , 27
- Panorana Histórico , 2
- Periodo Fundamental , 85
- Poisson
  - Fórmula Integral de , 22
  - Núcleo de , 20
- Problema de Dirichlet
  - Campo Eléctrico entre electrodos hiperbólicos, 73
  - en el Disco Unitario , 23
  - en una viga , 71
  - para un círculo , 94
  - para un rectángulo , 89

- 
- solución generalizada , 52
  - Propiedad del Valor Medio (PVM) , 17
  - Punto singular , 42
  - Series de Fourier , 84
  - Teorema
    - de Harnack , 27
    - Principio del Máximo, (Primera Versión) , 18
    - de Hurwitz para Funciones Armónicas , 45
    - de Rouché para funciones armónicas , 45
    - de Weiner, 53
    - del Valor Medio , 17
    - Principio del Argumento , 40
    - Principio del Máximo (Cuarta Versión) , 48
    - Principio del Máximo (Tercera Versión) , 48
    - Principio del Máximo, (Segunda Versión) , 18