



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

---

---

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

*“UNA DEDUCCIÓN VARIACIONAL  
DE LA EFICIENCIA ECOLÓGICA  
DE LA TERMODINÁMICA  
DE TIEMPOS FINITOS”*

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN FÍSICA  
Y MATEMÁTICAS  
P R E S E N T A:  
ALFREDO GALVÁN VARGAS.



DIRECTOR DE TESIS:

DR. FERNANDO ANGULO BROWN.

MÉXICO, D.F.

ENERO DE 2006

## INDICE

INTRODUCCIÓN _____	Pág. 3
CAPITULO 1	
1. OPTIMIZACIÓN TERMODINÁMICA DE MOTORES ENDORREVERSIBLES _	5
1.1. CARACTERÍSTICAS TÍPICAS DEL MOTOR ENDORREVERSIBLE _____	6
1.2. OPTIMIZACIÓN TERMODINÁMICA _____	8
1.2.1.LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON _____	8
CAPITULO 2	
2. PRINCIPIOS VARIACIONALES _____	11
2.1. EL FORMALISMO DE EULER-LAGRANGE _____	11
2.2. TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO (Formalismo de Hamilton) _____	13
2.2.1. OPTIMIZACIÓN DE LA TAYECTORIA DE UN MOTOR DE NOVIKOV _____	16
CAPITULO 3	
3. OBTENCIÓN DE LA EFICIENCIA ECOLÓGICA MEDIANTE FORMALISMO VARIACIONAL _____	20
3.1.FORMALISMO DE EULER-LAGRANGE _____	20
3.2. TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO (Formalismo de Hamilton) _____	24
CONCLUSIONES _____	27
BILBLOGRAFÍA _____	28

## INTRODUCCIÓN.

Durante los últimos treinta años se ha desarrollado la llamada termodinámica de tiempos finitos (TTF) a partir del trabajo pionero de Curzon y Ahlborn [1]. Estos autores elaboraron un modelo de ciclo térmico tipo Carnot pero en el que no hay equilibrio térmico entre los baños térmicos y las isotermas del ciclo. De hecho, supusieron que entre los almacenes térmicos y la sustancia de trabajo había un flujo irreversible de calor (productor de entropía) dada por la ley de enfriamiento de Newton.

Esto permitió tener un ciclo con irreversibilidades en los acoplamientos de la sustancia de trabajo con sus alrededores, transcurriendo a tiempo finito. El ciclo interno de Carnot opera reversiblemente (hipótesis de endorreversibilidad) y las irreversibilidades sólo están presentes en las fronteras de la máquina de Carnot en los almacenes térmicos. Al evolucionar el sistema global a tiempo finito, la potencia del modelo es no nula, a diferencia del ciclo de Carnot completamente reversible que es de potencia nula. Curzon y Ahlborn demostraron que su modelo a tiempo finito trabajando a potencia máxima tiene una eficiencia dada por

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

siendo  $T_2$  y  $T_1$  las temperaturas de los almacenes frío y caliente respectivamente. Esta expresión mostró ser muy razonable para el cálculo de eficiencia de algunas plantas de potencia del mundo real.

Desde el artículo de Curzon y Ahlborn muchos criterios de optimización de máquinas térmicas a tiempo fino se han propuesto. En particular, en la Ref. [5], se propuso el criterio ecológico de optimización, que consiste en la maximización de la llamada función ecológica  $E = W - T_2\sigma$ , donde  $W$  es la potencia de salida de la máquina,  $T_2$  la temperatura de almacén frío y  $\sigma$  es la producción de entropía del universo termodinámico (sustancia de trabajo más alrededores). Cuando se maximiza esta función, la máquina produce 75 % de la potencia máxima y sólo el 25% de la entropía producida en el régimen de potencia máxima. Además, la eficiencia ecológica resulta ser

$$\eta_{ME} = 1 - \sqrt{\frac{T_2(T_2 + T_1)}{2T_1^2}}$$

que es aproximadamente la semisuma de las eficiencias de Carnot y Curzon y Ahlborn. Esta expresión ha sido obtenida mediante diversos procedimientos. En particular en la Ref. [12] fue obtenida mediante cálculo variacional, usando un formalismo de Euler-Lagrange. En esta tesis, nuevamente se obtiene la

eficiencia ecológica, pero utilizando la llamada teoría de control óptimo, mediante un formalismo Hamiltoniano.

La tesis está organizada como sigue: en el capítulo 1 se da un repaso de algunos conceptos de la TTF; en el capítulo 2, se presenta brevemente algunos principios variacionales; finalmente en el capítulo 3, se obtiene la eficiencia ecológica mediante dos principios variacionales (el de Euler-Lagrange y el de Hamilton).



Figura 1. Esquema de De Vos para el motor endorreversible de Curzon y Ahlborn.

donde  $T_2$  y  $T_1$  son la temperaturas absolutas de los depósitos frío y caliente, respectivamente. La ecuación (1.1) ha sido obtenida por varios autores usando métodos de aproximación alternativos al ciclo CA [2, 3, 4]. Desde el trabajo de CA, se han hecho trabajos extensos en el campo de la TE, también llamada la termodinámica de tiempo-finitos. Entre los varios tratamientos propuestos para los motores endorreversibles, el tratamiento de De Vos [2] es notable debido a su simplicidad y generalidad. En este capítulo, presentaremos una visión general para algunos de los resultados de la TE que siguen del tratamiento de De Vos [2]. Consiste en tomar algunas características del ciclo de CA que funciona bajo un criterio ecológico de optimización y mejora los cálculos de la eficiencia de tiempos-finitos.

### 1.1.- CARACTERÍSTICAS TÍPICAS DEL MOTOR ENDOREVERSIBLE.

La figura 1 muestra el esquema de De Vos para un motor típico endoreversible (el motor de CA) constituido por las siguientes partes: dos depósitos del calor ( $T_1$  y  $T_2$ ); dos componentes irreversibles (con conductancia térmica  $\alpha$  y  $\beta$ ) y un motor reversible de Carnot entre el depósito intermedio de calor a  $T_{1w}$ , y el depósito intermedio del calor a  $T_{2w}$ . Por la condición de endorreversibilidad [2], tenemos que

$$\frac{Q_1}{T_{1w}} = \frac{Q_2}{T_{2w}}, \quad \dots (1.2)$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son los flujos de calor (ver Figura 1) (transferencia térmica por unidad de tiempo). Debido a la primera ley de la termodinámica, tenemos que

$$Q_1 = W + Q_2 \quad \dots (1.3)$$

donde  $W$  denota la salida de potencia (trabajo por unidad de tiempo). Se propone generalmente (para los conductores térmicos) las leyes constitutivas del tipo

$$Q_1 = \alpha (T_1^k - T_{1w}^k) \quad \dots (1.4)$$

y

$$Q_2 = \beta (T_2^k - T_{2w}^k) \quad \dots (1.5)$$

con  $k = 1$  se recupera la ley de enfriamiento de Newton o con  $k = 4$  se recupera la ley de radiación de calor de Stefan-Boltzmann. Substituyendo la ecuación (1.4) y (1.5) en la ecuación (1.2), obtenemos

$$\frac{\alpha (T_1^k - T_{1w}^k)}{T_{1w}} = \frac{\beta (T_2^k - T_{2w}^k)}{T_{2w}}. \dots (1.6)$$

Para la parte reversible de la figura 1 está claro que

$$\eta = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}, \dots (1.7)$$

donde  $\eta$  es obviamente la eficiencia endorreversible de Carnot. Resolviendo la ecuación (1.6) y (1.7) en términos de  $T_{1w}$  y  $T_{2w}$ , obtenemos

$$T_{1w}^k = \frac{\alpha}{\alpha + \beta (1 - \eta)^{k-1}} T_1^k + \frac{\beta}{\alpha + \beta (1 - \eta)^{k-1}} \frac{T_2^k}{(1 - \eta)} \dots (1.8)$$

y

$$T_{2w}^k = \frac{\alpha (1 - \eta)^k}{\alpha + \beta (1 - \eta)^{k-1}} T_1^k + \frac{\beta (1 - \eta)^{k-1}}{\alpha + \beta (1 - \eta)^{k-1}} T_2^k \dots (1.9)$$

Por medio de la ecuación (1.8) y (1.4) logramos la función de  $Q_1 = Q_1(\eta)$ ,

$$Q_1 = \gamma \frac{(1 - \eta)^k T_1^k - T_2^k}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} (1 - \eta) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} (1 - \eta)^k}, \dots (1.10)$$

con  $\gamma = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta}$ . Multiplicando la ecuación (1.10) por  $\eta$ , inmediatamente conseguimos que

$$W = \gamma \eta \frac{(1 - \eta)^k T_1^k - T_2^k}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} (1 - \eta) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} (1 - \eta)^k}, \dots (1.11)$$

logramos así la salida de potencia (trabajo por unidad de tiempo) en términos de  $\eta$ . Del mismo modo, se puede obtener la producción de entropía del motor de CA. La producción de entropía  $\sigma$  para todo el motor (sustancia de trabajo más depósitos) es

$$\sigma = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}, \dots (1.12)$$

la cual en términos de  $\eta$  se convierte en (substituyendo la ecuación (1.4) y (1.5) en la ecuación (1.12))

$$\sigma = \frac{\gamma}{T_1 T_2} \frac{[(1-\eta)T_1 - T_2][(1-\eta)^k T_1^k - T_2^k]}{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\eta) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\eta)^k}, \quad \dots (1.13)$$

Las ecuaciones (1.10), (1.11) y (1.13) dan las características principales de un ciclo endoreversible de CA, en función de la eficiencia  $\eta$ , porque los flujos de calor están dados por la ecuación (1.4) y (1.5). La figura 2a, 2b y 2c muestran las curvas características de la entrada del calor, salida de potencia y producción de entropía, respectivamente. Pues se espera que estas características sean compatibles con el caso reversible en el límite,  $W(\eta_C) = 0$  y  $\sigma(\eta_C) = 0$  para  $\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ .

## 1.2.- OPTIMIZACIÓN TERMODINÁMICA

### 1.2.1.- Ley de enfriamiento de Newton.

Curzon y Ahlborn obtuvieron la ecuación (1.1) que maximizaba la salida de potencia del ciclo como función de las variables  $X = T_1 - T_{1w}$ , y  $Y = T_{2w} - T_2$ . Este procedimiento implica un álgebra de funciones con dos variables. Por medio de expresiones como la ecuación (1.11) y (1.13) el problema de la maximización se reduce a una variable independiente, a saber,  $\eta$  (que es el procedimiento de De Vos). Por ejemplo, para maximizar la salida de potencia usando la ecuación (1.11), se sigue inmediatamente de que,  $\frac{dW(\eta)}{d\eta} = 0$  e implica que,

$$\begin{aligned} \frac{T_1^k}{T_2^k} (\alpha (1-\eta)^{k+1} + \beta (1-\eta)^{2k}) - (\alpha + \beta (1-\eta)^{k-1}) \\ - (k-1)\eta \left( \alpha \frac{T_1^k}{T_2^k} (1-\eta)^k + \beta (1-\eta)^{k-1} \right) = 0, \quad \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

la cual para la ley de Newton que es el caso al que nos referimos ( $k = 1$ ) se reduce a

$$(1-\eta)^2 T_1 - T_2 = 0, \quad \dots (1.15)$$

que tiene como solución la ecuación (1.1).



De la Ref. [5] se obtiene un criterio de mérito para optimizar el ciclo de CA que fue propuesto. Este criterio consiste en la maximización de la función  $E$ , que representa el mejor compromiso entre la salida alta de potencia y la producción baja de entropía. La función  $E$  se da de la siguiente manera [5].

$$E = W - T_2\sigma, \dots (1.16)$$

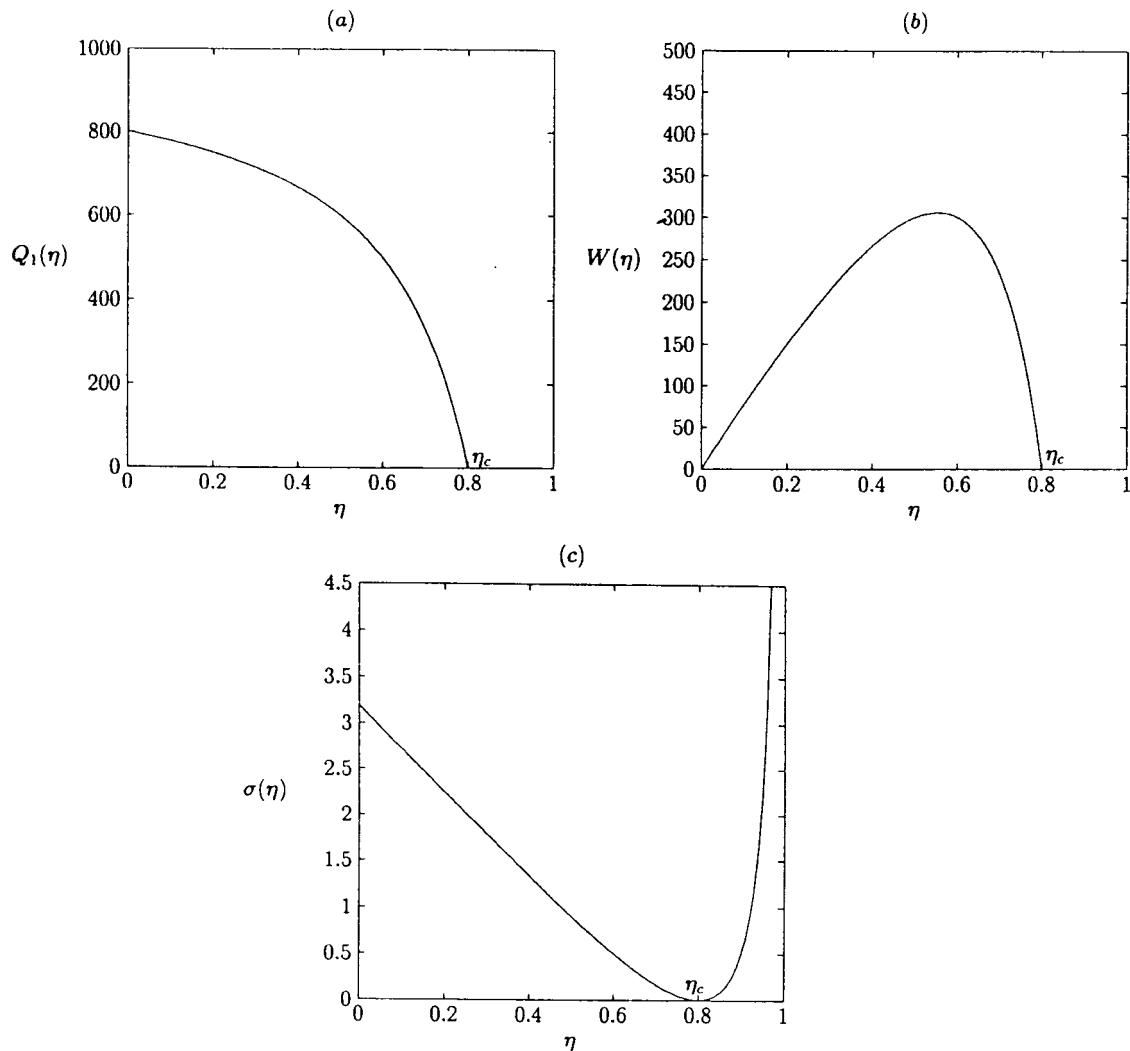


Figura 2. Características termodinámicas para el ciclo de CA en términos de  $\eta$ , con  $k = 1$  y valores arbitrarios para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $T_1$  y  $T_2$ : (a) entrada de calor; (b) salida de potencia y (c) producción de entropía.

donde  $W$  es la salida de potencia,  $T_2$  la temperatura del depósito frío y  $\sigma$  la producción de la entropía (por unidad de tiempo). Sustituyendo la ecuación (1.11) y (1.13) en la ecuación (1.16), obtenemos que

$$E(\eta) = \frac{\gamma}{T_1} \left[ \frac{(1-\eta)(2\eta-1)T_1^{k+1} + (1-2\eta)T_1T_2^k + (1-\eta)^k T_1^k T_2 - T_2^{k+1}}{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\eta) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\eta)^k} \right]. \dots (1.17)$$

en la figura 3 se representa la  $E(\eta)$ , fijando  $k$ ,  $\frac{T_2}{T_1}$ , y  $\frac{\alpha}{\beta}$ . Esto es una curva convexa con un punto máximo único. Para obtener  $\eta_{ME}$ , donde  $E(\eta)$  tiene su máximo, calculamos  $\frac{dE(\eta)}{d\eta} = 0$ , y obtenemos que

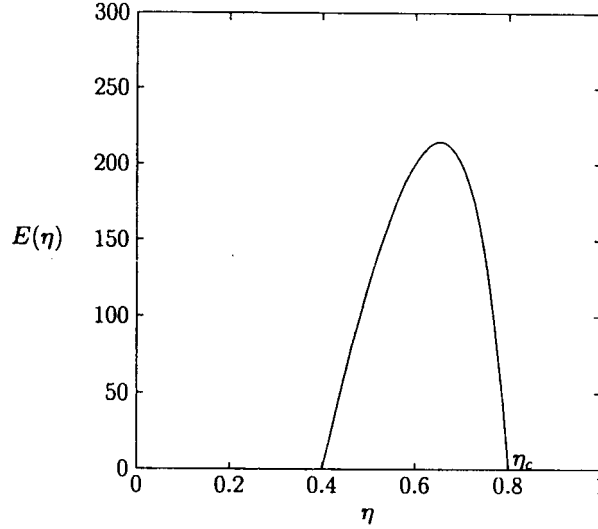


Figura 3. La función ecológica en términos de  $\eta$  para  $k = 1$  y valores arbitrarios del  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $T_1$  y  $T_2$ .

Esto implica que (para  $k = 1$ )

$$2T_1^2(1-\eta)^2 T_1 T_2 - T_2^2 = 0, \dots (1.18)$$

y tiene como solución

$$\eta_{ME} = 1 - \sqrt{\frac{T_2(T_2 + T_1)}{2T_1^2}}, \dots (1.19)$$

que está de acuerdo a la solución de la referencia [5], donde fue obtenido por medio de una aproximación convencional de CA. La ecuación (1.19) tiene la característica siguiente [5]:

$$\eta_{ME} \approx \eta_{ME}^+ \equiv \frac{\eta_C + \eta_{CA}}{2}, \dots (1.20)$$

donde  $\eta_C$  es la eficiencia de Carnot y  $\eta_{CA}$  es la eficiencia de CA dada por la ecuación (1.1).

El punto máximo de  $E(\eta)$  tiene la característica interesante de darnos cerca del 80% de la salida máxima de potencia, pero con una producción de entropía cerca del 30% de la que sería producida por el régimen de máxima potencia. Por esta razón la función  $E(\eta)$  se llama la función ecológica [5].

## CAPITULO 2

### 2.- PRINCIPIOS VARIACIONALES.

La determinación de la trayectoria óptima para un proceso termodinámico requiere de herramientas más elaboradas que el cálculo [6]. Aquí presentaremos dos de estas herramientas: el formalismo de Euler-Lagrange y la teoría de control óptimo (o formalismo de Hamilton). Estas dos herramientas de las matemáticas se han utilizado habitualmente en la literatura de la termodinámica. Ambas tienen sus ventajas respectivas. El formalismo de Euler-Lagrange es generalmente pieza importante de la física estándar, mientras que la teoría de control óptimo no lo es. Por otra parte, la teoría de control óptimo que usa el principio del máximo de Pontryagin conduce a ecuaciones diferenciales de primera orden que proporcionan una descripción más exacta. Los siguientes métodos se presentan en forma de una receta, cada una es acompañada por un ejemplo [6].

#### 2.1.- EL FORMALISMO DE EULER-LAGRANGE.

El cálculo de variaciones o del formalismo de Euler-Lagrange se utiliza generalmente para encontrar un vector  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$  tal que la función

$$J = \int_0^{\tau} f_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt. \quad \dots (2.1)$$

llegue a ser extrema. Una condición necesaria para que el vector  $x(t)$  sea un extremo del funcional es que la función  $f_0$  cumpla con las ecuaciones diferenciales de Euler

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i=1, \dots, p. \quad \dots (2.2)$$

Además, si la  $f_0(x, \dot{x}, t)$  es convexa (o cóncavo) en  $x$  y  $\dot{x}$ , entonces las ecuaciones de Euler aseguran las condiciones necesarias y suficientes para que el vector  $x$  tenga un mínimo (o máximo).

Las ecuaciones (2.2) son generalmente ecuaciones diferenciales de segundo orden, y las dos constantes de integración de una solución son fijadas por condiciones de límite. Si  $f_0(x, \dot{x}, t)$  solamente depende linealmente de  $\dot{x}$ , entonces las ecuaciones diferenciales de (2.2) generalmente se convierten a ecuaciones de primer orden y las soluciones necesitan de saltos (discontinuidades) adecuados para las condiciones de límite. Entonces se pueden dar condiciones adicionales del tipo

$$f_j(x(t), \dot{x}(t), t) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad \dots (2.3)$$

integrando estas nuevas condiciones obtenemos que

$$\int_0^\tau f_j(x(t), \dot{x}(t), t) dt = 0, \quad j = n+1, \dots, m \quad \dots (2.4)$$

En ese caso se forma una función de Lagrange

$$L = f_0(x(t), \dot{x}(t), t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) f_j(x(t), \dot{x}(t), t) + \sum_{j=n+1}^m \lambda_j(t) f_j(x(t), \dot{x}(t), t), \quad \dots (2.5)$$

donde  $\lambda_j$  es el multiplicadores de Lagrange. Son dependientes del tiempo en el caso de la condición (2.3) o es una constante para la función que se integró en la condición (2.4). Entonces la solución óptima se puede encontrar de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad \dots (2.6)$$

de las condiciones (2.3) y (2.4). Para los detalles con respecto a la estructura especial de tal optimización los problemas se consideran en [7]. Para demostrar el uso del formalismo de Euler-Lagrange a los problemas termodinámicos consideramos un ejemplo simple.

Ejemplo: Un cilindro lleno de un gas ideal puede proporcionar el trabajo a los alrededores vía un pistón de área  $A$ . Su movimiento está acorde a una fuerza de fricción  $F = -\alpha v$ , donde  $v = \dot{x}$  que es la velocidad del pistón y  $\alpha$  una constante. El gas también está conectado con un baño de calor. Para el propósito didáctico de este ejemplo asumimos que el traspaso térmico es tal que la temperatura  $T(t) = kx(t)$ , satisface la condición tipo (2.3). El valor inicial es  $x(0) = x_{inicial}$  y el valor final es  $x(\tau) = x_{final}$ .

Ahora deseamos determinar  $x(\tau)$  de la posición del pistón  $x_{inicial}$  a  $x_{final}$  durante el tiempo  $\tau$  que da el trabajo máximo, esto implica que:

$$W = \int_0^{\tau} (p \dot{V} - \alpha v^2) dt = \int_0^{\tau} \left( \frac{RT(t)A \dot{x}(t)}{Ax(t)} - \alpha \dot{x}(t)^2 \right) dt, \dots (2.7)$$

donde  $R$  es la constante del gas.

Entonces la función de Lagrange se convierte en

$$L = \frac{RT(t)\dot{x}(t)}{x(t)} - \alpha \dot{x}(t)^2 + \lambda(t)(T(t) - kx(t)). \dots (2.8)$$

De las condiciones de la ecuaciones de Euler-Lagrange se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \rightarrow \lambda k - 2\alpha \ddot{x} + \frac{R\dot{T}}{x} = 0, \dots (2.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = 0 \rightarrow \lambda + \frac{R\dot{x}}{x} = 0. \dots (2.10)$$

Usando la derivada respecto al tiempo para la temperatura, es decir,  $\dot{T} = k\dot{x}$ , podemos solucionar simplemente las ecuaciones y obtener que  $2\alpha \ddot{x} = 0$  que significa que la velocidad es constante.

Esté es un resultado conocido pues la condición  $T = kx(t)$  conduce a un proceso isobárico. Para un proceso isobárico la salida del trabajo de la dilatación del gas ideal no depende del tiempo sino solamente del aumento dado en volumen. Solamente el término cuadrático de la pérdida exige el movimiento del pistón de una manera particular: en principio tan lento como sea posible en cada instante, sin embargo, al cubrir cierta distancia en cierta cantidad de tiempo la mejor solución es que el movimiento sea con velocidad constante.

## 2.2.- TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO (Formalismo de Hamilton)

La teoría de control óptimo se desarrolló a la mitad del vigésimo siglo. Este método considera a un sistema dinámico en donde su estado sea descrito

por un vector de estado  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , según el cual puede cambiar en el tiempo

$$\dot{x} = f(x, u, t). \quad \dots (2.11)$$

Aquí el vector  $u(t)$  es la variable de control vectorial  $u_1(t), \dots, u_r(t)$ . Las variables de control incluyen las variables de control del estado y las variables de control externas. La trayectoria  $x(t)$  del sistema en el espacio de estados se puede influenciar externamente por los valores de las variables de control fuera del sistema (variables de control permitidas  $U$ ) y es determinado completamente por un  $x^0 = x(0)$  estado inicial y  $u(t)$  variables de control.

El problema del control óptimo es entonces encontrar las  $u(t)$  para las cuales un funcional  $J$  dado llega a ser máximo, es decir,

$$J = \int_0^{\tau} f_0(x, u, t) dt \rightarrow \max_{u(t)}, \quad \dots (2.12)$$

Primero uno tiene que formar el Hamiltoniano de nuestro problema que debe incluir la dependencia del tiempo de nuestra variable  $\lambda_j$  (o co-estado), una para cada variable de estado:

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \quad \dots (2.13)$$

donde está la componente de vector  $f$  en (2.11). Entonces una condición necesaria para la existencia de una trayectoria extrema es dada por las ecuaciones canónicas de movimiento:

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} H(x, \lambda, u, t), \quad \dots (2.14)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} H(x, \lambda, u, t), \quad \dots (2.15)$$

La variable de control óptimo  $u^*(x, \lambda, t)$  se encuentra maximizando el Hamiltoniano fijando  $x, \lambda$  y  $t$ , (principio máximo de Pontryagin) [6]:

$$H(x, \lambda, u^*, t) \geq H(x, \lambda, u, t) \quad \forall u \in U. \quad \dots (2.16)$$

Observe que las variables de control que resultan pueden ser discontinuas. Las variables de control óptimas entonces se insertan nuevamente en las

ecuaciones canónicas de movimiento. Esto da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales anidadas cerradas con las condiciones de límite para  $x$ , si el valor final de una variable de estado no se da, la variable correspondiente adjunta se requiere para tener el valor final igual a cero (condición de transversalidad)

Dependiendo del problema, la trayectoria óptima puede consistir en varios arcos que necesiten ser conectados en el problema supuesto por medio de una permutación. A través de permutaciones las variables de control pueden tener saltos. La solución consiste en curvas que representen un grado interior óptimo que sea acortado por las curvas que representan las soluciones del límite de las variables de control o aún saltos en las variables de estado. Tales soluciones están en la Ref. [8].

Ejemplo. Para demostrar cómo la teoría de control óptimo es utilizada en la práctica consideramos el ejemplo mencionado de una expansión isobárica de un pistón con fricción. Como hemos visto en la sección anterior la trayectoria del pistón no influye en la salida de trabajo del gas ideal que se provee. Así, el problema es equivalente a la minimización de las pérdidas de fricción.

En este problema hay solamente una variable de estado, la posición del pistón  $x(t)$ , y una variable de control, la velocidad del pistón  $v(t)$ . Según la condición (2.11) la evolución del estado es gobernada por la variable que tiene como ecuación diferencial

$$\dot{x} = v, \quad \dots \quad (2.17)$$

con valor inicial y final  $x(0) = x_{inicial}$  y  $x(\tau) = x_{final}$ , respectivamente. La minimización de la fricción es equivalente a la maximización de

$$J = \int_0^{\tau} -\alpha v^2 dt \rightarrow \max. \quad \dots \quad (2.18)$$

Formamos el Hamiltoniano

$$H = -\alpha v^2 + \lambda_x v, \quad \dots \quad (2.19)$$

del cual obtenemos la ecuación canónica para la variable adjunta por medio de una diferenciación parcial con respecto a  $x$ ,

$$\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad \dots \quad (2.20)$$

La variable de control óptima  $v$  puede ser encontrado usando la condición (2.20), es decir, igualando la derivada del Hamiltoniano con respecto a  $v$  a cero:

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0 = -2\alpha v + \lambda_x \dots (2.21)$$

Si no hay aceleración, de la ecuación (2.21) se obtiene el valor inicial de la velocidad deseada.

De la ecuación (2.21) se consigue una expresión para  $v$ , que tiene que ser insertada en la ecuación (2.17) y (2.20). Esto conduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\dot{x} = \frac{\lambda_x}{2\alpha}, \dots (2.22)$$

$$\dot{\lambda} = 0, \dots (2.23)$$

esto se puede solucionar fácilmente. La variable adjunta  $\lambda$  es entonces una constante y así:

$$x(t) = x_{inicial} + \frac{x_{final} - x_{inicial}}{\tau} t = x_{inicial} + \frac{\lambda}{2\alpha} t \dots (2.24)$$

Observe que el valor de  $\lambda$  es determinado por las condiciones de límite para  $x$ . Una vez más la solución es un movimiento con velocidad constante.

### 2.2.1.- OPTIMIZACION DE LA TAYECTORIA DE UN MOTOR DE NOVIKOV.

Un ejemplo simple para un sistema endorreversible es el motor de Novikov, una versión simplificada del motor de Curzon-Ahlborn. El motor de Novikov consiste en tres subsistemas reversibles: un baño de calor de alta temperatura  $T_1$  un baño del calor de baja temperatura  $T_2$  y un líquido de funcionamiento reversible que experimenta un ciclo completo de Carnot. El ciclo es caracterizado por dos isotermas con las temperaturas  $T_{1w}$  y  $T_{2w}$ , y dos isentrópicas con entropías  $S_1$  y  $S_2$ .

El contacto con el depósito de calor de baja temperatura  $T_2$  es directo, es decir,  $T_{2w} = T_2$ . Esto es un ejemplo para una interacción reversible.

El acoplador al depósito de calor de alta temperatura tiene una conductancia  $K$ . La ley correspondiente del transporte para esta interacción irreversible es dada por la ley de Newton de la conductancia del calor, es decir,  $Q_1 = K(T_1 - T_{1w})$ .



La potencia máxima es obtenida optimizando el único parámetro libre del sistema de la temperatura interna  $T_{1w}$ . Esto representa una optimización típica del parámetro para un sistema endorreversible inmóvil. La eficiencia de este sistema a potencia máxima es  $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_2/T_1}$  [1].

Ahora damos vuelta a este modelo dinámico: ¿Cuál es el proceso óptimo del ciclo si caemos en la suposición de que el líquido de funcionamiento experimenta un ciclo de Carnot? Para ser más

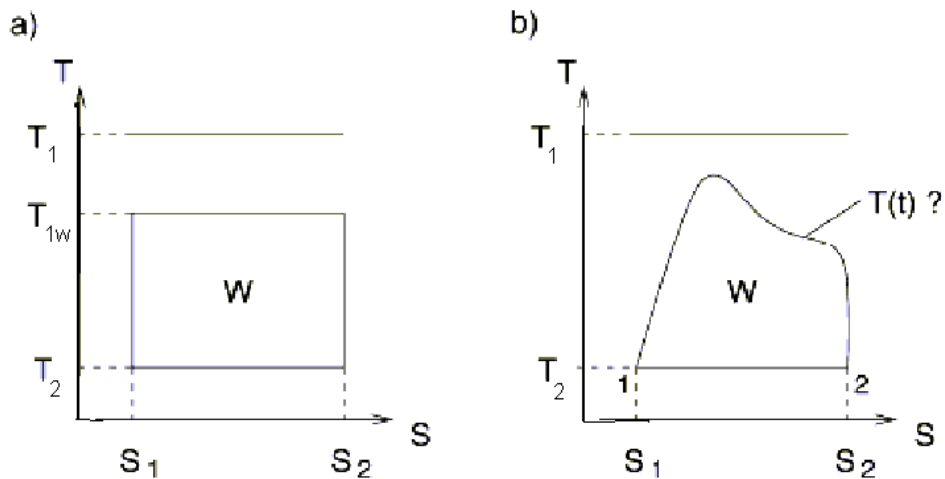


Fig. 4: (a) El diagrama T-S de un motor de Novikov con un ciclo de Carnot tomado como el proceso reversible, (b) trayectoria general óptima del estado 1 al estado 2 es desconocido y se puede encontrar usando teoría de control.

específico, todavía asumimos que el fluido de trabajo está en contacto al baño de calor de baja temperatura  $T_2$  sin ninguna resistencia térmica. Así  $T_{2w} = T_2$  y el sistema experimenta una transformación isotérmica del estado 2 con entropía  $S_2$  y el estado 1 con entropía  $S_1$  (Fig. 4a). El fluido de trabajo todavía se conecta al baño de calor de alta temperatura  $T_1$  con la conductancia finita  $K$ . Las dependencias del tiempo de  $T(t)$  y de  $S(t)$  son desconocidas en general (Fig. 4b).

El objetivo ahora es determinar este ciclo que maximice el trabajo hecho en un ciclo dado de duración  $\tau$ . Observe que este problema es equivalente a la optimización de la salida de trabajo puesto que  $\tau$  es una constante dada. La estrategia es determinar la trayectoria óptima de la parte superior del ciclo para cada opción de los parámetros  $S_1$  y  $S_2$ , y después realizar una optimización simple del parámetro con respecto a  $S_1$  y  $S_2$ .

Para tratar el problema elegimos la entropía  $S$  del fluido como la variable del estado según la cual se desarrolla como

$$\dot{S} = \frac{K(T_1 - T)}{T} \quad \dots (2.27)$$

con las siguientes condiciones de límite  $S(0) = S_1$  y  $S(\tau) = S_2$ .

Ahora tenemos que elegir una variable de control. Desde un punto de vista práctico la temperatura no puede ser influenciada directamente. Sin embargo, nos imaginamos que el sistema tiene parámetros de trabajo como lo es el volumen que se puede utilizar para controlar la temperatura durante la expansión o la compresión conveniente del fluido. Sabiendo la ecuación estado del fluido, la trayectoria óptima del volumen se puede traducir directamente a la trayectoria óptima de la temperatura. Así podemos también tomar matemáticamente y directamente a la temperatura como la variable de control.

La temperatura del líquido de funcionamiento se toma como la variable de control. Mientras que el transporte de calor al baño de baja temperatura es ilimitado, asumimos que sucede instantáneamente. Así la duración de ciclo completo  $\tau$  se puede asignar a la rama que está conforme a la optimización. La salida del trabajo, es decir, el área incluida por la curva  $T$ - $S$ , entonces es.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\tau} T \dot{S} dt - T_2(S_2 - S_1) \\ &= \int_0^{\tau} K(T_1 - T) dt - T_L \Delta S, \quad \dots (2.28) \end{aligned}$$

con  $\Delta S = S_2 - S_1$ . Pues  $T_2 \Delta S$  es una constante, no desempeña ningún papel en la optimización de la trayectoria, es decir, es suficiente maximizar la integral.

Así el Hamiltoniano del problema es

$$H = K(T_1 - T) + \lambda_s \frac{K(T_1 - T)}{T} \quad \dots (2.29)$$

y se escribe la ecuación canónica como

$$\dot{\lambda}_s = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0. \quad \dots (2.30)$$

La trayectoria óptima de la temperatura (control) es encontrada maximizando el Hamiltoniano:

$$\frac{\partial H}{\partial T} = -K - \frac{\lambda_s K T_1}{T^2} = 0 \Rightarrow T = \sqrt{-\lambda_s T_1}. \quad \dots (2.31)$$

Este resultado tiene que ser insertado en el sistema de las ecuaciones diferenciales (2.27), (2.30).  $\lambda_s$  resulta ser una constante. Su tamaño se elige tal que las condiciones de límite para la entropía están satisfechas. Encontramos que

$$S(t) = \frac{S_2 - S_1}{\tau} t + S_1, \quad T(t) = \frac{K \tau T_1}{\Delta S + K \tau}, \quad \dots (2.32)$$

de la expresión pasada se obtiene (2.27)

La temperatura es una constante no igual a  $T_2$ . Para cerrar el ciclo con baja temperatura se deben de desarrollar dos saltos adiabáticos instantáneos que conecten las dos ramas isotérmicas. Vemos que el ciclo óptimo que fue determinado por teoría de control resulta ser el ciclo de Carnot con dos adiabáticas y dos isothermas.

Todavía quedan libres dos parámetros  $S_1$  y  $S_2$ , que necesitamos ajustar para maximizar la salida de trabajo. Insertamos la expresión (2.32) para la temperatura óptima en (2.28) y obtenemos:

$$W = \frac{T_1}{(K \tau)^{-1} + \Delta S^{-1}} - T_2 \Delta S, \quad \dots (2.33)$$

y vea que el trabajo hecho depende solamente de  $\Delta S$ . Tomemos la derivada con respecto a  $\Delta S$  igual a cero y encontramos el valor óptimo en términos de los parámetros dados del motor  $T_1$ ,  $T_2$  y  $\tau$ :

$$\Delta S^{opt} = K \tau \left( \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \quad \dots (2.34)$$

La inserción de la diferencia óptima de la entropía en (2.32) finalmente nos da que

$$T^{opt} = \sqrt{T_1 T_2}, \quad \dots (2.35)$$

un resultado que conduce a la eficiencia bien conocida de Curzon-Ahlborn.

$$\eta_{CA} = 1 - \frac{T_2}{T^{opt}} = 1 - \frac{T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Concluimos esta sección mencionando refinamientos de estos modelos introduciendo puentes del calor o un escape interno del calor. Tales sistemas primero fueron analizados por Bejan [9] y más adelante por Gordon y Huleihil [10]; demostraron que el modelo con puente adicional del calor da un comportamiento aún más realista, especialmente para la operación lenta.

### CAPITULO 3

#### 3.- OBTENCIÓN DE LA EFICIENCIA ECOLÓGICA MEDIANTE FORMALISMO VARIACIONAL.

##### 3.1.- FORMALISMO DE EULER-LAGRANGE.

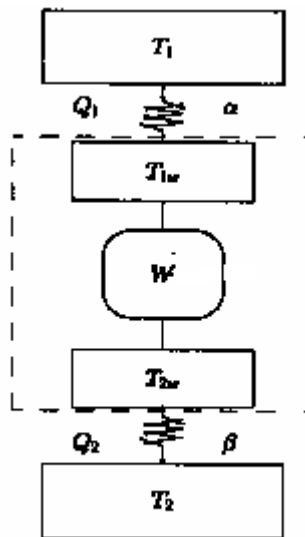


Figura 5. Esquema de De Vos para el motor endoreversible de Curzon y Ahlborn con  $\alpha = \beta = \rho$ .

Uno de los resultados más impresionantes del artículo de Curzon-Ahlborn (CA) es que, con una hipótesis simple, estos autores encontraron los resultados numéricos más razonables para las eficiencias de ciertas centrales eléctricas.

Estos resultados fueron alcanzados para procesos endorreversibles de Carnot como modelo de motor térmico (véase figura 5). La ley de transporte térmico de Newton sirve para describir los intercambios de calor irreversibles entre la sustancia de trabajo y sus depósitos térmicos. Curzon y Ahlborn (y Novikov) encontraron previamente que el motor de la figura 5, funcionando en el régimen de máxima potencia, tiene una eficiencia dada por  $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_2/T_1}$  (ecuación (1.1)) donde las temperaturas absolutas  $T_2$  y  $T_1$  son de los depósitos frío y caliente respectivamente (figura 5). Desde el trabajo de CA, muchos autores han considerado modelos más realistas para describir los intercambios de calor entre la sustancia de trabajo y los depósitos por medio de las leyes no lineales de transporte térmico. Estos autores también han precisado que la ecuación (1.1) no es un resultado universal para motores de calor endorreversible tipo CAN. Sin embargo para muchas centrales eléctricas la ecuación (1.1) da valores de eficiencia cercanos a lo observados, aunque se obtienen mejores resultados si uno utiliza la ley de transporte térmico supuesta por Dulong y Petit (DP) bajo condiciones máximas de potencia. De Vos, en su libro de 1992 divulgó el caso de una planta de energía atómica de Doel (Bélgica) donde la eficiencia térmica observada ( $\eta_{OB} \approx 0.35$ ) está entre las eficiencias  $\eta_{CAN} < \eta_{OB} < \eta_C$  ( $\eta_C$  es la eficiencia de Carnot). En este caso las temperaturas estaban entre  $T_2 \approx 283$  K y  $T_1 \approx 566$  K, así el intervalo antedicho es  $0.29 < \eta_{OB} < 0.5$ . De Vos explica esto desde un punto de vista económico, y, en este caso se refiere a la eficiencia óptima. En un último trabajo De Vos, presenta un procedimiento general cuantitativo para considerar los costos relativos de inversión y de combustible en una central endorreversible. Bajo este procedimiento De Vos explica el concepto de eficiencia óptima económica. Sin embargo, para la planta de Doel-Plant la eficiencia que calcularon era de  $\eta_E = 0.36 \approx \eta_{OB}$  que fue calculado por medio de la maximización de la función ecológica supuesta E [7]. Esta función es  $E = W - T_2\sigma$ , (ecuación (1.16))

Como ya se mencionó  $W$  es la salida de potencia del ciclo,  $\sigma$  es la producción total de la entropía (sistema + alrededores) del ciclo, y  $T_2$  es la temperatura del depósito frío.

Para maximizar la función ecológica E (ME) se propone un procedimiento variacional para el caso de una ley de transporte térmico de Dulong-Petit. En 1979, Rubin recuperó la ecuación (1.1) por medio del uso del cálculo variacional, maximizando la potencia del ciclo tratada como la función objetivo conforme a la restricción de endorreversibilidad. En su trabajo, Rubin utilizó una ley lineal de transferencia térmica. Con este mismo formalismo la función ecológica será maximizada, obteniendo la característica dada por  $\eta_{ME} \approx \eta_{ME}^+ \equiv \frac{\eta_C + \eta_{CA}}{2}$  [11].

El tratamiento mediante el formalismo de Euler-Lagrange consiste en la maximización de un Lagrangeano de la forma

$$L = W - \lambda \Delta S_W, \quad \dots (3.1)$$

donde  $W$  es el trabajo (potencia de salida del ciclo completo en un tiempo  $\tau$ ),  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange y  $\Delta S_W$  es la restricción del endorreversibilidad dada por [2],

$$\Delta S_W = \int_0^\tau \frac{\dot{Q}}{T} dt = 0, \quad \dots (3.2)$$

donde  $\dot{Q}$  es el flujo de calor (derivada de  $Q$  respecto al tiempo  $t$  entre 0 y  $\tau$ ),  $T$  es la temperatura de trabajo de la sustancia y  $t$  es el tiempo. Si se asume una ley lineal de transferencia térmica de la forma

$$\dot{Q} = \rho (T_R - T), \quad \dots (3.3)$$

donde  $\rho$  es la conductancia y el  $T_R$  es la temperatura del depósito de calor. Rubin obtuvo la ecuación (1.1) por medio de la primera variación de la ecuación (3.4), que es  $\delta L = 0$ . La forma explícita de la ecuación (3.1) es

$$L = \int_0^\tau \left[ \rho (T_R - T) - \lambda \rho \frac{(T_R - T)}{T} \right] dt, \quad \dots (3.4)$$

donde se utilizó la primera ley de la termodinámica para la condición local de equilibrio:

$$\dot{Q} = \dot{U} + P\dot{V}$$

donde  $\dot{U}$  es cambio del valor de la energía interna de la sustancia de trabajo; y  $P$  y  $V$  son la presión y el volumen de la sustancia de trabajo, respectivamente. De las condiciones del formalismo de Euler-Lagrange ( $\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$ ), obtuvo dos soluciones para  $\delta L = 0$  (Usando las ecuaciones (2.9) y (2.10)):

$$T_R = T_1 \quad y \quad T = T_{1w} = (\lambda T_1)^{1/2}, \quad \dots (3.4a)$$

y

$$T_R = T_2 \quad y \quad T = T_{2w} = (\lambda T_2)^{1/2}, \quad \dots (3.4b)$$

donde  $T_{1w}$  y  $T_{2w}$ , se muestran en la figura 5. Tomando el ciclo interno que funciona entre  $T_{1w}$  y  $T_{2w}$  que es endorreversible, su eficiencia es la ecuación (1.7)

$$\eta = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}$$

Entonces, substituyendo la ecuación (3.4a) y (3.4b) en la ecuación (1.7), obtenemos inmediatamente la ecuación (1.1).

Usando este mismo procedimiento pero ahora para la función ecológica ecuación (1.16), su Lagrangeano es entonces

$$L = E - \lambda \Delta S_w, \dots (3.5)$$

y el Lagrangeano escrito explícitamente es

$$L = \int_0^\tau \left[ \rho (T_R - T) \left( 1 + \frac{T_2}{T_R} \right) - \lambda \rho \frac{(T_R - T)}{T} \right] dt, \dots (3.6)$$

de acuerdo al formalismo de Euler-Lagrange su primera variación igualada a cero es:

$$\delta L = \int \rho \left\{ \delta T_R \left[ \left( 1 + \frac{T_2}{T_R} - \frac{\lambda}{T} \right) - \frac{T_2}{T_R} (T_R - T) \right] + \delta T \left[ -1 - \frac{T_2}{T_R} + \frac{\lambda T_R}{T^2} \right] \right\} dt = 0, \dots (3.7)$$

La variación de  $T_R$  ( $\delta T_R$ ) no dará un resultado físico, ya que  $T_R$  es una temperatura constante (es de algún depósito). Por lo tanto, la ecuación (3.7) conduce a dos soluciones:

$$T_R = T_1 \quad y \quad T = T_{1w} = \left( \frac{\lambda T_R}{1 + \frac{T_2}{T_R}} \right)^{\frac{1}{2}}, \dots (3.8a)$$

y

$$T_R = T_2 \quad y \quad T = T_{2w} = \left( \frac{\lambda T_R}{1 + \frac{T_2}{T_R}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \dots \quad (3.8b)$$

Como en el caso anterior, el ciclo interno es endorreversible, y entonces tiene la siguiente eficiencia

$$\eta_E = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión (3.8a) y (3.8b) obtenemos la eficiencia de la función ecológica:

$$\eta_E = 1 - \left[ \frac{T_2}{2T_1} \left( 1 + \frac{T_2}{T_1} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

que es la eficiencia obtenida en el capítulo 1 ecuación (1.19).

### 3.2.- TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO (Formalismo de Hamilton).

El tratamiento de la teoría de control óptimo consiste en la maximización de un Hamiltoniano de la forma

$$H = \dot{E} + \lambda_s \dot{S} \quad \dots \quad (3.9)$$

y el Hamiltoniano escrito explícitamente es

$$H = \rho(T_1 - T) \left( 1 + \frac{T_2}{T_1} \right) + \lambda_s \rho \frac{(T_1 - T)}{T} \quad \dots \quad (3.10)$$

para plantear el problema se eligió a la entropía S de la sustancia como:

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T} = \rho \frac{(T_1 - T)}{T} \quad \dots \quad (3.11)$$

que también es la variable de restricción.

Y se escribe la ecuación canónica como



$$\dot{\lambda}_s = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \quad \dots (3.12)$$

la trayectoria óptima de la temperatura (variable de control) es encontrada maximizando al Hamiltoniano:

$$\frac{\partial H}{\partial T} = -\rho \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{\lambda_s \rho T_1}{T^2} = 0$$

$$\Rightarrow T^{opt} = \sqrt{\frac{-\lambda_s T_1}{A}} \quad \text{donde } A = \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) \quad \dots (3.13)$$

por otro lado, la duración del ciclo completo es  $\tau$  y la salida “ecológica de trabajo” es decir, el área incluida bajo la curva  $T$ - $S$  (figura 4b), entonces es:

$$E = \int_0^\tau \left( \dot{W} - T_2 \dot{\sigma} \right) dt - 2T_2 \Delta S \quad \dots (3.14)$$

sustituyendo el valor de  $\dot{W}$  y  $\dot{\sigma}$  ( de la ecuación (3.6) se identifican los términos) en la ecuación (3.14), obtenemos

$$E = \int_0^\tau \rho (T_1 - T) \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) dt - 2T_2 \Delta S \quad \dots (3.15)$$

se sabe que  $T \dot{S} = \rho (T_1 - T)$ , que se substituye en la ecuación (3.15) y obtenemos una integral en función de  $dS$ , con las siguientes condiciones de limite  $S(0) = S_1$  y  $S(\tau) = S_2$

$$E = \int_{s_1}^{s_2} T \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) dS - 2T_2 \Delta S \quad \dots (3.16)$$

la integración de la ecuación (3.16) nos conduce a

$$E = TA \Delta S - 2T_2 \Delta S$$

de la ecuación (2.32) substituyendo  $T = T(\Delta S)$  con  $K = \rho$  se obtiene que

$$E = \frac{\rho \tau T_1}{\Delta S + \rho \tau} A \Delta S - 2T_2 \Delta S \quad \dots (3.17)$$

obsérvese ahora que la función ecológica sólo depende de  $\Delta S$ , que es el parámetro que falta optimizar para encontrar el valor óptimo de  $T$ . Derivando con respecto a  $\Delta S$  e igualando a cero, encontramos el valor óptimo en términos de los parámetros dados,  $T_1$ ,  $T_2$  y  $\tau$ .

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta S} = \frac{A\rho\tau T_1}{(\Delta S + \rho\tau)} - \frac{A\rho\tau T_1 \Delta S}{(\Delta S + \rho\tau)^2} - 2T_2 = 0$$

$$2T_2(\Delta S + \rho\tau)^2 - AT_1\rho^2\tau^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta S^{opt} = \rho\tau \left( \sqrt{\frac{AT_1}{2T_2}} - 1 \right) \dots (3.18)$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (2.32), obtenemos que,

$$T^{opt} = T = \frac{\rho\tau T_1}{\Delta S^{opt} + \rho\tau}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\rho\tau T_1}{\rho\tau \sqrt{\frac{AT_1}{2T_2}} - \rho\tau + \rho\tau} = \frac{T_1}{\sqrt{\frac{AT_1}{2T_2}}}$$

$$\therefore T = \sqrt{\frac{2T_1T_2}{A}} \dots (3.19)$$

de la ecuación (3.19) se obtiene que  $\lambda_s = -2T_2$ .

Ahora, la eficiencia ecológica  $\eta_{ME}$  está dada por

$$\eta_{ME} = 1 - \frac{T_2}{T} \dots (3.20)$$

sustituyendo la ecuación (3.19) en la ecuación (3.20) obtenemos finalmente que la eficiencia de la función ecológica es,

$$\eta_{ME} = 1 - \sqrt{\frac{T_2^2 + T_1T_2}{2T_1^2}}$$

que es la eficiencia de la ecuación (1.19).

## CONCLUSIONES

En esta tesis se ha propuesto un nuevo procedimiento para obtener la llamada eficiencia ecológica. Este procedimiento está basado en la llamada teoría de control óptimo, por medio del Hamiltoniano del sistema de interés. A diferencia del cálculo dinámico, aquí lo que se optimiza es una función correspondiente a una trayectoria. Así que, lo que se encuentra es una trayectoria óptima que maximiza la función ecológica. La trayectoria resultante corresponde a una isoterma superior dada por la ecuación (3.19) que a su vez conduce a la eficiencia ecológica dada por la ecuación (1.19).

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Curzon FL, Ahlborn B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *Am J Phys* 1975;43(1):22-4.
- [2] De Vos A. Endoreversible thermodynamics of solar energy conversion. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [3] M. H. Rubin, *Phys. Rev. A* 19 (1979) 1272.
- [4] F. Angulo Brown, *Rev. Méx. Fís.* 37 (1991) 87.
- [5] F. Angulo Brown, *J. Appl. Phys.* 69 (1991) 7465.
- [6] Hoffmann, K. H., Burzler, J., Optimal process paths for endoreversible systems, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 28 (2003), 233–268.
- [7] Band, Y. B., Kafri, O., Salamon, P., Finite time thermodynamics: Optimal expansion of a heated working fluid, *J. Appl. Phys.*, 53 (1982), 8–28.
- [8] Brown, G. R., Snow, S., Andresen, B., Salamon, P., Finite-time thermodynamics of a porous plug, *Phys. Rev. A*, 34 (1986), 4370–4379.
- [9] Bejan, A., Theory of heat transfer-irreversible power plants, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31 (1988), 1211–1219.
- [10] Gordon, J. M., Huleihil, M., General performance characteristics of real heat engines, *J. Appl. Phys.*, 72 (1992), 829–837.
- [11] Arias-Hernández LA, Angulo-Brown F. Thermodynamic optimization of endoreversible engine. *Rev. Méx. Fís.* 40 (1994) 866-87.7
- [12] Ares De Parga G, Angulo Brown F. A variational optimization of a finite-time thermal cycle with a nonlinear heat transfer law. *Energy* 24 (1999) 997-1008.