

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
Escuela Superior de Física y Matemáticas

“Control Estadístico en Procesos Continuos”

Nombre del seminario:
APLICACIONES DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO AL
PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN ESPACIAL, AL DISEÑO DE
ENCUESTAS Y AL CONTROL DE CALIDAD

Nombre del autor:
Rocio Oliva Escamilla

Nombre del asesor:
M. en I. Rubén Téllez Sánchez

México, D. F

Marzo, 2006

INTRODUCCION

El control de los procesos es una actividad de vital importancia para cualquier empresa, ya que le permite visualizar su posición respecto a la planificación inicial de sus actividades y en función de ésta tomar las decisiones pertinentes a cada caso. Las actuales tendencias del mercado han generado la necesidad de prestarle mayor importancia al cliente, de manera tal que el mismo se transforma en la razón de ser de las empresas es por ello que la búsqueda de la satisfacción de los clientes es el norte de toda empresa.

Con base en esta necesidad se han diseñado una gran cantidad de herramientas que permiten el control y análisis de los procesos, con el fin único de optimizarlos y asegurar la satisfacción del cliente.

Las herramientas estadísticas son útiles para analizar los problemas de calidad y para mejorar el desempeño de los procesos de producción. Por ejemplo, para resolver problemas dirigidos a mejorar la calidad de los productos utilizados en nuestra sociedad. Estos productos pueden ser bienes manufacturados, tales como automóviles, computadoras, y ropa, así como servicios, como la generación y distribución de energía eléctrica, el transporte público, y la atención médica. Los métodos de mejoramiento de calidad pueden aplicarse en cualquier área de una empresa u organización, incluyendo la manufactura, el desarrollo de procesos, el diseño de ingeniería, las finanzas y contabilidad, la comercialización y el servicio en campo de productos.

Para que un producto cumpla con los requerimientos del cliente generalmente deberá fabricarse con un proceso que sea estable, es decir, es necesario que el proceso opere con poca variabilidad en las dimensiones objetivo de las características de calidad del producto.

En el estudio de una característica de calidad se utilizan en particular los gráficos de control, que describen el comportamiento de ciertos parámetros que deben ser estimados a partir de las medidas realizadas en las muestras. La inspección periódica del proceso permite evaluar su estado y lograr un control efectivo del mismo.

El reducir la variabilidad, aumentar el rendimiento y mejorar los procesos, ha llevado a desarrollar muchas técnicas nuevas para el monitoreo y control estadístico del proceso. En este trabajo se presentan algunas de estas técnicas.

Es decir, el uso de gráficos de control para la monitorización de una característica de calidad de tipo continuo se lleva a cabo utilizando, la gráfica de control de suma acumulada (cusum, por sus siglas en inglés) y la gráfica de control de promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA, por sus siglas en inglés). Por consiguiente, el Control Estadístico en Procesos Continuos se basa en estas técnicas.

Objetivos

El presente trabajo pretende explicar las ventajas que implica aplicar el Control Estadístico y sus aplicaciones en los procesos de producción con el fin de mejorar los procesos productivos y visualizar su desempeño para disminuir costos y así ofrecer productos realmente competitivos. Por medio de la utilización de técnicas estadísticas para el control de procesos.

Justificación

La importancia del trabajo es proporcionar al interesado, otras técnicas de monitoreo y control estadístico de procesos que se prefieran para ciertas aplicaciones, como es el caso de la gráfica de control de suma acumulada y la gráfica de control del promedio móvil ponderado exponencialmente que se emplean generalmente con observaciones individuales a fin de evaluar la variación del proceso.

Hipótesis

La gráfica de control de suma acumulada (CUSUM) y la gráfica de control del promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA) ofrecen importantes mejoras al evaluar el nivel del proceso, además que son más efectivas que las gráficas de control de Shewhart para detectar corrimientos pequeños en el proceso.

Presentación

La estructura del trabajo es la siguiente:

Capítulo 1. Se establece un sistema para el control del proceso y se mencionan las herramientas para el control del proceso con sus características principales.

Capítulo 2. Se presenta la cusum tabular o algorítmica y la forma de máscara V de la cusum cuando son de interés los corrimientos pequeños

Capítulo 3. Se describe la gráfica de control del promedio móvil ponderado exponencialmente y la gráfica de control del promedio móvil.

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Naturaleza, Finalidades y Atribuciones

El Instituto Politécnico Nacional es la institución educativa del Estado creada para consolidar, a través de la educación, la Independencia Económica, Científica, Tecnológica, Cultural y Política para alcanzar el progreso social de la Nación, de acuerdo con los objetivos Históricos de la Revolución Mexicana, contenidos en la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos.

El Instituto Politécnico Nacional es un órgano desconcentrado de la Secretaría de Educación Pública, cuya orientación general corresponde al Estado; con domicilio en el Distrito Federal y representaciones en las Entidades de la República donde funcionen Escuelas, centros y unidades de Enseñanza y de Investigación que dependan del mismo.

Son finalidades del Instituto Politécnico Nacional:

1. Contribuir a través del proceso educativo a la transformación de la sociedad en un sentido democrático y de progreso social, para lograr la justa distribución de los bienes materiales y culturales dentro de un régimen de igualdad y libertad;
2. Realizar investigación científica y tecnológica con vista al avance del conocimiento, al desarrollo de la enseñanza tecnológica y al mejor aprovechamiento social de los recursos naturales y materiales;
3. Formar profesionales e investigadores en los diversos campos de la ciencia y la tecnología, de acuerdo con los requerimientos del desarrollo económico, político y social del país;
4. Coadyuvar a la preparación técnica de los trabajadores para su mejoramiento económico y social;
5. Investigar, crear, conservar y difundir la cultura para fortalecer la conciencia de la nacionalidad, procurar el desarrollo de un elevado sentido de convivencia humana y fomentar en los educandos el amor a la paz y los sentimientos de solidaridad hacia los pueblos que luchan por su Independencia;
6. Promover en sus alumnos y egresados actitudes solidarias y democráticas que reafirmen nuestra independencia económica;
7. Garantizar y ampliar el acceso de estudiantes de escasos recursos a todos los servicios de la enseñanza técnica que preste el instituto;
8. Participar en los programas que para coordinar las actividades de investigación se formulen de acuerdo con la planeación y desarrollo de la política nacional de ciencia y tecnología, y
9. Contribuir a la planeación y al desarrollo interinstitucional de la Educación Técnica y realizar la función rectora de este tipo de Educación en el País, coordinándose con las demás instituciones que integran el Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica, en los términos previstos por la Ley para la Coordinación de la Educación Superior y de conformidad con los acuerdos que se tomen en el propio Consejo.

Para el cumplimiento de sus finalidades, el Instituto Politécnico Nacional tendrá las siguientes atribuciones:

1. Adoptar la organización administrativa y académica que estime conveniente, de acuerdo con los lineamientos generales previstos en esta Ley;
2. Planear, ejecutar y evaluar sistemáticamente sus actividades;
3. Impartir educación de tipo medio superior, de licenciatura, maestría y doctorado, cursos de capacitación técnica y de actualización, especialización y superación académicas, en su modalidad escolar y extraescolar, y establecer opciones terminales previas a la conclusión de cada tipo educativo;
4. Establecer y desarrollar los medios y procedimientos que permitan a los estudiantes incorporarse a los programas de investigación científica y tecnológica;
5. Organizar sus planes y programas de estudio mediante la creación de una estructura académica flexible, que permita al educando, en cualquier tiempo y nivel de estudios, incorporarse al sistema productivo del país;
6. Revalidar y reconocer estudios y establecer equivalencias en relación con los tipos educativos que imparta;
7. Expedir constancias, certificados de estudio y otorgar diplomas, títulos profesionales y grados académicos;
8. Prestar servicios de asesoría a los sectores público, social y privado, Estados y Municipios que lo soliciten, en la elaboración y desarrollo de planes y programas de investigación científica y tecnológica para la capacitación del personal de dichos sectores y entidades, así como para la solución de problemas específicos relacionados con los mismos y a los problemas concretos de la actividad tecnológica en lo general;
9. Promover la creación de industrias y servicios que lo vinculan al sistema nacional de producción y le permitan coadyuvar al desarrollo de la comunidad;
10. Participar en la constitución de asociaciones, sociedades y patronatos que tengan por objeto impulsar el desarrollo de sus actividades y en la coordinación de las personas físicas o morales que contribuyan a la realización de las finalidades del Instituto;
11. Programar y promover las actividades culturales, recreativas y deportivas que coadyuven al desarrollo armónico de la personalidad del educando, así como aquellas de interés para la comunidad politécnica y para la sociedad en general;
12. Patrocinar y organizar la realización de congresos, asambleas, reuniones, competencias, concursos y otros eventos de carácter educativo, científico, tecnológico, cultural y deportivo;
13. Promover y editar obras que contribuyan a la difusión de la cultura y del conocimiento científico y tecnológico;
14. Capacitar y procurar el mejoramiento profesional de su personal docente, técnico y administrativo;

15. Establecer y utilizar sus propios medios de comunicación masiva y, mediante convenios especiales, los del Estado y de los particulares, para la extensión de sus servicios educativos, de difusión de la cultura y de información;
16. Promover el intercambio científico, tecnológico y cultural con instituciones educativas y organismos nacionales, extranjeros e internacionales;
17. Establecer comunicación permanente con sus egresados y promover su participación en las actividades del Instituto, para afirmar su vinculación con la comunidad politécnica;
18. Organizar el servicio social que deben prestar sus alumnos y pasantes, mediante el establecimiento de un sistema integral y permanente, con programas unidisciplinarios y multidisciplinarios;
19. Contribuir por medio del servicio social al mejoramiento de los ejidos, comunidades agrarias y zonas marginadas, así como mantener en forma permanente una brigada interdisciplinaria de servicio social, que le permita coadyuvar en el auxilio a la población de las regiones declaradas zonas de desastre;
20. Otorgar becas y otros medios de apoyo a estudiantes de escasos recursos económicos que cumplan con los requisitos de escolaridad y procedimientos acordados por el Consejo General Consultivo;
21. Premiar a los estudiantes distinguidos del Instituto que obtengan los más altos promedios de calificaciones y promover y estimular a las asociaciones culturales, deportivas, técnicas y científicas que formen.

Estructura Orgánica

El Instituto Politécnico Nacional ejercerá las atribuciones que les competen por medio de sus autoridades y de los órganos consultivos y de apoyo, de acuerdo con lo previsto por la Ley y demás ordenamientos aplicables.

Son autoridades del Instituto:

- El Director General;
- El Secretario General;
- Los Secretarios de Área;
- Los Directores de Coordinación, y
- Los Directores, Directores Adjuntos y Subdirectores de Escuelas, Centros y Unidades de Enseñanza y de Investigación.

Son órganos consultivos del Instituto:

- El Consejo General Consultivo, y
- Los Consejos Técnicos Consultivos Escolares.

Son órganos de apoyo dependientes del Instituto:

- La Estación de Televisión XEIPN Canal Once del Distrito Federal;
- El Centro Nacional de Cálculo.

Son organismos auxiliares del Instituto:

- El Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional;
- La Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional;
- El Patronato de Obras e Instalaciones del Instituto Politécnico Nacional.

Los organismos auxiliares coadyuvarán a la mejor realización de las finalidades del Instituto, de acuerdo a la Ley y los ordenamientos que los rigen.

El Instituto Politécnico Nacional realizará sus funciones académicas a través de sus escuelas, centros y unidades de enseñanza y de investigación que serán coordinadas por las Secretarías de Área y Direcciones de Coordinación, de acuerdo con lo previsto en la Ley y demás ordenamientos aplicables.

Escuela Superior de Física y Matemáticas

La Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional se fundó en 1961 con los siguientes objetivos:

- Formar profesionistas y posgraduados con una formación sólida en las áreas de Física y Matemáticas, capaces de contribuir al mejoramiento y desarrollo del país desarrollando labores de investigación y docencia, principalmente.
- Realizar investigación básica y aplicada en los diversos campos de la Física y las Matemáticas, así como contribuir a las labores de extensión y difusión del Instituto Politécnico Nacional.

La Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN imparte dos carreras a nivel licenciatura: La Licenciatura en Física y Matemáticas (desde su fundación en 1961) y la Ingeniería Matemática (a partir de 1997). Los egresados de la **ESFM** se distinguen por tener una formación matemática sólida, lo cual les permite desenvolverse con éxito en distintas áreas como son: la investigación científica, la docencia, la industria privada y la administración pública.

Carrera de Ingeniería Matemática

Actualmente los egresados de la ESFM que trabajan en la industria, han tenido que enfrentarse a la solución de problemas de ingeniería o de administración, interactuando con grupos de trabajo interdisciplinarios, con profesionales de otras ramas de la ciencia y la tecnología, sin una preparación adecuada que permita disminuir el tiempo necesario en dicha solución de problemas. Su educación ha sido demasiado teórica y además escasa en aplicaciones prácticas.

En estos tiempos, los procesos productivos no solo necesitan desarrollar y crear nuevas tecnologías, sino también optimizar los procesos contables, financieros y administrativos, para poder ser competitivos al ofrecer productos a un mercado cada vez más exigente en calidad y precio. Para poder realizar lo anterior, es indispensable el uso de la Matemática para aplicar los modelos ya existentes, o para crear nuevos, que permitan resolver problemas de

ingeniería, de administración, de elaboración y ejecución de proyectos en la misma.

En este contexto se requiere la formación de un nuevo profesional que además de tener una base sólida de conocimientos matemáticos y de poseer los conocimientos de las técnicas computacionales de punta, tenga también conocimientos de ingeniería, de administración y de finanzas. Adicionalmente debe estar preparado socialmente para comunicarse de manera eficiente con otros profesionales y ejecutivos de empresas.

Por las razones anteriormente expuestas, la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, para adecuarse a la realidad de esta época propone la creación de la carrera de Ingeniería Matemática.

La actividad del Ingeniero Matemático se orientará a la modelación y solución de los problemas de carácter matemático que aparecen en los procesos industriales, administrativos y financieros. Dicho de otra manera, el ingeniero Matemático aplicara o creara los modelos Matemáticos para resolver problemas de los procesos industriales, administrativos y financieros; cuyos modelos han de ser la base para que se investigue, diseñe, produzca, construya, opere, mantenga, estime y dirija sistemas de diverso grado de complejidad. De ser necesario podrá simular procesos que permitan prever eventos.

Objetivo de la Carrera

- Formar profesionales capaces de plantear, analizar, y resolver problemas de la ingeniería, a través del desarrollo, aplicación y evaluación de modelos matemáticos, el uso de métodos numéricos y estadísticos, el desarrollo e implantación de algoritmos, el manejo de herramientas y técnicas computacionales; a través de una preparación sólida en análisis matemático y numérico, en estadística y procesos estocásticos, en optimización e investigación de operaciones, en aspectos de gestión industrial y financiera, en técnicas computacionales y en aplicaciones diversas a sistemas y procesos industriales y financieros, con la correcta interpretación de los resultados, en un entorno de trabajo interdisciplinario y con el uso del enfoque de sistemas.

Perfil de Ingreso

El aspirante a ingresar a la carrera de Ingeniería Matemática deberá cumplir con los siguientes requisitos:

- Contar con bases académicas sólidas en las ciencias físico-matemáticas.
- Haber cumplido con un programa de estudios compatible con el nivel medio superior del IPN.
- Gusto por las Ciencias Matemáticas y su relación con el mundo real.

- Capacidad para adaptarse a un plan fuertemente exigente, tanto en procesos de abstracción como de aplicación.
- Empuje personal para tener éxito en la carrera y en la actividad profesional posterior.

Perfil de Egreso

Características Generales

- Poseerá una sólida formación profesional en matemáticas y conocimientos especializados en las áreas de las opciones industrial y financiera, según su línea de especialidad.
- Será capaz de analizar problemas reales, crear modelos matemáticos que los representen, diseñar métodos que lleven a la solución de los mismos, resolverlos e interpretar los resultados para plantear soluciones al problema industrial o financiero.

INDICE GENERAL

| | |
|---|----|
| INTRODUCCION | 1 |
| CONTEXTO INSTITUCIONAL (IPN) | 3 |
| INDICE GENERAL | 9 |
| | |
| Capítulo 1. Introducción al Control Estadístico del Proceso | 10 |
| 1.1 Concepto de Calidad | 10 |
| 1.2 Un Sistema para el Control del Proceso | 10 |
| 1.3 Variación | 11 |
| 1.4 Control del Proceso y Habilidad del Proceso | 12 |
| 1.5 Gráficas de Control: Herramientas para el Control del Proceso | 12 |
| 1.5.1 Beneficios de las Gráficas de control | 13 |
| 1.5.2 Tipos de Gráfica y Características Principales | 14 |
| | |
| Capítulo 2. Gráficas de Control de la Suma Acumulada | 17 |
| 2.1 Principios básicos: la gráfica de control cusum para monitorear la media del proceso | 17 |
| 2.2 La cusum tabular para monitorear la media del proceso | 21 |
| 2.3 Recomendaciones para el diseño de la cusum | 25 |
| 2.4 La cusum estandarizada | 26 |
| 2.5 Subgrupos racionales | 27 |
| 2.6 Mejoramiento de la respuesta de la cusum para corrimientos grandes | 28 |
| 2.7 La respuesta inicial rápida o característica de ventaja anticipada | 28 |
| 2.8 Una cusum para monitorear la variabilidad del proceso | 30 |
| 2.9 El procedimiento de la máscara V | 31 |
| | |
| Capítulo 3. Gráfica de Control del Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente | 34 |
| 3.1.1 La gráfica de control del promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA) para monitorear la media del proceso | 34 |
| 3.1.2 Diseño de una gráfica de control EWMA | 38 |
| 3.1.3 Subgrupos racionales | 40 |
| 3.1.4 El EWMA como predictor del nivel del proceso | 40 |
| 3.2 La gráfica de control del promedio móvil | 41 |
| | |
| EJEMPLO DE APLICACIÓN | 44 |
| CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS | 50 |
| BIBLIOGRAFIA | 51 |

CAPITULO 1 INTRODUCCION AL CONTROL ESTADISTICO DEL PROCESO

1.1 Concepto de calidad

Comenzaremos con el análisis de la definición de la calidad en sí misma. La calidad es un concepto que ha ido variando con los años y que existe una gran variedad de formas de concebirla en las empresas, a continuación se detallan algunas de las definiciones que comúnmente son utilizadas en la actualidad.

La calidad es:

- Satisfacer plenamente las necesidades del cliente.
- Cumplir las expectativas del cliente y algunas más.
- Despertar nuevas necesidades del cliente.
- Lograr productos y servicios con cero defectos.
- Diseñar, producir y entregar un producto de satisfacción total.
- Producir un artículo o un servicio de acuerdo a las normas establecidas.
- Dar respuesta inmediata a las solicitudes de los clientes.
- Una categoría tendiente siempre a la excelencia.

Con lo anterior se puede concluir que la calidad se define como: "un proceso de mejoramiento continuo, en donde todas las áreas de la empresa participan activamente en el desarrollo de productos y servicios, que satisfagan las necesidades del cliente, logrando con ello mayor productividad".

Actualmente, el significado amplio de la calidad se enfoca en el cliente, en las necesidades y expectativas que él tiene.

Control de calidad ya no es considerado el único responsable de la calidad, todos son responsables dentro de la empresa de diseñar y fabricar productos de calidad.

El control Estadístico de Procesos es parte de una nueva filosofía de control de calidad basada en la prevención en lugar de la detección.

1.2 Un Sistema para el Control del Proceso

Un sistema para el control del proceso puede ser descrito como un sistema para conocer nuestros resultados. Los elementos básicos de este sistema se definen a continuación:

El proceso. Por proceso nos referimos a la combinación de gente, maquinas, equipo, materiales, métodos y medio ambiente que trabajan juntos para producir un resultado. El desempeño total del proceso -la calidad del resultado y su eficiencia productiva- depende de la manera en que este proceso haya sido diseñado y de la manera en que lo estemos operando.

Información sobre el Comportamiento del Proceso. Podemos aprender mucho sobre el comportamiento actual del proceso analizando el resultado del mismo. Si esta información la colectamos e interpretamos correctamente, nos puede mostrar las acciones que es necesario tomar para corregir el proceso. Si no tomamos las acciones apropiadas y en el tiempo requerido, cualquier información de la que dispongamos se estará desperdiciando.

Acción sobre el Proceso. Las acciones que tomemos para mejorar el proceso están orientadas hacia el futuro, en el sentido de que prevendrán que vuelva a ocurrir un problema. Estas acciones pueden consistir en cambios que se efectúen en las operaciones (por ejemplo: adiestrar al operario, cambiar los materiales, etc.), o en los elementos más básicos del proceso en sí (por ejemplo: el equipo, el cual puede necesitar reparación; o el diseño del proceso, el cual también puede ser susceptible de cambios). Solo debemos efectuar un cambio a la vez y observar cuidadosamente los efectos para conocer con precisión si el cambio que hicimos fue o no la causa de nuestro problema. Esto nos da la pauta para realizar futuros análisis y para tomar acciones en caso de que se requieran.

Acción sobre el Resultado. Las acciones que tomemos sobre el resultado están orientadas hacia el pasado, ya que implica detectar los productos que están fuera de especificaciones cuando ya fueron producidos. Desafortunadamente, si los resultados actuales no están cumpliendo consistentemente con los requerimientos de nuestros clientes, puede ser necesario inspeccionar todos los productos y desechar o re TRABAJAR aquellos que no se adecuen a dichos requerimientos. Esto debe continuar hasta que se tomen las acciones necesarias sobre el proceso, o hasta que se cambien las especificaciones del producto.

1.3 Variación

Para utilizar efectivamente los datos que obtengamos al controlar un proceso, es importante comprender el concepto de variación.

No hay dos productos que sean exactamente iguales debido a que cualquier proceso tiene muchas fuentes de variación. Las diferencias entre los productos pueden ser muy grandes o pueden ser tan pequeñas que no puedan medirse, pero siempre están presentes. Por ejemplo, de la herramienta (fuerza, promedio de uso); del material (diámetro, dureza); de mantenimiento (lubricación, reemplazo de partes usadas) y del medio ambiente (temperatura, uniformidad de la corriente suministrada).

Algunas fuentes de variación en el proceso causan diferencias en periodos de tiempo muy cortos. Otras fuentes de variación tienden a causar cambios en el producto solamente después de un largo periodo de tiempo, también puede presentarse un cambio gradualmente, como el desgaste de una herramienta o máquina. Por lo tanto, el periodo de tiempo y las condiciones bajo las cuales sean hechas las mediciones afectarán la cantidad de la variación total que se presente.

Desde el punto de vista de requerimientos mínimos, el resultado de la variación es frecuentemente simplificado: Las partes dentro de tolerancias de especificación son aceptadas, las partes fuera de tolerancias no son aceptadas. Sin embargo, para dirigir cualquier proceso y reducir su variación, la variación debe analizarse en función de las fuentes que la ocasionan. El primer paso para lograr esto es hacer la distinción entre causas comunes y causas especiales de variación y el tipo de acciones que deben tomarse para cada caso con el propósito de reducir dicha variación.

Las **causas especiales** de variación pueden ser detectadas a través de las técnicas de estadística. Estas causas de variación no son comunes a todas las operaciones involucradas; por ejemplo, en una máquina particular puede haber un operario nuevo que se está adiestrando y que ocasiona cierta variación diferente a la de un operario ya entrenado. El descubrimiento de una causa especial de variación y su arreglo es, usualmente, responsabilidad de alguien que está directamente conectado con la

operación. Entonces, la solución de una causa especial de variación requiere generalmente de una **acción local**.

La magnitud de las **causas comunes** de variación también puede ser detectada a través de las técnicas de estadística que se revisaran posteriormente, pero estas causas, por si mismas, requieren de un análisis mas detallado, ya que pueden implicar el cambio de un proceso de manufactura o el cambio de un proveedor que no está surtiéndonos el material que satisface las necesidades del cliente, etc. Para corregir las causas comunes de variación, se requiere, generalmente, de decisiones que deben tomar las personas que son responsables de proporcionar servicios al área productiva y de administrar el sistema; sin embargo, las personas directamente relacionadas con la operación son quienes, algunas veces, están en una mejor posición para identificar estas causas y comunicarlas a las personas que pueden corregirlas. Entonces, la solución de las causas comunes de variación requiere generalmente de **acciones sobre el sistema**.

1.4 Control del Proceso y Habilidad del Proceso

El Control Estadístico del Proceso (SPC) es el uso de técnicas de estadística, tales como las graficas de control, para analizar un proceso, de tal manera que puedan tomarse las acciones apropiadas para lograr y mantener un proceso en control y para mejorar la habilidad del proceso. El estado de control estadístico es la condición que describe un proceso en el que han sido eliminadas todas las causas especiales de variación y únicamente permanecen las causas comunes. Pero un estado de control estadístico no es un estado natural de un proceso de manufactura, implica un logro, implica alcanzar la eliminación de cada una de las causas especiales de excesiva variación de un proceso y prevenir su repetición.

La habilidad del proceso esta determinada por la variación total que se origina por las causas comunes, es la variación mínima que puede ser alcanzada una vez que todas las causas especiales han sido eliminadas. La habilidad representa el rendimiento del proceso en sí mismo una vez que se ha demostrado que ese proceso está en control estadístico.

En resumen, el proceso debe tenerse primero en control estadístico detectando y eliminando las causas especiales de variación. Una vez que el proceso es estable y predecible, puede entonces ser evaluada su habilidad para lograr las expectativas del cliente. Esta es la base para una mejora continua.

1.5 Gráficas de Control: Herramienta para el Control del Proceso

El Dr. Walter Shewhart de los laboratorios Bell, mientras estudiaba los datos de un proceso en 1920, hizo por primera vez la distinción entre variación controlada y no controlada, debido a lo cual ahora nosotros distinguimos las causas comunes y las causas especiales. El desarrolló una simple pero poderosa herramienta para distinguir las causas especiales de las comunes –las graficas de control. Desde aquella época, las gráficas de control han sido utilizadas exitosamente en una amplia variedad de situaciones para el control del proceso, tanto en los Estados Unidos como en otros países, especialmente en el Japón. La experiencia ha demostrado que las gráficas de control efectivamente dirigen la atención hacia las causas especiales de variación cuando éstas aparecen y reflejan la magnitud de la variación debida a las causas comunes.

Una gráfica de control consiste en una línea central, un par de límites de control, uno de ellos colocado por encima de la línea central y otro por debajo, y unos valores característicos registrados en la gráfica que representa el estado del proceso. Si todos los valores ocurren dentro de los límites de control, sin ninguna tendencia especial, se dice que el proceso está en estado controlado. Sin embargo, si ocurren por fuera de los límites de control o muestran una forma peculiar, se dice que el proceso está fuera de control.

Hay varias clases de gráficas de control, dependiendo de su propósito y de las características de la variable.

1.5.1 Beneficios de las Gráficas de Control

Algunos de los principales beneficios que pueden derivarse del uso de gráficas de control son los siguientes:

- Las gráficas de control son herramientas simples y efectivas para lograr un control estadístico. Se presta para que el operario las maneje en su propia área de trabajo. Dan información confiable a la gente cercana a la operación sobre cuándo debieran tomarse ciertas acciones y cuándo no debieran tomarse.
- Cuando un proceso está en control estadístico puede predecirse su desempeño respecto a las especificaciones. Por consiguiente, tanto el productor como el cliente pueden contar con niveles consistentes de calidad y ambos pueden contar con costos estables para lograr ese nivel de calidad.
- Una vez que un proceso se encuentre en control estadístico, su comportamiento puede ser mejorado posteriormente reduciendo la variación. A través de los datos de las gráficas de control pueden anticiparse las mejoras que se requieren en el sistema. Estas mejoras en el proceso deberán:
 - Incrementar el porcentaje de productos que satisfagan las expectativas de los clientes (mejoras en la calidad).
 - Disminuir los productos que necesiten retrabajarse o desecharse (mejoras en el costo por unidad bien producida).
 - Incrementar la cantidad total de productos aceptables a través del proceso (mejoras efectivas en la habilidad).
- Las gráficas de control proporcionan un lenguaje común para comunicarse sobre el comportamiento de un proceso –entre los diferentes turnos que operen un proceso; entre la línea de producción (supervisor, operario) y las actividades de soporte (mantenimiento, control de materiales, ingeniería de manufactura, calidad del producto); entre las diferentes estaciones en el proceso; entre el proveedor y el usuario; entre la Planta de Manufactura o Ensamble y las actividades de Ingeniería del Producto.
- Las gráficas de control, al distinguir entre las causas especiales y las causas comunes de variación, dan una buena indicación de cuándo algún problema debe ser corregido localmente y cuándo se requiere de una acción en la que deben participar todos los niveles de la organización. Esto minimiza la confusión, frustración y costo excesivo que se deriva de los problemas no resueltos.

1.5.2 Tipos de Gráfica y Características Principales

Para construir una gráfica de control, es importante distinguir el tipo de datos a graficar, pueden ser datos continuos o datos discretos, dicha gráfica dependerá del tipo de datos.

Existen dos tipos generales de gráficas de control: para variables y para atributos. Las primeras se aplican a variables (o características de calidad) de tipo continuo, que intuitivamente son aquellas que requieran un instrumento de medición para medirse (pesos, volúmenes, voltajes, longitudes, resistencias, temperaturas, humedad, etc.).

Existen muchas características de calidad que no son medidas con un instrumento de medición en una escala continua o al menos en una escala numérica. La variabilidad y tendencia central de este tipo de características de calidad de tipo discreto serán analizadas a través de las gráficas de control para atributos.

Antes de utilizar las **Gráficas de Control por Variables**, debe tenerse en consideración lo siguiente:

- a) El proceso debe ser estable.
- b) Los datos del proceso deben obedecer a una **distribución normal**.
- c) El número de datos a considerar debe ser de aproximadamente 20 a 25 subgrupos con un tamaño de muestras de 4 a 5, para que las muestras consideradas sean representativas de la población.
- d) Los datos deben ser clasificados teniendo en cuenta que, la dispersión debe ser mínima dentro de cada subgrupo y máxima entre subgrupos.
- e) Se deben disponer de tablas estadísticas.

Las gráficas de control para variables más usuales son:

a) *Gráficas de control para \bar{x} y R* . Una gráfica de control \bar{x} y R , en realidad son dos gráficas en una, una representa los promedios de las muestras (gráfica \bar{x}) y la otra representa los rangos (gráfica R), deben construirse juntas, ya que la gráfica \bar{x} , nos muestra cualquier cambio en la media del proceso y la gráfica R nos muestra cualquier cambio en la dispersión del proceso, para determinar las \bar{x} y R de las muestras, se basan en los mismos datos.

Algunos puntos importantes a considerar previo a la elaboración de esta gráfica son:

- Propósito de la gráfica
- Variable a considerar
- Tamaño de la muestra
- Tener un criterio para decidir si conviene investigar causas de variación del proceso de producción.
- Familiarizar al personal con el uso de esta gráfica.

La construcción de una gráfica de rangos y promedios consta de dos secciones, parte superior se dedica a los promedios, parte inferior a los rangos.

Los valores de \bar{x} y R serán registrados en forma vertical y la secuencia de los subgrupos a través del tiempo estarán en forma horizontal.

El objetivo de analizar una gráfica de control es identificar cuál es la variación del proceso, las causas comunes y causas especiales de dicha variación, y en función de esto tomar alguna acción apropiada cuando se requiera.

b) Gráfica de control para mediciones individuales. En muchas situaciones, el tamaño de la muestra usado para monitorear el proceso es $n = 1$; es decir, la muestra consta de una unidad individual. Algunos ejemplos de estas situaciones son:

1. Se usa la tecnología de inspección y medición automatizada, y se analiza cada unidad manufacturada, por lo que no hay ninguna base racional para hacer subgrupos.
2. La velocidad de producción es muy lenta, y no es conveniente dejar que se acumulen tamaños de la muestra de $n > 1$ antes del análisis. El largo intervalo entre las observaciones ocasionará problemas con la formación de los subgrupos racionales.

En estas situaciones, la gráfica de control para mediciones individuales es útil. (Las gráficas de control de suma acumulada y del promedio móvil ponderado exponencialmente que se discuten en los capítulos siguientes serán una mejor alternativa cuando es pequeña la magnitud del corrimiento en la media del proceso que es de interés).

Las características de calidad que no pueden ser medidas con una escala numérica, se juzgan a través de un criterio más o menos subjetivo. Los criterios de aceptación al utilizar **Gráficas de Control por Atributos** deben estar claramente definidos y el procedimiento para decidir si esos criterios se están alcanzando es producir resultados consistentes a través del tiempo. Este procedimiento consiste en definir operacionalmente lo que se desea medir. Una definición operacional consiste en:

- Un criterio. El criterio se establece de acuerdo con las especificaciones.
- Una prueba. La prueba consiste en la operación que se realiza para averiguar la existencia o no del criterio establecido.
- Una decisión. La decisión determina que título debe darse al producto, es decir si pasa o no pasa.

Las gráficas de control por atributos son:

a) Gráfica p (proporción o fracción de artículos defectuosos). El porcentaje de artículos defectuosos se expresa como fracción decimal para el cálculo de los límites de control. La fracción sin embargo, se convierte generalmente en porcentaje cuando se transcribe en la gráfica y se usa en la presentación general de los resultados.

Las muestras que se utilizan para elaborar esta gráfica son de tamaño variable. Las muestras de tamaño grande permiten evaluaciones más estables del desarrollo del proceso y son más sensibles a cambios pequeños.

Se utiliza cuando no podemos tener el tamaño de muestra (n) constante, en la práctica es muy común.

El defectuoso son aquellas piezas que no cumplen con especificaciones y es causa de rechazo.

Los principales objetivos de la gráfica p son:

- Poner a la atención de la dirección cualquier cambio en el nivel medio de calidad.
- Descubrir los puntos fuera de control que indican modelos de inspección relajados.
- Proporcionar un criterio para poder juzgar si lotes sucesivos pueden considerarse como representativos de un proceso.

b) *Gráfica np (número de unidades defectuosas)*. Esta gráfica es el instrumento estadístico que se utiliza cuando se desea graficar precisamente las unidades defectuosas, y no el porcentaje que éstas representan, siendo constante el tamaño de la muestra.

Es necesario establecer la frecuencia para la toma de datos, teniendo en cuenta que los intervalos cortos permiten una rápida retroalimentación del proceso.

Los principales objetivos de la gráfica *np* son:

- Conocer las causas que contribuyen al proceso.
- Obtener el registro histórico de una o varias características de una operación con el proceso productivo.

c) *Gráfica c (número de defectos)*. La gráfica *c* estudia el comportamiento de un proceso considerando el número de defectos encontrados al inspeccionar una unidad de producto. La gráfica hace uso del hecho de que artículo es aceptable aunque presente cierto número de defectos.

Los objetivos de la gráfica *c* son:

- Reducir el costo relativo al proceso
- Informar a los supervisores de producción y a la administración acerca del nivel de calidad.
- Determinar que tipo de defectos no son permisibles en un producto, informar de la probabilidad de ocurrencia de los defectos en una unidad.

Estas gráficas deben utilizarse sólo cuando el área de oportunidad de encontrar defectos permanece constante.

d) *Gráfica u (número de defectos por unidad)*. La gráfica *u* mide la cantidad de defectos por unidad de inspección en subgrupos cuyos tamaños pueden ser variables. Es similar a la gráfica *c*, con la diferencia de que la cantidad de defectos se expresa sobre una base unitaria. Las gráficas *c* y *u* son adecuadas para las mismas situaciones.

Deberá utilizarse la gráfica *u* si:

- La muestra incluye más de una unidad.
- El tamaño de muestra varía entre subgrupos.

CAPITULO 2 GRÁFICAS DE CONTROL DE LA SUMA ACUMULADA

Las gráficas CUSUM tienen varias diferencias con las de control comunes de Shewhart. En lugar de graficar el valor individual de la estadística de interés, como \bar{x} , R , s , p , np , o c , se crea una estadística acumulando las otras. A menudo la estadística acumulada es la suma de las desviaciones de la estadística individual de un valor objetivo; por ejemplo, $\sum (x_i - x_0)$. Para estas gráficas, el valor objetivo se hace más importante que en las gráficas de Shewhart. Algunas veces la estadística para graficar CUSUM es la suma directa de los valores individuales de la estadística de interés; por ejemplo, $\sum d_i$ (d_i es el número de desconformidades), como si se usara un valor objetivo de cero. Para algunas aplicaciones, cero puede ser el valor objetivo requerido para una estadística del proceso. En estos casos, ni siquiera en un estado de control estadístico, se mantiene un patrón horizontal en la gráfica de control. Resulta un patrón inclinado.

Las gráficas CUSUM difieren de las de Shewhart respecto a los límites de control o criterios de decisión. Aunque las gráficas de Shewhart son eficaces para detectar cambios en el nivel promedio de un proceso de más de 2σ (de la estadística de referencia), no son muy buenas para detectar cambios de la magnitud de 0.5 a 1.5σ . Se pueden crear gráficas CUSUM que mejoran significativamente las posibilidades de esa detección.

2.1 Principios básicos: la gráfica de control cusum para monitorear la media del proceso

Considérense los datos de la columna (a) de la tabla 2-1. Las 20 primeras observaciones se sacaron al azar de una distribución normal con media $\mu = 10$ y desviación estándar $\sigma = 1$. En la figura 2-1 se grafican estas observaciones en una gráfica de control de Shewhart.

La línea central y los límites de control tres sigma de esta carta son

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= 13 \\ \text{Línea central} &= 10 \\ \text{LCL} &= 7 \end{aligned}$$

Obsérvese que las 20 observaciones están bajo control.

Las 10 últimas observaciones de la columna (a) de la tabla 2-1 se sacaron de una distribución normal con media $\mu = 11$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Por consiguiente, podría considerarse que estas 10 últimas observaciones se sacaron del proceso cuando está fuera de control -es decir, después de que el proceso ha experimentado un corrimiento en la media de 1σ . Estas 10 últimas observaciones también se grafican en la gráfica de control de la figura 2-1. Ninguno de estos puntos se sale de los límites de control, por lo que no se tiene evidencia sólida de que el proceso está fuera de control.

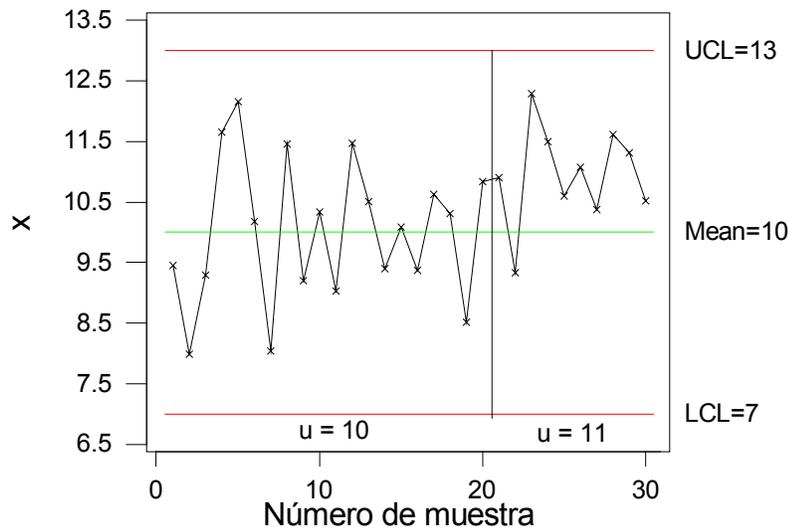


Figura 2-1 Carta de control de Shewhart para los datos de la tabla 2-1.

Obsérvese que hay un indicio de un corrimiento en el nivel del proceso en los 10 últimos puntos, ya que con excepción de un punto todos los demás se localizan arriba de la línea central. Sin embargo, si se confía en la señal tradicional de un proceso fuera de control (i.e., uno o más puntos que rebasan uno de los límites de control tres sigma), entonces la gráfica de control de Shewhart ha fallado para detectar el corrimiento.

La razón de esta falla es, desde luego, la magnitud relativamente pequeña del corrimiento. La carta de Shewhart para promedios es muy efectiva si la magnitud del corrimiento es 1.5σ a 2σ o mayor. Para corrimientos más pequeños, no es tan efectiva. La gráfica de control de suma acumulada (o cusum) es una buena alternativa cuando son importantes los corrimientos pequeños.

La gráfica cusum incorpora directamente toda la información contenida en la secuencia de los valores muestrales graficando las sumas acumuladas de las desviaciones que presentan los valores muestrales respecto del valor objetivo. Por ejemplo, suponer que se colectan muestras de tamaño $n \geq 1$, y que \bar{x}_j es el promedio de la j -ésima muestra. Entonces, si μ_0 es el objetivo para la media del proceso, la gráfica de control de suma acumulada se construye graficando la cantidad

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) \quad (1)$$

contra la muestra i . A C_i se le llama la suma acumulada hasta la i -ésima muestra, incluyéndola.

Tabla 2-1 Datos para el ejemplo de la cusum

| Muestra, i | (a) x_i | (b) $x_i - 10$ | (c) $C_i = (x_i - 10) + C_{i-1}$ |
|------------|--------------|-------------------|-------------------------------------|
| 1 | 9.45 | -0.55 | -0.55 |
| 2 | 7.99 | -2.01 | -2.56 |
| 3 | 9.29 | -0.71 | -3.27 |
| 4 | 11.66 | 1.66 | -1.61 |
| 5 | 12.16 | 2.16 | 0.55 |
| 6 | 10.18 | 0.18 | 0.73 |
| 7 | 8.04 | -1.96 | -1.23 |
| 8 | 11.46 | 1.46 | 0.23 |
| 9 | 9.2 | -0.8 | -0.57 |
| 10 | 10.34 | 0.34 | -0.23 |
| 11 | 9.03 | -0.97 | -1.20 |
| 12 | 11.47 | 1.47 | 0.27 |
| 13 | 10.51 | 0.51 | 0.78 |
| 14 | 9.4 | -0.6 | 0.18 |
| 15 | 10.08 | 0.08 | 0.26 |
| 16 | 9.37 | -0.63 | -0.37 |
| 17 | 10.62 | 0.62 | 0.25 |
| 18 | 10.31 | 0.31 | 0.56 |
| 19 | 8.52 | -1.48 | -0.92 |
| 20 | 10.84 | 0.84 | -0.08 |
| 21 | 10.9 | 0.9 | 0.82 |
| 22 | 9.33 | -0.67 | 0.15 |
| 23 | 12.29 | 2.29 | 2.44 |
| 24 | 11.5 | 1.5 | 3.94 |
| 25 | 10.6 | 0.6 | 4.54 |
| 26 | 11.08 | 1.08 | 5.62 |
| 27 | 10.38 | 0.38 | 6.00 |
| 28 | 11.62 | 1.62 | 7.62 |
| 29 | 11.31 | 1.31 | 8.93 |
| 30 | 10.52 | 0.52 | 9.45 |

Se observa que si el proceso se mantiene bajo control en el valor objetivo μ_0 , la suma acumulada definida en la ecuación 1 es una fluctuación aleatoria con media cero. Sin embargo, si la media experimenta un corrimiento ascendente a un valor $\mu_1 > \mu_0$, por ejemplo, entonces se desarrollará una desalineación ascendente o positiva en la suma acumulada C_i . Recíprocamente, si la media experimenta un corrimiento descendente a un valor $\mu_1 < \mu_0$, entonces se desarrollará una desalineación descendente o negativa en C_i . Por lo tanto, si se desarrolla una tendencia en los puntos graficados, sea ascendente o descendente, ésta deberá considerarse como evidencia de que la media del proceso se ha corrido y deberá realizarse la búsqueda de alguna causa asignable.

Es sencillo hacer una demostración de esta teoría utilizando nuevamente los datos de la columna (a) de la tabla 2-1. Para aplicar la cusum de la ecuación 1 a estas

observaciones, se tomaría $x_i = x_i$ (puesto que el tamaño de la muestra es $n = 1$), y se hace el valor objetivo $\mu_0 = 10$. Por lo tanto, la cusum es

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{j=1}^i (x_j - 10) \\ &= (x_i - 10) + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - 10) \\ &= (x_i - 10) + C_{i-1} \end{aligned}$$

La columna (b) de la tabla 2-1 contiene las diferencias $x_i - 10$, y en la columna (c) se calculan las sumas acumuladas. El valor inicial de la cusum, C_0 , se toma como cero. En la figura 2-2 se grafica la cusum de la columna (c) de la tabla 2-1. Obsérvese que para las 20 primeras observaciones, para las que $\mu = 10$, la cusum tiende a presentar una desalineación lenta, en este caso manteniendo valores próximos a cero. Sin embargo, en las 10 últimas observaciones, para las que la media se ha corrido a $\mu = 11$, se desarrolla una marcada tendencia ascendente.

Desde luego, la grafica de la suma acumulada de la figura 2-2 no es una gráfica de control, ya que carece de límites de control estadístico. Hay dos formas de representar cusums, la **cusum tabular** (o **algorítmica**) y en la forma de **máscara V** de la cusum. De las dos representaciones, es preferible la cusum tabular.

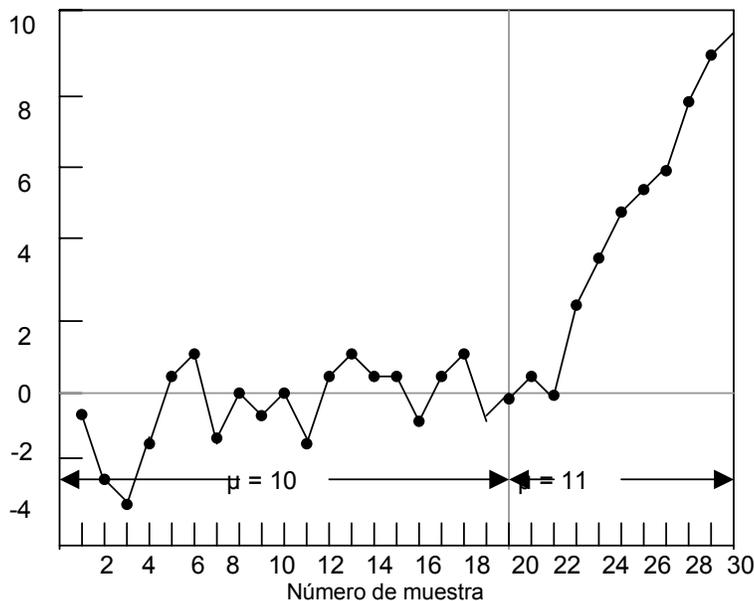


Figura 2.2 Gráfica de la suma acumulada de la columna (c) de La tabla 2.1

2.2 La cusum tabular o algorítmica para monitorear la media del proceso

Se indica ahora la manera de construir una cusum tabular para monitorear la media de un proceso. Es posible construir tanto para observaciones individuales como para los promedios de subgrupos racionales. El caso de las observaciones individuales ocurre con mucha frecuencia en la práctica.

Sea x_i la i -ésima observación del proceso. Cuando el proceso está bajo control, x_i tiene una distribución normal con media μ_0 y desviación estándar σ . Se supone que σ es conocida o que se cuenta con una estimación de la misma.

En ocasiones μ_0 se considera como el valor "objetivo" para la característica de la calidad x . Es común adoptar este punto de vista en las industrias químicas y de procesamiento cuando el objetivo es controlar x (la viscosidad, por ejemplo) para un valor objetivo particular (como 2000 centistokes a 100°C). Si el proceso se desalinea o se corre de este valor objetivo, la cusum producirá una señal, y se hace un ajuste en alguna variable manipulable (como la rapidez de alimentación del catalizador) para poner de nuevo el proceso en el objetivo. Además, en algunos casos una señal de una cusum indica la presencia de una causa asignable que deberá investigarse, como es el caso de una carta de Shewhart.

La cusum tabular funciona acumulando las desviaciones de μ_0 que están arriba del objetivo con un estadístico C^+ y acumulando las desviaciones de μ_0 que están abajo del objetivo con otro estadístico C^- . A los estadísticos C^+ y C^- se les llama los **cusums unilaterales superior e inferior**, respectivamente. Se calculan como sigue:

La cusum tabular

$$C_i^+ = \max [0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (2)$$

$$C_i^- = \max [0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad (3)$$

donde los valores iniciales son $C_0^+ = C_0^- = 0$.

En las ecuaciones 2 y 3, a K suele llamarse el **valor de referencia** (o **tolerancia**, o **valor laxo**), y con frecuencia se escoge aproximadamente a la mitad entre el objetivo μ_0 y el valor fuera de control de la media μ_1 que el analista está interesado en detectar con rapidez.

Por tanto, si el cambio se expresa en unidades de desviación estándar como $\mu_1 = \mu_0 + \delta \sigma$ (o $\delta = |\mu_1 - \mu_0| / \sigma$), entonces K es la mitad de la magnitud del corrimiento o

$$K = \frac{\delta}{2} \sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} \quad (4)$$

Obsérvese que C_+^- y C_+^+ acumulan las desviaciones del valor objetivo μ_0 que son mayores que K , reiniciando ambas cantidades en cero cuando se hacen negativas.

Si C_i^+ o C_i^- excede el **intervalo de decisión** H, se considera que el proceso está fuera de control.

Se ha mencionado brevemente cómo elegir K, pero ¿cómo se escoge H? De hecho, la selección correcta de estos dos parámetros es muy importante, ya que tienen un impacto sustancial sobre el desempeño de la cusum. Pero un valor razonable de H es cinco veces la desviación estándar del proceso σ .

EJEMPLO 2.1 **Una cusum tabular**

Los cálculos para la cusum tabular se ilustrarán utilizando los datos de la tabla 2-1. Recuerdese que el valor objetivo es $\mu_0 = 10$, el tamaño del subgrupo es $n = 1$, la desviación estándar del proceso es $\sigma = 1$, y se supondrá que la magnitud del corrimiento que quiere detectarse es $1.0\sigma = 1.0(1.0) = 1.0$. Por lo tanto, el valor fuera de control de la media del proceso es $\mu_1 = 10 + 1 = 11$. Se usará una cusum tabular con $K = \frac{1}{2}$ (ya que el tamaño del corrimiento es 1.0σ y $\sigma = 1$) y $H = 5$ (ya que el valor recomendado del intervalo de decisión es $H = 5\sigma = 5(1) = 5$).

En la tabla 2-2 se presenta el esquema cusum tabular. Para ilustrar los cálculos, considérese el periodo 1. Las ecuaciones para C_1^+ y C_1^- son

$$C_1^+ = \text{máx} [0, x_1 - 10.5 + C_0^+]$$

y

$$C_1^- = \text{máx} [0, 9.5 - x_1 + C_0^-]$$

puesto que $K = 0.5$ y $\mu_0 = 10$. Entonces $x_1 = 9.45$, por lo que como $C_0^+ = C_0^- = 0$,

$$C_1^+ = \text{máx} [0, 9.45 - 10.5 + 0] = 0$$

y

$$C_1^- = \text{máx} [0, 9.5 - 9.45 + 0] = 0.05$$

Para el periodo 2, se usaría

$$\begin{aligned} C_2^+ &= \text{máx} [0, x_2 - 10.5 + C_1^+] \\ &= \text{máx} [0, x_2 - 10.5 + 0] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C_2^- &= \text{máx} [0, 9.5 - x_2 + C_1^-] \\ &= \text{máx} [0, 9.5 - x_2 + 0.05] \end{aligned}$$

Puesto que $x_2 = 7.99$, se obtiene

$$C_2^+ = \text{máx} [0, 7.99 - 10.5 + 0] = 0$$

y

$$C_2^- = \text{máx} [0, 9.5 - 7.99 + 0.05] = 1.56$$

En los paneles (a) y (b) de la tabla 2-2 se resumen los cálculos restantes. Las cantidades N^+ y N^- de la tabla 2-2 indican el número de periodos consecutivos en los que las cusums C_i^+ o C_i^- han sido diferentes de cero.

Tabla 2.2 La cusum tabular

| Periodo i | x_i | a | | | b | | |
|-----------|-------|--------------|---------|-------|-------------|---------|-------|
| | | $x_i - 10.5$ | C_i^+ | N^+ | $9.5 - x_i$ | C_i^- | N^- |
| 1 | 9.45 | -1.05 | 0 | 0 | 0.05 | 0.05 | 1 |
| 2 | 7.99 | -2.51 | 0 | 0 | 1.51 | 1.56 | 2 |
| 3 | 9.29 | -1.21 | 0 | 0 | 0.21 | 1.77 | 3 |
| 4 | 11.66 | 1.16 | 1.16 | 1 | -2.16 | 0 | 0 |
| 5 | 12.16 | 1.66 | 2.82 | 2 | -2.66 | 0 | 0 |
| 6 | 10.18 | -0.32 | 2.50 | 3 | -0.68 | 0 | 0 |
| 7 | 8.04 | -2.46 | 0.04 | 4 | 1.46 | 1.46 | 1 |
| 8 | 11.46 | 0.96 | 1 | 5 | -1.96 | 0 | 0 |
| 9 | 9.2 | -1.30 | 0 | 0 | 0.30 | 0.30 | 1 |
| 10 | 10.34 | -0.16 | 0 | 0 | -0.84 | 0 | 0 |
| 11 | 9.03 | -1.47 | 0 | 0 | 0.47 | 0.47 | 1 |
| 12 | 11.47 | 0.97 | 0.97 | 1 | -1.97 | 0 | 0 |
| 13 | 10.51 | 0.01 | 0.98 | 2 | -1.01 | 0 | 0 |
| 14 | 9.4 | -1.10 | 0 | 0 | 0.10 | 0.10 | 1 |
| 15 | 10.08 | -0.42 | 0 | 0 | -0.58 | 0 | 0 |
| 16 | 9.37 | -1.13 | 0 | 0 | 0.13 | 0.13 | 1 |
| 17 | 10.62 | 0.12 | 0.12 | 1 | -1.12 | 0 | 0 |
| 18 | 10.31 | -0.19 | 0 | 0 | -0.81 | 0 | 0 |
| 19 | 8.52 | -1.98 | 0 | 0 | 0.98 | 0.98 | 1 |
| 20 | 10.84 | 0.34 | 0.34 | 1 | -1.34 | 0 | 0 |
| 21 | 10.9 | 0.40 | 0.74 | 2 | -1.40 | 0 | 0 |
| 22 | 9.33 | -1.17 | 0 | 0 | 0.17 | 0.17 | 1 |
| 23 | 12.29 | 1.79 | 1.79 | 1 | -2.79 | 0 | 0 |
| 24 | 11.5 | 1.00 | 2.79 | 2 | -2.00 | 0 | 0 |
| 25 | 10.6 | 0.10 | 2.89 | 3 | -1.10 | 0 | 0 |
| 26 | 11.08 | 0.58 | 3.47 | 4 | -1.58 | 0 | 0 |
| 27 | 10.38 | -0.12 | 3.35 | 5 | -0.88 | 0 | 0 |
| 28 | 11.62 | 1.12 | 4.47 | 6 | -2.12 | 0 | 0 |
| 29 | 11.31 | 0.81 | 5.28 | 7 | -1.81 | 0 | 0 |
| 30 | 10.52 | 0.02 | 5.30 | 8 | -1.02 | 0 | 0 |

Los cálculos de las cusums de la tabla 2-2 indican que la cusum del lado superior en el periodo 29 es $C_{29}^+ = 5.28$. Puesto que se trata del primer periodo en el que $C_i^+ > H = 5$, se concluirá que el proceso está fuera de control en ese punto. La cusum tabular también indica el momento probable en que ocurrió el corrimiento. El contador N^+ registra el número de periodos consecutivos desde que la cusum del lado superior C_i^+ subió por encima del valor cero. Puesto que $N^+ = 7$ en el periodo 29, se concluirá que

la última vez que el proceso estuvo bajo control fue en el periodo 29-7 = 22, por lo que el corrimiento ocurrió posiblemente entre los periodos 22 y 23.

En la figura 2-3 se muestra la gráfica cusum para los datos del ejemplo 2.1, (versión de Minitab).

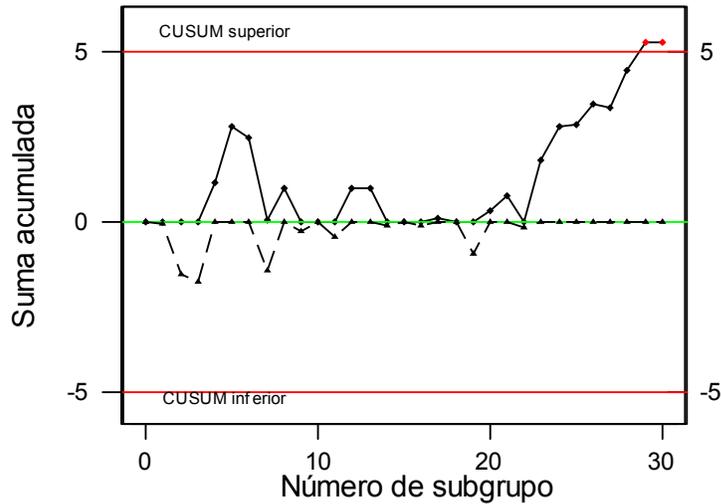


Figura 2-3 Gráfica de Minitab

La acción que se emprende después de una señal fuera de control en un esquema de control cusum es idéntica a la de cualquier gráfica de control; deberá buscarse la causa asignable, emprender cualquier acción correctiva necesaria y después reinicializar la cusum en cero. La cusum es particularmente útil para determinar cuándo ha ocurrido la causa asignable; como se señaló en el ejemplo anterior, tan sólo se cuenta hacia atrás desde la señal de fuera de control hasta el periodo de tiempo en que la cusum subió arriba de cero para encontrar el primer periodo del proceso posterior al corrimiento. Los contadores N^+ y N^- para este fin.

En las situaciones en que se requiere el ajuste de una variable manipulable para poner de nuevo el proceso en el objetivo μ_0 , puede ser útil tener una estimación de la nueva media del proceso después del corrimiento. Ésta puede calcularse con

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_0 + K + \frac{C_i^+}{N^+}, & \text{si } C_i^+ > H \\ \mu_0 - K - \frac{C_i^-}{N^-}, & \text{si } C_i^- > H \end{cases} \quad (5)$$

Para ilustrar el uso de la ecuación 5, considérese la cusum en el periodo 29 con $C_{29}^+ = 5.28$. Por la ecuación 5, el nuevo promedio del proceso se estimará como

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \mu_0 + K + \frac{C_{29}^+}{N^+} \\ &= 10.0 + 0.5 + \frac{5.28}{7} \\ &= 11.25\end{aligned}$$

Así, por ejemplo, si la característica del proceso es la viscosidad, entonces se concluirá que la viscosidad media se ha corrido de 10 a 11.25, y si la variable manipulable que afecta la viscosidad es la rapidez de alimentación del catalizador, entonces sería necesario hacer un ajuste en la rapidez de alimentación del catalizador que produzca un descenso de 1.25 unidades en la viscosidad.

Por último, cabe hacer notar que las pruebas para corridas, y otras reglas de sensibilidad como las reglas de zona, no pueden aplicarse con seguridad a la cusum, ya que los valores sucesivos de C_i^+ y C_i^- no son independientes. De hecho, la cusum puede considerarse como un promedio ponderado, en el que las ponderaciones son estocásticas o aleatorias. Por ejemplo, considérese la cusum que se muestra en la tabla 2-2. La cusum en el periodo 30 es $C_{30}^+ = 5.30$. Este valor puede considerarse como un promedio ponderado en el que se asigna la misma ponderación a las últimas $N^+ = 8$ observaciones y una ponderación cero a las observaciones restantes.

2.3 Recomendaciones para el diseño de la cusum

La cusum tabular se diseña eligiendo valores para el valor de referencia K y para el intervalo de decisión H . Es común recomendar que estos parámetros se seleccionen para producir un buen desempeño de la **longitud promedio de la corrida (ARL, por sus siglas en inglés)**. Se han realizado diversos estudios analíticos del desempeño de la ARL para la cusum. Con base en estos estudios, es posible ofrecer algunas recomendaciones generales para seleccionar H y K .

Definir $H = h\sigma$ y $K = k\sigma$, donde σ es la desviación estándar de la variable muestral usada para formar la cusum. Utilizando $h = 4$ o $h = 5$ y $k = \frac{1}{2}$ por lo general se obtendrá una cusum que tiene propiedades convenientes de la ARL contra un corrimiento de aproximadamente 1σ en la media del proceso.

Para ilustrar qué tan bien funcionan las recomendaciones de $h = 4$ o $h = 5$ con $k = \frac{1}{2}$, considérense las longitudes promedio de la corrida bilaterales que se muestran en la tabla 2-3. Obsérvese que un corrimiento de 1σ se detectaría en 8.38 muestras (con $k = \frac{1}{2}$ y $h = 4$) o en 10.4 muestras (con $k = \frac{1}{2}$ y $h = 5$). En comparación, una carta de control de Shewhart para mediciones individuales requeriría 43.96 muestras, en promedio, para detectar este corrimiento.

Obsérvese asimismo por la tabla 2-4 que si se elige $h = 4.77$, se obtendrá una cusum con $ARL_0 = 370$ muestras, el cual coincide con el valor ARL_0 para la gráfica de control de Shewhart con los límites 3σ usuales.

Tabla 2-3 Desempeño de la ARL de la cusum tabular con $k = \frac{1}{2}$ y $h = 4$ o $h = 5$

| Corrimiento en la media (múltiplo de σ) | $h = 4$ | $h = 5$ |
|--|---------|---------|
| 0 | 168 | 465 |
| 0.25 | 74.2 | 139 |
| 0.50 | 26.6 | 38.0 |
| 0.75 | 13.3 | 17.0 |
| 1.00 | 8.38 | 10.4 |
| 1.50 | 4.75 | 5.75 |
| 2.00 | 3.34 | 4.01 |
| 2.50 | 2.62 | 3.11 |
| 3.00 | 2.19 | 2.57 |
| 4.00 | 1.71 | 2.01 |

En general, la elección de k querrá hacerse respecto del tamaño del corrimiento que quiera detectarse; es decir, $k = \frac{1}{2}\delta$, donde δ es la magnitud del corrimiento en unidades de desviación estándar. Como ya se mencionó, un valor muy usado en la práctica es $k = \frac{1}{2}$. Entonces, una vez que se ha seleccionado k, h deberá elegirse para obtener el desempeño deseado de la ARL_0 bajo control. Hawkins, D.M. presenta una tabla de valores de k y los valores correspondientes de h que producirán $ARL_0 = 370$. En la tabla 2-4 se reproducen estos valores.

Tabla 2-4 Valores de k y los valores correspondientes de h que producen $ARL_0 = 370$ para la cusum tabular bilateral

| | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|
| k | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.25 | 1.5 |
| h | 8.01 | 4.77 | 3.34 | 2.52 | 1.99 | 1.61 |

2.4 La cusum estandarizada

Muchos usuarios de la cusum prefieren estandarizar la variable x_i antes de realizar los cálculos. Sea

$$y_i = \frac{x_i - \mu_0}{\sigma} \quad (6)$$

el valor estandarizado de x_i . Entonces las cusums estandarizadas se definen como sigue.

La cusum bilateral estandarizada

$$C_i^+ = \text{máx} [0, y_i - k + C_{i-1}^+] \quad (7)$$

$$C_i^- = \text{máx} [0, -k - y_i + C_{i-1}^-] \quad (8)$$

La estandarización de la cusum ofrece dos ventajas. Primera, muchas gráficas cusum pueden tener ahora los mismos valores de k y h , y las elecciones de estos parámetros no dependen de la escala (es decir, no dependen de σ). Segunda, una cusum estandarizada lleva de manera natural a una cusum para controlar la variabilidad.

2.5 Subgrupos racionales

Aun cuando se ha presentado el desarrollo de la cusum tabular para el caso de observaciones individuales ($n = 1$), este resultado puede extenderse con facilidad al caso de promedios de subgrupos racionales ($n > 1$). Simplemente se sustituye x_i con \bar{x}_i (el promedio muestral o de los subgrupos) en las formulas anteriores, y σ se sustituye con σ / \sqrt{n} .

En las gráficas de Shewhart, el uso de promedios de subgrupos racionales mejora sustancialmente el desempeño de la gráfica de control. Sin embargo, no siempre ocurre lo mismo con la cusum. Si, por ejemplo, se tiene la alternativa de tomar una muestra de tamaño $n = 1$ cada media hora y una muestra de subgrupos racionales de tamaño $n = 5$ cada 2.5 horas (obsérvese que en ambos casos se tiene la misma intensidad de muestreo), la cusum con frecuencia funcionará mejor con la elección $n = 1$ cada media hora. Sólo si existe alguna economía de escala significativa o alguna otra razón válida para tomar muestras de tamaño mayor que uno deberán usarse subgrupos de tamaño mayor que uno con la cusum.

2.6 Mejoramiento de la respuesta de la cusum para corrimientos grandes

Se ha señalado que la gráfica de control cusum es muy efectiva para detectar corrimientos pequeños. Sin embargo, la gráfica de control cusum no es tan efectiva como la carta de Shewhart para detectar corrimientos grandes. Un enfoque para mejorar la habilidad de la gráfica de control cusum para detectar los corrimientos grandes en el proceso es usar un **procedimiento combinado cusum Shewhart** para el control en línea. Agregar la gráfica de control de Shewhart es una modificación muy simple del procedimiento de control de suma acumulada. Los límites de control de Shewhart deberán localizarse aproximadamente a 3.5 desviaciones estándar de la línea central o del valor objetivo μ_0 . Una señal de fuera de control en cualquiera de las dos gráficas (o en ambas) constituye una señal de acción. En la columna (a) de la tabla 2-5 se presentan las ARL de la cusum básica con $k = \frac{1}{2}$ y $h = 5$. En la columna (b) de la tabla 2-5 se presentan las ARL de la cusum con los límites de Shewhart

agregados a las mediciones individuales. Como se sugirió antes, los límites de Shewhart están en 3.5σ . Al examinar estos valores de la ARL se observa que la adición de los límites de Shewhart ha mejorado la habilidad del procedimiento para detectar los corrimientos grandes y ha reducido apenas ligeramente la ARL_0 bajo control. Se concluye que un procedimiento combinado cusum-Shewhart es una forma efectiva de mejorar la respuesta de la cusum a los corrimientos grandes.

Tabla 2-5 Valores de ARL para algunas modificaciones de la cusum básica con $k = \frac{1}{2}$ y

$$h = 5 \text{ (si se usan subgrupos de tamaño } n > 1, \text{ entonces } \sigma = \sigma_x = \sigma / \sqrt{n} \text{)}$$

| Corrimiento en la media (múltiplo de σ) | (a) Cusum básica | (b) Cusum-Shewhart (límites de Shewhart en 3.5σ) | (c) Cusum con FIR | (d) Cusum-Shewhart FIR (límites de Shewhart en 3.5σ) |
|---|------------------|--|-------------------|--|
| 0 | 465 | 391 | 430 | 360 |
| 0.25 | 139 | 130.9 | 122 | 113.9 |
| 0.50 | 38.0 | 37.20 | 28.7 | 28.1 |
| 0.75 | 17.0 | 16.80 | 11.2 | 11.2 |
| 1.00 | 10.4 | 10.20 | 6.35 | 6.32 |
| 1.50 | 5.75 | 5.58 | 3.37 | 3.37 |
| 2.00 | 4.01 | 3.77 | 2.36 | 2.36 |
| 2.50 | 3.11 | 2.77 | 1.86 | 1.86 |
| 3.00 | 2.57 | 2.10 | 1.54 | 1.54 |
| 4.00 | 2.01 | 1.34 | 1.16 | 1.16 |

2.7 La respuesta inicial rápida o característica de ventaja anticipada

Este procedimiento sirve para mejorar la sensibilidad de una cusum cuando arranca el proceso. Una sensibilidad incrementada al arranque del proceso sería deseable cuando la acción correctiva no reinicializa la media en el valor objetivo. En esencia, la **respuesta inicial rápida** (FIR, por sus siglas en inglés) o ventaja anticipada consiste esencialmente en hacer los valores iniciales C_0^+ y C_0^- iguales a un valor diferente de cero, de manera típica $H/2$. Se le llama ventaja anticipada del 50%.

Para ilustrar el procedimiento de ventaja anticipada, considérense los datos de la tabla 2-6. Estos datos tienen un valor objetivo de 100, $K = 3$ y $H = 12$. Se usará un valor de ventaja anticipada del 50% de $C_0^+ = C_0^- = H/2 = 6$. Las 10 primeras muestras están bajo control con media igual al valor objetivo de 100. Puesto que $x_1 = 102$, las cusum del primer periodo serán

$$\begin{aligned} C_1^+ &= \max [0, x_1 - 103 + C_0^+] \\ &= \max [0, 102 - 103 + 6] = 5 \end{aligned}$$

$$C_1^- = \max [0, 97 - x_1 + C_0^-]$$

$$= \text{máx} [0, 97 - 102 + 6] = 1$$

Obsérvese que el valor cusum de inicio es la ventaja anticipada $H = 6$. Además, por los paneles (a) y (b) de la tabla 2-6 se observa que ambas cusums declinan rápidamente a cero desde el valor inicial. De hecho, del periodo 2 en adelante C_1^+ no es afectada por la ventaja anticipada, y del periodo 3 en adelante C_1^- no es afectada por la ventaja anticipada. Ha ocurrido esto porque el proceso está bajo control en el valor objetivo de 100, y se contemplan varias observaciones consecutivas cerca del valor objetivo.

Tabla 2.6 Una cusum con una ventaja anticipada, media del proceso igual a 100

| Periodo i | x_i | a | | | b | | |
|----------------|-------|-------------|---------|-------|------------|---------|-------|
| | | $x_i - 103$ | C_i^+ | N^+ | $97 - x_i$ | C_i^- | N^- |
| 1 | 102 | -1 | 5 | 1 | -5 | 1 | 1 |
| 2 | 97 | -6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 104 | 1 | 1 | 1 | -7 | 0 | 0 |
| 4 | 93 | -6 | 0 | 0 | 4 | 4 | 1 |
| 5 | 100 | -3 | 0 | 0 | -3 | 1 | 2 |
| 6 | 105 | 2 | 2 | 1 | -8 | 0 | 0 |
| 7 | 96 | -7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 98 | -5 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 9 | 105 | 2 | 2 | 1 | -8 | 0 | 0 |
| 10 | 99 | -4 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 |

Suponer ahora que el proceso estuviera fuera de control al arranque del proceso, con media 105. En la tabla 2-7 se presentan los datos que se habrían producido con este proceso y las cusums resultantes. Obsérvese que la tercera muestra hace que C_3^+ exceda el límite $H = 12$. Si no se hubiera usado ninguna ventaja anticipada, se hubiera iniciado con $C_0^+ = 0$, y la cusum no hubiera excedido H sino hasta la muestra número 6.

Tabla 2.7 Una cusum con una ventaja anticipada, media del proceso igual a 105

| Periodo i | x_i | a | | | b | | |
|----------------|-------|-------------|---------|-------|------------|---------|-------|
| | | $x_i - 103$ | C_i^+ | N^+ | $97 - x_i$ | C_i^- | N^- |
| 1 | 107 | 4 | 10 | 1 | -10 | 0 | 0 |
| 2 | 102 | -1 | 9 | 2 | -5 | 0 | 0 |
| 3 | 109 | 6 | 15 | 3 | -12 | 0 | 0 |
| 4 | 98 | -5 | 10 | 4 | -1 | 0 | 0 |
| 5 | 105 | 2 | 12 | 5 | -8 | 0 | 0 |
| 6 | 110 | 7 | 19 | 6 | -13 | 0 | 0 |
| 7 | 101 | -2 | 17 | 7 | -4 | 0 | 0 |
| 8 | 103 | 0 | 17 | 8 | -6 | 0 | 0 |
| 9 | 110 | 7 | 24 | 9 | -13 | 0 | 0 |
| 10 | 104 | 1 | 25 | 10 | -7 | 0 | 0 |

Este ejemplo demuestra los beneficios de la ventaja anticipada. Si el proceso inicia bajo control en el valor objetivo, las cusums pronto caerán a cero y la ventaja anticipada tendrá poco efecto sobre el desempeño del procedimiento cusum. En la figura 2-4 se ilustra esta propiedad de la ventaja anticipada utilizando los datos de la tabla 2-1. La gráfica cusum se construyó utilizando Minitab. Sin embargo, si el proceso se inicia en algún nivel diferente del valor objetivo, la ventaja anticipada permitirá que la cusum lo detecte con mayor rapidez, consiguiéndose así reducir el número de valores de la ARL fuera de control.

En la columna (c) de la tabla 2-5 se presenta el desempeño de la ARL de la cusum básica con la característica ventaja anticipada o FIR. Las ARL se calcularon utilizando una ventaja anticipada del 50%. Obsérvese que los valores de la ARL para la cusum FIR son válidos para el caso en que el proceso está fuera de control en el momento en que se reinician las cusums. Cuando el proceso está bajo control, el valor ventaja anticipada desciende rápidamente a cero. Por tanto, si el proceso está bajo control cuando la cusum se reinicializa pero más tarde se corre a una condición fuera de control, la ARL más apropiada para este caso deberá leerse de la columna (a) –es decir, la cusum sin la característica FIR.

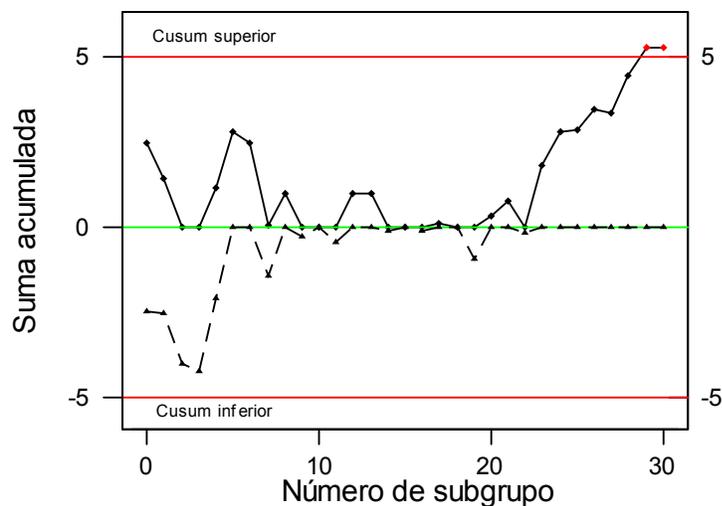


Figura 2-4 Gráfica cusum del status con Minitab para los datos de la tabla 2-1.

2.8 Una cusum para monitorear la variabilidad del proceso

También pueden construirse gráficas de control cusum para monitorear la variabilidad del proceso. Como anteriormente, sea x_i la medición del proceso que tiene una distribución normal con media o valor objetivo μ_0 y desviación estándar σ . El valor estandarizado de x_i es $y_i = (x_i - \mu_0) / \sigma$. Hawkins D.M, sugiere crear la nueva cantidad estandarizada

$$v_i = \frac{\sqrt{|y_i|} - 0.822}{0.349} \quad (9)$$

Hawkins sugiere que las v_i son más sensitivas a los corrimientos en la varianza que a los de la media. De hecho, el estadístico v_i es sensitivo a los corrimientos tanto de la media como de la varianza. Puesto que la distribución bajo control de v_i es aproximadamente $N(0,1)$, es posible establecer dos cusums unilaterales a escala estandarizada (i.e., la desviación estándar) como sigue.

La cusum a escala

$$S_i^+ = \text{máx}[0, v_i - k + S_{i-1}^+] \quad (10)$$

$$S_i^- = \text{máx}[0, -k - v_i + S_{i-1}^-] \quad (11)$$

donde $S_0^+ = S_0^- = 0$ (a menos que se use la característica FIR) y los valores de k y h se seleccionan como en la cusum para controlar la media del proceso.

La interpretación de la cusum a escala es similar a la interpretación de la cusum para la media. Si la desviación estándar del proceso se incrementa, los valores de S_i^+ se incrementarán y terminarán por exceder h , mientras que si la desviación estándar se decrementa, los valores de S_i^- se incrementarán y terminarán por exceder h .

Aun cuando podrían establecerse gráficas cusum del status separadas para la media y la varianza, Hawkins sugiere trazarlas en la misma gráfica. Si la cusum a escala envía una señal, se presumiría un cambio en la varianza, pero si ambas cusum envían una señal, se presumiría un corrimiento en la media.

2.9 El procedimiento de la máscara V

Un procedimiento alternativo al uso de una cusum tabular es el esquema de control de la máscara V propuesto por Barnard G.A. La máscara V se aplica a valores sucesivos del estadístico cusum

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{j=1}^i y_j \\ &= y_i + C_{i-1} \end{aligned}$$

donde y_i es la observación estandarizada $y_i = (x_i - \mu_0) / \sigma$. En la figura 2-5 se muestra una máscara V típica.

El procedimiento de decisión consiste en colocar la máscara V sobre la gráfica de control de suma acumulada con el punto O en el último valor de C_i y la línea OP paralela al eje horizontal. El proceso está bajo control si todas las sumas acumuladas anteriores, C_1, C_2, \dots, C_i , se localizan dentro de los dos brazos de la máscara V. Sin embargo, si cualquiera de las sumas acumuladas se localiza fuera de los brazos de la máscara, se considera que el proceso está fuera de control. En una aplicación real, la máscara V se aplicaría a cada nuevo punto de la gráfica cusum tan pronto como se graficara, y se supone que los brazos se extienden atrás hacia el origen. El

desempeño de la máscara V se determina por la distancia d y el ángulo θ que se muestra en la figura 2-5.

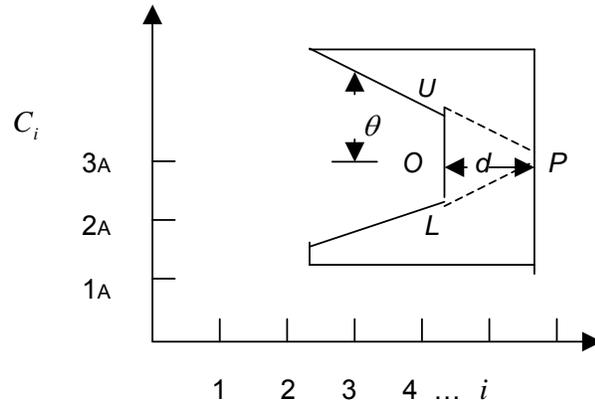


Figura 2.5 Máscara V típica.

La cusum tabular y el esquema de la máscara V son equivalentes si

$$k = A \tan \theta \quad (12)$$

y

$$h = Ad \tan(\theta) = dk \quad (13)$$

En estas dos ecuaciones, A es la distancia horizontal en la grafica de la máscara V entre puntos sucesivos en términos de la distancia unitaria de la escala vertical. Referirse a la figura 2-5. Por ejemplo, para construir una máscara V equivalente al esquema tabular cusum usado en el ejemplo 2-1, donde $k = \frac{1}{2}$ y $h = 5$, se seleccionaría $A = 1$ (por ejemplo), y después las ecuaciones 12 y 13 se resolverían como sigue:

$$k = A \tan \theta$$

$$\frac{1}{2} = (1) \tan \theta$$

o

$$\theta = 26.57^\circ$$

y

$$h = dk$$

$$5 = d \frac{1}{2}$$

o

$$d = 10$$

Es decir, la distancia d de la máscara V sería de 10 unidades horizontales de graficación, y la abertura angular de la máscara V sería 26.57° .

Un método para diseñar la máscara V; es decir, para seleccionar d y θ . Recomienda los parámetros de la máscara V como

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{2A}\right) \quad (14)$$

y

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2}\right) \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) \quad (15)$$

donde 2α es la mayor probabilidad permisible de una señal cuando la media del proceso está en el objetivo (una falsa alarma) y β es la probabilidad de no detectar un corrimiento de magnitud δ . Si β es pequeña, lo cual suele ser el caso, entonces

$$d \cong -2 \frac{\ln(\alpha)}{\delta} \quad (16)$$

Se hace una enfática recomendación al ingeniero de calidad para que no use el procedimiento de la máscara V. Algunas de las desventajas y problemas asociados con este esquema son los siguientes:

1. La máscara V es un esquema bilateral; no es muy útil en problemas de monitoreo de procesos unilaterales.
2. La característica de ventaja anticipada, que es muy útil en la práctica, no puede implementarse con la máscara V.
3. En ocasiones es difícil determinar hasta dónde deberán extenderse los brazos de la máscara V, lo cual dificulta la interpretación del usuario en la práctica.
4. Quizá el problema principal con la máscara V es la ambigüedad asociada con α y β .

En esencia, 2α no puede ser la probabilidad de una falsa alarma en cualquier muestra individual, ya que esta probabilidad cambia con el tiempo en la cusum, y 2α tampoco puede ser la probabilidad de obtener en última instancia una falsa alarma (esta probabilidad es, desde luego, 1). De hecho, 2α debe ser la proporción de observaciones en el largo plazo que resultan en falsas alarmas.

En la tabla 2-8 se presentan los valores de ARL_0 para un esquema de la máscara V utilizando el método de Johnson. Obsérvese que los valores reales de ARL_0 son aproximadamente cinco veces el valor deseado usado en el procedimiento de diseño. Los esquemas también serán mucho menos sensibles a los corrimientos en la media del proceso. Por consiguiente, el uso del esquema de la máscara V no es una buena idea.

Tabla 2.8 Valores reales de ARL_0 para un esquema de la máscara V diseñado utilizando el método de Johnson

| Corrimiento que debe detectarse, δ | Valores de α [valor deseado de $ARL_0 = 1/(2\alpha)$] | |
|---|---|-------------|
| | 0.00135 (370) | 0.001 (500) |
| 1.0 | 2350.6 | 3184.5 |
| 2.0 | 1804.5 | 2435.8 |
| 3.0 | 2194.8 | 2975.4 |

CAPITULO 3 GRÁFICA DE CONTROL DEL PROMEDIO MÓVIL PONDERADO EXPONENCIALMENTE

La gráfica de control del promedio móvil ponderado exponencialmente (o EWMA) también es una buena alternativa para la carta de control de Shewhart cuando el interés se encuentra en detectar corrimientos pequeños. El desempeño de la gráfica de control EWMA es aproximadamente equivalente al de la gráfica de control de suma acumulada y, en cierto modo, es más sencilla de establecer y operar. Como con la cusum, el EWMA se usa de manera típica con observaciones individuales y, por consiguiente, se discute primero este caso. Se representarán también los resultados para subgrupos racionales de tamaño $n > 1$.

3-1.1 La gráfica de control del promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA) para monitorear la media del proceso

La gráfica de control EWMA fue introducida por Roberts S. W. El promedio móvil ponderado exponencialmente se define como

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \quad (1)$$

donde $0 < \lambda \leq 1$ es una constante y el valor inicial (requerido con la primera muestra en $i = 1$) es el objetivo del proceso, de tal modo que

$$z_0 = \mu_0$$

En ocasiones se usa el promedio de datos preliminares como valor inicial del EWMA, de tal modo que $z_0 = \bar{x}$.

Para demostrar que el EWMA z_i es un promedio ponderado de todas las medias muestrales anteriores, puede sustituirse con z_{i-1} en el segundo miembro de la ecuación 1 para obtener

$$\begin{aligned} z_i &= \lambda x_i + (1 - \lambda)[\lambda x_{i-1} + (1 - \lambda)z_{i-2}] \\ &= \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 z_{i-2} \end{aligned}$$

Al continuar las sustituciones recursivamente para z_{i-j} , $j = 2, 3, \dots, i$, se obtiene

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0 \quad (2)$$

Las ponderaciones $\lambda(1 - \lambda)^j$ se decrementan geoméricamente con la antigüedad de la media muestral. Además, la suma de las ponderaciones es la unidad, ya que

$$\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j = \lambda \left[\frac{1 - (1 - \lambda)^i}{1 - (1 - \lambda)} \right] = 1 - (1 - \lambda)^i$$

Puesto que el EWMA puede considerarse como un promedio ponderado de todas las observaciones pasadas y actuales, es en alto grado insensible al supuesto de normalidad. Por lo tanto, es una gráfica de control ideal para usarse con observaciones individuales.

Si las observaciones x_i son variables aleatorias independientes con varianza σ^2 , entonces la varianza de z_i es

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad (3)$$

Por lo tanto, la gráfica de control EWMA se construirá graficando z_i contra el número de muestra i (o el tiempo). La línea central y los límites de control para la gráfica de control EWMA son los siguientes:

La gráfica de control EWMA

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad (4)$$

$$\text{Línea central} = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad (5)$$

En las ecuaciones 4 y 5, el factor L es la anchura de los límites de control. Se discutirá brevemente la elección de los parámetros L y λ .

Obsérvese que el término $[1 - (1-\lambda)^{2i}]$ en las ecuaciones 4 y 5 tiende a la unidad cuando i se hace grande. Esto significa que después de que la gráfica de control EWMA ha estado operando durante varios periodos de tiempo, los límites de control tenderán a valores de estado estable o régimen permanente dados por

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (6)$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (7)$$

Sin embargo, se recomienda enfáticamente usar los límites de control exactos en las ecuaciones 4 y 5 para valores pequeños de i . Con esto se mejorará de manera significativa el desempeño de la gráfica de control para detectar un proceso fuera del objetivo inmediatamente después de que se ha iniciado el EWMA.

EJEMPLO 3.1

Se aplicará la gráfica de control EWMA con $\lambda = 0.10$ y $L = 2.7$ a los datos de la tabla 2-1. Recuérdese que el valor objetivo de la media es $\mu_0 = 10$ y que la desviación estándar es $\sigma = 1$. En la tabla 3-1 se resumen los cálculos de la gráfica de control EWMA y la gráfica de control se muestra en la figura 3-1.

Para ilustrar los cálculos, considérese la primera observación, $x_1 = 9.45$. El primer valor del EWMA es

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)z_0 \\ &= 0.1(9.45) + 0.9(10) \\ &= 9.945 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z_1 = 9.945$ es el primer valor graficado en la gráfica de control de la figura 3-1. El segundo valor del EWMA es

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda x_2 + (1 - \lambda)z_1 \\ &= 0.1(7.99) + 0.9(9.945) \\ &= 9.7495 \end{aligned}$$

Los demás valores del estadístico EWMA se calculan de manera similar.

Los límites de control de la figura 3-1 se encuentran utilizando las ecuaciones 4 y 5. Para el periodo $i = 1$,

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \\ &= 10 + 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2 - 0.1)} [1 - (1 - 0.1)^{2(1)}]} \\ &= 10.27 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \\ &= 10 - 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2 - 0.1)} [1 - (1 - 0.1)^{2(1)}]} \\ &= 9.73 \end{aligned}$$

Para el periodo 2, los límites son

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \\ &= 10 + 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2 - 0.1)} [1 - (1 - 0.1)^{2(2)}]} \\ &= 10.36 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \\
 &= 10 - 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)} [1 - (1-0.1)^{2(2)}]} \\
 &= 9.64
 \end{aligned}$$

Obsérvese por la figura 3-1 que la anchura de los límites de control se incrementa conforme i se incrementa de $i=1,2,\dots$, hasta que se estabiliza en los valores de régimen permanente o estable dados por las ecuaciones 6 y 7:

$$\begin{aligned}
 UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \\
 &= 10 + 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} \\
 &= 10.62
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \\
 &= 10 - 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} \\
 &= 9.38
 \end{aligned}$$

La gráfica de control EWMA de la figura 3-1 envía una señal en la observación 28, por lo que se concluirá que el proceso está fuera de control.

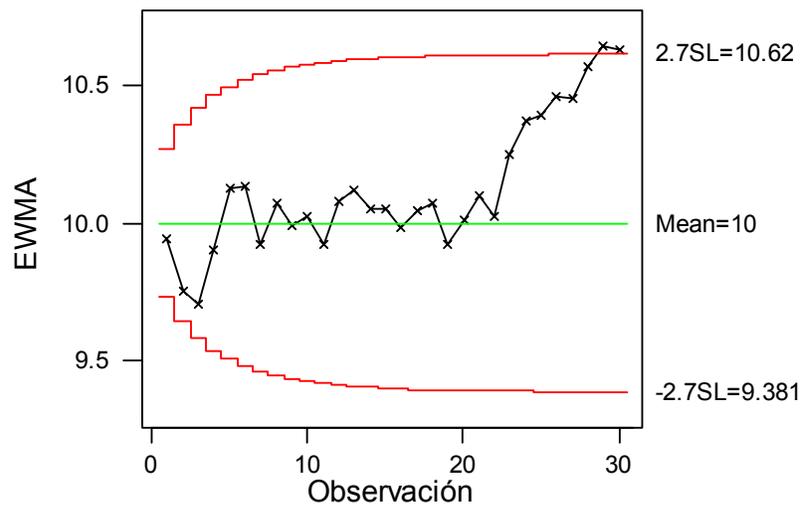


Figura 3-1 Gráfica de control EWMA para el ejemplo 3-1.

Tabla 3-1 Cálculos del EWMA

| Subgrupo, i | Fuera de los límites x_i | EWMA, z_i |
|---------------|----------------------------|-------------|
| 1 | 9.45 | 9.945 |
| 2 | 7.99 | 9.7495 |
| 3 | 9.29 | 9.7036 |
| 4 | 11.66 | 9.8992 |
| 5 | 12.16 | 10.1253 |
| 6 | 10.18 | 10.1307 |
| 7 | 8.04 | 9.9217 |
| 8 | 11.46 | 10.0755 |
| 9 | 9.2 | 9.9880 |
| 10 | 10.34 | 10.0232 |
| 11 | 9.03 | 9.9238 |
| 12 | 11.47 | 10.0785 |
| 13 | 10.51 | 10.1216 |
| 14 | 9.4 | 10.0495 |
| 15 | 10.08 | 10.0525 |
| 16 | 9.37 | 9.9843 |
| 17 | 10.62 | 10.0478 |
| 18 | 10.31 | 10.0740 |
| 19 | 8.52 | 9.9186 |
| 20 | 10.84 | 10.0108 |
| 21 | 10.9 | 10.0997 |
| 22 | 9.33 | 10.0227 |
| 23 | 12.29 | 10.2495 |
| 24 | 11.5 | 10.3745 |
| 25 | 10.6 | 10.3971 |
| 26 | 11.08 | 10.4654 |
| 27 | 10.38 | 10.4568 |
| 28 | 11.62 | 10.5731 |
| 29 | 11.31 | 10.6468 |
| 30 | 10.52 | 10.6341 |

3-1.2 Diseño de una gráfica de control EWMA

La gráfica de control EWMA es muy efectiva contra los corrimientos pequeños en el proceso. Los parámetros de diseño de la gráfica son el múltiplo de sigma usado en los límites de control (L) y el valor de λ . Es posible elegir estos parámetros para obtener un desempeño de la ARL de la gráfica de control EWMA muy cercano al desempeño de la ARL de la cusum para detectar corrimientos pequeños.

Se han realizado diversos estudios teóricos de las propiedades de la longitud promedio de la corrida de la gráfica de control EWMA. En la tabla 3-2 se muestra el desempeño de la longitud promedio de la corrida para varios esquemas de control EWMA. El procedimiento de diseño óptimo consistiría en especificar las longitudes promedio de la corrida bajo control y fuera de control, y la magnitud del corrimiento en el proceso que se anticipa, para después seleccionar la combinación de λ y L que proporcione el desempeño de la ARL deseado.

En general, hemos encontrado que los valores de λ en el intervalo $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$ funcionan bien en la practica, siendo $\lambda = 0.05$, $\lambda = 0.10$ y $\lambda = 0.20$ elecciones

populares. Una buena regla empírica es usar valores pequeños de λ para detectar los corrimientos más pequeños. Hemos encontrado también que $L = 3$ (los límites tres sigma usuales) funcionan razonablemente bien, en particular con el valor más grande de λ , aunque cuando λ es pequeña -por ejemplo, $\lambda \leq 0.1$ -, se consigue una ventaja al reducir la anchura de los límites utilizando un valor de L entre 2.6 y 2.8. Recuérdese que en el ejemplo 3-1 se usaron $\lambda = 0.1$ y $L = 2.7$. Se esperaría que esta elección de los parámetros resultara en una ARL bajo control de $ARL_0 \cong 500$ y en una ARL para detectar un corrimiento de una desviación estándar en la media de $ARL_1 \cong 10.3$. Por tanto, este diseño es el equivalente aproximado de la cusum con

$$h = 5 \text{ y } k = \frac{1}{2}.$$

Tabla 3-2 Longitudes promedio de la corrida para varios esquemas de control EWMA

| Corrimiento en la media (múltiplo de σ) | $L = 3.054$ $\lambda = 0.40$ | 2.998 0.25 | 2.962 0.20 | 2.814 0.10 | 2.615 0.05 |
|--|---------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 |
| 0.25 | 224 | 170 | 150 | 106 | 84.1 |
| 0.50 | 71.2 | 48.2 | 41.8 | 31.3 | 28.8 |
| 0.75 | 28.4 | 20.1 | 18.2 | 15.9 | 16.4 |
| 1.00 | 14.3 | 11.1 | 10.5 | 10.3 | 11.4 |
| 1.50 | 5.9 | 5.5 | 5.5 | 6.1 | 7.1 |
| 2.00 | 3.5 | 3.6 | 3.7 | 4.4 | 5.2 |
| 2.50 | 2.5 | 2.7 | 2.9 | 3.4 | 4.2 |
| 3.00 | 2 | 2.3 | 2.4 | 2.9 | 3.5 |
| 4.00 | 1.4 | 1.7 | 1.9 | 2.2 | 2.7 |

Se sugiere escoger λ de tal modo que la ponderación dada a las observaciones actuales y anteriores coincida en la medida de lo posible con las ponderaciones dadas a estas observaciones en una gráfica de Shewhart con las reglas de Western Electric. Se llega así a un valor recomendado de $\lambda = 0.4$. Si $L = 3.054$, entonces la tabla 3-2 indica que esta gráfica tendría el valor $ARL_0 \cong 500$ y, para detectar un corrimiento de una desviación estándar en la media del proceso, $ARL_1 \cong 14.3$.

Al igual que la cusum, el EWMA tiene un buen desempeño contra los corrimientos pequeños pero no reacciona con tanta rapidez como la gráfica de Shewhart a los corrimientos grandes. Sin embargo, el EWMA con frecuencia es superior a la cusum para los corrimientos grandes, en particular si $\lambda > 0.10$. Una buena manera de mejorar adicionalmente la sensibilidad del procedimiento de control a los corrimientos grandes sin sacrificar la habilidad para detectar los corrimientos pequeños es combinar la gráfica de Shewhart con el EWMA. Estos procedimientos de control combinados Shewhart-EWMA son efectivos tanto contra los corrimientos pequeños como contra los grandes. Al usar estos esquemas, hemos encontrado útil usar límites con una anchura un poco mayor que lo usual en la gráfica de Shewhart (por ejemplo, 3.25 sigma, o incluso 3.5 sigma).

3-1.3 Subgrupos racionales

La carta de control EWMA suele usarse con mediciones individuales. Sin embargo, si se toman subgrupos racionales de tamaño $n > 1$, entonces simplemente se sustituye

x_i con \bar{x} y σ con $\sigma_x = \sigma/\sqrt{n}$ en las ecuaciones anteriores.

3-1.4 El EWMA como predictor del nivel del proceso

Aun cuando el EWMA se ha discutido sobre todo como una herramienta estadística para monitorear procesos, en realidad tiene una interpretación mucho más amplia. Desde el punto de vista del SPC, el EWMA es un equivalente aproximado de la cusum en cuanto a su habilidad para monitorear un proceso y detectar la presencia de causas asignables que producen un corrimiento en el proceso. Sin embargo, el EWMA proporciona un pronóstico de dónde se encontrará la media del proceso en el siguiente periodo de tiempo. Es decir, z_i es en realidad un pronóstico del valor de la media del proceso μ en el tiempo $i+1$. Por tanto, el EWMA podría usarse como base para un algoritmo dinámico de control de procesos. Los límites de control de la gráfica de control EWMA pueden usarse para enviar una señal cuando sea necesario hacer un ajuste, y la diferencia entre el objetivo y el pronóstico de la media μ_{i+1} puede usarse para determinar la magnitud del ajuste que se requiere.

El EWMA puede modificarse a fin de aumentar su habilidad para pronosticar la media. Suponer que la media del proceso tiende o se desalinea del objetivo de manera regular. El desempeño del EWMA para hacer pronósticos puede mejorarse en este caso. Primero, se observa que el EWMA usual puede escribirse como

$$\begin{aligned} z_i &= \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \\ &= z_{i-1} + \lambda(x_i - z_{i-1}) \end{aligned}$$

y si z_{i-1} se considera como un pronóstico de la media del proceso en el periodo i , $x_i - z_{i-1}$ puede considerarse como el error e_i del pronóstico para el periodo i . Por lo tanto,

$$z_i = z_{i-1} + \lambda e_i$$

Por lo tanto, el EWMA para el periodo i es igual al EWMA para el periodo $i-1$ más una fracción λ del error del pronóstico de la media en el periodo i . Se agrega ahora un segundo término en esta última ecuación para obtener

$$z_i = z_{i-1} + \lambda_1 e_i + \lambda_2 \sum_{j=1}^i e_j$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes que ponderan el error en el tiempo i y la suma de los errores acumulados hasta el tiempo i . Si se hace que $\nabla e_i = e_i - e_{i-1}$ sea la primera diferencia de los errores, entonces puede llegarse a la modificación final del EWMA:

$$z_i = z_{i-1} + \lambda_1 e_i + \lambda_2 \sum_{j=1}^i e_j + \lambda_3 \nabla e_i$$

Obsérvese que en esta ecuación empírica de control el EWMA en el periodo i (que es el pronóstico de la media del proceso en el periodo $i + 1$) es igual a la estimación actual de la media (z_{i-1} es la estimación de μ_i), más un término proporcional del error, más un término relacionado con la suma de los errores, más un término relacionado con la primera diferencia de los errores. Estos tres términos pueden considerarse como ajustes proporcionales, integrales y diferenciales. Los parámetros λ_1, λ_2 y λ_3 se elegirían para obtener el mejor desempeño de pronóstico.

Debido a que el estadístico EWMA z_i puede considerarse como un pronóstico de la media del proceso en el tiempo $i + 1$, el estadístico EWMA con frecuencia se grafica un periodo de tiempo adelante. Es decir, en realidad z_i se grafica en el periodo de tiempo $i + 1$ en la gráfica de control. Esto permite que el analista perciba visualmente cuánta diferencia existe entre la observación actual y la estimación de la media actual del proceso. En aplicaciones del control estadístico de procesos donde la media "es errática" con el tiempo, este enfoque resulta particularmente atractivo.

3-2 LA GRAFICA DE CONTROL DEL PROMEDIO MOVIL

En la carta EWMA se utiliza un promedio ponderado como el estadístico de la gráfica. Ocasionalmente, puede ser de interés otro tipo de gráfica de control ponderada con el tiempo basada en un promedio móvil no ponderado simple.

Suponer que se han colectado observaciones individuales, y sea que x_1, x_2, \dots , denoten estas observaciones. El promedio móvil de extensión w en el tiempo i se define como

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-w+1}}{w} \quad (8)$$

Es decir, en el periodo de tiempo i , se saca la observación más antigua del conjunto del promedio móvil y se agrega al conjunto la más reciente. La varianza del promedio móvil M_i es

$$V(M_i) = \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^i V(x_j) = \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^i \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{w} \quad (9)$$

Por lo tanto, si μ_0 denota el valor objetivo de la media usada como línea central de la gráfica de control, entonces los límites de control tres sigma para M_i son

$$UCL = \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} \quad (10)$$

y

$$LCL = \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} \quad (11)$$

El procedimiento de control consistiría en calcular el nuevo promedio móvil M_i cada vez que se disponga de nueva observación x_i , graficar M_i en una gráfica de control con límites de control superior e inferior dados por las ecuaciones anteriores, y concluir que el proceso está fuera de control si M_i excede los límites de control. En general, la magnitud del corrimiento de interés y w seguirán una relación inversa; se contaría con una protección más efectiva para los corrimientos más pequeños utilizando promedios móviles de extensión más grande, a costa de la respuesta rápida a los corrimientos grandes.

EJEMPLO 3.2

Se establecerá una gráfica de control del promedio móvil para los datos de la tabla 2-1, utilizando $w = 5$. En la tabla 3-3 se muestran las observaciones x_i para los periodos $1 \leq i \leq 30$. El estadístico graficado en la gráfica de control del promedio móvil será

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-4}}{5}$$

para los periodos $i \geq 5$. Para los periodos de tiempo $i < 5$, se grafica el promedio de las observaciones para los periodos 1, 2, ..., i . En la tabla 3-3 se muestran los valores de estos promedios móviles.

Los límites de control para la gráfica de control del promedio móvil pueden obtenerse con facilidad con las ecuaciones 10 y 11. Puesto que se tiene $\sigma = 1.0$, entonces

$$UCL = \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} = 10 + \frac{3(1.0)}{\sqrt{5}} = 11.34$$

y

$$LCL = \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} = 10 - \frac{3(1.0)}{\sqrt{5}} = 8.66$$

Los límites de control para M_i se aplican a los periodos $i \geq 5$. Para los periodos $0 < i < 5$, los límites de control están dados por $\mu_0 \pm 3\sigma/\sqrt{i}$. Un procedimiento alternativo que evita el uso de límites de control especiales para los periodos $i < w$ consiste en emplear una carta de Shewhart ordinaria hasta que se hayan obtenido por lo menos w medias muestrales.

En la figura 3-2 se muestra la gráfica de control del promedio móvil. Ninguno de los puntos excede los límites de control. Obsérvese que para los periodos iniciales $i < w$ los límites de control tienen una anchura mayor que su valor final de régimen permanente o estado estable. Los promedios móviles que están separados menos de w periodos presentan una correlación alta, lo que con frecuencia complica la interpretación de patrones en la gráfica de control.

Tabla 3-5 Gráfica del promedio móvil

| Observación, i | x_i | M_i |
|------------------|-------|--------|
| 1 | 9.45 | 9.45 |
| 2 | 7.99 | 8.72 |
| 3 | 9.29 | 8.91 |
| 4 | 11.66 | 9.5975 |
| 5 | 12.16 | 10.11 |
| 6 | 10.18 | 10.256 |
| 7 | 8.04 | 10.266 |
| 8 | 11.46 | 10.7 |
| 9 | 9.2 | 10.208 |
| 10 | 10.34 | 9.844 |
| 11 | 9.03 | 9.614 |
| 12 | 11.47 | 10.3 |
| 13 | 10.51 | 10.11 |
| 14 | 9.4 | 10.15 |
| 15 | 10.08 | 10.098 |
| 16 | 9.37 | 10.166 |
| 17 | 10.62 | 9.996 |
| 18 | 10.31 | 9.956 |
| 19 | 8.52 | 9.78 |
| 20 | 10.84 | 9.932 |
| 21 | 10.9 | 10.238 |
| 22 | 9.33 | 9.98 |
| 23 | 12.29 | 10.376 |
| 24 | 11.5 | 10.972 |
| 25 | 10.6 | 10.924 |
| 26 | 11.08 | 10.96 |
| 27 | 10.38 | 11.17 |
| 28 | 11.62 | 11.036 |
| 29 | 11.31 | 10.998 |
| 30 | 10.52 | 10.982 |

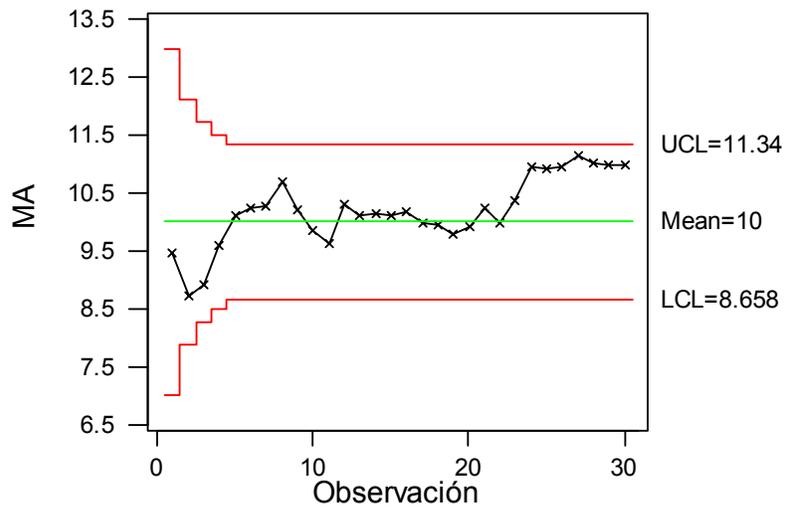


Figura 3-2 Gráfica de control del promedio móvil con $w=5$

EJEMPLO DE APLICACION

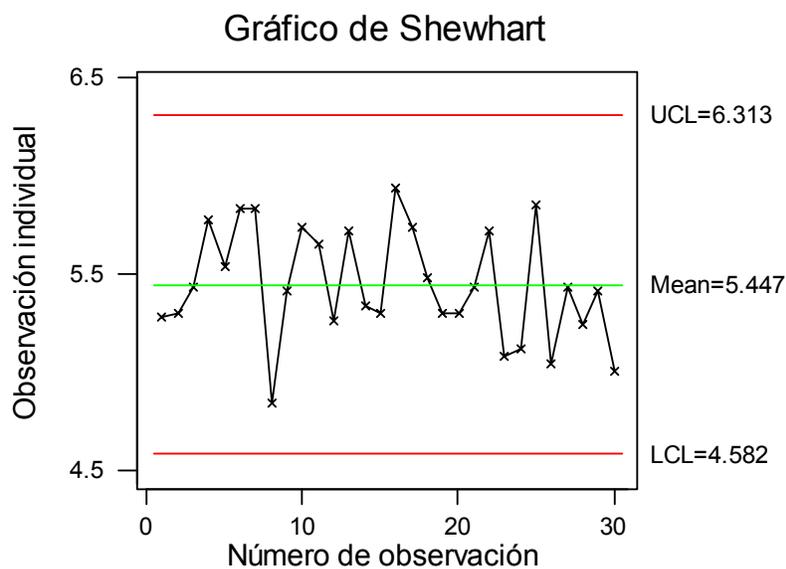
Ejemplo 1. A continuación se consideran 30 series del diámetro de una pieza cuyos datos se muestran en la tabla siguiente.

Tabla 1. Mediciones del diámetro de una pieza.

| Número de serie | x | Número de serie | x |
|-----------------|------|-----------------|------|
| 1 | 5.28 | 16 | 5.94 |
| 2 | 5.30 | 17 | 5.74 |
| 3 | 5.44 | 18 | 5.48 |
| 4 | 5.78 | 19 | 5.30 |
| 5 | 5.54 | 20 | 5.30 |
| 6 | 5.84 | 21 | 5.44 |
| 7 | 5.84 | 22 | 5.72 |
| 8 | 4.84 | 23 | 5.08 |
| 9 | 5.42 | 24 | 5.12 |
| 10 | 5.74 | 25 | 5.86 |
| 11 | 5.66 | 26 | 5.04 |
| 12 | 5.26 | 27 | 5.44 |
| 13 | 5.72 | 28 | 5.24 |
| 14 | 5.34 | 29 | 5.42 |
| 15 | 5.30 | 30 | 5.00 |

El diámetro objetivo de este proceso es $\mu_0 = 5.43$ y la desviación estándar es de aproximadamente $\sigma = 0.66$.

El objetivo de este ejercicio de aplicación es realizar un estudio comparativo de gráficos de control (gráfico de Shewhart para mediciones individuales, CUSUM y EWMA).



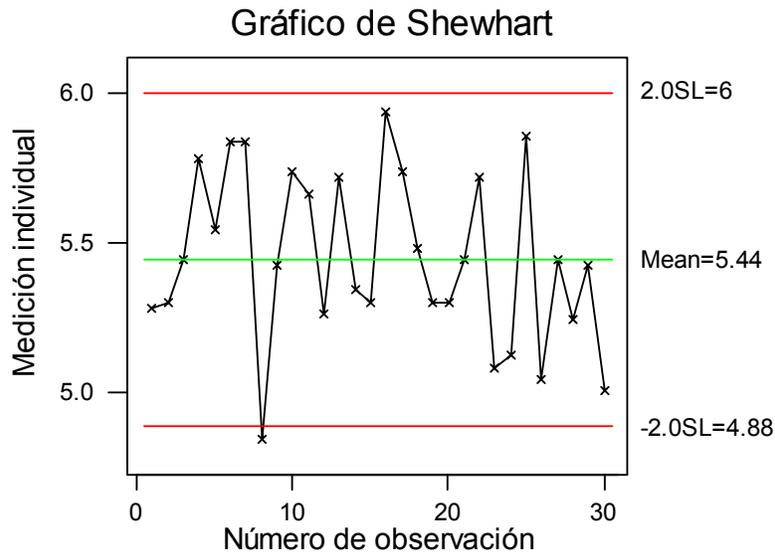


Figura 1B.

La Gráfica de Control de Shewhart para mediciones individuales (Fig. 1A) no presenta ninguna señal de alarma, pero si disminuimos en una unidad el intervalo de decisión, se observa ya una señal de alarma (Fig. 1B).

Ahora, construimos una cusum tabular para la media de este proceso.

Se diseña la cusum para detectar con rapidez un corrimiento de aproximadamente 1.0σ en la media del proceso. Por lo tanto, la magnitud del corrimiento que quiere detectarse es $1.0\sigma = 1.0(0.66) = 0.66$ y el valor fuera de control de la media del proceso es $\mu_1 = 5.43 + 0.66 = 6.09$.

Usaremos una cusum tabular $K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{|6.09 - 5.43|}{2} = 0.33$ y $H = 5\sigma = 3.3$.

En Minitab se utiliza $h = 5$ y $k = \frac{1}{2}$, puesto que $H = h\sigma$ y $K = k\sigma$.

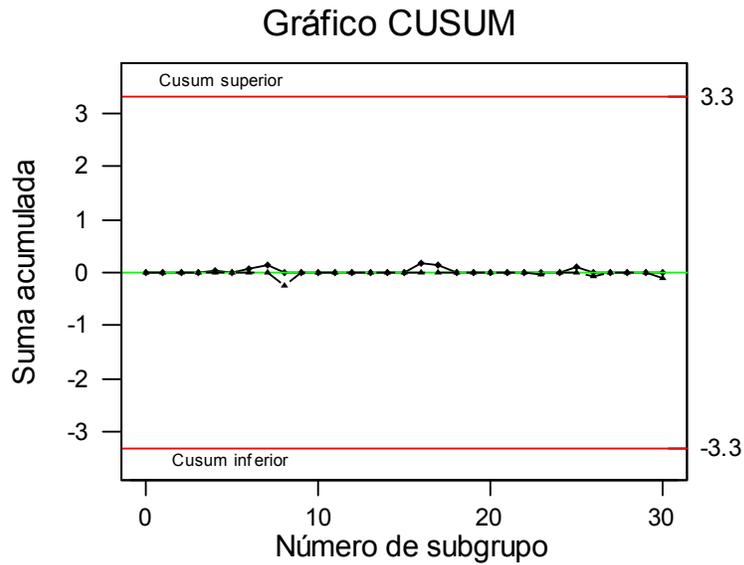


Figura 2. No se detecta ninguna anomalía.

Aplicamos la carta de control EWMA con $\lambda = 0.2$ y $L = 3$

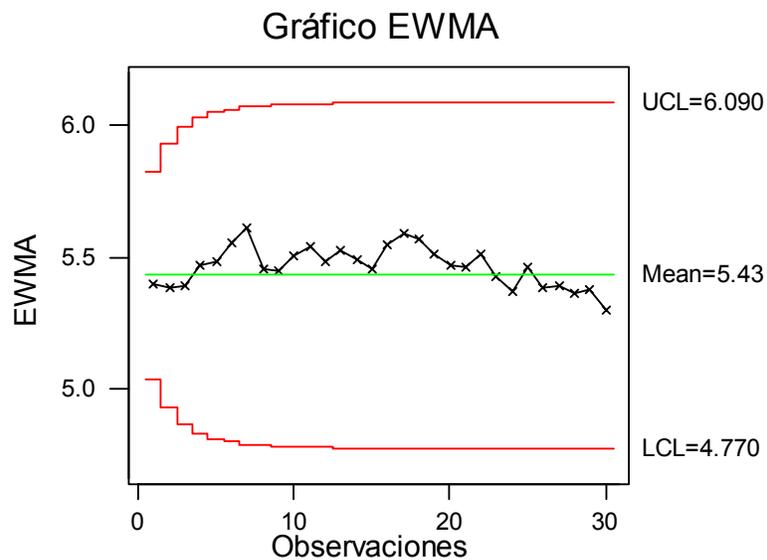


Figura 3. Nuevamente no se detecta ninguna anomalía.

Ejemplo 2. Los anillos para pistones de un motor de automóvil se producen mediante un proceso de fundición. Quiere establecerse el control estadístico del diámetro interior de los anillos fabricados con este proceso. En la tabla 2 se muestran los datos de la medición del diámetro interior de 40 muestras.

Tabla 2. Mediciones del diámetro interior (mm) de anillos fundidos para pistones.

| Número de muestra | x | Número de muestra | x |
|-------------------|--------|-------------------|--------|
| 1 | 74.010 | 21 | 74.000 |
| 2 | 74.001 | 22 | 74.002 |
| 3 | 74.008 | 23 | 74.002 |
| 4 | 74.003 | 24 | 74.005 |
| 5 | 74.003 | 25 | 73.998 |
| 6 | 73.996 | 26 | 74.009 |
| 7 | 74.000 | 27 | 74.002 |
| 8 | 73.997 | 28 | 73.992 |
| 9 | 74.004 | 29 | 74.004 |
| 10 | 73.998 | 30 | 73.997 |
| 11 | 73.994 | 31 | 74.007 |
| 12 | 74.001 | 32 | 74.006 |
| 13 | 73.998 | 33 | 73.998 |
| 14 | 73.990 | 34 | 74.011 |
| 15 | 74.006 | 35 | 74.013 |
| 16 | 73.997 | 36 | 74.004 |
| 17 | 74.001 | 37 | 74.017 |
| 18 | 74.007 | 38 | 74.020 |
| 19 | 73.998 | 39 | 74.023 |
| 20 | 74.009 | 40 | 74.015 |

El valor objetivo del diámetro interior de los anillos es 74.001 y la desviación estándar del proceso es de aproximadamente $\sigma = 0.01$.

En la gráfica de Shewhart (Fig. 4A) no se detecta ningún desajuste, pero si nuevamente disminuimos el intervalo de decisión en una unidad ya se observa una señal de alarma (Fig. 4B).

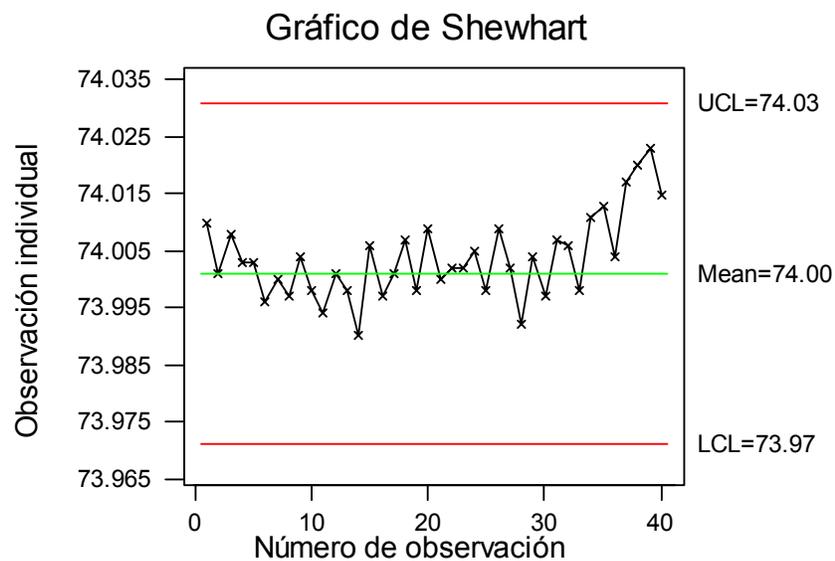


Figura 4A.



Figura 4B.

Cusum tabular para la media del proceso.

Se supone que la magnitud del corrimiento que quiere detectarse es $1.0\sigma = 1.0(0.01) = 0.01$. Por lo tanto, el valor fuera de control de la media del proceso es $\mu_1 = (74.001+0.01) = 74.011$. Se usará una cusum tabular con $K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} =$

$$\frac{|74.011 - 74.001|}{2} = 0.005 \text{ y } H = 5\sigma = 0.05.$$

En el gráfico CUSUM se observa una señal de alarma, además indica (por la cusum del lado superior) que el proceso está fuera de control en el número de muestra 39 (Fig. 5).

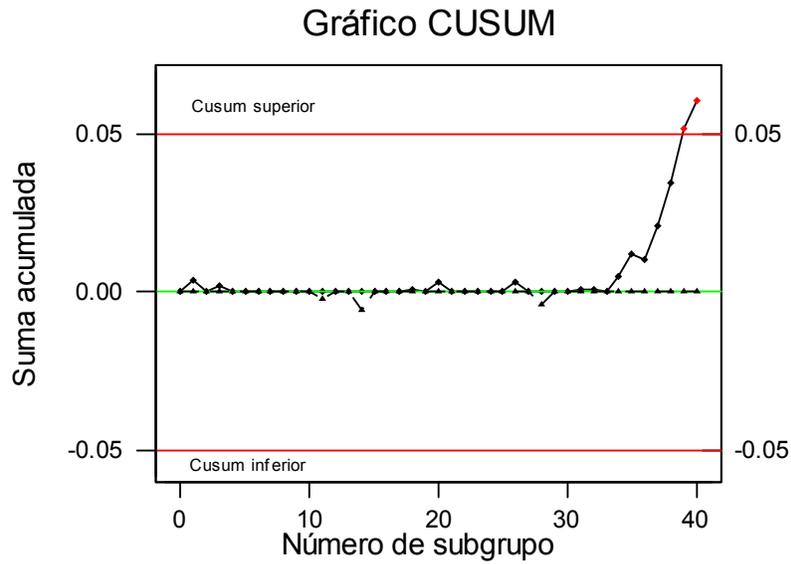


Figura 5.

Finalmente obtenemos la carta de control EWMA con $\lambda = 0.1$ y $L = 2.7$.

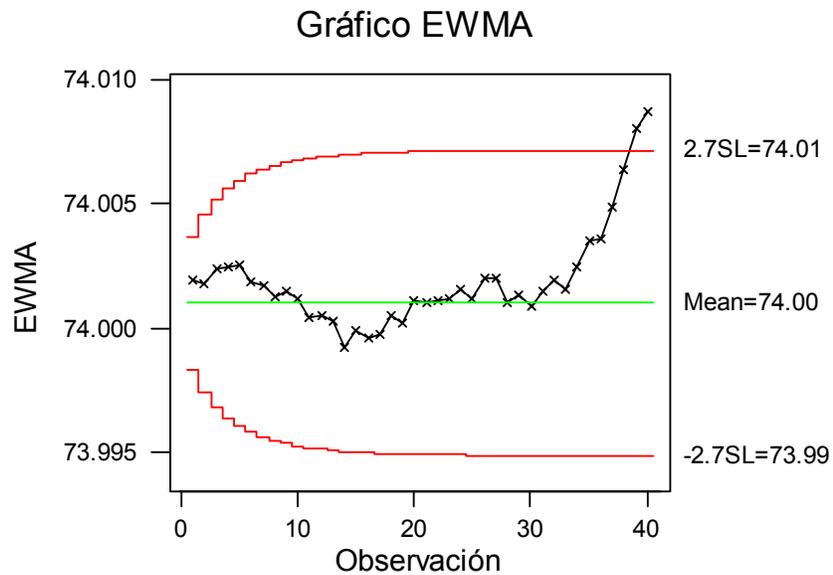


Figura 6.

La carta de control EWMA (Fig. 6) también envía una señal de alarma en la observación 39, por lo que se concluye que el proceso está fuera de control.

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

El procedimiento óptimo pasa por integrar los métodos de análisis de la calidad de un proceso de fabricación, desde las iniciales etapas del proyecto y diseño de los diversos componentes y equipos.

Se ha presentado un caso real (ejemplo 1), en el cual el gráfico de Shewhart detecta un desajuste en la media de un proceso, desajuste que no fue advertido ni por el gráfico CUSUM ni por EWMA.

Los cambios en la media no los detecta el gráfico de Shewhart, pero si el EWMA y el Cusum. Además el gráfico Cusum permite estimar el instante y la magnitud del cambio.

En general, no existe un gráfico que tenga la propiedad de óptimo para la detección de desajustes de un proceso de fabricación.

Por lo tanto, podemos sugerir que la forma más eficaz de realizar el control de un proceso consiste en la utilización combinada de los métodos Shewhart, CUSUM y EWMA.

BIBLIOGRAFIA

Métodos de control de calidad
Harrison M. Wadsworth, JR.
Kenneth S. Stephens
A. Blanton Godfrey
Primera edición, 2005
Compañía Editorial continental

Control estadístico de la calidad
Douglas C. Montgomery
Tercera edición, 2005
Limusa Wiley

Herramientas estadísticas básicas para el mejoramiento de la calidad
Kume, Hitoshi
Primera edición, 2002
Editorial Norma

Control continuo del proceso y mejoras a la habilidad del proceso
Manual Ford Motor Company